

ISSN 2222-0631



**ВІСНИК**

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
«XIII»**

**18'2015**

**Харків**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

# ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХПІ»

*Серія: Математичне моделювання  
в техніці та технологіях*

№ 18 (1127) 2015

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків  
НТУ «ХПІ», 2015

**Вісник Національного технічного університету «ХПІ».** Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2015. – № 18 (1127). – 230 с.

**Державне видання**

**Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України  
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року**

Збірник виходить українською та російською мовами.

*Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).*

**Координаційна рада:**

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);  
К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);  
А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;  
Є. С. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;  
Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;  
А. І. ГРАБЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;  
В. Д. ДМИТРИЄНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;  
В. В. СЛІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;  
П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;  
С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.;  
Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.; О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;  
В. І. НІКОЛАЄНКО, канд. іст. наук, проф.; П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.;  
В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. І. РИЩЕНКО, д-р техн. наук, проф.;  
В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.; Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.;  
Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.; М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

**Редакційна колегія серії:**

**Відповідальний редактор:** В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

**Заст. відповідального редактора:** Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** С. В. Духопельников, канд. техн. наук, доц.

**Члени редколегії:** Ю. В. ГАНДЕЛЬ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. ГЕВОРКЯН, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. ГРИГОР'ЄВ, д-р техн. наук, проф.; В. К. ДУБОВИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф.; О. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф.; О. М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф.; О. Г. НИКОЛАЄВ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. НОВОЖИЛОВА, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Г. РУТКАС, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, проф.; О. М. ШЕЛКОВИЙ, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. ЯНЮТІН, д-р техн. наук, проф.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA).*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 7 від 03 липня 2015 р.

**Г.В. ПАВЛОВА**, зав. отд. редких книг и рукописей НТБ НТУ «ХПИ»

## **РАРИТЕТНЫЕ ИЗДАНИЯ КНИГ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА ХРАНЯТСЯ В БИБЛИОТЕКЕ ХАРЬКОВСКОЙ ПОЛИТЕХНИКИ**

Статья посвящена описанию научной деятельности и печатных трудов выдающегося ученого в области естественных наук. Впервые описывается коллекция книг и научных статей Леонарда Эйлера, хранящаяся в фондах библиотеки Харьковского политехнического института, а также прослеживается история её создания.

**Ключевые слова:** история, математика, механика, гидродинамика, астрономия, философия, коллекции, раритеты, книжные памятники, научное наследие.

«Гениальные люди — это метеоры, призванные сгореть,  
чтобы озарить свой век»  
*Наполеон I Бонапарт*

«Мы все горим желанием узнать, что именно дает нам основание  
считать себя чем-то исключительным на свете»  
*Леонард Эйлер*

«Миром правят числа и их соотношения»  
*Пифагор*



*Леонард Эйлер.*

**Созвучие имен на перекрестке дат.** 15 апреля *Катерина* из Анчьяно и *Маргарита Бруккер* из Сент-Жакоби подарили своим возлюбленным сыновей, а человечеству гениев двух эпох — *Леонардо да Винчи* (1452 г.) эпохи Возрождения и *Леонардо Эйлера* (1707 г.) эпохи Просвещения. Великий живописец, скульптор, архитектор, ученый и инженер и — спустя 225 лет великий математик. Их гениальность в сочетании с нечеловеческой работоспособностью и трудолюбием оставила яркий след в истории развития человечества.

Эпоха Просвещения явилась важнейшим поворотным пунктом в интеллектуальном и духовном развитии Европы, повлиявшим практически на все сферы жизни. XVIII век — век разума и торжества научной мысли естествознания, в которой развитие математических наук связано с именем Эйлера.

Один из самых продуктивных математиков, автор более 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др., оказавших значительное влияние на развитие науки. Подсчитано, чтобы переписать труды Эйлера при ежедневной восьмичасовой работе понадобилось бы 50 лет. Его работы послужили основой разнообразных исследований известных математиков: *П. Лапласа*, *Ж. Лагранжа*, *Г. Монжа*, *А. Лежандра*, *К. Гаусса*, *О. Коши*, *М. В. Остроградского*, *П. Л. Чебышева* [17].

**INTRODUCTIO**  
*IN ANALYSIN*  
**INFINITORUM.**

AUCTORE

**LEONHARDO EULERO,**

*Professore Regio BEROLINENSIS, & Academia Imperialis Scientiarum PETROPOLITANE*  
Socio.

*L. E.*

**TOMUS PRIMUS**



929 H

**LAUSANNÆ,**

Apud **MARCUM-MICHAELUM BOUSQUET & Socios-**

**MDCCLXVIII**



Разворот книги: «Введение в анализ бесконечно малых».



*Борис Семёнович Якоби.*

**Личная коллекция книг академика Б. С. Якоби.** В фондах библиотеки НТУ «ХПИ» хранятся некоторые труды Эйлера, как книги, так и публикации в продолжающихся изданиях. Среди них есть прижизненные издания XVIII века и напечатанные после смерти Эйлера в XIX – XX столетиях.

Часть изданий Эйлера, имеющих в библиотеке, попала сюда из коллекции *Бориса Семеновича Якоби* (1801 – 1874), известного русского академика, физика, электротехника и изобретателя, родного брата знаменитого математика *Карла Густава Якоби* (1804 – 1851), в честь которого назван функциональный определитель, используемый

при вычислении кратных интегралов.

В 1844 году Б. С. Якоби избирают в комиссию Академии наук по изданию полного собрания сочинений Леонарда Эйлера, и с того времени он активно работает над планами издания сочинений. Кроме того, как ученый, Якоби не мог не восхищаться научной деятельностью Эйлера, и не иметь в личной библиотеке его трудов [8].

После смерти Леонарда Эйлера (1783), наследники выставили на продажу библиотеку ученого. В «Санкт-Петербургских ведомостях» №18 в 1784 году появилось объявление о распродаже библиотеки [6]. Со временем, предположительно, Б. С. Якоби, через букинистов, удалось приобрести ряд изданий ученого, в частности «Introductio in analysin infinitorum» (1748); «Einleitung in die Analysis des Unendlichen» (1791, 1836); «Oeuvres completes en francais de L. Euler» (1839); «Leonardi Euleri opera posthuma» (1862). Об этом свидетельствует владельческая печать.

Известны труды Б. С. Якоби в области электромагнетизма и его практического применения. Он изобрел в 1834 году электродвигатель с вращающимся рабочим валом мощностью в 1 л. с., который был установлен на судне «электроходе», плававшем на Неве [8]. Одними из первых пассажиров была царская семья. В 1838 году изобрел гальванопластику и много сделал для внедрения ее в печатное и монетное дело, для изготовления художественных изделий. Изобрел около 10 конструкций телеграфных аппаратов. Одним из первых в мире он построил кабельные телеграфные линии в Петербурге, линию Петербург — Царское село протяженностью около 25 км. Под его руководством 15 лет в России разрабатывалось минное оружие для армии. Много сделал для создания отечественного электротехнического оборудования, построил ряд электротехнических приборов — вольтметр, проволоочный эталон сопротивления, несколько конструкций гальванометров, регулятор сопротивления и т. п. Работы Б. С. Якоби сыграли важную роль в организации электротехнического образования в России [3].

Отличительной чертой ученого была его скромность. Он никогда не подчеркивал важность своих многолетних трудов, имеющих огромное научное и практическое значение. Занимая видное служебное положение в обществе, он материально нуждался. Дальнейшие исследования требовали постоянного финансового вложения. Более того, руководя физическим кабинетом Акаде-

мии наук Санкт-Петербурга, Б. С. Якоби собственными материальными средствами поддерживал его функционирование [3]. Умирая, этот крупнейший изобретатель был вынужден обратиться к правительству с просьбой не оставить в нужде его семью [18].

В 1877 году Министерство финансов России приобрело библиотеку Б. С. Якоби для Харьковского технологического института императора *Александра III*. Коллекция Якоби, насчитывавшая около 2000 изданий, послужила основой создания Научно-технической библиотеки НТУ «ХПИ».

**Редкие издания книг Эйлера из фондов харьковской библиотеки.** Основным наследием Эйлера стала разработка математического анализа, рамки которого он значительно расширил, а также заложил основы нескольких математических дисциплин.

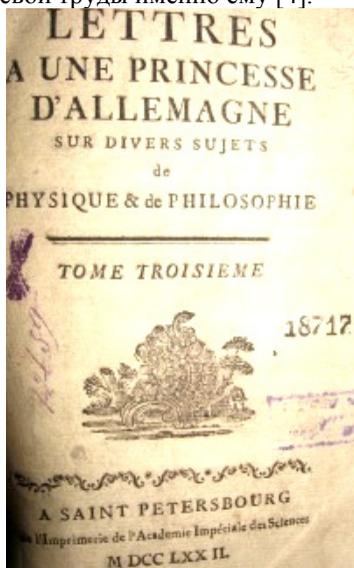
Наибольшую известность принесли Эйлеру исследования в области чистой математики. Современная тригонометрия с определением тригонометрических функций как отношений и с принятыми в ней обозначениями берет начало с эйлеровского **«Introductio in analysin infinitorum» («Введение в анализ бесконечно малых», 1748)**. Предпринятый в этой работе анализ кривых и поверхностей с использованием их уравнений позволяет рассматривать ее как первый учебник аналитической геометрии [6].

В ее первом томе изложены свойства функций рациональных и трансцендентных: тригонометрических, круговых, показательных и логарифмических, разложение последних в ряды, представление их в виде бесконечных произведений, свойства непрерывных дробей. Во втором томе — аналитическое исследование кривых линии вообще и кривых второго, третьего и четвертого порядка и поверхностей второго порядка [12].

В фонде библиотеки это издание занимает особое место среди трудов Эйлера. В экземпляре имеются автограф на титульном листе, в тексте корректирующие исправления и дополнения к некоторым параграфам. Часть дополнений не нашли отражение в хранящихся в библиотеке переизданиях **«Introductio...»** 1797 года в 2-х томах, а также в советских изданиях первого тома (1936 г.) в переводе с латинского *Е. Л. Пацановского* и второго тома (1961 г.) в переводе *В. С. Гохмана*. Пометы и маргиналии сделаны чернилами разного состава. Предположительно, данный экземпляр из дома семьи Эйлеров. Корректировка текста принадлежит, судя по почерку, двум разным людям: вероятно, Леонарду и Иоганну Альбрехту Эйлерам. Дополнения к параграфам имеются на полях, шмуцтитуле, а также на отдельном, вложенном в книгу листке с водяными знаками. Большая часть из них сделана Николаем Фуссом (1755 – 1825), учеником и секретарем ученого [16], а в дальнейшем известным математиком, о чем свидетельствует его автограф.

К моменту написания и издания **«Introductio...»** Леонард Эйлер частично потерял зрение. В 1735 году в Санкт-Петербургской академии потребовалось выполнить одну весьма сложную работу. По мнению академиков, на это нужно было употребить несколько месяцев труда. Эйлер взялся выполнить это в три дня и исполнил работу, но вследствие этого заболел нервною горячкою с воспалением правого глаза, которого он и лишился. Далее у него образовалась катаракта второго, левого глаза и со временем он перестал видеть [4]. Как ни странно, гений Эйлера в полную силу проявился именно в

тот период, когда он ослеп. Ввиду огромной продуктивности ученого срочно требовались помощники. Вокруг него образовалась группа энергичных молодых людей, горевших желанием сотрудничать с ним [2]. В 1773 году по рекомендации Д. Бернулли, в Петербург приехал из Базеля его ученик 17-летний Николай Фусс. Это было большой удачей для Эйлера. Фусс обладал редким сочетанием математического таланта и умения вести практические дела, что и дало ему возможность сразу же после приезда взять на себя заботы о трудах Эйлера. Занимаясь ежедневно по 8 – 9 часов, Николай писал под диктовку Эйлера, делал вычисления по его указанию, читал вслух математические сочинения [2]. Учитель поверял ученику свои, только что возникшие замыслы, излагал ход своих мыслей и общий план редакции, представляя его заботам развитые вычисления, выбор примеров и доработку деталей. Обычно ученик приносил ему набросок мемуара на больших листах. Когда набросок был одобрен, текст редактировался начисто и тут же представлялся в академию. В последующие десять лет — до самой своей смерти — Эйлер диктовал свои труды именно ему [4].



*«Письма к немецкой принцессе».*

гим наукам. Все биографы в один голос отмечают среди прочих достоинств ученого его глубокую личную религиозность. Без этой грани жизни Эйлер восхищал бы нас сегодня лишь как совершенный механизм, мощная вычислительная машина, этакое чудо природы — человек-арифмометр, посланный в мир для служения бесстрастному прогрессу. Но был и другой Эйлер — глубокий, вдумчивый, наблюдательный и очень человечный. Эта сторона ученого лучше всего раскрывается в знаменитых **«Письмах к немецкой принцессе»** (**«Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie»**) в 3-х томах, посвященных рассказам «о разных физических и философских материях» [11]. Эти «Письма» стали бестселлером

В библиотеке хранятся также, из коллекции Якоби, первое и второе немецкие издания **«Введение в анализ бесконечно малых»** (**«Ein-leitung in die Analysis des Unendlichen»**), изданные в Берлине в 1791 и в 1836 году, (стереотипное). Перевод с латинского, с аннотациями и дополнениями был сделан Иоганном Андреасом Кристианом Михельсенем (1749 – 1797). На форзаце верхней крышки переплета первого издания имеется автограф, датированный 1818-м годом. Предположительно, он принадлежит Павлу Николаевичу Фуссу (1797 – 1855) — правнуку Л. Эйлера, сыну Николая Фусса [14]. Ему, как Непременному Секретарю Петербургской Академии наук, одному из первых, Якоби сообщал о своих научных достижениях [3].

**Эйлеровская философия науки.** Во всех самоотверженных трудах Эйлером двигала не только любовь к математике или дру-

XVIII, а затем и XIX века, выдержав 50 переизданий на 10 языках мира. Прижизненное издание «Писем», также является гордостью библиотеки.

По просьбе, дружески расположенного к Эйлеру, маркграфа Бранденбург-Шведт в 1760 – 1762 гг. Эйлер писал его дочери, 16-летней *Фредерике Шарлотте Леопольдине*. Это письма о



«Универсальная алгебра».

физике, философии, теории музыки, логике, этике и теологии. В «Письмах» Эйлер предстает уже не только как талантливый ученый, объясняющий чрезвычайно простым языком все премудрости современной ему науки, но и как глубокий философ, рассуждающий о добре и зле, заблуждениях и истине, о свободе воли и предназначении человека: «Не подлежит сомнению, что в нашем мире есть два рода существей: одни — физические, или материальные, другие — нематериальные, или духовные, совершенно отличные от первых. Однако эти два рода существей теснейшим образом связаны друг с другом, и именно от этой связи зависят все удивительные явления в нашем мире, которые приводят в восхищение разумных людей и заставляют прославлять Создателя. Нет никакого сомнения, что духовные существи составляют важнейшую часть мира, а тела созданы только для того, чтобы им служить». Существование физического тела человека, полагал

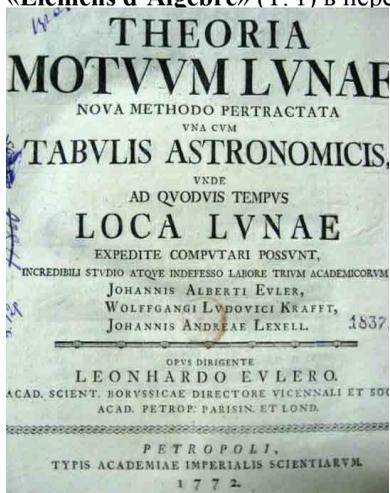
Эйлер, полностью предопределено законами механики, но благодаря данной человеку свободе выбора его жизнью управляет воля, или, правильнее сказать, то, насколько воля эта согласуется с волей Божьей. Человек в ответе за все проявления или не проявления воли, человек в ответе за свои таланты, данные Богом, человек в ответе за все свои мечты и начинания [11].

**Книги Эйлера заложили фундамент точных и прикладных наук.** В 1767 – 1770 гг. Эйлер продолжал работать со своими учениками над двухтомной классической монографией «Универсальная арифметика». Она издавалась также под названиями «Начала алгебры» и «Полное руководство по алгебре». На русском языке этот замечательный труд выходит в 1768, на немецком («Vollständige Anleitung zur Algebra») — два года спустя.

В библиотеке имеется издание «Vollständige Anleitung zur Algebra» (2 тома), изданное в Санкт-Петербурге в 1802 г., в 2-х экземплярах, в типографских обложках. В 1768 году в рекламе на «Полное руководство по алгебре», напечатанной в берлинском журнале Эйлер писал: «...Я беру на себя смелость сообщить Вам о своей работе. Ею я занимался со времени потери моего зрения, которое было заменено мне господином Краффтотом и моим старшим сыном таким образом, что они разрабатывали мои идеи и часто шли вперед, руководствуясь уже своими собственными воззрениями». Книга была

переведена на многие языки и переиздавалась около 30 раз (трижды — на русском). Все последующие учебники алгебры создавались под сильнейшим влиянием книги Эйлера [4].

В фонде библиотеки также хранится французское издание алгебры «*Elemens d'Algebre*» (Т. 1) в переводе и примечаниях *Жана Гильома Гарнье*, изданное в Париже в 1807 году.



«Теория движения Луны».

В 1768 г. Эйлер начинает публикацию цикла работ по гидродинамике в научных изданиях. В них были заложены основы всей гидродинамики идеальной жидкости. Эти статьи были позднее скопированы в одну книгу «Законы равновесия и движения жидкости тела» («*Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper...*») [15]. Сборник был издан в 1806 году в Лейпциге, в переводе немецкого гидравлика Генриха Вильгельма Брандеса, с пояснениями и примечаниями. Это издание сохранено в библиотеке в хорошем состоянии и с полным комплектом 9 таблиц, гравированных на меди.

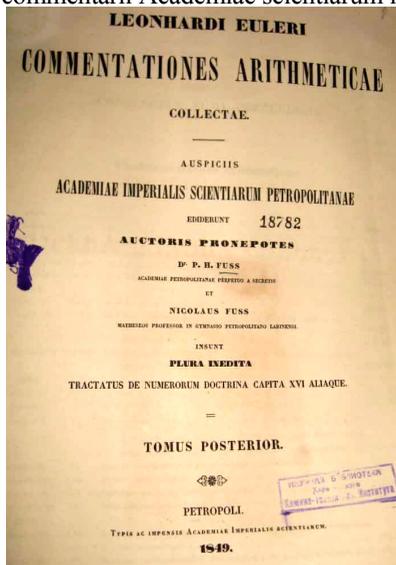
Через четыре года, в 1772 году Эйлер опубликовал обширный трактат «*Теория движения Луны*» («*Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata...*»), содержащий новый метод и астрономические таблицы, из которых могут быть получены положения Луны для любого времени [3].

Этот солидный труд, насчитывающий 775 страниц, создан под руководством Леонарда Эйлера, неимоверным усердием и неутомимыми трудами троих учеников, будущих академиков — *Иоганном Альбрехтом Эйлером* (1734 – 1800), *Вольфгангом Людвигом Крафтом* (1743 – 1814) [10] и *Андреасом Иоганном Лекселем* (1740 – 1784) [9]. Все они упоминаются на титульном листе. В этой работе был предложен новый метод, имевший большое значение, как для небесной механики, так и теории нелинейных колебаний и теории дифференциальных уравнений [1]. На основе полученных им динамических и кинематических уравнений вращения твердого тела, Эйлер разработал теорию прецессии и нутации земной оси. Он предсказал *свободные* (то есть без воздействия возмущающего воздействия Луны) колебания оси вращения Земли, которые через полтора столетия открыл *С. К. Чандлер* (1846 – 1913) [4].

В библиотеке хранится издание в типографской обложке с необрезанными листами, на обороте титульного листа имеется владельческая печать неизвестного лица.

**Труды Эйлера из петербургских научных изданий.** Обладая громадным талантом, Леонард Эйлер вместе с тем обладал необыкновенным трудолюбием: соединением этих двух качеств и объясняется многочисленность и полезность его трудов. Его статьи постоянно печатались в периодических изданиях Академии наук Санкт-Петербурга.

Первым русским научным периодическим изданием был журнал «Комментарии Петербургской Академии наук» («*Commentarii Academiæ scientiarum imperialis petropolitanae*»). Он выходил под этим и другими видоизмененными названиями на латинском, а затем на французском языках до 1806 года. Так, в 1750 – 1776 г.г. журнал выходил под названием «Новые комментарии» («*Novi commentarii Academiæ scientiarum imperialis petropolitanae*») на латинском языке;



«Комментарии Петербургской Академии наук»

в 1778 – 1786 г.г. — «Акты Петербургской Академии наук» («*Acta Academiæ scientiarum imperialis Petropolitanae*»); в 1784 – 1806 — «Новые акты» («*Nova acta Academiæ scientiarum imperialis petropolitanae*») на французском языке, которые включали значительное число статей Эйлера по различным вопросам чистой и прикладной математики, астрономии [5]. Начиная с 1726 года, ни один выпуск журнала не обходился без трудов ученого. Сам Эйлер в конце жизни шутил, что после его смерти академия будет печатать его труды еще лет 20. На деле же его архивы разбирали целое поколение ученых, а публикаций хватило еще на 47 лет [6].

В библиотеке хранятся отдельные выпуски научных журналов Академии наук, в которых представлены свыше 60 прижизненных работ Л. Эйлера.

**Эйлеровский мемориал.** Также, в фонде библиотеки имеется ряд работ, опубликованные после смерти ученого.

В тридцатые годы XIX века, благодаря активной деятельности *Павла Николаевича Фусса*, ученый мир познакомился с новыми неиссякаемыми источниками математической мысли.

Был подготовлен и издан в 1843 году сборник писем из переписки Л. Эйлера с известными учеными Николаем и Даниилом Бернулли, а также с Христианом Гольдбахом за период 1721 – 1748 г.г. Письма, опубликованные в «*Correspondance mathématique et physique de quelques celebres geometres du XVIIIeme siècle*» представляют большую научную ценность. Переписка открыла много новых неизученных фактов в истории науки. К примеру, утверждение, которое известно как *проблема Гольдбаха*, впервые было выдвинуто в 1742 году в письме Гольдбаха к Эйлеру. В библиотеке имеются два тома писем (1843).

Кроме того, П. Н. Фусс нашел новые неизданные рукописи, когда считалось, что все работы Эйлера обнародованы. Он подготовил к изданию и в 1849 году Академия наук издает «*Commentationes arithmeticae collectae*» в 2-х томах [4]. Указатели к томам были подготовлены учеными *Пафнутием Львовичем Чебышевым* и *Виктором Яковлевичем Буняковским*. В фонде библиотеки хранятся два тома известного издания.

П. Н. Фусс и Б. С. Якоби взялись подготовить полное собрание сочинений Эйлера, но им это оказалось не под силу из-за огромного наследия ученого. Было издано несколько томов «**Leonardi Euleri opera posthuma mathematica et physica anno 1844 detecta, ediderunt auctoris pronepotes P. H. F.**» (Санкт-Петербург) в 1862 году [14]. В библиотеке имеется два тома посмертных сочинений.

Ассоциация интеллектуального капитала в содействии развития физической науки и математики, при участии профессоров Военной школы Бельгии, также, попыталась издать полное сочинение Л. Эйлера. В фонде библиотеки находится пятый том сочинений «**Oeuvres completes en francais de L. Euler.**», изданный в Брюсселе в 1839 году. На обороте титульного листа имеется печать Ассоциации.

По случаю празднования в Базеле 200-летия со дня рождения Эйлера, было принято решение об издании полного собрания трудов совместными усилиями Швейцарского общества естествоиспытателей, Берлинской и Петербургской Академиями наук [4].

В 1909 году в Швейцарии была начата подготовительная работа по изданию. В 1911 году вышел первый том «**Leonhardi Euleri Opera omnia; sub auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae edenda curaverunt Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stackel**» полного собрания сочинений, которое завершено в 1980 и составило 72 тома (850 названий) плюс восемь дополнительных томов научной переписки (около 3000 писем) [17].

В подготовке принимали участие и русские ученые — *А.А. Марков, А.М. Ляпунов, В.И. Смирнов* [1].

«Таковы были труды г. Эйлера, таковы его права на бессмертие. Его имя может погибнуть только вместе с самой наукой», — известно высказывание Н. И. Фусса, в связи со смертью великого ученого [4].

**Леонарда Эйлера не забудут никогда.** Эйлер принадлежит к числу гениев, чье творчество стало достоянием всего человечества. До сих пор школьники всех стран изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придал им Эйлер [7]. Студенты проходят высшую математику по руководствам, первыми образцами которых явились классические монографии Эйлера. Он был, прежде всего, математиком, но он знал, что почвой, на которой расцветает математика, является практическая деятельность. Эйлер оставил важнейшие труды по самым различным отраслям математики, механики, физики, астрономии и по ряду прикладных наук. Трудно даже перечислить все отрасли, в которых трудился великий ученый [12].

«Читайте, читайте Эйлера, он — наш общий учитель», — любил повторять *Пьер-Симон Лаплас*. *Карл Гаусс* писал, что «изучение всех работ Эйлера останется навсегда лучшей, ничем не заменимой школой в различных областях математики» [13]. Труды Эйлера с большой пользой для себя читали — точнее, изучали все знаменитые ученые последних двух столетий.

В заключении, отмечу значимость математического наследия Л. Эйлера словами *Галилео Галилея*: «Философия природы написана в величайшей книге, которая всегда открыта перед нашими глазами, — я разумею Вселенную, но понять ее сможет лишь тот, кто сначала выучит язык и постигнет письменна, которыми она написана. А написана она на языке математики...».

## Библиография трудов Л. Эйлера, хранящихся в фонде НТБ «ХПИ»

Ouvres completes en francais de L. Euler; publies par M.M. Dubois et Drapiez, examinateurs permanents a l'Ecole militaire de Belgique; Moreau, Weiler et Steichen, professeurs a la meme ecole, et Ph. Vandermaelen, fondateur de l'establissement geographique de Bruxelles; par M. Madou, professeur de dessin a l'ecole militaire. : [T. 5]. — Bruxelles : Etablissement geographique pres la porte de Flandre, 1839. — 491, [2] p.

Leonardi Euleri opera posthuma: mathematica et physica Anno MDCCCLIV detecta / quae Academiae Scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis Ediderunt auctoris pronepotes P. H. Fuss et Nicolaus Fuss. — Petropoli : Apud Eggers et Socios, 1862. — 2 vol. ; 2°.

Leonardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae, auspiciis Academiae imperialis scientiarum petropolitanae / ediderunt auctoris pronepotes P. N. Fuss et Nicolaus Fuss ... Insunt plura inedita tractatus de numerorum doctrina capita XVI aliaque. — Petropoli : Typis ac impensis Academiae Imperialis Scientiarum, 1849. — 2 vol. ; 4°.

Die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper / dargestellt von Leonhard Euler ; uebersetzt, mit einigen Abänderungen und Zusätzen von H. W. Brandes. — Leipzig : Bey Siegfried Lebrecht Crusius, 1806. — XXXII, 638, [2] S.

Drei abhandlungen über kartenprojection / von Leonhard Euler (1777) ; Hrsg. von A. Wangerin. — Leipzig : W. Englemann, 1898. — 77, [1] S.

Elemens d'algebre / par Leonardo Euler, traduits de l'allemand. — Nouv. edit., revue et angmentee de notes / par J. G. Garnier. T.I: Analyse determinee. — A Paris : Chez Courcier ; Maire a Lyon, Septembre, 1807. — XIV, 563 p.

Introductio in analysin infinitorum / auctore Leonhardo Eulero. : T.1-2. — Lausannæ : Arud Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. — 4° (24 cm). Front., portr., titre, band., init. grav., XL pl. dépl. grav.

Introductio in analysin infinitorum : T. 1-2. / auctore Leonhardo Eulerom professore regio Berolinensi et Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae socio. — Edit. nova. — Lugduni (Lyon) : Apud Bernuset Delamolliere, falque, 1797.

Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen : Bd. 3 / Leonhard Euler ; aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. — Berlin : Bey Carl Matzdorf , 1791. — [2], 530 S.

Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen : Bd. 2 / Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von Johann Andreas Christian Michelsen. — Neue unveränderte berichtigte; mit kupfern. — Berlin : G. Reimer, 1836. — VII, 392 S.

Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie : Bd. 2-3 / par L. Euler. — Saint-Pétersbourg [St.-Peterburg] : De l'Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences, 1768-1772.

Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata una cum tabulis astronomicis, unde ad quoduis tempus loca Lunae expedite computari possunt, incredibili studio atque indefesso labore trium academicorum Johannis Alberti Euler, Wolfgangi Ludovici Krafft, Johannis Andreae Lexell ; Opus dirigente Leonhardo Euler. Acad. Scient. Borussicae directore vicennali et socio Acad. Petrop. Parisin. et

Lond. — Petropoli [St.-Peterburg] : Typis Academiae Imperialis scientiarum, 1772. — [24], 775 p. ; [1] pl. ; 4°.

Vollständige Anleitung zur Algebra : Th. 1-2 / von Hrn. Leonhard Euler. — Saint-Pétersbourg [St.-Peterburg] : Bey der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften, 1802. — 8°.

Correspondance mathematique et physique de quelques celebres geometres du XVIIIeme siecle : precede d'une notice sur les travaux de Leonard Euler, tant imprimes qu'inedits et publiee sous les auspices de l'Academie imperiale des sciences de Saint-Petersbourg : T.1-2 / par P.-H. Fuss. — St.-Peterbourg : [De l'impr. de l'Academie imperiale des sciences], 1843. — fronts (ports.) fold. plates (diagrs.) fold. facsimis. (25 cm).

Введение в анализ бесконечно малых : Т. 1 / Леонард Эйлер ; пер. с лат. Е. Л. Пацановского ; ред., вступ. ст. и прим. проф. С. Я. Лурье. — Москва ; Ленинград : Гл. ред. общетехн. литературы и номографии, 1936. — 352 с.

Введение в анализ бесконечно малых : Т. 2 / Леонард Эйлер ; пер. с лат. В. С. Гофмана ; ред. пер., вступ. ст., прим. И. Б. Погребысского. — Москва : ГИФМЛ, 1961. — 391 с.

Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Леонард Эйлер. — Москва ; Ленинград : Гостехизда, 1934. — 600 с.

Новая теория движения Луны = Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata / Л. Эйлер ; пер. с лат. А. Н. Крылова. — Ленинград : АН СССР, 1934 — 208 с.: табл. ; 8°.

### **Избранные периодические научные издания, содержащие статьи Л. Эйлера:**

*Acta Academie scientiarum imperialis petropolitanae.* — Petropoli : Typis Academiae scientiarum, 1778–1786.

*Commentarii Academiæ scientiarum imperialis petropolitanae.* — Petropoli : Typis academiae scientiarum, 1729–1750.

*Nova acta Academiae imperialis petropolitanae.* — Petropoli : Typis Academiae scientiarum, 1787–1827.

*Novi commentarii Academiae scientiarum imperialis petropolitanae.* — Petropoli : Typis Academiae scientiarum, 1761–1772.

**Список литературы: 1.** *Эйлер Леонард* [Электронный ресурс] // Энциклопедия «Кругосвет» — Режим доступа: [http://www.krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/matematika/ELER\\_LEONARD.html](http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ELER_LEONARD.html). **2.** *Радовский М.И.* Борис Семенович Якоби: биограф. очерк / М.И. Радовский. — Москва; Ленинград: Гос. энерг. изд-во, 1953. — С. 231, 232. **3.** *Jacobi Moritz Hermann* (1801–1874) [Электронный ресурс] // Funeral-SPB.Ru. — Режим доступа: <http://funeralspb.narod.ru/necropolis/smolenskoel-tombs/yakobi/yakobi.html>. **4.** *Борис Семенович Якоби:* библиограф. указ. / сост. М.Г. Новлянская, под ред. К.И. Шафрановского; вступ. ст. Т.П. Кравца. — Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1953. — С. 39, 223. **5.** *Черняк А.Я.* История технической книги / А.Я. Черняк. — 2-е изд., перераб. — Москва: Книга, 1981. — С. 54, 66. **6.** *Леонард Эйлер: 1707 – 1783:* сб. статей и материалов в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академией наук СССР. — Москва: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 25, 34, 109, 600. **7.** *Фусс Николай* [Электронный ресурс] // Биограф. энци. — Режим доступа: [http://www.biografija.ru/show\\_bio.aspx?id=130803](http://www.biografija.ru/show_bio.aspx?id=130803). **8.** *Тиле Р.* Леонард Эйлер / *Рюдигер Тиле*; пер. с нем. Н.И. Кованцова. — Киев: Вища школа, 1983. — С. 8, 13, 23, 129, 146, 155, 166. **9.** *Лысенко В.И.* Николай Иванович Фусс: 1755 – 1826 / В.И. Лысенко. — Москва: Наука, 1975. — С. 13 – 15. **10.** *Павел Николаевич Фусс* [Электронный ресурс] // Люди. — Режим доступа: [http://www.peoples.ru/science/mathematics/pavel\\_fuss/](http://www.peoples.ru/science/mathematics/pavel_fuss/). **11.** *Зубов Д.* Принцип математиков [Элек-

тронный ресурс] / Дмитрий Зубов // Человек без границ. — 2007. — № 4. — Режим доступа: [http://www.manwb.ru/articles/persons/great-europ/mathematics\\_prince/](http://www.manwb.ru/articles/persons/great-europ/mathematics_prince/). 12. Поляхов Н.Н., Поляхова Е.Н., Максимов В.В. Гидромеханика Леонарда Эйлера: исторический экскурс [Электронный ресурс] // Сб. науч. тр. РАН. — 2008. — №2. — Режим доступа: [http://www.nsgf.narod.ru/trudu\\_6/txt/2\\_nomer.pdf](http://www.nsgf.narod.ru/trudu_6/txt/2_nomer.pdf). 13. Действительные члены РАН за всю историю существования [Электронный ресурс] // Википедия. — Режим доступа: <http://ru-wikipedia.org/wiki/>. 14. Астрономы [Электронный ресурс] // Биограф. справочник. — Режим доступа: <http://slovari.yandex.ru/dict/astronomy/453.htm>. 15. Копелевич Ю.Х. Материалы к биографии Леонарда Эйлера // Историко-математические исследования. Вып. X / под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. — Москва: Гос. Изд-во техн.-теорет. лит., 1957. — С. 52. 16. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года / А.П. Юшкевич. — Москва, 1968. — С. 113. 17. Леонард Эйлер — великий математик [Электронный ресурс] // Знание—сила. — Режим доступа: [http://znaniya-sila.narod.ru/people/004\\_00.htm](http://znaniya-sila.narod.ru/people/004_00.htm).

**Bibliography (transliterated):** 1. *Jenciklopedija «Krugosvet»*. "Jejler Leonard." Web. 1 June 2015. <[http://www.krugosvet.ru/enc/nauka\\_i\\_tehnika/matematika/ELER\\_LEONARD.html](http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/matematika/ELER_LEONARD.html)>. 2. Radovskij, M. I. *Boris Semenovich Jakobi: biogr. ocherk*. Moscow, Leningrad: Gos. jenerg. izd-vo, 1953. Print. 3. *Funeral-SPB.Ru*. "Jacobi Moritz Hermann (1801–1874)." Web. 1 June 2015. <<http://funeralspb.narod.ru/necropols/smolen-skoel/tombs/yakobi/yakobi.html>>. 4. *Boris Semenovich Jakobi: bibliograf. ukaz*. Sost. M. G. Novljanskaja. Ed. K. I. Shafranovskij. Vstup. st. T. P. Kravca. Moscow, Leningrad: Izd-vo AN SSSR, 1953. Print. 5. Chernjak, A. Ja. *Istorija tehnicheckoj knigi. 2<sup>nd</sup>. ed., pererab.* Moscow: Kniga, 1981. Print. 6. *Leonard Jejler: 1707–1783: sb. statej i materialov v chesti 250-letija so dnja rozhenija, predstavlennye Akademiej nauk SSSR*. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1958. Print. 7. *Biogr. jenc. "Fuss Nikolaj"*. Web. 2 June 2015. <[http://www.biografija.ru/show\\_bio.asp?id=130803](http://www.biografija.ru/show_bio.asp?id=130803)>. 8. Tile, R. *Leonard Jejler*. Per. s nem. N. I. Kovancova. Kyiv: Vishha shkola, 1983. Print. 9. Lysenko, V. I. "Nikolaj Ivanovich Fuss: 1755–1826." Moscow: Nauka, 1975. 13–15. Print. 10. Ljudi. "Pavel Nikolaevich Fuss." Web. 2 June 2015. <[http://www.peoples.ru/science/mathematics/pavel\\_fuss/](http://www.peoples.ru/science/mathematics/pavel_fuss/)>. 11. Zubov, D. "Princ matematikov." *Chelovek bez granic*. No. 4. 2007. Web. 2 June 2015. <[http://www.manwb.ru/articles/persons/great-europ/mathematics\\_prince/](http://www.manwb.ru/articles/persons/great-europ/mathematics_prince/)>. 12. Poljahov, N. N., E. N. Poljahova and V. V. Maksimov. "Gidromehanika Leonarda Jejlera: istoricheckij jekskurs." *Sb. nauch. tr. RAN*. No. 2. 2008. Web. 3 June 2015. <[http://www.nsgf.narod.ru/trudu\\_6/txt/2\\_nomer.pdf](http://www.nsgf.narod.ru/trudu_6/txt/2_nomer.pdf)>. 13. *Vikipedija*. "Dejstvitel'nye chleny RAN za vsju istoriju sushhestvovanija." Web. 2 June 2015. <<http://ru.wikipedia.org/wiki/>>. 14. *Biogr. spravocchnik. "Astronomy"*. Web. 3 June 2015. <<http://slovari.yandex.ru/dict/astronomy/453.htm>>. 15. Kopelevich, Ju. H. *Materialy k biografii Leonarda Jejlera. Istoriko-matematicheskie issledovanija*. Vyp. X. Ed. G. F. Rybkin, and A. P. Jushkevich. Moscow: Gos. Izd-vo tehn.-teoret. lit., 1957. Print. 16. Jushkevich, A. P. *Istorija matematiki v Rossii do 1917 goda*. Moscow, 1968. Print. 17. *Znanie—sila. "Leonard Jejler — veli-kij matematik"*. Web. 3 June 2015. <[http://znaniya-sila.narod.ru/people/004\\_00.htm](http://znaniya-sila.narod.ru/people/004_00.htm)>.

*Поступила (received) 10.06.2015*

УДК 539.3

**С.А. НАЗАРЕНКО**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
**С.И. МАРУСЕНКО**, науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **КЛЮЧЕВЫЕ РАБОТЫ УЧЕНЫХ НТУ «ХПИ» В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ТЕХНИКЕ**

Статья посвящена рассмотрению эволюции в 19 – 21 столетиях основных научно – педагогических достижений ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в области математического моделирования: от паровых машин до космических аппаратов. Начало украинской науки в области математического моделирования в технике и технологиях связано с НТУ «ХПИ». Здесь работали или учились В. Л. Кирпичев, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Л. Д. Ландау, А. Н. Подгорный, Ю. М.

© С. А. Назаренко, С. И. Марусенко, 2015

Мацевитый и др. Ученые НТУ «ХПИ» создавали космическую и турбокомпрессорную технику, ЭВМ и термоядерные установки, и т.д. Показано, как математизация исследовательской деятельности привела к появлению новых методик анализа и синтеза в технике и технологиях.

**Ключевые слова:** механика, техника, технология, динамика, математическая модель.

**Введение.** Многие поколения выдающихся ученых и выпускников НТУ «ХПИ» вносили свой вклад в становление и развитие математического моделирования в технике. Рассмотрим эволюцию в XIX – XXI ст. основных научных достижений ученых и выпускников института в области математического моделирования: от паровых машин до космических аппаратов.

**Основные работы ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в области аналогового и математического моделирования.** Зарождение моделирования в науке часто связывают с появлением понятия *подобие*, использовавшимся для решения задач строительной механики. *В. Л. Кирпичев* первым из ученых в Российской империи начал разработку теории подобия физических процессов и вывел условия подобия при упругих явлениях. Теория подобия является важной составляющей аналогового моделирования.

Первый директор Харьковского практического технологического института (ХПТИ) Кирпичев добивался замены способов проектирования, основанных на приложении эмпирических формул, на методические, построенные на теоретических расчетах. Заместитель (товарищ) председателя Харьковского математического общества (ХМО) привлек к чтению в ХПТИ курса аналитической механики начинающего приват-доцента прикладной математики *А.М. Ляпунова*. Несомненно, что Кирпичев, ближайший соратник основоположника теории автоматического регулирования, *академика И. А. Вышнеградского*, повлиял на направление научных исследований Ляпунова. Докторская диссертация всемирно известного ученого Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения", изданная в Харькове в 1892 г. на средства ХМО, явилась источником многих научных направлений. Выпускник ХТИ 1908 г. *Г. А. Ботезат* в Сорбонне защитил первую в области авиации докторскую диссертацию по исследованию устойчивости аэроплана. Он стал одним из первых экспертов Национального консультативного комитета по аэронавтике США и читал лекции в Массачусетском технологическом институте.

С 1893 по 1905 г. курсы лекций по аналитической механике в Харьковском технологическом институте (ХТИ) вел председатель ХМО *В. А. Стеклов*. В 1901 г. он получил степень доктора прикладной математики после защиты диссертации "Общие методы решения основных задач математической физики". В 1921 г. Стеклов стал первым директором физико-математического института. Он являлся первым вице-президентом Академии наук (АН) СССР.

В ХПТИ несколько лет учил математике *Д. А. Граве*, в дальнейшем первый математик, ставший академиком АН Украины; председатель комиссии прикладной математики АН УССР; почётный академик АН СССР; основатель и первый директор института математики АН УССР, инициатор организации отделения технических наук в системе АН УССР. Первая научная работа начинающего преподавателя ХПТИ, в дальнейшем ректора ХТИ *П. П. Копняева* была опубликована в № 11–12 журнала «Электричество» за 1898 год под названием «Аналогия между явлениями электричества и гидравлики».

В Харькове в первом томе научно-технического журнала «Известия Южно-Русского общества технологов» была опубликована в 1897 году работа В.Л. Кирпичева «Заметка о геометрически подобных машинах» [1]. В монографии В.Л. Кирпичева "Беседы о механике" (6 изданий, последнее в 2008 году) есть раздел "Теорема о подобии в механике", где подобие процессов рассматривается, в частности, применительно к движению жидкости в трубах и сопротивлению твердого тела в потоке жидкости.

Математизация исследовательской деятельности была плодотворной для развития математики и приводила к появлению новых теоретических положений и методик анализа механических систем [1]. Директор ХТИ (1898-1902) *Д. С. Зернов* в курсах лекций по паровым машинам рассматривал также проблемы регулирования, чем инициировал симбиоз механики машин, термодинамики и теории управления. В 1901 г. Зернов пригласил проводить в ХТИ лабораторные занятия по сопротивлению материалов своего и *Н.Е. Жуковского* ученика в Императорском Московском техническом училище *Г.Ф. Проскура*, в дальнейшем члена Президиума и председателя отделения технических наук АН УССР. Профессор ХТИ Проскура разрабатывал теорию подобия в гидроаэродинамике и закон динамического подобия турбомашин.

Выпускник и преподаватель ХТИ с 1922 г., член-корреспондент АН УССР (1939) *В.М. Майзель* применял теорию подобия при исследовании и моделировании задач прочности, устойчивости, колебаний, процессов в гидромашинах. *А.Н. Боголюбов*, ученик Майзеля, стал членом-корреспондентом АН УССР, заслуженным деятелем науки и техники Украины, лауреатом премии им. Н.М. Крылова АН Украины и международной премии им. А. Коюре.

На базе Харьковского вуза в 1930 г. было организовано 8 самостоятельных специализированных институтов для подготовки инженерно-технических кадров, в т. ч. механико-машиностроительный (ХММИ), электротехнический (ХЭТИ), химико-технологический (ХХТИ). *Л. Д. Ландау* заведовал кафедрой теоретической физики ХММИ в 1932 – 1937 гг.. Тогда он изобрел систему подготовки первокурсников теоретиков (*теорминимум Ландау*) путем сдачи ими серии специальных экзаменов по математике и физике.

Первыми были два экзамена по спецматематике, являвшейся, как считал член ХМО Ландау, тем фундаментом, без которого невозможно освоить теоретическую физику. Вторым сдал «теорминимум» выпускник ХММИ *Е.М. Лифшиц*. Ландау и преподаватель ХММИ, зав. кафедрой ХХТИ (1933 – 1939) Лифшиц издали в 1935 г. «Руководство по теоретической физике» объемом около 300 страниц. В 1937 г. они завершили первый том «Курса теоретической физики», который в 1938 г. был издан в СССР и Англии. Всемирно известный многотомный «Курс...» (объемом 5300 страниц) членов Лондонского Королевского общества Ландау и Лифшица переиздан на двадцати языках.

В разработке атомной и водородной бомб важнейшее значение имело математическое моделирование в задачах определения КПД. За участие в сложнейших расчетах академики АН СССР Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц были удостоены Государственных премий СССР.

Зав. кафедрами ХТИ и ХХТИ (1926 – 1944) *П. П. Будников* был председателем отделения физико-химических и математических наук АН УССР с 1941 по 1944 год. Профессор ХММИ и ХЭТИ (1932 – 1941) *А.И. Лейпунский*

в эвакуации руководил объединенным институтом физики и математики АН УССР. В 1949 году ХПИ был воссоздан на основе ХММИ, ХЭТИ, ХХТИ.

Усложнение математического аппарата происходило параллельно с развитием теорий реальных процессов в различных областях естествознания. Выпускник ХЭТИ, лауреат Государственной премии СССР (1951) *Б.Я. Коган* был одним из первых, кто начал научную разработку теории и методов математического моделирования с применением аналоговых и гибридных вычислительных систем для исследования сложных динамических систем.

Появление ЭВМ оказало колоссальное воздействие на развитие математических моделей в плане их усложнения с целью все большей адекватности реальным процессам. В начале 1950-х годов под руководством выпускника (1936) ХЭТИ *Н.А. Явлинского* в ЛИПАН была создана первая в СССР ЭВМ последовательного действия. Лауреат Государственных премий СССР в области науки и техники *Н.А. Явлинский* был одним из создателей первых термоядерных установок и проводил первые работы по компьютерному моделированию процессов в плазме «ТОКАМАКа» – количественные расчеты мощности потерь с линейчатым излучением спектральных линий примесей.

В 1972 году был создан Институт проблем машиностроения АН УССР, первым директором которого стал выпускник (1956) и профессор ХПИ *А.Н. Подгорный*, в дальнейшем академик Национальной АН Украины, заслуженный деятель науки и техники Украины. Главным направлением научной деятельности института было развитие методов и технологий проектирования в машиностроении на основе современных достижений в области математики и вычислительной техники. Заведующие кафедрами ХПИ, академики НАН Украины, заслуженные деятели науки и техники Украины *В.Л. Рвачев* и *Ю.М. Мацевицкий* были удостоены Государственных премий Украины за работы в области математического моделирования физических процессов.

Выпускник (1930) ХММИ, основоположник авиационно-космических транспортных систем *Г. Е. Лозино-Лозинский* являлся Генеральным конструктором НПО «Молния» – головного разработчика космоплана «Буран» и зенитных управляемых ракет-мишеней. Лауреат Государственных премий СССР привлекал в 80-х годах ученых ХПИ к работам по «Бурану».

Лауреатами Государственных премий СССР и Украины в области науки и техники стали выпускники ХПИ: Генеральные и Главные конструктора систем управления ракет и космических аппаратов – *Я.Е. Айзенберг*, *А.И. Кривонос*, *В.А. Уралов*, *Г.А. Борзенко*, *Г.И. Ляцев*, *В.Н. Горбенко*; начальники отделов «Хартрона» – *Б.М. Коноров*, *В.Ф. Шишков* и др..

Со времен Кирпичева математические структуры зарождались и развивались в Харькове под мощным влиянием импульсов, исходящих из проблем механики и физики. Выпускники ХПИ, зам. директора по научной работе ФТИНТ *Л.А. Пастур* и *Е.Я. Хрусов* почти 30 лет представляли Северо-Восточный научный центр в руководстве отделения математики НАН Украины. Академик Пастур был учеником зав. кафедрой ХПИ, зав. отделом ФТИНТ *И. М. Глазмана* и выпускника (1938) ХММИ; академика АН УССР, США и СССР *И.М. Лифшица*. Председатель Фонда фундаментальных исследований Украины Пастур удостоен Государственной премии УССР 1985 года за труд «Введение в теорию неупорядоченных систем».

Первой поставленной Хруслову научной задачей была оптимизация модели лопатки профессора ХПИ, академика АН УССР, Главного конструктора Харьковского завода *Л.А. Шубенко–Шубина*, установленной на паровой турбине. Академик Хруслов удостоен Государственной премии УССР за цикл работ «Крайові задачі математичної фізики в областях з дрібнозернистою межею».

Государственной премией Украины в области науки и техники за 1997 год было отмечено участие выпускников и профессоров ХПИ: *С.И. Богомолова, В.В. Бортового, В.Б. Гринева, Ю.Т. Костенко, В.М. Лукьяненко, Л.М. Любчика, Э.А. Симсона* в разработке систем автоматизированного оптимального проектирования конструкций машин и приборов, создание на этой базе турбокомпрессорной и космической техники.

Усложнение конструктивных форм, интенсификация рабочих процессов, использование новых материалов и технологий обуславливают потребность в создании все более совершенных мультифизических математических моделей в технике. При решении задач необходимо учитывать различные виды нелинейностей (физических, геометрических и контактных; «наследственных» (генетических), связанных с учетом прогрессивного повреждения и разрушения материалов; связанных с появляющимися на одном технологическом этапе полями и передающимися на последующие, и прочих). Возможности виртуального тестирования (компьютерного моделирования) становятся все более универсальными и позволяют значительно сократить трудоемкие и дорогостоящие этапы натурных исследований, связанных с изготовлением опытных образцов, и перейти к более дешевой, оперативной, надежной и безопасной технологии апробации конструктивных решений с использованием цифровых макетов-прототипов (Digital Prototyping, Digital Mock-Up).

В настоящее время в НТУ «ХПИ» разрабатывают эффективные математические модели, обладающие высоким уровнем адекватности реальным объектам и физико-механическим процессам, реализующие решение многомерных исследовательских и промышленных задач, описываемых, как правило, нестационарными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных в пространственных областях сложной формы [2].

Увеличение эффективности вычислений (за счет сетевых Internet-технологий, многопроцессорности и параллелизации), повышение производительности компьютеров содействовало интеграции соответствующих вычислительных технологий для симуляции и инженерного анализа реалистичных виртуальных испытаний в технике и технологиях (Simulation & Analysis).

Математическое моделирование является сейчас основной специальной учебной дисциплиной на всех факультетах НТУ «ХПИ».

**Выводы.** Традиции познания и научной деятельности, заложенные выдающимися учеными-педагогами, продолжают и находят воплощение в перспективных направлениях современной науки и новейших технологиях. В статье показано, как математизация исследовательской деятельности привела к появлению новых методик анализа и синтеза в технике и технологиях.

**Список литературы:** 1. *Александров Е.Е., Назаренко С.А., Хавин В.Л.* Деятельность основателя отечественной научной школы механики и машиностроения профессора В.Л. Кирпичева // Ме-

ханіка та машинобудування. – 2012. – №2. – С. 230 – 249. 2. Симсон Э.А., Назаренко С.А. Математические модели элементов машин при воздействии физических полей и внешней среды // Механика та машинобудування. – 2009. – №1. – С. 69 – 77.

**Bibliography (transliterated):** 1. Aleksandrov, E. E., S. A. Nazarenko and V. L. Havin. "Dejatel'nost' osnovatelja otechestvennoj nauchnoj shkoly mehaniki i mashinostroeniya professora V. L. Kirpicheva." *Mehanika ta mashinobuduvannja*. No. 2. 2012. 230–249. Print. 2. Simson, E. A., and S. A. Nazarenko. "Matematicheskie modeli elementov mashin pri vozdeystvii fizicheskikh polej i vneshnej sredy." *Mehanika ta mashinobuduvannja*. No. 1. 2009. 69–77. Print.

*Поступила (received) 15.06.2015*

УДК 539

**Л.В. АВТОНОМОВА**, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
**С.В. БОНДАРЬ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
**А.В. СТЕПУК**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА ПЛАСТИНЫ ПОЛУСФЕРИЧЕСКИМ ИНДЕНТОРОМ**

Рассмотрены задачи численного моделирования деформирования круглой пластины и пакета, который состоит из двух внешних стальных пластин и средней титановой пластины. Пластины подвергаются ударному воздействию индентора с полусферической формой рабочей части. При решении нестационарной связанной термовязкопластической контактной задачи в трехмерной постановке учитываются: трение в контактных зонах и зависимость предела текучести материала от скоростей деформаций и температуры. Динамическая контактная задача численно реализована методом конечных элементов с помощью пакета ANSYS. Выполнено сравнение параметров напряженно-деформированного состояния пластины и пакета пластин для двух моделей определяющих соотношений: Купера-Симонда и нейронной сети. Показано, что различия в полученных величинах перемещений и деформаций не превышают 15%.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, контактная задача, удар, вязкопластическое деформирование, конечный элемент.

**Описание проблемы.** При высокоскоростном деформировании пластин ударником необходимо учитывать появление больших пластических деформаций, изменение прочностных характеристик материала, зарождение и распространение повреждений, нагрев, процессы появления вторичной пластичности и релаксацию напряжений, волновые эффекты. На характер деформирования оказывают влияние геометрия и форма ударника, величина скорости ударника, конструктивные особенности пластин. Для комплексного решения таких задач необходимо применение совокупности различных нелинейных моделей, учитывающих физические особенности процесса [1 – 6]. Это, в частности, модели, позволяющие корректно описать динамическое изменение свойств материала в процессе высокоскоростного деформирования в зависимости от скорости деформаций и температуры, что дает возможность верифицировать численные решения по данным эксперимента. Часто даже применения современных численных методов решения краевых динамических задач с помощью вычислительных программных комплексов не позволяют в полной мере и без существенных допущений решать такие задачи. Так, луч-

шее качество численного решения такого рода задач достигается применением метода конечных элементов на основе альтернативного подхода Лагранжа – Эйлера.

Эффективными составляющими силовых конструкций являются элементы, включающие набор контактирующих пластин, поскольку при относительно небольшом весе они оказывают хорошее сопротивление динамическим нагрузкам. Повреждаемость пластин и нарушение их функционального назначения при эксплуатации в первом приближении можно характеризовать максимальной величиной прогибов, что позволяет не рассматривать затухающий колебательный процесс пластин при ударе.

**Постановка и численная реализация задачи.** Рассматриваются задачи моделирования процессов высокоскоростного деформирования тонкостенной изотропной пластины и пакета пластин, которые имеют однородную структуру, под действием ударного нагружения индентором с полусферической формой рабочей части. Для определения напряженно-деформированного состояния таких пластин решается динамическая вязкопластическая контактная задача с граничными и начальными условиями. При построении полной системы уравнений нестационарной связанной термовязкопластической задачи, приведенной в работах [4 – 6], описывающей данный процесс высокоскоростного деформирования и разрушения, необходимо дополнительно включить следующие уравнения.

Уравнение для накопления повреждения и предельной деформации, соответствующей наступлению вязкопластического разрушения по модели Джонсона-Кука:

$$\varepsilon^f = [D_1 + D_2 \exp D_3 \sigma^*][1 + D_4 \ln \dot{\varepsilon}^*][1 - \theta^*], \quad (1)$$

где  $\sigma^* = \sigma_0 / \bar{\sigma}$  – отношение интенсивностей гидростатических напряжений и эффективных напряжений;  $D_1 - D_4$  – экспериментальные константы;  $\dot{\varepsilon}^* = \varepsilon'_p / \varepsilon'_0$  – деформации;  $\theta^*$  – модифицированная температура.

Уравнение модели Грюнайзена, учитывающее поправку на изменение гидростатического давления для сжимаемых материалов:

$$P = \sigma_0 C^2 \mu_j [1 + (1 - \gamma_0 / 2) \mu_j^2 - a \mu_j^2 / 2] / [1 - (S_1 - 1) \mu_j - S_2 \mu_j^2 / (\mu_j + 1) - S_3 \mu_j^3 / (\mu + 1)^2]^2 + (\gamma_0 + a \mu_j) * E, \quad (2)$$

где  $P$  – гидростатическое давление;  $C, S_1, S_2, S_3$  – константы;  $\gamma_0$  – постоянная Грюнайзена;  $a$  – коррекция объема первого порядка;  $\sigma_0$  – начальная интенсивность гидростатических напряжений;  $\mu_0 = \sigma_Y / \sigma_0 - 1$ .

Уравнение учета скорости деформирования, по модели Купера-Симонда:

$$\sigma_Y = [1 + (\dot{\varepsilon}_{ij} / C)^{1/P}] * (\sigma_0 + \beta E_p \varepsilon_p^{eff}), \quad (3)$$

где  $\sigma_0$  – начальная интенсивность гидростатических напряжений;  $C$  и  $P$  – параметры чувствительности к скорости деформирования модели Купера-Симонда;  $\varepsilon_p^{eff}$  – эффективные (эквивалентные) пластические деформации без учета влияния скорости деформирования;  $E_p$  – модуль пластического упрочнения, который задается соотношением  $E_p = GE / (E - G)$ ,  $G$  – модуль сдвига.

Кроме того, для сравнения с моделью Купера-Симонда при исследовании поведения пластины под действием ударного нагружения используется модель определяющих соотношений, полученная на нейронной сети для учета зависимости изменяющегося предела текучести материала от скоростей деформаций и температуры [7 – 9].

Численное моделирование процесса высокоскоростного деформирования круглой пластины, лежащей на жестко закрепленной матрице, при ударном воздействии упругим индентором проводилось методом конечных элементов с помощью программного вычислительного комплекса ANSYS.

На рис. 1 представлена расчетная схема. При построении конечноэлементной модели использовались 8-узловые конечные элементы, причём как кубической формы, так и в форме тетраэдра. Общее количество узлов составило 6769, элементов – 18205.

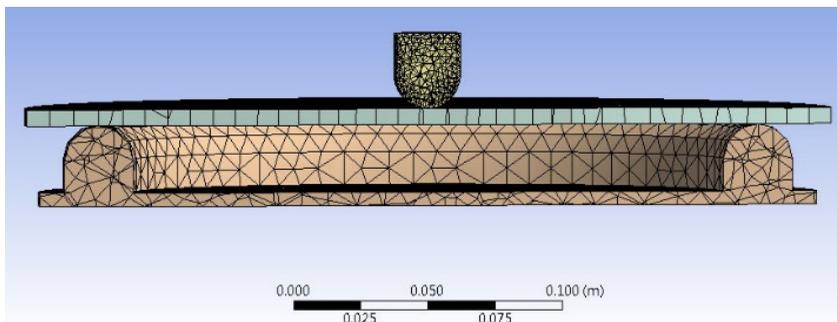


Рис. 1 – Конечно-элементная модель.

На рис. 2 представлено распределение пластических деформаций изотропной пластины при ударе полусферическим индентором (ударником). Следует отметить, что в случае применения модели, описывающей состояние материала при высокоскоростном деформировании нейронными сетями (рис. 2, а) уровни величин пластических деформаций в конце процесса деформирования меньше на 10 – 15%, чем в случае применения модели Купера-Симонда (рис. 2, б). Анализируя поведение материала можно предположить, что в первом случае он ведет себя как более «жесткий», поскольку при больших скоростях пластических деформаций использование нейронной сети дает более реальную картину изменения пластических свойств материала в зависимости от величины скорости деформирования. В случае применения модели Купера-Симонда (рис. 2, б) наблюдается вязкопластическое разрушение пластины при тех же уровнях ударного нагружения.

Для анализа деформирования пакета, состоящего из трех однородных пластин (материал верхней и нижней пластины – сталь, средней – титановый сплав), при высокоскоростном ударном нагружении также определялось его напряженно-деформированное состояние. Воздействие полусферическим упругим индентором (ударником) проводилось с той же силой, что и в предыдущем примере. Контактная задача решалась с учетом трения. Для описания состояния материалов при высокоскоростном деформировании была применена модель, построенная на основе нейронной сети.

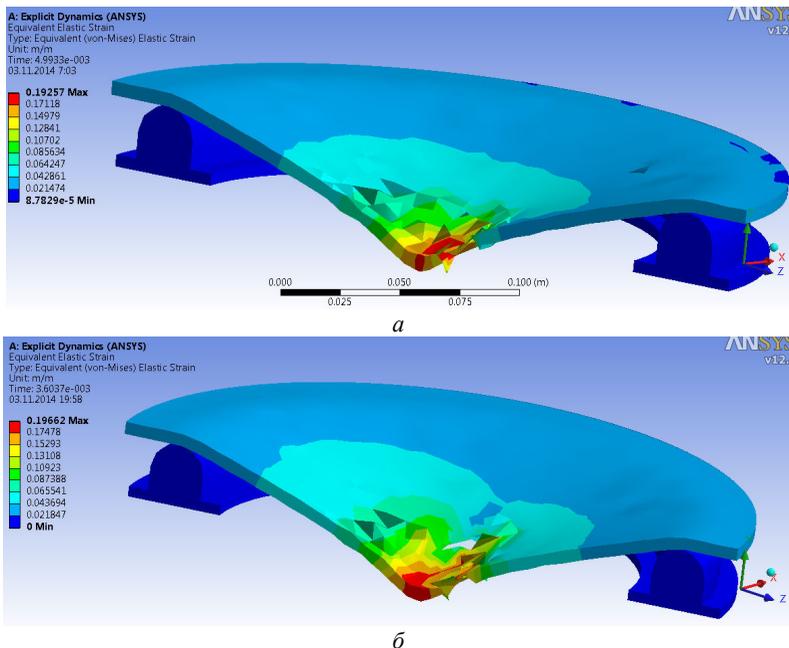


Рис. 2 – Распределение пластических деформаций при ударе изотропной тонкой пластины полусферическим индентором (*a* – модель нейронных сетей; *б* – модель Купера-Симона).

На рис. 3 представлено распределение полей перемещений и деформаций для пакета, состоящего из трех тонких пластин при взаимодействии с индентором в конце процесса ударного нагружения. Сравнивая распределения полей деформаций для однородной пластины (рис. 2, *a*) и для пакета (рис. 3, *б*) следует отметить, что полного разрушения по толщине для последнего не происходит. Наблюдается целостность материала для двух пластин (верхней и средней), происходит разрушение только нижней пластины, то есть процесс возникновения *ударного пробоя* не наступает. Это свидетельствует о более высокой прочности пластинчатого пакета.

**Выводы.** Для численного моделирования процесса высокоскоростного вязкопластического деформирования и разрушения тонкостенных пластин необходимо решать нестационарную связанную термовязкопластическую задачу с учетом зависимости свойств материала и трения от скорости деформаций и температуры. Применение подхода на основе метода конечных элементов и единого подхода ALE позволило определить напряженно-деформированные состояния однородной пластины и пакета из трех пластин при ударном воздействии полусферическим ударником. Проведенный анализ показал, что при ударном воздействии для определения параметров напряженно-деформированного состояния при решении термовязкопластической задачи целесообразно применять корректные определяющие соотношения для материала, например, полученные с помощью нейронной сети.

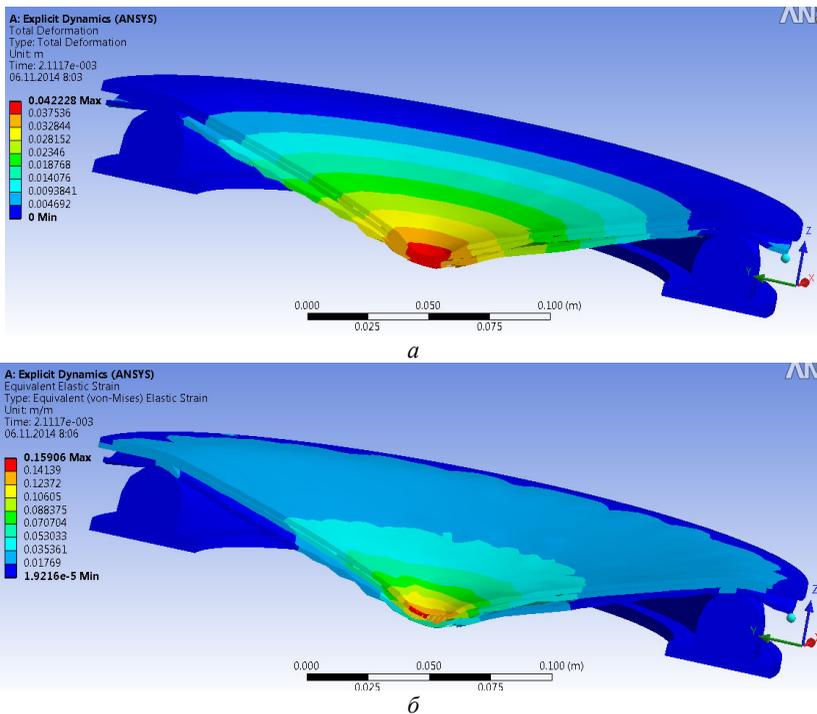


Рис. 3 – Распределение перемещений и пластических деформаций при ударе пакета пластин полусферическим индентором (а – поле перемещений, б – поле деформаций).

**Список литературы:** 1. Воробьев Ю.С., Чернобрышко М.В. Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 87 – 92. 2. Бизюк А.В., Бизюк В.В., Колодяжний А.В. Скоростной удар по тонкостенным конструкциям // Вестник ХНУ ХПИ – 2007. – № 775. – С. 29 – 35. 3. Clegg R.A. Validation of an advanced material model for simulating the impact and shock response of composite materials / R.A. Clegg, C.J. Hayhurst, H. Nahme // Shock Compression of Condensed Matter. – American Institute of Physics. – 2002. – P. 685 – 688. 4. Стенук О.В., Автомонова Л.В., Бондарь С.В. Особливості деформування П-подібної тонкостінної конструкції при ударі // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 37 (1010). – С. 193 – 199. 5. Автомонова Л.В., Бондарь С.В., Стенук А.В. Деформування П-образної тонкостенної конструкції с ребрами жорсткості при ударі шаром // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (1049). – С. 3 – 8. 6. Стенук А.В., Автомонова Л.В., Бондарь С.В. Влияние модели состояния материала на напряженно-деформированное состояние П-образной конструкции при ударе шаром // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. № 18 (1061). – 2014. – С. 161 – 166. 7. Sha W. The use of artificial neural networks in materials science based research / W. Sha, K.L. Edwards // Materials and Design. – 2007. – V. 28. – P. 1747 – 1752. 8. Guo Z. Modeling the correlation between processing parameters and properties of steels using artificial neural network / Z. Guo, W. Sha // Computational Materials Science. – 2004. – № 29. – P. 12 – 28. 9. Хавин В.Л., Огородник О.А. Модель пластического состояния материала для широкого диапазона температур и скоростей деформаций на основе нейронной сети // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 52. – С. 202 – 209.

**Bibliography (transliterated):** 1. Vorob'ev, Ju. S., and M. V. Chernobryvko. "Skorostnoe deformatsionnoe jelementov konstrukcij v uprugoplasticheskoj stadii." *Problemy obchisljuval'noi*

*mehaniky i micnosti konstrukcij.* No. 14. 2010.87–92. Print. **2.** Bizjuk, A. V., V. V. Bizjuk and A. V. Kolodjazhnyj. "Skorostnoj udar po tonkostennym konstrukcijam." *Vestnik HNU «KhPI».* No. 775. 2007. 29–35. Print. **3.** Clegg, R. A., C. J. Hayhurst and H. Nahme. "Validation of an advanced material model for simulating the impact and shock response of composite materials." *Shock Compression of Condensed Matter.* American Institute of Physics. 2002. P. 685–688. Print. **4.** Stepuk, O. V., L. V. Avtomonova and S. V. Bondar. "Osoblyvosti deformuvannya P-podobnoi' tonkostinnoi' konstrukcii' pry udari." *Visnyk NTU «KhPI».* Ser.: *Matematychni modeljuvannya v tehnici ta tehnologijah.* No. 37 (1010). Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 193–199. Print. **5.** Avtomonova, L. V., S. V. Bondar' and A. V. Stepuk. "Deformirovanie P-obraznoj tonkostennoj konstrukcii s rebrami zhestkosti pri udare sharom." *Visnyk NTU «KhPI».* Ser.: *Matematychni modeljuvannya v tehnici ta tehnologijah.* No. 6 (1049). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 3–8. Print. **6.** Stepuk, A. V., L. V. Avtomonova and S. V. Bondar'. "Vlijanie modeli sostojanija materiala na napryazhjonno-deformirovanoe sostojanie P-obraznoj konstrukcii pri udare sharom." *Visnyk NTU «KhPI».* Ser.: *Matematychni modeljuvannya v tehnici ta tehnologijah.* No. 18 (1061). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 161–166. Print. **7.** Sha, W., and K. L. Edwards. "The use of artificial neural networks in materials science based research." *Materials and Design.* Vol. 28. 2007. 1747–1752. Print. **8.** Guo, Z., and W. Sha. "Modeling the correlation between processing parameters and properties of maraging steels using artificial neural network." *Computational Materials Science.* Vol. 29. 2004. 12–28. Print. **9.** Havin, V. L., and O. A. Ogorodnik. "Model' plasticheskogo sostojanija materiala dlja shirokogo diapazona temperatur i skorostej deformacij na osnove nejronnoj seti." *Visnyk NTU «KhPI».* Ser.: *Dynamika i micnist' mashyn.* No. 52. Kharkiv: NTU «KhPI», 2011. 202–209. Print.

*Поступила (received) 27.05.2015*

УДК 628.477 : 519.876.5

**В.В. ВАМБОЛЬ**, канд. техн. наук, доц., НАУ «ХАИ», Харьков;  
**В.Е. КОСТЮК**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НАУ «ХАИ», Харьков;  
**Е.И. КИРИЛАШ**, мл. науч. сотр., НАУ «ХАИ», Харьков

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ОХЛАЖДЕНИЯ ГЕНЕРАТОРНОГО ГАЗА В УСТАНОВКЕ УТИЛИЗАЦИИ ОТХОДОВ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

Рассмотрена проблема накопления твердых бытовых и производственных отходов, обоснована ее актуальность. Существенным недостатком предложенного способа ее решения – утилизация отходов способом смешанной газификации – является вторичное образование в газообразных продуктах этого процесса высокотоксичных веществ. Для решения этой проблемы предложен способ резкого охлаждения генераторного газа путем впрыскивания в его поток жидкости центробежными диспергирующими форсунками. Выполнено математическое описание процесса охлаждения генераторного газа в установке утилизации отходов жизнедеятельности. На основе классической теории газодинамики получены математические соотношения для описания газовой и дисперсной фазы, а также межфазного взаимодействия в процессе охлаждения.

**Ключевые слова:** утилизация, отходы, экологическая безопасность, диоксины, математическое моделирование, двухфазная многокомпонентная среда.

**Введение.** Накопление твердых бытовых и производственных отходов ведет к увеличению экологической нагрузки на окружающую среду. Процесс утилизации твердых бытовых и производственных отходов предполагает затраты, сопоставимые со стоимостью производства первичной продукции. Снизить эти затраты позволяет реализация системы управления экологической безопасностью, в основу которой положен способ смешанной газифи-

---

© В. В. Вамболь, В. Е. Костюк, Е. И. Кирилаш, 2015

кации и продукты, пригодные для реализации. Как дополнение к преимуществам такого технологического процесса, является получение газообразного топлива (метана). Экологически эффективным этот процесс может быть в случае предотвращения образования высокотоксичных веществ (таких, как диоксины и фураны) на этапе обработки отходов в термохимической пиролизной печи и на выходе из печи при охлаждении генераторного газа.

В настоящей работе представлено математическое описание процесса охлаждения генераторного газа в установке утилизации отходов жизнедеятельности.

**Анализ последних достижений и публикаций.** Общий подход к созданию системы управления экологической безопасностью при утилизации твердых бытовых и производственных отходов рассмотрен в работе [2]. В последних исследованиях был предложен способ плазменной газификации, который позволяет снижать экологическую нагрузку. Для эффективности данного процесса предлагается проводить смешанную газификации, что позволяет утилизировать отходы и получать продукты для поддержания реакции газификации.

Обеспечения экологичности этого процесса достигается предотвращением образования высокотоксичных веществ путем резкого охлаждения генераторного газа. Основой высокотоксичных веществ в этом случае являются диоксины и, как показано в работе [3], по уровню токсичности эти вещества превосходят все известные токсины. Не разлагаясь в окружающей среде, накапливаясь в верхнем слое почвы, они являются источником загрязнения. Механизм формирования диоксинов описан в работе [5] и представляет собой в нашем случае двухстадийный процесс.

Технологический процесс утилизации с учетом обеспечения экологичности должен включать в себя несколько этапов, а именно: термохимическую газификацию, плазменное дожигание дымовых газов, охлаждение, предварительную очистку, метанирование, окончательную очистку газов и низкотемпературное разделение синтез-газа на топливные продукты. Описание технологического процесса рассмотрено в работе [4]. В термохимической пиролизной печи с плазменным дожиганием применяется процесс послойного пиролиза отходов в условиях недостатка кислорода, что приводит к разложению сложных и тяжелых органических молекул на более простые фрагменты, а последующая обработка дымовых газов плазменной струей позволяет предотвратить образование крупных молекул токсичных соединений посредством разбиения их на отдельные атомы и молекулы. При температуре плазменной струи полностью разрушаются любые органические и биологические материалы, уничтожаются самые токсичные материалы.

Существуют различные способы охлаждения горячих дымовых газов, однако достаточно трудно реализовать резкое его охлаждение в таком широком диапазоне температур. Быстро преодолеть диапазон опасных температур при выходе газового потока из печи позволяет резкое охлаждение генераторного газа путем впрыска воды в газовый поток. Опыт проектирования оросительных систем охлаждения показывает необходимость углубленного исследования процессов течения и тепломассообмена двухфазной многокомпонентной среды с фазовым превращением (испарением) в целях организации необходимой пространственной структуры водного аэрозоля и выработки на этой основе эффективных конструктивных решений. В условиях снижения

затрат на исследование и разработку перспективных технологий численный эксперимент становится одним из наиболее экономичных и удобных способов детального анализа сложных процессов в газодисперсных средах.

Математическое описание процесса охлаждения генераторного газа с помощью впрыскиваемой жидкости, диспергируемой центробежными форсунками, позволит в дальнейшем проводить численные исследования процессов, предотвращающих образование высокотоксичных веществ.

**Постановка задачи.** Диоксины образуются в газовой фазе в пламени из углеводородов и хлоридов, таких, как фенол и HCl. Известно их образование на частично сгоревшем твердом топливе в зоне горения. Диоксины не стабильны уже при температурах выше  $800...850^{\circ}\text{C}$ , поэтому при более высоких температурах происходит их разрушение. Существует возможность повторного формирования диоксинов (*de novo*), которая наблюдается в дымовых газах на частицах летучей золы в диапазоне температур  $300...450^{\circ}\text{C}$ . При такой температуре, когда конкурирующие процессы разрушения диоксинов протекают очень медленно, может происходить каталитическое формирование диоксинов. К факторам их формирования относятся скорость охлаждения газов в диапазоне температур  $300...400^{\circ}\text{C}$  и присутствие кислорода. Максимум формирования диоксинов по *de novo* приходится на  $400^{\circ}\text{C}$ . Большие количества диоксинов образуются при сжигании полимерных отходов, содержащих галогены. Для преодоления диапазона опасных температур при выходе газового потока из печи целесообразно применение резкого охлаждения генераторного газа путем впрыска воды в газовый поток (рис. 1).

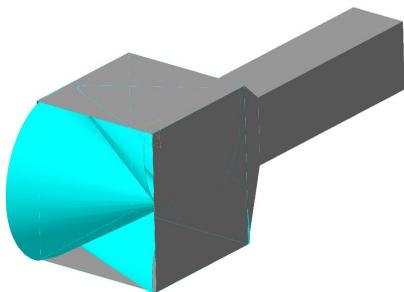


Рис. 1 – Схема создания водяной завесы.

Правильно организованный термодинамический процесс позволит эффективно снизить концентрацию высокотоксичных веществ. Поэтому применение численного моделирования с определением необходимых режимов организации пространственной структуры охлаждающей водяной завесы позволит разработать технологические решения обеспечивающие экологичность процесса утилизации.

Для проведения численного моделирования и визуализации результатов процесса охлаждения генераторного газа необходимо опираться на математический аппарат, адекватно отображающий сложные газодинамические процессы. В нашем случае необходимо учитывать как газовую, так и дисперсную фазу процесса охлаждения. Дополнением для математической модели является описание межфазного взаимодействия.

Опираясь на классические законы сохранения массы и количества движения, применительно к неоднородной по компонентному и фазовому составу среде, необходимо получить математическую модель, позволяющую в дальнейшем проводить расчеты и анализировать целостную картину сложных газодинамических процессов, снижающих образование высокотоксичных веществ.

**Математическая модель газовой фазы охлаждения генераторного газа.** Для математического моделирования использован классический подход описания процессов течения и тепломассообмена двухфазной многокомпонентной среды с фазовым превращением (испарением) в газоотводящей трубе. Математической формой записи законов сохранения для вязкого газа (пара) являются *уравнения Навье – Стокса*.

При математическом описании газодисперсной среды были приняты следующие основные допущения:

- течение газовой фазы – несжимаемое, турбулентное;
- турбулентность – изотропная.

С учетом ряда введенных допущений квазистационарное существенно дозвуковое течение газовой фазы может быть описано системой осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса [6], включающей в себя уравнение неразрывности, уравнения сохранения импульса, энергии, два уравнения *дифференциальной модели турбулентности k – ε – типа* [7], уравнение сохранения массовых долей химических компонентов и уравнение состояния смеси идеальных газов:

$$\partial u_j / \partial x_j = S_m; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho \bar{g} = S_{fi}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial u_j h}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_m}{Pr_m} \right) \frac{\partial h}{\partial x_j} = S_q; \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial u_j k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu + \frac{\mu_m}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} - \rho(G - \varepsilon) = 0; \quad (4)$$

$$\rho \frac{\partial u_j \varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu + \frac{\mu_m}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - \rho(C_{\varepsilon 1} G - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} = 0; \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial u_j Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu}{Sc} + \frac{\mu_m}{Sc_m} \right) \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} = S_i; \quad (6)$$

$$p = R \rho T \sum_i \frac{Y_i}{M_i}, \quad (7)$$

где  $u_j$  – компоненты вектора осредненной скорости смеси;  $x_j$  – декартовы координаты;  $\rho$  – плотность смеси;  $p$  – давление смеси;  $\tau_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\mu$  – динамическая вязкость смеси;  $\mu_m = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon$  – турбулентная вязкость смеси;  $k, \varepsilon$  – удельная кинетическая энергия турбулентности и удельная скорость ее диссипации, соответственно;  $h$  – удельная энтальпия смеси,

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_m) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad h = \sum_i Y_i \left( \Delta h_{fi}^0 + \int_{T^0}^T c_{pi}(T) dT \right),$$

$Y_i$  – массовая доля химического компонента  $i$ ;  $\Delta h_{fi}^0$  – удельная энтальпия образования химического компонента  $i$ ;  $T$  – температура смеси;  $T^\circ$  – стандартная температура;  $c_{pi}$  – удельная теплоемкость химического компонента  $i$  при постоянном давлении;  $Pr$  – число Прандтля;  $Pr_m$  – турбулентное число Прандтля;  $G$  – член уравнения, который характеризует генерацию кинетической энергии турбулентности за счёт сдвиговых напряжений,

$$G = \mu_m \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$Sc$  – число Шмидта;  $Sc_m$  – турбулентное число Шмидта;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $M_i$  – молекулярная масса химического компонента  $i$ ;  $S_m$ ,  $S_{fi}$ ,  $S_q$ ,  $S_i$  – соответственно источники массы, импульса, теплоты и концентрации химических компонентов, которые обусловлены межфазным взаимодействием.

**Граничные условия.** Система дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) (1) – (6) дополняется соответствующими граничными условиями для независимых переменных.

На границах расчетной области задавались следующие граничные условия непрерывной фазы: на входе в газоотводящую трубу – массовый расход генераторного газа ( $G_T = 60$  кг/ч), температура генераторного газа ( $t_T = 1200^\circ \text{C}$ ) и интенсивность турбулентности ( $I_T = 10$  %), на выходе из газоотводящей трубы – нулевое избыточное статическое давление парогазовой смеси, на стенках – условие прилипания, аппроксимируемое эмпирической пристеночной функцией.

Непосредственное применение условия прилипания требует модификации модели турбулентности в пристеночной области, где турбулентная вязкость близка к молекулярной, и значительного измельчения расчетной сетки вблизи стенки. Опыт численного моделирования трехмерных течений показывает, что сложность геометрической формы расчетной области часто приводит к тому, что именно потребная размерность расчетной сетки становится тем критическим параметром, который определяет возможность проведения вычислительного эксперимента на располагаемой технической базе. Поэтому вместо условия прилипания для описания турбулентного пограничного слоя используются функции стенки – набор полуэмпирических функций, связывающих значения независимых переменных в центре пристеночной расчетной ячейки (точке P) со значениями соответствующих переменных на стенке и базирующихся на предположении Лаундера и Сполдинга [8].

Закон стенки для осредненной скорости имеет вид

$$U^* = \begin{cases} y^*, & \text{при } y^* \leq 11,225; \\ \frac{1}{K} \ln(Ey^*), & \text{при } y^* > 11,225, \end{cases} \quad (8)$$

где  $K$  – постоянная Кармана;  $E$  – эмпирическая постоянная.

Безразмерные параметры  $U^*$  и  $y^*$  определяются выражениями

$$U^* = \frac{U_P C_\mu^{1/4} k_P^{1/2}}{\tau_w / \rho}; \quad y^* = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_P^{1/2} y_P}{\mu}, \quad (9)$$

где  $U_P$  – осредненная скорость газа в точке  $P$ ;  $k_P$  – кинетическая энергия турбулентности в точке  $P$ ;  $\tau_w$  – напряжение трения на стенке;  $\rho$  – плотность газа;  $y_P$  – расстояние от точки  $P$  до стенки;  $\mu$  – динамическая вязкость.

Уравнение (4) переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  решается во всей расчетной области, включая пристеночные ячейки. Граничное условие для  $k$ , задаваемое на стенке, имеет вид  $\partial k / \partial n = 0$ , где  $n$  – локальная координата, нормальная к стенке.

Генерация кинетической энергии турбулентности  $G$  и скорость ее диссипации  $\varepsilon$ , которые входят в *источниковый член* уравнения (4), в пристеночных ячейках рассчитываются на основе гипотезы о локальном равновесии. При этом допущении генерация кинетической энергии турбулентности и скорость ее диссипации в пристеночном контрольном объеме полагаются одинаковыми. В результате уравнение (5) для  $\varepsilon$  в пристеночных ячейках не решается, вместо этого определяется формулой (10) (где  $\kappa$  – эмпирическая постоянная),

$$\varepsilon_P = \left( C_\mu^{3/4} k_P^{3/2} \right) / \kappa y_P. \quad (10)$$

В общем случае в рабочей зоне движется двухфазный поток, содержащий генераторный газ и полидисперсный водный аэрозоль. Данная математическая модель описывает только газовую фазу. Она необходима в дальнейшем для оценки межфазного взаимодействия диспергированной жидкости и газового потока в газоотводящем канале. Поскольку газовая фаза оказывает воздействие на дисперсную фазу, следует учитывать и обратное влияние дисперсной фазы на континуум. Это двухстороннее взаимодействие учитывается поочередным решением уравнений дисперсной и непрерывной фаз до тех пор, пока решения обеих фаз не установятся.

Таким образом, для создания эффективной оросительной системы охлаждения дымовых газов, образованных при утилизации отходов, требуется учет движения дисперсной фазы и межфазного взаимодействия.

**Математическая модель дисперсной фазы охлаждения генераторного газа.** Основные соотношения физико-математической постановки задачи используют классический подход движения двухфазного потока. Подобное описание использовано в работе [9] для определения физических, кинематических и геометрических параметров процесса установки водных завес.

В общем случае в рабочей зоне движется двухфазный поток, содержащий генераторный газ и полидисперсный водный аэрозоль. Поскольку объемная концентрация водяных капель в потоке невелика, можно рассматривать движение не взаимодействующих капель различных размеров в отдельности.

В отношении дисперсной фазы принимаем следующие основные допущения:

- дисперсная фаза представляет собой полностью распыленный факел жидкости (воды), состоящий из конечного множества испаряющихся сфери-

ческих капель различных диаметров;

– всеми силами, действующими на каплю, кроме сил тяжести и аэродинамического сопротивления, пренебрегаем;

– процессами вторичного дробления и коагуляции капель пренебрегаем.

При сделанных выше допущениях поведение дисперсной фазы (капель воды) удобно рассматривать в лагранжевом описании. Для распыленных жидкостей общепринятым распределением капель по размерам считается *выражение Розина – Раммлера*. Весь диапазон начальных размеров капель делится на определенное число дискретных интервалов; каждый из них представляется средним начальным диаметром, для которого выполняется траекторный расчет. При этом каждая моделируемая капля фактически представляет собой «пакет» капель с одинаковыми траекториями.

Если распределение капель по размерам описывается формулой Розина – Раммлера, то массовая доля капель с диаметром, большим  $d$ , определяется по формуле

$$Y_d = e^{-(d/\bar{d})^n}, \quad (11)$$

где  $\bar{d}$  – средний медианный диаметр капель в распыле, соответствующий значению  $Y_d = e^{-1} \approx 0,368$ ;  $n$  – параметр распределения.

Движение частицы дисперсной фазы (капли) описывается основным уравнением динамики (*вторым законом Ньютона*). При сделанных выше допущениях уравнение движения одиночной капли в векторной форме имеет вид

$$m_p \cdot d\vec{u}_p / dt = \vec{G} + \vec{F}_R, \quad (12)$$

где  $m_p$  – масса капли;  $\vec{u}_p$  – скорость капли;  $t$  – время;  $\vec{G}$  – сила тяжести,

$$\vec{G} = m_p \vec{g}, \quad (13)$$

$\vec{g}$  – ускорение свободного падения;  $\vec{F}_R$  – сила аэродинамического сопротивления капли,

$$\vec{F}_R = 0,5 \cdot C_R A_p \rho |\vec{u} - \vec{u}_p| (\vec{u} - \vec{u}_p), \quad (14)$$

где  $C_R$  – коэффициент аэродинамического сопротивления капли;  $A_p$  – площадь *миделевого сечения* капли;  $\rho$  – плотность газа;  $\vec{u}$  – скорость газа.

Подставляя выражения (13) и (14) в уравнение (12) и учитывая, что масса сферической капли и площадь ее миделевого сечения определяются выражениями:

$$m_p = \rho_p \pi d_p^3 / 6, \quad (15)$$

$$A_p = 0,25 \pi d_p^2, \quad (16)$$

а также спроецировав векторы обеих частей уравнения (2) на оси неподвижной декартовой системы координат, получим систему уравнений движения капли в виде

$$\frac{du_{pj}}{dt} = \rho_p \frac{\pi d_p^3}{6} g_j - \frac{3 \rho C_R}{4 \rho_p d_p} (u_{pj} - u_j) \left[ \sum_j (u_{pj} - u_j)^2 \right]^{1/2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Для расчета траектории капли систему (17) следует дополнить следующими очевидными уравнениями (где  $x_j$  – декартовы координаты капли)

$$\frac{dx_{pj}}{dt} = u_{pj}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (18)$$

При умеренных значениях относительных скоростей движения капель, когда сжимаемостью можно пренебречь, коэффициент аэродинамического сопротивления  $C_R$  сферической капли является однозначной функцией относительного числа Рейнольдса, определяемого формулой

$$\text{Re}_p = \frac{\rho d_p |\vec{u} - \vec{u}_p|}{\mu}, \quad (19)$$

где  $d_p$  – диаметр капли;  $\mu$  – динамическая вязкость газа.

Для аппроксимации зависимости  $C_R(\text{Re}_p)$  использована эмпирическая формула Чжена – Тризека [10]

$$C_R = \frac{24}{\text{Re}_p} + \frac{6}{1 + \sqrt{\text{Re}_p}} + 0,27. \quad (20)$$

Тепломассообмен каплей описывается двумя моделями: испарения и кипения. Модель испарения действует до тех пор, пока температура капли не достигнет точки кипения  $T_{bp}$ . При достижении точки кипения тепломассообмен капли определяется скоростью кипения.

Модель испарения предполагает, что скорость испарения капли определяется законом Фика

$$\frac{dm_v}{dt} = A_v D \rho \frac{dc}{dr}, \quad (21)$$

где  $m_v$  – масса пара;  $\rho$  – плотность газа;  $D$  – коэффициент бинарной диффузии пара в газе;  $c$  – объемная концентрация пара;  $A_v$  – площадь поверхности испарения;  $t$  – время;  $r$  – радиальная координата.

Разделив переменные и проинтегрировав уравнение (21) с граничными условиями  $c = c_s$  при  $r = r_p$ ,  $c = c_\infty$  при  $r = \infty$ , получим

$$dm_v / dt = \beta A_v \rho (c_s - c_\infty), \quad (22)$$

где  $c_s$  – объемная концентрация пара у поверхности капли;  $r_p$  – радиус капли;  $c_\infty$  – объемная концентрация пара в окружающем газе;  $\beta$  – коэффициент испарения, определяемый экспериментально.

Результаты экспериментальных исследований обычно представляют в виде критериальных зависимостей  $Sh(\text{Re}, Sc)$ , где  $Sh$  – число Шервуда, определяемое формулой

$$Sh = \beta d_p / D. \quad (23)$$

С учетом (23) и того, что площадь испарения сферической капли  $A_v = \pi d_p^2$ , уравнение (22) принимает вид:

$$dm_v / dt = Sh \rho D \pi d_p^2 (c_s - c_\infty). \quad (24)$$

Для аппроксимации критериальной зависимости  $Sh(Re, Sc)$  использована эмпирическая формула Ранца – Маршалла [11]

$$Sh = 2 + 0,6 Re^{0,5} Sc^{0,33}. \quad (25)$$

Концентрация пара на поверхности капли вычисляется, исходя из предположения, что парциальное давление пара на поверхности равно давлению насыщенного пара  $p_{sat}$  при температуре капли  $T_p$

$$c_s = \frac{M_v p_{sat}}{M_v p_{sat} + M(p - p_{sat})}, \quad (26)$$

где  $M$  и  $M_v$  – молекулярные массы газа и пара соответственно;  $p$  – абсолютное давление парогазовой смеси.

