



ISSN 2222-0631
41' 2015

ВІСНИК

Національного технічного університету
«ХПІ»

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 41 (1150) 2015

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2015

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ». – 2015. – № 41 (1150). – 151 с.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Мова статей – українська, російська .

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).

Координаційна рада:

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);

К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);

А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;

Є. Є. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. ДМИТРИСНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;

В. В. СПІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;

П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;

С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.; О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;

В. І. НІКОЛАЄНКО, канд. іст. наук, проф.; П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.;

В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.;

В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.; Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.;

Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.

Члени редколегії: Ю. В. Гандель, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук,

проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.;

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.;

О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.;

О. М. Шелковий, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.

У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ»,серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 9 від 30 жовтня 2015 р.

В. В. БОЖКО**ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ НАПРУГИ ТА ЇЇ РЕГУЛЮВАННЯ НА СТРУМОПРИЙМАЧАХ ЕЛЕКТРОРУХОМОГО СКЛАДУ ЗАЛІЗНИЦЬ УКРАЇНИ ЗА ДОПОМОГОЮ ШІМ РЕГУЛЮВАНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ**

Запропоновані сучасні підходи щодо модернізації системи стабілізації напруги на струмоприймачах електрорухомого складу постійного струму напруги 3 кВ, що рухається по ділянці між тяговими підстанціями. Описана спрощена структура тягового електропостачання. Запропоновано алгоритм вирішення задачі стабілізації напруги на струмоприймачі електрорухомого складу, який реалізовано на мові MATLAB. На MATLAB-моделі перевірено можливість реалізації запропонованого алгоритму щодо стабілізації заданого рівня напруги на струмоприймачі електрорухомого складу і приведені отримані осцилограми. Запропоновано напрямок вдосконалення системи тягового електропостачання залізниць постійного струму напруги 3 кВ за рахунок використання широтно-імпульсно регульованих перетворювальних агрегатів в якості активного фільтра, що дозволяє зменшити масу індуктивності вихідного фільтра тягової підстанції і зменшити гармонійні складові як вихідній напрузі так і напрузі живильної мережі.

Ключові слова: контактна мережа, тягова підстанція, активна фільтрація, регулювання напруги.

Вступ. Зі збільшенням швидкостей руху потягів на залізницях України, збільшуються і вимоги до тягового електропостачання [1 – 3]. Крім того, останні тенденції руху у європейському напрямку спонукають на вирішення проблем інтеперабельності та дотримання європейських норм та стандартів щодо якості електричної енергії. В Європі показники якості електричної енергії регламентує стандарт EN50160, рівень електромагнітної сумісності встановлюють EN 61000-2-2 і EN 61000-2-12. На залізницях основними генераторами перешкод в електромережах є тягові підстанції (ТП), що живлять електрорухомий склад (ЕРС), отже і особливої уваги необхідно приділяти саме ним [4 – 5]. Проблема складається в тому, що більша частина підстанцій була спроектована ще минулого століття і за інших вимог до якості електроенергії. Таким чином, на сьогоднішній день, до ТП залізниць постійного струму напруги 3 кВ, необхідно пред'являти окрім жорстких вимог до забезпечення електромагнітної сумісності з живлячою мережею ще і забезпечення оптимального рівня пульсацій вихідної напруги, що передбачає використання перетворювальних агрегатів (ПА), які реалізовані за схемою не нижчою за 12-ти пульсну [2]. Однак сучасні 12-пульсні випрямлячі недостатньо повно вирішують задачі стосовно регулювання рівня напруги на тягових шинах підстанції з метою стабілізації її на струмоприймачах електрорухомого складу. Для більш ефективного використання тягових двигунів ЕРС необхідно забезпечувати номінальну стабільну напругу в контактній мережі на рівні 3 кВ, оскільки при цьому забезпечуються розрахункові величини потужності, що споживається, і мінімальні втрати енергії в системі електричної тяги [6].

Аналіз останніх досліджень. Останнім часом на електрифікованих залізницях постійного струму впроваджуються сучасні технічні засоби тягового електропостачання на базі керованих перетворювачів [2 – 3, 7]. Причиною виникнення гармонійних складових у вихідній напрузі перетворювальних агрегатів тягових підстанцій постійного струму є фазна несиметрія напруги живлячої мережі, скривлення її форми, що обумовлено нелінійними навантаженнями, наприклад, іншими перетворювачами. Що стосується керованого електропостачання, то на залізницях країн СНД використовується устаткування, яке розроблено ще в минулому столітті: тягове трансформаторне устаткування з безконтактним автоматичним 20% діапазоном регулювання випрямленої напруги тягових підстанцій (трансформатори ТДПУ–20000/10 (35), ТДП–16000/10 (35), ТРДП–16000/10 (35), реактори РТДП–6300/10 (35), шафи автоматичного регулювання напруги типу ШАУН) [8].

При використанні відомих пристроїв для стабілізації напруги [9, 10] важко забезпечити:

- генерацію ємнісної реактивної потужності, компенсуючої індуктивну реактивну потужність 12-пульсного діодного випрямляча, з метою доведення коефіцієнта потужності ПА до рекомендованих МЕК норм, а це не менше 0,98, у всьому діапазоні робочих навантажень;
 - усунення із спектра гармонійних складових випрямленої вихідної напруги 12-пульсних діодних випрямлячів низькочастотних *неканонічних гармонік*, включаючи 6-ту гармоніку, і тим самим реалізувати перехід на підстанціях до порівняно простих вихідних одноланкових згладжувальних *LC* – фільтрів;
 - усунення із спектра гармонійних складових споживаємого ПА вхідного струму високочастотних *канонічних і неканонічних гармонік* і, тим самим, зведення до мінімуму негативного впливу ПА на системи електропостачання нетягових споживачів і власних потреб ТП;
 - обмеження аварійних струмів ПА при коротких замиканнях в тяговій мережі на рівні 1,2÷1,3 від максимального допустимого робочого струму агрегату і, тим самим, полегшення роботи комутаційних апаратів захисту і зменшення в рази величини індуктивності дроселя згладжувального вхідного *LC* – фільтра;
- організацію передачі енергії рекуперації ЕРС в зовнішню трифазну енергомережу живлення і, тим самим, надання ПА функції випрямляючо-інверторного агрегата.

Постановка задачі. Пошук нових сучасних підходів з удосконалення системи тягового електропостачання

за допомогою розширення області автоматичного керування.

Алгоритм вирішення задачі. Відомо, що напруга на струмоприймачах ЕРС, які знаходяться на фідерній зоні, не може бути постійною і рівною 3 кВ навіть за наявності регульованих трансформаторів на ТП. Тому прагнення до звуужування діапазону відхилення напруги на струмоприймачах є умовою забезпечення номінального режиму роботи тягових і допоміжних машин ЕРС.

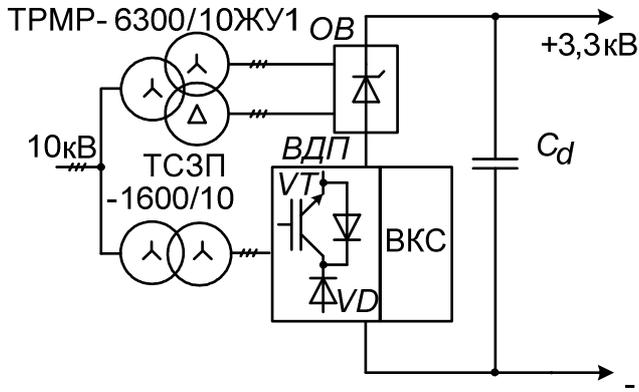


Рис. 1 – Спрощена силова схема реверсивного вольтододавального перетворювача з вузлом короткочасного струмообмеження, що приєднані до основного 12-ти пульсного випрямляча тягової підстанції: ВКС – вузол короткочасного струмообмеження; ОВ – основний випрямляч; ВДП – вольтододавочний перетворювач; C_d – конденсатори вихідного фільтра.

винно забезпечуватися на декількох фідерних зонах безперервне і одночасне для усіх фідерних зон регулювання напруги в контактній мережі.

Використання ШІМ-регульованого малопотужного ПА з вузлом короткочасного струмообмеження (ВКС) – [12, 13], рис. 1 – надає можливість при незначному збільшенні (на 20 ÷ 25%) установленної потужності ПА реалізацію перерахованих раніше функцій.

Запропонована структура тягового електропостачання постійного струму напруги 3 кВ з використанням ВДП при впровадженні на залізницях швидкісного руху представлена на рис. 2. Дана структура може складатися, як тільки при використанні ВДП, так і при більш складному варіанті при використанні на довгих міжпідстанційних ділянках, де не забезпечується дотримання заданого рівня напруги, будівництва додаткових пунктів підвищення напруги (ППН) або одноагрегатних регульованих проміжних тягових підстанцій з повним комплексом устаткування для регулювання напруги.

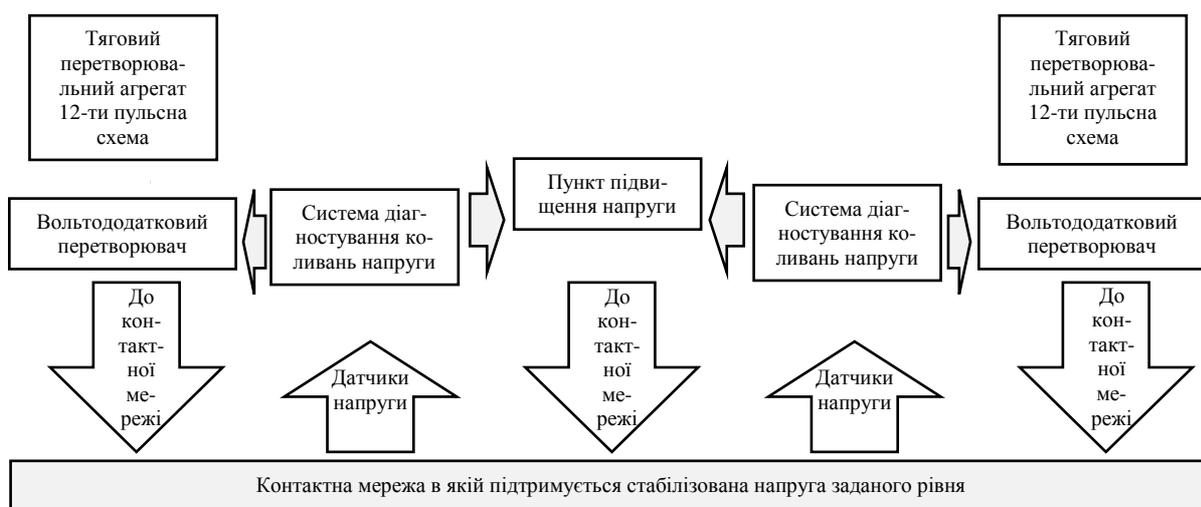


Рис. 2 – Спрощена структура тягового електропостачання постійного струму, що пропонується.

Для забезпечення режиму регулювання за допомогою ШІМ-регульованих ВДП додатково на шинах тягових підстанцій (постах секціонування або контактній мережі) встановлюються датчики напруги та монтується система високочастотного зв'язку по ВЛ-10(6) кВ.

Загальні положення по вибору обчислювальної системи. Розрахункова схема заміщення тягового електропостачання постійного струму напруги 3,3 кВ зі стабілізацією напруги на струмоприймачах електрорухомого складу наведена на рис. 3

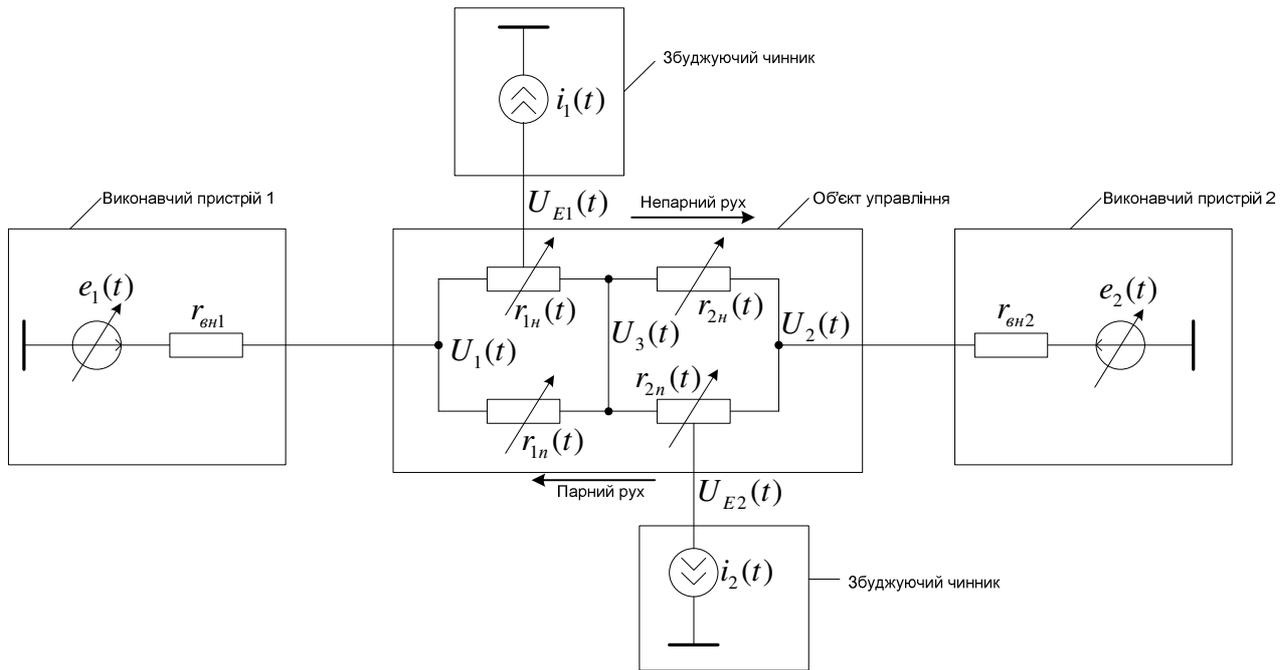


Рис. 3 – Розрахункова схема заміщення тягового електропостачання двоколіїної ділянки між двома тяговими підстанціями із рухом двох потягів.

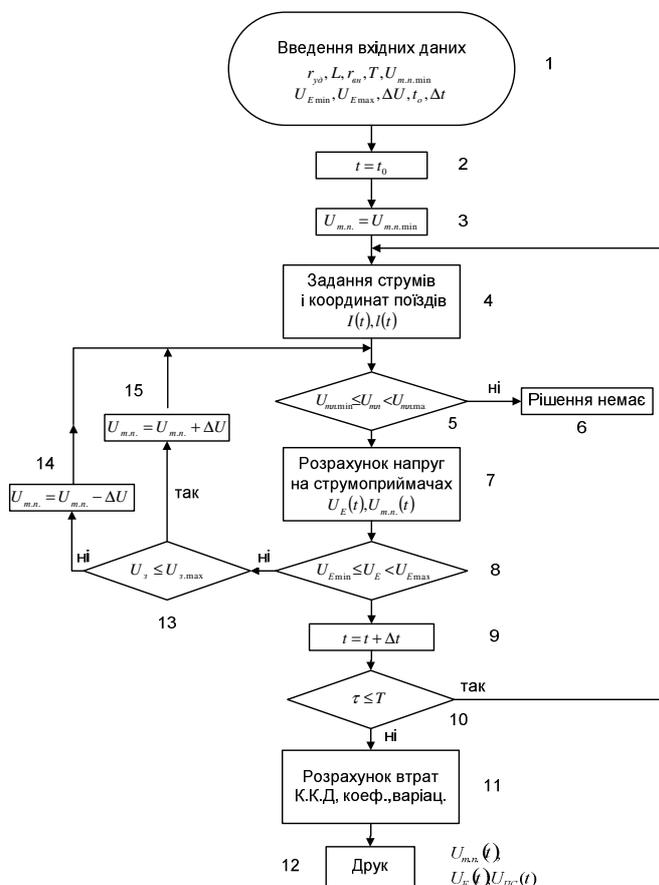


Рис. 4 – Алгоритм для розрахунку напруги на струмоприймачах ЕРС.

заміщення (струми поїздів і фідерів тягових підстанцій); $U_{0,n+1}$ – вузлові напруги в розрахункові моменти часу; E – електрорушійна сила (е.р.с.) джерел живлення виконавчих пристроїв.

При стабілізації напруги на струмоприймачах ЕРС ставиться задача визначення оператора ΔE , що зв'язує сигнали виконавчих пристроїв $e_1(t)$ і $e_2(t)$ з сигналами об'єкта управління $U_{E1}(t)$ і $U_{E2}(t)$ так, щоб виконувалася умова

$$U_{E_{\min}} \leq U_E \leq U_{E_{\max}}, \quad (1)$$

де $U_{E_{\min}} = 2,9$ кВ і $U_{E_{\max}} = 3,1$ кВ [6].

При цьому, інформація про напруги $U_{E1}(t)$ і $U_{E2}(t)$ на струмоприймачах ЕРС надходить до виконавчих пристроїв $e_1(t)$ і $e_2(t)$ (перетворювачів суміжних тягових підстанцій), де і відпрацьовується системою управління вольтододатковими перетворювальними агрегатами в напрямку збільшення або зменшення напруг $U_1(t)$ і $U_2(t)$ так, щоб напруга на струмоприймачах залишалася в процесі руху поїздів у міжпідстанційній зоні в допустимих межах, що визначено (1).

Використовуючи закони Кірхгофа, можна скласти систему рівнянь для визначення вектора потенціалів у вузлах електричного кола об'єкта управління (рис. 3), які у метричній формі можна записати у вигляді:

$$AGA^T \cdot U_{0,n+1} = -A(J_n + GE), \quad (2)$$

де AGA^T – квадратна матриця вузлових провідностей; $-A(J_n + GE)$ – матриця-стовбець, елементами якої є струми у вузлових точках схем

На рис. 4 наведений алгоритм вирішення задачі стабілізації напруги на струмоприймачах тягового електро рухомого складу при зустрічному русі двох пасажирських поїздів у відповідності до умови (1).

За допомогою Matlab–моделювання перевірено режим забезпечення заданого рівня напруги на струмоприймачі ЕРС, що рухається зі швидкістю, близькою до 250 км/год, по міжпідстанційних зонах. Довжина перегону складається з десяти умовних тягових підстанцій з різною довжиною фідерних зон, рис. 5.

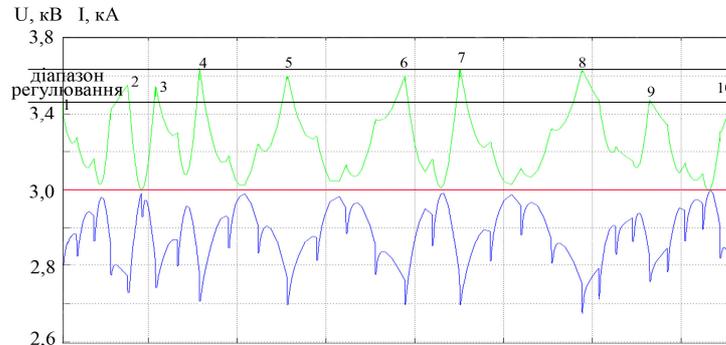


Рис. 5 Діаграми струму та напруги на струмоприймачі ЕРС при русі по міжпідстанційним ділянкам. (1 – 10) – тягові підстанції.

Потужність ЕРС, що рухається зі швидкістю 250 км/год, прийнята 9 МВт при умові, що на зустрічній смузі присутній потяг потужністю 3 МВт. З діаграм видно, що система забезпечує живлення ЕРС напругою, що не знижується нижче 3 кВ.

Як мовилося в [14, 16] при використанні ВДП можливо знизити масу індуктивності вихідного фільтра поклавши функції фільтра 2, 4, 6 та 12-ї гармонік на ВДП. Напруга на тягових шинах підстанції в режимі фільтрації за допомогою ВДП, при зменшенні індуктивності вихідного фільтра, що отримана на Matlab–моделі, приведена на рис. 6, а; на рис. 6, б наведено отриману осцилограму струму живлячої мережі.

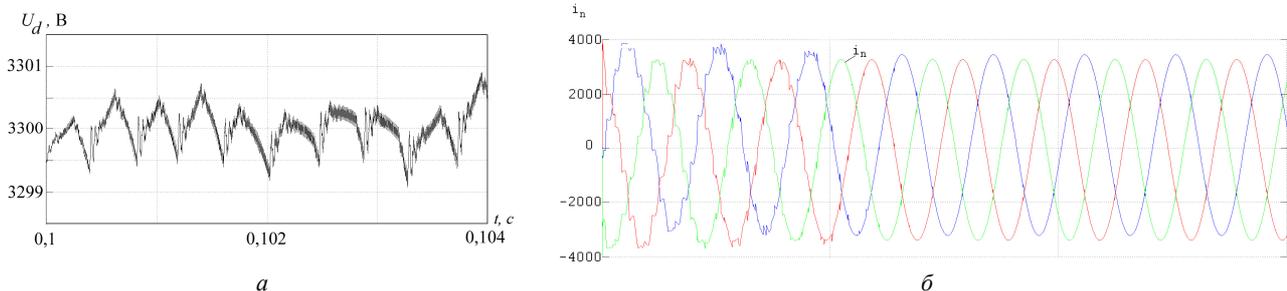


Рис. 6 – Розрахункові характеристики системи живлення: а – напруга на шини тягової підстанції при використанні ВДП в якості активного фільтра та зниженні індуктивності вихідного фільтра; б – форма струму трифазної живлячої мережі при роботі системи з ВДП в режимі активної фільтрації та стабілізації напруги в тяговій мережі.

З рис. 6, б видно як струм живлення i_n системи з ВДП перетворюється в практично синусоїдальний струм. Тобто запропонована структура системи управління забезпечує достатньо високу швидкодію каналів придушення вищих гармонік в струмі живлення.

Подальше підвищення швидкостей руху більше за 250 км/год на постійному струмі 3 кВ світовою науково-технічною спільнотою признано недоцільним [17]. Для швидкостей більше за 250 км/год застосовуються системи тяги змінного струму. Перехід на швидкості руху більше ніж 250 км/год, як правило, зв'язаний зі спорудою нових, окремих спеціалізованих під пасажирські перевезення залізничних ліній, що зв'язують в основному крупні мегаполіси.

Споруда систем електричної тяги змінного струму в границях мегаполісів та близьких пригородів є проблематичною через електромагнітну сумісність та проблеми екології, тому електроживлення ЕРС на вказаних ділянках виконується за системою тяги на постійному струмі в мегаполісах та змінному за ними і застосовується електрорухомий склад, призначений для декількох систем електричної тяги.

Висновки. Використання ШІМ-регульованих вольтододаткових перетворювальних агрегатів при здійсненні підвищення швидкості руху ЕРС більшу за 160 км/год залізницями України може забезпечити стабільну напругу в контактній мережі на заданому рівні, а також зменшити фільтрове устаткування тягових підстанцій, підвищити коефіцієнт потужності та забезпечити електромагнітну сумісність з живлячою мережею на рівні, що не суперечить світовим вимогам до якості електричної енергії.

Звужування діапазону відхилення напруги на струмоприймачі ЕРС забезпечується за допомогою застосуван-

ня на тягових підстанціях пристроїв автоматичного регулювання напруги, що компенсують падіння напруги на внутрішньому опорі. Крім того, застосування систем автоматичного регулювання напруги дозволяє отримати практично однакову напругу на шинах сусідніх тягових підстанцій, що веде до істотного зниження зрівняльних струмів за наявності тягового навантаження на фідерній зоні.

Список літератури: 1. Максимчук В.Ф. Стратегічні задачі та пріоритети розвитку господарства електрифікації та електропостачання // Електрифікація транспорту. – 2013. – №5. – С. 99 – 105. 2. Килин А.Н., Плоскарев С.И. Опыт реконструкции тягового электроснабжения на линии Санкт-Петербург – Москва. // Материалы международного симпозиума «Eltrans'2003». – СПб.: ПГУПС, 2003. – С. 189 – 193. 3. Марикин А.Н., Мизинцев А.В. Новые технологии в сооружении и реконструкции тяговых подстанций. –М.: УМЦ ЖДТ, 2008. – 220 с. 4. Бадер М.П. Электромагнитная совместимость – М.: УМК МПС, 2002. – 464 с. 5. Бадер М.П. Повышение энергетической эффективности и электромагнитной совместимости системы тягового электроснабжения // Материалы международного симпозиума «Eltrans'2003». – СПб.: ПГУПС, 2003. – С. 257 – 259. 6. Марикин А.Н. Принципы построения системы автоматического управления напряжения в тяговой сети постоянного тока на скоростных участках / Материалы международного симпозиума «Eltrans'2005». – СПб.: ПГУПС, 2007. – С. 367 – 377. 7. Марикин А.Н. Схемотехника современных тяговых подстанций постоянного тока и перспективные системы электроснабжения // Материалы международного симпозиума «Eltrans'2001». – СПб.: ПГУПС, 2002. – С. 147 – 155. 8. Аналіз роботи господарства електрифікації та електропостачання в 2012 році. – Київ: Мануфактура, 2013. – 248 с. 9. Аржанников Б.А. Система управляемого электроснабжения электрифицированных железных дорог постоянного тока. – Екатеринбург: УрГУПС, 2010. – 176с. 10. Марикин А.Н. Стабилизация напряжения на токоприемниках подвижного состава электрифицированных железных дорог постоянного тока: автореф. ... доктора. техн. наук: 05.22.07 / Марикин Александр Николаевич. – Санкт-Петербург, 2008 – 36 с. 11. Третьяк Т.П., Коцеев Л.И. Способ повышения уровня напряжения и снижение потерь энергии в контактной сети постоянного тока 3 кВ // Информационные материалы ЦНИИТЭИ МПС СССР, выпуск 46, серия «Электрификация и энергетическое хозяйство». – М.: ЦНИИ ТЭИ, 1969. – 44 с. 12. Панасенко Н.В., Божко В.В., Гончаров Ю.П. и др. Обратимый преобразователь вольтодобавочного типа для тяговых подстанций электрифицированных железных дорог // Залізничний транспорт України. – Киев, 2007. – № 4. – С. 76 – 80. 13. Пат. 51917 Україна, МПК (2009) H02M 7/00. Перетворювальний агрегат для тягової підстанції постійного струму / Божко В.В., Панасенко М.В., Гончаров Ю.П., Сиченко В.Г.; заявники та власники патенту автори; заявл. 15.01.2010 ; опубл. 10.08.2010, Бюл. № 15. 14. Гончаров Ю.П., Панасенко М.В., Божко В.В. и др. Полупроводниковый преобразователь с вольтодобавкой в качестве активного фильтра // Технічна електродинаміка. Тем. вип. «Силова електроніка та енергоефективність», 2007. – Ч. 2. – С. 112 – 117. 15. Самсонкин В.М., Панасенко М.В., Гончаров Ю.П., Божко В.В. Энергоэффективный преобразовательный агрегат с функциями фильтрации гармоник выходного напряжения тяговой подстанции системы электроснабжения постоянного тока напряжения 3 кВ // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ: ДНУЗТ, 2008. – Вип. 20. – С. 66 – 72. 16. Максимчук В.Ф., Панасенко М.В., Божко В.В., Гончаров Ю.П. та ін. Стабілізуючі тягові перетворювальні агрегати з системою активної фільтрації для електропостачання тягових мереж постійного струму швидкісних магістралей // Залізничний транспорт України. – Киев: Залізничний транспорт України, 2011. – № 6. – С. 26 – 31. 17. Корниченко В.В., Котельников А.В., Доманский В.Т. Электрификация железных дорог. Мировые тенденции и перспективы (Аналитический обзор) // Транспорт Украины. – К.: Транспорт Украины, 2004. – 196 с.

Bibliography (transliterated): 1. Maksimchuk, V. F. "Strategicheskie zadachi i priority razvitiya hozjajstva elektrifikacii i elektrosnabzhenija." *Elektrifikacija transporta*. No. 5. 2013. 99–105. Print. 2. Kilin, A. N., and S. I. Ploskarjov. "Opyt rekonstrukcii t'jagovogo elektrosnabzhenija na linii Sankt-Peterburg – Moskva." *Materialy mezhdunarodnogo simpoziuma «Eltrans'2003»*. Sankt-Petersburg: PGUPS, 2003. 189–193. Print. 3. Marikin, A. N., and A. V. Mizincev. *Novye tehnologii v sooruzhenii i rekonstrukcii t'jagovyh podstancij*. Moscow: UMCS ZHDT, 2008. Print. 4. Bader, M. P. *Elektromagnitnaja sovmestimost'*. Moscow: UMK MPS, 2002. Print. 5. Bader, M. P. "Povyshenie energeticheskoj effektivnosti i elektromagnitnoj sovmestimosti sistemy t'jagovogo elektrosnabzhenija." *Materialy mezhdunarodnogo simpoziuma «Eltrans'2003»*. Sankt-Petersburg: PGUPS, 2003. 257–259. Print. 6. Marikin, A. N. "Principy postroenija sistemy avtomaticheskogo upravlenija naprjazhenija v t'jagovoj seti postojannogo toka na skorostnyh uchastkah." *Materialy mezhdunarodnogo simpoziuma «Eltrans'2005»*. Sankt-Petersburg: PGUPS, 2007. 367–377. Print. 7. Marikin, A. N. "Shemotekhnika sovremennyh t'jagovyh podstancij postojannogo toka i perspektivnyye sistemy elektrosnabzhenija." *Materialy mezhdunarodnogo simpoziuma «Eltrans'2001»*. Sankt-Petersburg: PGUPS, 2002. 147–155. Print. 8. *Analiz raboty hozjajstva elektrifikacii i elektrosnabzhenija v 2012 godu*. Kiev: Manufaktura, 2013. Print. 9. Arzhannikov, B. A. *Sistema upravljajemogo elektrosnabzhenija elektrificirovannyh zheleznyh dorog postojannogo toka*. Ekaterinburg: URGUPS, 2010. Print. 10. Marikin, A. N. *Stabilizacija naprjazhenija na tokopriemnikah podvizhnogo sostava elektrificirovannyh zheleznyh dorog postojannogo toka*. Avtoref. d-ra. tehn. Nauk. Sankt-Peterburg, 2008. Print. 11. Tret'jak, T. P., and L. I. Koshcheev. *Sposob povyshenija urovnja naprjazhenija i snizhenie poter' energii v kontaktnoj seti postojannogo toka 3 kV*. *Informacionnye materialy TSNITEY MPS SSSR. Ser.: «Elektrifikacija i energeticheskoe hozjajstvo»*. Vol. 46. Moscow: TSNII TE, 1969. Print. 12. Panasenko, N. V., et al. "Obratimyj preobrazovatel' vol'todobavocnogo tipa dlja t'jagovyh podstancij elektrificirovannyh zheleznyh dorog." *Zheleznodorozhnyj transport Ukrainy*. No. 4. Kiev, 2007. 76–80. Print. 13. Bozhko, V. V., et al. Preobrazovatel'nyj agregat dlja t'jagovoj podstancii postojannogo toka. Ukraina, assignee. Patent UA № 51917 MPK (2009) N02M 7/00. 10 August 2010. 14. Goncharov, Yu. P., et al. "Poluprovodnikovyj preobrazovatel' s vol'todobavkoj v kachestve aktivnogo fil'tra." *Tekhnicheskaja elektrodinamika. Tem. vyp.: «Silovaja elektronika i energoeffektivnost'»*. Vol. 2. 2007. 112–117. Print. 15. Samsonkin, V. M., et al. "Energoeffektivnyj preobrazovatel'nyj agregat s funkcijami fil'tracii garmonik vyhodnogo naprjazhenija t'jagovoj podstancii sistemy elektrosnabzhenija postojannogo toka naprjazhenija 3 kV." *Vestnik Dnepropetrovskogo nacional'nogo universiteta zheleznodorozhnogo transporta im. V. Makarova*. No. 20. Dnepropetrovsk: DNUZT, 2008. 66–72. Print. 16. Maksimchuk, V. F., et al. "Stabilizujuchi t'jagovi peretvorjuval'ni agregaty z sistemoju aktivnoi fil'tracii dlja elektropostachannja t'jagovyh mrezezh postijnnogo strumu shvydkisnyh magistralej." *Zal'iznychnyj transport Ukrainy*. No. 6. Kyiv: Transport Ukrainy, 2011. 26–31. Print. 17. Kornienko, V. V., A. V. Kotelnikov and V. T. Domanskij. *Elektrifikacija zheleznyh dorog. Mirove tendencii i perspektivy. Analiticheskij obzor*. Moscow: Transport Ukrainy, 2004. Print.

Надійшла (received) 29.09.2015

Божко Володимир Вячеславович – кандидат технічних наук, помічник директора з наукового супроводу Державного підприємства «Проектно-вишукувальний інститут залізничного транспорту України «Укрзалізничпроект», м. Харків; тел.: (099) 015-32-20; e-mail: bozhko_vv@mail.ru.

Божко Владимир Вячеславович – кандидат технических наук, помощник директора по научному сопровождению Государственного предприятия «Проектно-исследовательский институт железнодорожного транспорта Украины «Укржелезнодорожпроект», г. Харьков; тел.: (099) 015-32-20; e-mail: bozhko_vv@mail.ru.

Bozhko Volodymyr Vyacheslavovych – Candidate of Engineering Sciences, assistant director for scientific support of the State Enterprise «Ukrzaliznychproekt», Kharkiv; tel.: (099) 015-32-20; e-mail: bozhko_vv@mail.ru.

Ю. В. БОНДАРЕНКО

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОСАДКИ ЗАГОТОВКИ ПЛОСКИМИ БОЙКАМИ

Досліджено вплив відносного обтиску, температури і швидкості деформування на показник зусилля осадки. Проведено моделювання процесу осадки заготовки на плоских бойках з впливом трьох факторів. За допомогою набору прикладних комп'ютерних програм: визначено коефіцієнти регресії, перевірено статистичну значимість коефіцієнтів регресії та перевірено отриману модель на адекватність; визначено оптимальні значення факторів у натуральних величинах. Визначено наявність зон інтенсивності деформування при осадці. Отримано регресійне рівняння моделювання, яке дозволяє отримувати показники зусилля осадки у натуральних одиницях.

Ключові слова: зусилля, осадка, моделювання, обтиск, температура, деформація.

Вступ. Осадка металу поковок плоскими бойками є найпростішою і найпоширенішою операцією обробки металів тиском. Переважна більшість ковальських злитків перед подальшим куванням проходить операцію осадки. Осадку використовують також при куванні дисків, валів із фланцями і т. п.. Крім цього, елементи осадки мають місце майже у всіх інших ковальських операціях, ковальській протяжці, перших стадіях видавлювання, пресування і прошивання в закритих матрицях, відкритого прошивання, першої стадії штампування тіл найрізноманітнішої форми [1].

Операція осадки має два самостійних значення:

- одержання в кованому виробі необхідних фізико-механічних властивостей;
- одержання поковки необхідних розмірів.

Аналіз останніх досліджень. Незважаючи на значний пласт дослідних робіт [2 – 5] з вивчення формозміни металу при виконанні осадки, можна відзначити, що більшість з них носять експериментальний характер. Експериментальні дослідження, при всій їх унікальності, не дозволяють отримувати поля напружень і деформацій, показники обтиску, температури та швидкості деформацій, в явному вигляді. І особливо це відноситься до дослідження марок сталей та титану спеціального призначення. Тому робота, що присвячена комп'ютерному моделюванню процесу осадки, є актуальною.

Постановка задачі дослідження. Мета роботи – комп'ютерне моделювання осадки циліндричної заготовки із титанового сплаву ВТЗ-1 за допомогою спеціалізованого програмного комплексу Deform та аналіз технологічних параметрів процесу, що впливають на силу осадки. Для досягнення поставленої мети вирішувалися наступні задачі:

- провести математичне планування експерименту за допомогою повного факторного експерименту;
- за допомогою набору прикладних комп'ютерних програм визначити коефіцієнти регресії, перевірити статистичну значимість коефіцієнтів регресії, перевірити отриману модель на адекватність, визначити оптимальні значення факторів у натуральних величинах;
- визначити наявність зон інтенсивності деформування при осадці;
- отримати рівняння, що показує залежність зусилля осадки від показників температури, обтиску та швидкості деформації.

Таблиця 1 – Досліджувані фактори, розрахункові рівні інтервалів варіювання, характер їх змін і схеми кодування

Характеристики	Фактори		
	$t, ^\circ\text{C}$	ε	$V, \text{м/с}$
Код	X_1	X_2	X_3
Основний рівень	1000	0,5	0,5
Інтервал варіювання	100	0,25	0,8
Нижній рівень (кодове значення –)	900	0,3	0,1
Верхній рівень (кодове значення +)	1100	0,7	0,9

фактори, розрахункові рівні інтервалів варіювання, характер їх змін і схеми кодування наведені в табл. 1. Параметр оптимізації Y_1 – це зусилля осадки.

Після вибору плану перейшли безпосередньо до експерименту. Щоб виключити вплив систематичних помилок, викликаних зовнішніми умовами (наприклад, неточним контролем температури), рекомендується дослідити, задані планом експерименту, проводити рандомізовано у часі чи випадкової послідовності. Порядок проведення дослідів можна вибрати, наприклад, за таблицею випадкових чисел. У табл. 2 наведена спрощена матриця планування експерименту.

Математична модель. Для дослідження впливу відносного обтиску, температури і швидкості деформування на показники сили осадки проводили математичне планування експерименту за допомогою повного факторного експерименту.

В якості незалежних змінних були обрані температура деформування (X_1), обтиск (X_2) та швидкість деформації (X_3). В якості вихідного матеріалу був обраний титан марки ВТЗ-1 з розмірами $D = 60$ мм та $H = 90$ мм. Досліджувані

Таблиця 2 – Матриця планування експерименту

№ досліджу	x_1	x_2	x_3	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$
1	+	+	+	+	+	+
2	+	+	-	+	-	-
3	+	-	+	-	+	-
4	+	-	-	-	-	+
5	-	+	+	-	-	+
6	-	+	-	-	+	-
7	-	-	+	+	-	-
8	-	-	-	+	+	+

нівського методу [6].

Таблиця 3 – результати дослідів зусилля осадки

Дослід	Y , МН	Дослід	Y , МН
1	0,714	5	0,164
2	1,81	6	0,389
3	0,209	7	0,0239
4	0,501	8	0,057

- в закодованому виді:

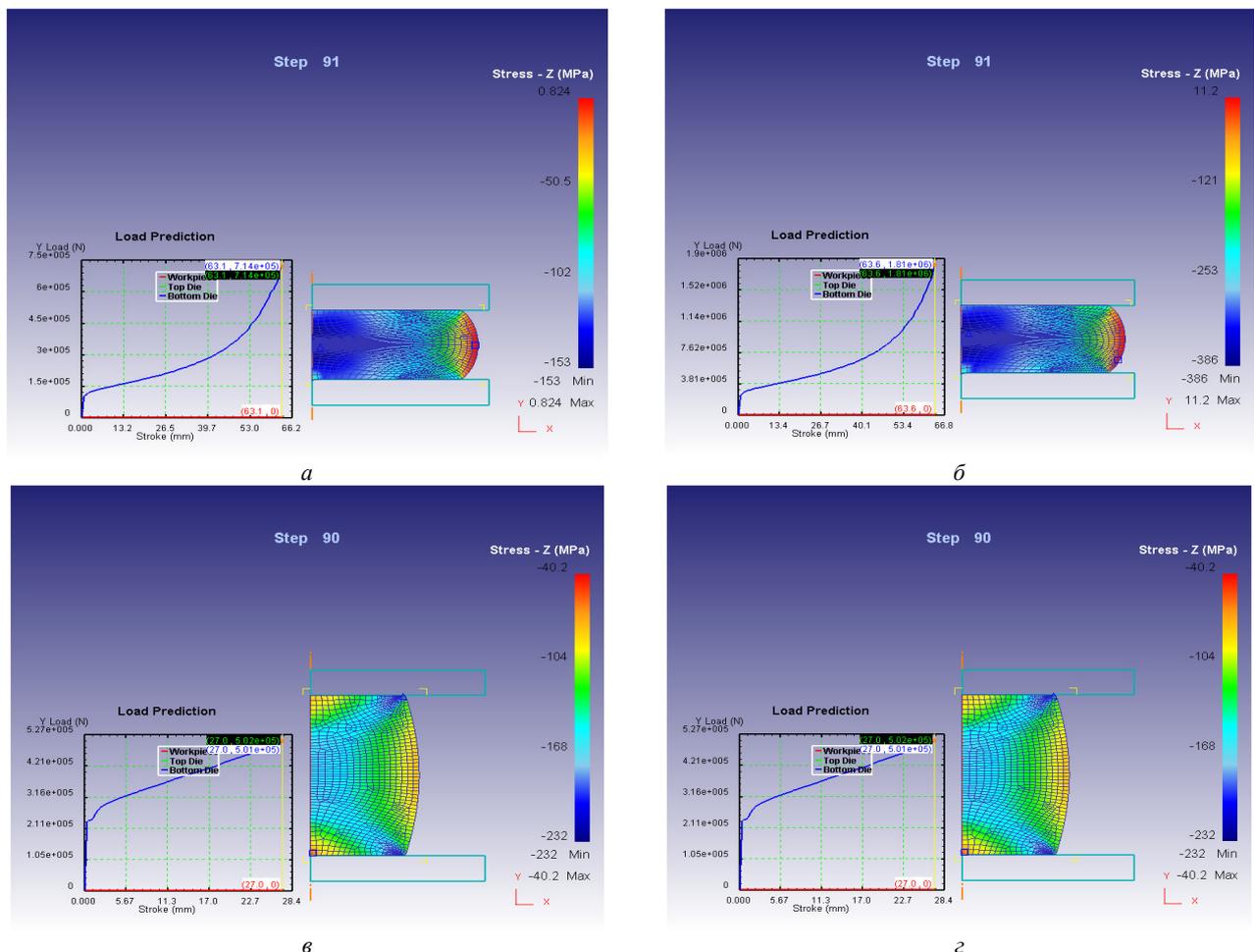
$$Y = 0,483 - 0,206x_1 + 0,286x_2 + 0,325x_3;$$

- в натуральному виді:

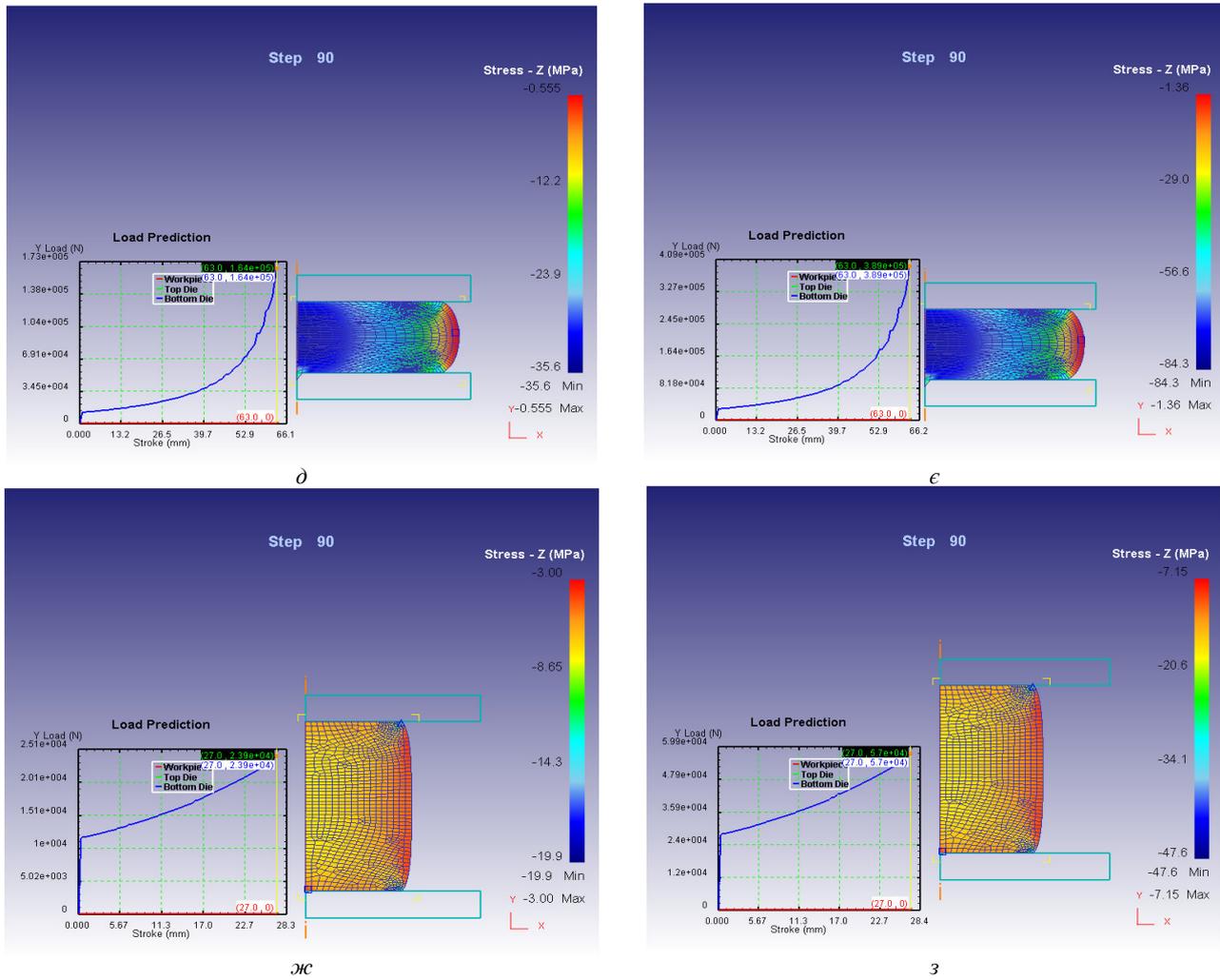
$$Y = 0,483 - 0,00206x_1 + 2,06 + 1,43x_2 - 0,715 + 0,81x_3 - 0,41.$$

У реалізованій матриці планування отримані наступні результати (табл. 3).

Результати моделювання в програмі Deform 2D представлені на рис. 1 та рис. 2.



Рису. 1– Результати моделювання з дослідження зусилля осадки: а – за дослідом 1; б – за дослідом 2; в – за дослідом 3; г – за дослідом 4.



Рису. 2 – Результати моделування з дослідження зусилля осадки: *д* – за дослідом 5; *е* – за дослідом 6; *ж* – за дослідом 7; *з* – за дослідом 8.

В результаті розробленого моделування можна визначити існування трьох зон інтенсивності деформації при осадці.

- I. Зона найбільш інтенсивної деформації (червоні та оранжеві зони).
- II. Зона помірної деформації (жовті, зелені і блакитні зони), в осьовому перерізі заготовки має хрестоподібну форму; в цій зоні спостерігається найбільш інтенсивна деформація.
- III. Зона складної деформації (фіолетові та сині зони, що прилягають до бойків) [7].

Результати подальших досліджень. Використовуючи пакет програм MatLab, побудовані тривимірні моделі, які спрощують дослідження залежності між групою факторів та зусиллям осадки (рис. 3).

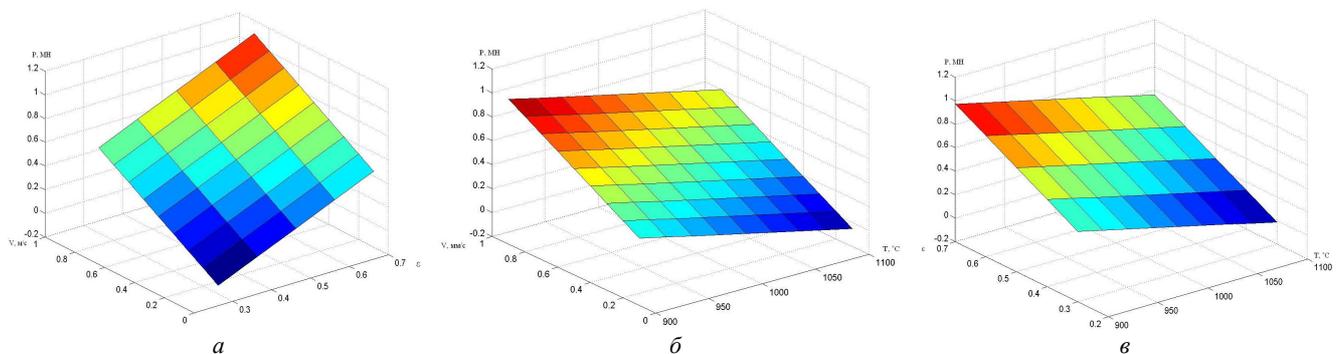


Рис. 3 – Графічні залежності впливу зусилля осадки на наступні характеристики: *а* – обтиску і швидкості деформування металу; *б* – температури і швидкості деформування металу; *в* – обтиску і температури металу.

З аналізу рис. 3 можна побачити, що відносний обтиск має більший вплив на силу осадки ніж температура або швидкість деформування. Оптимальний показник зусилля осадки 0,1 МН досягається при температурі 1050°С, відносному обтиску 0,35 та швидкості деформації 0,3 м/с.

Висновки. За допомогою спеціалізованого програмного комплексу DEFORM 2D, який призначений для моделювання процесів обробки металів тиском, було проведено моделювання процесу осадки заготовки на плоских бойках з впливом трьох факторів: відносного обтиску, температури і швидкості деформування. Аналіз результатів моделювання показав, що відносний обтиск має більший вплив на силу осадки ніж температура або швидкість деформування.

В результаті проведеного дослідження розроблено регресійне рівняння моделювання, яке дозволяє отримувати показники зусилля осадки у натуральних одиницях:

$$Y = 0,483 - 0,00206x_1 + 2,06 + 1,43x_2 - 0,715 + 0,81x_3 - 0,41$$

Список літератури: 1. *Сторожев М.В., Попов Е.А.* Теория обработки металлов давлением // М.: Машиностроение. – 1971. – С. 424. 2. *Шнейберг А.М., Михаленко Ф.П., Щербатов Д.А.* Экспериментальные исследования предельной пластичности при осадке без кручения и с кручением // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2012. – № 1. – С. 18 – 24. 3. *Тюрин В.А., Савонькин М.Б.* Стадийность процесса и потокораспределение при осадке плитам с осевым отверстием // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2009. – № 3. – С. 17 – 20. 4. *Воронцов А.Л.* Пластическое течение при осадке полых заготовок // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. – 2007. – № 1. – С. 3 – 8. 5. *Гринкевич В.А., Чухлеб В.Л., Сальников А.С., Тумко А.Н., Ашкелянец А.В., Банашек Г.* Исследование различных схем осадки на прессе заготовки сплава ЭИ698-ВД путем математического моделирования // Обработка материалов давлением. – 2013. – № 4 (37). – С. 3 – 7. 6. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиномиальных моделей. – М.: Металлургия, 1982. – С. 752. 7. *Данченко В.Н., Миленин А.А., Кузьменко В.И., Гринкевич В.А.* Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением // Численные методы: сборник научных трудов. – Днепропетровск: Системные технологии. – 2005. – С. 443.

Bibliography (transliterated): 1. Storozhev, M. V., and E. A. Popov. *Theorija obrabotki metallov davleniem*. Moscow: Mashynostroenie, 1971. Print. 2. Shnejberg, A. M., F. P. Mihalenko and D. A. Shherbatov. "Experimental'nye issledovanija predel'noj plastichnosti pri osadke bez kruchenija i s krucheniem." *Kuznechno-shtampovocnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem*. No. 1. 2012. 18–24. Print. 3. Tjurin, V. A., and M. B. Savon'kin. "Stadijnost' processa i potokoraspreделение pri osadke plitami s oseвым otverstiem." *Kuznechno-shtampovocnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem*. No. 3. 2009. 17–20. Print. 4. Voroncov, A. L. "Plasticheskoe techenie pri osadke polyh zagotovok." *Kuznechno-shtampovocnoe proizvodstvo. Obrabotka materialov davleniem*. No. 1. 2007. 3–8. Print. 5. Grinkevich, V. A., et al. "Issledovanie razlichnyh shem osadki na presse zagotovki splava EI698-VD putjom matematicheskogo modelirovanija." *Obrabotka materialov davleniem*. No. 4 (37). 2013. 3–7. Print. 6. Tablicy planov experimenta faktornyh i polinomial'nyh modelej. Moscow: Metallurgija, 1982. Print. 7. Danchenko, V. N., et al. *Komp'uternoe modelirovanie processov obrabotki metallov davleniem. Chyслennye metody: sbornyk nauchnyh trydov*. Dnepropetrovsk: Sistemnye tehnologii, 2005. Print.

Надійшла (received) 25.09.2015

Бондаренко Юлія Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри обробки металів тиском, Запорізька державна інженерна академія: пр. Леніна, 226, м. Запоріжжя, Україна 69000, e-mail: bond.1984@mail.ru, тел.: 067-76-75-350.

Бондаренко Юлія Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры обработки металлов давлением, Запорожская государственная инженерная академия: пр. Ленина, 226, г. Запорожье, Украина 69000, e-mail: bond.1984@mail.ru, тел.: 067-76-75-350.

Bondarenko Jylia Vladimirovna – Candidate of Technical Science, Associate Professor, Department of working metals by pressure, Zaporozhye State Engineering Academy, Lenina ave. 226, Zaporozhye, Ukraine, 69000, E-mail: bond.1984@mail.ru, тел.: 067-76-75-350.

УДК 389.14+658.16(075.8)

С. О. ВАМБОЛЬ, І. В. МІЩЕНКО, В. В. ВАМБОЛЬ, О. М. КОНДРАТЕНКО

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА 2

Досліджено особливості бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Проаналізовано спеціалізовану науково-технічну і довідникову літературу, методи математичної статистики, теорії ймовірностей, чисельні. У даній частині дослідження подано описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу, особливості застосування узагальненого бета-розподілу до об'єкту дослідження, а також проаналізовано придатність нормального закону розподілу за оцінками коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, початкових і центральних моментів неперервних розподілів.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

Вступ. Аналіз і оцінювання *похибок вимірювання*, які являють собою величини, що характеризують недосконалість вимірювання, є одним з розділів *метрології*. Закономірність прояву *випадкових похибок*, як додатних, так і від'ємних, виявляється лише при достатньо великій кількості вимірювань. За деяких умов *розподіл випадкових похибок* підкоряється *нормальному розподілу*. Однак при виявленні факту невідповідності *емпіричного розподілу* нормальному стає питання пошуку або підбору такого розподілу, який за певними критеріями точніше описує *емпіричний розподіл*. Вибір найбільш *близького закону розподілу* до *істинного* серед десятків існуючих *типових розподілів* здійснюється на основі аналізу *гістограми* та *моментних оцінок*, потім здійснюється перевірка *гіпотези* про відповідність *емпіричного розподілу* до *теоретичного*, що при підтвердженні гіпотези дає розв'язання *задачі апроксимації*, яке у деяких випадках досягається перебиранням різних законів розподілу за

вищеописаним алгоритмом і не є гарантованим. В той же час існує підхід до побудови *універсальних сімей розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімей розподілів Пірсона*, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального, є варіативним і гнучким.

У попередній частині дослідження застосовано типові закони розподілу до об'єкту дослідження та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним, для знаходження справжнього або близького до нього закону [1].

Аналіз літературних джерел. При проведенні дослідження проаналізовано 32 наукових джерела інформації, їх повний перелік подано у дослідженні [1]. У тому ж джерелі наведено *мету, об'єкт, предмет* і перелік *задач дослідження*. У даній роботі наведено описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу при апроксимації емпіричних даних.

Використання бета-розподілу при апроксимації емпіричних даних. Система кривих Пірсона. В математичній статистиці проводять апроксимацію емпіричних даних на основі типових розподілів, до найуживаніших з яких можна віднести нормальний, логарифмічно-нормальний, експоненціальний, Вейбулла, гамма-розподіли тощо. Перевага застосування типових розподілів складається в їхній достатньо повній вивченості та можливості отримання обґрунтованих, незміщених та відносно високоефективних оцінок параметрів. Однак перелічені вище типові закони не мають необхідного різноманіття форм розподілів (гістограм), тому їхнє застосування не дає необхідної універсальності представлення випадкових величин. Те саме стосується і апроксимації на основі спеціальних рядів (наприклад, *ряд Грама-Шарльє*), які рекомендовано використовувати для описання розподілів, близьких до нормального.

В математичній статистиці порівняно нечасто використовується бета-розподіл. Його використання зумовлене тим, що через нього можуть бути виражені практично всі відомі вживані закони розподілів ймовірностей, в тому числі і дискретні. Особливо велике значення бета-розподіл набув у непараметричній статистиці, тобто для вирішення задач, які не потребують знання закону розподілу ймовірностей випадкової величини. Такому розподілу притаманно надзвичайна різноманітність видів і форм кривих розподілу, які описуються функцією бета-розподілу при різних поєднаннях його параметрів. На практиці застосовують різні наближення, що дозволяють обчислити параметри бета-розподілу за допомогою таблиць або апроксимацій нормального розподілу (апроксимації *Кедуелла, Уайза, Кемпа-Полсона*) [2].

Покажемо обґрунтованість використання бета-розподілу.

Моменти розподілу випадкової величини не характеризують його повністю, але визначають однозначно за деяких умов, котрі виконуються майже для усіх розподілів, які використовуються на практиці. Під час вирішення задач обробки експериментальних даних знання моментів еквівалентно знанню функції розподілу, а збіг значень перших моментів двох розподілів говорить про їхню приблизну однаковість. Не знаючи точно вигляду функції розподілу, але знайшовши необхідні перші моменти, можна підібрати інший розподіл з таким ж значеннями перших моментів. Практично така апроксимація виявляється прийнятною при збігу перших чотирьох моментів.

Вважається [3, 4, 5], що довільну невід'ємну функцію $f(y) \geq 0$, яка задовольняє умовам нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1,$$

можна розглядати як щільність імовірності $P(y)$ деякої випадкової величини y . Різноманітний характер щільностей імовірності $P(y)$ дає система кривих Пірсона, яка задається диференціальним рівнянням

$$\frac{dP(y)}{dy} = \frac{y-a}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2} P(y), \quad (1)$$

в якому коефіцієнти a і b_i , $i = 0, 1, 2$, повністю задають систему розподілів.

Розв'язання цього рівняння записується в загальному вигляді має вид

$$P(y) = C \exp\left(\int \frac{y-a}{b_0 + b_1 y + b_2 y^2} dy\right). \quad (2)$$

Проводячи рекурентні перетворення, визначають старші моменти через молодші; можливо визначити постійні a і b_i через вибіркові оцінки центральних моментів розподілу та привести до системи рівнянь у такому вигляді

$$\{-a + b_1 = 0; b_0 + 3b_2 \tilde{\mu}_2 = -\tilde{\mu}_2; -a \tilde{\mu}_2 + 3b_1 \tilde{\mu}_2 + 4b_2 \tilde{\mu}_3 = -\tilde{\mu}_3; -a \tilde{\mu}_3 + 3b_0 \tilde{\mu}_2 + 4b_1 \tilde{\mu}_3 + 5b_2 \tilde{\mu}_4 = -\tilde{\mu}_4\}. \quad (3)$$

В загальному випадку розподілу Пірсона визначаються чотирма моментами \tilde{m}_1 , $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$ і $\tilde{\mu}_4$. Рішення цієї системи зведено у табл. 1. Відомо, що характер кривої може бути різним залежно від коренів квадратного рівняння $b_0 + b_1 y + b_2 y^2 = 0$. Позначаючи корні цього рівняння через y_1 та y_2 , маємо:

$$y_{1,2} = -\frac{b_1}{2b_2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{K}}\right), \quad K = \frac{b_1^2}{4b_0 b_2}. \quad (4)$$

Таблиця 1 – Рішення системи (3)

$d = 10\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 - 18\tilde{\mu}_2^3 - 12\tilde{\mu}_3^2$	
$c_0 = -\tilde{\mu}_2(4\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 - 3\tilde{\mu}_3^2)$	$b_0 = c_0/d$
$c_1 = -\tilde{\mu}_3(\tilde{\mu}_4 + 3\tilde{\mu}_2^2)$	$b_1 = c_1/d, a = b_1$
$c_2 = -2\tilde{\mu}_2\tilde{\mu}_4 + 6\tilde{\mu}_2^3 + 3\tilde{\mu}_3^2$	$b_2 = c_2/d$

Для визначеності знаки обираються так, щоб $y_1 < y_2$. Значення коренів залежні від величини K . Якщо $K < 0$, то корені дійсні та мають різні знаки (тип I розподілу за класифікацією Пірсона). При $K > 1$ корені дійсні та мають однакові знаки (тип VI розподілу). При $0 < K < 1$ корені комплексні (тип IV розподілу). По суті, цим і охоплюються всі можливі випадки.

Після вищезгаданих перетворень маємо наступне:

$$f(y) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} y^{p-1} (1-y)^{q-1}, \text{ при } 0 \leq y \leq 1. \quad (5)$$

Стандартний бета-розподіл зосереджений на відрізку від 0 до 1. Застосовуючи лінійні перетворення, бета-величину можна перетворити так, що вона буде приймати значення на будь-якому інтервалі.

Тип VI розподілу є бета-розподілом II роду та має вигляд:

$$f(y) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}, \text{ } 0 \leq y < \infty. \quad (6)$$

Про тип IV розподілу нічого однозначно сказати неможливо, існують лише окремі випадки цього розподілу.

Використання узагальненого бета-розподілу. Узагальнений бета-розподіл описує розподіл випадкової величини $z = \alpha + (\beta - \alpha)y$, що є лінійною функцією випадкової величини y , яка має бета-розподіл I типу з параметрами p, q і розподілена в інтервалі $\alpha \leq y \leq \beta$. Справедливе й зворотне – якщо випадкова величина z має узагальнений бета-розподіл з вказаними параметрами, то випадкова величина $y = (z - \alpha)/(\beta - \alpha)$ має бета-розподіл I типу з параметрами p, q [6].

Як було зазначено в [1], обсяг вибірок був $N = 500, N = 1000, N = 3000$, значення $m_d = 1,59$ мм, величина середньоквадратичного відхилення діаметру приймалась $\sigma_d = 0,00159$ мм, $\sigma_d = 0,0636$ мм, $\sigma_d = 0,0954$ мм, $\sigma_d = 0,1113$ мм. В табл. 2. зведено розрахункові дані для вибірок різного обсягу та відхилення $\sigma_d = 0,1113$ мм.

Вибіркові оцінки необхідних для визначення типу розподілу за схемою (табл. 1 і 2 в [1]) моментів $\tilde{m}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3$ і $\tilde{\mu}_4$, розмірності яких для n -го моменту (мм⁴) у n -му ступеню, а саме:

- для даних з 1-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0,64424759, \tilde{\mu}_2 = 0,03181752, \tilde{\mu}_3 = 0,00248719, \tilde{\mu}_4 = 0,00319209$; корені дійсні, мають різний знак, тобто це відповідає типу I розподілу за класифікацією Пірсона;
- для даних з 2-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0,64625362, \tilde{\mu}_2 = 0,03180040, \tilde{\mu}_3 = 0,00298760, \tilde{\mu}_4 = 0,00343242$; корені дійсні, мають різний знак, тобто це відповідає типу I розподілу за класифікацією Пірсона;
- для даних з 3-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0,64436396, \tilde{\mu}_2 = 0,03254810, \tilde{\mu}_3 = 0,00378001, \tilde{\mu}_4 = 0,00398597$; корені дійсні, мають однаковий знак, тобто це відповідає типу VI розподілу за класифікацією Пірсона.

Додатково проведено аналіз придатності нормального розподілу для апроксимації за оцінкою коефіцієнтів асиметрії та ексцесу (табл. 3) за методикою, наведеною вище, та формулами (3) – (6) у [1]. Отримані результати з цих позицій відкидають можливість такої апроксимації.

Таблиця 2 – Розрахункові дані

$N, \text{од}$	500	1000	3000
$m_d, \text{мм}$	1,59	1,59	1,59
$\sigma_d, \text{мм}$	0,11130	0,11130	0,11130
$c_0 \cdot 10^5$	1,234	-1,303	-1,550
$c_1 \cdot 10^5$	1,549	-1,932	-2,708
$c_2 \cdot 10^6$	8,69	1,42	-9,72
$d \cdot 10^4$	3,616	4,056	5,052
$b_0 \cdot 10^2$	-3,4112	-3,2135	-3,0669
$b_1 \cdot 10^2$	-4,2844	-4,7634	-5,3599
$b_2 \cdot 10^2$	2,4040	0,3512	-1,9241
$a \cdot 10^2$	-4,2844	-4,7634	-5,3599
K	-0,5596	-5,0259	1,2171
y_1	-0,5965	-0,6440	-1,9810
y_2	2,3787	14,2064	-0,8046

Вибіркові оцінки необхідних для визначення типу розподілу та визначення за схемою (табл. 1 і 2 у [1]) моментів $\tilde{m}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3$ і $\tilde{\mu}_4$, розмірності яких для n -го моменту (мм⁴) у n -му ступеню:

- для даних з 1-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0,62760067, \tilde{\mu}_2 = 0,00063461, \tilde{\mu}_3 = 0,00000127, \tilde{\mu}_4 = 0,00000124$; корені комплексні, тобто це відповідає типу IV розподілу за класифікацією Пірсона;
- для даних з 2-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0,63256213, \tilde{\mu}_2 = 0,01028946, \tilde{\mu}_3 = 0,00037723, \tilde{\mu}_4 = 0,00034880$; корені комплексні, тобто це відповідає типу IV розподілу за класифікацією Пірсона;
- для даних з 3-го стовпчика $\tilde{m}_1 = 0,63966754, \tilde{\mu}_2 = 0,02360745, \tilde{\mu}_3 = 0,00199333, \tilde{\mu}_4 = 0,00199352$; корені комплексні, тобто це відповідає типу IV розподілу за класифікацією Пірсона.

В табл. 4 зведено розрахункові дані для вибірок однакового обсягу $N = 3000$ та $\sigma_d = 0,01590$ мм, $\sigma_d = 0,06360$ мм, $\sigma_d = 0,09540$ мм.

Таблиця 3 – Аналіз придатності нормального розподілу для апроксимації за оцінкою коефіцієнтів асиметрії та ексцесу

$N = 500, m_d = 1,59 \text{ мм}, \sigma_d = 0,11130 \text{ мм}$			
$3S_1 = 0,32666958$	$3S_1 = 0,32765334$	$5S_2 = 1,07916065$	$5S_2 = 1,09003045$
$\tilde{S}k = 0,43823744$		$\tilde{E}x = 0,15313548$	
$ \tilde{S}k \leq 3S_1$ – умова не виконується		$ \tilde{E}x \leq 5S_2$ – умова не виконується	
$N = 1000, m_d = 1,59 \text{ мм}, \sigma_d = 0,11130 \text{ мм}$			
$3S_1 = 0,23168328$	$3S_1 = 0,23203146$	$5S_2 = 0,7688133$	$5S_2 = 0,7726713$
$\tilde{S}k = 0,52683317$		$\tilde{E}x = 0,39418314$	
$ \tilde{S}k \leq 3S_1$ – умова не виконується		$ \tilde{E}x \leq 5S_2$ – умова не виконується	
$N = 3000, m_d = 1,59 \text{ мм}, \sigma_d = 0,11130 \text{ мм}$			
$3S_1 = 0,13403001$	$3S_1 = 0,134097065$	$5S_2 = 0,44609725$	$5S_2 = 0,44684165$
$\tilde{S}k = 0,64373057$		$\tilde{E}x = 0,76255408$	
$ \tilde{S}k \leq 3S_1$ – умова не виконується		$ \tilde{E}x \leq 5S_2$ – умова не виконується	

Як і в попередньому аналізі, в табл. 5 наведено дані про коефіцієнти асиметрії та ексцесу. Для емпіричних розподілів з малою дисперсією, коли інтервал даних є відносно малим, апроксимація нормальним розподілом допускається. При «розтіканні» щільності імовірності нормальність порушується, використання вказаної апроксимації не рекомендується. Таким чином, можливість апроксимації емпіричного розподілу бета-розподілом підтверджена розрахунками (для даних з табл. 2 – однозначно, для даних з табл. 4 – такий варіант не відкидається). Переходячи до змінної J_p , яка змінюється в інтервалі $J_{Pmin} \leq J_p \leq J_{Pmax}$ (це легко визначається з аналізу емпіричних даних), запишемо щільність ймовірностей у вигляді формули (7), для якої початкові моменти задані формулою (8), а центральні – формулою (9):

$$f(J_p) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{(J_p - J_{Pmin})^{p-1} (J_{Pmax} - J_p)^{q-1}}{(J_{Pmax} - J_{Pmin})^{p+q-1}}, \quad (7)$$

Таблиця 4 – Розрахункові дані

N , од	3000	3000	3000
m_d , мм	1,59	1,59	1,59
σ_d , мм	0,0159	0,0636	0,0954
$c_0 \cdot 10^6$	$-2,0 \cdot 10^{-6}$	-0,14	-4,16
$c_1 \cdot 10^6$	$-3,12 \cdot 10^{-6}$	-0,25	-7,31
$c_2 \cdot 10^6$	$-4,06 \cdot 10^{-5}$	-0,21	-3,26
$d \cdot 10^5$	$3,27 \cdot 10^{-4}$	1,46	18,61
$b_0 \cdot 10^4$	-6,11	-98,35	-223,66
$b_1 \cdot 10^4$	-9,54	-172,51	-392,57
$b_2 \cdot 10^2$	-1,2401	-1,4732	-1,7534
$a \cdot 10^3$	-0,95377	-17,2505	-39,2573
$K \cdot 10^2$	3,0014	51,3464	98,2474
$y_1 \cdot 10^2$	-3,85· (1-1,52i)	-58,55· (1-0,97i)	-111,95· (1-0,13i)
$y_2 \cdot 10^2$	-3,85· (1+1,52i)	-58,55· (1+0,97i)	-111,95· (1+0,13i)

$$m_n(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^n C_n^k (J_{Pmax} - J_{Pmin})^k J_{Pmin}^{n-k} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)}, \quad (8)$$

$$\mu_n(p, q) = (J_{Pmax} - J_{Pmin})^n \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \times \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left(\frac{p}{p+q}\right)^k \frac{\Gamma(p+n-k)}{\Gamma(p+q+n-k)}. \quad (9)$$

В цих виразах $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k \leq n$ – біноміальні

коефіцієнти, $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функція, яка за визначенням задається інтегралом $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, ($\text{Re } z > 0$) [7 – 10]. Для

цілого аргументу обчислення гамма-функції пов'язано з обчисленням факторіалу, але для загального випадку необхідно використовувати наближення, наприклад, формулу Стірлінга:

$$\Gamma(z) \approx e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \frac{163879}{209018880z^5} + \frac{5246819}{75246796800z^6} \right], \quad (10)$$

або інші наближення через неперервний дріб [9, 11], що забезпечує цілком достатню для досліджень точність.

Таблиця 5 – Коефіцієнти асиметрії та ексцесу

$N = 3000, m_d = 1,59 \text{ мм}, \sigma_d = 0,01590 \text{ мм}$			
$3S_1 = 0,13403001$	$3S_1 = 0,134097065$	$5S_2 = 0,44609725$	$5S_2 = 0,44684165$
$\tilde{S}k = 0,07967409$		$\tilde{E}x = 0,08897396$	
$ \tilde{S}k \leq 3S_1$ – умова виконується		$ \tilde{E}x \leq 5S_2$ – умова виконується	
$N = 3000, m_d = 1,59 \text{ мм}, \sigma_d = 0,06360 \text{ мм}$			
$3S_1 = 0,13403001$	$3S_1 = 0,134097065$	$5S_2 = 0,44609725$	$5S_2 = 0,44684165$
$\tilde{S}k = 0,36142125$		$\tilde{E}x = 0,29447751$	
$ \tilde{S}k \leq 3S_1$ – умова не виконується		$ \tilde{E}x \leq 5S_2$ – умова виконується	
$N = 3000, m_d = 1,59 \text{ мм}, \sigma_d = 0,09540 \text{ мм}$			
$3S_1 = 0,13403001$	$3S_1 = 0,134097065$	$5S_2 = 0,44609725$	$5S_2 = 0,44684165$
$\tilde{S}k = 0,54954858$		$\tilde{E}x = 0,57702432$	
$ \tilde{S}k \leq 3S_1$ – умова не виконується		$ \tilde{E}x \leq 5S_2$ – умова не виконується	

Таблиця 6 – Початкові та центральні моменти неперервних розподілів

Порядок моменту	Початкові моменти	Центральні моменти
0	$m_0 = 1$ (за визначенням)	$m_0 = 1$ (за визначенням)
1	m_1 (визначається)	$\mu_1 = 0$
2	$m_2 = m_1^2 + \mu_2$	$\mu_2 = m_2 - m_1^2$
3	$m_3 = m_1^3 + 3\mu_2 m_1 + \mu_3$	$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$
4 (поч.)	$m_4 = m_1^4 + 6\mu_2 m_1^2 + 4\mu_3 m_1 + \mu_4$	
4 (центр.)	$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4$	

Для неперервних розподілів справедливі наступні співвідношення між початковими та центральними моментами [12 – 14], що також можна використати при розрахунках:

$$m_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \mu_k m_1^{n-k},$$

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k m_k m_1^{n-k}, \quad (11)$$

що для моментів до 4-го включно дає вирази, зведені в табл. 6. В усіх розрахунках кривих

Пірсона потрібна висока точність обчислень (необхідно утримувати до 8÷10 знаків після коми), що пояснюється мультиплікативною схемою нагромадження похибок у степеневих членах.

Висновки. Таким чином, в роботі розглянута задача апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису, які представлені у вигляді вибірки та на їхній основі побудованій гістограми, за допомогою бета-розподілу. На основі розрахунку відповідних величин показано, що використання нормального розподілу для апроксимації емпіричних даних, які характеризують об'єкт дослідження – тіло кочення кулькового підшипника, не є прийнятним через значення асиметрії та ексцесу.

У даній частині дослідження на основі аналізу спеціалізованої літератури подано математичне описання бета-розподілу (математична основа якого – сімейство кривих Пірсона), який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального, може стати універсальним, але потребує ретельного дослідження. Виявлено, що у своїй більшості можливі типи розподілів зводяться до бета-розподілів I або II типу, які можуть бути зведені до узагальненого бета-розподілу. Таким чином, задача апроксимації після обґрунтування використання саме вказаних розподілів зводиться до визначення вибірових оцінок моментів і розрахунку параметрів бета-розподілу. Обґрунтовано застосування бета-розподілу до об'єкту дослідження шляхом проведення числових досліджень для вибірок різного обсягу з різними середньоквадратичними відхиленнями змінної, яка і характеризує об'єкт дослідження.

Список літератури: 1. *Вамболь С.О., Мищенко І.В., Кондратенко О.М., Бурменко О.А.* Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 36 – 44. 2. *Кобзарь А.И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с. 3. *Кендалл М., Стьюарт А.* Теория распределений / под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с. 4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. 5. *Ходасевич Г.Б.* Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Часть 1. Обработка одномерных данных [Электронный ресурс]: Учебное пособие. – Режим доступа: http://www.dvo.sut.ru/libr/opds/il30hodo_part4.htm. 6. *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с. 7. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 249 с. 8. *Льюк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / под ред. К.И. Бабенко. – М.: Мир, 1980. – 608 с. 9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. 10. *Янке Е., Эмде Ф., Лёв Ф.* Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука, 1964. – 344 с. 11. *Дьяконов В.П.* Справочник по алгоритмам и программам на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука, 1989. – 240 с. 12. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с. 13. *Гурский Е.И.* Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с. 14. *Крамер Г.* Математические методы статистики / под ред. А.Н.Колмогорова. – М.:Мир, 1975. – 648с.

Bibliography (transliterated): 1. *Vambol', S. O., et al.* "Aproxymacija zakonu rozpodilu eksperymental'nyh danyh za dopomogoj beta-rozpodilu. Chasty 1." *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovykh prac'. Ser.: Matematyчне modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah.* No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 36–44. Print. 2. *Kobzar', A. I.* *Prıkladnaja matematyчeskaja statystyka. Dlja inzhenerov i nauchnykh rabotnykov.* Moscow: Fizmatlit, 2006. Print. 3. *Kendall, M., and A. Stjuart.* *Teorija raspredelelij.* Ed. A. N. Kolmogorov. Moscow: Nauka, 1966. Print. 4. *Tihonov, V. I.* *Statyčeskaja radiotekhnika.* Moscow: Radio i svjaz', 1982. Print. 5. *Hodasevich, G. B.* "Obrobotka eksperymental'nyh dannyh na EVM. Chast' 1. Obrabotka odnomernykh dannyh: Učebnoe posobie." *The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications.* The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications, 30 October 2009. Web. 20 September 2015. <http://www.opds.sut.ru/old/electronic_manuals/oed>. 6. *Vadzinskij, R. N.* *Spravočnik po veroyatnostnym raspredelelijam.* Saint-Petersburg: Nauka, 2001. Print. 7. *Kuznecov, D. S.* *Special'nye funkčii.* Moscow: Vysshaja shkola, 1962. Print. 8. *Ljuk, Ju.* *Special'nye matematyčeskije funkčii i ih approksimacii.* Ed. K. I. Babenko. Moscow: Mir, 1980. Print. 9. *Abramovich, M. ed., and I. Stigan, I. ed.* *Spravočnik po special'nyh funkčijam s formulami, grafi-*

kami i tablicami. Moscow: Nauka, 1979. Print. **10.** Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkcii (Formuly, grafiki, tablicy)*. Ed. L. I. Sedova. Moscow: Nauka, 1964. Print. **11.** D'jakonov, V. P. *Spravochnik po algoritmam i programma na jazyke BASIC dlja personal'nyh EVM: Spravochnik*. Moscow: Nauka, 1989. Print. **12.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Zadachi i uprazhnenija po teorii verojatnostej: Ucheb. posobie dlja stud. vtuzov*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademija», 2003. Print. **13.** Gurskij, E. I. *Teorija verojatnostej s elementami matematicheskoj statistiki*. Moscow: Vysshaja shkola, 1971. Print. **14.** Kramer, G. *Matematicheskie metody statistiki*. Ed. A. N. Kolmogorova. Moscow: Mir, 1975. Print.

Надійшла (received) 25.09.2015

Вамболь Сергій Олександрович – доктор технічних наук, професор, зав. кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Вамболь Сергей Александрович – доктор технических наук, профессор, зав. кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Vambol' Sergij Oleksandrovyč – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Мищенко Ігорь Вікторович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Мищенко Игорь Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Mishchenko Igor Viktorovyč – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Вамболь Віола Владиславівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри хімії, екології та експертизних технологій, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Вамболь Виола Владиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры химии, экологии и экспертных технологий, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Vambol' Viola Vladislavovna – Candidate of Technical Sciences, Docent, Docent at the Department of Chemistry, Ecology and Expertise Technology, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Кондратенко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної механіки факультета техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, г. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanun@i.ua.

Кондратенко Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanun@i.ua.

Kondratenko Oleksandr Mykolajovyč – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanun@i.ua.

УДК 389.14+658.16(075.8)

С. О. ВАМБОЛЬ, І. В. МІЩЕНКО, В. В. ВАМБОЛЬ, О. М. КОНДРАТЕНКО

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА 3

У даній, завершальній частині дослідження наведено визначення і проілюстровано параметри бета-розподілу для тіл кочення підшипників, а саме оцінено збіжність ітераційного процесу визначення цих параметрів, оцінено початкові і центральні моменти розподілу, збіг початкових моментів першого і другого порядку проілюстровано відповідними гістограмами і графіками. Наведені дані демонструють доцільність застосування математичного апарату бета-розподілу до вимірюваних фізичних величин, що чинять нелінійний вплив на механічні характеристики об'єкту дослідження. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу, для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

Вступ. У метрології існує підхід до побудови *універсальних сімей розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімей розподілів Пірсона (бета-розподілу)*, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до *нормального*, а отже вирізняється варіативністю і гнучкістю вирішення задачі апроксимації, але ще не повністю досліджений і не набув широкого використання. У попередніх частинах дослідження застосовано типовий закон розподілу (нормальний) до найпростішого елементу деталей машин – тіла кочення кулькового підшипника – як до тривимірного об'єкту найпростішої геометричної форми та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним, для знаходження справжнього або близького

до нього закону [1], а також здійснено описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу, особливості застосування узагальненого бета-розподілу до об'єкту дослідження, а також проаналізовано придатність нормального закону розподілу за оцінками коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, початкових і центральних моментів неперервних розподілів [2].

Аналіз літературних джерел. При проведенні дослідження проаналізовано 32 наукових джерела інформації, повний перелік яких подано у першій частині даного дослідження [1]. У тому ж джерелі наведено *мету, об'єкт, предмет* і перелік *задач дослідження*. У даній частині дослідження буде вирішено задачу визначення параметрів бета-розподілу для об'єкту дослідження.

Визначення параметрів бета-розподілу. Для узагальненого бета-розподілу математичне очікування $m_1(p, q)$, дисперсія $D(p, q)$, коефіцієнти асиметрії Sk й ексцесу Ex мають вигляд:

$$m_1(p, q) = \frac{J_{P_{\min}}q + J_{P_{\max}}p}{p+q}, \quad D(p, q) = \frac{(J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}})^2 pq}{(p+q)^2(p+q+1)}, \quad (1)$$

$$Sk = \frac{2(q-p)}{p+q+2} \sqrt{\frac{p+q+1}{pq}}, \quad (2)$$

$$Ex = \frac{6((p-q)^2(p+q+1) - pq(p+q+2))}{pq(p+q+2)(p+q+3)}. \quad (3)$$

Замінюючи $m_1(p, q)$ і $D(p, q)$ на відповідні вибіркові оцінки \tilde{m}_1 і \tilde{S}^2 (визначені за формулами з табл. 1.1 та 1.2 у [1]), скористуємось співвідношеннями для визначення параметрів розподілу (p, q) :

$$p = \frac{\tilde{m}_1 - J_{P_{\min}}}{J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}}} \cdot \left[\frac{(\tilde{m}_1 - J_{P_{\min}})(J_{P_{\max}} - \tilde{m}_1)}{\tilde{S}^2} - 1 \right], \quad (4)$$

$$q = \frac{J_{P_{\max}} - \tilde{m}_1}{J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}}} \cdot \left[\frac{(\tilde{m}_1 - J_{P_{\min}})(J_{P_{\max}} - \tilde{m}_1)}{\tilde{S}^2} - 1 \right]. \quad (5)$$

Ці вирази враховують моменти 1-го та 2-го порядків, що є цілком природним, але можна визначити параметри (p, q) за умов збігу 1-го та 3-го або 4-го початкових моментів. В роботі [3] проведено аналіз можливості опису бета-розподілом типу I щільності імовірності амплітуд напружень, які описуються *розподілом Релея* при вузькосмуговому випадковому процесі навантаження, та розподілами амплітуд за схематизацією за методом повних циклів при широкосмуговому процесі. При цьому як необхідна була умова рівності моментів 1-го та одного з вищих порядків.

Рівняння, які необхідно використати для пошуку (p, q) , є нелінійними, тому рішення системи нелінійних рівнянь можна отримати наближеними з деякою точністю [4, 5]. Дві невідомих обумовлюють систему, яка складається з двох рівнянь, одне з яких складено відносно 1-го початкового моменту, а друге відносно моменту більш високого n -го порядку. Загальний вираз цієї системи, в якій присутні моменти (8) у [1] та вибіркові оцінки моментів \tilde{m}_1, \tilde{m}_n , має наступний вигляд:

$$F_1(p, q) = m_1(p, q) - \tilde{m}_1 = 0; \quad F_n(p, q) = m_n(p, q) - \tilde{m}_n = 0. \quad (6)$$

Початковим наближенням рішення цієї системи є величини (p, q) , які визначені за формулами (5) – (6) у [1], що після підстановки в (6) дає два значення $F_1(p, q)$ і $F_n(p, q)$.

Далі складається *матриця Якобі* $W(p, q)$, в якій елементами є частинні похідні за змінними (p, q) , що має наступний вид:

$$W(p, q) = \begin{pmatrix} \partial F_1(p, q) / \partial p & \partial F_1(p, q) / \partial q \\ \partial F_n(p, q) / \partial p & \partial F_n(p, q) / \partial q \end{pmatrix}. \quad (7)$$

З урахуванням виразу (6) отримуємо

$$\frac{\partial F_n(p, q)}{\partial p} = \frac{\Gamma(p)\Gamma'_p(p+q) - \Gamma'_p(p)\Gamma(p+q)}{[\Gamma(p)]^2} \times \sum_{k=0}^n C_n^k (J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}})^k J_{P_{\min}}^{n-k} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)} + \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^n C_n^k (J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}})^k J_{P_{\min}}^{n-k} \times \frac{\Gamma'_p(p+k)\Gamma(p+q+k) - \Gamma'_p(p+q+k)\Gamma(p+k)}{[\Gamma(p+q+k)]^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial F_n(p, q)}{\partial q} = \frac{\Gamma'_q(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^n C_n^k (J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}})^k J_{P_{\min}}^{n-k} \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p+q+k)} - \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^n C_n^k (J_{P_{\max}} - J_{P_{\min}})^k J_{P_{\min}}^{n-k} \frac{\Gamma'_q(p+q+k)\Gamma(p+k)}{[\Gamma(p+q+k)]^2}. \quad (9)$$

Далі визначається детермінант матриці за наступною формулою:

$$\Delta = \det W(p, q) = \partial F_1(p, q) / \partial p \cdot \partial F_n(p, q) / \partial q - \partial F_1(p, q) / \partial q \cdot \partial F_n(p, q) / \partial p, \quad (10)$$

його нерівність нулю означатиме неособливість цієї матриці, і після складається зворотна до неї матриця $W^{-1}(p, q)$, елементами якої у випадку матриці розміром (2×2) є:

$$W^{-1}(p, q) = \begin{pmatrix} W_{22}(p, q) / \Delta & -W_{12}(p, q) / \Delta \\ -W_{21}(p, q) / \Delta & W_{11}(p, q) / \Delta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Нове наближене значення на першому ітераційному кроці позначаємо (p^*, q^*) і визначаємо за формулою (12).

Аналогічно проводяться подальші обчислення, які завершуються після досягання заданої точності для змінних. За необхідності можна скласти систему рівнянь з урахуванням значень початкових моментів ще більших порядків, але доцільність цього в даній роботі не розглядається.

$$\begin{pmatrix} p^* \\ q^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \partial F_n(p, q) / \partial q & -\partial F_1(p, q) / \partial q \\ -\partial F_n(p, q) / \partial p & \partial F_1(p, q) / \partial p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_1(p, q) \\ F_n(p, q) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Таблиця 1 – Збіжність ітераційного процесу

Ітераційний крок	$N = 3000, m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,11130$ мм (збіг 1-го та 2-го початкових моментів)	$N = 3000, m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,11130$ мм (збіг 1-го та 3-го початкових моментів)	$N = 3000, m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,11130$ мм (збіг 1-го та 4-го початкових моментів)
0	$p = 3,83067531, q = 7,73589558$	$p = 3,83067531, q = 7,73589558$	$p = 3,83067531, q = 7,73589558$
1	$F_1(p, q) = 1,81899 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = 1,08530 \cdot 10^{-5}$ $p = 3,83206259, q = 7,73869715$	$F_1(p, q) = 1,81899 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = -0,00155647$ $p = 3,73425370, q = 7,54117593$	$F_1(p, q) = 1,81899 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = -0,00507299$ $p = 3,61465942, q = 7,29965997$
2	$F_1(p, q) = -4,4565 \cdot 10^{-11}$ $F_2(p, q) = 3,57200 \cdot 10^{-9}$ $p = 3,83206306, q = 7,73869809$	$F_1(p, q) = 2,99775 \cdot 10^{-9}$ $F_2(p, q) = 3,79792 \cdot 10^{-5}$ $p = 3,73649545, q = 7,54570314$	$F_1(p, q) = 6,93854 \cdot 10^{-9}$ $F_2(p, q) = 0,000299854$ $p = 3,62604224, q = 7,32264729$
3	$F_1(p, q) = 2,72848 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = 1,8194 \cdot 10^{-12}$ $p = 3,83206306, q = 7,73869809$	$F_1(p, q) = -8,0945 \cdot 10^{-11}$ $F_2(p, q) = 2,14618 \cdot 10^{-8}$ $p = 3,73649673, q = 7,54570571$	$F_1(p, q) = -5,2751 \cdot 10^{-10}$ $F_2(p, q) = 9,29593 \cdot 10^{-7}$ $p = 3,62607778, q = 7,32271906$
4	$F_1(p, q) = 0,0$ $F_2(p, q) = 4,5475 \cdot 10^{-13}$ $p = 3,83206306, q = 7,73869809$	$F_1(p, q) = 0,0$ $F_2(p, q) = 2,14618 \cdot 10^{-8}$ $p = 3,73649673, q = 7,54570571$	$F_1(p, q) = -1,8190 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = 8,1855 \cdot 10^{-12}$ $p = 3,62607778, q = 7,32271906$
5	$F_1(p, q) = 0,0$ $F_2(p, q) = 0,0$ $p = 3,83206306, q = 7,73869809$	$F_1(p, q) = 0,0$ $F_2(p, q) = -4,547 \cdot 10^{-13}$ $p = 3,73649673, q = 7,54570571$	$F_1(p, q) = -1,8190 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = -1,364 \cdot 10^{-12}$ $p = 3,62607778, q = 7,32271906$
6	-	-	$F_1(p, q) = 1,8190 \cdot 10^{-12}$ $F_2(p, q) = 1,3642 \cdot 10^{-12}$ $p = 3,62607778, q = 7,32271906$

Присутність у виразах (10), (12) частинних похідних від гамма-функції за змінними p і q приводить до необхідності отримання аналітичного виразу для *гамма-функції* $\Gamma(z)$, де $z = p + q + i$ (i приймає значення 0, 1, 2, 3 ...). Skorиставшись *формулою Стірлінга* (10) у [1], маємо (не показані останні два доданки в дужках)

$$\Gamma'(z) \approx e^{-z} z^{z-1/2} (2\pi)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \dots \right) \times \left(\ln z - \frac{1}{2z} \right) - \left(\frac{1}{12z^2} + \frac{1}{144z^3} - \frac{139}{17280z^4} - \frac{571}{622080z^5} + \dots \right) \right]. \quad (13)$$

В той же час можна скористатися відомим [6 – 9] співвідношенням

$$\Gamma'(z) = \Psi(z)\Gamma(z), \quad (14)$$

де $\Psi(z)$ – *пси-функція*, або *дигамма функція* $\Psi(z) = d[\ln(z)] / dz$, асимптотична формула для якої має вигляд

$$\Psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6}. \quad (15)$$

Для перевірки точності запропонованих формул було проведено порівняння з відомим значенням $\Psi(1) = -C = -0,57721566490\dots$ (стала Ейлера). За формулою (14) $\Gamma'(1) = \Psi(1) \approx -0,57896825$ (з урахуванням $\Gamma(1) = 1$), а за формулою (13) $\Gamma'(1) \approx -0,579128335$. В подальшому за необхідності обчислення похідної від гамма-функції в роботі використовується формула (14).

Приклад розрахунку. В табл. 6 у [1] відображені для вибірки $N = 3000$ з параметрами $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,11130$ мм ітераційні кроки щодо вирішення системи (6) за умов збігу певних початкових моментів. Для всіх розрахунків початковим наближенням є $p = 3,83067531$, $q = 7,73589558$, яке отримано з (4) і (5). Необхідна точність в розрахунках не задавалася. Аналіз даних з табл. 1 показує, що за умов вдалого початкового наближення значень (p, q) ітераційний процес має швидку збіжність. Для вибірок з різними N і σ_d були проведені числові розрахунки з розрахунків параметрів бета-розподілу. В табл. 3 і 4 для значень $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм приведені величини початкових і центральних моментів відповідних розподілів (момент $\mu_1 = 0$ для усіх розподілів). Жирним шрифтом показані ті моменти, рівність яких необхідна при розрахунках уточненого значення параметрів бета-розподілу.

