

ISSN 2222-0631



**ВІСНИК**

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХПІ»**

**6'2014**

**Харків**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
Національний технічний університет  
«Харківський політехнічний інститут»

# ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХПІ»

*Серія: Математичне моделювання  
в техніці та технологіях*

№ 6 (1049) 2014

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків  
НТУ «ХПІ», 2014

**Вісник Національного технічного університету «ХПІ».** Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (1049). – 235 с.

**Державне видання**

**Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України  
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року**

Збірник виходить українською та російською мовами.

*Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).*

**Координаційна рада:**

Л. Л. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф. (**голова**);  
К. О. ГОРБУНОВ, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);  
А. П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Є. І. СОКОЛ, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;  
Є. С. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук, проф.; А. В. БОЙКО, д-р техн. наук, проф.;  
Ф. Ф. ГЛАДКИЙ, д-р техн. наук, проф.; М. Д. ГОДЛЕВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.;  
А. І. ГРАБИЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Г. ДАНЬКО, д-р техн. наук, проф.;  
В. Д. ДМИТРИЄНКО, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. ДОМНІН, д-р техн. наук, проф.;  
В. В. СЛІФАНОВ, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. ЗАЙЦЕВ, канд. техн. наук, проф.;  
П. О. КАЧАНОВ, д-р техн. наук, проф.; В. Б. КЛЕПІКОВ, д-р техн. наук, проф.;  
С. І. КОНДРАШОВ, д-р техн. наук, проф.; В. М. КОШЕЛЬНИК, д-р техн. наук, проф.;  
В. І. КРАВЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; Г. В. ЛІСАЧУК, д-р техн. наук, проф.;  
О. К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф.; В. І. НІКОЛАЄНКО, канд. іст. наук, проф.;  
П. Г. ПЕРЕРВА, д-р екон. наук, проф.; В. А. ПУЛЯЄВ, д-р техн. наук, проф.;  
М. І. РИШЧЕНКО, д-р техн. наук, проф.; В. Б. САМОРОДОВ, д-р техн. наук, проф.;  
Г. М. СУЧКОВ, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. ТИМОФІЄВ, д-р техн. наук, проф.;  
М. А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф.

**Редакційна колегія серії:**

**Відповідальний редактор:** В. А. Ванін, д-р техн. наук, проф.

**Заст. відповідального редактора:** Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

**Члени редколегії:** Ю. В. ГАНДЕЛЬ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. ГЕВОРКЯН, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. ГРИГОР'ЄВ, д-р техн. наук, проф.; В. К. ДУБОВИЙ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф.; О. С. КУЦЕНКО, д-р техн. наук, проф.; О. М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. ЛЮБЧИК, д-р техн. наук, проф.; О. Г. НІКОЛАЄВ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. НОВОЖИЛОВА, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Г. РУТКАС, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. СЕВЕРИН, д-р техн. наук, проф.; О. М. ШЕЛКОВИЙ, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. ЯНЮТІН, д-р техн. наук, проф.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 3 від 14 березня 2014 р.

*Л.В. АВТОНОМОВА*, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
*С.В. БОНДАРЬ*, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
*А.В. СТЕПУК*, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **ДЕФОРМИРОВАНИЕ П-ОБРАЗНОЙ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ ПРИ УДАРЕ ШАРОМ**

Проведен анализ напряженно-деформированного состояния П-образной тонкостенной защитной конструкции, подкрепленной ребрами жесткости, при центральном ударе падающего на нее жесткого шара. Рассмотрено влияние размещения подкрепляющих ребер на локализацию зон пластического деформирования конструкции. Конечно-элементный расчет выполнен на пакете AVTO DYN.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, удар, пластические деформации, конечный элемент, П-образная тонкостенная конструкция, ребра жесткости.