Уравнение для скорости уменьшения диаметра испаряющейся капли можно получить, проинтегрировав уравнение (24) по времени:

$$dm_p / dt = 0,5\pi\rho_p d_p^2 d(d_p) / dt. \quad (27)$$

С учетом очевидного соотношения  $dm_p / dt = -dm_p / dt$  из (24) и (27) окончательно получим:

$$\frac{d(d_p)}{dt} = -\frac{2Sh\rho D}{\rho_p d_p} (c_s - c_\infty). \quad (28)$$

Температура капли изменяется до достижения ею температуры кипения в соответствии с балансом тепла, определяемым уравнением

$$m_p c_p \frac{dT_p}{dt} = \alpha A_v (T_\infty - T_p) + L \frac{dm_v}{dt}, \quad (29)$$

где  $c_p$  – теплоемкость капли;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи между каплей и газом, определяемый экспериментально;  $A_v$  – площадь поверхности капли;  $L$  – скрытая теплота испарения;  $T_p$  – температура капли;  $T_\infty$  – локальная температура газа.

Результаты экспериментальных исследований обычно представляют в виде критериальных зависимостей  $Nu(Re, Pr)$ , где  $Nu$  – число Нуссельта, определяемое формулой (где  $\lambda$  – теплопроводность газа):

$$Nu = \alpha \lambda d_m / d_p, \quad (30)$$

С учетом (24) и (30) уравнение (29) можно представить в виде

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{(T_\infty - T_p)}{\Theta} + \frac{Q_L}{\Theta}, \quad (31)$$

где

$$Q = \frac{LSh\rho D(c_s - c_\infty)}{Nu\lambda}, \quad (32)$$

$$\Theta = \frac{\rho_p d_p^2 c_p}{6Nu\lambda}. \quad (33)$$

Исходя из допущения о полной аналогии между тепло- и массообменом при определении числа Нуссельта для аппроксимации критериальной зависимости  $Nu(Re, Pr)$  использована зависимость, аналогичная формуле (25):

$$Nu = 2 + 0,6 Re^{0,5} Pr^{0,33}. \quad (34)$$

Когда температура капли достигает точки кипения, вместо уравнения (28) применяется уравнение скорости кипения (где  $c_{p\infty}$  – теплоемкость газа)

$$\frac{d(d_p)}{dt} = -\frac{4\lambda}{\rho_p c_{p\infty} d_p} * \left( 1 + 0,23 Re_p^{0,5} \ln \left[ 1 + \frac{c_{p\infty}(T_\infty - T_p)}{L} \right] \right), \quad (35)$$

Уравнение (35) выведено в предположении стационарного течения при постоянном давлении. Считается, что пока применяется закон кипения, капля сохраняет постоянную температуру.

Таким образом, поведение одиночной капли в известном газодинамическом поле описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (17), (18), (28), (31), (35). В этой системе искомыми функциями являются проекции абсолютной скорости капли  $u_{pj}$ , ее координаты  $x_{pj}$ , диаметр  $d_p$  и температура  $T_p$ . Остальные величины являются параметрами. Часть из этих параметров функционально связана с независимыми переменными. Поэтому для замыкания системы ее необходимо дополнить алгебраическими соотношениями (11), (19), (20) (23), (25), (26), (30), (34), а также формулами, выражающими зависимость теплофизических свойств капли от ее температуры.

**Начальные условия.** Для численного решения системы ОДУ (17), (18), (28), (31), (35) необходимо задать начальные условия, то есть значения независимых переменных в начальный момент времени  $t = 0$ :  $u_{pj0}$ ,  $x_{pj0}$ ,  $d_p$ ,  $T_p$ .

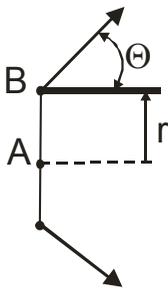


Рис. 2 – Схема ввода каплей.

При моделировании предполагалось, что капли стартуют через три (по количеству форсунок) ввода типа «кромка конуса»: точки B старта каплей равномерно распределены по окружности радиуса  $r$  с центром в точке A (рис. 2).

Начальные диаметры представительных капель  $d_p$  задавались по гистограмме начального распределения каплей по размерам, построенной с помощью уравнения (11).

Начальная скорость каплей полагалась равной скорости истечения жидкости из сопла форсунки. Начальная температура каплей полагалась равной  $20^\circ \text{C}$ .

Начальное направление вектора начальной скорости каплей определялось по значению корневого угла факела распыливания.

**Модель межфазного взаимодействия.** Взаимодействие между фазами учитывается с помощью дискретной модели «частица – источник в ячейке», в соответствии с которой присутствие капли в потоке проявляется через дополнительные источники в уравнениях сохранения сплошной фазы [12]. Во время расчета траекторий каплей отслеживаются импульс, масса и теплота, приобретаемые или теряемые «пакетом» каплей, следующих вдоль данной траектории. Затем эти значения включаются в расчет газовой фазы в виде источников членов  $S_m$ ,  $S_q$ ,  $S_{\dot{m}}$  в уравнениях газовой динамики. Таким образом,

поскольку газовая фаза уже оказывает воздействие на дисперсную фазу через уравнения (17), (18), (28), (31), (35), учитывается и обратное влияние дисперсной фазы на континуум. Это двухстороннее взаимодействие учитывается поочередным решением уравнений дисперсной и непрерывной фаз до тех пор, пока решения обеих фаз не установятся. Схема модели межфазного взаимодействия показана на рис. 3.

**Обмен массой.** Перенос массы от дисперсной фазы к непрерывной фазе рассчитывается путем оценки изменения массы капли при ее прохождении через каждый контрольный объем геометрической модели.

Это изменение массы рассчитывается по формуле:

$$\Delta S_m = \sum \left( \frac{\Delta m_p}{m_{p0}} \cdot \dot{m}_{p0} \right), \quad (36)$$

где  $\Delta m_p$  – изменение массы капли в контрольном объеме;  $m_{p0}$  – начальная масса капли;  $\dot{m}_{p0}$  – начальное значение массового расхода капель.

**Обмен импульсом.** Перенос импульса от непрерывной фазы к дисперсной фазе вычисляется путем оценки изменения импульса капли при ее прохождении через каждый контрольный объем геометрической модели. Это изменение импульса рассчитывается по формуле:

$$\Delta S_{fi} = \sum \left( \frac{2\mu C_R \text{Re}_p}{3\rho_p d_p^2} (u_{pi} - u_i) \cdot \dot{m}_p \Delta t \right), \quad (37)$$

где  $\dot{m}_p$  – массовый расход пара от испаряющейся капли;  $\Delta t$  – шаг по времени.

**Теплообмен.** Перенос тепла от непрерывной фазы к дисперсной фазе рассчитывается путем оценки изменения энтальпии капли при ее прохождении через каждый контрольный объем геометрической модели. Это изменение рассчитывается

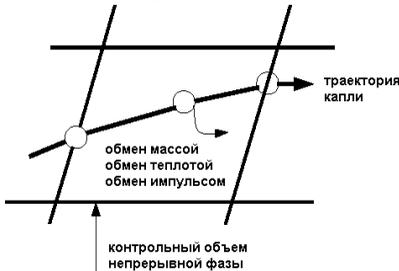


Рис. 3 – Схема межфазного взаимодействия.

ся по формуле:

$$\Delta S_q = \sum \left( \frac{\bar{m}_p}{m_{p0}} c_p \Delta T_p + \frac{\Delta m_p}{m_{p0}} \left( -L + \int_{T^0}^{T_p} c_{pi}(T) dT \right) \cdot \dot{m}_{p0} \right), \quad (38)$$

где  $\bar{m}_p$  – средняя масса капли в контрольном объеме;  $c_p$  – теплоемкость капли;  $\Delta T_p$  – изменение температуры капли в контрольном объеме;  $L$  – скрытая теплота испарения;  $c_{pi}$  – теплоемкость пара топлива;  $T_p$  – температура капли на выходе из контрольного объема;  $T^0$  – стандартная температура для энтальпии.

**Выводы.** Представленная математическая модель газовой составляющей охлаждения генераторного газа разработана на основе универсального классического подхода и позволяет описать особенности трехмерных течений в камере охлаждения. Полученная математическая модель учитывает не только газовую и дисперсионную составляющую, но и межфазовое взаимо-

действие.

На основе полученных результатов в дальнейшем возможно проведение численных исследования газодинамических процессов, предотвращающих образование высокотоксичных веществ.

**Список литературы:** 1. *Нечипорук Н. В., Эрсамбетов В.Ш.* Альтернативная технология утилизации отходов жизнедеятельности // Экологічна безпека. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 2/2012 (14). – С. 80 – 84. 2. *Кобрин В.Н., Нечипорук Н.В., Вамболь В.В.* Система управления экологической безопасностью при утилизации твердых бытовых и производственных отходов // Экологічна безпека. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 2/2014 (18). – С. 24 – 29. 3. *Федоров Л.А.* Диоксины как экологическая опасность: ретроспектива и перспективы // Распад и образование диоксида при горении отходов. – М.: Наука, 1994. – Т. 13. – № 2. – С. 17 – 33. 4. *Вамболь В.В.* Математическое моделирование газовой фазы охлаждения генераторного газа установки утилизации отходов жизнедеятельности // Вісник Кременчуцького національного ун-ту ім. М. Остроградського: зб. наук. праць. – Кременчук: КрНУ, 2014. – № 6/2014 (89). – Ч. 1. – С. 148 – 152. 5. *Милош В.В.* Диоксины и их потенциальная опасность в экосистеме «человек – окружающая среда» [Электронный ресурс] / В.В. Милош. – Режим доступа: <http://crowngold.narod.ru/articles/dioxini.htm>. 6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с. 7. *Launder B.E.* Lectures in Mathematical Models of Turbulence / B.E. Launder, D.B. Spalding. – London: Academic Press, 1972. – 46 p. 8. *Launder B.E.* The Numerical Computation of Turbulent Flows / B.E. Launder, D.B. Spalding // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – No. 3. – P. 269 – 289. 9. *Вамболь С.А.* Моделирование дисперсной фазы процесса установки водных завес в системах управления экологической безопасности // Науковий журнал «Екологічна безпека» – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 2/2012 (14). – С. 15 – 18. 10. *Костюк В.Е.* К выбору аппроксимирующего выражения для коэффициента аэродинамического сопротивления капли // Науч.-метод. материалы по теории авиационных двигателей: Сб. науч. тр. – Харьков: ХВВАИУ, 1988. – Вып. 6. – С. 13 – 21. 11. *Шервуд Т., Пизфорд Р., Уилки Ч.* Массопередача. – М.: Машиностроение, 1988. – 600 с. 12. *Crowe C.T.* The particle-source-in-cell model for gas-droplet flows / C.T. Crowe, M.P. Sharma, D.E. Stock // ASME Trans. J. Fluids Eng. – 1977. – 8 p.

**Bibliography (transliterated):** 1. *Nechiporuk, N. V., and V. Sh. Ersmambetov.* "Al'ternativnaja tehnologija utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Ekologichna bezpeka*. No. 2/2012 (14). Kremenchuk: KrNU, 2012. 80–84. Print. 2. *Kobrin, V. N., N. V. Nechiporuk and V. V. Vambol'.* "Sistema upravlenija ekologicheskoi bezopasnost'ju pri utilizacii tverdyh bytovykh i proizvodstvennykh othodov." *Ekologichna bezpeka*. No. 2/2014 (18). Kremenchuk: KrNU, 2012. 24–29. Print. 3. *Fedorov, L. A.* "Dioksiny kak ekologicheskaja opasnost': retrospektiva i perspektivy." *Raspad i obrazovanie dioksina pri gorienii othodov*. Vol. 13. No. 2. Moscow: Nauka, 1994. 17–33. Print. 4. *Vambol', V. V.* "Matematicheskoe modelirovanie gazovoj fazy ohlazhdenija generatornogo gaza ustanovki utilizacii othodov zhiznedejatel'nosti." *Visnyk Kremenčuc'kogo nacional'nogo un-tu im. M. Ostrogradsk'kogo: zb. nauk. prac'*. No. 6/2014 (89). Vol. 1. Kremenchuk: KrNU, 2014. 148–152. 5. *Milosh, V. V.* Dioksiny i ih potencial'naja opasnost' v ekosisteme «chelovek – okružhajushhaja sreda». 30 October 2009. Web. 20 May 2015. <<http://crowngold.narod.ru/articles/dioxini.htm>>. 6. *Lojczanskiy, L. G.* *Mehanika zhidkosti i gaza*. Moscow: Nauka, 1978. Print. 7. *Launder, B. E., and D. B. Spalding.* *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*. London: Academic Press, 1972. Print. 8. *Launder, B. E., and D. B. Spalding.* "The Numerical Computation of Turbulent Flows." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. No. 3. 1974. 269–289. Print. 9. *Vambol', S. A.* "Modelirovanie dispersnoj fazy processa ustanovki vodnykh zaves v sistemah upravlenija ekologicheskoi bezopasnosti. *Naukovyj zhurnal «Ekologichna bezpeka»* No. 2/2012 (14). Kremenchuk: KrNU, 2012. 15–18. Print. 10. *Kostjuk, V. E.* "K vyboru approksimirujushhego vyrazhenija dlja koefefficijenta aerodinamicheskogo soprotivlenija kapli." *Nauch.-metod. materialy po teorii aviacionnykh dvigatelej: Sb. nauch. tr.* No. 6. Khar'kov: HVVAIU, 1988. 13–21. Print. 11. *Shervud, T., et al.* *Massoperedacha*. Moscow: Mashinostroenie, 1988. Print. 12. *Crowe, C. T., M. P. Sharma and D. E. Stock.* *The particle-source-in-cell model for gas-droplet flows*. ASME Trans. J. Fluids Eng. 1977. Print.

*Поступила (received) 11.05.2015*

**С.О. ВАМБОЛЬ**, д-р техн. наук, проф., НУЦЗУ, Харків;  
**І.В. МІЩЕНКО**, канд. техн. наук, доц., НУЦЗУ, Харків;  
**О.М. КОНДРАТЕНКО**, канд. техн. наук, ст. викл., НУЦЗУ, Харків;  
**О.А. БУРМЕНКО**, магістрант, НУЦЗУ, Харків

## **АПРОКСИМАЦІЯ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ БЕТА-РОЗПОДІЛУ. ЧАСТИНА I**

Досліджено особливості бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Проаналізовано спеціалізовану науково-технічну і довідникову літературу, методи математичної статистики, теорії ймовірностей, чисельні. У даній частині дослідження застосовано типові закони розподілу до об'єкту дослідження та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним для знаходження справжнього або близького до нього закону. Вперше показано переваги застосування бета-розподілу для апроксимації емпіричного закону розподілу будь-яких даних вимірювань на прикладі геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу придатні для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

**Ключові слова:** похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

**Вступ.** Аналіз і оцінювання *похибок вимірювання* є одним з розділів *метрології*. Розглядаючи результати вимірювання, необхідно відмітити виникнення похибок, які характеризують недосконалість вимірювання. Закономірність прояву *випадкових похибок*, як додатних, так і від'ємних, піддається урахуванню при достатньо великій кількості вимірювань. За деяких умов (умовна однакова кількість *різнознакових похибок*, обмеження на *абсолютну величину похибок*, компенсація випадкових похибок при їхньому додаванні) *розподіл випадкових похибок* підкоряється *нормальному розподілу*. На практиці для перевірки нормальності застосовують візуальні методи, (наприклад, *гістограми, нормальні ймовірнісні графіки* або *числові методи*) за допомогою оцінки *коефіцієнтів асиметрії та ексцесу*. Але при невідповідності *емпіричного розподілу*, який зазвичай представлений у вигляді гістограми, нормальному стає питання пошуку або підбору такого розподілу, який за певними критеріями точніше описує *емпіричний розподіл*. Серед десятків існуючих *типових розподілів*, які можна вважати кандидатами для подальшої оцінки параметрів, можна здійснити вибір потрібного закону розподілу через аналіз гістограми та *моментних оцінок*. Відповідно до обраного *закону розподілу* здійснюється перевірка *гіпотези* про відповідність емпіричного розподілу до теоретичного, що при невідкіданні гіпотези приводить до розв'язання *задачі апроксимації*. В протилежність до цього пошук має бути продовжено без гарантії знаходження *справжнього* або принаймні *близького* до нього закону. В той же час існує підхід до побудови *універсальних сімейств розподілів*, зокрема, апроксимація на основі *сімейства розподілів Пірсона*, який (підхід) вважається таким, що охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального. Останнє говорить про певну варіативність і гнучкість при

вирішенні задачі апроксимації, що за умов підтвердження та обґрунтування можливості використання *бета-розподілу* дозволяє при проведенні досліджень користатися запропонованим в роботі *математичним апаратом* щодо визначення параметрів вказаного розподілу.

**Аналіз літературних джерел.** При проведенні дослідження проаналізовано 34 наукових джерела інформації, з яких: 6 підручників і навчальних посібників, 10 наукових монографій, 12 спеціалізованих видань, 6 довідників [1 – 34]. Оскільки сутність проведеного дослідження полягає у порівнянні добре відомих і широко застосованих законів розподілу з відомим, проте мало застосованим і, як виявилось, не дослідженим всебічно законом, то результати аналізу літератури за окремими аспектами поставленої проблеми, що є задачами дослідження, буде наведено у відповідних розділах статті.

**Мета та задачі дослідження.** *Метою дослідження* є дослідження особливостей бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників.

*Об'єкт дослідження* – особливості застосування бета-розподілу для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу.

*Предмет дослідження* – закон розподілу емпіричних даних щодо геометричних характеристик тіл кочення підшипників.

У дослідженні вирішуються дві задачі.

*Задача 1.* побудова емпіричного закону розподілу ймовірностей, що включає у себе:

1.1. визначення основних закономірностей процесу генерування випадкових чисел, як невід'ємної складової об'єкту дослідження;

1.2. визначення характеристик інтервалу зміни досліджуваної величини, тобто меж і розмаху інтервалу, кількості інтервалів розбиття;

1.3. визначення вибірових оцінок математичного очікування, середньоквадратичного очікування, початкових та центральних моментів необхідного порядку, коефіцієнтів асиметрії та ексцесу;

1.4. визначення дійсних (теоретичних) розподілів діаметрів шариків підшипника та полярного моменту опору їх головного перерізу.

*Задача 2.* Використання бета розподілу при апроксимації емпіричних даних, що включає у себе:

2.1. описання системи кривих Пірсона;

2.2. визначення параметрів бета-розподілу для об'єкту дослідження.

У даній частині дослідження наведено дані щодо повного вирішення задачі 1.

**Генерування випадкових чисел.** Для проведення досліджень, пов'язаних з апроксимацією емпіричних даних, необхідно отримати випадкові числа з заданим законом розподілу. В термінах математичної статистики останні є *випадковою вибіркою з генеральної сукупності*, розподіленої за цим законом.

Механізм генерування випадкових чисел, який використовується в роботі, описано в [1, 6]. За допомогою датчика випадкових чисел RANDOM генерується реалізація випадкової величини  $r_i$  ( $i = 1 \dots N$ ), розподіленої рівномірно

но в інтервалі  $[0, 1]$ , і має назву *стандартної рівномірної послідовності*.

Для нормального розподілу з нульовим математичним очікуванням ( $m_u = 0, 0$ ) і одиничною дисперсією ( $\sigma_u = 1, 0$ ) на основі двох послідовно узятих чисел  $(r_1, r_2)$ ,  $(r_3, r_4)$ , ...,  $(r_{N-1}, r_N)$  (для  $N$  значень мається  $N/2$  пар чисел) одержуємо відповідно два числа  $(u_1, u_2)$ ,  $(u_3, u_4)$ , ...,  $(u_{N-1}, u_N)$  нормально розподіленої випадкової величини  $r$

$$u_i = \sqrt{-2 \ln r_i} \cos(2\pi r_{i+1}), \quad u_{i+1} = \sqrt{-2 \ln r_i} \sin(2\pi r_{i+1}), \quad i = 1, 3, \dots, N-1. \quad (1)$$

При одержанні реалізації нормальної випадкової величини з ненульовим математичним очікуванням  $m_d$  і стандартним відхиленням  $\sigma_d$ , відмінним від одиниці, використовується наступне співвідношення [6, 9], за яким відбувається лінійне перетворення випадкової величини

$$x_i = m_d + u_i \cdot \sigma_d, \quad i = 1 \dots N. \quad (2)$$

Для визначеності необхідно задати обсяг вибірки  $N$ , який в будь-якому випадку буде обмеженим кількістю спостережень або дослідів. В роботі було згенеровано 3000 значень  $r_i$  ( $i = 1 \dots N$ ), які в усіх розрахунках залишалися незмінними. За необхідності вибиралися перші 500 значень, перші 1000 значень, і остаточно повна вибірка. Значення  $m_d = 1,59$  мм було обрано як діаметр радіального однорядного підшипника 23 [32], для розрахунків величина середньоквадратичного відхилення діаметру приймалась  $\sigma_d = 0,01 \cdot m_d = 0,0159$  мм,  $\sigma_d = 0,04 \cdot m_d = 0,0636$  мм,  $\sigma_d = 0,06 \cdot m_d = 0,0954$  мм,  $\sigma_d = 0,07 \cdot m_d = 0,1113$  мм. У якості досліджуваного параметру розглядався полярний момент опору головного перерізу шарика  $J_p$ . Основним міркуванням при виборі вказаної характеристики є нелінійність перетворення при зведенні діаметра у 4-ий ступінь, що при нормальному розподілі діаметрів безперечно порушує нормальність розподілу параметра  $J_p$  і призводить до асиметрії розподілу. Також можна розглядати площу головного перерізу (зведення діаметру у другий ступінь), полярний або осьовий моменти опору головного перерізу, об'єм шарика (зведення діаметру у третій ступінь), осьові моменти інерції головного перерізу (зведення діаметру у четвертий ступінь).

**Визначення кількості інтервалів розбиття.** Під час аналізу випадкової величини  $J_p$  необхідно призначити границі інтервалу, на якому досліджувана величина приймає ненульові значення. Визначити мінімальне –  $J_{p \min}$ , максимальне –  $J_{p \max}$  значення, розмах  $\Delta J_p = J_{p \max} - J_{p \min}$ . Для нормального розподілу майже всі значення (99,7 %) випадкової величини знаходяться в інтервалі  $(\tilde{m}_1 - 3\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 3\tilde{S})$  за умов визначення вибіркової оцінки середнього (математичного очікування) і середньоквадратичного відхилення  $\tilde{S}$ . Але є певні рекомендації щодо побудови гістограми [23], згідно з якими:

- для вибірки ( $6 < N \leq 100$ ) інтервал  $(\tilde{m}_1 - 4\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 4\tilde{S})$ ;
- для вибірки ( $100 < N \leq 1000$ ) інтервал  $(\tilde{m}_1 - 4,5\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 4,5\tilde{S})$ ;
- для вибірки ( $1000 < N \leq 10000$ ) інтервал  $(\tilde{m}_1 - 5\tilde{S}, \tilde{m}_1 + 5\tilde{S})$ .

Через неоднозначність вибору  $\Delta J_p$  та можливість в подальшому отри-

мати порожні стовпчики у побудові гістограми для несиметричного розподілу обираємо  $\Delta J_p = J_{p_{\max}} - J_{p_{\min}}$ .

Для визначення форми розподілу, для використання критеріїв згоди тощо, для зіставлення гіпотез про форму розподілу вибірка має бути представленою у вигляді гістограми, що складається з  $n_{COL}$  стовпчиків певної довжини  $\Delta J_{p_{COL}}$ . Гістограми дозволяють побачити, як розподілені значення змінних за інтервалами групування, тобто як часто змінні приймають значення з різних інтервалів. Загальноприйнятним є використання інтервалів однакової довжини. В літературі зі статистичної обробки експериментальних даних приведено конкретні рекомендації стосовно вибору кількості  $n_{COL}$  інтервалів групування, які істотно відрізняються між собою. При достатньо малому  $n_{COL}$  гістограма буде відрізнятися від дійсної кривої через досить крупну східчастість, що приведе до втрати характерних особливостей розподілу. При великій кількості стовпчиків групування навпаки гістограма може мати чергування вершин і западин, що не відповідає дійсності. Як рекомендовані використовуються наступні формули:

- формула Старджеса  $n_{COL} = \log_2 N + 1 = 3,322 \lg N + 1$ ;
- формула Брукса і Каррузера  $n_{COL} = 5 \lg N$ ;
- рекомендація Хайнхольда та Гаеде  $n_{COL} = \sqrt{N}$ ;
- рекомендація Уїльямса  $n_{COL} = 1,9N^{0,4}$ ;
- рекомендація ВМЕІ, Варна  $n_{COL} = 4 \lg N$ ;
- формула Тоневої  $n_{COL} = 5 \lg N - 5 = 5 \lg(N/10)$ ;
- формула Алексєєвої  $n_{COL} = (4/\chi) \lg(N/10)$ , де  $\chi$  – коефіцієнт для певного розподілу залежно від його вигляду;
- граничні значення:  $\min n_{COL} = 0,55N^{0,4}$ ,  $\max n_{COL} = 1,25N^{0,4}$ .

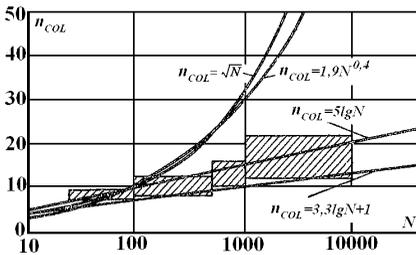


Рис. 1 – Порівняння величини  $n_{COL}$ , отримані згідно до різних рекомендацій [23].

На рис. 1, узятому з книги [23], показані графіки  $n_{COL}$  для зіставлення між собою деяких рекомендацій з наведеного списку. Штрихованими прямокутниками показана рекомендація згідно з виданими ВНДІМ ім. Д.І. Менделєєва в 1972 році «Рекомендаціями по методам обробки результатів наблюденій».

Залежно від обсягу вибірки від 40 до 10000 кількість  $n_{COL}$  назначається від 7 до 22.

Слід зазначити, що в області чисел  $N \approx 100$  спостерігається збіг значень  $n_{COL}$ , зі зростанням  $N$  існують суттєві розбіжності. Загальною вимогою для *унімодальних гістограм* є непарна кількість інтервалів, тому в даній роботі були обрані наступні значення  $n_{COL}$ : при  $N = 500 \cdot n_{COL} = 11$ , при  $N = 1000 \cdot n_{COL} = 13$ , при  $N = 3000 \cdot n_{COL} = 15$ , що незначно перебільшує кількість, визначеною за формулою Старджеса та поступається решті.

**Вибіркові оцінки моментів.** Для визначення вибіркових оцінок математичного очікування, середньоквадратичного очікування, початкових (табл. 1) та центральних моментів (табл. 2) необхідного порядку, коефіцієнтів асиметрії та ексцесу не є необхідним будь-яке групування експериментальних даних [17]. Ці оцінки визначаються безпосередньо за вихідною вибіркою  $J_{Pi}$  ( $i = 1 \dots N$ ). Слід зазначити, що незміщена оцінка важлива при  $N < 50$ , тому в подальшому будемо застосовувати позначення для незміщених оцінок.

Таблиця 1 – Вибіркові оцінки початкових моментів порядку 0 – 4

$\tilde{m}_0 = 1$	$\tilde{m}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_{Pi}$	$\tilde{m}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_{Pi}^2$	$\tilde{m}_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_{Pi}^3$	$\tilde{m}_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N J_{Pi}^4$
-------------------	-------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------	---------------------------------------------------

Таблиця 2 – Вибіркові оцінки центральних моментів порядку 0 – 4 та незміщені оцінки центральних моментів

Вибіркові оцінки центральних моментів порядку 0 – 4	Незміщені оцінки центральних моментів
$\tilde{\mu}_0 = 1$	$\hat{\mu}_0 = 1$
$\tilde{\mu}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J_{Pi} - \tilde{m}_1)$	$\hat{\mu}_0 = \tilde{\mu}_1$
$\tilde{\mu}_2 = \tilde{S}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J_{Pi} - \tilde{m}_1)^2$	$\hat{\mu}_2 = \frac{N}{N-1} \tilde{\mu}_2, \hat{S}^2 = \frac{N}{N-1} \tilde{S}^2$
$\tilde{\mu}_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J_{Pi} - \tilde{m}_1)^3$	$\hat{\mu}_3 = \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} \tilde{\mu}_3$
$\tilde{\mu}_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (J_{Pi} - \tilde{m}_1)^4$	$\hat{\mu}_4 = \frac{N(N^2 - 2N + 3)\tilde{\mu}_4 - 3N(2N - 3)\tilde{\mu}_2^2}{(N-1)(N-2)(N-3)}$

Вибіркові коефіцієнти асиметрії  $\tilde{Sk}$  та ексцесу  $\tilde{Ex}$  визначаються за формулами

$$\tilde{Sk} = \tilde{m}_3 / \tilde{S}^3, \tilde{Ex} = \tilde{m}_4 / \tilde{S}^4 - 3. \quad (3)$$

Для нормального розподілу  $Sk = 0$ , тобто розподіл симетричний відносно математичного очікування.  $Sk > 0$ , якщо правий хвіст більш довгий порівняно з лівим,  $Sk < 0$  у протилежному випадку. Для нормального розподілу  $Ex = 3$ .  $Ex > 0$ , якщо пік розподілу умовно гострий,  $Ex < 0$ , якщо пік розподілу умовно гладкий, закруглений. Для попереднього висновку про можливість апроксимації емпіричних даних нормальним розподілом при достатньо великому обсязі вибірки (порядку  $10^3$ ) проводиться обчислення вибіркових середньоквадратичних відхилень коефіцієнтів асиметрії ( $S_1$ ) й ексцесу ( $S_2$ ) [2, 21]

$$S_1 = \sqrt{\frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)}}, S_2 = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N+1)^2(N+3)(N+5)}}. \quad (4)$$

Іноді рекомендується вказані коефіцієнти обчислювати за наступними формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{S}k &= \frac{k_3}{\sqrt{k_2^3}}, \quad \tilde{E}x = \frac{k_4}{k_2^2} - 3, \\ \text{де } k_2 &= \frac{\tilde{\mu}_2}{1-1/N}, \quad k_3 = \frac{\tilde{\mu}_3}{(1-1/N)(1-2/N)}, \\ k_3 &= \frac{\tilde{\mu}_4}{\left(1-\frac{2}{N+1}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{3}{N}\right)} - \frac{3\tilde{\mu}_2^2}{\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{3}{N}\right)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо вибірковий розподіл є нормальним або близький до нормального, то обчислені за формулами (5) коефіцієнти  $\tilde{S}k$  і  $\tilde{E}x$  мають асимптотичне нормальні розподіли з нульовим математичним очікуванням та середньоквадратичними відхиленнями відповідно

$$S_1 = \sqrt{\frac{6N(N-1)}{(N-2)(N+1)(N+3)}}, \quad S_2 = \sqrt{\frac{24N(N-1)^2}{(N-3)(N-2)(N+3)(N+5)}}. \quad (6)$$

Вважається, що якщо виконується умова  $|\tilde{S}k| \leq 3S_1$ , то розподіл симетричний. Якщо, крім того, для коефіцієнту ексцесу виконується нерівність  $|\tilde{E}x| \leq 5S_2$ , розподіл можна вважати нормальним. В роботі, у подальшому, під час аналізу результатів певних досліджень буде зроблено аналіз прийняття чи неприйняття нормального закону для апроксимації емпіричних даних.

**Дійсні (теоретичні) розподіли діаметрів шариків підшипника та полярного моменту опору головного перерізу.** При нормальному розподілі діаметрів шариків підшипника  $x_i$  останні підкоряються *неперервному теоретичному закону* у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \exp\left\{-\frac{(x-m_d)^2}{2\sigma_d^2}\right\}, \quad (7)$$

для якого обчислюють початкові моменти  $n$ -го порядку

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx.$$

Якщо існує аналітична залежність між величинами  $x$  і  $J_p$ , а саме для об'єкту, що розглядається,

$$J_p = \pi x^4 / 32 = \varphi(x),$$

то зворотна функція може бути записана у вигляді

$$x = \psi(J_p) = (32J_p / \pi)^{1/4}.$$

Користуючись відомими формулами [9], які дають залежність між розподілами, отримуємо

$$g(J_p) = \varphi[\psi(J_p)] \cdot |\psi'(J_p)|, \quad \psi'(J_p) = (1/8\pi) \cdot 1/J_p^{3/4}. \quad (8)$$

Остаточно теоретичний розподіл для полярного моменту інерції голов-

ного перерізу отримає вигляд

$$g(J_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} \exp \left( - \left[ \left( \frac{32J_p}{\pi} \right)^{1/4} - m_d \right]^2 / (2\sigma_d^2) \right) \left( \frac{1}{8\pi} \right) J_p^{3/4}. \quad (9)$$

Початкові моменти для нього можна виразити через початкові моменти змінної  $x$ , що приводить до наступного співвідношення:

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} (J_p)^n g(J_p) dJ_p = \int_{-\infty}^{\infty} (\pi \cdot x^4 / 32)^n f(x) dx = (\pi / 32)^n \alpha_{4n}. \quad (10)$$

Таким чином, у підсумку можна обчислити вибіркові оцінки початкових  $\tilde{m}_n$  і центральних  $\tilde{\mu}_n$  моментів на основі емпіричних даних, а також теоретичні значення аналогічних моментів  $m_n$  і  $\mu_n$  для розподілу (9). Слід зазначити, що не існує проблем з визначенням моментів довільного порядку, але для подальших досліджень потрібно знати числові значення моментів до 4-го включно.

**Висновки.** Таким чином, в роботі розглянута задача апроксимації емпіричних даних, які представлені у вигляді вибірки та на їхній основі побудовані гістограми, за допомогою різного типу законів розподілу. У ролі емпіричних даних можуть виступати похибки вимірювання або будь-які інші дані. Показано, що використання для апроксимації нормального розподілу не завжди є прийнятним у наслідок можливих відмінностей через асиметрію та гостру або сплюснену вершину емпіричного розподілу. За цих умов для апроксимації можливо використання типових розподілів, але це призводить до перебирання без гарантії знаходження справжнього або принаймні близького до нього закону.

У подальших частинах дослідження буде застосовано існуючий підхід на основі сімей розподілів Пірсона, який охоплює широкий клас законів розподілу, не близьких до нормального, та може стати універсальним, але потребує поглибленого дослідження. Також будуть наведені результати чисельних досліджень для вибірок різного обсягу з різними середньоквадратичними відхиленнями змінної, для демонстрації можливості використання запропонованого підходу та розробленого на його основі математичного апарату для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних.

**Список літератури:** 1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с. 2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: Изд. объединение «ЮНИТИ», 1998. – 1022 с. 3. Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ: Подход с использованием ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 488 с. 4. Боровиков В.П. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. – 2-е изд. – СПб.: Питер, 2003. – 688 с. 5. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений / Под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1975. – 314 с. 6. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с. 7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. вузов. – 5-е изд., испр. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 448 с. 8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с. 9. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971. – 328 с. 10. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики / Под общ. ред. Б.П. Демидовича. – 2-е изд. – М.: Госуд. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1963. – 660 с. 11. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программа на языке бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. –

М.: Наука, 1989. – 240 с. **12.** Дэннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 440 с. **13.** Елисеева И.И., Юзбашев М.М. Общая теория статистики. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 656 с. **14.** Жовдак В.А., Мищенко И.В. Прогнозирование надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Х.: Харьковский государственный политехнический университет, 1999. – 120 с. **15.** Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с. **16.** Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с. **17.** Крамер Г. Математические методы статистики / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с. **18.** Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1962. – 249 с. **19.** Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Под ред. К.И. Бабенко. – М.: Мир, 1980. – 608 с. **20.** Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений: учебное пособие для средних специальных заведений. – М.: Изд-во стандартов, 1991. – 176 с. **21.** Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 448 с. **22.** Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 576 с. **23.** Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – 2-е изд. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. – 304 с. **24.** Романов В.Н. Теория измерений. Методы обработки результатов измерений. – 2-е изд. – СПб.: СЗТУ, 2006. – 127 с. **25.** Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 512 с. **26.** Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с. **27.** Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. **28.** Уилкс С. Математическая статистика / Под ред. Ю.В. Линника. – М.: Наука, 1967. – 632 с. **29.** Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений / Под ред. Н.М. Гюнтера. – М.-Л.: ОНТИ – Главная редакция общетехнической литературы, 1935. – 364 с. **30.** Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями / Под ред. Ю.В. Линника. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1956. – 664 с. **31.** Ходасевич Г.Б. Обработка экспериментальных данных на ЭВМ. Часть 1. Обработка одномерных данных [Электронный ресурс]: Учебное пособие / Г.Б. Ходасевич. – Режим доступа: [http://www.dvo.sut.ru/libr/opds/il30hodo\\_part/4.htm](http://www.dvo.sut.ru/libr/opds/il30hodo_part/4.htm). **32.** Худсон Д. Статистика для физиков. Лекции по теории вероятностей и элементарной статистике / Под ред. Е.М. Лейкина. – 2-е изд. – М.: Мир, 1970. – 297 с. **33.** Черменский О.Н., Федотов Н.Н. Подшипники качения: Справочник – каталог. – М.: Машиностроение, 2003. – 576 с. **34.** Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы) / Под ред. Л.И. Седова. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Ajvazjan, S. A., I. S. Enjukov and L. D. Meshalkin. *Prikladnaja statistika: Osnovy modelirovanija i pervichnaja obrabotka dannyh. Spravochnoe izdanie.* Moscow: Finansy i statistika, 1983. Print. **2.** Ajvazjan, S. A., and V. S. Mhitarjan. *Prikladnaja statistika i osnovy ekonometriki.* Moscow: Izd. obiedinenie «JuNIT»), 1998. Print. **3.** Afifi, A., and S. Jenzen. *Statisticheskij analiz: Podhod s ispol'zovaniem EVM.* Moscow: Mir, 1982. Print. **4.** Borovikov, V. P. *Statistika. Iskusstvo analiza dannyh na komp'yutere: Dlja professionalov.* 2<sup>nd</sup>. ed. St. Petersburg: Piter, 2003. print. **5.** Brandt, Z. *Statisticheskie metody analiza nabljudenij.* Ed. V. F. Pisarenko. Moscow: Mir, 1975. Print. **6.** Vadzinskij, R. N. *Spravochnik po verojatnostnym raspredelenijam.* St. Petersburg: Nauka, 2001. Print. **7.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Zadachi i uprazhnenija po teorii verojatnostej: Ucheb. posobie dlja stud. Vtuzov.* 5<sup>th</sup> ed. Ispr. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademija», 2003. Print. **8.** Ventcel', E. S., and L. A. Ovcharov. *Teorija verojatnostej i ejo inzhenernye prilozhenija: Ucheb. posobie dlja vtuzov.* 2<sup>nd</sup>. ed. Moscow: Vysshaja shkola, 2000. Print. **9.** Gurskij, E. I. *Teorija verojatnostej s jelementami matematicheskoi statistiki.* Moscow: Vysshaja shkola, 1971. Print. **10.** Demidovich, B. P., and I. A. Maron. *Osnovy vychislitel'noj matematiki.* Ed. B. P. Demidovich. 2<sup>nd</sup>. ed. Moscow: Gosud. izdvo fiz.-mat. lit-ry, 1963. Print. **11.** D'jakonov, V. P. *Spravochnik po algoritmam i programam na jazyke BASIC dlja personal'nyh EVM: Spravochnik.* Moscow: Nauka, 1989. Print. **12.** Djennis, Dzh., and R. Shnabel'. *Chislennye metody bezuslovnoj optimizacii i reshenija nelinejnyh uravnenij.* Moscow: Mir, 1988. Print. **13.** Eliseeva, I. I., and M. M. Juzbashev. *Obshhaja teorija statistiki.* 5<sup>th</sup>. ed. Pererab. i dop. Moscow: Finansy i statistika, 2004. Print. **14.** Zhovdak, V. A., and I. V. Mishhenko. *Prognozirovanie nadezhnosti jelementov konstrukcij s uchetom tehnologicheskij i ekspluatacionnyh faktorov.* Khar'kov: Khar'kovskij gosudarstvennyj politehnicheskij universitet, 1999. Print. **15.** Kendall, M., and A. St'juart. *Teorija raspredelenij.* Ed. A. N. Kolmogorov. Moscow: Nauka, 1966. Print. **16.** Kobzar', A. I. *Prikladnaja matematicheskaja statistika. Dlja inzhenerov i nauchnyh rabotnikov.* Moscow: FIZMATLIT, 2006. Print. **17.** Kramer, G. *Matematicheskie metody statistiki.* Ed. A. N. Kolmogorov. Moscow: Mir, 1975.

Print. **18.** Kuznecov, D. S. *Special'nye funkicii*. Moscow: Vysshaja shkola, 1962. Print. **19.** Ljuk, Ju. *Special'nye matematicheskie funkicii i ih approksimacii*. Ed. K. I. Babenko. Moscow: Mir, 1980. Print. **20.** Markin, N. S. *Osnovy teorii obrabotki rezul'tatov izmerenij: uchebnoe posobie dlja srednih special'nyh zavedenij*. Moscow: Izd-vo standartov, 1991. Print. **21.** Min'ko, A. A. *Statisticheskij analiz v MS Excel*. Moscow: Izdatel'skij dom «Vil'jams», 2004. Print. **22.** Mitropol'skij, A. K. *Tehnika statisticheskikh vychislenij*. Moscow: Nauka, 1971. Print. **23.** Novickij, P. V., and I. A. Zograf. *Ocenka pogreshnostej rezul'tatov izmerenij*. 2<sup>nd</sup>. ed. Leningrad: Ergoatomizdat. Leningr. otd-nie, 1991. Print. **24.** Romanov, V. N. *Teorija izmerenij. Metody obrabotki rezul'tatov izmerenij*. 2<sup>nd</sup>. ed. St. Petersburg: SZTU, 2006. Print. **25.** Smirnov, N. V., and I. V. Dunin-Barkovskij. *Kurs teorii verojatnostej i matematicheskoj statistiki dlja tehniceskikh prilozhenij*. Moscow: Nauka, 1969. Print. **26.** *Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafikami i tablicami*. Ed. M. Abramovica, and I. Stigan. Moscow: Nauka, 1979. Print. **27.** Tihonov, V. I. *Statisticheskaja radiotehnika*. Moscow: Radio i svjaz', 1982. Print. **28.** Uilks, S. *Matematicheskaja statistika*. Ed. Ju. V. Linnik. Moscow: Nauka, 1967. Print. **29.** Uitteker, Je., and G. Robinson. *Matematicheskaja obrabotka rezul'tatov nabljudenij*. Ed. N. M. Gjunter. Moscow-Leningrad: ONTI – Glavnaja redakcija obshhetehniceskogo literatury, 1935. Print. **30.** Hal'd, A. *Matematicheskaja statistika s tehniceskimi prilozhenijami*. Ed. Ju. V. Linnik. Moscow: Izd-vo inostrannoju literatury, 1956. Print. **31.** Hodasevich, G. B. *Obrabotka jeksperimental'nyh dannyh na EVM. Chast' 1. Obrabotka odnomernyh dannyh. Uchebnoe posobie*. 2015. Web. 10 Jun 2015 <[http://www.dvo.sut.ru/libr/opsds/il30hodo\\_part/4.htm](http://www.dvo.sut.ru/libr/opsds/il30hodo_part/4.htm)>. **32.** Hudson, D. *Statistika dlja fizikov. Lekcii po teorii verojatnostej i jelementarnoj statistike*. Ed. E. M. Lejkin. 2<sup>nd</sup>. ed. Moscow: Mir, 1970. Print. **33.** Chermenskij, O. N., and N. N. Fedotov. *Podshipniki kachenija: Spravochnik – catalog*. Moscow: Mashinostroenie, 2003. Print. **34.** Janke, E., F. Jemde and F. Ljosh. *Special'nye funkicii. (Formuly, grafiki, tablicy)*. Ed. L. I. Sedov. Moscow: Nauka, 1964. Print.

Надійшла (received) 05.06.2015

УДК 519.67:621.762.4.04+621.762.53+537.52

**Ю.Г. ГУЦАЛЕНКО**, ст. науч. сотр., НТУ «ХПІ»

## **ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕССОВАНИЯ В ПРОЦЕССАХ КОНСОЛИДАЦИИ ПОРОШКОВ МЕТОДОМ СПАРК-ПЛАЗМЕННОГО СПЕКАНИЯ**

Рассматривается проблема физико-математического прогнозирования рационального давления в процессах спарк-плазменного спекания порошковых композиций. Определены физические аспекты этой проблемы и представлен подход к расчету давлений в цикле прессования на стадии подготовки и экспериментальной разработки производства. Расчет основан на использовании закона Пашена применительно к рассматриваемой модели спарк-плазменной консолидации порошков под давлением. Предложена расчетная реляционная база данных по давлению в нанометрическом диапазоне средних размеров зерен исходных порошков в технологиях производства спарк-плазменным спеканием. Результаты расчетов сопоставлены с практическим опытом энергосберегающего скоростного спарк-плазменного спекания плотного керамического композита из нанопорошков  $Al_2O_3 - WC$  (50/50 мас. %). Предложены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** порошковая композиция, спарк-плазменное спекание, электрический разряд, закон Пашена, давление прессования, асимптотическая зависимость.

**Введение.** Конкуренция технологий консолидации порошков различных материалов инструментального и конструкционного назначения определяется соперничеством прежде всего в формировании, и притом энергоэффективном, тонкодисперсных и высокоплотных структур, в единстве этих двух качеств и составляющих основу уровня их физико-механических свойств и эксплуатационных показателей в готовых изделиях [1], если решаемая задача

© Ю. Г. Гуцаленко, 2015

не связана с целенаправленным созданием пористого твердого тела, например фильтра. Особую остроту конкуренции технологий высокопрочных продуктов на современной порошковой основе, в особенности в нанометрическом диапазоне размеров зерен, придает повышенная востребованность в них эксплуатационно высокофункциональных, но трудно консолидируемых высокотвердых тугоплавких материалов.

Современные успехи в производстве высокоплотных порошковых консолидатов связываются с совмещением электронагрева и горячего прессования [2], что обеспечивает возможность одновременного независимого управления скоростью нагрева и механической активацией, и в результате позволяет добиваться энергичного протекания процесса уплотнения с опережением теплового роста зерен механической активацией их упаковки в консолидате.

Таким образом, прессование относится к основным воздействиям на объект порошковой консолидации, и выработка обобщенного подхода к обоснованному выбору его режима в цикле спекания является актуальной, заслуживающей специального рассмотрения, которому, применительно к методу спарк-плазменного спекания, или, в современной оригинальной терминологии японского фундатора (*M. Tokita*) и его последователей [3 – 5], *spark plasma sintering* (SPS), и посвящается представляемая здесь работа.

**Анализ предшествующих исследований.** Метод SPS является одним из признанных технологических лидеров последней четверти века среди методов консолидации субмикронных и наноразмерных порошков в Японии [3], США [4], Евросоюзе [5] и других высокоразвитых суверенных и надгосударственных образованиях, с повышенной эффективностью в получении высокоплотных (низкопористых) структур, одновременно с приложением внешнего давления использующих нагрев прямым действием электрического тока. Относительно короткий цикл спекания (обычно не более 5 мин) с повышенными скоростями нагрева обеспечивает в продуктах технологий SPS незначительный рост зерна по сравнению с исходным порошковым размером.

Несмотря на бесспорную значимость адекватного обоснования необходимости задания режима прессования в цикле SPS, большинство исследований этого метода не содержат соответствующего обоснования, а многие вообще не предоставляют сведений о прессующих нагрузках (давлениях) по ступеням цикла спекания или ограничиваются указанием на максимальное (финальное) давление в цикле. Отчасти это связано с современным трендом коммерциализации исследований и сокрытием «ноу-хау», но также и со сложившейся некоторой второстепенностью отношения к давлению горячего прессования в цикле SPS по сравнению с характеристиками нагрева.

Теоретические подходы к аналитическому заданию значений давления прессования на том или ином этапе цикла SPS в известных литературных и интернетовских источниках не рассматриваются.

В реальной практике страны-фундатора SPS (Япония), в том числе внедренческой, установленной в ходе общих дискуссий и частных общений с участием автора на проходившем в рамках международной школы-семинара [3] российско-японском семинаре по SPS, верхний предел давления прессования желателен как можно больший, но сдерживается прочностью, допускаемой материалом рабочей камеры электроконсолидации под давлением,

как правило, на графитной основе. С учетом запаса на многооперационную работоспособность камеры опытный верхний предел обычно не превышает 40 – 45 МПа.

Таким образом, разработка обобщенного подхода к априорной аналитической оптимизации цикла SPS по давлению является актуальной, осуществление которой призвано способствовать не только рациональной энергодостаточности поглощаемых рабочими процессами SPS энергетических ресурсов, но и повышению срока службы оборудования, а с этим дополнительной экономии материальных и финансовых ресурсов.

**Постановка задачи.** Основная задача данного исследования, выполняемого с позиций разработки обобщенного подхода к априорной аналитической оптимизации цикла SPS по давлению, состоит в предложении физико-математически обоснованной расчетной модели и соответствующей ей реляционной базы данных по давлению на первых участках циклограммы в технологиях SPS, реализуемых в нанометрическом диапазоне средних размеров зерен исходных порошков.

Другими задачами являются сопоставление полученных расчетных результатов с успешной практикой SPS, а также обозначение следующих горизонтов по пути уточнения и развития применимости полученных аналитически обобщенных и конкретных расчетных результатов.

**Физико-математическая модель.** Объемно-геометрически идеальным результатом SPS порошковых композиций является полное подавление пористости и формирование сплошного твердого тела. Поэтому геометрическим основанием модели является размер поры, и притом текущей наибольшей, как первоочередной текущей цели подавления в процессе SPS. Определиться с этой оценкой в начальной стадии SPS представляется целесообразным унифицированно с размерной характеристикой зернового состава исходного порошка, например в привязке, к среднему диаметру зерна в его модельной интерпретации сферой.

Методом структурных исследований по аннигиляции позитронов – продлению времени их жизни захватом вакансиями, вакансионными скоплениями (порами) по сравнению с пребыванием в бездефектных структурах, впервые использованному в исследовательской практике [6], [7] выделены три типа свободных объемов как дефектов внутренней структуры неплотно компактированных нанокристаллических материалов, рис. 1: отдельные вакансии; вакансионные агломераты или нанопоры, образующиеся в тройных стыках кристаллитов; большие поры на месте отсутствующих кристаллитов. Это позволяет рассматривать неплотные консолидаты (в том числе с участием исходных порошков различной зернистости в микро-, субмикро- и нанодиапазоне) с позиций единого представления о типичных дефектах, моделировать их и априорно выстраивать пути развития наноматериалов и нанотехнологий из соответствующих имитационных подходов.

В поддержку подобных рассмотрений свидетельствуют, например, данные [8], также полученные методом аннигиляции позитронов в компактированных средах и подтверждающие сходство микроструктуры нано- и субмикроструктур нанокристаллических материалов, в частности, наличие в них свободных объемов одинакового типа.

При этом очевидно, что обнаруживаемые в тройных стыках поры (зоны

$\tau_2$  по рис. 1) являются наследием исходной несплошности спекаемой насыпки, трансформирующейся в поры неплотного конечного продукта.

В контексте физических исследований [7] и основанной на их результатах модели геометрической структуры порошкового консолидата, размер наибольших пористых включений (рис. 1, зона  $\tau_3$ ), являющихся потенциальными объектами предпочтительного подавления при электромеханической консолидации нанопорошков, соизмерим с размерами отдельных кристаллитов (зерен).

Поскольку интенсификация подавления наибольших пор является предпочтительной, то далее воспользуемся описанием их величины в консолидате размером зерна, то есть на первых участках циклограммы в технологиях SPS – по характеристике зернистости исходной порошковой композиции.

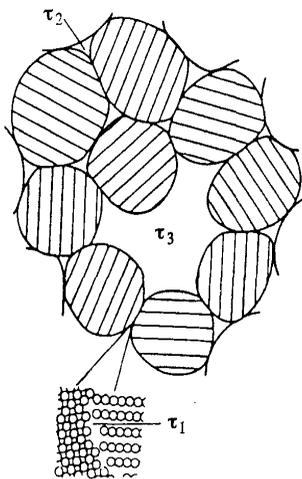


Рис. 1 – Двумерная модель нано-кристаллического материала [7]: вакансия в границе раздела (время жизни позитрона  $\tau_1$ ); вакансионный агломерат в тройном стыке кристаллитов ( $\tau_2$ ) и большая яма (поры) ( $\tau_3$ ) на месте отсутствующего кристаллита.

мполитах горячего прессования с SPS электромеханической консолидацией.

С позиции энергоэффективного преодоления (уменьшения) пористости наибольший интерес представляет минимизация потенциала зажигания электрических разрядов в газовых средах пор спекаемого под давлением консолидата. При данном рабочем электрическом напряжении токоподвода это повысит пробойные возможности и уменьшит число пор, обойденных прямым электроразрядным действием.

В теоретических представлениях электромеханических процессов [9] с увеличением концентрации электрополяризуемых линий в зонах обтекания электрическим током пор с большим поперечным размером формируются и большие градиенты температур (рис. 2, а). Это не только «подталкивает» структурные вакансии к диффундированию из окружения больших пор в сторону меньших, выравнивая плотность электрического поля вместе с увеличением за счет размерного стеснения больших пор числа и (или) размера меньших пор, как отмечается в [9], но и облегчает тем самым условия их электроразрядного преодоления в ходе электромеханической консолидации (рис. 2, б).

Рольевые функции искровых разрядов в этом процессе связываются со скольжением по межзеренным границам [5] и действием непосредственно в промежутках пористости. Работу электрических разрядов в газовых порах вдоль границ зерен, спекаемых по методу SPS порошков, подтверждает обязанная своим генезисом, прежде всего электроразрядным эффектам, как показано в [10], экспансия семикарбида вольфрама в вольфрамочероугольных инструментальных композитах горячего прессования с SPS электромеханической консолидацией.

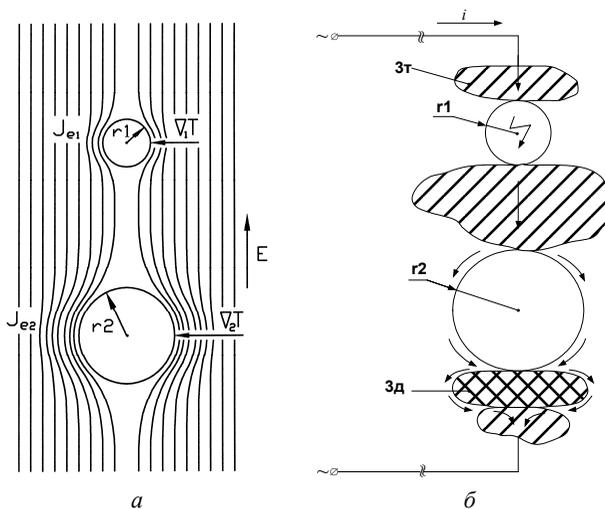


Рис. 2 – Изменение плотности тока ( $J_{e2} > J_{e1}$ ) и градиента температуры ( $\nabla_2 T > \nabla_1 T$ ) при наличии разноразмерных пор ( $r_1 < r_2$ ): *a* – в электрическом поле некоторой напряженности  $E$  [9]; *б* – схематическая маршрутизация электрического тока ( $i$ ) в порошковой композиции с токопроводными (3т) и диэлектрическими (3д) зернами.

В экспериментальной физике испытывающих управляемое давление однокомпонентных газовых сред известны минимумы  $U_{np\ min}$  потенциала  $U_{np}$  зажигания в них электрических разрядов, следующие из экстремальных кривых Пашена [11]. В соответствии с отображаемым этими кривыми законом Пашена  $U_{np\ min} = const$  для данной газовой среды соответствует некоторому однозначно определенному постоянству произведения  $P \cdot h = (P \cdot h)_{opt}$  величин исходного давления  $P$  и разрядного промежутка  $h$ , рис. 3, *a*.

По закону Пашена оптимальное значение  $P_{opt}$  исходного давления  $P$  (Па), при котором для известной величины разрядного промежутка  $h$  (м) потенциал зажигания разряда (напряжение электроразрядного пробоя данного промежутка) в идеально однокомпонентной газовой среде примет минимально возможное значение  $U_{np} = U_{np\ min}$ , наиболее выгодное (оптимальное) с точки зрения энергопотребления, определится из выражения:

$$P_{opt} = (P \cdot h)_{opt} / h. \quad (1)$$

Известен также эффект Пеннинга [14], состоящий в дополнительном понижении минимумов Пашена в компаундных газовых структурах с присутствием примесей, потенциал энергии возбуждения метастабильного уровня которых ниже, чем в чистом основном газе (рис. 3, *б*), в том числе во влажных средах с однокомпонентной газовой основой.

Тогда, исходя из определяющей роли электроразрядного фактора и экспериментальных закономерностей Пашена-Пеннинга, можно предположить,

что оптимальное давление прессования  $P_{opt}$  при нанопорошковой электроконсолидации, во всяком случае, в первом приближении, подчиняется более общей по сравнению с (1) зависимости вида:

$$P_{opt} = k \cdot (P \cdot h)_{opt} / h, \quad (2)$$

где  $h$  – размерная характеристика нанопорошка, эквивалентная ожиданию наибольшего разрядного промежутка (диаметр зерна в сферической модели);  $k$  – поправочный коэффициент, учитывающий геометрию промежутка в порах, состав и теплофизический фон газовой среды в них; в общем случае  $k > 0$  и, в частности, с повышенным ожиданием  $0 < k < 1$  в нормально влажных исходных средах реального компактирования.

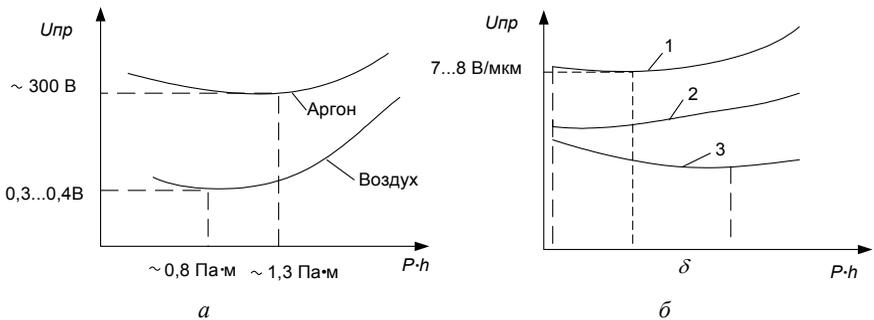


Рис. 3 – Кривые: а – экспериментальные кривые Пашена для аргона [12] и воздуха [13]; б – эффект Пеннинга – снижение потенциала зажигания разряда в газе (кривая 3), обусловленное присутствием в нем примеси другого газа, для инициирования разряда в котором достаточен потенциал ниже (кривая 2) энергии возбуждения метастабильного уровня чистого основного газа (кривая 1) [12].

**Результаты расчета реляционной базы данных.** В табл. 1 приведены рассчитанные по (2) значения  $P_{opt}$  в системе условий, идентичных установлению кривой Пашена для возбуждения электрического разряда в воздушной среде (рис. 3, а), в нанометрическом диапазоне средних размеров зерен  $h$  исходных порошков в технологиях SPS.

Таблица 1 – Расчетное давление при SPS с подавлением воздушных пор ( $k = 1$ )

$h$ , нм	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$P_{opt}$ , МПа	80	40	27	20	16	13	11	10	9	8

Представленные в табл. 1 расчетные данные численно отображают гиперболический характер зависимости  $P_{opt} = P_{opt}(h)$ , следующий из равенства  $(P \cdot h)_{opt} = const$ , с асимптотическим приближением кривой  $P_{opt} = P_{opt}(h)$  к осям абсцисс ( $h$ ) и ординат ( $P_{opt}$ ) соответственно с ростом и уменьшением  $h$ .

**Сопоставление расчетов по модели с практическим опытом.** Апри-

орно можно утверждать, что необходимой доказательной основой справедливости гипотезы об определенном подчинении оптимального давления спарк-плазменной электроконсолидации закону Пашена является относительная близость (в пределах одного порядка) величин расчетного давления при  $k = 1$  (с использованием кривой Пашена для доминирующего газа среды спекания) и из реальной опытно-экспериментальной оптимизационной практики SPS. Доказательной основой справедливости гипотезы о пропорциональном подчинении – относительная близость величин  $k$  для соотношений

$$k = P_{opt} \cdot h / (P \cdot h)_{opt},$$

полученных с использованием  $(P \cdot h)_{opt}$  Пашена и данных о  $P_{opt}$  или диапазоне изменения  $P_{opt}$  в практике работы с порошком данной зернистости или смесью порошков разных зернистостей в одной и той же среде спекания.

В поддержанном давлением электроконсолидационном опыте [15] получения высокоплотных тонкодисперсных  $Al_2O_3 - WC$  композитов исходные порошки имели зернистость 40 – 70 нм ( $WC$ ) и 60 – 80 нм ( $Al_2O_3$ ), а диапазон давлений первых ступеней цикла подавления пористости – 7,5 ... 25 МПа.

Из разрешения закона Пашена для газовой среды (в приближенной оценке  $U_{pmin} = 0,35$  В при  $(P \cdot h)_{opt} = 0,8$  Па·м, рис. 3, а) относительно определяющей по [7] максимальную пористость консолидата реальной практики [15] исходных зернистостей спекаемых тугоплавких порошков в диапазоне от 40 до 80 нм следует диапазон  $P_{opt}$  от 10 до 20 МПа (табл. 1), с последовательной ориентацией на преимущественное подавление от более крупных исходных пор, максимальных для зернистости 80 нм (расчетное значение  $P_{opt} = 10$  МПа), к максимальным для зернистости 40 нм (расчетное значение  $P_{opt} = 20$  МПа).

Из сопоставления установленных опытно-экспериментальным путем и из  $(P \cdot h)_{opt}$  по Пашену значений давлений на границах диапазона исходной максимальной пористости, соответствующего по [7] диапазону исходной зернистости спекаемых порошков, следует, что теоретический диапазон является внутренним по отношению к опытному с отклонениями каждой границы опытного диапазона на 25 %. При этом коэффициент  $k$  соответственно изменяется от  $k = 0,75$  (нижняя граница) до  $k = 1,25$  (верхняя граница). Таким образом, обеспечивается повышенная надежность формирования оптимальных условий электроразрядного подавления пористости в условиях реальной форморазмерной статистики максимальных пор, в контексте [7] приближенно описываемых сферической моделью зерна. При этом условия выдержки  $P_{opt} = 25$  МПа по циклограмме SPS [15], по-видимому, уже соответствуют запуску как преобладающего механизма деформационной реструктуризации спекаемого компаунда с уплотнительным скольжением границ смежных зерен друг относительно друга.

Таким образом, следует признать весьма высокой, и притом симметричной, сходимость расчетного (по предложенной модели) и экспериментального (по [15]) диапазонов  $P_{opt}$ .

**Направления дальнейших исследований.** Во-первых, следует провести расширенную экспериментальную проверку достоверности предложенной расчетной схемы определения рационального (оптимального по потенциалу зажигания электрических разрядов) давления при SPS с подавлением пористости на начальной стадии объединенного цикла электроспекания и горячего прессования. При этом необходимо учитывать, что реальная экспериментальная практика электрического разряда при SPS, с криволинейностью геометрии промежутка в порах, весьма далека от условий получения кривых Пашена (с плоскими электродами и однородным электрическим полем). Необходимо также принимать во внимание известную из фундаментального источника [12] приближенность закона Пашена и тем большую его точность, чем меньше  $P$  и  $h$ , и, в то же время (по некоторым экспериментальным данным), значительные искажения начального участка кривой Пашена при пробое малых разрядных промежутков (при одновременно малых  $P \cdot h$  и  $h$ ), объясняемые [16] поддержанным туннелированием *эфф*фектом Шоттки.

Во-вторых, предложенная расчетная схема нуждается в специальной адаптации к промежуточным и, особенно, заключительным стадиям горячего прессования в цикле SPS, когда размер текущих наиболее крупных пор, требующих предпочтительной атаки электрическим разрядом, становится все более неочевидным.

В-третьих, следует принципиально определиться с технической и экономической целесообразностью использования в технологиях SPS порошков со средним размером зерна менее 20 нм, в рамках предложенной расчетной схемы эффективного подавления пористости требующих приложения начальных давлений прессования свыше 40 МПа, то есть на уровне, близком к максимальной практике эксплуатации традиционно графитовых камер прессования и спекания. В этом рассмотрении не следует исключать разработки новых конструкторско-технологических схем механической активации твердотельной консолидации порошков по методу SPS, в том числе на усовершенствованных принципах создания условий консолидату для внутреннего пластического деформирования и интенсификации такого деформирования.

**Выводы.** Таким образом, предложенный приближенный расчетный подход к определению исходных давлений прессования на начальных этапах реализации полного технологического цикла нанопорошковой электроконсолидации по методу SPS согласуется с рассмотренной практикой и предложенная расчетная реляционная база расчетных данных по давлению в нанометрическом диапазоне средних размеров зерен исходных порошков рекомендуется к применению в опытно-экспериментальных разработках промышленных технологий SPS.

Дальнейшие исследования в данном направлении перспективны и заслуживают организационно-технической и финансовой поддержки.

Работа выполнена по комплексному проекту ХНУ, НТУ «ХПИ», УГАЖТ (г. Харьков) и СГУ (г. Сумы) «Многокомпонентные композиционные материалы и покрытия на основе наносоединений тугоплавких металлов», номер государственной регистрации 0113U001340.

**Список литературы:** 1. Янагида Х. Тонкая техническая керамика / Пер. с яп. – М.: Металлургия, 1986. – 279 с. 2. Groza J. R. Nanocrystalline Powder Consolidation Methods // Nanostructured Materials: Processing, Properties and Potential Applications / Ed. by C.C. Koch. – Norwich, N.Y.,

U.S.A.: Noyes Publications, William Andrew Publishing, 2002. – PP. 115 – 178. **3.** Tokita M. Recent Advanced Spark Plasma Sintering (SPS): Technology, Systems and Applications in Japan [электронный ресурс]: доклад [тезисы] // 2-я международная школа-семинар «Перспективные технологии консолидации материалов с применением электромагнитных полей»; г. Москва, Нац. исслед. ядер. ун-т «МИФИ», ЛЭМПИМ, 20 – 23 мая 2013 г. – М.: Нац. исслед. ядер. ун-т «МИФИ», 2013. – Электрон. дан. (65 с.: 9987534 байт). – Режим доступа: <http://lemc-lab.mephi.ru/content/file/news/tokita.pdf>. Дата обращения: 01.06.2015. **4.** Olevsky E. A. Fundamental Aspects of Spark Plasma Sintering: I. Experimental Analysis of Scalability / E.A. Olevsky, W.L. Bradbury, C.D. Haines, D.G. Martin, and D. Kapoor // J. of the American Ceramic Society. – Vol. 95, Iss. 8, Aug. 2012. – PP. 2406 – 2413. **5.** Berhard F. Dense nanostructured materials obtained by Spark Plasma Sintering and Field Activated Pressure Assisted Synthesis starting from mechanically activated powder mixtures / F. Berhard, S. Le Gallet, N. Spinassou, S. Paris, E. Gaffet, J. N. Woolman and Z.A. Munir // Science of Sintering. – Vol. 36 (2004). – PP. 155 – 164. **6.** Лаповок В.Н., Новиков В.И., Свирида С.В., Семенухин А.Н., Трусов Л.И. Образование неравновесных вакансий при рекристаллизации ультрадисперсного порошка никеля // ФТТ. – Т. 25 (1983). – Вып. 6. – С. 1846 – 1848. **7.** Schaefer H.-E. Interfaces and Physical Properties of Nanostructured Solids // Mechanical Properties and Deformation Behavior of Materials Having Ultrafine Microstructure. of Materials Having Ultrafine Microstructure: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Mechanical Properties and Deformation Behavior of Materials Having Ultrafine Microstructure. Porto Novo, Portugal. June 28 – July 10, 1992. / Ed. by M. Nastasi, Don M. Parkin, and H. Gleiter. – NATO ASI Series. Series E: Applied Sciences. – Vol. 233. – PP. 81 – 106. **8.** Wurschum R. Interfacial free volumes in ultra-fine grained metals of amorphous alloys / R. Wurschum, W. Greiner, R.Z. Valiev, M. Rapp, W. Sigle, O. Schneeweiss, and H.-E. Schaefer // Scripta Met. et Mater. – Vol. 25 (1991). – PP. 2451 – 2456. **9.** Райченко А.И. Основы процесса спекания порошков пропусканием электрического тока. – М.: Металлургия, 1987. – 128 с. **10.** Геворкян Э.С., Гуцаленко Ю.Г. Генезис экспансии семикарбида вольфрама в вольфрамокерамических инструментальных композитах горячего прессования с электроконсолидацией нанопорошков на монокарбидной основе // Вісн. Нац. техн. ун-ту «Харк. політехн. ін-т». Темат. вип.: Технології в машинобудуванні. – 2010. – № 53. – С. 19 – 30. **11.** Paschen F. Ueber die zum Funkenübergang in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure beiverschiedenen Drucken erforderliche Potentialdifferenz // Annalen der Physik und Chemie. 1889. Nr. 5 (273). SS. 69-96. **12.** Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 928 с. **13.** Dakin T.W. Phenomenes disruptifs dans les gaz en chanep uniforme. Courdes de Pashen pour l'azote, l'air et l'hexafluore de soufre / T.W. Dakin, G. Luxa, G. Opperman, J. Vigreux, G. Wind, H. Winkelnkemper // Electra. – 1974. – N. 32. – PP. 61 – 82. **14.** Penning, F. M. Electrical Discharges in Gases. New York: Macmillan, 1957. – 118 p. **15.** Геворкян Э.С., Гуцаленко Ю.Г. Подбор оптимальных режимов горячего прессования нанопорошковых смесей Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-WC для инструментальных применений // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №5/1(47). – С. 13 – 18. **16.** Зотов В. М., Зотов Н.М. Основные причины возникновения разряда в малых газовых промежутках // Журн. техн. физики. – Т. 50 (1980). – Вып. 4. – С. 716 – 719.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Yanagida, H. *Tonkaja tehničeskaja keramika. Per. s jap.* Moscow: Metallurgija, 1986. Print. **2.** Groza, J. R. "Nanocrystalline Powder Consolidation Methods." *Nanostructured Materials: Processing, Properties and Potential Applications*. Ed. C. C. Koch. Norwich, N.Y., U.S.A.: Noyes Publications, William Andrew Publishing, 2002. 115–178. Print. **3.** Tokita, M. "Recent Advanced Spark Plasma sintering is (SPS): Technology, Systems and Applications in Japan." *Laboratory of Electromagnetic Field-Assisted Methods for Processing of Novel Materials*. National Research Nuclear University "MIPhI", 3 June 2013. Web. 1 June 2015. <<http://lemc-lab.mephi.ru/content/file/news/tokita.pdf>>. **4.** Olevsky, E. A., et al. "Fundamental Aspects of Spark Plasma Sintering: I. Experimental Analysis of Scalability." *J. of the American Ceramic Society*. Vol. 95, Iss. 8. 2406–2413. Print. **5.** Berhard, F., et al. "Dense nanostructured materials obtained by Spark Plasma sintering is and Field Activated Pressure Assisted Synthesis starting from mechanically activated powder mixtures." *Science of Sintering*. Vol. 36. 2004. 155–164. Print. **6.** Lapovok, V. N., et al. "Образование неравновесных вакансий при рекристаллизации ультрадисперсного порошка никеля." *Fizika tverdogo tela*. Vol. 25. No. 6. 1983. 1846–1848. Print. **7.** Schaefer, H.-E. "Interfaces and Physical Properties of Nanostructured Solids." *Mechanical Properties and Deformation Behavior of Materials Having Ultrafine Microstructure. of Materials Having Ultrafine Microstructure*. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Mechanical Properties and Deformation Behavior of Materials Having Ultrafine Microstructure. Porto Novo, Portugal. 1992. Ed. M. Nastasi, Don M. Parkin, and H. Gleiter. NATO ASI Series. Series E: Applied Sciences. Vol. 233. 81–106. Print. **8.** Wurschum, R., et al. "Interfacial free volumes in ultra-fine grained metals of amorphous alloys." *Scripta Met. et Mater.*

Vol. 25. 1991. 2451–2456 Print. 9. Rajchenko, A. I. *Osnovy processa spekanija poroshkov propuskaniem elektricheskogo toka*. Moscow: Metallurgija, 1987. Print. 10. Gevorkjan, E. S., and Yu. G. Gucalenko. "Genezis ekspansii semikarbida vol'frama v vol'framokeramicheskikh instrumental'nykh kompozitah gorjachego pressovanija s elektrokonsolidaciej nanoporoshkov na monokarbidnoj osnove." *Visnyk NTU "KhPI". Temat. vyp.: Tehnologii v mashynobuduvanni*. No. 53. 2010. 19–30. Print. 11. Paschen, F. "Ueber die zum Funkenübergang in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure beiverschiedenen Drucken erforderliche Potentialdifferenz." *Annalen der Physik und Chemie*. No. 5 (273). 1889. 69–96. Print. 12. *Fi-zicheskiy enciklopedicheskij slovar*. Ed. A. M. Prohorov. Moscow: Soveckaja enciklopedija, 1983. Print. 13. Dakin, T. W., et al. "Phenomenes disruptifs dans les gaz en chanep uniforme. Courdes de Pashen pour l'azote, l'air et l'hexafluorure de soufre." *Electra*. No. 32. 1974. 61–82. Print. 14. Penning, F. M. *Electrical Discharges in Gases*. New York: Macmillan, 1957. Print. 15. Gevorkjan, E. S., and Yu. G. Gucalenko. "Podbor optimal'nyh rezhimovgorjachego pressovanija nanoporoshkovykh smesej  $Al_2O_3-WC$  dlja instrumental'nykh primenenij." *Vostochno-evropejskij zhurnal peredovykh tehnologij*. No. 5/1 (47). 2010. 13–18. Print. 16. Zotov, V. M., and N. M. Zotov. "Osnovnye prichiny voznikovenija razriada v malyh gazovykh promezhutkah". *Zhurnal tehnichejskoj fiziki*. Vol. 50. No. 4. 1980. 716–719. Print.

*Поступила (received) 15.06.2015*

УДК 621.43.068.4

**А.Н. КОНДРАТЕНКО**, канд. техн. наук, ст. преп., НУГЗУ, Харьков

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ФИЛЬТРА ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ДИЗЕЛЯ. ЧАСТЬ 4: ВРЕМЕННОЙ КОЭФФИЦИЕНТ**

Описана математическая модель гидравлического сопротивления (ГС) фильтра твердых частиц (ФТЧ) дизеля в реальных условиях эксплуатации. Модель построена на основе расходной характеристики одного модуля ФТЧ, экспериментально полученной при постоянной температуре текучей среды, и данных стендовых испытаний автотракторного дизеля 2410,5/12, оснащенного полноразмерным ФТЧ. Модель позволяет учесть ряд факторов, характеризующих условия эксплуатации ФТЧ в составе выпускной системы этого дизеля путем введения соответствующих коэффициентов. В данной части работы описан физический смысл и оценены значения временного коэффициента модели, позволяющего учесть зависимость ГС ФТЧ от времени работы дизеля на стационарном режиме, то есть динамику засорения ФТЧ.

**Ключевые слова:** дизель, фильтр твердых частиц, гидравлическое сопротивление, математическая модель.

**Введение.** *Научно-исследовательские работы* (НИР), направленные на создание принципиально новых и совершенствование известных конструкций *фильтров твердых частиц* (ФТЧ), как показано в исследовании [1], являются актуальными и экономически обоснованными.

**Анализ литературных источников.** В отделе *поршневых энергоустановок* (ПЭУ) *Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины* (ИПМаш НАНУ) разработан *фильтрующий элемент* (ФЭ) для ФТЧ новой конструкции, описанный в предыдущих частях исследования [1 – 3]. В первой части исследования описаны результаты физического моделирования процесса движения *текучей среды* (ТС) в *прозрачном макете модуля* (ПММ) такого ФЭ на *безмоторной исследовательской установке* (БИУ) [1].

© А. Н. Кондратенко, 2015

Там же описаны результаты экспериментального исследования действующего макетного образца (ДМЦ) ФЭ с насыпкой из природного цеолита (ПЦ) в сетчатых кассетах на моторном испытательном стенде (МИС) лаборатории отдела ПЭУ ИПМаш НАНУ, оснащенном автотракторным дизелем Д21А1 (2Ч10,5/12). Эксперименты на МИС состояли из четырех этапов, каждый из которых проведен с целью определения физического смысла и значений соответствующих коэффициентов в формуле (1) работы [1]. В первой части исследования описаны физический смысл и значения настроечного коэффициента  $k_0$ , позволяющего связать результаты исследований на БИУ и МИС, а также учесть тип конструктивного исполнения модуля ФЭ [1]. Во второй части описаны физический смысл и значения температурного коэффициента  $k_T$ , позволяющего учесть изменение температуры ТС на входе в ФТЧ по рабочим режимам дизеля [2]. В третьей части исследования пояснен физический смысл и указаны значения компоновочного коэффициента  $k_L$ , позволяющего учесть место расположения ФТЧ вдоль выпускного тракта дизеля и соответствующего ему изменения уровня максимальной температуры ТС на входе в корпус ФТЧ [3]. В данной части исследования будет определен временной коэффициент  $k_\tau$ , с помощью которого в модели учитывается время работы дизеля на стационарном режиме работы.

**Цель и постановка задач исследования** представлены в первой его части [1]. В данной части исследования отражены подходы к решению шестой задачи. Там же описана сама математическая модель гидравлического сопротивления ФТЧ дизеля в реальных условиях эксплуатации.

**Определение временного коэффициента.** Он определяется по аналогии с остальными коэффициентами описываемой модели, а именно: соотношением значений ГС разработанного ФТЧ, экспериментально полученными на МИС, соответственно в начале работы ФТЧ с незаполненным (пустым, очищенным) ФЭ (в начальный момент межрегенерационного периода, то есть при наработке дизелем времени  $\tau_{reg} = 0$ ) и в текущий момент времени с  $\tau_{reg} \neq 0$  (вплоть до окончания межрегенерационного периода работы ФТЧ, то есть непосредственно перед началом процесса регенерации I рода [4, 11]). Это выражается следующей формулой.

$$k_\tau = f(\tau_M, G_{\text{ТЧ}}(N_{ei}), K_{\text{ЭО}}(G_{\text{ТЧ}})(N_{ei}), WF_i) = \Delta P_{\text{ФТЧ}}(\tau_{reg} = 0) / \Delta P_{\text{ФТЧ}}(\tau_{reg} \neq 0), \quad (1)$$

где индексом  $i$  обозначен режим работы дизеля;  $\tau_M$  – время его работы на режиме с максимальным массовым выбросом ТЧ (то есть на режиме с  $M_{\text{крmax}}$ );  $G_{\text{ТЧ}}$  – массовый выброс ТЧ с ОГ дизеля;  $K_{\text{ЭО}}(G_{\text{ТЧ}})$  – коэффициент эффективности очистки ФТЧ потока ОГ от ТЧ;  $N_e$  – эффективная мощность дизеля;  $M_{\text{кр}}$  – его крутящий момент;  $n_{\text{кв}}$  – частота вращения коленчатого вала дизеля;  $WF$  – весовой фактор  $i$ -го режима работы дизеля в выбранной модели его эксплуатации.

Межрегенерационный период работы ФТЧ  $\tau_{regI}$  – это продолжительность работы дизеля (в единицах времени или километража пробега *автотран-*

спортного средства (АТС), в единицах количества использованного топлива, единицах выработанной энергии или наработка в моточасах) от момента, когда можно считать ФЭ ФТЧ полностью незаполненным  $\tau_{reg} = 0$  (пустым, очищенным от ТЧ), до момента, когда можно условно считать, что в/для ФТЧ необходимо осуществить процесс регенерации I рода и  $\tau_{reg} = \tau_{regI}$ .

*Регенерация I рода* – это периодический процесс очистки ФЭ ФТЧ от накопленных в процессе эксплуатации окисляемых фракций ТЧ (несгоревшие углеводороды топлива и масла, сажевые ядра), являющийся обязательной частью жизненного цикла ФТЧ. *Регенерация II рода* – это процесс очистки ФЭ ФТЧ от накопленных в процессе эксплуатации неокисляемых при температурах до 1000 °С фракций ТЧ (продукты износа деталей дизеля, минеральная пыль воздуха свежего заряда, зола от сгорания присадок топлива и масла) и продуктов коксования окисляемых фракций ТЧ. Этот процесс может быть не периодическим и не входить в жизненный цикл ФТЧ. Главным признаком необходимости проведения регенерации I рода является достижение ГС ФТЧ определенного и наперед заданного уровня, обычно не превышающего 10 ... .. 25 кПа. То есть изменение ГС ФТЧ в процессе эксплуатации является косвенным показателем динамики его засорения [4, 11].

При этом рассматриваемый в данной части исследования временной коэффициент модели  $k_\tau$  отражает только учет изменения ГС ФТЧ, вызванного теми же причинами, что и необходимость осуществления регенерации I рода. Физический смысл и подход к определению такого коэффициента для процесса регенерации II рода не изменится, однако экспериментальных данных из этой серии экспериментов недостаточно для определения его значений.

Очевидным является то, что для разных моделей эксплуатации дизеля, а значит и ФТЧ, динамика его засорения ТЧ будет различной. Это обусловлено тем, что и  $G_{TЧ}$ , и  $K_{ЭО}(G_{TЧ})$  определяют суммарное массовое содержание ТЧ в ФЭ и зависят от показателей режима работы дизеля –  $M_{кр}$  и  $n_{кр}$ . При этом, предельный уровень ГС ФТЧ определенной конструкции однозначно соответствует предельному значению содержания ТЧ в его ФЭ, то есть его абсолютной (в кг или г ТЧ) или удельной (отнесенной к единице объема ФЭ, в кг или г ТЧ на м<sup>3</sup>) сажеемости.

В самих же моделях эксплуатации учитываются разные, наиболее характерные или вероятные, режимы работы дизеля, а учитываемым режимам присваиваются соответствующие весовые коэффициенты  $WF_i$ . Дизелям различного назначения и различного конструктивного исполнения можно поставить в соответствие разные модели эксплуатации. Кроме того, все модели эксплуатации делят на стационарные и нестационарные, а также на дискретные и континуальные [5 – 7]. Примерами *дискретных стационарных моделей эксплуатации* служат 13-ти и 8-ми режимные циклы, используемые для определения среднеэксплуатационного массового выброса ТЧ с ОГ соответственно транспортных и тракторных дизелей при оценке соответствия дизеля требованиям законодательно установленных норм токсичности Правил ЕЭК ООН №№ 49 и 96 [8]. В табл. 1 приведены параметры режимов этих испытательных циклов. Для построения данной математической модели в определении временного коэффициента применяются именно эти модели эксплуатации,

поскольку они являются испытательными циклами, на основе которых строится методика экспериментального определения среднеэксплуатационных значений массового выброса ТЧ с ОГ автотракторных дизелей для определения соответствия этих дизелей законодательно установленным на территории стран Европейского союза (уровня EURO VI), Украины (уровня EURO III) и Российской Федерации (уровня EURO IV) нормам токсичности ОГ. В чисто научных целях, естественно, уместно было бы использовать континуальные нестационарные модели эксплуатации, что, однако, потребовало бы проведения более объемных и сложных экспериментальных исследований.

Таблица 1 – Параметры режимов испытательных циклов и их значения для дизеля 2Ч10,5/12 [8]

<i>i</i>	$n_{квi}, \text{мин}^{-1}$		$M_{крi}, \text{Н} \cdot \text{м}$		$WF_i$
	обозначение	значение	обозначение, %	значение	
13-режимный цикл (Пр. ЕЭК ООН № 49)					
1	min х.х.	800	0	0	0,25/3
2	$M_{крmax}$	1200	2	2,2	0,08
3	$M_{крmax}$	1200	25	27,5	0,08
4	$M_{крmax}$	1200	50	55	0,08
5	$M_{крmax}$	1200	75	82,5	0,08
6	$M_{крmax}$	1200	100	110	0,25
7	min х.х.	800	0	0	0,25/3
8	ном.	1800	100	95	0,10
9	ном.	1800	75	71,3	0,02
10	ном.	1800	50	47,5	0,02
11	ном.	1800	25	23,8	0,02
12	ном.	1800	2	1,9	0,02
13	min х.х.	800	0	0	0,25/3
8-режимный цикл (Пр. ЕЭК ООН № 96)					
1	ном.	1800	100	95	0,15
2	ном.	1800	75	71	0,15
3	ном.	1800	50	57,5	0,15
4	ном.	1800	10	9,5	0,10
5	пром.	1200	100	110	0,10
6	пром.	1200	75	82,5	0,10
7	пром.	1200	50	55	0,10
8	min х.х.	800	–	0	0,15

Для экспериментального определения динамики засорения ФТЧ, разработанного в отделе ПЭУ ИПМаш НАНУ, был спланирован и проведен этап IV моторных исследований на МИС его действующего образца – ДМЦ ФЭ. В ходе него ДМЦ ФЭ устанавливался в макетодерживающую вставку (МВ) выпускной системы МИС в строго вертикальном положении на расстоянии

$L_{\text{вып}} = 5,0$  м от фланца выпускного коллектора по длине выпускного тракта дизеля. Предварительно экспериментальный образец разобран и очищен от накопленных в ходе предыдущих этапов исследования ТЧ путем замены насыпки из ПЦ и промывки металлических конструкций – кожухов и сетчатых касет [9, 10]. Программа данного этапа исследования предполагала работу дизеля 2Ч10,5/12 на МИС, выпускная система которого оснащена МВ с ДМЦ ФЭ в ней, на характерном режиме и запланированное время. В качестве характерного режима работы выбран режим максимального крутящего момента ( $n_{\text{кв}} = 1200 \text{ мин}^{-1}$ ,  $M_{\text{кр}} = M_{\text{крmax}} = 110 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ), на нём  $G_{\text{ТЧ}} = \text{max}$  и  $t_{\text{ФТЧex}} = t_{\text{ФТЧexmax}} = 355^\circ \text{С}$ . Запланированная длительность исследования ограничивалась 12 часами (полторы рабочие смены) или выходом ГС экспериментального образца за пределы измерительной шкалы дифманометра МИС (15 кПа). Частота измерений параметров, формирующих характеристики работы ДМЦ ФЭ, составляла 30 мин. Провести IV этап испытаний в запланированном объеме не удалось, так как ГС экспериментального образца  $\Delta P_{\text{ФТЧ}}$  вышло за пределы измерительной шкалы дифманометра МИС при наработке дизеля 2Ч10,5/12 на режиме с  $M_{\text{крmax}}$   $\tau_M = 8$  ч. Сокращению этого времени

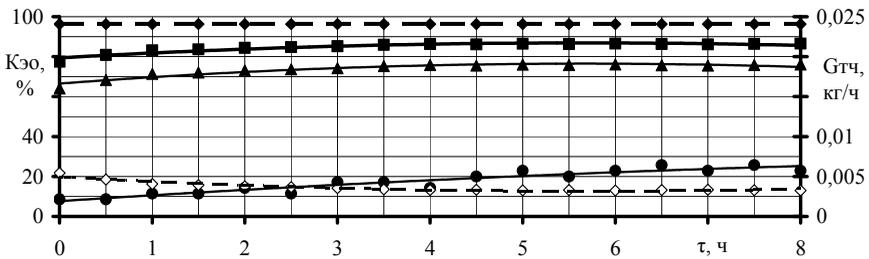


Рис. 1 – Зависимости массового выброса ТЧ с потоком ОГ и параметров работы ДМЦ ФЭ от времени работы дизеля 2Ч10,5/12 на режиме с  $M_{\text{крmax}}$  :

■ –  $K_{эо}(G_{\text{ТЧ}})$ ; ▲ –  $K_{эо}(N_D)$ ; ● –  $K_{эо}(C_{SH})$ ; ◆ –  $G_{\text{ТЧ}}_{\text{двс}}$ ; ◇ –  $G_{\text{ТЧ}}_{\text{фтч}}$ .

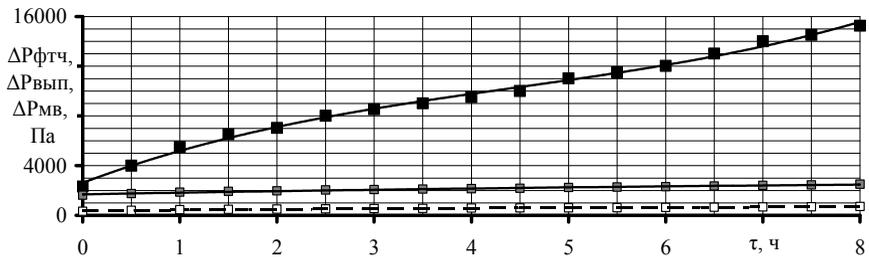


Рис. 2 – Зависимости ГС ДМЦ ФЭ и других элементов выпускной системы МИС от времени работы дизеля 2Ч10,5/12 на режиме с  $M_{\text{крmax}}$  :

■ –  $\Delta P_{\text{ФТЧ}}$ ; ■ –  $\Delta P_{\text{вып}}$ ; □ –  $\Delta P_{\text{МВ}}$ .

способствовал также масштаб ДМЦ ФЭ, содержащий 20 модулей, что со-

ставляет 2/3 от минимально необходимого количества, рекомендуемого для дизеля с рабочим объемом 2,0 дм<sup>3</sup> (для дизеля 2Ч10,5/12). Результаты исследования представлены на рис. 1 и 2, описаны методом линейной регрессии [1].