Таблиця 2 – Початкові і центральні моменти розподілу

$N = 3000, m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм					
Моменти розподілу	Емпіричний розподіл (гістограма)	Теоретичний розподіл $g(J_p)$	Бета розподіл $f(J_p)$ $p = 3,8306753$ $q = 7,7358956$	Бета розподіл $f(J_p)$ $p^* = 3,8320631$ $q^* = 7,7386981$	
Початкові	m_1	0,64436396	0,64438131	0,64436396	0,64436396
	m_2	0,44775301	0,44783132	0,44776386	0,44775301
	m_3	0,33424155	0,33432263	0,33268507	0,33266268
	m_4	0,26720866	0,26714242	0,26213568	0,26210310
Центр.	μ_2	0,03254810	0,03260404	0,03255895	0,03254810
	μ_3	0,00378001	0,00372963	0,00220255	0,00220114
	μ_4	0,00398597	0,00388699	0,00295176	0,00294986
Коефіцієнти асиметрії та ексцесу					
Sk	0,64373057	0,63351739	0,37490468	0,37485140	
Ex	0,76255408	0,65653920	-0,21554531	-0,21547850	

Таблиця 3 – Початкові і центральні моменти розподілу

$N = 3000, m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм					
Моменти розподілу	Емпіричний розподіл (гістограма)	Теоретичний розподіл $g(J_p)$	Бета розподіл $f(J_p)$ $p = 3,8306753$ $q = 7,7358956$	Бета розподіл $f(J_p)$ $p^* = 3,6260778$ $q^* = 7,3227191$	
Початкові	m_1	0,64436396	0,64438131	0,64436396	0,64436396
	m_2	0,44775301	0,44783132	0,44776386	0,44944721
	m_3	0,33424155	0,33432263	0,33268507	0,33616354
	m_4	0,26720866	0,26714242	0,26213568	0,26720866
Центр.	μ_2	0,03254810	0,03260404	0,03255895	0,03424231
	μ_3	0,00378001	0,00372963	0,00220255	0,00242694
	μ_4	0,00398597	0,00388699	0,00295176	0,00325277
Коефіцієнти асиметрії та ексцесу					
Sk	0,64373057	0,63351739	0,37490468	0,38301451	
Ex	0,76255408	0,65653920	-0,21554531	-0,22587001	

Як бачимо, проведене уточнення (p^*, q^*) за умов рівності моментів 1-го та 2-го порядків практично не відрізняється від базового значення, в той же час, для комбінації з моментами більш високих порядків відмінності (p^*, q^*) від початкових (p, q) більш суттєві.

За результатами проведених досліджень для кожної низки значень N і σ_d були побудовані серії з чотирьох рисунків, на яких представлені графіки емпіричного розподілу (гістограма) у порівнянні відповідно з нормальним, теоретичним і бета розподілами, а також зведений сумісний графік останніх трьох розподілів.

На цих рисунках цифрами позначені: 1 – нормальний розподіл (пунктирна крива), 2 – теоретичний розподіл (штрих-пунктирна крива), 3 – бета-розподіл (суцільна крива). Як приклад, для даних $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм на рис. 1 показані гістограма і нормальний закон, а на рис. 2 показані всі розподіли.

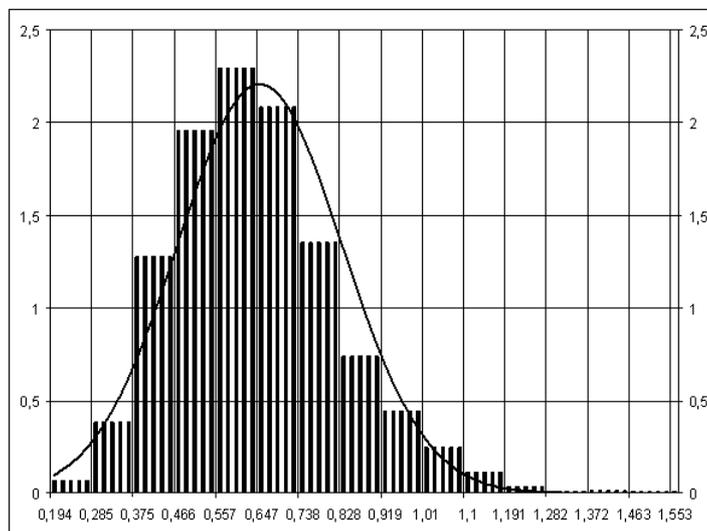


Рис. 1 – Збіг початкових моментів 1-го та 2-го порядку для $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм: гістограма – емпіричний розподіл; суцільна крива – нормальний розподіл.

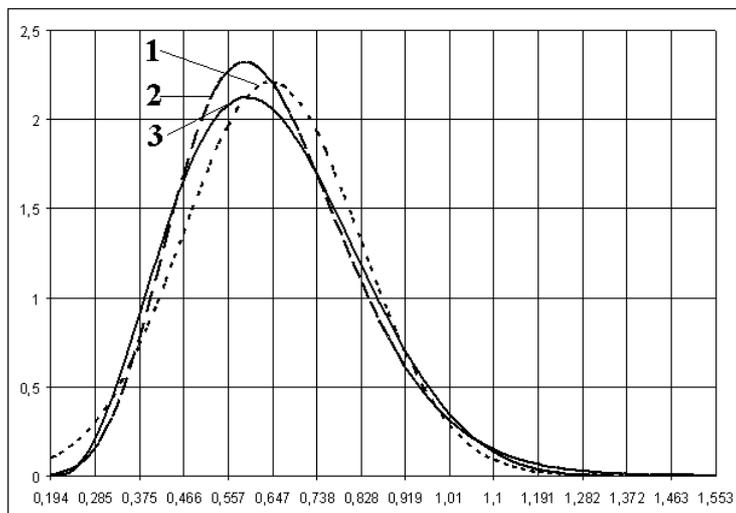


Рис. 2 – Збіг початкових моментів 1-го та 2-го порядку для $N = 3000$, $m_d = 1,59$ мм, $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$ мм: крива 1 – нормальний розподіл; крива 2 – теоретичний розподіл; крива 3 – бета-розподіл

Висновки. Таким чином, в роботі розглянута задача апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису, які представлені у вигляді вибірки та на їх основі побудовані гістограми, за допомогою бета-розподілу.

У даній, завершальній частині дослідження наведено розроблену методику та числові і графічні результати застосування математичного апарату бета-розподілу до об'єкту дослідження, для тіл кочення підшипників, а саме оцінено збіжність ітераційного процесу визначення цих параметрів, оцінено початкові та центральні моменти розподілу, збіг початкових моментів першого і другого порядку проілюстровано відповідними гістограмами і графіками. Наведені дані демонструють доцільність застосування математичного апарату бета-розподілу до вимірюваних фізичних величин, що чинять нелінійний вплив на механічні характеристики об'єкту дослідження.

За цими даними можна зробити висновок про те, що мети дослідження досягнуто, а задачі дослідження виконано у повному обсязі.

Вперше показано переваги застосування бета-розподілу для апроксимації емпіричного закону розподілу будь-яких даних вимірювань на прикладі геометричних характеристик тіл кочення підшипників.

Отримана методологія і математичний апарат для застосування бета-розподілу придатні для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Список літератури: 1. *Вамболь С.О., Мищенко І.В., Кондратенко О.М., Бурменко О.А.* Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 1 // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 36 – 44. 2. *Вамболь С.О., Мищенко І.В., Вамболь В.В., Кондратенко О.М.* Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 2 // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2015. – № 41 (1150). – С. 11 – 16. 3. *Жовдак В.А., Мищенко І.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Х.: Харьковский государственный политехнический университет, 1999. – 120 с. 4. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики / Под общ. ред. Б.П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Госуд. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 660 с. 5. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с. 6. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 249 с. 7. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации / Под ред. К.И. Бабенко. – М.: Мир, 1980. – 608 с. 8. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с. 9. *Янке Е., Эмде Ф., Лёйб Ф.* Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

Bibliography (transliterated): 1. Vambol', S. O., et al. "Aproksymacija zakonu rozpodilu eksperymental'nyh danyh za dopomogoj beta-rozpodilu. Chastyha 1." *Visnyk Nacional'nogo tehnicznego universitetu «KhPI». Zbirnyk naukovuh prac'. Ser.: Matematychnje modeljuvannja v tehnicji ta tehnologijah.* No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 36–44. Print. 2. Vambol', S. O., et al. "Aproksymacija zakonu rozpodilu eksperymental'nyh danyh za dopomogoj beta-rozpodilu. Chastyha 2." *Visnyk Nacional'nogo tehnicznego universitetu «KhPI». Zbirnyk naukovuh prac'. Ser.: Matematychnje modeljuvannja v tehnicji ta tehnologijah.* No. 41 (1150). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 11–16. Print. 3. Zhovdak, V. A., and I. V. Mishchenko. *Prognozirovanije nadezhnosti elementov konstrukcij s uchetom tehnologicheskikh i ekspluatacionnyh faktorov.* Kharkov: Khar'kovskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet, 1999. Print. 4. Demidovich, B. P., and I. A. Maron. *Osnovy vychislitel'noj matematiki.* Ed. B. P. Demidovich. Moscow: Gosud. izd-vo fiz.-mat. lit-ry, 1963. Print. 5. Dennis, Dzh., and R. Shnabel'. *Chislennye metody bezuslovnoj optimizacii i reshenija nelinejnyh uravnenij.* Moscow: Mir, 1988. Print. 6. Kuznecov, D. S. *Special'nye funkcii.* Moscow: Vysshaja shkola, 1962. Print. 7. Ljuk, Ju. *Special'nye matematicheskie funkcii i ih approksimacii.* Ed. K. I. Babenko. Moscow: Mir, 1980. Print. 8. *Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafikami i tablicami.* Ed. M. Abramovic, and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. Print. 9. Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkcii (Formuly, grafiki, tablicy).* Ed. L. I. Sedov. Moscow: Nauka, 1964. Print.

Надійшла (received) 29.09.2015

Вамболь Сергій Олександрович – доктор технічних наук, професор, зав. кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Вамболь Сергей Александрович – доктор технических наук, профессор, зав. кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Vambol' Sergij Oleksandrovych – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: sergvambol@gmail.com.

Мищенко Ігорь Вікторович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки факультету техногенно-екологічної безпеки, Національний університет цивільного захисту України, м. Харків; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Мищенко Игорь Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Mishchenko Igor Viktorovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: ivmishch@mail.ru.

Вамболь Віола Владиславівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри хімії, екології та експертизних технологій, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Вамболь Виола Владиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры химии, экологии и экспертных технологий, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Vambol' Viola Vladislavovna – Candidate of Technical Sciences, Docent, Docent at the Department of Chemistry, Ecology and Expertise Technology, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Кондратенко Олександр Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної механіки факультета техногенно-екологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Кондратенко Александр Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной механики факультета техногенно-экологической безопасности, Национальный университет гражданской защиты Украины, г. Харьков; тел.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

Kondratenko Oleksandr Mykolajovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Applied Mechanics, Department of Technogenic and Environmental Safety, National University of Civil Protection of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 707-34-07; e-mail: kharkivjanyn@i.ua.

А. В. ВОРОПАЙ

РЕГУЛЯРИЗУЮЩИЙ АЛГОРИТМ А. Н. ТИХОНОВА В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Описан регуляризирующий алгоритм академика А. Н. Тихонова и его применения для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при исследовании интегральных уравнений, к которым могут быть сведены задачи нестационарного деформирования упругих элементов конструкции. В рамках регуляризирующего алгоритма рассмотрена конечномерная аппроксимация некорректной задачи и сглаживающего функционала. Описан пример решения тестовой некорректной задачи с использованием регуляризирующего алгоритма. Особое внимание уделено вопросу выбора параметра регуляризации.

Ключевые слова: некорректная задача, нестационарное нагружение, интегральные уравнения Вольтерра, сглаживающий функционал, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, параметр регуляризации.

Введение. Как известно, задачи нестационарного деформирования упругих элементов конструкции описываются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных или их системами [1 – 2]. При их аналитическом решении относительно переменной времени t одним из наиболее эффективных методов является использование операционного исчисления [3 – 4]. В случае использования преобразования Лапласа дифференциальным уравнениям в пространстве изображений соответствуют алгебраические уравнения относительно переменной Лапласа s . Трудность состоит, как правило, только в обратном преобразовании сложных функций. Использование теоремы о свертке при получении оригиналов функций приводит к тому, что искомое решение представляется в виде *интеграла Дюамеля* (свертки):

$$u(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t-\tau) d\tau, \quad (1)$$

которое при известных функциях $u(t)$, $F_2(t)$ и неизвестной функцией $F_1(t)$ является *интегральным уравнением Вольтерра I-го рода*.

Такие уравнения встречаются при решении обратных нестационарных задач механики [5 – 6], когда зависимость изменения во времени возмущающей силы $z(t)$ неизвестна, а известны ее косвенные проявления. Например, $u(t)$ – это изменения во времени перемещений или деформации в некоторой точке элемента конструкции, вызванные этой силой. Классический вид интегрального уравнения (1):

$$\int_0^t K(t-\tau) z(\tau) d\tau = u(t), \quad (2)$$

где функцию $K(t)$ принято называть разностным ядром интегрального уравнения.

Решение интегральных уравнений Вольтерра (2) зачастую является некорректной задачей. В работах [7 – 10] подробно описаны условия некорректности задач математической физики, а также некоторые методы их решения, например *метод регуляризации Тихонова*.

Отметим, что все математические аспекты (доказательства, возможности применения метода регуляризации, сходимости, устойчивости и т.п.) детально описаны в многочисленных трудах академика А. Н. Тихонова и его последователей [8 – 10], посвященных современной теории некорректных задач математической физики. Наибольшее развитие метод регуляризации Тихонова получил в задачах астрофизики [10]. В настоящее время регулярно появляются математические работы, посвященные обобщениям метода регуляризации Тихонова [11], а также вопросам выбора параметра регуляризации [12 – 13].

В этой работе описываются прикладные аспекты *регуляризирующего алгоритма* А. Н. Тихонова, особенности его использования при решении некорректных нестационарных задач механики, а также вопросы, связанные с выбором параметра регуляризации.

Описание регуляризирующего алгоритма. При численном решении некорректных задач необходимо аппроксимировать исходную бесконечномерную задачу конечномерной, для которой разрабатывается алгоритм, реализуемый на ЭВМ. Рассмотрим регуляризирующий алгоритм для решения интегрального уравнения Вольтерра I-го рода.

Запишем уравнение (2) в операторной форме:

$$A \cdot z = u, \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (3)$$

где Z и U – гильбертовы пространства; A – интегральный оператор, соответствующий ядру $K(t)$; z – искомая функция, соответствующая $z(t)$; u – соответствует правой части $u(t)$.

Конечно-разностная аппроксимация выражения (3) строится с использованием квадратурных формул (например, формул *метода прямоугольников*, *метода трапеций* и т.п.). *Дискретным аналогом* для операторного уравнения (3) является система линейных алгебраических уравнений, записанная в матричном виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{u}, \quad (4)$$

где \mathbf{A} – матрица, соответствующая интегральному оператору A , элементы которой могут быть найдены согласно зависимости $a_{i,j} = K[(i-j)\Delta t]$; Δt – шаг дискретизации по времени; \mathbf{z} – вектор, соответствующий неизвестной функции $z(t)$; \mathbf{u} – вектор, соответствующий правой части $u(t)$, элементы которого определяются как $u_i = u(i \cdot \Delta t)$.

Отметим, что в случае дискретизации интегрального оператора A , соответствующего ядру $K(t, \tau)$, на самом деле возникнет уже новый оператор A_h , соответствующий $K_h(t, \tau)$, такой что, согласно А. Н. Тихонову, $\|A - A_h\|_{W_2^1 \rightarrow L_2} \leq h_\delta^\infty$, где h_δ – так называемая погрешность дискретизации. Так как $h_\delta \rightarrow 0$, для простоты в матричном соотношении (4) и везде в дальнейшем индекс h будет опускаться.

В случае невырожденного ядра и хорошо обусловленной матрицы \mathbf{A} , возможности вычисления обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1} \subset \emptyset$, можно получить следующее выражение для искомого вектора:

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}. \quad (5)$$

Если вместо точного значения $\bar{u} = A \cdot \bar{z}$, нам известно приближенное значение u_δ , такое что $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, где $\delta > 0$ – погрешность задания правой части уравнения (исходных данных), то $U = L_2[0, T]$, где T – величина всего промежутка исследования $T = J \cdot \Delta t$, J – число шагов по времени. Из физических соображений можно считать, что точное решение \bar{z} , соответствующее \bar{u} , есть непрерывная функция и имеет почти всюду производную, интегрируемую на $[0, T]$ с квадратом, тогда естественно положить $Z = W_2^1[0, T]$. В описанной постановке для безразмерного уравнения (3) сглаживающий функционал А. Н. Тихонова имеет вид:

$$M^\alpha [z] = \|Az - u\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2, \quad (6)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

В развернутом виде (6) можно записать так:

$$M^\alpha [z] = \int_0^T \left[\int_0^t K(t-\tau) z(\tau) d\tau - u(t) \right]^2 dt + \alpha \int_0^T \left\{ z^2(t) + [z'(t)]^2 \right\} dt.$$

Решение некорректной задачи сводится к отысканию минимума сглаживающего функционала $\inf_{z \in Z} M^\alpha [z]$ или его дискретного аналога $\inf_{z \in Z} \hat{M}^\alpha [z]$. Дискретизацию проще всего осуществлять на основе конечно-разностной аппроксимации с равномерным и одинаковым шагом сеток $\Delta t = \Delta \tau = T/J$ на отрезке $[0, T]$. При реализации вычислений на ЭВМ исследования показали, что удовлетворительные результаты получаются уже при $J \geq 100$. Увеличение количества шагов во времени влечет за собой уменьшение Δt , что уже несет некоторое регуляризирующее действие, как показано, например, в [7]. Значительное повышение количества шагов вызывает большие затраты машинного времени. При проведении вычислительных экспериментов, было установлено, что при решении тестовых задач хорошие устойчивые результаты были достигнуты при $J = 500$.

Таким образом, согласно регуляризирующему алгоритму Тихонова решение интегрального уравнения Вольтерра (2) эквивалентно решению регуляризированной системы линейных уравнений:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \quad (7)$$

где \mathbf{A}^T – транспонированная к \mathbf{A} матрица, \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная $(J \times J)$ матрица, имеющая вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+1/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/\Delta t^2 & 1+2/\Delta t^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+2/\Delta t^2 & -1/\Delta t^2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/\Delta t^2 & 1+1/\Delta t^2 \end{bmatrix}.$$

Решение системы (7) можно записать в явном виде:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{u}. \quad (8)$$

Выбор параметра регуляризации. Определенной сложностью для ряда исследователей является оптимальный выбор параметра регуляризации. Подробно рассмотрим вопрос выбора параметра регуляризации α при решении уравнений Вольтерра I-го рода с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова, реализуемого на ЭВМ.

Классическими и наиболее удобными методами выбора параметра регуляризации α для большинства обратных задач являются методы минимизации по α функционалов *невязки* типа:

$$\|z^\alpha - \bar{z}\|_C; \tag{9}$$

$$\|A_z z^\alpha - u\|_{L_2}^2, \tag{10}$$

где \bar{z} – точное решение, z^α – приближенное, полученное с использованием регуляризирующего алгоритма Тихонова при различных α .

Укажем, что введение и минимизация функционала (9) возможна только в некоторых случаях, например, в тестовых задачах, при тарировке и др., когда известно точное решение или его оценки. Соответственно в большинстве случаев необходимо использовать функционал вида (10). Причем, в зависимости от конкретных задач, иногда приходится искать глобальные экстремумы, иногда локальные – тогда удобно для более удачного выбора параметра регуляризации вводить дополнительные функционалы, используя различную априорную информацию об искомой функции (ограничение величины и тому подобное).

Отдельно рассмотрим влияние параметра регуляризации при решении некорректных задач механики, сводящихся к интегральным уравнениям Вольтерра.

При $\alpha = 0$ из зависимости (8) можно получить следующее соотношение:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \tag{10}$$

которое при сокращении справа и слева на \mathbf{A}^T совпадает с соотношением (3); однако соотношение (10) также имеет место, поскольку иногда невозможно найти \mathbf{A}^{-1} , но удается приблизительно вычислить $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$.

Из соотношения (8) видно, что чем меньше значение параметра регуляризации α , тем меньшая неточность вносится в исходное уравнение (2), то есть при равных значениях функционалов желательно брать по возможности меньшие значения параметра регуляризации. Однако при очень малых значениях α сглаживающий функционал Тихонова будет иметь очень слабый стабилизирующий эффект и при незначительных возмущениях правой части интегрального уравнения решение будет неустойчивым.

Так же отметим, что в (7) параметр регуляризации умножается на матрицу \mathbf{C} , элементы которой пропорциональны $1/\Delta t^2$, то есть матрица \mathbf{C} может состоять из достаточно больших чисел (в рассмотренном ниже примере это величины порядка $10^9 \div 10^{10}$), так как при исследовании переходных процессов, к которым относится нестационарное (высокоскоростное) деформирование упругих элементов конструкции, анализируются очень короткие промежутки времени с достаточно большим числом шагов дискретизации. В связи с этим для ненормированных матриц $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ и \mathbf{C} , приходится использовать достаточно малые величины параметра регуляризации ($\alpha < 10^{-20}$).

Так как сглаживающий функционал Тихонова справедливо вводить только для безразмерных операторных уравнений вида (3), рассмотрим варианты перехода к безразмерной задаче:

1) В исходных уравнениях пространственные координаты относятся к длине или ширине пластины, а время делится на этот же параметр и умножается на характерную скорость (волн сдвига или изгиба), то есть переменная времени относится к времени пробега волны через пластину. Например: $t_{II} = l/\sqrt{E/(\rho(1-\nu))}$.

2) Перед дискретизацией время берется не в секундах, а в долях наибольшего периода по первой гармонике. Также в сглаживающем функционале слагаемое при искомой функции (нагрузке) делится на квадрат статической жесткости механической системы в исследуемой точке пластины. Для описанного ниже примера в случае использования указанного варианта обезразмеривания $\alpha_{opt} = 10^{-2}$.

3) Все размерные величины делятся на единичные размерные коэффициенты. С точки зрения минимизации вычислений – это самый быстрый и простой метод, но он приводит к очень маленьким величинам параметра регуляризации $\alpha < 10^{-20}$. Укажем, что приведенные далее расчеты были выполнены согласно этому варианту перехода к безразмерной задаче. Для этого случая возможна дополнительная нормировка матриц с целью приведения их элементов к величинам порядка $1 \div 10$, в таком случае $\alpha \in [0.001; 10]$.

Отметим, что в случае размерного операторного уравнения в обратных нестационарных задачах механики деформируемого твердого тела можно использовать модифицированный сглаживающий функционал вида:

$$\widehat{M}^\alpha [z] = \|Az - u\|_{L_2}^2 + (\alpha^*)^2 \cdot c_{st}^2 \left[\omega_{\min}^2 \cdot \|z\|_{L_2}^2 + \|z'\|_{L_2}^2 \right],$$

где α^* – безразмерный параметр регуляризации в размерной задаче; c_{st} – статическая жесткость системы в исследуемой точке; ω_{\min} – минимальная собственная частота колебаний пластины. Для описанного в статье примера $\alpha_{opt}^* = 10^{-5}$.

Пример решения обратной некорректной задачи для упругодеформируемой пластины. Рассмотрим детально численное решение обратной некорректной задачи для прямоугольной шарнирно опертой пластины средней толщины, аналогичной изложенной в [14]. Поскольку здесь будет описан вычислительный эксперимент по решению обратной задачи, то, в отличие от реальных экспериментальных исследований, точная зависимость

возмущающей силы будет известна. Соответственно для такой тестовой задачи имеется дополнительная возможность оценки точности идентификации внешней нагрузки при разных значениях параметра регуляризации.

При идентификации неизвестной нестационарной нагрузки $P(t)$, действующей на пластину, по известным изменениям прогиба $w(t)$ в некоторой точке пластины, вызванным этой силой, как раз необходимо решать интегральное уравнение Вольтера I-го рода

$$\int_0^t K(t-\tau)P(\tau)d\tau = w(t), \quad (11)$$

где $K(t)$ – его ядро, которое определяется на основании аналитического или численно-аналитического решения прямой задачи (то есть системы дифференциальных уравнений в частных производных). Как показано в [5 – 6, 11] ядро $K(t)$ для прямоугольных пластин имеет следующий вид:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \Omega_{jkn} \cdot \sin \omega_{jkn}(t).$$

Порядок проведения вычислительного эксперимента по решению обратной некорректной задачи был принят следующим:

- Предварительно задавалась возмущающая нагрузка $\bar{P}(t)$ (полуволна синусоиды определенной амплитуды).
- Из соотношения (11) определялись значения прогиба $\bar{w}(t)$ при действии заданной нагрузки.
- Вместо точных значений $w(t)$ в качестве исходных данных для обратной задачи задавались приближенные значения $w_{\delta}(t)$. Возмущение с уровнем $\delta = 10\%$ осуществлялось по зависимости:

$$w_{\delta}(t) = \bar{w}(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t),$$

где w_{\max} – максимальное значение прогиба пластины при действии нагрузки $\bar{P}(t)$, $Rnd(t)$ – случайные числа в диапазоне $[-1; 1]$.

- Уравнение (11) решалось при точно заданной функции $\bar{w}(t)$ и возмущенной $w_{\delta}(t)$ правой части.
- Производился выбор оптимального параметра регуляризации.
- Производилась оценка точности идентификации по заданной возмущающей нагрузке $\bar{P}(t)$.

При расчетах срединная плоскость пластины совпадала с плоскостью xOy декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0.3$; $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0.04 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.3 \text{ м}$. Координаты точки, значения прогиба в которой использовались при решении обратной задачи: $x_s = 0.25 \text{ м}$, $y_s = 0.1 \text{ м}$. Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

На рис. 1 показаны изменения во времени прогиба $w_s(t) = \bar{w}(t)$, найденного в результате решения прямой задачи – точные значения правой части уравнения (жирная кривая) и $w_{\delta}(t)$ – неточно заданные значения правой части, используемые в качестве исходных данных (тонкая кривая).

Неизвестная возмущающая нагрузка $P(t)$ определялась из выражения вида (8). Если выписать матрицу при векторе, соответствующем искомой нагрузке для регуляризированной системы линейных уравнений, то видно, что она будет иметь два слагаемых $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})$. Очевидно, что элементы матрицы $\alpha \cdot \mathbf{C}$, содержащие параметр регуляризации не должны превышать или быть значительно меньше элементов матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$. Для данного расчетного случая максимальные значения элементов матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ были порядка $2 \cdot 10^{-18}$, минимальные значения для взятых по модулю элементов этой матрицы $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ были порядка $5 \cdot 10^{-28}$. Максимальное значение элементов матрицы \mathbf{C} для исследуемого промежутка времени было равно $\max(\mathbf{C}) = 7.813 \cdot 10^9$ или порядка 10^{10} . Следовательно, для описанного случая параметр регуляризации α должен находиться примерно в диапазоне от $10^{-18} \cdot 10^{-9} = 10^{-27}$ до $10^{-28} \cdot 10^{-9} = 10^{-37}$, сдвинутом на 10^{+2} . Таким образом в настоящей работе величина параметра регуляризации исследовалась в диапазоне $\alpha \in [10^{-35}; 10^{-25}]$. Укажем, что на некоторых из следующих рисунков для удобства анализа показан не весь диапазон, а только его часть.

Причем, при решении тестовой задачи, хорошо видно, что при значениях $\alpha = 10^{-25}$ приближенное решение получалось недостаточно точным, а максимальная амплитуда получалась сильно заниженной, рис. 2, где жирной кривой соответствует точная сила $\bar{P}(t)$, а тонкой – идентифицированная. Это обусловлено тем, что слагаемое $\alpha \cdot \mathbf{C}$ превышает матрицу $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, содержащую ядра интегрального уравнения. При всех $\alpha > 10^{-25}$ ситуация усугубляется и найденное приближенное решение не имеет смысла.

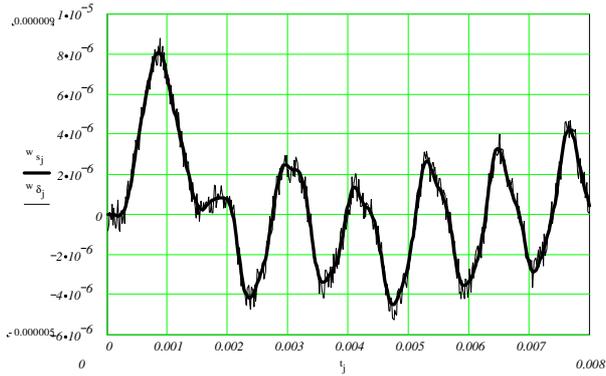


Рис. 1 – Исходные данные для обратной задачи.

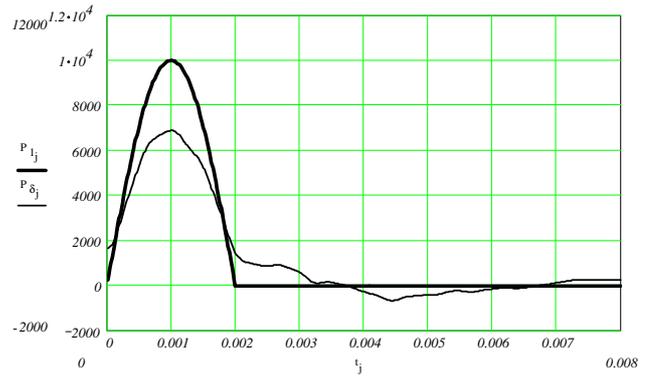


Рис. 2 – Возмущающая и определенная приближенно нагрузка.

Для выбора оптимальных значений параметра регуляризации α при решении регуляризированной системы линейных уравнений (5) исследовались несколько функционалов, графические зависимости которых приведены ниже. Укажем, что на всех этих графиках параметр регуляризации для наглядности отложен вдоль оси абсцисс в логарифмической шкале.

На рис. 3 показаны функционалы типа невязки, на основе которых зачастую выбирается параметр регуляризации:

В случае неточно заданной правой части интегрального уравнения $w_\delta(t)$ функционал невязки можно записать в виде: $\|A \cdot P^\alpha - w_\delta\|_{l_2}^2$ (рис. 3, а); в тестовой задаче мы можем увидеть вид этого функционала для возмущенной правой части $\bar{w}(t) - \|A \cdot P^\alpha - w\|_{l_2}^2$ (рис. 3, б).

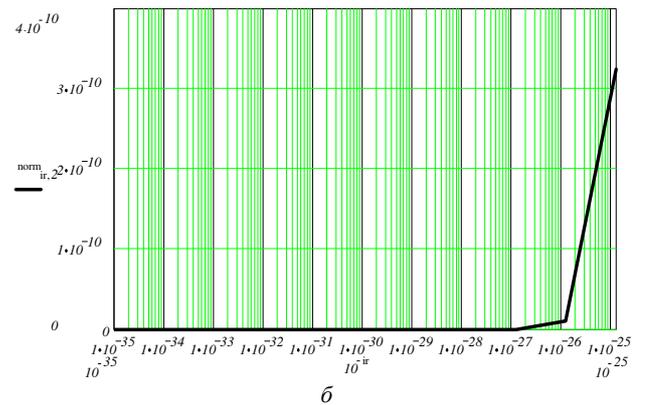
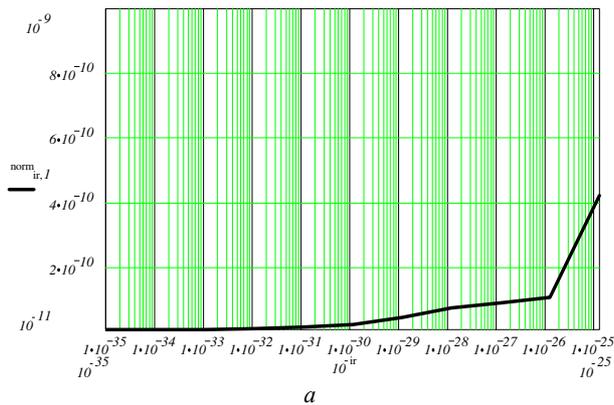


Рис. 3 – Вид функционалов типа невязки
а – невязка для возмущенной правой части; б – невязка для точно заданной правой части.

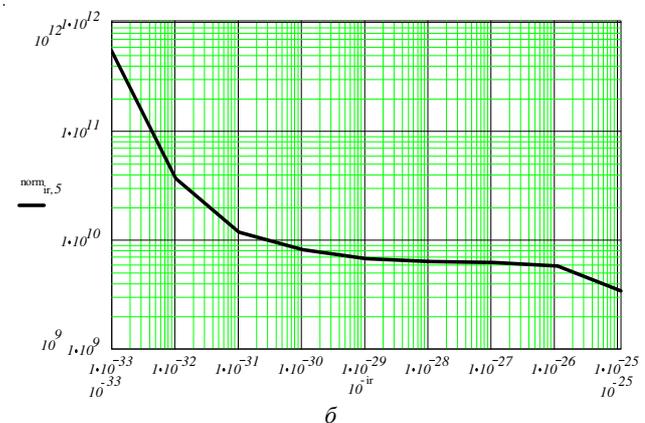
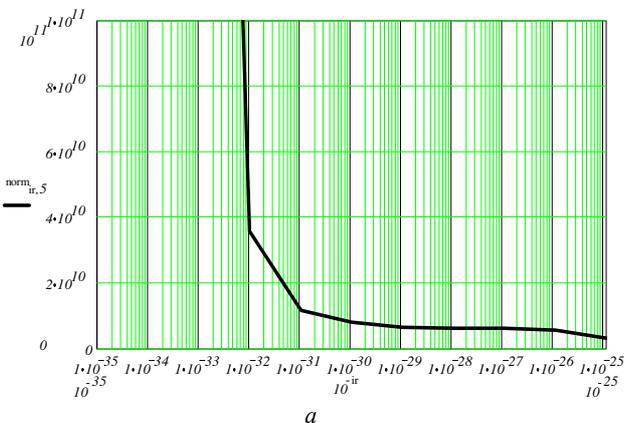


Рис. 4 – Вид функционала «суммарной нагрузки»
а – ось ординат отложена в обычной шкале; б – ось ординат отложена в логарифмической шкале.

Укажем, что функционал невязки для точно заданной правой части должен стремиться к нулю и на рис. 3 б

видно, что при значениях $\alpha < 10^{-27}$ значения функционала практически приближаются к нулю. Однако, в случае неточно заданной (возмущенной) правой части значения функционала должны стремиться не к нулю, а к некоторой малой константе, пропорциональной уровню шума δ . Как правило, во всех реальных задачах присутствуют погрешности измерения, усиления, преобразования и тому подобное, в этом случае необходимо искать не глобальный, а локальный экстремум функционала. На рис. 3, а можно выделить диапазон выбора параметра регуляризации $\alpha \in [10^{-31}; 10^{-26}]$.

Для уменьшения этого диапазона необходимо вводить дополнительные функционалы, используя различную априорную информацию. Например, функционал «суммарной нагрузки», который можно трактовать как представление минимума энергии (минимума работы возмущающей нагрузки) – $\|\mathbf{p}^\alpha\|_2^2$ (рис. 4, а). На рис. 4, б показан этот же функционал, только для удобства анализа ось ординат также отложена в логарифмической шкале.

Отметим, что требуемые перемещения пластины будут вызваны минимальной, но не нулевой силой, а следовательно, в исследуемом для параметра регуляризации диапазоне $\alpha \in [10^{-28}; 10^{-26}]$.

Интересное уточнение можно получить, введя ограничение на отклонение вычисленного по идентифицированной силе прогиба от исходного: $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^\alpha - \mathbf{w}_\delta\|_C$ (рис. 5). Рассматривая этот функционал в совокупности с предыдущими (рис. 2 – 4), можно предположить, что $\alpha_{opt} = 10^{-27}$.

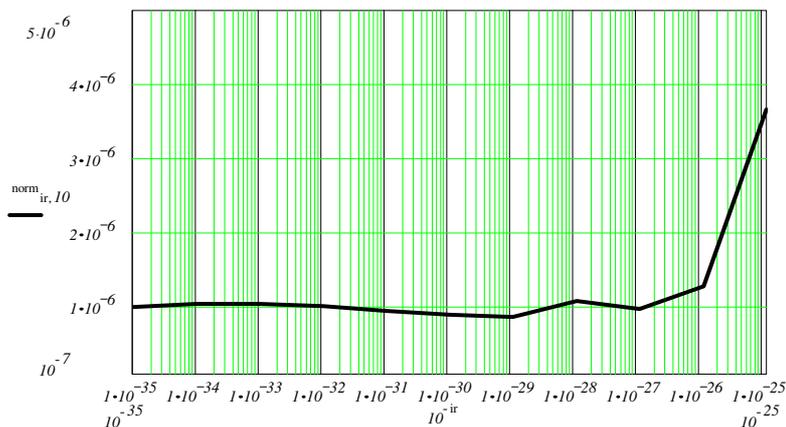


Рис. 5 – К выбору параметра регуляризации.

Также, когда имеется возможность использовать дополнительную априорную информацию о «гладкости» идентифицируемой нагрузки можно исследовать дополнительные функционалы «гладкости»: $\|(\mathbf{P}^\alpha)\|_2^2$ – рис. 6, а и $\|(\mathbf{P}^\alpha)\|_C$ – (рис. 6, б). Изучая функционалы на (рис. 6), можно также выделить $\alpha \in [10^{-28}; 10^{-26}]$ и особенно $\alpha = 10^{-27}$.

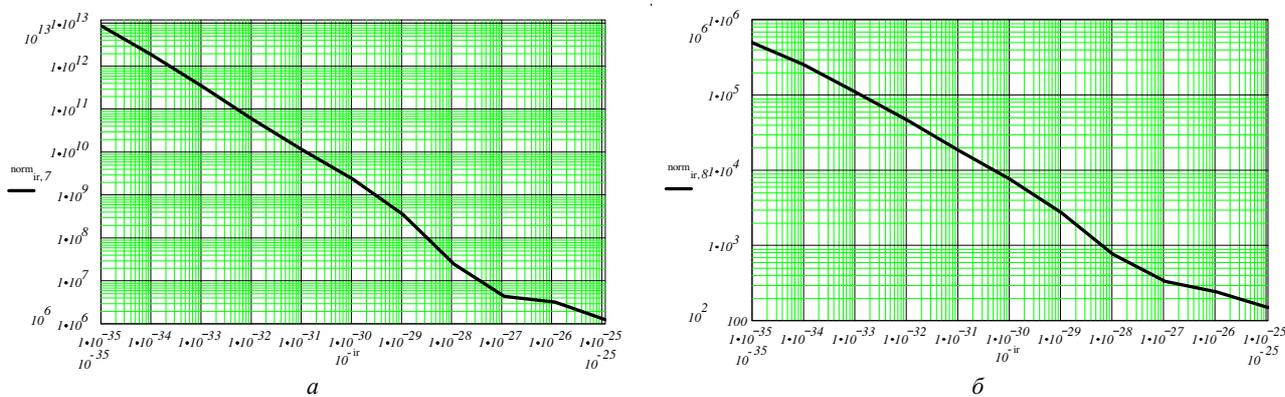


Рис. 6 – Влияние параметра регуляризации на гладкость идентифицируемой нагрузки а – функционал «гладкости» в метрике l_2 ; б – функционал «гладкости» в метрике C .

В тестових задачах, а також при проведенні експериментальних дослідженнях з точно відомими таривочними навантаженнями з'являється можливість оцінити точність рішення оберненої задачі (відносительну погрешність ідентифікації навантаження) по наступній залежності:

$$\delta_{id} = \frac{\int_0^t [P^\alpha(t) - \bar{P}(t)] dt}{\int_0^t \bar{P}(t) dt} \approx \frac{\|P^\alpha - \bar{P}\|_{L_1}}{\|\bar{P}\|_{L_1}}$$

Графік «відносительної погрешності ідентифікації навантаження» показаний на рис. 7.

На рис. 7 явно видно, що для розглянутого прикладу розрахунок найкращих результатів рішення оберненої некорректної задачі отримані при значеннях параметра регуляризації $\alpha_{opt} = 10^{-27}$ (як і передбачалося раніше, з аналізу функціоналів представлених на рис. 2 – 6).

Функціонал виду $\|P^\alpha - \bar{P}\|_{l_2}^2 / \|\bar{P}\|_{l_2}^2$ на рис. 8 має ще більш виражений екстремум при $\alpha_{opt} = 10^{-27}$.

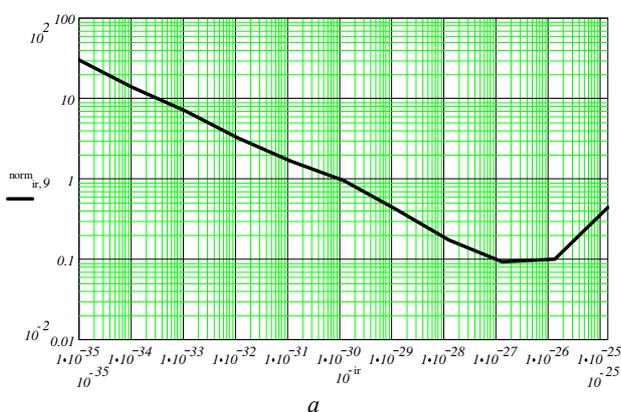


Рис. 7 – Оцінка «точності» ідентифікації.

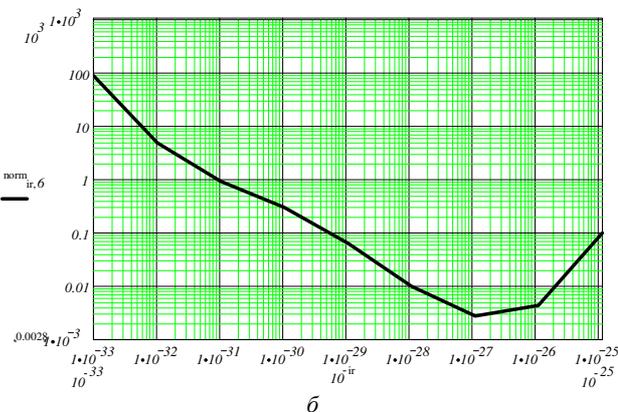


Рис. 8 – Вибір оптимального параметра регуляризації.

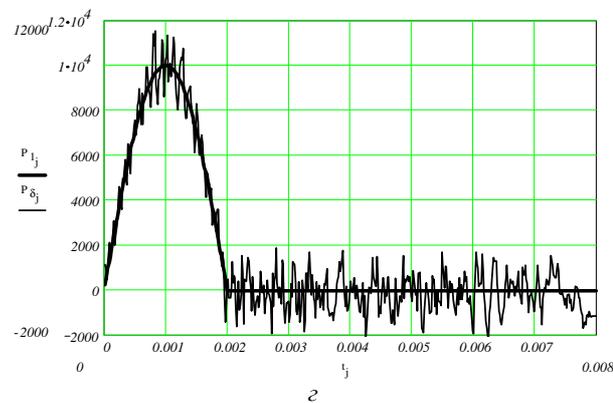
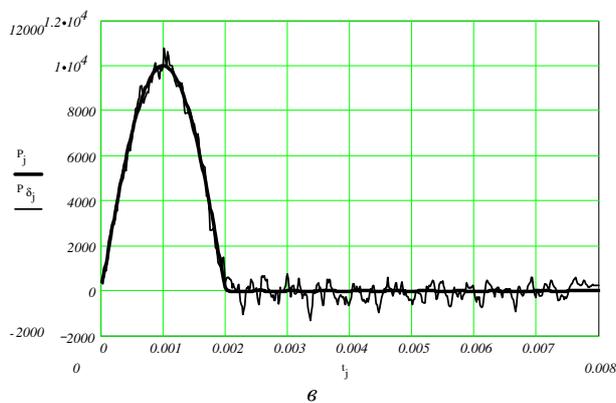
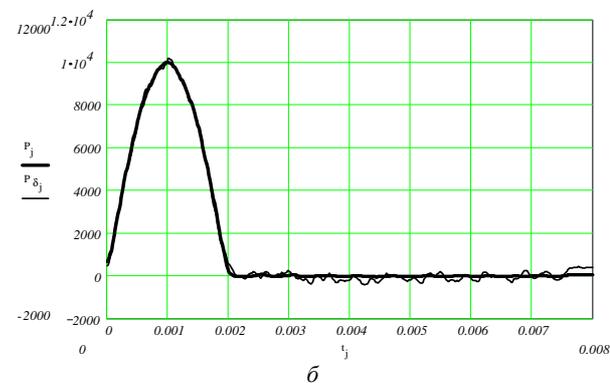
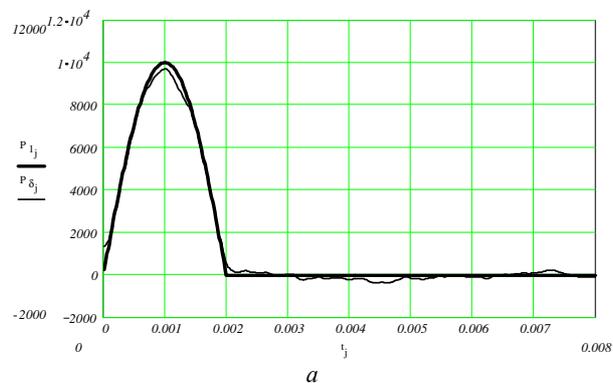


Рис. 9 – Зміна ідентифікованої навантаження в часі
 а – параметр регуляризації $\alpha = 10^{-26}$; б – $\alpha = 10^{-27}$; в – $\alpha = 10^{-28}$; г – $\alpha = 10^{-29}$.

На рис. 9 показаны графики идентифицированной внешней нагрузки при различных значениях параметра регуляризации – тонкая кривая и тестовая нагрузка – полуволна синусоиды (толстая кривая).

На рис. 9, а параметр регуляризации $\alpha = 10^{-26}$ – показаны в целом неплохие результаты, однако из-за «большой» α частично «занижены» максимальные значения. На рис. 9, б $\alpha = \alpha_{opt} = 10^{-27}$ – видно хорошее совпадение тестовой и идентифицированной нагрузки. На рис. 9, в $\alpha = 10^{-28}$ – начинают сильно проявляться эффекты, вызванные «зашумлением» исходных данных. Рис. 9, г соответствует значению параметра регуляризации $\alpha = 10^{-29}$, этот рисунок демонстрирует, что при $\alpha \leq 10^{-29}$ – влияние сглаживающего функционала А. Н. Тихонова недостаточно.

Выводы. В настоящей работе описано применение регуляризирующего алгоритма академика А. Н. Тихонова для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при исследовании интегральных уравнений, на примере решения обратной некорректной задачи идентификации неизвестной возмущающей нагрузки, вызывающей нестационарное деформирования элемента конструкции в виде пластины. Применение РА Тихонова позволяет получать достаточно устойчивое решение и дает хорошие результаты при «зашумленных» исходных данных. Однако серьезное внимание необходимо уделять выбору параметра регуляризации, желательно выбирать его на основе анализа нескольких функционалов, базирующихся на использовании априорной информации по определяемой функции. Существенное влияние на величину параметра регуляризации оказывают процедуры перехода к безразмерным операторным уравнениям перед введением сглаживающего функционала или нормирования матрицы.

Список литературы: 1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наукова думка, 1982. – 400 с. 3. Лурье А.И. Операционное исчисление. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – 432 с. 4. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с. 5. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Монография. – Харьков ХНАДУ, 2004. – 392 с. 6. Янютин Е.Г., Воропай А.В., Поваляев С.И., Янчевский И.В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с. 8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1979. – 286 с. 9. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация // Главная редакция физико-математической литературы. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 10. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336 с. 11. Xiao-Juan Yang, Li Wang. A modified Tikhonov regularization method // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 288, November 2015, – pp. 180 – 192. 12. Hochstenbach M.E., Reichel L., Rodriguez G. Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 273, 1 January 2015, Pages 132 – 149. 13. Gazzola S., Novati P. Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 256, 15 January 2014, – pp. 180 – 195. 14. Янютин Е.Г., Воропай А.В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Межд. Научн. Ж. Прикл. Мех. – Т. 39, – №10, – 2003, – С. 151 – 155.

Bibliography (transliterated): 1. Filippov, A. P. *Kolebaniya deformiruemyyh sistem*. Moscow: Mashinostroenie, 1970. Print. 2. Guz', A. N., and V. D. Kubenko. *Metody rascheta obolochek. Vol. 5. Teorija nestacionarnoj azerogidrouprugosti obolochek*. Kiev: Naukova dumka, 1982. Print. 3. Lur'e, A. I. *Operacionnoe ischislenie*. Moscow: Gosteh teorizdat, 1950. Print. 4. Ditkin, V. A., and A. P. Prudnikov. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniju*. Moscow: Vysshaja shkola, 1965. Print. 5. Janjutin, E. G., et al. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya jelementov konstrukcij. Monografija*. Kharkov: KhNADU, 2004. Print. 6. Janjutin, E. G., et al. *Identifikacija nagruzok pri impul'snom deformirovanii tel. Monografija v 2-h chastjah. Chast' II*. Kharkov: Izd-vo KhNADU, 2010. Print. 7. Verlan', A. F., and V. S. Sizikov. *Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, programmy. Spravochnoe posobie*. Kiev: Nauk. dumka, 1986. Print. 8. Tihonov, A. N., and V. Ja. Arsenin. *Metody reshenija nekorrektno postavlennyh zadach*. Moscow: Nauka, 1979. Print. 9. Tihonov, A. N., et al. *Reguljarizirujushhie algoritmy i apriornaja informacija*. Moscow: Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury, 1983. Print. 10. Goncharskij, A. V., A. M. Cherepashuk and A. G. Jagola. *Chislennye metody reshenija obratnyh zadach astrofiziki*. Moscow: Nauka, 1978. Print. 11. Yang, Xiao-Juan, and Li Wang. "A modified Tikhonov regularization method." *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 288. 2015. 180–192. Print. 12. Hochstenbach, M. E., L. Reichel and G. Rodriguez. "Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems." *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 273. 2015. 132–149. Print. 13. Gazzola, Silvia, and Paolo Novati. "Automatic parameter setting for Arnoldi–Tikhonov methods." *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 256. 2014. 180–195. Print. 14. Janjutin, E. G., and A. V. Voropaj. "Identifikacija impul'snogo nagruzhenija uprugoj prjamougol'noj plastiny." *Mezhd. Nauchn. Zh. Prikl. Meh.* Vol. 39, No. 10. 2003. 151–155. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Воропай Олексій Валерійович – кандидат технічних наук, доцент, докторант кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Воропай Алексей Валериевич – кандидат технических наук, доцент, докторант кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Voropay Alexey Valerievich – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Doctoral Candidate at the Department of Higher Mathematics, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (050) 524-92-54; e-mail: voropay@mail.ru.

Е. А. ГЛІБКО, І. П. ГРЕЧКА, А. П. МІНАКОВ

РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПРОГРАМУВАННЯ ПРИСТРОЇВ З ЧПК

На підставі теорії комп'ютерного зору для автоматизації та прискорення програмування пристрів з числовим програмним керуванням розроблена програма, що автоматично генерує керуючий код, готовий для використання на фрезерувальному обробляючому комплексі. Розглянуто особливості створення коду керуючої програми для чорнового та чистового фрезерування деталей з подальшим аналізом створених геометричних моделей процесу різання для корегування траєкторії руху інструменту в напрямку висотної координати для запобігання небезпечного зрізу матеріалу в процесі обробки.

Ключові слова: автоматизація програмування, комп'ютерний зір, фрезерування, алгоритм роботи, керуюча програма, карта рельєфу, моделі деталі, колір та яскравість пікселів.

Вступ та аналіз останніх досліджень. Програмне забезпечення верстатів з числовим програмним керуванням (ЧПК) постійно вдосконалюється, але існує зворотній зв'язок між простотою керування та якістю обробки. Тому необхідно знайти компроміс між цими критеріями, що задовольняв би конкретну ситуацію на виробництві. Розроблено декілька варіантів програмного забезпечення для створення коду, що верстат сприймає як керуючу програму [1 – 4]. Але навіть використання подібних продуктів не забезпечує бажану швидкість досягнення кінцевого результату, і постає задача максимально спростити цей процес.

Робота присвячена використанню *комп'ютерного зору* для автоматизації та прискорення програмування пристрів з ЧПК. Ідея полягає в тому, щоб використовувати двомірне зображення для створення коду обробки тривимірної моделі. Третю координату замінено яскравістю окремих фрагментів зображення.

Мета роботи та постановка проблеми. Автоматизація розробки повноцінного керуючого коду з використанням теорії комп'ютерного зору для фрезерування на верстаті з ЧПК на підставі *растрової карти рельєфу моделі*. Кінцевий програмний продукт має відповідати наступним вимогам та задовольняти такі потреби: достатня точність обробки, висока швидкість обчислення траєкторій, оптимальна траєкторія руху ріжучого інструменту, відповідність режимів різання до нормативних, можливість редагування необхідних параметрів, а саме: вибір інструменту, вибір режимів різання, редагування параметрів існуючих та додавання нових інструментів та ін., простота використання програми.

Автоматизація програмування пристрою з ЧПК. Обробляючий фрезерувальний комплекс має координатну систему, що містить 5 осей. Точність позиціонування досягає 0,001 мм. Це дає можливість обробляти поверхні будь-якої складності на високій швидкості із максимальною точністю. Але процес програмування ЧПК досить складний, трудомісткий та відповідальний. Найменша помилка із боку програміста може призвести до псування коштовного інструменту та заготовки.

Розроблено декілька варіантів програмного забезпечення для створення коду, що верстат сприймає як керуючу програму. При користуванні ними створюється тривимірна модель необхідної конфігурації та на базі параметричного програмування задається траєкторія руху ріжучого інструменту і параметри різання. Постає задача максимально спростити цей процес. В основу роботи закладені положення теорії комп'ютерного зору.

Метод, що було запропоновано, дозволяє за лічені хвилини створити код обробки для фрезерування за умови існування карти рельєфу моделі. Карта рельєфу – це зображення виду моделі в напрямку нормалі до горизонтальної площини. Програму було написано мовою Pascal в середовищі Delphi 2009.

Функції програми. Алгоритм роботи. Було заплановано такі функціональні елементи програми:

- обробник графічного матеріалу;
- блок проектування чорнової обробки;
- блок проектування чистової обробки;
- база даних інструментів;
- інструмент для редагування інструментів.

Роботу над програмним додатком розпочато із створення блок-схеми, що ілюструє алгоритм роботи із програмою (рис. 1).

Програму можна умовно поділити на дві частини: редактор інструментів і генератор керуючого коду. Початок роботи полягає в підготовці графічного матеріалу та ініціалізації геометричних даних деталі. Окремими частинами створюється код для різних режимів обробки. Параметри різання обираються залежно від параметрів обраного інструменту. Дані про інструмент зберігаються в базі даних інструменту. Для повноцінного користування програмою необхідно мати можливість створювати новий інструмент, редагувати існуючий та видаляти непотрібний. Такий доступ до бази даних реалізовано окремим елементом програми.

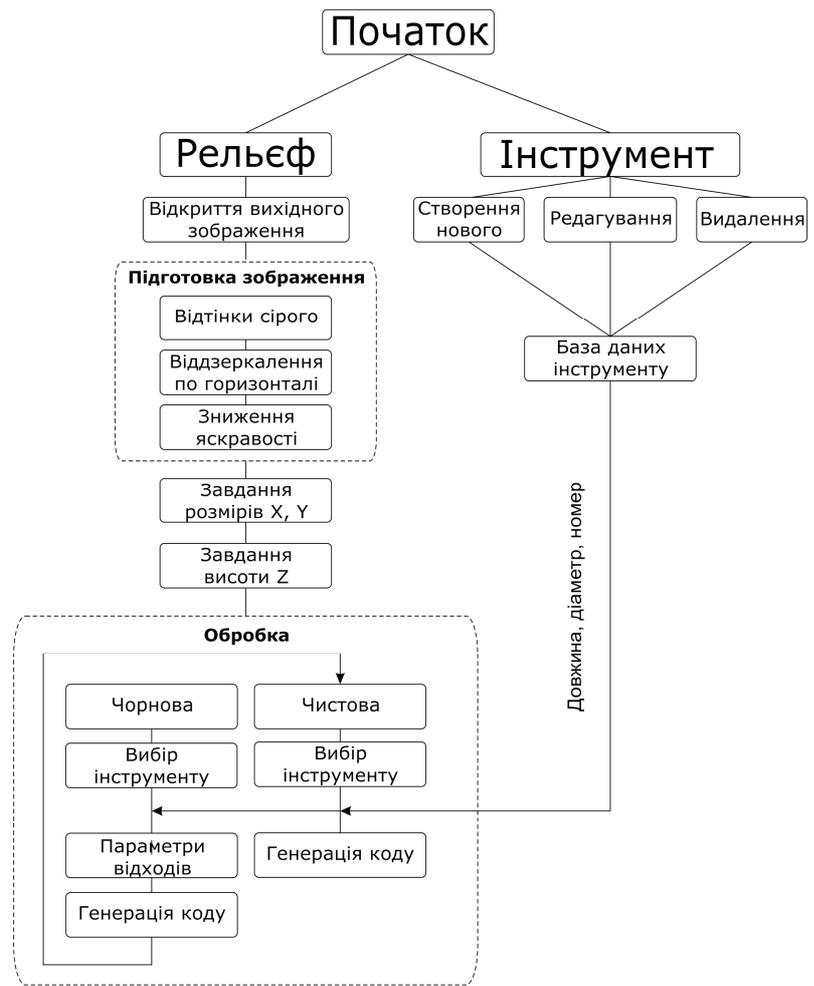


Рис. 1 – Алгоритм роботи програми.

База даних інструменту. Редагування інструменту. Процес створення керуючої програми включає використання даних про інструмент, які зберігаються в базі даних інструменту, що містить набір файлів, кожен з яких описує один із інструментів, та файл-ключ, з переліком назв усіх інструментів. Опис кожного інструменту включає в себе значення діаметру фрези, довжини її ріжучої кромки та номер інструменту. Якщо в базу даних вносяться зміни із використанням засобів програми, що описується в даному проекті, зміст файлу-ключа змінюється автоматично. Таким чином користувач завжди має актуальну інформацію про доступний інструмент. Нижче наведено реалізацію процесу редагування параметрів інструменту. Доступ до редагування бази даних інструменту відбувається через головне меню програми.

Завантаження карти рельєфу. Підготовка рельєфу. Відкриття робочого зображення здійснюється із головного меню програми (рис. 2). Перед використанням завантаженого зображення необхідно його підготувати: перетворити зображення у гаму відтінків сірого кольору; змінити напрямок осей координат, оскільки в середовищі Delphi використовується ліва система координат (вісь X – вправо, вісь Y – вниз), а верстат із ЧПК використовує праву систему коор-

динат; встановити потрібний рівень яскравості. Це відбувається при натисканні кнопки «Подготувати зображення». Для змінення кольорової гами відбувається приведення до середнього арифметичного значення яскравості кожного з трьох кольорів – червоного, зеленого та синього. Отримане значення надається кожному з трьох кольорів відповідного пікселю в контейнері, що містить робоче зображення. В циклі перебирається кожен піксель вихідного зображення (рис. 3).

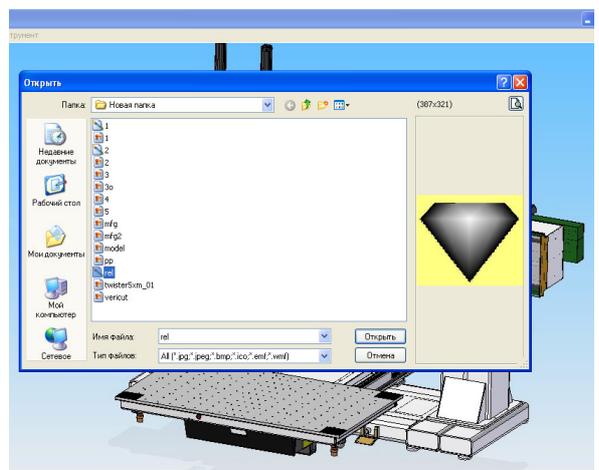


Рис. 2 – Завантаження зображення.

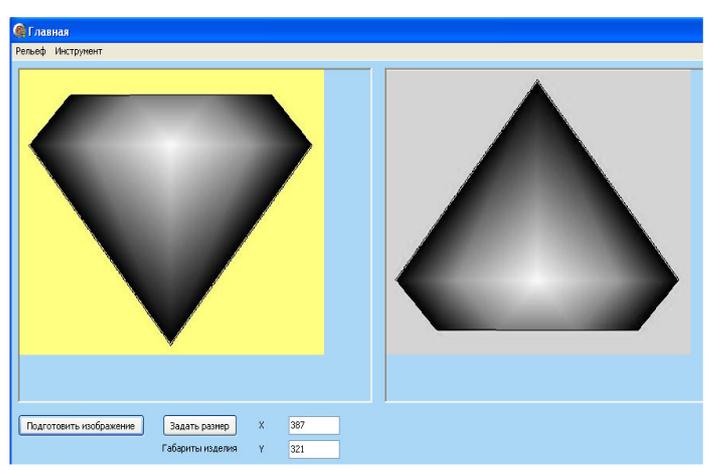


Рис. 3 – Підготовлене зображення.

Далі визначаються значення яскравості кожного з трьох кольорів окремо:
 $r := \text{GetRValue}(\text{col})$; $g := \text{GetGValue}(\text{col})$; $b := \text{GetBValue}(\text{col})$.

Отримуються значення яскравості для кожного кольору робочого пікселю $\text{Ch_B_col} := (\text{r} + \text{g} + \text{b}) \text{div } 3$.

Для зниження рівня яскравості зображення до мінімально можливого необхідно визначити існуючий міні-

мальний рівень яскравості:

```
min_color :=255; ... if Ch_B_col<min_color then min_color :=Ch_B_col ;
```

Готове зображення формується наступним чином (рис. 3):

```
Image2.Canvas.Pixels[i,Image2.Height-j]:=TColor(RGB(Ch_B_col-min_color, Ch_B_col-min_color, Ch_B_col-min_color)); end; end;
```

Фрагмент [i,Image2.Height-j] відповідає за заповнення підготовленого зображення в такому порядку, при якому отримуємо зображення, віддзеркалене по горизонталі відносно вихідного.

Кожному пікселю надається значення кольорів $Ch_B_col - min_color$, де min_color – це максимальна різниця, на яку можна зменшити рівень яскравості зображення. Після перетворення зображення на формі відображується група елементів, що дозволяють налаштувати геометричні параметри моделі.

За умовчанням розміри моделі приймаються за рівністю 1 піксель зображення дорівнює 1 мм моделі. Але на практиці є необхідність змінювати значення лінійних розмірів готової моделі за умови збереження її пропорцій. Це реалізовано наступним чином: нові значення розмірів моделі отримуються із полів Edit1 та Edit2. При зміні їх значень, нові значення зберігаються, після натискання кнопки «Задать размер». Без цього контролююча змінна «size» матиме значення «false». Такі міри захисту гарантують відповідність розмірів, що використовуються при обчисленні, до розмірів, які необхідні користувачеві.

Далі стає активним поле для завдання висоти деталі, або глибини обробки. Необхідно задати мінімальне і максимальне значення глибини відносно нуля (Z_{min} та Z_{max}). Z_{min} – це мінімальна висота обробки, нижче якої фреза не опуститься, відповідає рівню яскравості пікселю «0». Z_{max} – це максимальна висота обробки, відповідає рівню яскравості пікселю «255».

Реалізовано захист від ситуації, коли значення мінімальної та максимальної глибини завдані невірно. Якщо значення висот задані вірно, відбувається обчислення коефіцієнту вертикального переміщення фрези залежно від зміни рівня яскравості пікселю. За умовчанням розміри деталі приймаються за пропорцією: одиниця рівня яскравості пікселю зображення дорівнює 1 мм висоти моделі. На практиці є необхідність змінювати значення висоти готової моделі за умовою зберігання пропорційності змін рівня висот до змін рівня яскравості зображення, яка реалізована у програмі.

Програмування обробки. Форма «Обработка» містить елементи, що надають можливості перейти до проектування як чорнової, так і чистової обробки, попереджаючи про необхідність зберігати послідовність технологічного процесу. Специфічність роботи із графічним матеріалом полягає в тому, що найменший елемент, який аналізується – це один піксель. При змінених значеннях ширини і довжини, зображення має бути змінене відповідно до коефіцієнту зміни лінійних розмірів відносно вихідного значення (K_x). З урахуванням нових розмірів відбувається заповнення робочого зображення. Значення яскравості пікселю на полі головної форми використовується для призначення яскравості пікселям на формі «Обработка» в режимі циклу.

Форма «Обработка» містить елемент, який представляє собою перелік назв інструментів, що містяться в відповідній базі даних. Перелік інструментів розміщено на цій формі з метою прискорити доступ до програмування обробки.

Керуюча програма містить три складові частини: *ініціалізація*, *основна частина* та *завершення*. Для усіх керуючих програм чистової обробки *ініціалізація* відрізняється лише параметрами використаних інструментів, а *завершення* виглядає однаково. Тому завантажування заздалегідь підготовлених вступної та завершальної частини програми в код обробки здійснено автоматично.

Найважливішою частиною керуючого коду є фрагмент, що несе інформацію про переміщення ріжучого інструменту під час обробки. Кожний кадр програми містить координати наступної точки простору, в якій має прийти фреза. Координати X та Y отримуються автоматично під час сканування вихідного зображення. Координата Z , що відповідає за положення фрези по висоті, вираховується, виходячи із рівня яскравості кожного пікселю зображення. Під час обробки фреза пересувається, проходячи від нуля координат до максимального значення по осі X . Після цього інструмент повертається в нуль по осі X , положення по осі Y змінюється на значення ширини одного пікселю, і фреза знову переміщується до максимального значення по осі X . Таким чином, інструмент переміщується до максимального значення по осях X та Y (рис. 4).

На рис. 4 синіми лініями позначено рух інструменту на підході та на відводі інструменту, зеленим кольором – рух фрези під час різання матеріалу, червоним – рух при поверненні інструменту в нуль по осі X на безпечній висоті відходів. Для розрахунку висоти використовується рівень яскравості пікселю на робочому зображенні. Оскільки при підготовці зображення до обчислень відбулося прирівнювання рівнів кожного з основних кольорів, достатньо визначити рівень яскравості одного з каналів:

```
col :=Image1.Canvas.Pixels[X_local, Yo]; Z :=GetRValue(col)*unit1.Form1.Kz.
```

Для збереження пропорційності змін рівня висот до змін рівня яскравості зображення використовується коефіцієнт K_z , що було обчислено при роботі із головною формою. Таким чином, Z – це висота пікселя, який оброблюється на даний момент.

Оскільки при написанні керуючого коду для обробки на фрезерувальному верстаті завжди вказуються координати кінцевої точки інструменту, а для розрахунків використовуються координати центру сфери фрези, необхідно внести поправку висоти, що визначається радіусом фрези:

$$Z_o := Z + r$$

На практиці дуже часто сусідні від робочого пікселі мають висоту більшу, за щойно обчислену. Тоді інструмент, приходячи на висоту робочого пікселю, може зрізати матеріал сусідніх пікселів. Для отримання найкращих результатів в подібних ситуаціях необхідно врахувати висоту, на яку буде достатньо підняти фрезу, щоб запобігти небажаному зрізанню матеріалу.

Для цього необхідно перевірити висоти кожного пікселю, який може бути оброблений при даних координатах центру фрези. Для прикладу розглянемо ситуацію, коли фреза має діаметр 4мм. Необхідно перевірити всі пікселі, що лежать хоча б частково в колі діаметром 4мм (4 пікселя) (рис. 5).

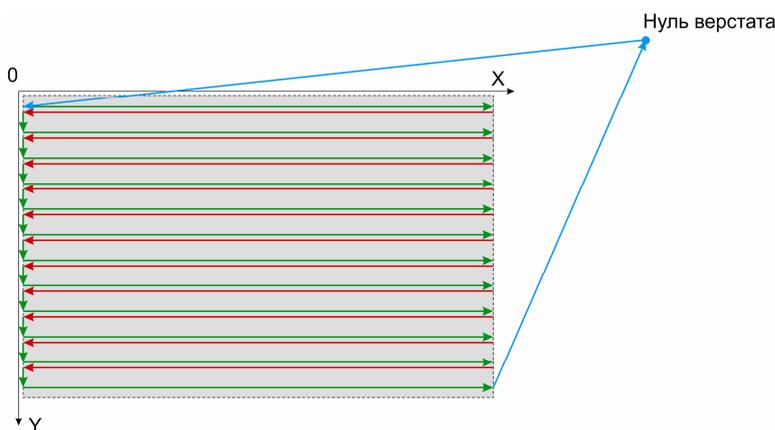


Рис. 4 – Схема руху інструменту при чистовій обробці.

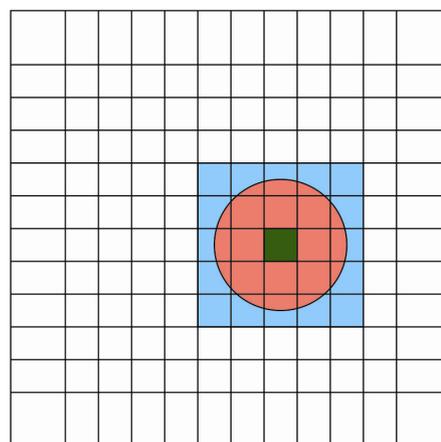


Рис. 5 – Виявлення можливих зарізів.

Зеленим кольором позначено робочий піксель, червоним – діаметр фрези, блакитним – пікселі, що перевіряються. Розглянемо область, яку покриває діаметр фрези (плюс-мінус значення радіусу фрези від координат робочого пікселю):

```
for Yt := Yo-R to Yo+R do begin ;           for Xt := X_local-R to X_local+R do begin.
```

В цій області необхідно перевірити лише пікселі, що знаходяться «всередині» діаметру фрези. Для виявлення таких пікселів використано рівняння кола $R^2 = X^2 + Y^2$. Якщо пікселі знаходяться в середині кола, що розглядається, буде виконуватись нерівність $R^2 > X^2 + Y^2$ (рис. 6). Проаналізуємо кожен піксель в зазначеній області:

```
col := Image1.Canvas.Pixels[Xt, Yt] ;      Zt := GetRValue(col)*unit1.Form1.Kz.
```

Якщо висота точки, що розглядається, не перевищує безпечну, значення висоти з урахуванням поправки радіусу буде використано як остаточну координату Z для даної точки: $Z_o := Z + r$. Таким чином, стає відома висота точки, що розглядається в даний момент циклу. Необхідно перевірити чи буде знаходитись ця точка в середині сфери, що описує фрезу, коли найнижча точка поверхні фрези буде знаходитись на висоті, визначеній для робочого пікселя. Для цього використано рівняння сфери $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Якщо пікселі знаходяться всередині сфери, що розглядається, буде виконуватись нерівність $R^2 > X^2 + Y^2 + Z^2$. Проаналізуємо кожен піксель в зазначеній області:

```
if (R>sqrt(sqrt(Xo-Xt)+sqrt(Yo-Yt)+sqrt(Zo-Zt)*unit1.Form1.Kz))) then begin.
```

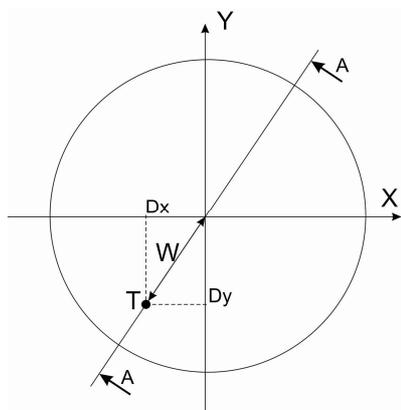


Рис. 6 – Аналіз точки. Горизонтальна проекція.

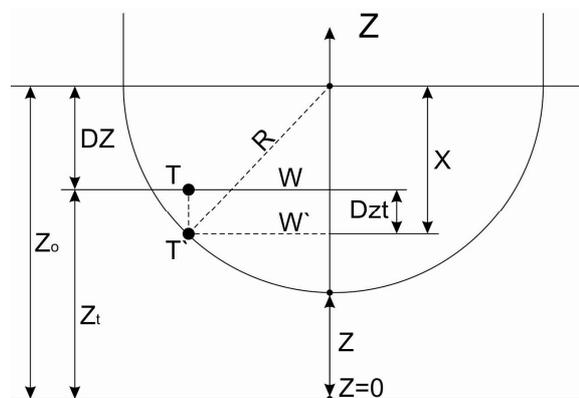


Рис. 7 – Аналіз точки. Фронтальна проекція.

У випадку, коли розглянутий піксель дійсно знаходиться в середині сфери фрези, необхідно визначити висоту, на яку необхідно підняти фрезу для запобігання зарізу. Для цього визначається відстань від точки до осі інструменту W (рис. 7):

$$W = \sqrt{Dx^2 + Dy^2};$$

тобто $Dx := \text{ABS}((X_o - X_t)); Dy := \text{ABS}((Y_o - Y_t)); w := \text{sqrt}(\text{sqrt}(Dx) + \text{sqrt}(Dy)).$

Для зручності на рис. 7 зображено фронтальну проекцію, яка показує відстань від точки до осі інструмента та її висоту в натуральній величині. Висота, на яку необхідно підняти фрезу, позначена Dzt . При підйомі інструменту на зазначену висоту точка, що розглядається, буде розташована на поверхні сфери фрези. Таким чином, стає відомою відстань від центру сфери до точки – це радіус сфери. В даному випадку це 4 мм. Також відома відстань від точки до осі Z – це $W' = W$. Таким чином є можливість вирахувати відстань від центру фрези по осі Z до нової координати точки:

$$X = \sqrt{R^2 - W^2};$$

тобто $X := \text{sqrt}(\text{sqrt}(R) - \text{sqrt}(W)).$

Для подальших розрахунків необхідно визначити різницю між висотою центру фрези та висотою точки, що розглядається:

$$DZ = \sqrt{Z_0 - Z_t}.$$

З рис. 7 видно, що необхідна різниця висот Dzt – це різниця між Dz та відстанню X :

$$DZ_t = X - DZ.$$

Таким чином, отримано формулу для різниці висот, на яку необхідно підняти центр фрези для запобігання зарізу матеріалу. Для зручності візуалізації на вихідному зображенні пікселі, в яких довелося змінювати положення фрези з урахуванням сусідніх пікселів, позначені червоним кольором:

$Z_o := Z_o + DZ_t; \text{image1.Canvas.Pixels}[X_o, Y_o] := c1Red;$

Для безпеки обробки необхідно передбачити підйом фрези на необхідну висоту при переході між етапами циклу, тобто при доходженні фрези до максимальних значень координат по осях X та Y і при проходженні по мінімальним значенням цих координат:

$\text{if } X_local = \text{image1.Width} \text{ then } Z_o := \text{form1.Zmax} + 25; \text{ if } X_local = 0 \text{ then } Z_o := \text{form1.Zmax} + 25;$

Отримані координати відразу записуються в файл керуючого коду. Враховується поправка на радіус фрези для координати Z – тепер необхідно відняти цю відстань для отримання висоти знаходження кінця фрези:

$\text{writeln}(\text{chist}, 'N' + \text{intToStr}(n) + 'X' + \text{intToStr}(x_local) + 'Y' + \text{intToStr}(Y_o) + 'Z' + \text{StringReplace}(\text{floatToStr}(Z_o - r, \text{ffFixed}, 5, 2), ', ', ', ', [\text{rfReplaceAll}, \text{rfIgnoreCase}])); \text{ n} := n + 1;$

Описаний процес виконується в циклі для кожного пікселя вихідного зображення. Швидкість обчислення рівня висоти фрези для кожного пікселя залежить від розміру оброблюваної поверхні та діаметру обраної фрези.

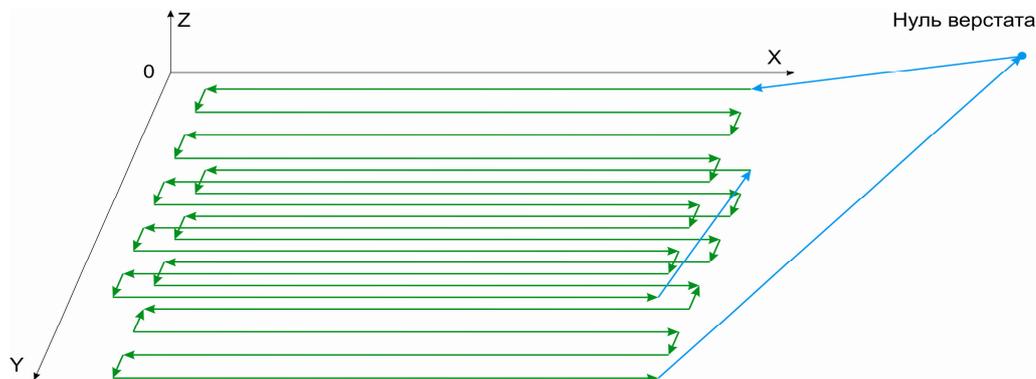


Рис. 8 – Схема руху інструменту при чорновій обробці.

По завершенню циклу керуючий код містить координати всіх точок, які має пройти фреза при обробці. Отриманий в процесі програмування керуючий код записано до файлу, що знаходиться в основному каталозі програми. Код готовий до використання в якості програми чистової обробки на системі ЧПК.

Мета чорнової обробки – зняти та видалити основну частину матеріалу заготовки, що не утворює тіло деталі. На поверхні деталі залишається невелика кількість матеріалу, що видаляється при чистовій обробці. Аналогічно до чистової обробки реалізовано програмування чорнового фрезерування.

Для чорнової обробки основними параметрами є відстань між проходами фрези на горизонталі та глибина, на яку фреза переміщується для обробки наступного шару матеріалу. Також важливим параметром є рівень висоти відходу фрези, значення якої завдається на формі обробки. Під час обробки фреза пересувається, проходячи від нуля координат до максимального значення по осі X . Після цього положення по осі Y змінюється на значення ширини, що міститься в змінній $step_over$, і фреза переміщується по осі X до мінімального значення. Таким чином, інструмент переміщується до максимального значення по осях X та Y (рис. 8). Переміщення по осі Z реалізовано за наступним принципом: матеріал видаляється шарами з товщиною, значення якої міститься

в змінній `step_depth`. При попаданні на матеріал, що належить до тіла деталі, фреза піднімається на попередній рівень, і рух продовжується по осі X на цьому рівні до тих пір, доки фреза не мине матеріал тіла деталі.

Для нумерації рядків керуючого коду використано *автоінкрементне зростання* змінної n . По завершенню запису заключної частини програми закриваються вихідні файли та обнулюються використані змінні. Швидкість обчислення рівня висоти фрези для кожного пікселя залежить від розміру оброблюваної поверхні та діаметру обраної фрези. Отриманий в процесі програмування керуючий код записано до файлу, що знаходиться в основному каталозі програми. Код готовий до використання в якості програми чорнової обробки на системі ЧПК.

Проведення натурного експерименту. Кінцевим етапом роботи над програмним забезпеченням було проведення випробування дії програми на практиці. Було створено карту рельєфу, яка містить прямолінійні і криволінійні поверхні (рис. 9). Габаритні розміри деталі 240x160x120 мм.

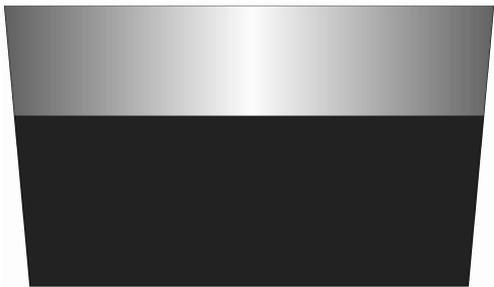


Рис. 9 – Карта рельєфу для натурного експерименту. для надання виробу товарного вигляду (рис. 11).

Відхилення габаритних розмірів деталі від очікуваних склали 0,5 мм, що вважається припустимим.

Висновки. В результаті виконання поставленої задачі була отримана програма, яка автоматично генерує керуючий код, готовий для використання на фрезерувальному обробляючому комплексі. Особливо розглянуто особливості створення коду керуючої програми для чорнового та чистового фрезерування деталей.

Шляхом аналізу створених геометричних моделей процесу різання чорнового та чистового торцевого фрезерування було скореговано траєкторію руху інструменту в напрямку висотної координати для запобігання небажаного зрізу матеріалу в процесі обробки. Робота програми займає набагато менше часу порівняно із часом роботи програміста для створення рівноцінного коду засобами програм аналогів Pro/Engineer чи ArtCam. При цьому точність обробки зменшена, що обумовлено якістю зображення на карті рельєфу. При збільшенні роздільної здатності карти помітно уповільнюється робота програми. Але якість обробки є достатньою для використання розробленого додатку при обробці невідповідальних в промисловому сенсі поверхонь.



Рис. 10 – Готова деталь.



Рис. 11 – Поверхня деталі.

Результати роботи (керуюча програма) було апробовано на практиці та планується до впровадження в технологічний процес обробки деталей меблевих виробів.

Список літератури: 1. ЧПУ серии 10. Руководство по программированию. – Италия, Турин: Компания OSAI, – 2003. – 579 с. 2. Mineev M.A. Введение в Pro/Engineer 3.0. – 2002. – 421 с. 3. Mantek Chia. Базовый курс Pro/Engineer. – 2001. – 84 с. 4. ArtCam Фрезерование дерева. Брошюра / Delkam «ArtCam Русская версия 5.5. – Канада, Онтарио: Delkam, – 2007. – 14 с.

Bibliography (transliterated): 1. ChPU serii 10. Rukovodstvo po programirovaniju. Ytalija, Turin: Kompanija OSAI, 2003. Print. 2. Mineev, M. A. Vvedenie v Pro/Engineer 3.0. 2002. Print. 3. Mantek, Chia. Bazovyj kurs Pro/Engineer. 2001. Print. 4. ArtCam Frezerovanie dereva. Broshjura. Art-Cam Russkaja versija 5.5. Kanada, Ontario: Delkam, 2007. Print.

Глібо Олена Анатоліївна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-31; e-mail: e_glibko@mail.ru.

Глибо Елена Анатольевна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-31; e-mail: e_glibko@mail.ru.

Glibko Elena Anatolievna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Geometrical Modeling and Computer Graphics, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-31; e-mail: e_glibko@mail.ru.

Гречка Ірина Павлівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри теорії і систем автоматизованого проектування механізмів і машин, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел. (057) 707-69-01; e-mail: Iri_@mail.ru.

Гречка Ирина Павловна – кандидат технических наук, доцент кафедры теории и систем автоматизированного проектирования механизмов и машин, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-69-01; e-mail: Iri_@mail.ru.

Grechka Iryna Pavlivna – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Chair of Theory and Computer Aided Design of Mechanisms and Machines, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-69-01; e-mail: Iri_@mail.ru.

Мінаков Андрій Петрович – студент механіко-технологічного факультету кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-31.

Минаков Андрей Петрович – студент механико-технологического факультета кафедры геометрического моделирования и компьютерной графики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел. (057) 707-64-31.

Minakov Andrei Petrovich – student, Chair of Geometrical Modeling and Computer Graphics, Department of Mechanics and Technology, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-64-31.

УДК 517.968.519.6

С. В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ ТМ-ВОЛНЫ НА ЗАПОЛНЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИКОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

Дан вывод сингулярных интегральных уравнений задачи дифракции ТМ-волны на цилиндрической кольцевой антенне, заполненной диэлектриком, внутренняя поверхность которой идеально проводящая, а идеально проводящая внешняя поверхность имеет продольные щели. Дискретная математическая модель построена методом дискретных особенностей и проведен численный эксперимент на ее основе. Построены поперечник полного рассеяния, поля в ближней зоне и диаграммы направленности.

Ключевые слова: метод дискретных особенностей, сингулярный интеграл, антенна.

Введение. В работе рассматривается задача дифракции плоской монохроматической волны на идеально проводящей цилиндрической поверхности, покрытой диэлектрическим цилиндром, на внешней поверхности которого – идеально проводящая цилиндрическая поверхность со щелями.

Задача падения плоской Е-поляризованной волны (ТМ-волны) на «кольцевой волновод» с одной продольной щелью во внешнем цилиндре, находящемся в вакууме, решались *методом парных рядов* [1 – 2], а при отсутствии внутреннего цилиндра – *методами конечных элементов, методом задачи Римана-Гильберта* [3 – 5], однако они реализовывались только для одной продольной щели. Применяемый подход ранее использовался для решения задачи дифракции плоской монохроматической волны и цилиндрической волны на круговом цилиндре с конечным числом продольных щелей, находящемся в однородной среде (предполагался вакуум) [6].

Рассматриваемые в данной работе задачи представляют значительный практический интерес, в связи с необходимостью рассчитывать соответствующие антенные устройства. Эта задача теории дифракции волн приводит к краевой задаче для *уравнений Максвелла*. Эти задачи для уравнений Максвелла служат математическими моделями цилиндрических электродинамических структур, и нашли широкое применение при проектировании и создании апертурных и поверхностных антенн, открытых резонаторов, щелевых волноводов и фильтров на их основе.

Целью работы является создание математической модели для данных структур и анализ некоторых физических характеристик, полученных путем численных вычислений.

Постановка краевой задачи для уравнений Максвелла. Опишем геометрию задачи. Введем обозначения $L = \bigcup_{i=1}^p (\alpha_i, \beta_i)$, $CL = [-\pi, \pi] \setminus L$. Дуги внешней окружности S_{R_2} радиуса R_2 с центром в начале координат обозначим (a_q, b_q) (рис. 1).

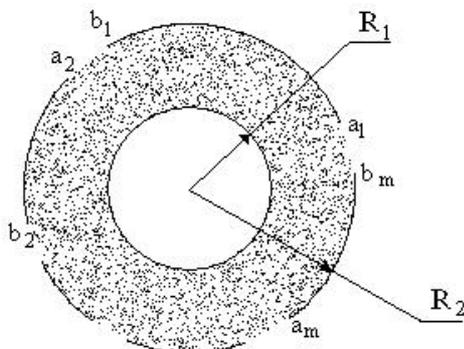


Рис. 1 – Сечение цилиндрического кольца, заполненного диэлектриком, внутренняя часть границы – окружность, внешняя часть – окружность с конечным числом щелей.

Был рассмотрен стационарный случай $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ (монохроматические волны, ω – угловая частота). Волновой вектор плоской волны направлен перпендикулярно к образующим цилиндров. Во внешнем цилиндре прорезано несколько продольных щелей. Пространство между цилиндрами заполнено диэлектриком.

Поля во внутренней и во внешней частях рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\text{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{1}$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}. \tag{2}$$

Предполагается, что источники электрического поля отсутствуют, так что выполняется условие:

$$\text{div}\mathbf{E} = 0. \tag{3}$$

На идеально проводящих поверхностях выполнено граничное условие:

$$\left[\mathbf{E}(r, \phi), \mathbf{n} \right]_{r=R_1} = 0, \left[\mathbf{E}(r, \phi), \mathbf{n} \right]_{r=R_2} = 0. \tag{4}$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к цилиндрическим поверхностям.

Рассматривается двумерная задача: электромагнитное поле не зависит от координаты z .

Система уравнений Максвелла (1 – 2), распадается на две независимые подсистемы [3,7], одна из них – сводится к *краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца* (H-поляризация); а вторая – к *краевой задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца* (E-поляризация). В обоих случаях, а именно для нахождения полного поля, необходимо найти единственную функцию – продольную компоненту магнитного поля $H_z(r, \phi)$ или электрического поля $E_z(r, \phi)$, соответственно. По найденным компонентам оставшиеся восстанавливаются однозначно. В данной работе дано решение краевой задачи Дирихле (TM-волна).

Математическая модель задачи Дирихле. Компонента $E_z(r, \phi)$ удовлетворяет следующим условиям: *уравнению Гельмгольца*

$$\Delta E_z(r, \phi) + k^2 E_z(r, \phi) = 0, \tag{5}$$

где $k^2 = \epsilon\mu\omega^2$;
граничному условию

$$E_z(R_2, \phi) = -E_{0z}(R_2, \phi), \phi \in L, \tag{6}$$

где $E_{0z}(r, \phi) = e^{ikr\cos\phi}$, $k = \omega/c$, c – скорость света в вакууме;
условию излучения Зоммерфельда

$$\frac{\partial E_z(r, \phi)}{\partial r} - ikE_z(r, \phi) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r \rightarrow \infty; \tag{7}$$

условию Майкснера на ребре

$$\int_{\Omega} \left[k^2 |E_z|^2 + |\nabla E_z|^2 \right] ds < \infty \tag{8}$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$.

Ограничения искомой функции $u(r, \phi)$ на внутренность $R_1 < r < R_2$ и внешность $r > R_2$ кольца, обозначим соответственно $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$, при этом для задачи Дирихле $u(r, \phi) = E_z(r, \phi)$, а для задачи Неймана $u(r, \phi) = H_z(r, \phi)$. Если функции $u^+(r, \phi)$, $R_1 < r < R_2$ и $u^-(r, \phi)$, $r > R_2$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены так называемые условия сопряжения:

$$u^+(r, \phi) \Big|_{r=R_2} = u^-(r, \phi) \Big|_{r=R_2}, \phi \in C\bar{L}, \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial u^+(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = \frac{\partial u^-(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=R_2}, \phi \in C\bar{L}, \tag{10}$$

то существует функция $u(r, \phi)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца в пространстве $\{r > R_1, \phi \in [0, 2\pi]\}$ без объединения дуг $\bigcup_{q=1}^m [a_q, b_q]$ окружности S_{R_2} , причем $u(r, \phi) = u^+(r, \phi)$, $R_1 < r < R_2$ и $u(r, \phi) = u^-(r, \phi)$, $r > R_2$.

Запишем парный ряд Фурье для компоненты $E_z(r, \phi)$ электрического поля. Действуя так же, как в [8], запишем Фурье-представления для полей:

$$E_z^+(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ V_n^E(k^+ \rho) e^{in\phi}, \quad \rho \in [R_1, R_2], \quad \text{где } V_n^E(k\rho) = \frac{J_n(k^+ R_1) Y_n(k^+ \rho) - Y_n(k^+ R_1) J_n(k^+ \rho)}{J_n(k^+ R_1) Y_n(k^+ R_2) - Y_n(k^+ R_1) J_n(k^+ R_2)}, \quad (11)$$

$$E_z^-(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(k^- \rho) e^{in\phi}, \quad \rho > R_2, \quad (12)$$

где $J_n(z)$, $Y_n(z)$, $H_n^{(1)}(z)$ – функции Бесселя, Неймана и Ханкеля (I-го рода) порядка n .

Из условия сопряжения (10) и граничного условия (6) получаем соотношения для коэффициентов Фурье:

$$C_n^+ = C_n^- H_n^{(1)}(k^- R_2) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Запишем парный ряд Фурье с введенными коэффициентами C_n

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right) e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in L. \right.$$

Введем новые неизвестные коэффициенты $B_n = C_n \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right)$, $n \in \mathbf{Z}$ и приходим окончательно к парному ряду Фурье:

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL; \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \Gamma_n^E e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in L. \right. \quad (13)$$

Здесь $\Gamma_n^E = \left(k^+ V_n^{E'}(k^+ R_2) - k^- \frac{H_n^{(1)'}(k^- R_2)}{H_n^{(1)}(k^- R_2)} \right)^{-1}$, причем $\Gamma_n^E - \frac{A_1}{|n|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, где $A_1 = \frac{k^- R_2}{2}$.