**Описание проблемы.** Конструкции защитных силовых корпусов устройств и приборов, которые могут выдержать интенсивное динамическое воздействие, должны обладать при оптимальном общем весе высокой прочностью. Как правило, такие корпуса представляют собой тонкостенные трехмерные объекты сложной конфигурации, состоящие из тонких пластин и оболочек, которые плохо сопротивляются ударному воздействию, поскольку даже при незначительных нагрузках от удара происходит переход их в пластическое состояние. Подкрепляя такие тонкостенные системы ребрами жесткости (стержнями), которые распределяют и воспринимают динамические сосредоточенные усилия, можно существенно повысить жесткость и прочность всей конструкции. Для выбора оптимальных параметров подкрепляющих элементов и их рационального размещения необходимо проводить предварительный прочностной анализ каждого защитного силового корпуса с учетом сложности реальных физических процессов при ударном взаимодействии. Исследованию влияния подкрепляющих ребер на прочность и жесткость тонкостенных элементов посвящено много публикаций [1 – 6], в которых, в том числе, различными методами численно-аналитически исследовано поведение ребер жесткости, рассмотрено взаимодействие простых по форме одномерных и двумерных объектов [1, 3]. Использование современных вычислительных комплексов позволяет численно решать динамические задачи удара, которые сопровождаются высокими скоростями деформаций для любой конфигурации взаимодействующих трехмерных объектов.

В работе [8] было исследовано поведение П-образной тонкостенной конструкция при ударе падающим жестким шаром для разных типов стали и



различной локализацией удара на горизонтальной пластине. Вследствие перехода кинетической энергии падающего абсолютно жесткого шара в пластические деформации П-образной тонкостенной конструкции, распространения и отражения упругих волн, происходит существенное искажение формы конструкции. Математическая модель, которая корректно описывает распространение необратимых пластических деформаций, включает соотношения, которые учитывают существенную нелинейную связь напряжений и больших деформаций. Для снижения уровней пластических напряжений предложено подкрепление П-образной тонкостенной конструкции стержневыми ребрами жесткости из того же материала.

**Цель исследования.** Численное моделирование методом конечного элемента напряженно-деформированного состояния П-образной тонкостенной конструкции, которая подкреплена ребрами жесткости, при центральном ударе шаром.

**Численное моделирование.** При решении задачи моделирования процесса ударного высокоскоростного деформирования можно воспользоваться системой уравнений, приведенной в работах [7, 8], которая включает: закон сохранения импульса, закон сохранения энергии (энергетический баланс), нелинейные физические соотношения в виде нелинейной зависимости напряжений от деформации и скорости деформаций, условия сцепления и скольжения / трения в контактных зонах. В процессе ударного взаимодействия возникают большие деформации, связанные с интенсивным пластическим течением материала. Так уравнения равновесия для объема  $V$  можно представить в следующем виде [9]:

$$\nabla \cdot (s^T + s \cdot \nabla v) = 0, \quad \dot{t} = n \cdot (s^T + s \cdot \nabla v), \quad (1)$$

где  $s$ ,  $s^T$  – компоненты тензора напряжений и скоростей напряжений. Предполагается, что в каждый конечный момент времени  $t$  известно напряженно-деформированное состояние. Компоненты тензора напряжений Коши в момент времени  $t$  обозначим  $s_{ij}$ ; компоненты тензора скорости деформаций вычисляются так:

$$D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \quad v_{i,j} = \partial v_i / \partial^t x_j. \quad (2)$$

Компоненты тензора линеаризованной деформации находим по формулам:

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad e_{ij} \approx d_{i,j} \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Физические соотношения в скоростной форме:

$$s_{ij}^T = C_{ijkl} D_{kl}, \quad (4)$$

где  $s_{ij}^T$  – компоненты тензора скоростей напряжений по Трусделлу;  $C_{ijkl}$  – компоненты упругопластического тензора связи напряжений и деформаций

4-го порядка. Пластическое деформирование материала подчиняется ассоциированному закону теории течения в скоростной форме:

$$D_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial s_{ij}}, \quad (5)$$

где  $D_{ij}^p$  – пластическая составляющая тензора скоростей деформаций;  $\dot{\lambda}$  – параметр пластичности;  $\Phi$  – пластический потенциал.

На рис. 1 представлена рассматриваемая конструкция, состоящая из тонких пластин и ребер (стержней). При решении динамической контактной задачи удара шара о горизонтальную поверхность П-образной тонкостенной конструкции, подкрепленной ребрами жесткости, предполагается равенство прогибов ребра и тонкостенной пластины, а динамические нормальные контактные напряжения  $s_i(x, t)$  между ребром и тонкостенной пластиной распределены вдоль ребра противоположно направлению динамической нагрузки  $q_i(x, t)$ . Система уравнений движения пластины с ребрами под действием произвольной динамической нагрузки на ребра имеет вид [3]:

$$D \nabla^4 w + \rho h \partial^2 w / \partial t^2 = \sum_{i=1}^k s_i(x, t) \delta(y - y_i), \quad (6)$$