Как видно на рис. 1,  $G_{TЧ}$  с потоком частично очищенных ОГ дизеля 2Ч10,5/12 ( $G_{TЧ}$  с потоком неочищенных ОГ не определялся, а принят для сравнения по результатам предыдущего этапа исследований) за время испытаний монотонно убывает на 40,7 %, асимптотически приближаясь к значению 3,2 г/ч. Это происходит за счет такого же поведения коэффициента ослабления светового потока в ОГ  $N_D$  (показателя дымности ОГ) – убывает на 33,3 %, а также для  $C_{СН}$  – на 15,6 %.  $K_{ЭО}(G_{TЧ})$  монотонно увеличивается на 15,8 %, асимптотически приближаясь к значению 86,5 %. Это объясняется образованием первичного слоя адсорбированных ТЧ на поверхностях частиц насыпки из ПЦ, сетчатых кассет и опескоструенного стального листового проката. Наряду с этим, по всей видимости, сказывается сужение проходов между частицами насыпки и между проволокой стальной сетки, что способствует фильтрации крупных конгломератов ТЧ и приближению адсорбционных поверхностей к линиям тока ОГ, по которым также движутся и ТЧ.

На рис. 2 видно, что ГС экспериментального образца  $\Delta P_{ФТЧ}$  нелинейно увеличивается в функции  $\tau_M$ . Вид зависимости – полином 3-ей степени, имеющий перегибы в районе 2 ч и 5 ч. Исходя из принципа работы фильтра можно предположить, что интенсивный рост ГС в диапазоне 0 – 2 ч происходит за счет образования первичного слоя адсорбированных ТЧ на поверхностях гранул насыпки, сетчатых кассет и опескоструенного листового проката. В диапазоне 2 – 5 ч рост ГС замедляется, приближаясь к линейному, что происходит по причине роста вторичного слоя адсорбированных ТЧ на первичном слое. В диапазоне 5 – 8 ч рост ГС интенсифицируется по причине сужения каналов для прохождения аэрозоля в следствие накопления ТЧ на поверхностях этих каналов.

При этом величины ГС части выпускного тракта МИС, находящейся за МВ,  $\Delta P_{вып}$  и ГС самой МВ  $\Delta P_{МВ}$  также увеличиваются, однако в существенно меньших пределах, что объясняется влиянием на эти величины только температуры ОГ на входе в ФТЧ  $t_{ФТЧвх}$ , которая также нелинейно увеличивалась в ходе эксперимента. Величины перепада температур на ФТЧ  $\Delta t_{ФТЧ}$  и пустой МВ  $\Delta t_{МВ}$  имеют подобный характер изменения по времени  $\tau_M$  – нелинейно увеличиваются, что происходит вследствие повышения  $\Delta P_{ФТЧ}$ .

Также на основе результатов проведения IV этапа моторных исследований можно оценить в первом приближении сажеемкость разработанного ФЭ  $M_{\Sigma S}$  и его межрегенерационный период работы  $\tau_{regl}$ . Первичная оценка выполнена и представлена в исследовании [11].

Экспериментально определенные значения временного коэффициента  $k_\tau$  в зависимости от  $\tau_M$  описываются формулой (2) и представлены на рис. 3:

$$k_\tau(\tau_M) = 1,544 \cdot 10^{-2} \cdot \tau_M^3 - 0,208 \cdot \tau_M^2 + 1,394 \cdot \tau_M + 1,0; R^2 = 0,99546. \quad (2)$$

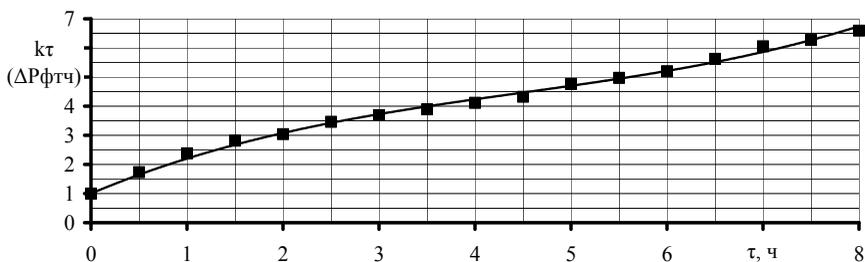


Рис. 3 – Зависимость коэффициента  $k_\tau$  от времени работы  $\tau_M$  дизеля 2Ч10,5/12 на режиме с  $M_{кр\max}$ .

У режимных и конструктивных факторов, для которых экспериментально исследовалось влияние на рабочие характеристики и которые были использованы для построения математической модели ГС ФТЧ дизеля –  $g_{m.ОГ}$ ,  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}\max}$ ,  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}}$  и  $\tau_M$ , есть прямые аналоги, удобные для восприятия конечным пользователем (потребителем). Так,  $g_{m.ОГ}$  является функцией только массового расхода ОГ  $G_{m.ОГ}$ , проходного сечения модуля ФЭ на входе  $S_{\text{вх}}$  и количества модулей в ФЭ  $z_M$ . При  $S_{\text{вх}} = \text{const}$  и  $z_M = \text{const}$ , то есть для конкретного конструктивного исполнения ФТЧ,  $G_{m.ОГ}$  изменяется по режимам работы дизеля, причем  $M_{кр}$  на него практически не оказывает никакого влияния, в отличие от  $n_{кв}$ . Величина  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}\max}$ , наблюдаемая для внешней скоростной характеристики (в.с.х.) (и для дизеля вообще) на режиме с  $M_{кр\max}$ , зависит только от  $L_{\text{вып}}$ . Величина  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}}$  при  $L_{\text{вып}} = \text{const}$  изменяется в зависимости от часового расхода топлива  $G_T$  и, следовательно, среднего эффективного давления  $P_e$  (или  $M_{кр}$ ), а от  $n_{кв}$  практически не зависит. Изменение  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}}$  по режимам в.с.х. также вызвано только изменением по ним  $P_e$ . Для характеристики холостого хода наблюдается аналогичное влияние  $G_T$  на  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}}$ . Поэтому комплекс влияющих на рабочие характеристики режимных и конструктивных факторов  $g_{m.ОГ}$ ,  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}\max}$ ,  $t_{\text{ФТЧ}_{\text{вх}}}$  и  $\tau_M$  может быть заменен аналогичным комплексом других факторов, удобных для восприятия потребителем –  $n_{кв}$ ,  $M_{кр}$ ,  $S_{\text{вх}}$ ,  $z_M$ ,  $L_{\text{вып}}$  и  $\tau_M$ . В ходе проведения данного этапа моторных испытаний ДМЦ ФЭ выявлено и описано влияние  $\tau_M$  дизеля 2Ч10,5/12 на режиме с  $M_{кр\max}$  на рабочие характеристики экспериментального образца ФТЧ, в частности на его ГС и  $K_{ЭО}(G_{ТЧ})$ . Влияние на  $k_\tau$  других величин, входящих в формулу (1) –  $G_{ТЧ}(N_{ei})$ ,  $K_{ЭО}(G_{ТЧ})(N_{ei})$ ,  $WF_i$ , будет описано в следующих частях данного исследования. По-сути, определение физического смысла и значений этого коэффициента является одной из самых сложных и комплексных задач такого рода исследований.

**Выводы.** Разработана математическая модель связи между ГС модуля

ФТЧ, досліджуемим на безмоторній установці, і повнорозмірного ФТЧ в реальних умовах експлуатації. Вона базується на експериментально отриманих даних – расходній характеристиці модуля ФЭ при постійній температурі ТС, даних моторних випробувань діючого макетного зразка ФТЧ, і використовує набір коефіцієнтів, що дозволяють урахувати вплив ряду експлуатаційних факторів на ГС.

В даній частині дослідження приведено і обґрунтовано фізичний зміст часового коефіцієнта, що дозволяє урахувати залежність ГС ФТЧ від часу роботи дизеля на стаціонарному режимі, то є динаміку засорення ФТЧ. При цьому передбачається використання дискретної моделі експлуатації дизеля – стандартизованих випробувальних циклів.

**Список літератури:** 1. *Кондратенко А.Н.* Математическа модель гідравліческогo сопротивлення фільтра твердых частиц дизеля. Часть 1: настроечный коэффициент // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2014. – № 18 (1061). – С. 68 – 80. 2. *Кондратенко А.Н.* Математическа модель гідравліческогo сопротивлення фільтра твердых частиц дизеля. Часть 2: температурный коэффициент // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2014. – № 18 (1061). – С. 80 – 89. 3. *Кондратенко А.Н.* Математическа модель гідравліческогo сопротивлення фільтра твердых частиц дизеля. Часть 3: компоновочный коэффициент // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2015. – № 6 (1115). – С. 29 – 40. 4. *Кондратенко А.Н., Строков А.П., Вамболь С.А.* Регенерация фильтров твердых частиц дизелей // Двигатели внутреннего сгорания. – 2014. – № 1. – С. 89 – 95. 5. *Парсаданов І.В.* Підвищення якості і конкурентоспроможності дизелів на основі комплексного паливно-екологічного критерію: Монографія. / І.В. Парсаданов – Харків: Видавничий центр НТУ «ХПІ», 2003. – 244 с. 6. Двигуни внутрішнього згорання: серія підручників у 6 томах. Т.5. Екологізація ДВЗ / А.П. Марченко, І.В. Парсаданов, Л.Л. Товажнянський, А.Ф. Шеховцов; за ред. А.П. Марченко та А.Ф. Шеховцова. – Харків: Прапор, 2004. – 360 с. 7. *Марков В.А.* Токсичність отработавших газов дизелей. 2-е изд. перераб. и доп. / В.А. Марков, Р.М. Баширов, И.И. Гамбитов – М.: Изд-во МГТУ им. М.Э. Баумана, 2002. – 376 с. 8. *Вамболь С.О., Строков О.П., Кондратенко О.М.* Стендові випробування автотракторного дизеля 2Ч10,5/12 за стандартизованими циклами для визначення ефективності роботи ФТЧ // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Автомобіле- та тракторобудування. – 2014. – № 10 (1053). – С. 11 – 18. 9. *Кондратенко А.Н., Строков А.П., Карасиченко Н.М.* Експериментальне дослідження діючого макета фільтруючого елемента фільтра твердых частиц дизеля с насыпкой из природного цеолита. Часть 1 // Двигуни внутрішнього згорання. – 2013. – № 1. – С. 88 – 92. 10. *Кондратенко А.Н., Строков А.П., Хожжаинов С.П.* Експериментальне дослідження діючого макета фільтруючого елемента фільтра твердых частиц дизеля с насыпкой из природного цеолита. Часть 2 // Двигуни внутрішнього згорання. – 2013. – № 2. – С. 92 – 97. 11. *Кондратенко А.Н., Строков А.П., Вамболь С.А.* Регенерация фильтра твердых частиц дизеля с насыпкой из природного цеолита // Двигатели внутреннего сгорания. – 2014. – № 2. – С. 76 – 81.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kondratenko, A. N. "Matematicheskaja model' gidravlicheskogo soprotivlenija fil'tra tverdyh chastic dizelja. Chast' 1: nastroechnyj koefficient." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. Zbirnyk naukovykh prac'. Ser.: Matematyčne modeljuvannja v tehničii ta tehnologijah. No. 18 (61). 2014. 68–80. Print. 2. Kondratenko, A. N. "Matematicheskaja model' gidravlicheskogo soprotivlenija fil'tra tverdyh chastic dizelja. Chast' 2: temperaturnyj koefficient." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. Zbirnyk naukovykh prac'. Ser.: Matematyčne modeljuvannja v tehničii ta tehnologijah. No. 18 (1061). 2014. 80–89. Print. 3. Kondratenko, A. N. "Matematicheskaja model' gidravlicheskogo soprotivlenija fil'tra tverdyh chastic dizelja. Chast' 3: komponovoechnyj koefficient." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. Zbirnyk naukovykh prac'. Ser.: Matematyčne modeljuvannja v tehničii ta tehnologijah. No. 6 (1115). 2015. 29–40. Print. 4. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and S. A. Vambol'. "Regeneracija fil'trov tverdyh chastic dizeliej." *Dvigateli vnutrennego sgoranija*. No. 1. 2014. 89–95. Print. 5. Parsadanov, I. V. *Pidvyščennja jakosti i konkurentospromozhnosti dyzeliv na osnovi kompleksnogo palynno-ekologičnogo kryteriju: Monografija*. Kharkiv: Vydavnyčyj centr NTU «KhPI», 2003. Print. 6.

Marchenko, A. P., et al. *Dvygyny vnutrishn'ogo zgorjannja: serija pidruchnykiv u 6 tomah. Vol. 5. Ekologizacija DVZ*. Ed. A. P. Marchenko, and A. F. Shehovcov. Kharkiv: Prapor, 2004. Print. 7. Markov, V. A., R. M. Bashirov and I. I. Gambitov. *Toksichnost' otrabotavshih gazov dizelej. 2<sup>nd</sup> ed. pererab. i dop.* Moscow: Izd-vo MGTO im. M. Je. Baumana, 2002. Print. 8. Vambol', S. O., O. P. Strokov and O. M. Kondratenko. "Stendovi vyprobuvannja avtotraktornogo dyzelja 2Ch10,5/12 za standartyzovany my cyklamy dlja vyznachennja efektyvnosti roboty FTCh." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. Ser.: *Avtomobile- ta traktorobuduvannja*. No. 10 (1053). 2014. 11–18. Print. 9. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and N. M. Karasichenko. "Eksperimental'noe issledovanie dejstvujushhego maketa fil'trujushhego elementa fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoy iz prirodnogo ceolita. Chast' 1." *Dvygyny vnutrishn'ogo zgorjannja*. No. 1. 2013. 88–92. Print. 10. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov S. P. Hozhainov. "Eksperimental'noe issledovanie dejstvujushhego maketa fil'trujushhego elementa fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoy iz prirodnogo ceolita. Chast' 2." *Dvygyny vnutrishn'ogo zgorjannja*. No. 2. 2013. 92–97. Print. 11. Kondratenko, A. N., A. P. Strokov and S.A. Vambol'. "Regeneracija fil'tra tverdyh chastic dizelja s nasypkoy iz prirodnogo ceolita." *Dvigateli vnutrennego sgoranija*. No. 2. 2014. 76–81. Print.

Поступила (received) 02.03.2015

УДК 517.984.4

**А.В. КОРОБСКАЯ**, канд. пед. наук, доц., ХНУ им. В. Н. Каразина,  
Харьков

## ОПЕРАТОР ДВОЙНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Изучен оператор двойного интегрирования в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D$  – прямоугольник. Осуществлено включение данного оператора в узел. Показано, что вычисление характеристической функции узла связано с решением краевой задачи Дарбу-Гурса с данными на характеристиках. Рассмотрено сужение данного оператора на подпространство функций  $f(x; y) \in L^2(D)$  вида  $f(x; y) = f(xy)$ . Оператор сужения включен в узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Оказалось, что она является интегральным оператором, который действует в этом же пространстве функций ( $f(x; y) = f(xy)$ ).

**Ключевые слова:** оператор двойного интегрирования, узел, гильбертово пространство, ортопроектор, характеристическая функция.

**Введение.** Теория модельных представлений несамосопряженных операторов является развивающимся направлением функционального анализа. Первые фундаментальные исследования в этом направлении были получены в работах *М. С. Лившица* [1; 2] по теории характеристических функций, которые впоследствии стали основным инструментом спектрального анализа несамосопряженных операторов. Предложенный *М. С. Лившицом* подход дал предпосылки к изучению различных типов операторов и их характеристических функций. Так, в контексте нашего исследования заслуживают внимания работы по теории спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов [3], треугольных и жордановых представлений линейных операторов [4], операторов в гильбертовом пространстве [5].

**Анализ исследования.** Для несамосопряженных операторов аналогом спектральных разложений являются *треугольные модели*. Основным анали-

тическим инструментом, при помощи которого строятся треугольные модели, является *характеристическая оператор-функция М. С. Лившица*. В работах М. С. Лившица [1; 2] рассмотрены несамосопряженные операторы в случае конечномерности пространства неэрмитовости, в том числе оператор интегрирования со спектром в нуле, обладающий одноклеточностью. Отметим, что оператор двойного интегрирования, представленный в работе, в данном аспекте не изучался. При этом оператор двойного интегрирования не является диссипативным и имеет бесконечномерную мнимую компоненту, а отвечающая ему характеристическая функция обладает свойством монодромности.

**Постановка задачи.** Изучить оператор двойного интегрирования вида

$$(Af)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds,$$

который действует в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D$  – прямоугольник, и сужение оператора двойного интегрирования вида

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}$$

на подпространство

$$L_0 = \left\{ f(x, y) \in L^2(D) : f(x, y) = f(xy) \right\}.$$

Осуществить включение данных операторов в узел, описать параметры узла, вычислить характеристические функции узлов.

**Метод вычисления.** Рассмотрим оператор  $A : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ , где

$$D = [0, a] \times [0, b], \quad 0 < a, b < \infty,$$

$$L^2(D) = \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R}^2 : \iint_D |f(x, y)|^2 dx dy < \infty \right\},$$

$$(Af)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds. \quad (1)$$

Найдем к оператору (1) сопряженный оператор  $A^*$ , то есть  $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$ . Представим оператор  $A$  в виде произведения двух операторов:  $A = A_1 A_2$ , где

$$(A_1 f)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad (A_2 f)(y) = \int_0^y f(s) ds.$$

Действительно, по *теореме Фубини* получаем

$$(A_1(A_2 f)(y))(x) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds = (Af)(x, y).$$

Вычислим сопряженный оператор для  $A_1$ :

$$\langle A_1 f, g \rangle = \int_0^a \left( \int_0^x f(t) dt \right) \overline{g(x)} dx = \int_0^a f(t) \int_t^a \overline{g(x)} dx dt = \langle f, A_1^* g \rangle.$$

Значит, по определению сопряженного оператора получим

$$(A_1^* f)(x) = \int_x^a f(t) dt. \text{ Аналогично, для } A_2 \text{ имеем } (A_2^* f)(y) = \int_y^b f(s) ds. \text{ Тогда}$$

сопряженный к  $A$  оператор  $A^* = (A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^* = A_1^* A_2^*$  имеет вид:

$$(A^* f)(x, y) = \int_x^a \int_y^b f(t, s) dt ds.$$

Включим оператор  $A$  в узел, поскольку  $A$  – линейный, ограниченный оператор. В нашем случае  $H = L^2(D)$ .

Построим гильбертово пространство  $E$ . Вычислим  $B = -i(A - A^*)$ . Обозначим  $\overline{BH} = E$ . Найдем замыкание образа оператора  $B$ :

$$\frac{1}{i}(A - A^*)f(x, y) = \frac{1}{i} \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \frac{1}{i} \int_x^a \int_y^b f(t, s) dt ds := g(x, y).$$

Тогда

$$g''_{xy}(x, y) = \frac{1}{i} f(x, y) - \frac{1}{i} f(x, y) = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует, что  $g'_y(x, y) = \varphi(y)$ . Значит,

$$g(x, y) = \int_0^y \varphi(s) ds + C(x) = D(y) + C(x).$$

Итак, пространство  $E$  имеет вид:

$$E = \{u(x) + c + v(y) \in L^2(D)\}. \quad (3)$$

Пространство  $E$  можно представить в виде ортогональной суммы

$$E = E_1 \oplus E_0 \oplus E_2, \text{ где } E_0 = \mathbb{C},$$

$$E_1 = \left\{ u(x) \in L^2(0, a) : \int_0^a u(x) dx = 0 \right\}, E_2 = \left\{ v(y) \in L^2(0, b) : \int_0^b v(y) dy = 0 \right\}.$$

Возьмем  $g(x, y) \in E$ :  $g(x, y) = u(x) + c + v(y)$ , ( $u \perp c$ ,  $u \perp v$ ,  $v \perp c$ ).

Введем в  $E$  (3) скалярное произведение для  $g \in E$ :

$$g(x, y) = u(x) + c + v(y) \text{ и } \tilde{g} \in E : \tilde{g}(x, y) = \tilde{u}(x) + \tilde{c} + \tilde{v}(y) :$$

$$\langle g, \tilde{g} \rangle = \int_0^a u(x) \overline{\tilde{u}(x)} dx + c \overline{\tilde{c}} + \int_0^b v(y) \overline{\tilde{v}(y)} dy,$$

$$\|g\|^2 = \int_0^a |u(x)|^2 dx + |c|^2 + \int_0^b |v(y)|^2 dy.$$

Очевидно, что пространство  $E$  является гильбертовым пространством.

Определим оператор  $\varphi: L^2(D) \rightarrow E$ . Сначала зададим ортопроекторы  $P_k: L^2(D) \rightarrow E_k$ , ( $k = 0, 1, 2$ ) такие, что:

$$P_1: L^2(D) \rightarrow E_1: (P_1 f)(x) = \frac{1}{b} \int_0^b f(x, y) dy - \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (4)$$

$$P_2: L^2(D) \rightarrow E_2: (P_2 f)(y) = \frac{1}{a} \int_0^a f(x, y) dx - \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (5)$$

$$P_0: L^2(D) \rightarrow E_0: (P_0 f)(x) = \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (6)$$

Покажем, что  $P_1 f \in E_1$ :

$$\begin{aligned} \int_0^a ((P_1 f)(x, y)) dx &= \int_0^a \left( \frac{1}{b} \int_0^b f(x, y) dy - \frac{1}{ab} \iint_D f(x, y) dx dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{b} \iint_D f(x, y) dx dy - \frac{1}{b} \iint_D f(x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Аналогично,  $P_2 f \in E_2$ ,  $P_0 f \in E_0$ .

Несложно проверить, что операторы  $P_1, P_2, P_0$  являются ортогональными проекторами, то есть  $P_i^2 = P_i$ ,  $P_i^* = P_i$ ,  $P_i P_j = 0$ ,  $i \neq j$ .

Определим ортопроектор

$$\varphi = P_1 + P_0 + P_2, \quad (7)$$

где  $\varphi: L^2(D) \rightarrow E$ ,  $\varphi = \varphi^*$ , а  $P_1, P_0, P_2$  имеют вид (4), (6), (5), соответственно.

Найдем  $\sigma: E \rightarrow E$  такое, что  $\sigma = \sigma^*$ .

$$A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi; \quad \sigma = \left( (A - A^*) / i \right) \Big|_E.$$

$$(A - A^*) f(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \int_0^a \int_0^b f(t, s) dt ds.$$

Вычислим, как действует оператор  $A - A^*$  на  $u(x)$ ,  $c$ ,  $v(y)$ .

Для любого  $c \in \mathbb{C} = E_0$ :

$$(A - A^*)(c) = \int_0^x \int_0^y c dt ds - \int_0^a \int_0^b c dt ds = -abc + xbc + yac.$$

Подействуем на получившуюся функцию оператором  $\varphi$ :

$$P_0(-abc + xbc + yac) = \frac{1}{ab} \iint_D (-abc + xbc + yac) dx dy = 0;$$

$$P_1(-abc + xbc + yac) = \frac{1}{b} \int_0^b (-abc + xbc + yac) dy -$$

$$-\frac{1}{ab} \iint_D (-abc + xbc + yac) dx dy = xbc - \frac{abc}{2};$$

$$P_2(-abc + xbc + yac) = \frac{1}{a} \int_0^a (-abc + xbc + yac) dx -$$

$$-\frac{1}{ab} \iint_D (-abc + xbc + yac) dx dy = yac - \frac{abc}{2};$$

$$\varphi(-abc + xbc + yac) = (P_1 + P_0 + P_2)(-abc + xbc + yac) = xbc + yac - abc \in E.$$

Получили, что:

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} xbc - abc/2 \\ 0 \\ yac - abc/2 \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2.$$

Для любой функции  $u(x) \in E_1$ :

$$\begin{aligned} (A - A^*)(u) &= \int_0^x \int_0^y u(t) dt ds - \int_{xy}^{ab} u(t) dt ds = \\ &= y \int_0^x u(t) dt - (b - y) \int_x^a u(t) dt = -b \int_x^a u(t) dt. \end{aligned}$$

Поддействуем на полученную функцию оператором  $\varphi$  (7):

$$P_0 \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) = \frac{1}{ab} \iint_D \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx dy = -\frac{b}{a} \int_0^a xu(x) dx;$$

$$\begin{aligned} P_1 \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) &= \frac{1}{b} \int_0^b \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dy - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx dy = \\ &= -b \int_x^a u(t) dt + \frac{b}{a} \int_0^a tu(t) dt; \end{aligned}$$

$$P_2 \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) = \frac{1}{a} \int_0^a \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -b \int_x^a u(t) dt \right) dx dy = 0.$$

Итак, мы имеем, что

$$\sigma \begin{pmatrix} u(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} -b \int_x^a u(t) dt + \frac{b}{a} \int_0^a tu(t) dt \\ -\frac{b}{a} \int_0^a xu(x) dx \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2.$$

Для любой функции  $v(y) \in E_2$  :

$$\begin{aligned} (A - A^*)(v) &= \int_0^x \int_0^y v(s) dt ds - \int_x^a \int_y^b v(s) dt ds = \\ &= x \int_0^y v(s) ds - (a-x) \int_y^b v(s) ds = -a \int_y^b v(s) ds . \end{aligned}$$

Применим к данной функции оператор  $\varphi$  (7):

$$\begin{aligned} P_0 \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) &= -\frac{a}{ab} \iint_D \left( \int_y^b v(s) ds \right) dx dy = -\frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy ; \\ P_1 \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) &= \frac{1}{b} \int_0^b \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dy - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dx dy = 0 ; \\ P_2 \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) &= \frac{1}{a} \int_0^a \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dx - \frac{1}{ab} \iint_D \left( -a \int_y^b v(s) ds \right) dx dy = \\ &= -a \int_y^b v(s) ds + \frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy . \end{aligned}$$

Получили, что:

$$\sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy \\ -a \int_y^b v(s) ds + \frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy \end{pmatrix} \in E_1 + E_0 + E_2 .$$

Итак, имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.** Если  $\sigma \in E = E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$  имеет вид:

$$\sigma \begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} -b \int_x^a u(t) dt + \frac{b}{a} \int_0^a tu(t) dt & -\frac{b}{a} \int_0^a xu(x) dx & 0 \\ xbc - \frac{abc}{2} & 0 & yac - \frac{abc}{2} \\ 0 & -\frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy & -a \int_y^b v(s) ds + \frac{a}{b} \int_0^b yv(y) dy \end{pmatrix} , \quad (8)$$

то выполняется узловое соотношение:

$$A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi ,$$

где оператор  $A$  определен формулой (1), а оператор  $\varphi$  равен (7).

Итак, построили оператор  $\sigma : E \rightarrow E$ .

Нами доказана следующая теорема.

**Теорема 1. Совокупность**

$$\Delta = (A, L^2(D), \varphi, E, \sigma) \quad (9)$$

образует узел, где  $A$  определяется условием (1),  $\varphi$  – условием (7),  $E$  – условием (3),  $\sigma$  – условием (8).

**Характеристическая функция.** Вычислим характеристическую функцию узла (9):

$$S_{\Delta}(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma.$$

Обозначим  $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f(x, y)$ , тогда  $\varphi^* \sigma g = (A - \lambda I)f$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)f &= Af - \lambda f = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \lambda f(x, y) = \varphi^* \sigma(u(x) + c + v(y)) = \\ &= \frac{1}{i} \left( -b \int_x^a u(t) dt - a \int_y^b v(s) ds + xbc + yac - abc \right). \end{aligned}$$

Получим, что:

$$\int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds - \lambda f(x, y) = \frac{1}{i} \left( -b \int_x^a u(t) dt - a \int_y^b v(s) ds + xbc + yac - abc \right). \quad (10)$$

Подставим в равенство (10)  $x = y = 0$ :

$$-\lambda f(0, 0) = -abc/i.$$

Продифференцируем равенство (10) по  $x$ :

$$\int_0^y f(x, s) ds - \lambda f'_x(x, y) = \frac{1}{i} (bu(x) + bc)$$

и положим  $y = 0$ , тогда  $-\lambda f'_x(x, 0) = (b/i)(u(x) + c)$ .

Продифференцируем (10) по  $y$ :

$$\int_0^x f(t, y) dt - \lambda f'_y(x, y) = \frac{1}{i} (av(y) + ac)$$

и положим  $x = 0$ , тогда  $-\lambda f'_y(0, y) = (a/i)(v(y) + c)$ .

Продифференцируем (10) по  $x$  и  $y$ , тогда

$$f(x, y) - \lambda f''_{xy}(x, y) = 0,$$

и получаем краевую задачу Дарбу-Гурса вида:

$$\begin{cases} f(x, y) - \lambda f''_{xy}(x, y) = 0, & \lambda f(0, 0) = abc/i, \\ -\lambda f'_x(x, 0) = \frac{b}{i}(u(x) + c), & -\lambda f'_y(0, y) = \frac{a}{i}(v(y) + c). \end{cases} \quad (11)$$

Зная решение задачи (11) построим  $\tilde{u}(x) \in E_1$ ,  $\tilde{v}(y) \in E_2$ ,  $\tilde{c} \in E_0$ :

$$\left\{ -\lambda f(a, b) = \frac{ab\tilde{c}}{i}, -\lambda f'_x(x, b) = \frac{b}{i}(\tilde{u}(x) + \tilde{c}), -\lambda f'_y(a, y) = \frac{a}{i}(\tilde{v}(y) + \tilde{c}). \right. \quad (12)$$

Константа  $\tilde{c}$  корректно определена, то есть одинаковая для всех этих равенств, что нетрудно проверить, интегрируя соответствующие уравнения систем (11) и (12).

Преобразовав начально-краевые условия (11) и (12), получим:

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda f(a, 0) + \lambda f(0, 0) &= \frac{1}{i}abc, & -\lambda f(0, b) + \lambda f(0, 0) &= \frac{1}{i}abc, \\ -\lambda f(a, b) + \lambda f(0, b) &= \frac{1}{i}ab\tilde{c}, & -\lambda f(a, b) + \lambda f(a, 0) &= \frac{1}{i}ab\tilde{c}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Учитывая равенство  $f(x, y) = \lambda f''_{xy}(x, y)$  и условия из (11), (12), (13), подействуем на  $f(x, y)$  оператором  $\varphi$  вида (7):

$$P_1 f = \frac{1}{b} \int_0^b \lambda f''_{xy}(x, y) dy - \frac{1}{ab} \iint_D \lambda f''_{xy}(x, y) dx dy = \frac{1}{i} (u(x) - \tilde{u}(x)).$$

$$P_2 f = \frac{1}{a} \int_0^a \lambda f''_{xy}(x, y) dx - \frac{1}{ab} \iint_D \lambda f''_{xy}(x, y) dx dy = \frac{1}{i} (v(y) - \tilde{v}(y)),$$

$$P_0 f = \frac{1}{i} (c - \tilde{c}).$$

Таким образом, получим следующую теорему.

**Теорема 2.** Пусть дан узел (9), тогда характеристическая функция данного узла  $S_\Delta(\lambda)$  определяется отображением:

$$S_\Delta(\lambda) \begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{c} \\ \tilde{v}(y) \end{pmatrix},$$

где  $\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix} \in E_1 \oplus E_0 \oplus E_2$ , при этом компоненты вектора  $\begin{pmatrix} \tilde{u}(x) \\ \tilde{c} \\ \tilde{v}(y) \end{pmatrix}$  задаются

формулами (12) через решение  $f(x, y)$  задачи Дарбу-Гурса (11), причем гра-

ничные условия системы (11) задаются компонентами вектора  $\begin{pmatrix} u(x) \\ c \\ v(y) \end{pmatrix}$ .

**Сужение оператора.** Рассмотрим сужение оператора двойного интегрирования (1) на подпространство  $L_0$ , которое содержится в пространстве  $L^2(D)$ :

$$L_0 = \{f(x, y) \in L^2(D) \mid f(x, y) = f(xy)\};$$

$L_0 \subset L^2(D)$ , поскольку функция, зависящая от произведения аргументов, является интегрируемой.

Вычислим норму в этом пространстве:

$$\|f(xy)\|_{L_0}^2 = \int_0^a \int_0^b |f(xy)|^2 dx dy = \int_0^a \frac{dx}{x} \int_0^{bx} |f(t)|^2 dt.$$

Зададим скалярное произведение в  $L_0$ :

$$\langle f, g \rangle_{L_0} = \int_0^a \frac{d(bx)}{bx} \int_0^{bx} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_0^l f(t) \overline{g(t)} dt \int_t^l \frac{ds}{s} = \int_0^l f(t) \overline{g(t)} dt \ln \frac{l}{t}.$$

Вычислим, как действует оператор (1) на подпространстве  $L_0$ . Легко видеть, что:

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^x \frac{dy}{ty} \int_0^{ty} f(t) dt = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}.$$

Таким образом,

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}. \quad (14)$$

Найдем сопряженный оператор к (14) из соотношения

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle:$$

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^l (Af)(t) \overline{g(t)} \ln \frac{l}{t} dt = \int_0^l f(\xi) d\xi \frac{\ln \frac{l}{\xi}}{\ln \frac{l}{\xi}} \int_{\xi}^l \overline{g(t)} \ln \frac{t}{\xi} \ln \frac{l}{t} dt = \langle f, A^*g \rangle.$$

$$\text{Итак, } (A^*f)(t) = \frac{1}{\ln \frac{l}{t}} \int_t^l f(\xi) \ln \frac{\xi}{t} \ln \frac{l}{\xi} d\xi.$$

Включим оператор (14) в узел.

Пусть  $H = L_0$ . Построим гильбертово пространство  $E$ . Вычислим  $B = (A - A^*)/i$ . Обозначим  $\overline{BH} = E$ . Найдем замыкание образа оператора  $B$ . Обозначим  $\psi(t) = -i(A - A^*)f$ , тогда

$$\psi(t) = \frac{1}{i} \left( \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi} - \frac{1}{\ln \frac{l}{t}} \int_t^l f(\xi) \ln \frac{\xi}{t} \ln \frac{l}{\xi} d\xi \right).$$

Покажем, что функции  $\psi(t)$  заполняют все пространство  $L_0$ . Для этого продифференцируем  $\psi(t)$  по  $t$ :

$$\psi'(t) = \frac{1}{i} \left( \int_0^t \frac{f(\xi)}{t} d\xi - \int_t^l \frac{f(\xi)}{t} \frac{\ln \frac{l}{\xi}}{\ln \frac{l}{t}} \left( \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} - 1 \right) d\xi \right).$$

Подставляя в это выражение  $f(\xi) = \xi^n$ , получим степенную функцию. Значит, в качестве  $E$  можно взять все пространство  $L_0$ ;

$$\varphi: L_0 \rightarrow E = L_0,$$

а в качестве  $\varphi$  можно взять единичный оператор  $\varphi = I$ ;

$$\sigma: E \rightarrow E, \sigma = \sigma^*, A - A^* = i\varphi^* \sigma \varphi, \sigma = ((A - A^*)/i)|_E.$$

$$\sigma f = \frac{1}{i} \int_0^t f(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} d\xi \ln \frac{l}{t} + \frac{1}{i} \int_t^l f(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} \ln \frac{l}{\xi} d\xi. \quad (15)$$

Таким образом, оператор  $A: L_0 \rightarrow L_0$  включили в узел:

$$\Delta = (A, L_0, I, L_0, \sigma). \quad (16)$$

где оператор  $A$  имеет вид (14), а  $\sigma$  определяется формулой (15).

Вычислим характеристическую функцию узла (16):

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma.$$

Обозначим  $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f$ , тогда

$$\varphi^* \sigma = (A - \lambda I) f \quad \text{или} \quad \sigma g = (A - \lambda I) f.$$

Итак,  $Af - \lambda f = \sigma g$ . С учетом (14) и (15) получим:

$$\int_0^t f(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi - \lambda f(t) = \frac{1}{i} \int_0^t g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} \cdot \ln \frac{l}{t} d\xi + \frac{1}{i} \int_t^l g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{t}}{\ln \frac{l}{t}} \ln \frac{l}{\xi} d\xi,$$

а, умножив обе части равенства на  $\ln \frac{t}{l}$ , приходим к уравнению вида:

$$-\int_0^t f(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi \cdot \ln \frac{t}{l} + \lambda f(t) \ln \frac{t}{l} = \frac{1}{i} \left[ -\int_0^t g(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi \cdot \ln \frac{t}{l} + \int_t^l g(\xi) \ln \frac{t}{\xi} \ln \frac{l}{\xi} d\xi \right] \quad (17)$$

Продифференцируем (17) по  $t$  и преобразуем:

$$\begin{aligned} & -\int_0^t (f(\xi) + ig(\xi)) d\xi \cdot \ln \frac{t}{l} + \lambda f'(t) \cdot \ln \frac{t}{l} + \lambda f(t) - \\ & - \int_0^t [f(\xi) + ig(\xi)] \cdot \ln \frac{t}{\xi} d\xi + i \int_t^l g(\xi) \ln \frac{l}{\xi} d\xi = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Обозначим

$$\psi(t) = \int_0^t (f(\xi) + ig(\xi)) \ln \frac{t}{\xi} d\xi, \quad (19)$$

тогда

$$\psi'_i(t) = \int_0^t (f(\xi) + ig(\xi)) \cdot \frac{1}{t} d\xi. \quad (20)$$

Применяя теорему о среднем к равенству (19)

$$\psi(t) = [f(c) + ig(c)] \cdot \ln \frac{t}{c} \cdot t,$$

где  $c \in (0; t)$ , и переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  легко видеть, что  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$ , то есть имеет место начальное условие вида:

$$\psi(0) = 0. \quad (21)$$

При этом равенство (18) примет вид:

$$t \ln \frac{t}{l} \cdot (\lambda f'_i(t) - \psi'_i(t)) + \lambda f(t) - \psi(t) + i \int_t^l g(\xi) \ln \frac{l}{\xi} d\xi = 0. \quad (22)$$

Пусть

$$\lambda f(t) - \psi(t) = \Phi(t), \quad (23)$$

тогда из (22) получим:

$$t \ln \frac{t}{l} \Phi'_i(t) + \Phi(t) + i \int_t^l g(\xi) \ln \frac{l}{\xi} d\xi = 0. \quad (24)$$

Продифференцируем (24) по  $t$  и преобразуем:

$$t \ln \frac{t}{l} \Phi''_i(t) + \left( \ln \frac{t}{l} + 2 \right) \Phi'_i(t) + ig(t) \ln \frac{t}{l} = 0. \quad (25)$$

Сделаем в уравнении (25) замену

$$\Phi'_i(t) = Y(t) \quad (26)$$

и преобразуем его, тогда получим линейное уравнение вида:

$$Y'(t) + \frac{\ln \frac{t}{l} + 2}{t \ln \frac{t}{l}} Y(t) + i \frac{g(t)}{t} = 0. \quad (27)$$

Решая уравнение (27), получим:

$$Y(t) = -\frac{i}{t \ln^2 \frac{t}{l}} \int_0^t g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi + \frac{IC}{t \ln^2 \frac{t}{l}}. \quad (28)$$

Из (20), (23), (26) вытекает начальное условие

$$Y(0) = \lambda f'(0) - f(0) - ig(0).$$

Причем, применяя теорему о среднем к уравнению (28), получаем решение уравнения (27) в виде:

$$Y(t) = -\frac{i}{t \ln^2 \frac{t}{l}} \int_0^t g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi. \quad (29)$$

Отсюда, учитывая замену (26) приходим к уравнению

$$\Phi(x) = -i \int_0^x \frac{1}{t \ln^2 \frac{t}{l}} \left( \int_0^t g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi \right) dt. \quad (30)$$

Поменяв порядок интегрирования в (30), получим:

$$\Phi(x) = -i \int_0^x g(\xi) \ln^2 \frac{\xi}{l} d\xi \int_{\xi}^x \frac{dt}{t \ln^2 \frac{t}{l}} + C_2,$$

то есть

$$\Phi(t) = -i \int_0^t g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + C_2. \quad (31)$$

Поскольку  $\Phi(t) = \lambda f(t) - \psi(t)$  и действует условие (21), то имеем следующее начальное условие:  $\Phi(0) = \lambda f(0)$ . Тогда с учетом теоремы о среднем из (31) получим

$$\Phi(t) = -i \int_0^t g(\xi) \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0). \quad (32)$$

Из (19), (23) и (32) следует, что

$$\lambda f(t) - \int_0^t [f(\xi) + ig(\xi)] \cdot \ln \frac{t}{\xi} d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0). \quad (33)$$

Прибавив к обеим частям равенства (33)  $i\lambda g(t)$ , получим:

$$\begin{aligned} & \lambda [f(t) + ig(t)] - \int_0^t [f(\xi) + ig(\xi)] \cdot \ln \frac{t}{\xi} d\xi = \\ & = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0) + i\lambda g(t). \end{aligned} \quad (34)$$

В равенстве (34) сделаем замену

$$X(t) = f(t) + ig(t), \quad (35)$$

тогда

$$\lambda X(t) - \int_0^t X(\xi) \ln \frac{t}{\xi} d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln \frac{\xi}{l} \cdot \ln \frac{t}{\xi}}{\ln \frac{t}{l}} d\xi + \lambda f(0) + i\lambda g(t). \quad (36)$$

Продифференцируем равенство (36) по  $t$ :

$$\lambda X'(t) - \int_0^t X(\xi) \frac{1}{t} d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^2 \frac{t}{l}} \cdot \frac{1}{t} d\xi + i\lambda g'_t. \quad (37)$$

Умножим обе части равенства (37) на  $t$ :

$$\lambda t X'(t) - \int_0^t X(\xi) d\xi = -i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^2 \frac{t}{l}} d\xi + i\lambda t g'_t. \quad (38)$$

Продифференцируем равенство (38) по  $t$ , а затем обе части равенства умножим на  $t/\lambda$ , тогда получим уравнение вида:

$$t^2 X''_{tt}(t) + tX'_t(t) - \frac{1}{\lambda} tX(t) = -itg(t) + 2i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^3 \frac{t}{l}} d\xi + i\lambda t g'_t(t) + i\lambda t^2 g''_{tt}(t). \quad (39)$$

Обозначим

$$\tilde{f}(t) = -itg(t) + 2i \int_0^t g(\xi) \cdot \frac{\ln^2 \frac{\xi}{l}}{\ln^3 \frac{t}{l}} d\xi + i\lambda t g'_t(t) + i\lambda t^2 g''_{tt}(t), \quad (40)$$

тогда уравнение (39) примет вид:

$$t^2 X''_{tt}(t) + tX'_t(t) - \frac{1}{\lambda} tX(t) = \tilde{f}(t). \quad (41)$$

Соответствующее однородное уравнение для (41) представляет собой *модифицированное уравнение Бесселя* вида:

$$t^2 X''_{tt}(t) + tX'_t(t) - \frac{1}{\lambda} tX(t) = 0. \quad (42)$$

Из [6] следует, что решение уравнения (42) представимо в виде:

$$X_{одн.}(t) = Z_0(2\sqrt{-t/\lambda}) = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t), \quad (43)$$

где

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\lambda)^k}{k! \Gamma(k+1)}, \quad (44)$$

$$Y_0(t) = \frac{1}{\pi} \ln(-t/\lambda) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\lambda)^k}{k! \Gamma(k+1)} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\lambda)^k \Gamma'(k+1)}{(k!)^3} \quad (45)$$

являются *бесселевыми функциями* первого и второго рода, соответственно.

Применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению (41), получаем соответствующее частное решение уравнения (41):

$$X_{\text{частн.}}(t) = \left( -\int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot J_0(t) + \left( \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t). \quad (46)$$

где  $W(Y_0(\xi); J_0(\xi)) = J_0(\xi)Y_0'(\xi) - Y_0(\xi)J_0'(\xi)$  – определитель Вронского.

Таким образом, общее решение уравнения (41) представляет собой следующую сумму решения однородного уравнения (43) и соответствующего частного решения (46):

$$X(t) = C_1 J_0(t) + C_2 Y_0(t) - J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + Y_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi. \quad (47)$$

Найдем начальные условия дифференциального уравнения (41).

Применяя в уравнении (38) теорему о среднем и переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$ , получим первое начальное условие:

$$(tX'(t))|_{t=0} = i\tilde{g}_0, \quad (48)$$

где  $\tilde{g}_0 = (tg'(t))|_{t=0}$ .

Тогда с учетом (48) из равенства (47), умноженного на  $t$ , получим:

$$(tX'_t(t))|_{t=0} = C_1(tJ'_0(t))|_{t=0} + C_2(tY'_0(t))|_{t=0},$$

поскольку  $(tJ_0(t))|_{t=0} = 0$  и  $\lim_{t \rightarrow 0}(tY_0(t)) = 0$ .

С учетом того, что

$$\lim_{t \rightarrow 0}(tJ'_0(t)) = 0 \text{ и } \lim_{t \rightarrow 0}(tY'_0(t)) = 1/\pi, \text{ имеем } (tX'_t(t))|_{t=0} = 1/\pi \cdot C_2,$$

то есть

$$C_2 = i\pi\tilde{g}_0. \quad (49)$$

Подставив равенство (49) в (47), получим:

$$X(t) = C_1 J_0(t) - J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t). \quad (50)$$

Поскольку  $J_0(0) = 1$ , а  $\left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ , в силу

того, что

$$i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ быстрее, чем } Y_0(t) \approx (1/\pi) \ln(-t/\lambda)$$

при  $t \rightarrow 0$ . Тогда

$$(X(t))|_{t=0} = 0, \quad (51)$$

Из (50) следует, что общее решение уравнения (41) с учетом граничных условий (48) и (51) имеет вид:

$$X(t) = -J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t). \quad (52)$$

Из замены (35), следует, что

$$f(t) + ig(t) = -J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t).$$

Таким образом, решение уравнения (17) имеет вид:

$$f(t) = -ig(t) - J_0(t) \cdot \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)Y_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi + \left( i\pi\tilde{g}_0 + \int_0^t \frac{\tilde{f}(\xi)J_0(\xi)}{\xi^2 W(Y_0(\xi); J_0(\xi))} d\xi \right) \cdot Y_0(t), \quad (53)$$

где  $J_0(t)$  – из (44),  $Y_0(t)$  – из (45),  $\tilde{f}(t)$  – из (40).

Вернемся к характеристической функции узла (16):

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma,$$

где  $(A - \lambda I)^{-1} \varphi^* \sigma g := f$ , а  $f$  из (53).

Таким образом, получили следующую теорему.

**Теорема 3.** *Характеристическая функция узла (16) равна  $(S(\lambda)g)(t) = g(t) - if(t)$ , где  $f(t)$  имеет вид (53), а  $g(t) \in L_0$  – подпространство функций  $f(x; y) = f(xy)$  из  $L^2(D)$ .*

**Выводы.** Таким образом, в данной работе изучен оператор двойного интегрирования вида  $(Af)(x, y) = \int_0^x \int_0^y f(t, s) dt ds$ , который действует в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D = [0, a] \times [0, b]$ . Установлено, что характеристическая функция этого оператора является функцией монодромии для задачи Дарбу-

Гурса с данными на характеристиках. В работе также рассмотрено сужение оператора двойного интегрирования вида

$$(Af) \Big|_{L_0}(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi \ln \frac{t}{\xi}$$

на подпространство

$$L_0 = \{f(x, y) \in L^2(D) \mid f(x, y) = f(xy)\}.$$

Осуществлено включение данных операторов в узел, описаны параметры узла, вычислены характеристические функции узлов.

Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для моделирования случайных процессов в рамках корреляционной теории.

**Список литературы:** 1. *Лившиц М.С., Янцевич А.А.* Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с. 2. *Лившиц М.С.* О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Математический сборник. – 1954. – Т. 34 (76). – №1. – С. 145–198. 3. *Золотарев В.А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Х.: ХНУ, 2003. – 342 с. 4. *Бродский М.С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. – М.: Наука, 1969. – 287 с. 5. *Надь Б. С., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с. 6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке; перевод с нем. С. В. Фомина. – Изд. четв., испр. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Livshic, M. S. *Teorija operatornyh uzlov v gil'bertovyh prostranstvah.* Kharkiv: Izd-vo Khark. un-ta, 1971. Print. 2. Livshic, M. S. "O spektral'nom razlozhenii linejnyh nesamosoprjazhennyh operatorov." *Matematicheskij sbornik.* Vol. 34 (76). No. 1. 1954. 145–198. Print. 3. Zolotarev, V. A. *Analiticheskie metody spektral'nyh predstavlenij nesamosoprjazhennyh i ne-unitarnykh operatorov.* Kharkiv: KhNU, 2003. Print. 4. Brodskij, M. S. *Treugol'nye i zhordanovy predstavlenija linejnykh operatorov.* Moscow: Nauka, 1969. Print. 5. Nad', B. S., and Ch. Fojash. *Garmnicheskij analiz operatorov v gil'bertovom prostranstve.* Moscow: Mir, 1970. Print. 6. Kamke, Je. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam.* Transl. from german. S. V. Fomin. 4th ed., ispr. Moscow: Nauka, 1971. Print.

Поступила(received) 15.04.2015

УДК 621.43

**А.М. ЛЕВТЕРОВ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков;

**Л.И. ЛЕВТЕРОВА**, вед. инженер, ИПМаш НАНУ, Харьков;

**В.Д. САВИЦКИЙ**, инженер, ИПМаш НАНУ, Харьков

## **ОСОБЕННОСТИ ЭМИССИИ ОКСИДОВ АЗОТА ПРИ РАБОТЕ ДИЗЕЛЯ НА БИОДИЗЕЛЬНОМ ТОПЛИВЕ И ВОЗМОЖНЫЕ МЕТОДЫ ЕЕ СНИЖЕНИЯ**

Представлен анализ и попытки объяснения в научных публикациях особенностей образования оксидов азота при работе двигателя с воспламенением от сжатия на метиловых и этиловых эфирах жирных кислот (биодизельное топливо) и обозначены методы снижения содержания  $NO_x$  в отработавших газах. Исследование сгорания биодизельных топлив осложняется их многообрази-

ем, которое обусловлено изменяющимся составом сложных эфиров, а, главное, отсутствием данных о термодинамических и термохимических свойствах, во всяком случае, в открытой печати. В работе излагаются результаты численного и моторного экспериментов относительно влияния на величину эмиссии оксидов азота с отработавшими газами дизеля угла опережения подачи топлива и коэффициента избытка воздуха, при этом рассматривается как минеральное, так и одно из биодизельных топлив.

**Ключевые слова:** дизель, биотопливо, эмиссия монооксида азота, токсичность отработавших газов, моделирование, моторный эксперимент.

**Введение и постановка задачи.** В силу особенностей рабочего процесса, удельный выброс в атмосферу несгоревших углеводородов ( $HC$ ), угарного ( $CO$ ) и углекислого ( $CO_2$ ) газов для дизеля ниже, чем для двигателя с искровым зажиганием, но эмиссия оксидов азота и твердых частиц, в том числе сажи, много выше, и эта проблема постоянно находится в поле зрения научных исследований. Фундаментальные основы термодинамического дизельного цикла остаются неизменными со времен *Рудольфа Дизеля*, поэтому в современном развитии проектирования и эксплуатации дизелей предметом исследований становятся методы совершенствования рабочих процессов. На исследовании образования вредных составляющих при сгорании в дизеле отразилось расширение масштабов использования альтернативных топлив, поскольку изменилось качественное и количественное соотношение компонент в продуктах сгорания этих топлив. В связи с предстоящими моторными испытаниями биодизельного топлива (этиловых эфиров жирных кислот рапсового, соевого, кукурузного и подсолнечного масел) определилась задача исследования: выбор способов уменьшения образования оксидов азота при его сгорании. С помощью математической модели можно осуществить стратегию оптимального выбора параметров и интерпретировать причинно-следственные связи по результатам предварительных расчетов и эксперимента, понять качественное взаимовлияние параметров двигателя в целом и параметров, сопровождающих впрыск и сгорание топлива, на рабочие характеристики дизеля.

Биодизельное топливо, представляющее собой смесь химически связанных сложных эфиров жирных кислот, при сгорании способствует уменьшению в отработавших газах летучих органических соединений, углеводородов и угарного газа, компенсирует выбросы углекислого газа в силу своего растительного происхождения, в общей сложности уменьшает выброс твердых частиц, но проблему эмиссии оксидов азота, увы, не решает.

С начала 90-х годов прошлого столетия, когда в Латинской Америке, США и ЕС стали широко использовать биодизельное топливо в качестве моторного, появилось много (в основном, экспериментальных) результатов исследований, дающих противоречивые сведения о количественных показателях эмиссии оксидов азота с выхлопными газами. С годами, по мере расширения фундаментальных исследований, в том числе математического моделирования рабочих процессов дизеля, работающего на различных биодизельных топливах, противоречия не уменьшились: кто-то [1 – 4] получал увеличение эмиссии, кто-то [5, 6] – уменьшение.

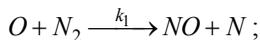
В официальном отчете агентства США по защите окружающей среды EPA за 2002 год, основанном на анализе многочисленного пакета всевозможных исследований биодизельного топлива, утверждается об увеличении эмиссии оксидов азота в среднем на 10 % для топлива B100 и на 2 % – для

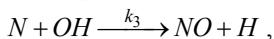
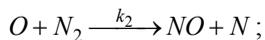
*B20* и отмечается, что очень немногие исследователи констатируют ее уменьшение [7]. Положительное или отрицательное изменение эмиссии оксидов азота в каждом случае убедительно объясняется длинным списком «в зависимости от», например, от величины плотности и молекулярного веса топлива [8], повышенной кинематической вязкости, качества капель аэрозоля [9], поверхностного натяжения и плотности [10], прочих особенностей свойств биодизельного топлива в сравнении с дизельным традиционным. Показательно, что увеличение значений йодного числа от 8 до 129,5 единиц увеличивает  $NO_x$  на 29,3 %, а содержание йодного числа, плотность и цетановое число взаимозависимы. На эмиссию оксидов азота и твердых частиц (*PM*) большое влияние оказывает химическая структура биодизельного топлива. Так, *NO* увеличивается с увеличением числа двойных связей, с уменьшением длины цепи сложных эфиров полностью насыщенных жирных кислот, возможна значительная разница в формировании *NO* и *PM* сложных метиловых и этиловых эфиров с идентичным распределением жирных кислот [11].

На наш взгляд, суть противоречий объясняется разнообразием биодизельных топлив, которое связано с «родословной» каждого, набором в нем сложных эфиров, меняющимся качественно и количественно в зависимости от вида масла, способа его производства, генной модификации сырья. Как следствие, в процессе сгорания обозначаются разные значения адиабатической температуры, цетанового числа, периода индукции, температуры самовоспламенения, которые и дают отличия в качестве процесса сгорания. Несомненно также, что на формирование оксидов азота и их контроль влияют тип двигателя, испытательное и измерительное оборудование.

**Методы уменьшения эмиссии оксидов азота. Численное моделирование, результаты эксперимента.** Технология снижения эмиссии оксидов азота определяется механизмом их формирования в камере сгорания двигателя. В потоке отработавших газов стационарных и транспортных двигателей монооксиды *NO* и диоксиды  $NO_2$  азота принято объединять под общим названием  $NO_x$ , включающим около 90 – 95 % монооксидов азота *NO* и до 5 %  $NO_2$ . Последнее образование очень нестойкое, образуется уже в системе выпуска, при попадании отработавших газов в атмосферу быстро разлагается, участвуя в фотохимических реакциях. В камере сгорания *NO* формируется из молекулярного азота воздуха  $N_2$  путем разрыва связей между атомами и происходит в трех направлениях: в соответствии с моделью Фенимора («быстрый» *NO*); по схеме Зельдовича (термический) и формирующийся через промежуточное звено  $N_2O$ . Есть еще топливный *NO*, образующийся благодаря молекулам азота в составе топлива.

Механизм Зельдовича [12], дополненный уравнением Lavoie [13]  $N + OH \xrightarrow{k_{31}} NO + H$ , носит название расширенного механизма Зельдовича. Этот механизм считается основным «поставщиком» *NO* при сгорании топлива, широко используется в термодинамических расчетах и включает три реакции:





где  $k_1, k_2, k_3$  – константы скоростей прямых реакций. Скорость суммарной тепловой реакции формирования  $NO$  в упрощенном виде представима как [14]

$$\frac{d[NO]}{dt} = 2k_1(T) \cdot [O][N_2],$$

что указывает на возможность минимизации концентрации монооксидов азота  $NO$  путем уменьшения концентраций  $[N_2]$  и  $[O]$  или уменьшением константы скорости определяющей реакции ( $k_1$ ), снижая температуру в области горения. Очевидно, что потенциальное увеличение формирования термического  $NO$  возможно и при увеличении времени пребывания горючей смеси в условиях высокой температуры.

Следовательно, любые средства, способные повлиять на эти факторы, будут влиять на процесс образования  $NO_x$ .

Анализ научных публикаций по теме и фундаментальные положения основ сгорания в поршневом двигателе [15] позволяют сделать вывод о сложившихся на настоящий момент возможных путях снижения монооксидов азота: в пред- и постпламенном вмешательстве в рабочий процесс. Предпламенный путь касается мероприятий, проводимых до начала процесса сгорания в камере сгорания, постпламенный – заключается в способах воздействия на сформировавшиеся в продуктах сгорания вредные составляющие.

Снижение может быть следствием модификации процесса сгорания, направленной, во-первых, на уменьшение пиковой температуры в камере сгорания путем реализации таких мероприятий:

- формирования богатых и бедных смесей, то есть исключением стехиометрического горения;
- охлаждения воздушного заряда;
- впрыскивания воды в зону сгорания;
- атомизации впрыска;
- увлажнения воздушного заряда водяным паром;
- рециркуляции ОГ, возможно дополнительно охлажденных;
- использования водно-топливных эмульсий;
- ступенчатого сгорания;
- использования топливных присадок, инертных газов, водорода.

Во-вторых, нацеленных на уменьшение времени пребывания горючей смеси в области пиковой температур, а именно:

- увеличение давления в системе впрыска топлива;
- смещение момента начала впрыска топлива по отношению к ВМТ и его продолжительностью;
- многостадийный впрыск топлива;
- изменение фаз газораспределения.

Постпламенное воздействие на продукты сгорания дизеля каталитическими методами представляет собой область, смежную с исследованиями процессов в ДВС, но непосредственно не является предметом наших изыска-

ний. Как правило, речь идет о катализаторах различного типа; проблемы и перспективы каталитического удаления  $NO_x$  хорошо обоснованы и изложены в работе [16].

Основная масса исследований как дизельного, так и биодизельного топлива, полученного из разного сырья, судя по анализу публикаций, для нивелирования формирования  $NO$  в основном направлена на изменение характеристик впрыскивания топлива. Изменения этих факторов связаны с решающим этапом в процессе сгорания в дизеле – периодом задержки воспламенения, то есть с изменением начала самовоспламенения, обусловленного физико-химическими свойствами топлива. Этот период можно изменять, выбирая время начала впрыска топлива или условия его осуществления [14, 15]. При сравнении дизельного и биодизельного топлив при одинаковом начале подачи топлива, то есть без изменения базовых настроек дизеля, уровень эмиссии оксидов азота регистрируется в пользу традиционного топлива, поэтому большинство исследований посвящено поиску того оптимального смещения угла начала впрыскивания топлива, который обеспечивает минимальную эмиссию. В работе [17] было установлено, что фактическая установка угла начала подачи топлива (стартовое впрыскивание) складывается из двух примерно равных составляющих, обусловленных автоматическим регулированием топливного насоса и физико-химическими свойствами биодизельного топлива.

Исследованиям стартовых изменений начала и продолжительности впрыска топлива, разделенного или ступенчатого впрыска, впрыска с увеличением давления подачи топлива или воздуха и их влияния на рабочие характеристики дизеля посвящена масса публикаций, касающихся как экспериментальных работ, так и математического моделирования рабочего процесса дизеля, работающего на традиционном топливе, беспримесном биодизельном или на различных композициях этих топлив. Приводим несколько, обозначив географию исследований [18 – 24].

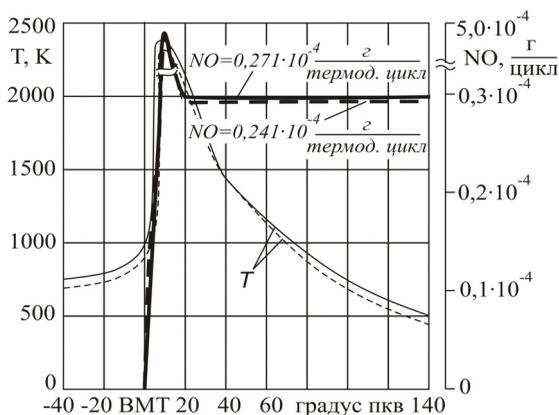
Во многих работах одновременно с выбором времени впрыскивания исследуется влияние других способов снижения эмиссии вредных компонент в ОГ. Так, охлаждение воздушного заряда на  $40-90^\circ\text{C}$  снижает эмиссию оксидов азота на 25 % [25], водоземulsionное (на 30 %) биодизельное топливо уменьшает как эмиссию оксидов азота на 30 %, так и дымность ОГ – на 32 %, минимизируя удельный расход топлива при полной нагрузке по сравнению с работой на дизельном топливе без эмульгации [26]. 20-ти процентное биодизельное топливо (B20), полученное переэтерификацией подсолнечного масла, с 15 % рециркуляции ОГ дает 25 % уменьшение эмиссии оксидов по сравнению с беспримесным дизельным топливом при неизменном показателе дымности [27]. Уменьшать эмиссию оксидов азота может принципиально новая организация низкотемпературного сгорания (LTC) [28].

Таким образом, пути снижения эмиссии наиболее «проблемного» среди вредных составляющих ОГ – монооксида азота могут решаться различными воздействиями на рабочий процесс дизеля с необходимым поиском оптимального компромисса между уровнем эмиссии и «штрафами», а также привлечением новых методов по мере совершенствования достижений в этой области. Остановимся на, пожалуй, самом распространенном методе – изменении угла подачи топлива. Расчетные исследования влияния угла начала

подачи топлива на эмиссию  $NO$  выполнены в термодинамической структуре математической модели полного цикла дизеля [29] с двух зонной моделью сгорания. Состояние рабочей смеси в камере сгорания на каждом шаге изменения процесса представлено двумя зонами: свежего заряда (испаренное в воздухе топливо) и продуктов сгорания. В пределах каждой зоны по мере изменения текущего объема цилиндра определяются температура, состав смеси, текущие значения удельного объема и термодинамических функций смеси. Давление в цилиндре постулируется одинаковым по всему объему, состав продуктов сгорания – равновесный. Энергоперенос в системе осуществляется в форме изменения энтальпий или внутренней энергии смеси, теплового потока в стенке цилиндра каждой из зон и совершения полезной работы.

Данные о термодинамических и термодинамических свойствах биодизельных топлив, необходимые для моделирования сгорания, в открытой печати представлены очень скудно, выборочно и поэтому часто выход находится во введении в расчеты свойств условного топлива или отрабатывают методологию исследований на традиционном топливе, чем воспользовались и мы. При калибровке модели [29] были использованы результаты экспериментов, полученные в лаборатории при разработке и испытаниях макетов фильтров твердых частиц.

Прогнозирование характера изменения эмиссии монооксида азота в функции угла поворота коленчатого вала осуществлялось для двух значений угла начала подачи топлива, на режиме максимального крутящего момента ( $n = 1400 \text{ мин}^{-1}$ ), результаты представлены на рис. 1.



— начало впрыска топлива – 25 градусов до верхней мертвой точки;  
 - - - - - начало впрыска топлива – 18 градусов до верхней мертвой точки

Рис. 1 – Характер изменения эмиссии монооксида азота.

Видно, что момент начала впрыска топлива, а, следовательно, и его воспламенение, влияют на пиковый уровень температуры в камере сгорания. Более позднее воспламенение, как отмечается в [15], смещает процесс горения ближе к верхней мертвой точке, вызывая существенное снижение давления, температуры и, как следствие,  $NO$ . Полученные результаты расчета

обеспечили базу для оценки эффективности способов снижения образования оксидов азота в камере сгорания дизеля в преддверии проведения экспериментальных исследований биодизельного топлива на дизеле Д21. Изменяя угол начала подачи топлива  $\theta$  с определенным интервалом, для набора нескольких значений коэффициента избытка воздуха  $\alpha$ , провели предварительный численный эксперимент и получили соответствующие зависимости среднего индикаторного давления  $p_i$ , индикаторного КПД  $\eta_i$  и количества оксидов азота  $g_{NO}$  за рабочий цикл дизеля (рис. 2 и рис. 3).

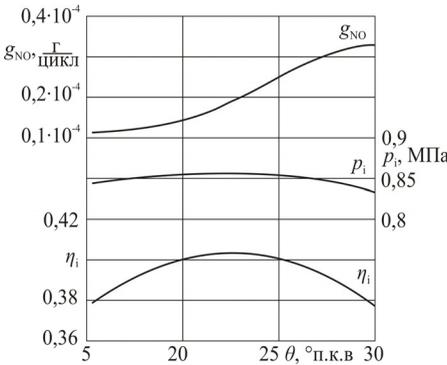


Рис. 2 – Расчетная зависимость показателей работы дизеля от угла опережения впрыскивания топлива.

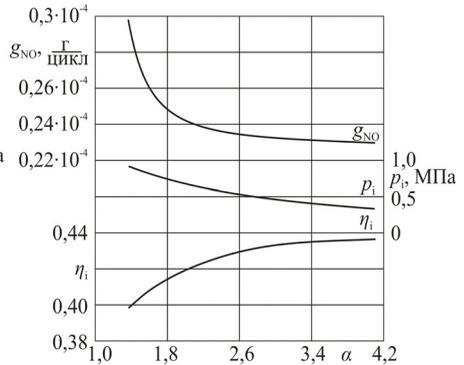
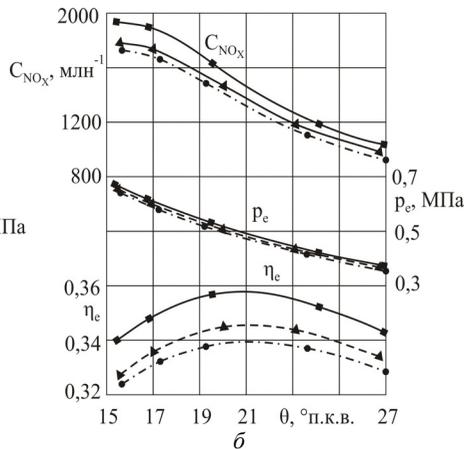
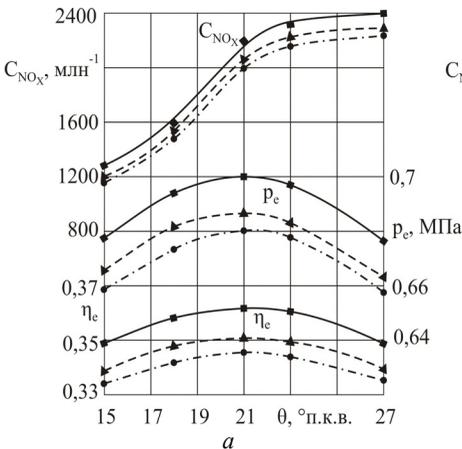


Рис. 3 – Расчетная зависимость показателей работы дизеля от коэффициента избытка воздуха.



—■— — 100 % дизельное топливо; —▲— — 40 % биотоплива;  
 - - ● - - - 60 % биотоплива

Рис. 4 – Зависимость основных показателей работы дизеля Д21А на режиме  $n = 1400 \text{ мин}^{-1}$  внешней скоростной характеристики: а – от угла опережения впрыска; б – от коэффициента избытка воздуха.

Оптимальная величина угла начала подачи топлива по критерию максимального индикаторного давления соответствует  $22,5^\circ$  поворота коленчатого вала (п.к.в.). Видно, что смещение начала подачи топлива к верхней мертвой точке (ВМТ), например, на  $5^\circ$  п.к.в. способствует уменьшению  $g_{NO}$  на 35 % при снижении среднего индикаторного давления только на 1 %, а КПД – на  $2,5\%$ .

Обеднение топливовоздушной смеси с  $\alpha = 1,4$  до  $\alpha = 2,2$  позволяет получить уменьшение количества оксидов азота почти на 20 %. При этом среднее индикаторное давление теряет 15 % своей величины, а КПД даже возрастает на 6 %.

Таким образом, можно сделать вывод, что оптимизация эмиссии оксидов азота по двум регулировочным параметрам – коэффициенту избытка воздуха и началу подачи топлива – имеет значительный потенциал при приемлемых «штрафах» по показателям эффективности рабочего процесса. Окончательные выводы позволяют сделать результаты проведенных моторных испытаний собственно биодизельного топлива (рис. 4).

**Выводы.** В статье обозначены пред- и постпламенные методы уменьшения эмиссии оксидов азота с отработавшими газами дизеля. С помощью математической модели рабочих процессов дизеля проведены исследования влияния угла начала подачи топлива и коэффициента избытка воздуха на эмиссию  $NO$  и индикаторные показатели двигателя, работающего на традиционном минеральном топливе.

Характер расчетных зависимостей эмиссии  $NO$  и основных индикаторных показателей двигателя от коэффициента избытка воздуха и от угла опережения впрыска топлива идентичен характеру аналогичных зависимостей, полученных в моторном эксперименте с биодизельным топливом, что естественно, если учесть, что образование  $NO$  согласно [12] не зависит от состава топлива и пропорционально  $\sqrt{[N_2] \cdot [O_2]}$ .

В рамках исследования численными и экспериментальными методами других путей снижения эмиссии оксидов азота с отработавшими газами возможно рассмотрение эффективности охлаждения воздушного заряда, впрыскивания воды в зону сгорания, увлажнения воздушного заряда и рециркуляции ОГ.

**Список литературы:** 1. *Brakora J.* Investigation of  $NO_x$  Predictions from Biodiesel-fueled HCCI Engine Simulations Using a Reduced Kinetic Mechanism / *J. Brakora, R. Reitz* // SAE Techn. Pap. Ser. – 2010. – № 2010-01-0577. – P. 1 – 12. 2. *Hoekman S.K.* Review of the effects of biodiesel on  $NO_x$  emissions / *S.K. Hoekman, C. Robbins* // Fuel Processing Technology. – 2012. – Vol. 96. – P. 237 – 249. 3. *Varatharajan K.* Mitigation of  $NO_x$  emissions from a jatropha biodiesel fuelled DI diesel engine using antioxidant additives / *K. Varatharajan, M. Cheralathan, R. Velraj* // Fuel. – 2011. – Vol. 90. – P. 2721 – 2725. 4. *Anderson L.G.* Effects of Biodiesel Fuels Use on Vehicle Emissions / *L.G. Anderson* // Journal of Sustainable Energy and Environment. – 2012. – Vol. 3. – P. 35 – 47. 5. Experimental research on the flame temperature of biodiesel fuel combustion in open-air conditions / *M. Gongping, W. Zhong, N. Peiyong, W. Xiaozhe* // Institute of Electrical and Electronics Engineers. – 2011. – P. 2171 – 2174. 6. Emission characteristics of a diesel engine using soyabean oil and diesel blends / *N.A. Ansari, Jitendra Kumar, Amitkumar, Dhananjay Trivedi* // International Journal of Research in Engineering and Technology. – 2013. – Vol. 2, № 5. – P. 793 – 798. 7. A comprehend analysis

of biodiesel impacts on exhaust emissions // U.S. Environmental Protection Agency. – Boston: EPA 420-P-02-001, 2002. – 126 p. **8.** *Alptekin E.* Determination of the density and the viscosities of bio-diesel-diesel fuel blends / *E. Alptekin, M. Canakci* // Renewable Energy. – 2008. – Vol. 33. – P. 2623 – 2630. **9.** *Yuan W.* Computational investigation of the effect of biodiesel fuel properties on diesel engine  $NO_x$  emissions / *W. Yuan, A. Hansen* // International Journal of Agricultural and Biological Engineering. – 2009. – № 2. – P. 41 – 48. **10.** *Gopinath A.* Numerical modelling of oxides of nitrogen based on density of biodiesel fuels / *A. Gopinath, S. Puhani, G. Nagarajan* // International Journal of Energy and Environmental. – 2010. – Vol. 1. – P. 313 – 320. **11.** Impact of biodiesel source material and chemical structure on emissions of criteria pollutants from a heavy-duty engine / *R.L. McCormick, M.S. Graboski, T.L. Alleman, A.M. Herring, K.S. Tyson* // Environmental Science and Technology. – 2001. – Vol. 35. – P. 1742 – 1747. **12.** *Зельдович Я.Б., Садовников П.Я., Франк-Каменецкий Д.И.* Окисление азота при горении. – М.: Изд. АН СССР, 1947. – 145 с. **13.** *Lavoie G.A.* Experimental and Theoretical Study of Nitric Oxide Formation in Internal Combustion Engines / *G.A. Lavoie, J.B. Heywood, I.C. Klek* // Combustion Science and Technology. 1970. – Vol. 1. – P. 313 – 326. **14.** *Варнац Ю., Маас У., Диббл П.* Горение: физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образованные загрязняющих веществ / Перевод с англ. под ред. В. Власова. – М.: Физматлит, 2003. – 351 с. **15.** *Heywood J.B.* Internal Combustion Engine Fundamental / *J.B. Heywood*. – New York: McGraw-Hill, 1988. – 930 p. **16.** *Садыков В.А.* Удаление оксидов азота из отходящих газов дизельных двигателей: проблемы и перспективы их решения / *В.А. Садыков и др.* // Химия в интересах устойчивого развития. – 2005. – № 13. – С. 713 – 724. **17.** *Tat M.E.* Fuel Property Effects on Injection Timing, Ignition Timing, and Oxides of Nitrogen Emissions from Biodiesel-Fueled Engines / *M.E. Tat, J.H. Van Gerpen, P.S. Wang* // American Society of Agricultural and Biological Engineers. – 2007. – Vol. 50, № 4. – P. 1123 – 1128. **18.** Experimental study on the performance of and emissions from a low-speed light-duty diesel engine fueled with n-butanol-diesel and isobutanol-diesel blends / *Gu Xiaolei, Li Guo, Jiang Xue, Huang Zuohua, Lee Chia-fon* // Journal Automobile Engineering. – 2013. – № 227(2). – P. 261 – 271. **19.** Effect of Two-Stage Fuel Injection Parameters on  $NO_x$  Reduction Characteristics in a DI Diesel Engine / *Jeong Kyusoo, Lee Donggon, Park Sungwook, Lee Chang Sik* // Energies. – 2011. – Vol. 4. – P. 2049 – 2060. **20.** *Pandian M.* Influence of Injection Timing on Performance and Emission Characteristics of Naturally Aspirated Twin Cylinder CIDI Engine Using Bio-diesel Blend as Fuel / *M. Pandian, S.P. Sivapirakasam, M. Udayakumar* // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – Vol. 1, № 5. – P. 113 – 117. **21.** *Valipour Alireza.* Experimental Combustion Analysis of Biodiesel Fuel Spray with Hot Surface Ignition / *Alireza Valipour* // International Journal of Mechanical Engineering. – 2014. – Vol. 2, № 1. – P. 1 – 14. **22.** *Meloni Roberto.* An Insight into the Effect of Advanced Injection Strategies on Pollutant Emissions of a Heavy-Duty Diesel Engine / *Roberto Meloni, Naso Vincenzo* // Energies. – 2013. – Vol. 6. – P. 4331 – 4351. **23.** *Gao Z.* The Effects of EGR and Splint Fuel Injection on Diesel Engine Emission / *Z. Gao, W. Schreiber* // International Journal of Automotive Technology. – 2001. – Vol. 2, № 4. – P. 123 – 133. **24.** *Wenqiao Yuan.* Computational investigation of the effect of biodiesel fuel properties on diesel engine  $NO_x$  emissions / *Yuan Wenqiao, A.C. Hansen* // International Journal of Agricultural and Biological Engineering. – 2009. – Vol. 2, № 2. – P. 41 – 48. **25.** Improving Air Quality by Using Biodiesel in Generators / *D.D. Zarling, K.L. Bickel, R.W. Waytulonis, J.R. Sweeney* // SAE Techn. Pap. – 2004. – № 2004-01-3032. – P. 1 – 8. **26.** Reduction of  $NO_x$  and Smoke Emission with the effect of Biodiesel-Water Emulsion Mixture Fuel in a Diesel Engine / *K. Sivasami, V. Selladurai, S.R. Devadasan, K. Rajan* // International Journal of Engineering and Technology. – 2013. – Vol 5, № 5. – P. 4378 – 4387. **27.** *Rajan K.* Effect of Exhaust Gas Recirculation (EGR) on the Performance and Emission Characteristics of Diesel Engine with Sunflower Oil Methyl Ester / *K. Rajan, K.R. Senthilkumar* // Journal of Mechanical and Industrial Engineering. – 2009. – Vol. 3, № 4. – P. 306 – 311. **28.** Computational Analysis of Biodiesel Combustion in a Low-Temperature Combustion Engine using Well-Defined Fuel Properties / *J.P. McCrady, V.L. Stringer, A.C. Hansen, Chia-fon F. Lee* // SAE Techn. Pap. – 2007. – № 2007-01-0617. – P. 1 – 12. **29.** *Левтеров А.М., Левтерова Л.И.* Численное моделирование рабочего цикла дизеля с непосредственным впрыском. Прогнозирование эмиссии сажи и оксидов азота // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – № 5. – С. 141 – 154.

**Bibliography (transliterated):** 1. Brakora, J., and R. Reitz. "Investigation of  $NO_x$  Predictions from

Biodiesel-fueled HCCI Engine Simulations Using a Reduced Kinetic Mechanism." *Ser.: SAE Techn. Pap.* No. 2010-01-0577. 2010. 1–12. Print. **2.** Hoekman, S. K., and C. Robbins. "Review of the effects of biodiesel on  $NO_x$  emissions." *Fuel Processing Technology*. Vol. 96. 2012. 237–249. Print. **3.** Varatharajan, K., M. Cheralathan and R. Velraj. "Mitigation of  $NO_x$  emissions from a jatropha biodiesel fuelled DI diesel engine using antioxidant additives." *Fuel*. Vol. 90. 2011. 2721–2725. Print. **4.** Anderson, L. G. "Effects of Biodiesel Fuels Use on Vehicle Emissions." *Journal of Sustainable Energy and Environment*. Vol. 3. 2012. 35–47. Print. **5.** Gongping, M., et al. "Experimental research on the flame temperature of biodiesel fuel combustion in open-air conditions." *Institute of Electrical and Electronics Engineers*. 2011. 2171–2174. Print. **6.** Ansari, N. A., et al. "Emission characteristics of a diesel engine using soyabean oil and diesel blends." *International Journal of Research in Engineering and Technology*. Vol. 2. No. 5. 2013. 793–798. Print. **7.** *A comprehend analysis of biodiesel impacts on exhaust emissions*. Boston: U.S. Environmental Protection Agency. EPA 420-P-02-001, 2002. Print. **8.** Alptekin, E., and M. Canakci. "Determination of the density and the viscosities of biodiesel-diesel fuel blends." *Renewable Energy*. Vol. 33. 2008. 2623–2630. Print. **9.** Yuan, W., and A. Hansen. "Computational investigation of the effect of biodiesel fuel properties on diesel engine  $NO_x$  emissions." *International Journal of Agricultural and Biological Engineering*. No. 2. 2009. 41–48. Print. **10.** Gopinath, A., S. Puhan and G. Nagarajan. "Numerical modeling of oxides of nitrogen based on density of biodiesel fuels." *International Journal of Energy and Environmental*. Vol. 1. 2010. 313–320. Print. **11.** McCormick, R. L., et al. "Impact of biodiesel source material and chemical structure on emissions of criteria pollutants from a heavy-duty engine." *Environmental Science and Technology*. Vol. 35. 2001. 1742–1747. Print. **12.** Zel'dovich, Ya. B., P. Ya. Sadovnikov and D. I. Frank-Kameneckij. *Okislennie azota pri gorenii*. Moscow: AN SSSR, 1947. Print. **13.** Lavoie, G. A., J. B. Heywood and I. C. Klek. "Experimental and Theoretical Study of Nitric Oxide Formation in Internal Combustion Engines." *Combustion Science and Technology*. Vol. 1. 1970. 313–326. Print. **14.** Varnac, Yu., U. Maas and R. Dibbl. *Gorenje: fizicheskie i himicheskie aspekty, modelirovanie, eksperimenty, obrazovanie zagryzajushchih veshhestv*. Perevod s angl. Ed. V. Vlasov. Moscow: Fizmatlit, 2003. Print. **15.** Heywood, J. B. *Internal Combustion Engine Fundamental*. New York: McGraw-Hill, 1988. Print. **16.** Sadykov, V. A., et al. "Udalenie oksidov azota iz othodjashchih gazov dizelnyh dvigatelej: problemy i perspektivy ih reshenija." *Himija v interesah ustojchivogo razvitiija*. No. 13. 2005. 713–724. Print. **17.** Tat, M. E., J. H. Van Gerpen and P. S. Wang. "Fuel Property Effects on Injection Timing, Ignition Timing, and Oxides of Nitrogen Emissions from Biodiesel-Fueled Engines." *American Society of Agricultural and Biological Engineers*. Vol. 50. No. 4. 2007. 1123–1128. Print. **18.** Gu, Xiaolei, et al. "Experimental study on the performance of and emissions from a low-speed light-duty diesel engine fueled with n-butanol-diesel and isobutanol-diesel blends." *Journal Automobile Engineering*. No. 227(2). 2013. 261–271. Print. **19.** Jeong, Kyusoo, et al. "Effect of Two-Stage Fuel Injection Parameters on  $NO_x$  Reduction Characteristics in a DI Diesel Engine." *Energies*. Vol. 4. 2011. 2049–2060. Print. **20.** Pandian, M., S. P. Sivapirakasam and M. Udayakumar. "Influence of Injection Timing on Performance and Emission Characteristics of Naturally Aspirated Twin Cylinder CIDI Engine Using Bio-diesel Blend as Fuel." *International Journal of Recent Trends in Engineering*. Vol. 1. No. 5. 2009. 113–117. Print. **21.** Valipour, Alireza. "Experimental Combustion Analysis of Biodiesel Fuel Spray with Hot Surface Ignition." *International Journal of Mechanical Engineering*. Vol. 2. No. 1. 2014. 1–14. Print. **22.** Meloni, Roberto, and Naso Vincenzo. "An Insight into the Effect of Advanced Injection Strategies on Pollutant Emissions of a Heavy-Duty Diesel Engine." *Energies*. Vol. 6. 2013. 4331–4351. Print. **23.** Gao, Z., and W. Schreiber. "The Effects of EGR and Splint Fuel Injection on Diesel Engine Emission." *International Journal of Automotive Technology*. Vol. 2. № 4. 2001. 123–133. Print. **24.** Wenqiao, Yuan., and A. C. Hansen. "Computational investigation of the effect of biodiesel fuel properties on diesel engine  $NO_x$  emissions." *International Journal of Agricultural and Biological Engineering*. Vol. 2. No. 2. 2009. 41–48. Print. **25.** Zarling, D. D., et al. "Improving Air Quality by Using Biodiesel in Generators." *SAE Techn. Pap.* No. 2004-01-3032. 2004. 1–8. Print. **26.** Sivasami, K., et al. "Reduction of  $NO_x$  and Smoke Emission with the effect of Biodiesel-Water Emulsion Mixture Fuel in a Diesel Engine." *International Journal of Engineering and Technology*. Vol 5. No. 5. 2013. 4378–4387. Print. **27.** Rajan, K., and K. R. Senthilkumar. "Effect of Exhaust Gas Recirculation (EGR) on the Performance and Emission Characteristics of Diesel Engine with Sunflower Oil Methyl Ester." *Journal of Mechanical and Industrial Engi-*

neering. Vol. 3. № 4. 2009. 306–311. Print. **28.** McCrady, J. P., et al. "Computational Analysis of Biodiesel Combustion in a Low-Temperature Combustion Engine using Well-Defined Fuel Properties." Ser.: *SAE Techn. Pap.* No. 2007-01-0617. 2007. 1–12. Print. **29.** Levterov, A. M., and L. I. Levterova. "Chislennoe modelirovanie rabocheho cikla dizelja s neposredstvennym vpryskom. Prognozirovanie emissii sazhi i oksidov azota." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychni modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. No. 5 (979). Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. 141–154. Print.

*Поступила (received) 11.05.2015*

УДК 629.429.3:621.313

**Б.Г. ЛЮБАРСЬКИЙ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

## **РАЦИОНАЛЬНІ ШВИДКІСНІ РЕЖИМИ РУХУ ПРИМІСЬКОГО ЕЛЕКТРОПОЇЗДУ З АСИНХРОННИМИ ТЯГОВИМИ ДВИГУНАМИ**

На поточний момент при розробці та експлуатації нових типів електропоїздів виникає питання щодо визначення їх раціональних швидкісних режимів руху. В роботі розглядається методика, що дозволяє визначити раціональну максимальну швидкість руху електропоїзду на підставі комплексного критерію ефективності. Зазначається, що для розглянутого в роботі приміського електропоїзду з тяговим електроприводом на основі асинхронного тягового двигуна збільшення максимальної швидкості руху приводить не тільки до збільшення середньої швидкості руху електропоїзда, але і до зменшення витрати енергії на 3,75%, що обумовлене роботою приводу в режимі з великим значенням ККД.

**Ключові слова:** електропоїзд, асинхронний тяговий електропривод, максимальна швидкість руху, оптимальні режими роботи тягового приводу, комплексний критерій ефективності.

**Вступ.** Серцем електрорухомого складу є *тяговий електропривод* – сукупність пристроїв, призначених для перетворення електричної енергії, яка одержується з контактної мережі, в корисну роботу з переміщення електрорухомого складу. Його ефективність визначає більшою мірою ефективність всього електропоїзда.

**Аналіз останніх досліджень.** У роботах [1, 2] зазначається, що визначальним для режимів роботи та структури тягового електроприводу є тяговий двигун. Сучасний електрорухомий склад залізниць створюється в основному на основі асинхронного тягового приводу [1, 2]. Підвищена надійність і зниження витрат на експлуатацію, наявність стандартних технічних рішень в області напівпровідникової перетворювальної техніки привело до широкого використання приводу цього типу [1 – 4]. Застосування електрорухомого складу з асинхронним тяговим приводом потребує нових підходів до визначення раціональних швидкісних режимів руху порівняно з традиційними підходами, що застосовувались для електрорухомого складу з тяговими двигунами постійного струму. Як зазначено в [4, 5] керування роботою тягового приводу потрібно проводити на підставі мінімуму втрат [6 – 8], а швидкісний режим руху обирати по комплексному критерію ефективності [4].

**Мета роботи.** Розробити методику визначення раціональної максимальної швидкості руху приміського електропоїзду з асинхронними тяговими

© Б. Г. Любарський, 2015

двигунами.

**Порядок та результати оптимізації швидкості руху електропоїзду.** Ефективність тягового приводу в певному режимі його роботи оцінюватимемо по критерію максимуму його ККД за умови дотримання вимог, що накладаються режимами роботи. Тому задача визначення ефективності тягового приводу зводиться до знаходження екстремуму функції:

$$\max \eta = f \left( \begin{matrix} M_{зад} \\ n_{зад} \\ t_{зад} \end{matrix} \right)_{\text{var}[D]}, \quad (1)$$

де  $\eta$  – ККД приводу;  $M$  – момент на валу двигуна;  $n$  – частота обертання валу двигуна;  $M_{зад}$ ,  $n_{зад}$ ,  $t_{зад}$  – заданий момент на валу, частота обертання ротора і температура двигуна (координати вектора режиму роботи тягового приводу);  $[D]$  – вектор параметрів управління.

Втрати в тяговому перетворювачі залежать як від вектора режиму роботи тягового приводу, так і від параметрів управління (*коефіцієнта модуляції, ковзання*), тому для кожного електропоїзду в залежності від типу тягового двигуна необхідно вирішити задачу аналізу визначення оптимального режиму роботи на основі підходів, запропонованих в [3].

Так, наприклад, для тягового приводу на базі двигуна АД 917 оптимальні значення ККД наведені на рис. 1 та 2 для режимів просторово-векторної та однократної широтно-імпульсної модуляції.

Рівняння руху потягу має вигляд:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1 + \gamma} (F - W - B), \quad (2)$$

де  $m$  – маса потягу;  $v$  – швидкість руху;  $1 + \gamma$  – коефіцієнт інерції частин, що обертаються;  $t$  – поточне значення часу;  $F$  – сила тяги;  $B$  – гальмівна сила;  $W$  – повний опір руху;  $\gamma$  – безрозмірний коефіцієнт, що враховує вплив частин, що обертаються, на прискорення руху електропоїзда.

Сили тяги і гальмування залежать від режиму роботи тягового приводу. На реально існуючих ділянках колії мінімізація витрати енергії є складним багатокритеріальним завданням. Для задачі, що розглядається, пропонується мінімізація часу руху на ділянці шляху з заданим профілем і графіком руху при наступних режимах руху електропоїзду:

- рух з максимальною допустимою силою тяги, яка здійснюється для розгону;
- рух на вибігу при швидкості, близькій до заданої;
- рух з максимальною силою гальмування при вимозі різкого зниження швидкості руху зважаючи на обмеження швидкості руху згідно з графіком руху;
- рух при роботі електропривода з максимальним ККД в режимі тяги при русі зі швидкостями близькими до заданої швидкості руху при великих опорах руху (на зтяжних підйомах);
- рух при роботі електропривода з максимальним ККД в режимі гальмування, тобто зі швидкостями, близькими до заданої швидкості руху при

великих негативних опорах руху (на затяжних спусках).

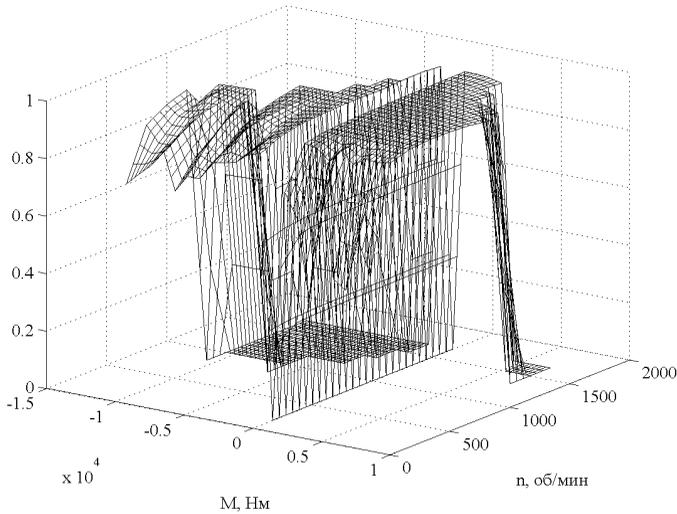


Рис. 1 – Оптимальне значення ККД приводу в режимі з просторово-векторною модуляцією.