Перепишем второе уравнение из (13) в виде равенства:

$$A_1 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{B_n}{|n|} e^{in\phi} + B_0 \Gamma_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} B_n \left(\Gamma_n - A_1 \frac{1}{|n|} \right) e^{in\phi} = -E_{0z}(R_2, \phi), \quad \phi \in CL. \quad (14)$$

Действуя так же, как в [9 – 10], введем неизвестную функцию $v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi}$, через которую выражают-

ся все неизвестные коэффициенты $B_n = \frac{1}{2\pi} \int_{CL} v(\phi) e^{-in\phi} d\phi$. Условие Майкснера на ребре (8) будет выполнено, если сужение функции $v(\theta)$ на интервал (α_q, β_q) имеет вид

$$v(\theta)|_{(\alpha_q, \beta_q)} = \frac{w_q(\theta)}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}}, \quad \alpha_q < \theta < \beta_q,$$

где $w_q(\theta)$, $\theta \in [\alpha_q, \beta_q]$ функция непрерывная по Гельдеру.

Используем параметрическое представление интегрального оператора с логарифмическим ядром и учтем, что L является объединением непересекающихся интервалов. Уравнение (14) запишем в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{B}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln|\theta - \phi| \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} - \\ & -\frac{B}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} w_q(\theta) \ln \left| \frac{\sin \frac{\theta - \phi}{2}}{\frac{\theta - \phi}{2}} \right| \frac{d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \int_{\alpha_q}^{\beta_q} \frac{K(\theta, \phi) w_q(\theta) d\theta}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} = -u_0(r, \phi)|_{r=R_2}, \quad \phi \in L. \quad (15) \end{aligned}$$

Действуя далее так же, как в [7], введем отображения:

$$g_q : (-1,1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2}, \text{ при этом } \frac{w_q(\theta)}{\sqrt{(\beta_q - \theta)(\theta - \alpha_q)}} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{\gamma_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Выполним замену переменных в каждом из интегралов и перейдем от интегрального уравнения на системе интервалов к системе интегральных уравнений на стандартном интервале $(-1, 1)$:

$$-\frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} -$$

$$-\frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \tilde{K}_{pq}(t, t_0) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = f_q(t_0), \quad q=1, \dots, m, \quad (16)$$

$$\text{где } \tilde{K}_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(g_p(t) - g_q(t_0))), \quad f_q(t_0) = -u_0(r, g_q(t_0)) \Big|_{r=R_2}.$$

Продифференцировав уравнение (16) по параметру t_0 , приходим к сингулярному интегральному уравнению. Дополнительное условие получаем путем домножения на весовую функцию $1/\sqrt{1-t_0^2}$ правой и левой частей уравнения (16) и интегрируя по интервалу $(-1, 1)$ при использовании известного соотношения [11]:

$$\int_{-1}^1 \ln |t - t_0| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\pi \ln 2.$$

Получаем систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_q(t)}{t - t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{B}{\pi} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{1}{g_p(t) - g_q(t_0)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} +$$

$$+ \frac{B}{2\pi} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \left[\text{ctg} \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t_0)} \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \frac{\hat{K}_{pq}(t, t_0) \gamma_p(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = f'_q(t_0), \quad (17)$$

$$\text{где } \hat{K}_{pq}(t, t_0) = (\tilde{K}_{pq}(t, t_0))'_{t_0} = \frac{b_q - a_q}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin(n(g_p(t) - g_q(t_0))), \quad q=1, \dots, m,$$

и дополнительное условие:

$$\frac{B}{\pi} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} -$$

$$-\frac{\Gamma_0}{2} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{B}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 f_q(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \quad q=1, \dots, m, \quad (18)$$

причем интеграл $\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma(t)}{t - t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ нужно понимать в смысле главного значения по Коши.

Дискретная математическая модель. При дискретизации интегрального уравнения (17) и дополнительного условия (18) неизвестную функцию $\gamma_p(t)$ заменяем ее интерполяционным полиномом, а входящие в уравнение интегралы – интерполяционными квадратурными формулами, предварительно заменив ядра уравнений их интерполяционными полиномами с теми же узлами, как это сделано, например, в [7].

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\gamma_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_p(t_i^{N_p}) &= f'_q(t_{0j}^{N_q}), \\ \frac{B}{N_q} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} \gamma_q(t_i^{N_q}) + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) \gamma_p(t_i^{N_p}) &= \int_{-1}^1 f_q(t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}}, \end{aligned} \right. \quad j=1, \dots, N_q - 1, \quad q=1, \dots, m, \quad (19)$$

где

$$G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) = \frac{B\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})}{2} - \frac{2}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} \right] +$$

$$+ B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} + \widehat{K}_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}), \quad p \neq q,$$

$$G_{qq}(t_i^{N_q}, t_{0j}^{N_q}) = \frac{B\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_{0j}^{N_q})}{2} - \frac{2}{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_{0j}^{N_q})} \right] + \widehat{K}_{qq}(t_i^{N_q}, t_{0j}^{N_q}),$$

и

$$Q_{pq}(t_i^{N_p}) = -B \int_{-1}^1 \ln \left| g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0) \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} - B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t_i^{N_p}) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{pq}(t_i^{N_p}, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}},$$

$p \neq q,$

$$Q_{qq}(t_i^{N_q}) = -\frac{\Gamma_0}{2} - B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_q(t_i^{N_q}) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{qq}(t_i^{N_q}, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}},$$

а $t_k^N = \cos \frac{2k-1}{2N} \pi$ – это нули полиномов Чебышева I рода и $t_{0j}^N = \cos \frac{j\pi}{N}$ – это нули полиномов Чебышева II рода.

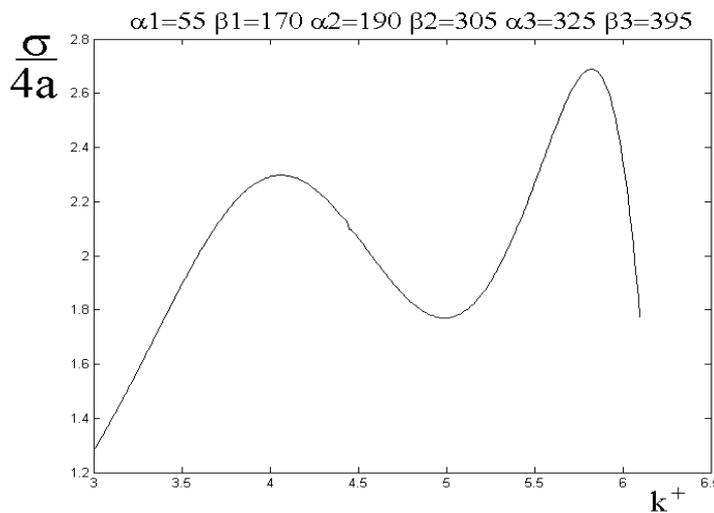


Рис. 2 – Поперечник полного рассеяния в зависимости от волнового числа, случай падения ТМ-волны, три щели.

Решая систему линейных уравнений (19), находим значения интерполяционного полинома в точках t_k^N с наперед заданной точностью. Неизвестные коэффициенты C_n вычисляются по формуле:

$$C_n = B_n \Gamma_n^E = \frac{\Gamma_n^E}{2} \sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^{N_q} \gamma_q(t_k^{N_q}) e^{-i n g_q(t_k^{N_q})}.$$

Выведем выражение для мощности ТМ-волны, рассеянной в пространстве:

$$\sigma = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} E_z(r, \phi) H_\phi^*(r, \phi) r d\phi, \tag{20}$$

где r – радиус произвольной цилиндрической поверхности, охватывающей экран.

Используя представление (12) для компоненты поля $E_z^-(r, \phi)$, получим представление для компоненты поля $H_\phi(r, \phi)$, применяя связь между компонентами из уравнений Максвелла

$$H_\phi(r, \phi) = \frac{1}{i\omega\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k C_n^- H_n^{(1)'}(kr) e^{in\phi}. \quad (21)$$

Подставляя выражения для компонент $H_\phi(r, \phi)$ (21) и $E_z(r, \phi)$ (12) в уравнение для мощности (20), при этом комплексно сопрягаем $H_\phi(r, \phi)$ получаем:

$$\sigma = \frac{4}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_n \Gamma_n}{H_n^{(1)}(ka)} \right|^2, \quad A_n = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m \frac{1}{n_q} \sum_{j=1}^{n_q} \gamma_q(t_j^{n_q}) e^{-ing_q(t_j^{n_q})}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (22)$$

Используя найденные значения интерполяционного многочлена для неизвестной функции $\gamma_p(t)$, находим мощность, рассеянную в пространство.

По найденным значениям строим графики физических характеристик: мощность, диаграмму направленности для компоненты электрического поля, а так же поле в ближней зоне.

Численный эксперимент. На базе построенной дискретной математической модели разработано программное обеспечение. Это позволило провести широкий численный эксперимент при различных параметрах задачи (варьировались радиусы кольца, угол раскрытия щели, диэлектрическая проницаемость заполнителя, волновые числа первичного поля). Приведем некоторые из полученных результатов.

На рис. 2 показан поперечник полного рассеяния задачи дифракции Е-поляризованной волны на антенне с тремя щелями $L = (35^\circ, 55^\circ) \cup (170^\circ, 190^\circ) \cup (305^\circ, 325^\circ)$. Для экстремальных значений $k^+ = 4.06$ и $k^- = 5.82$ построены модули компоненты поля (E_z) в ближней зоне (рис. 3, а; 4, а) и диаграммы направленности (рис. 3, б; 4, б).

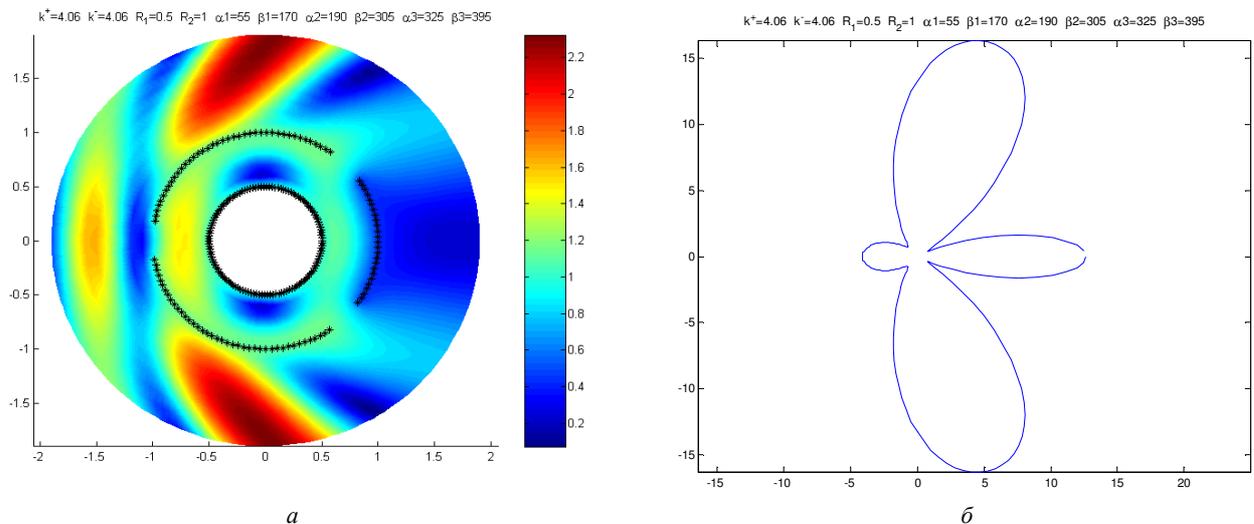


Рис. 3 – Результаты численного эксперимента для значений $k^+ = 4.06$, $k^- = 4.06$, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$:

а – модуль поля в ближней зоне; б – диаграмма направленности.

Анализ полученных данных показал следующее.

На рис. 4, а амплитуда достигает своих локальных максимумов вблизи «задних» щелей в точках с координатами $\rho = 0.7$, $\phi = 74.4^\circ$ и $\rho = 0.7$, $\phi = 285.6^\circ$, при этом значение $A = 3.4379$. Со стороны передней щели, на расстоянии 0.3 от внешней части поверхности кольца, лежит полоса локальных максимумов со средним значением $A = 1.5$.

На рис. 4, б главный лепесток имеет направление угла $\phi_0 = 0^\circ$ и значение амплитуды $|D_E(\phi_0)| = 36.798$. Ширина по нулям напряженности для главного лепестка равна $2\theta = 40^\circ$. Боковые лепестки лежат в направлении углов $\phi_1 = 36^\circ$, $\phi_2 = 324^\circ$, $\phi_3 = 84^\circ$, $\phi_4 = 276^\circ$. Уровни боковых лепестков равны

$$\frac{|D_E(\phi_{1,2})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.267 \quad \text{и} \quad \frac{|D_E(\phi_{3,4})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.59.$$

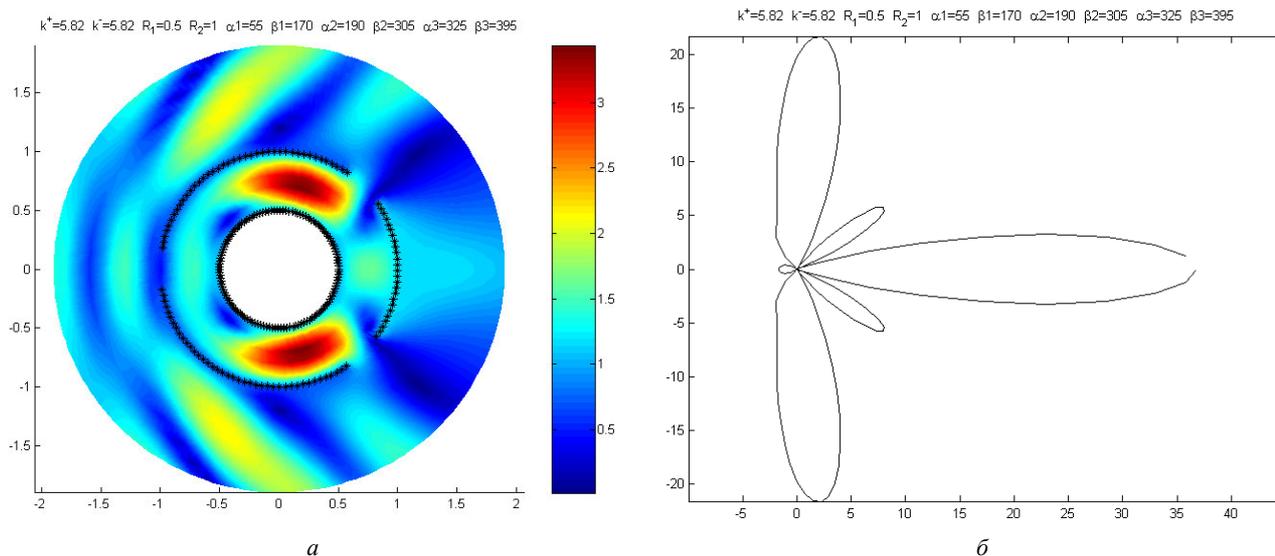


Рис. 4 – Результати численного эксперимента для значений $k^+ = 4.06$, $k^- = 4.06$, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 1$:

a – модуль поля в ближней зоне; b – диаграмма направленности.

Выводы. В работе построена математическая модель дифракции ТМ-волн круглыми цилиндрическими антеннами, с известным числом щелей, и вложенным идеально проводящим круговым цилиндром. Щелевые цилиндрические структуры, для которых построена математическая модель, используются в качестве приемных антенн, фильтров, зондов.

На основе этих моделей рассчитаны поперечники полного рассеяния для различных вариантов геометрии структуры и различных волновых чисел. В ходе анализа найдены локальные максимумы поперечника полного рассеяния. Для некоторых волновых чисел, в которых поперечник полного рассеяния достигает локального максимума, построены диаграммы рассеяния и поля в ближней зоне. Возможность проводить расчеты для нескольких щелей показала, что увеличение числа щелей в структуре может повлечь за собой уменьшение количества боковых лепестков, а также уменьшение уровня их напряженности.

Проведен сравнительный анализ результатов, полученных на основе построенных дискретных математических моделей, с результатами, приведенными в литературе, полученными другими методами для простейших структур, где имеется одна продольная щель. Анализ показал совпадение, причем как поля в ближней зоне, так и диаграмм рассеяния.

Получены результаты использования дискретных математических моделей для структур, имеющих одинаковую геометрию, но при различных числах узлов интерполяции. Это позволило провести внутреннюю проверку метода на устойчивость и сходимость. Численный анализ показал необходимость использования одного узла интерполяции на два градуса металлической поверхности, чтобы получить точность результата до пятой значащей цифры в интервале изменения волновых чисел от 0 до 10. При этом увеличение количества щелей не требует добавления узлов интерполяции.

Проведенный анализ дает возможность утверждать, что построенные математические модели позволяют оптимизировать уже существующие приборы и создавать новые в случае, когда входящие в них структуры имеют несколько продольных щелей.

Список литературы: 1. Richard W. Ziolkowski, J. Brian Grant Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-35, №5. – 1987. – С. 504 – 528. 2. Johnson W.A., Ziolkowski R.W. The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach. // Radio Sci., vol. 19, no.1, pp. 275 – 291, – 1984. 3. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / Назарчук З.Т., отв. ред. Саврук М.П.; АН УССР. Физ.-мех. ин-т им. Г.В. Карпенко. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с. – ISBN 5-12-000912-3. 4. Носич А.И. О влиянии резонансных режимов на характеристики рассеяния незамкнутого цилиндра. – Радиотехника и электрон., 1978, 23, №8, с. 1733 – 1737. 5. Goldstone L.O., Oliner A.A. Leaky wave antennas II: Circular waveguides, IRE Trans. Antennas Propagat., vol. 9, pp. 280 – 290, May 1961. 6. Духонельников С.В. Математические модели для расчета излучения из продольных щелей в волноводе кругового сечения. // Вестник Харк. нац. ун-та., 2005. – № 661. Сер. «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления», вып. 4. – С. 104 – 113. 7. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Х.: ХГУ, 1992. – 145 с. 8. Гандель Ю.В. О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики. // Теория функций, функцион. анализ и их прилож., вып. 38, Х.: Вища школа, 1982. – С. 15 – 18. 9. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: НАН Украины, 1995. – С. 65 – 66. 10. Гандель Ю.В. Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований в аксиально-симметричных краевых задачах математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: НАН Украины, ин-т математики, 1996. – С. 72 – 73. 11. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2001. – 92 с. 12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. Пер. с англ. / Под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Кармазиной – М.:

Наука, 1979. – 832 с., с ил. **13.** Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equation and Their Applications. – London: Teilor and Francis, 2003. **14.** Носич А.И., Шестопалов В.П. Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью. Препринт ИРЭ АН УССР № 78, Харьков, 1977, – 52 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Richard, W. Ziolkowski, and J. Brian Grant. "Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. Vol. AP-35. №5. 1987. 504–528. Print. **2.** Johnson, W. A., and R. W. Ziolkowski. "The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach." *Radio Sci.* Vol. 19. No. 1. 1984. 275–291. Print. **3.** Nazarchuk, Z. T. *Chislennoe issledovanie difrakcii voln na cilindricheskikh strukturah*. Kiev: Nauk. dumka, 1989. Print. **4.** Nosich, A. I. "O vlijanii rezonansnykh rezhimov na karakteristiki rassejanija nezamknutogo cilindra." *Radio-tehnika i jelektron.* No. 8. 23. 1978. 1733–1737. Print. **5.** Goldstone, L. O., and A. A. Oliner. "Leaky wave antennas II: Circular waveguides." *IRE Trans. Antennas Propagat.* Vol. 9. 1961. 280–290. Print. **6.** Duhopel'nikov, S. V. "Matematicheskie modeli dlja rascheta izlucheniya iz prodol'nykh shhelej v volnovode krugovogo secheniya." *Vestnik Kharkov. nac. un-ta. Ser.: Matematicheskoe modelirovanie. Informacionnye tehnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravlenija.* No. 661. 2005. 104–113. Print. **7.** Gandel', Ju. V., S. V. Eremenko and T. S. Poljanskaja. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Obosnovanie chislennogo metoda diskretnykh osobennostej reshenija dvumernykh zadach difrakcii jelektromagnitnykh voln. Uchebnoe posobie.* Kharkov: HGU, 1992. Print. **8.** Gandel', Ju. V. "O parnykh rjadah Fur'e nekotorykh smeshannykh kraevykh zadach matematicheskoy fiziki." *Teoriya funkcion. anal. i ih prilozh.* Vol. 38. Kharkov: Vishha shkola, 1982. 15–18. Print. **9.** Gandel', Ju. V. "Parametricheskie predstavlenija singuljarnykh integral'nykh preobrazovanij i kraevye zadachi matematicheskoy fiziki." *Nelinejnye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ih prilozhenija.* Kiev: NAN Ukrainy, 1995. 65–66. Print. **10.** Gandel', Ju. V. "Parametricheskie predstavlenija singuljarnykh integral'nykh preobrazovanij v aksial'no-simmetrichnykh kraevykh zadachah matematicheskoy fiziki." *Nelinejnye kraevye zadachi matematicheskoy fiziki i ih prilozhenija.* Kiev: NAN Ukrainy, in-t matematiki, 1996. 72–73. Print. **11.** Gandel' Ju. V. *Vvedenie v metody vychislenija singuljarnykh i gipersinguljarnykh integralov.* Kharkov: HNU im. V.N. Karazina, 2001. Print. **12.** *Spravochnik po special'nykh funkcijam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami.* Ed. M. Abramovic, and I. Stigan. Per. s angl. Ed. V. A. Ditkin, and L. N. Karmazina. Moscow: Nauka, 1979. Print. **13.** Lifanov, I. K., L. N. Poltavskii and G. M. Vainikko. *Hypersingular Integral Equation and Their Applications.* London: Teilor and Francis, 2003. Print. **14.** Носич, А. И., and В. П. Шестопалов. "Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью." *Preprint IRJe AN USSR.* No. 78. Kharkov. 1977. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Духопельников Сергей Владимирович – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

Духопельников Сергей Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

Dukhopelnykov Sergey Vladimirovich – Candidate of Engineering Science, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute», Kharkov; tel.: (098) 777-86-37; e-mail: sergey_dukh@ukr.net.

УДК 517.98

А. В. КОРОБСКАЯ

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Изучен оператор, который является линейной комбинацией модельного оператора интегрирования и его сопряженного. Показано, что данный оператор ограничен, и найден сопряженный к нему оператор. Для исследуемого несамосопряженного оператора построен локальный узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Получена полугруппа, которую порождает изучаемый оператор, при этом возникает задача Коши для уравнения второго порядка. Отметим, что изучаемый в работе оператор не всегда является диссипативным, а характеристическая функция узла, соответствующего данному оператору, имеет ряд особенностей, которые изучены в работе. Предложены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: оператор интегрирования, узел, характеристическая функция, полугруппа оператора.

Введение. Одним из активно развивающихся направлений функционального анализа является теория модельных представлений несамосопряженных операторов, которая играет важную роль в решении задач теории спектральных представлений, а также при конструировании некоторых классов неоднородных случайных полей. Многие из аспектов данного направления функционального анализа получили свое развитие в научных исследованиях по теории характеристических функций и треугольных моделей [1, 2], функциональных моделей [3], аналитических функций [4], треугольных представлений линейных операторов [5], спектральных представлений несамосопряженных операторов [6, 7], линейных операторов в гильбертовом пространстве [8, 9], в задачах базисности и полноты [10], в вопросах управляемости и наблюдаемости [11]. В связи с этим возникает необходимость в изучении различных типов линейных операторов средствами спектрального анализа.

Анализ предыдущих исследований. Основу спектрального анализа несамосопряженных операторов составляет теория характеристических функций и треугольных моделей, представленная в работах [1, 2]. Для несамосопряженного оператора аналогом спектрального разложения принято считать треугольную или функцио-

© А. В. Коробская, 2015

нальную модели. Подход, предложенный в [1; 2], привлек внимание достаточно широкого круга исследователей [5, 6, 7]. Следует отметить, что оператор, который представляет собой линейную комбинацию модельного оператора интегрирования и его сопряженного, в данном контексте не изучался. При этом, изучаемый в работе оператор не всегда является диссипативным, а характеристическая функция узла, соответствующего данному оператору, имеет ряд особенностей.

Постановка задачи. Распространить подход, предложенный в [2, 6], на модельный оператор интегрирования вида

$$Bf = (a + b)\alpha(x)f(x) + ai \int_0^x f(t) dt + bi \int_x^l f(t) dt,$$

который действует в пространстве $L^2_{[0;l]}$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha(x)$ – вещественная неубывающая, ограниченная функция.

Построить локальный узел, вычислить характеристическую функцию этого узла и соответствующую полу-группу этого оператора.

Метод вычисления. Рассмотрим в $L^2_{[0;l]}$ оператор вида

$$Bf = (a + b)\alpha(x)f(x) + ai \int_0^x f(t) dt + bi \int_x^l f(t) dt, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha(x)$ – вещественная неубывающая ограниченная функция.

В работе [12] было доказано, что оператор B ограничен в $L^2_{[0;l]}$ при $\alpha(x) = 0$. Докажем ограниченность операторов B и $B_1f = (a + b)\alpha(x)f(x)$:

$$\|B_1f\| = \|(a + b)\alpha(x)f(x)\| \leq (a + b)\|\alpha\| \cdot \|f\|.$$

Действительно, для B_1 справедливо неравенство

$$\|B_1f\| \leq C\|f\|,$$

где $C = (a + b)\|\alpha\|$, то есть, B_1 ограничен в $L^2_{[0;l]}$. Тогда оператор (1) ограничен в $L^2_{[0;l]}$.

Найдем сопряженный оператор B^* к B , то есть $\langle Bf, g \rangle = \langle f, B^*g \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle Bf, g \rangle &= \int_0^l (a + b)\alpha(x)f(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^l ai \int_0^x f(t) dt \cdot \overline{g(x)}dx + \int_0^l bi \int_x^l f(t) dt \cdot \overline{g(x)}dx = \\ &= \int_0^l f(x)\overline{(a + b)\alpha(x)g(x)}dx + \int_0^l f(t) dt \cdot \overline{(-ai) \int_t^l g(x) dx} + \int_0^l f(t) dt \cdot \overline{(-bi) \int_0^t g(x) dx} = \\ &= \left\langle g, (a + b)\alpha(x)f(x) - ai \int_x^l f(t) dt - bi \int_0^x f(t) dt \right\rangle. \end{aligned}$$

В результате получаем, что B^* имеет вид:

$$B^*f = (a + b)\alpha(x)f(x) - ai \int_x^l f(t) dt - bi \int_0^x f(t) dt.$$

Построение локального узла. Включим оператор B , определяемый правилом (1), в узел:

$$\Delta = (B, H, \varphi, E, \sigma).$$

Для нахождения φ вычислим $(B - B^*)/i = \varphi^* \sigma \varphi$:

$$\frac{B - B^*}{i} f = \frac{1}{i} \left(ai \int_0^x f(t) dt + bi \int_x^l f(t) dt + ai \int_x^l f(t) dt + bi \int_0^x f(t) dt \right) = (a + b) \int_0^l f(t) dt. \tag{2}$$

То есть

$$\varphi^* \sigma \varphi f = (a + b) \int_0^l f(t) dt, \tag{3}$$

где

$$\varphi f = \int_0^l f(t) dt, \quad \varphi: L^2_{[0;l]} \rightarrow \mathbb{C} \text{ и } E = \mathbb{C}, \tag{4}$$

а оператор σ действует в \mathbb{C} по формуле:

$$\sigma = a + b, \quad (5)$$

и $\varphi^* g = g_x$, где g_x – постоянная на $[0; l]$, функция равная g .

Итак, на основе (2), (3), (4), (5) установлено, что операторный узел для B имеет вид:

$$\Delta = (B, L_{[0;l]}^2, \varphi, \mathbb{C}, \sigma = a + b). \quad (6)$$

Характеристическая функция узла. Найдем характеристическую функцию узла (6), которая определена равенством

$$S_{\Delta}(\lambda) = I - i\varphi(B - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$:

$$f(x) = (B - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g,$$

где $g \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\sigma g = (B - \lambda I) f(x). \quad (7)$$

Распишем левую и правую части равенства (7):

$$(a + b)g = [(a + b)\alpha(x) - \lambda]f(x) + ai \int_0^x f(t) dt + bi \int_x^l f(t) dt. \quad (8)$$

Обозначим $F(x) = [(a + b)\alpha(x) - \lambda]f(x)$ и выразим $f(x)$:

$$f(x) = \frac{F(x)}{(a + b)\alpha(x) - \lambda}. \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), получим такое равенство:

$$(a + b)g = F(x) + ai \int_0^x \frac{F(t)}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} dt + bi \int_x^l \frac{F(t)}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} dt. \quad (10)$$

Подставим значения $x = l$ и $x = 0$ в (10) и придем к следующей системе:

$$\begin{cases} F(l) + ai \int_0^l \frac{F(t)}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} dt = (a + b)g; \\ F(0) + bi \int_0^l \frac{F(t)}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} dt = (a + b)g. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда

$$bF(l) - aF(0) = (b^2 - a^2)g. \quad (12)$$

Продифференцируем уравнение (10) по x :

$$F'(x) + i(a - b) \cdot \frac{F(x)}{(a + b)\alpha(x) - \lambda} = 0, \quad F'(x) = i(b - a) \cdot \frac{F(x)}{(a + b)\alpha(x) - \lambda}. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) будет иметь вид:

$$F(x) = C \exp \left\{ i(b - a) \cdot \int_0^x \frac{dt}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} \right\}. \quad (14)$$

Подставим полученное выражение (14) в (12) и получим:

$$\begin{aligned} bF(l) - aF(0) &= C \left(b \cdot \exp \left\{ i(b - a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} \right\} - a \right) = (b^2 - a^2)g, \\ C &= \frac{(b^2 - a^2)g}{b \exp \left\{ i(b - a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} \right\} - a}. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом (4) получим характеристическую функцию вида

$$S_{\Delta}(\lambda)g = g - i\varphi f = g - i \int_0^l f(t) dt. \quad (16)$$

Для нахождения $\int_0^l f(t) dt$ возьмем систему (11) и, с учетом (9), запишем ее в виде:

$$F(l) - F(0) + (a - b) \int_0^l f(t) dt = 0, \quad i \int_0^l f(t) dt = \frac{F(l) - F(0)}{b - a} = \frac{C \left(\exp \left\{ i(b - a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a + b)\alpha(t) - \lambda} \right\} - 1 \right)}{b - a}. \quad (17)$$

Подставим (17) в (16):

$$S_{\Delta}(\lambda)g = g - \frac{C \left(\exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\} - 1 \right)}{b-a}. \tag{18}$$

Подставим в (18) значение C по (15):

$$S_{\Delta}(\lambda)g = g - \frac{g(b^2 - a^2)}{b \cdot \exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\} - a} \cdot \frac{\exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\} - 1}{b-a} = g \left(\frac{b-a \cdot \exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\}}{b \cdot \exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\} - a} \right).$$

Теорема 1. Характеристическая функция узла $\Delta = (B, L_{[0,l]}^2, \varphi, \mathbb{C}, \sigma = a + b)$ (6) определяется формулой:

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{b-a \cdot \exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\}}{b \cdot \exp \left\{ i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda} \right\} - a}. \tag{19}$$

Обозначим

$$\gamma = i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}. \tag{20}$$

Тогда, с учетом (19), (20), окончательно получаем представление для $S_{\Delta}(\lambda)$:

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{a}{b} \cdot \frac{b - e^{\gamma}}{e^{\gamma} - \frac{a}{b}}. \tag{21}$$

Обозначим $k = \frac{b}{a}$, тогда из (21) следует, что

$$S_{\Delta}(\lambda) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k - e^{\gamma}}{e^{\gamma} - \frac{1}{k}}. \tag{22}$$

Пусть $e^{\psi} = k$ ($\psi = \ln k$, причем, не ограничивая общности можно считать, что $k > 0$), тогда

$$\frac{1}{k} = e^{-\psi}. \tag{23}$$

Подставим (23) в (22), тогда характеристическая функция будет иметь вид:

$$S_{\Delta}(\lambda) = e^{-\psi} \frac{e^{\psi} - e^{\gamma}}{e^{\gamma} - e^{-\psi}} = - \frac{sh \frac{\gamma - \psi}{2}}{sh \frac{\gamma + \psi}{2}}.$$

Теорема 2. Характеристическая функция узла $\Delta = (B, L_{[0,l]}^2, \varphi, \mathbb{C}, \sigma = a + b)$ (6) определяется формулой:

$$S_{\Delta}(\lambda) = - \frac{sh \frac{\gamma - \psi}{2}}{sh \frac{\gamma + \psi}{2}}, \tag{24}$$

где $\gamma = i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t)-\lambda}$, $e^{\psi} = k$ и $k = \frac{b}{a}$.

Изучим особенности характеристической функции (24) узла (6) оператора (1).

Характеристическая функция (24) имеет особенность в точке, которая удовлетворяет равенству:

$$\operatorname{sh} \frac{\gamma + \psi}{2} = 0. \quad (25)$$

Обозначим $\frac{\gamma + \psi}{2} = x + iy$, тогда (25) примет вид:

$$\operatorname{sh}(x + iy) = 0; \quad (26)$$

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}(iy) + \operatorname{sh}(iy) \cdot \operatorname{ch} x = 0; \quad \operatorname{sh} x \cdot \cos y + i \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} x = 0; \quad \{ \operatorname{sh} x \cdot \cos y = 0; \sin y \cdot \operatorname{ch} x = 0. \quad (27)$$

Система (27) имеет решение только тогда, если $\operatorname{sh} x = 0$ и $\sin y = 0$, то есть $x = 0$, $y = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Подставим найденное решение в (26), тогда $0,5(\gamma + \psi) = i\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. При этом

$$\gamma = 2i\pi k - \psi, \quad (28)$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

С учетом замен $e^\psi = k$ и $k = b/a$ получает, что $e^\psi = b/a$.

Рассмотрим следующие случаи для $e^\psi = b/a$.

Случай 1. Если $\frac{b}{a} > 0$, то $\psi = \ln \frac{b}{a}$. С учетом (20) и (28) получим:

$$i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t) - \lambda} = 2i\pi k - \ln \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{i} \cdot \frac{b+a}{b-a} \cdot \left(2i\pi k - \ln \frac{b}{a} \right) = \int_0^l \frac{dt}{\alpha(t) - \frac{\lambda}{b+a}}. \quad (29)$$

Обозначим $\mu = \frac{\lambda}{b+a}$, а $\varphi = -\frac{b+a}{b-a} \cdot \left(2i\pi k - \ln \frac{b}{a} \right)$; тогда равенство (29) примет вид:

$$i\varphi = \int_0^l \frac{dt}{\alpha(t) - \mu}.$$

Случай 2. Если $\frac{b}{a} < 0$, то $e^\psi = e^{i\pi} e^{|\psi|} = \frac{b}{a}$, и тогда $\psi = \ln \left| \frac{b}{a} \right| - i\pi$. С учетом (20) и (28) имеем:

$$i(b-a) \cdot \int_0^l \frac{dt}{(a+b)\alpha(t) - \lambda} = 2i\pi k - \ln \left| \frac{b}{a} \right| + i\pi, \quad \frac{1}{i} \cdot \frac{b+a}{b-a} \cdot \left((2k+1)i\pi - \ln \left| \frac{b}{a} \right| \right) = \int_0^l \frac{dt}{\alpha(t) - \frac{\lambda}{b+a}}. \quad (30)$$

Обозначим $\mu = \frac{\lambda}{b+a}$, а $\varphi = -\frac{b+a}{b-a} \cdot \left((2k+1)i\pi - \ln \left| \frac{b}{a} \right| \right)$, тогда равенство (30) получит вид:

$$i\varphi = \int_0^l \frac{dt}{\alpha(t) - \mu}.$$

Теорема 3. Особенности характеристической функции (24) $S_\Delta(\lambda)$ определяются решениями $\mu = \lambda/(b+a)$ уравнения

$$i\varphi = \int_0^l \frac{dt}{\alpha(t) - \mu},$$

где $\lambda = (a+b)\alpha(t)$ при $t \in [0; l]$, а

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{b+a}{b-a} \cdot \left(2i\pi k - \ln \frac{b}{a} \right), & \text{при } \frac{b}{a} > 0; \\ -\frac{b+a}{b-a} \cdot \left((2k+1)i\pi - \ln \left| \frac{b}{a} \right| \right), & \text{при } \frac{b}{a} < 0. \end{cases}$$

Полугруппа оператора. Вычислим полугруппу Z_t , отвечающую оператору B (1).

Рассмотрим полугруппу

$$Z_t f(x) = e^{iBt} f(x), \quad (31)$$

порождаемую оператором B (1), и пусть

$$f(x, t) = Z_t f(x). \quad (32)$$

Продифференцируем (32) по t и получим

$$f_t'(x, t) = iB(f(x, t)). \tag{33}$$

Если в $f(x, t)$ подставить $t = 0$, то получим функцию, зависящую только от x :

$$f(x, 0) = f(x). \tag{34}$$

Равенство (33) означает, что

$$f_t'(x, t) = i(a+b)\alpha(x)f(x, t) - a \int_0^x f(x, \xi) d\xi - b \int_x^l f(x, \xi) d\xi. \tag{35}$$

Продифференцируем (35) по x :

$$f_{xt}''(x, t) = i(a+b) \left[\alpha(x)f(x, t) \right]'_x + (b-a)f(x, t), \left[f_t'(x, t) - i(a+b)\alpha(x)f(x, t) \right]'_x = (b-a)f(x, t). \tag{36}$$

Заметим, что

$$\left\{ \begin{aligned} f_t'(l, t) &= i(a+b)\alpha(l)f(l, t) - ai \int_0^l f(\xi, t) d\xi; \quad f_t'(0, t) = i(a+b)\alpha(0)f(0, t) - bi \int_0^l f(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \right.$$

Умножим первое равенство на b , а второе на $-a$, и сложим, получим:

$$bf_t'(l, t) - af_t'(0, t) = i(a+b) \cdot [bf(l, t)\alpha(l) - af(0, t)\alpha(0)]. \tag{37}$$

Объединяя условия (36), (37) и (34), получаем *краевую задачу Дарбу-Гурса*:

$$\left\{ \begin{aligned} f_{xt}''(x, t) &= i(a+b) \left[\alpha(x)f(x, t) \right]'_x + (b-a)f(x, t); \quad bf_t'(l, t) - af_t'(0, t) = i(a+b) \cdot [bf(l, t)\alpha(l) - af(0, t)\alpha(0)]; \\ f(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \right.$$

Обозначим:

$$g(x, t) = f_t'(x, t) - i(a+b)\alpha(x)f(x, t). \tag{38}$$

Продифференцируем (38) по x и получим:

$$g_x'(x, t) = f_{xt}''(x, t) - i(a+b) \left[\alpha(x)f(x, t) \right]'_x = (b-a)f(x, t). \tag{39}$$

Продифференцируем (39) по t :

$$g_{xt}''(x, t) = (b-a)f_t'(x, t). \tag{40}$$

Выразим $f_t'(x, t)$ из (38):

$$f_t'(x, t) = g(x, t) + i(a+b)\alpha(x)f(x, t). \tag{41}$$

Подставим (41) в (40) и получим:

$$g_{xt}''(x, t) = (b-a) \left[g(x, t) + i(a+b)\alpha(x)f(x, t) \right], \tag{42}$$

Выразим $f(x, t)$ из (39); имеем:

$$f(x, t) = \frac{g_x'(x, t)}{b-a}. \tag{43}$$

Подставим (43) в (42) и получим, что

$$g_{xt}''(x, t) - (b-a)g(x, t) - i(a+b)\alpha(x)g_x'(x, t) = 0. \tag{44}$$

Далее подставим (43) и (41) в (37):

$$\begin{aligned} bf_t'(l, t) - af_t'(0, t) &= bg(l, t) - ag(0, t) + ib(a+b)\alpha(l) \frac{g_x'(l, t)}{b-a} - \\ - ia(a+b)\alpha(0) \frac{g_x'(0, t)}{b-a} &= ib(a+b)\alpha(l) \frac{g_x'(l, t)}{b-a} - ia(a+b)\alpha(0) \frac{g_x'(0, t)}{b-a} + \\ + bg(l, t) - ag(0, t) &= i(a+b) \left[b\alpha(l)f(l, t) - a\alpha(0)f(0, t) \right]. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$bg(l, t) - ag(0, t) = 0. \tag{45}$$

Получили следующую *задачу Коши* с граничными условиями для функции $g(x, t)$:

$$\left\{ \begin{aligned} g_{xt}''(x, t) - (b-a)g(x, t) - i(a+b)\alpha(x)g_x'(x, t) &= 0; \quad bg(l, t) - ag(0, t) = 0. \end{aligned} \right.$$

Решим дифференциальное уравнение (44) методом разделения переменных. Представим $g(x, t)$ в виде:

$$g(x, t) = X(x)T(t). \tag{46}$$

Тогда уравнение (44) будет таким:

$$X'(x)T'(t) = \left[(b-a)X(x) + i(a+b)\alpha(x)X'(x) \right] T(t).$$

Обозначим

$$\frac{X'(t)}{(b-a)X(x)+i(a+b)\alpha(x)X'(x)} = \frac{T(t)}{T'(t)} = \lambda$$

и получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X'(x) = \lambda[(b-a)X(x)+i(a+b)\alpha(x)X'(x)], \quad (47)$$

$$T(t) = \lambda T'(t). \quad (48)$$

С учетом (45) и (46) получаем дифференциальное уравнение для $X(x)$ с заданными граничными условиями:

$$\{X'(x) = \lambda[(b-a)X(x)+i(a+b)\alpha(x)X'(x)]; bX(l) - aX(0) = 0.$$

Из (47) следует, что

$$X(x) = C \exp \left\{ \int_0^x \frac{\lambda(b-a)}{1-\lambda i(a+b)\alpha(s)} ds \right\}. \quad (49)$$

Подставим в (49) граничное условие $bX(l) - aX(0) = 0$ и получим равенство для λ :

$$b \exp \left\{ \int_0^l \frac{\lambda(b-a)}{1-\lambda i(a+b)\alpha(s)} ds \right\} - a = 0, \quad \int_0^l \frac{\lambda(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds = \ln \frac{a}{b} + 2\pi n i b, \quad (50)$$

где $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, мы получили равенство для $X_n(x)$:

$$X_n(x) = C_n \exp \left\{ \int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds \right\},$$

где λ_n удовлетворяют уравнению (50).

Система функций $X_n(x)$ будет полна в $L^2_{[0,l]}$ в силу известной *теоремы Келдыша* [9]. Последнее следует из того, что

$$X_n(x) = C_n \exp \left\{ \frac{\lambda_n x(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(\xi)} \right\},$$

где $\xi \in (0; x)$, при этом дробь в показателе равномерно ограничена.

Обозначим

$$B = \frac{\ln \frac{a}{b} + 2\pi n i}{b-a}, \quad \text{причём } B_R = \frac{\ln \frac{a}{b}}{b-a}, \quad B_I = \frac{2\pi n}{b-a}, \quad \text{тогда (50) будет иметь вид:}$$

$$\int_0^l \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds = B_R + iB_I; \quad \int_0^l \frac{\lambda_n}{\frac{1}{\lambda_n} - i(a+b)\alpha(s)} ds = B_R + iB_I. \quad (51)$$

Обозначим $i\mu = \frac{1}{\lambda_n}$, $\beta(s) = (a+b)\alpha(s)$, тогда (51) будет выглядеть так:

$$\int_0^l \frac{1}{\beta(s) - \mu} ds = B_I - iB_R. \quad (52)$$

Это отображение переводит \mathbb{C}_+ в \mathbb{C}_+ , если $\beta(s)$ – вещественная функция. Поскольку $\alpha(s)$ – неубывающая функция, то и $\beta(s)$ тоже неубывает. Заменим $\beta(s) = \xi$, тогда $s = \beta^{-1}(\xi) = \sigma(\xi)$. При этом $\sigma(\xi) > 0$.

Подставим в (52) полученные замены:

$$\int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} = B_I - iB_R,$$

где $a = \beta(0)$, $b = \beta(l)$.

Пусть $F_\mu = \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} = B_I - iB_R = B'$. Для того, чтобы $F_\mu \in \mathbb{C}_+$, нужно, чтобы $B' \in \mathbb{C}_+$, то есть $\frac{\ln \frac{a}{b}}{b-a} < 0$ при условии, что $a, b > 0$.

Рассмотрим следующие два случая для μ :

- 1) $\mu \in \mathbb{C}_-$, тогда $F_\mu \in \mathbb{C}_-$, $B' \in \mathbb{C}_+$, а $F_\mu = B'$, что приводит к противоречию;
- 2) $\mu \in \mathbb{C}_+$, тогда $F_\mu \in \mathbb{C}_+$, $B' \in \mathbb{C}_+$, $F_\mu = B'$, такой вариант выполняется.

Приходим к выводу, что $\mu \in \mathbb{C}_+$, а $F_\mu = \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} : \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}_+$.

Рассмотрим возможные случаи для функции $\beta(s) = (a+b)\alpha(s)$.

Случай 1. Если $\beta(s)$ – монотонная возрастающая функция, то есть $\xi = \beta(t)$ монотонно возрастает, то

$$F_\mu = \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} = B_I - iB_R.$$

Обозначим $z = \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu}$. Найдем мнимую и вещественную части z : $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} \left[\int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} + \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \bar{\mu}} \right] = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{2\xi d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} + \frac{\mu + \bar{\mu}}{2} \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2}, \tag{53}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} \left[\int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu} - \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \bar{\mu}} \right] = \frac{\mu - \bar{\mu}}{2i} \int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2}. \tag{54}$$

Из (54) следует, что:

$$\int_a^b \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} = \frac{2i \operatorname{Im} z}{\mu - \bar{\mu}}. \tag{55}$$

Подставим (55) в (53):

$$\operatorname{Re} z = \int_a^b \frac{\xi d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} + i \frac{\mu + \bar{\mu}}{\mu - \bar{\mu}} \operatorname{Im} z. \tag{56}$$

А поскольку, с другой стороны, $\operatorname{Re} z = B_I$, $\operatorname{Im} z = -B_R$, то из (56) получаем характеристическое уравнение для спектра:

$$B_I = \int_a^b \frac{\xi d\sigma(\xi)}{|\xi - \mu|^2} + i \frac{\mu + \bar{\mu}}{\mu - \bar{\mu}} B_R,$$

где $B_R = \frac{\ln \frac{a}{b}}{b-a}$, $B_I = \frac{2\pi n}{b-a}$, $\mu = \frac{1}{i\lambda}$.

Случай 2. Если $\beta(s)$ – кусочно-монотонная возрастающая функция, то

$$F_\mu = \int_{\cup I_k} \frac{d\sigma(\xi)}{\xi - \mu},$$

где I_k – разбиение $[a; b]$, $k = \overline{1, n}$, и тогда

$$F_\mu = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(\xi)}{t_k - \mu},$$

где $t_k \in I_k$.

Найдем теперь $T_n(t)$ из уравнения (48): $T_n(t) = C_n e^{\frac{1}{\lambda_n} t}$.

Получим следующий ряд:

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{t}{\lambda_n}} X_n, \quad X_n(x) = C_n \exp \left\{ \int_0^x \frac{\lambda_n (b-a)}{1 - \lambda_n i (a+b) \alpha(s)} ds \right\}, \tag{57}$$

где λ_n удовлетворяют уравнению (51).

С учетом (46) получаем граничное условие:

$$g(x, 0) = g(x). \tag{58}$$

Из равенства (57) и условия (58) следует, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds} T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds} = g(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left\{ \int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds \right\} = g(x). \quad (59)$$

Теперь можем выписать разложение функции $g(x, t)$ с учетом равенства (57):

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left\{ \frac{t}{\lambda_n} + \int_0^x \frac{\lambda_n(b-a)}{1-\lambda_n i(a+b)\alpha(s)} ds \right\},$$

где λ_n из (50), C_n из (59).

С учетом (43) имеем:

$$f(x, t) = \frac{g_t'(x, t)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\lambda_k} \exp \left\{ \frac{t}{\lambda_k} + \int_0^x \frac{\lambda_k(b-a)}{1-\lambda_k i(a+b)\alpha(s)} ds \right\}.$$

Теорема 4. Полугруппа $Z_t f(x) = e^{iBt} f(x)$ (31), где B имеет вид (1), задается выражением:

$$Z_t f(x) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\lambda_k} \exp \left\{ \frac{t}{\lambda_k} + \int_0^x \frac{\lambda_k(b-a)}{1-\lambda_k i(a+b)\alpha(s)} ds \right\},$$

где C_k определяются из (59) по функции $g(x)$, а λ_k удовлетворяют уравнению (50).

Выводы. Таким образом, в данной работе изучен оператор вида

$$Bf = (a+b)\alpha(x)f(x) + ai \int_0^x f(t) dt + bi \int_x^l f(t) dt,$$

который действует в пространстве

$$L^2_{[0;l]}, \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, \alpha(x) - \text{вещественная неубывающая, ограниченная функция})$$

и является линейной комбинацией модельного оператора интегрирования и его сопряженного. Осуществлено включение данного оператора в узел, вычислена характеристическая функция узла и исследованы ее особенности. Получена соответствующая полугруппа, которую порождает изучаемый оператор.

Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для построения спектральных разложений некоторых классов нестационарных случайных функций и получения модельных представлений для корреляционных функций нестационарных случайных процессов, которые можно использовать для обработки статистических данных.

Список литературы: 1. Лившиц М.С. Операторы колебания волны. Открытые системы. – М.: Наука, 1966. – 298 с. 2. Лившиц М.С., Янцевиц А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с. 3. Над' Б.С., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с. 4. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 496 с. 5. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с. 6. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Х.: ХНУ, 2003. – 342 с. 7. Бродский М.С., Лившиц М.С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы // УМН, 1958. – XII, 1/79. – С. 3 – 86. 8. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, Физматлит, 1966. – 544 с. 9. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1954. – 352 с. 10. Nikolski N.K. Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Volum 2: Model Operators and Systems. Mathem. Surv. and Monogr, Vol. 92. – Amer. Mathem. Soc., 2002. – 438 p. 11. Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix-valued functions and related topics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 575 p. 12. Коробская А.В. Полугруппа оператора интегрирования и его свойства // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2014. – № 1105 – Вип. 24. – С. 85 – 98.

Bibliography (transliterated): 1. Livshic, M. S. *Operatory kolebanija volny. Otkrytye sistemy*. Moscow: Nauka, 1966. Print. 2. Livshic, M. S., and A. A. Jancevich. *Teorija operatornyh uzlov v gil'bertovyh prostranstvah*. Kharkiv: Izd-vo Khark. un-ta, 1971. Print. 3. Nad', B. S., and Ch. Fojash. *Garmonicheskij analiz operatorov v gil'bertovom prostranstve*. Moscow: Mir, 1970. Print. 4. Garnet, Dzh. *Ogranichennye analiticheskie funkicii*. Moscow: Mir, 1984. Print. 5. Brodskij, M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavlenija linejnyh operatorov*. Moscow: Nauka, 1969. Print. 6. Zolotarev, V. A. *Analiticheskie metody spektral'nyh predstavlenij nesamosoprazhzhennyh i neunitarnyh operatorov*. Kharkiv: KhNU, 2003. Print. 7. Brodskij, M. S., and M. S. Livshic. "Spektral'nyj analiz nesamosoprazhzhennyh operatorov i promezhutochnye sistemy." *UMN*, No. XII, 1/79. 1958. 3–86. Print. 8. Ahiezer, N. I. and I. M. Glazman. *Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve*. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1966. Print. 9. Najmark, M. A. *Linejnye differencial'nye operatory*. Moscow: Gos. izd-vo tehn.-teor. lit-ry, 1954. Print. 10. Nikolski, N. K. *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading. Vol. 2: Model Operators and Systems*. Mathem. Surv. and Monogr. Vol. 92. Amer. Mathem. Soc., 2002. Print. 11. Arov, D. Z., and H. Dym. *J-contractive matrix-valued functions and related topics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. Print. 12. Korobskaja, A. V. "Polugruppa operatora integrirovaniya i ego svojstva." *Visnyk Harkivsk'ogo nacional'nogo universytetu imeni V. N. Karazina. Serija «Matematychnе modeljuvannja. Informacijni tehnologii». Avtomatyzovani systemy upravlinnja*. No. 1105. Vol. 24. Kharkiv: KhNU imeni V. N. Karazina, 2014. 85–98. Print.

Поступила (received) 01.09.2015

Коробська Ганна Вікторівна – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики та інформатики, Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (050) 831-87-42; e-mail: korobskayaanna@gmail.com.

Коробская Анна Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (050) 831-87-42; e-mail: korobskayaanna@gmail.com.

Korobska Ganna Vyktorivna – Candidate of Pedagogic Sciences, Associate Professor at the Department of Higher Mathematics and Informatics, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (050) 831-87-42; e-mail: korobskayaanna@gmail.com.

УДК 517.95+518.517

Ю. С. ЛИТВИНОВА

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАНИИ ИНФОРМАЦИИ О СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ 3D ПЕЧАТИ

Проведен обзор информации об использовании возможностей 3D печати в создании строительных объектов. В статье автор, используя методы теории R – функций, построил математическую и компьютерную модели коттеджного дома с целью реализации его 3D печати. Проведено поэтапное построение уравнений конструктивных элементов дома. Значительное внимание уделено построению внутренних конструкций дома. Для удобства выбора реализовано несколько вариантов построения крыши дома.

Ключевые слова: R – функции, визуализация 3D объектов, строительные конструкции, 3D печать, конструктивные элементы.

Введение. В настоящее время для создания трёхмерных физических объектов весьма перспективным является использование 3D принтеров. В основе технологии 3D печати лежит принцип послойного создания твердой модели. Преимуществами подобных устройств перед обычными способами создания моделей являются высокая скорость, простота и низкая стоимость. Сегодня сложно сказать, кто первым додумался попробовать напечатать на 3D принтере жилой дом, но уже сейчас понятно, что в недалеком будущем технология трехмерной печати станет неотъемлемой частью строительного дела. В начале двухтысячных годов сразу несколько независимых друг от друга групп ученых начали исследования в области применения технологии 3D печати в строительстве.

Анализ последних исследований. Группе инженеров британского Университета Лафборо, работающих под руководством *доктора Сунгу Лима*, удалось создать уникальный цементный состав, позволяющий печатать изделия любых форм: выпуклые, краеугольные, изогнутые, кубические. Усовершенствованная цементная формула укладывается методом экструдирования, что позволяет значительно упростить строительные работы, поскольку исключается необходимость в опалубке. Готовые бетонные фигуры легко поддаются корректировке и отделочным работам. Эксперименты британских инженеров не прошли бесследно. Их идея вызвала живой интерес ученых из Южно-Калифорнийского университета. Они предложили использовать огромные машины для 3D печати непосредственно на строительных площадках.

В патентное бюро США был направлен проект под названием *Contour Crafting*, на основе которого планируется собрать огромный принтер, который сможет печатать дома в сборе: не только несущие стены, но и проводку вместе с сантехникой.

В Амстердаме команда архитекторов работает над проектом, призванным освоить одно из самых важных направлений развития 3D печати – строительство зданий. Руководители фирмы намерены возвести здание в северной части Амстердама на канале *Buiksloter*, и оно будет функционировать в качестве образца и исследовательского центра для технологий 3D печати [1, 2].

В шанхайской компании *Shanghai WinSun Decoration Design Engineering Co* не стали дожидаться, пока американские конструкторы соберут футуристическую машину. Вместо этого предприимчивые инженеры собрали собственный 3D принтер *WinSun*, поразивший мировую общественность в первую очередь своими размерами. Аппарат 150 метров длиной и 10 метров шириной способен всего за несколько часов напечатать здание высотой до 6 метров. 3D строительный принтер *WinSun* в качестве «чернил» использует цемент, усиленный стекловолокном (рис. 1).

Компания уже применила свое изобретение на практике. Пока речь идет про недорогое, несложное одноэтажное жилье, однако в *Shanghai WinSun* переполнены энтузиазмом. Тестовые образцы обошлись предприятию на 50% дешевле, чем при использовании классических методов строительства. Технология очень простая и дешевая. Принтер слой за слоем наносит раствор. Стены получаются примерно 30 см в ширину. Но самое главное – скорость. Всего за 24 часа можно построить целый дом, а за неделю большой павильон площадью 1400 м^2 . Машина может работать круглые сутки сама по себе, без наблюдателя. Экономия не только на рабочей силе, но

и на материалах. «Чернила» для принтера – раствор из цемента и переработанного строительного мусора. Создатели уверяют, материал не токсичен - никакого вреда здоровью человека и даже его кошельку. Ведь цены бросовые. Дом в 200 м² обойдется всего в 5 тысяч долларов. «Это может быть жилой дом или гараж, может быть офис, может быть беседка в парке – все что угодно. Дом любых размеров и форм, все, о чем можно мечтать», – рассказывает руководитель строительной фирмы города Шанхай Ма Ихэ [3].



Рис. 1 – Дома в Китае, напечатанные на 3D принтере.

А как же насчет внутренних стен? Все, описанные выше технологии и изобретения ориентированы на строительство внешних конструкций. Но на рынке трехмерной печати нашлись компании, которые всерьез задумались над обустройством жилого пространства изнутри. К примеру, Emerging Objects изобрели соляной полимер для печати межкомнатных перегородок, изящно зондирующих помещение. Соединив воедино строительный клей и соль, добытую в пруду Редвуд-сити, изобретатели получили недорогой, легкий, водостойкий, полупрозрачный материал. Первым проектом Emerging Objects стал 3D печатный дом под кодовым названием 1.0. Стены в комнатах целиком и полностью печатаются из новоизобретенного материала Saltygloo. В результате получается очень красивый, изящный и достаточно прочный дом, который станет украшением любой курортной зоны.

В Нидерландах решили пойти немного другим путем. Исследователи, представляющие лабораторию Sabin Design при Корнельском университете, решили, что современная промышленность не готова к печати домов целиком. Вместо этого они сосредоточили свои усилия на печати керамических кирпичей. Ученые решили обойти традиционные трудоемкие методы строительных работ, заменив шлакоблоки, цементный раствор и физический труд с помощью изделия под названием PolyBricks. Специалисты из Sabin Design решили отказаться от традиционных клеящих составов. Кирпичи Polybricks создавались с учетом классических столярных технологий, применяющихся строителями для скрепления между собой деревянных изделий. Другими словами, кирпичные блоки проектируются таким образом, чтобы сила тяжести соединяла между собой все детали конструкции.

ВМС США всерьез заинтересовались методами печати бетоном. Национальный научный фонд США при поддержке оборонных ведомств решили финансировать разработки компании Contour Crafting. Это означает лишь одно – 3D печать в строительстве определенно нашла свое место и вполне возможно, очень скоро, строительство станет частью технологии трехмерной печати, а не наоборот.

Постановка задачи. Целью данной статьи является создание на основе теории R – функций математической и компьютерной модели коттеджного дома в целом.

Математическая модель. Для построения искомым уравнений геометрических объектов используем следующие конструктивные средства теории R – функций: наиболее простую и поэтому наиболее часто используемую систему [4, 6]:

$$\left\{ x \wedge_0 y \equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}; x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}; \bar{x} \equiv -x, \right. \quad (1)$$

где \wedge_0, \vee_0 – символы R – конъюнкции, R – дизъюнкции и R – отрицания, соответственно. Кроме того, для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с симметрией трансляции вдоль прямой, воспользуемся следующей теоремой [4].

Теорема. Пусть трансляционная область $\sum_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ симметрична относительно оси O_y и может быть заключена в вертикальную полосу $-a < x < a$, а области $\sum_i = [\sigma_0(x - h_i, y) \geq 0]$ получены в результате преобразования переноса области \sum_0 вдоль оси абсцисс на величины h_i , кратные $h > 2a$. Тогда уравнение границы области имеет вид

$$w(x, y) \equiv \sigma_0(\mu(x, h), y) = 0, \text{ где } \mu(x, h) = \frac{4h}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)x\pi}{h}.$$

Для построения уравнений, соответствующих геометрическим объектам с точечной симметрией циклическо-

го типа, воспользуемся следующей теоремой [5].

Теорема. Пусть трансляционная область $\sum_0 = [\sigma_0(x, y) \geq 0]$ симметрична относительно оси абсцисс, а область $\sum_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ может быть размещена внутри сектора $-a \leq \theta \leq a$, $0 \leq a \leq \pi/n$. Области

$$\sum_k = \left[\sigma_0 \left(r \cos \left(\theta - \frac{2\pi k}{n} \right) - r_0, r \sin \left(\theta - \frac{2\pi k}{n} \right) \right) \geq 0 \right]$$

получены в результате поворота области $\sum_1 = [\sigma_0(x - r_0, y) \geq 0]$ в плоскости xOy вокруг начала координат на углы $2\pi k/n$. Тогда уравнение границы области $\Omega = \bigcup_{k=0}^{n-1} \sum_k$ имеет вид

$$\omega(x, y) = \sigma_0(r \cos \mu(\theta, n) - r_0, r \sin \mu(\theta, n), z) = 0,$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, $\mu(x, h) = \frac{8}{n\pi} \sum_k (-1)^{k+1} \frac{\sin(2k-1) \frac{n\theta}{2}}{(2k-1)^2}$.

Аналогичные теоремы справедливы для трехмерных пространств.

Построение компьютерной модели. В работах [1, 2] были построены простейшие уравнения летне-дачного дома, значительное внимание уделено внешнему дизайну домов. В данной работе учтены новые запросы потребительского рынка, а именно спрос на так называемые «Town House». Было принято решение построить модель коттеджного дома для круглогодичной эксплуатации, расширив внутреннее помещение до трех спален, гостиной. Учтена возможность установки автономного отопления.

Построим уравнение типового коттеджного дома (рис. 2).

Начнём с уравнения фундамента ff :

$$ff = ((x + 0.5)(9 - x) \wedge_0 (0.5 + y)(15.5 - y)) \wedge_0 (-z)(1 + z) \geq 0$$

Хорошо известно, что нормализованная функция вблизи границы ведет себя как расстояние до этой границы. Воспользуемся указанным свойством для построения уравнения стен дома. Тем самым мы сократим количество использованных R – операций.

Зададим толщину стен, равную 0,3 м и высоту потолка, равную 3,5 м.

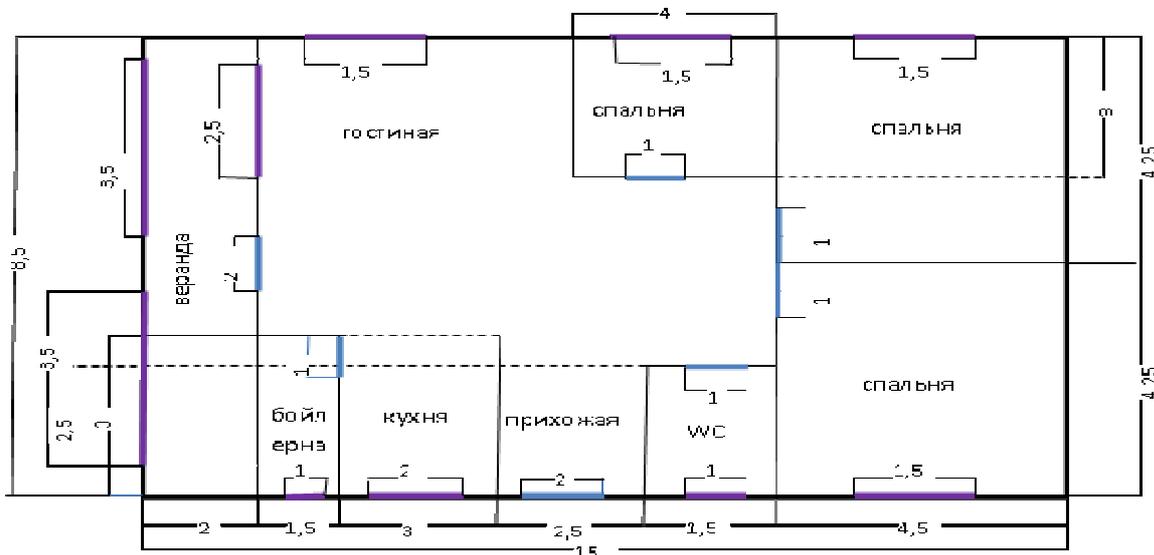


Рис. 2 – Схема типового коттеджного дома.

Тогда уравнение внешних стен будет иметь следующий вид:

$$f1 = \left(0.15 - \left| \frac{x(8.5 - x)}{8.5} \wedge_0 \frac{y(15 - y)}{15} \right| \right) \wedge_0 z(3.5 - z) \geq 0.$$

Соединяем внешние стены с фундаментом – уравнение fk (рис. 3, а):

$$fk = ff \vee_0 f1 \geq 0.$$

На рис. 3 представлены процессы соединения стен с фундаментом и добавления внутренних перегородок. Строим уравнения внутренних перегородок $fc2, fc3, fc4, fc5, fc6, fc7$.

Принимаем, что толщина внутренних перегородок равна 0,1 м. Строим уравнения для создания внутренних перегородок:

$$\begin{aligned} f\bar{n}2 &= \left(0.05 - \left| (3,5 - y) \frac{(y-2)}{1.5} \wedge_0 (x-5,5) \right| \right) \geq 0; & f\bar{n}3 &= (0.05 - |11,5 - x|) \geq 0; \\ f\bar{n}4 &= \left(0.05 - \sqrt{(x-4,5)^2 \vee_0 (11,5 - y)} \right) \geq 0; & f\bar{n}5 &= \left(0.05 - \left| (x-6) \wedge_0 (y-9) \left(\frac{11,5-y}{2,5} \right) \right| \right) \geq 0; \\ f\bar{n}6 &= \left(0.05 - \left| (11,5 - y) \left(\frac{y-7,5}{4} \right) \wedge_0 (3-x) \right| \right) \geq 0; & f\bar{n}7 &= \left(0.05 - \sqrt{(y-6,5)^2 \vee_0 (5,5 - x)} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Общее уравнение внутренних перегородок fc имеет вид:

$$fc = ((fc1 \vee_0 fc2 \vee_0 fc3 \vee_0 fc4 \vee_0 fc5 \vee_0 fc6 \vee_0 fc7) \wedge_0 (z(3,5 - z)) \wedge_0 f11) \geq 0$$

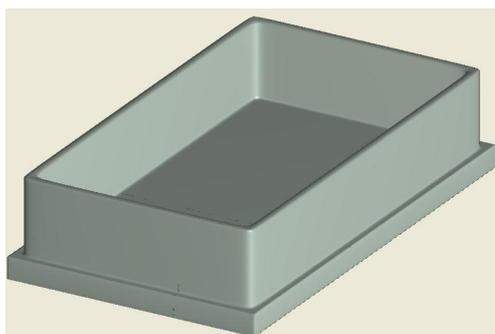
Соединяем фундамент, внешние стены и внутренние перегородки в уравнении ffc (рис. 3, б):

$$ffc = (fk \vee_0 fc) \geq 0.$$

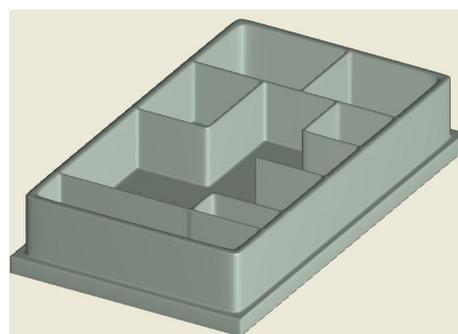
На рис. 4 представлен процесс добавления дверных и оконных проемов.

Выполняем построение уравнения дверных проемов $fd1, fd2, fd3, fd4, fd5, fd6, fd7$:

$$\begin{aligned} fd1 &= (1 - (x-4,5)^2 - (y-2)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0; \\ fd2 &= (0,25 - (x-6)^2 - (y-3,5)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0; \\ fd3 &= (0,25 - (x-6)^2 - (y-10,5)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0. \end{aligned}$$



а



б

Рис. 3 – Макет дома с фундаментом и внутренними перегородками:

а – фундамент и внешние стены дома; б – соединение фундамента, внешних и внутренних стен дома.

$$\begin{aligned} fd4 &= (0,25 - (x-5)^2 - (y-11,5)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0; \\ fd5 &= (0,25 - (x-4)^2 - (y-11,5)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0; \\ fd6 &= (0,25 - (x-3)^2 - (y-8,5)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0; \\ fd7 &= (0,75 - (x-8,5)^2 - (y-7,5)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(2-z)) \geq 0. \end{aligned}$$

Общее уравнение дверных проемов fd имеет вид:

$$fd = (fd1 \vee_0 fd2 \vee_0 fd3 \vee_0 fd4 \vee_0 fd5 \vee_0 fd6 \vee_0 fd7) \geq 0.$$

Соединим фундамент дома, внешние и внутренние стены и дверные проемы в уравнении fcd (рис. 4, а):

$$fcd = (ffc \wedge_0 (-fd)) \geq 0.$$

Выполним построение уравнений оконных проемов $fo1, fo2, fo3, fo4, fo5, fo6, fo7, fo8, fo9, fo10, fo11$:

$$\begin{aligned} fo1 &= (0,75^2 - x^2 - (y-3,75)^2) \wedge_0 ((z-1)(3-z)) \geq 0; & fo2 &= (0,75^2 - x^2 - (y-6,25)^2) \wedge_0 ((z-1)(3-z)) \geq 0; \\ fo3 &= (0,75^2 - x^2 - (y-9,5)^2) \wedge_0 ((z-1)(3-z)) \geq 0; & fo4 &= (0,75^2 - x^2 - (y-13,25)^2) \wedge_0 ((z-1)(3-z)) \geq 0; \\ fo5 &= (0,75^2 - (x-8,5)^2 - (y-13,25)^2) \wedge_0 ((z-1)(3-z)) \geq 0; & fo6 &= (1 - (x-8,5)^2 - (y-5)^2) \wedge_0 ((z-1)(3-z)) \geq 0; \\ fo7 &= (1,25^2 - (x-1,75)^2 - (y-2)^2) \wedge_0 ((z-0,08)(3-z)) \geq 0; \\ fo8 &= (0,5^2 - (x-8,5)^2 - (y-2,75)^2) \wedge_0 ((z-2)(3-z)) \geq 0; \\ fo9 &= (0,5^2 - (x-8,5)^2 - (y-10,25)^2) \wedge_0 ((z-2)(3-z)) \geq 0; & fo10 &= (17,5^2 - (x-2,25)^2 - y^2) \wedge_0 ((z-0,5)(3-z)) \geq 0; \\ fo11 &= (17,5^2 - (x-6,25)^2 - y^2) \wedge_0 ((z-0,5)(3-z)) \geq 0. \end{aligned}$$

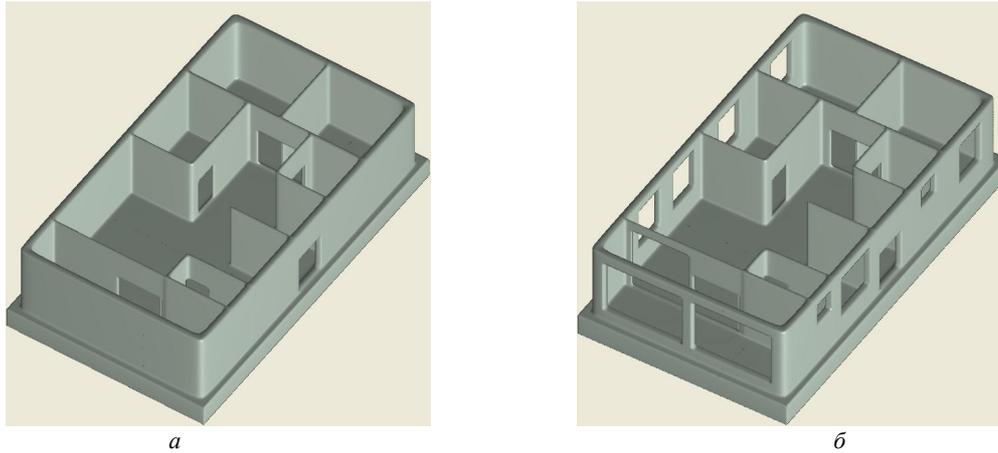


Рис. 4 – Макет дома с дверными и оконными проемами:
 а – прорезаны двери; б – прорезаны окна.

Общее уравнение оконных проемов дома fo имеет вид:

$$fo = (fo1 \vee_0 fo2 \vee_0 fo3 \vee_0 fo4 \vee_0 fo5 \vee_0 fo6 \vee_0 fo7 \vee_0 fo8 \vee_0 fo9 \vee_0 fo10 \vee_0 fo11) \geq 0.$$

Соединяем фундамент, внешние и внутренние стены, дверные и оконные проемы в общем уравнении $fcod$ (рис. 4, б): $fcod = fcd \wedge_0 (-fo) \geq 0$.

Следующий этап проектирования – построение уравнения крыши. Для этого нам необходимо задать дополнительные параметры: высота крыши $hc = 3.55$ м, толщина крыши $z1 = z - hc$, высота дополнительных скатов крыши: $a1 = 4.25$ м, $a2 = 7.5$ м, $a3 = 4$ м.

На рис. 5 представлен общий вид дома после добавления различных вариантов крыши с перекрытием.

Построим уравнение простой 4-х угольной крыши $fkr1$ с чердачными оконными проемами fch :

$$\begin{aligned} x11 &= a1 - \frac{a3(x-a1)}{z1-a3} \geq 0; \quad y11 = a2 - \frac{a3(y-a2)}{z1-a3} \geq 0; \\ fkr1 &= \left(\left(x11 \frac{(8,5-x11)}{8,5} \right) \wedge_0 \left(y11 \frac{(15-y11)}{15} \right) \right) \wedge_0 ((a3-z1)(z1+0.2)) \geq 0; \\ fch &= \left((x-4,25)^2 + (z-5)^2 - 0.5^2 \right) \wedge_0 \left((y-7,5)^2 + (z-5)^2 - 0.5^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Общее уравнение крыши fkr имеет вид: $fkr = fkr1 \wedge_0 fch \geq 0$.

Соединим уравнения крыши с уравнением остального дома и получим общее уравнение дома res (рис. 5, а): $res = fcod \vee_0 fkr \geq 0$.

Для возможности выбора, создадим еще другой вариант построения крыши.

Высота и толщина крыши остается прежней, а значения дополнительных скатов крыши изменяем на другие: $aa1 = 8$ м, $aa2 = 7.5$ м; $aa3 = 3$ м, $ab3 = 3$ м; $ab2 = 7.5$ м; $ab1 = 0.5$ м; $ac3 = 3$ м; $ac2 = 0.5$ м; $ac1 = 4.25$ м; $af3 = 3$ м; $af2 = 14.5$ м; $af1 = 4.25$ м.

Получаем:

$$\begin{aligned} xa11 &= aa1 - \frac{aa3(x-aa1)}{z1-aa3} \geq 0; \quad ya11 = aa2 - \frac{aa3(y-aa2)}{z1-aa3} \geq 0; \\ fakr1 &= \left(\left(xa11 \frac{(8,5-xa11)}{8,5} \right) \wedge_0 \left(ya11 \frac{(15-ya11)}{15} \right) \right) \wedge_0 ((aa3-z1)(z1+0.2)) \geq 0; \\ xb11 &= ab1 - \frac{ab3(x-ab1)}{z1-ab3} \geq 0; \quad yb11 = ab2 - \frac{ab3(y-ab2)}{z1-ab3} \geq 0; \\ fbkr1 &= \left(\left(xb11 \frac{(8,5-xb11)}{8,5} \right) \wedge_0 \left(yb11 \frac{(15-yb11)}{15} \right) \right) \wedge_0 ((ab3-z1)(z1+0.2)) \geq 0; \\ xc11 &= ac1 - \frac{ac3(x-ac1)}{z1-ac3} \geq 0; \quad yc11 = ac2 - \frac{ac3(y-ac2)}{z1-ac3} \geq 0; \end{aligned}$$

$$fckr1 = \left(\left(xc11 \frac{(8,5 - xc11)}{8,5} \right) \wedge_0 \left(yc11 \frac{(15 - yc11)}{15} \right) \right) \wedge_0 ((ac3 - z1)(z1 + 0.2)) \geq 0;$$

$$xf11 = af1 - \frac{af3(x - af1)}{z1 - af3} \geq 0; \quad yf11 = af2 - \frac{af3(y - af2)}{z1 - af3} \geq 0;$$

$$ffkr1 = \left(\left(xf11 \frac{(8,5 - xf11)}{8,5} \right) \wedge_0 \left(yf11 \frac{(15 - yf11)}{15} \right) \right) \wedge_0 ((af3 - z1)(z1 + 0.2)) \geq 0;$$

$$fch = \left((x - 2)^2 + (z - 5)^2 - 0.5^2 \right) \wedge_0 \left((y - 7,5)^2 + (z - 5)^2 - 0.5^2 \right) \geq 0.$$

Построим уравнение многопрофильной крыши и соединим его с уравнением остального дома (рис. 5, б):

$$res = (fcod \vee_0 fkr1 \vee_0 fakr1 \vee_0 fbkr1 \vee_0 fckr1 \vee_0 ffkr1) \wedge_0 fch \geq 0.$$

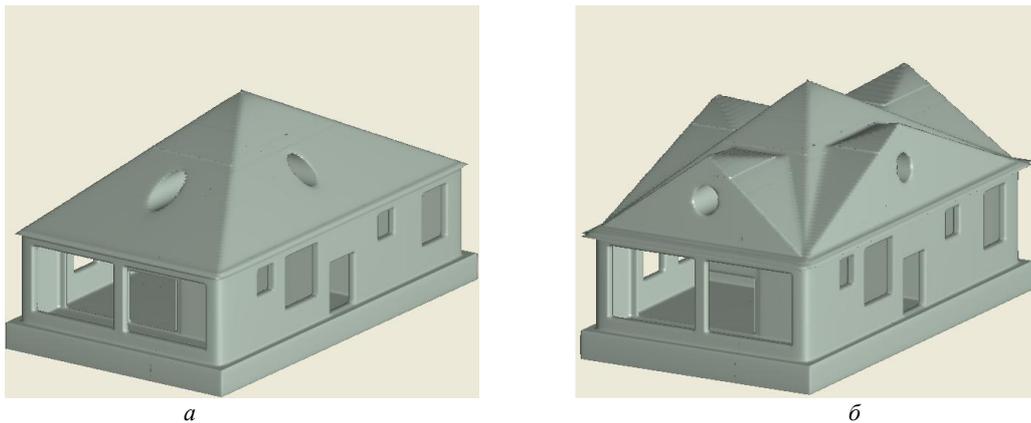


Рис. 5 – Макет проектируемого дома с различными вариантами крыши:
а – простая 4-х скатная крыша; б – многопрофильная крыша.

Меняя значения буквенных параметров, можно оперативно менять толщину стен, расположение перегородок, размеры и форму окон и дверей, вид крыши, орнамент и др. Здесь для удобства чтения приведены лишь некоторые из них с соответствующей иллюстрацией. Кроме того, автор стремился показать возможности метода R -функций, поэтому фасад несколько перегружен декоративными элементами. Компьютерная реализация выполнена с помощью [6].

Выводы. В данной работе применяется теория R -функций к математическому и компьютерному моделированию строительных конструкций. Аналитическая запись проектируемых объектов дает возможность использовать буквенные параметры, что позволяет, при необходимости, быстро изменять вид элементов дома. Свойство положительности построенной функции во внутренних точках объекта весьма удобно для реализации 3D печати.

Использование современных строительных технологий, таких как метод экструдирования, позволяет значительно упростить строительные работы, так как исключается необходимость в опалубке. Также заметим, что готовые бетонные фигуры легко поддаются корректировке и отделочным работам благодаря использованию новейших строительных материалов.

Заметим, что может возникнуть техническая проблема из-за неоднозначности рассматриваемых объектов. Решить ее весьма просто: оконные и дверные проемы можно выполнять из другого материала, вставив в программу соответствующие дополнения, что легко осуществить с помощью R -функций.

Список литературы: 1. Литвинова Ю.С., Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. R -функции в математическом моделировании 3D-дома для реализации технологий 3D-печати // Вестник Харьковского Национального Университета Серия «Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления». – Харьков. – 2014. – № 1105. – Вып. 24. – С. 122 – 128. 2. Литвинова Ю.С., Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И. Математическое и компьютерное моделирование строительных конструкций на основе R -функций // Межд.-технич. журнал «Проблемы машиностроения». – Харьков, 2014. – № 3. – Т. 17. – С. 45 – 50 3. <http://make-3d.ru/articles/3d-printer-dlya-pechati-domov> // Интернет-источник. 4. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с. 5. Rvachev V.L. R -functions in boundary value problems in mechanics / V.L. Rvachev, T.I. Sheiko // Appl. Mech. Reviews. – 1995. – Vol. 48, n. 4. – P. 151 – 188. 6. Максименко-Шейко К.В. R -функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.

Bibliography (transliterated): 1. Litvinova, Ju. S., K. V. Maksimenko-Shejko and T. I. Shejko. " R -funkcii v matematicheskom modelirovanii 3D-doma dlja realizacii tehnologii 3D-pechati." Vestnik Har'kovskogo Nacional'nogo Universiteta. Ser.: «Matematicheskoe modelirovanie.

Informacionne tehnologii. Avtomatizirovannye sistemy upravlenija.» No. 1105. Vol. 24. Kharkov. 2014. 122–128. Print. 2. Litvinova, Ju. S., K. V. Maksimenko-Shejko and T. I. Shejko. "Matematicheskoe i komp'uternoe modelirovanie stroitel'nyh konstrukcij na osnove R – funkcij." *Mezhdunar.-tehnich. zurnal «Problemy mashinostroenija»*. No. 3. Vol. 17. Kharkov. 2014. 45–50. Print. 3. MAKE-3D.RU "Pechat' domov na 3D printere." MAKE-3D.RU, 2014. Web. 05 October 2015. <<http://make-3d.ru/articles/3d-printer-dlya-pechati-domov>>. 4. Rvachev, V. L. Teorija R – funkcii i nekotorye ee prilozhenija. Kiev: Nauk. dumka, 1982. Print. 5. Rvachev, V. L., and T. I. Sheiko. " R – functions in boundary value problems in mechanics." *Appl. Mech. Reviews*. Vol. 48. No. 4. 1995. Print. 6. Maksimenko-Sheyko, K. V. R – funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob'ektov i fizicheskikh polej. Kharkov: IPMash NAN Ukraini, 2009. Print.

Поступила (received) 06.10.2015

Литвинова Юлія Сергіївна – аспірантка ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: 067-835-93-63; e-mail: litjuli@mail.ru.

Литвинова Юлія Сергеевна – аспірантка ІПМаш НАН України, г. Харьков; тел.: 067-835-93-63; e-mail: litjuli@mail.ru.

Litvinova Yuliya Sergeevna – postgraduate student, Institute for Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine; tel.: 067-835-93-63; e-mail: litjuli@mail.ru.

УДК 629.429.3:621.313

Б. Г. ЛЮБАРСЬКИЙ, Б. Х. ЄРІЦЯН, Д. І. ЯКУНІН, М. Л. ГЛЄБОВА

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЛІНІЙНОГО ДВИГУНА НАХИЛУ КУЗОВА ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Запропоновано спрощену математичну модель лінійного двигуна для визначення електромагнітної сили. Сформульовано задачу умовної оптимізації геометричних параметрів лінійного двигуна. Запропоновано у якості цільової функції використати залежність, пропорційну різниці енергії, що може перетворити лінійний двигун та енергії, яка потрібна для руху механізму нахилу кузова. У якості методу оптимізації на попередньому етапі пошуку обрано комбінований метод, що включає в себе генетичний алгоритм. На завершальному етапі оптимізаційної процедури уточнення оптимуму здійснюється методом Нелдера-Міда. Розроблено алгоритм вирішення задачі оптимізації, та його реалізацію в пакеті MATLAB. Запропоновано напрямок удосконалення електромеханічних приводів нахилу кузова за рахунок розробки комбінованих приводів, у яких сумарний кут нахилу буде створено частково електроприводом з лінійним двигуном, а частково іншими механізмами, які вже встановлені на рухомому складі.

Ключевые слова: лінійний двигун, умовна оптимізація, генетичні алгоритми, кут нахилу, активні матеріали.

Вступ. Вельми важливими критеріями ефективності роботи міжміського пасажирського транспорту є швидкість і пропускна здатність. На залізницях передових в технічному відношенні країн їх вдалося істотно підвищити, запровадивши високошвидкісний електричний транспорт [1 – 5].

Підвищення швидкості руху можна здійснити двома основними шляхами. По-перше, відмовитися від використання кривих порівняно малого радіусу. По-друге, залишити в експлуатації існуючу мережу залізниць, вживши заходів по зміні конструкції рухомого складу, що дозволяють підвищити швидкість проходження кривих за рахунок впровадження систем нахилу кузовів [6]. Другий шлях представляється менш витратним, оскільки вводити новий рухомий склад можна поступово, витісняючи існуючий у міру його фізичного та морального зносу.

Аналіз останніх досліджень. В якості силового приводу для нахилу кузовів швидкісних поїздів використовуються гідравлічні, пневматичні і електромеханічні системи. Гідравлічна система залежить від погодних умов, екологічно недосконала через можливість витоків, її конструкція, експлуатація та ремонт відносно складні; пневматична система не забезпечує належної швидкодії; електромеханічна система, будучи найбільш перспективною, не забезпечує належного рівня безпеки руху через відсутність самоповернення механізму нахилу [1 – 5].

Усунути зазначені недоліки електромеханічного приводу можливо шляхом використання силового приводу на базі лінійного електродвигуна [1 – 5]. Геометричні та електромагнітні параметри лінійного двигуна можуть змінюватись у широкому діапазоні. Тому для їх вибору необхідно застосовувати методи оптимального проектування, основною частиною яких є задача аналізу, що визначає цільову функцію.

У [1] доведено принципову можливість використання лінійного двигуна для нахилу кузова швидкісного потяга. Проте, геометричні параметри задіяного лінійного двигуна обиралися найбільшми з можливих за умов компонування у візку рейкового транспортного засобу – задля досягнення якнайбільшого зусилля на якорі лінійного двигуна. Так, діаметр корпусу двигуна за умов компонування не має бути більшим 0,5 м у діаметрі та 0,4 м завдовжки.

У [7] показано, що максимальний кут нахилу 8° не є актуальний для залізниць України. Також враховуючи, що тестова задача у [1] вирішувалася для граничного кута нахилу $\theta = 7^\circ$, таке саме значення у подальшому також обрано за граничне і у цій роботі. Також враховано неможливість прямого використання електромагнітного лінійного двигуна для приводу нахилу кузова через невідповідність тягової характеристики навантажувальній.

Враховуючи сказане вище, актуальним завданням є оптимізація геометричних параметрів лінійного двигуна (ЛД), з урахуванням обмежень, що наведені у працях [1 – 7].

Постановка завдання. Вирішити задачу аналізу для оптимізації геометричних розмірів лінійного двигуна, виходячи із його функціональних можливостей, щодо забезпечення нахилу кузова на різний максимальний кут при обраній геометрії та кінематиці механізму нахилу.

Математична модель. Для живлення електромагнітного двигуна в приводі нахилу кузова вбачається раціональним використання саме прямоходової схеми, тому що така схема перетворювача, як і мостова, характеризується низькими перенапруженнями при комутації, проте в ній, на відміну від мостової, використовуються тільки два ключі.

Енергія, що її перетворює ЛД, визначається інтегралом

$$W_{EM} = \int_{x_{поч}}^{x_{max}} F_T dx. \quad (1)$$

Енергія, що потрібна для нахилу кузова, має аналогічний вираз:

$$W_H = \int_{x_{поч}}^{x_{max}} F_H dx. \quad (2)$$

Кінетична енергія системи дорівнює нулю на початку та наприкінці процесу повороту кузова, адже швидкість повертання кузова у цих точках є нульовою. Тому різниця між W_{EM} та W_H є енергією втрат ΔW , зумовлених невідповідністю тягової та навантажувальної характеристик:

$$\Delta W = W_{EM} - W_H. \quad (3)$$

Нами поставлено задачу оптимізації геометричних розмірів лінійного двигуна, виходячи із його функції забезпечення нахилу кузова на різний максимальний кут при обраній геометрії та кінематиці виконавчої частини механізму нахилу. Метою оптимізації є мінімізація енергії втрат ΔW .

У роботі [1] тягову характеристику лінійного двигуна отримано розрахунком магнітного поля за методом кінцевих елементів. Такий підхід є вельми точним, проте дуже затратним у часі, адже потребує численних розрахунків поля при різному положенні якоря лінійного двигуна. Щоб позбутися вказаного недоліку, у цій роботі пропонується спрощена методика розрахунку сили лінійного двигуна.

Для розрахунку сили F_T використовувався енергетичний підхід. Внесено наступні припущення: перетворення енергії відбувається у повітряному зазорі, насичення матеріалу статора та якоря не має, а також немає розсіювання потоків у магнітопроводі. Відповідно до цього підходу маємо

$$F_T = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad (4)$$

де W – енергія магнітного поля,

$$W = \int_0^l \psi \cdot di = \int_0^l B \cdot S_z \cdot di = \int_0^l \mu_0 \cdot H \cdot S_z \cdot di = \int_0^l \mu_0 \cdot \frac{i}{x} \cdot S_z \cdot di = \frac{\mu_0 \cdot S_z \cdot I^2}{x} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2} S_z; \quad (5)$$

ψ – потокозчеплення; I – магнітна рухома сила (МРС) обмотки ЛД; B – магнітна індукція у повітряному зазорі; S_z – площа перетину; μ_0 – магнітна проникність повітря; H – напруженість поля у повітряному зазорі.

Таким чином,

$$F_T = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2} S_z, \quad (6)$$

$$F_T = \left(\frac{\mu_0}{2} \kappa_3^2 J^2 \right) \frac{S_W^2}{x^2} S_4, \quad (7)$$

де κ_3 – коефіцієнт заповнення обмотки статора ЛД; J – щільність струму цієї обмотки; S_W – її; S_4 – площа перетину осердя якоря.

Таким чином (7) є спрощеною математичною моделлю ЛД для визначення електромагнітної сили.

Обрання методу вирішення задачі оптимізації. Як показали рішення тестових завдань широко вживаним методом багатогранника, що деформується [9 – 12], результат рішення сильно залежить від стартової точки. Досягнення бажаної величини сили лінійного двигуна можливо при різних поєднаннях геометричних розмірів. Можливі випадки, коли рішення взагалі не може бути знайдене. Це говорить про множини локальних мінімумів, тобто про те, що цільова функція – багатоекстремальна. Тому, оператори оптимізаційної процедури повинні містити разом з детермінованими і стохастичні компоненти, здатні оживити пошуковий процес при завмиранні його в локальних мінімумах рельєфу цільової функції. Одним з таких методів оптимізації є метод, що викорис-

товує генетичні алгоритми (ГА) [13, 14 – 21].

Генетичні алгоритми – це пошукові алгоритми, які побудовані на принципах і механізмах біологічної еволюції, основними засобами якої є природний відбір, що дозволяє виживати найбільш пристосованим особинам, і схрещування, що забезпечує перемішування і рекомбінацію генів потомства для прискорення еволюції. Метод був запропонований *Холландом* наприкінці 60-х років для вирішення завдань векторної оптимізації складних технічних систем. Нині цей метод інтенсивно застосовується для вирішення оптимізаційних завдань в електромеханіці [13, 20, 21, 22].