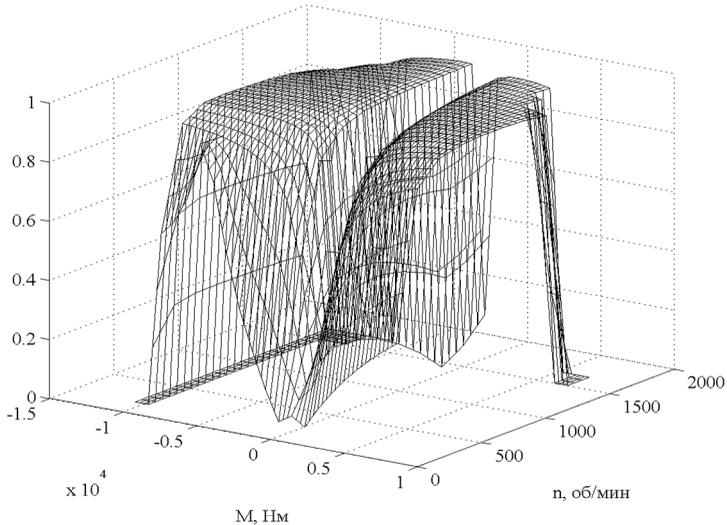


Рис. 2 – Оптимальне значення ККД приводу в режимі з однократної широтно-імпульсної модуляції.

Ці режими узгоджуються з *принципом максимуму Понтрягіна* [7], згідно з яким, рух поїзда має здійснюватися з максимальною силою тяги для досягнення встановленої швидкості руху або на вибігу.

Як показники ефективності для електрорухомого складу розглядалися

різні величини. Найбільше розповсюдження отримав показник витрати енергії. Проте при розгляді питання про створення швидкісного електрорухомого складу на перший план виходить час руху. Тому для цього показника можливо обирати середню швидкість руху електропоїзду. Ці два показники можуть бути взаємно суперечливими, тому для ухвалення рішення за визначенням кращого типу пропонується ввести відносний показник ефективності, методика визначення якого приведена в [4] В сукупності ці показники складають комплексний критерій ефективності.

Для електропоїзду з параметрами наведеними в табл. 1 були визначені криві руху поїзду приведені на рис. 3.

Таблиця 1 – Параметри приміського електропоїзда

Параметр	Величина
Конструкційна швидкість, км/год	160
Експлуатаційна швидкість, км/год	140
Прискорення, до швидкості 60км/год, м/с <sup>2</sup>	0,75
Потужність на валу, кВт	470
Навантаження на вісь, т	17
Маса складу, т	136
Діаметр колеса по колу катання, м	0,91
Категорія шляху	III
Керівний ухил, %	20
Радіус кривої, м	600
Максимальна швидкість руху на перегоні за умов шляху, км/год	202
Мінімальна швидкість руху на перегоні, км/год	90
Максимальна швидкість руху ЕРС, км/год	140

Як видно з кривих руху для приміських електропоїздів швидкість електропоїздів всіх типів монотонно зростає, тяговий привід працює в режимі максимальної сили тяги та досягає заданої швидкості на дуже короткому інтервалі часу, далі вона знижується зважаючи на заданий графік руху з використанням електричного гальмування. Далі швидкість підтримується нижче заданої швидкості руху, настає черга режиму тяги при максимальному ККД і вибігу. На інтервалі від 2500 до 3500 м від початку руху розташована рівна ділянка без кривих обмежень швидкості руху, на якому також спостерігається розгін електропоїзду. Проте на цій ділянці задана швидкість не була досягнута, оскільки для дотримання графіка руху приблизно на відстані 3100 м електропоїзд перейшов в режим рекуперативного гальмування. На ділянці від 3500 м до 5500 м – затяжний спуск. На відрізьку від 3500 м до 4000 м швидкість підтримується постійній шляхом включення рекуперативного гальмування. В інтервалі від 3500 м до 5000 м швидкість зростає, у зв'язку з поступовим зняттям обмежень; тут тяговий привід працює в режимі тяги в

поєднанні з режимом вибігу.

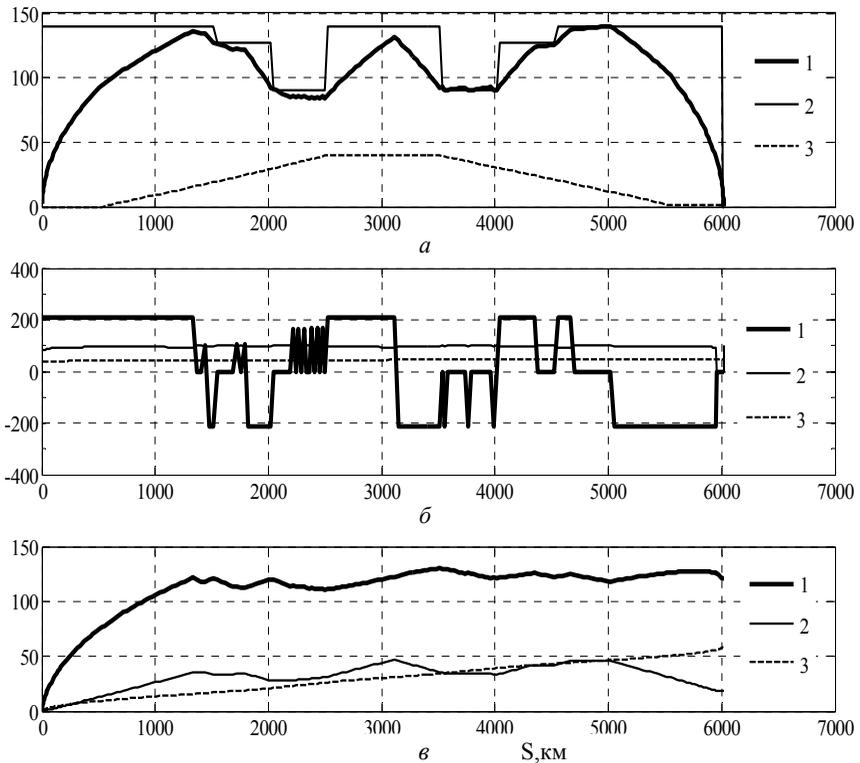


Рис. 3 – Криві руху приміського електропоїзда : *а* – 1 – швидкість руху, км/год, 2 – задана швидкість руху, км/год, 3 – профіль шляху, м; *б* – 1 – момент на валу тягового двигуна /100, 2 – ККД, %, 3 – температура тягового двигуна, °С; *в* – 1 – відносний показник ефективності 1000, 2 – витрата енергії, кВт ч, 3 – час руху/4, с.

Визначена залежність витрати енергії, середньої швидкості руху і відносного показника ефективності приміського електропоїзда, забезпеченого асинхронним тяговим приводом і працюючого в оптимальних режимах, від максимальної швидкості руху на типовій ділянці шляху, наведені в табл. 2.

З табл. 2 видно, що збільшення максимальної швидкості руху з 120 до 140 км/год приводить не тільки до збільшення середньої швидкості руху електропоїзда, але і до зменшення витрати енергії з 19,72 кВт·год до 18,98 кВт·год, що обумовлене роботою приводу в режимах з більшими значеннями ККД.

При малих максимальних швидкостях руху від 50 до 90 км/год збільшення швидкості призводить до зростання витрати енергії, що обумовлене зростанням опору руху рухомого складу.

Згідно відносного показника ефективності кращим рішенням є застосування електропоїзда з максимальною швидкістю руху. Таким чином, раціо-

нальною швидкістю руху для розглянутого прикладу електропоїзду є максимальна швидкість 140 км/год.

Таблиця 2 – Показники ефективності приміського електропоїзда

Максимальна швидкість руху, км/год	Витрата енергії, кВт·год	Середня швидкість руху, км/год	Відносний показник ефективності
60	18,11559	53,37283	0,044693
70	18,76011	60,45623	0,04901
80	19,12355	69,30989	0,053805
90	19,72876	74,50849	0,057217
100	19,6401	80,76741	0,068667
110	19,65682	82,86961	0,083516
120	19,58958	86,45897	0,095566
140	18,98311	89,51529	0,11125

**Висновки.** Наведена в роботі методика дозволяє визначити раціональну максимальну швидкість руху електропоїзду. Для розглянутого в роботі приміського електропоїзду з тяговим електроприводом на основі двигуна АД917 збільшення максимальної швидкості руху приводить не тільки до збільшення середньої швидкості руху електропоїзда, але і до зменшення витрати енергії на 3,75%, що обумовлене роботою приводу в режимах з великим значенням ККД.

**Список літератури:** 1. Корниенко В. В., Омеляненко В.И. Высокоскоростной электрический транспорт. Мировой опыт. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 159 с. 2. Любарский Б.Г. Электродвигатели для перспективного электроподвижного состава / Б.Г. Любарский, В.И. Омеляненко, Е.С. Рябов, А.В. Демидов, Т.В. Глебова // Локомотив-информ. – 2008. №1. – С. 16 – 19 с. 3. Любарский Б.Г. Оптимизация режимов работы тягового асинхронного привода // Электрика. Курск. – 2014. – №6 –С. 5 – 10 с. 4. Любарский Б. Г. Теоретичні основи для вибору і оцінки перспективних систем електромеханічного перетворення енергії електрорухомого складу: автореф. дис. д-ра техн. наук: 05.22.09 / Любарський Б.Г.; Нац. техн. ун-т «Харків. політехн. ін-т». – Харків, 2014. – 36 с. 5. Коллахчян П.Г. Адаптивное управление асинхронным тяговым приводом магистральных электровозов. – Ростов н/Д: Изд-во журн. «Изв. вузов. Сев.-Кавк. региона». – 2006. – 131 с. 6. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. [3-е издание] / Л.С. Понтрягин и др. – М. Наука, 1976. – 392с. 7. Мугиншейн Л.А., Илютович А.У., Ябко И.А. Энергооптимальные методы управления движением поездов. – М.: Интекст, 2012. – 80с. 8. Дмитриенко В.Д., Заковоротный А.Ю. Моделирование и оптимизация процессов управления движением дизель-поездов. – Харьков: Изд. Центр «НТМТ», 2013. – 248с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Kornienko, V. V., and V. I. Omel'janenko. *Vysokoskorostnoj elektricheskij transport. Mirovoj opyt.* Kharkov: NTU «KhPI», 2007. Print. 2. Ljubarskij, B. G., et al. "Elektrodvigateli dlja perspektivnogo elektropodvizhnogo sostava."  *Lokomotiv-inform.* No. 1. 2008. 16–19. Print. 3. Ljubarskij, B. G. "Optimizacija rezhimov raboty tjavovogo asinhronnogo privoda." *Elektrika.* No. 6. Kursk, 2014. 5–10. Print. 4. Ljubarskij, B. G. *Teoretychni osnovy dlja vyboru i ocinky perspektivnyh sistem elektromehanichnogo peretvorennja energii' elektroruhomogo skladu. Avtoref. dys. d-ra tehn. nauk.* Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. Print. 5. Kolpach'jan, P. G. *Adaptivnoe upravlenie asinhronnym tjavovym privodom magistral'nyh elektrovozov.* Rostov n/D: Izd-vo zhurn. «Izv. vuzov. Sev.-Kavk. regiona», 2006. Print. 6. Pont'ragin, L. S., et al. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov.* 3<sup>rd</sup> ed. Moscow: Nauka, 1976. Print. 7. Muginshejn, L. A., A. U. Iljutovich and I. A. Jabko.

УДК 519.254

**Р.П. МИГУЩЕНКО**, д-р техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**М.М. ВОЛОБУЄВ**, канд. хім. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**О.М. РЕБРОВА**, канд. техн. наук, НТУ «ХПІ»

## КОВАРІАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ПРИ ОБРОБЦІ ТРИВИМІРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Розглянуто питання автоматичного формування множин статистик Фішера, які однозначно характеризують стан об'єкта контролю, управління або ідентифікації, за рахунок використання методів статистичного аналізу. Формування множини  $F$  – статистик здійснюється застосуванням коваріаційного аналізу до тривимірних зображень об'єкта, шляхом проведення ряду перетинів вздовж осей аргументів. Результатом виконання перетинів є множини з координатами  $F_0$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Проведені дослідження можуть бути використані для розробки алгоритмічного та програмного забезпечення засобів виявлення дефектів складного промислового обладнання. Розроблене програмне забезпечення може бути застосованим при імітаційному моделюванні.

**Ключові слова:**  $F$  – статистика, коваріаційний аналіз, регресії, двовимірна модель, трансформація, архів даних.

**Вступ.** Неруйнівний контроль та безрозбірна діагностика є найбільш перспективними напрямками при побудові сучасних систем контролю і управління. Останнім часом у названих напрямках активно створюються алгоритми, що реалізують названі технології, які ґрунтуються на опрацюванні вимірюваної інформації від датчиків, встановлених на важливих вузлах складних промислових агрегатів, і представленні цієї інформації у вигляді тривимірних зображень [1, 2]. Перетворення тривимірних зображень в двовимірні дозволяє спростити представлену інформацію та використати її в системах контролю і управління, які працюють в режимі реального часу.

**Аналіз останніх досліджень.** Відповідно до [3, 4] будь яку тривимірну інформаційну модель можна замінити скінченною множиною двовимірних моделей:

$$\{V_{jl} = F_a[a_j | b_l = \text{const}] + \delta_{jl}\}_{l=1}^L; \quad (1)$$

$$\{V_{jl} = F_b[b_l | a_j = \text{const}] + \varepsilon_{jl}\}_{j=1}^J. \quad (2)$$

Функції  $F_a$  і  $F_b$  це не випадкові функції (*тренди*), а  $\delta_{jl}$  і  $\varepsilon_{jl}$  – випадкові величини (*випадкові залишки*). Функції  $F_a$  і  $F_b$  можна оцінити, представивши їх послідовностями лінійних регресій з випадковими коефіцієнтами. Коваріаційний аналіз таких послідовних випадкових регресій (груп двовимірних спостережень) дозволяє виявити статистично значущі адитивні і мульти-

плікативні зміни трендів на фоні непереборних шумів (випадкових залишків). На практиці це надає можливість ідентифікувати справність промислового обладнання при порівнянні множин коефіцієнтів  $F$  – статистик, які отримані з об'єктів, що мають дефекти та без них [5].

Теорія дисперсійного аналізу випадкових регресій (коваріаційний аналіз [4]) виділяє чотири незалежні  $F$  – статистики, що дозволяють тестувати на статистичну значущість незалежні складові дисперсійного розкладання коефіцієнтів  $V_{jl}$  по перетинах  $a$  і  $b$  тривимірного зображення досліджуваної моделі.

**Постановка задачі.** Мета статті полягає у розробці методичного, алгоритмічного і програмного засобів визначення множин  $F$  – статистик, що характеризують стан складних промислових об'єктів шляхом обробки тривимірних зображень з застосуванням коваріаційного аналізу.

**Розробка методики формування множини F-статистик для аналізу тривимірних зображень.** Алгоритм формування множин  $F$  – статистик має наступний вигляд [6].

1. Вихідна парна вибірка розмірністю в  $N$  елементів розбивається на  $s$  груп ( $s = \overline{1, k}$ ) по  $i$  елементів ( $i = \overline{1, n_s}$ ) у кожній групі  $s$ .

2. Кожна група  $s$  апроксимується лінійною регресією  $v_s = A_s + B_s z$ .

3. Для кожної групи  $s$  розраховуються вагові коефіцієнти

$$\omega_s = \sum_{i=1}^{n_s} (z_{s_i} - \bar{z}_s)^2, \text{ де } \bar{z}_s = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} z_{s_i}.$$

4. Розраховуються значення:

$$\omega_c = \sum_{s=1}^k \omega_s, \quad B_c = \frac{1}{\omega_c} \sum_{s=1}^k \omega_s \cdot B_s. \quad (3)$$

5. Розраховуються середні значення  $v_s$  у кожній з  $s$  вибірок із вихідних даних  $\bar{V}_s = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} v_{s_i}$  і складаються нові пари з  $\bar{Z}_s$  і  $\bar{V}_s$ .

6. Обчислюються загальні середні для всіх  $Z_{s_i}$  і  $V_{s_i}$ :

$$\bar{Z} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} z_{s_i}; \quad \bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} v_{s_i}, \text{ де } N = \sum_{s=1}^k n_s.$$

7. Обчислюються значення:

$$\omega_m = \sum_{s=1}^k n_s (\bar{Z}_s - \bar{Z})^2, \quad B_m = \frac{1}{\omega_m} \sum_{s=1}^k n_s (\bar{Z}_s - \bar{Z})(\bar{V}_s - \bar{V}). \quad (4)$$

8. Використовуючи (3) і (4), розраховуються

$$\omega_0 = \omega_c + \omega_m, \quad B_0 = \frac{\omega_c B_c + \omega_m B_m}{\omega_0}.$$

9. Розраховуються наступні коефіцієнти:

$$Q_0 = \omega_0 B_0^2; \quad Q_1 = \frac{\omega_c \omega_m}{\omega_0} (B_c - B_m)^2; \quad Q_2 = \sum_{s=1}^k n_s [\bar{V}_s - \bar{V} - B_m (\bar{Z}_s - \bar{Z})]^2;$$

$$Q_3 = \sum_{s=1}^k \omega_s (B_s - B_c)^2; \quad Q_\Delta = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} [v_{si} - \bar{V}_s - B_s (z_{si} - \bar{Z}_s)]^2;$$

$$Q = \sum_{s=1}^k \sum_{i=1}^{n_s} (v_{si} - \bar{V})^2.$$

10. Розраховуються  $F$ -статистики:

$$F_0 = \frac{Q_0}{Q_\Delta} (N - 2k); \quad F_1 = \frac{Q_1}{Q_\Delta} (N - 2k); \quad F_2 = \frac{Q_2}{Q_\Delta} \left( \frac{N - 2k}{k - 2} \right); \quad F_3 = \frac{Q_3}{Q_\Delta} \left( \frac{N - 2k}{k - 1} \right).$$

11. Здійснюється виведення на екран:

$$F_0, n_0 = 1, n_\Delta = N - 2k; \quad F_1, n_1 = 1, n_\Delta = N - 2k;$$

$$F_2, n_2 = k - 2, n_\Delta = N - 2k; \quad F_3, n_3 = k - 1, n_\Delta = N - 2k.$$

Отримані, завдяки наведеному алгоритму, множини  $F$ -статистик використовуються при контролі стану складних промислових об'єктів. Причому, за локальні внутрішні групові геометричні особливості зображення відповідають  $F_1$ ,  $F_2$  (частинні адитивні зміщення) і  $F_3$  (мультиплікативні зміни).  $F_0$  характеризує загальну лінійну зміну середніх значень  $v_{si}$  при монотонних змінах  $j$  (модель (1)) і  $l$  (модель (2)).

**Алгоритмічне забезпечення методики.** Для формування алгоритмічного забезпечення та програмного продукту автоматичного розрахунку  $F$ -статистик, відповідно до мети статті, необхідно виконати послідовно три етапи [7]:

- складання алгоритму роботи програми;
- розробка інтерфейсу користувача;
- розробка програми.

В якості алгоритму при розрахунку  $F$ -статистик інформаційних сигналів приймається алгоритм, зображений на рис. 1. Відповідно до цього алгоритму розрахунок  $F$ -статистик виконується за п'ятнадцять кроків. Сам алгоритм складається з таких складових, як:

- крок;
- трансформація;
- архів даних,

за допомогою яких можлива реалізація набору будь-яких математичних функцій.

Для розробки інтерфейсу користувача закладаються певні принципи роботи з програмою. Вхідна інформація для розрахунків  $F$ -статистик у розробленому програмному забезпеченні представляється у вигляді текстового файлу в форматі XML і може бути викликана на екран монітору, відповідно до рис. 2. При виконанні безпосередньо програми використовується вікно, яке показано на рис. 3.

У вікні основної програми (рис. 3) сформована таблиця, у лівій частині якої знаходяться завантажені вхідні дані, а в правій частині виводиться результат розрахованих  $F$ -статистик. Розроблений інтерфейс має певний на-

бір допоміжних функцій з додавання та видалення вхідних даних, а також вибору розміру групи (регресії) і кількості груп, що необхідно для проведення обробки інформації при дослідженнях.

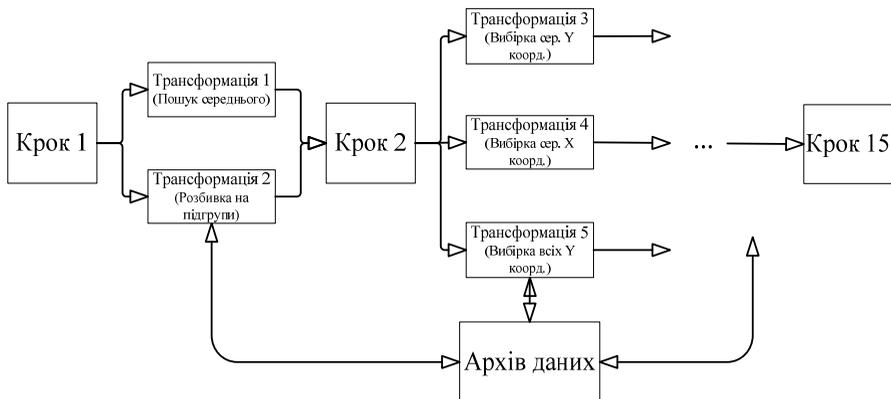


Рис. 1 – Алгоритм програмного забезпечення систем обробки інформації при розрахунку  $F$  – статистик.

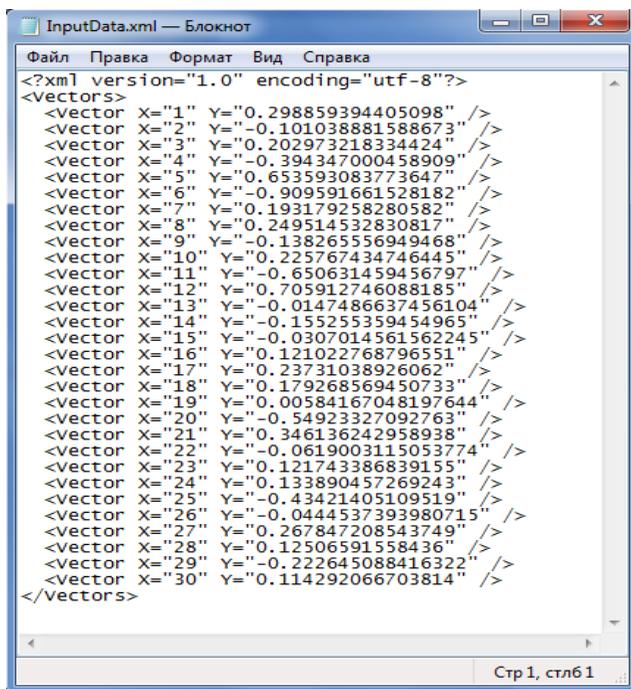


Рис.2 – Вхідна інформація для розрахунків  $F$  – статистик.

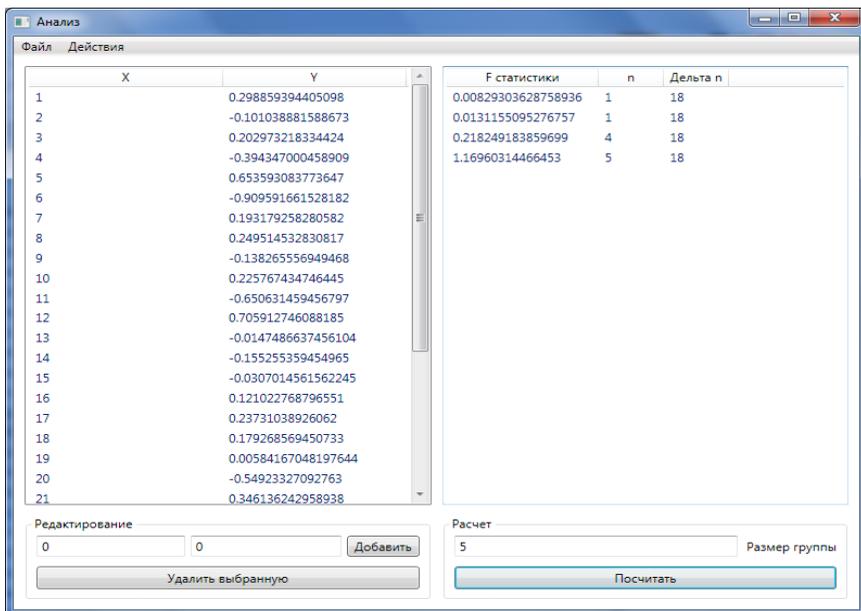


Рис. 3 – Приклад виконання програми.

**Фрагменти програмного забезпечення.** Для розробки програмного забезпечення була обрана програмна платформа Microsoft.NET Framework 3.5 і мова програмування C# [8]. Найбільш цікавими фрагментами розробленої програми є код основної програми та код трансформації лінійної регресії за методом найменших квадратів.

Код основної програми має вигляд:

```

LinearRegressionTransform lineReg = new LinearRegressionTransform("inputGroup", "regression");
SelectTransform<Vector, double> xGroupSelect = new SelectTransform<Vector, double>(v => v.X, "inputGroup", "inputGroupX", true);
SelectTransform<Vector, double> yGroupSelect = new SelectTransform<Vector, double>(v => v.Y, "inputGroup", "inputGroupY", true);
blockLink1.AddTransform(lineReg);
blockLink1.AddTransform(xGroupSelect);
blockLink1.AddTransform(yGroupSelect);
SelectTransform<Line, double> kSelect = new SelectTransform<Line, double>(l => l.K, "regression", "coefK", false);
AverageTransform<double> xGroupAverage = new AverageTransform<double>("inputGroupX", "averageX");
AverageTransform<double> yGroupAverage = new AverageTransform<double>("inputGroupY", "averageY");
blockLink2.AddTransform(kSelect);
blockLink2.AddTransform(xGroupAverage);
blockLink2.AddTransform(yGroupAverage);

```

Код трансформації лінійної регресії за методом найменших квадратів виглядає наступним чином:

```

public override void PerformTransformation()
{
    ITransformData data = Link.DataStorage[inputParamName];
    if (data.Value.GetType() != typeof(Vector[]))
        throw new ArgumentException("Входные данные имеют неправильный тип.");
    Vector[] inputData = (Vector[])data.Value;
    double sumOne = inputData.Aggregate(0d, (sum, point) => point.X * point.Y + sum)
* inputData.Length;
    double sumTwo = inputData.Aggregate(0d, (sum, point) => point.X + sum);
    double sumThree = inputData.Aggregate(0d, (sum, point) => point.Y + sum);
    double sumFour = inputData.Aggregate(0d, (sum, point) => Math.Pow(point.X, 2) +
sum) * inputData.Length;
    double sumFive = Math.Pow(sumTwo, 2);
    double k = (sumOne - sumTwo * sumThree) / (sumFour - sumFive);
    double b = (sumThree / inputData.Length) - k * (sumTwo / inputData.Length);
    TransformData<Line> resultData = new TransformData<Line>(new Line(k, b));
    Link.DataStorage.Add(outputParamName, resultData);
    OnCalculated();
}

```

Розроблена програма була апробована при безпосередній діагностиці стану вібраційних об'єктів на ДП «Харківський бронетанковий завод» і довела свою ефективність.

**Висновки.** У даній статті наведені результати розробки методичного, алгоритмічного і програмного засобів визначення множин  $F$  – статистик, що характеризують стан складних промислових об'єктів шляхом обробки тривимірних зображень з застосуванням коваріаційного аналізу.

**Список літератури:** 1. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // УФН. – 2001. – Т.171. – №5. – С. 465 – 501. 2. Неразрушающий контроль: вибродіагностика. Справочник в 7 томах // Ф.А. Балицкий, А.В. Барков, Н.А. Баркова, Р.В. Васильева и др.; под редакцией В.В. Клюева. – М.: Машиностроение. – Т. 7. – 2005. – 829 с. 3. Щапов П.Ф., Аверунин О.Г. Повышение достоверности контроля и диагностики объектов в условиях неопределённости: монография. – Х.: ХНАДУ, 2011. – 191 с. 4. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента / Пер. с англ. под ред. Э. К. Лецкого. – М.: Мир, 1981. – 520 с. 5. Щапов П.Ф., Мигущенко Р.П. Синтез двумерных диагностических параметров при ковариационном анализе трехмерных вейвлет-преобразований вибросигналов // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2013. – №3. С. 69 – 75. 6. Мигущенко Р.П. Методи і пристрої систем багатопараметрової функціональної діагностики вібраційних об'єктів (теоретичні основи та впровадження): дис. докт. техн. наук: 05.11.013 / Р.П. Мигущенко. – Харків, 2014. – 475 с. 7. Кристиан Нейгел. C# 5.0 и платформа. NET 4.5 для профессионалов Professional C# 5.0 and .NET 4.5 / Кристиан Нейгел. – М.: «Диалектика», 2013. – 1440 с. 8. Хейлсберг А. Язык программирования C#. Классика Computers Science. 4-е издание / А. Хейлсберг, М. Торгерсен, С. Вилтамут, П. Голд. – СПб.: «Питер», 2012. – 784 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Dremin, I. M., O. V. Ivanov and V. A. Nechitajlo. "Vejvlety i ih ispol'zovanie." *UFN*. Vol. 171. No. 5. 2001. 465–501. Print. 2. Balickij, F. A., et al. *Nerazrushajushhij kontrol': vibrodiagnostika. Spravochnik v 7 tomah*. Ed. V. V. Kljuev. Vol. 7. Moscow: Mashinostroenie, 2005. Print. 3. Shhapov, P. F., and O. G. Avrunin. *Povyshenie dostovernosti kontrolja i diagnostiki objektov v uslovijah neopredel'jonnosti: monografija*. Kharkov: HNADU, 2011. Print. 4. Dzhonson, N., and F. Lion. *Statistika i planirovanie jeksperimenta v tehnikе i nauke: Metody planirovanija jeksperimenta. Per. s angl.* Ed. Je. K. Leckij. Moscow: Mir, 1981. Print. 5. Shhapov, P. F., and R. P. Migushhenko. "Sintez dvumernyh diagnosticheskikh parametrov pri kovariacionnom analize trehmernyh vejvlet-preobrazovanij vibrosignalov." *Informacijni tehnologii' ta komp'juterna inzhenerija*. No. 3. 2013. 69–75. Print. 6. Migushhenko, R. P. *Metody i prystroji' sistem bagatoparametrovoi' funkcion-*

*al'noi' diagnostyky vibracijnyh ob'jektiv (teoretychni osnovy ta vprovadzhennja). Dis. ... d-ra tehn. nauk.* Kharkiv, 2014. Print. 7. Kristian, Nejgel. *C# 5.0 i platforma .NET 4.5 dlja professionalov. Professional C# 5.0 and .NET 4.5.* Moscow: «Dialektika», 2013. Print. 8. Hejlsberg, A., et al. *Jazyk programirovanija C#. Klassika Computers Science. 4<sup>th</sup> ed. izdanie.* St. Petersburg: «Piter», 2012. Print.

Надійшла (received) 13.05.2015

УДК 517.955.8

**Е.А. НАБОКА**, канд. физ.-мат. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

## **СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ПЛАСТИН БЕРГЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ ВНУТРЕННИМ И ГРАНИЧНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ЧАСТЬ 1**

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично зашечленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границ. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра  $\gamma$ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. Доказано, что верхний предел аттрактора при  $\gamma \rightarrow \infty$  принадлежит диагонали фазового пространства системы, что означает наличие эффекта синхронизации динамики пластин в пределе, когда интенсивность связи пластин системы и время стремятся к бесконечности.

**Ключевые слова:** модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

**Введение.** Разнообразные явления синхронизации составных систем можно наблюдать в физике, химии, биологии, социальном поведении человека и др. Различные аспекты синхронизации изучались с использованием математических теорий, численных и физических экспериментов, статистических расчетов и так далее [1, 2]. С математической точки зрения синхронизация связанных диссипативных уравнений изучалась *Арамановичем* и *Родригесом* [3, 4], *Клойденом* и *Карабалло* [5, 6]. Большинство имеющихся результатов относятся к случаю конечномерных диссипативных систем. Для бесконечномерного случая доступны результаты, описывающие явления синхронизации параболических составных систем [7, 8]. Синхронизация составной системы общего вида с *липшицевой нелинейностью* рассмотрена в [9]. Синхронизация связанных *пластин Бергера* изучалась в работах [10, 11] для случая линейного внутреннего демпфирования, в статье [12] для случая двух связанных пластин с нелинейным внутренним демпфированием, в [13] рассмотрена синхронизация двух частично связанных пластин.

**Постановка задачи.** В данной работе рассматривается система двух связанных пластин с частично зашечленной и частично свободной границей (рис. 1). Предполагается, что в состоянии покоя пластины располагаются одна под другой в параллельных плоскостях. Обозначим  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  область, которую занимает пластина в состоянии покоя. Пусть функции  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  –

вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя, зависящие от пространственной переменной  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  и переменной времени  $t \geq 0$ .

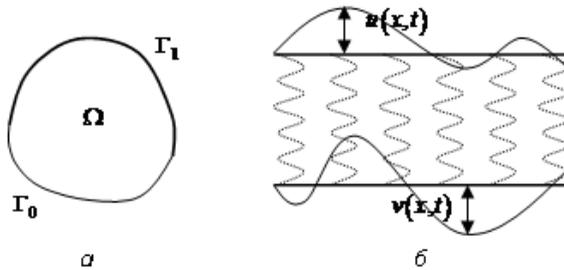


Рис. 1 – Система связанных пластин:

$a$  –  $\Omega$  – внутренняя область пластины,  $\Gamma_0$  – защемленная часть границы,  $\Gamma_1$  – свободная часть границы;  $b$  –  $u(x,t), v(x,t)$  – вертикальные отклонения пластин относительно состояния покоя в точке  $x \in \Omega$  в момент времени  $t$ .

Соответствующая математическая модель, построенная с использованием гипотез Бергера [14], имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{tt} + B(u_t) + \Delta^2 u + \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \Delta u + \gamma(u - v) = p, \\ v_{tt} + B(v_t) + \Delta^2 v + \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) \Delta v + \gamma(v - u) = p, \end{cases} \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad u_t|_{t=0} = u^1, \quad v_t|_{t=0} = v^1. \quad (2)$$

Пусть граница области  $\Omega$  состоит из двух непересекающихся частей  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 : \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ . На части границе  $\Gamma_0$  имеем условия защемления:

$$u = \partial_\nu u = v = \partial_\nu v = 0, \quad (3)$$

а на части границы  $\Gamma_1$  – свободные начальные условия:

$$\Delta u + (1 - \mu)\Sigma_1 u = 0, \quad \Delta v + (1 - \mu)\Sigma_1 v = 0,$$

$$\begin{aligned} \partial_n \Delta u + (1 - \mu)\Sigma_2 u &= d(x)g(u_t) + \sigma u - \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right) \partial_n u, \\ \partial_n \Delta v + (1 - \mu)\Sigma_2 v &= d(x)g(v_t) + \sigma v - \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) \partial_n v. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные операторы  $\Sigma_i$  определены равенствами:

$$\Sigma_1 z = 2n_1 n_2 z_{x_1 x_2} - n_1^2 z_{x_2 x_2} - n_2^2 z_{x_1 x_1}, \quad \Sigma_2 z = \partial_\tau ((n_1^2 - n_2^2) z_{x_1 x_2} + n_1 n_2 (z_{x_2 x_2} - z_{x_1 x_1})),$$

где  $n = (n_1, n_2)$  – единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial\Omega$ , а  $\tau$  –

единичный касательный вектор. Предположим, что константы  $\beta, \mu, \sigma$  положительные, а константа  $Q$  принимает произвольное вещественное значение. Операторы  $B(z) = \tilde{d}(x)b(z)$  и  $d(x)g(z)$  отвечают за механизм диссипации во внутренней части пластины и на ее границе. Функция  $p = p(x) \in L_2(\Omega)$  описывает поперечные нагрузки, приложенные к пластине. Слагаемое  $\gamma(u - v)$  учитывает связь пластин системы, причем коэффициент  $\gamma \geq 0$  пропорционален интенсивности связи.

Рассатриваем задачу (1) – (4) при следующих условиях на операторы внутреннего и внешнего демпфирования:

1. (внутреннее демпфирование)

$$B(z) = \tilde{d}(x)b(z) : \tilde{d}(x) \in L_\infty(\Omega); \quad \tilde{d}(x) > 0, x \in \Omega;$$

$$b(z) \in C^1(\mathbb{R}); \quad b(0) = 0; \quad b'(z) > 0, \forall z \in \mathbb{R};$$

$$\exists m_1, M_1 > 0 : m_1 \leq b'(z) \leq M_1(1 + zb(z)), |z| \geq 1;$$

2. (граничное демпфирование)

$$d(x) \in L_\infty(\Gamma_1), \quad d(x) > 0, x \in \Gamma_1;$$

$$g(z) \in C^1(\mathbb{R}); \quad g(0) = 0; \quad g'(z) \geq m_2 > 0, \forall z \in \mathbb{R};$$

$$\exists M_2 > 0 : g'(z) \leq M_2(1 + zg(z)), |z| \geq 1.$$

**Динамическая система и существование компактного глобального аттрактора.** Напомним некоторые определения [15]:

**Определение 1.** Пара функций  $(u(x, t), v(x, t))$ , принадлежащих классу  $C([0, T]; H_{\Gamma_0}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ , называется *сильным решением* задачи (1) – (4) на интервале  $[0, T]$ , если одновременно выполняются следующие условия:

- $u, v \in H^4(\Omega)$  для почти всех  $t \in [0, T]$ , функции  $u, v$  абсолютно непрерывны со значениями в  $H_{\Gamma_0}^2(\Omega)$  и  $u_t, v_t \in L_1(a, b; H_{\Gamma_0}^2(\Omega))$  для всех  $0 < a < b < T$ ;
- $u_t, v_t$  – абсолютно непрерывные функции со значениями в  $L_2(\Omega)$ , а производные  $u_{tt}, v_{tt} \in L_1(a, b; L_2(\Omega))$  для всех  $0 < a < b < T$ ;
- функции  $u, v$  удовлетворяют начальным условиям (2);
- функции  $u, v$  удовлетворяют уравнениям (1) и граничным условиям (3) – (4) для почти всех  $t \in (0, T)$ .

**Определение 2.** Пара функций  $(u(x, t), v(x, t))$ , принадлежащих классу  $C([0, T]; H_{\Gamma_0}^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L_2(\Omega))$  и удовлетворяющих начальным условиям (2), называется *слабым решением* задачи (1) – (4) на интервале  $[0, T]$ , если существует последовательность  $\{u_n(x, t), v_n(x, t)\}$  сильных решений задачи (1) – (4), сходящихся к  $(u(x, t), v(x, t))$  в следующем смысле:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, T]} \left( \|u_t(t) - u_{nt}(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v_t(t) - v_{nt}(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|u(t) - u_n(t)\|_{H_2(\Omega)} + \|v(t) - v_n(t)\|_{H_2(\Omega)} \right) = 0.$$

**Теорема 1.** Задача (1) – (4) корректно разрешима в пространстве  $H = [H_{\Gamma_0}^2(\Omega)]^2 \times [L_2(\Omega)]^2$ , то есть для любых начальных условий  $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in H$  существует единственное слабое решение  $(u(x, t), v(x, t))$  задачи (1) – (4). Решение удовлетворяет следующему энергетическому неравенству:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{E}(t) + \int_0^t \int_{\Omega} B(u_t) u_t d\Omega d\tau + \int_0^t \int_{\Omega} B(v_t) v_t d\Omega d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\Gamma_1} d(x) j_g(u_t) d\Gamma d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_1} d(x) j_g(v_t) d\Gamma d\tau \leq \mathfrak{E}(0), \end{aligned} \quad (5)$$

где выпуклая функция  $j_g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  определяется интегралом

$$j_g(z) = \int_0^z g(\xi) d\xi, \quad z \in \mathbb{R},$$

полная энергия системы  $E(t)$  имеет вид

$$\mathfrak{E}(t) = E(t) - \frac{Q}{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right) - \int_{\Omega} p(u+v) d\Omega, \quad (6)$$

а ее положительная часть  $E(t)$  находится по формуле

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{1}{2} \left( \|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(u, u) + a(v, v) + \gamma \|u - v\|_{L_2(\Omega)}^2 \right) + \\ & + \frac{\sigma}{2} \left( \|u\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \|v\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + \frac{\beta}{2} \left( \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega \right)^2 + \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega \right)^2 \right), \end{aligned}$$

где  $a(y, z) = \int_{\Omega} (\mu \Delta y \Delta z + (1 - \mu)(y_{x_1 x_1} z_{x_1 x_1} + y_{x_2 x_2} z_{x_2 x_2})) + 2(1 - \mu) y_{x_1 x_2} z_{x_1 x_2} d\Omega$ .

**Замечание 1.** Для начальных данных

$$(u^0, v^0, u^1, v^1) \in [H^4(\Omega)]^2 \times [H^2(\Omega)]^2$$

пара функций  $(u(x, t), v(x, t))$ , определенных в теореме 1, является сильным решением задачи (1) – (4).

**Замечание 2.** Энергия системы  $\mathfrak{E}(t)$  является ее функцией Ляпунова.

Более того, функция  $\mathfrak{E}(t)$  допускает следующие оценки:

$$C_1 E(t) - C \leq \mathfrak{E}(t) \leq C_2 E(t) + C, \quad (7)$$

где  $C_1, C_2, C$  – положительные константы, зависящие от различных параметров задачи (1) – (4), но не от параметра  $\gamma$ .

Ввиду теоремы 1 задача (1) – (4) порождает в пространстве

$$H = [H_{\Gamma_0}^2(\Omega)]^2 \times [L_2(\Omega)]^2$$

семейство бесконечномерных динамических систем  $(H, S_t^\gamma)$ . Эволюционный оператор  $S_t^\gamma$  каждой точке  $(u^0, v^0, u^1, v^1) \in H$  ставит в соответствие элемент  $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \in H$ , где  $(u(t), v(t))$  – слабое решение задачи (1) – (4) для начальных условий  $(u^0, v^0, u^1, v^1)$ :

$$S_t^\gamma(u^0, v^0, u^1, v^1) = (u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)).$$

**Определение 3.** Точка  $Z = (z_1, z_2, 0, 0) \in H$  называется *стационарной точкой оператора*  $S_t^\gamma, \gamma \geq 0$ , если он отображает эту точку в себя:  $S_t^\gamma Z = Z, \forall t \geq 0$ . Множество стационарных точек оператора  $S_t^\gamma$  будем обозначать  $N^\gamma$ .

Значения энергии системы в стационарных точках оператора  $S_t^\gamma$  ограничены равномерно по параметру  $\gamma$ , то есть существует такая положительная константа  $R_0 < \infty$ , что

$$\mathfrak{E}(z_1, z_2, 0, 0) \leq R_0, \quad \forall Z \in N^\gamma, \quad \forall \gamma \geq 0.$$

Это неравенство, используемое вместе с соотношением (7), означает, что множества стационарных точек  $N^\gamma$  ограничены в  $H$  равномерно по параметру  $\gamma$ :

$$\bigcup_{\gamma \geq 0} N^\gamma \subset B_H(R_0), \quad (8)$$

где  $B_H(R_0)$  – шар радиуса  $R_0$  в пространстве  $H$ .

**Теорема 2.** Для любого  $\gamma \geq 0$  динамическая система  $(H, S_t^\gamma)$  обладает компактным глобальным аттрактором  $\mathfrak{A}^\gamma$ . Аттрактор совпадает с неустойчивым многообразием  $M_+(N^\gamma)$ , исходящим из множества стационарных точек системы  $N^\gamma$ . Кроме того, семейство аттракторов  $\{\mathfrak{A}^\gamma\}$  ограничено в пространстве  $H$  равномерно по параметру  $\gamma$ , а энергия системы  $E(t)$  ограничена на траекториях из аттракторов равномерно по  $\gamma \geq 0$  и  $t \in \mathbb{R}$ .

**Замечание 3.** Из ограниченности энергии  $\mathfrak{E}(t)$  на траекториях из аттракторов, а также неравенства (7), следует, что в случае  $\gamma > 0$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - v(t)\| \leq C/\gamma, \quad (9)$$

для некоторого  $C \in (0; \infty)$  и  $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \in \mathfrak{A}^\gamma, \gamma > 0$ .

*Доказательство (теоремы 2).* Следуя схеме доказательства существования компактного глобального аттрактора в случае одной пластины фон Кармана из [16,17], рассмотрим сужение эволюционного оператора  $S_t^\gamma, \gamma \geq 0$  на ограниченное в  $H$  положительно инвариантное множество

$$W_R = \{(u^0, v^0, u^1, v^1) \in H : \mathfrak{E}(u^0, v^0, u^1, v^1) \leq R\}.$$

Из (7) следует, что  $W_R$  не пусто для достаточно больших  $R$  ( $R \geq R_1 > 0$ ). Рассуждая как в [16, 17], получим, что динамическая система  $(W_R, S_t^\gamma)$  обладает компактным глобальным аттрактором  $\mathfrak{A}_R^\gamma$ ,  $R \geq R_1$ . Поскольку система обладает функцией Ляпунова, то аттрактор  $\mathfrak{A}_R^\gamma$  совпадает с неустойчивым многообразием, исходящим из множества неподвижных точек

$$M_+(N_R^\gamma), N_R^\gamma = N^\gamma \cap W_R.$$

Ввиду (8)  $N_R^\gamma = N^\gamma$  для достаточно больших  $R \geq R_1$  и, следовательно, аттрактор не зависит от  $R$ :

$$\mathfrak{A}_R^\gamma = M_+(N_R^\gamma) = M_+(N^\gamma) = \mathfrak{A}^\gamma \text{ для } R \geq R_1.$$

Кроме того, для любых  $\gamma \geq 0$  имеем  $\mathfrak{A}^\gamma \subset W_R$  для некоторого фиксированного  $R \geq R_1$ . Из приведенные выше рассуждения и неравенства (7) следует, что аттрактор  $\mathfrak{A}^\gamma$  ограничен в  $H$  равномерно по параметру  $\gamma$ .

**Основной результат.** Опишем зависимость структуры глобального аттрактора  $\mathfrak{A}^\gamma$  динамической системы  $(H, S_t^\gamma)$  от параметра  $\gamma$ . Особый интерес представляет поведение аттрактора при  $\gamma \rightarrow \infty$ . Данное поведение описано при помощи специальной структуры – *верхнего предела аттрактора*. Это понятие было введено *Капитанским* и *Костиным* в их работе [18]. По определению верхним пределом аттрактора  $\mathfrak{A}^\gamma$  при  $\gamma \rightarrow \infty$  называется множество

$$\mathfrak{A}(\infty) = \bigcap_{N \geq N_0} \left[ \bigcup_{\gamma \geq N} \mathfrak{A}^\gamma \right]_H, \quad N_0 \geq 0,$$

где  $[\cdot]_H$  означает замыкание множества по норме пространства  $H$ .

**Теорема 3.** Для аттрактор  $\mathfrak{A}^\gamma$  динамической системы  $(H, S_t^\gamma)$ , порождаемой задачей (1) – (4), справедливы следующие утверждения:

- аттрактор  $\mathfrak{A}^\gamma$  полунепрерывен сверху по параметру  $\gamma$ :

$$\limsup_{\gamma \rightarrow \gamma_0} \left\{ \text{dist}_H(a, \mathfrak{A}^{\gamma_0}), a \in \mathfrak{A}^\gamma \right\} = 0, \quad \forall \gamma_0 \geq 0;$$

- верхний предел аттрактора  $\mathfrak{A}(\infty)$  лежит на диагонали фазового пространства  $H$ :

$$\mathfrak{A}(\infty) \subset \text{diag}H = \{(z^0, z^0, z^1, z^1) : (z^0, z^1) \in H_{\Gamma_0}^2(\Omega) \times L_2(\Omega)\}.$$

**Замечание 4.** Второе утверждение теоремы означает следующее явление асимптотической синхронизации динамики, порождаемой задачей (1) – (4):

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \|u(t, \gamma) - v(t, \gamma)\|_{H_{\Gamma_0}^2(\Omega)} + \|u_t(t, \gamma) - v_t(t, \gamma)\|_{L_2(\Omega)} \right) = 0.$$

*Доказательство (теоремы 3).*

Рассмотрим последовательно утверждения теоремы.

*Утверждение 1: полунепрерывность аттрактора.* Чтобы установить полунепрерывность сверху аттрактора  $\mathfrak{A}^\gamma$  по параметру  $\gamma$ , достаточно проверить следующие его свойства [19]:

- существуют  $\gamma_0 \geq \eta > 0$ ,  $t_0 = t_0(\gamma_0) > 0$  и ограниченное множество  $\mathfrak{B}_0 \subset H$ , такие что  $\bigcup_{\gamma \in [\gamma_0 - \eta, \gamma_0 + \eta]} \mathfrak{A}^\gamma \subset \mathfrak{B}_0$ ;
- для любого  $\varepsilon > 0$  и  $t \geq t_0$  существует такая положительная константа  $\theta = \theta(\varepsilon, t) < \eta$ , что для любых  $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$  и  $\gamma \in [\gamma_0 - \eta, \gamma_0 + \eta]$  выполнено неравенство

$$\left\| S_t^\gamma a^\gamma - S_t^{\gamma_0} a^\gamma \right\|_H \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Первое свойство было установлено в ходе доказательства теоремы 2. Докажем второе свойство.

Пусть  $(u^\gamma(t), v^\gamma(t))$  и  $(u^{\gamma_0}(t), v^{\gamma_0}(t))$  – два решения задачи (1) – (4) для различных значений параметра связи  $\gamma$ ,  $\gamma_0$  и одних и тех же начальных условий  $a^\gamma = (a_1^\gamma, a_2^\gamma, a_3^\gamma, a_4^\gamma) \in \mathfrak{A}^\gamma$ . Покажем, что траектории

$$S_t^\gamma a^\gamma = (u^\gamma(t), v^\gamma(t), u_t^\gamma(t), v_t^\gamma(t)) \text{ и } S_t^{\gamma_0} a^\gamma = (u^{\gamma_0}(t), v^{\gamma_0}(t), u_t^{\gamma_0}(t), v_t^{\gamma_0}(t))$$

удовлетворяют неравенству (10). Установим сначала, что неравенство (10) выполнено, если начальные данные

$$a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma \cap [H^4(\Omega)]^2 \times [H^2(\Omega)]^2,$$

то есть пары функций  $(u^\gamma(t), v^\gamma(t))$  и  $(u^{\gamma_0}(t), v^{\gamma_0}(t))$  являются сильными решениями задачи (1) – (4) для соответствующего значения параметра связи. Далее, совершая предельный переход ввиду определения 2, установим (10) для произвольных начальных данных  $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$ .

В силу теоремы 2 имеем  $\left\| S_t^\gamma a^\gamma \right\|_H, \left\| S_t^{\gamma_0} a^\gamma \right\|_H \leq R < \infty$  для некоторого  $R > 0$ , не зависящего от  $\gamma$ , и всех  $t \geq t_0 = t_0(R)$ .

Очевидно, что функция  $w = (w_1, w_2) = (u^\gamma - u^{\gamma_0}, v^\gamma - v^{\gamma_0})$  является решением следующей задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{1tt} + \left( B(u_t^\gamma) - B(u_t^{\gamma_0}) \right) + \Delta^2 w_1 + \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u^\gamma|^2 d\Omega \right) \Delta w_1 + \\ \quad + \beta \int_{\Omega} \left( |\nabla u^\gamma|^2 - |\nabla u^{\gamma_0}|^2 \right) d\Omega \Delta u^{\gamma_0} + \\ \quad + \gamma(w_1 - w_2) + (\gamma - \gamma_0)(u^{\gamma_0} - v^{\gamma_0}) = 0, \\ w_{2tt} + \left( B(v_t^\gamma) - B(v_t^{\gamma_0}) \right) + \Delta^2 w_2 + \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v^\gamma|^2 d\Omega \right) \Delta w_2 + \\ \quad + \beta \int_{\Omega} \left( |\nabla v^\gamma|^2 - |\nabla v^{\gamma_0}|^2 \right) d\Omega \Delta v^{\gamma_0} + \\ \quad + \gamma(w_2 - w_1) + (\gamma - \gamma_0)(v^{\gamma_0} - u^{\gamma_0}) = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

с условиями заземления  $w_1 = \partial_\nu w_1 = w_2 = \partial_\nu w_2 = 0$  на части границы  $\Gamma_0$ , свободными граничными условиями на  $\Gamma_1$ :

$$\begin{aligned} & \Delta w_1 + (1 - \mu) \Sigma_1 w_1 = 0, \quad \Delta w_2 + (1 - \mu) \Sigma_2 w_2 = 0, \\ & \partial_n \Delta w_1 + (1 - \mu) \Sigma_2 w_1 = d(x) \left( g(u_t^\gamma) - g(u_t^{\gamma_0}) \right) + \sigma w_1 - \\ & - \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u^\gamma|^2 d\Omega \right) \partial_n w_1 - \beta \int_{\Omega} \left( |\nabla u^\gamma|^2 - |\nabla u^{\gamma_0}|^2 \right) d\Omega \partial_n u^{\gamma_0}, \\ & \partial_n \Delta w_2 + (1 - \mu) \Sigma_2 w_2 = d(x) \left( g(v_t^\gamma) - g(v_t^{\gamma_0}) \right) + \sigma w_2 - \\ & - \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v^\gamma|^2 d\Omega \right) \partial_n w_2 - \beta \int_{\Omega} \left( |\nabla v^\gamma|^2 - |\nabla v^{\gamma_0}|^2 \right) d\Omega \partial_n v^{\gamma_0}, \end{aligned}$$

и нулевыми начальными условиями. Умножая уравнения (11) на  $w_{it}$ ,  $i = 1, 2$  в  $L_2(\Omega)$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E_w(t) + \left( B(u_t^\gamma) - B(u_t^{\gamma_0}), w_{1t} \right)_{L_2(\Omega)} + \left( B(v_t^\gamma) - B(v_t^{\gamma_0}), w_{2t} \right)_{L_2(\Omega)} + \\ & + \left( d(x) \left( g(u_t^\gamma) - g(u_t^{\gamma_0}) \right), w_{1t} \right)_{L_2(\Gamma_1)} + \left( d(x) \left( g(v_t^\gamma) - g(v_t^{\gamma_0}) \right), w_{1t} \right)_{L_2(\Gamma_1)} + \\ & + \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u^\gamma|^2 d\Omega \right) \left( (\Delta w_1, w_{1t})_{L_2(\Omega)} - (\partial_n w_1, w_{1t})_{L_2(\Gamma_1)} \right) + \\ & + \beta \int_{\Omega} \left( |\nabla u^\gamma|^2 - |\nabla u^{\gamma_0}|^2 \right) d\Omega \left( (\Delta u^{\gamma_0}, w_{1t})_{L_2(\Omega)} - (\partial_n u^{\gamma_0}, w_{1t})_{L_2(\Gamma_1)} \right) + \\ & + \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla v^\gamma|^2 d\Omega \right) \left( (\Delta w_2, w_{2t})_{L_2(\Omega)} - (\partial_n w_2, w_{2t})_{L_2(\Gamma_1)} \right) + \\ & + \beta \int_{\Omega} \left( |\nabla v^\gamma|^2 - |\nabla v^{\gamma_0}|^2 \right) d\Omega \left( (\Delta v^{\gamma_0}, w_{2t})_{L_2(\Omega)} - (\partial_n v^{\gamma_0}, w_{2t})_{L_2(\Gamma_1)} \right) + \\ & + (\gamma - \gamma_0) (u^{\gamma_0} - v^{\gamma_0}, w_{1t} - w_{2t})_{L_2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

где  $E_w(t)$  – это положительная энергия (11):

$$\begin{aligned} E_w(t) = & \frac{1}{2} \left( \|w_{1t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w_{2t}\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w_1, w_1) + a(w_2, w_2) + \right. \\ & \left. + \sigma \left( \|w_1\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \|w_2\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) + \gamma \|w_1 - w_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

Ввиду условий, наложенных на функции демпфирования, слагаемые, содержащие эти функции, неотрицательны. Оценим слагаемые, содержащие нелокальную нелинейность  $\int_{\Omega} |\nabla z|^2 d\Omega$ , используя ограниченность траекторий  $S_t^\gamma a^\gamma$ ,  $S_t^{\gamma_0} a^{\gamma_0}$  при  $t \geq t_0$ :

$$\left| \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u^\gamma| d\Omega \right) (\Delta w_1, w_{1t})_{L_2(\Omega)} \right| \leq C(R) E_w(t);$$

$$\left| \left( Q - \beta \int_{\Omega} |\nabla u^\gamma| d\Omega \right) (\partial_n w_1, w_{1t})_{L_2(\Gamma_1)} \right| \leq$$

$$\leq C(R) E_w(t) + 0,1 \left( d(x) \left( g(u_t^\gamma) - g(u_t^{\gamma_0}) \right), w_{1t} \right)_{L_2(\Gamma_1)}.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt} E_w(t) \leq C_1(R) E_w(t) + C_2(R) (\gamma - \gamma_0), \quad t \geq t_0,$$

откуда, используя *лемму Гронуолла*, получаем

$$E_w(t) \leq E_w(0) e^{C_1(R)t} + C(R) e^{C_1(R)t} |\gamma - \gamma_0|, \quad t \geq t_0. \quad (12)$$

Поскольку мы рассматриваем решения задачи (11) для нулевых начальных условий, то  $E_w(0) = 0$ , и из (12) следует (10).

*Утверждение 2: структура верхнего предела аттрактора.* Докажем теперь, что верхний предел аттрактора  $\mathfrak{A}(\infty)$  принадлежит диагонали фазового пространства  $diagH$ . Рассуждение основано на следующем утверждении.

**Утверждение 1.** Пусть  $(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t))$  – это траектория динамической системы  $(H, S_t^\gamma)$ , такая, что энергия системы (6) ограничена на этой траектории, то есть  $\mathfrak{E}(u(t), v(t), u_t(t), v_t(t)) \leq R$  для некоторого  $R \in (0; \infty)$  и всех  $t \in [0, T]$ . Тогда для функции  $w(t) = u(t) - v(t)$  выполняется следующее *стабилизационное неравенство*:

$$E_w(T) \leq \varepsilon + \frac{C(R, \varepsilon)}{T} + C(R, T, \varepsilon) \sup_{t \in [0, T]} \|w(t)\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}, \quad (13)$$

с не зависящими от параметра  $\gamma$  константами

$$\varepsilon > 0, \quad 0 < \delta < 1, \quad C(R, \varepsilon), \quad C(R, T, \varepsilon) > 0,$$

и функционалом  $E_w(t)$  вида

$$E_w(t) = \frac{1}{2} \left( \|w_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(w, w) + \sigma \|w\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + 2\gamma \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).$$

Дальнейшее доказательство проведем методом от противного. Предположим, что верхний предел аттрактора  $\mathfrak{A}(\infty)$  не лежит на диагонали фазового пространства  $diagH$ . Тогда существует точка  $a \in \mathfrak{A}(\infty)$ , такая, что

$$dist_H(a, diagH) = \eta > 0. \quad (14)$$

Пусть  $\{a^\gamma\}_{\gamma \geq N_0}$  – это последовательность точек из аттракторов  $a^\gamma \in \mathfrak{A}^\gamma$ , сходящаяся к  $a$  при  $\gamma \rightarrow \infty$ . Рассмотрим последовательность полных ограниченных траекторий  $(u^\gamma(t), v^\gamma(t), u_t^\gamma(t), v_t^\gamma(t)) \subset \mathfrak{A}^\gamma$  таких, что  $(u^\gamma(T_0), v^\gamma(T_0), u_t^\gamma(T_0), v_t^\gamma(T_0)) = a$  для некоторого  $T_0 > 0$ , которое мы выберем далее удоб-

ным для нас образом. В силу теоремы 2 энергия системы  $E(t)$ , определенная соотношением (6), ограничена на рассматриваемых траекториях равномерно по параметру  $\gamma$  и переменной  $t$ . Следовательно, мы можем записать для последовательности функции  $w(t) = u^\gamma(t) - v^\gamma(t)$  неравенство (13) с константами, не зависящими от параметра  $\gamma$ . Положим в (13)  $\varepsilon = \eta/8$  и выберем значение  $T_0$  так, чтобы второе слагаемое  $C(R, \varepsilon)/T_0$  в (13) не превосходило  $\eta/8$ . Используя *интерполяционные неравенства* [20], получаем:

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \|w\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq C_1 \sup_{t \in [0, T_0]} \|w\|_{H^2(\Omega)}^{(1+\delta)/2} \cdot \|w\|_{L_2(\Omega)}^{(1-\delta)/2} \leq C(R) \sup_{t \in [0, T_0]} \|w\|_{L_2(\Omega)}^{(1-\delta)/2},$$

откуда, ввиду (9), следует, что  $\sup_{t \in [0, T_0]} \|w\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq \eta/8$  при достаточно больших значениях параметра  $\gamma$ . Тогда из (13) следует, что  $\text{dist}_H(a^\gamma, \text{diag}H) \leq \eta/2$  для больших  $\gamma$ , что противоречит (14). Следовательно, выдвинутое предположение неверно и  $\mathfrak{A}(\infty) \subset \text{diag}H$ .

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** Рассмотрена система связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Установлено явление асимптотической синхронизации динамики системы в терминах ее глобального аттрактора в пределе, когда интенсивность связи  $\gamma$  и время  $t$  стремятся к бесконечности.

Во второй части исследования мы планируем более подробно описать структуру верхнего предела аттрактора  $\mathfrak{A}(\infty)$ , а также доказать наличие синхронизации системы для конечных значений параметра связи  $\gamma$  при дополнительных условиях на параметры и функции задачи (1) – (4).

**Список литературы:** 1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization. A universal concept in nonlinear science. – Cambridge, Cambridge University Press, 2001. 2. *Strogatz S.* Sync: The emerging science of spontaneous order. – New York: Hyperion Press, 2003. 3. *Afraimovich V.S., Rodrigues H.M.* Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations // International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995). – N.J. World Scientific Publishing, River Edge, 1998. – 3 – 17. 4. *Rodrigues H.M.* Abstract methods for synchronization and applications // Appl. Anal. – 1996. – № 62. – 263 – 296. 5. *Caraballo T., Kloeden P.E.* The persistence of synchronization under environmental noise // Proc. Roy. Soc. London A. – 2005. – № 461. – 2257 – 2267. 6. *Kloeden P.E.* Synchronization of nonautonomous dynamical systems // Elect. J. Diff. Eqns. – 2003. – 1 – 10. 7. *Carvalho A.N., Rodrigues H.M., Doltko T.* Upper semicontinuity of attractors and synchronization // J. Math. Anal. Appl. – 1998. – № 220. – 13 – 41. 8. *Rekalo A.M., Chueshov I.D.* Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain // Sb. Math. – 2004. – № 195 – 97 – 119. 9. *Chueshov I.* Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems // Applicable Analysis. – 2007. – V. 86, № 3. – 269 – 286. 10. *Naboka O.* Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates // Nonlinear Analysis – 2007. – № 67. – 1015 – 1026. 11. *Naboka O.* Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – № 341. – 1107 – 1124. 12. *Naboka O.* On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping // CPAA – 2009. – Vol. 8, № 6 – 1933 – 1956. 13. *Naboka O.* On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains // Nonlinear Analysis. – 2009. – № 71. – 6299 – 6311. 14. *Berger M.* A new approach to the large deflection of plate // J. Appl. Mech. – 1955. – № 22. – 465 – 472. 15. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. – Providence, Rhode Island, AMS, 1997. 16. *Chueshov I., Lasiecka I.* Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics. – Springer, 2010. 17. *Chueshov I., Lasiecka I.* Long-time

dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping // *J. of Diff. Eq.* – 2007. – № 233. – 42 – 86. **18.** Kapitansky L.V., Kostin I.N. Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations // *Leningrad Math. J.* – 1991. – № 2. – 97 – 117. **19.** Raugel G. Global attractors in partial differential equations // *Handbook of Dynamical Systems.* – Amsterdam, B. Fiedler (ed.) Elsevier. – 2002. – Vol. 2 – 885 – 982. **20.** Lions J.-L., Magenes E. *Problemes aux limites non homogenes et applications.* – Paris, Dunod, 1968.

**Bibliography (transliterated):** **1.** Pikovsky, A., M. Rosenblum and J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in nonlinear science.* Cambridge University Press, 2001. Print. **2.** Strogatz, S. *Sync: The emerging science of spontaneous order.* New York: Hyperion Press, 2003. Print. **3.** Afraimovich, V. S., and H. M. Rodrigues. "Uniform dissipativeness and synchronization of nonautonomous equations." *International Conference on Differential Equations (Lisboa 1995).* World Scientific Publishing. River Edge, N. J. 1998. 3–17. Print. **4.** Rodrigues, H. M. "Abstract methods for synchronization and applications." *Appl. Anal.* No.62. 1996. 263–296. Print. **5.** Caraballo, T., and P. E. Kloeden. "The persistence of synchronization under environmental noise." *Proc. Roy. Soc. London A.* No.461. 2005. 2257–2267. Print. **6.** Kloeden, P. E. "Synchronization of nonautonomous dynamical systems." *Elect. J. Diff. Eqns.* 2003. 1–10. Print. **7.** Carvalho, A. N., H. M. Rodrigues and T. Doltko. "Upper semicontinuity of attractors and synchronization." *J. Math. Anal. Appl.* No.220. 1998. 13–41. Print. **8.** Rekaló, A. M., and I. D. Chueshov. "Global attractor of a contact parabolic problem in a thin two-layer domain." *Sb. Math.* No. 195. 2004. 97–119. Print. **9.** Chueshov, I. "Invariant manifolds and non-linear master-slave synchronization in coupled systems" *Applicable Analysis.* Vol.86. No.3. 2007. 269–286. Print. **10.** Naboka, O. "Synchronization of nonlinear oscillations of two coupling Berger plates." *Nonlinear Analysis.* No. 67. 2007. 1015–1026. Print. **11.** Naboka, O. "Synchronization Phenomena in the System Consisting of m Coupled Berger Plates." *J. Math. Anal. Appl.* No. 341. 2008. 1107–1124. Print. **12.** Naboka, O. "On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior damping." *CPAA.* Vol. 8. No. 6. 2009. 1933–1956. Print. **13.** Naboka, O. "On partial synchronization of nonlinear oscillations of two Berger plates coupled by internal subdomains." *Nonlinear Analysis.* No. 71. 2009. 6299–6311. Print. **14.** Berger, M. "A new approach to the large deflection of plate." *J. Appl. Mech.* No. 22. 1955. 465–472. Print. **15.** Showalter, R. E. *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations.* Providence, Rhode Island: AMS, 1997. Print. **16.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. *Von Karman Evolution Equations. Well-Posedness and Long-Time Dynamics.* Springer, 2010. **17.** Chueshov, I., and I. Lasiecka. "Long-time dynamics of von Karman semi-flows with non-linear boundary/interior damping." *J. of Diff. Eq.* No. 233. 2007. 42–86. Print. **18.** Kapitansky, L. V., and I. N. Kostin. "Attractors of nonlinear evolution equations and their approximations." *Leningrad Math. J.* No. 2. 1991. 97–117. Print. **19.** Raugel, G. "Global attractors in partial differential equations." *Handbook of Dynamical Systems.* Amsterdam: B. Fiedler (ed.) Elsevier. Vol. 2. 2002. 885–982. Print. **20.** Lions, J.-L., and E. Magenes. *Problemes aux limites non homogenes et applications.* Paris: Dunod, 1968. Print.

Поступила (received) 08.06.2015

УДК 519.64, 539.3

**О.М. НАЗАРЕНКО**, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми

## **МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОДІЇ ПЛОСКИХ ГАРМОНІЧНИХ ХВИЛЬ З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

Розглянуто плоскі задачі дифракції гармонічних хвиль на жорстких та пружних включеннях довільного поперечного перерізу. Будуються інтегральні зображення для амплітуд переміщень відбитого хвильового поля і крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які реалізовані чисельно. Обґрунтовуються додаткові умови, необхідні для однозначної розв'язності сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів проводиться методом механічних квадратур.

© О. М. Назаренко, 2015

**Ключові слова:** дифракція, жорстке або пружне включення, сингулярні інтегральні рівняння, додаткові умови, чисельна реалізація.

**Вступ.** Сучасні конструкції, що використовуються в техніці та будівництві, працюють в умовах динамічних навантажень. Для практики актуальним є дослідження концентрації напружень поблизу різного типу включень, які є складовими елементів конструкцій і перебувають під дією циклічних навантажень.

При розв'язанні динамічних задач у випадку неоднорідностей складної геометричної форми ефективно використовується апарат методу  $R$  – функцій [1], променеві методи [2], метод інтегральних рівнянь [3, 4]. У даній роботі розвивається універсальний підхід, згідно з яким будуються загальні інтегральні зображення для переміщень відбитого хвильового поля, що дає змогу одержати систему сингулярних інтегральних рівнянь для кожного типу розсіювачів (порожнин, жорстких чи пружних включень). Моделювання контакту на границі пружного включення базується на умовах типу склейки [5] (неперервність переміщень і напружень на поверхні контакту), а граничні умови на поверхні жорсткого включення моделюються, виходячи з поступального і обертального рухів абсолютно жорсткого тіла [6].

**Постановка задачі.** Розглянемо в ізотропному середовищі нескінченно довгий вздовж осі  $Ox_3$  циліндр, поперечний переріз якого обмежений замкнутим контуром  $L$  типу Ляпунова. Крива  $L$  розбиває площину  $Ox_1x_2$  на дві області: зовнішню  $D_1$  і внутрішню  $D_2$ . Будемо вважати, що внутрішність циліндра є пружним або жорстким включенням, і нехай  $\rho_k$  і  $\lambda_k$ ,  $\mu_k$  – щільність і коефіцієнти Ламе матриці ( $k=1$ ) та включення ( $k=2$ ). За умови, що зовнішнє поле переміщень діє перпендикулярно осі  $Ox_3$ , будемо розглядати дифракцію на циліндрі гармонічної хвилі розширення-стиску ( $P$  - випадок)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} x_2}, \gamma_1^{(1)} = \omega/c_1^{(1)}, \tau_1 = const \quad (1)$$

або зсуву ( $SV$  – випадок)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2^{(1)} = \omega/c_2^{(1)}, \tau_2 = const. \quad (2)$$

Тут  $c_1^{(1)}$  і  $c_2^{(1)}$  – швидкості подовжньої і поперечної хвиль,  $\omega$  – частота коливань, залежність від часу  $t$  виражається множником  $e^{-i\omega t}$  ( $i^2 = -1$ ).

Взаємодіючи з включенням, набігаюча хвиля породжує відбиті подовжні та поперечні хвилі. У випадку пружного включення виникають також хвилі, що проникають всередину циліндра. Нехай  $U_1^{(k)}$  і  $U_2^{(k)}$  амплітуди переміщень відбитого ( $k=1$ ) і проникаючого ( $k=2$ ) полей відповідно. Тоді загальне поле переміщень  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  дорівнює  $(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, U_2^{(1)} + U_2^{(0)})$  в матриці і  $(U_1^{(2)}, U_2^{(2)})$  всередині пружного включення.

На нескінченності компоненти  $U_1^{(1)}$  і  $U_2^{(1)}$  повинні задовольняти умовам випромінювання [7]. В матриці і всередині пружного включення повинні виконуватись рівняння руху Ламе

$$\mu_k \Delta \mathbf{U}^{(k)} + (\lambda_k + \mu_k) \text{grad div } \mathbf{U}^{(k)} + \omega^2 \rho_k \mathbf{U}^{(k)} = 0. \quad (3)$$

На границі розділу двох середовищ (матриця – пружне включення) припускаємо неперервність при переході через  $L$  компонентів вектора переміщень  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$  і тангенціальної та нормальної складових вектора напружень  $\mathbf{S} = (S_1, S_2)$ :

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = (U_m^{(2)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (S_m^{(1)} + S_m^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = (S_m^{(2)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad m = \overline{1, 2}. \quad (4)$$

Співвідношення (4) необхідно розуміти як рівність граничних значень відповідних величин при наближенні точки спостереження  $z = x_1 + iy_1$  до точки  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$  із областей  $D_1$  і  $D_2$ .

На поверхні жорсткого включення граничні умови мають вигляд:

$$(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = B_1 - \omega_0 \eta_0, \quad (U_2^{(1)} + U_2^{(0)}) \Big|_{z \rightarrow \zeta_0} = B_2 + \omega_0 \xi_0, \quad (5)$$

де  $B_1, B_2$  і  $\omega_0$  – амплітуди поступального руху і жорсткого повороту включення.

Враховуючи (5) та використовуючи другий закон Ньютона, отримаємо рівняння, що описують поступальний рух жорсткого включення:

$$\int_L S_m ds_0 = -\omega_0 \rho_2 \sigma B_m, \quad m = 1, 2. \quad (6)$$

Обертальний рух жорсткого включення описується рівнянням:

$$\int_L (S_1 (\eta_0 - x_2) - S_2 (\xi_0 - x_1)) ds_0 = -\omega^2 J_A \omega_0. \quad (7)$$

Тут  $\sigma$  – площа обмежена контуром  $L$ ,  $J_A$  – момент інерції включення відносно довільної точки  $A(x, y)$ . Величини  $S_1$  і  $S_2$  виражаються через компоненти тензора амплітуд напружень  $\tau_{11}, \tau_{22}$  і  $\tau_{12}$  за формулами

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12}) e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22}) e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12}) e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\varphi_0$  – кут додатної дотичної  $s_0$  до  $L$  у точці  $\zeta_0 \in L$  з віссю  $Ox_1$  ( $n_0$  – вектор нормалі до  $L$  в точці  $\zeta_0$ ).

На границі циліндрів нас буде цікавити розподіл амплітуд напружень

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \tau_{n_{s_0}} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = \tau_{11} + \tau_{22} - \tau_{n_0}. \quad (9)$$

**Метод розв'язання задачі.** Запропонований в роботі підхід ґрунтується на побудові інтегральних зображень амплітуд компонентів переміщень відбитого і проникаючого всередину пружного включення хвильових полів у такому вигляді, щоб вони автоматично задовольняли рівнянням руху та умовам випромінювання на нескінченності. Слідуючи [5], подамо амплітуди переміщень у вигляді потенціалів типа простого шару ( $m = 1, 2$ ):

$$U_m^{(k)}(x, y) = \int_L (f_1^{(k)}(s) G_{m1}^{(k)}(z, \zeta) + f_2^{(k)}(s) G_{m2}^{(k)}(z, \zeta)) ds. \quad (10)$$

Тут  $f_1^{(k)}(s)$  і  $f_2^{(k)}(s)$  – невідомі функції ( $k = 1, 2$ ),  $G_{1j}^{(k)}$  і  $G_{2j}^{(k)}$  – функції Грі-

на ( $j=1,2$ ), що являють собою амплітуди переміщень  $j$ -го стану в точці  $z = x_1 + ix_2 \in D_k$  при дії гармонічної сили, зосередженої в точці  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  і направленої вздовж осі  $Ox_1$  (1-й стан) або осі  $Ox_2$  (2-й стан).

Для функцій Гріна отримані наступні вирази:

$$G_{11}^{(k)} + iG_{21}^{(k)} = G_{12}^{(k)} - iG_{22}^{(k)} = d_k \left( \frac{\chi_k}{4} \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)} \right), \nu_k = \frac{\lambda_k}{2(\lambda_k + \mu_k)},$$

$$e^{2i\alpha} (G_{11}^{(k)} - iG_{21}^{(k)}) = e^{-2i\alpha} (G_{12}^{(k)} + iG_{22}^{(k)}) = \frac{d_k}{4} \phi_{22}^{(k)}, d_k = \frac{i}{4\mu_k(1-\nu_k)},$$

$$\phi_{ij}^{(k)} = \frac{\gamma_1^{(k)j} H_j^{(1)}(\gamma_1^{(k)} r) - \gamma_2^{(k)j} H_j^{(1)}(\gamma_2^{(k)} r)}{\gamma_1^{(k)2} - \gamma_2^{(k)2}}, z - \zeta = r e^{i\alpha}, e_k = \left( \frac{1}{2} - \nu_k \right) \gamma_2^{(k)2}, \quad (11)$$

де  $H_j^{(1)}(x)$  – функція Ханкеля 1-го роду  $j$ -го порядку;  $\chi_k = 3 - 4\nu_k$ .

Для похідних компонентів матриці Гріна маємо

$$e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (G_{11}^{(k)} + iG_{21}^{(k)}) = e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{12}^{(k)} - iG_{22}^{(k)}) = -\frac{d_k}{2} \left( \frac{\chi_k}{4} \phi_{31}^{(k)} - e_k \phi_{11}^{(k)} \right),$$

$$e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (G_{11}^{(k)} - iG_{21}^{(k)}) = e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (G_{12}^{(k)} + iG_{22}^{(k)}) = \frac{d_k}{8} \phi_{31}^{(k)}, \bar{z} = x_1 - ix_2. \quad (12)$$

Можна показати, що ядро  $\phi_{11}^{(k)}$ , визначене в (11), є неперервним, а ядра  $\phi_{31}^{(k)}$  і  $\phi_{33}^{(k)}$  мають особливість типу Коші. Тому з метою отримання сингулярних інтегральних рівнянь граничні умови для переміщень в (4) у випадку пружного включення і (5) у випадку жорсткого включення диференціювались по дуговій координаті  $s_0$ .

Враховуючи компактні вирази для вказаних в (11) комбінацій функцій Гріна і бажані властивості їх похідних в (12), в роботі граничні умови для похідних переміщень задовольнялись не для самих переміщень  $U_1$  і  $U_2$ , а для їх комбінацій  $U_1 \pm iU_2$ . Аналогічно умови неперервності при переходу через  $L$  напружень  $S_1$  і  $S_2$  (4) задовольнялись для комбінацій  $S_1 \pm iS_2$ .

В результаті задача дифракції гармонічної прокольної (1) або поперечної (2) хвилі на циліндричному пружному включенні зводиться до системи чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь (підсумовування по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L (p_n^{(2)}(s) B_{mn}^{(2)}(s_0, s) - p_n^{(1)}(s) B_{mn}^{(1)}(s_0, s)) ds = N_m(s_0), m = 1, 2, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} p_m^{(1)}(s_0) + \frac{1}{2} p_m^{(2)}(s_0) + \int_L (p_n^{(2)}(s) C_{mn}^{(2)}(s_0, s) - p_n^{(1)}(s) C_{mn}^{(1)}(s_0, s)) ds = T_m(s_0),$$

$$B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = -d_k \left( \frac{\chi_k}{4} \Phi_{31}^{(k)} - e_k \Phi_{11}^{(k)} \right) \cos(\varphi_0 - \alpha_0), \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$B_{12}^{(k)} = \frac{d_k}{8} \left( \Phi_{31}^{(k)} e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), B_{21}^{(k)} = \frac{d_k}{8} \left( \Phi_{31}^{(k)} e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$C_{11}^{(k)} = h_k \left( a_k \Phi_{31}^{(k)} - b_k \Phi_{11}^{(k)} \right), C_{12}^{(k)} = h_k \left( \left( \Phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \Phi_{11}^{(k)} \right) e^{i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$C_{22}^{(k)} = h_k \left( \bar{a}_k \Phi_{31}^{(k)} - \bar{b}_k \Phi_{11}^{(k)} \right), C_{21}^{(k)} = h_k \left( \left( \Phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \Phi_{11}^{(k)} \right) e^{-i(\varphi_0 + \alpha_0)} - \Phi_{33}^{(k)} e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$\alpha_k = e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - \chi_k e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}, b_k = \gamma_2^{(k)2} \left( e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - 2(1 - \nu_k) e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)} \right),$$

$$h_k = 1/16(1 - \nu_k), p_n^{(k)}(s) = f_1^{(k)}(s) - (-1)^n i f_2^{(k)}(s), k = 1, 2,$$

$$T_k = \frac{2\mu_1 \gamma_1^{(1)} \tau_1}{1 - 2\nu_1} e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} \left( (-1)^k (1 - \nu_1) \cos \varphi_0 - i\nu_1 \sin \varphi_0 \right)$$

$$N_1 = -N_2 = \gamma_1^{(1)} \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} \sin \varphi_0, \text{ у } P - \text{ випадку,}$$

$$T_k = i\mu_1 \gamma_2^{(1)} \tau_2 e^{-i(\gamma_2^{(1)} \eta_0 - (-1)^k \varphi_0)}, N_k = -i\gamma_2^{(1)} \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0} \sin \varphi_0 \text{ у } SV - \text{ випадку.}$$

Тут ядра  $B_{mn}$  і  $C_{nn}$  ( $n=1,2$ ) є сингулярними,  $B_{nn}$  і  $C_{nn}$  ( $m \neq n$ ) – неперервними.

Отже, перші два рівняння в (13) є сингулярними інтегральними рівняннями 1-го роду, останні два – сингулярними інтегральними рівняннями 2-го роду. Необхідні для однозначної розв'язності сингулярних інтегральних рівнянь 1-го роду дві додаткові умови впливають із рівності переміщень на  $L$  (4) в одній фіксованій точці  $s_* \in L$  або із рівності середніх переміщень на  $L$ .

Виконання модифікованих граничних умов для переміщень (диференціювання по дуговій координаті  $s_0$ ) на контурі  $L$  жорсткого включення зводить крайову задачу до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь 1-го роду (підсумовування по  $n=1,2$ ):

$$\int_L p_n^{(1)}(s) B_{mn}^{(1)}(s_0, s) ds - \omega_0 M_m(s_0) = -N_m(s_0), m = 1, 2, \quad (14)$$

$$M_1 = i\omega_0 e^{i\varphi_0}, M_2 = -i\omega_0 e^{-i\varphi_0}.$$

Необхідні для замикання алгоритму три додаткових умови впливають із законів поступального (6) і обертального (7) рухів абсолютно жорсткого тіла.

**Результати числових досліджень та їх аналіз.** При чисельній реалізації побудованих алгоритмів у даній роботі використано метод механічних квадратур [8]. У якості прикладу розглядалося середовище, що містить включення еліптичного поперечного перерізу

$$\xi = a \sin \beta, \eta = -b \cos \beta, 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (15)$$

На границі  $L$  включення проводилось обчислення безрозмірених напружень

$$\sigma_n = |\tau_n|/P, \sigma_s = |\tau_s|/P, \sigma_{ns} = |\tau_{ns}|/P, \quad (16)$$

де  $\tau_n$  і  $\tau_{ns}$  – амплітуди нормального і тангенціального напружень на  $L$  (9),  $\tau_s$  визначається зі співвідношення  $\tau_s + \tau_n = \tau_{11} + \tau_{22}$ ;  $P$  – максимальне напруження у падаючій хвилі, що дорівнює  $\gamma_1^{(1)} \tau_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)$  у  $P$ -випадку (1) і  $\gamma_2^{(1)} \tau_2 \mu_1$  – у  $SV$ -випадку (2).

На рис. 1 наведені залежності максимальних значень напружень (16) на контурі еліптичного пружного включення (15) від відношення модулів зсуву волокна і матриці  $\mu_2/\mu_1$  при набіганні на циліндр поперечної хвилі (2) ( $a/b=2$ ,  $\nu_1=\nu_2=0,3$ ,  $\rho_2/\rho_1=2$ ). Криві 1, 2, 3 і 4 відповідають значенням параметра  $\gamma_2^{(1)}a$ , рівним 0,4; 0,7; 1,0 і 1,3.

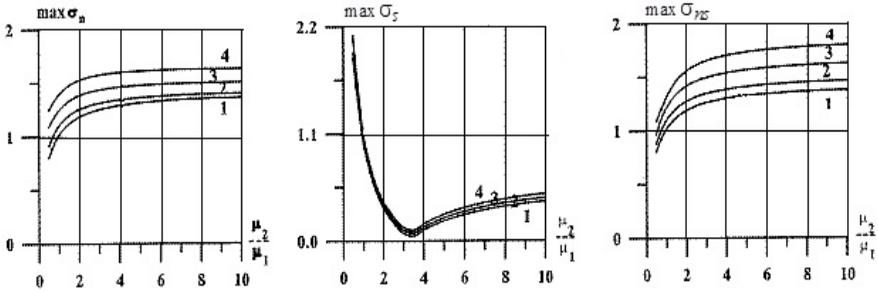


Рис. 1 – Максимальні напруження на контурі пружного включення.

Розрахунки показують, що при  $\mu_2/\mu_1=3,3$  максимальні значення напружень  $\sigma_s$  досягають мінімуму, а  $\max \sigma_n$  і  $\max \sigma_{ns}$  зростають на всьому діапазоні зміни параметра  $\mu_2/\mu_1$ . При  $\mu_2/\mu_1 < 1$  на границі матриця-волокну переважним може бути напруження  $\sigma_s$ . Якщо  $\mu_2/\mu_1 > 1$ , то вплив  $\sigma_s$  знижується і зростають значення  $\sigma_n$  і  $\sigma_{ns}$ .

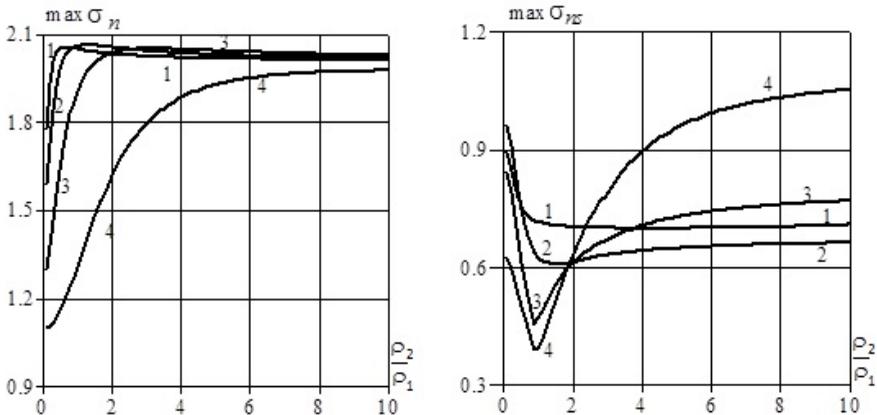


Рис. 2 – Максимальні напруження на контурі жорсткого включення.

При дифракції подовжньої (1) або поперечної (2) хвилі на жорсткому включенні напруження  $\sigma_s$  завжди менше  $\sigma_n$  і зв'язане з ним співвідношенням  $\sigma_s = \sigma_n \nu_1 / (1 - \nu_1)$ . Рис. 2 ілюструє розподіл максимальних контурних напружень  $\sigma_n$  і  $\sigma_{ns}$  у залежності від відношення щільностей включення та ма-

тричі  $\rho_2 / \rho_1$  при  $a/b = 0,5$ ;  $\nu_1 = 0,3$  і набіганні на циліндр подовжньої хвилі (1). Криві 1, 2, 3 і 4 відповідають значенням  $d/2a$ , рівним 1/3; 0,5; 1,0 і 2,5 ( $d = 2\pi / \gamma_1^{(1)}$  – довжина падаючої хвилі).

Аналіз показує, що зі збільшенням параметра  $\rho_2 / \rho_1$  максимальні значення напружень  $\sigma_n$  спочатку зростають, а потім при досягненні деякого значення (залежного від відношення довжини хвилі до осі еліпса) вони поступово стабілізуються, що відповідає дифракції подовжньої хвилі на нерухомому включенні [9]. Напруження  $\sigma_{ns}$ , навпаки, спочатку спадають, а потім настає процес стабілізації. Причому у випадку коротких хвиль ( $d/2a = 1/3$  і 0,5) жорстке включення починає вести себе як нерухоме вже при  $\rho_2 / \rho_1 = 3$ . Наприклад, при  $d/2a = 1/3$  і  $\rho_2 / \rho_1 = 3$  максимальні напруження на контурі жорсткого включення відрізняються від відповідних напружень на контурі нерухомого включення менше ніж на 2%. У випадку довгих хвиль ( $d/2a = 2,5$ ) навіть при достатньо великих значеннях  $\rho_2 / \rho_1$  ( $\rho_2 / \rho_1 < 10$ ) максимальні значення  $\sigma_n$  і  $\sigma_{ns}$  продовжують змінюватись зі збільшенням. Тут стабілізація напружень відбувається при  $> 10$ .

**Висновки.** У даній статті запропоновано підхід до розв'язання задач дифракції пружних гармонічних хвиль на циліндричних пружних або жорстких включеннях в умовах плоскої деформації. Будуються інтегральні зображення амплітуд переміщень відбитого поля в матриці і проникаючого поля у волокні (у випадку пружного включення). Крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь і обґрунтовуються необхідні додаткові умови. Чисельна реалізація інтегральних рівнянь проводилася методом механічних квадратур. Приводяться залежності максимальних напружень на контурі еліптичного включення в залежності від механічних, геометричних та динамічних характеристик.

**Список літератури:** 1. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Сизова Н.Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика. – 1996. – 349, № 2. – С. 175 – 179. 2. Подільчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) // Прикладная механика. – 1996. – 32, № 12. – С. 3 – 27. 3. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 – 127. 4. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей // Харьков: Акад. ВВ МВД Украины. – 2012. – 544 с. 5. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации // Динамические системы. – 2005. – №19. – С. 54 – 60. 6. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2006. – №3. – С. 113 – 117. 7. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах // К.: Наук. думка. – 1981. – 284 с. 8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции // К.: Наук. думка. – 1984. – 344 с. 9. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции упругих волн на цилиндрических включениях // Вісник СумДУ. Сер. Фізика, математика, механіка. – 2004. – №8. – С. 144 – 150.

**Bibliography (transliterated):** 1. Guljaev, Yu. V., et al. "Issledovanie difrakcii uprugih voln na plastinakh, oslablennyh dvumja otverstijami proizvol'noj formy." *DAN. Matematicheskaja fizika*. Vol. 349. No. 2. 1996. 175–179. Print. 2. Podil'chuk, Yu. N., and Yu. K. Rubcov. "Primenenie luchevyh

metodov v zadachah rasprostraneniya i rassejaniya voln (obzor)." *Prikladnaja mehanika*. Vol. 32. No. 12. 1996. 3–27. Print. 3. Fil'shtinskij, L. A. "Difrakcija uprugih voln na treshhinah, otverstijah, vkljuchenijah v izotropnoj srede," *Izv. AN SSSR. Mehanika tverdogo tela*. No. 4. 1991. 119–127. Print. 4. Gandel', Yu. V., and V. D. Dushkin. *Matematicheskie modeli dvumernyh zadach difrakcii: singuljarnye integral'nye uravnenija i chislennye metody diskretnyh osobennostej*. Kharkov: Akad. VV MVD Ukrainy, 2012. Print. 5. Nazarenko, A. M. "Difrakcija garmonicheskikh voln na cilindricheskom uprugom vkljuchenii v uslovijah ploskoj deformacii." *Dinamicheskie sistemy*. No. 19. 2005. 54–60. Print. 6. Nazarenko, A. M., B. E. Panchenko and A. M. Lozhkin. "Difrakcija voln ploskoj deformacii na zhestkomo cilindricheskom vkljuchenii proizvol'nogo poperechnogo sechenija." *Visnyk Donec'kogo universytetu. Ser. A: Pryrod-nychi nauky*. No. 3. 2006. 113–117. Print. 7. Grinchenko, V. T., and V. V. Meleshko. *Garmonicheskie kolebanija i volny v uprugih telah*. Kyiv: Nauk. dumka, 1981. Print. 8. Panasjuk, V. V., M. P. Savruk and Z. T. Nazarchuk. *Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij v dvumernyh zadachah difrakcii*. Kyiv: Nauk. dumka, 1984. Print. 9. Nazarenko, A. M., B. E. Panchenko and A. M. Lozhkin. "Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij v zadachah difrakcii uprugih voln na cilindricheskikh vkljuchenijah." *Visnyk SumDU. Ser.: Fizyka, matematyka, mehanika*. No. 8. 2004. 144–150. Print.

Надійшла (received) 05.06.2015

УДК 629.423.3

**Л.В. ОВЕРЬЯНОВА**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;

**О.В. ОМЕЛЬЯНЕНКО**, студентка, НТУ «ХПИ»;

**И.В. НОВОФАСТОВСКИЙ**, студент, НТУ «ХПИ»

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ИНЕРЦИОННОГО НАКОПИТЕЛЯ ЭНЕРГИИ В СИСТЕМЕ ТЯГОВОГО ПРИВОДА ПРИ ТОРМОЖЕНИИ ЭЛЕКТРОПОЕЗДА**

Исследуется работа тягового электропривода электропоезда с бортовым электромеханическим инерционным накопителем энергии. Для расширения диапазона рабочих напряжений тягового электродвигателя и системы электромеханического преобразования энергии накопителя предлагается применить реверсивный повышающе-понижающий DC-DC преобразователь. Приводится схема включения накопителя в тяговый электропривод с DC-DC преобразователем, а также математическая модель обмена энергией в исследуемой системе. Установлено, что предлагаемое схематическое решение позволяет повысить эффективность утилизации энергии торможения электроподвижного состава, которая может быть использована в процессе последующего разгона поезда.

**Ключевые слова:** тяговый электропривод, электромеханический инерционный накопитель энергии, DC-DC преобразователь, электродвижущая сила, энергия обмена.

**Введение.** Морально устаревший электроподвижной состав (ЭПС) пригородного сообщения, эксплуатируемый в настоящее время на железных дорогах страны, нуждается в замене. Новый подвижной состав такого назначения должен создаваться на базе перспективных технологий транспортного машиностроения, одной из которых является энергосбережение. Для пригородного подвижного состава, характеризующегося частыми пусками и остановами, на которые расходуется от 30% энергии, затрачиваемой на тягу поездов, утилизация и последующее использование этой энергии является достаточно эффективным энергосберегающим средством. Одним из эффективных путей является использование на подвижном составе накопителей энер-

гии. Проблема состоит в выборе типа накопителя, определении схем и алгоритмов его работы для достижения максимального эффекта экономии электроэнергии, затрачиваемой для тяги поездов.

**Цель и постановка задачи.** Проведенное ранее исследование работы электрохимического инерционного накопителя энергии в тяговом приводе электропоезда [1] показало, что обмен энергией между тяговым электродвигателем (ТЭД) и накопителем имеет место до тех пор, пока *электродвижущая сила* (ЭДС) машины, работающей в генераторном режиме, не уравновесится противо-ЭДС машины, работающей двигателем. При этом на каждом цикле «торможение – стоянка – разгон» ЭПС экономится до 10% энергии.

Для повышения эффективности работы накопителя, то есть запасаания накопителем большего количества энергии при торможении, а также повышенного использования ранее накопленной энергии при разгоне ЭПС необходимо устройство, позволяющее расширить диапазон рабочих напряжений ТЭД и системы электрохимического преобразования энергии накопителя.

Цель данной статьи – указать один из путей повышения уровня энергии обмена между ТЭД и накопителем за счет схемотехнических решений, обеспечивающих расширение диапазона рабочих напряжений.

Для достижения этой цели необходимо разработать схему и математическую модель работы тягового электропривода электропоезда ЭР2Т с бортовым электрохимическим инерционным накопителем энергии и DC-DC преобразователем.

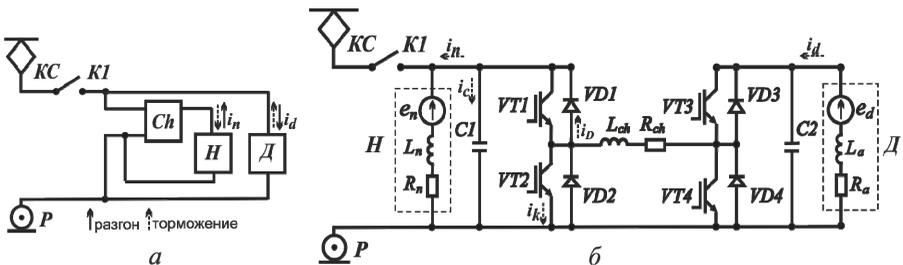


Рис. 1. – Схемы включения накопителя в тяговый привод ЭПС с DC-DC преобразователем; *а* – функциональная; *б* – принципиальная (режим торможения ЭПС) *Д* – эквивалентный тяговый электродвигатель; *Н* – накопитель; *Ch* – DC-DC преобразователь; *KI* – ключ; *KC* – контактная сеть; *P* – рельс; *VT1...VT4* – IGBT-транзисторы; *VD1...VD4* – диоды; *C1, C2* – конденсаторы; *L<sub>a</sub>, L<sub>n</sub>, L<sub>ch</sub>* – индуктивности ТЭД, накопителя и DC-DC преобразователя; *R<sub>a</sub>, R<sub>n</sub>, R<sub>ch</sub>* – активные сопротивления ТЭД, накопителя и DC-DC преобразователя; *e<sub>d</sub>, e<sub>n</sub>* – ЭДС ТЭД и накопителя; *i<sub>d</sub>* – ток двигателя; *i<sub>n</sub>* – ток накопителя; *i<sub>k</sub>* – ток через транзистор *VT2*; *i<sub>d</sub>* – ток через диод *VD1*; *i<sub>c</sub>* – ток конденсатора *C1*.

**Математическая модель.** Одним из способов регулирования напряжений в цепях электрохимического преобразования энергии постоянного тока является применение *импульсных преобразователей* [2]. Для нашего случая целесообразно использование в схеме тягового привода с накопителем *ревер-*

сивного повышающе-понижающего DC-DC преобразователя, который может обеспечить повышающий коэффициент преобразования в 3...4 единицы.

Функциональная и принципиальная схемы включения накопителя в тяговый привод ЭПС с DC-DC преобразователем показаны на рис. 1.

В режиме торможения ЭПС эквивалентный ТЭД (два тяговых двигателя, включенных параллельно) работают в генераторном режиме, а система электромеханического преобразования энергии (СЭМПЭ) накопителя – в режиме двигателя. До тех пор, пока ЭДС СЭМПЭ накопителя не уравновесит противо-ЭДС ТЭД, ток от ТЭД к накопителю протекает через транзистор  $VT3$  и диод  $VD1$ .

Расширить диапазон рабочих напряжений в исследуемой системе и, тем самым, продолжить процессы обмена энергией после того, как ЭДС накопителя уравновесит противо-ЭДС ТЭД, позволит DC-DC преобразователь, работа которого включает две фазы – накопления энергии в дросселе и ее передачи в нагрузку.

В фазе накопления ток от ТЭД протекает через дроссель  $L_{ch}$  и запасает в нем энергию. Транзисторы  $VT3$  и  $VT2$  находятся в проводящем состоянии. Диод  $VD1$  при этом блокирует нагрузку и не позволяет конденсатору фильтра разряжаться. Ток в накопителе поддерживается только за счет энергии, запасенной в конденсаторе  $C1$ .

Когда транзистор  $VT2$  закрывается, схема переходит в фазу передачи энергии дросселя  $L_{ch}$  в нагрузку – ЭДС самоиндукции дросселя суммируется с напряжением на зажимах ТЭД. В итоге, напряжение на зажимах СЭМПЭ накопителя становится выше напряжения на зажимах ТЭД.

Математическая модель обмена энергией в тяговом приводе с накопителем в режиме торможения ЭПС при работе DC-DC преобразователя в повышающем режиме, имеет вид:

фаза накопления

$$\begin{cases} i_d R_a + L_a \frac{di_d}{dt} + R_{ch} i_d + L_{ch} \frac{di_d}{dt} = e_d; & i_D R_D + \frac{1}{C} \int i_c dt = 0; \\ i_n R_n + L_n \frac{di_n}{dt} - \frac{1}{C} \int i_c dt = -e_n; & i_d - i_k - i_D = 0; \quad i_D - i_c - i_n = 0; \\ \frac{dv_{ps}}{dt} = -K_v \cdot \frac{e_d i_d}{v_{ps}} - f_w; & \frac{dw_n}{dt} = K_w \cdot i_n, \end{cases} \quad (1)$$

фаза передачи энергии

$$\begin{cases} i_d R_a + L_a \frac{di_d}{dt} + R_{ch} i_d + L_{ch} \frac{di_d}{dt} + i_d R_D + \frac{1}{C} \int i_c dt = e_d; \\ i_n R_n + L_n \frac{di_n}{dt} - \frac{1}{C} \int i_c dt = -e_n; & i_d - i_c - i_n = 0; \\ \frac{dv_{ps}}{dt} = -K_v \cdot \frac{e_d i_d}{v_{ps}} - f_w; & \frac{dw_n}{dt} = K_w \cdot i_n, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R_D$  – активное сопротивление диода  $DI$  в прямом направлении.

Продифференцировав уравнения, содержащие подынтегральные функции, а затем, понизив порядок полученных уравнений, представим системы (1), (2) в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_d}{dt} = \frac{e_d - R_a i_d - R_{ch} i_d}{L_a + L_{ch}}; \quad \frac{di_D}{dt} = -\frac{i_c}{CR_d}; \\ \frac{di_n}{dt} = t_k; \quad \frac{dt_k}{dt} = -\frac{1}{L_n} \left( \frac{de_n}{dt} - \frac{i_c}{C} + t_k R_n \right); \\ i_d - i_k - i_D = 0; \quad i_D - i_c - i_n = 0; \\ \frac{dv_{ps}}{dt} = -K_v \cdot \frac{e_d i_d}{v_{ps}} - f_w; \quad \frac{dw_n}{dt} = K_w \cdot i_n, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_d}{dt} = t_k; \quad \frac{dt_k}{dt} = \frac{1}{L_d + L_{ch}} \left( \frac{de_d}{dt} - t_k R_d - t_k R_{ch} - t_k R_D - \frac{i_c}{C} \right); \\ \frac{di_n}{dt} = s_k; \quad \frac{ds_k}{dt} = -\frac{1}{L_n} \left( \frac{de_n}{dt} + \frac{i_c}{C} - s_k R_n \right); \quad i_d - i_c - i_n = 0; \\ \frac{dv_{ps}}{dt} = -K_v \cdot \frac{e_d i_d}{v_{ps}} - f_w; \quad \frac{dw_n}{dt} = K_w \cdot i_n. \end{array} \right. \quad (4)$$

Поскольку частота коммутации рабочего транзистора  $VT2$  составляет около 1000 Гц, возникает необходимость решения систем уравнений (3) и (4) с *переменной структурой*. Для проведения численного моделирования процесса обмена энергией в тяговом приводе с бортовым электромеханическим накопителем предлагается решать полученные системы уравнений независимо друг от друга, причем полученные результаты решения системы (3) будут начальными условиями для решения системы (4). И наоборот, результаты решения системы (4) – начальные условия для решения системы (3).

**Результаты исследования.** Для определения эффективности работы предлагаемой схемы путем численного моделирования нами был исследован режим обмена энергией между тяговыми двигателями и накопителем при торможении электропоезда ЭР2Т [3]. Предполагается, что тяговый двигатель мощностью 235 кВт, напряжением 750 В с максимальными оборотами 1250 об/мин обменивается с накопителем энергией 5,2 МДж, при мощности 280 кВт в интервале частот вращения 16550 ... 50 об/мин. Этот процесс обмена протекает через реверсивный повышающе-понижающий DC-DC преобразователь, содержащий дроссель индуктивностью  $5 \cdot 10^{-4}$  Гн и активным сопротивлением 0,0025 Ом.

Изменения оборотов ротора накопителя и скорости ЭПС при перетоке мощности в режиме торможения ЭПС приведены на рис. 2.

При торможении ЭПС до 12 с, когда разница между ЭДС тягового двигателя и противо-ЭДС накопителя является постоянной и ток обмена находится на уровне 750 А, преобразователь работает постоянно в фазе передачи

энергии. Здесь кривые оборотов накопителя и скорости ЭПС совпадают. После 12 с, когда разница ЭДС тягового двигателя и противо-ЭДС накопителя уменьшается, ток обмена падает до нуля, и процесс обмена энергией прекращается. В итоге, обороты накопителя  $w_n$  и скорость ЭПС  $v_{ps}$  остаются на уровне  $1250 \text{ с}^{-1}$  и  $6,9 \text{ м/с}$ , соответственно.

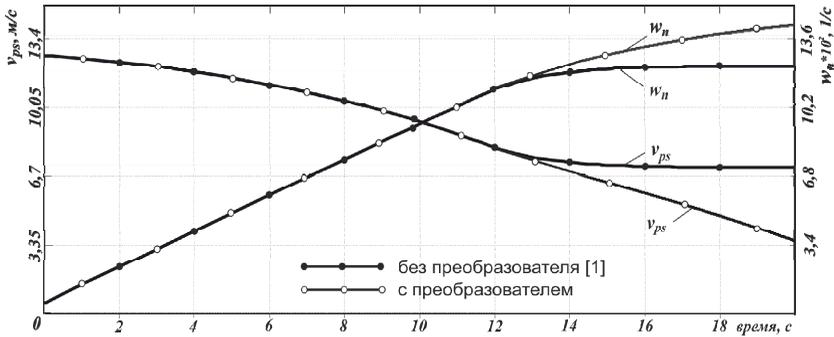


Рис.2 – Режим торможения ЭПС

При переходе работы преобразователя в режим чередования фаз накопления и передачи энергии напряжения на зажимах накопителя превышает противо-ЭДС в его обмотке и после 12 с. Ток изменяется незначительно (в пределах 600 ... 750 А) и процесс обмена энергией между тяговыми двигателями и накопителем продолжается. В итоге, обороты накопителя  $w_n$  возрастают до  $1360 \text{ с}^{-1}$  и скорость ЭПС  $v_{ps}$  снижается до  $3,35 \text{ м/с}$ .

Таким образом, использование DC-DC преобразователя в системе тягового электропривода с накопителем энергии позволяет расширить диапазон обмена энергией с 2,5 МДж до 3,38 МДж.

**Выводы.** Включение в схему тягового электропривода с накопителем энергии реверсивного повышающе-понижающего DC-DC преобразователя расширяет диапазон рабочих напряжений систем электромеханического преобразования тягового двигателя и накопителя при торможении электропоезда. Это позволяет на 25 % повысить эффективность утилизации энергии торможения электроподвижного состава, которая может быть использована в процессе последующего разгона поезда.

**Список литературы:** 1. Омеляненко В.И., Оверьянова Л.В. Работа бортового электромеханического инерционного накопителя энергии в тяговом приводе пригородного электропоезда // *Залізничний транспорт України*. – 2015. – № 1. – С. 44 – 49. 2. Rashid M. H. *Power electronics handbook*. – California: Academic Press. – 2007. – 895 p. 3. Цукало П.В., Ерошкин Н.Г. *Электропоезда ЭР2 и ЭР2Р*. – М.: транспорт. – 1986. – 359 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Omel'janenko, V. I., and L. V. Over'janova. "Rabota bortovogo elektromekhanicheskogo inercionnogo nakopitelja energii v tjagovom privode prigorodnogo elektropeozda." *Zalізничний транспорт України*. No. 1. 2015. 44–49. Print. 2. Rashid, M. H. *Power electronics handbook*. California: Academic Press, 2007. Print. 3. Cukalo, P. V., and N. G. Eroshkin. *Elektropeozda ER2 i ER2R*. Moscow: transport, 1986. Print.

Поступила (received) 13.05.2015

**Ю.А. ПЛАКСІЙ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»;

## ЕТАЛОННА МОДЕЛЬ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ КВАТЕРНІОНА ОРІЄНТАЦІЇ В ФУНКЦІЯХ КУТІВ КРИЛОВА, ЩО ЗМІНЮЮТЬСЯ У ЧАСІ

Запропоновано нову неперервну модель обертання твердого тіла, основу на предстваленні модельного кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що паралельно змінюються у часі. Побудовано аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають таким обертальним рухам. Для декількох наборів параметрів отримано реалізації моделі. Результати представлено у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі для параметрів орієнтації. Показано, що нова модель описує обертання твердого тіла, що різниться від випадку регулярної прецесії. Модель може бути застосована в якості еталонної для отримання оцінок похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

**Вступ і постановка задачі.** В безплатформених системах орієнтації первинна інформація про обертання рухомого об'єкта на такті обчислень  $[t_{n-1}, t_n]$  поступає в обчислювач з вимірювачів кутової швидкості у вигляді *квазікоординат* [1]

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта  $\vec{\omega}$  на зв'язані осі. Оскільки на теперішній час розроблено значну кількість алгоритмів визначення параметрів орієнтації, що мають однаковий математичний порядок, то для отримання коректних оцінок точності алгоритмів по інформації (1) для конкретного рухомого об'єкта на етапі проектування системи орієнтації з метою вибору найкращого алгоритму застосовують *еталонні моделі обертання* [2]. Еталонні моделі обертання задають точний зв'язок між квазікоординатами (1) і модельними значеннями параметрів, які відповідають повороту об'єкта на такті  $[t_{n-1}, t_n]$ . У якості еталонних моделей зазвичай використовують випадки існуючих точних розв'язків сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (моделі *конічного руху* [3] та *регулярної прецесії* [4]). Ці еталонні моделі також застосовують для пристосування алгоритмів визначення орієнтації під конкретний тип обертання об'єкта [5].

Оскільки реальний рух об'єкта в багатьох випадках суттєво різниться від випадку прецесії, то розширення класу неперервних еталонних моделей, відмінних від існуючих випадків інтегрованості в елементарних функціях системи динамічних та кінематичних рівнянь, є актуальною задачею точносного аналізу при проектуванні систем безплатформеної орієнтації.

Неперервна еталонна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятими в ній аналітичними представленнями компонент кватерні-

она орієнтації  $\Lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$  в умовах  $\|\Lambda(t)\| = 1$ . Диференціюючи ці вирази і використовуючи обернене кінематичне рівняння, отримуємо також аналітичні представлення для проєкцій вектора кутової швидкості у вигляді [6]:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2(\dot{\lambda}_1\lambda_0 - \dot{\lambda}_0\lambda_1 + \lambda_3\dot{\lambda}_2 - \lambda_2\dot{\lambda}_3); \quad \omega_2 = 2(\dot{\lambda}_2\lambda_0 - \dot{\lambda}_0\lambda_2 + \lambda_1\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_1); \\ \omega_3 &= 2(\dot{\lambda}_3\lambda_0 - \dot{\lambda}_0\lambda_3 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_2).\end{aligned}\quad (2)$$

Для моделювання квазікоординат (1) застосуємо формулу:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де

$$\theta_i(t_n) = \int_0^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad \theta_i(t_{n-1}) = \int_0^{t_{n-1}} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3$$

– компоненти вектора *позірнього повороту*

$$\bar{\theta}(t) = \int_0^t \bar{\omega}(t) dt,$$

обчислені в моменти часу  $t_n$  і  $t_{n-1}$ , відповідно.

В даній роботі пропонується нова неперервна модель обертання твердого тіла, основана на представленні кватерніона орієнтації моделі в функції кутів Крилова, що неперервно змінюються у часі.

**Еталонна модель обертання твердого тіла з кватерніоном орієнтації в функції кутів Крилова, що змінюються з часом.** Для отримання еталонної моделі використаємо відому форму зв'язку між компонентами кватерніона орієнтації і подвоєними кутами Крилова для повороту твердого тіла у вигляді [6]:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta; \\ \lambda_1 &= \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta - \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta; \\ \lambda_2 &= \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta + \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta; \\ \lambda_3 &= \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta.\end{aligned}\quad (4)$$

На відміну від представлення (4), де поворот твердого тіла описується відповідною послідовністю кутів Крилова, запишемо зв'язок між компонентами кватерніона і кутами в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\lambda_0(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \theta(t) + \sin \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \theta(t); \\ \lambda_1(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \theta(t) - \sin \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \cos \theta(t); \\ \lambda_2(t) &= \cos \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \cos \theta(t) + \sin \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \sin \theta(t); \\ \lambda_3(t) &= \sin \varphi(t) \cdot \cos \psi(t) \cdot \cos \theta(t) - \cos \varphi(t) \cdot \sin \psi(t) \cdot \sin \theta(t),\end{aligned}\quad (5)$$

де кути одночасно змінюються в часі.

В результаті підстановки компонент кватерніона (5) та їх похідних в обернене кінематичне рівняння і проведення нескладних перетворень, отримуємо вирази для проєкцій вектора кутової швидкості тіла:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= -2\dot{\varphi}(t) \sin 2\psi(t) + 2\dot{\theta}(t); \\ \omega_2(t) &= \dot{\varphi}(t) \sin(2\theta(t) + 2\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \sin(2\theta(t) - 2\psi(t)) + 2\dot{\psi}(t) \cos 2\theta(t); \end{aligned}$$

$$\omega_3(t) = \dot{\varphi}(t) \cos(2\theta(t) + 2\psi(t)) + \dot{\varphi}(t) \cos(2\theta(t) - 2\psi(t)) - 2\dot{\psi}(t) \sin 2\theta(t). \quad (6)$$

Розглянемо випадок руху, коли кути  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  змінюються лінійно з плином часу, тобто

$$\varphi(t) = k_1 t, \quad \psi(t) = k_2 t, \quad \theta(t) = k_3 t. \quad (7)$$

За цих умов отримаємо з (6) вирази для компонент вектора кутової швидкості у вигляді:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= -2k_1 \sin 2k_2 t + 2k_3; \\ \omega_2(t) &= k_1 \sin(2k_3 + 2k_2)t + k_1 \sin(2k_3 - 2k_2)t + 2k_2 \cos 2k_3 t; \\ \omega_3(t) &= k_1 \cos(2k_3 + 2k_2)t + k_1 \cos(2k_3 - 2k_2)t - 2k_2 \sin 2k_3 t. \end{aligned} \quad (8)$$

Для отримання компонент вектора позірного повороту  $\bar{\theta}(t)$  проінтегруємо вирази для  $\omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  на інтервалі  $[0, t]$ , в результаті чого будемо мати:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{k_1}{k_2} (\cos 2k_2 t - 1) + 2k_3 t; \\ \theta_2(t) &= -\frac{k_1}{2(k_3 + k_2)} (\cos(2k_3 + 2k_2)t - 1) - \frac{k_1}{2(k_3 - k_2)} (\cos(2k_3 - 2k_2)t - 1) + \\ &\quad + \frac{k_2}{k_3} \sin 2k_3 t; \\ \theta_3(t) &= \frac{k_1}{2(k_3 + k_2)} \sin(2k_3 + 2k_2)t + \frac{k_1}{2(k_3 - k_2)} \sin(2k_3 - 2k_2)t + \\ &\quad + \frac{k_2}{k_3} (\cos 2k_3 t - 1). \end{aligned} \quad (9)$$

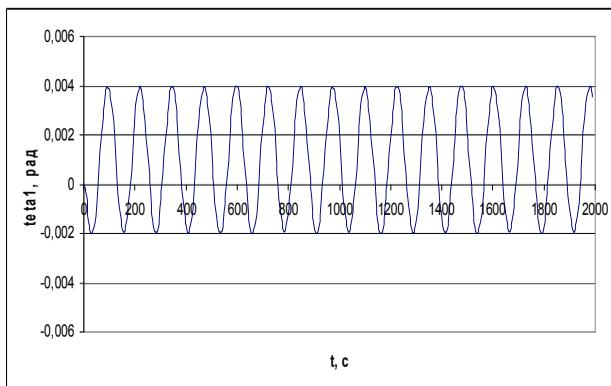
Відтворення квазікоординат (1) в еталонній моделі відбувається в аналітичному вигляді за формулою (3).

Формули (9), (3) і (5) описують *опорну еталонну модель* обертання твердого тіла. Якщо належним чином задати в цих формулах значення параметрів  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  і такт обчислень  $\Delta t$ , отримаємо безпосередньо еталонну модель.

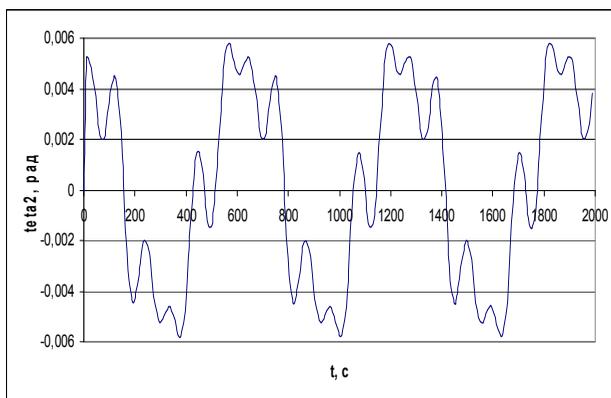
Зауважимо, що оскільки для запропонованої еталонної моделі обертання були також отримані і представлення для компонентів вектора модельної кутової швидкості (8), то цю модель можна використовувати і у випадку первинної інформації про обертання об'єкта у вигляді проекцій  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  вектора абсолютної кутової швидкості  $\bar{\omega}$  твердого тіла на зв'язані осі, що знімаються з вимірювачів в моменти часу  $t_n$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

**Чисельна реалізація моделі.** Побудуємо еталонну модель (9), (3), (5) для декількох значень параметрів  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  і такту обчислень  $\Delta t = 0,1$  с.

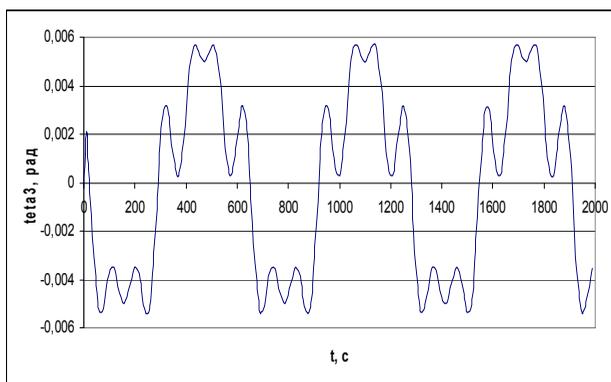
Для значень параметрів  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,005$  результати реалізації моделі на інтервалі часу 2000 с у вигляді залежностей квазікоординат від часу  $\theta_{ni}(t)$  та траєкторій  $\lambda_i(\lambda_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  в конфігураційному просторі представлені відповідно на рис. 1 та рис. 2.



*a*

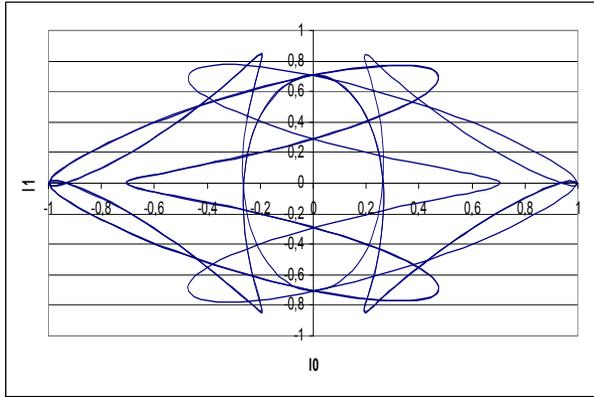


*б*

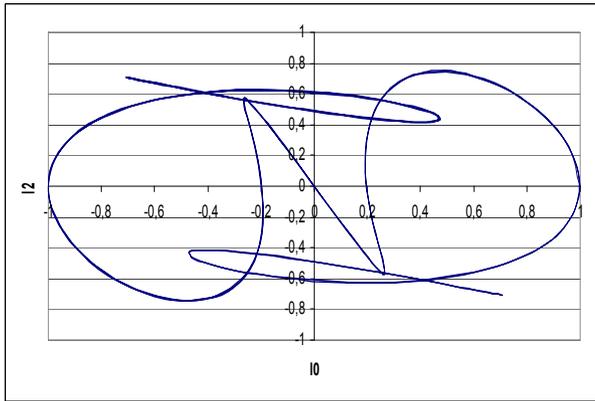


*в*

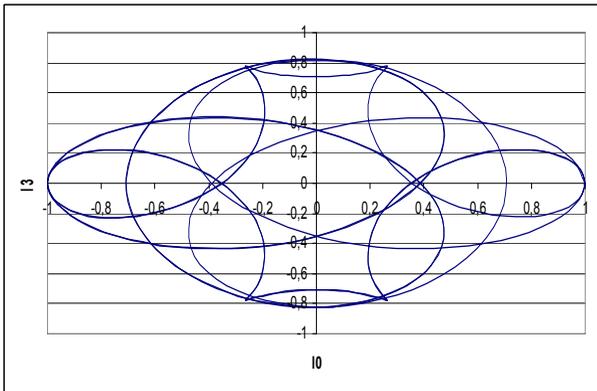
Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (9), (3), (5) при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,005$ : *a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



*a*



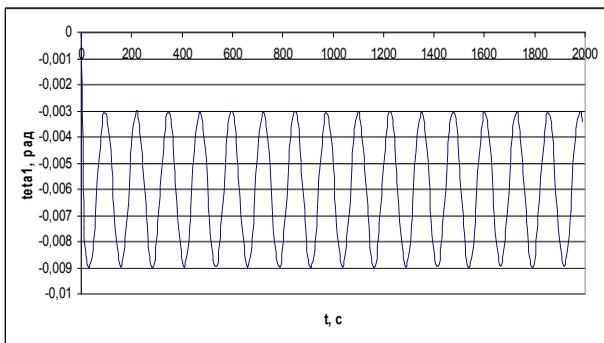
*б*



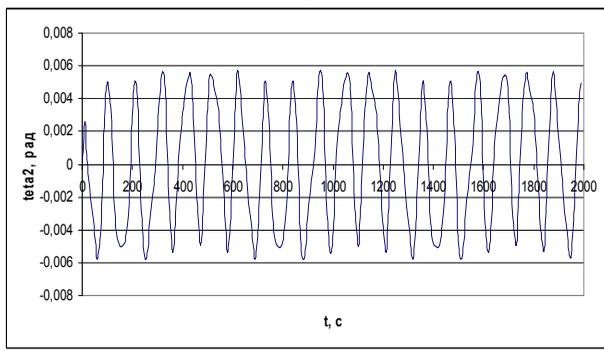
*в*

Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (9), (3), (5):  
*a* – траєкторія  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б* – траєкторія  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в* – траєкторія  $\lambda_3(\lambda_0)$ .

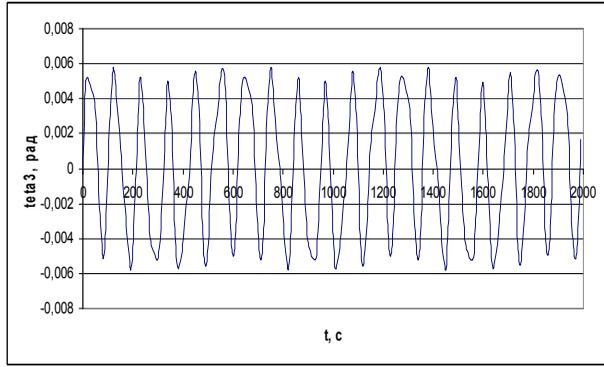
Результати реалізації еталонної моделі (9), (3), (5) для значень параметрів  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = -0,03$  на інтервалі часу 2000 с представлені на рис. 3 (залежності для квазікоординат  $\theta_{ni}(t)$ ) і рис. 4 (траєкторії  $\lambda_i(\lambda_0)$  в конфігураційному просторі).



*a*

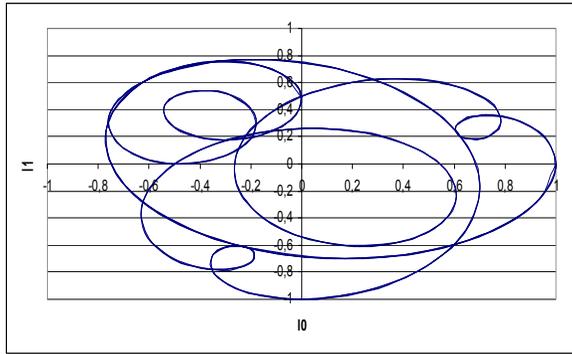


*б*

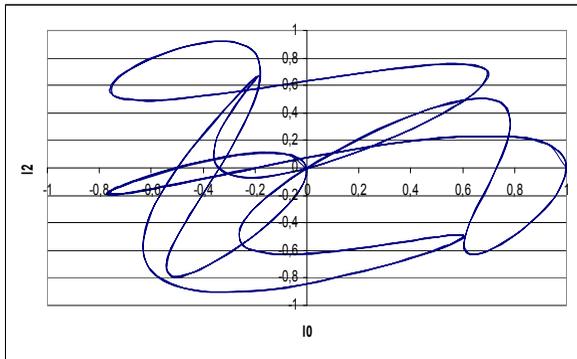


*в*

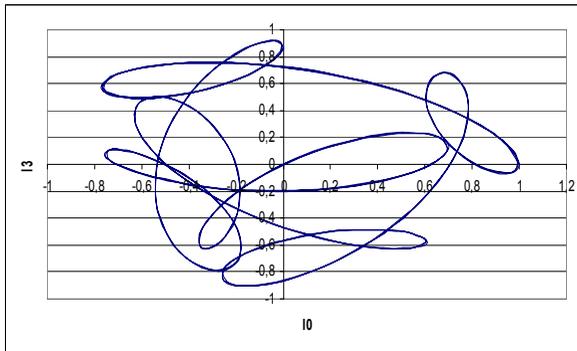
Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (9), (3), (5) при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = -0,03$  : *a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



*a*



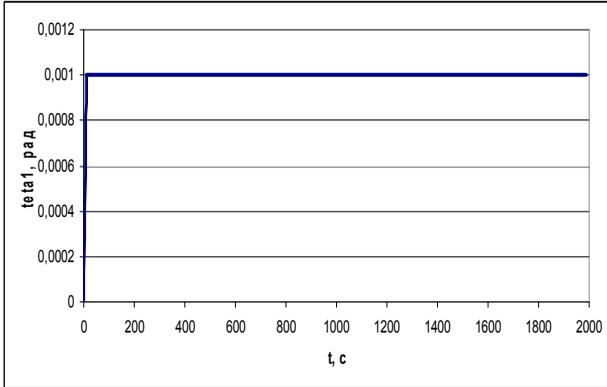
*б*



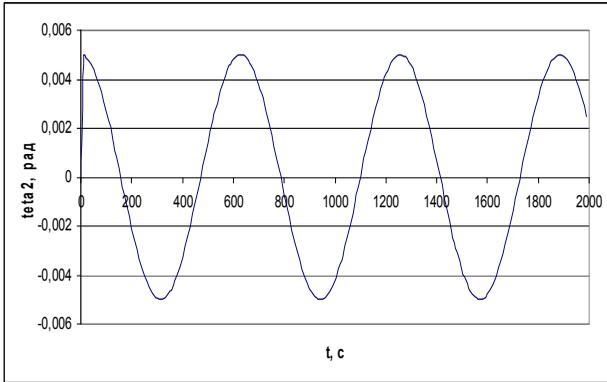
*в*

Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (9), (3), (5) при  $k_1 = 0,015$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = -0,03$ : *a* – траєкторія  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б* – траєкторія  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в* – траєкторія  $\lambda_3(\lambda_0)$ .

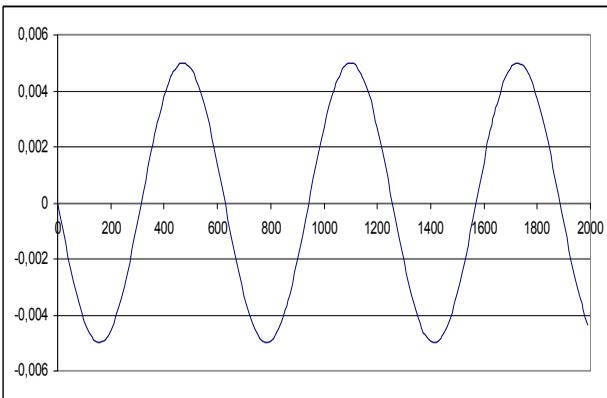
При значеннях параметрів  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,05$  результати моделювання руху, що відповідає еталонній моделі (9), (3), (5), представлені на рис. 5 і рис. 6.



*a*

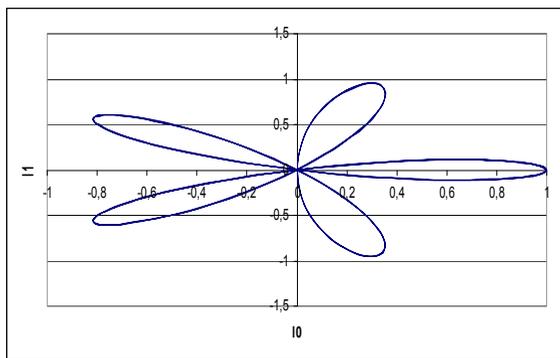


*б*

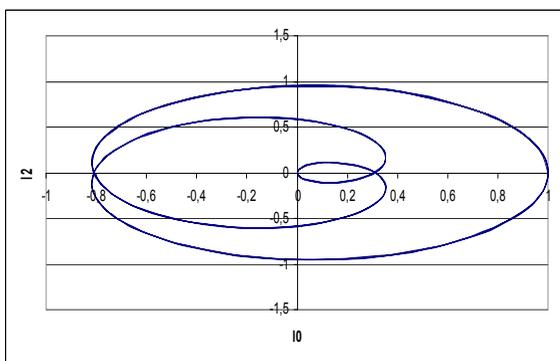


*в*

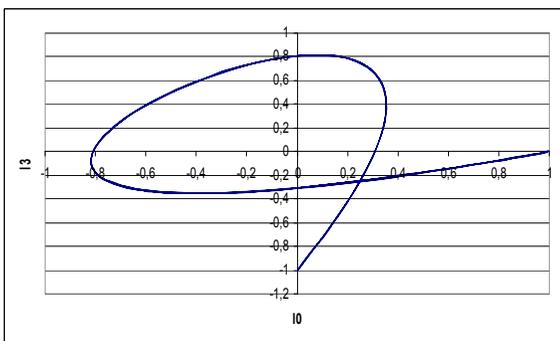
Рис. 5 – Залежність квазікоординат від часу для моделі (9), (3), (5) при  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,05$ : *a* – по першій осі; *б* – по другій осі; *в* – по третій осі.



*a*



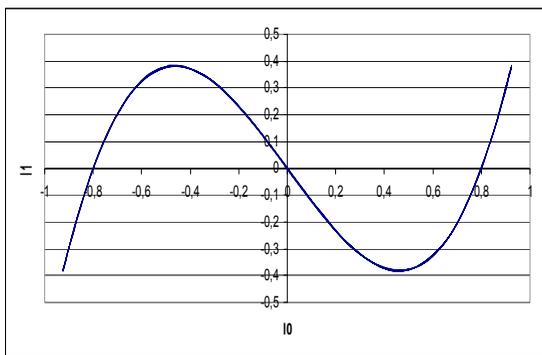
*б*



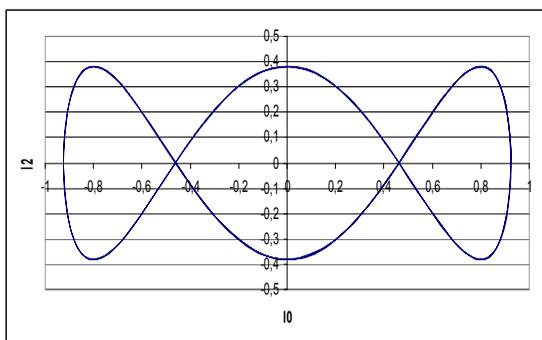
*в*

Рис. 6 – Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі (9), (3), (5) при  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,05$ : *a* – траєкторія  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б* – траєкторія  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в* – траєкторія  $\lambda_3(\lambda_0)$ .

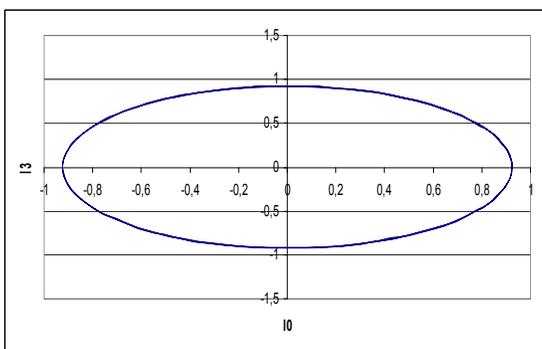
В роботі [7] наведено модель регулярної прецесії з вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}(t) = (\mu \sin \mathcal{G} \sin vt; \mu \sin \mathcal{G} \cos vt; \nu + \mu \cos \mathcal{G})^T$ . Траєкторії  $\lambda_i(\lambda_0)$  в конфігураційному просторі для цієї моделі представлені на рис. 7.



*a*



*б*



*в*

Рис. 7 – Траєкторії в конфігураційному просторі для регулярної прецесії:  
*a* – траєкторія  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; *б* – траєкторія  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; *в* – траєкторія  $\lambda_3(\lambda_0)$ .

Модель побудована на інтервалі часу  $t \in [0, 2000]$  с при значеннях параметрів  $\nu = -0,02$ ,  $\mu = 0,04$ ,  $\vartheta = \pi/4$ . Порівняння результатів реалізацій моделі обертання (9), (3), (5) з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що запропонована модель охоплює обертальні рухи твердого тіла, які суттєво відрізняються від регулярної прецесії.

**Висновки.** Запропоновано нову аналітичну модель обертання твердого тіла, основана на представленні кватерніона орієнтації в функції кутів Кристола, що змінюються у часі. В результаті побудови траєкторій  $\lambda_i(\lambda_0)$  в конфігураційному просторі показано, що при належному виборі параметрів цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла, які різняться від класичного випадку регулярної прецесії. Отриману еталонну модель можна застосовувати для оцінювання похибок алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації на етапі проектування безплатформених інерціальних систем орієнтації.

**Список літератури:** 1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. 2. Кузнецов Ю.А., Олейник С.В., Деменков В.А., Плаксий Ю.А. Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // XVII Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электронприбор». – 2010. – С. 114 – 116. 3. Ткаченко А.И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 4. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. 5. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург: ЦНИИ «Электронприбор». – 2003. – С. 250 – 260. 6. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с. 7. Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988. – Вып. 77. – С. 47 – 52.

**Bibliography (transliterated):** 1. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Vvedenie v teoriju besplatformennykh inercial'nykh navigacionnykh sistem*. Moscow: Nauka, 1992. Print. 2. Kuznecov, Yu. A., et al. "Primenenie modelej vrashhenija dlja analiza pogreshnostej algoritmov besplatformennykh inercial'nykh sistem orientacii podvizhnykh ob"ektov." *XVII Sankt-Peterburgskaja Mezhdunar. konf.* S.-Peterburg: CNII «Jelektropribor», 2010. 114–116. Print. 3. Tkachenko, A. I. "O primenenii parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmah opredelenija orientacii ob"ekta." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 5. Kiev, 1970. 20–22. Print. 4. Panov, A. P. "Optimizacija vysokotochnykh algoritmov vychislenija kvaternionov v sluchae precessii tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 73. Kiev, 1987. 3–9. Print. 5. Litmanovich, Yu. "Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialah Sankt-Peterburgskih konferencij za desjatiletie." *X Sankt-Peterburgskaja Mezhdunar. konf.* S.-Peterburg: CNII «Jelektropribor», 2003. 250–260. Print. 6. Branec, V. N., and I. P. Shmyglevskij. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela*. Moscow: Nauka, 1973. Print. 7. Panov, A. P. "Adaptivnyye precessionnye algoritmy vychislenija kvaternionov vrashhenija tverdogo tela." *Kibernet. i vychisl. tehn.* No. 77. Kiev, 1988. 47–52. Print.

Надійшла (received) 15.05.2015

УДК 621.224

**А.В. РУСАНОВ**, чл.-корр. НАНУ, д-р техн. наук, проф., ИПМаш НАНУ, Харьков;

**О.Н. ХОРЕВ**, канд. техн. наук; ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков;

**А.В. ЛИННИК**, главный конструктор гидротурбин, ОАО «Турбоатом», Харьков;

**П.Н. СУХОРЕБРЬИЙ**, канд. техн. наук; ст. науч. сотр., ИПМаш НАНУ, Харьков

# ВЛИЯНИЕ СЛОЖНОГО ОКРУЖНОГО НАВАЛА ЛОПАСТЕЙ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ОСЕВОЙ ГИДРОТУРБИНЫ НА СТРУКТУРУ ПОТОКА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ

Представлены результаты численного исследования и анализ влияния сложного окружного навала лопасти рабочего колеса осевой гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС на структуру потока и гидродинамические характеристики проточной части. Приведены структура потока и зависимости потерь энергии в рабочем колесе и значения КПД проточной части при оптимальном режиме работы от величины навала. Показано, что для исследуемой гидротурбины применение сложного окружного навала позволило повысить значения максимального КПД во всем диапазоне расходов при оптимальном угле установки лопастей рабочего колеса. Расчеты выполнены с использованием программного комплекса *IPMFlow*.

**Ключевые слова:** гидротурбина, проточная часть, пространственное профилирование, сложный окружной навал лопасти, рабочее колесо, гидродинамическое совершенствование.

**Введение.** Рост цен на энергоносители и повышение технических требований заказчика к гидротурбинному оборудованию вызывает необходимость дальнейшего развития методов проектирования и гидродинамического расчета гидромашин [1]. Перспективным способом повышения эффективности проточных частей (ПЧ) гидромашин является их гидродинамическое усовершенствование за счет пространственного профилирования основных элементов ПЧ. В ИПМаш НАН Украины накоплен большой опыт по пространственному профилированию направляющих и рабочих лопаток паровых турбин [2, 3] с помощью *окружного и осевого навалов*. При навалах форма сечений лопастных систем остается неизменной, меняется только вид линии привязки и, как следствие, взаимное положение сечений в окружном или осевом направлениях. Навал называется *простым*, если сечения лопасти по высоте линейно отклоняются относительно оси [4]; если нелинейно, то такой навал называется *сложным*. Исследовалось влияние сложных окружных навалов у периферии и у втулки, схема которых приведена на рис. 1. Сложный навал в окружном направлении образуется за счет придания оси лопасти формы кривой второго порядка, которая задается *углом саблевидности*  $\gamma$  и относительной длиной изогнутого участка лопасти  $\bar{l}$ . Индексом  $D$  обозначены величины, относящиеся к втулке, а индексом  $U$  – к периферии. Параметры  $\bar{l}_U$  и  $\bar{l}_D$  определяются по формулам:

$$\bar{l}_U = \frac{l_U}{l/2} \cdot 100\%; \quad \bar{l}_D = \frac{l_D}{l/2} \cdot 100\%.$$

В рабочем колесе (РК) осевой гидротурбины в качестве линии привязки принимается ось поворота лопасти; после выполнения навалов выбирается новая ось поворота. В исследованиях рассматривались варианты сложного навала с постоянными значениями  $l_D = l_U = l/2$  и переменными величинами углов саблевидности  $\gamma_U$  и  $\gamma_D$ .

Применяемые до последнего времени в практике отечественного гидротурбостроения методы расчетов РК осевого типа основывались на гипотезе, согласно которой поверхности тока предполагались цилиндрическими. В рамках этой гипотезы РК с одинаковыми, но по-разному скомпонованными сечениями, имели одинаковые энергетические показатели, хотя имели разную пространственную форму и, соответственно, обтекались разными пото-

ками. Для оценки влияния навалов лопастных систем на энергетические характеристики ПЧ необходимо использование методов математического моделирования пространственных вязких течений.

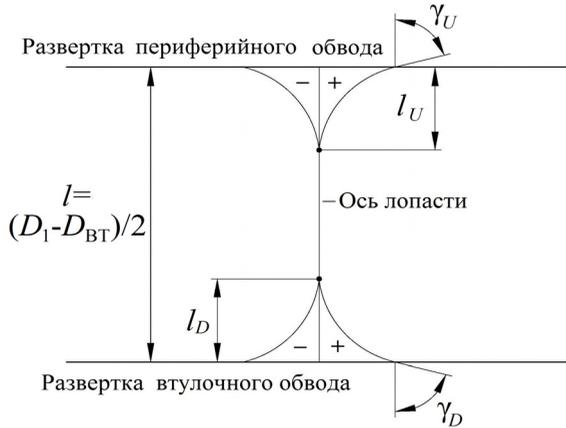


Рис. 1 – Схема сложного окружного навала лопастей РК.

Влияние компоновки лопасти на поворотно-лопастные (ПЛ) показатели турбины экспериментально исследовалось на ЛМЗ и в ЦКТИ [5]. В этих исследованиях проекция выходной кромки в плане оставалась прямой и поворачивалась в окружном направлении. При этом расчетные сечения смещались на величину, линейно зависящую от значения радиуса, что соответствует простому навалу [4].

В статье представлены результаты численного исследования влияния сложного окружного навала лопастей РК осевой гидромашин ПЛ20 Кременчугской ГЭС на структуру течения и гидродинамические характеристики ПЧ.

**Математическая модель.** Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в проточной части гидротурбины выполнено на основе численного интегрирования уравнений Рейнольдса с дополнительным слагаемым, содержащим искусственную сжимаемость. Уравнения Рейнольдса с двухпараметрической моделью турбулентности  $k-\omega$ , записанные в векторной форме в декартовой системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $x$ , имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} Q + \frac{\partial}{\partial x} (E_i + E_v) + \frac{\partial}{\partial y} (F_i + F_v) + \frac{\partial}{\partial z} (G_i + G_v) = H,$$

где  $Q = (P/\beta, u, v, w, k, \omega)^T$ ;  $P = p/\rho_*$ ;  $H_k = (\tilde{P}_k - \varepsilon) f_6$ ;

$$H_\omega = \left[ \frac{\gamma}{v_t} P_k - \beta \omega^2 f_4 + (1 - f_1) \frac{2}{\omega \sigma_{\omega 2}} C_D \right] f_7;$$

$$E_i = (u, u^2 + P, uv, uw, uk, u\omega)^T; \quad F_i = (v, vu, v^2 + P, vw, vk, v\omega)^T;$$

$$G_i = (w, wu, wv, w^2 + P, vw, wk, w\omega)^T; \quad E_v = (0, -\tau_{xx}, -\tau_{xy}, -\tau_{xz}, -\chi_{kx}, -\chi_{\omega x})^T;$$

$$F_v = (0, -\tau_{xy}, -\tau_{yy}, -\tau_{yz}, -\chi_{ky}, -\chi_{oy})^T;$$

$$G_v = (0, -\tau_{zx}, -\tau_{zy}, -\tau_{zz}, -\chi_{kz}, -\chi_{oz})^T;$$

$x, y, z, t$  – декартовы координаты и время;  $Q$  – вектор консервативных переменных;  $E_i, F_i, G_i$  – векторы потоков (невязкая часть);  $E_v, F_v, G_v$  – векторы потоков (вязкая часть);  $p, P, u, v, w$  – статическое и кинематическое давление, компоненты вектора скорости;  $k, \omega$  – кинетическая энергия турбулентности, удельная скорость диссипации;  $\rho_*$  – плотность жидкости.

Коэффициент искусственной сжимаемости жидкости  $\beta$  для обеспечения высокой скорости сходимости рекомендуется выбирать из следующих соотношений

$$\beta = \max(0.3, r(u^2 + v^2 + w^2)), \quad r = 1 \dots 5,$$

или

$$\beta = \delta_1 a_*^2 + \delta_0, \quad \delta_1 = 1 \dots 5, \quad 0 < \delta_0 \ll 1.$$

Для численного решения уравнений задаются дополнительные условия на границах расчетной области. На входе задаем распределение компонент вектора скорости, на выходе – распределение статического давления  $p$ , на стенках задается условие прилипания  $\vec{V} = 0$ .

Численное интегрирование уравнений проводится с помощью *неявной квазилинейной схемы Годунова* второго порядка точности по пространству и времени. Более подробное описание математической модели и численного метода представлено в работах [6, 7].

**Объект исследования. Методика проведения численного эксперимента.** В качестве объекта исследования выбрана ПЧ часть осевой поворотной-лопастной гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС [8]. Расчетная область состоит из лопаток направляющего аппарата (НА), лопастей РК ПЛ 20/3271у-В и диффузора отсасывающей трубы. Основные геометрические характеристики НА: профиль лопатки симметричный УП-32-2, высота  $b_0 = 0,4D_1$ , диаметр расположения осей поворота лопаток  $D_0 = 1,1625D_1$ , число лопаток  $z_0 = 32$ . У рабочего колеса диаметр втулки  $d_{вт} = 0,37D_1$ , число лопастей  $z_1 = 4$ .

Таблица 1 – Режимные параметры при расчетных исследованиях

Параметры	Режимы				
	A	B	C	D	E
$\alpha_0$ , мм	48,91	54,35	56,52	59,78	65,22
$Q'_l$ , л/с	950	1071,4	1117,9	1185,7	1317,8
$n'_1$ , мин <sup>-1</sup>	123,2	145,3	152,9	162,9	182,1

Расчетная область содержит по одному каналу НА и РК и отображается с использованием структурированной сетки  $H$  – типа с числом ячеек  $72 \times 72 \times (100 + 200) = 1.555.200$ .

В табл. 1 представлены режимные параметры проведенных расчетных

исследований. Численные исследования влияния навала выполнены для модели с диаметром РК  $D_1 = 1$  м при напоре  $H = 1$  м для оптимального режима (режим  $C$ ) с углом установки лопасти РК  $\varphi_{\text{п}} = 15^\circ$  и углом потока на входе  $\alpha_{\text{п}} = 38,9^\circ$  [8]. Дополнительно посчитаны режимы  $A, B, C, D, E$  для исходного и лучших модернизированных вариантов.

**Исследование влияния сложного окружного периферийного навала лопасти РК.** Численные исследования проведены для расчетных областей с исходными лопастями РК (угол саблевидности  $\gamma_U = 0^\circ$ ) и четырьмя вариантами сложного окружного навала (углы саблевидности  $\gamma_U = -40^\circ; -20^\circ; +20^\circ; +40^\circ$ ). Применение навала с углом  $\gamma_U = 40^\circ$  приводит к сдвигу периферийного сечения в окружном направлении относительно исходного варианта на  $7,5^\circ$ , с углом  $\gamma_U = 20^\circ$  – на  $3,3^\circ$ . На рис. 2 представлены компьютерные модели исходной лопастной системы РК, а также с углами саблевидности  $\gamma_U = -40^\circ$  и  $\gamma_U = +40^\circ$ .

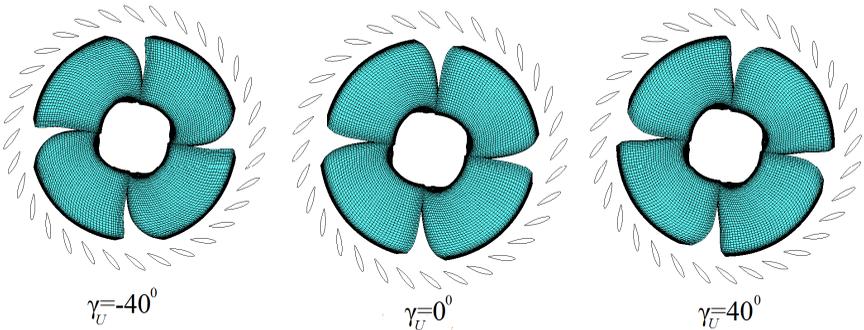


Рис. 2 – Компьютерная модель лопастей РК для трех вариантов навала.

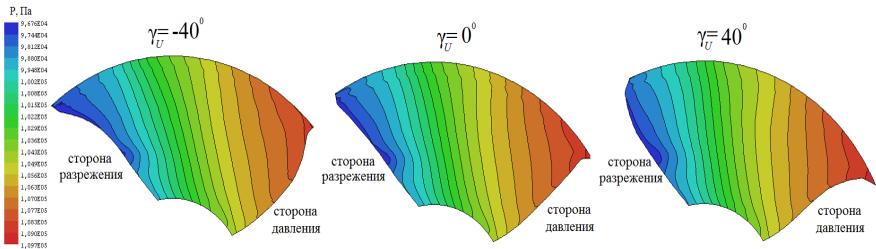


Рис. 3 – Изолинии давления в среднем поперечном сечении межлопастного канала РК для трех значений окружного навала.

На рис. 3 показаны распределения изолиний статического давления в плоскости, перпендикулярной к оси вращения и расположенной в среднем сечении межлопастного канала РК для трех значений угла саблевидности: исходного нулевого, максимальных положительного и отрицательного. Вид-

но, что градиент давления в окружном направлении выше на стороне разрезания, а навал оказывает заметное влияние на положение изолиний давления:

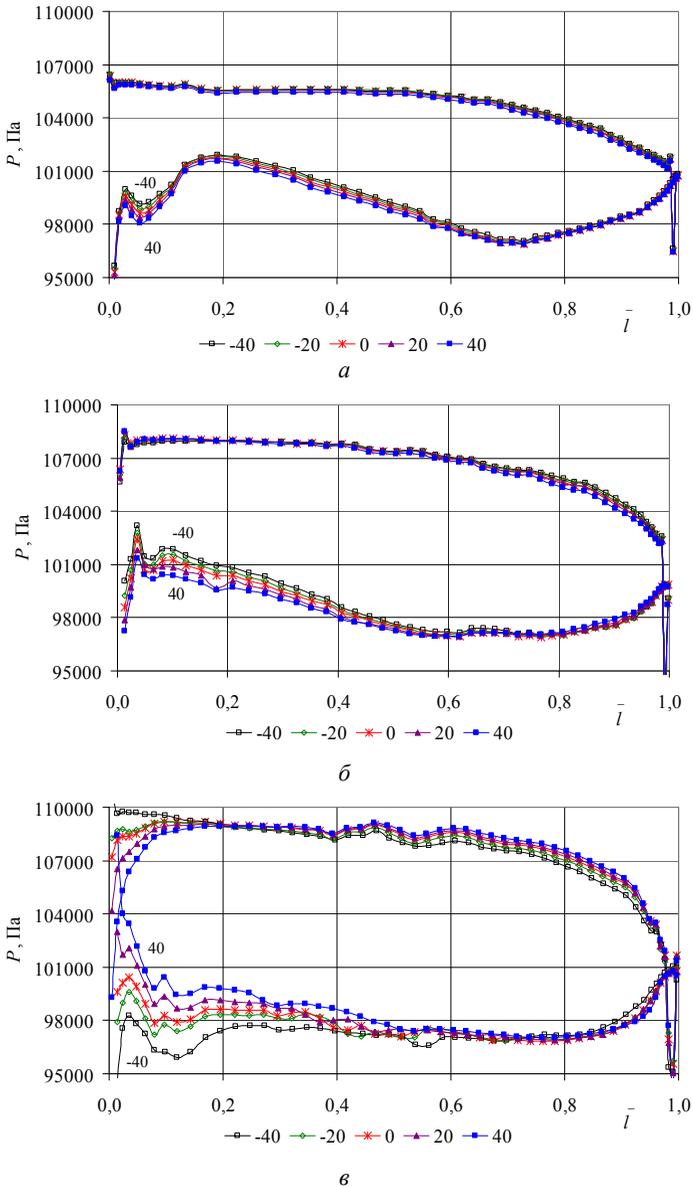


Рис. 4 – Распределение давления вдоль сечений лопасти РК при разных значениях угла саблевидности  $\gamma_U$ :  
*a* – втулочное; *б* – среднее; *в* – периферийное.

при отрицательном угле саблевидности они сдвигаются к стороне разрежения, при положительном – к стороне давления. Наблюдается также изменение распределения давления на поверхностях РК.

На рис. 4 приведено распределение статического давления на поверхностях лопасти у втулки (10 % ширины канала), среднем сечении (50 %) и периферии (90 %) области РК для пяти вариантов окружного навала. На втулочном участке (рис. 4, а) навалы не оказывают существенного влияния на эпюры распределения давления. В среднем сечении на стороне давления эпюры при навалах меняются незначительно. На стороне разрежения во входной части при отрицательных значениях угла  $\gamma_U$  давление повышается, при положительных – понижается, в выходной же части влияние навалов мало заметно. В периферийной зоне лопасти, подвергающейся наибольшим деформациям при рассматриваемом виде навала, происходит существенное перераспределение эпюр давления на стороне разрежения во входной части лопасти. В отличие от средней части лопасти, на периферии при отрицательных значениях угла  $\gamma_U$  давление значительно понижается, а при положительных – возрастает. Наиболее благоприятные эпюры в исходном варианте и при угле  $\gamma_U = -20^\circ$ . Дальнейшее уменьшение значения  $\gamma_U$  может привести к возникновению зон локального понижения давления на входном участке и, как следствие, к возникновению кавитационных зон.

На рис. 5 показано распределение осредненного по шагу абсолютного полного давления по ширине канала в среднем поперечном сечении межлопастного канала РК (то же сечение, что и на рис. 3) при разных значениях угла саблевидности  $\gamma_U$ . Видно, что навалы приводят к заметному перераспределению энергии по ширине канала. Навалы с отрицательными значениями угла  $\gamma_U$  повышают уровень энергии в области втулки, положительные понижают. При относительной ширине канала около 80 % значения полного давления выравниваются, и на периферии наблюдается обратная картина распределения. Таким образом, применяя окружной навал, можно добиться более равномерного распределения энергии по ширине канала. В исследуемом РК ПЛ 20/3271у-В наиболее равномерное распределение энергии получено при угле саблевидности  $\gamma_U = -20^\circ$ .

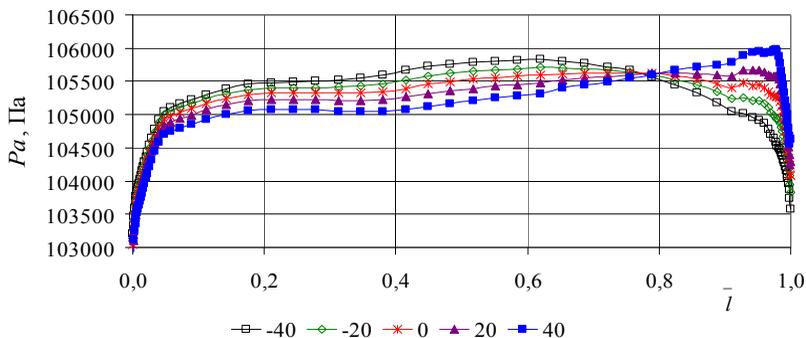


Рис. 5 – Распределение осредненного по шагу абсолютного полного давления по ширине канала в среднем поперечном сечении межлопастного канала РК при разных значениях окружного навала.

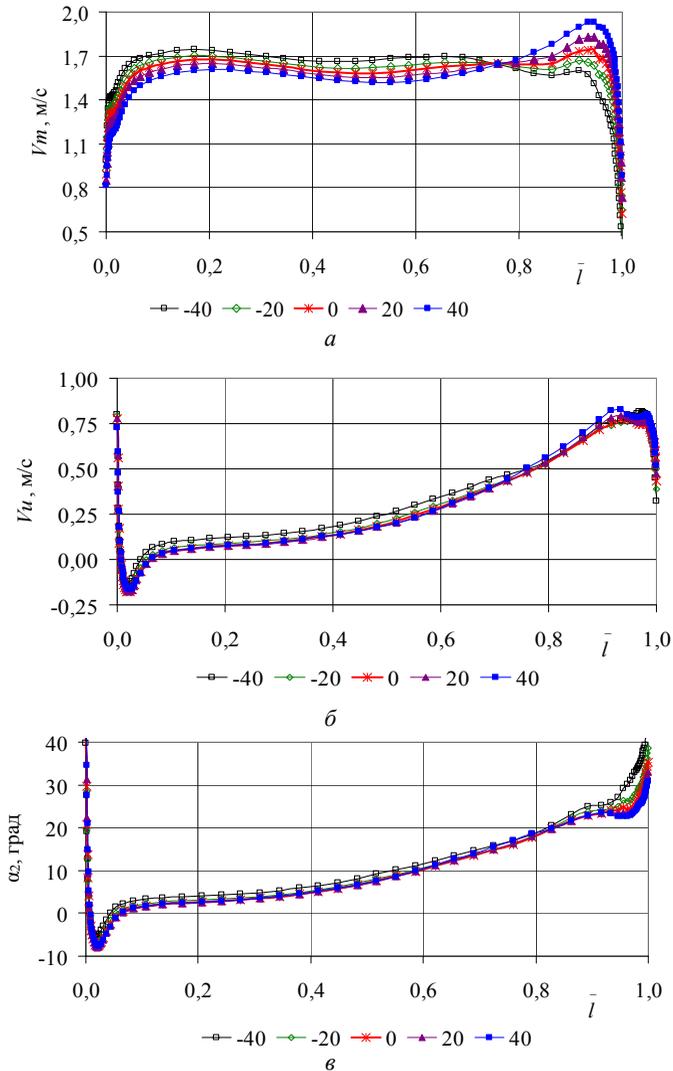


Рис. 6 – Распределение по ширине канала параметров потока за РК при разных значениях угла саблевидности:  $a$  – меридиональной скорости  $V_m$ ;  $б$  – окружной скорости  $V_u$ ;  $в$  – абсолютного угла потока  $\alpha$ .

На рис. 6 приведено распределение по ширине канала меридиональной (расходной)  $V_m$  и окружной скорости  $V_u$ , а также абсолютного угла потока  $\alpha$  за РК при разных значениях угла саблевидности  $\gamma_U$ . Эти данные необходимы для оценки изменения граничных условий на входе в отсасывающую трубу. Из рисунка видно, что применение сложного окружного периферийного

навала мало влияет на величину закрутки потока и значение угла потока за РК. Навалы заметно влияют на распределение расходной скорости  $V_m$ . Для исследуемого РК наиболее плавная эпюра скорости получена при угле саблевидности  $\gamma_U = -20^\circ$ . Равномерное распределение  $V_m$  на входе в отсасывающую трубу, вероятно, приведет к улучшению течения в ней и повышению энергетических показателей ПЧ в целом.

Проведенные расчеты позволили определить потери энергии в элементах ПЧ и значение КПД расчетной области. Потери в НА при навалах меняются мало и составляют  $h_{НА} = 0,91 \dots 0,92$  %. На рис. 7 приведены зависимости потерь энергии в рабочем колесе и КПД исследуемой расчетной области (без учета спиральной камеры со статором и отсасывающей трубы) от значений угла саблевидности  $\gamma_U$ . Как видно из рисунка, изменения структуры потока в результате применения окружного навала (рис. 3 – 5) приводят к изменению энергетических характеристик. Минимальное значение потерь в РК  $h_{РК} = 2,74$  % получено при угле  $\gamma_U = -20^\circ$ , что на 0,14 % ниже, чем в исходном варианте. При этой же величине навала наблюдается и максимальное значение КПД ПЧ  $\eta = 96,36$  % (против 96,21 % исходного) и получено повышение мощности на 0,2 %. Следует отметить, что при  $\gamma_U = -20^\circ$  величина срабатываемого напора  $H$  по сравнению с исходным практически не изменилась (разность менее 0,1 %), то есть положение режимной точки в поле универсальной характеристики осталось прежним.

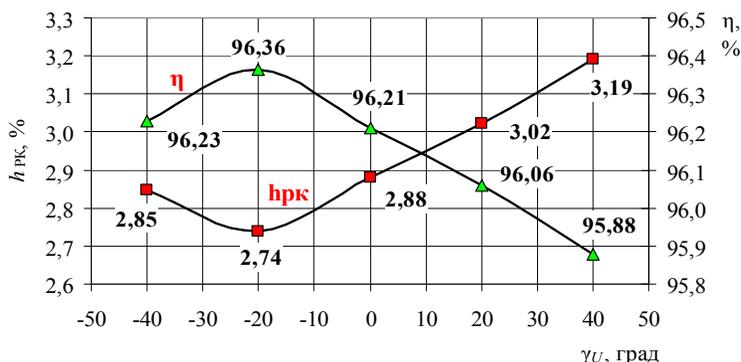
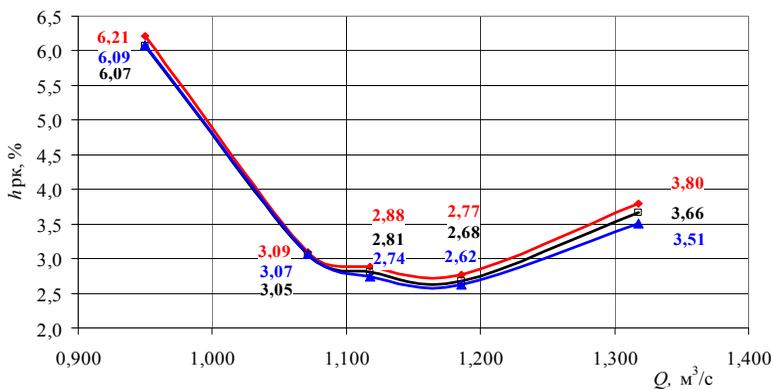


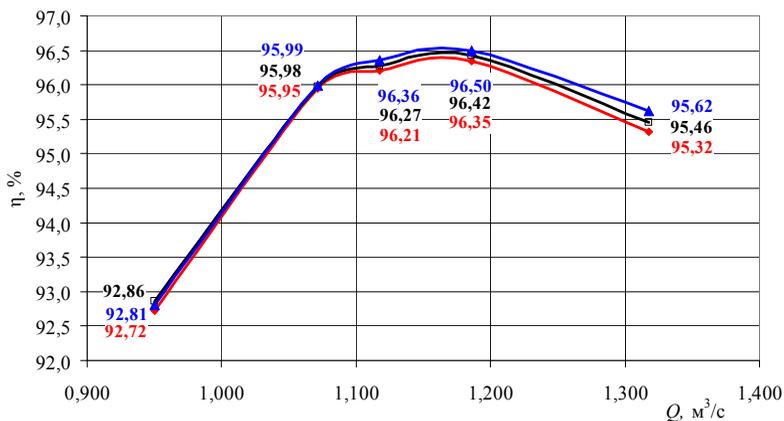
Рис. 7 – Зависимость потерь в РК и КПД проточной части от величины периферийного окружного навала.

Для оценки влияния навалов на энергетические характеристики в широком диапазоне расходов и частот вращения были проведены исследования в четырех дополнительных режимных точках (табл. 1) для исходного варианта и лучших вариантов простого [4] и сложного окружного навалов. На рис. 8 приведены зависимости потерь в РК (а) и значений КПД (б) для этих ПЧ. Как видно из рисунка, за счет применения навалов удалось снизить потери в РК и повысить значение КПД во всем диапазоне расходов. Наиболее перспективной, по-видимому, является форма сложного периферийного навала, при которой повысился КПД от 0,15 % в оптимуме до 0,30 % в режимной точке с максимальным расходом.



— исходное ПК — простой навал ▲ сложный навал  $\gamma=-20$

a



— исходное ПК — простой навал ▲ сложный навал  $\gamma=-20$

b

Рис. 8 – Сопоставление трёх вариантов РК: а – потеря; б – значений КПД.

**Исследование влияния сложного окружного втулочного навала лопасти РК.** Также было проведено исследование влияния сложного окружного втулочного навала на параметры потока в ПЧ и ее энергетические характеристики. Исследования проводились для исходной лопастной системы РК и четырех значений угла саблевидности  $\gamma_D$ :  $-20^\circ$ ;  $-10^\circ$ ;  $10^\circ$ ;  $20^\circ$ . Применение навала с  $\gamma_D = \pm 20^\circ$  приводит к окружному смещению втулочного сечения на  $8,5^\circ$ , при  $\gamma_D = \pm 10^\circ$  – на  $4,1^\circ$ . На рис. 9 приведена компьютерная модель для трех видов втулочного навала (вид сверху).

Проведенные исследования показали, что применение втулочного навала оказывает значительно меньшее влияние на энергетические показатели и структуру потока в области РК, чем периферийного. На рис. 10 приведены

зависимости значений потерь в РК и КПД ПЧ от величины навала. Из рисунка видно, что применение втулочного навала в РК ПЛ 20/3271у-В Кременчугской ГЭС не привело к улучшению энергетических характеристик. Структура потока в области РК при таком виде навалов меняется незначительно, в основном во втулочной зоне – на расстоянии до 25 – 30 % ширины канала  $l$ .

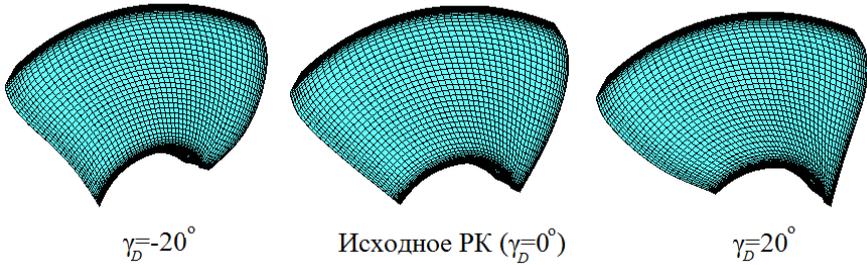


Рис. 9 – Вид лопастей РК при различных значениях окружного втулочного навала.

За РК – на входе в диффузор отсасывающей трубы – в области втулки существенно изменяется распределение меридиональной и окружной скорости, а также углов потока. Это может привести к изменению течения в отсасывающей трубе и ее показателей. Вопрос влияния граничных условий на входе в отсасывающую трубу на ее показатели требует дополнительных исследований.

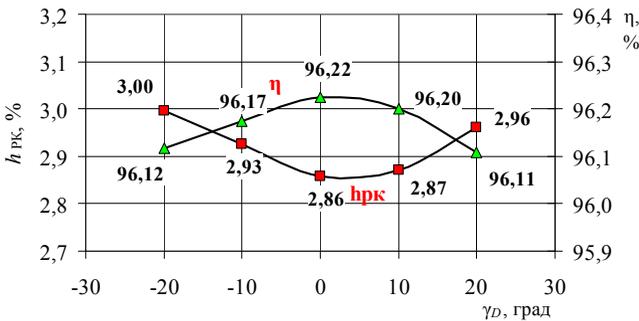


Рис. 10 – Зависимость потерь в РК и КПД проточной части от величины втулочного окружного навала.

**Выводы.** Выполнено численное исследование влияния сложного окружного навала лопасти РК осевой гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС на структуру потока и интегральные характеристики проточной части. В результате установлено, что при применении периферийного навала:

- меняется положение изолиний статического давления в межлопастном канале РК;
- существенно меняется вид эпюр давления на поверхностях лопасти, особенно в районе входных кромок;
- появляется возможность выровнять распределение полного давления по ширине канала;

- закрутка потока за РК меняется незначительно;
- удалось добиться снижения потерь в РК и повышения максимального значения КПД в широком диапазоне режимов эксплуатации современной высокоэффективной проточной части Кременчугской ГЭС.

Также можно сделать вывод, что применение сложного периферийного навала эффективнее, чем простого, а сложный втулочный окружной навал менее эффективен, чем периферийный.

**Список литературы:** 1. Семенова А.В., Чирков Д.В., Скороспелов В.А. Применение метода многоцелевой оптимизации для проектирования формы лопасти рабочего колеса поворотной гидротурбины // Известия Самарского научного центра РАН. – 2013. – Т. 15. – № 4 (2). – С. 588 – 593. 2. Русанов А.В., Волков Ю.П. Влияние сложного навала рабочих и направляющих лопаток ЦВД паровой турбины на аэродинамические характеристики проточной части // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2008. – Вып. 3 (13). – С. 93 – 97. 3. Русанов А.В., Левченко Е.В., Швецов В.Л., Пащенко Н.В. Влияние пространственного профилирования направляющих лопаток на газодинамические характеристики ЦНД паровой турбины // Двигатели и энергоустановки аэрокосмических летательных аппаратов. – 2010. – № 7 (74). – С. 65 – 70. 4. Русанов А.В., Хорев О.Н., Линник А.В., Сухоревый П.Н. Влияние простого окружного навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины ПЛ20 на гидродинамические характеристики проточной части // Вісник НТУ «ХП». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х.: НТУ «ХП», 2015. Вип. 3 (1012). – С. 8 – 12. 5. Этинберг И.Э., Белова Н.В. Исследование влияния компоновки решеток рабочего колеса на форму потока и потери энергии // Труды ЦКТИ – Л. – 1967. Вып. 79. – С. 39 – 50. 6. Русанов А.В., Косьянов Д.Ю. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием невязной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности // Восточ.-Европ. журн. передовых технологий. – 2009. – №5. – С. 4 – 7. 7. Русанов А.В. Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / А.В. Русанов, С.В. Ершов [Монография]. – Харьков: Ин-т пробл. машиностроен. НАН Украины, 2008. – 275 с. 8. Русанов А.В., Линник А.В., Сухоревый П.Н., Хорев О.Н., Рябов А.В. Математическое моделирование течения жидкости и анализ характеристик потока в подводе гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС // Вісник Національного технічного університету «ХП». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків: НТУ «ХП». – 2014. – Вип. 1 (1044). – С. 41 – 48.

**Bibliography (transliterated):** 1. Semenova, A. V., et al. "Primenenie metoda mnogocелевой optimizatsii dlja proektirovaniya formy lopasti rabocheho kola povorotno-lopastnoj gidroturbiny." *Izvestija Samarskogo nauchnogo centra RAN*. Vol. 15. No. 4 (2). 2013. 588–593. Print. 2. Rusanov, A. V., and Yu. P. Volkov. "Vlijanie slozhnogo navala rabochih i napravljajushhh lopatok CVD parovoj turbiny na aerodinamicheskie harakteristiki protochnoj chasti." *Kompressornoe i energeticheskoe mashinostroenie*. No. 3 (13). 2008. 93–97. Print. 3. Rusanov, A. V., et al. "Vlijanie prostranstvennogo profilirovaniya napravljajushhh lopatok na gazodinamicheskie harakteristiki CND parovoj turbiny." *Dvigateli i energoustanovki aerokosmicheskikh letatel'nyh apparatov*. No. 7 (74). 2010. 65–70. Print. 4. Rusanov, A. V., et al. "Vlijanie prostogo okruzhnogo navala lopastej rabocheho kola osevoj gidroturbiny PL20 na gidrodinamicheskie harakteristiki protochnoj chasti." *Visnyk NTU «KhPI». Ser.: Gidravlichni mashyny ta gidroagregaty*. No. 3 (1012). Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. 8–12. Print. 5. Etinberg, I. E., and N. V. Belova. "Issledovanie vlijaniya komponovki reshjtok rabocheho kola na formu potoka i poteri energii." *Trudy CKTI*. No. 79. Leningrad, 1967. 39–50. Print. 6. Rusanov, A. V., and D. Yu. Kos'janov. "Chislennoe modelirovanie techenij vjazkoj neszhimaemoj zhidkosti s ispol'zovaniem nejavnnoj kvazimonotonnoj shemy Godunova povyshennoj tochnosti." *Vostochn.-Evrop. zhurn. peredovyh tehnologij*. No. 5. 2009. 4–7. Print. 7. Rusanov, A. V., and S. V. Ershov. *Matematicheskoe modelirovanie nestacionarnyh gazodinamicheskijh processov v protochnyh chastjah turbomashin. Monografija*. Kharkov: In-t probl. mashinostroen. NAN Ukrainy, 2008. Print. 8. Rusanov, A. V., et al. "Matematicheskoe modelirovanie techenija zhidkosti i analiz harakteristik potoka v podvode gidroturbiny PL20 Kremenchugskoj GES." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universitetu «KhPI»*. Ser.: Energetični ta teploteknični procesy j ustatkuvannja. No. 1 (1044). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 41–48. Print.

Поступила (received) 28.05.2015

**И.А. РЯБЕНКОВ**, канд. техн. наук, ГП ХМЗ «ФЭД», Харьков

## **ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ НА ОПЕРАЦИЯХ ШЛИФОВАНИЯ**

Проведен теоретический анализ технологических возможностей повышения точности и производительности обработки при использовании схемы шлифования с начальным натягом в технологической системе, то есть применяемой на практике схемы выхаживания. Для этого получено аналитическое решение задачи определения величины упругого перемещения при шлифовании с начальным заданным натягом в технологической системе. Показано, что с течением времени обработки величина упругого перемещения уменьшается по экспоненциальному закону, принимая значения, соответствующие условиям высокоточной обработки деталей машин. Определено время обработки, за которое достигается требуемая (заданная) точность обработки. Это позволяет научно обоснованно расчетным путем определить оптимальные параметры обработки, исходя из требований по точности обрабатываемой поверхности.

**Ключевые слова:** шлифование, сила резания, точность обработки, упругое перемещение, начальный натяг, технологическая система, производительность обработки, время обработки.

**Введение.** Шлифование является одним из основных механических методов обеспечения высоких показателей точности и качества обрабатываемых поверхностей деталей машин. Широко применяется шлифование деталей из конструкционных сталей после их термической обработки. В настоящее время накоплен большой опыт обработки материалов шлифованием. В работе *проф. Якимова А.В.* [1] предложено производить шлифование прерывистыми кругами, что обеспечивает снижение силовой и тепловой напряженности процесса резания и соответственно повышение точности и качества обработки. Эффективно также использование схемы шлифования с начальным натягом в технологической системе, то есть применяемой на практике *схемы выхаживания*. Это связано с всевозрастающими требованиями к точности обработки деталей машин, в особенности изготовленных из материалов с повышенными физико-механическими свойствами.

**Анализ последних достижений.** В работах [2, 3] показано, что обеспечение высокой точности обработки, как правило, требует уменьшения производительности, что не всегда экономически целесообразно. В этих случаях эффективно использовать *метод шлифования с выхаживанием*, то есть с отключенной радиальной подачей на окончательном этапе шлифования. Это не приводит к существенному уменьшению производительности, однако позволяет добиться требуемой точности обработки. Вместе с тем, в научно-технической литературе фактически не произведена оценка технологических возможностей этого метода шлифования с точки зрения повышения точности и производительности обработки, поскольку отсутствует аналитическое описание закономерностей изменения упругих перемещений, возникающих в технологической системе при шлифовании с заданным начальным натягом. Это не позволяет определить условия обеспечения заданной точности обработки при шлифовании, что имеет важное практическое значение.

**Постановка задачи.** В работе решается задача обеспечения точности и производительности обработки при шлифовании с начальным заданным натягом в технологической системе на основе аналитического описания закономерностей уменьшения во времени величины упругого перемещения, определяющего погрешность обработки.

**Математическая модель.** Для решения поставленной задачи следует воспользоваться расчетной схемой шлифования прямолинейной детали, движущейся по нормали к рабочей поверхности круга с переменной во времени скоростью  $V_{\text{дем}}$  [4]. Радиальная  $P_y$  составляющая силы резания в этом случае описывается формулой:

$$P_y = c \cdot (P - \int V_{\text{дем}} \cdot \tau), \quad (1)$$

где  $c$  – приведенная жесткость технологической системы, Н/м;  $P$  – величина снимаемого припуска, равная начальному натягу в технологической системе, м;  $\tau$  – время обработки, с.

В общем виде зависимость для определения радиальной составляющей силы резания принимает вид:  $P_y = (\sigma / K_{\text{рез}}) \cdot (F \cdot V_{\text{дем}} / V_{\text{кр}})$  [4]. Тогда уравнение (1) опишется так:

$$\frac{\sigma}{K_{\text{рез}}} \cdot \frac{F \cdot V_{\text{дем}}}{V_{\text{кр}}} = c \cdot (P - \int V_{\text{дем}} \cdot \tau), \quad (2)$$

где  $\sigma$  – условное напряжение резания, Н/м<sup>2</sup>;  $K_{\text{рез}} = P_z / P_y$ ;  $P_z$  – тангенциальная составляющая силы резания, Н;  $F$  – площадь поперечного сечения обрабатываемой прямолинейной детали, м<sup>2</sup>;  $V_{\text{кр}}$  – скорость круга, м/с.

Дифференцируя каждое слагаемое уравнения (2) по времени обработки  $\tau$ , имеем:

$$\frac{\sigma}{K_{\text{рез}}} \cdot \frac{F}{V_{\text{кр}}} \cdot \frac{dV_{\text{дем}}}{d\tau} = -c \cdot V_{\text{дем}}. \quad (3)$$

Представим уравнение (3) в виде

$$\frac{\sigma}{K_{\text{рез}} \cdot c} \cdot \frac{F}{V_{\text{кр}}} \cdot \frac{dV_{\text{дем}}}{V_{\text{дем}}} = -d\tau, \quad (4)$$

и получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной величины  $V_{\text{дем}}$ . Его решение:

$$\frac{\sigma}{K_{\text{рез}} \cdot c} \cdot \frac{F}{V_{\text{кр}}} \cdot \ln V_{\text{дем}} = -\tau + C_1, \quad (5)$$

где  $C_1$  – постоянная интегрирования.

Для определения неизвестной величины  $C_1$  необходимо в зависимости (5) выразить  $V_{\text{дем}}$  через величину упругого перемещения

$$y = \frac{P_y}{c} = \frac{\sigma}{K_{\text{рез}} \cdot c} \cdot \frac{F \cdot V_{\text{дем}}}{V_{\text{кр}}}. \quad (6)$$

Откуда

$$V_{\text{дем}} = \frac{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}}}{\sigma \cdot F} \cdot y. \quad (7)$$

Подставляя зависимость (7) в уравнение (5), получим:

$$\tau_0 \cdot \ln \frac{y}{\tau_0} = -\tau + C_1, \quad (8)$$

где  $\tau_0 = \frac{\sigma \cdot F}{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}}}.$

С учетом начального условия  $y(\tau = 0) = \Pi$  имеем

$$C_1 = \tau_0 \cdot \ln \frac{\Pi}{\tau_0}. \quad (9)$$

Тогда зависимость (5) после преобразований примет вид:

$$\ln \frac{y}{\Pi} = -\frac{\tau}{\tau_0}. \quad (10)$$

Откуда

$$\frac{y}{\Pi} = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} = e^{-\frac{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}} \cdot \tau}{\sigma \cdot F}}. \quad (11)$$

Как видно, с течением времени обработки  $\tau$  величина упругого перемещения  $y$  уменьшается по экспоненциальному закону, принимая наибольшее значение (равное величине  $\Pi$ ) в начале обработки.

Радиальная составляющая силы резания с учетом зависимости (11) аналитически выразится так:

$$P_y = c \cdot \Pi \cdot e^{-\frac{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}} \cdot \tau}{\sigma \cdot F}} = P_{y_{\text{max}}} \cdot e^{-\frac{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}} \cdot \tau}{\sigma \cdot F}} = P_{y_{\text{max}}} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}, \quad (12)$$

где  $P_{y_{\text{max}}} = c \cdot \Pi$  – максимальное значение радиальной составляющей силы резания, Н.

Соответственно, скорость детали  $V_{\text{дем}}$ , описываемая зависимостью (7), примет вид:

$$V_{\text{дем}} = \frac{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}}}{\sigma \cdot F} \cdot \Pi \cdot e^{-\frac{K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}} \cdot \tau}{\sigma \cdot F}} = \frac{\Pi}{\tau_0} \cdot e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}. \quad (13)$$

Исходя из зависимости (13), с физической точки зрения величина  $\tau_0$  определяет время съема припуска  $\Pi$  с постоянной скоростью  $V_{\text{дем}} = \Pi / \tau_0$ . Следовательно, чем меньше время  $\tau_0$ , тем больше  $V_{\text{дем}}$ . Согласно зависимости  $\tau_0 = (\sigma \cdot F) / (K_{\text{рез}} \cdot c \cdot V_{\text{кр}})$ , уменьшить время  $\tau_0$  можно уменьшением отношения  $\sigma / K_{\text{рез}}$ ,  $F$  и увеличением  $c$  и  $V_{\text{кр}}$ .

**Результаты расчетов.** На рис. 1 и в табл. 1 показан характер изменения величины упругого перемещения  $y$  и скорости съема припуска  $V_{\text{дем}}$  от отношения  $\tau / \tau_0$  для  $\Pi = 1$  мм.

Как видно, при  $\tau/\tau_0 = 6 \dots 7$  величина упругого перемещения  $y$ , определяющая погрешность обработки, принимает весьма малые значения 2,5 ... 0,9 мкм, которые соответствуют требованиям высокоточной обработки деталей.