Генетичним алгоритмам властивий один недолік – вони знаходять оптимальне рішення з малою точністю. Для виключення цього недоліку в [23] запропонований комбінований ГА, який в завершальній стадії пошуку використовує локальні методи оптимізації, зокрема, *метод Нелдера-Міда* [9]. Такий підхід підвищує ефективність пошуку і уточнює глобальний мінімум.

Слід зазначити, що сучасні роботи по ГА пропонують безліч варіантів реалізації *операторів кросовера, мутації, селекції* [14]. Проте нами прийнято, що на початковому етапі дослідження ЛД застосування генетичного алгоритму на основі *методу рулетки* цілком достатньо.

Таким чином, як метод оптимізації прийнятий комбінований ГА: глобальний пошук здійснюється ГА з одноточечним кросовером і селекцією за принципом рулетки. На завершальному етапі роботи оптимізаційної процедури уточнення оптимуму здійснюється методом Нелдера-Міда.

Алгоритм вирішення задачі оптимізації. Початковим моментом щодо розрахунку геометричних параметрів лінійного двигуна є домовленість, що зовнішній діаметр його статора D_1 має бути визначений, виходячи з попередньо розрахованих діаметрів $D_2 \dots D_4$, а також умов рівності перетинів S_1 і S_4 та геометричного обмеження $D_1 < 0,5$ м.

Параметрами для вирішення задачі є діаметри D_2, D_3, D_4 та довжина статора l_1 .

На початку задано значення констант, що будуть використані у подальшому, а саме: щільність струму у обмотці якоря для коаксіальних лінійних двигунів станове $J = 10^6$ А/м², коефіцієнт заповнення вікна статора обмоткою для них же – $k_z = 0,5$ [1].

Встановлено електромагнітні навантаження у повітряному зазорі $B_{\max} = 1$ Тл. у найбільш напруженому режимі. Задачу оптимізації розв'язано для кута нахилу кузова θ від 7° до 1° з кроком у 1° . Початковими точками для рішення задачі були остаточні дані з попереднього кроку вирішення задачі.

Таким чином, найбільший час було витрачено для рішення задачі з найскладнішими умовами, коли кут нахилу 7° . Знайдений розв'язок вже обумовлює можливість вирішення задачі при інших кутах нахилу, тому що ЛД, який забезпечує нахил на 7° , вочевидь реалізує й менші кути. У початковій точці для вирішення першої задачі обрані параметри ЛД з роботи [1].

Алгоритм вирішення задачі наступний.

Виконується перевірка обмежень за геометричними розмірами. За програмою це обмеження $g_1 - g_4$. Обчислюється зовнішній діаметр статора та його товщина:

$$D_1 = \sqrt{D_3^2 - D_4^2 + D_2^2},$$

$$L_2 = \frac{D_3^2 - D_4^2}{2(D_2 + D_3)}.$$

Обчислюються площі перетину днища, зовнішньої стінки статора, а також якоря:

$$S_2 = \frac{\pi(D_2 + D_3) \cdot L_2}{2}, S_1 = \frac{\pi(D_1^2 - D_2^2)}{4}, S_4 = \frac{\pi(D_3^2 - D_4^2)}{2}.$$

Це проводиться для контролю рівності цих площин.

Обчислюється п'ята умова – обмеження на максимальний діаметр статора, за геометричним вписуванням у монтажний об'єм візка:

$$g_5 = D_1 - D_{\max}$$

Проводиться перевірка п'ятої умови $g_5 < 0$.

Для проведення перевірки обмежень щодо індукції у повітряному зазорі, виконуються наступні розрахунки.

Обчислюється площа перетину обмотки статора та критичне значення ходу якоря x_{\min} .

Розраховується індукція у повітряному зазорі для критичної точки, що є перевіркою обмеження $g_6 < B_{\max}$.

Проводиться розрахунок електромагнітної сили ЛД у критичній точці (обмеження g_7) та перевірка обмеження $g_7 > 0$.

Обчислюється максимальний хід якоря x_{\max} .

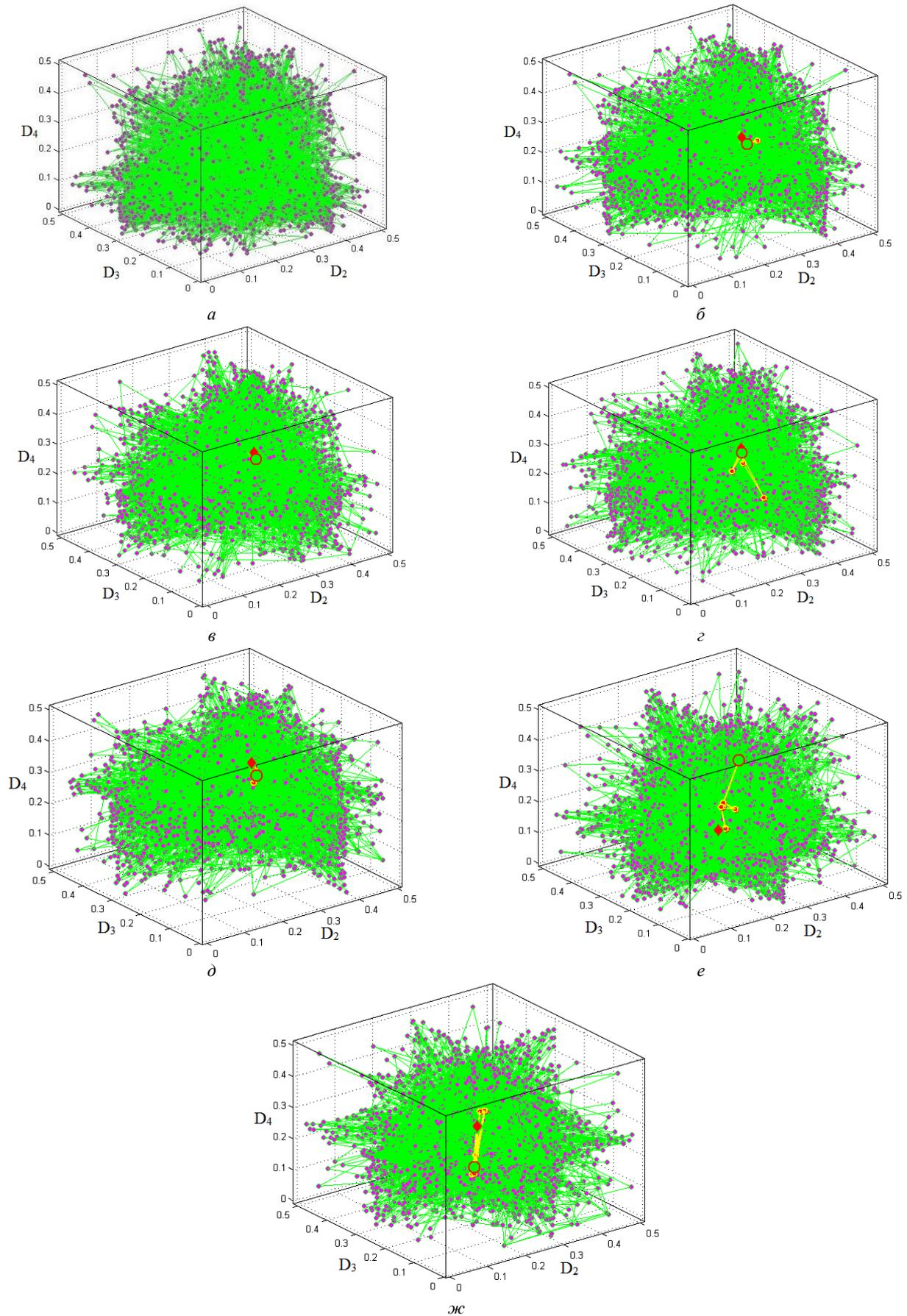


Рис. 1 – Точки проміжних розв'язків задачі оптимізації параметрів ЛД методом генетичного алгоритму при обраному максимальному куті нахилу кузова: $a - 7^\circ$; $б - 6^\circ$; $в - 5^\circ$; $г - 4^\circ$; $д - 3^\circ$; $е - 2^\circ$; $ж - 1^\circ$.

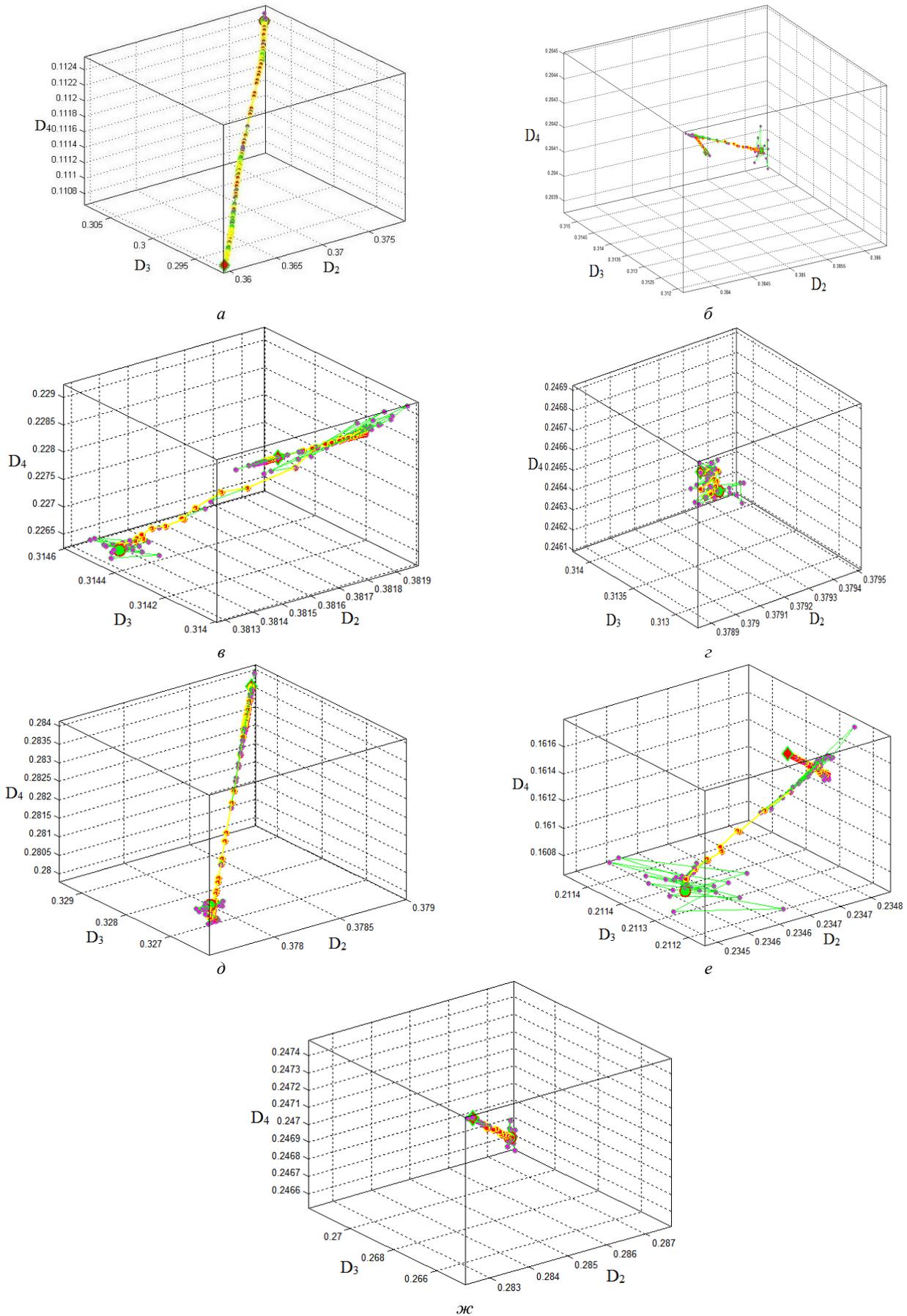


Рис. 2 – Траєкторії уточнених розв’язків задачі оптимізації параметрів ЛД методом Нелдера-Міда при обраному максимальному куті нахилу кузова: *a* – 7° ; *б* – 6° ; *в* – 5° ; *г* – 4° ; *д* – 3° ; *е* – 2° ; *ж* – 1° .

Проводиться розрахунок сили тяги при максимальному повітряному зазорі, який дорівнює ходу якоря, що визначає умову g_8 ; виконується перевірка умови $g_8 > 0$.

Мінімальний повітряний зазор обирається з умов залишкової величини повітряного зазору, що дорівнює для ЛД обраного типу дорівнює [1]

$$x_{\text{поч}} = 4 \cdot 10^{-3}$$

та обчислюється електромагнітна сила при $x = x_{i \pm}$, яка обумовлює обмеження $g_9 > 0$.

Розраховується цільова функція.

Результати вирішення задачі оптимізації. Згідно наведеного алгоритму та за допомогою метода генетичного алгоритму, були отримані попередні дані рішення задачі умовної оптимізації.

Хід рішення задачі наведений за координатами D_2 , D_3 , D_4 на рис. 1.

Як видно з рис. 1, $a - ж$ при рішенні задачі з багатьма екстремумами, пошук розв'язку проводився з урахуванням всієї множини можливих рішень. Тому, отримане рішення знаходиться у зоні, близької до глобального мінімуму.

Числові значення проміжних результатів наведені у табл. 1.

Таблиця 1 – Результати попереднього обчислення параметрів ЛД за генетичним алгоритмом

$\theta, ^\circ$	1	2	3	4	5	6	7
D_2	0,28743	0,23461	0,37793	0,37939	0,38136	0,38611	0,40034
D_3	0,27162	0,21133	0,32736	0,31405	0,31448	0,31518	0,31291
D_4	0,24661	0,16068	0,27997	0,24619	0,22633	0,20394	0,17803
L_1	0,24226	0,39166	0,27962	0,30239	0,37043	0,42227	0,41734

Остаточні результати обчислення параметрів ЛД, знайдені за допомогою метода Нелдера-Міда для координат D_2 , D_3 , D_4 , наведені на рис. 2.

Як видно з рис. 2, $a - ж$ цей алгоритм дозволяє покращити точність визначення глобального мінімуму без урахування значень у локальних мінімумах.

Числові значення остаточних результатів наведені у табл. 2

Таблиця 2 – Результати остаточного обчислення параметрів ЛД за Нелдером-Мідом

$\theta, ^\circ$	1	2	3	4	5	6	7
S_1	0,0073	0,0146	0,0219	0,0291	0,0364	0,0437	0,0510
S_w	0,0020	0,0041	0,0061	0,0082	0,0102	0,0123	0,0143
L_1	0,2503	0,3909	0,2866	0,3019	0,3700	0,4214	0,4219
L_2	0,0084	0,0208	0,0197	0,0268	0,0333	0,0399	0,0455
D_1	0,2989	0,2714	0,4140	0,4250	0,4381	0,4506	0,4739
D_2	0,2830	0,2347	0,3789	0,3789	0,3815	0,3840	0,3996
D_3	0,2655	0,2113	0,3292	0,3130	0,3141	0,3120	0,3130
D_4	0,2474	0,1616	0,2838	0,2468	0,2287	0,2044	0,1819
x_{\min}	0,0129	0,0257	0,0386	0,0515	0,0643	0,0772	0,0901
F_{\min}	$1,05 \cdot 10^{-11}$	$1,73 \cdot 10^{-11}$	$1,82 \cdot 10^{-12}$	$1,79 \cdot 10^{-5}$	$2,84 \cdot 10^{-7}$	$2,63 \cdot 10^{-5}$	$1,09 \cdot 10^{-11}$

Графічне представлення остаточних результатів розрахунку наведено на рис. 3.

Як видно з рис. 3, зі зменшенням граничного кута нахилу від 7° до 3° зменшуються розміри активної частини лінійного двигуна за рахунок зменшення довжини l_1 та одночасного зменшення зовнішніх діаметрів D_3 та D_4 та росту внутрішніх діаметрів D_3 та D_4 . Однак, при нахилі на 2° , оптимальним виявився альтернативний варіант, при якому зменшення активних матеріалів досягнуто за рахунок деякого збільшення довжини l_1 при рі-

зкому зменшенні усіх діаметрів.

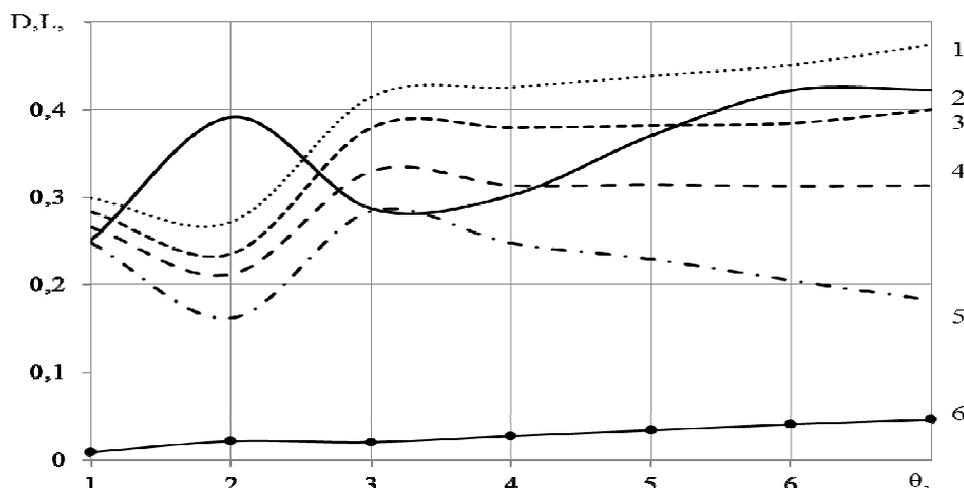


Рис. 3 – Залежність параметрів ЛД від граничного кута нахилу, остаточно обчислених за Нелдером-Мідом:
1 – D_1 ; 2 – l_1 ; 3 – D_2 ; 4 – D_3 ; 5 – D_4 ; 6 – l_2 .

Результати розрахунків цільової функції та мас активних матеріалів – міді та сталі, наведені у табл. 3. Розрахунок маси міді M_{Cu} проводиться за виразом

$$M_{Cu} = (k_z P_{Cu} \pi (D_2 + D_3) (D_2 - D_3) (l_1 - 2l_2)) / 4$$

де P_{Cu} – щільність міді.

Розрахунок маси сталі M_{Fe} виконується за виразом

$$M_{Fe} = \frac{k_z P_{Fe} \pi (D_1 + D_2) (D_1 - D_2) (l_1 - 2l_2)}{4} + \frac{(D_3 + D_4) (D_3 - D_4) (l_1 - 2l_2)}{4} + \frac{\pi (D_1 + D_4) (D_1 - D_4) l_2}{2}$$

де P_{Fe} – щільність сталі.

Однак, для остаточного порівняння коштів на використання активних матеріалів доцільно привести масу використаної сталі до маси міді, орієнтуючись на її актуальну середню вартість на ринку. Таким чином ми отримуємо сумарну приведену масу активних матеріалів лінійного двигуна.

$$M_{\Sigma} = M_{Cu} + \frac{B_{Fe}}{B_{Cu}} M_{Fe}$$

де B_{Fe} – вартість сталі, B_{Cu} – вартість міді.

Результати розрахунку відносної маси наведено у табл. 3 та на рис. 4.

Таблиця 3 – Розрахунок мас активних матеріалів лінійного двигуна

$\theta, ^\circ$	1	2	3	4	5	6	7
$k_{ef}, 10^{-4}$	0,406	1,812	3,950	7,495	12,148	18,419	26,771
M_{Cu} , кг	7,83	12,74	30,41	39,57	49,71	59,83	71,37
M_{Fe} , кг	29,41	91,52	106,22	152,05	229,35	311,43	369,84
B_{Cu}	86,17	140,15	334,46	435,26	546,86	658,12	785,06
B_{Fe}	88,23	274,56	318,66	456,16	688,05	934,30	1109,51
M_{Σ} , кг	15,85	37,70	59,37	81,04	112,26	144,77	172,23
M_{oe} , о.е.	0,09	0,22	0,34	0,47	0,65	0,84	1

Для оцінки масових показників ЛД раціонально використовувати відносну приведену масу активних матеріалів, прийнявши у якості базової сумарну приведену масу при куті нахилу 7° . Відносна маса визначається виразом:

$$M_{oe} = M_{\Sigma} / M_{\Sigma 7},$$



Рис. 4 – Залежність відносної приведенної маси ЛД від максимального кута нахилу кузова.

де $M_{\Sigma 7}$ – приведенне значення маси при куті нахилу кузова 7° .

Як видно з розглянутої залежності, при зменшенні максимального кута нахилу з 7° до 5° маса активних матеріалів знижується на 35%, а до 4° – на 53%. Тому одним з напрямків удосконалення електромеханічних приводів нахилу кузова може бути розробка комбінованих приводів, у яких сумарний кут нахилу буде створено частково електроприводом з ЛД, а частково – іншими механізмами, які вже встановлені на рухомому складі.

Висновки. Таким чином, у даній роботі запропоновано спрощену математичну модель лінійного двигуна для визначення електромагнітної сили.

Сформульовано задачу умовної оптимізації геометричних параметрів лінійного двигуна. У якості параметрів було обрано зовнішній діаметр якоря, внутрішні діаметри якоря та статора, а також довжина статора.

Запропоновано у якості цільової функції використати залежність, пропорційну різниці енергії, що може перетворити лінійний двигун та енергії, яка потрібна для руху механізму нахилу кузова.

Обрані обмеження, поділено на три категорії: компоновочні, обумовлені конструкцією механізму нахилу кузова; за індукцією, які обмежують можливість електромагнітних навантажень; за функціональністю, котрі обумовлюють перевагу тягової характеристики перед навантажувальною у всьому діапазоні ходу якоря.

Для оптимізації на попередньому етапі пошуку обрано комбінований метод, що включає в себе генетичний алгоритм, а на завершальному етапі оптимізаційної процедури уточнення оптимуму здійснюються методом Нелдера-Міда. Запропоновано алгоритм вирішення задачі оптимізації, та його реалізація на MATLAB.

Шляхом розв'язку задачі оптимізації визначені геометричні співвідношення для лінійних двигунів, що забезпечують можливість нахилу кузова на максимальні кути від 1° до 7° .

Встановлено, що при зменшенні граничного кута нахилу знижуються розміри активної частини лінійного двигуна за рахунок скорочення довжини статора та одночасного поменшення зовнішніх і зростання внутрішніх діаметрів. Виявлено альтернативний оптимальний варіант при нахилі на 2° , при якому зменшення активних матеріалів досягнуто за рахунок деякого збільшення довжини статора при різкому зниженні усіх діаметрів.

Визначено суттєве зниження мас активних матеріалів при обмеженні максимального кута нахилу. Встановлено, що при зниженні максимального кута нахилу з 7° до 5° маса активних матеріалів знижується на 35%, а до 4° – на 53%. Запропоновано напрямок удосконалення електромеханічних приводів нахилу кузова за рахунок розробки комбінованих приводів, у яких сумарний кут нахилу буде створено частково електроприводом з ЛД, а частково – іншими механізмами, які вже встановлені на рухомому складі.

Список літератури: 1. Якунин Д.И. Электромеханическая система привода с линейным двигателем для наклона кузовов скоростного подвижного состава. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Харьков, 2010, 202 с. 2. Любарский Б.Г. Теоретические основы для выбора та оцінки перспективных систем электромеханичного перетворення енергії електрорухомого складу. – Диссертация на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.22.09. – «Електротранспорт». Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Харків, – 2014. 368с. 3. Корниенко В.В., Омеляненко В.И. Высокоскоростной электрический транспорт. Мировой опыт. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 159с. 4. Омеляненко В.И., Кривякин Г.В., Якунин Д.И., Редченко Е.С. Поезда с наклоняемыми кузовами для скоростного пассажирского движения // Локомотив-информ. – Харьков: Техностандарт, 2008. – №5. – С. 12 – 17. 5. Развитие технологии наклона кузовов вагонов // Железные дороги мира, 2001. – №11. – С. 10 – 14. 6. Якунин Д.И., Макаренко Ю.В., Маслиев В.Г. Влияние наклона кузова вагона при движении по кривым участкам пути на взаимодействие колес с рельсами // Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетр.: ДНУЗТ ім. акад. В.Лазаряна, 2009. Вип. 30. – С. 248 – 251. 7. Якунин Д.И., Зверев Е.Ю., Срибник А.Н. Предпосылки для моделирования движения по рельсовому пути экипажа, оборудованного устройствами для наклона кузова // Вісник НТУ «ХПИ», 2013. № 32. – С. 76 – 80. 8. Finite Element Method Magnetics [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <http://www.femm.info/wiki/HomePage>. 9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 534 с. 10. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с. 11. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике: в 2-х книгах. Книга 1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 350 с. 12. Реклейтис Г., Рейвиндран А. Оптимизация в технике: в 2-х книгах. Книга 2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 320 с. 13. Лысенко Л.И. Исследование пределов использования линейного синхронного двигателя для разгрузки системы подвеса магнитолевитирующего транспорта: дис... канд. техн. наук: 05.09.01. – Х.: [б. и.], 1999. – 186 с. 14. Рябов Е.С. Синтез тягового реактивного индукторного двигателя с аксиальным магнитным потоком для скоростного подвижного состава / Б.Г. Любарский, В.П. Северин, Е.С. Рябов, В.Л. Емельянов // Електротехніка і електромеханіка. – 2010. – №6. – С. 28 – 30. 15. Вороновский Г.К., Махотило К.В., Петрашев С.Н., Сергеев С.А. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. – Харьков: Основа, 1997. – 112 с. 16. Генетические алгоритмы / Т.В. Панченко / [Под ред. Ю.Ю. Тарасевича. – Астрахань: Издательский дом «Астраханский университет». 2007. – 88 с. 17. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия-Телеком, 2006. – 452 с. 18. Weise T.

Global optimization algorithms: theory and application. – E-Book. – 2008. – 820 p. **19.** Back T. Evolutionary algorithms in theory and practice. – New York: Oxford University Press, 1996. – 328 p. **20.** Balaji M., Kamaraj V. Design of High Torque Density and Low Torque Ripple Switched Reluctance Machine using Genetic Algorithm // European Journal of Scientific Research, Vol. 47. No. 2 (2010). pp. 187 – 196. **21.** Owatchaiphong S., Nisai H., Fuengwarodsakul. Multi-Objective Based Optimization for Switched Reluctance Machines Using Fuzzy and Genetic Algorithms // Power Electronics and Drive Systems, 2009. Vol. 12. PEDS, 2009. International Conference on, vol., no., pp. 1530 – 1533, 2 – 5 Nov. 2009. **22.** Дзензерский В.А., Омельяненко В.И., Васильев С.В., Матин В.И., Сергеев С.А. Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией: Монография. – К.: Наукова думка, 2001. – с. 479. **23.** Джафару Хенджани Сейед Моджтаба. Многокритериальный синтез интеллектуальных систем управления энергоблоков АЭС генетическими алгоритмами. Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.07. Харьков, 2010, 224 с.

Bibliography (transliterated): **1.** Jakunin, D. I. *Elektromehaničeskaja sistema privoda s linejnym dvigatelem dlja naklona kuzovov skorostnogo podvizhnogo sostava. Dis. na soiskanie učennoj stepeni kand. tehn. nauk.* Kharkov, 2010. Print. **2.** Ljubars'kyj, B. G. *Teoretični osnovy dlja vyboru ta ocinky perspektivnyh sistem elektromehaničnogo peretvorenja energii' elektroruhomogo skladu. Dys. na zdobuttja naukovogo stupenja d-ra tehn. nauk.* Kharkiv, 2014. Print. **3.** Kornienko, V. V., and V. I. Omel'janenko. *Vysokoskorostnoj jelektričeskij transport. Mirovoj opyt.* Kharkov: NTU «KhPI», 2007. Print. **4.** Omel'janenko, V. I., et al. "Poezda s naklonjaemymi kuzovami dlja skorostnogo passazhirskogo dvizhenija." *Lokomotiv-inform.* No. 5. Kharkov: Tehnostandart, 2008. 12–17. Print. **5.** "Razvitie tehnologii naklona kuzovov vagonov." *ZHeleznye dorogi mira.* No. 11. 2001. 10–14. Print. **6.** Jakunin, D. I., JU. V. Makarenko and V. G. Masliev. "Vlijanie naklona kuzova vagona pri dvizhenii po krivym uchastkam puti na vzaimodejstvie koles s rel'sami." *Visnyk Dnipropetrovs'kogo nacional'nogo universitetu zaliznychnogo transportu im. akad. V. Lazarjana.* No. 30. Dnipropetrovsk: DNUZT im. akad. V.Lazarjana, 2009. 248–251. Print. **7.** Jakunin, D. I., E. JU. Zverev and A. N. Sribnik. "Predposylki dlja modelirovanija dvizhenija po rel'sovomu puti jekipazha, oborudovannogo ustrojstvami dlja naklona kuzova." *Visnyk NTU «KhPI».* No. 32. 2013. 76–80. Print. **8.** Meeker, David. "Finite Element Method Magnetics." David Meeker, 2014. Web. 9 September 2015. <<http://www.femm.info/wiki/HomePage>>. **9.** Himmelblau, D. *Prikladnoe nelinejnoe programirovanie: Per. s angl.* Moscow: Mir, 1975. Print. **10.** Shtojer, R. *Mnogokriterial'naja optimizacija.* Moscow: Radio i svjaz', 1992. Print. **11.** Reklejtis, G., A. Rejvindran and K. Regsdel. *Optimizacija v tehnike: v 2-h knigah. Kniga 1: Per. s angl.* Moscow: Mir, 1986. Print. **12.** Reklejtis, G., A. Rejvindran and K. Regsdel. *Optimizacija v tehnike: v 2-h knigah. Kniga 2: Per. s angl.* Moscow: Mir, 1986. Print. **13.** Lysenko, L. I. *Issledovanie predelov ispol'zovanija linejnogo sinhronnogo dvigatelja dlja razgruzki sistemy podvesa magnitolevitirujushhego transporta. Dis. ... kand. tehn. nauk.* Kharkov, 1999. Print. **14.** Rjabov, E. S., et al. "Sintez tjagovogo reaktivnogo induktornogo dvigatelja s aksial'nym magnitnym potokom dlja skorostnogo podvizhnogo sostava." *Elektrotehnika i elektromehaniika.* No. 6. 2010. 28–30. Print. **15.** Voronovskij, G. K., et al. *Genetičeskie algoritmy, iskusstvennyje neyronnye seti i problemy virtual'noj real'nosti.* Kharkov: Osnova, 1997. Print. **16.** Panchenko, T. V. *Genetičeskie algoritmy.* Ed. JU. JU. Tarasevich. Astrakhan: Izdatel'skij dom «Astrahanskij universitet», 2007. Print. **17.** Rutkovskaja, D., M. Pilins'kij and L. Rutkovskij. *Nejronnye seti, genetičeskie algoritmy i nečetkie sistemy.* Moscow: Gorjachaja linija-Telekom, 2006. Print. **18.** Weise, T. "Global optimization algorithms: theory and application." Thomas Weise, 2008. Web. 11 September 2015. <<http://www.it-weise.de/projects/book.pdf>>. **19.** Back, T. *Evolutionary algorithms in theory and practice.* New York: Oxford University Press, 1996. Print. **20.** Balaji, M., and V. Kamaraj. "Design of High Torque Density and Low Torque Ripple Switched Reluctance Machine using Genetic Algorithm." *European Journal of Scientific Research.* Vol. 47. No. 2. 2010. 187–196. Print. **21.** Owatchaiphong, Satit, and Nisai H. Fuengwarodsakul. "Multi-Objective Based Optimization for Switched Reluctance Machines Using Fuzzy and Genetic Algorithms." *International Conference. Power Electronics and Drive Systems.* Vol. 12. PEDS, 2009. 1530–1533. Print. **22.** Dzenzerskij, V. A., et al. *Vysokoskorostnoj magnitnyj transport s jelektrodinamičeskaj levitacij: Monografija.* Kiev: Naukova dumka, 2001. Print. **23.** Dzhaferi Hendzhani Sejed Modzhtaba. *Mnogokriterial'nyj sintez intelektual'nyh sistem upravlenija jenergeblov AJES genetičeskimi algoritmami. Dis. ... kand. tehn. nauk.* Kharkov, 2010, Print.

Надійшла (received) 15.09.2015

Любарський Борис Григорович – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: +38679937569, e-mail: lboris19111972@mail.ru

Любарский Борис Григорьевич – доктор технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», тел.: +38679937569, e-mail: lboris19111972@mail.ru.

Liubarskyi Boris Grigoryevich – Doctor of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", tel.: +38679937569. lboris19111972@mail.ru.

Єрицян Багіш Хачикович – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», тел.: +380989897022, e-mail: bagish_ericjan@mail.ru.

Ерицян Багиш Хачикович – старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», тел.: +380989897022, e-mail: bagish_ericjan@mail.ru.

Yeritsyan Bagish Khachikovich – Senior Lecturer, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", tel.: +380989897022, e-mail: bagish_ericjan@mail.ru.

Якунін Дмитро Ігорович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: +380677155894. unicomber@ukr.net.

Якунин Дмитрий Игоревич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»; тел.: +380677155894. unicomber@ukr.net.

Yakunin Dmitry Igorevich – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", tel.: +380677155894. unicomber@ukr.net.

Глебова Марина Леонідівна – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний університет міського господарства імені О. М. Бекетова; тел.: +380678635034; e-mail: glebova_ml_1968@mail.ru .

Глебова Марина Леонидовна – кандидат технических наук, доцент, Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А.Н. Бекетова, тел.: +380678635034; e-mail: glebova_ml_1968@mail.ru .

Glebova Marina Leonidovna – Candidate of Technical Sciences, Docent A. N. Beketov Kharkiv National University of Municipal Economy, tel.: +380678635034; e-mail: glebova_ml_1968@mail.ru.

Е. С. МАЛАХОВ

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ СТРУН

Исследуются нестационарные колебания системы трех струн, вызванные воздействием сосредоточенной нагрузки. Движения струн описываются одномерными неоднородными волновыми уравнениями. Определяются зависимости контактных сил, возникающих между струнами, с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Приведен пример численного расчета, в котором получены зависимости контактных сил и перемещений каждой из струн.

Ключевые слова: система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, метод регуляризации, интегральное уравнение Вольтерра.

Введение. Современное общество сложно представить без механизмов. Широкое распространение получили элементы конструкций механизмов, в которых используются канаты (металлические и неметаллические), и они в механике моделируются струнами. Модели струн так же можно использовать для расчета динамических нагрузок на линиях электропередач. Как правило, в жизни встречаются не одна, а несколько струн, примерами которых являются такие объекты как канатная дорога, контактная сеть троллейбуса, различные продольные растяжки и так далее. В случае нестационарных нагрузок систем струн необходимо учитывать волновой характер их нагружения при расчетах. Данная работа посвящена построению математической модели для системы трех струн под действием нестационарного нагружения, приложенного к одной из струн. Предполагается учесть влияние взаимодействия колеблющихся струн действием дополнительных сил, равны контактным реакциям, приложенным к струнам. С использованием предложенного в статье подхода можно рассчитывать параметры для систем струн при их импульсном нагружении.

Анализ публикаций. Задачи по исследованию поведения одной струны были давно и хорошо изучены еще в курсе классической математической физики. В работе [1] подробно изложен вывод уравнения колебаний струны, то есть одномерного волнового уравнения, и методы его решения. В книге [2] изложены решения ряда задач нестационарного деформирования элементов конструкций в виде стержней, мембран, балок, пластин, оболочек и так далее с подробным описанием методики их решения, и с аналогичным математическим аппаратом, использованному в этой работе. Важные сведения из операционного исчисления приводятся в [3], которое является удобным инструментом при решении систем линейных дифференциальных уравнений. В этой работе изложены прямое и обратное преобразование Лапласа, благодаря которым система в данной статье сводилась к уравнениям типа Вольтерра 1-го рода. В настоящее время можно встретить работы, посвященные нелинейной динамике струн [4]; работы, в которых изучается влияние на колебания струн дополнительных масс с вязкоупругими опорами [5, 6]. Отдельно упомянем работу [7], в которой описывается идентификация нелинейной возмущающей силы, действующей на натянутую струну. В ней решается подобная задача в более сложной постановке для одной струны, а в настоящей работе дана упрощенная постановка для системы струн с использованием более совершенных математических подходов (регуляризирующий алгоритм).

Цель и постановка задачи. Рассматривается система из трех закрепленных струн конечных длин, две из которых параллельны, а третья пересекает их, как показано на рис. 1. Влияние колеблющихся струн заменяем действием дополнительных сил, равным контактным реакциям. Целью данной работы является определение сил контактного взаимодействия между струнами в этой сложной системе. Знание этих сил позволяет определить перемещения в разных точках каждой из струн. К одной из струн приложена сосредоточенная нагрузка

$$F_0(x, t) = P(t)\delta(x - x_0), \quad \delta(x) - \text{дельта функция Дирака, } x_0 - \text{точка приложения нагрузки,}$$

которая вызывает нестационарные колебания исследуемой системы.

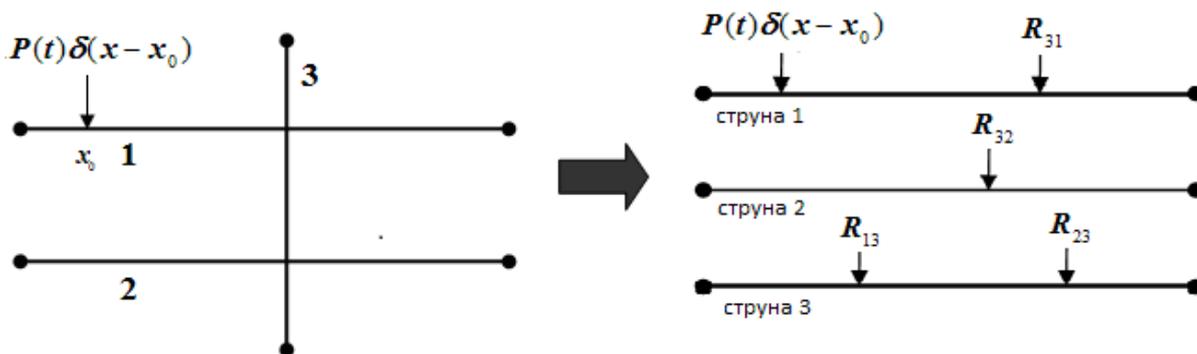


Рис. 1 – Исследуемая система струн.

Вначале рассмотрим более простой случай, когда на одну струну действует сосредоточенная нагрузка $F(x, t)$. В этом случае, колебания одной струны могут быть описаны одномерным волновым уравнением [1]:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} F(x, t), \quad (1)$$

где u – искомые перемещения, м; ρ – линейная плотность струны, м/кг; $F(x, t)$ – плотность распределения внешних сил, Н/м; $a = \sqrt{T/\rho}$ – скорость распространения волны (T – натяжение струны), м/с;

В случае трех струн можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_1} F_0(x, t) + \frac{1}{\rho_1} R_{13}; \\ a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_2} R_{23}; \\ a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_3} R_{31} + \frac{1}{\rho_3} R_{32}, \end{cases} \quad (2)$$

где R_{ij} – сила контакта струн i и j . Данная система дополняется граничными условиями, которые представляют собой равенство нулю перемещений в точках закрепления струн (на концах отрезка):

$$u_1(0, t) = u_1(l_1, t) = 0; \quad u_2(0, t) = u_2(l_2, t) = 0; \quad u_3(0, t) = u_3(l_3, t) = 0, \quad (3)$$

где l_i – длина i струны, при нулевых начальных условиях:

$$u_1(x, 0) = \frac{du_1(x, 0)}{dt} = 0; \quad u_2(x, 0) = \frac{du_2(x, 0)}{dt} = 0; \quad u_3(x, 0) = \frac{du_3(x, 0)}{dt} = 0, \quad (4)$$

Предполагается, что в точке контакта двух струн их перемещения совпадают, то есть выполняются следующие кинематические условия:

$$u_1(x_{c13}, t) = u_2(x_{c13}, t); \quad u_2(x_{c23}, t) = u_3(x_{c23}, t), \quad (5)$$

где x_{c13} – координата контакта первой и третьей струны; x_{c23} – координата контакта второй и третьей струны. И так же выполнены условия антисимметричности контактных сил $R_{ij} = -R_{ji}$.

Решение задачи. Используем *метод Фурье* для получения решения волнового уравнения (1). Разделяя переменные в однородном уравнении, получаем *задачу Штурма-Лиувилля* для определения собственных чисел и собственных функций. Решение неоднородной задачи строилось в виде разложения перемещений в ряд по синусам:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right). \quad (6)$$

Подставляем это разложение в (1), после этого используем свойство ортогональности: умножаем на $\sin(\pi k_1 x/l)$ и интегрируем в пределах от 0 до l . Благодаря этому вместо суммы получаем множество обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $u_k(t)$ следующего вида:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + a^2 \cdot \lambda_k^2 \cdot u_k(t) = \frac{2}{l\rho} \cdot \sin\left(\frac{\pi k x_0}{l}\right) \cdot P(t), \quad (7)$$

где $\lambda_k = \pi k / l$; $P(t)$ – изменение сосредоточенной нагрузки, $F(x, t) = P(t)\delta(x - x_0)$. Введем обозначение $C_{0k} = 2/l\rho \cdot \sin(\pi k x_0 / l)$. Для определения неизвестных функций $u_k(t)$ получаем следующую *задачу Коши*:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + a^2 \cdot \lambda_k^2 \cdot u_k(t) = C_{0k} \cdot P(t); \quad u_k(x, 0) = \frac{du_k(x, 0)}{dt} = 0. \quad (8)$$

Обозначаем $\omega_k = a \cdot \lambda_k$, и при помощи прямого интегрального преобразование Лапласа получаем:

$$s^2 \cdot u_k(s) + \omega_k^2 \cdot u_k(s) = C_{0k} \cdot P(s)$$

откуда связываем изображения равенством $u_k(s) = C_{0k} \cdot P(s) / (s^2 + \omega_k^2)$.

Выполняем обратное преобразование Лапласа, используя стандартные таблицы этого преобразования и *теорему о свертке* [8]. Приходим к следующей зависимости:

$$u_k(t) = \frac{C_{0k}}{\omega_k} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin(\omega_k(t - \tau)) d\tau. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), получаем выражение для перемещений:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{0k}}{\omega_k} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin(\omega_k(t - \tau)) d\tau \cdot \sin(\lambda_k \cdot x). \quad (10)$$

Аналогично решению для одной струны (10), были получены уравнения для трех струн, которые представлены разложениями в ряды Фурье через неизвестные контактные силы R_{ij} и силу $P(t)$:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{01,k} \cdot \int_0^t R_{13}(\tau) \sin(\omega_{1k}(t-\tau)) d\tau + d_{0k} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin(\omega_{1k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{1k} \cdot x); \\
u_2(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{02,k} \cdot \int_0^t R_{23}(\tau) \sin(\omega_{2k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{2k} \cdot x); \\
u_3(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{03,k} \cdot \int_0^t (R_{31}(\tau) + R_{32}(\tau)) \sin(\omega_{3k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{3k} \cdot x),
\end{aligned} \tag{11}$$

где были введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
C_{01,k} &= \frac{-2}{l_1 \rho_1 \omega_{1k}} \cdot \sin(\lambda_{1k} \cdot x_{c13}), \quad d_{0k} = \frac{2}{l_1 \rho_1 \omega_{1k}} \sin(\lambda_{1k} \cdot x_0), \quad \lambda_{1k} = \frac{\pi k}{l_1}, \quad \omega_{1k} = a_1 \cdot \lambda_{1k}; \\
C_{02,k} &= \frac{-2}{l_2 \rho_2 \omega_{2k}} \cdot \sin(\lambda_{2k} \cdot x_{c23}), \quad \lambda_{2k} = \frac{\pi k}{l_2}, \quad \omega_{2k} = a_2 \cdot \lambda_{2k}; \\
C_{03,k} &= \frac{-2}{l_3 \rho_3 \omega_{3k}} \cdot (\sin(\lambda_{1k} \cdot x_{c13}) + \sin(\lambda_{2k} \cdot x_{c23})), \quad \lambda_{3k} = \frac{\pi k}{l_3}, \quad \omega_{3k} = a_3 \cdot \lambda_{3k}.
\end{aligned}$$

Неизвестные контактные силы определялись из кинематических условий (5) и условия антисимметричности контактных сил, которые подставлялись в (11). Таким образом, получаем следующую систему двух интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{01,k} \cdot \int_0^t R_{13}(\tau) \sin(\omega_{1k}(t-\tau)) d\tau + d_{0k} \cdot \int_0^t P(\tau) \sin(\omega_{1k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{1k} \cdot x_{c13}) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{02,k} \cdot \int_0^t R_{23}(\tau) \sin(\omega_{2k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{2k} \cdot x_{c13}); \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{02,k} \cdot \int_0^t R_{23}(\tau) \sin(\omega_{2k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{2k} \cdot x_{c23}) = \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{03,k} \cdot \int_0^t (R_{13}(\tau) + R_{23}(\tau)) \sin(\omega_{3k}(t-\tau)) d\tau \right) \cdot \sin(\lambda_{3k} \cdot x_{c23}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
K_{31}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (C_{01,k} \cdot \sin(\omega_{1k} \cdot t) \cdot \sin(\lambda_{1k} \cdot x_{c13})); \quad K_{13}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (C_{02,k} \cdot \sin(\omega_{2k} \cdot t) \cdot \sin(\lambda_{3k} \cdot x_{c13})); \\
K_{23}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (C_{02,k} \cdot \sin(\omega_{2k} \cdot t) \cdot \sin(\lambda_{2k} \cdot x_{c23})); \quad K_{32}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} (C_{03,k} \cdot \sin(\omega_{3k} \cdot t) \cdot \sin(\lambda_{3k} \cdot x_{c23})); \\
K_{01}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (d_{0k} \cdot \sin(\omega_{1k} \cdot t) \cdot \sin(\lambda_{1k} \cdot x_{c13})), \quad u_{01}(t) = -\int_0^t P(\tau) K_{01}(t-\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

После упрощений с учетом выше написанных соотношений система (12) свелась к двум уравнениям Вольтерра 1-го рода (13) относительно неизвестных функций $R_{ij}(t)$:

$$\left\{ \int_0^t R_{13}(\tau) K_{31}(t-\tau) d\tau - \int_0^t R_{23}(\tau) K_{13}(t-\tau) d\tau = u_{01}(t); \int_0^t R_{13}(\tau) K_{32}(t-\tau) d\tau + \int_0^t R_{23}(\tau) (K_{32}(t-\tau) - K_{23}(t-\tau)) d\tau = 0, \right. \tag{13}$$

где $K_{ij}(t-\tau)$ – несимметричные ядра, определяющие действие i -ой струны на j -ую; $u_{01}(t)$ – перемещения первой струны под действием приложенной нагрузки.

Запишем систему (13) в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{u} \tag{14}$$

или в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{13} \\ \mathbf{R}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^t K_{31}(t-\tau) d\tau & -\int_0^t K_{13}(t-\tau) d\tau \\ \int_0^t K_{32}(t-\tau) d\tau & \int_0^t (K_{32}(t-\tau) - K_{23}(t-\tau)) d\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{13}(\tau) \\ \mathbf{R}_{23}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{01}(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вначале используем конечномерную аппроксимацию элементов матрицы \mathbf{A} , то есть, заменяем интегралы

соответствующими интегральными суммами. Решение данной системы можно найти с помощью *обобщенного метода Крамера* $R_i = \Delta^{-1} \cdot \Delta_i$, но оно не будет устойчивым в силу некорректности задачи. Для получения устойчивого решения интегральных уравнений Вольтера используют различные регуляризирующие алгоритмы, изложенные в работе [8]. Одним из наиболее эффективных классических методов, использованный в данной статье, является *метод регуляризации академика А.Н. Тихонова* [9]. Таким образом, при решении находим неизвестные контактные силы в следующей форме:

$$\mathbf{R}_{13} = (\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{u}_{01}; \quad \mathbf{R}_{23} = -(\Delta \mathbf{A}^T \cdot \Delta \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{u}_{01}, \quad (15)$$

где $\Delta \mathbf{A}$ – определитель блочной матрицы \mathbf{A} ; α – параметр регуляризации; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица, вид которой приведен в [2].

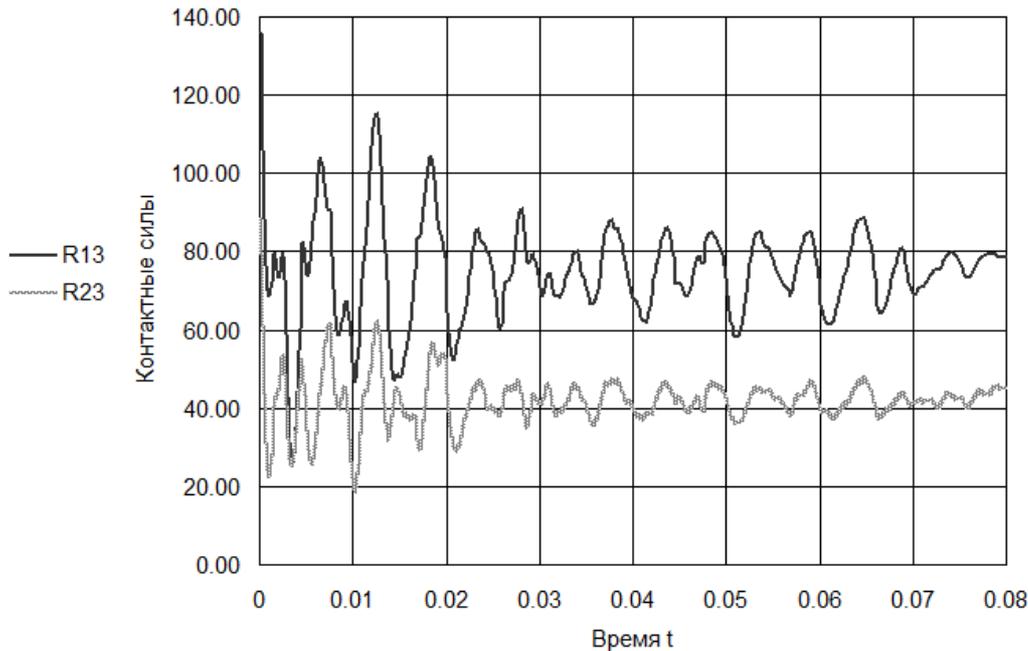


Рис. 2 – Значения модулей контактных сил.

Численный эксперимент. Расчет сил контактного взаимодействия проводился со следующими параметрами: $l_1 = 0.8$ м; $l_2 = 0.85$ м; $l_3 = 0.9$ м; свойства материала принимались одинаковыми для всех струн, то есть $\rho_i = 6.126 \cdot 10^{-3}$ кг/м; $a_i = 180$ м/с. Сила $P(t)$, которую приложили к первой струне, изменяется во времени как *функция Хевисайда*: $P(t) = q_0 \cdot H(t)$, где $q_0 = 100$ Н – интенсивность нагрузки. Исследуется промежуток времени $t = 0.08$ с. Вместо бесконечных сумм в выражении (15) бралось конечное число $K = 50$ членов ряда. Рис. 2 иллюстрирует изменения контактных сил во времени.

По известным контактным силам при помощи (11) можно определить перемещения в произвольных точках струн. На рис. 3 изображены перемещения каждой струны для их средних точек.

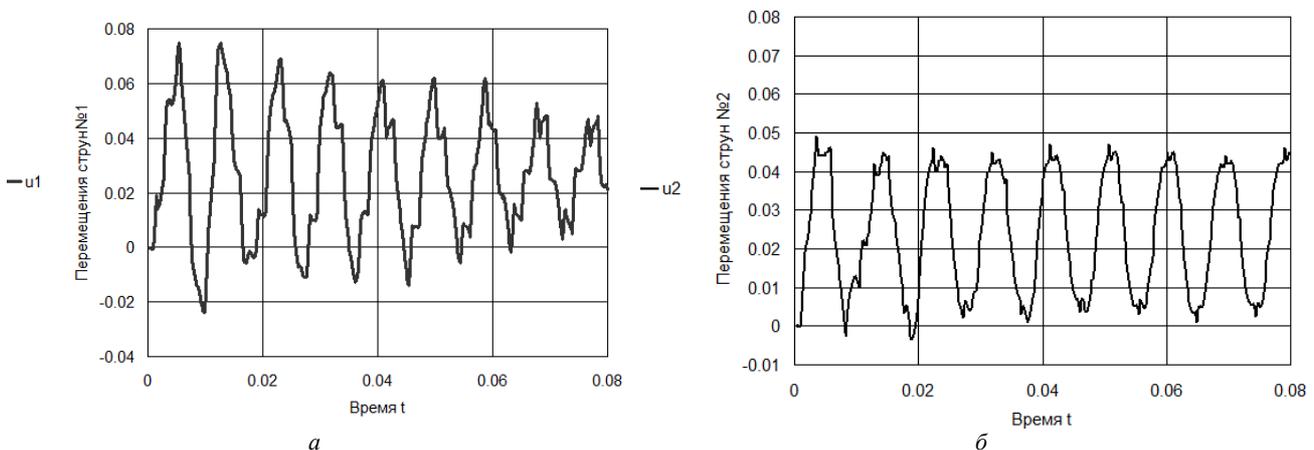


Рис. 3 – Перемещения струн под действием сосредоточенной нагрузки: а – струны № 1; б – струны № 2.

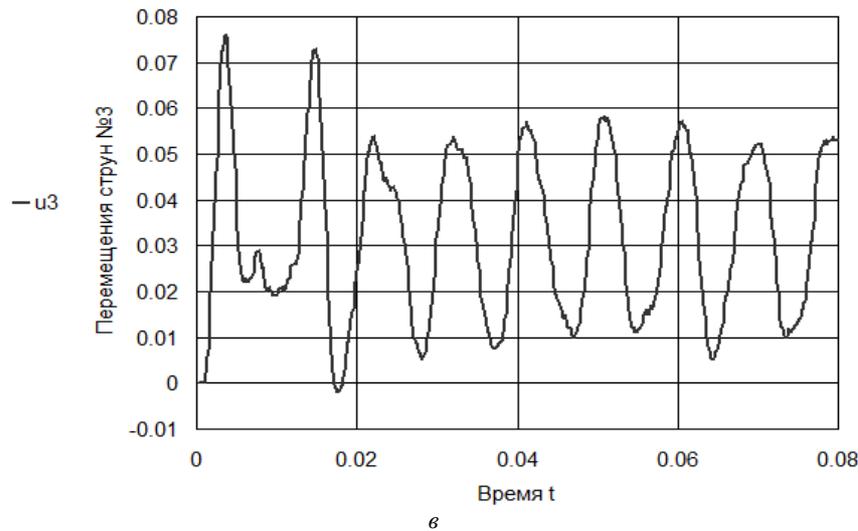


Рис. 3 – Перемещения струн под действием сосредоточенной нагрузки: v – струны № 3.

Выводы. В данной статье была решена задача для нестационарных колебаний системы трех струн под действием сосредоточенной нагрузки. При помощи метода регуляризации А. Н. Тихонова получено устойчивое решение, которое определяет силы контактного взаимодействия между струнами в зависимости от времени. Проведен численный расчет этих сил, а так же по известным контактным силам вычислены перемещения каждой струны в точке, отвечающей середине каждой струны.

Предложенный подход может быть использован при проектировании различных механических систем, которые моделируются струнами (канатные краны, контактные сети и так далее), и находятся под воздействием нестационарных нагрузок.

Список литературы: 1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с. 2. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин., И.В. Янчевский, А.В. Воронай, А.С. Шарапанга // Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 3. Дидкин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 4. Li-Qun Chen, Wei Zhang, Jean W. Zu. Nonlinear dynamics for transverse motion of axially moving strings // *Chaos, Solitons & Fractals*, Volume 40, Issue 1, 15 April 2009, Pages 78 – 90. 5. Belotserkovskii P.M. Transient vibration of an infinite string bearing a concentrated mass and supported by elastic-viscous suspensions // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 75, Issue 5, 2011, Pages 553 – 559. 6. Bingen Yang Exact transient vibration of stepped bars, shafts and strings carrying lumped masses // *Journal of Sound and Vibration*, Volume 329, Issue 8, 12 April 2010, Pages 1191 – 1207. 7. Vincent Debut, Delaune X., Antunes J. Identification of the nonlinear excitation force acting on a bowed string using the dynamical responses at remote locations // *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 52, Issue 11, November 2010, Pages 1419 – 1436. 8. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с. 9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1986. – 288 с.

Bibliography (transliterated): 1. Aramanovich, Y. G., and V. Y. Levin. *Uravnenija matematicheskoj fiziki*. Moscow: Nauka, 1969. Print. 2. Janjutin, E. G., et al. *Zadachi impul'snogo deformirovanija elementov konstrukcii. Monografija*. Kharkov: HNADU, 2004. Print. 3. Didkin, V. A., and A. P. Prudnikov. *Operacionnoe ischislenie*. Moscow: Vysshaja shkola, 1966. Print. 4. Chen, Li-Qun, Wei Zhang and Jean W. Zu. "Nonlinear dynamics for transverse motion of axially moving strings." *Chaos, Solitons & Fractals*. Vol. 40. Issue 1. 2009. 78–90. Print. 5. Belotserkovskij, P. M. "Transient vibration of an infinite string bearing a concentrated mass and supported by elastic-viscous suspensions." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 75. Issue 5. 2011. 553–559. Print. 6. Bingen, Yang. "Exact transient vibration of stepped bars, shafts and strings carrying lumped masses." *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 329. Issue 8. 2010. 1191–1207. Print. 7. Debut, V., X. Delaune, and J. Antunes. "Identification of the nonlinear excitation force acting on a bowed string using the dynamical responses at remote locations." *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 52. Issue 11. 2010. 1419–1436. Print. 8. Verlan', A. F., and V. S. Sizikov. *Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, programmy: spravochnoe posobie*. Kiev: Nauk. dumka, 1986. Print. 9. Tihonov, A. N., and V. Ja. Arsenin. *Metody reshenija nekorrektnyh zadach*. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit-ry, 1986. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Малахов Євген Сергійович – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків; тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

Малахов Евгений Сергеевич – аспірант, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, г. Харків; тел.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

Malakhov Evgeniy Sergeevich – postgraduate, Kharkov National Automobile and Highway University, Kharkov, Kyiv; tel.: (067) 738-02-01; e-mail: malahov1234@gmail.com.

Е. В. МАРЦЕНЮК, Ю. А. ЗЕЛЁНЫЙ, С. Б. РЕЗНИК, Р. Р. КЛИМИК, Т. В. КУЛИК

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА ТУРБИНЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Решена задача по определению граничных условий конвективного теплообмена для корпуса турбины на основе результатов испытаний авиационного двигателя. Достигнуто повышение точности расчетов граничных условий 3-го рода по удельному тепловому потоку при сложном характере течения окружающей среды. Для этого введена поправка к расчетному значению коэффициентов теплоотдачи, учитывающая теплообмен внутри детали посредством теплопроводности материала. Выполнено сравнение восстановленного поля температур корпуса турбины с экспериментальными данными.

Ключевые слова: турбина, конвекция, теплопроводность, обратная задача, коэффициент теплоотдачи.

Введение. При математическом моделировании теплового состояния конструкций наиболее часто используют граничные условия третьего рода. Основным источником погрешностей в данных задачах, как правило, выступают значения коэффициентов теплоотдачи.

Коэффициент теплоотдачи является комплексной характеристикой интенсивности теплообмена между поверхностью и текущим вдоль нее потоком жидкости или газа. Он зависит от большого количества физических, геометрических и режимных параметров процесса теплообмена. В связи с этим вывод прямых аналитических зависимостей для расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи на основе фундаментальных знаний о природе процессов теплопереноса в пространстве не представляется возможным.

Существуют различные возможности для определения численных значений коэффициентов конвективной теплоотдачи в конкретных условиях протекания теплообменного процесса.

Классическая инженерная методика расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи базируется на теории подобия. В ее основе лежит использование критериальных уравнений алгебраического типа, которые для каждого набора условий протекания теплообменного процесса обобщают экспериментальные данные по различным веществам, выступающим в роли теплоносителей. Другими словами, критериальные уравнения представляют собой результат многомерной аппроксимации, а, следовательно, их использование в каждом конкретном случае приводит к погрешностям, слабо поддающимся оценке. Как правило, погрешность расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи по критериальным уравнениям составляет 30 – 50%.

Другой путь связан с непосредственным измерением температурных полей в лабораторных или промышленных условиях на действующем оборудовании для исследуемых условий протекания теплообменных процессов и видов теплоносителей. По результатам измерений температурных полей могут быть вычислены локальные значения коэффициентов теплоотдачи.

Существуют такие методики расчета коэффициентов теплоотдачи по экспериментальным данным:

– расчет по определению коэффициента теплоотдачи как удельного количества тепла, приходящегося на единицу площади поверхности теплообмена в единицу времени, отнесенного к единичной разности температур поверхности и определяющей температуры потока. Этот способ широко освещен в литературе и является своего рода классическим;

– итеративный алгоритм нахождения коэффициента теплоотдачи, в котором при каждой итерации решается прямая задача теплопроводности, то есть рассчитывается температурное поле в моделируемых условиях и корректируется значение коэффициента теплоотдачи, входящего в граничные условия задачи теплопроводности; итерации выполняются до приемлемого совпадения расчетного и измеренного температурных полей. Этот способ целесообразно использовать в оценочных расчетах;

– прямой расчет коэффициента теплоотдачи по результатам решения обратной задачи теплопроводности для исследуемого процесса. Этому посвящено много работ, но их результаты часто оказываются не адаптированными для решения прикладных инженерных задач.

Постановка задачи. Температурное состояние корпусов турбины определяется в основном конвективным теплообменом с внешней средой и контактным теплообменом с сопряженными деталями.

Основным способом определения теплового состояния деталей турбины в настоящее время является расчет по методу конечных элементов в двумерной, а также пространственной постановке.

В качестве теплового нагружения применяются граничные условия 3-го рода – коэффициент теплоотдачи α и температура окружающей среды T_f . Величина T_f должна быть задана по определению и обычно представляет собой температуру среды, омывающей поверхность теплообмена.

Сложность геометрической формы деталей турбины и характера течения среды, вдоль омываемых поверхностей, диктует необходимость определения коэффициентов теплоотдачи на основании опытных данных. Так, в результате эксперимента имеется распределение температуры среды в окрестностях исследуемой детали и локальные значения температур омываемых поверхностей на отдельно выбранных участках. Используя экспери-

ментальные данные, локальные значения коэффициента теплоотдачи α_j можно определить по формуле:

$$\alpha_i = q_{w_i} (T_i - T_{f_i}), \quad (1)$$

где q_{w_i} – удельный тепловой поток в i -й точке с координатами (x_i, y_i) ; T_i – температура поверхности детали в i -й точке; T_{f_i} – температура среды в окрестностях i -й точки.

Для получения более полной картины о тепловом состоянии конструкции, была решена прямая задача теплопроводности с использованием граничных условий первого рода, которые задавались в местах установки термомпар. В результате получено распределение удельного теплового потока и значения температуры стенки по всей детали. Таким образом, исходными данными для идентификации граничных условий конвективного теплообмена явились результаты испытаний и численного моделирования процесса теплопроводности корпуса турбины.

Следует отметить, что в соответствии с алгоритмом программного комплекса, используемого для нахождения удельных тепловых потоков, формула (1) справедлива для случая, когда значения граничных условий вдоль стенки остаются неизменными. Следовательно, необходимо внести коррекцию локального значения коэффициента теплоотдачи, учитывающую изменение параметров окружающей среды.

Для достижения поставленных целей были намечены следующие задачи:

- 1) определение поправки для коэффициентов теплоотдачи, учитывающей неоднородность теплового воздействия на тело простой формы;
- 2) назначение участков теплообмена и расчет коэффициентов теплоотдачи для корпуса турбины авиационного двигателя по ограниченному экспериментальным данным;
- 3) идентификация граничных условий теплового нагружения корпуса турбины.

Учет неоднородности теплового воздействия. Анализируя условия работы корпуса турбины, можно отметить, что параметры газового (воздушного) потока в пределах одной поверхности изменяются монотонно, либо остаются постоянными. Данное обстоятельство позволяет использовать расчетную схему, в которой граничные условия приняты постоянными в пределах отдельных выделенных участков теплообмена, а переход от одного участка к другому происходит с незначительными приращениями температуры среды и (или) коэффициента теплоотдачи.

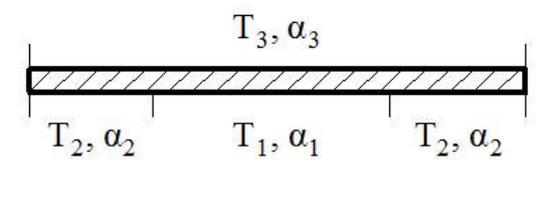


Рис. 1 – Расчетная схема тестовой модели.

– профиль параметров газового потока вдоль внутренней стенки является симметричным с экстремумом, расположенным в средней части цилиндра – три участка с условиями (T_1, α_1) и (T_2, α_2) ;

– воздушный поток вдоль наружной стенки цилиндра является наиболее холодным, а параметры этого потока остаются неизменными – один участок с условиями (T_3, α_3) ;

– на торцевых стенках цилиндра тепловые нагрузки отсутствуют.

Введено дополнительное ограничение, не противоречащее условиям обтекания корпуса: коэффициенты теплоотдачи на всех участках приняты равными друг другу, то есть $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$; а разница температур газового потока не превышает 10%, то есть $0,9 \leq (T_2 / T_1) \leq 1,1$ $0,9 \leq (T_3 / T_1) \leq 1,1$.

Далее выполнен ряд расчетов прямой задачи теплопроводности для различных граничных условий 3-го рода. Расчеты отличались значениями коэффициентов теплоотдачи, варьирование которых задавалось так, чтобы перекрыть диапазон возможных значений коэффициентов на корпусе турбины. Результаты одного из вариантов расчета представлены на рис. 2.

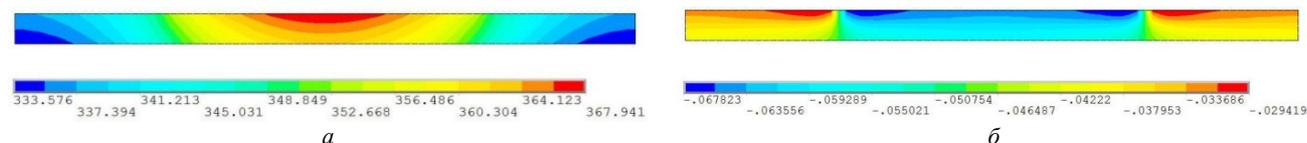


Рис. 2 – Результаты теплового расчета тестовой модели: а – поле температур; б – нормальный удельный тепловой поток.

Следующим шагом стало определение, в соответствии с формулой (1), локальных значений коэффициентов теплоотдачи α_{cal_i} для каждого узла расчетной сетки, расположенного на омываемых поверхностях, и вычисление несоответствия расчетных значений заданному:

$$\alpha_{cor_i} = \alpha_{set} - \alpha_{cal_i}, \tag{2}$$

где α_{cor_i} – поправка к локальному расчетному значению коэффициента теплоотдачи α_{cal_i} ; α_{set} – известное заданное значение коэффициента теплоотдачи на выделенном участке теплообмена.

Определив, на какую величину необходимо скорректировать значения нормального удельного теплового потока:

$$q_{cor_i} = \alpha_{cor_i} (T_i - T_{f_i}), \tag{3}$$

представили данную поправку в виде безразмерной функции. Поскольку необходимо установить связь между величиной требуемой поправки и передачей тепла вдоль стенки, аргументом предложенной функции назначено отношение удельного теплового потока, направленного вдоль стенки $(q_{cal_i})_\tau$, к потоку, направленному по нормали к стенке $(q_{cal_i})_r$. Как видно из рис. 3, расчетные точки хорошо ложатся на кривую, описываемую уравнением параболы:

$$\left| \frac{q_{cor_i}}{(q_{cal_i})_r} \right| = b_0 + b_1 \left| \frac{(q_{cal_i})_\tau}{(q_{cal_i})_r} \right| + b_2 \left| \frac{(q_{cal_i})_\tau}{(q_{cal_i})_r} \right|^2. \tag{4}$$

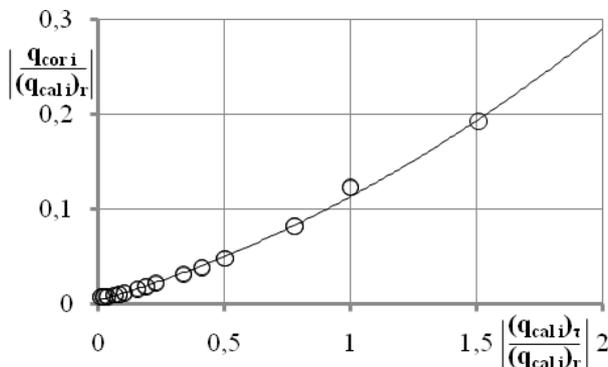


Рис. 3 – Связь между коррекцией и расчетными значениями удельных тепловых потоков.

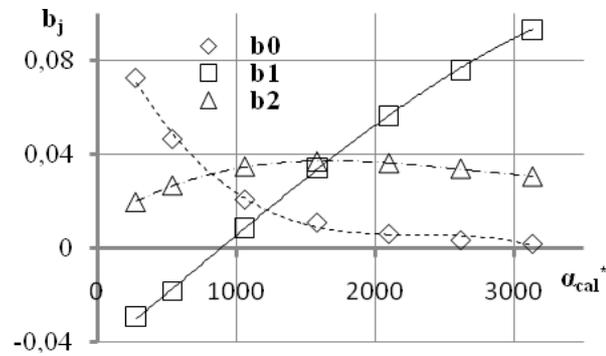


Рис. 4 – Влияние средней величины коэффициента теплоотдачи на коэффициенты уравнения (4).

Вполне очевидно, что кривая, представленная на рис. 3, будет зависеть от таких факторов, как теплопроводность материала, разница температур окружающей среды и среднее значение коэффициентов теплоотдачи на соседних участках. Пофакторный анализ поведения предлагаемой функции показал, что коэффициенты параболы b_j могут быть описаны полиномиальной зависимостью типа

$$b_j = c_{j,0} + c_{j,1}x + c_{j,2}x^2 + c_{j,3}x^3, \tag{5}$$

где в качестве аргумента x выступает α_{cal}^* – среднее арифметическое расчетных значений коэффициента теплоотдачи в пределах заданного участка теплообмена, а коэффициенты полинома $c_{j,k}$ находятся путем аппроксимации результатов численных экспериментов (рис. 4).

Чтобы впоследствии определить направление корректировки, следует руководствоваться следующими рекомендациями:

- для участка с температурой окружающей среды большей, чем на соседних участках, полученную поправку α_{cor_i} (со своим знаком) вычитают из расчетных значений коэффициентов теплоотдачи α_{cal_i} ;
- на участке с температурой окружающей среды меньшей, чем на соседних участках, поправку (со своим знаком) прибавляют к расчетным значениям коэффициентов теплоотдачи;
- если выделенный участок имеет большую длину, а на противоположной поверхности стенки на той же длине расположены несколько участков с отличающимися значениями температур окружающей среды, то следует руководствоваться рекомендациями 1 и 2, опираясь на температуру среды на противоположной поверхности.

Для проверки предложенного подхода выполнены тестовые расчеты теплового состояния упрощенной модели с различными сочетаниями как температур окружающей среды на соседних участках, так и коэффициентов теплоотдачи, с учетом оговоренных ранее ограничений. Результаты тестов показывают, что разработанный подход позволяет восстановить средние значения коэффициентов теплоотдачи с погрешностью по отношению к заданной величине в пределах $\pm 1\%$.

Восстановление граничных условий теплообмена для корпуса турбины. Следующий этап работы за-

ключался в определении граничных условий конвективного теплообмена для корпуса турбины, используя результаты его термометрирования и описанный выше подход.

На корпусе турбины двигателя были назначены участки теплообмена (рис. 5), в пределах которых предполагается постоянство граничных условий.

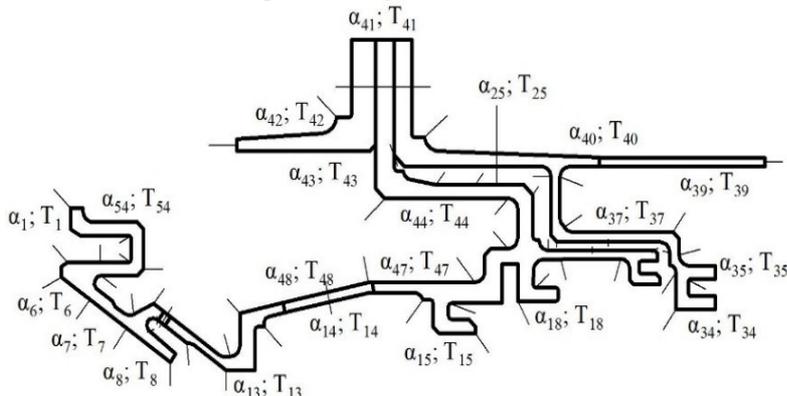


Рис. 5 – Схема теплового нагружения корпуса турбины.

были найдены корректирующие значения для локальных величин теплового потока. Объединив уравнения (3) и (2), нашли уточненные значения локальных коэффициентов теплоотдачи и их среднее значение для каждого из участков теплообмена.

Таким образом, рассчитанный набор граничных условий был применен к конечно-элементной модели корпуса турбины для решения прямой задачи теплопроводности. После сравнения результатов данного расчета с полем температур, полученным в процессе термометрирования узла турбины, выполнена окончательная коррекция граничных условий. Для этой цели использовался итеративный алгоритм:

- сравнение результатов моделирования с результатами эксперимента;
- на участках с большой погрешностью – изменение коэффициентов теплоотдачи;
- решение прямой задачи теплопроводности;
- повторное сравнение.

Полученное в результате использования итеративного алгоритма распределение температур в корпусе турбины (рис. 6) в среднем совпадает с результатами эксперимента с ошибкой не более 1К, а максимальная разница значений составляет не более 5К.

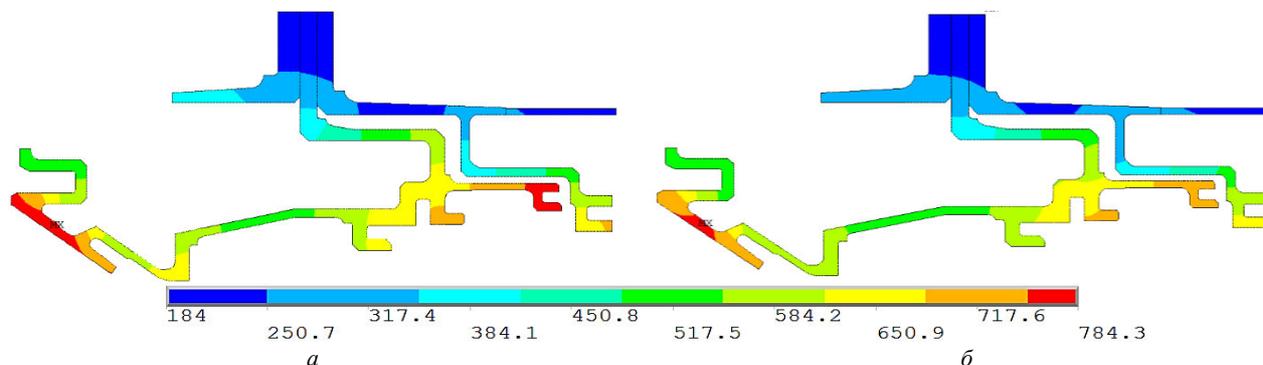


Рис. 6 – Тепловое состояние корпуса турбины: а – результат термометрирования; б – результат идентификации граничных условий.

Выводы. Предложен подход к определению граничных условий конвективного теплообмена с использованием экспериментальных данных термометрирования корпуса турбины.

Рассмотренный метод позволяет учесть неоднородность теплового воздействия газового потока на элементы конструкции и отличается простотой реализации.

По результатам исследований проведена идентификация граничных условий теплообмена для корпуса турбины.

Список литературы: 1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988. – 280с. 2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009 – 457с. 3. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности в 2-х томах. – Киев: Наук. думка, т. 1. Методология, 2002. – 405с. 4. Кузнецов Г.В., Шеремет М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учеб. Пособие. – Томск.: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2007. – 172с.

Bibliography (transliterated): 1. Alifanov, O. M. *Obratnye zadachi teploobmena*. Moscow: Mashinostroenie, 1988. Print. 2. Kabanihin, S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi*. Novosibirsk: Sib. nauch izd-vo, 2009. Print. 3. Macevityj, Y. M. *Obratnye zadachi teploprovodnosti v 2-h tomah*. Vol. 1. *Metodologija*. Kiev: Nauk. dumka, 2002. Print. 4. Kuznetsov, G. V., and M. A. Sheremet. *Raznostnye metody reshenija zadach teploprovodnosti*. Tomsk: Izd-vo Tomsk. politehn. un-ta, 2007. Print.

Поступила (received) 28.09.2015

Марценюк Євген Вікторович – старший викладач, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (066) 272-12-44; e-mail: ev_martsen@mail.ru

Марценюк Евгений Викторович – старший преподаватель, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (066) 272-12-44; e-mail: ev_martsen@mail.ru

Martsenyuk Evgen Victorovich – Associate Professor, National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkov; tel.: (066) 272-12-44; e-mail: ev_martsen@mail.ru

Зелений Юрій Олексійович – провідний конструктор відділу турбін ДП «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя; тел.: (0612) 65-62-95; e-mail: yura-green@mail.ru.

Зеленый Юрий Алексеевич – ведущий конструктор отдела турбин ГП «Ивченко-Прогресс», г. Запорожье; тел.: (0612) 65-62-95; e-mail: yura-green@mail.ru.

Zelenyj Yuri Alekseevich – Leading Project Designer of Turbine Department, SE Ivchenko-Progress, Zaporizhia; tel.: (0612) 65-62-95; e-mail: yura-green@mail.ru.

Резник Сергій Борисович – начальник бригади, заступник начальника відділу турбін ДП «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя; тел.: (0612) 65-62-95; e-mail: s.b.reznik@gmail.com.

Резник Сергей Борисович – начальник бригады, заместитель начальника отдела турбин ГП «Ивченко-Прогресс», г. Запорожье; тел.: (0612) 65-62-95; e-mail: s.b.reznik@gmail.com.

Reznik Sergey Borisovich – Group Manager, Deputy Head of Turbine Department, SE Ivchenko-Progress, Zaporizhia; tel.: (0612) 65-62-95; e-mail: s.b.reznik@gmail.com.

Клирик Ростислав Ростиславович – інженер-конструктор 1-ї категорії відділу турбін ДП «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя; тел.: (0612) 656295; e-mail: 03504@ivchenko-progress.com.

Клирик Ростислав Ростиславович – инженер-конструктор 1-й категории отдела турбин ГП «Ивченко-Прогресс», г. Запорожье; тел.: (0612) 656295; e-mail: 03504@ivchenko-progress.com.

Klimik Rostislav Rostislavovich – Senior Design Engineer of Turbine Department, SE Ivchenko-Progress, Zaporizhia; tel.: (0612) 656295; e-mail: 03504@ivchenko-progress.com.

Кулик Тамара Василівна – старший науковий співробітник, доцент, ПНДЛ діагностики авіаційних двигунів Національного аерокосмічного університету ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: (057) 788-45-25; e-mail: aedlab@gmail.com.

Кулик Тамара Васильевна – старший научный сотрудник, ПНИЛ диагностики авиационных двигателей Национального аэрокосмического университета им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: (057) 788-45-25; e-mail: aedlab@gmail.com.

Kulik Tamara Vasilevna – Senior Researcher at the Laboratory of Aircraft Engines Diagnostics, National Aerospace University «Kharkiv Aviation Institute», Kharkov; tel.: (057) 788-45-25; e-mail: aedlab@gmail.com.

УДК 519.64:004.032.24

В. О. МИЩЕНКО, Б. В. ПАТОЧКИН

ОРГАНИЗАЦИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФРАКЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДАМИ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

При всестороннем исследовании антенн, ретрансляторов и других подобных устройств существует потребность в расчетах параметров дифракции электромагнитных волн на металлических экранах для многих вариантов формы и волновых чисел. Время компьютерного моделирования критично. Перспективными в такой ситуации становятся вычислительные методы дискретных особенностей, в частности, метод дискретных токов (МДТ). В статье разработан метод организации компьютерного моделирования по МДТ с использованием особенностей архитектуры персональных компьютеров и даны результаты проверки эффективности этого метода.

Ключевые слова: электромагнитная волна, дифракция, волновое число, математическая модель, МДО, архитектура компьютера, тайлинг, векторные регистры, OpenMP, скорость вычислений.

Введение. При конструировании и исследовании антенн, ретрансляторов и волноведущих систем существует потребность в расчетах параметров дифракции электромагнитных волн на металлических экранах для многих вариантов формы и значений волнового числа. Для успешного проведения таких расчётов в требуемом объёме с необходимой точностью важнейшим показателем является скорость компьютерного счёта. В данной статье предполагается использование вычислительных *методов дискретных особенностей* (МДО), которые относятся к наиболее эффективным методам численного решения граничных интегральных уравнений задач математической физики, в том числе дифракционных [1] (причём используются уравнения с *сингулярными ядрами* или другие близкие к ним по свойствам *псевдодифференциальные уравнения*). При этом проведение расчётов для широкополосных антенн или *фазированных антенных решеток* (ФАР) с проверками точности за счёт удвоения числа дискретных особенностей сталкивается с большими затратами времени вычислений на персональном

компьютере (ПК) даже, если выбрана 2D постановка задач. Общий подход к ускорению счёта состоит в том, что программная реализация хорошо изученного последовательного алгоритма заменяется реализацией параллельной версии модифицированного для этой цели алгоритма в предположении доступности физически параллельных вычислений. Этот подход вступает в противоречие с весьма ограниченным числом процессорных ядер ПК.

Однако для достижения данной цели на ПК имеются резервы, связанные с особенностями их архитектуры, которые нам удалось задействовать для ускорения вычислений МДО. Наряду с традиционным распараллеливанием вычислений [2, 3], которое использует наличие нескольких параллельно работающих процессоров, удалось задействовать ускоренный обмен между регистрами и кэшем памяти [4 – 6], а также специальные регистры процессора, допускающие параллельное выполнение операций по *принципу векторных процессоров* [7].

Указанные резервы использованы путём создания соответствующих модификаций вычислительного метода дискретных токов (МДТ из семейства МДО) и разработки программных модулей на языках программирования Ада [4, 5] и С++ [6]. В языке Ада для организации параллельных вычислений имеются удобные средства высокого уровня (собственно, поэтому мы его использовали), но эффекты ускорения несколько снижаются при его реализации на базе Run Time System. Язык С/С++ позволяет наиболее полно воспользоваться возможностями системного программирования. В этом случае, однако, требуется понимание и знание как языка С++, так и отдельных деталей работы с памятью и процессором, что мешает использованию библиотеки модулей ускорения МДТ специалистами по моделированию, которые не являются одновременно и специалистами по программированию.

Целью данной работы является построение для нужд исследователей дифракционных процессов в технических системах практичной информационной технологии компьютерного моделирования МДТ, которая сохранит в существенном достигнутую скорость вычислений.

Постановка задачи. Для достижения поставленной цели решались две задачи.

Первая – разработка проекта библиотеки компьютерного моделирования дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих экранах (в 2D постановке задач), которая позволяет без специальных знаний или долгого своего изучения организовывать и проводить вычисления, существенно ускоряемые за счёт многопоточности процесса, мультиядерности процессора, оптимизации работы с кэшем памяти и векторных регистров процессора.

Вторая – верификация и оценка степени эффективности тех приложений для вычислительных экспериментов по моделированию дифракционных процессов, которые можно собрать из модулей данной библиотеки.

Важнейшие модули этой библиотеки, которую мы назовём SDCM (Speed Discrete Currents Modeling), были фактически уже разработаны на языке программирования С++ в процессе разработки модификаций МДТ для использования эффектов *тайлинга* и параллельных вычислений [7]. Однако они для своего понимания и использования в качестве компонент требуют от пользователя, который организует вычисления, свободного владения низкоуровневыми средствами управления параллельными процессами. Такой квалификации у специалистов по моделированию дифракции ожидать нельзя.

Поэтому в данной работе архитектура и основные системные решения разработаны на базе открытого стандарта для распараллеливания программ OpenMP. Выбор пал на это высокоуровневое средство распараллеливания потому, что при его использовании не изменяется однопоточный код, и он хорошо зарекомендовал себя у прикладников понятностью команд и простотой использования при удовлетворительной эффективности [8].

Верификация модулей библиотеки SDCM основана на сравнении получаемых результатов моделирования с результатами работы традиционных реализаций МДТ.

Оценка эффективности по скорости работы проводилась на основе серий вычислительных экспериментов с разными реализациями в разных режимах. При этом оценивалась предполагаемая потеря эффективности как плата за удобство настройки готовых компонент при создании приложений компьютерного моделирования.

Используемые математические модели дифракционных процессов. Пусть в плоской задаче дифракции электромагнитных волн на идеально проводящих контурах зависимость от времени задается множителем $e^{i\omega t}$. Амплитуды наблюдаемого полного поля

$$\vec{E}^{tot} = \vec{E} + \vec{E}_0, \quad \vec{H}^{tot} = \vec{H} + \vec{H}_0, \quad (1)$$

где \vec{E}_0, \vec{H}_0 – падающее поле; E, H – рассеянное поле, причем, как известно, достаточно рассмотреть следующие два случая.

Случай E поляризации:

$$E_0 = (0, 0, U_0), \quad H_0 = \left(\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial U_0}{\partial x}, 0 \right) \quad (2)$$

(и тогда аналогичную структуру имеют векторы полей $\vec{E}^{tot}, \vec{H}^{tot}$ и E, H).

Случай H поляризации:

$$H_0 = (0, 0, U_0), \quad E_0 = \left(-\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial U_0}{\partial y}, \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial U_0}{\partial x}, 0 \right), \quad (3)$$

причём аналогичную структуру имеют векторы полей \vec{E}^{tot} , \vec{H}^{tot} и E , H например,

$$H = (0, 0, U), \quad E = \left(-\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial U}{\partial x}, 0 \right). \quad (3)$$

Алгоритмы численного решения таких задач, основанные на МДТ [1], зависят от типа поляризации падающего поля (электрическая или магнитная) и вида контуров, представляющих сечения экранов (замкнутые или разомкнутые). Учитывая, что речь идёт о применении известного метода, ограничимся здесь для примера формулами, которые описывают точные исходные и дискретные (аппроксимирующие граничные интегральные уравнения) модели дифракционного процесса, в случае H поляризации для замкнутых контуров.

Единственная ненулевая компонента магнитной составляющей рассеянного поля U удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне множества $C = \bigcup_{n=0}^{N-1} C_n$, где C_n – n -контур, а N – количество контуров:

$$\Delta U(X) + k^2 U(X) = 0, \quad x \in R^2 / \bar{C}, \quad X = (x, y). \quad (5)$$

На контуре C выполняется условие Неймана

$$\left. \frac{\partial U(X)}{\partial n} \right|_c = - \left. \frac{\partial U_0(X)}{\partial n} \right|_c \quad (6)$$

на бесконечности – условия излучения Зоммерфельда

$$U(X) \Big|_{|X| \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r = |X|, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U(X)}{\partial r} - ikU(X) \Big|_{x \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r^{3/2}}\right). \quad (8)$$

Согласно МДТ эти модели, имеющие дифференциальную форму, преобразуются к форме с граничными псевдодифференциальными операторами. Вычислительный метод, подлежащий ускорению, предполагает приведение каждого из таких уравнений к каноническому виду:

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{j(t)}{\sin^2\left(\frac{\tau-t}{2}\right)} dt + b(\tau) \cdot \int_0^{2\pi} \ln \left[\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \right] j(t) dt + \int_0^{2\pi} K(\tau, t) j(t) dt = 4h_\tau(\tau) E_\tau^0(\tau); \quad (9)$$

(в случае замкнутого контура), где,

$$b(\tau) = -k^2 \left((x')^2 + (y')^2 \right) \cdot \frac{i}{\pi}; \quad (10)$$

$$K(\tau, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} H_0^{(2)}(\kappa L) - k^2 h(\tau, t) H_0^{(2)}(\kappa L_0) u(t) - a(\tau) \frac{1}{\left[\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \right]^2} + b(\tau) \ln \left[\sin\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \right], \quad (11)$$

где $j(t)$ – искомая непрерывная функция на контуре (определяющая плотность «наведенного» тока в металле экрана).

МДТ позволяет ставить в соответствие таким моделям дискретные модели, обеспечивающие приближенное нахождение плотностей токов на экранах (т.н. *дискретные токи*) со сколь угодно высокой точностью за счёт выбора достаточно большого числа узлов дискретизации (параметр N). Воспроизведём конечные формулы:

$$\frac{2i}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} j_n(\phi_k^n) A(\phi_0, \phi_k^n) - b(\phi_0) \sum_{k=0}^{2n} j_n(\phi_k^n) B(\phi_0, \phi_k^n) + \sum_{k=0}^{2n} K(\tau, \phi_k^n) \frac{2\pi}{2n+1} = 4h_\tau(\tau) E_\tau^0(\tau), \quad (12)$$

где $N = 2n+1$, искомый вектор является дискретным приближением к искомой функции и

$$A(\phi_0, \phi_k^n) = \left[\frac{\sin^2 \frac{n}{2} (\phi_0 - \phi_k^n)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\phi_0 - \phi_k^n)} - \frac{n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) (\phi_0 - \phi_k^n)}{\sin \frac{1}{2} (\phi_0 - \phi_k^n)} \right], \quad n = (N-1)/2, \quad k = 0 \dots N; \quad (13)$$

$$B(\phi_0, \phi_k^n) = \frac{2}{2n+1} \left[\ln 2 + \sum_{p=1}^n \frac{\cos p(\phi_0 - \phi_k^n)}{p} \right]. \quad (14)$$

Очевидно, что (12) – это формально совместная система линейных алгебраических уравнений. Доказательство невырожденности таких систем и сходимость их решений к точному решению в определённых пространствах см. в [1].

Реализация быстрого варианта МДТ в системе параллельного программирования OpenMP. Технику распараллеливание с помощью OpenMP, которую мы применили, лучше пояснить на предельно упрощенном примере. Пусть это будет умножение матриц.

При организации данных в программе используются двумерные динамические массивы:

```
double** A;
double** B;
double** C;
```

Исходный алгоритм, представленный на языке программирования C/C++ имеет вид:

```
for (int i = 0; i < size; i++) {
  for (int j = 0; j < size; j++) {
    for (int k = 0; k < size; k++) {
      C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
    }
  }
}
(15)
```

В силу его простоты достаточно добавить одну строку:

```
#pragma omp parallel for shared(A, B, C)
```

Эта строка сообщает компилятору, что следующий далее цикл можно распараллелить, считая массивы в памяти A, B и C *общими ресурсами*. Под общим ресурсом здесь подразумевается, что каждая операция внутри цикла, связанная с этими массивами переменных, должна выполняться над ними, а не над их локальными копиями в процессах. При отсутствии декларации shared(A, B, C) в каждом потоке создавалась бы копия этих переменных. Хотя это и не критично в данном примере, но в приложении МДТ при использовании данных со стека привело бы к получению неправильных результатов. В итоге реализация матричного умножения с параллельной обработкой получает вид:

```
#pragma omp parallel for shared(A, B, C)
for (int i = 0; i < size; i++) {
  for (int j = 0; j < size; j++) {
    for (int k = 0; k < size; k++) {
      C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
    }
  }
}
(16)
```

Посмотрим, каким образом это сказывается на ускорении вычислений (табл. 1).