Для исходных данных, полученных при торцовом алмазном шлифовании твердосплавных пластин ( $\sigma = 150 \cdot 10^3$  Н/мм<sup>2</sup>;  $K_{pez} = 0,2$ ;  $F = 100$  мм<sup>2</sup>;  $c = 1,5 \cdot 10^3$  Н/мм;  $V_{кр} = 30$  м/с), время  $\tau_0 = 1,67$  с. Поэтому, через  $\tau = 7 \times 1,67 = 11,7$  с шлифования припуск величиной  $\Pi = 1$  мм может быть полностью удален с высокой точностью обработки (с погрешностью обработки  $y \approx 1$  мкм). При этом максимальная скорость съема припуска равна

$$V_{dem,max} = \frac{\Pi}{\tau_0} = \frac{1\text{мм}}{1,67\text{с}} = 0,6 \text{ мм/с}, \text{ а средняя} - V_{dem} = \frac{\Pi}{\tau} = \frac{1\text{мм}}{11,7\text{с}} = 0,085 \text{ мм/с},$$

то есть максимальная скорость съема припуска почти в 10 раз превышает среднюю скорость (рис. 1, б).

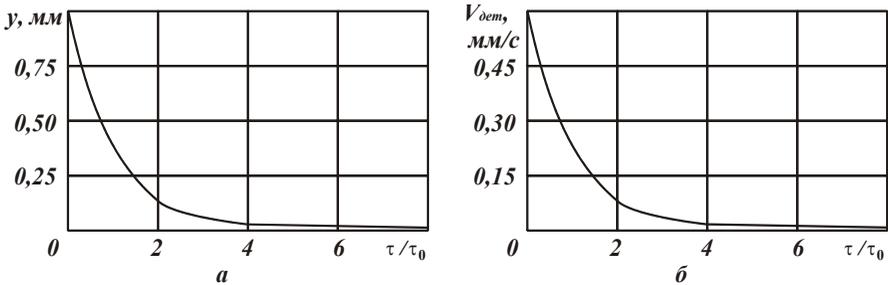


Рис. 1 – Зависимости параметров шлифования  $y$  и  $V_{dem}$  от отношения  $\tau/\tau_0$ :  
 $a$  – упругое перемещение;  $b$  – скорость съема припуска.

Таблица 1 – Расчетные значения  $y$  и  $V_{dem}$

$\tau/\tau_0$	0	1	2	3	4	5	6	7
$y$ , мм	1	0,368	0,135	0,05	0,018	0,0067	0,0025	0,0009
$V_{dem}$ , мм/с	0,6	0,22	0,081	0,03	0,01	0,004	0,0015	0,00054
$\Pi/y$	1	2,71	7,4	20	55,5	149,2	400	1111

При шлифовании с фиксированной скоростью детали  $V_{dem}$  величина упругого перемещения  $y$  определяется зависимостью (6), которая после преобразований принимает вид:

$$y = \tau_0 \cdot V_{dem} = \tau_0 \cdot \frac{\Pi}{\tau}. \quad (14)$$

Откуда

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\Pi}{y}. \quad (15)$$

Как следует из зависимости (14), добиться заданного значения  $y$  можно за счет пропорционального уменьшения  $V_{\text{дем}}$ , а соответственно и производительности обработки.

В табл. 1 приведены расчетные значения отношения  $\Pi/y$ , которые изменяются в широких пределах. Следовательно, для обеспечения заданной точности обработки, например определяемой условием  $y = 0,0009$  мм, требуется уменьшить  $V_{\text{дем}}$ , а, соответственно, и производительности обработки, в 1111 раз, тогда как при шлифовании по схеме с начальным натягом в технологической системе требуется увеличить отношение  $\tau/\tau_0$  (соответственно уменьшить производительность обработки) всего в 7 раз. Это свидетельствует о высокой эффективности применения данной схемы шлифования, то есть шлифование с переменной (уменьшающейся во времени по экспоненциальному закону) скоростью съема припуска  $V_{\text{дем}}$  позволяет существенно повысить точность обработки без уменьшения производительности обработки. Полученное теоретическое решение подтверждается практикой шлифования.

Наряду с повышением точности обработки, данная схема шлифования за счет уменьшения во времени скорости съема припуска  $V_{\text{дем}}$  позволяет уменьшить шероховатость поверхности до требуемого уровня, что имеет большое практическое значение. Этим объясняется широкое применение на практике схемы шлифования с выхаживанием, то есть с начальным заданным натягом в технологической системе, что является, как правило, окончательным этапом операции шлифования, обеспечивающим высокие показатели точности и шероховатости обрабатываемых поверхностей.

**Перспективы дальнейших исследований.** Автор считает перспективными направления исследований, связанные с разработкой на основе полученных теоретических решений эффективных технологий шлифования высокоточных деталей гидроаппаратуры, обеспечивая высокие показатели точности, качества и производительности обработки за счет научно обоснованного выбора оптимальных условий шлифования.

**Выводы.** В работе проведен теоретический анализ технологических возможностей повышения точности и производительности обработки при использовании схемы шлифования с начальным натягом в технологической системе, то есть применяемой на практике схемы выхаживания. Для этого получено аналитическое решение задачи определения величины упругого перемещения при шлифовании с начальным заданным натягом в технологической системе. Показано, что с течением времени обработки величина упругого перемещения уменьшается по экспоненциальному закону, принимая значения, соответствующие условиям высокоточной обработки деталей машин. Определено время обработки, за которое достигается требуемая (заданная) точность обработки. Это позволяет научно обоснованно расчетным путем определить оптимальные параметры обработки, исходя из требований по точности обрабатываемой поверхности.

**Список литературы:** 1. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф.В. Новикова, А.В. Якимова. В десяти томах. – Т. 4. «Теория абразивной и алмазно-абразивной обработки материалов» – Одесса: ОНПУ, 2002. – 802

с. 2. Маслов Е.Н. Теория шлифования металлов. – М.: Машиностроение, 1974. – 319 с. 3. Попов С.А., Малевский Н.П., Терещенко Л.М. Алмазно-абразивная обработка металлов и твердых сплавов. – М.: Машиностроение, 1977. – 263 с. 4. Теоретические основы резания и шлифования материалов: учеб. пособие / А.В. Якимов, Ф.В. Новиков, Г.В. Новиков, Б.С. Серов, А.А. Якимов. – Одесса: ОГПУ, 1999. – 450 с. 5. Рябенков И.А., Новиков Ф.В. Оценка влияния интенсивности трения связки круга с обрабатываемым материалом на эффективность процесса шлифования // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Інноваційні технології та обладнання обробки матеріалів у машинобудуванні та металургії. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 43 (1086). – С. 143 – 147.

**Bibliography (transliterated):** 1. *Fiziko-matematicheskaja teorija processov obrabotki materialov i tehnologii mashinostroenija*. Ed. F. V. Novikov, and A. V. Yakimov. V desjati tomah. Vol. 4. *Teorija abrazivnoj i almazno-abrazivnoj obrabotki materialov*. Odessa: ONPU, 2002. Print. 2. Maslov, E. N. *Teorija shlifovanija metallov*. Moscow: Mashinostroenie, 1974. Print. 3. Popov, S. A., N. P. Malevskij and L. M. Tereshhenko. *Almazno-abrazivnaja obrabotka metallov i tverdych splavov*. Moscow: Mashinostroenie, 1977. Print. 4. Yakimov, A. V., et al. *Teoreticheskie osnovy rezanija i shlifovanija materialov: utheb. posobie*. Odessa: OGPU, 1999. Print. 5. Rjabenkov, I. A., and F. V. Novikov. "Ocenka vlijanija intensivnosti trenija svjazki kruga s obrabatyvaemym materialom na effektivnost' processa shlifovanija." *Visnyk NTU «KhPI». Zbirnyk naukovyh prac'. Ser.: Innovacijni tehnologii' ta obladnannja obrobky materialiv u mashynobuduvanni ta metalurgii'*. No. 43 (1086). Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. 143–147. Print.

*Поступила (received) 27.04.2015*

УДК 532.5, 614.844, 621.227

**А.Н. СЕМКО**, д-р техн. наук., проф., ДонНУ, Донецк;  
**Ю.В. ШЕРСТЮК**, аспирант, ДонНУ, Донецк

## ГИДРОПУШКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ

Описаны основные направления применения импульсных высокоскоростных струй жидкости в технологических процессах, их преимущества и недостатки, дальнейшие перспективы развития. Приведены схемы устройств, применяемых для получения ультраструй. Описано отличие в физике процессов, происходящих при втекании воды в сопло и истечении из него в гидропушке и импульсном водомете. Даны уравнения для расчета внутренней баллистики, а также конечно-разностная аппроксимация уравнений движения по методу Родинонова, адаптированному для расчета гидроимпульсных установок, который удовлетворяет требованиям монотонности, однородности, консервативности и имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате.

**Ключевые слова:** импульсные струи жидкости, высокоскоростные струи, импульсный водомет, гидропушка.

**Введение.** Водоструйные технологии, основанные на применении струй жидкости высокой и сверхвысокой скорости (ультраструй), нашли широкое применение в различных отраслях промышленности, таких как прямолинейное и фасонное резание различных материалов (камень, металлы, пластмасса, кожа, и так далее), обработка бетонных поверхностей (резка, очистка, углубление), прецизионная обработка современных материалов (фигурная резка и изготовление отверстий заданной формы), разрушение горных пород и бетонных блоков, углубление акватории порта с каменистым дном, упрочнение металлических поверхностей наклепом при ударе струи, очистка корпусов судов от ракушек и старой краски, очистка внутренней поверхности труб от

плотных отложений и шламов и внешней поверхности для антикоррозийной обработки, очистка теплообменников, очистка разметки на бетоне и асфальте, формовка изделий сложной формы из листового материала, пробивание фасонных отверстий в листовых материалах, соединение (сварка) материалов при ударе высокоскоростной струи, и так далее [1 – 6]. Характерной особенностью водоструйных технологий является возможность обработки материалов, существенно различающихся по своим механическим свойствам: пластмассы, кожа, мягкие, твердые и хрупкие металлы, горные породы и бетонные изделия различной крепости и абразивности.

Процессы на основе импульсных технологий обладают громадными удельными мощностями, позволяють развивать сверхвысокие давления, получать импульсные струи сверхвысокой скорости. В таких процессах имеет место пространственное перераспределение энергии, которое приводит к резкому локальному возрастанию плотности энергии. Этот эффект может быть усилен и использован для формирования импульсных струй жидкости или локального повышения давления. На этих принципах могут быть построены установки и технологические процессы.

Анализируя современное состояние водоструйных технологий, президент Международной Ассоциации водоструйных технологий *M.M. Vijay* уверен в перспективности силовых импульсных и пульсирующих водяных технологий в будущем [7]. Эти устройства компактны, безопасны и требуют меньше энергии, чем непрерывные струи. Дальнейшие работы в этой области должны быть направлены на повышение надежности гидроимпульсных установок, работающих в экстремальных режимах, оптимизацию сопла и других систем.

**Установки для получения ультраструй.** Для получения импульсных струй жидкости часто используют гидропушку (ГП) и импульсный водомет (ИВ) с поршневым или пороховым приводом, а также электроимпульсный водомет (ЭИВ), в котором используется энергия подводного электрического разряда. В ГП и ИВ реализованы разные физические принципы, поэтому процесс выстрела и параметры струи ГП и ИВ сильно отличаются. В ИВ высокоскоростная импульсная струя формируется при выдавливании воды из отверстия малого диаметра. Такой способ позволяет получить струю дальнобойностью 1,5 – 2 м [8, 9]. Давление внутри ИВ не может превышать давления гидронапора струи, поэтому надежность установки сильно зависит от скорости струи. В связи с прочностными ограничениями, ИВ не позволяет получать струи скоростью выше 1500 м/с. Для эффективного разрушения крепких горных пород мощности струи ИВ может быть недостаточно.

В отличие от ИВ, в ГП ускорение жидкости происходит при втекании в сужающееся сопло. Давление гидронапора струи ГП может в несколько раз превышать давление внутри установки. Расчеты показали возможность получения при максимальном давлении в ГП не больше 1 ГПа (это вполне достижимо при использовании современных материалов и технологий) струй, способных оказывать на преграду давление до 4 ГПа. Такого давления достаточно для разрушения даже самого крепкого материала [8, 9].

Схема поршневой ГП безударного действия приведена на рис. 1. Под действием давления сжатого газа 1 тяжёлый поршень 2 разгоняется вместе с водой 3 в цилиндрическом стволе 4. Вода, достигая входа в сужающееся

сопло 5, начинает втекать в него, ускоряясь. Ускорение воды происходит за счет перераспределения энергии между частицами нестационарно движущейся жидкости. При этом кинетическая энергия частиц воды, прилегающих к свободной поверхности, значительно превышает среднюю по объёму энергию. Ускоряясь, передний фронт воды может достигать скорости, значительно превышающей скорость звука в воде [8, 9]. Достигнув среза сопла, вода истекает из него импульсной струей.

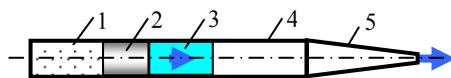


Рис. 1 – Гидропушка:  
1 – ресивер, 2 – поршень,  
3 – вода, 4 – ствол, 5 – сопло.

При истечении скорость струи на срезе сопла быстро уменьшается. Уменьшение скорости истечения приводит к возникновению градиента скорости по длине струи, ее «растяжению» и дальнейшему разрушению из-за развития кавитации. В результате расстояние эффективного разрушения преграды струей (дальнобойность) существенно уменьшается, что сильно ограничивает область применения ГП.

Кроме безударной установки, описанной выше, существует ГП ударного действия, в которой начальная скорость втекания в два раза больше скорости поршня. Основные части ударной ГП те же, что и для безударной. Различие состоит в механизме начального разгона жидкости. В ГП ударного действия энергия сообщается ударом разогнанного под действием сжатого газа поршня покоящейся у входа в сопло воде. Созданная поршнем ударная волна разгоняет покоящуюся воду до скорости, близкой к скорости поршня, и повышает в ней давление. Достигнув свободной поверхности, ударная волна отражается от нее центрированной волной разрежения. Расширяясь в волне разрежения, вода получает дополнительную скорость, практически равную скорости за ударной волной. При разгоне воды таким способом, начальная скорость ее втекания в сопло в два раза превышает скорость поршня. Тем не менее, исследования не показали существенных преимуществ ударной ГП [8].

Процесс выстрела поршневой ГП с пневматическим приводом жестко детерминирован и практически неуправляем. В рамках теории идеальной несжимаемой жидкости втекание свободного водяного заряда в сужающееся сопло принципиально не отличается от движения заряда с поршнем, поскольку поршень может быть заменен эквивалентным водяным зарядом с массой, равной массе поршня [10 – 12]. В результате получится втекание в сопло более длинного водяного заряда. Распределение параметров жидкости и закон их изменения со временем зависят исключительно от профиля сопла и его геометрических размеров.

Во многих случаях альтернативой пневматической ГП может быть пороховая ГП, источником энергии в которой являются продукты сгорания пороха. Конструкция пороховой ГП позволяет в довольно широких пределах управлять процессом выстрела и существенно увеличить дальнобойность установки [13 – 15]. Пороховая

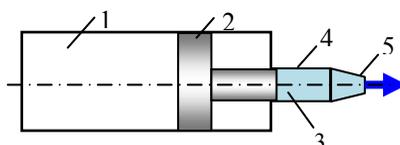


Рис. 2 – Импульсный водомет:  
1 – сжатый газ, 2 – поршень, 3 – вода,  
4 – ствол, 5 – сопло.

ГП по сравнению с пневматической обладает следующими преимуществами: простота конструкции, малые габариты и масса, мобильность, большая удельная мощность, возможность получения ультраструй большого диаметра и длины, существенное увеличение дальности.

В отличие от ГП, в которой используется инерционный принцип разгона жидкости при втекании в сужающееся сопло, импульсная струя ИВ образуется при выдавливании жидкости через отверстие малого диаметра тяжелым поршнем. На рис. 2 представлена схема поршневого ИВ с пневматическим приводом. Под действием давления сжатого газа 1 тяжелый поршень 2 разгоняется до начальной скорости  $u_{p0}$ . В конце разгона поршень сжимает небольшой объем воды 3, заполняющей ствол 4 и сопло 5, вытесняя воду через малое отверстие в сопле в виде импульсной высоконапорной струи. В отличие от ГП, струя ИВ начинает истекать с небольшой скоростью, которая возрастает по мере торможения поршня и повышения давления воды, достигая максимума в середине выстрела. Струя ИВ, как правило, компактнее струи ГП, дальность ИВ может достигать 2 – 3 метров [16].

**Внутренняя баллистика гидроимпульсных установок.** Процессы в ГП и ИВ характеризуются импульсным и волновым характером, большими градиентами параметров, возникновением и эволюцией кавитации, появлением и исчезновением разрывов, взаимодействием волн сжатия и разрежения. Как показали исследования, с достаточной для практических целей точностью и адекватностью движение жидкости в таких установках описывается в рамках *модели квазидномерной газовой динамики* с соответствующими начальными и граничными условиями. Для определения основных гидродинамических параметров ГП и ИВ необходимо учитывать сжимаемость жидкости и возможную кавитацию; вязкостью жидкости, влиянием воздуха в сопле, радиальной скоростью и изменением энтропии, деформациями корпуса и отдачей при выстреле можно пренебречь, свободную поверхность и границы кавитации считать плоскими. В принятой постановке квазидномерное изоэнтропическое движение жидкости в поршневой ГП описывается следующими уравнениями в дивергентной форме

$$\frac{\partial p F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p) F}{\partial x} = p \frac{dF}{dx}, \quad p = B \left[ (\rho / \rho_0)^n - 1 \right]$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = u_{p0}, \quad p(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0; \quad -L \leq x \leq 0; \quad p(t, x_F) = 0.$$

Движение поршня описывается уравнениями с начальными условиями

$$m_p \frac{du_p}{dt} = -F_c p_p; \quad \frac{dx_p}{dt} = u_p; \quad u_p(0) = u_{p0}; \quad x_p(0) = 0.$$

Здесь  $\rho, u, p$  – плотность, скорость и давление,  $t, x$  – время и координата,  $m_p, x_p, u_p$  – масса, координата и скорость поршня,  $u_{p0}$  – начальная скорость поршня,  $F_c$  – площадь поперечного сечения ствола,  $x_F$  – координата свободной поверхности,  $L$  – длина водяного заряда,  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – плотность воды при обычных условиях,  $B = 304,5$  МПа,  $n = 7,15$  – постоянные в уравнении воды в *форме Тэма*.

Существует несколько моделей нестационарной кавитации, основанных

на представлениях сплошной среды [17 – 20]: модели с постоянным давлением и скоростью звука, заданной концентрацией зародышей кавитации, парожидкостная модель. Одной из самых простых является модель кавитации с постоянным давлением, согласно которой кавитация возникает, если при расчете давление в жидкости становится меньше некоторого критического  $p_{cr}$ . Уравнение состояния воды для этой модели кавитации имеет вид

$$p = \begin{cases} B[(\rho/\rho_0)^n - 1], & \rho > \rho_{cr}; \\ p_{cr}, & \rho \leq \rho_{cr}. \end{cases}$$

Учитывая небольшую величину критического давления на практике часто им пренебрегают, считая, что вода совсем не выдерживает растяжения, то есть принимают  $p_{cr} = 0$ .

Горение пороха рассматривается в рамках квазистационарной модели, характерной для задач внутренней баллистики в артиллерии, при следующих допущениях [21]:

- теплообмен через стенки не учитывается;
- граница раздела «пороховые газы – вода» считается плоской и непроницаемой;
- порох горит параллельными слоями по геометрическому закону, скорость горения линейно зависит от давления;
- химический состав продуктов сгорания не изменяется при горении;
- параметры состояния пороховых газов связаны *упрощенным уравнением Ван-дер-Ваальса*.

В принятой постановке квазистационарное горение пороха описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными и граничными условиями

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_1}{h_1} p_g, \quad Q_g = m_{p0} \chi_1 \sigma(z) \frac{dz}{dt}, \quad \frac{dV_g}{dt} = u_g F_c + \alpha_1 Q_g,$$

$$\frac{dp_g}{dt} = \frac{1}{V_g} \left[ (k-1) q Q_g - p_g (k u_g F_c + \alpha_1 Q_g) \right],$$

$$z = 0, \quad V_g = V_{g0}, \quad p_g = p_{g0}; \quad p(t, x_g) = p_g; \quad u(t, x_g) = u_g,$$

где  $V_g$ ,  $p_g$  и  $u_g$  – объем, давление и скорость пороховых газов;  $z = h/h_1$  – относительная толщина сгоревшего слоя;  $2h_1$  – начальная толщина порохового зерна;  $h$  – толщина сгоревшего слоя;  $\chi_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  – коэффициенты, определяемые формой порохового зерна;  $m_{p0}$  – начальная масса пороха;  $\sigma(z)$  – относительная площадь поверхности горения;  $u_1$  и  $q$  – постоянная скорости горения и удельная теплота сгорания пороха;  $k$  – показатель адиабаты продуктов сгорания пороха;  $\alpha_1 = 1/\rho_p - \alpha$  – поправка; учитывающая собственный объем молекул пороховых газов;  $\rho_p$  – плотность твердого пороха;  $V_{g0}$ ,  $p_{g0}$  – параметры газа после срабатывания воспламенителя.

Как правило, такие задачи не имеют аналитического решения и решаются численно. При выборе численного метода для решения таких задач, пред-

почтение отдается монотонным, однородным консервативным схемам высокого порядка аппроксимации. Для расчета гидроимпульсных установок развит метод Родионова, который удовлетворяет требованиям монотонности, однородности, консервативности и имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате. Повышение порядка аппроксимации по координате достигается за счет замены кусочно-постоянной реконструкции параметров кусочно-линейной, а по времени – за счет выполнения двухшагового пересчета типа *предиктор-корректор*. Сохранение монотонности обеспечивается применением принципа минимума производной при выборе приращений функций в ячейке [22]. Конечно-разностная аппроксимация уравнений движения в ГП по методу Родионова имеет вид:

$$\rho_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \left\{ \rho_{i+\frac{1}{2}}^m \Delta x_{i+\frac{1}{2}}^m - \Delta t [R(U-W)] \Big|_i^{i+1} - \left( \frac{\rho u}{F} \right)_{i+1/2}^m - \frac{F_i^{i+1} \Delta t \Delta x_{i+1/2}^{m+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}^m} \right\} / \Delta x_{i+\frac{1}{2}}^{m+1};$$

$$(\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^{m+1} = \left\{ (\rho u)_{i+\frac{1}{2}}^m \Delta x_{i+\frac{1}{2}}^m - \Delta t [(RU(U-W) + P)] \Big|_i^{i+1} - \left( \frac{\rho u^2}{F} \right)_{i+1/2}^m \frac{F_i^{i+1} \Delta t \Delta x_{i+1/2}^{m+1/2}}{\Delta x_{i+1/2}^m} \right\} / \Delta x_{i+1/2}^{m+1}.$$

Здесь  $\Delta t$  – шаг по времени,  $\Delta x_{i+1/2}^m = (x_{i+1} - x_i)^m$  – шаг сетки по координате на  $m$ -том шаге по времени,  $W_i = (x_i^{m+1} - x_i^m) / \Delta t$  – скорость движения  $i$ -го узла сетки,  $F_i^{i+1} = F_{i+1} - F_i$ . Большими буквами  $R, U, P$  обозначены параметры, которые рассчитываются на границах ячеек при решении *обобщенной задачи Римана*, или, на границах расчетной области из граничных условий. Параметры с целыми индексами  $i$  определяются в точках с координатами  $x_i$ , а параметры с полуцелыми индексами  $i + 1/2$  – в точках с координатами  $(x_i + x_{i+1})/2$ . Расчеты проводились на подвижных регулярных сетках, которые опирались на передний и задний фронт движущегося водяного заряда.

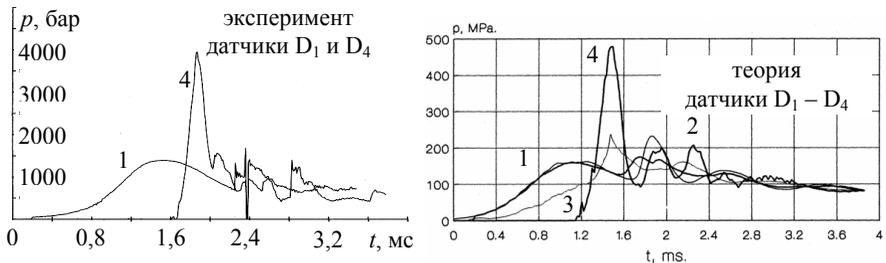


Рис. 3 – Давление внутри пороховой гидропушки.

На рис. 3 для сравнения приведены результаты эксперимента и расчета параметров пороховой ГП, которые наглядно демонстрируют адекватность разработанных моделей и эффективность численных методов. Давление по-

роховых газов (датчик  $D_1$ ) и воды (датчик  $D_4$ ) внутри пороховой ГП измерялось на полигоне системой для измерения параметров внутренней баллистики ствольных орудий, а рассчитывалось численно методом Родино-нова.



Рис. 4 – Разрушение железобетонных блоков.

**Ультразвук как инструмент разрушения.** Экспериментальные и теоретические исследования по применению импульсных струй жидкости для разрушения горных пород, бетонных блоков и проходки тоннелей показали, возможность создания импульсных струй жидкости скоростью до 3000 м/с [8, 9]. Такие струи способны в короткий промежуток времени создавать на поверхности мишени давление в несколько десятков тысяч атмосфер, и эффективно разрушать материалы даже очень высокой прочности. На рис. 4 и 5 приведены фотографии экспериментального исследования по применению ультразвуков для разрушения бетонных блоков и конструкционных материалов.

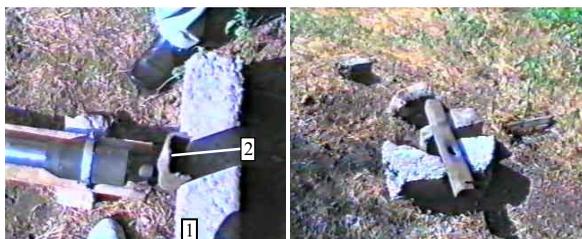


Рис. 5 – Разрушение конструкционных материалов:  
1 – бетонная перемычка, 2 – п-образный стальной профиль.

Под действием ультразвуков в горной породе протекают различные процессы, каждый из которых способен привести к разрушению. Разрушение может происходить за счет резкого повышения давления в ударной волне. Кроме того, распространяясь в массиве породы, ударная волна отражается волной разрежения от имеющихся внутри неоднородностей, что приводит к появлению растягивающих напряжений, и в результате породе отрывается от

забоя.

При растекании потока по шероховатой поверхности забоя (скорость растекания может во много раз превышать скорость удара) за выступами возникают зоны пониженного давления. В этом случае возможен отрыв потока с образованием каверн, захлопывание которых сопровождается локальным гидравлическим ударом, приводящим к разрушению.

Трещиноватые породы разрушаются вследствие того, что вода под большим давлением проникает в трещины и откалывает породу. Помимо названных выше факторов следует также учитывать проявление усталостных свойств массива, понижение его прочности вследствие действия переменной нагрузки. Степень влияния каждого фактора на разрушение породы зависит от ее свойств.

Обобщение результатов экспериментальных исследований по разрушению бетонных пород позволило сделать вывод, что ИВ могут успешно применяться для разрушения горных пород крепости  $f = 8 \dots 10$  (по шкале М.М.Протодьяконова), средняя производительность при этом составляет  $10 \dots 12 \text{ м}^3 / \text{ч}$  [8].

К преимуществам импульсного гидродинамического способа разрушения относят следующее: отсутствие режущего инструмента и устранение по этой причине расходов на его заточку и замену; отсутствие контакта с забоем; небольшие габаритные размеры комбайна и его масса; высокая производительность и низкая энергоемкость процесса разрушения; простота автоматизации и механизации работ, возможность организации безлюдной выемки; большая мобильность установки, возможность проведения вспомогательных операций (выполнение канавок для стока воды, лунок под крепь и тому подобное); улучшение условий труда и повышение его безопасности.

К недостаткам технологий на основе ГП и ИВ является относительно высокий уровень шума, достигающий 120 дБ в момент выстрела.

**Ультразвук как инструмент эффективного обезвреживания взрывоопасных предметов (ВОП).** Благодаря возможности эффективного разрушения взрывоопасных предметов, не вызывая их детонации, импульсные струи нашли широкое применение для утилизации боеприпасов и ликвидации взрывоопасных объектов. Использование струй разной скорости позволяет эффективно проводить гуманитарное разминирование бомб террористического назначения в корпусах разной прочности.



Рис. 6 – Ликвидация электронного взрывного пакета:  
1 – гидропушка, 2 – электронный ВОП с таймером.

Разрушение с помощью импульсной струи жидкости заключается в том, что струя пробивает и разрушает корпус ВОП, дробит монолит ВВ и разбираывает отдельные его фрагменты за время, меньшее времени срабатывания взрывателей на расстояния, которые больше расстояния возможности индукционной передачи детонации между фрагментами ВВ [23]. Реализации метода гидродинамического обезвреживания ВОП осуществляется с помощью пороховой гидропушки, в которой столб воды разгоняется с помощью взрыва порохового заряда и при истечении из ствола совершает работу по разрушению ВОП.

Применение ГП позволяет обезвредить взрывные устройства, в том числе имеющие прочные стальные корпуса, массу ВВ более 25 кг, установленных как на воздухе, так и под водой на глубинах до 40 м или под слоем грунта толщиной до 200 мм [24]. Некоторые фотографии, иллюстрирующие эффективность разминирования ВОП приведены на рис. 6 и 7.

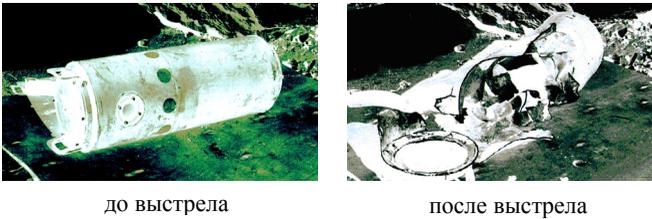


Рис. 7 – Дезактивация морской мины массой 25 кг.

**Ультразвук как инструмент тушения факелов и компактных пожаров.** Технологические процессы почти во всех газоперерабатывающих и во многих химических производствах особо пожароопасны, поскольку протекают при высоких температурах жидкостей и газов и под высоким, а часто и сверхвысоким давлением (до 245 МПа). Эффективными ингибиторами горения углеводородов являются инертные многоатомные газы: эффективность возрастает в ряду аргон, гелий, азот,  $CO_2$ . Одним из наиболее эффективных ингибиторов являются пары воды – наличие 29% паров воды предотвращает воспламенение метан-воздушной смеси любого состава. Поэтому наибольшее распространение получил способ тушения газовых факелов при помощи тонкораспыленной воды. Основными действующими факторами при тушении факела тонкораспыленной водой является охлаждение горящего материала и образование локализирующего очага горения облака пара. При большой скорости струи жидкости наблюдается отрывное тушение газового факела, при котором струя мелкодисперсных брызг срывает горящий факел [25, 26].

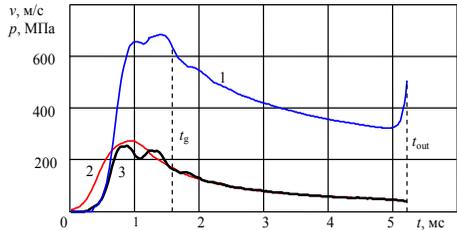


Рис. 8 – Графики зависимости скорости истечения струи и давления внутри ИВ.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов параметров порохово-

го ИВ, который использовался для тушения факелов. На рис. 8 приведены графики зависимости скорости истечения струи и давления внутри ИВ от времени для следующих исходных данных: масса водяного заряда 450 г, масса пороха 30 г. Кривая 1 – скорость истечения струи, кривые 2 и 3 – давление пороховых газов в камере сгорания и давление воды по середине ствола ИВ.

Как видно, истечение струи порохового ИВ начинается с нулевой скорости. По мере сгорания пороха скорость истечения быстро возрастает и достигает максимального значения 685 м/с через 1,5 мс от начала выстрела. После сгорания пороха скорость истечения медленно уменьшается до 320 м/с. Истечение струи заканчивается к моменту времени  $t_{\text{out}} = 5,2$  мс выбросом малой порции воды пороховыми газами с более высокой скоростью.

Проведенные полевые испытания на моделях порохового ИВ и газового факела подтвердили теоретические предположения о возможности тушения газовых факелов с помощью импульсных струй жидкости высокой скорости. В экспериментах варьировалась скорость струи, расстояние до факела и прицельное расстояние от устья скважины. Максимальная расчетная скорость импульсной струи в зависимости от энергии порохового заряда составляла 300 – 600 м/с, что хорошо согласуется с измеренными значениями [25].

На рис. 9 представлена средняя стадия тушения газового факела. Здесь 1 – импульсная струя жидкости, 2 – газовый факел, 3 – модули измерителя скорости головы импульсной струи жидкости. На заднем плане фотографии видна полоса из темного материала с делениями. Расстояние между большими метками равно 1 метру, а между маленькой и большой – 0,5 м. Расстояние от установки до факела 10 м. Модули измерителей скорости 3 были установлены на расстоянии два метра друг от друга вдоль траектории движения импульсной струи жидкости. Всего использовалось 5 модулей.

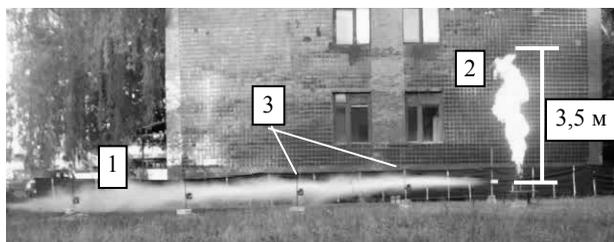


Рис. 9 – Эксперимент по тушению газового факела.

Метод тушения газового факела импульсной струей жидкости высокой скорости основан на отрыве горящего факела от устья скважины. В результате воздействия струи на некоторое время прекращается подача горючей смеси в зону горения, нарушается энергетический баланс реакции горения и горение прекращается. Механизм тушения факела при срыве пламени заключается в том, что струя инертной среды (в данном случае это облако мелкодисперсных брызг воды) имея достаточную скорость, отсекает подачу горючей смеси из устья скважины в зону горения. Экспериментальные исследования показали, что скорость струи для срыва факела должна быть не меньше 80 – 100 м/с. Кроме того, поперечное сечение струи для срыва факела должно быть не меньше поперечного сечения факела в зоне горения. Поперечные

размеры факела в зоне горения в несколько раз превышают поперечные размеры скважины. Размеры факела зависят от диаметра скважины, расхода газа и параметров газа: вязкости, теплопроводности и диффузии.

**Выводы.** Рассмотрена возможность применения импульсных струй жидкости высокой скорости для решения экологических проблем: разрушения железобетонных изделий и конструкционных материалов, ликвидации взрывоопасных предметов и объектов, тушения газовых факелов и компактных пожаров. Для получения импульсных струй жидкости используются импульсный водомет и гидропушка. Построены физические и математические модели гидроимпульсных установок, разработаны надежные и эффективные численные методы их расчета. Определены тактико-технические параметры гидроимпульсных установок разного назначения, спроектированы и изготовлены экспериментальные образцы, измерены основные гидродинамические параметры, проведены полевые испытания. Результаты экспериментов показали адекватность разработанных моделей, надежность методов и методик расчета, перспективность применения гидроимпульсных технологий.

**Список литературы:** 1. *Annoni M.* WJ Decoating / *M. Annoni, M. Monno* // Proc. American Water Jet Conference. – Houston, Texas, August 17 – 19, 2003. – Paper 1E. 2. *Fossey R.D.* Improvements in a multi-use waterjet tool for humanitarian demining / *R.D. Fossey, D.A. Summers, J.G. Blaine, G. Galecki, S. Dorle* // Proc. American Water Jet Conference. – Houston, Texas, August 17 – 19, 2003. – Paper 4N. 3. *Сургай Н.С., Коломиец В.С., Зуёков А.Л.* Гидроимпульсная струя на крупноподходящих пластах // Способы и средства создания безопасных и здоровых условий труда в угольных шахтах. Сб. научн. трудов МакНИИ. – 2005. – С. 81 – 89. 4. *Сургай Н.С., Коломиец В.С., Зуёков А.Л.* Применение гидроимпульсных струй – эффективный способ борьбы с выбросами // Уголь Украины. – 2004. – № 10. – С. 28 – 31. 5. *Онацкая Н.А., Демиденко Л.Ю.* Электрогидроимпульсная обработка для упрочнения поверхности крестовин из стали 110Г13МЛС // Автоматическая сварка. – № 3. – 2009. – С. 45 – 46. 6. *Vijay M.* Radiological Decontamination of Armored Personnel Carriers of Continuous and Pulsed Waterjets at UMEA, Shweden / *M. Vijay, W. Yan, A. Tieu* [etc.] // Proc. American Water Jet Conference. – Houston, Texas, August 17 – 19, 2003. – Paper 2E. 7. *Vijay M.M.* Pulsed jets: fundamentals and applications / *M.M. Vijay* // Proc. of the 5th Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology. New Delhi, India, February 3 – 5, 1998, pp. 610 – 627. 8. *Атанов Г.А.* Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К.: Вища школа. 1987. – 155 с. 9. *Семко А.Н.* Импульсные струи жидкости высокого давления. – Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2007. – 149 с. 10. *Семко А.Н.* О влиянии сжимаемости жидкости на параметры гидропушки // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74. – № 1. – С. 1 – 5. 11. *Ryhming J.L.* Analysis of unsteady incompressible jet nozzle flow / *J.L. Ryhming* // J. of Appl. Mathematics and Physics (ZAMP). – 1973. – V. 24. – P. 149–164. 12. *Семко А.Н.* Механика гидропушки с поршневым приводом для идеальной несжимаемой жидкости // Вісник Донецького університету, Серія А. Природничі науки. – 2005. – № 1. – С. 149 – 157. 13. *Гескин Э.С., Русанова О.А., Семко А.Н.* Прочностной расчет и оптимизация сопла ствола пороховой гидропушки // Проблемы прочности. – 2006. – № 2. – С. 137 – 146. 14. *Атанов Г.А.* Пороховая гидропушка широкого спектра действия / *Г.А. Атанов, Э.С. Гескин, А.Н. Семко* и др. // Прикладная гидромеханика. – 2004. – Т. 6 (78). – № 3. – С. 3 – 8. 15. *Атанов Г.А.* The powder hydrocannon / *G.A. Atanov, A.N. Semko* // Proc. International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics», June 2002, Cheboksary, Russia. – P. 419 – 424. 16. *Петраков А.И.* Разрушение горных пород импульсными струями / *А.И. Петраков, О.Д. Криворотко* // Уголь. 1982. – № 3. – С. 12 – 15. 17. *Галиев Ш.У.* Динамика гидроупругопластических систем. – Киев: Наук. думка. – 1981. – 276 с. 18. *Семко А.Н.* Non-stationary cavitation of a liquid in pulse processes // Proceedings of International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics» (HSH 2002, June 16–23, 2002). – Cheboksary, Russian / Washington, USA: Cheboksary, Russian, 2002. P. 377–381. 19. *Атанов Г.* Unsteady cavitation in the impulse and wave processes / *G. Atanov, O. Rusanova, A. Semko* // Fifth International Symposium on Cavitation (cav2003). Osaka, Japan, November 1 – 4, 2003. Paper Cav03-OS-7-002. 20. *Counter-Delgosha O.* Numerical prediction of the cavitating flow a two-dimensional symmetrical hydrofoil with a single fluid model / *O. Counter-Delgosha, J. Andre Astolfi* // Proc. 5th International Symposium on

Cavitation (CAV2003), Osaka, Japan, November, 1–4, 2003. Paper CAV03–OS–1–013. – 8 p. **21.** Орлов Б.В., Мазинг Г.Ю. Термодинамические и баллистические основы проектирования ракетных двигателей на твердом топливе. – М.: Машиностроение, 1964. – 406 с. **22.** Семко А.Н., Решетняк В.В. Применение метода Родionova для расчета квазидвумерных течений сжимаемой жидкости // Тези науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка». – Київ: ІГМ НАН України, 2008. – С. 44 – 46. **23.** Семко А.Н., Бигвава В.А. Применение импульсных высоконапорных струй жидкости для разрушения взрывоопасных объектов // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки, 2009. – Вип. 2. – С. 325 – 334. **24.** Шаповалов В.Д. Приборы и технологии для чрезвычайных ситуаций // Надзвичайна ситуація, 2007. – №8. – С. 56 – 59. **25.** Семко А.Н., Виноградов С.А., Грицина И.Н. Использование импульсных струй жидкости высокой скорости для тушения газовых факелов // Вісник ДонНУ. Сер.А: Природничі науки, 2011. – Вип. 1. – С. 160 – 167. **26.** Семко А.Н., Бескровная М.В., Украинский Ю.Д., Виноградов С.А., Грицина И.Н. Перспективы применения импульсных струй жидкости для тушения газовых факелов // Вісник НТУ «ХПИ», 2013. – №5(979). – С. 225 – 231.

**Bibliography (transliterated):** 1. Annoni, M., and M. Monno. "WJ Decoating." *Proc. American Water Jet Conference*. Houston, Texas, August, 17–19. 2003. 1E. Print. **2.** Fossey, R. D., et al. "Improvements in a multi-use waterjet tool for humanitarian demining." *Proc. American Water Jet Conference* Houston, Texas, August, 17–19. 2003. 4H. Print. **3.** Surgaj, N. S., V. S. Kolomic and A. L. Zujkov. "Gidroimpulsnaia struja na krutopadajushih plastah." *Sposoby i sredstva sozdaniya bezopasnyh i zdorovyh uslovij truda v ugol'nyh shahtah. Sb. nauch. trudov MakNII*. 2005. 81–89. Print. **4.** Surgaj, N. S., V. S. Kolomic and A. L. Zujkov. "Primenenie gidroimpul'snyh struj – jeffektivnij sposob bor'by s vybrosami." *Ugol' Ukrainy*. No. 10. 2004. 28–31. Print. **5.** Onackaja, N. A., and L. Yu. Demidenko. "Jelektrohidroimpul'snaja obrabotka dlja uprochnenija poverhnosti krestoviny iz stali 110G13MLS." *Avtomaticheskaja svarka*. No. 3. 2009. 45–46. Print. **6.** Vijay, M., at al. "Radiological Decontamination if Armored Personnel Carriers of Continuous and Pulsed Waterjets at UMEA, Shweden." *Proc. American Water Jet Conference*. Houston, Texas, August, 17–19. 2003. 2E. Print. **7.** Vijay, M. M. "Pulsed jets: fundamentals and applications." *Proc. of the 5th Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology*. (New Delhi, India, February, 3–5. 1998. 610–627. Print. **8.** Atanov, G. A. *Gidroimpul'snye ustanovki dlja razrushenija gornyh porod*. Kiev: Vyshha shkola, 1987. Print. **9.** Semko, A. N. *Impul'snye strui zhidkosti visokogo davlenija*. Donetsk: Veber, 2007. Print. **10.** Semko, A. N. "O vlijanii szhimaemosti zhidkosti na parametry gidropushki." *Journal of Engineering Physics*. Vol. 74. No. 1. 2001. 1–5. Print. **11.** Ryhming, J. L. "Analysis of unsteady incompressible jet nozzle flow." *J. of Appl. Mathematics and Physics (ZAMP)*. Vol. 24. 1973. 149–164. Print. **12.** Semko, A. N. "Mehanika gidropushki s porshnevym privodom dlja ideal'noj neszhimaemoj zhidkosti." *Bulletin of Donetsk National University: Ser. A. Natural Sciences*. Vol. 1. 2005. 149–157. Print. **13.** Geskin, Je. S., O. A. Rusanova and A. N. Semko. "Prochnostnoj raschet i optimizacija sopla stvola porohovoj gidropushki." *Problemy prochnosti*. Vol. 2. 2006. 137–146. Print. **14.** Atanov, G. A., at al. "Porohovaja gidropushka shirokogo spectra dejstvija." *Applied Hydromechanics*. Vol. 6 (78). No. 3. 2004. 3–8. Print. **15.** Atanov, G. A., and A. N. Semko. "The powder hydrocannon." *Proc. International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics»*. Cheboksary, Russia, June, 2002. 419–424. Print. **16.** Petrakov, A. I., and O. D. Krivorot'ko. "Razrushenie gornyh porod impul'snymi strujami." *Ugol'*. Vol. 3. 1982. 12–15. Print. **17.** Galiev, Sh. U. *Dinamika gidrouprugoplasticheskikh sistem*. Kiev: Naukova dumka, 1981. Print. **18.** Semko, A. N. "Non-stationary cavitation of a liquid in pulse processes." *Proceedings of International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics»*. Cheboksary, Russian / Washington, USA: Cheboksary, Russian, June, 16–23. 2002. 377–381. Print. **19.** Atanov, G., O. Rusanova and A. Semko. "Unsteady cavitation in the impulse and wave processes." *Fifth International Symposium on Cavitation*. Osaka, Japan, November, 1–4. 2003. Paper Cav03-OS-7-002. Print. **20.** Counter-Delgosha, O., and J. Andre Astolfi. "Numerical prediction of the cavitating flow a two-dimensional symmetrical hydrofoil with a single fluid model." *Proc. 5th International Symposium on Cavitation*. (Osaka, Japan, November, 1–4. 2003. Paper CAV03–OS–1–013. Print. **21.** Orlov, B. V., and G. Yu. Mazing. *Termodinamicheskie i ballisticheskie osnovy projektirovanija raketnyh dvigatelej na tverdom toplive*. Moscow: Mashinostroenie, 1964. Print. **22.** Semko, A. N., and V. V. Reshethjak. "Primenenie metoda Rodionova dlja rascheta kvaziodnomernyh techenij szhimaemoj zhidkosti." *Tezy naukovopraktychnoj konf. "Komp'juternaja gidromechanika"*. IGM NAN Ukrainy. 2008. 44–46. Print. **23.** Semko, A. N., and V. A. Bigvava. "Primenenie impul'snih visokonapornyh struj zhidkosti dlja razrushenija vzryvoopasnyh ob'jektov." *Bulletin of Donetsk National University: Ser. A. Natural Sciences*. Vol. 2. 2009. 325–334. Print. **24.** Шаповалов, В. Д. "Приборы и технологии для чрезвычайных ситуаций." *Надзвичайна ситуація*. Vol. 8. 2007. 56–59. Print. **25.** Семко, А. Н., С. А. Виноградов and I.

N. Gricyna. "Ispol'zovanie impul'snyh struj zhidkosti visokoj skorosti dlja tushenija gazovyh fakelov." *Bulletin of Donetsk National University: Ser. A. Natural Sciences*. Vol. 1. 2011. 160–167. Print. 26. Semko, A. N., et al. "Perspektivy primenenija impul'snyh struj zhidkosti dlja tushenija gazovyh fakelov." *Visnyk Nacional'nogo tehničnogo universytetu «KhPI»*. *Zbirnyk naukovykh prac'. Ser.: Matematyčne modeljuvannja v tehnič ta tehnologijah*. Vol. 5 (979). 2013. 225–231. Print.

*Поступила (received) 11.05.2015*

УДК 621.833

**В.Н. ТКАЧЕНКО**, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ГИБКОМ КОЛЕСЕ ВОЛНОВОЙ ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧИ**

Для проверки гибкого колеса волновой зубчатой передачи на изгибную прочность и выносливость предложена методика определения напряжений от изгиба колеса генератором волны упругой деформации с применением теории упругих тонких оболочек. Вычисленные напряжения корректируются с учётом переменной изгибной жесткости в области зубчатого венца и наличия эффекта концентрации напряжений во впадинах между зубьями. Предлагается определить напряжения в двух опасных сечениях – во впадинах между зубьями венца и в области перехода от зубчатого венца к гибкому колесу. При этом для второго сечения расчёт напряжений проводится с учётом передаваемого вращающего момента. Из приведенного примера расчётов видна целесообразность предлагаемого подхода к оценке прочности и выносливости гибкого колеса волновой зубчатой передачи.

**Ключевые слова:** волновая передача, напряжения, гибкое колесо, теория оболочек.

**Введение и постановка задачи.** Одним из основных факторов, определяющих ресурс волновой зубчатой передачи – ВЗП, является прочность и выносливость зубчатого гибкого колеса цилиндрической оболочки, закрученной передаваемым вращающим моментом и изогнутой со стороны зубчатого венца генератором волн упругой деформации. Наличие на поверхности оболочки выступов в виде зубьев является фактором, модулирующим изгибную жесткость в области зубчатого венца в окружном направлении и приводящим к росту напряжений изгиба во впадинах между зубьями. У основания зубьев, в местах перехода к гибкому колесу, наблюдается концентрация напряжений. Методика учета переменной изгибной жесткости и концентрации напряжений рассматривалась в работе [1].

Экспериментально установлено, что при недостаточной выносливости усталостные трещины зарождаются во впадинах зубьев, с внутреннего края зубчатого венца в сечении I рис. 1, в местах перехода от зубчатого венца к оболочке.

В вершине волны упругой деформации генератор волн полностью вводит зубья гибкого колеса (ГК) в зацепление с зубьями жесткого, так что грани зубьев ГК располагаются здесь параллельно оси ГК. Это приводит к дополнительной угловой деформации в рассматриваемом сечении, возрастанию изгибающего момента, как это наблюдается в области жесткой заделки консольных балок. При испытаниях ВЗП на выносливость наблюдались поломки гибкого колеса, связанные с образованием трещин не только во впадинах

зубьев, но и в окружном направлении, в местах перехода от зубчатого венца к гибкому колесу (сеч. I).

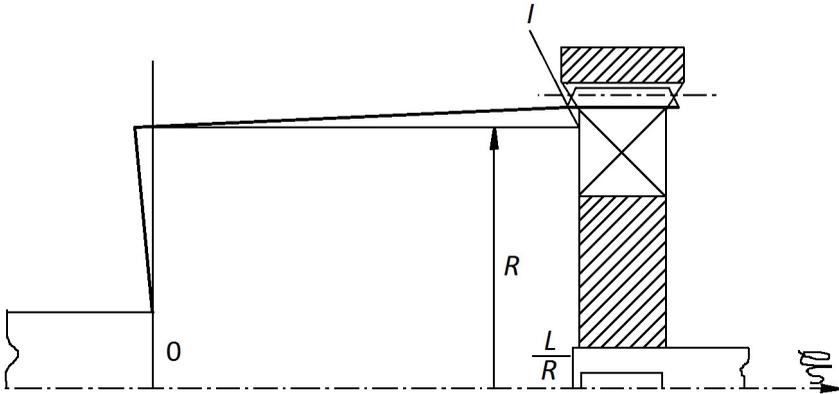


Рис. 1 – Расчётная схема ВЗП.

**Модель для оценки прочности и выносливости.** Для определения напряжений от изгиба, вызванного защемлением зубчатого венца ГК между генератором волн и жестким зубчатым колесом, рассмотрим деформацию ГК – цилиндрической оболочки, на одном из торцов которой расположен зубчатый венец, а противоположный торец соединен с выходным валом.

Возможно несколько способов соединения. Оболочка выполняется заодно с днищем – круглой пластиной. Оболочка соединяется с помощью сварки с пластиной. Возможно также применение шлицевого соединения. Отметим, что способ соединения оболочки с валом несущественно влияет на напряженное состояние в области зубчатого венца.

Недопустимо только ограничивать перемещение точек рассматриваемого торца в осевом направлении, поэтому толщина пластины днища не должна превышать толщину ГК.

**Решение задачи.** Для вычисления напряжений изгиба в сечении применим *техническую моментную теорию цилиндрических оболочек* [2].

Введем следующие обозначения:  $R$  и  $L$  – радиус и длина оболочки;  $E$  и  $\nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $\theta$  и  $\xi = L/R$  – угловая и относительная осевая координаты. Поскольку по поверхности оболочки не действуют внешние нагрузки, а напряжения изгиба являются следствием радиальных перемещений на ее торце, то их вычисление можно свести к решению однородной системы дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка при неоднородных граничных условиях на обоих торцах.

Введём такие обозначения:  $U, V$  и  $W$  – перемещения точек срединной поверхности оболочки в окружном, осевом и радиальном направлениях;  $\gamma$  – угол поворота образующей оболочки;  $T, M_\theta, M_\xi$  – усилия вдоль образующей и моменты в двух плоскостях (перпендикулярной и содержащей ось

оболочки).

Однородная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} L_{11}U + L_{12}V + L_{13}W = 0; \\ L_{21}U + L_{22}V + L_{23}W = 0; \\ L_{31}U + L_{32}V + L_{33}W = 0, \end{cases}$$

где  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – дифференциальные операторы [2].

Перемещения, усилия и изгибающие моменты в рассматриваемой задаче являются периодическими функциями угла  $\theta$ , поэтому решение ищем *методом разделения переменных* с наложением условия периодичности по углу  $\theta$ .

При формировании граничных условий функцию радиальных перемещений на сформированном генератором торце задаем в виде тригонометрического ряда. Для генераторов принудительной деформации эта функция определяется заданным конструктивно профилем генератора.

Причем в процессе закручивания ГК она не изменяется (в отличие от дисковых генераторов полупринудительной деформации). После вычисления перемещений, усилия и изгибающие моменты вычисляются по зависимостям из [2], например:

$$M_{\xi} = \frac{EH^3}{12R^2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial V}{\partial \theta} \right).$$

Напряжения изгиба вычислялись в оболочке радиусом  $R = 80$  мм, толщиной  $H = 2,5$  мм для случая двухволновой передачи с  $W = W_0 \cdot \cos 2\theta$ , где  $W_0 = 1$  мм.

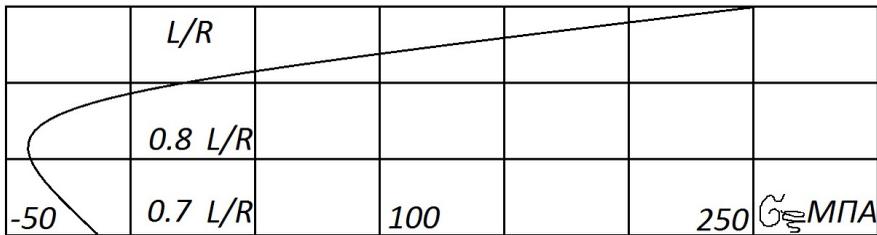


Рис. 2 – Распределение напряжений  $\sigma_{\xi}$  по образующей.

В вершине волны деформации напряжения составили:  $\sigma_{\theta} = 171$  МПа и  $\sigma_{\xi} = 332$  МПа.

На рис. 2 приведен график зависимости  $\sigma_{\xi}$  по длине ГК. Указанные напряжения  $\sigma_{\xi}$  вычислены в сечении I (рис. 1).

Для вычисления касательных напряжений от закручивания ГК передаваемым вращающим моментом  $T$  воспользуемся зависимостью из [3]:

$$\tau_{кр} = T / \kappa \cdot 2\pi R^2 H,$$

$\kappa$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряже-

ний в окружном направлении. В волновой передаче с диаметром гибкого колеса  $d = 160$  мм передаваемый вращающий момент  $T$  равен  $890$  кН·мм, так что  $\tau_{кр} = 59$  МПа.

Расчетные напряжения, вычисленные в сечении I по *энергетической теории прочности*, составили  $\sigma = 357$  МПа, причем напряжения  $\sigma_{\theta} = 171$  МПа были получены без учета влияния зубчатого венца. Наличие на венце выступов в виде зубьев приводит к тому, что изгибная жесткость в окружном направлении становится переменной. В результате чего напряжения  $\sigma_{\theta}$  также периодически изменяются в окружном направлении, причём в области минимальной жесткости – во впадинах между зубьями, они увеличиваются по сравнению с напряжениями, которые возникают в гладком кольце той же толщины, что и во впадинах.

Увеличение напряжений во впадинах обусловлено не только переменной изгибной жесткостью зубчатого венца, но и концентрацией напряжений, зависящей от геометрии выкружки в основании зуба и минимальной толщины венца  $H$ .

На основании анализа результатов усталостных испытаний 300 гибких колес, часть которых выполнены без зубчатого венца, было получено отношение пределов выносливости гладких колес к аналогичным, но с зубчатым венцом [4]. Если ввести коэффициент жесткости  $K_{жс}$ , показывающий влияние переменной изгибной жесткости на напряжения  $\sigma_{\theta}$  и эффективный коэффициент концентрации напряжений  $K_{\sigma}$ , то, очевидно, снижение предела выносливости гибких колес с зубчатым венцом, по сравнению с колесами без венца, пропорционально произведению указанных коэффициентов.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований [4] позволяют рекомендовать для вычислений следующие зависимости:

$$K_{жс} = 1 + 0,8 \frac{m}{H_0}, \quad K_{\sigma} = 1,25 \left( \frac{H_0}{m} \right)^{0,27},$$

где  $m$  – модуль зуба.

Если учесть влияние переменной изгибной жесткости и концентрации напряжений по методике [4], то во впадинах между зубьями  $\sigma_{\theta 1} = 361$  МПа.

Приведенные результаты хорошо подтверждаются экспериментальными исследованиями, а именно тем, что усталостная трещина начинается не на свободном торце зубчатого венца, а в местах перехода от зубчатого венца к оболочке ГК.

**Выводы.** Сравнение расчетных напряжений от совместного изгиба и кручения гибкого колеса с напряжениями от одного изгиба, во впадинах между зубьями, показало, что последние незначительно, до 5% превосходят расчетные. Вследствие этого при проверке прочности и выносливости рекомендуется проводить расчеты в двух сечениях – во впадинах между зубьями и в месте перехода от зубчатого венца к оболочке.

**Список литературы:** 1. *Ткаченко В.Н.* Определение напряжений в зубчатом гибком колесе волновой передачи // Сборник трудов ХГПУ. Выпуск 7. – Харьков: ХГПУ. – 1999. С. 214 – 217. 2. *Гольденвейзер А.И.* Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Гостехиздат, – 1963. 483 с. 3. Волновые механические передачи // Под ред. *Шувалова С.А.* и др. – Москва: НИИ информации

по машиностроению, – 1976. 81 с. 4. *Ткаченко В.Н.* Определение оптимальной толщины зубчатого венца гибкого колеса волновой передачи // *Збірник наукових праць НТУ «ХПІ». Високі технології в машинобудуванні.* – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. С. 477 – 481.

**Bibliography (transliterated):** 1. Tkachenko, V. N. "Opredelenie naprjzhenij v zubchatom gibkom kolese volnovoј peredachi." *Sbornik trudov KhGPU.* Vol. 7. Kharkov: KhGPU, 1999. 214–217. Print. 2. Gol'denvejzer, A. I. *Teorija uprugih tonkih oboloček.* Moscow: Gostehizdat, 1963. Print. 3. *Volnovye mehanicheskie peredachi.* Ed. Shuvalov, S. A., et al. Moscow: NII informacii po mashinostroeniju, 1976. Print. 4. Tkachenko, V. N. "Opredelenie optimal'noj tolshhiny zubchatogo venca gibkogo koleasa volnovoј peredachi." *Zbirnyk naukovykh prac' NTU «KhPI». Vysoki tehnologii' v mashynobuduvanni.* No. 1. Kharkov: NTU «KhPI», 2006. 477–481. Print.

*Поступила (received) 22.05.2015*

УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

**С.А. ШЕВЧЕНКО**, аспирант, ведущий инж.-констр., ГП «КБ «Южное»,  
Днепропетровск;  
**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**М.С. СТЕПАНОВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ПНЕВМОСИСТЕМЫ ЗАПУСКА РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Выполнен анализ процессов нестационарного теплообмена газа со стенками полостей пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения. Получены формулы для расчёта коэффициентов теплоотдачи от газа к стенке с учётом формы полости. Для определения температуры внутренней поверхности стенки выведено интегро-дифференциальное уравнение и разработан новый метод его решения, использующий аппроксимацию регулярной части ядра сверточного интеграла в виде суммы нескольких экспонент. Показано, что при расчёте непроточных полостей пневмосистемы изменение температуры стенок можно не учитывать. Аналогичный метод использован для расчёта нагрева уплотнительных манжет пневмосистемы.

**Ключевые слова:** пневмосистема запуска ЖРД; нестационарный теплообмен; коэффициенты теплоотдачи газа; интегро-дифференциальное уравнение; экспоненциальная аппроксимация ядра.

**Введение и задачи исследования.** В ГП «Конструкторское бюро «Южное» для жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) многократного включения, устанавливаемых на верхних ступенях ракет-носителей, разрабатываются новые пневмосистемы раскрутки турбонасосного агрегата сжатым газом (напр., гелием или азотом). Исследования их опытных образцов проходят на пневматических стендах, где в качестве рабочего тела используется сжатый воздух, а также во время огневых испытаний двигателя. На стадии опытно-конструкторских работ и доводочных испытаний применяются методы математического моделирования. Отдельные элементы используемых математических моделей описаны в статьях [1 – 3] и докладывались на научной конференции [4].

Определённое представление о сложности этих моделей можно получить, анализируя рис. 1, где представлена расчётная схема одного из устройств указанного типа, установленного на пневматический стенд; жиклер б

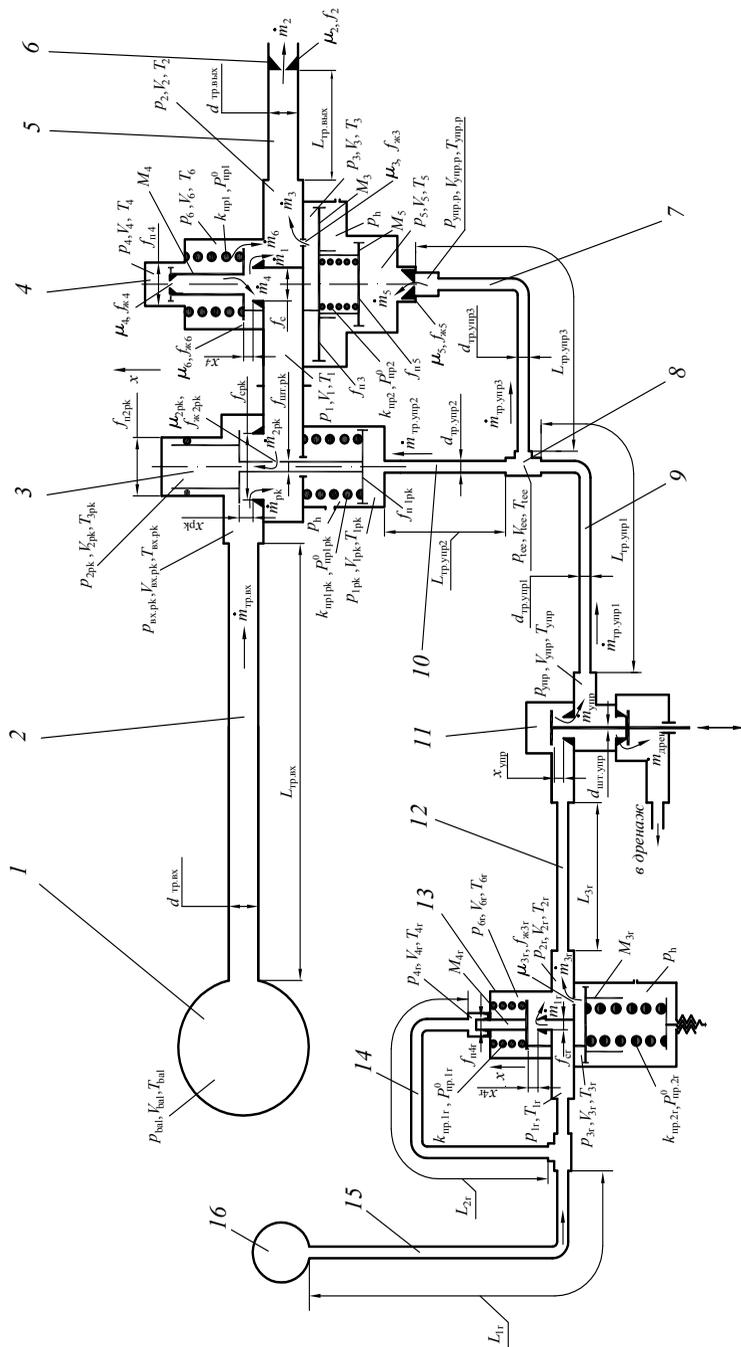


Рис. 1 – Расчётная схема пневмосистемы.

1, 16 – шарбаллоны; 2, 5 – входной и выходной трубопроводы; 3 – пневмоклапан; 4, 13 – регуляторы давления; 6 – жиклер; 7-10, 12, 14, 15 – трубопроводы линии управления; 8 – тройник; 11 – электропневмоклапан.

имитирует работу соплового аппарата турбины [5]. Дискретно-континуальная замкнутая математическая модель пневмосистемы запуска ЖРД учитывает колебания параметров газа в трубопроводах, сжимаемость, нагрев и теплообмен газа со стенками полостей, газодинамические силы, действующие на клапаны, колебания витков замыкающих пружин, размыкания кинематической цепи в сервоприводах регуляторов, сухое трение в уплотнительных манжетах.

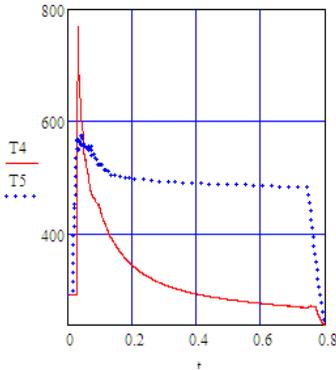


Рис. 2 – Изменение температур гелия в тупиковых полостях (расчёт без теплообмена). Абсолютные температуры газа здесь и далее указаны в Кельвинах, время – в секундах.

предпочтение отдают крайним случаям – адиабатической модели (когда теплообменом можно пренебречь, например, в силу скоротечности процесса) или изотермической модели (когда теплообмен значительно сильнее нагрева газа от сжатия, что характерно для длительных процессов). Сложность решаемой задачи состоит в том, что пневмосистему запуска ЖРД, основываясь только лишь на длительности её включения, нельзя с уверенностью отнести ни к первому, ни ко второму типу.

Поэтому в статье [1] для полостей использовалась изотермическая модель, и уравнение сжимаемости газа в полости имело вид:

$$\frac{V_j}{P_j} \frac{dP_j}{dt} = \frac{R \cdot T_j}{P_j} \cdot \sum_l \dot{m}_{l,j} + \sum_n f_{n,j} \cdot C_n,$$

где  $t$  – время;  $C_n, f_{n,j}$  – это скорость  $n$ -го поршня и его площадь, контактирующая с полостью  $j$ ;  $R$  – газовая постоянная.

А в статье [2] ей на смену пришла адиабатическая модель с уравнением

$$\frac{V_j}{kP_j} \frac{dP_j}{dt} = \frac{R}{P_j} \sum_i \dot{m}_{i,j} \cdot \sigma(T_i, T_j) + \sum_n f_{n,j} \cdot C_n, \quad (1)$$

На рис. 1 и далее в этой статье используются следующие обозначения:  $P_j$ ,  $V_j$ ,  $T_j$  – давление, объём и температура газа в  $j$ -ой полости;  $\dot{m}_l$  – поток массы газа по  $l$ -тому трубопроводу или каналу;  $f_n$  – площадь поперечного сечения  $n$ -го клапана или поршня;  $\mu f_n$  – площадь эффективного сечения клапана, и ряд других. Как видим, в этой расчётной схеме температура газа в полостях включена в число динамических параметров, причём учитывается теплообмен между газом и стенкой полости; данное очевидное усложнение расчёта стало вынужденным следствием ряда причин.

Известно, что в агрегатах пневмоавтоматики учёт теплообмена обычно подменяют выбором подходящей модели для описания сжатия газа в полости. Причём

где  $k$  – показатель адиабаты;  $\sigma(T_i, T_j) = \begin{cases} T_i, \dot{m}_{i,j} \leq 0; \\ T_j, \dot{m}_{i,j} > 0. \end{cases}$

Для расчёта температуры газа уравнение сжимаемости (1) было дополнено уравнением неразрывности потока массы

$$dM_j / dt = \sum_l \dot{m}_{l,j}$$

и равенством Клапейрона

$$P_j V_j = M_j R T_j. \quad (2)$$

После чего было выполнено сравнение результатов. Оказалось, что в некоторых тупиковых полостях линии управления (напр., под поршнем сервопривода регулятора 4), а также в верхней полости регулятора, после перехода к адиабатической модели максимальные расчётные значения температуры газа возросли в 2 ... 2.5 раза (рис. 2), и это заметно повлияло на процесс массообмена и расчётные давления газа. Кроме того, полученное по адиабатической модели значительное (на 35%) снижение температуры газа в баллоне привело к его повышенному расходу; вследствие чего, на последнем включении, расчёт «выявил» нарушения работы регулятора (рис. 3, б), которые не подтвердились результатами огневых испытаний ЖРД.

Заметим, что в этом расчёте уже были учтены результаты термодинамического анализа, представленные в статье [3], и для трубопроводов линии

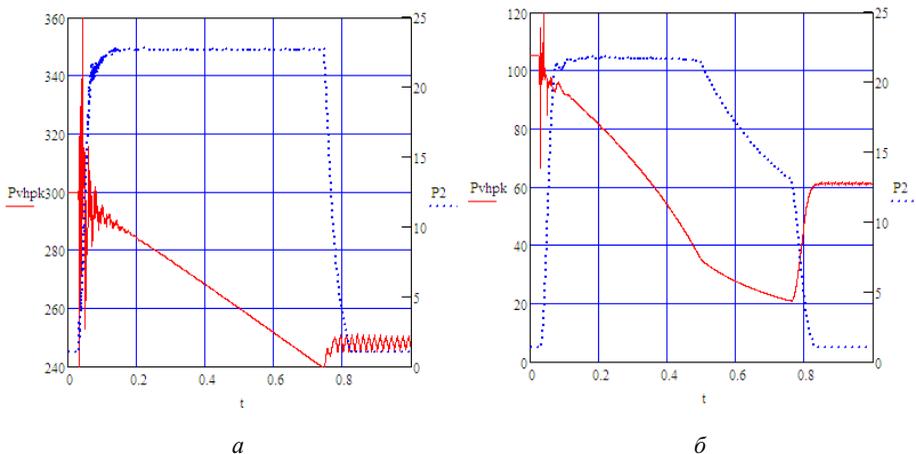


Рис. 3 – Расчёт пневмосистемы запуска ЖРД без учета теплообмена (давление газа здесь и далее в этой статье указано в атмосферах):  
а – 1-ое включение; б – 5-ое включение.

управления использовалась изотермическая модель. В связи с этим возникла необходимость объяснить столь большое повышение температуры в полостях, а также использовать неучтенные факторы (в первую очередь – теплообмен, но существуют и другие) для уточнения полученных расчётных значений.

Измерить температуру газа в этих полостях сложно, поэтому просмат-

ривался один выход: при этом анализе довериться физике, но впредь вычислять температуру газа с учётом теплообмена со стенками. Что потребовало модернизации известных (или разработки новых) расчётных методов и определило основные задачи исследования, отчёт о которых представлен в этой статье.

**Расчётная оценка нагрева газа в тупиковых полостях пневмосистемы.** Для тупиковой полости сервопривода уравнение (1) имеет вид:

$$(V_5 / kP_5) \cdot dP_5 / dt = (R / P_5) \cdot \dot{m}_{\text{унр.р.5}} \cdot \sigma(T_{\text{унр.р.}}, T_5) + f_{n5} \cdot C_{n5} \cdot \quad (3)$$

При включении пневмосистемы давление  $P_5(t)$  и масса  $M_5(t)$  газа в этой полости увеличиваются в десятки раз. Рассмотрим промежуток времени  $(t_0, t_1)$ , на котором поршень сервопривода неподвижен; температуру  $T_{\text{унр.р}}$  будем считать постоянной. Тогда уравнение (3) упрощается:

$$d(P_5 V_5) / dt = kRT_{\text{унр.р}} \cdot dM_5 / dt \quad \text{или} \quad d(P_5 V_5) / dM_5 = kRT_{\text{унр.р}},$$

и после учёта равенства Клапейрона  $P_5 V_5 = M_5 R T_5$  приобретает вид линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$M_5 \cdot dT_5 / dM_5 + T_5 = kT_{\text{унр.р}},$$

которое интегрируется при известных начальных значениях  $M_5(t_0), T_5(t_0)$ .

Эта задача имеет решение

$$T_5(t) = kT_{\text{унр.р}} + (T_5(t_0) - kT_{\text{унр.р}}) \cdot M_5(t_0) / M_5(t), \quad (4)$$

его график приведен на рис. 4. Получилось, что температура в тупиковой полости пневмосистемы приближается к горизонтальной асимптоте, которая в  $k$  раз выше температуры входящего газа.

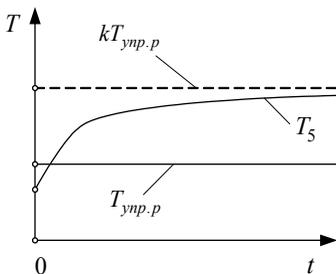


Рис. 4 – Схема повышения температуры газа в тупиковой полости пневмосистемы.

Если мы учтём увеличение объёма  $V_5$ , вызванное подъёмом поршня сервопривода, а также уход тепла в стенку полости, то температура  $T_5$  будет возрастать медленнее, чем по зависимости (4). Поэтому сформулированный выше результат необходимо смягчить: температура газа в тупиковой полости превышает температуру входящего газа, но не более чем в  $k$  раз.

Для пневматического стенда предельное увеличение составляет 40 %, а увеличение температуры в два раза происходит за счёт двухступенчатого сжатия – сначала в штуцере регулятора, а затем в тупиковой полости. Но увеличение температуры в  $k^2 \approx 2$  раз будет возможно, если  $V_{\text{унр.р}} \gg V_5$ . Поэтому при подготовке данных для газодинамического расчёта пневмосистемы не следует искусственно завышать значение объёма газа в штуцере, относя к нему часть подводящего трубопровода. Известно, что такое завышение упрощает интегрирование газодинамических уравнений (которые становятся менее жёсткими), но, как выяснилось, оно искажает результаты термодинамического расчёта.

**Температурный эффект от вентилирования полости за счёт колебаний поршня.** Увеличение температуры газа в тупиковых полостях пневмосистемы становится особенно заметным, когда в качестве рабочего тела используется гелий. Напомним, что для гелия  $k = 1.66$  [6], а при ступенчатом нагреве коэффициент увеличения температуры составит  $k^2 = 2.7$ , и максимальная температура может увеличиться в расчёте до 750-800 К (рис. 2).

В соответствии с известной *формулой Сен-Венана* [7] для критического или докритического течения газа через дроссель его массовый расход

$$\dot{m} \sim 1/\sqrt{T}, \quad (5)$$

поэтому столь значительное увеличение температуры существенно затруднит массообмен между полостями и ограничит скорости поршней сервопривода. Кроме того, если такая высокая температура газа будет сохраняться долго, это приведёт к разрушению уплотнительных манжет. Заметим, что длительность одного включения пневмосистемы запуска ЖРД не превышает 1 секунды, и, как мы покажем далее, этого времени недостаточно для значительного нагрева манжеты. К тому же, максимальная и средняя температуры газа снижаются за счёт теплообмена, а также при колебаниях поршней.

Переходные процессы, происходящие при включении или выключении пневмосистемы запуска ЖРД, сопровождаются колебаниями поршней сервопривода и клапана регулятора 4 [2], а также управляющего регулятора 13 и пневмоклапана 3 (рис. 1). При этих колебаниях происходит заброс новых порций газа из линии управления и проточных полостей в соседние полости. И поскольку температура газа в линии управления не изменяется (а температура  $T_1$  после открытия клапана регулятора 4 быстро снижается), то эти забросы в существенной степени сглаживают ход температур в тупиковых полостях. Показательным примером является изменение температуры  $T_4$  (рис. 2).

В результате *внутреннего теплообмена*, проходящего за счёт перемешивания газа из разных полостей, уменьшается колебательность и повышается динамическая устойчивость системы. Возникает противоречие между стремлением конструктора уменьшить колебательность системы и, тем самым, снизить продолжительность переходных процессов, а с другой стороны, увеличение колебательности полезно для снижения негативных последствий чрезмерного нагрева газа. После учёта *внешнего теплообмена* это противоречие теряет свою остроту.

Соотношение (5) объясняет результат, проиллюстрированный на рис. 3, б. Заправка баллона 1 происходит до старта, и далее новые порции газа в него не поступают, поэтому внутренний теплообмен здесь исключен. Температура газа перед соплами (или жиклером б) близка к температуре в баллоне, и, если не учитывать теплообмен, снижается монотонно, ступенчато и к концу 5-ого включения составляет 190 К, что увеличивает максимальные расчётные значения расхода газа на 17%. После учёта внешнего теплообмена диапазон изменения температуры перед соплами был сокращен вдвое.

**Уравнение сжимаемости газа при учёте теплообмена со стенками полостей теплового двигателя.** Теплообмен между движущимся газом и стенками магистрали изучается и описывается в теории ракетных двигателей,

например, в [8]. Но наиболее близким техническим устройством, для термодинамического расчёта которого указанный эффект учитывается давно и в обязательном порядке, является поршневой двигатель внутреннего сгорания [9] и его наиболее прогрессивный тип – дизель [10, 11].

В дизельном двигателе, как правило, учёт теплообмена проводят при использовании средней температуры газа  $T_j$  в  $j$ -той полости и средней температуры  $T_{cm,j}$  внутренней поверхности стенки. Уравнение сжимаемости газа в полости при учёте теплообмена имеет следующий вид:

$$\frac{V_j}{k \cdot P_j} \frac{dP_j}{dt} = \frac{R \cdot T_j}{P_j} \cdot \sum_l \dot{m}_{l,j} \cdot \sigma_{i,j} + \sum_n f_{n,j} \cdot C_n - \frac{k-1}{k \cdot P_j} \cdot q_j. \quad (6)$$

где  $q_j$  – это поток тепла, уходящий от газа в стенку,

$$q_j = \alpha_{om,j} f_{cm,j} (T_j - T_{cm,j}),$$

$\alpha_{om,j} \cdot f_{cm,j}$  – коэффициент теплоотдачи и площадь внутренней поверхности стенки  $j$ -той полости.

Убедимся, что последнее слагаемое равенства (6) отвечает хорошо известным термодинамическим свойствам идеального газа. Для этого рассмотрим частный случай, когда отсутствует массообмен и поршни неподвижны. Получаем:

$$(V_j / kP_j) dP_j / dt = -(k-1)/(kP_j) \cdot q_j \text{ или } V_j dP_j / dt = -(k-1) \cdot q_j.$$

Объём  $V_j$  не изменяется, и его можно внести под знак производной:

$$d(P_j V_j) / dt = -(k-1) \cdot q_j.$$

Учтём известное равенство  $c_v = R/(k-1)$ , откуда  $(k-1) = R/c_v$ ,

где  $c_v$  – это удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме.

В результате подстановки получаем

$$d(P_j V_j) / dt = -R \cdot q_j / c_v = -M_j \cdot R \cdot q_j / (c_v \cdot M_j) = -M_j \cdot R \cdot q_j / C_{v,j},$$

где  $M_j$  – масса газа в полости,  $C_{v,j} = c_v \cdot M_j$  – её теплоёмкость.

Напомним, что  $q_j$  – это поток тепла, уходящий из полости, поэтому

$$-q_j / C_{v,j} = dT_j / dt.$$

Получаем:  $d(P_j V_j) / dt = M_j R \cdot dT_j / dt$ .

Постоянную массу можно внести под знак производной:

$$d(P_j V_j) / dt = d(M_j R T_j) / dt.$$

Отбросим производные, и получим равенство Клапейрона (2).

**Расчёт коэффициентов теплоотдачи для переходных режимов работы пневмосистемы.** В поршневых тепловых двигателях коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_{om,j}$  определяют обработкой индикаторных диаграмм, полученных для сходных условий. Для большинства полостей пневмосистемы запуска ЖРД экспериментальный путь определения  $\alpha_{om,j}$  крайне затруднителен, и его заменили расчётным, который базируется на использовании формулы Михеева [12] и других зависимостей.

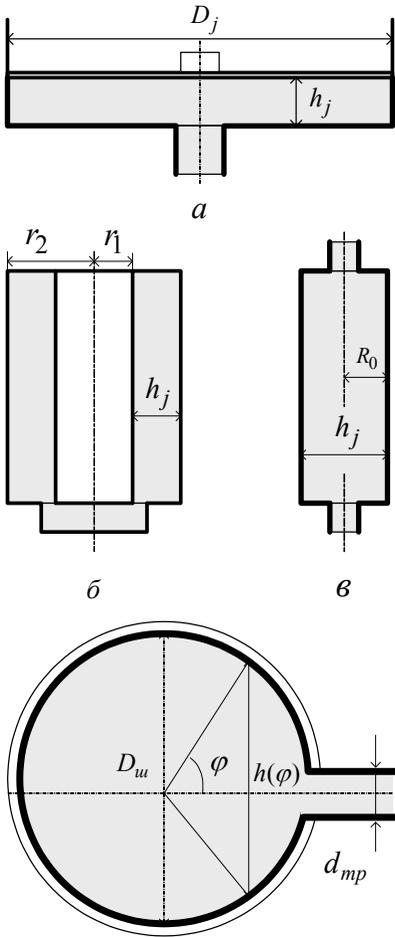


Рис. 5 – Типовые формы полостей пневмосистемы запуска ЖРД.

го регулятора 4);

- тупиковая полость, имеющая форму цилиндрической втулки (например, полости верхних пружин регуляторов);
- тупиковая полость сферической формы (шаробаллоны).

Для первого типа размер  $h_j$  является переменным; он равен зазору между поршнем и дном полости. Для второго типа размер  $h_j$  равен диаметру полости, для третьего – разности внешнего  $r_1$  и внутреннего  $r_2$  радиусов полости, а для четвертого типа (как мы покажем в этом пункте статьи) размер  $h_j$  составляет 40% от диаметра шара. Столь же просто определяются площа-

Формула Михеева описывает теплоотдачу от турбулентных потоков газа и имеет вид:

$$\alpha_{om} = 0.021 \text{Re}^{0.8} \text{Pr}^{0.43} \psi_{cm} \lambda / h, \quad (7)$$

где  $\psi_{cm} = (\text{Pr} / \text{Pr}_{cm})^{0.25}$  – температурная поправка на влияние пристеночного слоя;

$$\text{Pr} = c_p \mu_2(T_j) / \lambda(T_j),$$

$$\text{Pr}_{cm} = c_p \mu_2(T_{cm.j}) / \lambda(T_{cm.j})$$

– числа Прандтля для турбулентного ядра и пристеночного слоя;  $\lambda$  – теплопроводность газа;  $c_p$  – его теплоёмкость при постоянном давлении;  $h$  – поперечный размер течения.

В формулу (7) входит число Рейнольдса

$$\text{Re} = U_j \rho_j h_j / \mu_2,$$

где  $\rho_j$  – плотность газа в полости  $j$ ;  $U_j$  – характерное значение скорости газа;  $\mu_2$  – его динамическая вязкость.

Чтобы использовать формулу (6), нужно знать величину скорости  $U_j$  и размер  $h_j$ . Порядок вычисления этих величин зависит от типа полости. В анализируемой пневмосистеме различают четыре типа полостей:

- тупиковая полость, имеющая форму цилиндрической щели между поршнем и дном полости (рис. 5, а);
- проточная полость, имеющая форму выгнутого цилиндра (например, штуцер управляющей полости основно-

ди  $f_{cm,j}$  теплового контакта между газом и стенкой полости. Для определения средней скорости  $U_j$  мы решим две вспомогательных задачи.

**Задача 1.** Выполним вывод коэффициента теплоотдачи газа при его течении по цилиндрической щели (рис. 5, а). Равенство (6) после всех подстановок преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \alpha_{om,j} &= 0.021(U_j \rho_j h_j / \mu_2)^{0.8} (c_p \mu_2 / \lambda_j)^{0.43} \psi_{cm} \lambda_j / h_j = \\ &= 0.021 c_p^{0.43} (U_j \rho_j h_j)^{0.8} \mu_2^{-0.37} \psi_{cm} \lambda_j^{0.57} / h_j. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее мы должны усреднить этот коэффициент по цилиндрическому зазору. При усреднении будем считать, что плотность газа  $\rho_j$  равняется своему среднему значению и внутри зазора не изменяется. Тогда весь газ, заходящий в зазор через центральный канал, уходит под движущийся поршень, и для произвольного цилиндрического сечения, отстоящего от оси на расстояние  $r$ , можно составить следующее равенство:

$$\mu U_j \rho_j h_j (2\pi r) = \dot{m}_j [\pi(R_*^2 - r^2)] / [\pi R_*^2], \quad (9)$$

где  $\dot{m}_j$  – поток массы;  $R_*$  – радиус поршня;  $\mu$  – коэффициент расхода для течения газа в зазоре.

Из (9) получим 
$$U_j \rho_j h_j = \dot{m}_j (1 - r^2 / R_*^2) / (2\pi r \mu)$$

и составим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{R_*} (U_j \rho_j h_j)^{0.8} r dr &= 2\pi \left( \frac{\dot{m}_j}{2\pi\mu} \right)^{0.8} \int_0^{R_*} \left( \frac{1 - r^2 / R_*^2}{r} \right)^{0.8} r dr = \left\| \text{замена } \frac{r}{R_*} = x \right\| = \\ &= \pi R_*^2 \left( \frac{\dot{m}_j}{2\pi\mu R_*} \right)^{0.8} 2 \int_0^1 (1 - x^2)^{0.8} x^{0.2} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Если в (8) поток массы  $U_j \rho_j$  заменить его величиной, вычисленной на некотором периметре  $\Pi = 2\pi r_*$ , где  $r_*$  – это радиус соответствующего цилиндрического сечения, то вместо (10) мы получим

$$2\pi \left( \frac{\dot{m}_j}{2\pi r_*} \right)^{0.8} \int_0^{R_*} r dr = \pi R_*^2 \left( \frac{\dot{m}_j}{2\pi r_*} \right)^{0.8}. \quad (11)$$

Для правильно выбранного радиуса  $r_*$  значения (10) и (11) должны совпадать, откуда

$$\left( \frac{\dot{m}_j}{2\pi\mu R_*} \right)^{0.8} 2 \int_0^1 (1 - x^2)^{0.8} x^{0.2} dx = \left( \frac{\dot{m}_j}{2\pi r_*} \right)^{0.8},$$

и

$$r_* = \mu R_* \left( 2 \int_0^1 (1 - x^2)^{0.8} x^{0.2} dx \right)^{1.25}. \quad (12)$$

Интеграл из правой части (12) был вычислен приближенно, в результате

получилось следующее равенство:

$$r_* = 0.877 \mu R_*.$$

Если использовать значение  $\mu = 0.8$ , то получим  $r_* = 0.7 \cdot R_*$ . Таким образом, в тупиковой полости, имеющей форму цилиндрической щели (рис. 5, а), средняя скорость газа определяется по характерному периметру течения

$$\Pi_j = \pi D_{*,j} = 0.7\pi D_j,$$

где  $D_j$  – это диаметр поршня. Тогда

$$U_j \rho_j h_j = \left| \dot{m}_j \right| / \Pi_j, \quad (13)$$

где  $\dot{m}_j$  – это поток массы, приходящей в полость или уходящей из неё в данный момент времени.

**Задача 2.** Выполним аналогичный расчёт для полости сферической формы (рис. 5, з). Вместо соотношения (9) получим такое равенство:

$$U \rho \cdot 0.25 \pi h^2(\varphi) = \dot{m} \cdot [1 - (\pi R_{uu}^3 (1 - \cos \varphi) \cdot (1 - (1 - \cos \varphi) / 3)) / [(4/3) \pi R_{uu}^3]], \quad (14)$$

где вычисляется поток массы через основание шарового сегмента, имеющего центральный угол  $2\varphi$ ;  $\varphi \in [\arcsin(d_{mp} / D_{uu}), \pi]$ ;  $h(\varphi) = D_{uu} \sin \varphi$ ;  $D_{uu}, d_{mp}$  – диаметры сферической полости и присоединённого к ней трубопровода.

Равенство (14) было преобразовано к следующему виду:

$$U \rho h(\varphi) = \dot{m}_j \cdot (1 + 1.5 \cos \varphi - 0.5 \cos^3 \varphi) / (\pi R_{uu} \sin \varphi),$$

после чего был вычислен несобственный интеграл второго рода

$$I = \int_{\arcsin(d_{mp}/D_{uu})}^{\pi} \left[ \frac{1 + 1.5 \cos \varphi - 0.5 \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right]^{0.8} \frac{R_{uu} \sin \varphi}{h(\varphi)} d\varphi,$$

и записано условие усреднения:

$$[(\dot{m}_j / (0.25 \pi h_{cp}^2))^{0.8} / (h_{cp})] \cdot (4 \pi R_{uu}^2) = I \cdot 2 \pi R_{uu} \cdot (\dot{m}_j / (\pi R_{uu}))^{0.8},$$

откуда  $h_{cp} = 2 / (2I)^{1/1.8} \cdot D_{uu}$ .

Приближенное значение интеграла  $I$  для обоих баллонов пневмосистемы составило 10; следовательно, чтобы использовать равенство (13) средний зазор  $h_{cp}$  и периметр сечения  $\Pi_{uu}$  нужно назначать по формулам

$$h = 0.4 \cdot D_{uu}; \quad \Pi_{uu} = 0.1 \cdot \pi D_{uu}.$$

Правило (13) применялось и для других типов полостей, причём

- для цилиндрической полости (рис. 5, в)  $\Pi_j = 0.25 \cdot \pi D$ ,
- а для кольцевого канала (рис. 5, б)  $\Pi_j = \pi \cdot (r_1 + r_2)$ ,

что обеспечивает выполнение условия  $\Pi_j \cdot h_j = f_{сеч}$  и  $\Pi_j \cdot h_j = 0.5 \cdot f_{сеч}$  для проточной и непроточной полости, соответственно.

**Расчёт коэффициентов теплоотдачи для установившегося режима работы пневмосистемы.** Применение формулы (7) для проточных полостей дало значения  $\alpha_{от} = 3 \dots 5 \cdot 10^3$  Вт/(м<sup>2</sup>град), а для тупиковых – на 2 порядка

меньше, поскольку там наблюдаются значительно меньшие скорости газа. Но для этих полостей (кроме баллонов) зазор  $h_j$  очень мал, и теплообмен, вызванный принудительной конвекцией, усиливается за счёт теплопроводности (или *диффузного теплообмена*) газа.

Для количественной оценки эффекта теплопроводности были решены две модельные задачи.

**Задача 3.** В плоский зазор шириной  $h$  (рис. 5, а) зашёл газ, имеющий начальную, избыточную по отношению к температуре стенки, температуру  $T_0$ . Требуется рассчитать изменение избыточной температуры  $T(x, t)$  и определить коэффициент теплоотдачи от газа к стенке.

При решении будем предполагать, что температура стенки не изменяется, а продольные размеры зазора значительно больше его ширины. Тогда поставленная задача приводит к одномерному уравнению теплопроводности

$$c_p \rho \cdot \partial T / \partial t = \lambda \cdot \partial^2 T / \partial x^2,$$

а также граничному и начальному условию

$$T(\pm h/2, t) = 0; \quad \frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} T(x, 0) dx = T_0,$$

где интеграл вычисляет среднее значение температуры слоя в начальный момент времени  $t = 0$ , а  $x \in [-h/2, h/2]$  – это поперечная координата.

Применим к этой задаче *метод Фурье разделения переменных*, и её решение будем искать в следующем виде:

$$T(x, t) = T_1 \cdot \exp(-\alpha \beta^2 t) \cdot \cos(\beta x),$$

где  $\alpha = \lambda / (c_p \rho)$  – коэффициент теплопроводности газа.

В силу граничного условия *константа разделения*  $\beta$  принимает значения  $\beta_j = \pi(2j - 1) / h$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , но если дополнительно потребовать, чтобы

- температурная кривая по координате  $x$  была *униmodalной*, то есть имела единственный максимум (при  $x = 0$ ),
- поле  $T(x, t)$  имело наименьшее затухание по времени  $t$ ,

то для этой константы нужно использовать значение  $j = 1$ , и мы получаем:

$$T(x, t) = T_1 \cdot \exp(-\gamma t) \cdot \cos(\pi x / h).$$

Учтём начальное условие:

$$\frac{1}{h} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} T_1 \cdot \exp(-\gamma \cdot 0) \cdot \cos(\pi x / h) dx = T_0,$$

откуда  $(1/h) \cdot T_1 \cdot 2 \cdot (h/\pi) \cdot \sin(\pi/2) = T_0$  и  $T_1 = T_0 \cdot \pi/2$ .

Следовательно, градиент температуры газа вблизи внутренней поверхности стенки равен

$$-\partial T(x, t) / \partial x = T_0 \cdot (\pi^2 / 2) / h,$$

то есть,

$$\alpha_{om} = -\partial T(x, t) / \partial x \cdot \lambda / T_0 = \pi^2 \lambda / (2h) \approx 4.94 \lambda / h. \quad (15)$$

Заметим, что полученный результат не зависит от величины температуры газа в полости и характера её изменения, поэтому коэффициент теплоотдачи (15) можно применять не только в модельной, но и в реальной задаче.

**Задача 4.** Аналогичная задача была решена для полости цилиндрической формы (рис. 5, в). Нестационарное осесимметричное поле избыточной температуры  $T(r, t)$  внутри длинной цилиндрической полости радиуса  $R_0$  описывается уравнением

$$c_p \rho \cdot \partial T(r, t) / \partial t = \lambda \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT(r, t)}{dr} \right),$$

а также граничным и начальным условием

$$T(R_0, t) = 0; \quad 2\pi \cdot \int_0^{R_0} T(r, 0) \cdot r \, dr = T_0 \cdot \pi R_0^2,$$

где  $T_0$  – это средняя избыточная температура газа, зашедшего в полость в момент времени  $t = 0$ .

Для решения был использован метод Фурье разделения переменных. После стандартных преобразований приходим к равенству:

$$T_j(r, t) = T_j(0) \cdot \exp(-\alpha \eta_j^2 t) \cdot J_0(\eta_j r).$$

Учтём граничное условие и получим:  $J_0(\eta_1 R_0) = 0$ , то есть  $\eta_1 \cdot R_0 = x_1$ , где  $x_1 \approx 2.40$  – 1-ый корень функции Бесселя  $J_0(x)$ .

Теперь преобразуем начальное условие:

$$T_1(0) \cdot 2 \cdot \int_0^{R_0} J_0(x_1 r / R_0) \cdot (r / R_0) \, d(r / R_0) = T_0. \quad (16)$$

В теории цилиндрических функций [13] доказаны тождества:

$$\int_0^x J_0(r) \cdot r \, dr = x \cdot J_1(x), \quad J_0'(x) = -J_1(x), \quad (17)$$

где  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого порядка.

Воспользуемся первым тождеством для упрощения условия (16):

$$T_1(0) \cdot 2 \cdot J_1(x_1) / x_1 = T_0$$

то есть  $T_1(r, t) = T_0 \cdot [x_1 / (2 \cdot J_1(x_1))] \cdot \exp(-\alpha x_1^2 t / R_0^2) \cdot J_0(x_1 r / R_0)$ .

Вычислим градиент температур газа на внутренней поверхности стенки:

$$-\partial T_1(r, t) / \partial r = T_0 \cdot (x_1^2 / (2 R_0)) \cdot \exp(-\alpha x_1^2 t / R_0^2),$$

где для упрощения правой части было использовано второе тождество (17).

Заметим, что величина  $T_0 \cdot \exp(-\alpha x_1^2 t / R_0^2)$  – это средняя температура газа в полости для момента времени  $t$ , а ширина  $h$  для этого случая равняется диаметру полости  $2 R_0$ . Следовательно, коэффициент теплоотдачи равен

$$\alpha_{om} = (x_1^2 / h) \cdot \lambda \approx 5.76 \cdot \lambda / h. \quad (18)$$

Формулы (15) и (18) имеют близкие числовые коэффициенты и одинаковую форму. Учитывая приближённый характер использованной теории, при расчёте всех полостей пневмосистемы пользовались общей формулой

$$\alpha_{om} = 5 \lambda / h . \quad (19)$$

Для гелия при величине зазора  $h_j = 3 \text{ мм}$  по формуле (19) получаем

$$\alpha_{om,j} \approx 250 \text{ Вт} / (\text{м}^2 / \text{град}) ,$$

что способно оказать заметное влияние на результат теплового расчёта полости. На рис. 6 показаны кривые, отвечающие изменению этих коэффициентов для некоторых проточных и тупиковых полостей пневмосистемы.

**Задача 5. Оценим влияние старших форм колебаний.** В задачах 3 и 4 мы учли только первую форму аperiodического колебания температуры, причём приняли предположение, что эта форма сразу же получает всё тепло, которое содержалось в начальном поле температуры; напомним, что начальное поле отвечало турбулентному движению газа и, по этой причине, было близко к однородному. В действительности процесс трансформации равномерного поля

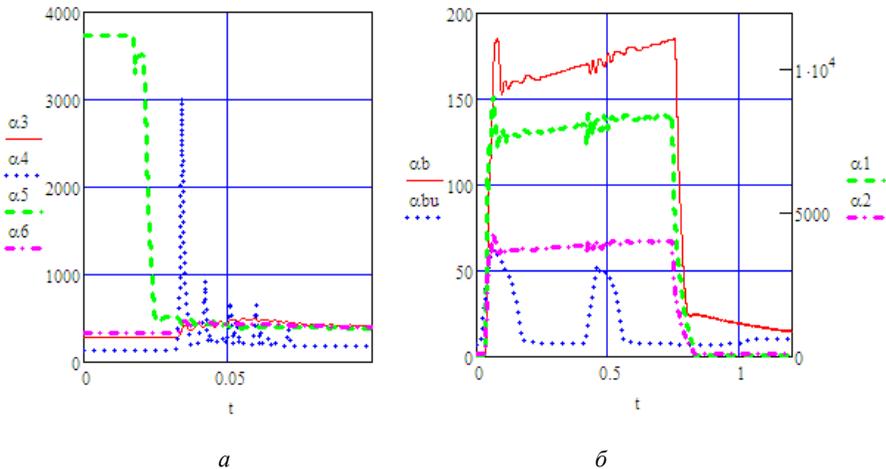


Рис. 6 – Расчётные значения коэффициентов теплоотдачи при работе на гелии: а – в тупиковых полостях регулятора; б – в баллонах и проточных полостях.

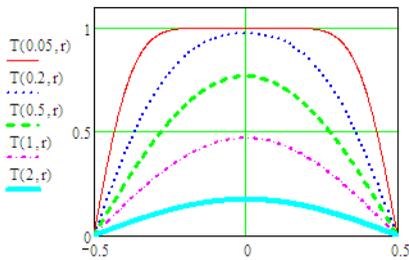


Рис. 7 – Трансформация поля температур в узком зазоре.

занимает определённое время и может быть описан при помощи *обобщённого ряда Фурье*, составленного из собственных функций  $\psi_j(\eta_j x)$  (или  $\psi_j(\eta_j r)$ ), форма которых была дана выше, например:

$$T(t, x) = \sum_{j=1,2,\dots} a_j \cdot \exp(-\alpha \eta_j^2 t) \times \psi_j(\eta_j x) , \quad (20)$$

где коэффициенты Фурье  $a_j$  вычисляются по известным формулам [13].

Визуализация процесса трансформации поля показана на рис. 7. На нём без-

размерная координата  $r$  изменяется по ширине зазора, а безразмерное время  $\tau$  вычисляется по формуле

$$\tau = t / t_1,$$

где  $t_1$  – это постоянная времени для первой формы колебаний,

$$t_1 = 1 / (\alpha \eta_1^2).$$

Вычислим градиент температур у стенки полости по формуле (20) и соответствующий тепловой поток, после чего сравним его с потоком тепла, который получается при использовании первой формы колебаний. Приходим к равенству

$$\int_0^{\tau} (\partial T(0.5h, t) / \partial r) dt = Kr(\tau) \cdot \int_0^{\tau} (\partial T(0.5h, t) / \partial r) dt, \quad (21)$$

откуда получаем значение коэффициента корректировки  $Kr(\tau)$ .

Чтобы уточнить модель теплообмена, достаточно коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{om}$ , полученный по формуле (19), умножить на  $Kr(\tau)$ . Покажем, что для тупиковых полостей пневмосистемы этот множитель близок к 1.

Значения корректирующего множителя показаны на рис. 8, а в табл. 1 приведены значения постоянной времени  $t_1$  изменения соответствующей температуры. Во всех рассмотренных случаях продолжительность  $t_{уст}$  установившегося режима оказывается больше, чем  $t_1$ ; то есть,  $\tau > 1$  и  $Kr1, 2 \approx 1$ .

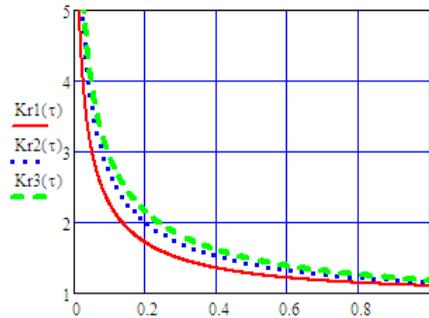


Рис. 8 – Корректирующий множитель для коэффициентов теплоотдачи: 1 – узкий зазор; 2 – цилиндрическая полость; 3 – сферическая полость.

Таблица 1 – Постоянные времени для теплообмена газа со стенками тупиковых полостей пневмосистемы запуска ЖРД на установившемся режиме

температура	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_{1.pk}$	$T_{3.r}$	$T_{4.r}$	$T_{6.r}$
$t_1$ , мсек	10	560	36	12	120	2	60	100

**Коэффициенты теплоотдачи для газа в шаробаллоне.** Во время выпуска газа коэффициенты теплоотдачи составляют  $150 \text{ Вт}/(\text{м}^2 / \text{град})$  для баллона 1 и повышаются до  $60 \text{ Вт}/(\text{м}^2 / \text{град})$  для баллона 1б (рис. 6, б), но, поскольку продолжительность паузы между включениями на 3 порядка выше продолжительности работы, основной теплообмен продолжается после выключения пневмосистемы. К этому моменту времени средняя температура газа в баллоне снижается по отношению к температуре стенки на положительную величину  $\Delta T_{ст}$ , а к началу очередного включения часть этой разницы компенсируется за счёт передачи тепла от стенки к газу. Причём (в отли-

чие от задач, рассмотренных в предыдущих пунктах) *данный процесс протекает при постоянном объёме газа* и сопровождается повышением его давления.

**Задача 6.** Для определения коэффициента теплоотдачи от стенки баллона к неподвижному газу была решена следующая задача. Нестационарное центральное поле снижения температуры  $T(r, t)$  внутри сферы радиуса  $R_{иу}$  описывается уравнением

$$c_v \cdot \rho \cdot \partial T(r, t) / \partial t = \lambda \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT(r, t)}{dr} \right), \quad (22)$$

а также граничным и начальным условием

$$T(R_{иу}, t) = 0; \quad 4\pi \cdot \int_0^{R_{иу}} T(r, 0) \cdot r^2 dr = \Delta T_{иу} \cdot (4\pi/3) R_{иу}^3.$$

где  $c_v$  – это теплоёмкость газа при постоянном объёме, а момент времени  $t = 0$  отвечает началу очередной паузы.

Для решения был использован метод Фурье разделения переменных. После стандартных преобразований приходим к такому равенству:

$$T_j(r, t) = T_j(0) \cdot \exp(-\alpha \eta_j^2 t) \cdot [\sin(\eta_j r) / (\eta_j r)], \quad (23)$$

где  $\alpha = \lambda / (c_v \rho)$  – это коэффициент температуропроводности газа.

Учтём граничное условие и получим:

$$\sin(\eta_1 R_{иу}) = 0, \text{ то есть } \eta_1 = \pi / R_{иу}.$$

Далее преобразуем и учтём начальное условие:

$$T_1(0) \cdot (1/\pi) \cdot \int_0^{R_{иу}} \sin(\pi r / R_{иу}) \cdot (r / R_{иу}) dr = \Delta T_{иу} / 3,$$

откуда

$$T_1(0) = \Delta T_{иу} \cdot \pi^2 / 3.$$

Теперь можно вычислить градиент температур газа на внутренней поверхности стенки:

$$-\partial T_1(r, t) / \partial r = \Delta T_{иу} \pi^2 / (3 R_0) \cdot \exp(-\alpha \pi^2 t / R_0^2).$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи равен

$$\alpha_{om} = (2/3) \pi^2 \lambda / h \approx 6.7 \cdot \lambda / h, \quad (24)$$

где  $h = 2R_{иу}$  – диаметр баллона.

Для пневмосистемы, работающей на гелии, формула (24) дает значения

$$\alpha_{om} \approx 2.5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 / \text{град}) \text{ и } \alpha_{om} \approx 7.5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 / \text{град})$$

для баллонов 1 и 16, соответственно. Небольшие значения коэффициентов теплоотдачи компенсируются большой длительностью теплообмена.

Из равенства (23) можно определить постоянную времени  $t_1$  для аperiodического изменения температуры газа в баллоне:

$$t_1 = 1 / (\alpha \eta_1^2) = R_{иу}^2 c_v \rho / (\pi^2 \lambda).$$

Величина этой постоянной уменьшается пропорционально уменьшению плотности газа, а её значения для указанных баллонов составили:

- в паузе после первого включения – 60 мин и 7 мин ,
- в паузе перед последним включением – 36 мин и 4 мин ,

соответственно, что соизмеримо с продолжительностью пауз между включениями двигателя. Поэтому коэффициент теплоотдачи по формуле (24) подлежит корректированию. График соответствующего множителя  $Kr3(\tau)$  получен из равенства (21) и показан на рис. 8; для баллона 1 его характерные значения лежат в диапазоне 2 ... 3, а для баллона 1б они близки к 1.

Теплообмен между газом и стенками баллонов в паузах между включениями нужно учитывать, но при расчёте баллона 1 необходимо учесть и снижение температуры оболочки, которая в сравнении с диаметром этой полости имеет относительно небольшую толщину.

Термодинамический анализ баллонов продолжим в конце статьи.

**Современные методы расчёта температуры стенки полости.** В теории поршневых двигателей вокруг этой проблемы сформировалось несколько научных школ. Все они решали нестационарное уравнение теплопроводности

$$c_{cm} \rho_{cm} \partial T / \partial t = \text{div}(\lambda_{cm} \text{grad} T) \quad (25)$$

при так называемых *граничных условиях 3-го рода*

$$\text{grad} T \cdot \vec{n} + \alpha_{om} \cdot (T - T_{вн}) = 0 ,$$

где  $\rho_{cm}$ ,  $c_{cm}$ ,  $\lambda_{cm}$  – плотность, удельная теплоёмкость и теплопроводность материала стенки;  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к границе стенки;  $\alpha_{om}$  – коэффициент теплоотдачи на границе;  $T_{вн}$  – температура внешней среды (напр., газа в полости).

Но делали они это по-разному. В прошлом использовали методы математической физики, в частности разложения искомого решения в тригонометрические и другие ряды (например, ряды из цилиндрических функций). При этом все расчёты выполнялись аналитическими методами либо при использовании маломощной вычислительной техники. Понятно, что интегрировать уравнение (25) при переменном коэффициенте теплопроводности  $\lambda_{cm}$  тогда даже не пытались, да и коэффициент  $\alpha_{om}$ , в основном, принимали постоянным. Наиболее значимым результатом, полученным этой научной школой, следует признать метод расчёта нестационарной составляющей температуры на внутренней поверхности цилиндра дизеля, описанный в [11]; этот метод использует операционное исчисление.

Затем, по мере развития вычислительной техники, стали использовать сеточные методы: заменяли производные конечными разностями, получали системы линейных уравнений, содержащие сотни и тысячи неизвестных температур в узлах сетки, и решали эти системы на компьютере. Нестационарные задачи получали ответ через много часов машинного времени. Но зато существенно возросла точность получаемых результатов.

Относительно недавно (лет 20 – 30 тому назад) удалось два упомянутых выше подхода соединить в одном методе. Появился МКЭ (сейчас его называют *методом конечных элементов*, но первоначальное название другое – *метод крупных элементов*). Втулка и поршень разбивались на несколько де-

сятков элементов простой формы, для них уравнение (25) интегрировалось аналитически при произвольных граничных условиях, а затем выполнялось согласование этих условий на общих границах крупных элементов. В таком виде метод работал быстро, но имел недостаток – имеющегося набора крупных элементов не хватало для покрытия тел сложной формы, а создавать свои крупные элементы (как предполагалось) пользователи метода не смогли.

Вместо этого нашли обходной путь – сделали крупные элементы мелкими и стали собирать исследуемое тело из миллионов таких «крупинок». Причём правилам сборки обучили компьютер. Процесс автоматизировали, и новую версию МКЭ стали раздавать в виде готового пакета программ. Результат не заставил себя долго ждать – время интегрирования уравнения (25) опять составляет часы, зато многие довольны: выполнишь несложную инструкцию и получишь результат. Последние 5 – 7 лет практически все диссертации по теплопередаче в тепловых двигателях используют эти пакеты.

Но тут следует заметить, что задача, которую будем решать для пневмосистемы запуска ЖРД, проще той, которую решают для дизеля. Температурное состояние втулки и поршня ДВС рассматривают как результат наложения двух температурных полей – поля установившейся температуры, которое находят, решая стационарное уравнение теплопроводности

$$\operatorname{div}(\lambda_{cm} \operatorname{grad} T) = 0,$$

и поля переменной (динамической) температуры, которое вычисляется по переменным параметрам текущего цикла. В нашем случае установившееся поле – это начальная температура  $T_{cm,0}$ , равномерно распределённая в материале стенки полости. Причём это верно для всех включений двигателя, о чём свидетельствует результат решения следующей модельной задачи.

**Задача 7.** *Расчётная оценка изменения средней температуры стенки полости пневмосистемы запуска ЖРД.* Рассмотрим верхнюю полость сервопривода регулятора 4 (рис. 1), которая имеет объём  $V_3 = 4.6 \text{ см}^3$ . Она заполнилась гелием до давления  $P_3 = 2 \text{ МПа}$  и, предположим, что гелий нагрелся из-за сжатия на  $\Delta T = 100^\circ$ . Плотность гелия при указанном давлении составляет  $\rho \approx 3 \text{ кг/м}^3$ . Далее он остывает и отдаёт лишнее тепло стенке.

Определим нагрев стенки полости. Составим уравнение баланса тепла

$$c_p \rho V_3 (\Delta T - \Delta T_{cm}) = c_{cm} \rho_{cm} V_{cm} \Delta T_{cm},$$

откуда

$$\Delta T_{cm} = \Delta T / (1 + (c_{cm} \rho_{cm} V_{cm}) / (c_p \rho V_3)). \quad (26)$$

Плотность и теплоёмкость материала стенки известны:

$$\rho_{cm} = 2650 \text{ кг/м}^3, \quad c_{cm} = 838 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)},$$

площадь стенки составляет  $f_{cm,3} = 2.2 \cdot f_{n,3} \approx 62 \text{ см}^2$ , а её объём при толщине  $l_{cm} = 5 \text{ мм}$  равен  $V_{cm} = 31 \text{ см}^3$ . Подстановка чисел в формулу (26) даёт значение  $\Delta T_{cm} \approx 0.1^\circ$ , то есть стенка свою температуру практически не изменила.

К аналогичному результату привел анализ и многих других полостей пневмосистемы запуска ЖРД. Поэтому, наверно, изменение температуры

стенки (по крайней мере, в тупиковых полостях и всех полостях линии управления) можно не учитывать. Но чтобы действовать наверняка, нужно было выполнить грамотный расчёт этой температуры. Надо понимать, что формула (26) определяла среднюю температуру *всего материала стенки*, а на газодинамические процессы в полости влияет температура внутренней поверхности, которая, априори, может быть значительно выше средней.

Поэтому в программу расчёта был вмонтирован блок, который вычислял текущую температуру внутренней поверхности стенки для каждой из 14-ти полостей, участвующих в своеобразном *расчётном эксперименте* (по 2 – 4 полости для каждого типа, представленного на рис. 5). Со временем были собраны и обобщены данные о действующих коэффициентах теплоотдачи, и появилась убежденность в том, что для большинства полостей (но не баллонов!) изменения температуры стенки можно не учитывать.

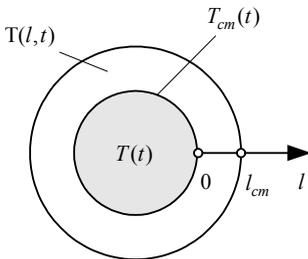


Рис. 9 – Температура газа  $T(t)$  и поле температур  $T(l,t)$  в стенке полости.

**Вывод интегро-дифференциального уравнения для расчета температуры стенки полости.** Поскольку заранее ясно, что температура изменяется незначительно, зависимость коэффициента  $\lambda_{cm}$  от температуры можно проигнорировать; это означает, что *решаемая задача становится линейной*.

Учитывая цели (и возможности) нашего исследования, а также то, что стенка полости по принятой терминологии считается *тонкой* и имеет, в основном, малую кривизну, примем в расчёте, что она является плоской и имеет постоянную толщину, которую мы обозначим  $l_{cm,j}$ . Более того, мы будем

считать, что стенки всех полостей имеют одинаковую толщину  $l_{cm} = 5 \text{ мм}$ .

Для решения этой задачи был разработан метод, подобный описанному в [11], но отличающийся рядом новых моментов. Как и в [11], характеристики материала стенки считались однородными, и не зависящими от температуры, а кривизной стенки пренебрегали. Но в нашем расчёте стенка имеет конечную толщину. В результате для температурного поля в стенке (рис. 9) получили одномерное нестационарное уравнение теплопроводности

$$\rho_{cm} c_{cm} \partial T / \partial t = \lambda_{cm} \partial^2 T / \partial l^2,$$

которое решалось при граничных условиях

$$\partial T(l_{cm}, t) / \partial l = 0, \quad T(0, t) = T_{cm}(t),$$

и начальном условии

$$T(l, 0) = T_{cm,0},$$

где  $l$  – координата сечения стенки.

Решение этой задачи методами операционного исчисления дано в [3], где получена следующая зависимость между значениями градиента температур  $\partial T(0, t) / \partial l$  на внутренней поверхности и изменением её температуры:

$$\partial T(0, t) / \partial l = - \int_0^t WT(t - \tau) \cdot T'_{cm}(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Разностное ядро, использованное в сверточном интеграле (27), определяется формулой

$$WT(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_{cm} t}} \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \exp(-(l_{cm} j)^2 / (\alpha_{cm} t)) \right],$$

и имеет вид, показанный на рис. 10. Там же приведен график функции

$$WT0(t) = 1 / \sqrt{\pi \alpha_{cm} t},$$

которая с той же целью использовалась в [11].

Верхние кривые рис. 10 отвечают стенке трубопроводов, изготовленных из нержавеющей стали (на данном промежутке времени графики ядер сливаются), а нижние – стенкам полостей, изготовленных из алюминиевого сплава. Расхождение между нижними кривыми означает, что при расчёте теплообмена в полостях необходимо учитывать толщину стенки.

На рис. 11 изображены графики ядер, используемых при расчёте оболочек баллонов.

Далее используем закон Ньютона – Рихмана для теплообмена и приходим к интегро - дифференциальному уравнению:

$$\alpha_{om}(T_e(t) - T_{cm}(t)) = \lambda_{cm} \int_0^t WT(t - \tau) T'_{cm}(\tau) d\tau. \quad (28)$$

**Алгоритм аппроксимации ядра суммой экспонент.** В [11] подобное уравнение решалось при использовании рядов, и решение оказалось сложным. Поэтому мы пошли по пути, который в гидромеханике впервые использовал В.Зилке («Боинг»); в статье [14] он аппроксимировал разностное ядро, описывающее трение в нестационарном ламинарном потоке, функцией вида

$$y_{an} = \sum_{i=1}^N k_i \exp(-e_i t), k_i, e_i > 0, \quad (29)$$

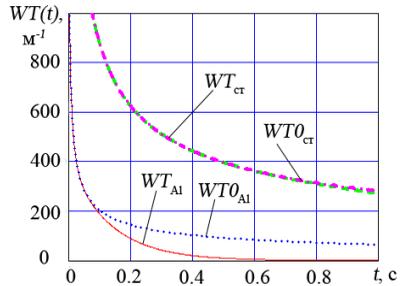


Рис. 10 – Ядро интеграла (27): ст – для стали при  $l_{cm} \geq 4$  мм Al – для алюминиевого сплава.

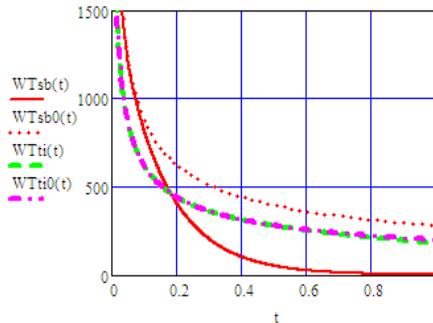


Рис. 11 – Ядра интеграла (27): sb – для стали при  $l_{cm} = 1.2$  мм; ti – для титанового сплава.

где в его случае было использовано значение  $N = 5$ .

Такой путь позволяет заменить трудоёмкое вычисление сверточного интеграла решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

По случайному совпадению, аппроксимация ядра  $WT_{Al}(t)$ , проведенная для промежутка времени  $10^{-5} \text{ сек} < t < 1 \text{ сек}$ , что отвечает диапазону от шага интегрирования  $\Delta t$  до продолжительности одного включения пневмосистемы,

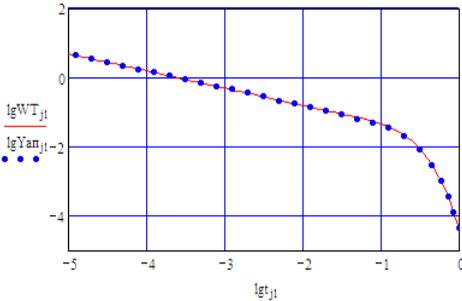


Рис. 12 – Результат аппроксимации ядра.

диалоге «человек – компьютер» при использовании графических средств пакета MathCAD.

На первом шаге алгоритма используется одна экспонента, и в функции (29) выбираются коэффициенты  $k_1, e_1$ , чтобы добиться наилучшего приближения в интервале  $t \in (0.1 \text{ сек}, 1 \text{ сек})$ .

В силу гиперболического типа аппроксимируемой зависимости при условии  $t < 0.1 \text{ сек}$  будет выполняться неравенство

$$k_1 \cdot \exp(-e_1 \cdot t) < WT(t),$$

поэтому на втором шаге аппроксимации к первой экспоненте добавляется вторая, и её коэффициенты  $k_2, e_2$  выбираются из условия предельного сближения кривых на промежутке времени  $t \in (0.01 \text{ сек}, 0.1 \text{ сек})$ .

При этом на промежутке времени  $t \in (0.1 \text{ сек}, 1 \text{ сек})$  новая добавка, в силу быстрого убывания её экспоненты, изменяет значения функции  $y_{an}(t)$  очень слабо, и этим изменением допустимо пренебречь.

По аналогичному правилу выполняется третий, четвёртый, пятый, и, если это необходимо, шестой шаг алгоритма аппроксимации.

В качестве примера, покажем результат аппроксимации ядра для расчёта стенки из алюминиевого сплава ( $\alpha_{cm} = 7.81 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{сек}$ ;  $l_{cm} = 5 \text{ мм}$ ):

$$WT_{Al}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha_{cm}}} (5.8e^{-7.2t} + 10e^{-80t} + 32e^{-600t} + 97e^{-6100t} + 270e^{-51000t}) [\text{м}^{-1}],$$

где нормировочный коэффициент  $1/\sqrt{\pi \alpha_{cm}} = 63.84$ .

Полученный результат можно использовать для другого материала и

толщины стенки, если воспользоваться следующим свойством подобия ядер:

$$\begin{aligned} WT_1(t \cdot \alpha_{cm,1} / l_{cm,1}^2) \cdot l_{cm,1} &= \\ &= WT_{Al}(t \cdot \alpha_{cm} / l_{cm}^2) \cdot l_{cm}, \end{aligned}$$

где  $\alpha_{cm,1}$  – его коэффициент температуропроводности;  $l_{cm,1}$  – толщина стенки.

При сохранении интервала аппроксимации  $t \leq 1$  сек это возможно, когда

$$\alpha_{cm,1} / l_{cm,1}^2 \geq \alpha_{cm} / l_{cm}^2.$$

Но свойством подобия не удастся воспользоваться, если

стенки  $j$ -той полости имеют существенно различающиеся толщины  $l_{cm,j}^{(n)}$ ,  $n \in \overline{1,s}$ . Тогда вместо усреднения толщин целесообразно усреднить ядра  $WT(t, l_{cm,j}^{(n)})$ , отвечающие этим толщинам; формула усреднения ядер интеграла (27) имеет вид:

$$WT_j(t) = \sum_{n=1, \dots, s} (f_{cm,j}^{(n)} / f_{cm,j}) \cdot WT(t, l_{cm,j}^{(n)}),$$

где  $f_{cm,j}^{(n)}$ ,  $n \in \overline{1,s}$  – площади упомянутых стенок;  $f_{cm,j}$  – их общая площадь.

Функция  $y = WT_j(t)$  сохраняет гиперболический тип и аппроксимируется по описанному выше алгоритму.

**Модернизированный метод расчёта температуры стенки.** Ядро интеграла (27) имеет интегрируемую особенность при  $t = 0$ , поэтому распространять аппроксимацию (29) на окрестность нуля нельзя, а интегрирование по частям приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \int_0^t WT(t-\tau) T'_{cm}(\tau) d\tau &= \left\| \int_0^{\Delta t} (WT(\tau) - y_{an}(t)) d\tau = k_0 \right\| \approx \\ &\approx \frac{T_{cm}(t) - T_{cm}(t - \Delta t)}{\Delta t} k_0 + \sum_{i=1}^5 k_i(t) \Delta T_{cm}(t) + \sum_{i=1}^5 mQ_i(t), \end{aligned} \quad (30)$$

где так называемые температурные моменты  $mQ_i$  удовлетворяют простейшим дифференциальным уравнениям

$$dmQ_i(t) / dt + e_i \cdot mQ_i(t) = e_i \cdot k_i \cdot \Delta T_{cm}(t),$$

при нулевых начальных условиях  $mQ_i(0) = 0$ , а функция  $\Delta T_{cm}(t)$  обозначает изменение температуры стенки от её начального уровня,

$$\Delta T_{cm}(t) = T_{cm}(t) - T_{cm,0}.$$

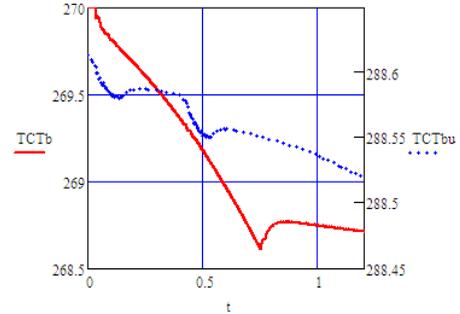


Рис. 13 – Изменение контактных температур оболочек баллонов I и 16 (коэффициенты  $\alpha_{om}$  показаны на рис. 6, б).

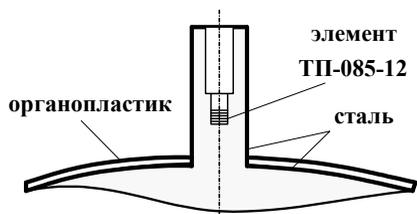


Рис. 14 – Схема установки датчика температуры.

нужно, что *решаемая таким способом задача теплообмена является нелинейной*.

Применение этого метода для расчёта температуры внутренней поверхности оболочек баллонов проиллюстрировано на рис. 13.

В табл. 2 приведено сопоставление результатов расчёта с экспериментальными данными, полученными при пяти включениях ЖРД (обработано 30 осциллограмм). Поскольку коэффициенты теплоотдачи зависят от плотности газа в баллоне, эти данные усреднялись отдельно для каждого включения. Датчик был установлен в заглубленном цилиндрическом канале (рис. 14) и приближенно, для условий теплового равновесия (рис. 15), измерял температуру газа в пристеночном слое шаробаллона. Данные табл. 2 отвечают концу промежутка времени  $t \in [0, 1.2 \text{ сек}]$  от начала включения, когда моделируемая система далека от теплового равновесия, коэффициенты теплоотдачи в измерительном канале высоки, и, по этой причине, некоторыми действующими факторами (например, теплообменом между стенкой цилиндрического канала и сферической оболочкой, а также между стенкой и атмосферным воздухом) допустимо пренебречь.

Таблица 2 – Уменьшение температуры газа в пристеночном слое шаробаллона  $l$  (в градусах) за одно включение пневмосистемы

Номер включения	1	2	3	4	5
Эксперимент	1.86	1.61	1.85	1.89	2.02
Расчёт с учетом теплообмена	1.41	1.43	1.49	1.57	1.70
Расчет без учета теплообмена	3.93	3.97	4.32	4.84	5.69

При расчётах учитывалась тепловая инерция используемого датчика температуры, для чего интегрировалось уравнение

$$t_{ин}^{-1} \cdot dT_{датч}(t) / dt = T(t) - T_{датч}(t) \text{ при начальных условиях } T_{датч}(0) = T(0),$$

где  $t_{ин}$  – *время тепловой инерции*,  $t_{ин} \approx 4 \text{ сек}$ ;  $T(t)$  – измеряемая температура;  $T_{датч}(t)$  – показание датчика.

Коэффициенты теплоотдачи в измерительном канале определялись по формулам (15) и (18) с учетом поправочного множителя  $Kr$ , а также по формуле Михеева для ламинарного течения [12]:

$$\alpha_{ом} = 0.15 \text{Re}^{0.33} \text{Gr}^{0.1} \text{Pr}^{0.43} \psi_{см} \cdot \varepsilon_l \cdot \lambda / h,$$

где  $Gr$  – число Грасгофа,

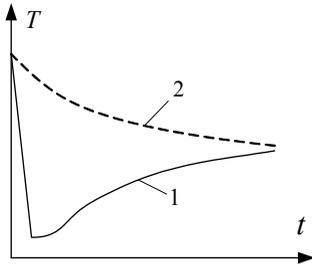


Рис.15 – Изменение температур газа в канале датчика (кривая 1) и у внутренней поверхности баллона 1 (кривая 2) во время паузы между включениями.

$$Gr = g \rho_k^2 d_k^3 |1 - T_{c.k} / T_k| / \mu_2^2;$$

$g$  – ускорение свободного падения;  $\rho_k, \mu_2$  – плотность газа в канале и его вязкость;  $d_k$  – диаметр канала;  $T_k, T_{c.k}$  – температуры газа в канале и у внутренней поверхности стенки;  $\varepsilon_l$  – поправка, используемая при малой длине канала,  $\varepsilon_l \approx 1.2 \dots 1.5$ .

Сопоставление результатов подтверждает целесообразность учёта теплообмена между газом и стенками баллона и показывает, что расчётные значения коэффициентов теплоотдачи обеспечивают необходимую точность моделирования.

**Учет термодинамического сопротивления защитного слоя.** На поверхности деталей пневмосистемы, изготовленных из алюминиевого сплава, нанесен тонкий слой защитного покрытия, имеющий свои теплофизические свойства. Обозначим толщину этого слоя  $\Delta l_3$ , удельную теплоёмкость  $c_3$ , плотность  $\rho_3$ . Термическим сопротивлением этого слоя ввиду его малой толщины будем пренебрегать, а учёт его теплоёмкости приводит к следующей корректировке равенства (28):

$$\alpha_{om} (T_c(t) - T_{cm}(t)) = \lambda_{cm} \int_0^t WT(t-\tau) T'_{cm}(\tau) d\tau + c_3 \rho_3 \Delta l_3 T'_{cm}(t). \quad (31)$$

Для свёрточного интеграла повторим те же преобразования, что и в предыдущем пункте; в результате получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^t WT(t-\tau) T'_{cm}(\tau) d\tau + (c_3 \rho_3 \Delta l_3 / \lambda_{cm}) T'_{cm}(t) \approx \\ & \approx \frac{T_{cm}(t) - T_{cm}(t - \Delta t)}{\Delta t} (k_0 + \Delta k_0) + \sum_{i=1}^5 k_i(t) \Delta T_{cm}(t) + \sum_{i=1}^5 m Q_i(t), \end{aligned}$$

где  $\Delta k_0 = c_3 \rho_3 \Delta l_3 / \lambda_{cm}$ .

Поправочный коэффициент  $\Delta k_0$  при шаге интегрирования  $\Delta t \approx 10^{-5}$  с имеет тот же порядок величины, что и *сингулярная компонента ядра*  $k_0$ .

Для сокращения выкладок второе слагаемое суммы (31) стоило бы внести под знак свёрточного интеграла, но тогда его новое разностное ядро

$$y = W(t) + \Delta k_0 \delta(t)$$

будет содержать *обобщённую функцию Дирака*  $\delta(t)$  и, с точки зрения классического анализа, его особенность в 0 станет неинтегрируемой.

В остальном термодинамический расчёт стенки с учетом тонкого защитного слоя ничем не отличается от такого же расчёта для стенки, где такой слой отсутствует или не учитывается.

**Метод расчёта температуры уплотнительных манжет.** Манжеты, изготовленные из фторопласта-4, при температуре выше  $260^{\circ}\text{C}$  теряют упругие свойства, поэтому в программу включен модуль для расчёта температуры поверхностей манжет, которые контактируют с нагретым газом.

Определение температуры  $T_{ман}$  поверхности манжеты производится при решении интегро-дифференциального уравнения, подобного уравнению (28),

$$\alpha_{от}(T_g(t) - T_{ман}(t)) = \lambda_{ман} \int_0^t WT_{ман}(t - \tau) T'_{ман}(\tau) d\tau, \quad (32)$$

но имеет две особенности.

Во-первых, температура манжеты не влияет на температуру газа в полости и ход газодинамического расчёта в целом; поэтому эта задача решается по окончании расчёта на этапе обработки его результатов.

Во-вторых, коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{ман}$  и температуропроводности  $\alpha_{ман}$  фторопласта-4 на два порядка меньше соответствующих коэффициентов  $\lambda_{ст}$ ,  $\alpha_{ст}$  для алюминиевого сплава. Поэтому (как и для расчёта стенок трубопроводов и баллона 1б), ядро интеграла (27) вычисляется по укороченной формуле

$$WT_{ман}(t) = 1 / \sqrt{\pi \alpha_{ман} t}.$$

Сравнивая равенства (28) и (32), замечаем, что на промежутке времени  $t < 0.1$  сек, когда  $WT_0(t) \approx WT(t)$ ,

температуры внутренних поверхностей стенки и манжеты должны удовлетворять приближенному соотношению:

$$T_{ст}(t) - T_{ст.0} \approx K_{ув}(T_{ман}(t) - T_{ст.0}), \quad (33)$$

где  $K_{ув} = (\lambda_{ст} / \lambda_{ман}) \cdot \sqrt{\alpha_{ман} / \alpha_{ст}}$ .

Для данного сочетания материалов  $K_{ув} \approx 28$ , и соотношение (33) было подтверждено в результате выполнения термодинамического расчёта (рис. 16).

В местах установки манжет коэффициент теплоотдачи отличается от среднего значения, поэтому эти результаты носят приближенный характер. Тем не менее, они свидетельствуют о том, что ограничение по нагреву манжет выполняется с большим запасом.

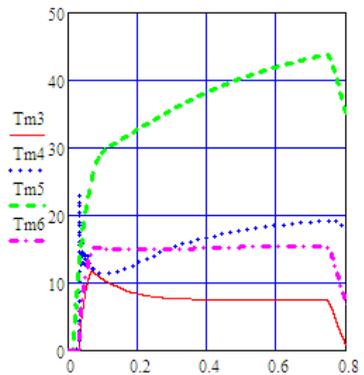


Рис. 16 – Нагрев манжет регулятора (в градусах Цельсия).

**Уточненный термодинамический расчёт шаробаллона.** При определении коэффициента теплоотдачи газа для всех полостей пневмосистемы мы пренебрегали изменением температуры стенки, что вносило в расчёт определенную погрешность. Для других полостей это оправдано, но для баллона 1, имеющего относительно тонкую оболочку, такой подход требует уточнения.

Баллон 1 имеет стальную оболочку и силовой каркас из органопластика (рис. 14), армированного жгутом из *арамидных волокон* (подобных *кевлару*). Для выбора модели оболочки по формуле

$$t_{об} = h^2 / \alpha ,$$

была вычислена постоянная времени для нагрева внешнего и внутреннего слоя, где  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности для материала соответствующего слоя;  $h$  – толщина слоя. Оказалось, что у стальной оболочки  $t_{об} \approx 0.3$  сек , а у силового каркаса  $t_{об} \approx 90$  сек . Это означает, что термодинамический расчёт оболочки баллона 1 (для условий его работы в космическом пространстве) необходимо проводить по двум моделям:

- в пределах одного включения пневмосистемы в *модели 1* учитывается только внутренний слой, который на своей внешней поверхности считается теплоизолированным;
- в паузах между включениями в *модели 2* учитываются оба слоя (как единая оболочка), а физические характеристики материалов усредняются (с учётом их плотности и относительной толщины слоя); внешняя поверхность оболочки остаётся теплоизолированной.

Результаты расчётов по *модели 1* были представлены на рис. 13 и в табл. 2; в этом пункте статьи мы будем использовать *модель 2*, а в следующем – её уточнение (*модель 3*), которое связано с необходимостью учёта теплообмена через внешнюю поверхность, что отвечает условиям огневых испытаний.

**Задача 8. Уточнение постоянной времени.** Вычислим среднее значение температуры  $T_{cp}$  для газа в баллоне и его оболочки; в паузе между включениями эта величина остаётся неизменной и её удобно принять в качестве нуля отсчёта температур. Тогда в начальный момент  $t = 0$  температура оболочки  $T_{об}$  и средняя температура газа  $T_0$  определяются равенствами

$$T_{об} = \Delta T_{ш} \cdot (c_v M_g) / (c_{об} M_{об} + c_v M_g) ; T_0 = -\Delta T_{ш} \cdot (c_{об} M_{об}) / (c_{об} M_{об} + c_v M_g) ,$$

где  $M_{об}$ ,  $c_{об}$  – масса и удельная теплопроводность материала оболочки;  $M_g$ ,  $c_v$  – масса и удельная теплопроводность газа в баллоне;  $\Delta T_{ш}$  – перепад температур между оболочкой и газом в момент выключения двигателя.

Дополним уравнение теплопроводности (22) граничным условием

$$T(R_{ш}, t) = T_{об}(t) \tag{34}$$

и равенством

$$c_{об} M_{об} dT_{об} / dt = -\lambda \cdot 4\pi R_{ш}^2 \partial T(r, t) / \partial r \Big|_{r=R_{ш}} , \tag{35}$$

описывающим изменение температуры сферической оболочки радиуса  $R_{ш}$ . Ограниченное в центре шара решение поставленной задачи будем искать, как и в задаче 6, в форме центрального нестационарного поля следующего вида:

$$T_j(r, t) = T_j(0) \cdot \exp(-\alpha \eta_j^2 t) \cdot [\sin(\eta_j r) / (\eta_j r)] . \tag{36}$$

Учтём условия (34), (35) и получим трансцендентное уравнение для определения неизвестной величины  $\eta_j$ :

$$\operatorname{tg}x = f(x, \gamma), \quad (37)$$

где  $x = \eta_j R_{ш}$ ;  $f(x, \gamma) = x / (1 + \gamma x^2)$ ; параметр  $\gamma = (c_{об} \rho_{об} h_{об}) / (c_v \rho R_{ш})$ ;  $\rho_{об}, \rho$  – плотности материала оболочки и газа в баллоне;  $h_{об}$  – толщина оболочки.

Анализ уравнения (37) показал, что оно имеет множество положительных решений  $x_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , причём корень  $x_1$  (рис. 17, где  $x\pi = x/\pi$ )

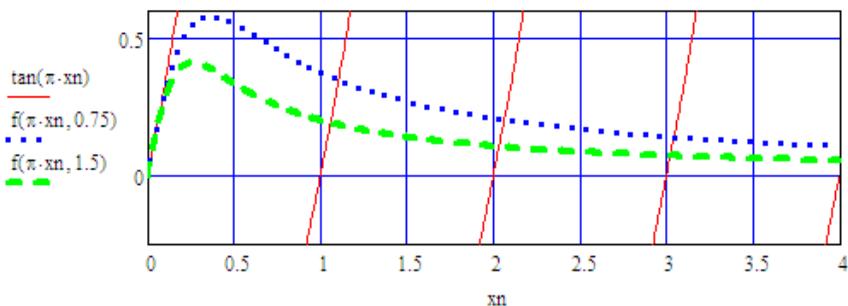


Рис. 17 – Графические решения уравнения (37).

располагается на промежутке  $(\pi; 1.5\pi)$ .

Для баллона 1 параметр  $\gamma \in (0.5; 1)$  и корень  $x_1 \in 3.4 \dots 3.6$ .

Если использовать значение  $x_1 = \pi$ , то мы получим случай, рассмотренный выше, когда изменение температуры оболочки не учитывалось. Уточнение расчёта уменьшило постоянную времени  $t_1$  в 1.14 ... 1.3 раза. Таким образом, максимальное значение постоянной  $t_1$  после уточнения составляет 46 мин, а перед последним включением она уменьшается до 34 мин. Заметим, что продолжительность пауз между включениями определяется конкретным полетным заданием и может изменяться от 5 мин до 175 мин (типовые циклы работы представлены в табл. 3).

Для баллона 16, изготовленного из титана, параметр  $\gamma \in (1; 2)$ , и корень  $x_1 \in 3.3 \dots 3.4$ , то есть располагается близко к числу  $\pi$ . Поэтому для расчёта этого баллона можно использовать полученные выше значения постоянной времени и коэффициента теплоотдачи.

Таблица 3 – Условия проведения огневых испытаний ЖРД

Циклы испытаний	Продолжительности пауз между включениями пневмосистемы, сек				Температуры	
	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	$T_a, K$	$T_{об,0}, K$
1	255	255	255	545	270	290
2	1889	260	300	345	260	276
3	680	600	560	510	270	293

**Задача 9.** Уточнение минимального коэффициента теплоотдачи. Для полости баллона 1 уравнение сжимаемости (3) имеет следующий вид:

$$V_b \cdot dP_b / dt = kRT_b \cdot dM_b / dt - (k-1) \cdot \alpha_{om} f_{cm} \cdot (T_b - T_{o\bar{o}}).$$

Внесем постоянный объём  $V_b$  под знак производной и воспользуемся равенством Клапейрона (2); после очевидных преобразований получим:

$$dT_b / dt = (k-1) \cdot T_b \cdot M_b^{-1} \cdot dM_b / dt - [\alpha_{om} f_{cm} / (c_v M_b)] \cdot (T_b - T_{o\bar{o}}). \quad (38)$$

При условии  $\alpha_{om} \ll \lambda_{o\bar{o}} / h_{o\bar{o}}$ , где  $\lambda_{o\bar{o}}$  – коэффициент теплопроводности стали, изменением температуры по толщине оболочки можно пренебречь. Поэтому температура оболочки удовлетворяет следующему уравнению:

$$c_{o\bar{o}} M_{o\bar{o}} \cdot dT_{o\bar{o}} / dt = \alpha_{om} f_{cm} \cdot (T_b - T_{o\bar{o}}). \quad (39)$$

Уравнения (38), (39) объединим в систему

$$\{ dT_b / dt = -\zeta(t) \cdot T_b - \beta_b(t) \cdot (T_b - T_{o\bar{o}}); dT_{o\bar{o}} / dt = \beta_{o\bar{o}}(t) \cdot (T_b - T_{o\bar{o}}), \quad (40)$$

где  $\zeta = -(k-1)M_b^{-1}dM_b/dt$ ;  $\beta_b = \alpha_{om}f_{cm}/(c_v M_b)$ ;  $\beta_{o\bar{o}} = \alpha_{om}f_{cm}/(c_{o\bar{o}}M_{o\bar{o}})$ ; все эти коэффициенты имеют физическую размерность 1/сек.

В паузах между включениями пневмосистемы  $\zeta(t) \equiv 0$ , а коэффициенты  $\beta_b(t)$ ,  $\beta_{o\bar{o}}(t)$  принимают постоянные значения. Система (40) описывает аperiодические затухающие колебания с постоянной времени  $t_{iu}$ , где

$$t_{iu}^{-1} = \beta_b + \beta_{o\bar{o}}.$$

Отсюда можно найти уточненное значение минимального коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_{om.min} = t_1^{-1} \cdot f_{cm}^{-1} \cdot [(c_v M_b)^{-1} + (c_{o\bar{o}} M_{o\bar{o}})^{-1}]^{-1}, \quad (41)$$

для среднего значения  $t_1 = 40$  мин оно составило 2.45 Вт/(м<sup>2</sup>град).

**Задача 10. Расчёт среднего коэффициента теплоотдачи.** Характер изменения температуры газа в баллоне 1, подтверждённый при обработке осциллограмм огневых испытаний, показан на рис. 18. На промежутке времени между двумя последовательными включениями имеем три участка:

- на *участке 1* температура и давление газа монотонно убывают;
- на *участке 2* эти параметры достаточно быстро возрастают;
- на *участке 3* рост продолжается, но медленно.

*Участок 1* отвечает включению пневмосистемы, и здесь коэффициент теплоотдачи формирует конвективный перенос тепла; он определяется формулой (13) и достигает максимальных значений (рис. 6, б), а затем уменьшается по мере затухания колебаний газа во входном трубопроводе.

На *участке 2* происходит трансформация температурного поля внутри баллона, описанная в задаче 5. А также аналогичная перестройка темпера-

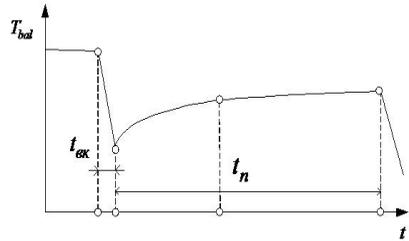


Рис. 18 – Характер изменения температуры газа в баллоне между двумя включениями.

турного поля во внешней оболочке баллона (напомним, что постоянная времени для этой оболочки составляет 90 сек, что соизмеримо с продолжительностью участка 2). Средние значения для коэффициента теплоотдачи для паузы длительностью  $t$  [сек] показаны на рис. 19; на начальном участке графика (по причине перестройки поля внутри оболочки) их следует увеличить на 20 – 30 %.

На *участке 3* этот коэффициент отвечает диффузному переносу тепла и вычисляется по формуле (41); он принимает малые значения, поэтому здесь рост температуры (и давления) замедляется. При коротких паузах этот участок отсутствует.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи от оболочки к газу в баллоне определяется по формуле

$$\alpha_{om.cp} = \alpha_{om.вк} \cdot t_{вк} / t_n + \alpha_{om.мин} \cdot Kr3(t_n / t_1) \cdot K_{об}, \quad (42)$$

где  $t_{вк} \approx 1$  сек,  $\alpha_{om.вк} \approx 170$  Вт/м<sup>2</sup>град – продолжительность одного включения и величина коэффициента теплоотдачи при включении;  $t_n$  – средняя продолжительность пауз между включениями;  $K_{об} \approx 1.25$ .

Если в формуле для потока тепла учесть зависимость (42), то окажется, что при условии  $t_n = 300 \dots 1000$  сек средняя продолжительность пауз  $t_n$  будет оказывать слабое влияние на результат. Это означает, что для пневмосистемы запуска ЖРД можно ввести два новых понятия:

- *типовой паузы*  $t_n \approx 600$  сек
- *типового цикла*  $5 \times 600$  сек,

и все термодинамические расчёты проводить именно для этого случая. Если последнее включение пройдёт удачно для типового цикла, то этот же вывод распространяется на все частные случаи.

Для условий типового цикла коэффициент

$$\alpha_{om.cp} \approx 10 \text{ Вт/м}^2\text{град}.$$

**Задача 11. Расчёт начальных условий для последнего включения.** Чтобы расчётным путём проверить качество работы на последнем включении (где оно наиболее критично, поскольку может не хватить давления газа в баллоне 1) поступим следующим образом. Пусть минимальный проме-

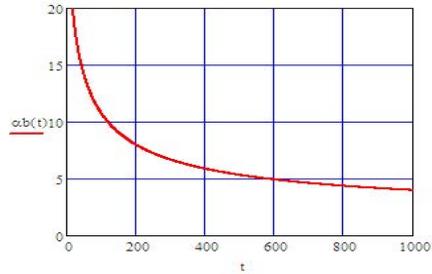


Рис. 19 – Значения коэффициента теплоотдачи для баллона 1, [Вт/м<sup>2</sup>град].

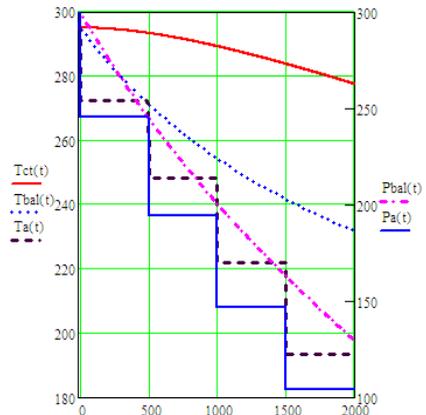


Рис. 20 – Расчёт начальных условий. Значения графиков актуальны для моментов включения пневмосистемы.

жуток времени между первым и последним включением ЖРД составляет  $\Delta \min \approx 2400$  сек (как для типового цикла); линеаризуем систему (40) на этом промежутке, для чего заменим коэффициенты средними значениями. Линеаризованная система сводится к уравнению второго порядка

$$d^2 T_{об} / dt^2 + (\zeta_{cp} + t_{1,cp}^{-1}) dT_{об} / dt + \zeta_{cp} t_{1,cp}^{-1} (1 + (c_{об} M_{об}) / (c_v M_b))^{-1} T_{об} = 0 \quad (43)$$

и при начальных условиях  $T_{об}(0) = T_{cm,0}$ ,  $T'_{об}(0) = 0$  имеет решение:

$$T_{об}(t) = T_{cm,0} \cdot [\exp(-\omega_1 \cdot t) - \exp(-\omega_2 \cdot t)] / (\omega_1 - \omega_2), \quad (44)$$

где  $\omega_{1,2} = 0.5 \cdot (\zeta_{cp} + t_{1,cp}^{-1}) \pm (0.25(\zeta_{cp} + t_{1,cp}^{-1})^2 - \zeta_{cp} t_{1,cp}^{-1} (1 + (c_{об} M_{об}) / (c_v M_b))^{-1})^{0.5}$ ,

а среднее значение  $t_{1,cp}$  постоянной времени  $t_1$ , поскольку выполнено соотношение

$$\alpha_{от,cp} / \alpha_{от,мин} \approx 3,$$

уменьшено до 12 мин.

Графики, отвечающие этому решению, показаны на рис. 20; там же приведены ступенчатые зависимости, отвечающие адиабатической модели. Теплообмен увеличил начальное давление газа в баллоне перед 5-тым включением на 30%, а начальную температуру – на 20%, в результате чего расчётные кривые, показанные на рис. 21, практически совпали с экспериментальными кривыми.

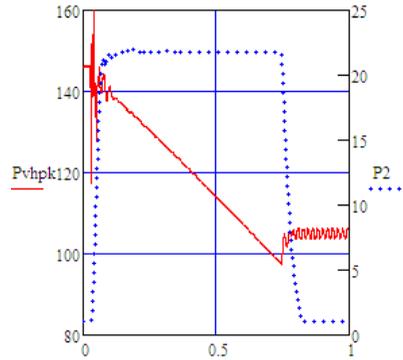


Рис. 21 – Результаты расчёта давлений гелия в пневмосистеме при 5-м включении ЖРД с учётом теплообмена в шаробаллоне.

**Метод и результаты учета теплообмена в шаробаллоне при проведении огневых испытаний ЖРД.** Сопоставление экспериментальных и расчётных данных, иллюстрирующих изменение температуры оболочки баллона  $l$  при проведении огневых испытаний ЖРД (условия испытаний даны в табл. 3), проведено в табл. 4.

Таблица 4 – Температуры внутренней поверхности оболочки шаробаллона  $l$  к началу очередного включения (в градусах Цельсия)

Первый цикл					
экспер. / расчёт	16.5 / 16.5	6.3 / 5.6	-2.0 / 1.9	-9.0 / -7.6	-13.0/-11.8
Второй цикл					
экспер. / расчёт	3.0 / 3.0	-7.1 / -5.9	-13.5/-12.2	-18.9/-17.1	-18.0/20.8
Третий цикл					
экспер. / расчёт	20.3 / 20.3	10.3 / 9.8	4.0 / 2.5	-1.7 / -3.1	-6.3 / -7.3

Для адекватного отображения условий огневых испытаний в уравнения модели 2 были внесены уточнения, учитывающие теплообмен оболочки с ат-

мосферным воздухом и (как следствие) перепад температур между внешней и внутренней поверхностью оболочки. Уравнения модели 3 имеют вид:

$$dT_b / dt = (k - 1) \cdot T_b \cdot M_b^{-1} \cdot dM_b / dt - [\alpha_{om} f_{cm} / (c_v M_b)] \cdot (T_b - T_c);$$

$$dT_c / dt = [\alpha_{om} f_{cm} / (c_{cm} M_c)] \cdot (T_b - T_c) - [\alpha_o f_{cm} / (c_{cm} M_c)] \cdot (T_c - T_o);$$

$$dT_o / dt = [\alpha_o f_{cm} / (c_o M_o)] \cdot (T_c - T_o) - [\alpha_{om.a} f_{cm} / (c_o M_o)] \cdot (1.5T_o - 0.5T_c - T_a),$$

где  $T_c$  – температура стального слоя;  $T_o$  – средняя температура слоя органо-пластика;  $T_a$  – температура атмосферного воздуха;  $\alpha_{om.a}$  – коэффициент теплоотдачи от воздуха к гладкой стенке,

$$\alpha_{om.a} \approx 5.6 \dots 10 \text{ Вт / м}^2\text{град [6];}$$

$\alpha_o$  – коэффициент теплопередачи между слоями оболочки,

$$\alpha_o = \lambda_0 / (0.5h_o);$$

$\lambda_0, c_o, h_o$  – теплопроводность, удельная теплоёмкость и толщина органо-пластика;  $c_{cm}$  – удельная теплоёмкость стали;  $M_c, M_o$  – массы слоёв.

Для начала первого включения принимались такие условия:

$$T_c(0) = T_b(0) = T_{b,0}, \quad dT_o(0) / dt = 0,$$

последнее равенство эквивалентно соотношению

$$\alpha_o \cdot (T_c - T_o) = \alpha_{om.a} \cdot (1.5T_o - 0.5T_c - T_a)$$

и позволяет найти начальное условие для температуры  $T_o$ .

Линеаризованные уравнения модели 3 имеют аналитическое решение.

На рис. 22 показаны графики изменения температур  $T_c$  на внутренней и

$$T_{вн} = 1.5 \cdot T_o - 0.5 \cdot T_c$$

на внешней поверхности баллона 1; как следует из табл. 4, ход температуры подтверждается результатами экспериментов.

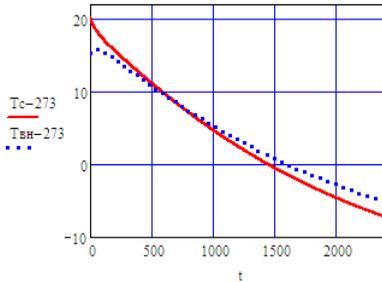


Рис. 22 – Перепад температуры на оболочке баллона 1 (расчёт при условиях 3-го цикла).

Таблица 5 – Давления газа в шаробаллоне 1 к началу очередного включения

Первый цикл					
экспер. / расчёт	287 / 287	246 / 242	211 / 206	180 / 175	155 / 148
Второй цикл					
экспер. / расчёт	270 / 270	229 / 228	195 / 194	166 / 167	144 / 140
Третий цикл					
экспер. / расчёт	277 / 277	237 / 233	206 / 199	173 / 169	146 / 143

Основной результат этого пункта статьи содержится в табл. 5. Как ока-

залось, уравнения *линеаризованной модели 3* позволяют с достаточной точностью определять начальные значения не только для последнего включения цикла (что отвечало условию решаемой задачи), но и для всех промежуточных включений пневмосистемы запуска ЖРД.

**Результаты учёта нестационарного теплообмена газа со стенками полостей и шаробаллонов при моделировании очередного включения пневмосистемы.** Главным результатом учёта теплообмена является уточнение расчётных значений давления газа, действующего на клапаны. Кроме того, анализируя конкретные результаты, можно сделать вывод о целесообразности данного уточнения модели.

Отказ от изотермической модели оказался оправданным, поскольку рабочие температуры для некоторых пар соседних полостей разошлись на 100 и более градусов, что не могло не повлиять на результаты расчёта массообмена и, как следствие, расчётные значения давлений газа.

Максимальные температуры газа наблюдаются в тупиковых полостях, где за счёт двухступенчатого сжатия газ нагревается до 500 К (рис. 23).

Интенсивность снижения пиковых значений температуры зависит от продолжительности колебаний поршня, который обеспечивает «вентилирование» полости. Теплообмен оказывает заметное влияние на ограничение пиковых значений, а также на интенсивность их последующего снижения.

Температуры внутренних поверхностей стенок в тупиковых полостях увеличиваются максимум на 1.5 градуса, а в полупроточных полостях – на 12 градусов от их начального значения, чем можно пренебречь. Уменьшение температуры внутренних поверхностей шаробаллонов 1 и 16 за время одного включения пневмосистемы не превышает 2 градуса, и этим также можно пренебречь. Температуры стенок в проточных полостях практически совпадают с температурой проходящего газа.

Уточнение коэффициента теплоотдачи по формуле (13) существенно повлияло на ход температур в тупиковых полостях во время установившегося процесса; в частности, оно сильно изменило начальные условия для второго переходного процесса, происходящего при выключении устройства.

Последний вывод можно проиллюстрировать примером: без учета теплообмена температура под нижним поршнем сервопривода регулятора 4 к

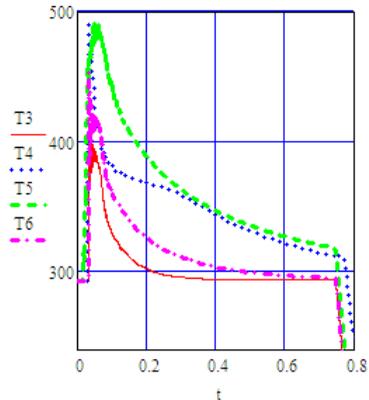


Рис. 23 – Изменение температур гелия в тупиковых полостях регулятора 4, 1-е включение (расчёт с учётом теплообмена).

началу выключения составляла около 600 К (рис. 3), а после учёта теплообмена – около 330 К (рис. 23).

Следовательно, учёт теплообмена газа со стенками является весомым фактором повышения точности результатов моделирования пневмосистемы.

**Выводы.** В статье выполнен анализ процессов нестационарного теплообмена газа со стенками полостей пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения и описан модернизированный метод математического моделирования этого теплообмена. Кроме того, здесь приводится математический вывод и/или обоснование для следующих результатов.

1. Получена удобная для практики расчётная оценка максимального нагрева газа в тупиковых полостях пневмосистемы.

2. Обосновано уточнённое уравнение сжимаемости газа в полости пневмосистемы, учитывающее его теплообмен со стенками полости.

3. Получены формулы для расчёта коэффициентов турбулентной и диффузной теплоотдачи от газа к стенке с учётом формы и размеров полости, а также скорости газа.

4. Для определения нестационарной температуры внутренней поверхности стенки выведено интегро-дифференциальное уравнение и разработан оригинальный метод его решения, использующий аппроксимацию регулярной части ядра сверточного интеграла в виде суммы нескольких экспонент.

5. Разработан графический метод экспоненциальной аппроксимации кривых гиперболического типа и получены конкретные результаты для стенок из нержавеющей стали, алюминиевого или титанового сплава, фторопласта.

6. Выполнено обобщение метода расчёта температуры стенки, учитывающее теплоёмкость тонкого защитного слоя на её поверхности.

7. Аналогичный метод использован для расчёта нагрева уплотнительных манжет пневмосистемы.

8. Обосновано, что при расчёте непроточных полостей (кроме шарбаллонов) изменение температуры стенок можно не учитывать.

9. Установлено, что игнорирование теплообмена между газом и стенками в тупиковых полостях пневмосистемы увеличивает максимальные расчётные температуры газа на 20 – 30 %, а погрешность определения температуры газа в момент её выключения достигает 50 % и более.

10. Показано, что игнорирование теплообмена между газом и оболочкой баллона приводит к недопустимо большому искажению начальных данных для последнего включения ЖРД – на 30 % по давлению и на 20 % по температуре рабочего тела, что приводит к грубой ошибке моделирования.

11. Разработан уточнённый метод термодинамического расчёта шарбаллонов, учитывающий влияние изменяющейся температуры оболочки на температурное поле и коэффициент теплоотдачи газа; выполнено сравнение результатов расчёта и эксперимента.

**Список литературы: 1.** Шевченко С.А., Валивахин С.А. Математическая модель регулятора давления газа // *Вісник НТУ «ХПІ»*. – Харків, 2014. – № 38 (1061). – С. 195 – 209. **2.** Шевченко С.А., Валивахин С.А. Результаты математического моделирования переходных процессов в регуляторе давления газа // *Вісник НТУ «ХПІ»*. – Харків, 2014. – № 39 (1082). – С. 198 – 206. **3.** Шевченко С.А., Григорьев А.Л., Степанов М.С. Уточненный метод инвариантов для расчёта динамических параметров газа в трубопроводах пневмосистемы запуска ракетного двигателя // *Вісник НТУ «ХПІ»*. – Харків, 2015. – № 6 (1115). – С. 156 – 181. **4.** Шевченко С.А., Григорьев А.Л., Степанов М.С. Моделирование пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения с регулятором давления газа // *Космические технологии: настоящее и будущее. Тезисы докладов 5-й международной конфер.* – Днепропетровск: ГKB «Южное», 2015. – С. 55. **5.** Ивченко Л.Ф., Дешевых С.А., Максимчук Р.Ф. Опыт проектирования автономной турбины ТНА двигателя РД861К // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2012. – № 9(96). – С. 174 – 179. **6.** Кухлинг Х. Справочник по физике. – М.: Мир, 1982. – 519с. **7.** Ермилов, В.А. Газовые редукторы / В.А. Ермилов, Ю.В. Нестеренко, В.Г. Николаев. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1981. – 176 с. **8.** Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. / *Под редакцией В.К. Кошкина*. – М.: Машиностроение, 1975. – 623 с. **9.** Элементы систем автоматизированного проектирования ДВС / Под редакцией Р.М. Петриченко. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 328 с. **10.** Чернышев Г.Д., Хачиян А.С., Пикус В.И. Рабочий процесс и теплонпряженность автомобильных дизелей. – М.: Машиностроение, 1986. – 216 с. **11.** Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности / Ф.И. Абрамчук, А.П. Марченко, Н.Ф. Разлейцев [и др.]; под ред. А.Ф. Шеховцова. – К.: Техника, 1992. – 272 с. **12.** Михеев М.А. Основы теплопередачи. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 392 с. **13.** Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. **14.** Зилке В. Трение, зависящее от частоты, при неустановившемся течении в трубопроводе // *Теоретические основы инженерных расчетов*. – 1968. – №1. – С. 120 – 127.

**Bibliography (transliterated): 1.** Shevchenko, S. A., and S. A. Valivahin. "Matematicheskaja model' reguljatora davlenija gaza." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 38 (1061). Kharkiv, 2014. 195–209. Print. **2.** Shevchenko, S. A., and S. A. Valivahin. "Rezultaty matematicheskogo modelirovanija perehodnyh pro-cessov v reguljatore davlenija gaza." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 39 (1082). Kharkiv, 2014. 198–206. Print. **3.** Shevchenko, S. A., A. L. Grigoryev and M. S. Stepanov. "Utochnjonnyj metod invariantov dlja raschjota dinamicheskikh parametrov gaza v truboprovodah pnevmosistemy zapuska raketnogo dvigatelja." *Visnyk NTU «KhPI»*. No. 39 (1082). Kharkiv, 2014. 156–181. Print. **4.** Shevchenko, S. A., A. L. Grigoryev and M. S. Stepanov. "Modelirovanie pnevmosistemy zapuska raketnogo dvigatelja mnogokratnogo vključenija s reguljatorom davlenija gaza." *Kosmicheskie tehnologii: nastojashhee i budushhee. Tezisy dokladov 5-j mezhdunarodnoj konferencii*. Dnepropetrovsk: GKB «Yuzhnoje», 2015. Print. **5.** Ivchenko, L. F., S. A. Deshevych and R. F. Maksimchuk. "Opyt proektirovanija avtonomnoj turbiny TNA dvigatelja RD861K." *Aviacionno-kosmicheskaja tehnika i tehnologija*. No. 9 (96). Kharkiv, 2012. 174–179. Print. **6.** Kuhling Kh. *Spravochnik po fizike*. Moscow: Mir. 1982. Print. **7.** Ermilov, V. A., Yu. V. Nesterenko and V. G. Nikolaev. *Gazovye reduktory*. Leningrad: Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1981. Print. **8.** *Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoy tekhnike*. Ed. V. K. Koshkin. Moscow: Mashinostroenie. 1975. Print. **9.** *Elementy sistem avtomatizirovannogo proektirovanija DVS*. Ed. R. M. Petrichenko. Leningrad: Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1990. Print. **10.** Chernyshev, G. D., A. S. Hachijan and V. I. Pikus. *Rabochij process i teplonaprjazhennost' avtomobil'nyh dizelej*. Moscow: Mashinostroenie, 1986. Print. **11.** Abramchuk, F. I., et al. *Sovremennye dizeli: povyshenie toplivnoj ekonomichnosti i dlitelnoj prochnosti*. Ed. A. F. Shehovcov. Kyev: Tehnika. 1992. Print. **12.** Miheev, M. A. *Osnovy teploperedachi*. Moscow: Gosenergoizdat. 1956. Print. **13.** Tihonov, A. N., and A. A. Samarskij. *Uravenenija matematicheskoy fiziki*. Moscow: Nauka, 1966. Print. **14.** Zilke, V. "Trenie, zavisjashhee ot chastoty, pri neustanovivshemsja techenii v truboprovode." *Teoreticheskie osnovy inzhenernyh raschetov*. No. 1. 1968. 120–127. Print.

*Поступила (received) 07.06.2015*

**В.И. ЩЕГЛОВ**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ТЕРМОУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Установлен эффект уменьшения внутреннего радиуса упругого полого бесконечного цилиндра  $B$ , являющегося телом вращения с круговыми цилиндрическими граничными поверхностями, при воздействии на него цилиндрического температурного поля, вызывающего равномерный нагрев бесконечного осесимметричного полого цилиндра  $\bar{B}_1$ , соосного с цилиндром  $B$ , являющегося правильной его частью, при неизменности температуры полого цилиндра  $B$  во всех его точках, не принадлежащих полуму цилиндру  $\bar{B}_1$ , причем дополнительно должны выполняться следующие условия: достаточная близость всех точек зоны нагрева полого цилиндра  $B$  к его внутренней граничной поверхности; положительность среднего значения коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра  $B$  в пределах изменения его температуры в зоне нагрева; определенный характер зависимости от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала тела  $B$ .

**Ключевые слова:** термоупругая деформация, граничная поверхность, полый бесконечный цилиндр, нагрев, температурное поле, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения.

**Введение и цель работы.** При разработке технологий и оборудования тепловой сборки, разборки соединений с натягом, а также при разработке прессового оборудования возникает необходимость решить задачу определения формы и размеров границ упругих тел, подвергшихся воздействию на них температурных полей. В работе [1] эта задача решена для случая, когда в качестве упругого тела рассматривается упругий изотропный полый шар или упругое пространство с шаровой полостью, а в качестве температурных полей – сферические температурные поля, центр симметрии которых совпадает с центром симметрии полого шара и центром симметрии упругого пространства с шаровой полостью, соответственно, причем эти сферические температурные поля моделируют нагрев указанных упругих тел, сконцентрированный вблизи внутренней граничной сферы – для полого шара и граничной сферы – для упругого пространства с шаровой полостью.

**Целью** настоящей работы является нахождение формы и размеров граничных поверхностей упругого изотропного бесконечного полого цилиндра  $B$ , являющегося телом вращения с круговыми цилиндрическими граничными поверхностями, и упругого изотропного пространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью, обозначаемого  $\Pi$ , подвергшихся воздействию на них цилиндрических температурных полей, ось симметрии которых совпадает с осью вращения соответствующего нагреваемого тела, вызывающих равномерный нагрев до температуры  $T_n$  бесконечного осесимметричного полого цилиндра  $\bar{B}_1$ , соосного с телом  $B$  или телом  $\Pi$ , являющегося правильной его (тела  $B$  или тела  $\Pi$ ) частью, граничные цилиндрические по-

верхности которого не пересекаются с границами тел  $B$  и  $\Pi$ , при неизменности температуры  $T_0 < T_n$  во всех точках тел  $B$  и  $\Pi$ , не принадлежащих полю цилиндру  $\bar{B}_1$ . Вышеуказанные температурные поля моделируют нагрев тела  $B$  (тела  $\Pi$ ), сконцентрированный в зоне, несколько удаленной от граничных цилиндрических поверхностей тела  $B$  (граничной цилиндрической поверхности тела  $\Pi$ ).

**Постановка задачи.** Рассматриваются следующие однородные и изотропные тела вращения: упругий полый бесконечный цилиндр, обозначаемый  $B$ , с граничными цилиндрическими круговыми поверхностями, являющимися соосными поверхностями вращения с радиусами  $R_0$  и  $R_2$  ( $R_0 < R_2$ ); упругое пространство с цилиндрической полостью, обозначаемое  $\Pi$ , с границей, являющейся круговой цилиндрической поверхностью радиуса  $R_0$ . Нормальные сечения указанных выше упругих тел  $B$  и  $\Pi$  показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

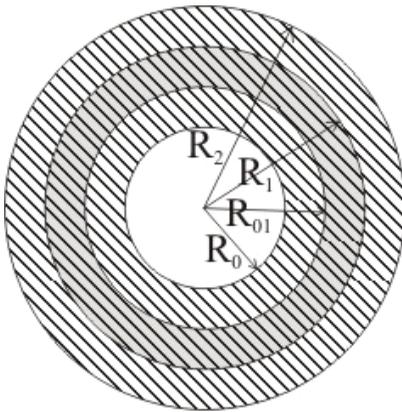


Рис. 1 – Нормальное сечение полого бесконечного цилиндра с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, удалённой от его внутренней граничной поверхности.

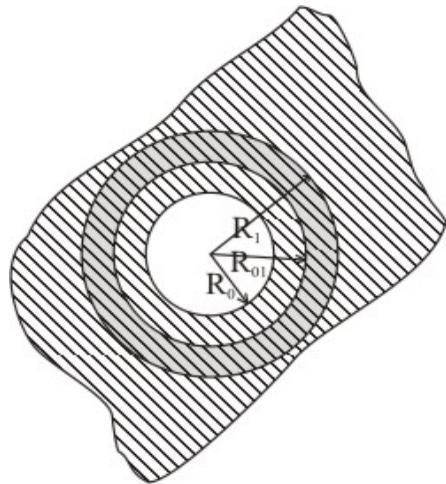


Рис. 2 – Нормальное сечение упругого пространства, имеющего цилиндрическую полость, с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, удалённой от граничной поверхности полости.

Упругие тела  $B$  и  $\Pi$  имеют во всех их точках одинаковую исходную температуру, равную  $T_0$ , при которой они находятся в ненапряженном состоянии. На рассматриваемые упругие тела  $B$  и  $\Pi$  действует температурное поле, вызывающее равномерный их нагрев до температуры  $T_n$  ( $T_n > T_0$ ) в правильной части тел  $B$  и  $\Pi$  – в полом бесконечном цилиндре, обозначаемом  $\bar{B}_1$ , являющемся фигурой вращения, соосной с нагреваемым телом ( $B$

или  $\Pi$ ). Граничными поверхностями тела  $\bar{B}_1$  являются соосные с телом  $B$  (телом  $\Pi$ ) круговые цилиндрические поверхности, радиусы которых обозначаются  $R_{01}$  и  $R_1$  ( $R_0 < R_{01} < R_1 < R_2$ ), непересекающиеся с граничными поверхностями нагреваемых тел. Остальные точки тел  $B$  и  $\Pi$  в результате воздействия рассматриваемого температурного поля имеют исходную температуру  $T_0$ . Нормальное сечение полого бесконечного цилиндра  $\bar{B}_1$  показано на рис. 1 и рис. 2 кольцом серого цвета. Предполагаем, что объемные силы и поверхностная нагрузка на тела  $B$  и  $\Pi$  не действуют. Требуется в рамках *математической модели несвязной квазистатической термоупругости* определить формы граничных поверхностей тел  $B$  и  $\Pi$  и их размеры после воздействия на эти тела описанных выше температурных полей. Коэффициент теплопроводности материала тел  $B$  и  $\Pi$  считается не зависящим от температуры в пределах ее изменения от  $T_0$  до  $T_n$ .

**Математическая модель.** В силу осевой симметрии нагреваемых тел  $B$  и  $\Pi$ , а также того, что температурные поля, вызывающие их нагрев, являются цилиндрическими с осью симметрии, совпадающей с осью симметрии нагреваемого тела, приходим к выводу, что граница тела  $B$  в результате его нагрева будет представлять объединение двух непересекающихся соосных цилиндрических круговых поверхностей, а граница тела  $\Pi$  после нагрева имеет форму цилиндрической круговой поверхности. Будем рассматривать нагреваемые тела  $B$  и  $\Pi$  и функции распределения температурных полей, вызывающих их нагрев, в цилиндрической системе координат, ось аппликат которой совпадает с осью симметрии нагреваемого тела, полярная ось лежит в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, начало отсчета на оси аппликат совпадает с началом полярной оси, цилиндрическими координатами точки нагреваемого тела являются:  $r$  – расстояние точки от оси аппликат;  $\varphi$  – полярный угол ортогональной проекции точки на вышеуказанную плоскость, перпендикулярную оси аппликат, называемую *основной плоскостью*;  $z$  – аппликата рассматриваемой точки. Функции распределения температурных полей, возникающих в телах  $B$  и  $\Pi$  в результате их вышеописанного нагрева, в выбранной цилиндрической системе координат имеют вид:

для полого цилиндра

для упругого пространства с  
цилиндрической полостью

$$T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right)H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right), \quad T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right)H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right), \quad (1)$$

$$r \in [R_0, R_2];$$

$$r \in [R_0, +\infty),$$

где  $H(p)$ ,  $p \in (-\infty, +\infty)$  – единичная функция Хевисайда, равная 1 при  $p \geq 0$  и равная 0 при  $p < 0$ ;  $r$  – описанная ранее цилиндрическая координата точки нагреваемого тела.

Функции распределения (1) рассматриваемых температурных полей, возникающих в результате нагрева тел  $B$  и  $\Pi$ , моделируют нагрев этих тел, сконцентрированный в зоне, несколько удаленной от их граничных поверх-

ностей. Температурные поля, возникающие в телах  $B$  и  $\Pi$  в процессе их нагрева, могут задаваться, например, следующими функциями распределения:

<p>для полого цилиндра</p> $T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right) \times$ $\times H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right)f\left(\frac{\tau}{\tau_n}\right),$ $r \in [R_0, R_2], 0 \leq \tau \leq \tau_n;$	<p>для упругого пространства с цилиндрической полостью</p> $T = T_0 + (T_n - T_0)H\left(\frac{r}{R_{01}} - 1\right) \times$ $\times H\left(1 - \frac{r}{R_1}\right)f\left(\frac{\tau}{\tau_n}\right),$ $r \in [R_0, +\infty), 0 \leq \tau \leq \tau_n,$	(2)
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

где  $\tau_n$  – время, прошедшее от начала до окончания нагрева тел  $B$  или  $\Pi$  ( $\tau_n > 0$ );  $\tau$  – время, отсчитываемое от начала нагрева тела  $B$  или  $\Pi$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_n$ );  $f(p)$  – числовая функция, возрастающая и гладкая на  $[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

Функции (2) являются решениями *неоднородного уравнения теплопроводности* при объемных плотностях распределения мощности источников тепла, задаваемых обобщенными функциями. При  $\tau = \tau_n$  функции (2) равны соответствующим функциям (1).

Решение задачи определения размеров граничных поверхностей тел  $B$  и  $\Pi$  в результате их указанного выше нагрева (при  $\tau = \tau_n$ ) рассмотрим в двух случаях:

1. Когда предполагается, что в процессе нагрева упругих тел  $B$  и  $\Pi$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_n$ ) *модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$*  их материала не зависят от температуры.

2. Когда учитывается при решении задачи зависимость от температуры модуля Юнга  $E$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и коэффициента линейного расширения  $\alpha$  материала упругих тел  $B$  и  $\Pi$ .

Векторное поле перемещений  $\vec{U}(P)$  точек  $P$  упругого изотропного тела  $B$  (тела  $\Pi$ ) в силу симметрии как тел  $B$  и  $\Pi$ , так и действующих на них температурных полей (цилиндрических) является цилиндрическим векторным полем, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии температурного поля и осью вращения тела  $B$  (тела  $\Pi$ ). Вектор-функция  $\vec{i} = (u_r(r), 0, 0)$  задает векторное поле перемещений  $\vec{U}(P)$  в вышеуказанной цилиндрической системе координат, где функция  $u_r(r)$  задает радиальную компоненту вектора перемещений точек нагреваемого тела, азимутальная и аксиальная компоненты вектора  $\vec{i}$  равны 0.

В первом случае при решении задачи о нахождении радиусов нормальных сечений граничных цилиндрических круговых поверхностей бесконечного полого цилиндра  $B'$ , получающегося из полого цилиндра  $B$  в результате воздействия на него температурного поля, задаваемого формулой (1), воспользуемся выражением, приведенным в работе [2], для вычисления радиальной компоненты  $u_r(r)$  вектор-функции, задающей распределение век-

торного поля перемещений  $\bar{U}(p)$ . В результате вычислений получаем:

$$u_r(R_0) = (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp} R_0; \quad (3)$$

$$u_r(R_2) = (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp} R_2, \quad (4)$$

где  $\alpha_0$  – коэффициент линейного расширения материала упругого полого цилиндра  $B$  при его температуре, равной  $T_0$ ;  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона материала полого цилиндра  $B$  при температуре  $T_0$ ;  $t_{cp}$  – среднее по нормальному сечению тела  $B$  значение функции распределения  $t(r)$  в выше-введенной цилиндрической системе координат скалярного поля  $T(P) - T_0$  изменения температуры в каждой точке  $P$  тела  $B$  в результате его нагрева, определяемое по формуле:

$$t_{cp} = \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_2^2 - R_0^2} t_n. \quad (5)$$

В формуле (5)  $t_n = T_n - T_0$ . Используя соотношения (3), (4) и (5), найдем формулы для вычисления внутреннего  $R_0'$  и внешнего  $R_2'$  радиусов полого цилиндра  $B'$ :

$$R_0' = R_0[1 + (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp}], \quad (6)$$

$$R_2' = R_2[1 + (1 + \nu_0)\alpha_0 t_{cp}]. \quad (7)$$

Из формул (6), (7) в силу  $t_{cp} > 0$  следует, что при вышеописанном нагреве и выполнении условия  $\alpha_0 > 0$  радиусы внутренней и внешней граничных круговых цилиндрических поверхностей полого бесконечного упругого кругового цилиндра увеличиваются, при  $\alpha_0 < 0$  – уменьшаются, а при  $\alpha_0 = 0$  – не изменяются, то есть при  $\alpha_0 > 0$  внутренний и внешний радиусы полого бесконечного кругового цилиндра увеличиваются, при  $\alpha_0 < 0$  – уменьшаются, а при  $\alpha_0 = 0$  остаются неизменными.

Для нахождения в первом случае радиуса  $R_0'$  нормального сечения граничной цилиндрической круговой поверхности упругого тела вращения  $\Pi'$ , являющегося упругим пространством с бесконечной круговой цилиндрической полостью, получающегося из тела  $\Pi$  в результате воздействия на него цилиндрического температурного поля, задаваемого формулой (1), воспользуемся равенством (6), в котором  $t_{cp} = 0$  (этот результат получается из равенства (5) в результате предельного перехода при  $R_2 \rightarrow +\infty$ ). Таким образом, находим:

$$R_0' = R_0, \quad (8)$$

то есть радиус граничной цилиндрической круговой поверхности упругого пространства с бесконечной круговой цилиндрической полостью в результате описанного выше нагрева не меняется, что означает неизменность радиуса

цилиндрической круговой полости тела  $\Pi$  в результате рассматриваемого его нагрева.

**Учёт зависимости термоупругих коэффициентов от температуры.**

Рассмотрим решение задачи о нахождении радиусов нормальных сечений граничных цилиндрических круговых поверхностей бесконечного полого цилиндра  $B'$ , получающегося из полого цилиндра  $B$  в результате воздействия на него цилиндрического температурного поля с функцией распределения (1), во втором случае, когда учитывается температурная зависимость модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала тела  $B$ . Функция распределения  $t(r)$  изменения температуры в каждой точке тела  $B$  в результате его нагрева имеет вид:

$$t(r) = \begin{cases} 0, & R_0 \leq r < R_{01}; \\ t_n, & R_{01} \leq r \leq R_1; \\ 0, & R_1 < r \leq R_2. \end{cases} \quad (9)$$

Как отмечалось ранее, азимутальная и аксиальная компоненты вектор-функции, задающей в вышевыбранной цилиндрической системе координат векторное поле перемещений  $\vec{U}(P)$ , равны нулю, радиальная компонента зависит только от цилиндрической координаты  $r$  ( $u_r = u_r(r)$ ). В силу этого, учитывая связь компонент тензора деформаций с вышеупомянутой вектор-функцией, имеем следующие равенства:  $e_z = e_{rz} = e_{\varphi z} = e_{r\varphi} = 0$ . Используя закон Гука, находим:  $\sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = 0$ . Для всех внутренних точек тела  $B$  имеют место равенства:  $e_r = u_r'(r)$ ,  $e_\varphi = u_r(r)/r$ . Рассмотрим три открытых соосных бесконечных полых цилиндра

$$B_0: R_0 < r < R_{01}, \quad B_1: R_{01} < r < R_1, \quad B_2: R_1 < r < R_2,$$

которые являются непересекающимися подмножествами тела  $B$ . Тогда, учитывая закон Гука, уравнения равновесия тел  $\bar{B}_0$ ,  $\bar{B}_1$ ,  $\bar{B}_2$  и связь компонент тензора деформации с компонентами вектор-функции  $\vec{u}(r)$ , находим обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет радиальная компонента  $u_r(r)$  вектор-функции  $\vec{u}(r)$  на объединении интервалов  $(R_0, R_{01})$ ,  $(R_{01}, R_1)$ ,  $(R_1, R_2)$ :

$$u_r''(r) + u_r'(r)/r + u_r(r)/r^2 = 0. \quad (10)$$

Тогда на указанном выше объединении интервалов имеем:

$$u_r(r) = \begin{cases} C_1 r + C_2 / r, & R_0 < r < R_{01}; \\ D_1 r + D_2 / r, & R_{01} < r < R_1; \\ M_1 r + M_2 / r, & R_1 < r < R_2. \end{cases} \quad (11)$$

Коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  определяются однозначно из следующих условий:

$$u_r(R_{01} - 0) = u_r(R_{01} + 0), \quad (12)$$

$$u_r(R_1 - 0) = u_r(R_1 + 0), \quad (13)$$

$$\sigma_r(R_{01} - 0) = \sigma_r(R_{01} + 0), \quad (14)$$

$$\sigma_r(R_1 - 0) = \sigma_r(R_1 + 0), \quad (15)$$

$$\sigma_r(R_0 + 0) = 0, \quad (16)$$

$$\sigma_r(R_2 - 0) = 0. \quad (17)$$

Условия (12) – (15) являются следствием непрерывности функций  $u_r(r)$  и  $\sigma_r(r)$  на сегменте  $[R_0, R_2]$ , а условия (16) и (17) являются следствием как условия непрерывности функции  $\sigma_r(r)$  на  $[R_0, R_2]$ , так и условия отсутствия нагрузки на граничных поверхностях упругого тела  $B$ . Решая систему шести линейных алгебраических уравнений с шестью неизвестными  $C_1, C_2, D_1, D_2, M_1, M_2$ , получающуюся из условий (11) – (17), находим выражения для постоянных  $C_1, C_2, D_1, D_2, M_1, M_2$  через  $R_0, R_{01}, R_1, R_2, \nu_0 = \nu(T_0), \nu_1 = \nu(T_H), E_0 = E(T_0), E_1 = E(T_H), \alpha_1 = \alpha(T_H)$ , где, следуя работе [2],  $\alpha(T_H)$  – среднее значение коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра  $B$  в диапазоне изменения его температуры от  $T_0$  до  $T_H$ .