Таблица 1 – Результаты тестирования параллельной на базе OpenMP (15) и исходной (14) реализации демо примера

Размерность матриц	1000	2000	4000	10000
Время выполнения фрагмента (15), с	2,3	21,46	274	6947
Время выполнения фрагмента (16), с	8,1	84	1091	1744
Коэффициент ускорения при 4-х ядрах	3,52	3,91	3,98	3,98

Таким образом, ускорение выполнения алгоритмов, в которых можно выделить 4 слабо взаимодействующих процесса, теоретически может на 4-ядерном процессоре практически достигать значения 4. Использование OpenMP позволяет с ростом размерностей перемножаемых матриц достигать максимального теоретического ускорения с незначительным недобором (0.5%). Однако мы видим, что при средних (с точки зрения современных компьютерных вычислений) размерностях матриц «накладные расходы» по времени могут составить около 14%, что заставляет ставить задачу об обязательном исследовании этого вопроса для параллельных реализаций более сложных алгоритмов, когда взаимодействие процессов носит систематический характер.

Архитектура и схемы распараллеливания вычислений библиотеки SDCM. На диаграмме компонентов рис. 1 показана агрегация модулей библиотеки SDCM. В случае минимального объема результата, который хотят получить организаторы вычислительного эксперимента МДТ, интересуются обычно диаграммой направленности и функцией плотности тока, который соответствует рассеянному полю (часто в преобразованном для удобства виде). Эта функция позволяет сразу или в дальнейшем строить картину рассеянного или полного поля. При минимальном запрашиваемом результате, а также при необходимости численного построения поля в заданных точках внешней области пользователю пакета SDCM достаточно написать свою главную программу, которая активизирует компоненты, показанные на рис. 1. При других постановках задач (например, спектральных) придется выполнять настройку компонент. Труднее всего это сделать для Synchronization. Эта трудность отпадает для версии библиотеки, основанной на OpenMP.

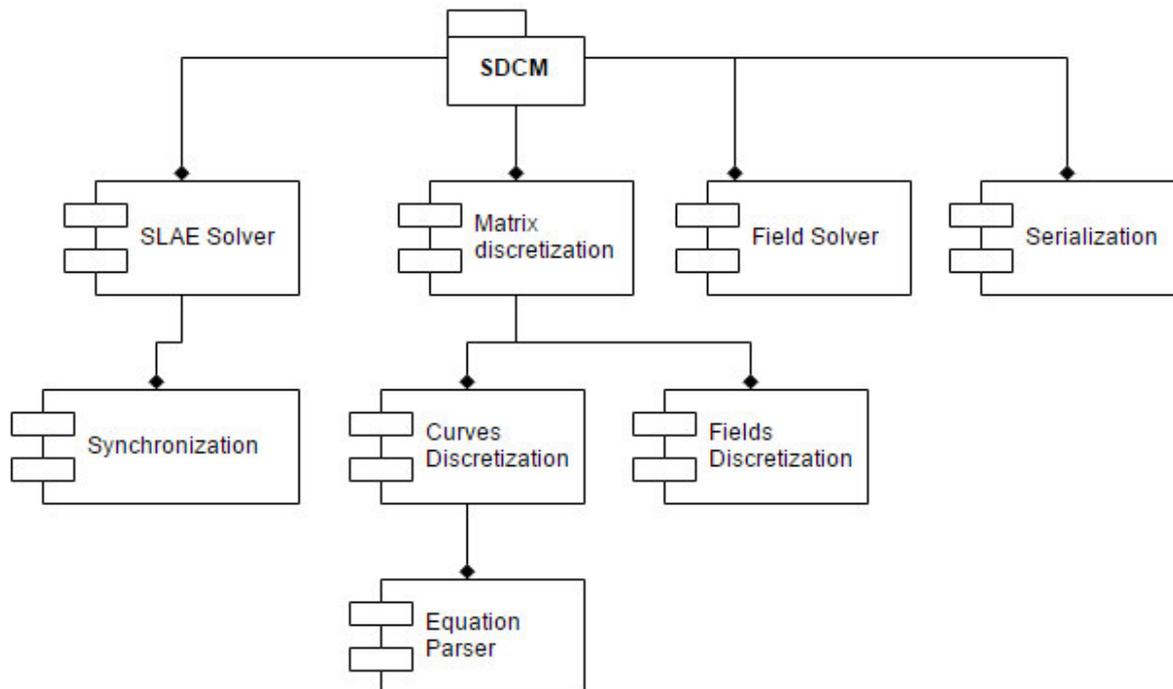


Рис. 1 – Модульная архитектура библиотеки SDCM.

Сведения о назначении и размерах модулей собраны в табл. 2.

Таблица 2 – Общие сведения о реализации компонентов в библиотеке SDCM

Модуль :	Краткое описание :	LOC :
SLAE Solver :	решение СЛАУ вычислительным методом компактной схемы Гаусса в вариантах: <ul style="list-style-type: none"> ● стандартный, ● модифицированный для оптимизации работы с кэш памятью, ● параллельная модификация оптимизации работы с кэш памятью, ● параллельная модификация с использованием векторных регистров при оптимизации работы с кэш памятью 	155
Curves Discretization :	сохранение информации о контурах в виде системы узлов вычислительного метода (МДТ)	140
Fields Discretization :	вычисление правых частей СЛАУ	70
Matrix Discretization :	формирование матрицы МДТ: <ul style="list-style-type: none"> ● естественный алгоритм, ● модифицированный для оптимизации работы с кэш памятью, ● параллельная модификация оптимизации работы с кэш памятью, ● параллельная модификация с использованием векторных регистров при оптимизации работы с кэш памятью 	120
Field Solver :	вычисление диаграммы направленности и рассеянного поля в заданных точках	50
Synchronization :	при использовании OpenMP не используется	103
Equation Parser :	аналитическое задание контуров	260
Serialization :	ввод-вывод по формату JSON	350

Распараллеливание заполнения матрицы и вычисления диаграммы направленности реализуется слабо взаимодействующими процессами, и обеспечивается командой компилятору по обсуждённой выше схеме:

```

#pragma omp parallel for shared(matrix)
for(int i = 0; i < matrix_size; i++)
{
    for(int j = 0; j < matrix_size; j++)
    {
        matrix[i][j] = calculate_element(...);
    }
}
  
```

Распараллеливание блочного варианта *компактной* схемы метода Гаусса, которая используется для решения системы линейных уравнений МДТ как раз с целью облегчения параллельных модификаций [4], осложняется систематическим и нетривиальным взаимодействием вычислительных потоков. Однако нами создан следующий код:

```

for (int i = 0; i < block_number; i++) {
    // middle blocks
    // full U and L part
    for (int k = 0; k < i; k++)
        for (int ii = lBorder(i), rbi = rBorder(i); ii < rbi; ii++)
            for (int ik = lBorder(k), rbk = rBorder(k); ik < rbk; ik++)
                for (int ij = lBorder(i); ij < rbi; ij++)
                    luMatrix[ii][ij] -= luMatrix[ii][ik] * luMatrix[ik][ij];
    // U and L part last block
    for (int ii = lBorder(i), rbi = rBorder(i); ii < rbi; ii++) {
        for (int ik = lBorder(i); ik < ii; ik++) {
            for (int ij = ii; ij < rbi; ij++)
                luMatrix[ii][ij] -= luMatrix[ii][ik] * luMatrix[ik][ij];
            for (int ij = ii + 1; ij < rbi; ij++)
                luMatrix[ij][ii] -= luMatrix[ij][ik] * luMatrix[ik][ii];
        }
    }
    // end of L part
    for (int ij = ii + 1, rbi = rBorder(i); ij < rbi; ij++)
        luMatrix[ij][ii] /= luMatrix[ii][ii];
}

//U blocks
#pragma omp parallel for shared(luMatrix, i)
for (int j = i + 1; j < bn; j++) {
    for (int k = 0; k < i; k++)
    {
        for (int ii = lBorder(i), rbi = rBorder(i); ii < rbi; ii++)
            for (int ik = lBorder(k), rbk = rBorder(k); ik < rbk; ik++)
                for (int ij = lBorder(j), rbj = rBorder(j); ij < rbj; ij++)
                    luMatrix[ii][ij] -= luMatrix[ii][ik] * luMatrix[ik][ij];
    }
    // U part last block
    for (int ii = lBorder(i), rbi = rBorder(i); ii < rbi; ii++)
        for (int ik = lBorder(i); ik < ii; ik++)
            for (int ij = lBorder(j), rbj = rBorder(j); ij < rbj; ij++)
                luMatrix[ii][ij] -= luMatrix[ii][ik] * luMatrix[ik][ij];
}

//L blocks
#pragma omp parallel for shared(luMatrix, i)
for (int j = i + 1; j < bn; j++) {
    for (int k = 0; k < i; k++)
        for (int ij = lBorder(j), rbj = rBorder(j); ij < rbj; ij++)
            for (int ik = lBorder(k), rbk = rBorder(k); ik < rbk; ik++)
                for (int ii = lBorder(i), rbi = rBorder(i); ii < rbi; ii++)
                    luMatrix[ij][ii] -= luMatrix[ij][ik] * luMatrix[ik][ii];
    // L part last block
    for (int ii = lBorder(i), rbi = rBorder(i); ii < rbi; ii++) {
        for (int ik = lBorder(i); ik < ii; ik++)
            for (int ij = lBorder(j), rbj = rBorder(j); ij < rbj; ij++)
                luMatrix[ij][ii] -= luMatrix[ij][ik] * luMatrix[ik][ii];
        for (int ij = lBorder(j), rbj = rBorder(j); ij < rbj; ij++)
            luMatrix[ij][ii] /= luMatrix[ii][ii];
    }
}
}
}

```

Отметим, что объём необходимых команд системы OpenMP снова невелик, а схема их внедрения в код логична:

```
for (int block = 0; block < block_number; i++)
```

```

{
  // middle block calculation

  //U blocks
  #pragma omp parallel for shared(matrix, i)
  //top blocks calculation

  //L blocks
  #pragma omp parallel for shared(matrix, i)
  //left blocks calculation
}
    
```

К сожалению, при этом не удаётся избежать того недостатка, что создание потоков привязано к окончанию вычисления каждого из диагональных блоков матрицы системы линейных уравнений. Это влечёт дополнительные накладные расходы на поддержку параллельных процессов (в сравнении с базовым случаем слабо взаимодействующих процессов).

Гипотеза 1. При решении этой системы относительный вклад в общую продолжительность её решения накладных вычислительных расходов на распараллеливание по указанной схеме с ростом числа блоков (M^2) уменьшается.

Действительно, эта общая продолжительность должна была бы быть примерно пропорциональной M^2 , тогда как продолжительность накладных расходов, связанных с созданием потоков, предположительно пропорциональным M .

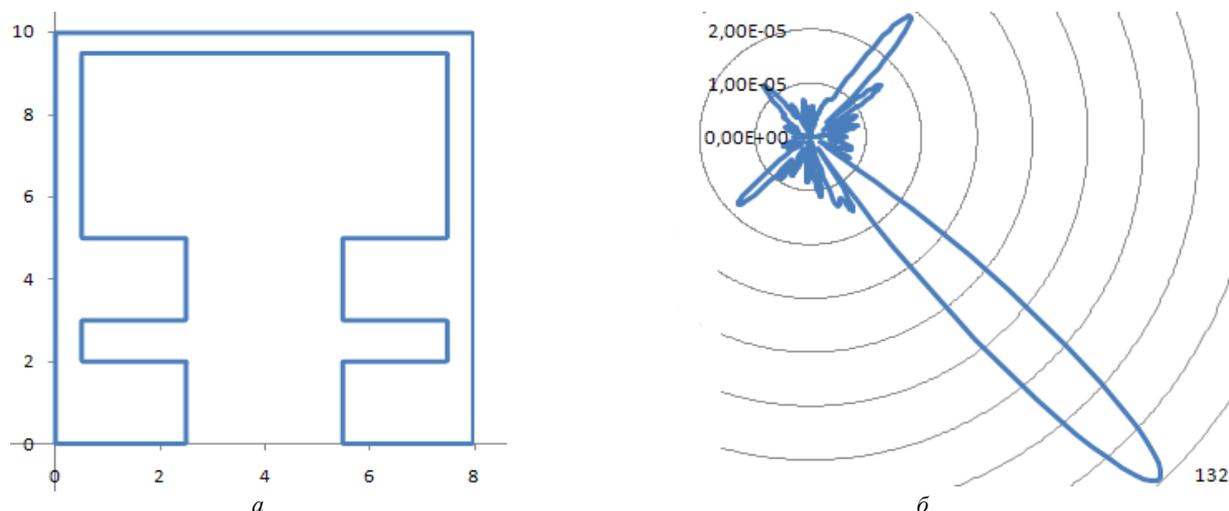


Рис. 2 – Пример, связанный с моделированием дифракции плоской волны на элементе ФАР [9]: *a* – контур, моделирующий поперечное сечение; *b* – пример диаграммы направленности ($k = \pi, \alpha = \pi/4$).

Вычислительные эксперименты, включая примеры, соответствующие реальным антеннам. Численные эксперименты по продолжительности компьютерного моделирования с использованием разных модификаций МДТ проводились на следующей платформе:

- процессор: Intel core i5-4430,
- ОЗУ: 8GB,
- ОС: Windows 10,
- Компилятор: Mingw 4.9.4 .

Результаты оказались мало чувствительными к конкретным формам контуров, представлявших поперечные сечения цилиндрических идеально проводящих экранов, а также к их взаимному расположению (со сближением не более, чем на длину волны). При нескольких экранах все они в последствии выбирались одинаковыми. В частности использовались контуры, соответствующие форме реальных антенн, волноведущих конструкций или щелевых резонаторов. Пример представлен на рис. 1, 2., а результаты – на рис. 3, 4.

Выводы по результатам тестирования. В табл. 3 представлена типичная серия экспериментов по вычислению плотностей токов и диаграмм направленности для нескольких контуров (проводящих экранов), значение волнового числа $k = \pi$ (от него результаты замеров продолжительности выполнения зависели примерно линейно при не более чем 4-кратном увеличении, тогда как от угла падения не зависели вовсе). Видно, что с усложнением конфигурации дифрагирующей системы (увеличение числа контуров) и уменьшением длины волны (что требовало пропорционального увеличения числа точек дискретизации на каждом контуре) небольшие наклад-

ные расходы, связанные с использованием OpenMP, выросли в 3 раза, достигнув всего 6%, но при этом показатель эффективности – коэффициент ускорения счёта вырос в 7,7 раза. Такие показатели нам представляются с точки зрения вычислителя-прикладника вполне приемлемыми.

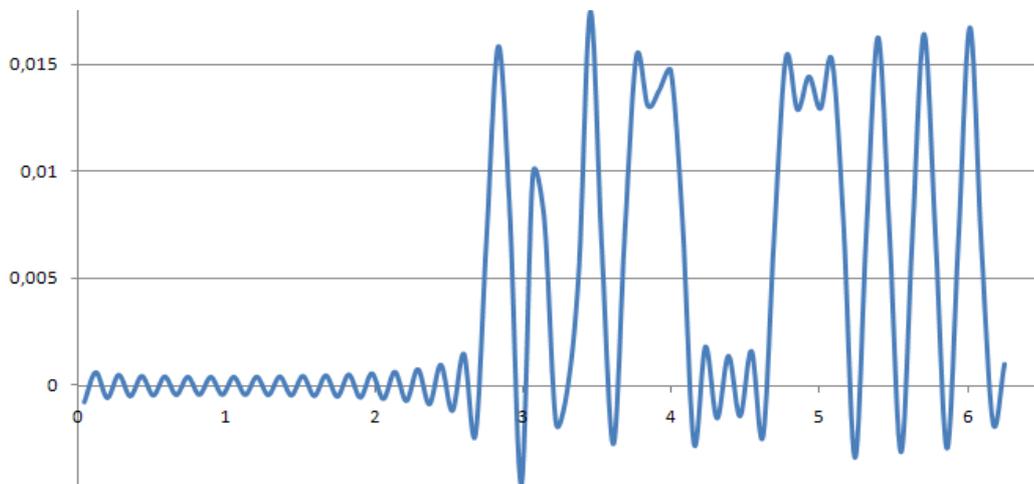


Рис. 3 – Вещественная составляющая плотности тока, порождающего рассеянное поле (вдоль масштаб условный, $k = \pi$, $\alpha = \pi/4$).

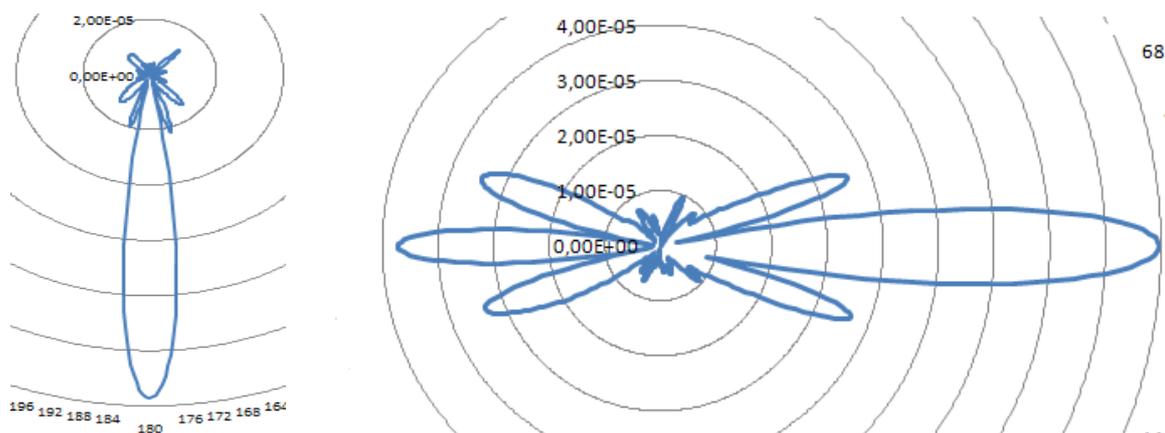


Рис. 4 – Диаграммы направленности в случае других углов падения ($\alpha = \pi/2$, $\alpha = 0$).

Таблица 3 – Время выполнения 3-х реализаций МДТ для 2, 5 и 10 контуров с разным числом точек дискретизации на них

Размерность СЛАУ	Время при исходной реализации	Время, если потоки, тайлинг, векторные регистры	Время: + OpenMP	Общее ускорение	Потеря в скорости за счёт OpenMP
2x100	0.095	0.022	0.022	4.3	2.1%
2x200	0.735	0.156	0.160	4.6	2.5%
5x100	0.647	0.108	0.114	5.7	4.9%
2x500	11.958	1.892	1.667	6.2	2.3%
5x200	6.888	0.625	0.652	10.6	4.4%
10x100	6.008	0.405	0.429	14.0	6.1%
2x1000	96.218	13.470	12.189	7.0	2.1%
10x200	51.898	2.390	0.968	20.506	5.9%
5x500	117.968	7.150	7.441	15.9	4.1%
5x1000	1091.550	53.313	55.494	19.7	4.1%
10x500	1006.100	31.950	33.861	29.7	6.0%
10x1000	8688.100	246.805	261.723	33.2	6.0%

Использование OpenMP вполне удовлетворяет поставленному требованию удобства пользователя, настраивающего программные компоненты библиотеки при её использовании для компьютерного моделирования дифракционных процессов. Потеря в эффективности (которая описывалась коэффициентом ускорения) в среднем около 5% в проведенных экспериментах объясняется неизбежным пересозданием потоков при решении системы линейных уравнений, чего не было при реализации, использовавшей непосредственное написание синхронизирующего кода программистом.

Заключення. Принципиальним результатом проведеного дослідження являється можливість зберегти ефективність комп'ютерного моделювання МДО, яку забезпечують тайлинг і векторні реєстри процесора, відмовившись від складного (і тим ненадійного при відсутності у користувачів спеціальної кваліфікації) модуля синхронізації за рахунок застосування високоуровневих засобів OpenMP. А саме, в проведених чисельних експериментах у поточної версії бібліотеки реалізації МДТ не спостерігалося втрати продуктивності більше ніж на 6% в порівнянні з методом, який передбачав ручне написання блоку синхронізації паралельних процесів [6,7]. При цьому гіпотеза 1 підтверджується в тому сенсі, що збільшення кількості блоків СЛАУ є наслідком збільшення кількості використовуваних дискретних потоків при збереженні кількості блоків і старих контурів. Може бути висунута і друга гіпотеза.

Гіпотеза 2. При інших рівних умовах накладні витрати на використання OpenMP (по часу виконання) менше при наявності меншого числа контурів (т. є. металічних екранів).

Також даною роботою завершується основане на аналізі результатів чисельних експериментів дослідження ефективності паралельних реалізацій МДТ на ПК, оскільки для цих цілей використані результати випробування таких реалізацій методами [7] для випадку H поляризації на тестах, які відповідають реальним антенним пристроям зі складною геометрією. Раніше подібні експерименти були проведені і обобщені для випадку E поляризації для систем розімкнутих і замкнутих контурів [6]. В цьому випадку в МДТ використовуються граничні інтегральні рівняння з ядрами меншої сингулярності, ніж при H поляризації. Коефіцієнт прискорення досягав 40. Даною серією нових експериментів комп'ютерного моделювання підтверджується, як ми бачили, досягнення, як правило, від 10 до 30 кратного прискорення рахунок на 4 ядерних процесорах при використанні не менше 1000 точок дискретизації. Оскільки довільне падаюче поле в 2D постановках можна представити суперпозицією полів з заданими поляризаціями і розсіяне поле буде суперпозицією рішень для цих поляризацій, то і в цьому випадку можна утверджувати багаторазове (до 30 раз) прискорення обчислень для складних дифракуючих систем, які представляють практичний інтерес з точки зору комп'ютерного моделювання дифракційних процесів.

Практичним результатом є побудова базової версії програмної бібліотеки комп'ютерного моделювання SDCM, яка, на відміну від близької по призначенню бібліотеки ЕДЕМ [10], робить застосування МДТ в ОКР можливим не за рахунок евристичного спрощення складних завдань дифракції, а за рахунок форсування внутрішніх резервів обчислювальної потужності сучасних ПК.

Список літератури: 1. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянська Т.С. Математичні питання методу дискретних потоків. Обґрунтування чисельного методу дискретних особливостей рішення двовимірних завдань дифракції електромагнітних хвиль // Учебне посібник. Ч. 2 – Харків: ХГУ, 1992. – 145 с. 2. Мищенко В.О. К моделюванню електромагнітних явишень на базі використання методів дискретних особливостей для рішення гіперсингулярних інтегральних рівнянь // Труды міжнародної конференції по обчислювальній математиці МКВМ – 2004. Новосибірськ: ІВМіМГ РАН, 2004. – Ч. II. – С. 555 – 560. 3. Gahov A.V., Mishchenko V.O. Parallelism for diffraction processes modeling on the base of discrete singularities methods // Труды Научно-технічної конф. з міжнародним участям «Комп'ютерне моделювання в наукоємких технологіях» (КМНТ – 2010). – Х.: ХНУ, 2010. – Ч. 2. – С. 50 – 53. 4. Мищенко В.О., Паточкін Б.В. Оптимізація компактної схеми Гаусса для багатоядерних процесорів // Вісник ХНУ. – № 981. – Вип. 18. – С. 70 – 81. 5. Parallel Gaussian compact scheme [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mediascan.by/index.files/parallel_gaussian_compscheme_win32.zip. 6. Паточкін Б.В. Мінімізація часу комп'ютерного моделювання задачі дифракції на екранах методом оптимізації локальності пам'яті // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2014. – Вип. 6 (89). – С. 58 – 64. 7. Мищенко В.О., Паточкін Б.В. Модифікація методу дискретних потоків для використання векторних реєстрів процесору ПК при чисельному моделюванні дифракції на екранах // Матеріали конференції «Сучасні проблеми моделювання та обчислювальних методів». – Рівне, 2015. – С. 130. 8. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Паралельні обчислення. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с. 9. Фазированная антенная решётка [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/143796> Фазированная. 10. Davydov A., Zakharov E. Opportunities of program EDEM for development of devices of antenna techniques // Antennas. – 2006. – № 10. – P. 52 – 57.

Bibliography (transliterated): 1. Gandel', Yu. V., S. V. Eremenko and T. S. Poljanskaja. *Matematicheskie voprosy metoda diskretnykh tokov. Obosnovanie chislennogo metoda diskretnykh osobennostej reshenija dvumernykh zadach difrakcii elektromagnitnykh voln. Uchebnoe posobie. Vol. 2.* – Kharkov: KhGU, 1992. Print. 2. Mishchenko, V. O. "K modelirovaniyu elektromagnitnykh javlenij na baze ispol'zovanija metodov diskretnykh osobennostej dlja reshenija gipersinguljarnykh integral'nykh uravnenij." *Trudy mezhdunarodnoj konferencii po vychislitel'noj matematike MKVM-2004.* Novosibirsk: IVMiMG RAN, 2004, No. 2. 555–560. Print. 3. Gahov, A. V., and V. O. Mishchenko. "Parallelism for diffraction processes modeling on the base of discrete singularities methods." *Trudy Nauchno-technicheskoiy konf. s mezhdunarodnym uchastiem "Kompjuterne modelirovanie v naukojomykh tehnologijah."* Vol. 2. Kharkov: KhNU, 2010. 50–53. Print. 4. Mishchenko, V. O., and B. V. Patochkin. "Optimizacija kompaktnoj shemy Gaussa dlja mnogojadernykh processorov." *Vestnik KhNU.* No. 981. Vol. 18. 70–81. Print. 5. "Parallel Gaussian compact scheme." *Mediascan.* Web. 14 October 2015. <http://www.mediascan.by/index.files/parallel_gaussian_compscheme_win32.zip>. 6. Patochkin, B. V. "Minimizacija vremeni kompjuterogo modelirovanija zadachi difrakcii na ekranah metodom optimizacii lokal'nosti pamjati." *Visnyk Kremenčuc'kogo nacional'nogo universytetu imeni Myhajla Ostrograds'kogo.* No. 6 (89). 2014. 58–64. Print. 7. Mishchenko, V. O., and B. V. Patochkin. "Modyfikacija metodu dyskretnykh tokiv dlja vykorystannja vektornykh registriv processoru PK pry chyslovomu modeljuvannju dyfrakcii na ekranah." *Materialy konferencii "Suchasni problemy modeljuvannja ta obchysljuval'nyh metodiv"*. Rivne, 2015. 130. Print. 8. Voevodin, V. V., and V. V. Voevodin. *Parallel'nye vychislenija.* Sankt-Petersburg: BHV–Peterburg, 2002. Print. 9. *Bol'shaja sovetskaja jenciklopedija.* "Fazirovannaja antennaja reshjotka." *Akademik.* Web. 14 September 2015. <<http://dic.academic.ru/dic.nsf/bse/143796> Fazirovannaja>. 10. Davydov, A., and E. Zakharov. "Opportunities of program EDEM for development of devices of antenna techniques." *Antennas.* No. 10. 2006. 52-57. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Мищенко Віктор Олегович – доктор технічних наук, доцент, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Мищенко Виктор Олегович – доктор технических наук, доцент, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Mishchenko Viktor Olegovich – Doctor of Technical Sciences, Associate professor, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (057) 705-42-81; e-mail: mischenko@univer.kharkov.ua.

Паточкін Борис Вікторович – аспірант, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, м. Харків; тел.: (057) 705-42-81; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

Паточкин Борис Викторович – аспирант, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, г. Харьков; тел.: (057) 705-42-81; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

Patochkin Boris Viktorovich – postgraduate, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov; tel.: (057) 705-42-81; tel.: (050) 999-79-65; e-mail: equilibrium2702@gmail.com.

УДК 517.955.8

Е. А. НАБОКА

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПЛАСТИН БЕРГЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ВНУТРЕННИМ И ГРАНИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ЧАСТЬ 2

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично зашкеленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границ. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра γ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. В этой части работы описана структура верхнего предела аттрактора при $\gamma \rightarrow \infty$. Установлено, что он совпадает с множеством $\text{diag}(\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}})$ – диагональю прямого произведения двух экземпляров аттрактора системы, описывающей колебания одной пластины. Также при дополнительных условиях на функции демпфирования доказано, что и сам аттрактор системы двух связанных пластин совпадает с множеством $\text{diag}(\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}})$ для достаточно больших значений параметра γ .

Ключевые слова: модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

Обзор результатов части 1. Явления синхронизации различных составных механических, химических, биологических, социальных систем вызывают большой интерес в литературе (смотрите [1 – 13]).

В данной серии работ изучается синхронизация механической системы, состоящей из двух упруго связанных пластин с частично зашкеленной и частично свободной границей и нелинейными диссипационными силами, действующими как во внутренних частях пластин, так и на свободных участках их границ. Соответствующая математическая модель, известная в литературе как *модель Бергера* нелинейных колебаний пластины [14], имеет следующий вид:

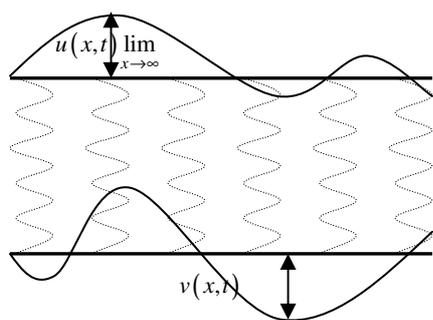


Рис. 1 – Система связанных пластин:
 $u(x,t), v(x,t)$ – вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя.

$$u = u(x,t), v = v(x,t), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \geq 0;$$

$$\begin{cases} u_{tt} + B(u_t) + \Delta^2 u + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \Delta u + \gamma(u - v) = p, \\ v_{tt} + B(v_t) + \Delta^2 v + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) \Delta v + \gamma(v - u) = p, \end{cases} \quad x \in \Omega, t > 0; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad u_t|_{t=0} = u^1, \quad v_t|_{t=0} = v^1; \quad (2)$$

$$u = \partial_\nu u = v = \partial_\nu v = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad (3)$$

$$\Delta u + (1 - \mu)\Sigma_1 u = 0, \quad \Delta v + (1 - \mu)\Sigma_1 v = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial_n \Delta u + (1 - \mu)\Sigma_2 u &= d(x)g(u_t) + \sigma u - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \partial_n u, \\ \partial_n \Delta v + (1 - \mu)\Sigma_2 v &= d(x)g(v_t) + \sigma v - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) \partial_n v, \end{aligned} \quad x \in \Gamma_1; \quad (5)$$

где Ω – плоская область, занимаемая пластинами в состоянии покоя; граница области $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Γ_0 – зашкеленная часть границы, Γ_1 – ее свободная часть; функции $u(x,t), v(x,t)$ описывают

вертикальные отклонения пластины относительно состояния покоя; операторы $B(z) = \tilde{d}(x)b(z)$ и $d(x)g(z)$ отвечают за механизм диссипации во внутренней части пластины и на ее границе; функция $p = p(x) \in L_2(\Omega)$ описывает поперечные нагрузки, приложенные к пластине; слагаемое $\gamma(u - v)$ учитывает связь пластин системы, причем коэффициент $\gamma \geq 0$ пропорционален интенсивности связи; граничные операторы Σ_i определены равенствами:

$$\Sigma_1 z = 2n_1 n_2 z_{x_1 x_2} - n_1^2 z_{x_2 x_2} - n_2^2 z_{x_1 x_1}, \quad \Sigma_2 z = \partial_\tau ((n_1^2 - n_2^2) z_{x_1 x_2} + n_1 n_2 (z_{x_2 x_2} - z_{x_1 x_1})),$$

где $n = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, а τ – единичный касательный вектор; константы β, μ, σ положительные, а константа Q принимает произвольное вещественное значение.

Предполагаем, что операторы внутреннего и внешнего демпфирования удовлетворяют следующим условиям:

Условия 1. (внутреннее демпфирование)

$$B(z) = \tilde{d}(x)b(z): \tilde{d}(x) \in L_\infty(\Omega); \tilde{d}(x) > 0, x \in \Omega; b(z) \in C^1(\mathbb{R}); b(0) = 0; b'(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R};$$

$$\exists m_1, M_1 > 0: m_1 \leq b'(z) \leq M_1(1 + zb(z)), |z| \geq 1;$$

Условия 2. (граничное демпфирование)

$$d(x) \in L_\infty(\Gamma_1), d(x) > 0, x \in \Gamma_1; g(z) \in C^1(\mathbb{R}); g(0) = 0; g'(z) \geq m_2 > 0, \forall z \in \mathbb{R};$$

$$\exists M_2 > 0: g'(z) \leq M_2(1 + zg(z)), |z| \geq 1.$$

Задача (1) – (5) порождает семейство динамических систем (H, S_t^γ) с фазовым пространством

$$H = [H_{\Gamma_0}^2(\Omega)]^2 \times [L_2(\Omega)]^2$$

и эволюционным оператором $S_t^\gamma: H \rightarrow H$, действующим по правилу

$$S_t^\gamma(u^0, v^0, u^1, v^1) = (u(x, t), v(x, t), u_t(x, t), v_t(x, t)),$$

где пара функций $u(x, t), v(x, t) \in C([0, T]; H_{\Gamma_0}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ – единственное слабое решение задачи (1) – (5) для начальных данных (u^0, v^0, u^1, v^1) .

Для любого $\gamma \geq 0$ динамическая система (H, S_t^γ) обладает компактным глобальным аттрактором \mathfrak{A}^γ . Аттрактор совпадает с неустойчивым многообразием $M_+(N^\gamma)$, исходящим из множества стационарных точек системы N^γ . Кроме того, семейство аттракторов $\{\mathfrak{A}^\gamma\}$ ограничено в пространстве H равномерно по параметру γ . Для траекторий системы из аттрактора справедливо следующее неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - v(t)\| \leq C/\gamma, \tag{6}$$

для некоторого $C \in (0; \infty)$ и $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \subset \mathfrak{A}^\gamma, \gamma > 0$.

Нас интересует предельное поведение аттрактора \mathfrak{A}^γ при $\gamma \rightarrow \infty$. Данное поведение описывается при помощи специальной структуры – верхнего предела аттрактора [15]. Напомним, что верхним пределом аттрактора \mathfrak{A}^γ при $\gamma \rightarrow \infty$ называется множество

$$\mathfrak{A}(\infty) = \bigcap_{N \geq N_0} \left[\bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H, \quad N_0 \geq 0,$$

где $[\cdot]_H$ означает замыкание множества по норме пространства H . В первой части нашей работы [16] доказано, что верхний предел аттрактора \mathfrak{A}^γ при $\gamma \rightarrow \infty$ лежит на диагонали фазового пространства системы H :

$$\mathfrak{A}(\infty) \subset \text{diag}H = \{(z^0, z^0, z^1, z^1): (z^0, z^1) \in H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)\}. \tag{8}$$

Соотношение (8) означает асимптотическую синхронизацию динамики системы (1) – (5) при $t \rightarrow \infty, \gamma \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\|u(t, \gamma) - v(t, \gamma)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)} + \|u_t(t, \gamma) - v_t(t, \gamma)\|_{L_2(\Omega)} \right) = 0.$$

Цель работы. В настоящей статье мы подробно опишем структуру множества $\mathfrak{A}(\infty)$, а также, при дополнительном предположении на функцию внутреннего демпфирования $b(z)$:

$$b'(z) \geq m_1 > 0, z \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

установим синхронизацию системы для конечных, но достаточно больших, значений параметра связи $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, мы покажем, что синхронизация динамики системы происходит с экспоненциальной

скоростью:

$$\|u(t) - v(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_t(t) - v_t(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C e^{-\delta(t-t_0)}, \quad (10)$$

при $t \geq t_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ для некоторых $C, \delta > 0$.

Вспомогательная задача. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, описывающую нелинейные колебания одной пластины с частично заземленной и частично свободной границей:

$$z_{tt} + B(z_t) + \Delta^2 z + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla z|^2 d\Omega \right) \Delta z = p, \quad x \in \Omega, t > 0; \quad (11)$$

$$z|_{t=0} = z^0, \quad z_t|_{t=0} = z^1; \quad (12)$$

$$z = \partial_\nu z = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad (13)$$

$$\Delta z + (1 - \mu) \Sigma_1 z = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad (14)$$

$$\partial_n \Delta z + (1 - \mu) \Sigma_2 z = d(x)g(z_t) + \sigma z - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla z|^2 d\Omega \right) \partial_n z, \quad x \in \Gamma_1. \quad (15)$$

Считаем, что операторы и константы в задаче (11) – (15) те же, что и в задаче (1) – (5), в частности, выполнены условия 1 на операторы внутреннего и внешнего демпфирования.

Задача (11) – (15) корректно разрешима в пространстве $\tilde{H} = H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, то есть имеет единственное слабое (в смысле определения 2 из [16]) решение $z(x, t) \in C([0, T]; H_{\Gamma_0}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ для любых начальных данных $(z^0, z^1) \in \tilde{H}$. Аналогично задаче (1) – (5) задача (11) – (15) порождает в пространстве \tilde{H} динамическую систему, обладающую компактным глобальным аттрактором $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Определим оператор $S_t : \text{diag}H \rightarrow \text{diag}H$ следующим образом:

$$S_t(z^0, z^0, z^1, z^1) = (z(x, t), z(x, t), z_t(x, t), z_t(x, t)), \quad \forall (z^0, z^0, z^1, z^1) \in \text{diag}H,$$

где $z(x, t)$ – слабое решение задачи (11) – (15) для начальных данных (z^0, z^1) . Отметим, что определенный таким образом оператор S_t совпадает с ограничением на пространство $\text{diag}H$ оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ :

$$S_t(z^0, z^0, z^1, z^1) = S_t^\gamma(z^0, z^0, z^1, z^1), \quad \forall (z^0, z^0, z^1, z^1) \in \text{diag}H, t \geq 0, \gamma \geq 0.$$

Рассмотрим динамическую систему $(\text{diag}H, S_t)$. Очевидно, эта динамическая система обладает компактным глобальным аттрактором

$$\mathfrak{A} = \text{diag}(\tilde{\mathfrak{A}} \times \tilde{\mathfrak{A}}) = \left\{ (z^0, z^0, z^1, z^1) : (z^0, z^1) \in \tilde{\mathfrak{A}} \right\}. \quad (16)$$

Аттрактор \mathfrak{A} является подмножеством аттрактора \mathfrak{A}^γ для любого неотрицательного γ , а именно имеет место равенство

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H, \quad \forall \gamma \geq 0. \quad (17)$$

Действительно, ввиду инвариантности множества $\mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H$ относительно оператора S_t^γ а, следовательно, на множестве $\text{diag}H$ операторы совпадают), и оператора S_t , используя свойство притяжения аттрактором траекторий из ограниченных множеств, имеем

$$0 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left\{ \text{dist}_H(S_t a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H \right\} = \sup \left\{ \text{dist}_H(a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H \right\}.$$

Последнее равенства в силу компактности множеств \mathfrak{A} и $\mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H$ означает включение $\mathfrak{A}^\gamma \cap \text{diag}H \subset \mathfrak{A}$. Из соотношения (17) следует, что множество \mathfrak{A} инвариантно относительно оператора S_t^γ . Используя эту инвариантность и повторяя рассуждения, приведенные выше, получим включение $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^\gamma$.

Основной результат.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 на операторы внутреннего и внешнего демпфирования задачи (1) – (5). Тогда

1. Верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ динамической системы (H, S_t^γ) , порождаемой задачей (1) – (5), совпадает с аттрактором \mathfrak{A} динамической системы $(\text{diag}H, S_t)$, определенным соотношением (16);

2. Если наряду с условиями 1 выполнено неравенство (9), то аттрактор \mathfrak{A}^γ динамической системы (H, S_t^γ) совпадает с аттрактором \mathfrak{A} для достаточно больших значений параметра γ .

Доказательство теоремы 1. Для того, чтобы доказать первое утверждение теоремы, нам потребуется установить некоторые свойства верхнего предела аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1. Тогда множество $\mathfrak{A}(\infty)$ компактно в пространстве H и инвариантно относительно оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ , то есть

$$S_t^\gamma \mathfrak{A}(\infty) = \mathfrak{A}(\infty), \quad \forall t \geq 0, \gamma \geq 0. \tag{18}$$

При доказательстве леммы 1 используются следующие утверждение.

Утверждение 1. Пусть выполнены условия 1.

Рассмотрим траектории $(u_i(t), v_i(t), u_{ii}(t), v_{ii}(t))$, $t \in [0, T]$ динамической системы (H, S_t^γ) для некоторого неотрицательного значения параметра γ . Пусть $R > 0$ такое, что

$$\|u_i(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|v_i(t)\|_{H_0^2(\Omega)}^2 + \|u_{ii}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_{ii}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R, \quad t \in [0, T], \forall i.$$

Тогда для разности $w_i(t) = u_i(t) - v_i(t)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|w_{ii}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_i(t), w_i(t)) + \sigma \|w_i(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + \gamma \|w_i(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq \varepsilon + \frac{C(R, \varepsilon)}{t-s} + C(R, t-s, \varepsilon) \sup_{\tau \in [s, t]} \|w_i(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \quad s < t, s, t \in [0, T], \forall i, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$a(y, z) = \int_{\Omega} \left(\mu \Delta y \Delta z + (1-\mu) (y_{x_1 x_1} z_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} z_{x_2 x_2}) + 2(1-\mu) y_{x_1 x_2} z_{x_1 x_2} \right) d\Omega,$$

константы $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $C(R, \varepsilon)$, $C(R, T, \varepsilon) > 0$ не зависят от γ .

Утверждение 2. Обозначим $w_{ij}(t)$ разность $w_{ij}(t) = (u_i(t) - u_j(t)) + (v_i(t) - v_j(t))$. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\|w_{ij}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_{ij}(t), w_{ij}(t)) + \sigma \|w_{ij}(t)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) \leq \tilde{\varepsilon} + \frac{C(R, \tilde{\varepsilon})}{t-s} + \\ & + C(R, t-s, \tilde{\varepsilon}) \left(\text{lot}(u_i - u_j) + \text{lot}(v_i - v_j) + \text{sot}(u_i - v_i) + \text{sot}(u_j - v_j) \right), \quad s < t, s, t \in [0, T], \forall i, j, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\text{lot}(z) = \sup_{\tau \in [s, t]} \|z(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \quad 0 < \delta < 1, \quad \text{sot}(z) = \sup_{\tau \in [s, t]} \left(\|z(\tau)\|_{H^2(\Omega)} + \|z_t(\tau)\|_{L_2(\Omega)} \right),$$

константы $\tilde{\varepsilon} > 0$, $C(R, \tilde{\varepsilon})$, $C(R, t-s, \tilde{\varepsilon}) > 0$ не зависят от γ .

Условия вида (19), (20) в литературе носят название *стабилизационных неравенств* и пришли в теорию динамических систем из теории управления (смотрите, напр., [17]). С разнообразными применениями стабилизационных неравенств для исследования бесконечномерных динамических систем можно познакомиться в работах [12, 13, 18 – 24].

Доказательство леммы 1.

Покажем, что множества $\Omega_N = \left[\bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H$ компактны для любого $N \geq N_0$. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует такая бесконечная последовательность точек $\{a_i\}_{i=1}^\infty$, $a_i = (a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4)$, что

$$\text{dist}_H(a_i, a_j) \geq 10\delta', \quad \delta' > 0, \quad i \neq j.$$

Не теряя общности, мы можем считать, что все точки последовательности принадлежат аттракторам \mathfrak{A}^{γ_i} для различных значений параметра γ , то есть

$$a_i \in \mathfrak{A}^{\gamma_i} : \gamma_i \neq \gamma_j, \text{ если } i \neq j, \quad \gamma_i \rightarrow \infty, \text{ если } i \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим последовательность полных траектории $(u^{\gamma_i}(t), v^{\gamma_i}(t), u_t^{\gamma_i}(t), v_t^{\gamma_i}(t))$, $t \in \mathbb{R}$ из аттракторов \mathfrak{A}^{γ_i} таких, что для некоторого $\tilde{T} > 0$, выбор которого мы обоснуем ниже, имеем

$$(u^{\gamma_i}(\tilde{T}), v^{\gamma_i}(\tilde{T}), u_i^{\gamma_i}(\tilde{T}), v_i^{\gamma_i}(\tilde{T})) = a_i.$$

Применим к рассматриваемой последовательности траекторий неравенства (19), (20).

Положим в неравенстве (20) $s = 0$, $t = \tilde{T}$, $\tilde{\varepsilon} = (\delta')^2 / 10$, выбирая \tilde{T} настолько большим, чтобы

$$C(R, \tilde{\varepsilon}) / \tilde{T} \leq (\delta')^2 / 10.$$

Функции $u^{\gamma_i}(t)$, $v^{\gamma_i}(t)$ ограничены в пространстве $H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$, а их производные $u_i^{\gamma_i}(t)$, $v_i^{\gamma_i}(t)$ – в пространстве $L_2(\Omega)$, равномерно по $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$. Следовательно, последовательности $\{u^{\gamma_i}(t)\}$, $\{v^{\gamma_i}(t)\}$ сходятся по норме пространства $C(-\tau, \tau; H^{1+\delta}(\Omega))$ при любых $0 < \delta < 1$. Поэтому можно выбрать такой номер $N_1 > 0$, что

$$C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}) \left(\text{lot}(u^{\gamma_i} - u^{\gamma_j}) + \text{lot}(v^{\gamma_i} - v^{\gamma_j}) \right) \leq (\delta')^2 / 10 \text{ при } i, j \geq N_1.$$

Используем (19), чтобы оценить слагаемые

$$\text{sot}(u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}) = \sup_{\tau \in [0, \tilde{T}]} \left(\|u^{\gamma_i}(\tau) - v^{\gamma_i}(\tau)\|_{H^2(\Omega)} + \|u_i^{\gamma_i}(\tau) - v_i^{\gamma_i}(\tau)\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

Пусть в (19) $\varepsilon = (\delta')^2 / (60 \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}))$, $s = 0$, $t = \tilde{T} + T_0$, где T_0 настолько большое, что

$$2 \cdot C(R, \varepsilon) \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}) / (\tilde{T} + T_0) = (\delta')^2 / 30.$$

Выберем номер N_2 таким, чтобы

$$2 \cdot C(R, \tilde{T} + T_0, \varepsilon) \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon}) \cdot \sup_{t \in [0, \tilde{T} + T_0]} \|u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq (\delta')^2 / 30 \text{ при } i \geq N_2.$$

Отметим, что такой выбор возможен ввиду (6). Переходя в обеих частях (19) к супремуму по $t \in [0, \tilde{T} + T_0]$, при данном выборе параметров имеем

$$\text{sot}(u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}) \leq \varepsilon + \frac{C(R, \varepsilon)}{\tilde{T} + T_0} + C(R, \tilde{T} + T_0, \varepsilon) \sup_{t \in [0, \tilde{T} + T_0]} \|u^{\gamma_i} - v^{\gamma_i}\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq \frac{\delta'}{10 \cdot C(R, \tilde{T}, \tilde{\varepsilon})}. \quad (21)$$

Используя полученные неравенства в (20), приходим к оценке

$$\|w_{ij}(\tilde{T})\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_{ij}(\tilde{T}), w_{ij}(\tilde{T})) + \sigma \|w_{ij}(\tilde{T})\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq (\delta')^2 / 4,$$

где $w_{ij} = (u^{\gamma_i} - u^{\gamma_j}) + (v^{\gamma_i} - v^{\gamma_j})$, $i, j \geq N_0 = \max\{N_1, N_2\}$, откуда

$$\|(a_i^1 - a_j^1) + (a_i^2 - a_j^2)\|_{H^2(\Omega)} + \|(a_i^3 - a_j^3) + (a_i^4 - a_j^4)\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta' / 2.$$

Из соотношения (21) также следует, что

$$\|u^{\gamma_i}(t) - v^{\gamma_i}(t)\|_{H^2(\Omega)} + \|u_i^{\gamma_i}(t) - v_i^{\gamma_i}(t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta' / 5, \quad t \in [0, \tilde{T} + T_0], i \geq N_0.$$

Оценить расстояния между точками a_i, a_j для достаточно больших номеров i, j ($i, j \geq N_0$):

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(a_i, a_j) &= \|a_i^1 - a_j^1\|_{H^2(\Omega)} + \|a_i^2 - a_j^2\|_{H^2(\Omega)} + \|a_i^3 - a_j^3\|_{L_2(\Omega)} + \|a_i^4 - a_j^4\|_{L_2(\Omega)} \leq \|(a_i^1 - a_j^1) + (a_i^2 - a_j^2)\|_{H^2(\Omega)} + \\ &+ \|a_i^1 - a_j^1\|_{H^2(\Omega)} + \|a_i^2 - a_j^2\|_{H^2(\Omega)} + \|(a_i^3 - a_j^3) + (a_i^4 - a_j^4)\|_{L_2(\Omega)} + \|a_i^3 + a_j^3\|_{L_2(\Omega)} + \|a_j^4 + a_i^4\|_{L_2(\Omega)} \leq \delta', \end{aligned}$$

что противоречит исходному предположению. Следовательно, множества Ω_N компактны для любого $N \geq N_0$, и верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ компактен в H как пересечение замкнутых компактных в H множеств.

Покажем теперь, что множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно оператора S_t^γ для любого неотрицательного значения параметра γ . Поскольку $\mathfrak{A}(\infty)$ лежит на диагонали пространства H , где операторы S_t^γ , $\gamma \geq 0$ совпадают с оператором S_t , нам достаточно установить, что множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно S_t .

Покажем сначала, что имеет место включение

$$S_t \mathfrak{A}(\infty) \subset \mathfrak{A}(\infty), \quad \forall t \geq 0. \quad (22)$$

Предположим, (22) не выполняется и существуют такие точка $a \in \mathfrak{A}(\infty)$ и $t_0 > 0$, что $S_{t_0} a \notin \mathfrak{A}(\infty)$. Точка a не может принадлежать аттрактору \mathfrak{A}^γ ни при каком значении параметра $\gamma \geq 0$, следовательно, она является предельной точкой некоторой последовательности $\{a^\gamma\}_{\gamma \rightarrow \infty}$, $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$. Так как аттракторы \mathfrak{A}^γ инвариантны от-

носителю соответствующего эволюционного оператора S_t^γ , имеем $S_{t_0}^\gamma a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$. По доказанному выше множество Ω_N компактно в H при некотором $N \geq N_0$, следовательно, последовательность $\{S_{t_0}^\gamma a^\gamma\} \subset \left[\bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H$ содержит сходящуюся подпоследовательность

$$\{S_{t_0}^{\gamma'} a^{\gamma'}\}_{\gamma' \geq N}, S_{t_0}^{\gamma'} a^{\gamma'} \rightarrow \tilde{a} \in \mathfrak{A}(\infty) \text{ при } \gamma' \rightarrow \infty.$$

Покажем, что $\tilde{a} = S_{t_0} a$. Рассуждение проведем методом от противного. Предположим, что $\tilde{a} \neq S_{t_0} a$, то есть

$$\text{dist}_H(\tilde{a}, S_{t_0} a) = \theta > 0. \tag{23}$$

Рассмотрим последовательность полных траекторий $(u^{\gamma'}(t), v^{\gamma'}(t), u_t^{\gamma'}(t), v_t^{\gamma'}(t)) \subset \mathfrak{A}^{\gamma'}$, $t \in \mathbb{R}$, таких, что $(u^{\gamma'}(T), v^{\gamma'}(T), u_t^{\gamma'}(T), v_t^{\gamma'}(T)) = a^{\gamma'}$ для некоторого $T > 0$, значение которого будет выбрано ниже, а также траекторию $(z(t), z(t), z_t(t), z_t(t)) \subset \text{diag}H$, $t \geq 0$, такую что $(z(T), z(T), z_t(T), z_t(T)) = a$. Данные траектории ограничены в пространстве H равномерно по t и $\gamma' \geq 0$:

$$\|u^{\gamma'}(t)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \|v^{\gamma'}(t)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)}^2 + \|u_t^{\gamma'}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_t^{\gamma'}(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq R, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \gamma' \geq 0.$$

Рассуждая как при доказательстве первого утверждения *теоремы 3* в [16], мы можем получить следующую оценку

$$E_w(t) \leq E_w(s) e^{C_1(R)(t-s)}, \quad 0 \leq s < t \tag{24}$$

для функционала

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \left(\|w_{1t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w_{2t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_1, w_1) + a(w_2, w_2) + \sigma \|w_1\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \sigma \|w_2\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + \frac{\gamma'}{2} \|u^{\gamma'} - v^{\gamma'}\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ w_1 = u^{\gamma'} - z, w_2 = v^{\gamma'} - z.$$

Положим теперь в (24) $s = T$, $t = t_0 + T$, выбирая T настолько большим, чтобы слагаемое $C(R, \varepsilon)/T$ при $\varepsilon = 0.1 \cdot \theta \exp(-C_1(R)t_0)$ в (19) не превосходило ε . Далее, ввиду (6), мы можем выбрать γ' такими, что компактный член $\sup_{\tau \in [T, t_0+T]} \|u^{\gamma'}(\tau) - v^{\gamma'}(\tau)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}^2$ в (19) не превосходит ε . Тогда из (19) при указанном выборе значений T и γ' получаем

$$\gamma' \|u^{\gamma'}(T) - v^{\gamma'}(T)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 0.3 \cdot \theta \exp(-C_1(R)t_0).$$

Далее, поскольку точка a – предельная точка последовательности $\{a^{\gamma'}\}$ при $\gamma' \rightarrow \infty$, мы можем выбрать γ' настолько большими, что сумма первых шести слагаемых $E_w(T)$ будут меньше ε . Тогда из (24) следует $E_w(t_0 + T) < \theta$, что противоречит (23). Полученное противоречие означает справедливость включения (22).

Обратное включение $S_t \mathfrak{A}(\infty) \supset \mathfrak{A}(\infty)$, $\forall t \geq 0$ доказывается аналогично.

Лемма 1 доказана полностью. Докажем теперь первое утверждение *теоремы 1*, а именно, установим равенство $\mathfrak{A}(\infty) = \mathfrak{A}$, где множество \mathfrak{A} определено соотношением (16).

Верхний предел аттрактора $\mathfrak{A}(\infty)$ – ограниченное множество в пространстве $\text{diag}H$ по норме пространства H , следовательно, притягивается к аттрактору \mathfrak{A} при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, множество $\mathfrak{A}(\infty)$ инвариантно относительно оператора S_t , и мы можем записать

$$0 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \text{dist}_H(S_t a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}(\infty) \} = \sup \{ \text{dist}_H(a, \mathfrak{A}), a \in \mathfrak{A}(\infty) \}.$$

Поскольку оба множества $\mathfrak{A}(\infty)$ и \mathfrak{A} компактны в H , последнее соотношение означает включение $\mathfrak{A}(\infty) \subset \mathfrak{A}$. Обратное включение также выполнено (смотрите (17)), следовательно, множества $\mathfrak{A}(\infty)$ и \mathfrak{A} совпадают.

Перейдем к доказательству второго утверждения *теоремы 1*. Оно следует из леммы.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 1 и неравенство (9). Тогда траектории динамической системы (H, S_t^γ) , исходящие из ограниченного в H множества \mathfrak{B} , сходятся равномерно к диагонали фазового пространства $\text{diag}H$, а именно, существуют такие положительные числа $\gamma_0 > 0$, $\delta > 0$, $t_0 = t_0(\mathfrak{B}) > 0$, что для любой траектории $S_t^\gamma(u^0, v^0, u^1, v^1) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$ с начальными данными (u^0, v^0, u^1, v^1) из \mathfrak{B} выполнено неравенство (10) при $t \geq t_0$, $\gamma \geq \gamma_0$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим функцию $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$, где $u(t), v(t)$ – слабое решение задачи (1) – (5). Очевидно, функция $w(x, t)$ является слабым решением следующей начально-краевой задачи:

$$w_t + (B(u_t) - B(v_t)) + \Delta^2 w + \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \Delta w + \beta \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^2 - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) d\Omega \Delta v + 2\gamma w = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (25)$$

$$w|_{t=0} = w^0 = u^0 - v^0, \quad w_t|_{t=0} = w^1 = u^1 - v^1, \quad w = \partial_\nu w = 0, \quad x \in \Gamma_0, \quad \Delta w + (1 - \mu)\Sigma_1 w = 0, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$\partial_\nu \Delta w + (1 - \mu)\Sigma_2 w = d(x)(g(u_t) - g(v_t)) + \sigma w - \left(Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \partial_\nu w - \beta \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) d\Omega \partial_\nu v, \quad x \in \Gamma_1.$$

Для функционала $V(t)$, определяемого соотношением:

$$V(t) = \frac{1}{2} \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(Q - \beta \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \eta \int_{\Omega} w_t w d\Omega, \quad \eta > 0,$$

докажем неравенство

$$\frac{d}{dt} V(t) + \delta V(t) \leq 0, \quad \delta > 0, \quad \text{при } t \geq t_0, \quad \gamma \geq \gamma_0. \quad (26)$$

Отметим сначала, что в силу интерполяционного неравенства:

$$\|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C_1 \varepsilon \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + C(\varepsilon) \|w\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

функционал $V(t)$ удовлетворяет следующим оценкам:

$$\frac{1}{4} \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \leq V(t) \leq \|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Поочередно умножая уравнение (25) на w_t и w и интегрируя полученные равенства по Ω , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left(Q - \beta \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ & \leq \eta_1 \left(\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + C(\mathfrak{B}, \eta_1) \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega - \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t w d\Omega \leq \|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 - \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \\ & + C_1 \left(\int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega + \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma \right) + C(\mathfrak{B}) \|w\|_{H^{1+\theta}(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

при некотором $\theta: 0 < \theta < 1$. В силу условий леммы 2, можем оценить нормы $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_1)$ функции w , используя операторы внутреннего и граничного демпфирования:

$$\|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \cdot \int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega, \quad \|w_t\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma.$$

Применяя интерполяционное неравенство, можем записать оценку для $H^{1+\theta}(\Omega)$ – нормы w :

$$\|w\|_{H^{1+\theta}(\Omega)}^2 \leq \eta_2 \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + C(\eta_2) \cdot \|w\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Полученные неравенства дают нам возможность записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} V(t) + \delta V(t) \leq -(\eta - \delta - \eta_2 C(\mathfrak{B}, \eta_1) + \eta \eta_2 C(\mathfrak{B})) \left(a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) - \\ & - (1 - \eta C_1 - \eta_1 C_2) \left(\int_{\Omega} (B(u_t) - B(v_t)) w_t d\Omega + \int_{\Gamma_1} d(x)(g(u_t) - g(v_t)) w_t d\Gamma \right) - ((\eta - \delta) 2\gamma - (1 + \eta) C(\mathfrak{B}, \eta_1, \eta_2)) \|w\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

откуда при $\delta, \eta, \eta_1, \eta_2 > 0$ достаточно малых и γ достаточно больших, следует (26).

Применяя лемму Гронуолла к (26), получаем (10).

Лемма 2 доказана, и мы можем переходить к завершению доказательства теоремы 1.

Из утверждения леммы 2 следует, что аттрактор \mathfrak{A}^γ лежит на диагонали фазового пространства при достаточно больших значениях параметра γ :

$$\mathfrak{A}^\gamma \subset \text{diag} H, \quad \gamma \geq \gamma_0 > 0,$$

что в силу (17) означает искомое равенство двух множеств:

$$\mathfrak{A}^\gamma = \mathfrak{A}, \quad \gamma \geq \gamma_0.$$

Выводы. Рассмотрена система связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Исследована зависимость структуры глобального аттрактора \mathcal{A}^γ системы от параметра γ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. Описана структура верхнего предела аттрактора $\mathcal{A}(\infty)$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Установлено явление асимптотической (при $t \rightarrow \infty$) синхронизации системы для конечных значений параметра связи γ при дополнительных условиях на функции задачи (1) – (4).

Список литературы: 1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 432 p. 2. *Strogatz S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. – New York: Hyperion Press, 2003. 338 p. 3. *Afraimovich V.S., Rodrigues H.M.* Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations // International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995). – N. J. World Scientific Publishing, River Edge, 1998. – 3 – 17. 4. *Rodrigues H.M.* Abstract methods for synchronization and applications // Appl. Anal. – 1996. – № 62. – 263 – 296. 5. *Caraballo T., Kloeden P.E.* The persistence of synchronization under environmental noise // Proc. Roy. Soc. London A. – 2005. – № 461. – 2257 – 2267. 6. *Kloeden P.E.* Synchronization of nonautonomous dynamical systems // Elect. J. Diff. Eqns. – 2003. Vol. 2003. No. 39. – 1 – 10. 7. *Carvalho A.N., Rodrigues H.M., Doltko T.* Upper semicontinuity of attractors and synchronization // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – № 220. – 13 – 41. 8. *Rekalo A.M., Chueshov I.D.* Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain // Sb. Math. – 2004. – № 195 – 97 – 119. 9. *Chueshov I.* Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems // Applicable Analysis. – 2007. – V. 86, № 3. – 269 – 286. 10. *Naboka O.* Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates // Nonlinear Analysis – 2007. – № 67. – 1015 – 1026. 11. *Naboka O.* Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – № 341. – 1107 – 1124. 12. *Naboka O.* On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping // СРАА – 2009. – Vol. 8, № 6 – 1933 – 1956. 13. *Naboka O.* On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains // Nonlinear Analysis. – 2009. – № 71. – 6299 – 6311. 14. *Berger M.* A new approach to the large deflection of plate // J. Appl. Mech. – 1955. – № 22. – 465 – 472. 15. *Kapitansky L.V., Kostin I.N.* Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations // Leningrad Math. J. – 1991. – № 2. – 97 – 117. 16. *Набока Е.А.* Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1 // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – № 18 (1127). – 2015. – С. 98 – 108. 17. *Lasićka I., Triggiani R.* Control theory of partial differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press. 2000. Print. 18. *Bucci F., Chueshov I., Lasićka I.* Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate equation // Communications on Pure and Applied Analysis. – 2007. – № 6. – 113 – 140. 19. *Chueshov I., Lasićka I.* Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping // Memoirs AMS. – 2008. – Vol. 195, № 912. – 1 – 183. 20. *Chueshov I., Lasićka I.* Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation // J. Diff. Eq. – 2004. – № 198. – 196 – 231. 21. *Chueshov I., Lasićka I.* Attractors of second order evolution equations with a nonlinear damping // J. Diff. Eq. – 2004. – № 16. – 469 – 512. 22. *Chueshov I., Lasićka I.* Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping // J. of Diff. Eq. – 2007. – № 233. – 42 – 86. 23. *Chueshov I., Lasićka I.* Long time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior-boundary damping and source of critical exponents // AMS Contemporary Mathematics. – 2007. – № 426. – 153 – 193. 24. *Chueshov I., Lasićka I.* Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics. – Springer, 2010. 766 p.

Bibliography (transliterated): 1. *Pikovsky, A., M. Rosenblum and J. Kurths.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, 2001. Print. 2. *Strogatz, S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. New York: Hyperion Press, 2003. Print. 3. *Afraimovich, V. S., and H. M. Rodrigues.* "Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations." *International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995)*. World Scientific Publishing, River Edge, N. J. 1998. 3–17. Print. 4. *Rodrigues, H. M.* "Abstract methods for synchronization and applications." *Appl. Anal.* No. 62. 1996. 263–296. Print. 5. *Caraballo, T., and P. E. Kloeden.* "The persistence of synchronization under environmental noise." *Proc. Roy. Soc. London A.* No. 461. 2005. 2257–2267. Print. 6. *Kloeden, P. E.* "Synchronization of nonautonomous dynamical systems." *Elect. J. Diff. Eqns.* Vol. 2003. No. 39. 2003. 1–10. Print. 7. *Carvalho, A. N., H. M. Rodrigues and T. Doltko.* "Upper semicontinuity of attractors and synchronization." *J. Math. Anal. Appl.* No. 220. 1998. 13–41. Print. 8. *Rekalo, A. M., and I. D. Chueshov.* "Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain." *Sb. Math.* No. 195. 2004. 97–119. Print. 9. *Chueshov, I.* "Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems" *Applicable Analysis*. Vol. 86. No. 3. 2007. 269–286. Print. 10. *Naboka, O.* "Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates." *Nonlinear Analysis*. No. 67. 2007. 1015–1026. Print. 11. *Naboka, O.* "Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates." *J. Math. Anal. Appl.* No. 341. 2008. 1107–1124. Print. 12. *Naboka, O.* "On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping." *СРАА*. Vol. 8. No. 6. 2009. 1933–1956. Print. 13. *Naboka, O.* "On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains." *Nonlinear Analysis*. No. 71. 2009. 6299–6311. Print. 14. *Berger, M.* "A new approach to the large deflection of plate." *J. Appl. Mech.* No. 22. 1955. 465–472. Print. 15. *Kapitansky, L. V., and I. N. Kostin.* "Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations." *Leningrad Math. J.* No. 2. 1991. 97–117. Print. 16. *Naboka, E. A.* "Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1." *Вісник НТУ «ХПІ»*. Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях. No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 98–108. Print. 17. *Lasićka, I., and R. Triggiani.* *Control theory of partial differential equations*. Cambridge University Press. 2000. Print. 18. *Bucci, F., I. Chueshov and I. Lasićka.* "Global attractor for a composite system of nonlinear wave and plate equation." *Communications on Pure and Applied Analysis*. No. 6. 2007. 113–140. Print. 19. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping." *Memoirs AMS*. Vol. 195. No. 912. 2008. 1–183. Print. 20. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Global attractors for von Karman evolutions with a nonlinear boundary dissipation." *J. Diff. Eq.* No. 198. 2004. 196–231. Print. 21. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Attractors of second order evolution equations with a nonlinear damping." *J. Diff. Eq.* No. 16. 2004. 469–512. Print. 22. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping." *J. of Diff. Eq.* No. 233. 2007. 42–86. Print. 23. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* "Long time dynamics of semilinear wave equation with nonlinear interior-boundary damping and source of critical exponents." *AMS Contemporary Mathematics*. No. 426. 2007. 153–193. Print. 24. *Chueshov, I., and I. Lasićka.* *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics*. Springer, 2010. Print.

Поступила (received) 08.09.2015

Набока Олена Олексіївна – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

Набока Елена Алексеевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

Naboka Helena Alekseevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Lecturer, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»; tel.: (057) 707-60-87; e-mail: lena.a.naboka@rambler.ru.

О. М. НАЗАРЕНКО

ДИФРАКЦІЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ НА ПЕРІОДИЧНІЙ СИСТЕМІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОРОЖНИН

Розглядається задача про взаємодію плоскої подовжньої або поперечної гармонічної хвилі на періодичній системі циліндричних порожнин. Будуються інтегральні зображення амплітуд переміщень відбитого поля, і задача зводиться до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів проводиться методом механічних квадратур. Приведені залежності напружень на границі порожнин від динамічних, механічних та геометричних характеристик.

Ключові слова: дифракція, порожнина, функція Гріна, інтегральне рівняння, метод механічних квадратур.

Вступ. Проблема концентрації динамічних напружень поблизу циліндричних порожнин у пружному середовищі при взаємодії з ними гармонічних хвиль є актуальною. В [1] методом інтегральних рівнянь розглядається дифракція хвилі зсуву на циліндричних неоднорідностях у півпросторі. В [2, 3] цей метод застосований для розв'язання плоскої задачі про взаємодію пружних хвиль з циліндричною порожниною. В [4, 5] за допомогою методів R -функцій та розкладання в ряд Фур'є відповідно досліджуються задачі дифракції подовжніх та поперечних хвиль на декількох порожнинах. Періодичні задачі про взаємодію плоских хвиль на кругових циліндричних неоднорідностях вивчаються в [6]. У випадку циліндрів довільного поперечного перерізу ефективно працює метод інтегральних рівнянь. В [7, 8] цим методом розглянута дифракція пружних хвиль на періодичній системі нерухомих та жорстких включень відповідно. У даній роботі метод інтегральних рівнянь поширюється на плоскі динамічні задачі для періодичної системи порожнин довільного поперечного перерізу.

Постановка задачі. Розглянемо в необмеженому ізотропному середовищі $2d$ – періодичну уздовж осі Ox_1 систему циліндричних порожнин, поперечні перерізи яких у площині Ox_1x_2 обмежені замкнутими контурами $L_j = L(\text{mod } 2d)$ типу Лянуова. В якості зовнішнього впливу будемо розглядати падаючу з нескінченності монохроматичну хвилю розширення-стиску (P – хвилю)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1 x_2}, \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1)$$

або поперечну хвилю (SV – хвилю)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2 x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

Тут c_1 і c_2 – швидкості подовжньої та поперечної хвиль; ω – частота коливань; λ і μ – коефіцієнти Ламе; ν – коефіцієнт Пуассона; ρ – щільність середовища, залежність від часу t виражається множителем $e^{-i\omega t}$ ($i^2 = -1$).

В результаті взаємодії падаючої хвилі з системою циліндрів утворюються відбиті подовжні та поперечні хвилі. Сумарні амплітуди хвильових полів переміщень і напружень задамо у вигляді

$$U_k = U_k^{(1)} + U_k^{(0)}, \tau_{mn} = \tau_{mn}^{(1)} + \tau_{mn}^{(0)} \quad (k, m, n = 1, 2), \quad (3)$$

де $U_k^{(0)}$, $\tau_{mn}^{(0)}$ і $U_k^{(1)}$, $\tau_{mn}^{(1)}$ – амплітуди компонентів вектора переміщень, тензора напружень падаючого і відбитого полів, відповідно.

У випадку гармонічних хвильових коливань пружного тіла амплітуди переміщень U_k і напружень τ_{mn} задовольняють співвідношенням (δ_{mn} – символ Кронекера, $m, n, k = 1, 2$):

$$L_{mk} U_k = 0, \tau_{mn} = \lambda \delta_{mn} (U_{1,1} + U_{2,2} + \mu (U_{m,n} + U_{n,m})), L_{12} = L_{21} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (4)$$

$$L_{11} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho \omega^2, L_{22} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \rho \omega^2.$$

Граничні умови на контурі L порожнини будемо задавати у вигляді

$$(S_1 + iS_2)|_L = 0, (S_1 - iS_2)|_L = 0, \quad (5)$$

де S_1 і S_2 – амплітуди тангенціальної і нормальної компонент вектора напруження на контурі L , які у довільній точці $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ виражаються через компоненти тензора амплітуд напружень за допомогою формул:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12}) e^{-i\varphi_0}; \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12}) e^{i\varphi_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут φ_0 – кут між віссю Ox_1 та дотичною до L у точці $\zeta_0 \in L$.

Отже, задача полягає в розв’язанні рівняння руху (4) при виконанні умов випромінювання на нескінченності (відбиті хвилі $U_k^{(1)}$ повинні бути розбіжними) і граничних умов на контурі циліндричної порожнини L (5). На границі порожнини нас буде цікавити розподіл напруження $\tau_s = \tau_{11} + \tau_{22}$.

Метод розв’язання задачі. Амплітуди переміщень $U_k^{(1)}$ відбитого поля будемо шукати у такому вигляді, щоб вони автоматично задовольняли рівнянням руху (4) та забезпечували виконання умов випромінювання на нескінченності. Слідуючи [7], покладемо (підсумовування по $n = 1, 2$)

$$U_k^{(1)}(M) = \int_L V_n^{(k)}(M, P) p_n(s) ds, \quad \tau_{mk}^{(1)} = \int_L \sigma_{mk}^{(n)}(M, P) p_n(s) ds, \quad k, m = 1, 2, \quad (7)$$

де $p_n(s)$ – невідомі функції; $V_n^{(k)}$ – компоненти матриці Гріна, що представляють собою амплітуди переміщень в точці M при дії періодичної системи гармонічних сил, зосереджених в точках $\zeta_j = \xi + 2jd + i\eta \in L_j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) і направлених вздовж осі Ox_1 ($k = 1$) або вздовж осі Ox_2 ($k = 2$).

Амплітуди переміщень $V_n^{(k)}$ та відповідних компонент тензора напружень $\sigma_{mn}^{(k)}$ визначались зі співвідношень ($\delta(x_1, x_2)$ – функція Дірака)

$$V_n^{(k)} = (-1)^{n+k} L_{nk} G, \quad \sigma_{mn}^{(k)} = \lambda \delta_{mn} (V_{1,1}^{(k)} + V_{2,2}^{(k)}) + \mu (V_{m,n}^{(k)} + V_{n,m}^{(k)}), \quad (8)$$

$$(\Delta + \gamma_1^2)(\Delta + \gamma_2^2)G = F, \quad F = -c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x_1 - \xi + 2jd, \quad x_2 - \eta), \quad c = \frac{1}{\mu(\lambda + 2\mu)},$$

$$G(M, P) = \frac{c}{2d(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\beta_1|x_2 - \eta|}}{\beta_1} - \frac{e^{-\beta_2|x_2 - \eta|}}{\beta_2} \right) \frac{\cos \alpha_j(x_1 - \xi)}{1 + \delta_{j0}},$$

$$\alpha_j = \frac{\pi j}{d}, \quad \beta_m = \sqrt{\alpha_j^2 - \gamma_m^2}, \quad \alpha_j > \gamma_m; \quad \beta_m = -i\sqrt{\gamma_m^2 - \alpha_j^2}, \quad \alpha_j < \gamma_m.$$

При вказаному тут виборі знаків для β_m поле відбитих хвиль має розбіжний характер, що відповідає умові випромінювання на нескінченності.

Аналіз виразів для компонент матриці Гріна $V_n^{(k)}$ показує, що функції $V_n^{(n)}$ мають логарифмічну особливість, яка для побудови ефективного чисельного алгоритму виділялась в явному вигляді. Для цього фундаментальний розв’язок G (8) подавався у вигляді $G = G_0 + (G - G_0)$, де G_0 – періодичний фундаментальний розв’язок бігармонійного рівняння $\Delta^2 G_0 = F$, що відповідає статичній задачі ($\omega = 0$).

Залишається виконати крайові умови на контурі порожнини (5). Задовольняючи їх, приходимо до системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду (риска над змінною означає спряженість, тобто якщо $z = x_1 + ix_2$, то $\bar{z} = x_1 - ix_2$):

$$-\frac{1}{2} f_n(s_0) + \int_L (f_1(s) E_{n1}(s, s_0) + (f_2(s) E_{n2}(s, s_0) ds = N_n(s_0), \quad (9)$$

$$f_1 = p_1 + ip_2, \quad f_2 = p_1 - ip_2, \quad E_{mn} = \frac{(-1)^m i}{8d(1-\nu)} \left(L_{mn} + \sum_{j=0}^{\infty} M_{mn} \right), \quad m, n = 1, 2;$$

$$L_{11} = \frac{1}{2} \left(\chi \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta})}{2d} e^{-i\varphi_0} - \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} e^{i\varphi_0} \right), \quad L_{22} = \bar{L}_{11};$$

$$L_{21} = i \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d} \sin \varphi_0 + \frac{\pi}{2id} \frac{\eta_0 - \eta}{\sin^2 \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2d}} e^{i\varphi_0}, \quad L_{12} = \bar{L}_{21}, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L;$$

$$M_{mm} = t_n r_n + \left(\frac{\alpha_j}{\beta_1} d_1 + \frac{\alpha_j}{\beta_2} d_2 \right) \sin \alpha_j (\zeta_0 - \zeta) - (-1)^n h_0 i (d_1 + d_2) \cos \alpha_j (\zeta_0 - \zeta) - k_n;$$

$$M_{nm} = t_n r_m + \left(\frac{\alpha_j}{\beta_1} a_1 - \frac{\alpha_j}{\beta_2} a_2 \right) \sin \alpha_j (\zeta_0 - \zeta) - (-1)^m h_0 i (b_1 - b_2) \cos \alpha_j (\zeta_0 - \zeta) + q_m, \quad m \neq n;$$

$$t_n = \left(-\frac{\alpha_j}{\beta_1} \sin \alpha_j (\zeta_0 - \zeta) - (-1)^n h_0 i \cos \alpha_j (\zeta_0 - \zeta) \right) e^{-\beta_1 |\eta_0 - \eta|}, \quad r_1 = e^{2i\varphi_0}, \quad r_2 = \bar{r}_1;$$

$$k_1 = h_0 i \left(\chi e^{-h_0 i \alpha_j (\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta})} + e^{h_0 i \alpha_j (\zeta_0 - \zeta)} e^{2i\varphi_0} \right) \frac{e^{-i\varphi_0}}{1 + \delta_{j0}}, \quad k_2 = \bar{k}_1;$$

$$q_1 = h_0 i e^{-h_0 i \alpha_j (\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta})} \left(\alpha_j |\eta_0 - \eta| + e^{2i\varphi_0} - 1 \right) \frac{e^{-i\varphi_0}}{1 + \delta_{j0}}, \quad q_2 = \bar{q}_1, \quad h_0 = \text{sign}(\eta_0 - \eta);$$

$$a_n = \frac{4\beta_n^2 + \gamma_n^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} e^{-\beta_n |\eta_0 - \eta|}, \quad b_n = \frac{4\alpha_n^2 + \gamma_n^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} e^{-\beta_n |\eta_0 - \eta|}, \quad d_n = \frac{\gamma_n^2}{\gamma_2^2 - \gamma_1^2} e^{-\beta_n |\eta_0 - \eta|};$$

$$N_n = \frac{\mu \gamma_1 \tau_1}{0,5 - \nu} e^{-i\gamma_1 \eta_0} [(-1)^{n+1} (1 - \nu) \cos \varphi_0 + i \nu \sin \varphi_0] \text{ у випадку } P\text{-хвилі};$$

$$N_n = i \mu \gamma_2 \tau_2 e^{-i\gamma_2 \eta_0} e^{(-)^n \varphi_0} \text{ у випадку } SV\text{-хвилі}.$$

Тут ядра E_{11} та E_{22} – сингулярні, а ядра E_{12} та E_{21} – неперервні.

Результати чисельних досліджень. При чисельній реалізації використовувався метод механічних квадратур [9]. В якості прикладу розглядалося середовище, що містить періодичну систему циліндричних порожнин еліптичного поперечного перерізу

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \tag{10}$$

На контурі L порожнини проводилось обчислення безрозмірних значень амплітуд напружень $\sigma_s = \tau_s / P$, де P – максимальне значення напруження в падаючій хвилі, що дорівнює $\gamma_1 \tau_1 (\lambda + 2\mu)$ у випадку випромінювання P -хвилі (1) та $\gamma_2 \tau_2 \mu$ – у випадку випромінювання SV -хвилі (2).

На рис. 1 і рис. 2 зображено розподіл напруження σ_s на контурі еліптичної порожнини у випадку P -хвилі (а) та SV -хвилі (б). Криві 1, 2 і 3 приведені для $\nu = 0,3$; $\gamma_1 d = 1,0$ і відповідають значенням $a/d = 0,3$; $0,5$; і $0,7$ при $b/a = 0,5$ на рис. 1 та значенням $b/a = 0,5$; $2,0$; і $5,0$ при $a/d = 0,5$ на рис. 2.

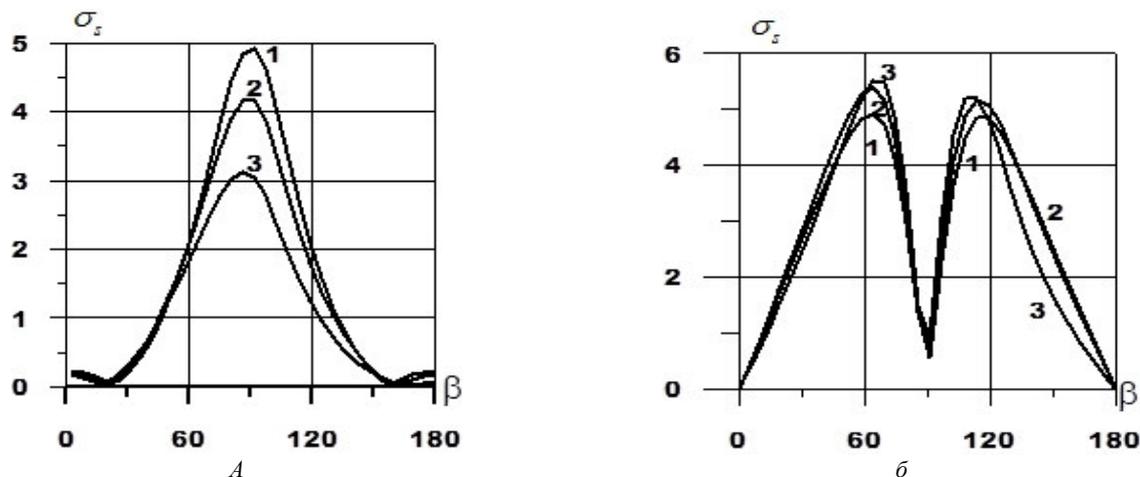


Рис. 1 – Розподіл напружень на контурі еліптичної порожнини для різних значень a/d у випадку: а – P -хвилі; б – SV -хвилі.

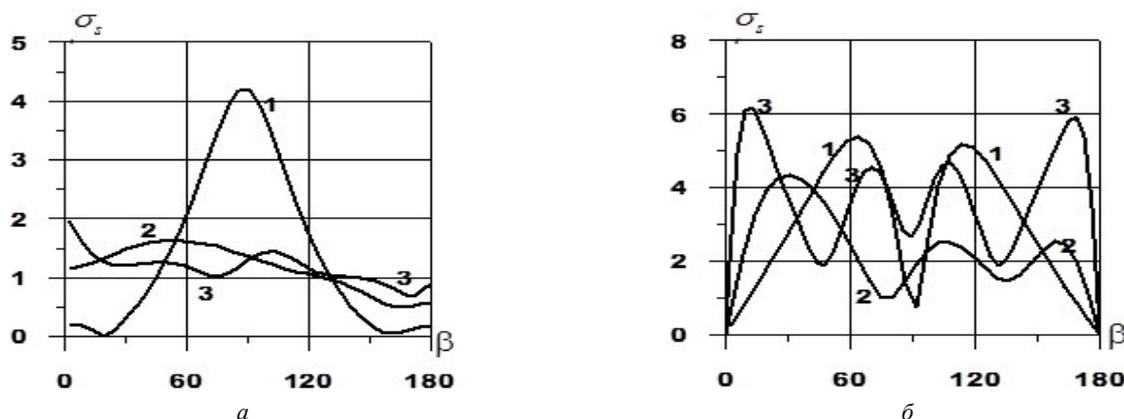


Рис. 2 – Розподіл напружень на контурі еліптичної порожнини для різних значень b/a у випадку: а – P -хвилі; б – SV -хвилі.

Аналіз отриманих результатів свідчить, що розподіли контурних напружень у P - і SV - випадках принципово відрізняються один від одного. Так, при $b/a < 1$ поблизу точки зісковзування $\beta = 90^\circ$ напруження σ_s має максимум при випромінюванні P -хвилі та локальний мінімум у випадку SV -хвилі. Зі зростанням параметра b/a ($b/a > 1$) характер розподілу σ_s ускладнюється, причому кількість точок максимуму та мінімуму збільшується. У SV -випадку напруження σ_s у лобовій ($\beta = 180^\circ$) та тіньовій ($\beta = 0^\circ$) точках дорівнюють нулю.

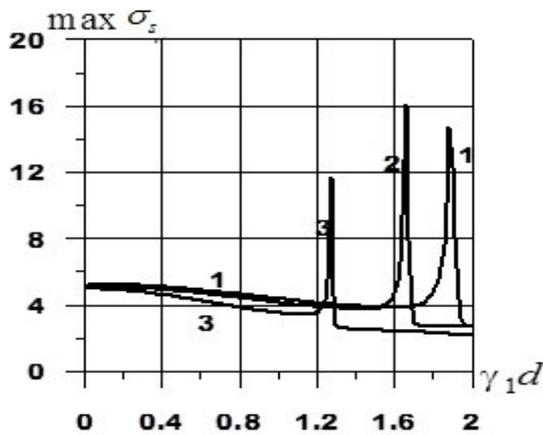


Рис. 3 – Залежність максимальних напружень від $\gamma_1 d$ у випадку P -хвилі.

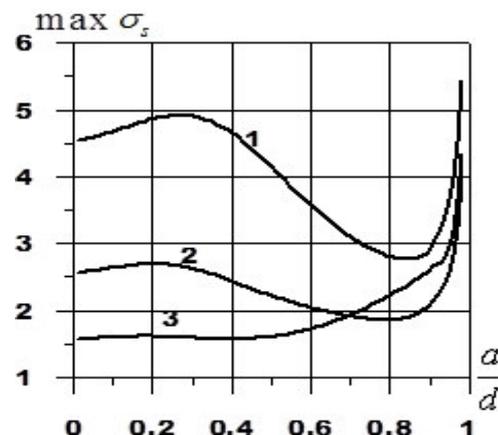


Рис. 4 – Залежність максимальних напружень від a/d у випадку P -хвилі.

На рис. 3 і 4 приведені залежності максимальних контурних напружень від параметрів $\gamma_1 d$ і a/d відповідно при набіганні на порожнини P -хвилі. Криві 1, 2 і 3 відповідають значенням $\nu = 0,2; 0,3$ і $0,4$ при $a/d = 0,5$; $b/a = 0,5$ на рис. 3 та значенням $b/a = 0,5; 1,0$ і $2,0$ при $\nu = 0,3$; $\gamma_1 d = 1,0$ на рис. 4. Різке зростання напруження σ_s на рис. 3 спостерігається поблизу так званих *точок ковзання* [6], що відповідають значенням $\gamma_1 d = \pi k$, $k = 1, 2, \dots$. Аналіз кривих, зображених на рис. 4, свідчить, що із зменшенням параметру b/a максимальні значення напруження на контурі еліптичної порожнини (10) збільшуються; особливо це відчутно при віддаленні порожнин одна від одної.

Відмітимо, що також обчислювались напруження у випадку періодичної системи кругових порожнин та порівнювались з приведеними в [7]. Крім того, здійснювався граничний перехід до одиночної порожнини ($a/d \rightarrow 0$) і результати порівнювались з наведеними в [3]. Ідентичність графіків напружень свідчить про достовірність побудованого алгоритму.

Висновки. У даній статті запропоновано підхід до розв'язання задач дифракції пружних гармонічних хвиль на періодичній системі циліндричних порожнин в умовах плоскої деформації. Будуються інтегральні зображення амплітуд переміщень відбитого поля, які автоматично задовольняють рівнянням руху і умовам випромінювання на нескінченності. Крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які реалізуються чисельно методом механічних квадратур. Приводяться залежності напружень на контурах еліптичних порожнин в залежності від механічних, геометричних та динамічних характеристик.

Список літератури: 1. Назаренко А.М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Пробл. прочности. – 1990. – №11. – С. 90 – 94. 2. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 – 127. 3. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Взаимодействие упругих волн с цилиндрической полостью в условиях плоской деформации // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – 2005. – № 47. – С. 112 – 117. 4. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Сизова Н.Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика. – 1996. – 349, № 2. – С. 175 – 179. 5. Гузь А.Н. О концентрации напряжений около нескольких отверстий в элементах конструкций. // Прикл. механика. – 1994. – 30, № 4. – С. 6 – 13. 6. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с. 7. Назаренко А.М., Ложкин А.М. Взаимодействие плоских гармонических волн с периодической системой неподвижных цилиндрических включений в условиях плоской деформации // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – 2005. – №20. – С. 129 – 134. 8. Назаренко А.М., Ложкин А.М. Дифракция плоских гармонических волн на периодической системе жестких цилиндров // Межвед. научный сборник «Динамические системы». – 2006. – № 2. – С. 81 – 88. 9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.

Bibliography (transliterated): 1. Nazarenko, A. M. "Difrakcija voln sdviga na cilindricheskikh vkljuchenijah i polostjah v uprugom poluprostranstve." *Probl. prochnosti*. No. 11. 1990. 90–94. Print. 2. Fil'shtinskij, L. A. "Difrakcija uprugih voln na treshhinah, otverstijah, vkljuchenijah v izotropnoj srede." *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. No. 4. 1991. 119–127. Print. 3. Nazarenko, A. M., B. E. Panchenko and A. M. Lozhkin.

"Vzaimodejstvie uprugih voln s cilindricheskoj polostju v uslovijah ploskoj deformacii." *Visnyk NTU «KhPI». Tematychnyj vypusk: Dynamika i micnist' mashyn.* No. 47. 2005. 112–117. Print. **4.** Guljaev, Yu. V., et al. "Issledovanie difrakcii uprugih voln na plastinah, oslablennyh dvumja otverstijami proizvol'noj formy." *DAN. Matematicheskaja fizika.* Vol. 349. No. 2. 1996. 175–179. Print. **5.** Guz', A. N. "O koncentracii naprjazhenij okolo neskol'kih otverstij v elementah konstrukcii." *Prikl. mehanika.* Vol. 30. No. 4. 1994. 6–13. Print. **6.** Guz', A. N., V. D. Kubenko and M. A. Cherevko. *Difrakcija uprugih voln.* Kiev: Nauk. dumka, 1978. Print. **7.** Nazarenko, A. M., and A. M. Lozhkin. "Vzaimodejstvie ploskih garmonicheskikh voln s periodicheskoj sistemoj nepodviznyh cilindricheskikh vkljuchenij v uslovijah ploskoj deformacii." *Visnyk NTU «KhPI». Tematychnyj vypusk: Dynamika i micnist' mashyn.* No. 20. 2005. 129–134. Print. **8.** Nazarenko, A. M., and A. M. Lozhkin. "Difrakcija ploskih garmonicheskikh voln na periodicheskoj sisteme zhestkikh cilindrov." *Mezhved. nauchnyj sbornik «Dinamicheskie sistemy».* No. 2. 2006. 81–88. Print. **9.** Panasjuk, V. V., M. P. Savruk and Z. T. Nazarchuk. *Metod singularnyh integral'nyh uravnenij v dvumernyh zadachah difrakcii.* Kiev: Nauk. dumka, 1984. Print.

Надійшла (received) 03.09.2015

Назаренко Олександр Максимович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Сумський державний університет, м. Суми; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

Назаренко Александр Максимович – кандидат физико-математических наук, доцент, Сумской государственной университет, г. Сумы; тел.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

Nazarenko Aleksandr Maksimovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Sumy State University, Sumy; tel.: (066) 921-55-34; e-mail: aleksandr-nazarenko54@mail.ru.

УДК 621.923

Ф. В. НОВИКОВ, О. С. КЛЁНОВ, И. В. ГЕРШИКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА ПРИ ШЛИФОВАНИИ

Предложено новое теоретическое решение по определению температуры резания и глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании с учетом перерезания шлифовальным кругом адиабатических стержней, набором которых условно представлен снимаемый припуск. Показано, что с течением времени обработки температура резания непрерывно увеличивается, асимптотически приближаясь к определенному значению, а глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании принимает конечное значение.

Ключевые слова: шлифование, тепловой процесс, температура резания, адиабатический стержень, время.

Введение. Шлифование является наиболее эффективным методом финишной обработки деталей машин, обеспечивающим высокое качество и точность обрабатываемых поверхностей. Однако, в связи с наличием неблагоприятных отрицательных передних углов режущих зерен и интенсивного трения связки круга с обрабатываемым материалом возможно увеличение силовой напряженности процесса шлифования, что приводит к появлению на обрабатываемых поверхностях различных температурных дефектов (прижогов, микротрещин, микро- и макрос колов, и так далее). Это снижает качество обработки и приводит к потерям от брака изготавливаемых деталей. Чтобы повысить режущую способность шлифовального круга и исключить появление температурных дефектов, применяют разнообразные методы правки круга, технологические среды, прерывистые и импрегнированные круги, и так далее. Вместе с тем, это не позволяет в полной мере решить проблему качества обработки в связи с высокой теплонапряженностью процесса шлифования. Поэтому актуально проведение теоретического анализа условий уменьшения температуры резания при шлифовании на основе новых теоретических подходов.