Тогда, используя равенство (11), получаем:  
при  $R_0 \leq r \leq R_{01}$

$$u_r(r) = \alpha_1 t_H (1 + \nu_1) \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) r \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) \frac{1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)}, \quad (18)$$

при  $R_1 \leq r \leq R_2$

$$u_r(r) = \alpha_1 t_H (1 + \nu_1) R_1^2 \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right) \frac{1}{r} \left[1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right] \frac{1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2 + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right)}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)}. \quad (19)$$

В формулах (18), (19)

$$W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2) = \left[1 + (1 - 2\nu_0) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right] \left[\left(1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 + (1 - 2\nu_1) \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right)\right] + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right) \left[\left(1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 - 2\nu_1 + \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - 2\nu_1\right) \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right)\right]. \quad (20)$$

Используя равенство (19), находим:

$$u_r(R_2) = 2\alpha_1 t_H \frac{(1 + \nu_1)(1 - \nu_0)(R_1^2 - R_{01}^2)R_2^{-1}}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)} \left[1 - 2\nu_0 + \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R_{01}}\right)^2\right)]. \quad (21)$$

Из формулы (21) следует, что в результате описанного выше нагрева полого цилиндра  $B$  при  $\alpha_1 > 0$  внешний радиус полого цилиндра  $B$  увеличивается, при  $\alpha_1 < 0$  – уменьшается, а при  $\alpha_1 = 0$  – остается неизменным. Радиус  $R'_2$  нормального сечения внешней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра  $B'$ , получающегося из полого цилиндра  $B$  в результате воздействия на него используемого нагрева, определяем из равенства  $R'_2 = R_2 + u_r(R_2)$ . Используя формулу (21), получаем:

$$R'_2 > R_2 \text{ при } \alpha_1 > 0, \quad R'_2 < R_2 \text{ при } \alpha_1 < 0, \quad R'_2 = R_2 \text{ при } \alpha_1 = 0.$$

Используя равенство (18), находим:

$$u_r(R_0) = 2\alpha_1 t_n \frac{(1+\nu_1)(1-\nu_0)R_0 \left(1 - \left(\frac{R_{01}}{R_1}\right)^2\right)}{W(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1, R_2)} \left[1 + (1-2\nu_0)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} \left(1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right)\right]. \quad (22)$$

Из формулы (22) следует, что знак или равенство нулю  $u_r(R_0)$  зависит только от знака или равенства нулю произведения  $\alpha_1$  и выражения, стоящего в квадратных скобках. При  $\alpha_1 > 0$  получаем  $u_r(R_0) < 0$  (внутренний радиус полого цилиндра  $B$  уменьшается в результате описанного ранее нагрева), если выполняется неравенство

$$R_1 < R_2 \left\{ \left[ \frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} - 1 \right] : \left[ \frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} + 1 - 2\nu_0 \right] \right\}^{1/2} \quad (23)$$

при необходимом выполнении условия

$$\frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} > 1. \quad (24)$$

Вводя величину  $R_{10}$ , задаваемую равенством

$$R_{10} = R_2 \left\{ \left[ \frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} - 1 \right] : \left[ \frac{E_0}{E_1} \frac{1+\nu_1}{1+\nu_0} + 1 - 2\nu_0 \right] \right\}^{1/2}, \quad (25)$$

приходим к выводу, что при выполнении неравенства (24) из условия  $R_1 = R_{10}$  следует, что  $u_r(R_0) = 0$  (внутренний радиус полого цилиндра  $B$  не изменяется); из условия  $R_1 > R_{10}$  следует, что  $u_r(R_0) > 0$  (внутренний радиус тела  $B$  увеличивается), если  $\alpha_1 > 0$ , и  $u_r(R_0) < 0$  (внутренний радиус тела  $B$  уменьшается), если  $\alpha_1 < 0$ ; из условия  $R_1 < R_{10}$  следует, что  $u_r(R_0) < 0$  (внутренний радиус тела  $B$  уменьшается), если  $\alpha_1 > 0$ , и  $u_r(R_0) > 0$  (внутренний радиус тела  $B$  увеличивается), если  $\alpha_1 < 0$ . Если условие (24) не выполняется, то при  $\alpha_1 > 0$  внутренний радиус полого цилиндра  $B$  увеличивается, а при  $\alpha_1 < 0$  –

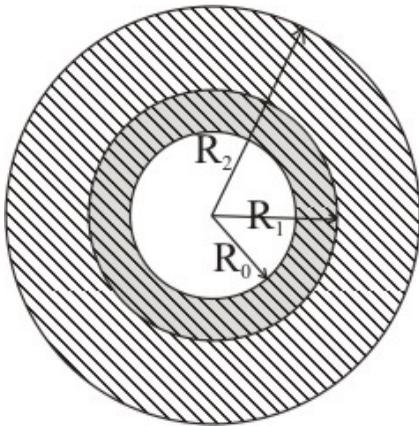


Рис. 3 – Нормальное сечение полого бесконечного цилиндра с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, примыкающей к его внутренней граничной поверхности.

В случае  $\alpha_1 = 0$  получаем  $R'_0 = R_0$ . Выполнение неравенства (24) является необходимым и достаточным условием существования и положительности величины  $R_{10}$ .

**Анализ предельных случаев.** Рассмотрим некоторые предельные случаи используемого нагрева полого бесконечного цилиндра. В случае, когда зона нагрева  $\bar{B}_1$  полого цилиндра  $B$  примыкает к его внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности (нормальное сечение тела  $B$  с отмеченным кольцом серого цвета нормальным сечением зоны его нагрева показано в этом случае на рис. 3), формулы для вычисления  $u_r(R_0)$  и  $u_r(R_2)$  получаются в результате предельного перехода в равенствах (20) – (22) при  $R_{01} \rightarrow R_0 + 0$ . Тогда

$$u_r(R_0) = \alpha_1 t_{\text{н}} (1 + \nu_1) \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] R_0 \left\{ 1 + (1 - 2\nu_0) \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \left[ 1 + (1 - 2\nu_0) \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[ 1 - 2\nu_1 + \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\}^{-1}; \quad (26)$$

$$u_r(R_2) = 2\alpha_1 t_{\text{н}} (1 + \nu_1) (1 - \nu_0) \frac{R_1^2}{R_2} \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ \left[ 1 + (1 - 2\nu_0) \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[ 1 - 2\nu_1 + \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (27)$$

С помощью формулы (26) приходим к заключению, что при выполнении неравенства (24) из условия  $R_1 = R_{10}$ , где  $R_{10}$  задается формулой (25),

уменьшается. Если  $\alpha_1 = 0$ , то внутренний радиус тела  $B$  не изменяется ( $u_r(R_0) = 0$ ). Если радиус нормального сечения внутренней граничной цилиндрической круговой поверхности полого цилиндра  $B'$  обозначить  $R'_0$ , то при выполнении неравенства (24) из равенства  $R_1 = R_{10}$  следует равенство  $R'_0 = R_0$ ; из неравенства  $R_1 > R_{10}$  следует неравенство  $R'_0 > R_0$ , если  $\alpha_1 > 0$ , и неравенство  $R'_0 < R_0$ , если  $\alpha_1 < 0$ ; из неравенства  $R_1 < R_{10}$  следует соотношение  $R'_0 < R_0$ , если  $\alpha_1 > 0$ , и  $R'_0 > R_0$ , если  $\alpha_1 < 0$ . При невыполнении неравенства (24) при  $\alpha_1 > 0$   $R'_0 > R_0$ , при  $\alpha_1 < 0$   $R'_0 < R_0$ .

следует, что в результате указанного нагрева полого цилиндра его внутренний радиус не изменяется, из условия  $R_1 > R_{10}$  следует, что внутренний радиус полого цилиндра увеличивается, если  $\alpha_1 > 0$ , и уменьшается при  $\alpha_1 < 0$ , из условия  $R_1 < R_{10}$  следует, что внутренний радиус полого цилиндра уменьшается, если  $\alpha_1 > 0$ , и увеличивается, если  $\alpha_1 < 0$ . При невыполнении условия (24) внутренний радиус полого цилиндра  $B$  увеличивается, если  $\alpha_1 > 0$ , и уменьшается при  $\alpha_1 < 0$ . При  $\alpha_1 = 0$  внутренний радиус полого цилиндра не изменяется.

Из формулы (27) следует, что в результате рассматриваемого нагрева тела  $B$  его внешний радиус увеличивается, если  $\alpha_1 > 0$ , уменьшается при  $\alpha_1 < 0$  и не изменяется при  $\alpha_1 = 0$ . Осуществляя предельный переход в равенствах (26), (27) при  $R_1 \rightarrow R_2 - 0$ , получаем равенства

$$u_r(R_0) = \alpha_1 t_n (1 + \nu_1) R_0 \text{ и } u_r(R_2) = \alpha_1 t_n (1 + \nu_1) R_2,$$

из которых следует, что в этом случае нагрева полого цилиндра изменения величин его внутреннего и внешнего радиусов совпадают с их изменениями в равномерно нагретом на температуру  $t_n$  полом цилиндре. Осуществляя предельный переход в равенствах (26) и (27) при  $R_1 \rightarrow R_0 + 0$ , получаем равенства  $u_r(R_0) = 0$  и  $u_r(R_2) = 0$ , из которых следует неизменность величин внутреннего и внешнего радиусов полого цилиндра так же, как у полого цилиндра в ненагретом состоянии.

**Радиусы граничных поверхностей до и после нагрева.** Рассмотрим задачу о нахождении радиуса  $R'_0$  граничной цилиндрической круговой поверхности упругого пространства с цилиндрической полостью, обозначаемого  $P'$ , получающегося из тела  $P$  в результате воздействия на него температурного поля (1). Как в случае 1), когда предполагается независимость от температуры термоупругих постоянных  $\alpha, E, \nu$  материала тела  $P$ , так и в случае 2), когда эта зависимость имеет место, применим вышеиспользуемый для тела  $B$  алгоритм решения этой задачи. Рассмотрим тела вращения – два открытых полых соосных цилиндра

$$B_0: R_0 < r < R_{01}, \quad B_1: R_{01} < r < R_1$$

и соосное с ними открытое упругое пространство с цилиндрической полостью, обозначаемое  $B_2$ , где  $B_2: r > R_1$ . Тогда, учитывая закон Гука, уравнения равновесия упругих тел  $\bar{B}_0, \bar{B}_1, \bar{B}_2$  и связь компонент тензора деформаций с радиальной компонентой  $u_r(r)$  вектор-функции  $\vec{u}(r)$ , находим, что функция  $u_r(r)$  удовлетворяет уравнению (10) на объединении множеств  $(R_0, R_{01}), (R_{01}, R_1), (R_1, +\infty)$ . Используя работы [2], [3] и учитывая конечность потенциальной энергии упругих деформаций для любой части тела  $P$ , множество аппликат всех точек которой ограничено, вызванных воздействием на тело  $P$  температурного поля, задаваемого формулой (1), находим на множестве  $(R_0, R_{01}) \cup (R_{01}, R_1) \cup (R_1, +\infty)$  следующее представление для

функции  $u_r(r)$  :

$$u_r(r) = \begin{cases} C_1 r + C_2 / r, & R_0 < r < R_{01}; \\ D_1 r + D_2 / r, & R_{01} < r < R_1; \\ M / r, & r > R_1. \end{cases} \quad (28)$$

Напомним, что условия (12) – (15) являются следствием непрерывности функций  $u_r(r)$  и  $\sigma_r(r)$  на  $[R_0, +\infty)$ , а равенство (16) является следствием как условия непрерывности функции  $\sigma_r(r)$  на полупрямой  $[R_0, +\infty)$ , так и условия отсутствия нагрузки на граничной поверхности упругого тела  $\Pi$ . Решая систему пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными  $C_1, C_2, D_1, D_2, M$ , получающуюся с использованием равенств (12) – (16), (28), находим выражения для постоянных  $C_1, C_2, D_1, D_2, M$  через значения

$$R_0, R_{01}, R_1, E_0 = E(T_0), E_1 = E(T_H), \nu_0 = \nu(T_0), \nu_1 = \nu(T_H), \alpha_1,$$

где  $E(T)$ ,  $\nu(T)$  – функции, выражающие температурную зависимость модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала тела  $\Pi$  соответственно, а  $\alpha_1$ , следуя работе [2], является средним значением коэффициента линейного расширения материала тела  $\Pi$  в диапазоне изменения его температуры от  $T_0$  до  $T_H$  в зоне нагрева. Тогда, используя равенство (28), при  $R_0 \leq r \leq R_{01}$  получаем:

$$u_r(r) = \alpha_1 t_H (1 + \nu_1) \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) r \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) \frac{1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}}{W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1)}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1) = & \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[\left(1 - \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \times \right. \\ & \times \left(1 + \left(1 - 2\nu_1\right) \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) + \left(1 - 2\nu_0 + \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \left(1 - 2\nu_1 + \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left(1 - 2\nu_1\right) \left(1 - \frac{R_0^2}{R_{01}^2}\right) \times \\ & \left. \times \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (30)$$

При  $r = R_0$  из формулы (29) находим

$$u_r(R_0) = 2\alpha_1 t_H (1 + \nu_1) (1 - \nu_0) R_0 \left(1 - \frac{R_{01}^2}{R_1^2}\right) \frac{1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}}{W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1)}. \quad (31)$$

Учитывая неравенство  $W_0(\nu_0, \nu_1, E_0, E_1, R_0, R_{01}, R_1) > 0$  и соотношение  $R'_0 = R_0 + u_r(R_0)$ , из формулы (31) следует, что если произведение

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0}\right) \quad (32)$$

положительно, то  $u_r(R_0) > 0$ ,  $R'_0 > R_0$  (радиус полости тела  $\Pi$  увеличивается), если произведение (32) отрицательно, то  $u_r(R_0) < 0$ ,  $R'_0 < R_0$  (радиус полости тела  $\Pi$  уменьшается), а если произведение (32) равно нулю, то  $u_r(R_0) = 0$ ,  $R'_0 = R_0$  (радиус полости тела  $\Pi$  не изменяется).

При рассмотрении случая независимости от температуры модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала упругого пространства с цилиндрической полостью, обозначаемого  $\Pi$ , в формуле (31) полагаем  $E_1 = E_0$ ,  $\nu_1 = \nu_0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_0$ . Тогда, как установлено выше,  $u_r(R_0) = 0$ ,  $R'_0 = R_0$  (радиус цилиндрической полости тела  $\Pi$  в результате вышеописанного его нагрева не меняется). Тот же результат получается из формул (3) и (5), осуществляя предельный переход в формуле (5) при  $R_2 \rightarrow +\infty$  и зафиксированных величинах  $R_0$ ,  $R_{01}$ ,  $R_1$ ,  $t_n$ . При рассмотрении случая 2) формула (29) получается из формул (18) и (20) в результате предельного перехода в них, когда  $R_2 \rightarrow +\infty$ , а остальные величины  $r$ ,  $R_0$ ,  $R_{01}$ ,  $R_1$ ,  $E_0$ ,  $E_1$ ,  $\nu_0$ ,  $\nu_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $t_n$  зафиксированы.

**Результаты моделирования.** Рассмотрим пример расчета радиуса  $R'_0$  внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности бесконечного полого цилиндра  $B'$ , получающегося из бесконечного полого цилиндра  $B$  в результате воздействия на него температурного поля (1). Материал полого цилиндра  $B$  – медь,  $R_0 = 10$  мм,  $R_{01} = 20$  мм,  $R_2 = 150$  мм,  $T_0 = 0^\circ \text{C}$ ,  $T_n = 100^\circ \text{C}$ . В расчетах использовались следующие значения коэффициентов  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ :  $E_0 = 132$  ГПа,  $E_1 = 128$  ГПа,  $\nu_0 = 0,31$ ,  $\nu_1 = 0,315$ ,  $\alpha_0 = 16,4 \cdot 10^{-6} 1/\text{K}$ ,  $\alpha_1 = 16,83 \times 10^{-6} 1/\text{K}$ , поскольку в формулах (21), (22), (31) зависимости  $u_r(R_0)$  и  $u_r(R_2)$  от параметров  $E_0$  и  $E_1$  проявляется только как зависимость от их отношения  $E_0 : E_1$ , то при проводимых по этим формулам расчетах вместо их справочных значений могут быть взяты любые другие пропорциональные им значения модуля Юнга. В этих данных  $\alpha_1$  – это среднее значение коэффициента линейного расширения материала в диапазоне температур  $0-100^\circ \text{C}$ . При нахождении справочных значений  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  использовалась работа [4]. Согласно формуле (25) находим  $R_{10} = 23,65$  мм (с точностью до сотых долей мм). Рассмотрим три случая.

1)  $R_1 = R_{10}$ . Тогда, при учете температурной зависимости  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  материала тела  $B$  получаем с точностью до сотых долей мкм  $u_r(R_0) = 0$ . Следовательно, радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра  $B$  в результате его нагрева не изменяется, то есть  $R'_0 = R_0$ . При отсутствии зависимости  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  материала полого цилиндра  $B$  от температуры или пренебрежении этой зависимостью при расчетах получаем  $u_r(R_0) = 0,15$  мкм, то есть радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности тела  $B$  в результате нагрева этого тела увели-

чится и станет равным 10 мм 0,15 мкм.

2)  $R_1 = 22 \text{ мм} < R_{10}$ . Тогда, при учете температурной зависимости  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  материала тела  $B$  получаем с точностью до сотых долей мкм  $u_r(R_0) = -0,01$  мкм. Следовательно, радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра  $B$  в результате его нагрева уменьшается на 0,01 мкм. При отсутствии зависимости  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  материала тела  $B$  от температуры получаем  $u_r(R_0) = 0,08$  мкм, то есть радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности тела  $B$  увеличится и станет равным 10 мм 0,08 мкм.

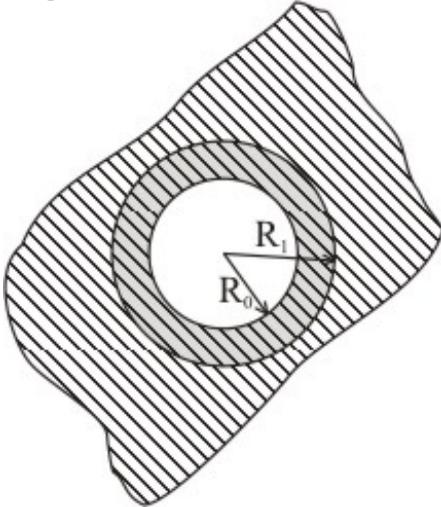


Рис. 4 – Нормальное сечение упругого пространства, имеющего цилиндрическую полость, с отмеченным кольцом серого цвета сечением зоны его нагрева, примыкающей к граничной поверхности полости.

поверхности (нормальное сечение тела  $\Pi$  с отмеченным кольцом серого цвета нормальным сечением зоны его нагрева показано на рис. 4).

Формула для вычисления  $u_r(R_0)$  в этом случае получается из равенств (30), (31) в результате предельного перехода в них при  $R_{01} \rightarrow R_0 + 0$ . Тогда

$$u_r(R_0) = \alpha_1 t_n (1 + \nu_1) R_0 \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \left[ 1 - \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 + \frac{E_0}{E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_0} \left[ 1 - 2\nu_1 + \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (33)$$

Из формулы (33) следует, что, если выражение (32) положительно, то в результате рассматриваемого нагрева тела  $\Pi$  радиус его полости увеличивается; если выражение (32) отрицательно, **то указанный радиус уменьшает-**

3)  $R_1 = 25 \text{ мм} > R_{10}$ . Тогда, учитывая температурную зависимость  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  материала тела  $B$ , получаем с точностью до сотых долей мкм  $u_r(R_0) = 0,02$  мкм. Следовательно, радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности полого цилиндра  $B$  в результате его нагрева увеличится на 0,02 мкм. При отсутствии зависимости  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  материала тела  $B$  от температуры получаем  $u_r(R_0) = 0,22$  мкм, то есть радиус внутренней граничной круговой цилиндрической поверхности тела  $B$  увеличится и станет равным 10 мм 022 мкм.

Рассмотрим случай нагрева тела  $\Pi$  – упругого пространства с цилиндрической полостью, когда зона нагрева  $\bar{B}_1$  тела  $B$  примыкает к его граничной круговой цилиндрической

ся, а если выражение (32) равно нулю, то радиус полости тела  $\Pi$  не изменяется.

**Выводы.** При использовании математической модели несвязной квазистатической термоупругости для исследования термоупругих деформаций граничных цилиндрических круговых поверхностей тела вращения – полого бесконечного упругого цилиндра, вызванных воздействием на него цилиндрического температурного поля, соответствующего нагреву полого цилиндра только в некоторой его зоне, являющейся правильной его частью с той же осью вращения и представляющей собой также полый бесконечный цилиндр, причем во всех точках зоны нагрева полого цилиндра температура одинакова, получены следующие результаты.

При учете температурной зависимости термоупругих постоянных материала полого цилиндра найдена такая величина  $R_{10}$ , что в случае выполнения необходимого и достаточного условия ее существования и положительности, если она меньше наибольшего расстояния от оси вращения полого цилиндра точек его зоны нагрева, то внутренний его радиус в результате нагрева увеличится, если величина  $R_{10}$  больше этого расстояния, то внутренний радиус полого цилиндра уменьшится и если величина  $R_{10}$  равна этому расстоянию, то внутренний радиус полого цилиндра не изменится. В случае невыполнения необходимого и достаточного условия существования и положительности величины  $R_{10}$  внутренний радиус полого цилиндра при его нагреве увеличивается; такие изменения внутреннего радиуса полого цилиндра происходят при его нагреве, если среднее значение коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра положительно, при этом внешний радиус полого цилиндра в результате его нагрева увеличивается. При отсутствии температурной зависимости термоупругих постоянных материала полого цилиндра его внешний и внутренний радиусы увеличиваются при нагреве, если коэффициент линейного расширения его материала положителен.

Таким образом, учет температурной зависимости термоупругих коэффициентов материала полого бесконечного цилиндра является весьма существенным при определении деформаций его граничных поверхностей, поскольку позволяет обнаружить при выполнении определенных условий *эффект уменьшения внутреннего радиуса полого цилиндра при его нагреве* в случае положительности среднего значения коэффициента линейного расширения его материала. Учет температурной зависимости термоупругих коэффициентов материала нагреваемого упругого тела позволяет также обнаружить при выполнении найденного условия *эффект уменьшения радиуса граничной круговой цилиндрической поверхности* упругого пространства с цилиндрической полостью при воздействии на него цилиндрического температурного поля, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии полости, вызывающего нагрев этого упругого тела только в некоторой его зоне, представляющей полый бесконечный цилиндр, соосный с полостью в упругом пространстве, причём во всех точках зоны нагрева температура одинакова, а среднее значение коэффициента линейного расширения материала упругого пространства с полостью (в пределах изменения его температуры в зоне нагрева) положительно. В случае отсутствия температурной зависимости тер-

моупругих постоянных материала упругого пространства с цилиндрической круговой полостью радиус граничной круговой цилиндрической поверхности при вышеуказанном нагреве не изменяется.

**Список литературы:** 1. Щеглов В.И. Об одном эффекте деформирования упругого полого шара при воздействии на него сферического температурного поля специального вида // Вестник НТУ «ХПИ», Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2014. – №6 (1049). – С. 223 – 233. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, – 1975. – 216 с. 3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, – 1966. – 707 с. 4. Машиностроение: Энциклопедия. Т.1. – 2. Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен. / Под ред. К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение. – 1999. – 600 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Shheglov, V. I. "Ob odnom jeffekte deformirovanija uprugogo pologo shara pri vozdejstvii na nego sfericheskogo temperaturnogo polja special'nogo vida." *Visnyk NTU «KhPI»*. Ser.: *Matematychni modeljuvannja v tehnicji ta tehnologijah*. No. 6 (1049). 2014. P. 223–233. Print. 2. Kovalenko, A. D. *Termouprugost'*. Kyiv: Vyshha shkola, 1975. Print. 3. Mushelishvili, N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti*. Moscow: Nauka, 1966. Print. 4. *Mashynostroenie: Enciklopedija. Vol. 1–2. Teoreticheskaja mehanika. Termodinamika. Teploobmen*. Ed. K. S. Kolesnikova. Moscow: Mashynostroenie, 1999. Print.

*Поступила (received) 14.04.2015*

## З М І С Т

<i>Павлова Г. В.</i> Раритетные издания книг Леонарда Эйлера хранятся в библиотеке Харьковской политехники .....	3
<i>Назаренко С. А., Марусенко С. И.</i> Ключевые работы ученых НТУ «ХПИ» в области математического моделирования в технике .....	14
<i>Автономова Л. В., Бондарь С. В., Степук А. В.</i> Численное моделирование удара пластины полусферическим индентором .....	19
<i>Вамболь В. В., Костюк В. Е., Кирилай Е. И.</i> Математическое описание процесса охлаждения генераторного газа в установке утилизации отходов жизнедеятельности .....	24
<i>Вамболь С. О., Міщенко І. В., Кондратенко О. М., Бурменко О. А.</i> Аппроксимация закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 1 .....	36
<i>Гуцаленко Ю. Г.</i> Физико-математическая модель прессования в процессах консолидации порошков методом спарк-плазменного спекания .....	44
<i>Кондратенко А. Н.</i> Математическая модель гидравлического сопротивления фильтра твёрдых частиц дизеля. Часть 4: временной коэффициент .....	53
<i>Коробская А. В.</i> Оператор двойного интегрирования и его свойства .....	61
<i>Левтеров А. М., Левтерова Л. И., Савицкий В. Д.</i> Особенности эмиссии оксидов азота при работе дизеля на биодизельном топливе и возможные методы её снижения .....	76
<i>Любарський Б. Г.</i> Рациональні швидкісні режими руху приміського електропоїзду з асинхронними тяговими двигунами .....	86
<i>Мигущенко Р. П., Волобуєв М. М., Реброва О. М.</i> Коваріаційний аналіз при обробці тривимірних зображень .....	92
<i>Набока Е. А.</i> Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1 .....	98
<i>Назаренко О. М.</i> Моделювання взаємодії плоских гармонічних хвиль з циліндричними включеннями .....	108
<i>Оверьянова Л. В., Омеляненко О. В., Новофастовский И. В.</i> Моделирование работы электромеханического инерционного накопителя энергии в системе тягового привода при торможении электропоезда .....	115

<i>Плаксий Ю. А.</i> Еталонна модель обертання твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що змінюються у часі.....	120
<i>Русанов А. В., Хорев О. Н., Линник А. В., Сухоребрый П. Н.</i> Влияние сложного окружного навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины на структуру потока и энергетические характеристики проточной части .....	130
<i>Рябенков И. А.</i> Обеспечение точности обработки на операциях шлифования.....	142
<i>Семко А. Н., Шерстюк Ю. В.</i> Гидропушки для решения экологических проблем .....	147
<i>Ткаченко В. Н.</i> Определение напряжений в гибком колесе волновой зубчатой передачи .....	159
<i>Шевченко С. А., Григорьев А. Л., Степанов М. С.</i> Термодинамический расчёт пневмосистемы запуска ракетного двигателя .....	163
<i>Щеглов В. И.</i> Об особенностях термоупругих деформаций граничных поверхностей полого бесконечного цилиндра при воздействии на него цилиндрических температурных полей специального вида .....	196
<i>Реферати</i> .....	213
<i>Рефераты</i> .....	218
<i>Abstracts</i> .....	224

## РЕФЕРАТИ

УДК 51(092)

**Раритетні видання книг Леонарда Ейлера зберігаються в бібліотеці Харківської політехніки / Г. В. Павлова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 3 – 14. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.**

Стаття присвячена опису наукової діяльності та друкованих праць видатного вченого в галузі природничих наук. Вперше описується колекція книг та наукових статей Леонарда Ейлера, що зберігається у фондах бібліотеки Харківського політехнічного інституту, а також простежується історія її створення.

**Ключові слова:** історія, математика, механіка, гідродинаміка, астрономія, філософія, колекції, раритети, книжкові пам'ятки, наукова спадщина.

УДК 539.3

**Ключові роботи вчених НТУ «ХПІ» в галузі математичного моделювання в техніці / С. О. Назаренко, С. І. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 14 – 19. Бібліогр.: 2 назви. – ISSN 2222-0631.**

Стаття присвячена розгляду еволюції в 19 – 21 століттях основних науково-педагогічних досягнень вчених і випускників НТУ «ХПІ» в області математичного моделювання: від парових машин до космічних апаратів. Початок української науки в галузі математичного моделювання в техніці та технологіях пов'язано з НТУ «ХПІ». Тут працювали або вчилися В.Л. Кирпичов, А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Л.Д. Ландау, А.М. Підгорний, Ю.М. Мацевитий, Л.А. Пастур, С.Я. Хруслів та ін. Вчені НТУ «ХПІ» створювали космічну і турбокомпресорну техніку, ЕОМ і термоядерні установки, та інш. Показано, як математизація дослідницької діяльності призвела до появи нових методик аналізу і синтезу в техніці і технологіях.

**Ключові слова:** механіка, техніка, технологія, динаміка, математична модель, фізика.

УДК 539

**Чисельне моделювання удару пластини напівсферичним індентором / Л. В. Автономова, С.В. Бондар, А.В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 19 – 24. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто задачі чисельного моделювання деформування круглої пластини та пакету, який складається з двох зовнішніх сталевих пластин і середньої титанової пластини. Пластини піддаються ударному впливу індентора з напівсферичною формою робочої частини. При вирішенні нестационарної пов'язаної термов'язкопластическої контактної задачі у тривимірній постановці враховуються: тертя в контактних зонах та залежність границі текучості матеріалу від швидкостей деформацій та температури. Динамічну контактну задачу чисельно реалізовано методом кінцевих елементів за допомогою пакета ANSYS. Виконано порівняння параметрів напружено-деформованого стану пластини та пакета пластин для двох моделей визначальних співвідношень: моделі Купера-Симонда і моделі нейронної мережі. Показано, що відмінності в отриманих величинах переміщень і деформацій не перевищують 15%.

**Ключові слова:** математичне моделювання, контактна задача, пластина, удар, в'язкопластичне деформування, кінцевий елемент.

УДК 628.477: 519.876.5

**Математичний опис процесу охолодження генераторного газу в установці утилізації відходів життєдіяльності / В. В. Вамболь, В. Є. Костюк, О. І. Кирилаш // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 24 – 35. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто проблему накопичення твердих побутових і промислових відходів, обґрунтовано її актуальність. Суттєвним недоліком запропонованого способу її вирішення – утилізація відходів способом змішаної газифікації – є вторинне утворення у газоподібних продуктах цього процесу високотоксичних речовин. Для вирішення цієї проблеми запропоновано спосіб різкого охолодження генераторного газу шляхом впорскування рідини у його потік відцентровими диспергуючими форсунками. Виконано математичне описання процесу охолодження генераторного га-

зу в установці утилізації відходів життєдіяльності. На основі класичної теорії газодинаміки отримано математичні співвідношення для описання газової і дисперсної фази, а також між фазної взаємодії у процесі охолодження.

**Ключові слова:** утилізація, відходи життєдіяльності, екологічна безпека, діоксини, математичне моделювання, двофазне багатоконпонентне середовище.

УДК 389.14+658.16(075.8)

**Апроксимація закону розподілу експериментальних даних за допомогою бета-розподілу. Частина 1 / С. О. Вамболь, І. В. Міщенко, О. М. Кондратенко, О. А. Бурменко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 36 – 44. Бібліогр.: 34 назви. – ISSN 2222-0631.**

Досліджено особливості бета-розподілу та обґрунтування його застосування для апроксимації закону розподілу емпіричних даних у порівнянні з іншими видами законів розподілу взагалі та практичне використання такого розподілу для випадку геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Проаналізовано спеціалізовану науково-технічну і довідникову літературу, методи математичної статистики, теорії ймовірностей, чисельні. У даній частині дослідження застосовано типові закони розподілу до об'єкту дослідження та показано, що використання для апроксимації нормального та інших типових розподілів не завжди є прийнятним для знаходження справжнього або близького до нього закону. Вперше показано переваги застосування бета-розподілу для апроксимації емпіричного закону розподілу будь-яких даних вимірювань на прикладі геометричних характеристик тіл кочення підшипників. Отримана методологія і математичний апарат придатні для застосування бета-розподілу придатні для вирішення задачі апроксимації емпіричних даних будь-якого генезису.

**Ключові слова:** похибки вимірювання, емпіричний розподіл, нормальний розподіл, бета-розподіл, розподіли Пірсона, апроксимація.

УДК 519.67:621.762.4.04+621.762.53+537.52

**Фізико-математична модель пресування в процесах консолідації порошків методом спарк-плазмового спікання / Ю. Г. Гуцаленко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 44 – 53. Бібліогр.: 16 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглядається проблема фізико-математичного прогнозування раціонального тиску в процесах спарк-плазмового спікання порошкових композицій. Визначені фізичні аспекти цієї проблеми та представлений підхід до розрахунку тиску в циклі пресування на стадії підготовки та експериментальної розробки виробництва. Розрахунок заснований на використанні закону Пашена стосовно до розглянутої моделі спарк-плазмової консолідації порошків під тиском. Запропоновано розрахункову реляційну базу даних по тиску в нанометричному діапазоні середніх розмірів зерен вихідних порошків у технологіях виробництва спарк-плазмовим спіканням. Результати розрахунків порівняно з практичним досвідом енергозберігаючого швидкісного спарк-плазмового спікання щільного керамічного композиту з нанопорошків  $Al_2O_3$ –WC (50/50 мас.%). Запропоновано напрями подальших досліджень.

**Ключові слова:** порошкова композиція, спарк-плазмове спікання, електричний розряд, закон Пашена, тиск пресування.

УДК 621.43.068.4

**Математична модель гідравлічного опору фільтра твердих частинок дизеля. Частина 4: часовий коефіцієнт / О. М. Кондратенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 53 – 61. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

Описано математичну модель гідравлічного опору (ГО) фільтра твердих частинок (ФТЧ) дизеля у реальних умовах експлуатації. Модель побудовано на основі витратної характеристики одного модуля ФТЧ, експериментально отриманій за постійної температури текучого середовища, і даних стендових випробувань автотракторного дизеля 2Ч10,5/12, що обладнаний повнорозмірним ФТЧ. Модель дозволяє врахувати ряд факторів, що характеризують умови експлуатації ФТЧ у складі випускної системи цього дизеля шляхом введення відповідних коефіцієнтів. У даній частині роботи описано фізичний зміст та оцінено значення часового коефіцієнту моделі, що дозволяє врахувати залежність ГО ФТЧ від часу роботи дизеля на стаціонарному режимі, тобто динаміку засмічення ФТЧ.

**Ключові слова:** дизель, фільтр твердих частинок, гідравлічний опір, математична модель.

УДК 517.984.4

**Оператор подвійного інтегрування та його властивості / Г. В. Коробська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 61 – 76. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто оператор подвійного інтегрування у просторі  $L^2(D)$ , де  $D$  – прямокутник. Здійснено включення даного оператора до вузла. Показано, що обчислення характеристичної функції вузла пов'язано з розв'язанням крайової задачі Дарбу-Гурса з даними на характеристиках. Розглянуто звуження даного оператора на підпростір функцій  $f(x; y) \in L^2(D)$  виду  $f(x; y) = f(xy)$ . Оператор звуження включено до вузла, обчислено характеристичну функцію цього вузла. Виявилось, що вона є інтегральним оператором, який діє в цьому ж підпросторі функцій ( $f(x; y) = f(xy)$ ).

**Ключові слова:** оператор подвійного інтегрування, вузел, гільбертовий простір, ортопроектор, характеристична функція.

УДК 621.43

**Особливості емісії оксидів азоту при роботі дизеля на дизельному паливі та можливі методи її зниження / А. М. Левтєров, Л. І. Левтєрова, В. Д. Савицький // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 76 – 86. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.**

Подано аналіз та спроби пояснення в наукових публікаціях особливостей утворення оксидів азоту при роботі двигуна з запалюванням від стиску на метилових та етилових ефірах жирних кислот (біодизельні палива), а також позначені методи зменшення емісії  $NO_x$  з відпрацьованими газами. Дослідження згоряння біодизельних палив ускладнюється їх розмаїттям, яке обумовлене складом складних ефірів, що змінюється, а головне, відсутністю даних про термодинамічні та термомічні властивості у відкритому друку. В роботі викладені результати чисельного та моторного експериментів стосовно впливу на величину емісії оксидів азоту з відпрацьованими газами дизеля кута випередження впорскування палива та коефіцієнта надлишку повітря, при цьому розглядається як мінеральне так і одне з біодизельних палив.

**Ключові слова:** дизель, біопаливо, емісія монооксиду азоту, токсичність відпрацьованих газів, моделювання, моторний експеримент.

УДК 629.429.3:621.313

**Рациональні швидкісні режими руху приміського електропоїзду з асинхронними тяговими двигунами / Б. Г. Любарський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 86 – 92. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

На поточний момент при розробці та експлуатації нових типів електропоїздів виникає питання щодо визначення їх раціональних швидкісних режимів руху. В роботі розглядається методика, що дозволяє визначити раціональну максимальну швидкість руху електропоїзду на підставі комплексного критерію ефективності. Зазначається, що для розглянутого в роботі приміського електропоїзду з тяговим електроприводом на основі асинхронного тягового двигуна збільшення максимальної швидкості руху приводить не тільки до збільшення середньої швидкості руху електропоїзда, але і до зменшення витрати енергії на 3,75%, що обумовлене роботою приводу в режимах з великим значенням ККД.

**Ключові слова:** електропоїзд, асинхронний тяговий електропривод, максимальна швидкість руху, оптимальні режими роботи тягового приводу, комплексний критерій ефективності.

УДК 519.254

**Коваріаційний аналіз при обробці тривимірних зображень / Р. П. Мигущенко, М. М. Волобуєв, О. М. Реброва // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 92 – 98. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто питання автоматичного формування множин статистик Фішера, які однозначно характеризують стан об'єкта контролю, управління або ідентифікації, за рахунок використання методів статистичного аналізу. Формування множини  $F$  – статистик здійснюється застосуванням коваріаційного аналізу до тривимірних зображень об'єкта, шляхом проведення ряду перетви-

нів вздовж осей аргументів. Результатом виконання перетинів є множини з координатами  $F_0$ ,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Проведені дослідження можуть бути використані для розробки алгоритмічного та програмного забезпечення засобів виявлення дефектів складного промислового обладнання. Розроблене програмне забезпечення може бути застосованим при імітаційному моделюванні.

**Ключові слова:**  $F$  – статистика, коваріаційний аналіз, регресії, двовимірна модель, трансформація, архів даних.

УДК 517.955.8

**Синхронізація коливань двох зв'язаних пластин Бергера з нелінійним внутрішнім та граничним демпфуванням. Частина 1 / О. О. Набока // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 98 – 108. Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2222-0631.**

Вивчається модель Бергера нелінійних коливань двох однакових пружно зв'язаних пластин із частково затиснутою та частково вільною границею. Припускаємо, що нелінійні дисипативні сили діють у внутрішній частині пластин і на вільній частині їх границь. Вивчена залежність структури глобального атратора системи від параметра  $\gamma$ , пропорційного до інтенсивності взаємодії пластин. Доведено, що верхня границя атратора при  $\gamma \rightarrow \infty$  належить діагоналі фазового простору системи, що означає наявність ефекту синхронізації динаміки пластин, коли інтенсивність зв'язку пластин в системі та час прямують до нескінченності.

**Ключові слова:** модель Бергера, пружно зв'язані пластини, асимптотична синхронізація, нелінійна дисипація, вільна границя.

УДК 519.64, 539.3

**Моделювання взаємодії плоских гармонічних хвиль з циліндричними включеннями / О. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 108 – 115. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Розглянуто плоскі задачі дифракції гармонічних хвиль на жорстких та пружних включеннях довільного поперечного перерізу. Будується інтегральні зображення для амплітуд переміщень відбитого хвильового поля і крайові задачі зведені до системи сингулярних інтегральних рівнянь, які реалізовані чисельно. Обґрунтовуються додаткові умови, необхідні для однозначної розв'язності сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. Чисельна реалізація побудованих алгоритмів проводиться методом механічних квадратур.

**Ключові слова:** дифракція, жорстке або пружне включення, сингулярні інтегральні рівняння, додаткові умови, чисельна реалізація.

УДК 629.423.3

**Моделювання роботи електромеханічного інерційного накопичувача енергії у системі тягового привода при гальмуванні електропоїзда / Л. В. Овер'янова, О. В. Омеляненко, І. В. Новофастовський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 115 – 119. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.**

Досліджується робота тягового електропривода електропоїзда з бортовим електромеханічним накопичувачем енергії. Для розширення діапазону робочих напруг тягового двигуна і системи електромеханічного перетворення енергії накопичувача запропоновано використовувати реверсивний DC-DC перетворювач. Наводиться схема включення накопичувача у тяговий електропривод з DC-DC перетворювачем, а також математична модель обміну енергією у системі, що досліджується. Встановлено, що запропоноване схематичне рішення дозволяє підвищити ефективність утилізації енергії гальмування електрорухомого складу, яка може бути використана в процесі подальшого розгону поїзда.

**Ключові слова:** тяговий електропривод, електромеханічний інерційний накопичувач енергії, DC-DC перетворювач, електрорушійна сила, енергія обміну.

УДК 629.7.05

**Еталонна модель обертання твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що змінюються у часі / Ю. А. Плаксії // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 120 – 130. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано нову неперервну модель обертання твердого тіла, основу на представ-

ленні модельного кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що паралельно змінюються у часі. Побудовано аналітичні залежності для квазікоординат на такті обчислень параметрів орієнтації і компонент кватерніона, що відповідають таким обертальним рухам. Для декількох наборів параметрів отримано реалізацію моделі. Результати представлено у формі залежностей квазікоординат від часу і траєкторій у конфігураційному просторі для параметрів орієнтації. Показано, що нова модель описує обертання твердого тіла, що відрізняється від випадку регулярної прецесії. Модель може бути застосована в якості еталонної для отримання оцінок похибок алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених системах.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, еталонна модель, квазікоординати, траєкторії у конфігураційному просторі.

УДК 621.224

**Вплив складного колового навалу лопатей робочого колеса осьової гідротурбіни на структуру потоку та енергетичні характеристики проточної частини / А. В. Русанов, О. М. Хорєв, О. В. Ляницький, П. М. Сухорєбрій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 130 – 141. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Наведено результати та аналіз впливу складного колового навалу лопаті робочого колеса осьової гідротурбіни ПЛІ20 Кременчуцької ГЕС на структуру потоку та гідродинамічні характеристики проточної частини. Наведено структуру потоку та залежності втрат енергії в робочому колесі та значення ККД проточної частини при оптимальному режимі роботи від величини навалу. Показано, що для гідротурбіни, що досліджується, застосування складного колового навалу дозволило підвищити значення максимального ККД у всьому діапазоні витрат при оптимальному куті установки лопаті робочого колеса. Розрахунки виконано з застосуванням програмного комплексу *IPMFlow*.

**Ключові слова:** гідротурбіна, проточна частина, просторове профілювання, складний коловий навал лопаті, робоче колесо, гідродинамічне удосконалювання.

УДК 621.923

**Забезпечення точності обробки на операціях шліфування / І. О. Рябенков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 142 – 147. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Наведено теоретичний аналіз технологічних можливостей підвищення точності й продуктивності обробки при використанні схеми шліфування з початковим натягом у технологічній системі, тобто застосовуваної на практиці схеми виходжування. Для цього отримано аналітичне рішення завдання визначення величини пружного переміщення при шліфуванні з початковим заданим натягом у технологічній системі. Показано, що із часом обробки величина пружного переміщення зменшується за експонентним законом, приймаючи значення, що відповідають умовам високоточної обробки деталей машин. Визначено час обробки, за який досягається необхідна (задана) точність обробки. Це дозволяє науково обґрунтовано розрахунковим шляхом визначити оптимальні параметри обробки, виходячи з вимог по точності оброблюваної поверхні.

**Ключові слова:** шліфування, сила різання, точність обробки, пружне переміщення, початковий натяг, технологічна система, продуктивність обробки, час обробки.

УДК 532.5, 614.844, 621.227

**Гідрогармати для вирішення екологічних пролем / О. М. Семко, Ю. В. Шерстюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 147 – 159. Бібліогр.: 26 назв. – ISSN 2222-0631.**

Описано основні напрями застосування імпульсних високошвидкісних струменів рідини в технологічних процесах, їх переваги і недоліки, подальші перспективи розвитку. Приведено схеми пристроїв, що використовуються для отримання ультраструй. Описано відмінність у фізиці процесів, що відбуваються при втіканні води в сопло і витіканні з нього в гідрогарматі і імпульсному водометі. Дано рівняння для розрахунку внутрішньої балістики, а також кінцево-різницева апроксимація рівнянь руху по методу Родіонова, адаптованому для розрахунку гідроімпульсних установок, що задовольняє вимогам монотонності, однорідності, консервативності і має другий порядок апроксимації за часом і координатою.

**Ключові слова:** імпульсні струмені рідини, високошвидкісні струмені, імпульсний водомет, гідрогармата.

УДК 621.833

**Визначення напруг в гнучкому колесі хвильової зубчастої передачі / В. М. Ткачено // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 159 – 163. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.**

Для перевірки гнучкого колеса хвильової зубчастої передачі на згинальну міцність і витривалість запропонована методика визначення напружень від вигину колеса генератором хвилі пружної деформації із застосуванням теорії пружних тонких оболонок. Обчислені напруги коригуються з урахуванням змінної згинальної жорсткості в області зубчастого вінця і наявності ефекту концентрації напружень у западинах між зубами. Пропонується визначити напруги в двох небезпечних перетинах – в западинах між зубами вінця і в області переходу від зубчастого вінця до гнучкого колеса. При цьому для другого перетину розрахунок напружень проводиться з урахуванням переданого крутного моменту. З наведеного прикладу розрахунків видно доцільність запропонованого підходу до оцінки міцності і витривалості гнучкого колеса хвильової зубчастої передачі.

**Ключові слова:** хвильова передача, напруги, гнучке колесо, теорія оболонок.

УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

**Термодинамічний розрахунок пневмосистеми запуску ракетного двигуна / С. А. Шевченко, О. Л. Григор'єв, М. С. Степанов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 163 – 195. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

Виконаний аналіз процесів нестационарного теплообміну газу зі стінками порожнин пневмосистеми запуску ракетного двигуна багатократного включення. Отримані формули для розрахунку коефіцієнтів тепловіддачі від газу до стінки з урахуванням форми порожнини. Для визначення температури внутрішньої поверхні стінки виведено інтегро-дифференційне рівняння і розроблено новий метод його розв'язання, який використовує апроксимацію регулярної частини ядра інтегралу згортки у вигляді суми декількох експонент. Показано, що при розрахунку непероточних порожнин пневмосистеми зміни температури стінок можна не враховувати. Аналогічний метод використаний для розрахунку нагріву ущільнювальних манжет пневмосистеми.

**Ключові слова:** пневмосистема запуску РРД; нестационарний теплообмін; коефіцієнти тепловіддачі газу; інтегро-дифференційне рівняння; експоненціальна апроксимація ядра.

УДК 539.3

**Про особливості термопружних деформацій граничних поверхонь порожнистого нескінченного циліндра при дії на нього циліндричних температурних полів спеціального виду / В. Й. Щеглов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 196 – 210. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.**

Встановлено ефект зменшення радіуса пружного порожнистого нескінченного циліндра  $B$ , що є тілом обертання з круговими циліндричними граничними поверхнями, при дії на нього циліндричного температурного поля, яке викликає рівномірне нагрівання нескінченного осесиметричного порожнистого циліндра  $\bar{B}_1$ , співвісного з циліндром  $B$ , що є правильною його частиною, при незмінності температури порожнистого циліндра  $B$  у всіх його точках, що не належать порожнистому циліндру  $\bar{B}_1$ , причому додатково повинні виконуватись наступні умови: достатнє наближення усіх точок зони нагріву порожнистого циліндра  $B$  до його внутрішньої граничної поверхні; достатність середнього значення коефіцієнта лінійного розширення матеріалу порожнистого циліндра  $B$  у границях змінювання його температури у зоні нагрівання; певний характер залежності від температури модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона матеріалу тіла  $B$ .

**Ключові слова:** термопружна деформація, гранична поверхня, порожнистий нескінченний циліндр, нагрівання, температурне поле, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного розширення.

## РЕФЕРАТЫ

УДК 51(092)

**Раритетные издания книг Леонарда Эйлера хранятся в библиотеке Харьковской политехники / Г. В. Павлова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 3 – 14. Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2222-0631.**

Статья посвящена описанию научной деятельности и печатных трудов выдающегося ученого в области естественных наук. Впервые описывается коллекция книг и научных статей Леонарда Эйлера, хранящаяся в фондах библиотеки Харьковского политехнического института, а также прослеживается история её создания.

**Ключевые слова:** история, математика, механика, гидродинамика, астрономия, философия, коллекции, раритеты, книжные памятники, научное наследие.

УДК 539.3

**Ключевые работы ученых НТУ «ХПИ» в области математического моделирования в технике / С. А. Назаренко, С. И. Марусенко // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технології. – Харків: НТУ «ХПИ», 2015. – №18 (1127). – С. 14 – 19. Бібліогр.: 2 назви. – ISSN 2222-0631.**

Статья посвящена рассмотрению эволюции в 19 – 21 столетиях основных научно – педагогических достижений ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в области математического моделирования: от паровых машин до космических аппаратов. Начало украинской науки в области математического моделирования в технике и технологиях связано с НТУ «ХПИ». Здесь работали или учились В. Л. Кирпичев, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Л. Д. Ландау, А. Н. Подгорный, Ю. М. Мацевитый и др. Ученые НТУ «ХПИ» создавали космическую и турбокомпрессорную технику, ЭВМ и термоядерные установки, и т.д. Показано, как математизация исследовательской деятельности привела к появлению новых методик анализа и синтеза в технике и технологиях.

**Ключевые слова:** механика, техника, технология, динамика, математическая модель.

УДК 539

**Численное моделирование удара пластин полусферическим индентором / Л. В. Автономова, С.В. Бондарь, А.В. Степук // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технології. – Харків: НТУ «ХПИ», 2015. – №18 (1127). – С. 19 – 24. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрены задачи численного моделирования деформирования круглой пластины и пакета, который состоит из двух внешних стальных пластин и средней титановой пластины. Пластины подвергаются ударному воздействию индентора с полусферической формой рабочей части. При решении нестационарной связанной термовязкопластической контактной задачи в трехмерной постановке учитываются: трение в контактных зонах и зависимость предела текучести материала от скоростей деформаций и температуры. Динамическая контактная задача численно реализована методом конечных элементов с помощью пакета ANSYS. Выполнено сравнение параметров напряженно-деформированного состояния пластины и пакета пластин для двух моделей определяющих соотношений: Купера-Симонда и нейронной сети. Показано, что различия в полученных величинах перемещений и деформаций не превышают 15%.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, контактная задача, пластина, удар, вязкопластическое деформирование, конечный элемент.

УДК 628.477: 519.876.5

**Математическое описание процесса охлаждения генераторного газа в установке утилизации отходов жизнедеятельности / В. В. Вамболь, В. Е. Костюк, Е. И. Кириладш // Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технології. – Харків: НТУ «ХПИ», 2015. – №18 (1127). – С. 24 – 35. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрена проблема накопления твердых бытовых и производственных отходов, обособлена ее актуальность. Существенным недостатком предложенного способа ее решения – утилизации отходов способом смешанной газификации – является вторичное образование в газообразных продуктах этого процесса высокотоксичных веществ. Для решения этой проблемы предложен способ резкого охлаждения генераторного газа путем впрыскивания в его поток жидкости центробежными диспергирующими форсунками. Выполнено математическое описание процесса охлаждения генераторного газа в установке утилизации отходов жизнедеятельности. На основе классической теории газодинамики получены математические соотношения для описания газовой и дисперсной фазы, а также межфазного взаимодействия в процессе охлаждения.

**Ключевые слова:** утилизация, отходы, экологическая безопасность, диоксины, математическое моделирование, двухфазная многокомпонентная среда.

УДК 389.14+658.16(075.8)

**Аппроксимация закона распределения экспериментальных данных с помощью бета-распределения. Часть 1 / С. А. Вамболь, И. В. Мищенко, А. Н. Кондратенко, А. А. Бурменко**

// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 36 – 44. Бібліогр.: 34 назви. – ISSN 2222-0631.

Исследованы особенности бета-распределения и обоснование его применения для аппроксимации закона распределения эмпирических данных в сравнении с другими видами законов распределения вообще и практическое использование такого распределения для случая геометрических характеристик тел качения подшипников. Проанализирована специализированная научно-техническая и справочная литература, методы математической статистики, теории вероятностей, численные. В данной части исследования применены типичные законы распределения к объекту исследования и показано, что использование для аппроксимации нормального и других типичных распределений не всегда приемлемо для нахождения истинного или близкого к нему закона. Впервые показаны преимущества применения бета-распределения для аппроксимации эмпирического закона распределения максимально широкой номенклатуры данных измерений на примере геометрических характеристик тел качения подшипников. Полученные методология и математический аппарат для применения бета-распределения пригодны для решения задач аппроксимации эмпирических данных любой природы.

**Ключевые слова:** погрешности измерения, эмпирическое распределение, нормальное распределение, бета-распределение, распределения Пирсона, аппроксимация.

УДК 519.67:621.762.4.04+621.762.53+537.52

**Физико-математическая модель прессования в процессах консолидации порошков методом спарк-плазменного спекания / Ю. Г. Гуцаленко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 44 – 53. Бібліогр.: 16 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассматривается проблема физико-математического прогнозирования рационального давления в процессах спарк-плазменного спекания порошковых композиций. Определены физические аспекты этой проблемы и представлен подход к расчету давлений в цикле прессования на стадии подготовки и экспериментальной разработки производства. Расчет основан на использовании закона Пашена применительно к рассматриваемой модели спарк-плазменной консолидации порошков под давлением. Предложена расчетная реляционная база данных по давлению в нанометрическом диапазоне средних размеров зерен исходных порошков в технологиях производства спарк-плазменного спеканием. Результаты расчетов сопоставлены с практическим опытом энергосберегающего скоростного спарк-плазменного спекания плотного керамического композита из нанопорошков  $Al_2O_3 - WC$  (50/50 мас. %). Предложены направления дальнейших исследований.

**Ключевые слова:** порошковая композиция, спарк-плазменное спекание, электрический разряд, закон Пашена, давление прессования, асимптотическая зависимость.

УДК 621.43.068.4

**Математическая модель гидравлического сопротивления фильтра твердых частиц дизеля. Часть 4: временной коэффициент / А. Н. Кондратенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 53 – 61. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

Описана математическая модель гидравлического сопротивления (ГС) фильтра твердых частиц (ФТЧ) дизеля в реальных условиях эксплуатации. Модель построена на основе расходной характеристики одного модуля ФТЧ, экспериментально полученной при постоянной температуре текучей среды, и данных стендовых испытаний автотракторного дизеля 2410,5/12, оснащенного полноразмерным ФТЧ. Модель позволяет учесть ряд факторов, характеризующих условия эксплуатации ФТЧ в составе выпускной системы этого дизеля путем введения соответствующих коэффициентов. В данной части работы описан физический смысл и оценены значения временного коэффициента модели, позволяющего учесть зависимость ГС ФТЧ от времени работы дизеля на стационарном режиме, то есть динамику засорения ФТЧ.

**Ключевые слова:** дизель, фильтр твердых частиц, гидравлическое сопротивление, математическая модель.

УДК 517.984.4

**Оператор двойного интегрирования и его свойства / А. В. Коробская // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 61 – 76. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Изучен оператор двойного интегрирования в пространстве  $L^2(D)$ , где  $D$  – прямоуголь-

ник. Осуществлено включение данного оператора в узел. Показано, что вычисление характеристической функции узла связано с решением краевой задачи Дарбу-Гурса с данными на характеристиках. Рассмотрено сужение данного оператора на подпространство функций  $f(x; y) \in L^2(D)$  вида  $f(x; y) = f(xy)$ . Оператор сужения включен в узел, вычислена характеристическая функция этого узла. Оказалось, что она является интегральным оператором, который действует в этом же пространстве функций ( $f(x; y) = f(xy)$ ).

**Ключевые слова:** оператор двойного интегрирования, узел, гильбертово пространство, ортопроектор, характеристическая функция.

УДК 621.43

**Особенности эмиссии оксидов азота при работе дизеля на биодизельном топливе и возможные методы ее снижения / А. М. Левтеров, Л. И. Левтерова, В. Д. Савицкий // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 76 – 86. Бібліогр.: 29 назв. – ISSN 2222-0631.**

Представлен анализ и попытка объяснения в научных публикациях особенностей образования оксидов азота при работе двигателя с воспламенением от сжатия на метиловых и этиловых эфирах жирных кислот (биодизельные топлива) и обозначены методы снижения содержания  $NO_x$  в отработавших газах. Исследование сгорания биодизельных топлив осложняется их многообразием, которое обусловлено изменяющимся составом сложных эфиров, а, главное, отсутствием данных о термодинамических и термохимических свойствах, во всяком случае, в открытой печати. В работе излагаются результаты численного и моторного экспериментов относительно влияния на величину эмиссии оксидов азота с отработавшими газами дизеля угла опережения подачи топлива и коэффициента избытка воздуха, при этом рассматривается как минеральное, так и одно из биодизельных топлив.

**Ключевые слова:** дизель, биотопливо, эмиссия монооксида азота, токсичность отработавших газов, моделирование, моторный эксперимент.

УДК 629.429.3:621.313

**Рациональные скоростные режимы движения пригородного электропоезда с асинхронными тяговыми двигателями / Б. Г. Любарский // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 86 – 92. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

На текущий момент при разработке и эксплуатации новых типов электропоездов возникает вопрос об определении их рациональных скоростных режимов движения. В работе рассматривается методика, позволяющая определить рациональную максимальную скорость движения электропоезда на основании комплексного критерия эффективности. Отмечается, что для рассматриваемого в работе пригородного электропоезда с тяговым электроприводом на основе асинхронного тягового двигателя увеличение максимальной скорости движения приводит не только к увеличению средней скорости движения электропоезда, но и к уменьшению расхода энергии на 3,75%, что обусловлено работой привода в режимах с большим значением КПД.

**Ключевые слова:** электропоезд, асинхронный тяговый электропривод, максимальная скорость движения, оптимальные режимы работы тягового привода, комплексный критерий эффективности.

УДК 519.254

**Ковариационный анализ при обработке трехмерных изображений / Р. П. Мигушенко, М. Н. Волобуев, Е. М. Реброва // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – №18 (1127). – С. 92 – 98. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрены вопросы автоматического формирования множеств статистик Фишера, которые однозначно характеризуют состояние объекта контроля, управления или идентификации, за счет использования методов статистического анализа. Формирование множества  $F$  – статистик осуществляется применением ковариационного анализа трехмерных изображений объекта, путем проведения ряда сечений вдоль осей аргументов. Результатом выполнения сечений является множество с координатами  $F_0, F_1, F_2, F_3$ . Проведенные исследования могут быть использованы для разработки алгоритмического и программного обеспечения средств обнаружения дефек-

тов сложного промышленного оборудования. Разработанное программное обеспечение может быть применено при имитационном моделировании.

**Ключевые слова:**  $F$  – статистика, ковариационный анализ, регрессии, двухмерная модель, трансформация, архив данных.

УДК 517.955.8

**Синхронизация колебаний двух связанных пластин Бергера с нелинейным внутренним и граничным демпфированием. Часть 1 / Е. А. Набока // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 98 – 108. Бібліогр.: 20 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассматривается модель Бергера нелинейных колебаний двух одинаковых упруго связанных пластин с частично заземленной и частично свободной границей. Предполагается, что нелинейные диссипационные силы действуют во внутренней части пластин и на свободной части их границ. Изучена зависимость структуры глобального аттрактора системы от параметра  $\gamma$ , пропорционального интенсивности взаимодействия пластин. Доказано, что верхний предел аттрактора при  $\gamma \rightarrow \infty$  принадлежит диагонали фазового пространства системы, что означает наличие эффекта синхронизации динамики пластин в пределе, когда интенсивность связи пластин системы и время стремятся к бесконечности.

**Ключевые слова:** модель Бергера, упруго связанные пластины, асимптотическая синхронизация, нелинейная диссипация, свободная граница.

УДК 519.64, 539.3

**Моделирование взаимодействия плоских гармонических волн с цилиндрическими включениями / А. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 108 – 115. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Рассмотрены плоские задачи дифракции гармонических волн на жестких и упругих включениях произвольного поперечного сечения. Строятся интегральные представления для амплитуд перемещений отраженного волнового поля и краевые задачи сведены к системе сингулярных интегральных уравнений, которые реализованы численно. Обосновываются дополнительные условия, необходимые для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численная реализация построенных алгоритмов проводится методом механических квадратур.

**Ключевые слова:** дифракция, жесткое или упругое включения, сингулярные интегральные уравнения, дополнительные условия, численная реализация.

УДК 629.423.3

**Моделирование работы электромеханического инерционного накопителя энергии в системе тягового привода при торможении электропоезда / Л. В. Оверьянова, О. В. Омеляненко, И. В. Новофастовский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 115 – 119. Бібліогр.: 3 назви. – ISSN 2222-0631.**

Исследуется работа тягового электропривода электропоезда с бортовым электромеханическим инерционным накопителем энергии. Для расширения диапазона рабочих напряжений тягового электродвигателя и системы электромеханического преобразования энергии накопителя предлагается применить реверсивный повышающе-понижающий DC-DC преобразователь. Приводится схема включения накопителя в тяговый электропривод с DC-DC преобразователем, а также математическая модель обмена энергией в исследуемой системе. Установлено, что предлагаемое схемотехническое решение позволяет повысить эффективность утилизации энергии торможения электроподвижного состава, которая может быть использована в процессе последующего разгона поезда.

**Ключевые слова:** тяговый электропривод, электромеханический инерционный накопитель энергии, DC-DC преобразователь, электродвижущая сила, энергия обмена.

УДК 629.7.05

**Эталонная модель вращения твердого тела на основе представления кватерниона ориентации в функциях углов Крылова, изменяющихся во времени / Ю. А. Плакий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 120 – 130. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предложена новая непрерывная модель вращения твердого тела, основанная на представ-

лении модельного кватерниона ориентации в функциях углов Крылова, параллельно изменяющихся во времени. Построены аналитические зависимости для квазикоординат на такте вычислений параметров ориентации и компонент кватерниона, соответствующих таким вращательным движениям. Для нескольких наборов параметров получены реализации модели. Результаты представлены в форме зависимостей квазикоординат от времени и траекторий в конфигурационном пространстве для параметров ориентации. Показано, что новая модель описывает вращение твердого тела, отличное от случая регулярной прецессии. Модель может быть использована в качестве эталонной для получения оценок погрешностей алгоритмов определения ориентации в бесплатформенных системах.

**Ключевые слова:** кватернион, ориентация, эталонная модель, квазикоординаты, траектория в конфигурационном пространстве.

УДК 621.224

**Влияние сложного окружного навала лопастей рабочего колеса осевой гидротурбины на структуру потока и энергетические характеристики проточной части / А. В. Русанов, О. Н. Хорев, А. В. Линник, П. И. Сухоребрий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 130 – 141. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.**

Представлены результаты численного исследования и анализ влияния сложного окружного навала лопасти рабочего колеса осевой гидротурбины ПЛ20 Кременчугской ГЭС на структуру потока и гидродинамические характеристики проточной части. Приведены структура потока и зависимости потерь энергии в рабочем колесе и значения КПД проточной части при оптимальном режиме работы от величины навала. Показано, что для исследуемой гидротурбины применение сложного окружного навала позволило повысить значения максимального КПД во всем диапазоне расходов при оптимальном угле установки лопастей рабочего колеса. Расчеты выполнены с использованием программного комплекса *IPMFlow*.

**Ключевые слова:** гидротурбина, проточная часть, пространственное профилирование, сложный окружной навал лопасти, рабочее колесо, гидродинамическое совершенствование.

УДК 621.923

**Обеспечение точности обработки на операциях шлифования / И. А. Рябенков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 142 – 147. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Проведен теоретический анализ технологических возможностей повышения точности и производительности обработки при использовании схемы шлифования с начальным натягом в технологической системе, то есть применяемой на практике схемы выхаживания. Для этого получено аналитическое решение задачи определения величины упругого перемещения при шлифовании с начальным заданным натягом в технологической системе. Показано, что с течением времени обработки величина упругого перемещения уменьшается по экспоненциальному закону, принимая значения, соответствующие условиям высокоточной обработки деталей машин. Определено время обработки, за которое достигается требуемая (заданная) точность обработки. Это позволяет научно обоснованным расчетным путем определить оптимальные параметры обработки, исходя из требований по точности обрабатываемой поверхности.

**Ключевые слова:** шлифование, сила резания, точность обработки, упругое перемещение, начальный натяг, технологическая система, производительность обработки, время обработки.

УДК 532.5, 614.844, 621.227

**Гидропушки для решения экологических проблем / А. Н. Семко, Ю. В. Шерстюк // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 147 – 159. Бібліогр.: 26 назв. – ISSN 2222-0631.**

Описаны основные направления применения импульсных высокоскоростных струй жидкости в технологических процессах, их преимущества и недостатки, дальнейшие перспективы развития. Приведены схемы устройств, применяемых для получения ультраструй. Описано отличие в физике процессов, происходящих при втекании воды в сопло и истечении из него в гидропушке и импульсном водомете. Даны уравнения для расчета внутренней баллистики, а также конечно-разностная аппроксимация уравнений движения по методу Родинона, адаптированному для расчета гидроимпульсных установок, который удовлетворяет требованиям монотонности, однородности, консервативности и имеет второй порядок аппроксимации по времени и координате.

**Ключевые слова:** импульсные струи жидкости, высокоскоростные струи, импульсный водомет, гидропушка.

УДК 621.833

**Определение напряжений в гибком колесе волновой зубчатой передачи / В. Н. Ткаченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 159 – 163. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.**

Для проверки гибкого колеса волновой зубчатой передачи на изгибную прочность и выносливость предложена методика определения напряжений от изгиба колеса генератором волны упругой деформации с применением теории упругих тонких оболочек. Вычисленные напряжения корректируются с учётом переменной изгибной жесткости в области зубчатого венца и наличия эффекта концентрации напряжений во впадинах между зубьями. Предлагается определить напряжения в двух опасных сечениях – во впадинах между зубьями венца и в области перехода от зубчатого венца к гибкому колесу. При этом для второго сечения расчёт напряжений проводится с учётом передаваемого вращающего момента. Из приведенного примера расчётов видна целесообразность предлагаемого подхода к оценке прочности и выносливости гибкого колеса волновой зубчатой передачи.

**Ключевые слова:** волновая передача, напряжения, гибкое колесо, теория оболочек.

УДК 621.646.45: 621.05: 621.454.2

**Термодинамический расчёт пневмосистемы запуска ракетного двигателя / С. А. Шевченко, А. Л. Григорьев, М. С. Степанов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 163 – 195. Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2222-0631.**

Выполнен анализ процессов нестационарного теплообмена газа со стенками полостей пневмосистемы запуска ракетного двигателя многократного включения. Получены формулы для расчёта коэффициентов теплоотдачи от газа к стенке с учётом формы полости. Для определения температуры внутренней поверхности стенки выведено интегро-дифференциальное уравнение и разработан новый метод его решения, использующий аппроксимацию регулярной части ядра сверточного интеграла в виде суммы нескольких экспонент. Показано, что при расчёте непроточных полостей пневмосистемы изменение температуры стенок можно не учитывать. Аналогичный метод использован для расчёта нагрева уплотнительных манжет пневмосистемы.

**Ключевые слова:** пневмосистема запуска ЖРД; нестационарный теплообмен; коэффициенты теплоотдачи газа; интегро-дифференциальное уравнение; экспоненциальная аппроксимация ядра.

УДК 539.3

**Об особенностях термоупругих деформаций граничных поверхностей полого бесконечного цилиндра при воздействии на него цилиндрических температурных полей специального вида / В. И. Щеглов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2015. – №18 (1127). – С. 196 – 210. Бібліогр.: 4 назви. – ISSN 2222-0631.**

Установлен эффект уменьшения внутреннего радиуса упругого полого бесконечного цилиндра  $B$ , являющегося телом вращения с круговыми цилиндрическими граничными поверхностями, при воздействии на него цилиндрического температурного поля, вызывающего равномерный нагрев бесконечного осесимметричного полого цилиндра  $\bar{B}_1$ , соосного с цилиндром  $B$ , являющегося правильной его частью, при неизменности температуры полого цилиндра  $B$  во всех его точках, не принадлежащих поперечному сечению цилиндра  $\bar{B}_1$ , причем дополнительно должны выполняться следующие условия: достаточная близость всех точек зоны нагрева полого цилиндра  $B$  к его внутренней граничной поверхности; положительность среднего значения коэффициента линейного расширения материала полого цилиндра  $B$  в пределах изменения его температуры в зоне нагрева; определенный характер зависимости от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала тела  $B$ .

**Ключевые слова:** термоупругая деформация, граничная поверхность, полый бесконечный цилиндр, нагрев, температурное поле, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения.

## ABSTRACTS

UDC 51(092)

**Rare editions of Leonard Euler books stored in the library of Kharkov Polytechnic Institute / G. V. Pavlova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in**

engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 3 – 14. Bibliog.: 17 titles. – ISSN 2222-0631.

In the article the research activity and publications of the outstanding scientist Leonhard Euler are described. For the first time the collection of books and scientific publications by Leonard Euler stored in the library funds of the Kharkov Polytechnic Institute is presented and the history of its creation is traced.

**Key words:** history, mathematics, mechanics, hydrodynamics, astronomy, philosophy, collection, rarities, book memorial, scientific heritage.

UDC 539.3

**Main achievements of scientists of NTU «KHPI» in the field of mathematical modeling in engineering / S. A. Nazarenko, S. I. Marusenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 14 – 19. Bibliog.: 2 titles. – ISSN 2222-0631.

The paper is concerned with the dynamic process of establishment and development of the research and pedagogic activity of the scientists and graduates of the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (NTU «KhPI») in the field of mathematical modeling in engineering and technologies in the 19 – 21 centuries. The beginning of the Ukrainian technical science in the field of mathematical modeling in engineering and technologies is associated with the NTU «KhPI». The range of scientific designs created in the NTU «KhPI» varies from specific space products to a number of “common” products for the needs of machinery, power production, etc. The fundamental scientific trends of evolution of mathematical modeling in engineering and technological processes were discovered and explored here. The most important phases of formation and development of the research and design school of the NTU «KhPI» are shown. The world-famous scientists who worked at the NTU «KhPI» or graduated it are mentioned.

**Key words:** mechanics, mathematical model, engineering, technology, dynamics, design.

UDC 539

**Numerical modeling of a plate impacted by a hemispherical indenter / L.V. Avtonomona, S.V. Bondar, A.V. Stepuk** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 19 – 24. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

The problems of numerical modeling of deformations of a circular plate and a package, which consists of two external steel plates and medium titanium one, are considered in three-dimensional setting. The plates are impacted by an indenter with hemispherically shaped working part. The transient coupled thermo- visco- plastic problem is solved in three-dimensional setting, taking into account the friction in the contact areas and the material yield strength, which depends on the strain rates and the temperature. The dynamic contact problems are numerically implemented by the finite element method using the ANSYS software package. The parameters of stress-strain states of the plate and the package are compared for two models of the defining relations: the Cooper-Simond and neural network models. It is demonstrated that the deviations of the obtained values of displacements and deformations intensities do not exceed 15%.

**Key words:** mathematical modeling, contact problem, impact, finite element, plate, thermo- viscoplastic deformation.

UDC 628.477: 519.876.5

**A mathematical description of the process of cooling of generating gas in the installation for utilization of biowaste products / V. V. Vambol', V. E. Kostjuk, E. I. Kirilash** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 24 – 35. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

In the paper we consider a problem of accumulation of solid domestic and industrial wastes and ground its relevance. The method of solving the problem consists in utilizing the waste by means of mixed gasification. A significant drawback of the method is the secondary formation of highly toxic substances in the gaseous product of this process. To solve this problem a method of quenching the generating gas by injecting liquid by centrifugal dispersing nozzles into its flow is proposed. The article contains the mathematical description of the process of cooling of generating gas in the installation for utilization of biowaste products. On the basis of the classical theory of gas dynamics the mathematical relationships describing gas and dispersed phase and interphase interaction in the process of cooling are obtained.

**Key words:** utilization, biowaste products, ecological safety, dioxins, mathematical modeling, dispersion multiphase structure.

UDC 389.14+658.16(075.8)

**Approximation of experimental data distribution law using beta distribution. Part 1 / S. O.Vambol', I. V. Mischenko, A. N. Kondratenko, O. A. Burmenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 36 – 44. Bibliog.: 34 titles. – ISSN 2222-0631.

The features of the beta distribution are investigated and the foundation for its application for approximation of the law of distribution of empirical data in comparison with other types of distribution laws in general is given. A practical application of such a distribution in the case of geometric characteristics of rolling bodies of bearings is studied. Specialized scientific technical and reference literature, the methods of mathematical statistics, probability theory, and numerical methods are analyzed. In this part of the study we apply typical distribution laws to the object of research and show that using the normal and other typical distributions for approximation is not always acceptable for finding the true distribution law or close one. For the first time the advantages of using the beta distribution for approximating the empirical distribution law of a wide range of possible measurement data on the example of geometric characteristics of rolling bodies of bearings are studied. The obtained methodology and mathematical apparatus for the application of the beta distribution can be used for solving the problems of approximation of the empirical data of any kind.

**Key words:** errors of measuring, empirical distribution, normal distribution, beta distribution, Pearson distributions, approximation.

UDC 519.67:621.762.4.04+621.762.53+537.52

**Physical and mathematical model of compression in the process of consolidation of powders by spark-plasma sintering / Yu. G. Gutsalenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 44 – 53. Bibliog.: 16 titles. – ISSN 2222-0631.

The problem of physical and mathematical prediction of rational pressure during spark-plasma sintering of powder compositions is considered. The physical aspects of the problem are defined, and an approach to the calculation of the pressure in the compression cycle at the stage of pre-production and experimental development is presented. The calculation is based on Paschen's law applied to the considered model of spark plasma consolidation of powders under pressure. A calculation relational pressure database in the nanometer range of average grain sizes of the initial powders in production technologies by spark-plasma sintering is proposed. The calculation results are compared to the practical experience of energy-saving high-speed spark-plasma sintering of a dense ceramic composite of nanopowders  $Al_2O_3$ -WC (50/50 wt.%). The directions for further research are suggested.

**Key words:** powder composition, spark-plasma sintering, electrical discharge, Paschen's law, compaction pressure, asymptotic dependence.

UDC 621.43.068.4

**A mathematical model of the hydraulic resistance of the diesel particulate matter filter. Part 4: time coefficient / A. N. Kondratenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 53 – 61. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

The article deals with a mathematical model, which describes the hydraulic resistance of a DPF under the real operating conditions. The model is based on the flow characteristics of a single module of the filter element of DPF, obtained experimentally at a constant temperature of fluid, and the data of bench tests of an 2Ch10.5/12 tractor diesel, equipped with a full-sized DPF. The model allows to take into account a number of factors that characterize the operating conditions of a DPF in the exhaust system of this diesel. The factors are taken into account by introducing corresponding coefficients. The dependence of these coefficients on the operating and design parameters of the 2Ch10.5/12 diesel is experimentally obtained and described by the method of linear regression. In this part of the research we describe the physical meaning and evaluate the time coefficient of this mathematical model, which allows to take into account the dependence of the HR of DPF on the time of operation of the diesel in the stationary mode, that is the DPF clogging dynamics.

**Key words:** diesel, particulate matter filter, hydraulic resistance, mathematical model.

UDC 517.984.4

**Double integration operator and its properties / G. V. Korobska** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 61 – 76. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

The article is devoted to the study of double integration operator in the space  $L^2(D)$  where  $D$  is

a rectangle. The inclusion of this operator in the node is accomplished. It is shown that the calculation of the node characteristic function is associated with the solution of a Darboux-Goursat problem with data on characteristics. The restriction of the operator on the subspace of functions  $f(x; y) \in L^2(D)$  of the form  $f(x; y) = f(xy)$  is considered. The restriction operator is included in the node; characteristic function of the given node is calculated. It appears to be an integral operator which acts in the same space of functions ( $f(x; y) = f(xy)$ ).

**Key words:** double integration operator, node, Hilbert space, orthoprojector, characteristic function.

UDC 621.43

**Features of emissions of nitrogen oxides of a diesel operating on biodiesel fuel and possible methods to reduce them / A. M. Levterov, L. I. Levterova, V. D. Savitsky // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 76 – 86. Bibliog.: 29 titles. – ISSN 2222-0631.**

In the article an analysis of the features of formation of nitrogen oxides during operation of an engine with ignition from compression on methyl and ethyl esters of fatty acids (biodiesel) and attempts to explanation them in scientific publications are presented. The methods for decreasing the  $NO_x$  content in the engine exhaust gases are also indicated. The research of biodiesel combustion is complicated by the variety of the fuels which is caused by the changing composition of the esters, and the absence of data on thermodynamical and thermochemical properties in the publicly available literature. In the article the results of numerical and motor experiments concerning the influence of the advance angle of the fuel supply and the coefficient of the air excess on the magnitude of the emission of the nitrogen oxides in the exhaust gases of the diesel for biodiesel and diesel fuels are proposed.

**Key words:** diesel, biofuels, emissions of nitrogen monoxide, exhaust emissions, modeling, motor experiment.

UDC 629.429.3:621.313

**Rational speeds of movement of suburban electric trains with asynchronous traction motors / B. H. Lubarsky // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 86 – 92. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.**

Nowadays the developing and operating of new types of electric trains lead to the problem of determining their rational speeds. We consider a methodology of determining the most rational speed for electric trains based on complex criteria. It is noted that for a suburban electric train with the traction electric drive based on an induction traction motor considered in the paper increasing the maximum speed results not only in increasing the average speed of the train, but also in reducing the energy consumption by 3.75%, which is due to the drive operating in the modes with a high efficiency value.

**Key words:** train, asynchronous electric traction, maximum speed, optimal modes of traction drive, integrated performance criterion.

UDC 519.254

**Covariant analysis in the processing of three-dimensional images / R. P. Mygushchenko, M. M. Volobuev, O. M. Rebrova // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 92 – 98. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.**

The questions of automatic formation of Fisher statistics sets that uniquely characterize the state of the control or identification object by using methods of statistical analysis are considered. The effectiveness of the statistical approach to the analysis of the three-dimensional model of the information signal conversion is proved. This analysis allows to reduce the dimension of images, thus highlighting four informative criterion  $F$  – statistics dispersion relations that have significant functional differences by type of object state control or management. The set of  $F$ -statistics is formed by the covariance analysis of the three-dimensional image of the object using a series of sections along the argument axes. The result of the process is a set with coordinates  $F_0, F_1, F_2, F_3$ . The obtained  $F$ -statistics being random variables with known distribution law, to assess the likelihood of error diagnosis on the basis of standard parametric models discriminant analysis. It is shown that the analysis of the covariance transformation plan allows to measure the localized spectral-time non-stationary signals. The research can be used to develop algorithmic and software defect detection complex industrial equipment. The developed software can be used for simulation.

**Key words:**  $F$  – statistics, analysis of covariance, regression, a two-dimensional model, transformation, data archive.

UDC 517.955.8

**On synchronization of oscillations of two coupled Berger plates with nonlinear interior and boundary damping. Part 1 / O. A. Naboka** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 98 – 108. Bibliog.: 20 titles. – ISSN 2222-0631.

A system of Berger PDE's describing nonlinear oscillations of two identical elastically coupled plates with partially clamped and partially free boundary and nonlinear dissipation acting inside plate domain as well as on the free part of the boundary is considered. We are interested in the dependence of the structure of the system global attractor on the value of the parameter  $\gamma$  describing the intensity of plate coupling. We prove that the upper limit of the attractor for  $\gamma \rightarrow \infty$  belongs to the diagonal of the system phase space, which means that the coupled plates tend to synchronize (i.e. oscillate identically) as time and the coupling intensity tend to the infinity.

**Key words:** coupled Berger plates, asymptotic synchronization, nonlinear dissipation, free boundary.

UDC 519.64, 539.3

**Modelling the interaction of plane harmonic waves with cylindrical inclusions / O. M. Nazarenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 108 – 115. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.

A plane problem of diffraction of harmonic waves on hard and elastic inclusions of arbitrary cross-section is considered. The integral representations for the displacement amplitudes of the reflected wave field are constructed. The boundary problems are reduced to a system of singular integral equations that are numerically implemented. The additional conditions required for the unique solvability of the singular integral equations of the first kind are explained. The numerical implementation of these algorithms is carried out by mechanical quadrature method.

**Key words:** diffraction, rigid or elastic inclusion, singular integral equations, additional terms, numerical implementation.

UDC 629.423.3

**Simulation of operation of an inertial electromechanical energy storage in the system of a traction drive during train braking / L. V. Overyanova, O. V. Omelyanenko, I. V. Novofastovskiy** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 115 – 119. Bibliog.: 3 titles. – ISSN 2222-0631.

Operation of an electric traction drive with an onboard inertial electromechanical energy storage is investigated. Applying a reversible increasing/decreasing DC-DC converter is proposed to extend the range of operating voltages of the traction motor and the electromechanical energy conversion system of the storage. The scheme of inclusion of the storage in the traction electric drive with a DC-DC converter and a mathematical model of the energy exchange are provided. The schematic solution proposed allows to improve the efficiency of utilization of the braking energy of the electric rolling stock, which can be used during the subsequent acceleration of the train.

**Key words:** electric traction, electromechanical inertial energy storage, DC-DC converter, electromotive force, energy exchange.

UDC 629.7.05

**Reference model of rotation of a solid body on the basis of representation of the quaternion of orientation as the functions of Krylov's angles changing in time / Yu. A. Plakhsy** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 120 – 130. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

A new continuous rigid body rotation model based on the representation of the quaternion of orientation of the model as functions of Krylov's angles simultaneously changing in time is proposed. The analytical dependences for the quasicordinates on a step of calculations of the parameters of orientation and the components of the quaternion corresponding to such rotations are constructed. The realizations of the model for several sets of parameters are obtained. The results are presented in the form of dependences of the quasicordinates on time and the trajectories in the configuration space for orientation parameters. It is shown that the new model describes the rotation of a rigid body other than the case

of regular precession. The model can be used as a reference model for estimating the errors of orientation algorithms in strapdown inertial navigation systems.

**Key words:** quaternion, orientation, reference model, quasicordinates, trajectories in configuration space.

UDC 621.224

**The influence of the complex circular offset of the runner blades in Kaplan turbine PL20 upon the flow pattern and the hydrodynamic characteristics of the flow part / A. V. Rusanov, O. N. Khoryev, A. V. Lynnyk, P. N. Sukhorebryi // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 130 – 141. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.**

The results of numerical investigation and the analysis of influence of the complex circular offset of the runner blades in Kaplan turbine PL20 Kremenchugskaya HPP upon the flow pattern and the hydrodynamic characteristics of the flow part are set out in the article. The flow pattern is given. The dependences of the energy losses in the runner and the values of efficiency in the flow part at optimum operating conditions on the offset value are described. The application of the complex circular offset for investigated hydroturbine is shown to have allowed increasing the value of maximum efficiency throughout the range of discharge at optimum installation angle of the runner blades. The investigations were carried out using the software system *IPMFlow*.

**Key words:** hydro turbine, flow part, spatial profiling, circular offset, runner, hydrodynamic improvement.

UDC 621.923

**Ensuring the processing accuracy of grinding operations / I. A. Riabekov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 142 – 147. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.**

The paper presents a theoretical analysis of the technological capabilities for improving the accuracy and efficiency of processing by grinding circuit with initial interference in the process system, i.e. the schemes used in the nursing practice. For this purpose an analytical solution of the problem of determining the magnitude of the elastic displacement when grinding with an initial predetermined interference in the process system is obtained. It is shown that the value of the elastic displacement decreases exponentially in time, taking the values corresponding to the conditions of high-precision machining. The time of processing required to achieve the desired (target) accuracy is determined. This allows to determine scientifically by calculation the optimum processing parameters based on the requirements on the accuracy of the machined surface.

**Key words:** grinding, cutting force, machining precision, elastic movement, the initial tightness, technological system, the performance of processing, the processing time.

UDC 532.5, 614.844, 621.227

**Water jet cannon for solving environmental problems / A. N. Semko, Yu. V. Sherstiuk // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 147 – 159. Bibliog.: 26 titles. – ISSN 2222-0631.**

The article describes the main areas of application of impulse fluid jets of high speed in technological processes, their advantages and disadvantages and further prospects of development. The schemes of water jet devices are given. The difference in the physics of the processes occurring during the ingress and expiration of water from the nozzle of a water jet cannon and a water pulse jet are described. The equations to calculate the internal ballistics and the finite-difference approximation of the equations of motion by the Rodionova method, adapted to calculate the hydro pulse units, which satisfies the requirements of monotony, uniformity, conservatism, and has a second-order approximation in time and coordinate, are given.

**Key words:** impulse water jet, high-speed jet, water pulse jet, water jet cannon.

UDC 621.833

**Determining stresses in the flexible wheel of a wave gear / V. N. Tkachenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 159 – 163. Bibliog.: 4 titles. – ISSN 2222-0631.**

To check the flexural strength and endurance of the flexible wheel of a wave gear a method of determining stresses by bending the wheel by a generator of elastic deformations using the theory of thin elastic shells is proposed. The calculated stresses are adjusted taking into account the variable flex-

ural stiffness in the ring gear, and the effect of stress concentration in the valleys between the teeth. It is proposed to determine the stresses in the two dangerous sections - in the valleys between the teeth of the crown and in the area of transition from the ring gear to the flexible wheel. For the second section the calculation of stresses is carried out taking into account the transmission of torque. The example of calculations given in the paper confirms the feasibility of the approach proposed for evaluating the strength and endurance of the flexible wheel of a wave gear.

**Key words:** wave gearing, stress, flexible wheel, shell theory.

UDC 621.646.45: 621.05: 621.454.2

**Thermodynamic calculation of rocket engine pneumatic starting system / S. A. Shevchenko, A. L. Grigoriev, M. S. Stepanov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 163 – 195. Bibliog.: 14 titles. – ISSN 2222-0631.

The analysis of processes of unsteady-state heat exchange between a gas and multiple ignition rocket engine's pneumatic starting system's wall cavities has been done. The formulas for calculating the coefficients of heat exchange from a gas to a wall have been obtained considering the shape of a cavity. The integro-differential equation for determining a temperature of the inner surface of a wall has been obtained. The new method for its solution has been developed. It uses approximation of a convolution integral's regular part kernel as a sum of several exponents. It has been shown that a wall temperature changing while calculating non flowing cavities of a pneumatic system can be ignored. A similar method for calculation heating of sealing cups for a pneumatic system has been used.

**Key words:** LRE pneumatic starting system; unsteady-state heat exchange; gas heat-transfer coefficients; integro-differential equation; exponential approximation of kernel.

UDC 539.3

**On the features of termoelastic deformations of boundary surfaces of a hollow endless cylinder affected by cylindrical temperature fields of a special kind / V. I. Shcheglov** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2015. – №18 (1127). – pp. 196 – 210. Bibliog.: 4 titles. – ISSN 2222-0631.

The effect of diminishing the internal radius is discovered for an elastic hollow endless cylinder  $B$ , which is a body of revolution with circular cylindrical boundary surfaces, at affecting it by a cylindrical temperature field, inducing the even heating of an endless axisymmetrical hollow cylinder  $\bar{B}_1$ , having a general axis with the cylinder  $B$ , being its correct part, while the temperature of the hollow cylinder  $B$  at the points, not belonging to the hollow cylinder  $\bar{B}_1$ , remains constant. Besides the following conditions must hold: sufficient closeness of all points of the zone of heating of the hollow cylinder  $B$  to its internal boundary surface; positiveness of the mean value of the coefficient of linear expansion of the material of the hollow cylinder  $B$  on the range of the temperature changes in the zone of heating; certain character of dependence on the temperature of the Yung's modulus and the Poisson ration of the material of the body  $B$ .

**Key words:** termoelastic deformation, boundary surface, hollow endless cylinder, heating, temperature field, Yung's modulus, Poisson ration, coefficient of linear expansion.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХПІ»**

**Збірник наукових праць**

Серія:  
Математичне моделювання  
в техніці та технологіях

№ 18 (1127)

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,  
Технічний редактор С. Д. Нижник  
Редактор англійських текстів канд. фіз.-мат. наук О. О. Набока

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».  
Кафедра вищої математики.  
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;  
e-mail: [kpi\\_mmtt@mail.ru](mailto:kpi_mmtt@mail.ru)  
Сайт: [web.kpi.kharkov.ua/mmtt](http://web.kpi.kharkov.ua/mmtt)

Обл.-вид. № 26 – 15.

Підп. до друку 08.07.2015 р. Формат 60×84 1/16. Папір офісний.  
Друк цифровий. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 10,0. Облік.-вид. арк. 10,0.  
Тираж 300 пр.(1-й завод 1 – 100) Зам. № ZF 1900. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта  
видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вил Фрунзе, 21

---

Цифрова друкарня ТОВ «Цифрова друкарня №1»  
Ідент. код юридичної особи: 37190180 від 27.07.2010.  
61001, Харків, пл. Повстання, 7/8, тел. (057) 754-49-40, (057) 754-49-42.