Анализ последних исследований. Вопросам теплофизики процесса шлифования посвящены многочисленные работы профессоров Маслова Е.Н., Яцерицына П.И., Резникова А.Н., Корчака С.Н., Худобина Л.В., Якова А.В., Сипайлова В.А., Островского В.И., Сагарды А.А., Силина С.С., Евсеева Д.Г., Филимонова Л.Н., Усова А.В. и других ученых. Так, в работах [1 – 3] решение задачи определения температуры резания при шлифовании базируется на решении дифференциального уравнения теплопроводности. Однако, в силу сложности его решения не установлена истинная глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании – в приведенных решениях она принимает бесконечное значение. Это ограничивает возможности обоснованного выбора оптимальных условий обработки и требует установления глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании и максимальной температуры резания.

Постановка задачи. В работе [4] предложена схема расчета температуры резания при шлифовании, согласно которой снимаемый припуск представлен пакетом бесконечно тонких адиабатических стержней, расположенных перпендикулярно направлению движения шлифовального круга (рис. 1). Шлифовальный круг в результате перемещения со скоростью $V_{\text{дем}}$ некоторое время контактирует с торцом адиабатического стержня, вызывая его нагрев. Принимается, что образующееся в процессе шлифования тепло распространяется лишь вдоль прямолинейного адиабатического стержня. При этом перерезание стержня длиной, равной глубине шлифования, не рассматривается, то есть процесс нагрева стержня происходит в результате трения шлифовального круга с

© Ф. В. Новиков, О. С. Клёнов, И. В. Гершиков, 2015

торцевой поверхностью стержня. Очевидно, это существенно упрощает расчет температуры резания при шлифовании, что может привести к значительному расхождению расчетных и экспериментальных данных. В связи с этим важно оценить достоверность применяемых подходов к расчету температуры резания при шлифовании, не учитывающих перерезание адиабатических стержней, которыми условно представлен снимаемый припуск, в процессе шлифования. В работах [5, 6] предложены подходы к аналитическому расчету температуры резания при шлифовании с учетом перерезания адиабатических стержней шлифовальным кругом. Чтобы уточнить полученные решения, в настоящей работе поставлена задача численного расчета температуры резания при шлифовании с учетом перерезания адиабатических стержней шлифовальным кругом.

Математическая модель. В основу расчета положена аналитическая зависимость для определения глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании, то есть глубины проникновения тепла в рассматриваемый адиабатический стержень (рис. 1) [5]:

$$l_2 = \sqrt{2 \cdot \lambda \cdot \tau / (c \cdot \rho)}, \tag{1}$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала обрабатываемой детали, Вт/м·К; c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ – плотность материала обрабатываемой детали, кг/м³; τ – время контакта шлифовального круга с адиабатическим стержнем, с; $V_{кр}$, $V_{дет}$ – скорости круга и детали, м/с; t – глубина шлифования, м.

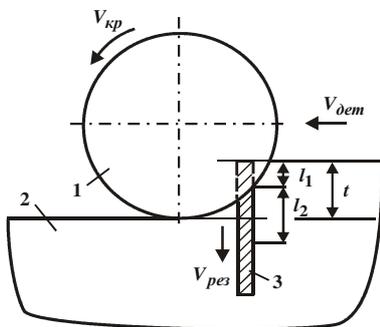


Рис. 1 – Расчетная схема параметров теплового процесса при плоском шлифовании: 1 – круг; 2 – деталь; 3 – адиабатический стержень.

Согласно зависимости (1), параметр l_2 определяется одной переменной величиной τ . Чем она больше, тем больше l_2 , то есть чем больше тепла поступает в адиабатический стержень, тем больше l_2 и тем больше стержень нагревается. Данная закономерность справедлива при действии теплового потока q на неподвижную торцевую поверхность адиабатического стержня. Если же рассматривать движение теплового потока q вдоль адиабатического стержня с фиксированной скоростью $V_{рез}$, определяемой скоростью перерезания стержня шлифовальным кругом, то закономерности формирования параметра l_2 и температуры резания изменятся. Для удобства анализа непрерывное равномерное движение со скоростью $V_{рез}$ теплового источника вдоль адиабатического стержня можно рассматривать с периодическим шагом $V_{рез} \cdot d\tau$, где $d\tau$ – бесконечно малое время, с. Тогда за время $d\tau$ глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали определится так:

$$l_{2_0} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot d\tau}. \tag{2}$$

В связи с перерезанием части адиабатического стержня длиной $V_{рез} \cdot d\tau$ глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали уменьшится на величину $V_{рез} \cdot d\tau$ и станет равной

$$l_{2_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot d\tau} - V_{рез} \cdot d\tau. \tag{3}$$

Учитывая то, что параметр l_2 , исходя из зависимости (1), определяется лишь одной переменной τ , зависимость (3) можно представить в виде:

$$l_{2_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot \tau_1}, \tag{4}$$

где τ_1 – время нагрева адиабатического стержня при его перерезании на величину $V_{рез} \cdot d\tau$, с.

Сравнивая зависимости (3) и (4), получаем:

$$\tau_1 = \frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot d\tau} - V_{рез} \cdot d\tau \right)^2 = d\tau \cdot (1 - \alpha)^2, \tag{5}$$

где $\alpha = V_{рез} \cdot d\tau / l_{2_0} < 1$.

Как видно, $\tau_1 < d\tau$, то есть вследствие перерезания части адиабатического стержня длиной $V_{рез} \cdot d\tau$ время нагрева стержня уменьшилось, что в соответствии с зависимостью (4) приводит к уменьшению параметра l_{2_1} :

$$l_{2_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot \tau_1} \cdot (1 - \alpha) = l_{2_0} \cdot (1 - \alpha). \tag{6}$$

При втором шаге теплового источника на величину $V_{pez} \cdot d\tau$ параметр l_{2_2} , аналогично l_{2_1} , определится так:

$$l_{2_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot (d\tau + \tau_1) - V_{pez} \cdot d\tau}. \quad (7)$$

С другой стороны:

$$l_{2_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot \tau_2}, \quad (8)$$

где τ_2 – время нагрева адиабатического стержня при его перерезании на величину $2 \cdot V_{pez} \cdot d\tau$, с.

Сравнивая зависимости (7) и (8), получаем:

$$\tau_2 = \frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot (d\tau + \tau_1) - V_{pez} \cdot d\tau} \right)^2 = d\tau \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\tau_1}{d\tau}} - \alpha \right)^2. \quad (9)$$

С учетом зависимости (5) имеем:

$$\tau_2 = d\tau \cdot \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right]^2. \quad (10)$$

Очевидно, что $\tau_2 > \tau_1$. Тогда

$$l_{2_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot d\tau} \cdot \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right] = l_{2_0} \cdot \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right]. \quad (11)$$

При третьем шаге теплового источника на величину $V_{pez} \cdot d\tau$ параметр l_{2_3} , аналогично l_{2_2} , определится так:

$$l_{2_3} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot (d\tau + \tau_2) - V_{pez} \cdot d\tau}; \quad l_{2_3} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot \tau_3}, \quad (12)$$

где τ_3 – время нагрева адиабатического стержня при его перерезании на величину $3 \cdot V_{pez} \cdot d\tau$, с.

Сравнивая зависимости (12), получаем:

$$\tau_3 = \frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot (d\tau + \tau_2) - V_{pez} \cdot d\tau} \right)^2 = d\tau \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\tau_2}{d\tau}} - \alpha \right)^2. \quad (13)$$

С учетом зависимости (10) имеем:

$$\tau_3 = d\tau \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right]^2} - \alpha \right\}^2. \quad (14)$$

Как видно, $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$. Соответственно параметр l_{2_3} определится так:

$$l_{2_3} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot d\tau} \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right]^2} - \alpha \right\}. \quad (15)$$

Сравнивая зависимости (15), (11) и (6), видим, что $l_{2_3} > l_{2_2} > l_{2_1}$. Следовательно, с увеличением числа шагов, равных $V_{pez} \cdot d\tau$, глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали увеличивается. При последующем четвертом шаге теплового источника на величину $V_{pez} \cdot d\tau$ параметр l_{2_4} определится равенствами:

$$l_{2_4} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot (d\tau + \tau_3) - V_{pez} \cdot d\tau}; \quad l_{2_4} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot \tau_4}, \quad (16)$$

где τ_4 – время нагрева адиабатического стержня при его перерезании на величину $4 \cdot V_{pez} \cdot d\tau$, с.

Сравнивая зависимости (16), получаем:

$$\tau_4 = \frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda} \cdot \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot (d\tau + \tau_3) - V_{pez} \cdot d\tau} \right)^2 = d\tau \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{\tau_3}{d\tau}} - \alpha \right)^2. \quad (17)$$

Подставляя зависимость (14) в (16), имеем:

$$\tau_4 = d\tau \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left[\sqrt{1 + \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right]^2} - \alpha \right]^2} - \alpha \right\}^2. \quad (18)$$

Из зависимостей (18), (14), (10) и (6) следует: $\tau_4 > \tau_3 > \tau_2 > \tau_1$. Подставляя зависимость (18) в (16), получаем:

$$l_{23} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho}} \cdot d\tau \cdot \left\{ \sqrt{1 + \left[\sqrt{1 + \left[\sqrt{1 + (1 - \alpha)^2} - \alpha \right]^2} - \alpha \right]^2} - \alpha \right\}. \quad (19)$$

Аналогично можно определить значения l_{25}, \dots, l_{2n} . Однако, как видно, закон изменения l_2 с увеличением числа шагов n усложняется, и выразить его простой аналитической зависимостью трудно. Поэтому более просто определить l_2 с использованием численного расчета на основе зависимости (9), представив ее в виде:

$$\frac{\tau_n}{d\tau} = \left(\sqrt{1 + \frac{\tau_{n-1}}{d\tau}} - \alpha \right)^2, \quad (20)$$

где τ_n, τ_{n-1} – время нагрева адиабатического стержня при его перерезании соответственно на величины $n \cdot V_{\text{рез}} \cdot d\tau$ и $(n-1) \cdot V_{\text{рез}} \cdot d\tau$, с.

Безразмерная величина α может изменяться в пределах от 0...1.

Результаты расчетов. Для $\alpha = 0,2$ зависимость (20) принимает вид:

$$\frac{\tau_n}{d\tau} = \left(\sqrt{1 + \frac{\tau_{n-1}}{d\tau}} - 0,2 \right)^2. \quad (21)$$

Начальное значение $\tau_1/d\tau$ определяется из зависимости (5) и равно 0,64. Тогда, согласно зависимости (21), имеем $\tau_2/d\tau = 1,1677$. Подставляя в зависимость (21) данное значение, определяем $\tau_3/d\tau = 1,6187$, и так далее.

Очевидно, что параметр τ_n с увеличением числа шагов n непрерывно увеличивается, асимптотически приближаясь к определенному значению. Чтобы определить это значение, следует воспользоваться условием

$$l_{2n+1} = l_{2n} + V_{\text{рез}} \cdot d\tau, \quad (22)$$

рассматривая его в виде:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho}} \cdot (d\tau + \tau_{n-1}) - \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho}} \cdot \tau_n = V_{\text{рез}} \cdot d\tau. \quad (23)$$

После умножения левой части уравнения (23) на сопряженную величину $\sqrt{(d\tau + \tau_{n-1})} - \sqrt{\tau_n}$, получаем:

$$\frac{d\tau + \tau_{n-1} - \tau_n}{(\sqrt{d\tau + \tau_{n-1}} + \sqrt{\tau_n})} = V_{\text{рез}} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda}} \cdot d\tau. \quad (24)$$

С учетом соотношений $\tau_n - \tau_{n-1} = d\tau_n$ и $d\tau + \tau_{n-1} \approx \tau_n$ зависимость (24) опишется так:

$$d\tau - d\tau_n = V_{\text{рез}} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\tau_n} \cdot d\tau. \quad (25)$$

В результате получено уравнение:

$$d\tau = \frac{d\tau_n}{\left(1 - 2 \cdot V_{\text{рез}} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda}} \cdot \tau_n \right)}. \quad (26)$$

Для установления зависимости τ_n от τ проинтегрируем правую и левую части уравнения (26):

$$\int d\tau = \int \frac{d\tau_n}{\left(1 - 2 \cdot V_{\text{рез}} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda}} \cdot \tau_n \right)} + C_1, \quad (27)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, которая определяется из начального условия $\tau_n(\tau = 0) = 0$.

Интеграл в правой части уравнения преобразуем путём замены переменной $y = \sqrt{\tau_n}$. Тогда $\tau_n = y^2$;

$d\tau_n = 2 \cdot y \cdot dy$. Обозначая постоянную величину $2 \cdot V_{\text{рез}} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda}} = m$, имеем

$$\int \frac{d\tau_n}{\left(1 - 2 \cdot V_{\text{рез}} \cdot \sqrt{\frac{c \cdot \rho}{2 \cdot \lambda}} \cdot \tau_n \right)} = \int \frac{2 \cdot y \cdot dy}{m \cdot \left(\frac{1}{m} - y \right)} = -\frac{2}{m} \cdot \int \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m} - y \right) \cdot dy = -\frac{2}{m} \cdot \left[\sqrt{\tau_n} + \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\frac{1}{m} - \sqrt{\tau_n} \right) \right]. \quad (28)$$

Подставляя зависимость (28) в уравнение (27), получаем:

$$\tau = -\frac{2}{m} \cdot \left[\sqrt{\tau_n} + \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\frac{1}{m} - \sqrt{\tau_n} \right) \right] + C_1. \quad (29)$$

Постоянная интегрирования C_1 определяется из начального условия $\tau_n(\tau=0) = 0$:

$$C_1 = \frac{2}{m^2} \cdot \ln \frac{1}{m}. \quad (30)$$

Тогда уравнение (29) принимает вид:

$$\sqrt{\tau_n} = \frac{1}{m} \cdot \left(1 - e^{-\frac{m^2}{2} \tau - m \sqrt{\tau_n}} \right). \quad (31)$$

При $\tau_n = 0$ величина $\tau = 0$, то есть выполняется начальное условие, что свидетельствует о правильности полученного решения. Уравнение (31) сложно разрешить относительно неизвестной функции τ_n . Поэтому для установления зависимости τ_n от τ необходимо задавать значения τ_n и из уравнения (31) определять значения τ .

Как следует из уравнения (31), функция τ_n с увеличением переменной величины τ увеличивается по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к определенной постоянной (максимальной) величине. Для ее определения уравнение (31) необходимо подчинить условию $\tau \rightarrow \infty$. В результате получаем:

$$e^{-\frac{m^2}{2} \tau - m \sqrt{\tau_n}} \rightarrow 0. \quad (32)$$

Тогда, исходя из уравнения (31), имеем:

$$\tau_n = \frac{1}{m^2} = \frac{\lambda}{2 \cdot c \cdot \rho \cdot V_{рез}^2}; \quad (33)$$

$$l_{2n} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{c \cdot \rho} \cdot \tau_n} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho \cdot V_{рез}}. \quad (34)$$

Зная максимальное значение τ_n , определяемое зависимостью (33), и уменьшая его до нуля, по преобразованному уравнению (31):

$$\left(1 - m \cdot \sqrt{\tau_n} \right) \cdot e^{m \cdot \sqrt{\tau_n}} = e^{-\frac{m^2}{2} \tau} \quad (35)$$

несложно установить значения τ и соответственно зависимость τ_n от τ .

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными направления исследований, связанные с аналитическим определением температуры резания при шлифовании с учетом конечной глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании. Это позволит научно обоснованно подойти к анализу тепловой напряженности процесса шлифовании и выбору оптимальных условий обработки с учетом ограничения по температуре резания.

Выводы. В работе предложено новое теоретическое решение задачи определения температуры резания и глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании с учетом перерезания шлифовальным кругом адиабатических стержней, набором которых условно представлен снимаемый припуск. В результате установлено, что с течением времени обработки температура резания непрерывно увеличивается, асимптотически приближаясь к определенному значению, а глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании, в отличие от известных теоретических решений, принимает конечное значение. Это приближает расчетную схему теплового процесса при шлифовании к реальным условиям шлифовании и позволяет научно обоснованно подойти к анализу тепловой напряженности процесса шлифовании и выбору оптимальных условий обработки с учетом ограничения по температуре резания.

Список литературы: 1. Якимов А.В. Оптимизация процесса шлифовании. – М.: Машиностроение, 1975. – 175 с. 2. Сипайлов В.А. Тепловые процессы при шлифовании и управление качеством поверхности. – М.: Машиностроение, 1978. – 166 с. 3. Моделирование систем: монография / Г.А. Оборский, А.Ф. Даценко, А.В. Усов и др. – Одесса: Астропринт, 2013. – 664 с. 4. Теоретические основы резания и шлифовании материалов: учебное пособие / А.В. Якимов, Ф.В. Новиков, Г.В. Новиков и др. – Одесса: ОГПУ, 1999. – 450 с. 5. Новиков Ф.В., Яценко С.М. Повышение эффективности технологии финишной обработки деталей пар трения поршневых насосов // Труды 13-й Международной научно-технической конференции. Физические и компьютерные технологии. – Харьков: ХНПК «ФЭД», 2007. – С. 8 – 20. 6. Новиков Ф.В., Рябенков И.А. Расчет температуры шлифовании и глубины ее проникновения в поверхностный слой обрабатываемой детали // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2008. – №1/2 (31). – С. 9 – 12.

Bibliography (transliterated): 1. Jakimov, A. V. *Optimizacija processa shlifovaniya*. Moscow: Mashinostroenie, 1975. Print. 2. Sipajlov, V. A. *Teplovyje processy pri shlifovanii i upravlenie kachestvom poverhnosti*. Moscow: Mashinostroenie, 1978. Print. 3. Oborskiy, G. A., et al. *Modelirovanie sistem: monografija*. Odessa: Astroprint, 2013. Print. 4. Jakimov, A. V., et al. *Teoreticheskie osnovy rezaniya i shlifovaniya materialov: ucheb. posobie*. Odessa: OGPU, 1999. Print. 5. Novikov, F. V., and S. M. Jacenko. "Povyshenie effektivnosti tehnologii finishnoj obrabotki detalej par treniya porshnevnyh nasosov." *Trudy 13 Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii. Fizicheskie i komp'yuternye tehnologii*. Kharkov: KkNPK «FED», 2007. 8–20.

Print. 6 Novikov, F. V., and I. A. Rjabenkov. "Raschjot temperatury shlifovanija i glubiny ee proniknovenija v poverhnostnyj sloj obrabatyvaemoj detali." *Vostochno-evropejskij zhurnal передovih tehnologij*. No. 1/2 (31). 2008. 9–12. Print.

Поступила (received) 30.09.2015

Новіков Федір Васильович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний економічний університет імені С. Кузнеця, м. Харків; тел.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Новиков Фёдор Васильевич – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный экономический университет имени С. Кузнеця, г. Харьков; тел.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Novikov Fedor Vasilevich – Doctor of Technical Sciences, Professor, S. Kuznets Kharkiv National University named of Economics, Kharkov; tel.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Кленов Олег Станіславович – кандидат технічних наук, Фірма «ДіМерус Інженерінг», м. Харків; тел.: (057) 757-87-77; e-mail: anna@dimerus.com

Кленов Олег Станиславович – кандидат технических наук, Фирма «ДиМерус Инженеринг», г. Харьков; тел.: (057) 757-87-77; e-mail: anna@dimerus.com

Klenov Oleg Stanislavovich – Candidate of Technical Sciences, Firm «DiMerus Engineering», Kharkov; tel.: (057) 757-87-77; e-mail: anna@dimerus.com

Гершиков Ілля Володимирович – директор, ЗАТ «Азовський машинобудівний завод», м. Бердянськ; тел.: (06153) 45-9-79; e-mail: direktor@amz.com.ua

Гершиков Илья Владимирович – директор, ЗАО «Азовский машиностроительный завод», г. Бердянск; тел.: (06153) 45-9-79; e-mail: direktor@amz.com.ua

Gershikov Ilya Vladimirovich – Director of JSC "Azov Machine Building Plant", Berdyansk; tel.: (06153) 45-9-79; e-mail: direktor@amz.com.ua

УДК 621.923

Ф. В. НОВИКОВ, Р. М. МИНЧЕВ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКЕ ОТВЕРСТИЙ

Произведен расчет шероховатости поверхности при абразивной обработке на основе использования теории вероятностей и выполнен анализ закономерностей изменения шероховатости поверхности при шлифовании отверстия. Установлено, что шероховатость поверхности однозначно определяется суммарным количеством зерен, участвующих в формировании шероховатости. Обоснованы преимущества хонингования по сравнению с внутренним шлифованием. Показана возможность уменьшения шероховатости поверхности при шлифовании кругом, ось которого расположена перпендикулярно оси вращения обрабатываемой детали.

Ключевые слова: абразивная обработка, шлифование, хонингование, отверстие, шероховатость поверхности.

Введение. При изготовлении гидро- и пневмоцилиндров предусмотрены высокие требования к точности и качеству обрабатываемых поверхностей отверстий. В особой мере это относится к обеспечению шероховатости поверхности ($R_a \leq 0,05$ мкм). Однако, как показывает практика, выполнить эти требования на операциях лезвийной обработки и внутреннего шлифования сложно. В связи с этим актуальна проблема определения новых более эффективных технологических решений, направленных на обеспечение заданной шероховатости обрабатываемых поверхностей отверстий в гидро- и пневмоцилиндрах, что требует проведения дальнейших исследований закономерностей изменения шероховатости поверхности при абразивной обработке, включая процессы внутреннего шлифования, хонингования и обработки отверстий свободным абразивом.

Анализ последних исследований. Многочисленными исследованиями [1 – 3] установлено, что добиться высоких показателей шероховатости обрабатываемых поверхностей отверстий можно применением *методов хонингования и обработки свободным абразивом*. Однако при этом значительно увеличивается трудоемкость обработки, например, по сравнению с внутренним шлифованием, что снижает эффективность обработки. Поэтому в настоящее время проводятся теоретические исследования параметров шероховатости поверхности при абразивной обработке с позиции теории вероятностей [4, 5] с целью научно обоснованного выбора оптимальных условий обработки. В связи с этим актуально применение данного теоретического подхода к определению оптимальных условий абразивной обработки отверстий с учетом высоких требований, предъявляемых к шероховатости обрабатываемых поверхностей.

Постановка задачи. В работе [6] предложено новое теоретическое решение задачи определения параметров шероховатости поверхности при абразивной обработке. Однако при этом недостаточно полно обоснована возможность перехода от биннома Ньютона к экспонентной функции при вычислениях. Поэтому необходимо, во-первых, уточнить данное решение, во-вторых, применить его для теоретического анализа условий уменьшения

© Ф. В. Новиков, Р. М. Минчев, 2015

шероховатости поверхности при абразивной обработке отверстий в гидро- и пневмоцилиндрах.

Математическая модель. Рассмотрим схему образования шероховатости поверхности на прямолинейном образце при его обработке абразивным инструментом с одновысотным выступанием режущих зерен над уровнем связки инструмента (рис. 1). Предположим, что инструмент совершает движение перпендикулярно плоскости обрабатываемого образца. Для упрощения расчетов рабочую поверхность абразивного инструмента целесообразно разбить на n_1 элементарных слоев, параллельных плоскости обрабатываемого образца, в каждом из которых находится по одному абразивному зерну. Ширина элементарного слоя равна ширине рабочей части абразивного инструмента B , а его высота равна высоте выступа абразивного зерна b .

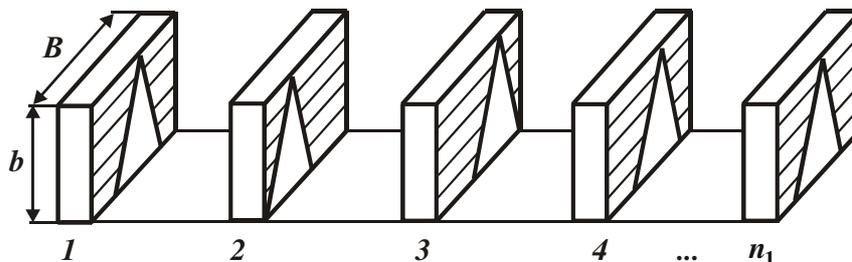


Рис. 1 – Схема расположения n_1 элементарных слоев абразивных зерен.

Тогда относительная полнота профиля режущего абразивного зерна, спроектированного на поверхность обрабатываемого образца, опишется так:

$$\varepsilon_i(y) = 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot y / B, \quad (1)$$

где 2γ – угол при вершине конусообразного режущего зерна; y – координата, отсчитываемая от вершины зерна, м.

Дополнительная вероятностная функция $\Phi_i(y)$ примет вид:

$$\Phi_i(y) = 1 - \varepsilon_i(y) = 1 - \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot y}{B}. \quad (2)$$

Функция $\Phi_j(y)$, которая учитывает наложение проекций n_1 зерен, расположенных в n_1 элементарных слоях рабочей поверхности инструмента, согласно *теореме умножения независимых случайных величин* [7], выражается равенством:

$$\Phi_j(y) = \prod_{i=1}^{n_1} \Phi_i(y) = \left(1 - \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot y}{B}\right)^{n_1} = (1-x)^{n_1}, \quad (3)$$

где $x = \varepsilon_i(y) = 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot y / B \ll 1$.

Очевидно, что по мере наложения проекций n_1 зерен на плоскость обрабатываемого образца значения функции $\Phi_j(y)$ будут уменьшаться, уменьшая тем самым шероховатость обрабатываемой поверхности.

Выражение (3) является *биномом Ньютона*, который раскрывается в виде конечной суммы:

$$(1-x)^{n_1} = 1 - n_1 \cdot x + \frac{n_1 \cdot (n_1 - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \frac{n_1 \cdot (n_1 - 1) \cdot (n_1 - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots \quad (4)$$

С учетом того, что величина $x \ll 1$, а n_1 – относительно небольшая величина, например, равная 10...20, то очевидно, в разложении (4) преобладают первые слагаемые. В результате можно ограничиться двумя первыми слагаемыми. А это означает, что разложение (4) с достаточной для практики точностью в первом приближении можно представить разложением экспонентной функции $e^{-n_1 x}$ в ряд:

$$(1-x)^{n_1} \approx 1 - n_1 \cdot x + \frac{n_1^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \frac{n_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots = e^{-n_1 x}, \quad (5)$$

в котором два первых (наибольших) слагаемых такие же, как и в разложении (4). Следовательно, с учетом определяющего влияния в разложении (4) величины $x = \varepsilon_i(y) = 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot y / B \ll 1$ вероятностная функция $\Phi_j(y)$ принимает упрощенный вид:

$$\Phi_j(y) = e^{-n_1 x} = e^{-\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot n_1}{B} \cdot y}, \quad (6)$$

чрезвычайно удобный для выполнения расчетов параметров шероховатости поверхности при абразивной обработке.

Таким образом, научно обоснована возможность перехода от бинома Ньютона к экспонентной функции при расчете шероховатости обрабатываемой поверхности, что позволило существенно упростить расчеты без

снижения их точности.

Необходимо отметить, что зависимость (6) справедлива для n_1 элементарных слоев рабочей поверхности абразивного инструмента, в которых содержится по одному абразивному зерну. Если в формировании шероховатости поверхности участвует в $j = n/n_1$ раз больше элементарных слоев, то в результате наложения всех этих элементарных слоев на плоскость обрабатываемого образца суммарная вероятностная функция $\Phi(y)$ аналитически опишется так:

$$\Phi(y) = \prod_{j=n_1}^n \Phi_j(y) = e^{-j \cdot n_1 \cdot x} = e^{-\frac{2 \cdot tg \gamma \cdot n}{B} \cdot y}, \quad (7)$$

где n – суммарное количество абразивных зерен, участвующих в формировании шероховатости обрабатываемой поверхности.

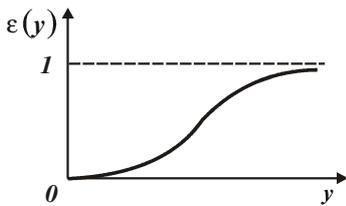


Рис. 2 – График вероятностной функции $\varepsilon(y)$.

Относительная полнота профиля абразивного инструмента, являющаяся дополнительной функцией $\Phi(y)$, выразится формулой:

$$\varepsilon(y) = 1 - e^{-\frac{2 \cdot tg \gamma \cdot n}{B} \cdot y}. \quad (8)$$

График вероятностной функции $\varepsilon(y)$ показан на рис. 2. По физической сути $\varepsilon(y)$ соответствует стандартному параметру шероховатости поверхности – относительной опорной длине микропрофиля обрабатываемой поверхности, если рассматривать координату y в противоположном направлении.

Поскольку функции $\Phi(y)$ и $\varepsilon(y)$ являются вероятностными функциями распределения, изменяющимися в пределах $0 \dots 1$, то определить параметр шероховатости поверхности R_{max} (максимальную высоту микронеровностей на обрабатываемой поверхности) можно только с заданной степенью точности, например, для $\Phi(y) = \Phi_0 = 0,1; 0,05; 0,01$ и так далее. Тогда при условии

$$\Phi(y = R_{max}) = \Phi_0 \quad (9)$$

с учетом зависимости (7) и потенцирования зависимости (9) получаем:

$$R_{max} = -\frac{\ln \Phi_0 \cdot B}{2 \cdot tg \gamma \cdot n}. \quad (10)$$

Величина $\ln \Phi_0$ отрицательна (табл. 1). Поэтому параметр шероховатости поверхности R_{max} принимает положительные значения. Как видно, с уменьшением функции Φ_0 величина $-\ln \Phi_0$ увеличивается, однако не столь значительно по сравнению с уменьшением функции Φ_0 .

Таблица 1 – Расчетные значения величины $-\ln \Phi_0$

Φ_0	0,15	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
$1 - \Phi_0$	0,85	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
$-\ln \Phi_0$	1,897	2,3	2,995	4,6	6,907	11,5	13,81

Результаты расчетов. Исходя из зависимости (10), основным условием уменьшения параметра шероховатости поверхности R_{max} является увеличение суммарного количества абразивных зерен n , участвующих в формировании шероховатости обрабатываемой поверхности. При внутреннем шлифовании (рис. 3, а) имеем

$$n = k \cdot B \cdot V_{кр} \cdot \tau,$$

где k – поверхностная концентрация зерен, шт./м²; B – ширина шлифования, м; $V_{кр}$ – тангенциальная скорость вращения поверхности круга, м/с; $\tau = l/V_{дет}$ – время контакта фиксированного сечения обрабатываемой поверхности детали со шлифовальным кругом, с; l – длина дуги контакта круга с обрабатываемой поверхностью детали, м; $V_{дет}$ – скорость вращения детали, м/с. Тогда

$$n = k \cdot B \cdot l \cdot \frac{V_{кр}}{V_{дет}}. \quad (11)$$

Как видно, увеличить n можно двумя способами: увеличением параметров l , $V_{кр}$ и уменьшением тангенциальной скорости вращения детали $V_{дет}$. Этим объясняется эффективность применения на практике при операциях плоского и круглого наружного шлифования схемы глубинного шлифования, характеризующейся увеличенными значениями длины дуги контакта круга с обрабатываемой поверхностью детали l и небольшими значениями скорости вращения детали $V_{дет} = 0,5 \dots 5$ м/мин, с точки зрения уменьшения шероховатости по-

верхности при одновременном увеличении производительности обработки.

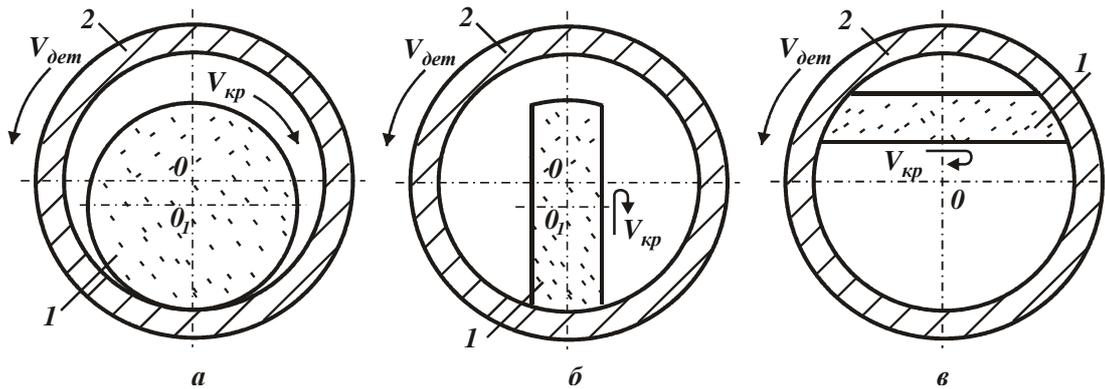


Рис. 3 – Схемы шлифования отверстия: а – при параллельном расположении осей вращения круга и детали; б, в – при перпендикулярном.

В пределе параметр l равен длине окружности обрабатываемого отверстия: $l = \pi \cdot d$, где d – диаметр обрабатываемого отверстия, м. Это имеет место при хонинговании отверстия. Следовательно, в этом случае параметр n принимает наибольшее значение, а параметр шероховатости поверхности R_{max} – в соответствии с зависимостью (10) – наименьшее значение, что указывает на эффективность применения метода хонингования отверстия по сравнению с внутренним шлифованием.

Заслуживает внимания схема шлифования внутренней поверхности кругом с осью вращения, перпендикулярной оси вращения обрабатываемой детали (рис. 3, б). При этом круг совершает прямолинейное движение вдоль обрабатываемого отверстия. Тогда

$$n = k \cdot B \cdot V_{кр} \cdot \tau = k \cdot B^2 \cdot \frac{V_{кр}}{V_{дет}}, \quad (12)$$

где $\tau = B/V_{дет}$.

Поскольку справедливо условие $l < B$, то использование данной схемы шлифования по сравнению с традиционной схемой внутреннего шлифования, показанной на рис. 3, а, позволяет увеличить суммарное количество абразивных зерен n , участвующих в формировании шероховатости обрабатываемой поверхности, и, соответственно, уменьшить параметр шероховатости поверхности R_{max} . Кроме того, при внутреннем шлифовании по традиционной схеме глубины внедрения абразивных зерен в обрабатываемый материал переменны и могут изменяться от нуля до глубины шлифования t , тогда как по предложенной схеме они одинаковы, а это фактически приводит к увеличению суммарного количества абразивных зерен n , участвующих в формировании шероховатости обрабатываемой поверхности, и соответственно уменьшению параметра шероховатости поверхности R_{max} . Следовательно, предлагаемая новая схема внутреннего шлифования обладает значительно большими технологическими возможностями с точки зрения уменьшения параметра шероховатости поверхности R_{max} при обработке отверстия.

Важным фактором увеличения суммарного количества абразивных зерен n , участвующих в формировании

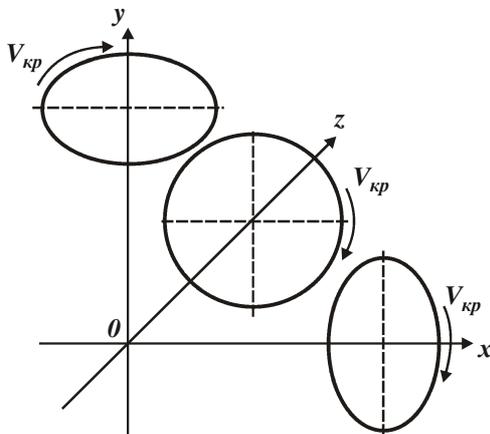


Рис. 4 – Расположение круга при шлифовании отверстия в трехмерной системе координат.

шероховатости обрабатываемой поверхности, для данной схемы шлифования является также увеличение ширины шлифования за счет осуществления контакта двух сторон периферии круга с обрабатываемой внутренней поверхностью детали (рис. 3, в). При этом наибольший эффект обработки достигается при шлифовании торцевой поверхностью круга, имеющей форму окружности и обеспечивающей наибольшую площадь контакта с обрабатываемой внутренней поверхностью детали.

Следует отметить, что данная схема внутреннего шлифования впервые использована Брижан Т.М. при исследовании возможностей уменьшения шероховатости поверхности для абразивной обработки отверстий в гидро- и пневмоцилиндрах. В результате удалось обеспечить требуемую шероховатость поверхности на уровне $Ra = 0,04$ мкм, чего не удавалось получить другими методами абразивной обработки. Для осуществления предложенной схемы внутреннего шлифования отверстия необходимо обеспечить примерно одновысотное расположение абразивных зерен на рабочей поверхности круга. В противном случае в резании бу-

дут участвовать лишь наиболее выступающие зерна (то есть небольшое количество зерен), что приведет к образованию отдельных рисок-царапин на обрабатываемой поверхности и не позволит добиться существенного уменьшения шероховатости. В связи с этим следует процесс шлифования производить, например, кругом с наклеенным на его рабочую поверхность слоем абразивных зерен, характеризующимся фактически одновысотным выступанием зерен.

При разновысотном расположении абразивных зерен на рабочей поверхности шлифовального круга функция $\Phi(y)$ описывается [6] формулой:

$$\Phi(y) = e^{-\frac{2 \cdot \text{tg} \gamma \cdot n \cdot y^2}{B \cdot 2 \cdot b}}, \quad (13)$$

где b – максимальная высота выступления вершин зерен над уровнем связки круга, м.

Зависимость (13) отличается от аналогичной зависимости (7) множителем $y/2b$, который входит в показатель степени. Этот множитель всегда меньше единицы. Поэтому значение функции $\Phi(y)$, рассчитанное по зависимости (13) для заданного значения y , будет всегда большим. Это связано с уменьшением суммарного количества абразивных зерен n , участвующих в формировании шероховатости обрабатываемой поверхности, и соответственно с увеличением шероховатости поверхности.

При условии $y = b$ зависимости (7) и (13) упрощаются и принимают вид:

$$\Phi(y) = e^{-\frac{2 \cdot \text{tg} \gamma \cdot n \cdot b}{B}}; \quad (14)$$

$$\Phi(y) = e^{-\frac{2 \cdot \text{tg} \gamma \cdot n \cdot b}{B \cdot 2}}. \quad (15)$$

Полученные зависимости (14) и (15) отличаются друг от друга лишь постоянными множителями показателей степени, что связано с различным количеством абразивных зерен, участвующих в съеме металла и формировании шероховатости поверхности. Так, в первом случае, согласно зависимости (14), функция $\Phi(y=b)$ принимает наименьшие значения, а во втором случае, согласно зависимости (15), наибольшие значения. Следовательно, разновысотное расположение абразивных зерен на рабочей поверхности круга приводит к уменьшению количества абразивных зерен, участвующих в съеме металла и формировании шероховатости обрабатываемой поверхности. Однако данные закономерности справедливы при одинаковом значении безразмерной величины $2 \cdot \text{tg} \gamma \cdot n \cdot b / B$. В действительности, для рассмотренных выше случаев общее количество абразивных зерен n , участвующих в съеме металла и формировании шероховатости, будет различным. Поэтому будут существенно отличаться значения функции $\Phi(y)$ и параметра шероховатости обрабатываемой поверхности R_{\max} .

Рассмотренные в работе три схемы шлифования отверстия в детали, по сути, сводятся к осуществлению вращения круга вокруг трех координатных осей – x , y , z (рис. 4). Первая схема (рис. 3, а) осуществляется путем вращения круга вокруг оси Oz , вторая схема (рис. 3, б) – вокруг оси Ox , а третья схема (рис. 3, в) – вокруг оси Oy . На основе этих трех принципиальных схем шлифования отверстия можно предложить и другие схемы, являющиеся их различными комбинациями.

Перспективы дальнейших исследований. Авторы считают перспективными направления исследований, связанные с разработкой эффективного технологического процесса шлифования отверстия кругом, расположенным перпендикулярно направлению вращения обрабатываемой детали. Это позволит существенно увеличить количество абразивных зерен, участвующих в формировании шероховатости поверхности, и добиться уменьшения шероховатости.

Выводы. В работе произведен расчет шероховатости поверхности при абразивной обработке на основе положений теории вероятностей. Проведен теоретический анализ закономерностей изменения шероховатости поверхности при шлифовании отверстия и установлено, что достигаемый уровень шероховатости вполне однозначно определяется суммарным количеством абразивных зерен, участвующих в формировании шероховатости. Исходя из этого, обоснованы преимущества хонингования по сравнению с внутренним шлифованием. Показана возможность существенного уменьшения шероховатости поверхности при шлифовании кругом, ось которого расположена перпендикулярно оси вращения обрабатываемой детали. При этом наибольший эффект обработки достигается при шлифовании торцевой поверхностью круга, имеющей форму окружности и обеспечивающей наибольшую площадь контакта с обрабатываемой внутренней поверхностью детали.

Список литературы: 1. Алмазно-абразивная обработка материалов: справочник / Под ред. проф. А.Н. Резникова. – М.: Машиностроение, 1977. – 390 с. 2. Якимов А.В. Оптимизация процесса шлифования. – М.: Машиностроение, 1975. – 175 с. 3. Евсеев Д.Г., Сальников А.И. Физические основы процесса шлифования. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1978. – 128 с. 4. Королев А.В., Новоселов Ю.К. Теоретико-вероятностные основы абразивной обработки. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1989. – 320 с. 5. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). – М.: Изд-во «Наука», 1975. – 343 с. 6. Новиков Ф.В., Шкурупий В.Г. Исследования шероховатости поверхности при алмазно-абразивной обработке методами теории вероятности // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП», 2004. – № 44. – С. 140 – 149. 7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Almazno-abrazivnaja obrabotka materialov: spravochnik*. Ed. A. N. Reznikov. Moscow: Mashinostroenie, 1977. Print. 2. Jakimov, A. V. *Optimizacija processa shlifovanija*. Moscow: Mashinostroenie, 1975. Print. 3. Evseev, D. G., and A. I. Sal'nikov. *Fizicheskie osnovy processa shlifovanija*. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 1978. Print. 4. Korol'ov A.V., and Y. K. Novosjolov. *Teoretiko-verojatnostnye osnovy abrazivnoj obrabotki*. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 1989. Print. 5. Husu, A. P., Y. R. Vitenberg and V. A. Pal'mov. *Sherohovatost' poverhnostej (teoretiko-verojatnostnyj podhod)*. Moscow: Nauka, 1975. Print. 6. Novikov, F. V., and V. G. Shkurupij. "Issledovanija sherohovatosti poverhnosti pri almazno-abrazivnoj obrabotke metodami teorii verojatnosti." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 44. Kharkiv: NTU «KhPI», 2004. 140–149. Print. 7. Ventcel', E. S. *Teorija verojatnostej*. Moscow: Nauka, 1969. Print.

Поступила (received) 16.09.2015

Новіков Федір Васильович – доктор технічних наук, професор, Харківський національний економічний університет імені С. Кузнеця, м. Харків; тел.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Новиков Федор Васильевич – доктор технических наук, профессор, Харьковский национальный экономический университет имени С. Кузнеця, г. Харьков; тел.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Novikov Fedor Vasilevich – Doctor of Technical Sciences, Professor, S. Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkov; tel.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Мінчев Роман Михайлович – інженер, ТОВ «Енергореле», м. Маріуполь; тел.: (050) 999-79-65; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Минчев Роман Михайлович – инженер, ООО «Энергореле», г. Мариуполь; тел.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

Minchev Roman Mikhaylovich – Engineer, Energorele Ltd., Mariupol; tel.: (067) 68-90-342; e-mail: fokusnic1@rambler.ru.

УДК 629.4.027.11: 681.518.5

В. М. ПЕТУХОВ

МОДЕЛЬ ПРЕДОТКАЗНОГО СОСТОЯНИЯ БУКСОВЫХ УЗЛОВ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Определено, что наибольший риск возникновения ошибки в определении технического состояния буксового узла возникает в так называемой «зоне неопределенности» из-за невозможности однозначно оценить его техническое состояние. Для решения этой задачи предложена модель в виде n – мерного радиус-вектора, имеющего направление к увеличению вероятности отказа и ухудшению значений параметров. Разработанная модель определения предотказного состояния будет способствовать уменьшению вероятности принятия ошибочных решений.

Ключевые слова: буксовый узел, контроль технического состояния, встроенное средство контроля, зона неопределенности, предотказное состояние, радиус-вектор.

Введение. Одно из главных требований, предъявляемых к железнодорожному транспорту, является обеспечение безопасности перевозок грузов и пассажиров. Одним из элементов, непосредственно влияющим на безопасность движения подвижного состава, является буксовый узел. Отказ этого узла во время движения однозначно приводит к тяжелым последствиям – сходу вагона с рельсов.

Существующая инфраструктура системы теплового контроля букс (СТК) до недавнего времени, когда буксовые узлы вагонов были унифицированы, успешно выявляла неисправные буксы путем дистанционного измерения температуры её корпуса.

Появление на железных дорогах страны подвижного состава новой конструкции [1] с разнообразными конструкциями ходовых частей, с различными типами подшипников, привело к трудностям в определении технического состояния букс.

Контроль существующими дистанционными (бесконтактными) средствами нередко приводит к ошибочным тревогам, который составляет около 13% от всех случаев остановок поезда по нагреву букс. При этом наблюдается тенденция роста количества таких ошибок из-за увеличения числа вагонов с разнообразными типами букс, подшипников и смазки. Это приводит к необоснованным задержкам в движении, срывам стабильности и ритмичности перевозок. А также ведет к нерациональным затратам трудовых, материальных и финансовых ресурсов.

Стремление повысить контролепригодность букс, вынудили компании, выпускающие железнодорожные подшипники, использовать для своих изделий встроенные средства контроля их технического состояния. Производители буксовых узлов, такие как SKF (Швеция), FAG (Германия), Timken (США), оснащают свои буксы такими системами. Также значительные работы проводятся по возможности передачи и обработки данных с помощью беспроводных сетей [2 – 5]. Подобные работы ведутся и в нашей стране [6].

Такие системы имеют возможность, в отличие от дистанционных, измерять непосредственно диагностические параметры буксового узла за счет размещения соответствующих датчиков на контролируемых элементах, накапливать результаты измерений в устройстве памяти, а также производить первичную обработку информации.

© В. М. Петухов, 2015

Анализ последних исследований. Обзор работ по теории и практике методов контроля и диагностирования технического состояния подвижного состава в эксплуатации показали, что в настоящее время проблемам диагностики ходовых частей вагонов уделяется повышенное внимание для увеличения достоверности оценки технического состояния объектов [2 – 4].

Большое практическое значение в определении температурных параметров буксовых узлов отмечено в работах [7 – 9]. Разнообразие конструкций букс породило ряд принципиальных проблем с их контролем, работа [10] посвящена контролепригодности буксовых узлов к тепловому контролю.

Методам раннего выявления неисправных букс посвящена работа [11].

Определено, что в данное время наиболее актуальной задачей является раннее обнаружение дефекта подшипника и определение остаточного ресурса буксы, у которой был выявлен дефект во время движения поезда. Однако недостаточное внимание исследователей посвящено определению и формулировке такого понятия, как "предотказное состояние", и построению математической модели объекта в этом состоянии.

Постановка задачи. Анализ результатов испытаний и опыта эксплуатации различных встроенных систем контроля букс показывает, что данные системы обладают еще нереализованным потенциалом, таким как возможность раннего обнаружения и отслеживания развития дефекта подшипника, прогнозирование его остаточного ресурса при выявлении дефекта. Поэтому задачей данного исследования является построение модели предотказного состояния буксового узла для начала процедуры определения остаточного ресурса.

Модель предотказного состояния. Согласно действующей инструкции в зависимости от степени нагрева буксы средства теплового контроля подвижного состава (АСДК-Б, КТСМ) подают оператору три вида тревоги. Сигнал предаварийного уровня «Тревога-0» не требует остановки состава, по сигналу аварийного уровня «Тревога-1» поезд требуется остановить для осмотра на ближайшей станции, при критическом уровне «Тревога-2» обязательны немедленная остановка и осмотр букс указанного вагона.

Однако решение диагностической задачи (отнесение к исправным или неисправным состояниям) всегда связано с риском фиктивной тревоги или пропуска дефекта.

Решение этой проблемы для буксовых узлов современных вагонов является важнейшей задачей безопасности на железнодорожном транспорте. Фиксация начала развития опасного дефекта дает возможность во многих случаях предотвращать отказы. Своевременное и достоверное выявление неисправностей и информирование обслуживающего персонала позволяет принять необходимые меры и предотвратить тяжелые последствия их развития от поломки и выхода из строя этого ответственного узла, а также свести к минимуму число задержек в движении. При этом можно значительно уменьшить износ конструктивных элементов. Кроме того, решение этой проблемы, оказывает содействие сокращению затрат на техническое обслуживание и ремонт, поскольку ремонт, который проводится на перегоне, приводит к значительно большим затратам, чем тот, который выполняется на специализированных путях вагонного депо.

При определении технического состояния буксового узла требуется высокая надежность распознавания (большая стоимость ошибок пропуска аварийных букс или ложной тревоги).

Игнорирование аварийных сигналов приводит к тяжелым последствиям – горячим изломам шеек оси со сходом вагона с рельсов. Ложные сигналы тревоги вызывают задержки в движении поездов, а также материальные, финансовые и имиджевые потери железнодорожного транспорта.

Основным диагностическим признаком технического состояния буксового узла является его температура.

Важнейшим элементом комплекса математического обеспечения диагностической модели является *тепловая модель буксового узла*, описываемая уравнением:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{P \cdot N \cdot \pi \cdot D \cdot f}{\sum_{i=1}^n c_i \cdot p_i} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot F_i \cdot (T - T_3)}{\sum_{i=1}^n c_i \cdot p_i}, \quad (1)$$

где P – нагрузка на буксу, Н; N – частота вращения, с^{-1} ; D – диаметр подшипника, м; f – приведенный коэффициент трения, который учитывает суммарное трение качения и скольжение рабочих поверхностей подшипников, сопротивление смазки и трение роликов с сепаратором; c_i – удельная теплоемкость элементов буксы и колесной пары, Дж/кг·К; p_i – масса элементов буксы и колесной пары, кг; τ – время работы подшипника, с; α_i – коэффициент теплопередачи, Вт/м²·К; F_i – площадь поверхности буксы, м²; T, T_3 – соответственно температуры поверхности корпуса буксы и окружающего воздуха, К.

Изучение процессов теплообразования и теплопередачи, которые происходят в работающем буксовом узле, имеет большое значение при решении практических задач диагностики букс на ходу поезда.

Для решения задачи оценки технического состояния требуется определить в первую очередь диагностические признаки (признаки распознавания), которые характеризуют техническое состояние узла.

При этом вводятся следующие ограничения на выбор используемых признаков (контролируемых параметров):

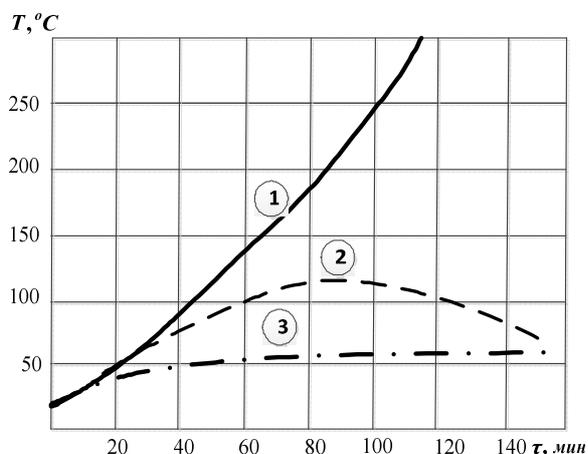
- Использовать те признаки, относительно которых может быть получена априорная информация, достаточная для определения технического состояния буксового узла;

- Исключить те признаки, которые малоинформативны и не имеют достаточных разделительных свойств;
- Учитывать технические возможности средств контроля.

Температура буксового узла является главным параметром, который характеризует техническое состояние подшипников. Как правило, повышенный нагрев узла свидетельствует о неисправности подшипников. Однако, зачастую причиной повышенной температуры буксы не обязательно может быть какой-либо дефект. Например, избыток смазки, который бывает после ревизии буксы во время приработки подшипника, вызывает сверхнормативное повышение температуры. При этом излишняя смазка постепенно выдавливается через лабиринтные уплотнения корпуса и, после определенного пробега вагона, температурный режим узла приходит в норму (рис. 1). Также интенсивный нагрев букс может наблюдаться при недостаточном радиальном и осевом зазорах в подшипнике, что также не является опасным дефектом.

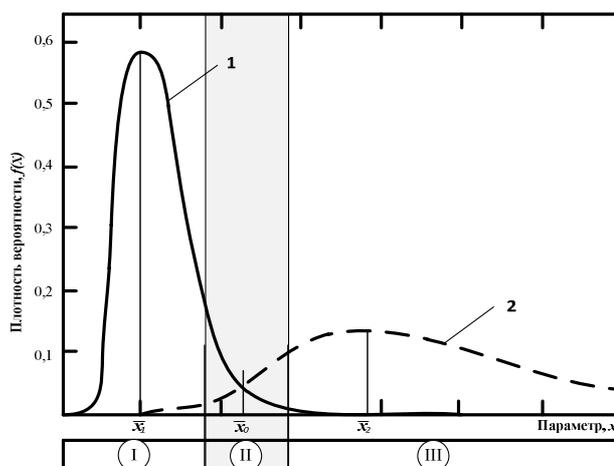
Немаловажное значение на повышенную температуру буксового узла оказывают условия эксплуатации – неравномерность загрузки вагона, а также количество и протяженность кривых участков пути, когда на буксу действуют увеличенные осевые нагрузки.

Таким образом, в подобных случаях система распознавания не способна однозначно оценить состояние объекта. Для таких событий в технической диагностике предусмотрено понятие *зона неопределенности* (зона отказа от распознавания). Наглядно зона неопределенности представлена на рис. 2.



1 – неисправная букса; 2 – букса после ревизии;
3 – исправная букса.

Рис. 1 – График температуры буксы в зависимости от ее технического состояния.



Функция распределения плотности вероятности параметра:
1 – исправных букс; 2 – неисправных букс. I – зона исправного состояния; II – зона неопределенности; III – зона неисправного состояния.

Рис.2 – Графическая иллюстрация зоны неопределенности при оценке технического состояния.

Данное состояние возникает при следующих условиях [12]:

$$\text{при } x \leq x_a \quad x \in D_1; \text{ при } x \geq x_b \quad x \in D_2; \text{ при } x_a \leq x \leq x_b \quad x \in D_3, \quad (2)$$

где x_a, x_b – граничные значения технического исправного и неисправного состояния соответственно; D_1 – диагноз исправного состояния буксы; D_2 – диагноз неисправного состояния буксы; D_3 – неопределенное состояние буксы.

Поскольку постепенные отказы происходят в результате непрерывного ухудшения рабочих параметров буксового узла, их можно прогнозировать. Поэтому среди работоспособных состояний можно выделить *критическое работоспособное состояние*, наступление которого влечет за собой скорый переход в неработоспособное состояние.

Выделение критического работоспособного состояния буксы дает возможность произвести замену колесной пары до наступления отказа. А также впоследствии восстановить, а не утилизировать поврежденный узел.

Однако, следует сразу определить, для каких типов букс по характеру нагрева целесообразно использовать данную процедуру. Используя такой признак распознавания, как прирост температуры ΔT_i возможно сразу классифицировать неисправные буксовые узлы двух принципиально разных типов (рис. 3):

– *линейного* – для этих букс характерен равномерный, линейный рост температуры до достижения предельного значения;

– *экспонентного* – происходит стремительный рост температуры, это требует аварийной остановки поезда. Соответственно, рассматривать буксы "экспонентного" типа в нашем случае не имеет смысла.

Таким образом, требуется определить при каком техническом состоянии буксы, дальнейшая ее эксплуатация ведет к отказу, то есть когда отказ еще не состоялся, но вероятность его возникновения высокая.

Для фиксации такого технического состояния предлагается ввести понятие *предотказное состояние буксового узла*.

Переход технического объекта в такое состояние принято называть *предотказом*, а само состояние – предотказным состоянием.

Под предотказном состоянии будем понимать такое работоспособное состояние объекта, когда хотя бы один из параметров, характеризующих его способность выполнять заданные функции, приближается к граничному значению, определенному нормативно-технической документацией, при котором не может быть гарантирована работоспособность объекта при дальнейшем изменении данного параметра.

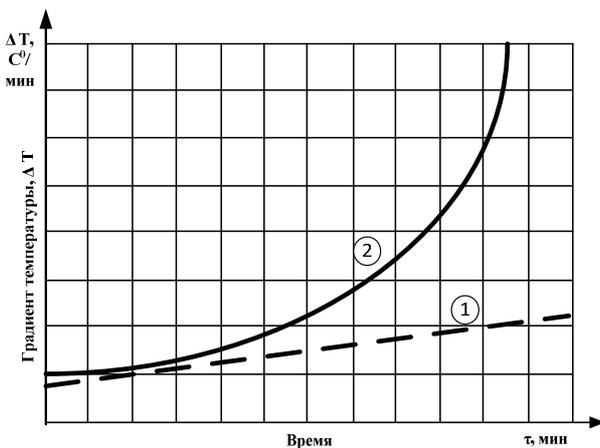
Чтобы определить предотказное состояние, необходимо учесть характер изменения диагностических параметров, например, таких как температура и темп ее роста. Здесь вероятность дальнейшего ухудшения параметров должна быть больше, чем вероятность их улучшения, то есть должна сохраняться тенденция ухудшения параметров. Отсутствие динамики изменения контролируемых параметров не является признаком такого состояния. Для фиксации предотказного состояния должно выполняться следующее условие:

$$P(H) > P(I), \tag{2}$$

где $P(H)$ – вероятность неисправного состояния; $P(I)$ – вероятность нормального (исправного) состояния буксы.

То есть вероятность того, что буксовый узел неисправен, должна быть выше вероятности его исправности.

Для определения предотказного состояния буксового узла предлагается модель в виде n-мерного радиуса-вектора технического состояния объекта, который имеет направление к увеличению вероятности отказа, и ухудшению значений контролируемых параметров. (рис. 4). Для более точного определения предотказного состояния, как векторной величины, желательно использовать *динамические признаки распознавания*, то есть те, что отображают изменения параметров во времени. В частном случае модель предотказного состояния имеет вид трехмерного радиус-вектора, где абсциссе отвечает значение времени τ , ординате – диагностический параметр – температура T , аппликате – вероятность того, что букса находится в неисправном состоянии $P(H)$. За начало координат принимается значение параметра, при котором $P(I) = P(H)$, на рис. 3 это точка x_0 .



1 – буксы линейного типа; 2 – буксы экспонентного типа.

Рис. 3 – Типы аварийно греющихся букс.

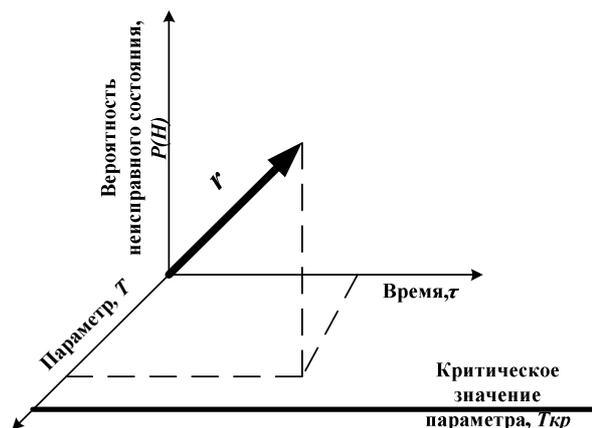


Рис. 4 – Радиус-вектор технического состояния буксового узла.

Перспективы дальнейших исследований. Перспективным путем продолжения данного исследования должно стать построение прогностической модели для буксовых узлов, находящихся в предотказном состоянии. Это позволит принимать решения о режиме движения поезда, в составе которого находится вагон с неисправной буксой.

Выводы. На основе проведенных исследований в работе были получены следующие результаты. Показано, что не все буксовые узлы, имеющие повышенную температуру, являются неисправными. Наибольший риск возникновения ошибки в определении технического состояния буксового узла возникает в так называемой *зоне неопределенности* из-за невозможности однозначно оценить его техническое состояние. Для определения технического состояния буксы в зоне неопределенности предложена модель в виде n-мерного радиуса-вектора, имеющего направление к увеличению вероятности отказа и ухудшению значений параметров.

Таким образом, разработанная модель определения предотказного состояния будет способствовать уменьшению вероятности ошибочного принятия решений о режиме движения поезда. Что, несомненно, повлияет на повышение безопасности движения поездов и на стабильность перевозочного процесса.

Список литературы: 1. Фомін О.В. Підвищення ступеня ідеальності вантажних вагонів та прогнозування стадій їх еволюції // Науковий вісник Національного гірничого університету. – Дніпропетровськ: НГУ, 2015. – №3. – С. 68 – 76. 2. Hodge V., O’Keefe S., Weeks M., Moulds A. Wireless Sensor Networks for Condition Monitoring in the Railway Industry: A Survey / IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. – 2015. – Vol. 16. – №3 (06). – P. 1088 – 1106. 3. Nan W., et al. Research on linear wireless sensor networks used for online monitoring of rolling bearing in

freight train // J. Phys., Conf. Ser. – Jan. 2011. – № 1. – P. 012 – 024. **4.** Schobel A., Karner J. Betrieb und Verkehr - Optimierungspotenziale bei der Stationierung von Heisslauferortungsanlagen // Eisenbahntechnische Rundschau ETR. – 2005. – №12. – P. 805 – 808. **5.** Reason J., Chen H., Crepaldi R., Duri S. Intelligent Telemetry for Freight Trains // Mobile Computing, Applications, Services. – 2010. – Vol. 35. – P. 72 – 91. **6.** Мартынов И.Э., Петухов В.М. Натурные испытания встроеной системы контроля технического состояния буксовых узлов // Мир транспорта. – 2013. – № 2. – С. 180 – 182. **7.** Мартынов И.Э. Результаты температурных испытаний дошедших буксовых узлов вантажних вагонів // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2004. – № 7 (1). – С. 66 – 69. **8.** Siyuan Ai, Wenzhong Wang, Yunlong Wang, Ziqiang Zhao Temperature rise of double-row tapered roller bearings analyzed with the thermal network method // Tribology International. – July 2015. – Vol. 87. – P. 11 – 22. **9.** Ke Yan, et al. Theoretical and experimental investigation on the thermal characteristics of double-row tapered roller bearings of high speed locomotive // International Journal of Heat and Mass Transfer. – May 2015. – Vol. 84. – P. 1119 – 1130. **10.** Миронов А.А., Образцов В.Л., Павлюков А.Э. Контролепригодность подвижного состава к тепловой бесконтактной диагностике // Автоматика, связь, информатика. – 2006. – № 11. – С. 54 – 57. **11.** Панкратов Л.В., Чистяков С.Н. Мониторинг нагрева букс // Автоматика, связь, информатика. – 2008. – №6. – С. 23 – 24. **12.** Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.

Bibliography (transliterated): 1. Fomin, O.V. "Pidvyshhennja stupenja ideal'nosti vantazhnyh vagoniv ta prognozuvannya stadij i'h evoljucii." *Naukovyj visnyk Nacional'nogo girnychogo universytetu.* Dnepropetrovsk: NGU. No. 3. 2015. 68–76. Print. **2.** Hodge, V., et al. "Wireless Sensor Networks for Condition Monitoring in the Railway Industry: A Survey." *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems.* Vol. 16. No. 3 (06). 2015. 1088–1106. Print. **3.** Nan, W., et al. "Research on linear wireless sensor networks used for online monitoring of rolling bearing in freight train." *J. Phys., Conf. Ser.* No. 1. 2011. 012–024. Print. **4.** Schobel, A., and J. Karner. "Betrieb und Verkehr - Optimierungspotenziale bei der Stationierung von Heisslauferortungsanlagen." *Eisenbahntechnische Rundschau ETR.* No. 12. 2005. 805 – 808. Print. **5.** Reason, J., et al. "Intelligent Telemetry for Freight Trains." *Mobile Computing, Applications, Services.* Vol. 35. 2010. 72–91. Print. **6.** Martynov, I. Je., and V. M. Petuhov. "Naturnye ispytaniya vstroennoj sistemy kontrolja tehničeskogo sostojanija buksovych uzlov." *Mir transporta.* No. 2. 2013. 180–182. Print. **7.** Martynov, I. E. "Rezultaty temperaturnyh vyprobuvan' doslidnyh buksovych vuzliv vantazhnyh vagoniv." *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij.* No. 7 (1). 2004. 66–69. Print. **8.** Siyuan, Ai. et al. "Temperature rise of double-row tapered roller bearings analyzed with the thermal network method." *Tribology International.* Vol. 87. 2015. 11–22. Print. **9.** Ke, Yan et al. "Theoretical and experimental investigation on the thermal characteristics of double-row tapered roller bearings of high speed locomotive." *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 84. 2015. 1119–1130. Print. **10.** Mironov, A. A., V. L. Obrazcov and A. Je. Pavljukov. "Kontrol'priгодnost' podvizhnogo sostava k teplovoj beskontaktojnij diagnostike." *Avtomatika, svjaz', informatika.* No. 11. 2006. 54–57. Print. **11.** Pankratov, L. V., and S. N. Chistjakov. "Monitoring nagreva buks." *Avtomatika, svjaz', informatika.* No. 6. 2008. 23–24. Print. **12.** Birger, I. A. *Tehničeskaja diagnostika.* Moscow: Mashinostroenie, 1978. Print.

Поступила (received) 30.10.2015

Петухов Вадим Михайлович – кандидат технічних наук, Український державний університет залізничного транспорту, м. Харків; тел.: (057) 730-10-35; e-mail: hiitwagon@mail.ru.

Петухов Вадим Михайлович – кандидат технічних наук, Український державний університет залізничного транспорту, г. Харьков; тел.: (057) 730-10-35; e-mail: hiitwagon@mail.ru.

Petukhov Vadim Mykhaylovych – Candidate of Engineering Sciences, Ukrainian State University of Railway Transport, tel.: (057) 730-10-35; e-mail: hiitwagon@mail.ru.

УДК 629.7.05

Ю. А. ПЛАКСІЙ

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТРЬОХЧАСТОТНОЇ ТРИГОНОМЕТРИЧНОЇ КВАТЕРНІОННОЇ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА. ПЕРШИЙ ТИП МОДЕЛІ

Запропонована нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на трьохчастотному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одночасно змінюються у часі згідно лінійного закону. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонентів кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделі. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі для параметрів орієнтації. Показано, що нова модель описує обертання твердого тіла, що різниться від випадку регулярної прецесії. Модель може бути застосована в якості еталонної для отримання оцінок похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

Вступ і постановка задачі. Аналіз похибок розрахункових алгоритмів, що застосовуються в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БНС), є важливим етапом проектування програмного забезпечення таких систем [1]. Для цього використовуються *еталонні моделі* обертання твердого тіла, які встановлюють певний зв'язок між кватерніоном орієнтації і первинною інформацією про обертання твердого тіла на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$, що надходить з виходів вимірників кутової швидкості у вигляді *квазікоординат* [2]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де ω_i , $i = 1, 2, 3$ – проєкції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}$ на осі зв'язаної системи координат.

У випадку застосування аналітичних (*неперервних*) еталонних моделей забезпечується точний зв'язок між квазікоординатами (1) і кватерніоном орієнтації моделі, бо в цьому випадку результати моделювання не містять

похибок від чисельного інтегрування, як це має місце у випадку *дискретних еталонних моделей* [3]. У якості аналітичних еталонних моделей на практиці зазвичай використовують випадки точних розв'язків в елементарних функціях сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (моделі *конічного руху* [4] та *регулярної прецесії* [5]). Оскільки реальний рух об'єкта, як правило, не відповідає випадку прецесії, то розширення класу неперервних еталонних моделей є актуальною задачею точного аналізу алгоритмів при проектуванні систем безплатформеної орієнтації.

Неперервна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятим в ній представленням кватерніона орієнтації $\Lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$. Щоб забезпечити виконання умови нормування кватерніона $\|\Lambda(t)\| = 1$, його компоненти представляються у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій (косинусів і синусів) відповідних кутів. Проекції вектора кутової швидкості обертального руху, яким відповідає кватерніон орієнтації $\Lambda(t)$, знайдуться з оберненого кінематичного рівняння [2]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\dot{\lambda}_1 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_1 + \lambda_3 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_3); \quad \omega_2 = 2(\dot{\lambda}_2 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_1); \\ \omega_3 &= 2(\dot{\lambda}_3 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_3 + \lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \dot{\lambda}_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Для моделювання квазікоординат (1) застосовується формула:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де $\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt$, $\theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt$, $i = 1, 2, 3$ – компоненти вектора *позірнього повороту* $\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt$,

обчислені в моменти часу t_n і t_{n-1} відповідно.

В даній роботі пропонується нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на узагальненні тригонометричної кінематичної моделі, яка представлена в [6].

Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі. В роботі [6] запропоновано представлення кінематичної частини еталонної моделі обертання твердого тіла у вигляді суперпозиції синусів і косинусів кутів, що лінійно змінюються у часі:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) - \xi \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t); \quad \lambda_1(t) = \eta \cdot \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \eta \cdot \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) + \xi \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t), \end{aligned} \quad (4)$$

де на параметри η і ξ накладається обмеження: $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Спираючись на представлення (4), запишемо компоненти кватерніона орієнтації узагальненої моделі в двох наступних виглядах:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lambda_0(t) &= \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) - \cos \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_{j1}(t) = \sin \vartheta(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \\ \lambda_{j2}(t) &= \sin \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_{j3}(t) = \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \cos \vartheta(t) \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \lambda_0(t) &= \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) - \sin \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_{j1}(t) = \cos \vartheta(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \\ \lambda_{j2}(t) &= \cos \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_{j3}(t) = \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \sin \vartheta(t) \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t), \end{aligned} \quad (6)$$

де індекси $j1, j2, j3$ компонент векторної частини кватерніона $\Lambda(t) = (\lambda_0, \vec{\lambda})^T$ утворюють одну з можливих перестановок чисел (1, 2, 3).

Кожне з представлень (5) і (6) із всіма можливими перестановками індексів $j1, j2, j3$ породжує по 6 різних моделей обертання, які у відповідності до типу перестановок можна поділити на дві групи однотипних моделей. Першу групу однотипних моделей утворюють моделі з перестановками індексів $j1, j2, j3$, що мають парну кількість інверсій відносно основної перестановки (1, 2, 3), другу групу – ті, що мають непарну кількість інверсій. Таким чином кожне з представлень (5) і (6) дає по дві групи однотипних моделей.

Розглянемо випадок кінематичної моделі (5), коли індекси $j1, j2, j3$ компонент векторної частини кватерніона утворюють основну перестановку (1, 2, 3). Тоді компоненти кватерніона орієнтації моделі приймають вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) - \cos \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_1(t) = \sin \vartheta(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \\ \lambda_2(t) &= \sin \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_3(t) = \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \cos \vartheta(t) \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Для цього представлення кватерніона орієнтації у відповідності до формул (2) отримаємо, що проекції вектора абсолютної кутової швидкості на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= \frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \sin(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \sin(2\phi(t) - \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t) \sin 2\vartheta(t) - \\ & - \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \sin(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) - \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \sin(2\vartheta(t) - 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_2(t) &= -\dot{\vartheta}(t) + \dot{\vartheta}(t) \cos 2\phi(t) + \dot{\psi}(t) \cos(\vartheta(t) - 2\phi(t)) - \dot{\psi}(t) \cos(\vartheta(t) + 2\phi(t)); \\ \omega_3(t) &= -\frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \cos(2\phi(t) - \vartheta(t)) + \frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \cos(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t) \cos 2\phi(t) + \\ &+ \dot{\psi}(t) + \dot{\psi}(t) \cos 2\vartheta(t) - \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \cos(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t) \cos \vartheta(t) - \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \cos(2\vartheta(t) - 2\phi(t)).\end{aligned}\quad (8)$$

Припустимо, що залежність кутів $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ від часу лінійна, тобто:

$$\vartheta(t) = k_1 t, \quad \psi(t) = k_2 t, \quad \phi(t) = k_3 t. \quad (9)$$

Для цього випадку *трьохчастотної моделі* компоненти кватерніона орієнтації (7) набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_1(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \\ \lambda_2(t) &= \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t); \quad \lambda_3(t) = \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \cos(k_1 t) \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t),\end{aligned}\quad (10)$$

а проєкції вектора кутової швидкості згідно з (8) задаються формулами:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= \frac{1}{2} k_1 \sin(2k_3 + k_1)t + \frac{1}{2} k_1 \sin(2k_3 - k_1)t + k_2 \sin 2k_1 t - \frac{1}{2} k_2 \sin(2k_1 + 2k_3)t - \frac{1}{2} k_2 \sin(2k_1 - 2k_3)t + 2k_3 \sin k_1 t; \\ \omega_2(t) &= -k_1 + k_1 \cos 2k_3 t + k_2 \cos(k_1 - 2k_3)t - k_2 \cos(k_1 + 2k_3)t; \\ \omega_3(t) &= -\frac{1}{2} k_1 \cos(2k_3 - k_1)t + \frac{1}{2} k_1 \cos(2k_3 + k_1)t + k_2 \cos 2k_1 t + k_2 + k_2 \cos 2k_1 t - \\ &- \frac{1}{2} k_2 \cos(2k_1 + 2k_3)t - \frac{1}{2} k_2 \cos(2k_1 - 2k_3)t + 2k_3 \cos k_1 t.\end{aligned}\quad (11)$$

Для отримання компонент вектора позірною повороту $\bar{\theta}(t)$ проінтегруємо вирази для $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на інтервалі $[0, t]$, в результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= -\frac{k_1}{2(2k_3 + k_1)} (\cos(2k_3 + k_1)t - 1) - \frac{k_1}{2(2k_3 - k_1)} (\cos(2k_3 - k_1)t - 1) - \\ &- \frac{k_2}{2k_1} (\cos 2k_1 t - 1) + \frac{k_2}{2(2k_1 + 2k_3)} (\cos(2k_1 + 2k_3)t - 1) - \frac{2k_3}{k_1} (\cos k_1 t - 1) + \frac{k_2}{2(2k_1 - 2k_3)} (\cos(2k_1 - 2k_3)t - 1); \\ \theta_2(t) &= -k_1 t + \frac{k_1}{2k_3} \sin 2k_3 t + \frac{k_2}{k_1 - 2k_3} \sin(k_1 - 2k_3)t - \frac{k_2}{k_1 + 2k_3} \sin(k_1 + 2k_3)t; \\ \theta_3(t) &= -\frac{k_1}{2(k_1 - 2k_3)} \sin(k_1 - 2k_3)t + \frac{k_1}{2(2k_3 + k_1)} \sin(2k_3 + k_1)t + k_2 t + \frac{k_2}{2k_3} \sin 2k_3 t + \frac{k_2}{2k_1} \sin 2k_1 t - \\ &- \frac{k_2}{2(2k_1 + 2k_3)} \sin(2k_1 + 2k_3)t - \frac{k_2}{2(2k_1 - 2k_3)} \sin(2k_1 - 2k_3)t + \frac{2k_3}{k_1} \sin k_1 t.\end{aligned}\quad (12)$$

Відтворення квазікоординат (1) в еталонній моделі відбувається в аналітичному вигляді за формулою (3) з використанням формул (12).

Далі розглянемо другий випадок кінематичного представлення модельного кватерніона у вигляді (6), а саме, коли індекси j_1, j_2, j_3 компонент його векторної частини утворюють основну перестановку (1, 2, 3). За цих умов кватерніон орієнтації моделі задається своїми компонентами у вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos \psi(t) \cdot \cos \phi(t) - \sin \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_1(t) = \cos \vartheta(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \\ \lambda_2(t) &= \cos \vartheta(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \phi(t); \quad \lambda_3(t) = \sin \psi(t) \cdot \cos \phi(t) + \sin \vartheta(t) \cos \psi(t) \cdot \sin \phi(t).\end{aligned}\quad (13)$$

Такому кватерніону орієнтації відповідають наступні вирази для проєкцій вектора $\bar{\omega}(t)$ на зв'язані осі:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= -\frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \cos(\vartheta(t) - 2\phi(t)) + \frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \cos(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t) \sin 2\vartheta(t) - \\ &- \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \sin(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) - \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \sin(2\vartheta(t) - 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t) \cos \vartheta(t); \\ \omega_2(t) &= \dot{\vartheta}(t) - \dot{\vartheta}(t) \cos 2\phi(t) + \dot{\psi}(t) \sin(\vartheta(t) + 2\phi(t)) + \dot{\psi}(t) \sin(2\phi(t) - \vartheta(t)); \\ \omega_3(t) &= \frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \sin(2\phi(t) + \vartheta(t)) + \frac{1}{2} \dot{\vartheta}(t) \sin(2\phi(t) - \vartheta(t)) + \dot{\psi}(t) \cos 2\phi(t) + \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}(t) \cos 2\vartheta(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \cos(2\vartheta(t) + 2\phi(t)) + 2\dot{\phi}(t) \sin \vartheta(t) + \frac{1}{2} \dot{\psi}(t) \cos(2\vartheta(t) - 2\phi(t)).\end{aligned}\quad (14)$$

В припущенні, що кути $\vartheta(t)$, $\psi(t)$, $\phi(t)$ змінюються з часом лінійно у відповідності до (9), з формул (14) отримаємо, що:

$$\omega_1(t) = -\frac{1}{2} k_1 \cos(k_1 - 2k_3)t + \frac{1}{2} k_1 \cos(2k_3 + k_1)t + k_2 \sin 2k_1 t - \frac{1}{2} k_2 \sin(2k_1 + 2k_3)t - \frac{1}{2} k_2 \sin(2k_1 - 2k_3)t + 2k_3 \cos k_1 t;$$

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= k_1 - k_1 \cos 2k_3 t + k_2 \sin(k_1 + 2k_3)t + k_2 \sin(2k_3 - k_1)t ; \\ \omega_3(t) &= \frac{1}{2} k_1 \sin(2k_3 + k_1)t + \frac{1}{2} k_1 \sin(2k_3 - k_1)t + k_2 \cos 2k_3 t - k_2 \cos 2k_1 t + \\ &+ k_2 + \frac{1}{2} k_2 \cos(2k_1 + 2k_3)t + 2k_3 \sin k_1 t + \frac{1}{2} k_2 \cos(2k_1 - 2k_3)t . \end{aligned} \quad (15)$$

Кватерніон орієнтації, що відповідає такому обертовальному руху, задається компонентами:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) ; \lambda_1(t) = \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) ; \\ \lambda_2(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) \quad \lambda_3(t) = \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) + \sin(k_1 t) \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) . \end{aligned} \quad (16)$$

Компоненти $\theta_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) вектора позірнього повороту $\bar{\theta}(t)$ знайдуться після інтегрування виразів для $\omega_i(t)$ на інтервалі $[0, t]$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= -\frac{k_1}{2(k_1 - 2k_3)} \sin(k_1 - 2k_3)t + \frac{k_1}{2(k_1 + 2k_3)} \sin(k_1 + 2k_3)t - \frac{k_2}{2k_1} (\cos 2k_1 t - 1) + \frac{k_2}{2(2k_1 + 2k_3)} (\cos(2k_1 + 2k_3)t - 1) + \\ &+ \frac{2k_3}{k_1} \sin k_1 t + \frac{k_2}{2(2k_1 - 2k_3)} (\cos(2k_1 - 2k_3)t - 1) ; \\ \theta_2(t) &= k_1 t - \frac{k_1}{2k_3} \sin 2k_3 t - \frac{k_2}{k_1 + 2k_3} (\cos(k_1 + 2k_3)t - 1) - \frac{k_2}{2k_3 - k_1} (\cos(2k_3 - k_1)t - 1) ; \\ \theta_3(t) &= -\frac{k_1}{2(k_1 + 2k_3)} (\cos(k_1 + 2k_3)t - 1) - \frac{k_1}{2(2k_3 - k_1)} (\cos(2k_3 - k_1)t - 1) + k_2 t + \frac{k_2}{2k_3} \sin 2k_3 t - \frac{k_2}{2k_1} \sin 2k_1 t + \\ &+ \frac{k_2}{2(2k_1 + 2k_3)} \sin(2k_1 + 2k_3)t + \frac{k_2}{2(2k_1 - 2k_3)} \sin(2k_1 - 2k_3)t - \frac{2k_3}{k_1} (\cos k_1 t - 1) . \end{aligned} \quad (17)$$

Квазікоординати (1), яким відповідають компоненти кватерніона орієнтації (16), можуть бути отримані на основі формул (17) в аналітичному вигляді за формулою (3).

Сукупність формул (17), (3) і (16), як і формул (12), (3) і (10), формально задають деяку *опорну еталонну модель* обертання твердого тіла. Якщо належним чином задати в цих формулах значення параметрів k_1, k_2, k_3 і такт обчислень Δt , отримаємо конкретну еталонну модель. Так, наприклад, параметри k_1, k_2, k_3 можуть бути заданими, виходячи з величини максимального модуля вектора кутової швидкості $\bar{\omega}(t)$ для об'єкта, що розглядається, або отримані, як результат відповідних апроксимацій реального руху об'єкта.

Зауважимо, що оскільки для запропонованої еталонної моделі обертання в ході її побудови були також отримані і представлені для компонент вектора модельної кутової швидкості (8) і (14), то цю модель можна використовувати і у випадку первинної інформації про обертання об'єкта у вигляді проєкцій $\omega_i, i = 1, 2, 3$ вектора абсолютної кутової швидкості $\bar{\omega}$ твердого тіла на зв'язані осі, що знімаються з вимірювачів в моменти часу $t_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Чисельна реалізація узагальненої моделі. Побудуємо еталонну модель згідно формул (12), (3), (10) для декількох значень параметрів k_1, k_2, k_3 і такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с.

Для набору параметрів $k_1 = 0,015, k_2 = 0,025, k_3 = 0,005$ результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ ($i = 1, 2, 3$) в конфігураційному просторі представлені відповідно на рис. 1 та рис. 2.

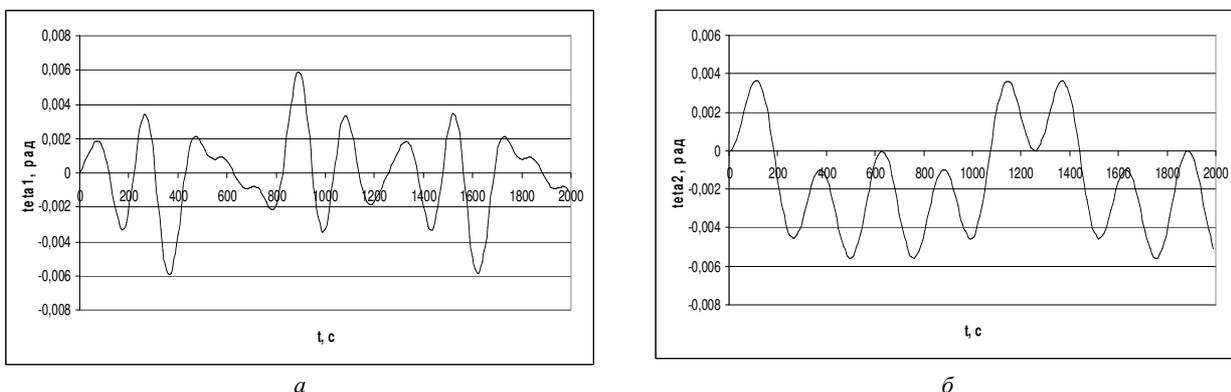
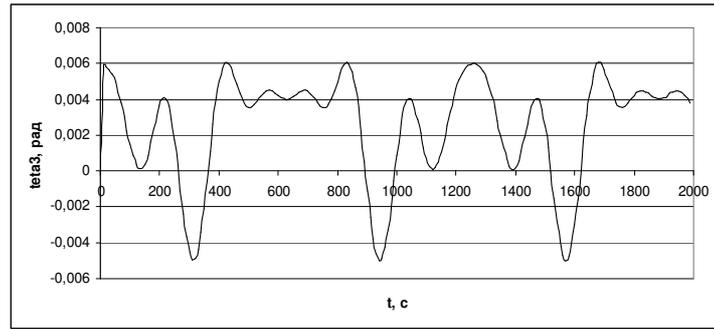


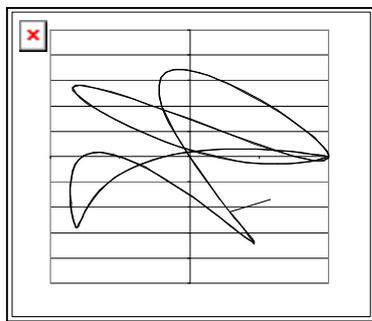
Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015, k_2 = 0,025, k_3 = 0,005$:
 а – по першій осі; б – по другій осі.



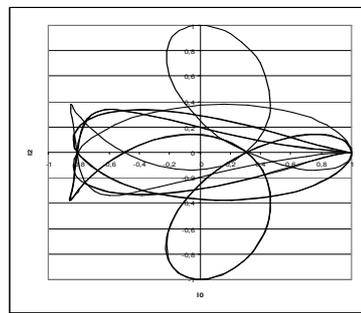
в

Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:
а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

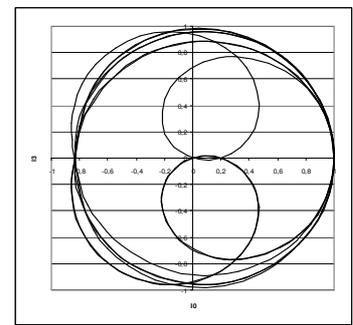
Результати реалізації еталонної моделі (12), (3), (10) для значень параметрів $k_1 = -0,03$, $k_2 = 0,045$, $k_3 = -0,024$ на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 3 і рис. 4.



а

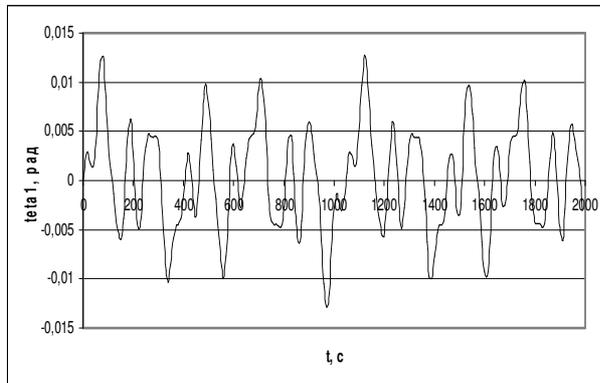


б

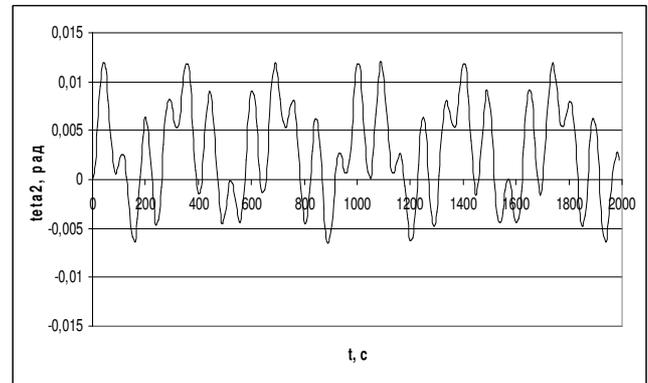


в

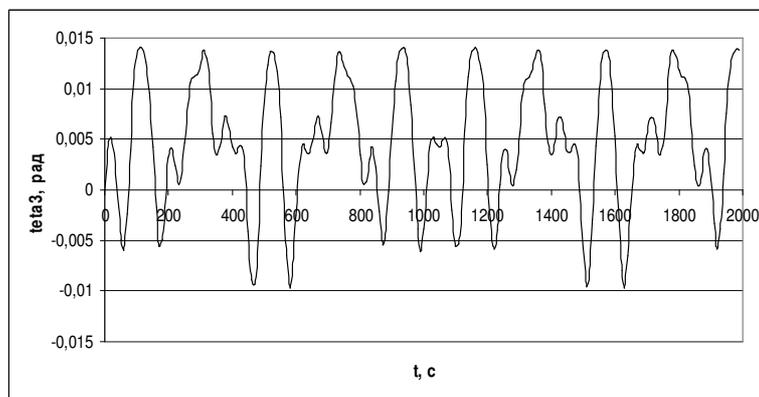
Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:
а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.



а



б



в

Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = -0,03$, $k_2 = 0,045$, $k_3 = -0,024$:
а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

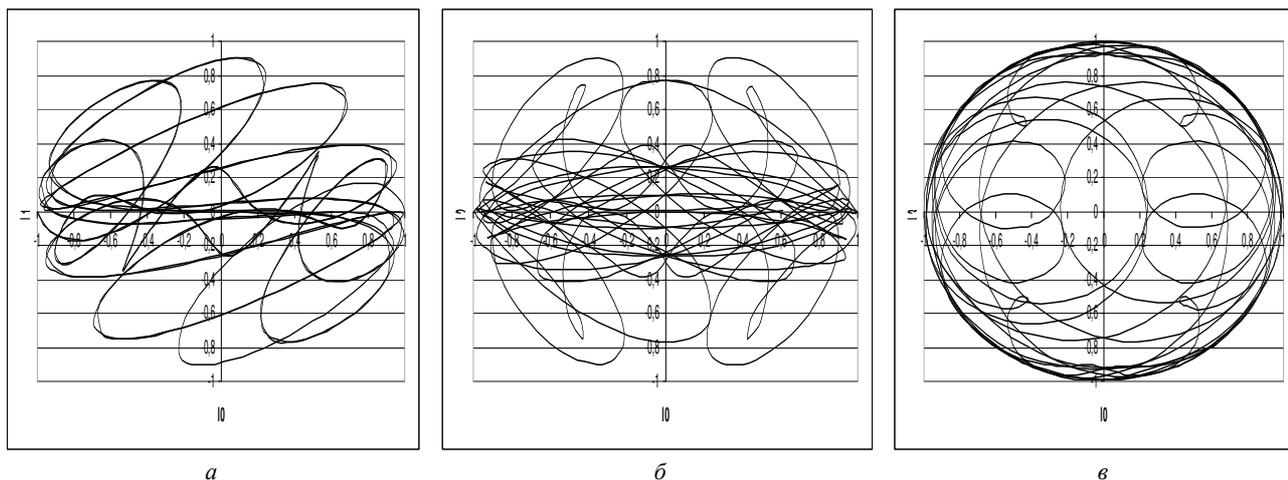


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (12), (3), (10) при $k_1 = -0,03$, $k_2 = 0,045$, $k_3 = -0,024$:
 а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Побудуємо еталонну модель (17), (3), (16) для декількох значень параметрів k_1 , k_2 , k_3 і такту обчислень $\Delta t = 0,1$ с. Для набору параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$ результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат θ_{ni}^* від часу та траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі представлені на рис. 5 та рис. 6.

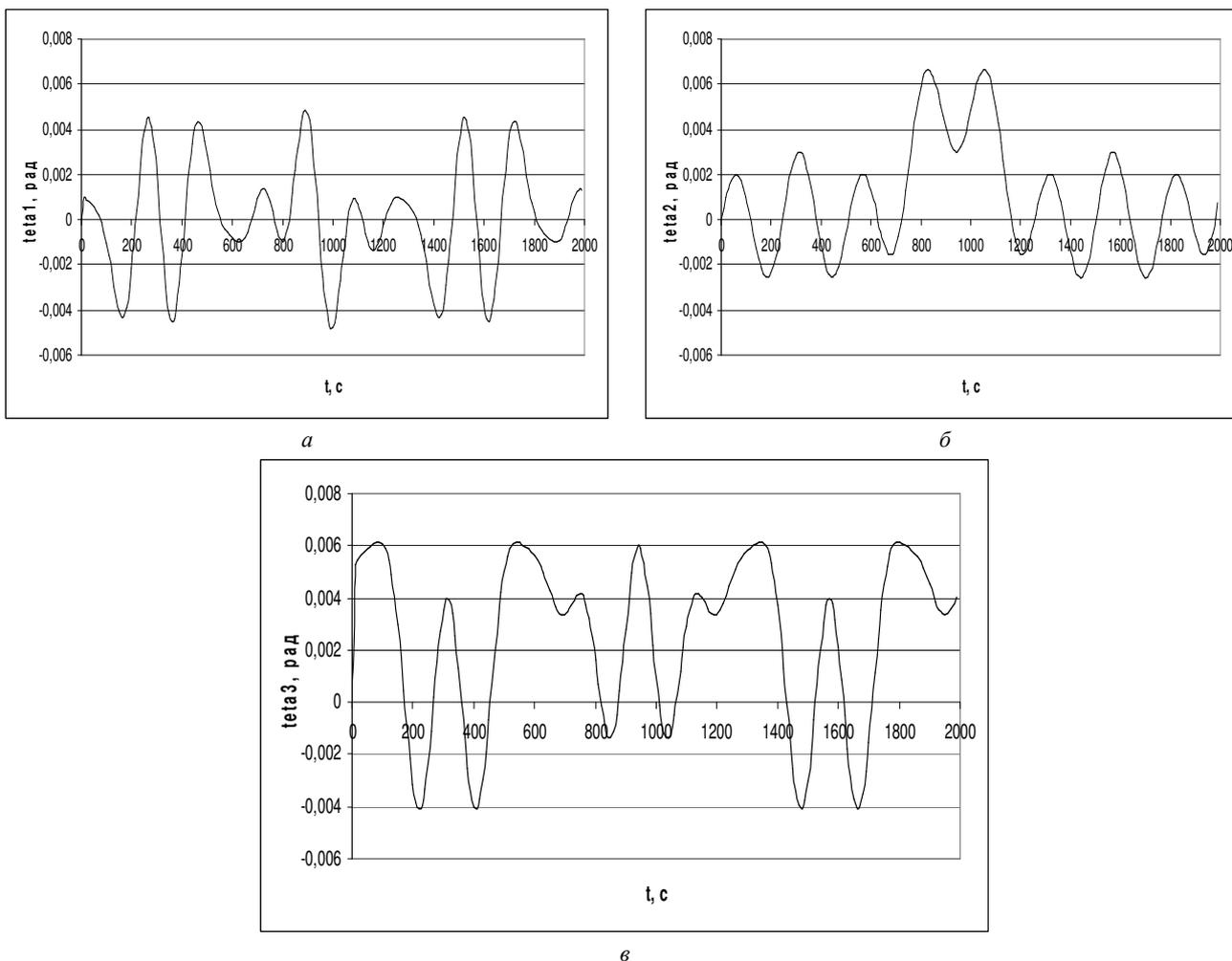


Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$
 а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

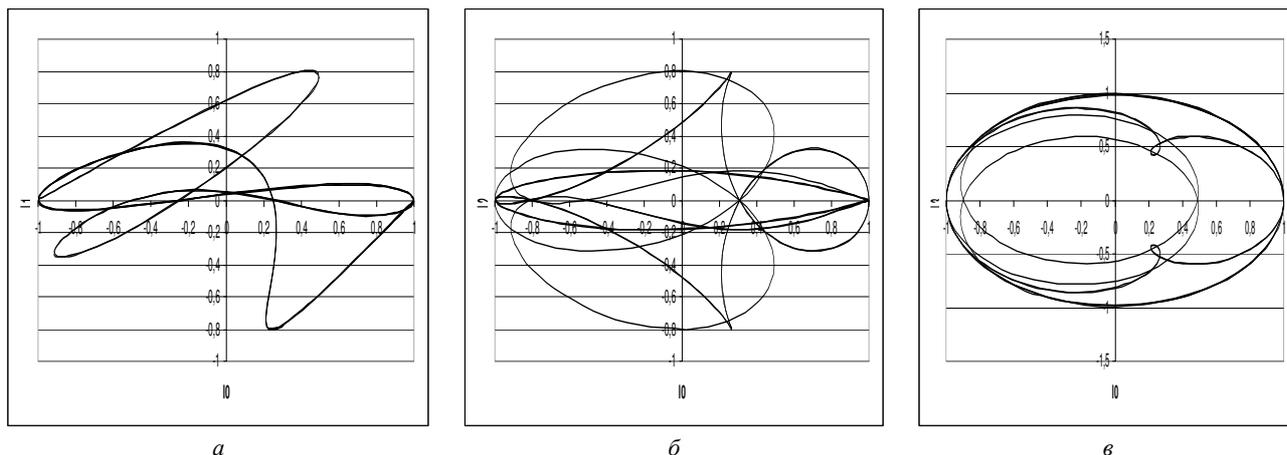


Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$:
 а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Результати реалізації еталонної моделі (17), (3), (16) для набору параметрів $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,03$ на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 7 і рис. 8.

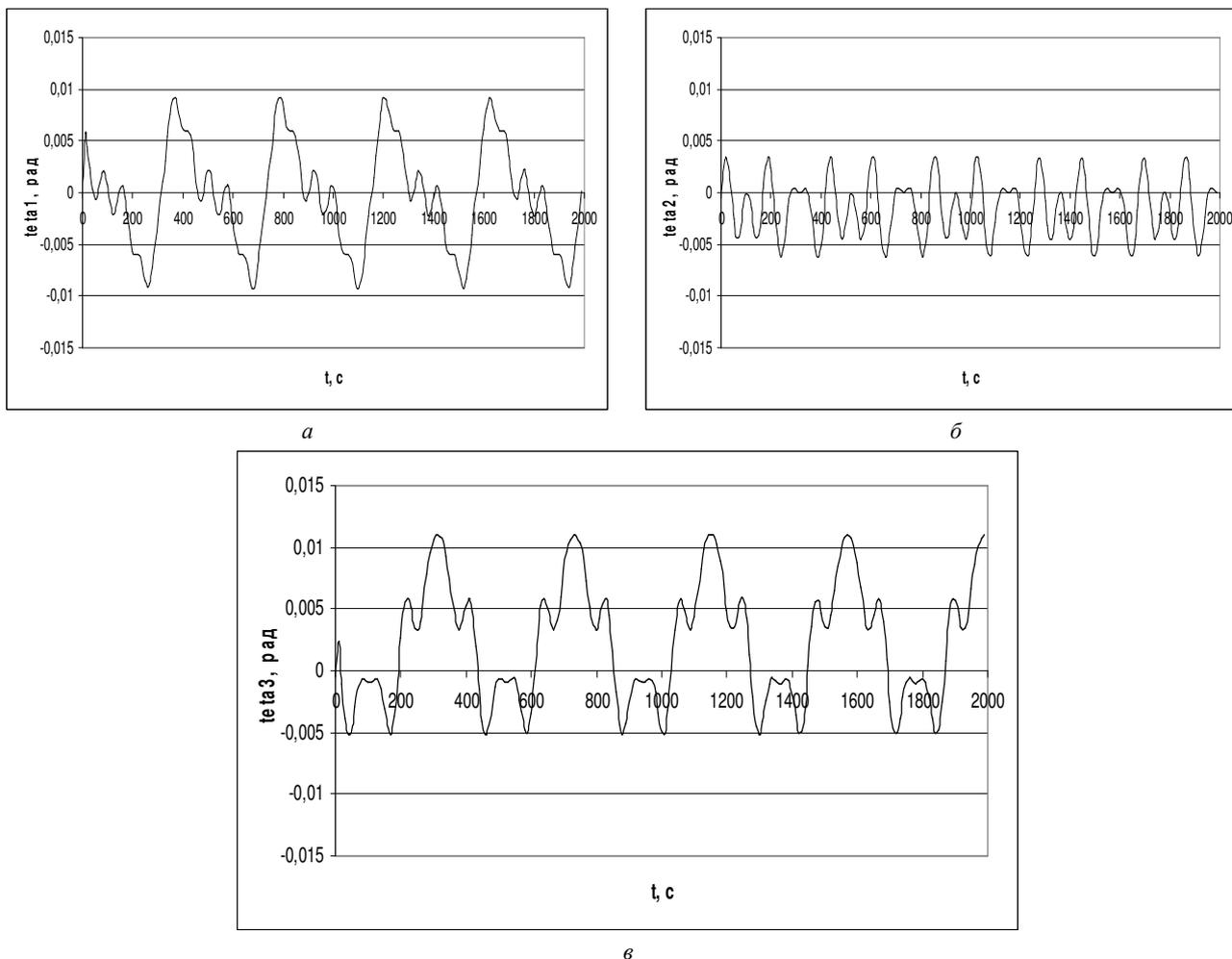


Рис. 7 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,03$:
 а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

В роботі [7] наведено модель регулярної прецесії з вектором кутової швидкості $\vec{\omega}(t) = (\mu \sin \vartheta \sin \nu t; \mu \sin \vartheta \cos \nu t; \nu + \mu \cos \vartheta)^T$. Траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі для цієї моделі представлені на рис. 9.

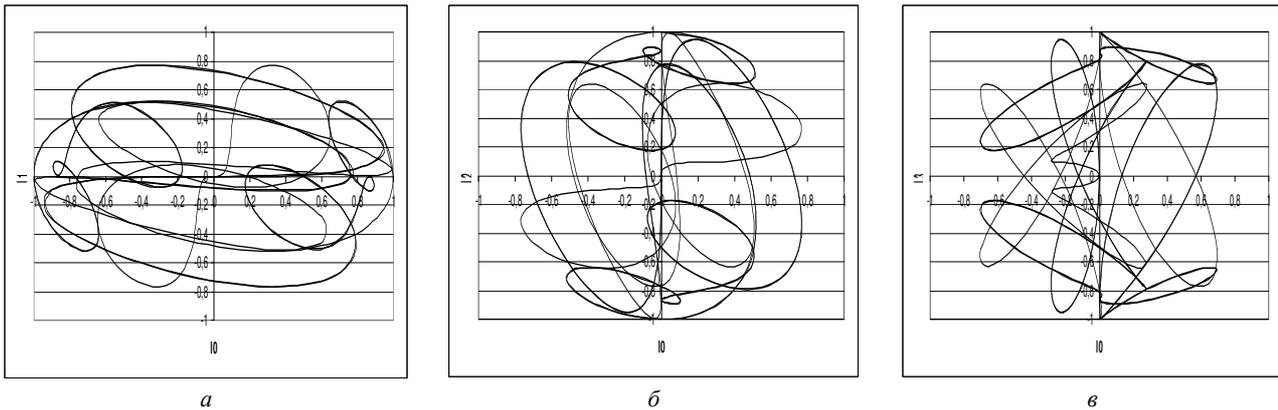


Рис. 8 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (17), (3), (16) при $k_1 = 0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,03$:
 а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

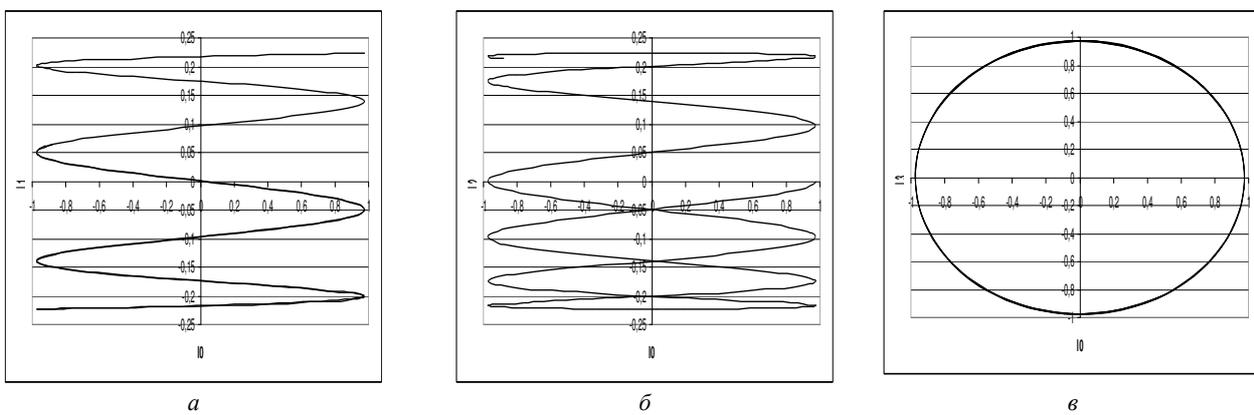


Рис. 9 – Траєкторії в конфігураційному просторі для регулярної прецесії:
 а – траєкторія $\lambda_1(\lambda_0)$; б – траєкторія $\lambda_2(\lambda_0)$; в – траєкторія $\lambda_3(\lambda_0)$.

Модель побудована на інтервалі часу $t \in [0, 2000]$ с при значеннях параметрів $\nu = 0,02$, $\mu = 0,015$, $\vartheta = 0,45$. Порівняння результатів реалізацій запропонованої узагальненої моделі обертання з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропонована модель охоплює обертальні рухи твердого тіла, які суттєво відрізняються від регулярної прецесії.

Висновки. Представлена нова узагальнена трьохчастотна неперервна модель обертання твердого тіла, основана на представленні кватерніона орієнтації тригонометричними функціями кутів, що лінійно змінюються у часі. В результаті аналізу побудованих траєкторій $\lambda_i(\lambda_0)$ в конфігураційному просторі показано, що при належному виборі параметрів цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, що відрізняються від класичного випадку регулярної прецесії. Отриману еталонну модель можна застосовувати для оцінювання похибок алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

Список літератури: 1. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электронприбор», – 2003. – С. 250 – 260. 2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. 3. Savage P.G. Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints. Pp. (4–1)–(4–33). 4. Ткаченко А.И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 5. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. 6. Плаксий Ю.А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ». – 2013. – №37 (1010). – С.141 – 147.

Bibliography (transliterated): 1. Litmanovich, Yu. "Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialah Sankt-Peterburgskih konferencij za desjatiletie." X Sankt-Peterburgskaja Mezhdunar. konf. S.-Peterburg: CNII «Jelektroprjbor», 2003. 250–260. Print. 2. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem. Moscow: Nauka, 1992. Print. 3. Savage, P. G. "Strapdown System Performance Analysis." RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints. (4–1)–(4–33). Print. 4. Tkachenko, A. I. "O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmah opredelenija orientacii ob'ekta." Kibernet. i vychisl. tehn. No. 5. Kiev, 1970. 20–22. Print. 5. Panov, A. P. "Optimizacija vysokotochnykh algoritmov vychislenija kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela." Kibernet. i vychisl. tehn. No. 73. Kiev, 1987. 3–9. Print. 6. Plaksij, Yu. A. "Eetalonna trygonometrychna kvaternionna model' precessijnogo typu obertannja tverdogo tila." Visnyk NTU «KhPI». No. 37 (1010). Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 141–147. Print.

Надійшла (received) 04.09.2015

Плаксій Юрій Андрійович – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiyya@rambler.ru.

Плаксій Юрій Андреевич – кандидат технических наук, профессор, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiyya@rambler.ru.

Plaksiy Yuriy Andreevich – Candidate of Engineering Sciences, Professor, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiyya@rambler.ru.

УДК 621.9.06

С. В. СТРУТИНСЬКИЙ

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ПРИНЦИПИ ТЕОРІЇ ПРОЕКТУВАННЯ ІННОВАЦІЙНИХ МЕХАТРОННИХ ПРОСТОРОВИХ СИСТЕМ ПРИВОДІВ

Розроблено концепцію та основні принципи теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів. Концепція включає розробку інноваційних просторових систем приводів на новій елементній базі. Елементна база створена на основі аналізу робочих процесів у просторових системах приводів. Запропоновано основні етапи теорії проектування, які у своєму взаємозв'язку дають можливість розробити систему приводів просторового типу. Системи приводів призначені для маніпулювання об'єктами машинобудування, в тому числі в екстремальних умовах експлуатації. Вони забезпечують роботу в замкнених об'єктах та переміщення об'єктів по стінках. Етапи включають синтез схемних рішень, розрахунків, макетування, визначення статичних і динамічних характеристик, створення елементної бази та алгоритмічного забезпечення роботи мехатронної системи і апробацію дослідних зразків систем.

Ключові слова: просторові приводи, теорія проектування, синтез схем, розрахунок, макетування, статика, динаміка, апробація.

Вступ. Просторові системи приводів є основою прогресивного технологічного обладнання з паралельними кінематичними структурами. Розвиток просторових систем приводів стримується відсутністю теорії їх проектування.

Проблема в загальному вигляді полягає у створенні ефективного технологічного обладнання. Ця проблема пов'язана із важливими науковими і практичними завданнями розвитку машинобудування.

Аналіз останніх досліджень. В [1] наведена значна кількість розробок просторових систем приводів. В [2] значну увагу приділено дослідженню кінематики просторових систем та розробці їх основних вузлів. Розглянуто перспективні напрямки розробки просторових систем приводів. Одним із ефективних напрямків є розробка пристроїв мікромеханіки на основі просторових систем приводів [3, 4]. В окремих публікаціях [5, 6] наведені рекомендації по розробці схемних рішень просторових систем та розрахунку їх параметрів. Відзначена надзвичайна складність синтезу просторових механізмів.

В літературних джерелах і мережі Internet не виявлено розробок теорії проектування просторових систем приводів. Тому розробки в даному напрямку є актуальними.

До невирішених раніше частин загальної проблеми відноситься розробка концептуальних принципів теорії проектування інноваційних просторових систем приводів.

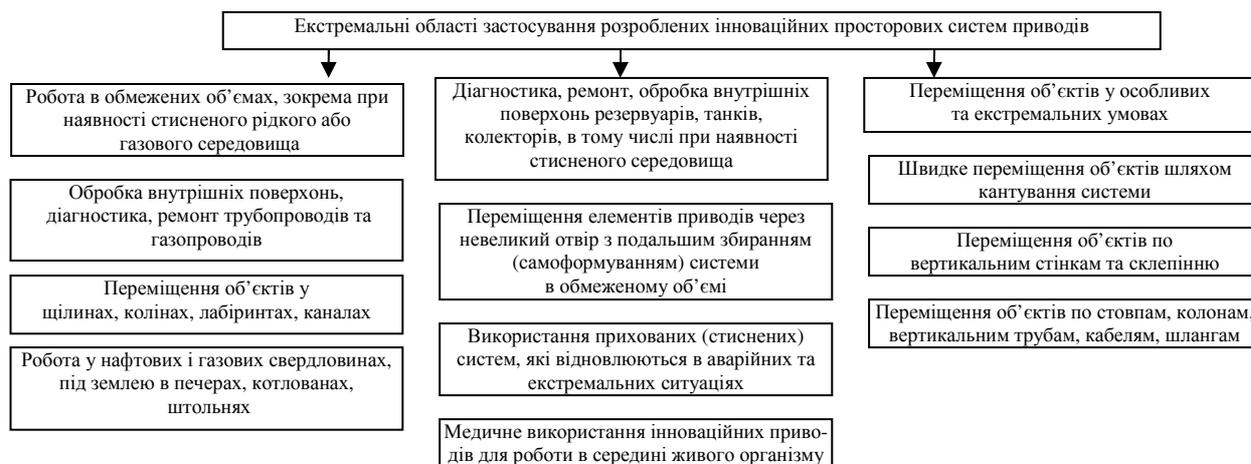


Рис. 1 – Застосування інноваційних мехатронних просторових систем приводів у екстремальних умовах.

Постановка задачі. Для широкого впровадження просторових систем приводів необхідно розробити тео-

рію їх проектування. Тому метою досліджень поставлено розробку концептуальних принципів теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів. Задачами досліджень поставлена розробка концепції та формування основних положень теорії проектування, формування основних етапів теорії проектування та пропозицій по їх реалізації і практичне підтвердження розроблених концептуальних принципів.

Основні етапи теорії проектування. Інноваційними мехатронними просторовими системами приводів вважаються перспективні розробки в галузі машинознавства, що забезпечують суттєвий ріст якісних властивостей обладнання, що включає систему приводів [2].

Інноваційна мехатронна просторова система приводів має вузли, що можуть змінювати свою довжину або форму та з'єднані в точках, які розташовані в просторі довільним чином і переміщуються під час роботи за допомогою системи керування з потужним інтелектуальним блоком.

Традиційно просторові системи приводів застосовуються в технологічному обладнанні, зокрема маніпуляторах, промислових роботах, металорізальних верстатах, вимірвальних машинах, тренажерах та інших.

Інноваційні мехатронні просторові системи приводів найбільш ефективні для вирішення екстремальних задач (рис. 1).

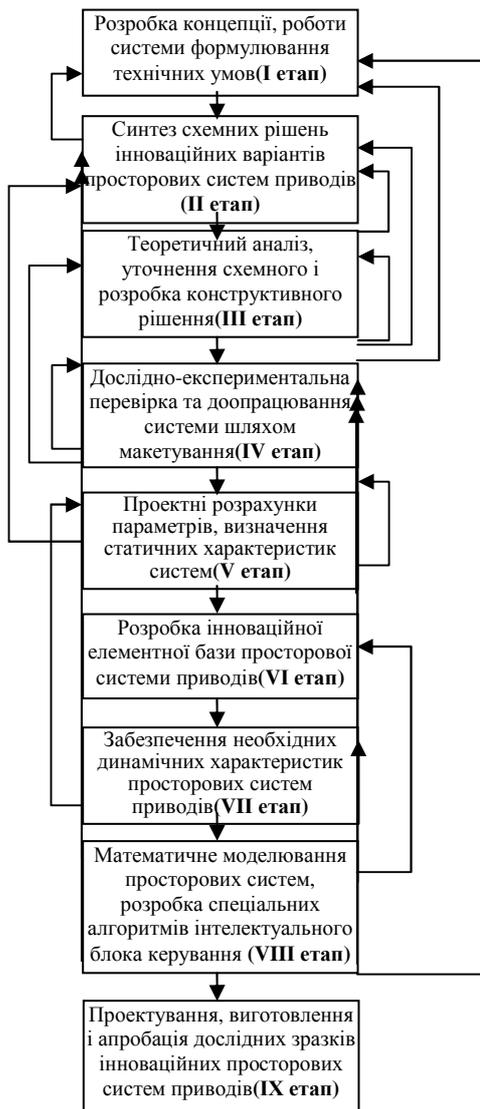


Рис. 2 – Основні етапи теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів та їх взаємний зв'язок.

нові сильфонних пневмодвигунів є запропоновані безшарнірні просторові системи приводів.

Третій підхід полягає у використанні запропонованих пластично деформованих шарнірних та безшарнірних систем, які об'єднують термомеханічні мехатронні приводи на основі сплавів з пам'яттю форми.

Технічні умови на просторові системи приводів, які розробляються, визначають регламентні функціональні можливості системи, діапазони змін силових і кінематичних параметрів, необхідні масо-габаритні характеристики систем та інші параметри.

До таких задач відноситься робота в обмежених об'ємах, таких як трубопроводи, ємності, резервуари, колектори тощо. Ефективним є застосування пристроїв маніпулювання на основі просторових систем приводів для механізації важких, небезпечних робіт, робіт в складних екологічних умовах. Зокрема це пристрої фарбування, гідроструменевої або піскоструменевої очистки. Пристрої маніпулювання ефективні при розбиранні завалів на сміттєзвалищах, для розбирання та сортування сміття та брухту. Для пакувальної промисловості, в тому числі токсичних матеріалів.

Окремі застосування просторових систем приводів орієнтовані на роботу в небезпечних зовнішніх умовах.

Згідно розроблених концептуальних принципів теорія проектування просторових систем приводів включає ряд послідовних етапів від розробки концепції системи та формулювання технічних умов до апробації дослідних зразків (рис. 2).

Розглянемо окремо кожний із етапів теорії проектування.

Перший етап. На ньому проводиться розробка концепції та формулювання технічних умов.

Розробки концепції роботи просторової системи приводів базується на створенні принципово нових (інноваційних) приводів. Запропоновано три принципово різні концептуальні підходи до реалізації інноваційних просторових систем приводів.

Перший відповідає використанню традиційних приводів у вигляді пневмоциліндрів, з'єднаних шарнірами. Вони реалізуються у вигляді комплектних багатопозиційних пневмоциліндрів із відповідними системами дискретного керування. Для забезпечення необхідної точності комплектні дискретні приводи оснащені лінійними приводами мікропереміщень.

Другий підхід до реалізації схемних рішень просторових систем приводів полягає у застосуванні пружно-деформованих сильфонних приводів або приводів на основі шлангових пневмодвигунів (*пневмом'язів*). Особливим видом просторових систем приводів на ос-

Другий етап теорії проектування. Проводиться синтез схемних рішень (рис. 2). Синтез схемних рішень необхідної кількості варіантів систем проводиться відповідно технічних умов. Синтез схемних рішень здійснюється на основі розроблених і систематизованих базових схем механізмів, призначених для переміщення одного або кількох виконавчих органів у просторі.

Запропоновано близько 100 базових схем, які відрізняються просторовим положенням елементів та характером руху окремих приводів у системі [7]. Серед базових схем наявні *основні*, які апробовані позитивним досвідом розробки і використання, та *перспективні схеми*, які мають особливі властивості. До основних базових схем відноситься схема відповідна механізмам-гексаподам чи гексаглайдам (рис. 3).

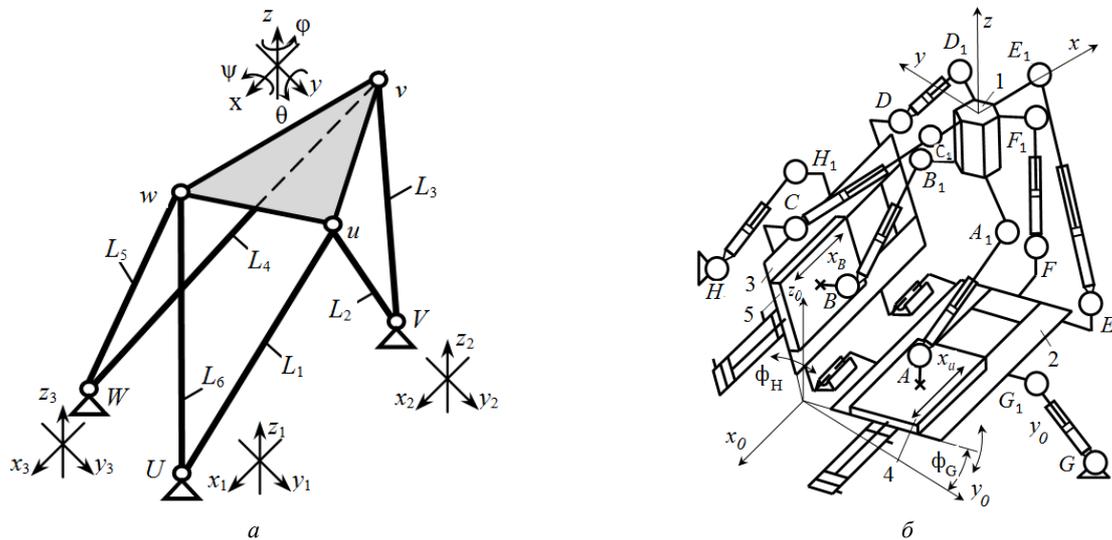


Рис. 3 – Одна із основних базових схем просторових систем приводів: *a* – механізм-гексапод або механізм-гексаглайд; *б* – варіант схемного рішення просторової системи 10 приводів.

Наведена схема (рис. 3, *a*) має шість штанг змінної або постійної довжини $L_1 \dots L_6$ та три суміщені опори штанг U, V, W , опори яких $U, V, W \in$ нерухомі або переміщуються в напрямках $x_1, y_1, z_1, \dots, x_3, y_3, z_3$. Система має виконавчий орган uvw , який переміщується в просторі. Положення виконавчого органу характеризується шестивимірним вектором x – координат з компонентами:

$$(x_i) = [x, y, z, \psi, \theta, \phi]^T. \quad (1)$$

Дана система приводів має 15 ступенів вільності. Для забезпечення переміщення виконавчого органу достатньо шести ступенів вільності, наприклад L – координат у вигляді довжин штанг:

$$(L_i) = [L_1 \dots L_6]^T,$$

при нерухомих опорах U, V, W . При цьому реалізується механізм-гексапод із суміщеними опорами.

Згідно запропонованих концептуальних принципів побудови системи приводів опорні вузли U, V, W та з'єднання штанг із виконавчим органом u, v, w реалізуються у вигляді шарнірів або у вигляді пружно-деформованих чи пластично-деформованих елементів.

Основні базові схеми доповнені різноманітними схемними рішеннями із взаємозалежними переміщеннями опорних вузлів та різними варіантами встановлення приводів. Як приклад наведено варіант схемного рішення системи, що має 10 приводів, які утворюють просторову систему (рис. 3, *б*). Основою даного схемного рішення є механізм-гексапод із виконавчим органом 1. При цьому опорні вузли механізму A і B мають дві додаткові ступені вільності, а вузли C, D, E, F мають попарно взаємопов'язані додаткові ступені вільності.

Третій етап теорії проектування. Проводиться теоретичний аналіз схемного рішення (рис. 2). Синтезоване схемне рішення просторової системи приводів аналізується з метою його уточнення. Насамперед перевіряється працездатність розробленої системи, її відповідність поставленим вимогам та можливість забезпечення необхідних статичних і динамічних характеристик. Для уточнення схемного рішення проводиться теоретичний аналіз механізму, що відповідає схемному рішенню.

Теоретичний аналіз здійснюється для малих змін положення системи приводів, а при необхідності – для кінцевих (великих) змін положення елементів системи. Для малих змін координат маємо лінійну залежність x – координат від L – координат у вигляді:

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial L_j} \delta L_j, \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad \text{або} \quad (\delta x_i) = (m_{ij})(\delta L_j), \quad (2)$$

де (m_{ij}) – матриця взаємозв'язку координат механізму (матриця Якобі).

Залежності (2) відповідають розв'язку прямої задачі кінематики, коли за змінами L – координат визначаються зміни x – координат виконавчого органу. Зворотна задача кінематики стосовно просторової системи приводів полягає у знаходженні L – координат по заданим змінам x – координат згідно залежностей:

$$\delta L_j = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial L_j}{\partial x_i} \delta x_i, \quad j=1, 2, \dots, 6, \quad \text{або} \quad (\delta L_j) = (n_{ji})(\delta x_i). \quad (3)$$

Теоретичний аналіз схемного рішення при великих змінах координат здійснено аналітичними методами або твердотільним моделюванням. Для розрахунку геометрії і кінематики просторових систем запропоновано математичний апарат на основі просторових матриць, сформованих на основі методів Монте-Карло [7]. Відповідно даного методу задається ряд випадкових положень просторової системи із подальшою фільтрацією фізично нереальних співвідношень параметрів системи. Застосування методів Монте-Карло значно спрощує розв'язок прямої задачі кінематики просторових механізмів, не потребує формування ітераційної процедури для розв'язку прямої задачі кінематики.

Уточнення схемного рішення, насамперед, здійснюється перевіркою працездатності системи. Одна із причин втрати працездатності просторової системи приводів є наявність в межах її робочого простору особливих (сингулярних) положень. Причинами виникнення сингулярних положень є нераціональне схемне рішення, недостатня жорсткість системи або наявність люфтів і зазорів у рухомих з'єднаннях системи. Геометричні сингулярні положення виникають при невизначеності зв'язку між кінематичними параметрами елементів, які утворюють рухомі (шарнірні) з'єднання. Механізм-гексапод при нераціональних геометричних співвідношеннях має чітко визначені сингулярні положення (рис. 4, а).

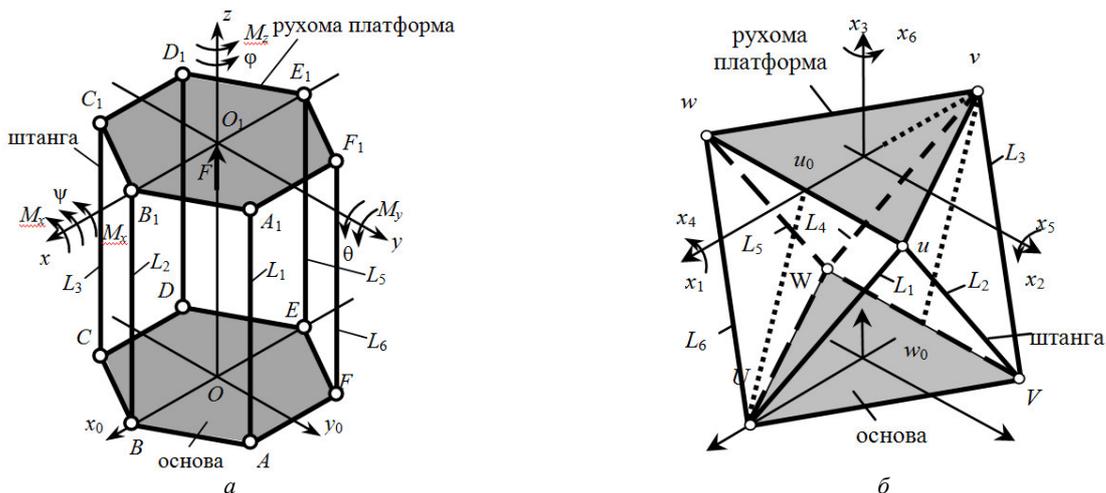


Рис. 4 – Порівняння двох схемних рішень: а – особливе (сингулярне) положення просторової системи приводів типу механізму-гексапода при його нераціональному схемному рішенні; б – раціональне схемне рішення механізму-гексапода відповідне октаедру.

Із розгляду схеми випливає, що механізм у даному положенні є непрацездатним. Наприклад, при невеликих змінах кута ϕ виконавчий орган під дією гравітаційних сил буде повертатись в одному або іншому напрямках. З іншого боку, невеликі зміни довжини однієї із штанг (наприклад L_1) не приведуть до переміщення виконавчого органу.

Як правило, кінематичні сингулярні положення характеризуються невизначеністю частинних похідних $\delta x_i / \delta L_j$. Для визначення сингулярних положень системи приводів у всьому робочому просторі також рекомендовано застосувати методи Монте-Карло [7].

Надійним способом уникнення сингулярних положень в просторових системах приводів є застосування апробованих практично схемних рішень системи. Для вибору схемного рішення розглянуто різноманітні варіанти геометричних схем просторових систем приводів. Для теоретичного узагальнення набору можливих варіантів запропоновані системи на основі механізмів правильної геометрії, які відповідають тетраедру, кубу, октаедру та іншим правильним просторовим багатогранникам. Приводи в просторових системах розташовуються по ребрам багатогранників. Окремі механізми правильної геометрії відповідають поширеним просторовим системам приводів; наприклад, механізм-гексапод при відповідних співвідношеннях геометричних параметрів відповідає октаедру (рис. 4, б).

Цей механізм має нерухому основу UVW та рухому платформу uvw . Шість штанг змінної довжини $L_1 \dots L_6$ з'єднують нерухому основу та рухому платформу.

Для механізмів правильної геометрії визначені матриці Якобі (2). Для цього задавались елементарні зміщення та повороти платформи в різних напрямках і визначались відповідні зміни L -координат. Зокрема для механізму октаедричного виду (рис. 4, б) одержано матрицю:

$$(m_{ij}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} & \infty & -2/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & \infty & -2/\sqrt{3} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{2}/\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 & 0 & -\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -6/\sqrt{2} & -6/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} & -6/\sqrt{2} & -6/\sqrt{2} \\ 10 & -2\sqrt{3} & 2 & -2 & 2\sqrt{3} & 10 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

На основі синтезованого схемного рішення розробляється конструктивне рішення просторової системи приводів. Рациональним є твердотільне моделювання системи (комп'ютерне макетування).

Четвертий етап теорії проектування. Проводиться перевірка схемного і конструктивного рішення шляхом макетування (рис. 2). Макетування здійснюється шляхом побудови твердо тільної моделі системи, яка формується із типових елементів. Набір елементів включає шарніри 1, кронштейни різного виду 2, 3 та корпусні деталі 4, із яких монтуються вузли макетних зразків просторових систем (рис. 5).

Твердотільні моделі служать для відпрацювання конструктивних схем просторових систем приводів, вибору та уточнення їх основних параметрів.

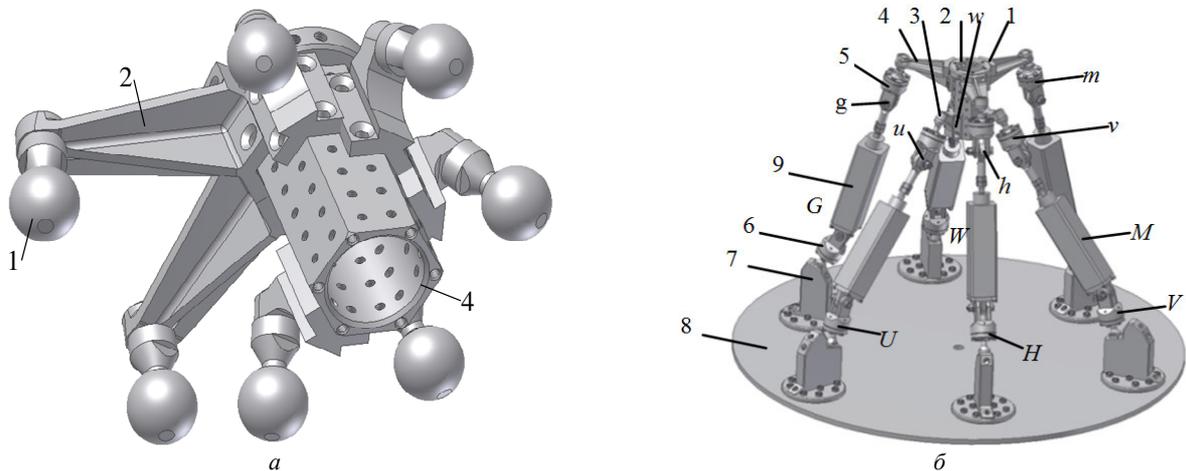


Рис. 5 – Твердотільні моделі: а – виконавчого органу; б – твердотільне комп'ютерне макетування просторової системи приводів.

Для підвищення ефективності доводки схемного і макетного зразка конструктивного рішення проводяться експериментальні дослідження системи (*фізичне макетування*). Запропонована універсальна методика макетування просторових систем на реальних фізичних моделях. Для цього розроблено і виготовлено набір елементів, блоків та модулів, що дозволяють скласти макетний зразок просторової системи, придатний для визначення її геометрії, статички та кінематики. Засоби макетування побудовані на блочно-модульному принципі і дають можливість реалізувати фізичні макети близько 200 конфігурацій різноманітних просторових систем приводів. Макетування просторових систем дає можливість експериментального виміру геометричних, кінематичних та силових параметрів систем, врахування можливих нелінійностей характеристик, виявлення і запобігання появи кінематичних та динамічних сингулярних положень в системах приводів, які проектуються. В результаті макетування уточнюються окремі конструктивні параметри та статичні характеристики просторових систем приводів. Для цього макетний зразок оснащується необхідною контрольно-вимірювальною апаратурою (рис. 6).

Розрахунок статичних характеристик просторових систем приводів здійснюється чисельними методами шляхом визначення напружено-деформованого стану системи. В окремих випадках для розрахунку геометрії і кінематики просторових систем приводів застосовуються аналітичні методи. При розрахунках рекомендується використання спрощених розрахункових схем просторових систем приводів у вигляді еквівалентних плоских механізмів, які є проєкціями просторових систем на деякі характерні осі або площини.

Наприклад, для системи приводів октаедричного типу (рис. 4, б) еквівалентний плоский механізм U , w_0 , v , u_0 є проєкцією просторового механізму на площину XOZ . Для плоского механізму формується розрахункова схема (рис. 7, а) і складаються рівняння статички.



Рис. 6 – Макетні зразки просторових систем приводів, оснащені контрольно-вимірювальною апаратурою: а – механізм-трипод; б – механізм-гексапод.

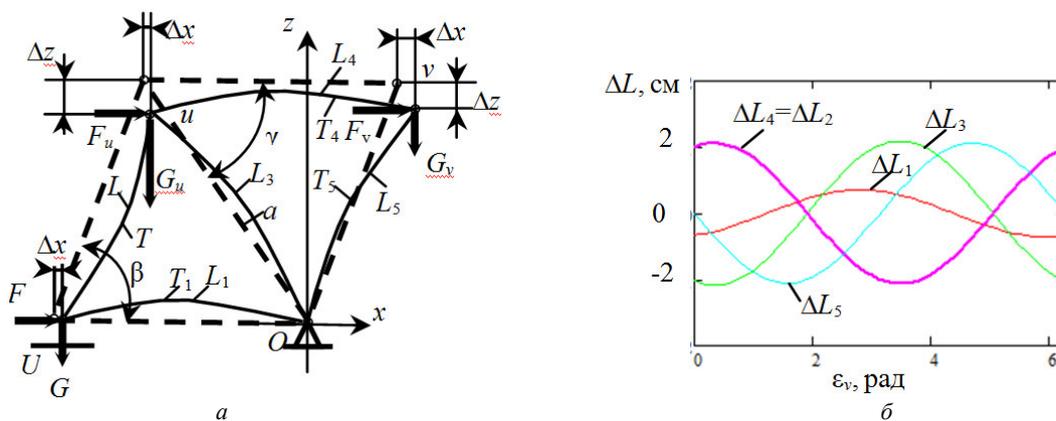


Рис. 7 – Розрахунок статичних характеристик: а – розрахункова схема механізму-гексапода у вигляді його плоскої проекції на площину XOZ ; б – результати розрахунку переміщень вершин механізму при циркуляційному навантаженні в точці v.

З розв’язання рівнянь статки для вузлів плоского механізму знаходяться зусилля в штангах в залежності від діючих навантажень:

$$T_1 = -F_U - (F_v + F_u) \frac{1}{3} + G_u \frac{1}{3\sqrt{6}} - G_v \frac{1}{6\sqrt{2}}, \quad T_2 = (F_v + F_u) - G_u \frac{1}{\sqrt{6}} + G_v \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad T_3 = \frac{-2}{\sqrt{3}} (F_v + F_u) - (G_u + G_v) \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$T_4 = F_v + G_v \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad T_5 = -G_v \frac{3}{2\sqrt{2}}. \quad (5)$$

Практично важливою задачею статки є визначення зусиль і деформацій механізму при дії циркуляційного навантаження у його вершинах. Циркуляційне навантаження визиває синусоїдальні переміщення вершин механізму в залежності від кута ϵ_v дії циркуляційного навантаження (рис. 7, б).

Одержані статичні характеристики є основою для доопрацювання схемного і конструктивного рішення просторової системи приводів.

Шостий етап. Розробляється інноваційна елементна база просторової системи приводів (рис. 2).

Основною проблемою теорії проектування є створення ефективної елементної бази просторових систем приводів. Розроблена елементна база включає комплектні пневмоприводи різноманітного виду, шарніри, які служать для з’єднання приводів у просторові механізми, виконавчі, сервісні та допоміжні пристрої і їх системи керування. Основними складовими елементної бази просторової системи приводів є шарнірні вузли. Запропоновано ряд конструкцій сферичних шарнірів, у тому числі безконтактні прецизійні аеростатичні та гідростатичні шарніри. Розроблено ряд оригінальних технічних рішень для шарнірів підвищеної точності та демпфуючої здатності. Розроблено ряд оригінальних регульованих сферичних шарнірів рідинного тертя. Проведені теоретичні та експериментальні дослідження гідродинамічних процесів у шарнірах рідинного тертя. Встановлено розподіл гідродинамічних параметрів при течії рідкого середовища в шарнірах. Визначено траєкторії руху частинок рідини в зазорах, розподіл швидкостей та поля статичного тиску. Досліджено особливості вихроутворення, закономірності пристінних течій та течій в критичних областях контрольного об’єму рідини. Зокрема, визначено параметри течії в зазорах при наявності анізотропії властивостей (напрямку виступів і канавок) робочих поверхонь шарнірів, виготовлених із застосуванням комп’ютерно-інтегрованих методів технології машинобудування. Встановлено, що наявність особливостей мікропрофіля робочих поверхонь впливає на характеристики течії рідини. Запропоновано їх теоретичний опис тензорними коефіцієнтами гідравлічного опору.

Розроблені і досліджені різноманітні конструкції магнітних шарнірів із феромагнітною рідиною. На основі розв'язку рівнянь магнітної гідродинаміки визначені особливості робочих процесів у магнітних сферичних шарнірах. Теоретичні результати підтверджені проведеними експериментальними дослідженнями. Визначено вплив індукції магнітного поля на розподіл швидкостей у феромагнітній рідині, що рухається в порожнинах шарнірів.

Основа просторової системи приводів складають комплектні пневмоприводи. Як правило, вони реалізуються з використанням пневмодвигунів поступальної дії, агрегованих із приводами мікропереміщень (рис. 8).

Комплектні приводи мають сферичні гідростатичні або аеростатичні опори 1 і 2 із загальною лінією живлення 3 та дренажом 4. Штоки циліндрів 5 і 6 мають пристроїв 7 для визначення положення штока. Приводи мікропереміщень мають сильфони 8 та вимірювачі ходу сильфона 9. Система керування включає розподільники 10 та 11, які забезпечують як швидкі, так і точні переміщення привода. В разі необхідності привод оснащується вимірювачем зусилля 12.

Просторові системи приводів комплектуються гідро- або пневмоприводами відповідного виду. В якості пневмодвигунів використані пневмоциліндри, шлангові пневмодвигуни (пневмом'язи) та сильфонні пневмоприводи, укомплектовані пружинами зворотнього ходу та демпферними пристроями (рис. 8, в).

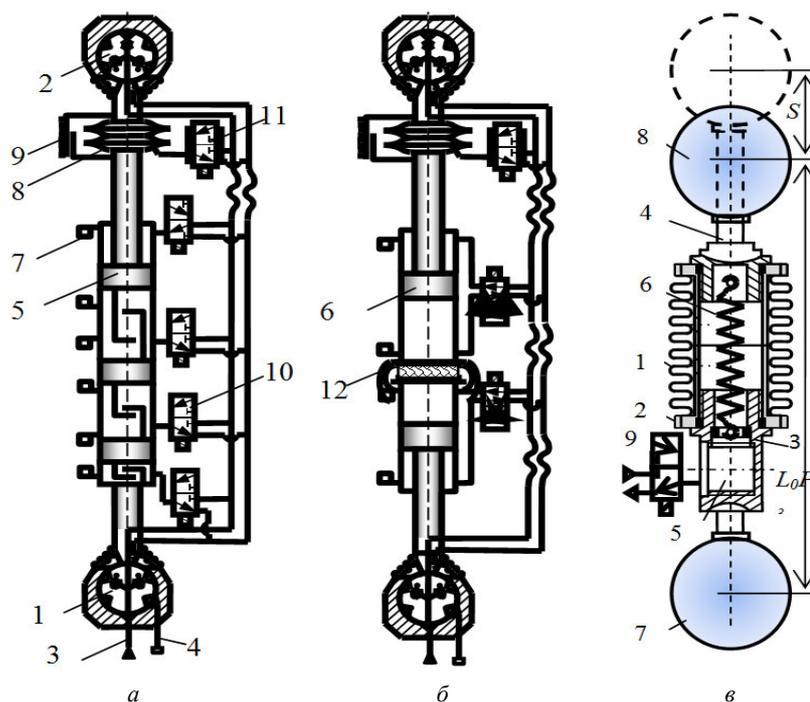


Рис. 8 – Комплектні інноваційні пневмоприводи просторових систем з приводами мікропереміщень та сферичними опорами: а – цифровий привід із додатковими поршнями; б – привід з тандем-циліндрами та вимірювачем зусилля; в – модульний сильфонний привід.

Привід має сильфон 1 із фланцями 2, в які поміщено хвостовики 3, 4; підвід повітря здійснюється через отвір 5. Сильфон стискається пружиною 6. На хвостовиках встановлені сфери 7, 8 шарнірів. Підвід і вихлоп повітря в порожнину сильфона забезпечується розподільником 9.

Для вибору параметрів приводів досліджено робочі процеси течії повітря в проточній частині приводів. Враховані особливості наповнення порожнин пневмоприводів повітрям при докритичних та надкритичних режимах течії повітря в пневмолінії.

Процес наповнення порожнин сильфонів повітрям для надкритичного режиму t_{H1} та підкритичного режиму t_{H2} визначено за формулами:

$$t_{H1} = \frac{V}{0,2588 \cdot k \mu f \sqrt{2gk/(k-1)} \sqrt{RT_m}} (\sigma_2 - \sigma_1), \quad t_{H2} = \frac{2V \left[\sqrt{1 - \sigma_K^{(k-1)/k}} - \sqrt{1 - \sigma_3^{(k-1)/k}} \right]}{\sqrt{2gk(k-1)} \mu f \sqrt{RT_m}}, \quad (6)$$

де V – об'єм сильфона; k – показник адиабати; R – газова стала; T_m – температура повітря; g – прискорення вільного падіння; μ – коефіцієнт витрати пневмолінії; f – ефективна площа перетину пневмолінії; $\sigma_1 = p_1/p_m$, $\sigma_2 = p_2/p_m$, відносні до атмосферного значення тисків в порожнині сильфона на початку та в кінці процесу.

Аналогічні залежності одержані для процесу витікання повітря із порожнини сильфона. Час витікання повітря при надкритичному режимі течії t_{c1} та час витікання повітря для підкритичного режиму t_{c2} визначено залежностями:

$$t_{c1} = \frac{2V \left(\sigma_5^{(k-1)/2k} - \sigma_4^{(k-1)/2k} \right)}{0,2588 \cdot \sqrt{2gk(k-1)\mu f \sigma_a^{(k-1)/2k} \sqrt{RT_M}}},$$

$$t_{c2} = \frac{0,875V}{k \sqrt{\frac{2gk}{k-1}} \cdot \mu f \sigma_a^{(k-1)/2k} \sqrt{RT_M}} \cdot \left[\frac{\sqrt{1 - \sigma^{(k-1)/k}} \cdot (3\sigma^{(k-1)/k} + 2)}{\sigma^{2(k-1)/k}} + 3 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \sigma^{(k-1)/k}}}{\sigma^{(k-1)/k}} \right) \right] \Bigg|_{\sigma_6}^{\sigma_{K1}}, \quad (7)$$

де відносні значення тисків: $\sigma_a = P_a / P_m$, $\sigma_4 = P_a / P_4$, $\sigma_5 = P_a / P_5$, $\sigma_{K1} = 0,528$, p_4 , p_5 – значення тиску у в порожнині сільфона на початку і в кінці процесу.

Розрахунки за формулами (6) і (7) при поточних значеннях тиску є основою визначення зусилля сільфоновго привода (рис. 9).

Закон зміни тиску має дві різні ділянки *A* і *B*, які відповідають процесу наповнення сільфона і процесу витікання повітря із порожнини сільфона. Дані ділянки апроксимовані спрощеними залежностями відповідними динамічним аперіодичним ланкам другого та першого порядку. При цьому зміни тиску на ділянках *A* і *B* визначаються залежностями:

$$p_A(t) = p_m \left(1 - \frac{T_{1A}}{T_{1A} - T_{2A}} e^{-t/T_{1A}} + \frac{T_{2A}}{T_{1A} - T_{2A}} e^{-t/T_{2A}} \right), \quad p_B(t) = p_m \left(1 - e^{-t/T_B} \right),$$

де p_m – максимальне значення тиску в порожнині сільфона; T_{1A} , T_{2A} , T_B – константи, які визначають вигляд характеристик.

Сьомий етап. Визначаються і корегуються динамічні характеристики просторових систем (рис. 2).

Розроблені системи приводів повинні забезпечувати необхідні показники динамічної якості [8]. Особливістю просторових систем є складні просторові рухи їх елементів. Проведені теоретичні дослідження просторових систем приводів. Для цього розроблені динамічні моделі просторових систем приводів у вигляді зосереджених мас із пружно-деформованими зв'язками (рис. 10).

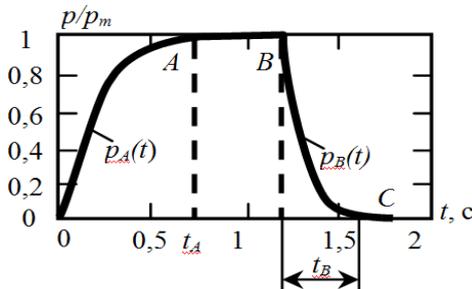


Рис. 9 – Закон зміни тиску в порожнині сільфона при періодичному включенні та виключенні розподільника.

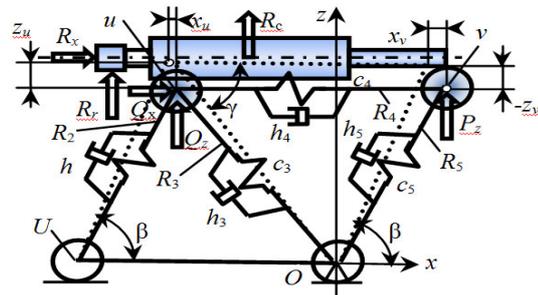


Рис. 10 – Динамічна модель просторової пружно-деформованої системи приводів.

Складено рівняння динамічної рівноваги для кожної зосередженої маси. Наприклад, система рівнянь, яка описує коливання маси m , що розміщена в вершині u :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_u = \sum_{i=2}^3 R_i \cos \alpha_i - R_4 + Q_x, & m\ddot{z}_u = \sum_{i=2}^3 R_i \sin \alpha_i + Q_z, \end{cases} \quad (8)$$

де \ddot{x}_u , \ddot{z}_u – прискорення переміщення маси в напрямках x і z ; R_i – динамічні зусилля в приводах; α_i – кути розташування сил Q_x , Q_z – зовнішні динамічні навантаження на масу, розташовану в точці u .

Після підстановки значень зусиль система рівнянь (8) приводиться до операторного вигляду і з неї знаходяться зображення по Лапласу відповідних переміщень:

$$X_u(s) = \frac{K [a_{zz} Q_x(s) - a_{zx} Q_z(s)]}{a_{xx} a_{zz} - a_{zx}^2} + \frac{b_x a_{zz} X_v(s)}{a_{xx} a_{zz} - a_{zx}^2},$$

$$Z_u(s) = \frac{K [a_{xx} Q_z(s) - a_{zx} Q_x(s)]}{a_{xx} a_{zz} - a_{zx}^2} - \frac{b_x a_{zx} X_v(s)}{a_{xx} a_{zz} - a_{zx}^2},$$

де

$$a_{xx} = T^2 s^2 + 2\xi T \frac{89}{72} s + \frac{89}{72}, \quad a_{zx} = 2\xi T s \frac{43}{72} + \frac{43}{72}, \quad b_x = 2\xi T s + 1, \quad a_{zz} = T^2 s^2 + 2\xi T s \frac{59}{36} + \frac{59}{36},$$

s – змінна Лапласа; K , T , ξ – константи, які залежать від параметрів системи; $X_v(s)$ – зображення по Лапласу

су переміщення іншої маси, що знаходиться в точці v .

Аналогічні залежності одержані для інших мас системи приводів.

В результаті визначено операторні залежності переміщень мас від діючих зусиль, зокрема:

$$Z_u = \left[W_{zuQx} - W_{zuxv} W_{xvzu} \frac{W_{xiQx}}{(1+W_{xvxi})} \right] Q_x + \left[W_{zuQz} - W_{zuxv} W_{xvzu} \frac{W_{xiQz}}{(1+W_{xvxi})} \right] Q_z + \\ + W_{zuxv} \left[W_{xvpx} - W_{xvzu} \frac{W_{xupx}}{(1+W_{xvxi})} \right] P_x + W_{zuxv} \left[W_{xvpz} - W_{xvzu} \frac{W_{xupz}}{(1+W_{xvxi})} \right] P_z, \quad (10)$$

де передавальні функції визначено через параметри системи приводів.

По операторним залежностям виду (9, 10) знайдені частотні характеристики системи при різних входах (рис. 11).

Для експериментального підтвердження результатів розрахунків частотних характеристик проведені їх експериментальні виміри. Для цього використана установка у вигляді пружно-деформованої системи приводів, яка навантажувалась гармонічною силовою дією змінної частоти (рис. 12).

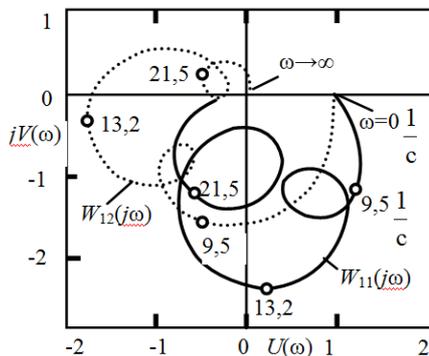


Рис. 11 – Амплітудно-частотні та фазо-частотні характеристики переміщення вершини u в напрямку вісі x при збуреннях в напрямку вісі x (суцільна крива) та при збуреннях в напрямку вісі z (пунктирна крива).



Рис. 12 – Установка 1 для визначення динамічних характеристик просторової системи приводів із пристроєм 2 для синусоїдального навантаження.

Застосовано спеціальний пристрій з дебалансом, який дозволяє дискретно змінювати частоту навантаження в діапазоні до 10 Гц. Пристрій встановлювався на спеціальному підвісі, який через пружну тягу з'єднувався із відповідною точкою механізму. При цьому на механізм діяло гармонічне навантаження різної частоти. Амплітуда навантаження задавалась шляхом регулювання жорсткості тяги. Для вимірів динамічних переміщень вершин механізму застосовані оптичні методи. Для цього у вузлах механізму встановлювались калібровані сфери (рис. 12). При коливаннях механізму сфери зміщувались в просторі. Їх положення фіксувалось на відеограмі з частотою 25 кадрів за секунду. Визначення положення сфери відносно нерухомої основи (лінійки) здійснювалось при покадровому перегляді відеограми. Таким чином встановлено як закон переміщення вузлів механізму, так і максимальну амплітуду переміщення.

По результатам досліджень запропоновані методи компенсації негативних наслідків окремих динамічних процесів і явищ. Для поліпшення динамічних характеристик просторових систем приводів рекомендовано застосування пасивних і активних демпфуючих пристроїв. Розроблені активні демпфери коливань із феромагнітною рідиною та досліджені їх характеристики. Дані пристрої мають сферичні порожнини із феромагнітною рідиною, в які поміщені магнітні сфери. Досліджено робочі процеси течії феромагнітної рідини в порожнині демпфера при переміщеннях корпусу демпфера. Застосування демпферів дозволяє значно поліпшити динамічні характеристики просторових систем приводів.

Восьмий етап. Проводиться математичне моделювання просторових систем приводів та розробляються спеціальні алгоритми інтелектуального блока керування (рис. 2).

Здійснюється математичне моделювання просторового руху виконавчого органу із використанням математичної моделі просторового руху [7]. Модель враховує зміни в часі тензорів інерції окремих елементів системи [10].

Для корекції положення виконавчого органу застосовується інтелектуальний блок системи керування, що реалізує головний зворотній зв'язок по вимірам вектора просторового положення виконавчого органу (рис. 13, а).

До таких алгоритмів віднесено циклограми включення приводів, корекція положення їх основних елементів. Для забезпечення високої точності систем приводів використано механізми мікропереміщень. Запропоновано спеціальний алгоритм мікропереміщень виконавчого органу системи приводів у вигляді просторових *фігур Лиссажу* (рис. 13, б). При цьому є можливість компенсувати динамічні похибки виконавчого органу.

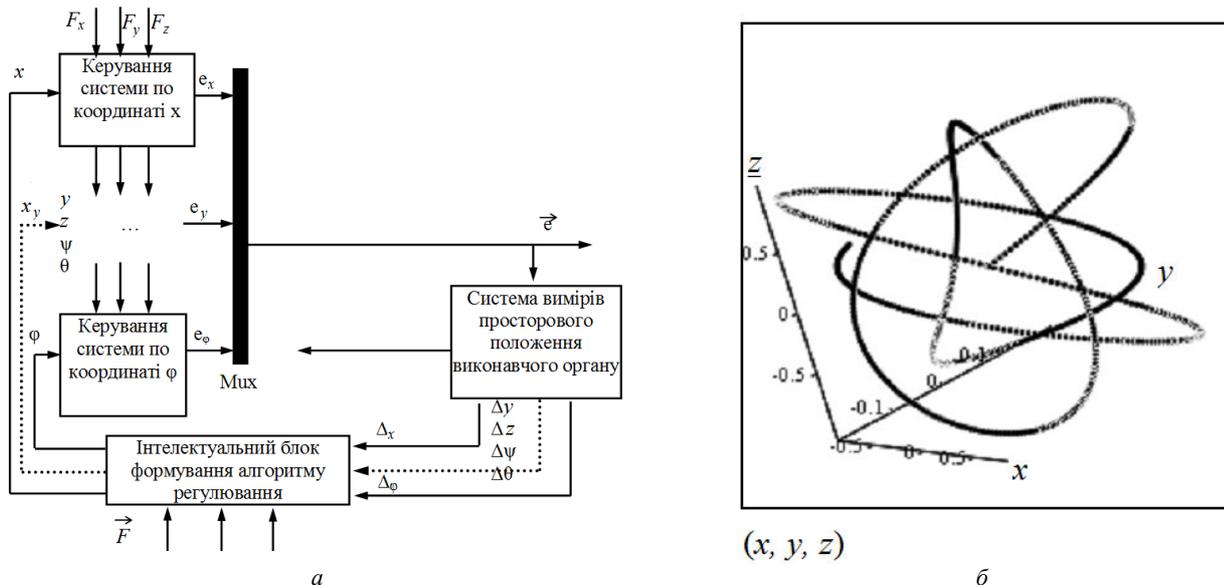


Рис. 13 – Моделування руху виконавчого органу: *а* – блок-схема формування алгоритму роботи інтелектуального блока; *б* – траєкторія руху виконавчого органу системи приводів.

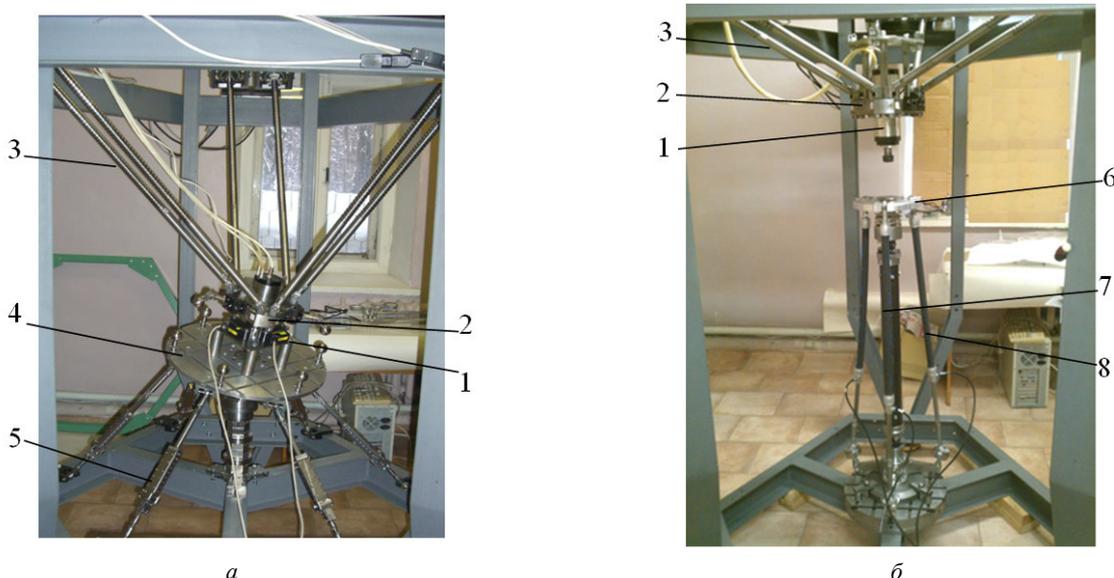


Рис. 14 – Приклад застосування теорії: *а* – просторова система приводів, яка забезпечує установку стола в ряді фіксованих положень; *б* – розроблена інноваційна просторова система приводів сферичного руху із трьома шланговими пневмодвигунами (пневмом’язами).

Дев’ятий етап теорії проектування. Це останній етап, що включає аналіз наявного досвіду проектування і апробації інноваційних систем (рис. 2).

Розроблені положення теорії проектування просторових систем приводів апробовані шляхом розробки і виготовлення ряду дослідних та дослідно-промислових зразків систем приводів, використаних в технологічному обладнанні. Розроблені системи приводів переміщення стола верстата з паралельними кінематичними структурами (рис. 14, *а*).

Верстат має шпindelний вузол 1, встановлений на рухомій платформі 2, яка переміщується штангами змінної довжини 3.

Стіл 4 має систему приводів 5. Система приводів стола забезпечує додаткове переміщення стола в діапазоні $\pm 22,5^\circ$. Для підвищення точності позиціонування стола розроблена просторова система приводів, яка включає пневмоциліндри дискретної дії і агреговані із приводами мікропереміщень. Більш раціональним є використання спеціально розробленого шестикоординатного привода мікропереміщень для підвищення точності позиціонування стола [7].

Для апробації основних положень теорії проектування розроблено і виготовлено динамічну просторову систему приводів сферичного руху. Система має рухому вібраційну платформу 7 (рис. 14, *б*). Платформа встановлена на центральній штанзі 7 із карданними опорами, розміщеними на кінцях штанги. Платформа переміщується за допомогою трьох шлангових пневмодвигунів (пневмом’язів) 8. Пристрій використано для вібраційної об-

робки заготовок. Він особливо ефективний для виконання операцій полірування поверхні деталі.

Встановлено технологічні особливості виготовлення окремих деталей і вузлів систем. Особливу увагу приділено методам збирання просторових систем приводів, їх налагодці та відпрацюванню з метою доведення до регламентних характеристик.

Проведено дослідження виготовлених систем приводів та визначено їх експлуатаційні характеристики. В результаті дослідної апробації підтверджена ефективність основних положень розробленої теорії проектування просторової системи приводів.

Висновки. Обґрунтовано основні етапи теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів, які включають формулювання технічних умов, синтез схемних рішень, розрахунки геометрії, статички та кінематики системи і розробку на цій основі конструктивного рішення системи, перевірку системи шляхом макетування і уточнення конструкції на основі визначення статичних і динамічних характеристик системи приводів.

Доопрацювання схемного і конструктивного рішення доцільно провести на макетних зразках просторових систем побудованих по блочно-модульному принципу, які дозволяють реалізувати близько 200 варіантів просторових систем приводів. Базовими варіантами рекомендуються просторові системи відповідні правильним багатогранникам, зокрема тетраедру та октаедру.

Для теоретичного дослідження статички, кінематики і динаміки інноваційних мехатронних просторових систем приводів рекомендується використати еквівалентний плоский механізм, що є проекцією просторової системи на площину, близьку до площини симетрії просторової системи приводів. Одержані при цьому аналітичні залежності розповсюджуються на просторову систему із відповідною корекцією результатів розрахунків.

Проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів доцільно провести на основі запропонованої елементної бази, що включає комплектні приводи лінійних переміщень, агреговані із приводами мікропереміщень, сферичні шарніри різних видів, зокрема гідростатичні та аеростатичні, і шарніри з феромагнітною рідиною. Доцільним є використання пружно-деформованих безшарнірних просторових систем приводів в якості просторових приводів мікропереміщень.

Проведена дослідна апробація розроблених дослідних зразків підтвердила обґрунтованість основних положень запропонованої теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів. Рекомендовано імітаційне математичне моделювання системи приводів та спеціальні алгоритми керування просторовим рухом виконавчого органу.

Список літератури: 1. Яглинський В.П. Кінематика обладнання на основі механізмів паралельної структури: Монографія / В.П. Яглинський і др. // Прогресивное машиностроительное оборудование. Коллективная монография. – Орел: Изд. дом Спектр, 2011. – 455 с. 2. Рыбак Л.А., Ержуков В.В., Чичварин А.В. Эффективные методы решения задач кинематики и динамики робота-станка параллельной структуры. – М.: Физматлит, 2011. – 148 с. ISBN978-5-9221-1296-3. 3. Сянвень Кун, Клемент Госселин. Структурный синтез параллельных механизмов. – М.: Физматлит, 2012. – 275 с. 4. Merlet J.P. Parallel Robots. Solid Mechanics and Applications. – Berlin: Springer, 2006. – 394 p. 5. Афонин В.Л., Подзоров П.В., Слепцов В.В. Обработка оборудования на основе механизмов параллельной структуры / Под общ. Ред В.Л. Афонина. – М.: Изд-во МГТУ Станкин, Янус-К., 2006. – 452 с. 6. Струтинський В.Б., Кириченко А.М. Теоретичний аналіз жорсткості шестикоординатного механізму паралельної структури // Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія «Машинобудування». – 2009. – № 57. – С. 198 – 207. 7. Струтинський С.В., Гуржій А.А. Просторові системи приводів: Монографія. – К.: Педагогічна думка, 2013. – 492 с. 8. Новіков М., Струтинський В., Кириченко А. Розробка верстата-гексапода з шести координатною системою ЧПК і результати його дослідницького застосування // Машинознавство. – Львів: ТзОВ «Кінпатрі ЛТД», 2011. – №5 – 6 (167 – 168). – С. 3 – 10. 9. Струтинський В.Б., Гаврушкевич Н.В., Полунічев В.Е. Математичне моделювання динамічних характеристик багатокординатних верстатів з використанням теорії нечітких множин // Технологічні комплекси, №1 (9) – 2014. – С. 76 – 87. 10. Струтинський В.Б., Колот О.В. Математичне моделювання стохастичних процесів у системах приводів: Монографія. – Краматорськ: ЗАТ «Тираж-51», 2005. – 530 с.

Bibliography (transliterated): 1. Jaglinskij, V. P., et al. *Kinematika oborudovanija na osnove mehanizmov parallel'noj struktury: Monografija*. Orel: Izd.dom Spektr, 2011. Print. 2. Rybak, L. A., et al. *Jeffektivnye metody reshenija zadach kinematiki i dinamiki robota-stanka parallel'noj struktury*. Moscow: Fizmatlit, 2011. Print. 3. Kun, Sjan'ven', and Klement Gosselin. *Strukturnyj sintez parallel'nyh mehanizmov*. Moscow: FIZMATLIT, 2012. Print. 4. Merlet, J. P. *Parallel Robots. Solid Mechanics and Applications*. Berlin: Springer, 2006. Print. 5. Afonin, V. L., P. V. Podzorov and V. V. Slepcev. *Obrabatyvajushhee oborudovanie na osnove mehanizmov parallel'noj struktury*. Ed. V. L. Afonin. Moscow: Izd-vo MG TU Stankin, Janus-K, 2006. Print. 6. Strutyn's'kyj, V. B., and A. M. Kyrychenko. "Teoretychnyj analiz zhorstkosti shestykoordynatnogo mehanizmu paralel'noi' struktury." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu Ukraїny «Kii'vs'kyj politehničnij instytut»*. Ser.: «Mashynobuduvannja». No. 57. 2009. 198–207. Print. 7. Strutyn's'kyj, S. V., and A. A. Gurzhij. *Prostorovi systemy pryvodiv: Monografija*. Kiev: Pedagogichna dumka, 2013. Print. 8. Novikov, M., V. Strutyn's'kyj and A. Kyrychenko. "Rozrobka verstata-geksapoda z shesty koordynatnoju systemoju ChPK i rezul'taty doslidnyč'kogo zastosuvannja." *Mashynoznavstvo*. No. 5–6 (167–168). Lviv: TzOV «Kinpatri LTD», 2011. 3–10. Print. 9. Strutyn's'kyj, V. B., N. V. Gavrushkevych and V. E. Polunichev. "Matematyčne modeljuvannja dynamichnyh harakterystyk bagatokoordynatnyh verstativ z vykorystannjam teorii' nechitkyh mnozhyn." *Tehnologični kompleksi*. No. 1 (9). 2014. 76–87. Print. 10. Strutyn's'kyj, V. B., and O. V. Kolot. *Matematyčne modeljuvannja stohastyčnyh procesiv u systemah pryvodiv: Monografija*. Kramatorsk: ZAT «Tyrazh-51», 2005. Print.

Надійшло (received) 06.09.2015

Струтинський Сергій Васильович – кандидат технічних наук, старший викладач, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ; тел.: (099) 486-11-03; e-mail: strutynskyi@gmail.com.

Струтинський Сергей Васильевич – кандидат технических наук, старший преподаватель, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев; тел.: (099) 486-11-03; e-mail: strutynskyi@gmail.com.

Strutynsky Sergej Vasilevich – Candidate of Technical Sciences, Senior Lecture, National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv; tel.: (099) 486-11-03; e-mail: strutynskyi@gmail.com.

УДК 593.3

Е. Ю. ТАРСИС

РАЗВИТИЕ МЕТОДИКИ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В развитие методики дополнена вариационная и структурная постановка плоской контактной задачи теории упругости для однородных тел произвольной геометрической формы на основе функционала Рейсснера. Рассмотрена новая задача поиска неизвестной области контакта на участках взаимодействия упругого тела со штампами. На конкретном примере исследовано влияние боковых врезов различной конфигурации на ширину искомого области контакта.

Ключевые слова: контактная задача плоской теории упругости, функционал Рейсснера, структурная постановка, структуры для перемещений и напряжений, поиск неизвестной области контакта, штамп, опорные области, R – операции.

Введение. Решение плоской контактной задачи теории упругости является актуальной проблемой. Многообразие подобных задач определяется различными силовыми и кинематическими граничными условиями. В процессе решения часто возникает необходимость поиска неизвестных областей контакта рассматриваемого тела с другими телами, определяющими активные силы и реакции связей [1 – 4]. В работе [4] предложено систематизированное описание общей методики вариационной и структурной постановки плоских контактных задач теории упругости. Однако поиск неизвестной области контакта относился только к связям, а под штампами контактная область предполагалась неизменной. Подобные предположения могут в ряде задач оказаться не подтвержденными.

Настоящая работа посвящена случаям, когда области контакта под штампами заранее неизвестны, в связи с чем постановочная часть изложенной ранее методики дополняется соответствующими граничными условиями и структурами. Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрена конкретная задача и приведены некоторые результаты численных исследований.

Общая постановка задачи. Рассматривается упругое тело, в граничные условия которого входит участок $\partial\Omega_{st}^*$, где область контакта штампов и упругого тела (без учета трения) заранее неизвестна. Участки, где задана нагрузка $\partial\Omega_\sigma$ и перемещения $\partial\Omega_u$, аналогичны рассмотренным в [4]. Полагаем также, что участок $\partial\Omega_\sigma$ свободен от нагрузки.

Граничные условия на участке $\partial\Omega_{st}^*$ формулируются в виде следующих неравенств: $(\vec{n}_{st}^*)^T \vec{u} \geq h_0$, $(\vec{n}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \vec{\sigma} \leq 0$, $(\vec{\tau}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \vec{\sigma} = 0$. Здесь: \vec{u} , $\vec{\sigma}$ – векторы перемещений и напряжений; $A_{\partial\Omega(st^*)}$ – матрица направляющих косинусов; \vec{n}_{st}^* и $\vec{\tau}_{st}^*$ – векторы направляющих косинусов орта внешней нормали и касательной к поверхности тела на этом участке, которые, в дальнейшем, будут упоминаться и на участке $\partial\Omega_\sigma$; h_0 – заданная величина заглупления штампа.

Для поиска неизвестной области контакта, в рамках функционала Рейсснера, где независимо аппроксимируются векторы напряжений и перемещений, в работе [4] были предложены критерии в виде строгих равенств. Однако их выполнение без установления действительной области контакта невозможно. Поэтому решение задачи поиска этой области осуществляется с помощью итерационного процесса. В качестве первого приближения область $\partial\Omega_{st}^*$ задается принудительно в виде двух участков $\partial\Omega_k$, где выполняются условия

$$(\vec{n}_{st}^*)^T \vec{u} = h_0,$$

и участка $\partial\Omega_\sigma$, где выполняются условия

$$(\vec{n}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \vec{\sigma} = 0.$$

Указанные условия определяют действительную область контакта, если выполняются условия в виде строгих неравенств: для площадки контакта

$$(\vec{n}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \vec{\sigma} < 0,$$

а для области отрыва

$$(\vec{n}_{st}^*)^T \vec{u} > h_0(x, y).$$

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемого тела, сводится к задаче поиска седловой точки функционала Рейсснера [4,5]:

$$I_R(\bar{u}, \bar{\sigma}) = \iint_{\Omega} \left[(\bar{\sigma})^T A \bar{u} - \frac{1}{2} (\bar{\sigma})^T D \bar{\sigma} \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} (\bar{u})^T \bar{N}_s d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_u} (\bar{u} - \bar{u}_s)^T (A_s)^T \bar{\sigma} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega_k} \left((\bar{n}_{st}^*)^T \bar{u} - h_0 \right) (\bar{n}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \bar{\sigma} d\partial\Omega,$$

Для рассматриваемого случая, когда области контакта под штампами заранее неизвестны, конкретизируем граничные условия и структуры [4].

Если ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (\bar{n}_{st}^*)^T \bar{u} &\equiv u_n^k, (\bar{\tau}_{st}^*)^T \bar{u} \equiv u_{\tau}^k, (\bar{n}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_n^k \text{ на } \partial\Omega_k; (\bar{n}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_n^o \text{ на } \partial\Omega_o; \\ (\bar{\tau}_{st}^*)^T (A_{\partial\Omega(st^*)})^T \bar{\sigma} &\equiv \sigma_{\tau}^{st^*} \text{ на } \partial\Omega_k \text{ и на } \partial\Omega_o; (\bar{n}_{\sigma})^T (A_{\partial\Omega(\sigma)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_n^{\sigma}, (\bar{\tau}_{\sigma})^T (A_{\partial\Omega(\sigma)})^T \bar{\sigma} \equiv \sigma_{\tau}^{\sigma} \text{ на } \partial\Omega_{\sigma}, \end{aligned}$$

то граничные условия будут иметь вид:

$$u_n = u_n^k = h_0, \sigma_{\tau} = \sigma_{\tau}^{st^*} = 0 \text{ на } \partial\Omega_k; \sigma_n = \sigma_n^o = 0, \sigma_{\tau} = \sigma_{\tau}^{\sigma} = 0 \text{ на } \partial\Omega_o; \bar{u} = \bar{u}_s = \{u_{xs}, u_{ys}\} \text{ на } \partial\Omega_u; \sigma_n = \sigma_n^{\sigma} = 0, \sigma_{\tau} = \sigma_{\tau}^{\sigma} = 0 \text{ на } \partial\Omega_{\sigma};$$

Запишем структуры для перемещений:

$$u_x = u_{xs} \frac{\omega_k}{\omega_u + \omega_k} + (l_k h_0 + m_k u_{\tau}^k) \frac{\omega_u}{\omega_k + \omega_u} + \Psi_{11} \omega_u \omega_k; u_y = u_{ys} \frac{\omega_k}{\omega_u + \omega_k} + (m_k h_0 - l_k u_{\tau}^k) \frac{\omega_u}{\omega_k + \omega_u} + \Psi_{21} \omega_u \omega_k.$$

Если нет участка $\partial\Omega_u$, то

$$u_x = l_k h_0 + m_k u_{\tau}^k + \Psi_{11} \omega_k; u_y = m_k h_0 - l_k u_{\tau}^k + \Psi_{21} \omega_k. \tag{1}$$

Здесь $\omega_k = 0, \omega_u = 0$ – нормализованные до первого порядка уравнения участков $\partial\Omega_k, \partial\Omega_u$; $u_{\tau}^k, \Psi_{11}, \Psi_{21}$ – неопределенные компоненты структур; l_k, m_k – компоненты \bar{n}_{st}^* .

Структуры для напряжений, в рамках поставленной задачи, если нет участков отрыва, имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[(m_{\sigma})^2 \Phi_{\sigma} \right] \frac{\omega_k}{\omega_{\sigma} + \omega_k} + \left[(l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_{\sigma}}{\omega_k + \omega_{\sigma}} + \Psi_{31} \omega_{\sigma} \omega_k; \\ \sigma_y &= \left[(l_{\sigma})^2 \Phi_{\sigma} \right] \frac{\omega_k}{\omega_{\sigma} + \omega_k} + \left[(m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_{\sigma}}{\omega_k + \omega_{\sigma}} + \Psi_{41} \omega_{\sigma} \omega_k; \\ \sigma_{xy} &= \left[-l_{\sigma} m_{\sigma} \Phi_{\sigma} \right] \frac{\omega_k}{\omega_{\sigma} + \omega_k} + \left[l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \right] \frac{\omega_{\sigma}}{\omega_k + \omega_{\sigma}} + \Psi_{61} \omega_{\sigma} \omega_k, \end{aligned} \tag{2}$$

а при их наличии:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left[(m_{\sigma})^2 \Phi_{\sigma} \right] \frac{\omega_k \omega_o}{\omega_{\sigma} + \omega_k \omega_o} + \left[(l_k)^2 \sigma_n^k + (m_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_{\sigma} \omega_o}{\omega_k + \omega_{\sigma} \omega_o} + (m_o)^2 \Phi_o \frac{\omega_{\sigma} \omega_k}{\omega_o + \omega_{\sigma} \omega_k} + \Psi_{31} \omega_{\sigma} \omega_k \omega_o; \\ \sigma_y &= \left[(l_{\sigma})^2 \Phi_{\sigma} \right] \frac{\omega_k \omega_o}{\omega_{\sigma} + \omega_k \omega_o} + \left[(m_k)^2 \sigma_n^k + (l_k)^2 \Phi_k \right] \frac{\omega_{\sigma} \omega_o}{\omega_k + \omega_{\sigma} \omega_o} + (l_o)^2 \Phi_o \frac{\omega_{\sigma} \omega_k}{\omega_o + \omega_{\sigma} \omega_k} + \Psi_{41} \omega_{\sigma} \omega_k \omega_o; \\ \sigma_{xy} &= \left[-l_{\sigma} m_{\sigma} \Phi_{\sigma} \right] \frac{\omega_k \omega_o}{\omega_{\sigma} + \omega_k \omega_o} + \left[l_k m_k \sigma_n^k - l_k m_k \Phi_k \right] \frac{\omega_{\sigma} \omega_o}{\omega_k + \omega_{\sigma} \omega_o} - l_o m_o \Phi_o + \Psi_{51} \omega_{\sigma} \omega_k \omega_o. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\omega_o = 0, \omega_{\sigma} = 0$ – нормализованные до первого порядка уравнения участков $\partial\Omega_o, \partial\Omega_{\sigma}$; $\Phi_{\sigma}, \sigma_n^k, \Phi_k, \Phi_o, \Psi_{31}, \Psi_{41}, \Psi_{51}$ – неопределенные компоненты структур; $l_{\sigma}, m_{\sigma}, l_o, m_o$ – компоненты векторов \bar{n}_{σ} и \bar{n}_o соответственно.

Постановка задачи для частного случая. Рассмотрим задачу о вдавливании прямоугольных штампов без трения в верхние основания пластины длиной $2a$ (рис. 1) с четырьмя вариантами формы ее боковых сторон:

- 1 – стороны прямолинейны (прямоугольная пластина);
- 2 – пластина на боковых сторонах имеет круговые врезы, радиусы которых равны половине высоты пластины $2b$;
- 3 – врезы имеют форму эллипса, размер вертикальной полуоси которого равен половине высоты пластины, а горизонтальной полуоси равен $a_0^{(1)}$;
- 4 – этот вариант аналогичен варианту 3, но размер горизонтальной полуоси эллипса равен $a_0^{(2)}$.

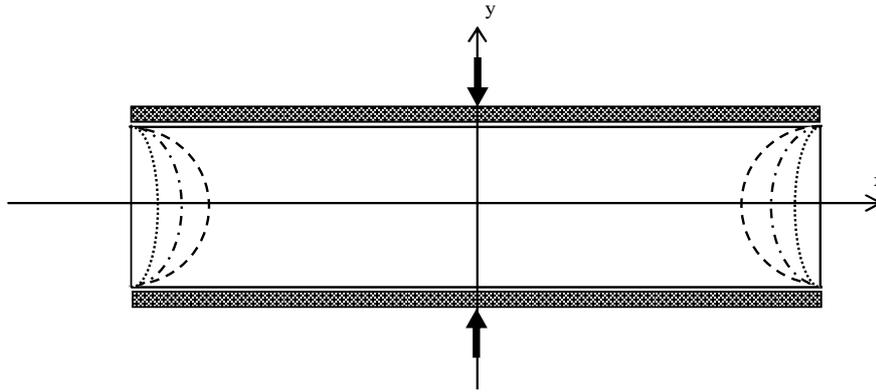


Рис. 1 – Расчетная схема. Варианты боковых сторон пластинки:
 — 1; - - - - - 2; - · - · - · - 3; ··········· 4.

Предполагается, что в зависимости от формы боковых сторон, участки контакта штампов с пластиной могут быть не равны ширине штампов, что и приводит к задаче поиска неизвестной области контакта в предложенной постановке.

Конкретизируем применительно к данной задаче граничные условия и структуры. Граница тела содержит три участка $\partial\Omega_k$, $\partial\Omega_o$, $\partial\Omega_\sigma$. Боковые стороны $\partial\Omega_\sigma$ свободны от нагрузки. Граничные условия задачи имеют вид:

$$u_y = \mp h_0, \sigma_{xy} = 0 \text{ на } \partial\Omega_k; \sigma_y = 0, \sigma_{xy} = 0 \text{ на } \partial\Omega_o; \sigma_n = 0, \tau_n = 0 \text{ на } \partial\Omega_\sigma.$$

Если предполагается, что отрыва нет, то есть область контакта $\partial\Omega_k$ равна ширине основания, то используем структуры (1) и (2), в которых принято

$$l_k = 0, m_k = \pm 1, m_k u_\tau^k + \Psi_{11} \omega_k \equiv \Phi_1, \Psi_{21} \equiv \Phi_2, m_k h_0 \equiv (5 - y) \cdot h_0 / 10 - ((5 + y) \cdot h_0) / 10,$$

$$\Phi_\sigma \equiv \Phi_3, \Phi_k \frac{\omega_\sigma}{\omega_k + \omega_\sigma} + \Psi_{31} \omega_\sigma \omega_k \equiv \Phi_4 \omega_\sigma, \sigma_n^k \frac{\omega_\sigma}{\omega_k + \omega_\sigma} + \Psi_{41} \omega_\sigma \omega_k \equiv \Phi_5 \omega_\sigma, \Psi_{61} \equiv \Phi_6.$$

В результате они примут вид:

$$u_x = \Phi_1, u_y = (5 - y) \cdot h_0 / 10 - ((5 + y) \cdot h_0) / 10 + \Phi_2 \omega_k, \sigma_x = (m_\sigma)^2 \Phi_3 \frac{\omega_k}{\omega_\sigma + \omega_k} + \Phi_4 \omega_\sigma,$$

$$\sigma_y = (l_\sigma)^2 \Phi_3 \frac{\omega_k}{\omega_\sigma + \omega_k} + \Phi_5 \omega_\sigma, \sigma_{xy} = -l_\sigma m_\sigma \Phi_3 \frac{\omega_k}{\omega_\sigma + \omega_k} + \Phi_6 \omega_\sigma.$$

В случае, когда есть отрыв, структуры для перемещений берутся те же, а для напряжений в структурах (2) участки $\partial\Omega_o$ и $\partial\Omega_\sigma$ объединены в участок $\partial\Omega_\sigma^*$ – ненагруженный штампами участок границы тела. Это приводит к замене в них ω_σ на ω_σ^* (нормализованное до первого порядка уравнение участка $\partial\Omega_\sigma^*$). Таким образом, структуры для напряжений будут следующими:

$$\sigma_x = (m_\sigma^*)^2 \Phi_3 \frac{\omega_k}{\omega_\sigma^* + \omega_k} + \Phi_4 \omega_\sigma^*; \sigma_y = (l_\sigma^*)^2 \Phi_3 \frac{\omega_k}{\omega_\sigma^* + \omega_k} + \Phi_5 \omega_\sigma^*; \sigma_{xy} = -l_\sigma m_\sigma \Phi_3 \frac{\omega_k}{\omega_\sigma^* + \omega_k} + \Phi_6 \omega_\sigma^* \omega_k.$$

Введем опорные области:

$$\Omega_1 = \left[f_1 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0 \right], \Omega_2 = \left[f_2 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0 \right],$$

$$\Omega_8 = \left[f_8 = \frac{\left(\frac{(x-a)^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{(x-a)^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{4(x-a)^2}{a_0^4} + \frac{4y^2}{b_0^4}}} \geq 0 \right], \Omega_9 = \left[f_9 = \frac{\left(\frac{(x+a)^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{(x+a)^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{4(x+a)^2}{a_0^4} + \frac{4y^2}{b_0^4}}} \geq 0 \right],$$

$$\Omega_5 = \left[f_5 = \frac{x^2 - l^2}{2l} \geq 0 \right]; \Omega_6 = \left[f_6 = \frac{l^2 - x^2}{2l} \geq 0 \right],$$

где a_0 и b_0 – полуоси эллипсов вдоль осей Ox и Oy соответственно; $2l$ ($l \leq a$) – ширина контактной зоны.

Затем с помощью R -операций [6, 1] запишем входящие в структуры функции $\omega_\sigma, \omega_k, \omega_\sigma^*$: $\omega_k = f_1$ (шири-

на контактной зоне равна ширине верхнего основания $2l = 2a$),

$\omega_k = f_1 \vee_0 f_5$ (ширина контактной зоны меньше ширины верхнего основания $2l < 2a$),

$\omega_\sigma = f_8 \wedge_0 f_9$, и $\omega_\sigma^* = (f_1 \vee_0 f_6) \wedge_0 (f_8 \wedge_0 f_9)$ (для вариантов 2 – 4),

$\omega_\sigma = f_2$ и $\omega_\sigma^* = (f_1 \vee_0 f_6) \wedge_0 f_2$ для варианта 1, $\omega = (f_8 \wedge_0 f_9) \wedge_0 f_1$.

Результаты численных исследований. Приведем физические и геометрические параметры, использованные в расчёте: $E = 2 \cdot 10^6$ кГ/см², $G = 0.77 \cdot 10^6$ кГ/см², $\nu = \mu = 0.3$, $a = 20$ см, $b = 5$ см, $h_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ см, $a_0 = 5$ см – для варианта 2; $a_0 = a_0^{(1)} = 3.4$ см – для варианта 3; $a_0 = a_0^{(2)} = 1.7$ см – для варианта 4; $b_0 = b$ – для вариантов 2 – 4.

Задача исследований состояла в определении ширины контактной зоны в предложенных вариантах. Решение осуществлялось на основе разработанного алгоритма поиска [4, 2, 5], при выполнении критериев достоверности и точности [7]. Дальнейшие результаты приводятся в силу симметрии для полуширины основания пластины. Расчеты показали, что ширина контактной зоны составляет: $l = 20$ см (вариант 1), $l = 16.09$ см (вариант 2), $l = 18.1$ см (вариант 3), $l = 19.67$ см (вариант 4). Таким образом, оказалось, что для варианта 1 ширина контактной зоны равна ширине основания пластины (здесь нет отрыва), а для остальных вариантов она зависит от глубины вреза, а именно, чем больше a_0 , тем меньше ширина контактной зоны. Распределение контактных напряжений (рис. 2) приведено на участке основания шириной 15 см с шагом 1 см.

$\sigma_y \cdot 10^{-4}$ кГс/см²

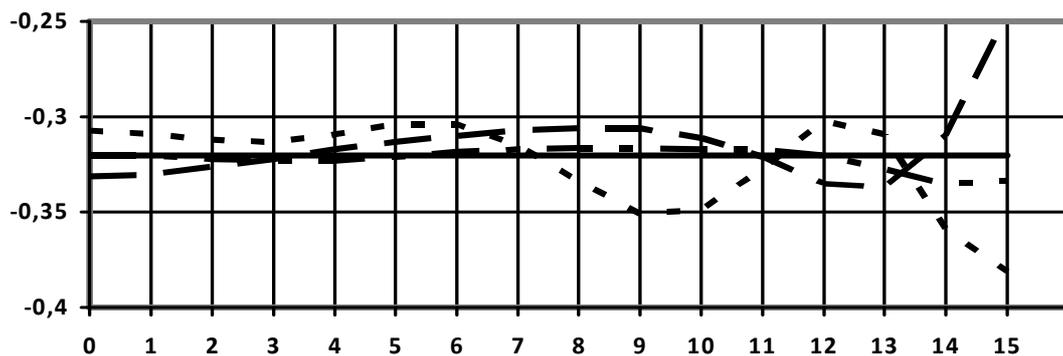


Рис. 2 – Напряжения в контактном сечении на участке 0 – 15 см.

Распределение контактных напряжений (в том числе в местах их отсутствия) на участке основания от 15 до 20 см, с шагом 0.1 см приведено на рис. 3, а перемещений – на рис. 4.

$\sigma_y \cdot 10^{-4}$ кГс/см²

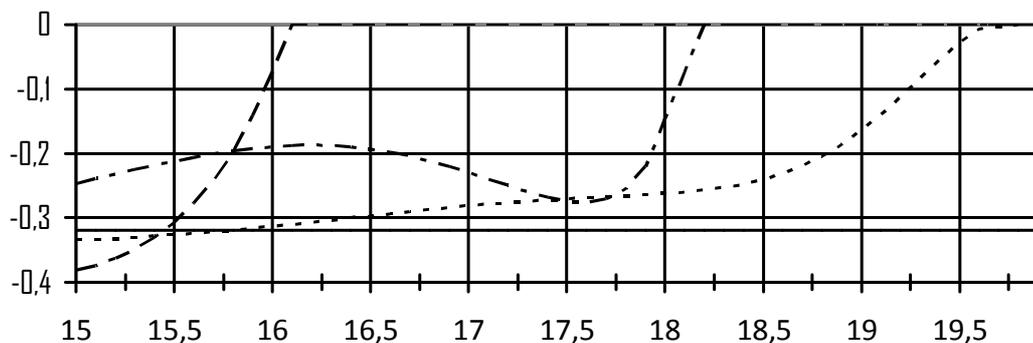


Рис. 3 – Напряжения на участке основания 15 – 20 см.

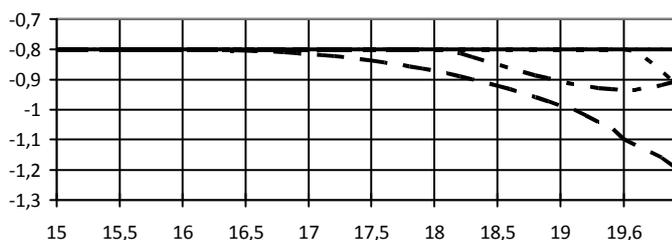
$u_y \cdot 10^3 \text{ см}$ 

Рис. 4 – Перемещения на участке основания 15 – 20 см. контактной зоны зависит от формы и глубины врезов.

Список литературы: 1. Рвачев В.Л., Синекон Н.С. Метод R -функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наук. думка, 1990. – 216 с. 2. Тарсис Е.Ю. Решение односторонних контактных задач теории упругости вариационно-структурным методом для смешанного функционала Рейсснера // Динамика и прочность машин. – Харьков: ХГПУ. – 2000. – Вып. 57. – С. 16 – 23. 3. Тарсис Е.Ю. Контактная задача для плоского тела с односторонними жесткими ограничениями // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ», 2001. – № 6 – С. 251 – 255. 4. Тарсис Е.Ю. Вариационно-структурный метод решения плоской контактной задачи теории упругости // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 18. – С. 167 – 178. 5. Рвачев В.Л., Тарсис Е.Ю. Вариационно-структурный метод для решения задач теории упругости на основе функционала Рейсснера // Вісник Інженерної академії України. – Київ, 2001. – № 3. – С. 17 – 20. 6. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с. 7. Тарсис Е.Ю. Исследование эффективности вариационно-структурного метода для функционала Рейсснера в смешанных задачах теории упругости // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып. 29. – С. 34 – 42.

Bibliography (transliterated): 1. Rvachjov, V. L., and N. S. Sinekon. *Metod R -funkcij v zadachah teorii uprugosti i plastichnosti*. Kiev: Nauk. dumka, 1990. Print. 2. Tarsis, E. Ju. "Reshenie odnostoronnih kontaktnyh zadach teorii uprugosti variacionno-strukturnym metodom dlja smeshannogo funkcionala Rejssnera." *Dinamika i prochnost' mashin*. No. 57. Kharkov: KhGPU, 2004. 16–23. Print. 3. Tarsis, E. Ju. "Kontaktnaja zadacha dlja ploskogo tela s odnostoronnimi zhestkimi ogranichenijami." *Vestnik NTU «KhPI»*. No. 6. Kharkov: NTU «KhPI», 2001. 251–255. Print. 4. Tarsis, E. Ju. "Variacionno-strukturnyj metod reshenija ploskoj kontaktnoj zadachi teorii uprugosti." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. No. 18. Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 167–178. Print. 5. Rvachjov, V. L., and E. Ju. Tarsis. "Variacionno-strukturnyj metod dlja reshenija zadach teorii uprugosti na osnove funkcionala Rejssnera." *Visnyk Inzhenernoj akademii' Ukrainy*. No. 3. Kiev. 2001. 17–20. Print. 6. Rvachjov, V. L. *Teorija R -funkcij i nekotorye ejo prilozhenija*. Kiev: Nauk. dumka, 1982. Print. 7. Tarsis, E. Ju. "Issledovanie jeffektivnosti variacionno-strukturnogo metoda dlja funkcionala Rejssnera v smeshannyh zadachah teorii uprugosti." *Vestnik Khar'kovskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta*. No. 29. Kharkov: KhGPU, 1999. 34–42. Print.

Поступила (received) 26.09.2015

Тарсис Катерина Юр'ївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: ytarsis@mail.ru.

Тарсис Екатерина Юрьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: ytarsis@mail.ru.

Tarsis Yekaterina Yur'yevna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Kharkov; tel.: (057) 707-60-87; e-mail: ytarsis@mail.ru.

УДК 628.477 : 519.876.5

Ю. В. ШАХОВ, И. И. ПЕТУХОВ, В. В. ВАМБОЛЬ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭНЕРГОТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

Рассмотрено решение одного из проблемных вопросов, связанных с утилизацией отходов, а именно разделение многокомпонентных газовых смесей, образующихся при их газификации. Выполнено математическое описание процессов, происходящих в энерготехнологической установке разделения многокомпонентных газовых смесей, образующихся при газификации отходов, с целью получения продукции целевого назначения. В данной части исследования представлены математические модели таких функциональных элементов энерготехнологической установки, как насос, детандер и рекуперативный теплообменник. В исследовании описана модель энерготехнологической установки как единого целого, которая является исполнительной частью системы управления экологической безопасностью при утилизации отходов. Предложена методика расчета сложных энерготехнологических схем.

Ключевые слова: утилизация, отходы, экологическая безопасность, математическое моделирование, двухфазная многокомпонентная среда.

Введение. Основными принципами государственной политики в сфере обращения с отходами (ст. 5 [1]) является приоритетная защита окружающей среды и здоровья человека от негативного воздействия отходов, обеспечение экономного использования материально-сырьевых и энергетических ресурсов, научно обоснованное согласование экологических, экономических и социальных интересов общества относительно образования и использования отходов.

© Ю. В. Шахов, И. И. Петухов, В. В. Вамболь, 2015

Результатом развития науки и технического обеспечения для создания новых видов материалов является образование большого количества таких отходов, которые приводят к увеличению антропогенной нагрузки на окружающую природную среду (ОПС). Накопление таких отходов на полигонах и несанкционированных местах их скопления снижает уровень экологической безопасности. Для их утилизации наиболее часто применяют термические методы, среди которых наиболее полное разложение материалов отходов на простые вещества обеспечивает газификация. Процесс газификации отходов отличается значительной сложностью и предполагает затраты, сопоставимые со стоимостью производства первичной продукции, а в отдельных случаях, существенно превышает ее. Снизить эти затраты позволяет реализация системы управления экологической безопасностью (СУЭБ) при утилизации отходов. Одним из компонентов данной системы является энерготехнологическая установка (ЭТУ). Она предназначена для разделения многокомпонентных газовых смесей (МГС), и получения топливных продуктов, которые могут быть направлены на поддержание процесса газификации.

В настоящей работе представлено математическое описание ЭТУ для разделения МГС, являющейся частью комплекса энергетических и технологических блоков для утилизации отходов.

Анализ литературных источников. Авторами разработан комплекс ЭТУ для утилизации отходов, в основу функционирования которых положен способ смешанной газификации отходов, описанный в работах [2 – 5]. Математическое моделирование процессов в отдельных агрегатах комплекса представлено в работах [6 – 12]. Комплекс реализует технологическую (исполнительную) часть СУЭБ при утилизации отходов, описанную в работах [3, 5]. Важным является то, что данная СУЭБ построена на основе принципа многоуровневой декомпозиции и системного подхода, как и СУЭБ для пылеподавления, использующая многофазные дисперсные структуры [13]. Описанный подход использован также для построения СУЭБ в процессе эксплуатации энергетических установок (ЭУ) с поршневыми двигателями внутреннего сгорания (ДВС) [14, 15].

Цель и задачи исследования. Целью исследования является математическое описание функциональных элементов сложной энерготехнологической установки для разделения многокомпонентных газовых смесей, образующихся при газификации отходов.

Объектом исследования является многокомпонентные газовые смеси, образующиеся при газификации отходов.

Предметом исследования является математические зависимости, описывающие процесс функционирования комплекса энерготехнологической установки для утилизации отходов.

Для достижения цели исследования были поставлены и решены следующие задачи:

- выполнено описание функциональных элементов сложной ЭТУ разделения МГС;
- выполнено математическое описание отдельных функциональных элементов ЭТУ, в частности насоса, детандера и рекуперативного теплообменника.

Функциональные элементы сложной энерготехнологической установки для разделения многокомпонентных газовых смесей. Рассматривая технологический процесс охлаждения генераторного газа в установке утилизации твердых бытовых и опасных отходов, необходимо теоретически описать ее функциональные элементы.

Математическая модель ЭТУ для разделения многокомпонентных газовых смесей включает систему уравнений, описывающих процессы в функциональных элементах ЭТУ, а также связи между этими элементами. Уравнения, описывающие параметры отдельных функциональных элементов, объединяются в системы уравнений, являющиеся математическими моделями этих функциональных элементов. В качестве исходных параметров и допущений было принято следующее:

- величина недорекуперации в теплообменниках, оцениваемая как разность температур потоков в *пункте* (минимальная), $\Delta T_{\text{мин}} = 5 \text{ К}$;
- температура окружающей среды $\Delta T_{\text{OC}} = 298 \text{ К}$;
- изоэнтропийный коэффициент полезного действия (КПД) детандера $\eta_{\text{д}} = 60 \text{ %}$;
- изоэнтропийный КПД насоса $\eta_{\text{н}} = 75 \text{ %}$;
- изоэнтропийный КПД компрессора $\eta_{\text{к}} = 75 \text{ %}$;
- величина гидравлических потерь в элементах блока низкотемпературного разделения газа принимается равной нулю;
- теплообменом функциональных элементов схемы и соединительных трубопроводов с окружающей средой пренебрегаем.

При расчете параметров многофазных многокомпонентных потоков используется комплект подпрограмм расчетов коэффициентов теплофизических свойств рабочих тел, базирующийся на *уравнении состояния Пенга-Робинсона*. Для достоверного расчета параметров блока низкотемпературного разделения были разработаны математические модели следующих функциональных элементов: турбодетандер; рекуперативный теплообменник; насос. Для возможности реализации сложных схем введены вспомогательные элементы – разделитель потока и смеситель.

Математическая модель расчета насоса. Расчет насоса для сжатия теплоносителя до давления в испарителе сводится к определению потребной мощности привода насоса и температуре на выходе из насоса.

Мощность насоса определяется из следующего соотношения:

$$N_P = (H_H \cdot Q_T) / \eta_P, \quad (1)$$

где $H_H = P_1 - P_2$ – напор, создаваемый насосом, Па; P_1, P_2 – давление на входе и на выходе насоса, Па; Q_T – объемный расход перекачиваемого насосом теплоносителя, м³/с; η_P – адиабатический коэффициент полезного действия насоса.

Для насоса, работающего на постоянных оборотах, напорная характеристика может выглядеть в виде полинома:

$$H_H = A_H + B_H \cdot Q_T + C_H \cdot Q_T^2 + D_H \cdot Q_T^3 + \dots,$$

где A_H, B_H, C_H, D_H – коэффициенты полинома, характеризующие напорную характеристику данной модели насоса.

Аналогично представляется характеристика КПД насоса:

$$\eta_P = a_H + b_H \cdot Q_T + c_H \cdot Q_T^2 + d_H \cdot Q_T^3 + \dots,$$

где a_H, b_H, c_H, d_H – коэффициенты полинома, характеризующие КПД данной модели насоса.

Для расчета температуры теплоносителя на выходе из насоса используется соотношение

$$N_P = M_T \cdot (i_T(P_2, T_2) - i_T(P_1, T_1)), \quad (2)$$

где i_T – энтальпия теплоносителя при заданных давлении P и температуре T ; $M_T = Q_T \cdot \rho_T$ – расход перекачиваемого насосом теплоносителя; ρ_T – плотность теплоносителя.

Математическая модель расчета детандера. Для расчета детандера используется адиабатическая модель, в которой в качестве исходных данных используются давление и температура потока на входе в детандер, давление на выходе из детандера, расход рабочего тела и адиабатический коэффициент полезного действия детандера.

Энтальпия идеального процесса расширения определяется из условия адиабатического расширения потока:

$$i_{T2_ид} = i_T(P_2, S_1), \quad (3)$$

где S_1 – удельная энтальпия потока на входе в детандер, определяемая по известным входным температуре T_1 и давлению P_1 .

Тогда мощность, получаемая в идеальном детандере при адиабатическом процессе расширения составляет

$$N_{ид_дет} = (i_{T2_ид} - i_T(P_1, T_1)) \cdot M_T. \quad (4)$$

Действительная полезная мощность, снимаемая с вала детандера, определяется равенством

$$N_{реал_дет} = N_{ид_дет} \cdot \eta_{дт}. \quad (5)$$

Энтальпия на выходе из детандера в реальном процессе (с учетом потерь) определяется формулой

$$i_T(P_4, T_4) = i_T(P_3, T_3) - N_{реал_дет} / M_T. \quad (6)$$

Данные соотношения позволяют рассчитать температуру газа на выходе из детандера.

Математическая модель расчета рекуперативного теплообменника. Математическая модель расчета рекуперативного теплообменника в наиболее общем случае предполагает существование как прямого, так и обратного потока в жидком, двухфазном и парообразном состоянии. Решение частных задач допускает более простые случаи относительного фазового состояния теплоносителей. Поэтому для расчета рекуперативного теплообменника при принятых нами допущениях производится его условное расчленение по потоку на две секции: в первой секции прямой поток теплоносителя прогревается до температуры насыщения (температуры в пинч-точке), во второй секции теплоноситель меняет свое фазовое состояние и перегревается. Аналогично для обратного потока происходит охлаждение парообразной фазы до температуры конденсации, затем теплоноситель конденсируется и продолжает охлаждаться в виде жидкости. Дополнительные сложности связаны со свойствами многокомпонентных сред. В частности, температура испарения (или конденсации) однокомпонентного рабочего тела при постоянном давлении является величиной постоянной, тогда как для многокомпонентной смеси в ходе испарения или конденсации происходит изменение температуры процесса. Таким образом, при расчете рекуперативного теплообменника с фазовыми переходами теплоносителей обязательным является нахождение положения пинч-точки, определяемое температурой и давлением каждого из теплоносителей на входе в теплообменник, а также расходом теплоносителей. Для каждой из частей записывается система уравнений. Для первой секции:

$$Q_{ISP1} = M_{II} \cdot (i_{II}(T_{II_PP}) - i_{II}(T_{II_IN})), \quad (7)$$

$$Q_{ISP1} = M_O \cdot (i_O(T_{O_PP}) - i_O(T_{O_EX})), \quad (8)$$

$$Q_{ISP1} = k_{ISP1} \cdot F_{ISP1} \cdot \overline{\Delta T}_{ISP1}, \quad (9)$$

где $T_{П_PP}$, T_{O_PP} – температуры соответственно прямого и обратного потоков теплоносителей в пинч-точке; $T_{П_IN}$ – температура прямого потока на входе в рекуперативный теплообменник; T_{O_EX} – температура обратного потока на выходе из рекуперативного теплообменника; $M_{П}$, M_O – расход прямого и обратного потока теплоносителей; F – площадь теплообменной поверхности; k – средний коэффициент теплопередачи теплообменника, принимается из литературных источников; $i_{П}$ – удельная энтальпия теплоносителя прямого потока при заданной температуре T ; i_O – удельная энтальпия теплоносителя обратного потока при заданной температуре T ; $\overline{\Delta T}$ – среднее значение температурного напора теплообменника. Индекс *ISP1* обозначает секцию испарителя, в которой осуществляется подогрев теплоносителя до температуры насыщения.

Поскольку в данном расчете не задаются геометрические параметры теплообменников, то площадь F уточняется в процессе итераций заданным значением коэффициента k . Цель расчета – получить достоверное (или приемлемое с технической точки зрения) значение площади F .

Температура прямого потока теплоносителя в пинч-точке определяется как температура насыщения при известном давлении прямого потока $P_{П}$ (для многокомпонентного потока – температура начала процесса испарения):

$$T_{П_PP} = T_{T_SAT}(P_{П}). \quad (10)$$

Соответственно температура обратного потока в пинч-точке

$$T_{O_PP} = T_{П_PP} + \Delta T_{MIN}. \quad (11)$$

Для нахождения величины среднего значения температурного напора теплообменника используется следующее соотношение

$$\overline{\Delta T}_{ISP1} = \frac{(T_{O_PP} - T_{П_PP}) - (T_{O_EX} - T_{П_IN})}{\ln\left(\frac{(T_{O_PP} - T_{П_PP})(T_{O_EX} - T_{П_IN})}{(T_{O_EX} - T_{П_PP})(T_{O_PP} - T_{П_IN})}\right)}. \quad (12)$$

Система уравнений для второй секции имеет аналогичный вид:

$$Q_{ISP2} = M_{П} \cdot (i_{П}(T_{П_EX}) - i_{П}(T_{П_PP})), \quad (13)$$

$$Q_{ISP2} = M_O \cdot (i_O(T_{O_IN}) - i_O(T_{O_PP})), \quad (14)$$

$$Q_{ISP2} = k_{ISP2} \cdot F_{ISP2} \cdot \overline{\Delta T}_{ISP2}. \quad (15)$$

Индекс *ISP2* обозначает секцию рекуперативного теплообменника, в которой осуществляется испарение и перегрев прямого потока теплоносителя.

Для нахождения величины среднего значения температурного напора теплообменника используется следующее соотношение:

$$\overline{\Delta T}_{ISP2} = \frac{(T_{O_IN} - T_{П_EX}) - (T_{O_PP} - T_{П_PP})}{\ln\left(\frac{(T_{O_IN} - T_{П_EX})(T_{O_PP} - T_{П_PP})}{(T_{O_PP} - T_{П_EX})(T_{O_IN} - T_{П_PP})}\right)}. \quad (16)$$

Последующие части исследования будут посвящены построению замыкающих соотношений, а также вспомогательным расчетам по моделированию тепломассообмена и гидравлического сопротивления течения в трубах однофазного потока. В дальнейшем планируется построение математической модели расчета теплообменника-охладителя (аппарата воздушного охлаждения); компрессора, сепаратора, ректификационной колонны и разделителя ЭТУ.

Выводы. Таким образом, в данной работе приведены следующие результаты исследования.

Описана разработанная энерготехнологическая установка для разделения многокомпонентных газовых смесей, образующихся в процессе газификации отходов, которая является исполнительным технологическим звеном системы управления экологической безопасностью при их утилизации. А именно, описаны технологические процессы разделения многокомпонентных газовых смесей и охлаждения генераторного газа.

Разработаны математические модели функциональных элементов описанной энерготехнологической установки для разделения многокомпонентных газовых смесей, образующихся в процессе газификации отходов. В данной части исследования приведены математические модели насоса, детандера и рекуперативного теплообменника.

В последующих частях исследования будут приведены математические модели других элементов комплекса: теплового и гидродинамического расчета аппарата воздушного охлаждения, компрессора, сепаратора, ректификационной колонны, разделителя, смесителя. Там же будут приведены основные составляющие

математической модели функционирования комплекса в целом: постановка задачи моделирования и основные допущения, система основных уравнений, замыкающие соотношения, вспомогательные расчеты, и сам численный метод расчета параметров комплекса. Предложена методика расчета сложных энерготехнологических схем.

С использованием результатов проведенных расчетов и на основе предложенных схем блоков разделения газа предложены различные варианты получения топливного газа и целесообразность реализации предложенного технологического процесса утилизации отходов.

Список литературы: 1. Закон України № 187/98 «Про відходи» від 05.03.1998 р., у редакції станом на 28.06.2015 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/187/98-%D0%B2%D1%80>. 2. Нечипорук Н.В., Эрсамбетов В.Ш. Альтернативная технология утилизации отходов жизнедеятельности // Экологична безпека. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вып. 2(14). – С. 80 – 84. 3. Кобрин В.Н., Нечипорук Н.В., Вамболь В.В. Система управления экологической безопасностью при утилизации твердых бытовых и производственных отходов // Экологична безпека. – Кременчук: КрНУ, 2014. – Вып. 2(18). – С. 25 – 30. 4. Чубенко А.С., Кобрин В.Н., Вамболь В.В. Экологически чистая утилизация отходов жизнедеятельности // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАУ «ХАИ», 2013. – Вып. 62. – С. 98 – 102. 5. Вамболь В.В., Кобрин В.Н., Нечипорук Н.В. Обеспечение экологической безопасности при обращении с отходами // Междунар. науч.-исслед. журнал. – Екатеринбург, 2014. – № 11 – 2 (30). – С. 8 – 10. 6. Вамболь В.В., Костюк В.Е., Кирилай Е.И. Численное моделирование процесса охлаждения генераторного газа установки утилизации твердых бытовых и опасных отходов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАУ «ХАИ», 2014. – Вып. 66. – С. 178 – 187. 7. Вамболь В.В. Математическое моделирование газовой фазы охлаждения генераторного газа установки утилизации отходов жизнедеятельности // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського: зб. наук. праць. – Кременчук: КрНУ, 2014. – № 6/2014 (89). – Ч. 1. – С. 148 – 152. 8. Вамболь В.В. Моделирование газодинамических процессов в блоке охлаждения генераторного газа установки для утилизации отходов [Электронный ресурс] // Технологии техносферной безопасности: Интернет-журнал. – М.: Академия ГПС МЧС России, 2015. – Вып. 1 (59). – С. 1 – 9. – Режим доступа: <http://ipb.mos.ru/ttb/2015-1/2015-1.html>. 9. Вамболь В.В., Костюк В.Е., Кирилай Е.И. Математическое описание процесса охлаждения генераторного газа при утилизации отходов жизнедеятельности // Технологический аудит и резервы производства. – Х.: НИП ЧП «Технологический Центр», 2015. – № 2/4 (22). – С. 23 – 29. 10. Вамболь В.В., Костюк В.Е., Кирилай Е.И. Выбор структуры и параметров газопельного потока в блоке охлаждения газа, полученного при термической обработке отходов // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАУ «ХАИ», 2015. – Вып. 67. – С. 186 – 196. 11. Вамболь В.В. Математическое моделирование дисперсной фазы охлаждения генераторного газа установки утилизации отходов жизнедеятельности // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського: зб. наук. праць. – № 2/2015 (91). – Ч. 1. – Кременчук: КрНУ, 2015. – С. 165 – 169. 12. Вамболь В.В., Костюк В.Е., Кирилай Е.И. Математическое описание процесса охлаждения генераторного газа в установке утилизации отходов жизнедеятельности // Вісник НТУ «ХПІ», 2015. – № 18 (1127). – С. 24 – 35. 13. Вамболь С.А. Системы управления экологической безопасностью, которые используют многофазные дисперсные структуры: монография. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2013. – 204 с. 14. Вамболь С.А., Строчков А.П., Вамболь В.В., Кондратенко А.Н. Методологический подход к построению системы управления экологической безопасностью эксплуатации энергетических установок // Двигатели внутреннего сгорания: всеукр. научн.-техн. журнал. – 2015. – № 1. – С. 48 – 52. 15. Кондратенко А.Н., Вамболь С.А., Вамболь В.В. Функции системы управления экологической безопасностью эксплуатации энергетических установок // Науковий вісник ХНАДУ – Харків: ХНАДУ, 2015. – Вып. 37. – С. 95 – 99. 16. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача: учеб. для вузов. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с. – 4-е изд., перераб. и доп. 17. Хьюитт Дж., Холл-Тэйлор Н. Кольцевые двухфазные течения: пер. с англ. – М.: Энергия, 1974. – 408 с. 18. Баттерворс Д., Хьюитт Дж. Теплопередача в двухфазном потоке: пер. с англ. – М.: Энергия, 1980. – 328 с.

Bibliography (transliterated): 1. Zakon Ukrainy. "Pro vidhody." No. 187/98. 05 March 1998. U redakcii' stanom na 28 June 2015. Web. 01 September 2015 <<http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/187/98-%D0%B2%D1%80>>. 2. Nechiporuk, N. V., and V. Sh. Ersmambetov. "Alternativnaja tehnologija utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Ekologichna bezpeka*. No. 2 (14). Kremenchug: KrNU, 2012. 80–84. Print. 3. Kobrin, V. N., N. V. Nechiporuk and V. V. Vambol'. "Sistema upravlenija ekologicheskoj bezopasnost'ju pri utilizacii tverdyh bytovyh i proizvodstvennyh othodov." *Ekologichna bezpeka*. No. 2 (18). Kremenchug: KrNU, 2014. 24–29. Print. 4. Chubenko, A. S., V. N. Kobrin and V. V. Vambol'. "Ekologicheski chistaja utilizacija othodov zhiznedejatel'nosti." *Otkrytye informacionnye i kompjuternye integrirovannye tehnologii*. No. 62. Kharkov: NAU «KhAI», 2013. 98–102. Print. 5. Vambol', V. V., V. N. Kobrin and N. V. Nechiporuk. "Obespechenije ekologicheskoj bezopasnosti pri obrashenii s othodami." *Mezhdunarodnyj nauchn.-issled. zhurnal*. No. 11–2 (30). Ekaterinburg, 2014. 8–10. Print. 6. Vambol', V. V., V. Je. Kostjuk and Je. I. Kirilash. "Chislennoje modelirovanie processa ohlazhdenija generatornogo gaza ustanovki utilizacii tverdyh bytovyh i opasnyh othodov." *Otkrytye informacionnye i kompjuternye integrirovannye tehnologii*. No. 66. Kharkov: NASU «KhAI», 2014. 178–187. Print. 7. Vambol', V. V. "Matematischeskoe modelirovanie gazovoj fazy ohlazhdenija generatornogo gaza ustanovki utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Visnyk Kremenchuc'kogo nacional'nogo un-tu im. M. Ostrogradskogo: zb. nauk. prac'*. No. 6 (89). Vol. 1. Kremenchug: KrNU, 2014. 148–152. Print. 8. Vambol', V. V. "Modelirovanie gazodinamicheskikh processov v bloke ohlazhdenija generatornogo gaza ustanovki utilizacii othodov." *Tehnologii tehnosfernoj bezopasnosti: Internet-zhurnal*. Vol. 1 (59). Moscow: Akademija GPS MChS Rossii, 2015. 1–5. Web. 02 September 2015 <<http://ipb.mos.ru/ttb/2015-1/2015-1.html>>. 9. Vambol', V. V., V. Je. Kostjuk and Je. I. Kirilash. "Matematischeskoe opisanije processa ohlazhdenija generatornogo gaza pri utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Mezhdunarodnyj nauchnyj zhurnal «Tehnologicheskij audit i rezervy proizvodstva»*. No. 2/4 (22). Kharkov: NIP ChP «Tehnologicheskij cent», 2015. 23–29. Print. 10. Vambol', V. V., V. Je. Kostjuk and Je. I. Kirilash. "Vybor struktury i parametrov gazopakelnogo potoka v bloke ohlazhdenija gaza, poluchennogo pri termicheskoj obrabotke othodov." *Otkrytye informacionnye i kompjuternye integrirovannye tehnologii*. No. 67. Kharkov: NASU «KhAI», 2015. 186–196. Print. 11. Vambol', V. V. "Matematischeskoe modelirovanie dispersnoj fazy ohlazhdenija generatornogo gaza ustanovki utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Visnyk Kremenchuc'kogo nacional'nogo un-tu im. M. Ostrogradskogo: zb. nauk. prac'*. No. 2 (91). Vol. 1. Kremenchug: KrNU, 2015. 165–169. Print. 12. Vambol', V. V., V. Je. Kostjuk and Je. I. Kirilash. "Matematischeskoe opisanije processa ohlazhdenija generatornogo gaza v ustanovke utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Visnyk NTU «KhPI»*. *Zbirnyk naukovykh prac'*. Ser.: *Matematychno modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 18 (1127). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 24–35. Print. 13. Vambol', S. A. *Sistemy upravlenija ekologicheskoj bezopasnost'ju, kotorye ispol'zujut mnogofaznye dispersnye struktury: monografija*. Kharkiv: Nac. aerokosm. un-t «Khar'k. aviac. inst.», 2013. Print. 14. Vambol', S. A., et al. "Metodologicheskij podhod k postroeniju sistemy upravlenija ekologicheskoj bezopasnost'ju ekspluatcii energeticheskikh ustanovok." *Dvigateli vnutrennego sgoranija: vseukr. nauchn.-tehnic. zhurnal*. No. 1. Kharkov: NTU «KhPI», 2015. 48–52. Print. 15. Kondratenko, A. N., S. A. Vambol' and V. V. Vambol'. "Funkcii sistemy upravlenija ekologicheskoj bezopasnost'ju ekspluatcii energeticheskikh ustanovok." *Naukovyj visnyk KhNADU*. No. 37. Kharkov: KhNADU, 2015. 95–99. Print. 16. Isachenko, V. P., V. A. Osipova and A. S. Sukomel. *Teplotperedacha: ucheb. dlja vuzov. 4th ed. pererad. i dop.* Moscow: Energoizdat, 1981. Print. 17. H'juitt, Dzh., and N. Holl-Tejlor. *Kol'sevye dvuhfaznye techenija: per. s angl.* Moscow: Energija, 1974. Print. 18. Battervors, D., and Dzh. H'juitt. *Teplotperedacha v dvuhfaznom potoke: per. s angl.* Moscow: Energija, 1980. Print.

Поступила (received) 15.09.2015

Шахов Юрій Васильович – старший науковий співробітник, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (068) 60-19-260; e-mail: k205@mail.ua.

Шахов Юрий Васильевич – старший научный сотрудник, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (068) 60-19-260; e-mail: k205@mail.ua.

Shakhov Yuriy Vasylovych – Senior Research Fellow, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (068) 60-19-260; e-mail: k205@mail.ua

Петухов Ілля Іванович – кандидат технічних наук, доцент, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (050) 30-33-187; e-mail: ilya2950@gmail.com.

Петухов Илья Иванович – кандидат технических наук, доцент, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (050) 30-33-187; e-mail: ilya2950@gmail.com.

Petukhov Ilya Ivanovich – Candidate of Technical Sciences, Docent, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (050) 30-33-187; e-mail: ilya2950@gmail.com.

Вамболь Віола Владиславівна – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри хімії, екології та експертизи цих технологій, Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Вамболь Виола Владиславовна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры химии, экологии и экспертизных технологий, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков; тел.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

Vambol' Viola Vladislavovna – Candidate of Technical Sciences, Docent, Docent at the Department of Chemistry, Ecology and Expertise Technology, National Aerospace University «Kharkov Aviation Institute», Kharkov; tel.: +38 (096) 32-94-136; e-mail: violavambol@gmail.com.

ЗМІСТ

Божко В. В. Підвищення якості напруги та її регулювання на струмоприймачах електрорухомого складу залізниць України за допомогою ШІМ регульованих перетворювачів	3
Бондаренко Ю. В. Комп'ютерне моделювання осадки заготовки плоскими бойками	8
Вамболь С. О., Міщенко І. В., Вамболь В. В., Кондратенко О. М. Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 2	11
Вамболь С. О., Міщенко І. В., Вамболь В. В., Кондратенко О. М. Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 3	16
Воропай А. В. Регуляризує алгоритм А. Н. Тихонова в некорректних задачах нестационарної динаміки упругих елементів конструкції	22
Глібо Е. А., Гречка І. П., Мінаков А. П. Розробка програмного забезпечення для автоматизації програмування пристроїв з ЧПК	30
Духопельников С. В. Математическая модель дифракции ТМ-волны на заполненной диэлектриком цилиндрической антенне кольцевого сечения с продольными щелями	36
Коробская А. В. Об одном операторе интегрирования	43
Литвинова Ю. С. Использование R -функций в задании информации о строительных конструкциях для реализации 3D печати	52
Любарський Б. Г., Єрціян Б. Х., Якунін Д. І., Глєбова М. Л. Оптимізація параметрів лінійного двигуна нахилу кузова транспортних засобів	58
Малахов Е. С. Прямая задача для нестационарных колебаний системы трёх струн	67
Марценюк Е. В., Зелёный Ю. А., Резник С. Б., Климик Р. Р., Кулик Т. В. Идентификация граничных условий теплообмена турбины по результатам испытаний	72
Мищенко В. О., Паточкин Б. В. Организация и оптимизация компьютерного моделирования дифракционных процессов методами дискретных особенностей	76
Набока Е. А. Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 2	85
Назаренко О. М. Дифракція плоских гармонічних хвиль на періодичній системі циліндричних порожнин	93
Новиков Ф. В., Клєнов О. С., Гершиков И. В. Математическая модель теплового процесса при шлифовании ..	97
Новиков Ф. В., Минчев Р. М. Аналитическое определение шероховатости поверхности при абразивной обработке отверстий	102
Петухов В. М. Модель предотказного состояния буксовых узлов подвижного	107
Плаксій Ю. А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі	111
Струтинський С. В. Концептуальні принципи теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів	119
Тарсис Е. Ю. Развитие методики численного исследования контактной задачи плоской теории упругости	130
Шахов Ю. В., Петухов И. И., Вамболь В. В. Математическая модель энерготехнологической установки для разделения многокомпонентных газовых смесей	134
Реферати	141
Рефераты	144
Abstracts	147

РЕФЕРАТИ

УДК 621.331:621.311.4

Підвищення якості напруги та її регулювання на струмоприймачах електрорухомого складу залізниць України за допомогою ШІМ регульованих перетворювачів / В. В. Божко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 3 – 7. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Запропоновані сучасні підходи щодо модернізації системи стабілізації напруги на струмоприймачах електрорухомого складу постійного струму напруги 3 кВ, що рухається по ділянці між тяговими підстанціями. Описана спрощена структура тягового електропостачання. Запропоновано алгоритм вирішення задачі стабілізації напруги на струмоприймачі електрорухомого складу, який реалізовано на мові MATLAB. На MATLAB-моделі перевірено можливість реалізації запропонованого алгоритму щодо стабілізації заданого рівня напруги на струмоприймачі електрорухомого складу і приведені отримані осцилограми. Запропоновано напрямок вдосконалення системи тягового електропостачання залізниць постійного струму напруги 3 кВ за рахунок використання широтно-імпульсно регульованих перетворювальних агрегатів в якості активного фільтра, що дозволяє зменшити масу індуктивності вихідного фільтра тягової підстанції і зменшити гармонійні складові як у вихідній напрузі так і напрузі живильної мережі.

Ключові слова: контактна мережа, тягова підстанція, активна фільтрація, регулювання напруги.

УДК 621.735.3

Комп'ютерне моделювання осадки заготовки плоскими бойками / Ю. В. Бондаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 8 – 11. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Досліджено вплив відносного обтиску, температури і швидкості деформування на показник зусилля осадки. Проведено моделювання процесу осадки заготовки на плоских бойках з впливом трьох факторів. За допомогою набору прикладних комп'ютерних програм: визначено коефіцієнти регресії, перевірено статистичну значимість коефіцієнтів регресії та перевірено отриману модель на адекватність; визначено оптимальні значення факторів у натуральних величинах. Визначено наявність зон інтенсивності деформування при осадці. Отримано регресійне рівняння моделювання, яке дозволяє отримувати показники зусилля осадки у натуральних одиницях.

Ключові слова: осадка, моделювання, зусилля обтиску, температура, деформація.

УДК 389.14+658.16(075.8)

Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 2 / С. О. Вамболь, І. В. Міщенко, В. В. Вамболь, О. М. Кондратенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 11 – 16. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Досліджено особливості бета-розподілу та обґрунтовано його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Проаналізовано спеціалізовану науково-технічну і довідникову літературу, методи математичної статистики, теорії ймовірностей, чисельні. У даній частині дослідження подано описання системи кривих Пірсона як математичної бази бета-розподілу, особливості застосування узагальненого бета-розподілу до об'єкту дослідження, а також проаналізовано придатність нормального закону розподілу за оцінками коефіцієнтів асиметрії та ексцесу, початкових і центральних моментів неперервних розподілів.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

УДК 389.14+658.16(075.8)

Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 3 / С. О. Вамболь, І. В. Міщенко, В. В. Вамболь, О. М. Кондратенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 16 – 21. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

У даній, завершальній частині дослідження наведено визначення і проілюстровано параметри бета-розподілу для тіл кочення підшипників, а саме оцінено збіжність ітераційного процесу визначення цих параметрів, оцінено початкові і центральні моменти розподілу, збіг початкових моментів першого і другого порядку проілюстровано відповідними гістограмами і графіками. Наведені дані демонструють доцільність застосування математичного апарату бета-розподілу до вимірюваних фізичних величин, що чинять нелінійний вплив на механічні характеристики об'єкту дослідження. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу, для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

Ключові слова: похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

УДК 539.3

Регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова в некоректних задачах нестационарної динаміки пружних елементів конструкцій / О. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 22 – 29. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Описано регуляризуючий алгоритм академіка А. М. Тихонова та його застосування для розв'язання некоректних задач механіки деформівного твердого тіла, що виникають при дослідженні інтегральних рівнянь, до яких можуть бути зведені задачі нестационарного деформування пружних елементів конструкцій. В межах регуляризуючого алгоритму виконана скінченновимірна апроксимація некоректної задачі і функціоналу, що згладжує. Розглянуто приклад розв'язку тестової некоректної задачі з використанням регуляризуючого алгоритму. Особливу увагу приділено питанню вибору параметра регуляризації.

Ключові слова: некоректна задача, нестационарне навантаження, інтегральні рівняння Вольтерра, згладжувальний функціонал, регуляризуючий алгоритм А. М. Тихонова, параметр регуляризації.

УДК 681.5:621.914:514.85

Розробка програмного забезпечення для автоматизації програмування пристроїв із ЧПК / Е. А. Глібо, І. П. Гречка, А. П. Мінаков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 30 – 36. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.

На підставі теорії комп'ютерного зору для автоматизації та прискорення програмування пристроїв з числовим програмним керуванням розроблена програма, що автоматично генерує керуючий код, готовий для використання на фрезерувальному обробляючому комплексі. Розглянуто особливості створення коду керуючої програми для чорнового та чистового фрезерування деталей з подальшим аналізом створених геометричних моделей процесу різання для корегування траєкторії руху інструменту в напрямку висотної координати для запобігання небажаного зрізу матеріалу в процесі обробки.

Ключові слова: автоматизація програмування, комп'ютерний зір, фрезерування, алгоритм роботи, керуюча програма, карта рельєфу, моделі деталі, колір та яскравість пікселів.

УДК 517.968.519.6

Математична модель дифракції ТМ-хвилі на заповненій діелектриком циліндричній антені кільцевого перетину з подовжніми щілинами / С. В. Духопельников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 36 – 43. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Надано вивід сингулярних інтегральних рівнянь задачі дифракції ТМ-хвилі на циліндричній кільцевій антені, заповненій діелектриком, внутрішня поверхня якого ідеально провідна, а ідеально провідна зовнішня поверхня має подовжні щілини. Дискретну математичну модель побудовано методом дискретних особливостей та проведено чисельний експеримент на її основі. Побудовані поперечник повного розсіяння, поля у ближній зоні та діаграми спрямованості.

Ключові слова: метод дискретних особливостей, сингулярний інтеграл, антена.

УДК 517.98

Про один оператор інтегрування / Г. В. Коробська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 43 – 52. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Роботу присвячено вивченню оператора, який є лінійною комбінацією модельного оператора інтегрування та спряженого до нього. Для цього несамоспряженого оператора побудовано локальний вузол, обчислено характеристичну функцію цього вузла та вивчено її властивості. Отримано півгрупу, яку породжує оператор, що вивчається, при цьому виникає задача Коши для рівняння другого порядку.

Ключові слова: оператор інтегрування, вузол, характеристична функція, півгрупа оператора.

УДК 517.95+518.517

Використання R-функцій у завданні інформації про будівельних конструкціях для реалізації 3D друку / Ю. С. Литвинова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 52 – 58. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Проведено огляд інформації про використання можливостей 3D друку у створенні будівельних об'єктів. У статті автор, використовуючи методи теорії R-функцій, побудував математичну і комп'ютерну моделі котеджного будинку з метою реалізації його 3D друку. Проведено поетапне побудова рівнянь конструктивних елементів будинку. Здійснено поетапна побудова рівнянь конструктивних елементів будинку. Значну увагу приділено побудові внутрішніх конструкцій будинку. Для зручності вибору реалізовано кілька варіантів побудови даху будинку.

Ключові слова: R-функції, візуалізація 3D об'єктів, будівельні конструкції, 3D друк, конструктивні елементи.

УДК 629.429.3:621.313

Оптимізація параметрів лінійного двигуна нахилу кузова транспортних засобів / Б. Г. Любарський, Б. Х. Єрціян, Д. І. Якунін, М. Л. Глєбова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 58 – 66. Бібліогр.: 23 назв. – ISSN 2222-0631.

Запропоновано спрощену математичну модель лінійного двигуна для визначення електромагнітної сили. Сформульовано задачу умовної оптимізації геометричних параметрів лінійного двигуна. Запропоновано у якості цільової функції використати залежність, пропорційну різниці енергії, що може перетворити лінійний двигун та енергії, яка потрібна для руху механізму нахилу кузова. У якості методу оптимізації на попередньому етапі пошуку обрано комбінований метод, що включає в себе генетичний алгоритм. На завершальному етапі оптимізаційної процедури уточнення оптимальності здійснюється методом Нелдера-Міда. Розроблено алгоритм вирішення задачі оптимізації, та його реалізацію в пакеті MATLAB. Запропоновано напрямок удосконалення електромеханічних приводів нахилу кузова за рахунок розробки комбінованих приводів, у яких сумарний кут нахилу буде створено частково електроприводом з лінійним двигуном, а частково іншими механізмами, які вже встановлені на рухомому складі.

Ключові слова: лінійний двигун, умовна оптимізація, генетичні алгоритми, кут нахилу, активні матеріали.

УДК 539.3

Пряма задача для нестационарних коливань системи трьох струн / Є. С. Малахов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 67 – 71. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Досліджуються нестационарні коливання системи трьох струн викликані впливом зосередженого навантаження. Рухи струн описуються одновимірними неоднорідними хвильовими рівняннями. Визначаються залежності контактних сил, що виникають між струнами, із застосуванням методу регуляризації А. М. Тихонова і квадратурних формул. Наведено приклад чисельного розрахунку, в якому отримано залежності контактних сил і переміщень кожної з струн.

Ключові слова: система струн, нестационарне навантаження, хвильове рівняння, метод регуляризації, інтегральне рівняння Вольтера.

УДК 621.452.3:536.24

Ідентифікація граничних умов теплообміну турбіни за результатами випробувань / С. В. Марценюк, Ю.О. Зелений, С. Б. Резник, Р. Р. Климік, Т. В. Кулик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 72 – 76. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.

Вирішена задача щодо визначення граничних умов конвективного теплообміну для корпусу турбіни за результатами випробувань авіаційного двигуна. Досягнуто підвищення точності розрахунків граничних умов 3-го роду за питомим тепловим потоком при складному характері течії навколишнього середовища. Для цього введено поправку до розрахункового значення коефіцієнтів тепловіддачі, що враховує теплообмін всередині деталі через теплопровідність матеріалу. Виконано порівняння відновленого поля температур корпусу турбіни з даними випробувань.

Ключові слова: турбіна, конвекція, теплопровідність, обернена задача, коефіцієнт тепловіддачі.

УДК 519.64:004.032.24

Організація та оптимізація комп'ютерного моделювання дифракційних процесів методом дискретних особливостей / В. О. Міщенко, Б. В. Паточкін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 76 – 85. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

При всебічному дослідженні антен, ретрансляторів та інших подібних пристроїв існує потреба в розрахунках параметрів дифракції електромагнітних хвиль на металевих екранах для багатьох варіантів форми та хвильових чисел. Критичним є час комп'ютерного моделювання. Перспективними в такій ситуації стають обчислювальні методи дискретних особливостей, зокрема, метод дискретних струмів (МДС). У статті розроблено метод організації комп'ютерного моделювання по МДС з використанням особливостей архітектури персональних комп'ютерів і дано результати перевірки ефективності цього методу.

Ключові слова: електромагнітна хвиля, дифракція, хвильове число, комп'ютерна модель, МДО, архітектура, тайлинг, векторні регістри, OpenMP, швидкість обчислень.

УДК 517.955.8

Синхронізація коливань двох зв'язаних пластин Бергера з нелінійним внутрішнім та граничним демпфуванням. Частина 2 / О. О. Набока // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 85 – 92. Бібліогр.: 24 назв. – ISSN 2222-0631.

Вивчається модель Бергера нелінійних коливань двох однакових пружно зв'язаних пластин із частково затиснутою та частково вільною границею. Припускаємо, що нелінійні дисипаційні сили діють у внутрішній частині пластин і на вільній частині їх границь. Вивчається

залежність структури глобального атрактора системи від параметра γ , пропорційного до інтенсивності взаємодії пластин. У цій частині роботи описано структуру верхньої границі атрактора при $\gamma \rightarrow \infty$. Встановлено, що вона збігається із множиною $diag(\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}})$ – діагоналю прямого добутку двох екземплярів атрактора системи, що описує коливання однієї пластини. Також за додаткових умов на функції демпфування доведено, що і сам аттрактор системи двох зв'язаних пластин збігається із множиною $diag(\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}})$ для достатньо великих значень параметра γ .

Ключові слова: модель Бергера, пружно зв'язані пластини, асимптотична синхронізація, нелінійна дисипація, вільна границя.

УДК 519.64, 539.3

Дифракція плоских гармонічних хвиль на періодичній системі циліндричних порожнин / О. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 93 – 97. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглядається задача про взаємодію плоскої подовжньої або поперечної гармонічної хвилі на періодичній системі циліндричних порожнин. Будуються інтегральні зображення амплітуд переміщень відбитого поля, і задача зводиться до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів проводиться методом механічних квадратур. Приведені залежності напружень на границі порожнин від динамічних, механічних та геометричних характеристик.

Ключові слова: дифракція, порожнина, функція Гріна, інтегральне рівняння, метод механічних квадратур.

УДК 621.923

Математична модель теплового процесу при шліфуванні / Ф. В. Новіков, О. С. Кленов, І. В. Гершиков // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 97 – 102. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Запропоновано нове теоретичне рішення з визначення температури різання й глибини проникнення тепла в поверхневий шар оброблюваної деталі при шліфуванні з урахуванням перерізання шліфувальним кругом адіабатичних стержнів, набором яких умовно поданий припуск, що знімається. Показано, що із часом обробки температура різання безупинно збільшується, асимптотично наближаючись до певного значення, а глибина проникнення тепла в поверхневий шар оброблюваної деталі при шліфуванні приймає кінцеве значення.

Ключові слова: шліфування, тепловий процес, температура різання, адіабатичний стержень, час.

УДК 621.923

Аналітичне визначення шорсткості поверхні при абразивній обробці отворів / Ф. В. Новіков, Р. М. Мінчев // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 102 – 107. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Виконано розрахунок шорсткості поверхні при абразивній обробці на основі використання теорії ймовірностей і проведено аналіз закономірностей зміни шорсткості поверхні при шліфуванні отвору. Установлено, що шорсткість поверхні однозначно визначається сумарною кількістю зерен, що беруть участь у формуванні шорсткості поверхні. Обґрунтовано переваги хонінгування порівняно із внутрішнім шліфуванням. Показано можливість зменшення шорсткості поверхні при шліфуванні кругом, вісь якого розташована перпендикулярно осі обертання оброблюваної деталі.

Ключові слова: абразивна обробка, шліфування, хонінгування, отвір, шорсткість поверхні.

УДК 629.4.027.11: 681.518.5

Модель передвідмовного стану буксових вузлів рухомого складу / В. М. Петухов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 107 – 111. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Визначено, що найбільший ризик виникнення помилки у визначенні технічного стану буксового вузла виникає в так званій "зоні невизначеності" через неможливість однозначно оцінити його технічний стан. Для рішення цього завдання запропонована модель у вигляді n – мірного радіус-вектора, що має напрям до збільшення ймовірності відмови й погіршенню значень параметрів. Розроблена модель визначення передотказного стану буде сприяти зменшенню ймовірності прийняття помилкових рішень.

Ключові слова: буксовий вузол, контроль технічного стану, вбудований засіб контролю, зона невизначеності, передвідмовний стан, радіус-вектор.

УДК 629.7.05

Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі / Ю. А. Плаксії // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 111 – 119. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Запропонована нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на трьохчастотному представленні кватерніона орієнтації в функціях кутів, що одноментно змінюються у часі згідно лінійного закону. Побудовані аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонентів кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримані чисельні реалізації моделі. Результати представлені у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі для параметрів орієнтації. Показано, що нова модель описує обертання твердого тіла, що різниться від випадку регулярної прецесії. Модель може бути застосована в якості еталонної для отримання оцінок похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

УДК 621.9.06

Концептуальні принципи теорії проектування інноваційних мехатронних просторових системприводів / С. В. Струтинський // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 119 – 129. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Розроблено концепцію та основні принципи теорії проектування інноваційних мехатронних просторових систем приводів. Концепція включає розробку інноваційних просторових систем приводів на новій елементній базі. Елементна база створена на основі аналізу робочих процесів у просторових системах приводів. Запропоновано основні етапи теорії проектування, які у своєму взаємозв'язку дають можливість розробити систему приводів просторового типу. Системи приводів призначені для маніпулювання об'єктами машинобудування, в тому числі в екстремальних умовах експлуатації. Вони забезпечують роботу в замкнених об'ємах та переміщення об'єктів по стінках. Етапи включають синтез схемних рішень, розрахунок, макетування, визначення статичних і динамічних характеристик, створення елементної бази та алгоритмічного забезпечення роботи мехатронної системи і апробацію дослідних зразків систем.

Ключові слова: просторові приводи, теорія проектування, синтез схем, розрахунок, макетування, статика, динаміка, апробація.

УДК 539.3

Розвиток методики чисельного дослідження контактної задачі плоскої теорії пружності / К. Ю. Тарсіс // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 130 – 134. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

В розвиток методики доповнено варіаційну та структурну постановку плоскої контактної задачі теорії пружності для однородних тіл вільної геометричної форми на основі функціонала Рейсснера. Розглянуто нову задачу пошуку невідомої області контакту на ділянках взаємодії пружного тіла зі штампами. На конкретному прикладі досліджено вплив бокових врізів різної конфігурації на ширину шуканої області контакту.

Ключові слова: контактна задача плоскої теорії пружності, функціонал Рейсснера, структурна постановка, структури для переміщення та напрути, пошук невідомої області контакту, штамп, опорні області, R – операції.

УДК 628.477 : 519.876.5

Математична модель енерготехнологічної установки для розділення багатокомпонентних газових сумішей / Ю. В. Шахов, І. І. Петухов, В. В. Вамболь // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 134 – 139. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглянуто рішення одного з проблемних питань, пов'язаних з утилізацією відходів, а саме поділ багатокомпонентних газових сумішей, що утворюються при їх газифікації. Виконано математичний опис процесів, які відбуваються в енерготехнологічному обладнанні для поділу багатокомпонентних газових сумішей, що утворюються при газифікації відходів, з метою отримання продукції цільового призначення. У даній частині дослідження наведено математичні моделі таких функціональних елементів енерготехнологічного обладнання, як насос, детандер і рекуперативний теплообмінник. У дослідженні описана модель енерготехнологічного обладнання як єдиного цілого, яке є виконавчою частиною системи управління екологічною безпекою при утилізації відходів. Запропоновано методику розрахунку складних енерготехнологічних схем.

Ключові слова: утилізація, відходи життєдіяльності, екологічна безпека, діоксини, математичне моделювання, двофазне багатокомпонентне середовище.

РЕФЕРАТЫ

УДК 621.331;621.311.4

Повышение качества напряжения и его регулирование на токоприемнике электроподвижного состава железных дорог Украины с помощью ШИМ регулируемых преобразователей / В. В. Божко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 3 – 7. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложены современные подходы по модернизации системы стабилизации напряжения на токоприемниках электроподвижного состава постоянного тока напряжения 3 кВ, который движется на участке между тяговыми подстанциями. Представлена упрощенная структура тягового электроснабжения. Предложен алгоритм решения задачи стабилизации напряжения на токоприемнике электроподвижного состава, который реализован на языке MATLAB. На MATLAB-моделе проверено возможность реализации предложенного алгоритма по стабилизации заданного уровня напряжения на токоприемнике электроподвижного состава и приведены полученные осциллограммы. Предложено направление совершенствования системы тягового электроснабжения железных дорог постоянного тока напряжения 3 кВ за счет использования широтно-импульсно регулируемых преобразовательных агрегатов в качестве активного фильтра, что позволяет уменьшить массу индуктивности выходного фильтра тяговой подстанции и уменьшить гармонические составляющие, как в выходном напряжении, так и в напряжении питающей сети.

Ключевые слова: контактная сеть, тяговая подстанция, активная фильтрация, регулирование напряжения.

УДК 621.735.3

Компьютерное моделирование осадки заготовки плоскими бойками / Ю. В. Бондаренко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 8 – 11. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Исследовано влияние относительного обжатия, температуры и скорости деформирования на показатель силы осадки. Проведено моделирование процесса осадки заготовки на плоских бойках с влиянием трех факторов. С помощью набора прикладных компьютерных программ определены коэффициенты регрессии, проверена статистическая значимость коэффициентов регрессии и проверена полученная модель на адекватность; определены оптимальные значения факторов в натуральных величинах. Определено наличие зон интенсивности деформирования при осадке. Получено регрессионное уравнение моделирования, которое позволяет получать показатели силы осадки в натуральных единицах.

Ключевые слова: осадка, моделирование, сила обжатия, температура, деформация.

УДК 389.14+658.16(075.8)

Аппроксимация закона распределения экспериментальных данных с помощью бета-распределения. Часть 2 / С. А. Вамболь, И. В. Мищенко, В. В. Вамболь, А. Н. Кондратенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 11 – 16. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Исследованы особенности бета-распределения и обосновано его применение для аппроксимации закона распределения эмпирических данных в сравнении с другими видами законов распределения вообще и практическое использование такого распределения для случая геометрических характеристик тел качения подшипников. Проанализирована специализированная научно-техническая и справочная литература, методы математической статистики, теории вероятностей, численные. В данной части исследования осуществлено описание системы кривых Пирсона как математической базы бета-распределения. Впервые показаны преимущества применения бета-распределения для аппроксимации эмпирического закона распределения любых данных измерений на примере геометрических характеристик тел качения подшипников. Полученные методология и математический аппарат для применения бета-распределения пригодны для решения задач аппроксимации эмпирических данных любой природы.

Ключевые слова: погрешности измерения, эмпирическое распределение, нормальное распределение, бета-распределение, распределение Пирсона, аппроксимация.

УДК 389.14+658.16(075.8)

Аппроксимация закона распределения экспериментальных данных с помощью бета-распределения. Часть 3 / С. А. Вамболь, И. В. Мищенко, В. В. Вамболь, А. Н. Кондратенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №41 (1150). – С. 16 – 21. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Исследованы особенности бета-распределения и обосновано его применение для аппроксимации закона распределения эмпирических данных в сравнении с другими видами законов распределения вообще и практическое использование такого распределения для случая геометрических характеристик тел качения подшипников. Проанализирована специализированная научно-техническая и справочная литература, методы математической статистики, теории вероятностей, численные. В данной, завершающей части исследования приведено определение и проиллюстрированы параметры бета-распределения для объекта исследования. Впервые показаны преимущества применения бета-распределения для аппроксимации эмпирического закона распределения любых данных измерений на примере геометрических характеристик тел качения подшипников. Полученные методология и математический аппарат пригодны для применения бета-распределения, для решения задач аппроксимации эмпирических данных любой природы.

Ключевые слова: погрешности измерения, эмпирическое распределение, нормальное распределение, бета-распределение, распределение Пирсона, аппроксимация.

УДК 539.3

Регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова в некорректных задачах нестационарной динамики упругих элементов конструкции / А. В. Воропай // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 22 – 29. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Описан регуляризирующий алгоритм академика А. Н. Тихонова и его применения для решения некорректных задач механики деформируемого твердого тела, возникающих при исследовании интегральных уравнений, к которым могут быть сведены задачи нестационарного деформирования упругих элементов конструкции. В рамках регуляризирующего алгоритма рассмотрена конечномерная аппроксимация некорректной задачи и сглаживающего функционала. Описан пример решения тестовой некорректной задачи с использованием регуляризирующего алгоритма. Особое внимание уделено вопросу выбора параметра регуляризации.

Ключевые слова: некорректная задача, нестационарное нагружение, интегральные уравнения Вольтерра, сглаживающий функционал, регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова, параметр регуляризации.

УДК 681.5:621.914:514.85

Разработка программного обеспечения для автоматизации программирования устройств с ЧПУ / Е. А. Глибко, И. П. Гречка, А. П. Минаков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 30 – 36. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.

Разработана программа, которая автоматически генерирует управляющий код, готовый для использования на фрезерный обрабатывающий комплекс, на основании теории компьютерного зрения для автоматизации и ускорения программирования устройства с ЧПУ. Рассмотрены особенности создания кода управляющей программы для черного и чистового фрезерования деталей, с последующим анализом созданных геометрических моделей процесса резки для корректировки траектории движения инструмента в направлении высотной координаты для предотвращения нежелательного среза материала в процессе обработки.

Ключевые слова: автоматизация программирования, компьютерное зрение, фрезерование, алгоритм работы, управляющая программа, карта рельефа, модели детали, цвет и яркость пикселей.

УДК 517.968.519.6

Математическая модель дифракции ТМ-волны на заполненной диэлектриком цилиндрической антенне кольцевого сечения с продольными щелями / С. В. Духопельников // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 36 – 43. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.

Дан вывод сингулярных интегральных уравнений задачи дифракции ТМ-волны на цилиндрической кольцевой антенне, заполненной диэлектриком, внутренняя поверхность которой идеально проводящая, а идеально проводящая внешняя поверхность имеет продольные щели. Дискретная математическая модель построена методом дискретных особенностей и проведен численный эксперимент на ее основе. Построены поперечник полного рассеяния, поля в ближней зоне и диаграммы направленности.

Ключевые слова: метод дискретных особенностей, сингулярный интеграл, антенна.

УДК 517.98

Об одном операторе интегрирования / А. В. Коробская // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 43 – 52. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Изучен оператор, который является линейной комбинацией модельного оператора интегрирования и его сопряженного. Показано, что данный оператор ограничен, и найден сопряженный к нему оператор. Для исследуемого несамосопряженного оператора построен локальный узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Получена полугруппа, которую порождает изучаемый оператор, при этом возникает задача Коши для уравнения второго порядка. Отметим, что изучаемый в работе оператор не всегда является диссипативным, а характеристическая функция узла, соответствующего данному оператору, имеет ряд особенностей, которые изучены в работе. Предложены направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: оператор интегрирования, узел, характеристическая функция, полугруппа оператора.

УДК 517.95+518.517

Использование R-функций в задании информации о строительных конструкциях для реализации 3D печати / Ю. С. Литвинова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 52 – 58. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Проведен обзор информации об использовании возможностей 3D печати в создании строительных объектов. В статье автор, используя методы теории R-функций, построил математическую и компьютерную модели коттеджного дома с целью реализации его 3D печати. Проведено поэтапное построение уравнений конструктивных элементов дома. Значительное внимание уделено построению внутренних конструкций дома. Для удобства выбора реализовано несколько вариантов построения крыши дома.

Ключевые слова: R-функции, визуализация 3D объектов, строительные конструкции, 3D печать, конструктивные элементы.

УДК 629.429.3:621.313

Оптимизация параметров линейного двигателя наклона кузова транспортных средств / Б. Г. Любарский, Б. Х. Ерицян, Д. И. Якунин, М. Л. Глебова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 58 – 66. Бібліогр.: 23 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложена упрощенная математическая модель линейного двигателя для определения электромагнитной силы. Сформулирована задача условной оптимизации геометрических параметров линейного двигателя. Предложено в качестве целевой функции использовать зависимость, пропорциональную разности энергии, преобразуемой линейным двигателем и энергии, необходимой для перемещения механизма наклона кузова. В качестве метода оптимизации на предварительном этапе поиска выбран комбинированный метод, включающий в себя генетический алгоритм. На завершающем этапе оптимизационной процедуры, уточнение оптимума осуществляется методом Нелдера-Мида. Разработан алгоритм решения задачи оптимизации и его реализация в пакете MATLAB. Предложено направление совершенствования электромеханических приводов наклона кузова за счет разработки комбинированных приводов, в которых суммарный угол наклона будет создан частично электроприводом с линейным электродвигателем, а частично другими механизмами, которые уже установлены на подвижном составе.

Ключевые слова: линейный двигатель, условная оптимизация, генетические алгоритмы, угол наклона, активные материалы.

УДК 539.3

Прямая задача для нестационарных колебаний системы трех струн / Е. С. Малахов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 67 – 71. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Исследуются нестационарные колебания системы трех струн, вызываемые воздействием сосредоточенной нагрузки. Движения струн описываются одномерными неоднородными волновыми уравнениями. Определяются зависимости контактных сил, возникающих между струнами, с применением метода регуляризации А. Н. Тихонова и квадратурных формул. Приведен пример численного расчета, в котором получены зависимости контактных сил и перемещений каждой из струн.

Ключевые слова: система струн, нестационарная нагрузка, волновое уравнение, метод регуляризации, интегральное уравнение Вольтерра.

УДК 621.452.3:536.24

Идентификация граничных условий теплообмена турбины по результатам испытаний / Е. В. Марценюк, Ю. А. Зеленый, С. Б. Резник, Р. Р. Климик, Т. В. Кулик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 72 – 76. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.

Решена задача по определению граничных условий конвективного теплообмена для корпуса турбины на основе результатов испытаний авиационного двигателя. Достигнуто повышение точности расчетов граничных условий 3-го рода по удельному тепловому потоку при сложном характере течения окружающей среды. Для этого введена поправка к расчетному значению коэффициентов теплоотдачи, учитывающая теплообмен внутри детали посредством теплопроводности материала. Выполнено сравнение восстановленного поля температур корпуса турбины с экспериментальными данными.

Ключевые слова: турбина, конвекция, теплопроводность, обратная задача, коэффициент теплоотдачи.

УДК 519.64:004.032.24

Организация и оптимизация компьютерного моделирования дифракционных процессов методом дискретных особенностей / В. О. Мищенко, Б. В. Паточкин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 76 – 85. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

При всестороннем исследовании антенн, ретрансляторов и других подобных устройств существует потребность в расчетах параметров дифракции электромагнитных волн на металлических экранах для многих вариантов формы и волновых чисел. Время компьютерного моделирования критично. Перспективными в такой ситуации становятся вычислительные методы дискретных особенностей, в частности, метод дискретных токов (МДТ). В статье разработан метод организации компьютерного моделирования по МДТ с использованием особенностей архитектуры персональных компьютеров и даны результаты проверки эффективности этого метода.

Ключевые слова: электромагнитная волна, дифракция, волновое число, математическая модель, МДО, архитектура компьютера, тайлинг, векторные регистры, OpenMP, скорость вычислений.

УДК 517.955.8

Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 2 / Е. А. Набока // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 85 – 92. Бібліогр.: 24 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично заземленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границы. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра γ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. В этой части работы описана структура верхнего предела аттрактора при $\gamma \rightarrow \infty$. Установлено, что он совпадает с множеством $diag(\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}})$ – диагональю прямого произведения двух экземпляров аттрактора системы, описывающей колебания одной пластины. Также при дополнительных условиях на функции демпфирования доказано, что и сам аттрактор системы двух связанных пластин совпадает с множеством $diag(\tilde{\mathcal{X}} \times \tilde{\mathcal{X}})$ для достаточно больших значений параметра γ .

Ключевые слова: модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

УДК 519.64, 539.3

Дифракция плоских гармонических волн на периодической системе полостей / А. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 93 – 97. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассматривается задача о взаимодействии плоской продольной или поперечной гармонической волны на периодической системе цилиндрических полостей. Строятся интегральные представления амплитуд перемещений отраженного поля, и задача сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений. Численная реализация построенных алгоритмов проводится методом механических квадратур. Приведены зависимости напряжений на границе полостей от динамических, механических и геометрических характеристик.

Ключевые слова: дифракция, полость, функция Грина, интегральное уравнение, метод механических квадратур.

УДК 621.923

Математическая модель теплового процесса при шлифовании / Ф. В. Новиков, О. С. Кленов, И. В. Гершиков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 97 – 102. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложено новое теоретическое решение по определению температуры резания и глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании с учетом перерезания шлифовальным кругом адиабатических стержней, набором которых условно представлен снимаемый припуск. Показано, что с течением времени обработки температура резания непрерывно увеличивается, асимптотически приближаясь к определенному значению, а глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали при шлифовании принимает конечное значение.

Ключевые слова: шлифование, тепловой процесс, температура резания, адиабатический стержень, время.

УДК 621.923

Аналитическое определение шероховатости поверхности при абразивной обработке отверстий / Ф. В. Новиков, Р. М. Минчев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 102 – 107. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Произведен расчет шероховатости поверхности при абразивной обработке на основе использования теории вероятностей и выполнен анализ закономерностей изменения шероховатости поверхности при шлифовании отверстия. Установлено, что шероховатость поверхности однозначно определяется суммарным количеством зерен, участвующих в формировании шероховатости. Обоснованы преимущества хонингования по сравнению с внутренним шлифованием. Показана возможность уменьшения шероховатости поверхности при шлифовании кругом, ось которого расположена перпендикулярно оси вращения обрабатываемой детали.

Ключевые слова: абразивная обработка, шлифование, хонингование, отверстие, шероховатость поверхности.

УДК 629.4.027.11: 681.518.5

Модель предотказного состояния буксовых узлов подвижного состава / В. М. Петухов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 107 – 111. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Определено, что наибольший риск возникновения ошибки в определении технического состояния буксового узла возникает в так называемой «зоне неопределенности» из-за невозможности однозначно оценить его техническое состояние. Для решения этой задачи предложена модель в виде n – мерного радиус-вектора, имеющего направление к увеличению вероятности отказа и уходуению значений параметров. Разработанная модель определения предотказного состояния будет способствовать уменьшению вероятности принятия ошибочных решений.

Ключевые слова: буксовый узел, контроль технического состояния, встроенное средство контроля, зона неопределенности, предотказное состояние, радиус-вектор.

УДК 629.7.05

Обобщение трехчастотной тригонометрической кватернионной модели вращения твердого тела. Первый тип модели / Ю. А. Плаксий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 111 – 119. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложена новая непрерывная модель вращения твердого тела, основанная на обобщенном представлении модельного кватерниона ориентации в функциях углов, одновременно линейно изменяющихся во времени. Построены аналитические зависимости для квазиординат на такте вычислений параметров ориентации и компонентов кватерниона, соответствующих таким вращательным движениям. Для нескольких наборов параметров получены реализации модели. Результаты представлены в форме зависимостей квазиординат от времени и траекторий в конфигурационном пространстве для параметров ориентации. Показано, что новая модель описывает вращение твердого тела, отличное от случая регулярной прецессии. Модель может быть использована в качестве эталонной для получения оценок погрешностей алгоритмов определения ориентации в бесплатформенных системах.

Ключевые слова: кватернион, ориентация, эталонная модель, квазиординаты, траектории в конфигурационном пространстве.

УДК 621.9.06

Концептуальные принципы теории проектирования инновационных мехатронных пространственных систем приводов / С. В. Струтинский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 119 – 129. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Разработана концепция и основные принципы теории проектирования инновационных мехатронных пространственных систем приводов. Концепция включает разработку инновационных пространственных систем приводов на новой элементной базе. Элементная база создана на основе анализа рабочих процессов в пространственных системах приводов. Предложены основные этапы теории проектирования, которые в своей взаимосвязи позволяют разработать систему приводов пространственного типа. Системы приводов предназначены для манипулирования объектами машиностроения, в том числе в экстремальных условиях эксплуатации. Они обеспечивают работу в замкнутых объемах и перемещения объектов по стенкам. Этапы включают синтез схемных решений, расчет, макетирование, определения статических и динамических характеристик, создание элементной базы и алгоритмического обеспечения работы мехатронной системы и апробацию опытных образцов систем.

Ключевые слова: пространственные приводы, теория проектирования, синтез схем, расчет, макетирование, статика, динамика, апробация.

УДК 539.3

Развитие методики численного исследования контактной задачи плоской теории упругости / Е. Ю. Тарсис // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 130 – 134. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

В развитие методики дополнена вариационная и структурная постановка плоской контактной задачи теории упругости для однородных тел произвольной геометрической формы на основе функционала Рейсснера. Рассмотрена новая задача поиска неизвестной области контакта на участках взаимодействия упругого тела со штампами. На конкретном примере исследовано влияние боковых врезов различной конфигурации на ширину искомого области контакта.

Ключевые слова: контактная задача плоской теории упругости, функционал Рейсснера, структурная постановка, структуры для перемещений и напряжений, поиск неизвестной области контакта, штамп, опорные области, R – операции.

УДК 628.477 : 519.876.5

Математическая модель энерготехнологической установки для разделения многокомпонентных газовых смесей / Ю. В. Шахов, И. И. Петухов, В. В. Вамболь // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №41 (1150). – С. 134 – 139. Бібліогр.: 18 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассмотрено решение одного из проблемных вопросов, связанных с утилизацией отходов, а именно разделение многокомпонентных газовых смесей, образующихся при их газификации. Выполнено математическое описание процессов, происходящих в энерготехнологической установке разделения многокомпонентных газовых смесей, образующихся при газификации отходов, с целью получения продукции целевого назначения. В данной части исследования представлены математические модели таких функциональных элементов энерготехнологической установки, как насос, детандер и рекуперативный теплообменник. В исследовании описана модель энерготехнологической установки как единого целого, которая является исполнительной частью системы управления экологической безопасностью при утилизации отходов. Предложена методика расчета сложных энерготехнологических схем.

Ключевые слова: утилизация, отходы, экологическая безопасность, математическое моделирование, двухфазная многокомпонентная среда.

ABSTRAKTS

UDC 621.331;621.311.4

Increasing voltage quality and its regulation by PWM modulated converters on the pantograph of a train of the Ukrainian railways / V.V. Bozhko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 3 – 7. Bibliog.: 17 titles. – ISSN 2222-0631.

Modern approaches to modernization of the pantograph tension stabilization system for a 3 kW direct current electric train which moves in an area between traction substations were proposed. A simplified structure of traction power supply was presented. An algorithm for solving the problem of voltage stabilization on the pantograph of an electric train was developed and implemented in MATLAB. The MATLAB model was used to test the algorithm proposed for stabilization of the set level of voltage on the pantograph of an electric train. The oscillograms obtained are given. A direction for perfecting the system of traction power supply of 3kW direct current railways using pulse-width modulated converters as active filters, which allowed to decrease the mass of inductance of the output filter of traction substation and decrease harmonic components of both output and supply network voltages, was proposed.

Key words: contact network, traction substation, active filtering, voltage regulation.

UDC 621.735.3

Computer simulation of workpiece yielding by flat dies / J. V. Bondarenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 8 – 11. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

Experimental studies of metal shaping in all their variety do not provide stress and strain fields, indexes compression, temperature and strain rate explicitly. Therefore, a paper on computer simulation of mold depression is of current interest. In the paper the influence of the relative reduction, temperature and speed factors on the deformation rate is investigated. The mold depression by flat dies under the influence of these three factors is simulated. Using a set of computer applications the regression coefficients are determined, the statistical significance of the regression coefficients is tested, the adequacy of the model is verified, and the optimal values of the factors in natural units are calculated. The zones of mold intense deformation are indicated. A regression modeling equation, which allows to obtain the depression force values in natural units, is derived.

Keywords: strength, workpiece yielding, simulation of compression, temperature, deformation.

UDC 389.14+658.16(075.8)

Approximation of experimental data distribution law using the beta distribution. Part 2 / S. O. Vambol', I. V. Mischenko, V. V. Vambol', A. N. Kondratenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 11–16. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

Features of the beta distribution are investigated. The distribution application for approximating the law of distribution of the empirical data in comparison with other types of distribution laws in general and the practical use of such a distribution in the case of geometric characteristics of rolling bodies of bearings are grounded. Specialized scientific technical and reference literature, methods of mathematical statistics, probability theory, and numerical methods are analyzed. In this part of the study the Pearson curves are considered as a mathematical base of the beta distribution. The advantages of using the beta distribution to approximate the empirical law of distribution of measurement data of any kind are shown for the first time on the example of the geometric characteristics of the rolling bodies of bearings. The obtained methodology and mathematical apparatus for application of the beta distribution can be used for approximating empirical data of any kind.

Key words: errors of measuring, empirical distribution, normal distribution, beta distribution, Pearson distributions, approximation.

UDC 389.14+658.16(075.8)

Approximation of experimental data distribution law using the beta distribution. Part 3 / S. O. Vambol', I. V. Mischenko, V. V. Vambol', A. N. Kondratenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 16–21. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Features of the beta distribution are investigated. The distribution application for approximating the law of distribution of the empirical data in comparison with other types of distribution laws in general and the practical use of such a distribution in the case of geometric characteristics of rolling bodies of bearings are grounded. Specialized scientific technical and reference literature, methods of mathematical statistics, probability theory, and numerical methods are analyzed. In this final part of the study we define and illustrate the parameters of the beta distribution for the object of study. The advantages of using the beta distribution to approximate the empirical law of distribution of measurement data of any kind are shown for the first time on the example of the geometric characteristics of the rolling bodies of bearings. The obtained methodology and mathematical apparatus for application of the beta distribution can be used for approximating empirical data of any kind.

Key words: errors of measuring, empirical distribution, normal distribution, beta distribution, Pearson distributions, approximation.

UDC 539.3

Tikhonov's Regularization Algorithm for Ill-Posed Problems of Elastic Structural Element Nonstationary Dynamics / A. V. Voropay // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 22–29. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

Tikhonov's regularization algorithm and its application to solving the ill-posed problems in deformable solid mechanics are considered. Some problems of nonstationary deforming of elastic structural elements can be reduced to the Volterra integral equations. Ill-posed problems arise in the study of the Volterra integral equations. Finite-dimensional approximation of the ill-posed problem and the smoothing functional is carried out within the bounds of the regularization algorithm. The inverse identification problem for the unknown disturbing force applied to a rectangular plate is given as an example of an ill-posed problem. The solution of this ill-posed problem is obtained using Tikhonov's regularization algorithm. Special attention is paid to choosing the regularization parameter. Functional diagrams for the regularization parameter are shown. The significant influence of the priority information on the solution of the ill-posed problems is noted in conclusion.

Key words: ill-posed problem, nonstationary loading, Volterra integral equations, smoothing functional, Tikhonov's regularization algorithm, regularization parameter.

UDC 681.5:621.914:514.85

Development of software for automating the programming of CNC devices / E. A. Glibko, I. P. Buckwheat, A. P. Minakov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 30–36. Bibliog.: 4 titles. – ISSN 2222-0631.

A program that automatically generates a control code ready to use by a machining complex is developed. It is based on the theory of computer vision to automate and speed up programming of devices with numerical control. The features of generating the control program code for roughing and finishing milling of the parts are studied. The created geometric models of the cutting process are then analyzed to precise the tool path in the direction of the altitude coordinate to prevent the unwanted cutting of the material during processing. Running the program takes much less time compared to the time which needs a programmer to create a code using the equivalent software such as Pro/Engineer or ArtCam. In this case, the machining accuracy is reduced, due to the quality of the image on the bump map. Increasing the resolution of the map slows down the program significantly. But the treatment quality is sufficient to use the developed applications for processing surfaces non-critical in the industrial sense. The results (control program) were tested in practice and are planned for implementing in the technological process of machining furniture products.

Key words: software automating, computer vision, milling, processing algorithm, control program, bump map, part model, the color and brightness of the pixels.

UDC 517.968.519.6

Mathematical model of TM-wave diffraction by ideally conducting circular cylindrical antenna with longitudinal slots filled by dielectric / S. V. Dukhopelnykov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 36–43. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

In the article mathematical models of diffraction of TM-waves by straight circular cylindrical antennas with a finite number of longitudinal slots or by circular cylindrical antennas with longitudinal slots and nested circular perfectly conducting cylinder are developed.

The problems of diffraction of TM-waves by slot antennas are reduced to singular boundary integral equations. Singular integral equations are derived for the problems of diffraction by a cylindrical ring waveguide filled with dielectric, with perfectly conducting inner surface, and perfectly conducting outer surface having longitudinal slots.

A discrete mathematical model is obtained by the method of discrete singularities and a numerical experiment is carried out on its basis. In terms of the developed mathematical models computer algorithms are built on the basis of which numerical analysis is carried out for a wide range of parameters of the structure.

The developed mathematical models allow to optimize technical characteristics of antennas and waveguides, filters and linear accelerators which is necessary for projecting and building modern radioelectronic devices.

Key words: method of discrete singularities, singular and hypersingular integral equations, slot antennas.

UDC 517.98

On an Operator of Integration / G. V. Korobska // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 43–52. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

In this paper we study an operator, which is a linear combination of the model operator of integration and its adjoint. We prove that the operator is bounded and construct its adjoint. For the considered operator, which is not self-adjoint, a local node is determined and the node characteristic function is calculated. A semigroup generated by the operator is defined, which leads to a Cauchy problem for a second order differential equation. We note that the operator considered is not always dissipative and the operator node characteristic function possesses several features studied in the paper. The directions of further investigation are proposed.

Key words: integration operator, node, characteristic function, semigroup of operator.

UDC 517.95+518.517

The use of R-functions to define information about the building structures for the realization 3D printing / U. S. Litvinova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 52 – 58. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

The article provides an overview of information on using 3D printing capabilities for constructing projects. Applying methods of the theory of R – functions the author developed mathematical and computer models of a cottage for subsequent 3D printing. A step-by-step derivation of the equations of the structural elements of the cottage is carried out. Considerable attention is paid to the construction of the internal structures of the cottage. For convenience, several cottage roof options are implemented.

Keywords: R – function, visualization of 3D objects, constructions, 3D printing, design elements.

UDC 629.429.3:621.313

Optimization of parameters of the linear tilting motor of a vehicles / B. G. Liubarskyi, B. Kh. Yeritsyan, D. I. Iakunin, M. L. Glebova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 58 – 66. Bibliog.: 23 titles. – ISSN 2222-0631.

A simplified mathematical model of a linear motor for determining the electromagnetic force is presented. The problem of conventional optimization of geometrical parameters of a linear motor is formulated. It is proposed to use the dependence proportional to the difference of the energies transformed by the linear motor and required to move the tilting mechanism of the body as an objective function. The combined optimization method used at the preliminary search stage comprises a genetic algorithm. At the final stage of the optimization procedure the optimum is precised by the Nelder-Mead method. An algorithm for solving the optimization problem is developed and implemented in MATLAB. It is proposed to improve electromechanical tilting drives by developing a combined drive in which the total tilting angle will be created in part by an electric linear motors and in part by other mechanisms already installed on the rolling stock.

Keywords: linear motor, the conventional optimization, genetic algorithms, the angle of inclination, active material.

UDC 539.3

Direct problem of non-stationary vibrations of a system of three strings / E. S. Malakhov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 67 – 71. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

Non-stationary vibrations of a three-string system are studied. The system vibrations are caused by an external concentrated load applied at a certain point of one of the strings. The displacements of the points of the strings are described by a one-dimensional wave equation. The reactions of the strings are simulated by additional concentrated loads applied at the contact points. The Laplace integral transform is used for solving the differential equations. The problem is reduced to a system of two Volterra integral equations. The system of integral equations is solved using quadrature formulas and Tikhonov's regularization method. A computational example is given. The dependences of contact forces on time and displacements of each of the strings are obtained. The graphs of changes of contact forces and displacements in time are shown.

Key words: system of strings, transient loading, the wave equation, regularization method, Volterra integral equation.

UDC 621.452.3:536.24

Determining convective boundary conditions for a turbine using experimental data / E. V. Martsenyuk, Yu. A. Zelenyj, S. B. Reznik, R. R. Klimik, T. V. Kulik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 72 – 76. Bibliog.: 4 titles. – ISSN 2222-0631.

Convective boundary conditions for a turbine casing are determined on the basis of an aircraft engine testing. Improved accuracy in determination of the convective boundary conditions from the heat flux under complex nature of environment flow is achieved. The improvement occurred due to introduction of corrective coefficients for the heat transfer coefficients. The correction takes into account the conductive heat transfer inside the part. The identified temperature field of the turbine casing was compared with an experimentally measured one.

Key words: turbine, convection, thermal conductivity, inverse problem, heat transfer coefficient.

UDC 519.64:004.032.24

Organization and optimization of computer simulation of diffraction processes by discrete singularities method / V. O. Mishchenko, B. V. Patochkin // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 76 – 85. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

In the comprehensive study of antennas and repeaters there is a need in the calculation of the parameters of diffraction of electromagnetic waves on metal screens for many forms and values of wave numbers. The time of computer modeling is critical. Using computational methods of discrete singularities, in particular the discrete currents method (DCM), becomes promising in this situation. Current reserves of improving them by using sequential algorithms are exhausted. These algorithms need to be parallelized to exploit the architectural features of modern PCs. The authors have developed a library of software components, which takes into account the important architectural features of modern PCs and allows to increase the speed of computation in several or even dozens of times. The paper shows the architecture of modeling systems for the calculations by the modified DCM, the method of preparation of primary information, the method of testing the speed efficiency and the results of such testing.

Key words: electromagnetic wave, diffraction, wave number, computer model, discrete singularities method, architecture, tiling, vector registers, OpenMP, computing speed.

UDC 517.955.8

On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior and boundary damping. Part 2 / E. A. Naboka // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 85 – 92. Bibliog.: 24 titles. – ISSN 2222-0631.

A system of Berger PDE's describing nonlinear oscillations of two identical elastically coupled plates with partially clamped and partially free boundary and nonlinear dissipation acting inside plate domain as well as on the free part of the boundary is considered. We are interested in the dependence of the structure of the system global attractor on the value of the parameter γ describing the intensity of plate coupling. In this part of our research we describe the structure of the upper limit of the attractor for $\gamma \rightarrow \infty$. We prove that it coincides with the set $diag(\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}})$, which is the diagonal of the product of two samples of the attractor for a single plate equation. Moreover, under additional assumptions on the damping functions the attractor for the system of two coupled plates coincides with the set $diag(\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}})$ for γ sufficiently large.

Keywords: coupled Berger plates, asymptotic synchronization, nonlinear dissipation, free boundary.

UDC 519.64, 539.3

Diffraction of plane harmonic waves on periodic system of cylindrical cavities / O. M. Nazarenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 93 – 97. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

A problem of interaction of a flat longitudinal or transverse harmonic wave with a system of cylindrical cavities is studied. Integral

representations for the displacement amplitudes of the reflected field are constructed. The problem is reduced to solving a system of singular integral equations. Numerical implementation of the developed algorithms is carried out by a mechanical quadrature method. The dependences of the stresses on the boundary of the cavities on the dynamic, mechanical and geometric characteristics are given.

Keywords: diffraction, cavity, Green's function, integral equation, method of mechanical quadrature.

UDC 621.923

Mathematical model of thermal process in grinding / F. V. Novikov, O. S. Klenov, I. V. Gershikov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 97 – 102. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A new theoretical solution to determine the temperature of cutting and the depth of penetration of heat into the surface of the workpiece during grinding considering cutting adiabatic rods, the set of which represents conventionally the removable stock, with a grinding wheel is proposed. It is shown that with the passage of the handling time the cutting temperature increases continuously approaching asymptotically a certain value and the depth of penetration of heat into the surface of the workpiece at grinding takes a finite value depending on the thermal properties of the process, in contrast to the known theoretical solutions. Let the heat source move with constant speed along an adiabatic rod. This brings the design scheme of heating during grinding to the real conditions of a grinding process and allows to approach scientifically the analysis of the thermal stress of the grinding process and to choose the optimal treatment conditions, taking into account the restrictions on the temperature of cutting.

Key words: grinding, thermal process, the temperature of cutting, adiabatic rod, time.

UDC 621.923

Analytical determination of surface roughness in the abrasive machining of holes / F. V. Novikov, R. M. Minchev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 102 – 107. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

The roughness of the surface during abrasive processing is calculated using probability theory. The patterns of changes in the surface roughness when grinding a hole are analyzed analytically. It is proved that the surface roughness is determined completely and unambiguously by the total amount of abrasive grains participating in the formation of the surface roughness of the treated surface. The advantages of honing compared to internal grinding are justified. The possibility of substantial reduction of surface roughness by using a grinding circle with the axis perpendicular to the axis of rotation of the workpiece is shown. The greatest effect is achieved when processing by the end face of a grinding wheel having circular shape and providing maximum contact area with the inner surfaces of the machined parts. To realize the proposed scheme of the internal grinding of an opening the abrasive grains must be located approximately at the same height on the working surface of the wheel. Otherwise, cutting will involve only the most protruding grains which will lead to the formation of individual scratches on the treated surface and will not let to reduce substantially the surface roughness.

Key words: abrasive machining, grinding, honing, hole, surface roughness.

UDC 629.4.027.11: 681.518.5

Model of the pre-failure condition of axle boxes of rolling stock / V. M. Petukhov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 107 – 111. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

The conducted research shows that integrated control systems are used for axle equipment of modern rolling stock. Such systems increase the adequacy of technical condition estimation and are capable of detecting faults early and predicting remaining life. It is also shown that not all the axle equipment having high temperature is faulty. The greatest risk of error in determining the axle equipment technical condition appears in the so-called "ambiguity area" because it is impossible to estimate its technical condition exactly. To estimate the axle equipment technical condition in the ambiguity area, a model in the form of an n -dimensional radius vector having a trend to increase the probability of failure and to worsen parameter values is proposed. The model developed for determining the pre-failure condition will contribute to decreasing the probability of making wrong decisions as to the train operation mode. It will influence the train operation safety and stability of transportation process.

Key words: axle box unit, control of technical condition, a built-in control, ambiguity area, pre-failure condition, radius vector.

UDC 629.7.05

Generalization of a three-frequency trigonometrical quaternion model of a rigid body rotation. First type of model / Yu. A. Plakhsy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 111 – 119. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A new continuous rigid body rotation model based on a general concept of the model quaternion of orientation as functions of the angles simultaneously linearly changing in time is proposed. Analytical dependences for the quasicordinates on a step of calculations of the parameters of orientation and for the components of the quaternion corresponding to such rotations are constructed. Realizations of the model for several sets of the parameters are obtained. The results are presented in the form of the dependences of the quasicordinates on time and trajectories in the configuration space for the orientation parameters. It is shown that the new model describes the rotation of a rigid body other than the case of regular precession. The model can be used as a reference model for estimating errors of orientation algorithms in strapdown inertial navigation systems.

Key words: quaternion, orientation, reference model, quasicordinates, trajectories in configuration space.

UDC 621.9.06

Conceptual principles of design theory innovative spatial mechatronic drive systems / S. V. Strutinsky // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 119 – 129. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

The concept and basic principles of the theory of designing innovative mechatronic spatial drive systems were developed. The concept includes the development of innovative spatial drive systems built on a new element base. The element base was developed by analyzing the processes in spatial drive systems. The basic stages of the design theory, which in their correlations make it possible to develop a spatial drive system, were proposed. The drive systems are designed to manipulate objects in machine building, including operating in extreme working conditions. They can work in confined spaces, and move objects on the vertical walls. The stages include circuit design synthesis, calculation, modeling, determining static and dynamic characteristics, creation of the component base and algorithmic support of the mechatronic system operation, and system prototypes testing.

Keywords: spatial drives, design theory, circuit synthesis, calculation, modeling, statics, dynamics, approbation.

UDC 539.3

On the development of numerical study of a problem of plane elasticity / Ye. Yu. Tarsis // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 130 – 134. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

In the paper a method for solving planar contact elasticity problems using Reissner functional is developed. The method is adapted for solving a new problem of determining unknown contact areas on the sites of interaction of an elastic body and dies. The unknown contact areas were previously determined for the coupling cases only, whereas the contact areas under the dies were assumed to remain unchanged. The problem is supplemented by appropriate boundary conditions and structures. To illustrate the method applications a specific problem is considered. It is shown that the areas of the contact of the body with the dies differ depending on the geometrical characteristics of the body side faces. Outside these areas the body separates

from the dies.

Key words: contact problem of plane elasticity, Reissner functional, structural setting, structures for replacements and stresses, determining of an unknown contact area, die, bearing areas, R – operations.

UDC 628.477 : 519.876.5

Mathematical model of energy-technological plant for the separation of multicomponent gas mixtures / Yu. V. Shakhov, I. I. Petukhov, V. V. Vambol // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №41 (1150). – pp. 134 – 139. Bibliog.: 18 titles. – ISSN 2222-0631.

The general subject of our current research is the problem of accumulation and utilization of municipal hazardous solid waste of industrial and anthropogenic origin. In particular, in the present paper we solve one of the problematic issues related to utilization of waste, namely the separation of multicomponent gas mixtures produced during their gasification. The processes taking place in the energy-technological plant for separation of multicomponent gas mixtures produced during gasification of waste products in order to obtain useful products is described mathematically. In this part of the study we present mathematical models of complex assemblies such as a pump, an expander, and a recuperative heat exchanger. The study describes a model of the plant as a whole and as an executive part of an ecological safety management system of the waste utilization process. A method for computing complex energy technological schemes is proposed.

Key words: utilization, biowaste products, ecological safety, dioxins, mathematical modeling, dispersion multiphase structure.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»**

Збірник наукових праць

Серія:
Математичне моделювання
в техніці та технологіях

№ 41 (1150) 2015

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
Технічний редактор С. Д. Нижник
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;
e-mail: kpi_mmtt@mail.ru
Сайт: web.kpi.kharkov.ua/mmtt

Обл.-вид № 50 – 15.

Підп. до друку 24.11.2015 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 8,0. Облік.-вид. арк. 8,75.
Тираж 300 пр. (1-й завод 1 – 100) Зам. № 151593. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вл. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня ТОВ «Смугаста типографія»

Ідент. код юридичної особи: 38093808

61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28А Тел.: (057) 754-49-42