$$E_{pk} I_k \partial^4 w_{pk} / \partial x^4 = -s_k(x, t) + q_k(x, t) - \rho_{pk} F_k \partial^2 w_{pk} / \partial t^2, \quad (7)$$

$$w_{pk}(x, t) = w(x, y_k, t). \quad (8)$$

где  $D$  – изгибная жесткость;  $\rho$  – плотность;  $h$  – толщина;  $E$  – модуль упругости;  $I$  – момент инерции ребра;  $F$  – площадь поперечного сечения ребра;  $w$  – прогиб; величины, относящиеся к ребру, имеют индекс  $p$ , индекс  $k$  означает порядковый номер ребра,

$$w(x, y, t) = \int_0^t \int_0^a \int_0^b G(x, y, t; x', y', t') \times \sum_{j=1}^k s_j(x', t') \delta(y' - y_j) dx' dy' dt', \quad (9)$$

$$w_{pi}(x, t) = \int_0^t \int_0^a G_{pi}(x, t; x', t') \{q_i(x', t') - s_i(x', t')\} dx' dt'. \quad (10)$$

$G(x, y, t; x', y', t')$  и  $G_{pi}(x, t; x', t')$  – динамические функции пластины и ребра.

При численной реализации данной динамической контактной задачи для объектов более сложной конфигурации, чем отдельная пластина с ребром, на современных численных комплексах эффективно рассматривать постановку задачи с последующим решением вариационного уравнения равновесия *методом конечных элементов*. Для системы пластина-ребро согласно *принципу возможных перемещений*

$$\delta V_n + \delta V_p - \delta W = 0, \quad (11)$$

где  $\delta V_n$ ,  $\delta V_p$  – вариация потенциальной энергии деформации пластины и деформации тонкого ребра соответственно;  $\delta W$  – работа динамической нагрузки на ее возможных перемещениях. Разрешающая система уравнений МКЭ в матричном виде такова:

$$K \dot{U} = R, \quad (12)$$

где  $K$  – матрица жесткости;  $\dot{U}$  – вектор узловых скоростей и перемещений;  $R$  – вектор внешних усилий.

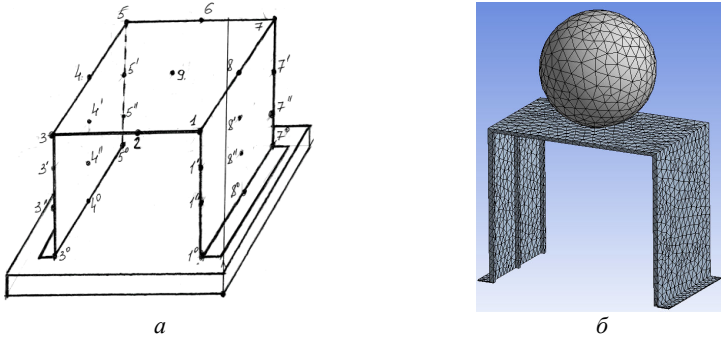


Рис. 1 – П-образная тонкостенная конструкция:  
 а – расчётная схема; б – конечно-элементная модель.

**Результаты моделирования.** В работе представлены результаты расчета напряженно-деформированного состояния П-образной тонкостенной (толщина стенки 1 мм) конструкции (габаритные размеры  $120 \times 150 \times 200$  мм), подкрепленной по контуру тонкими ребрами (стержнями) прямоугольного сечения для стали Ст65Г при центральном ударе абсолютно жестким шаром (диаметр 125 мм, масса 7100 г), который падает с высоты 5800 мм на горизонтальную ее часть [8], выполненные на программном комплексе AVTO-DYN. На рис. 1, б приведена конечно-элементная модель системы, включающая в себя 3006 узлов и 9256 элементов.

На рис. 2 представлено распределение эквивалентных напряжений в П-подобной тонкостенной конструкции из стали Ст65Г при центральном ударе по ней жестким шаром, подкрепленной ребрами по контуру конструкции, которые проходят: а – через центры пластин параллельно большей стороне (через центр контактной зоны шара с горизонтальной пластиной); б – по двум краям вдоль больших сторон по контуру конструкции; с – через центры горизонтальной и вертикальных пластин и по двум краям вдоль больших сторон по контуру конструкции. При анализе уровней эквивалентных напряжений

по Мизесу, которые возникают при ударе жестким шаром, для различного размещения подкрепляющих ребер (стержней) можно отметить, что в случае *a* – наблюдается область распространения пластического деформирования с

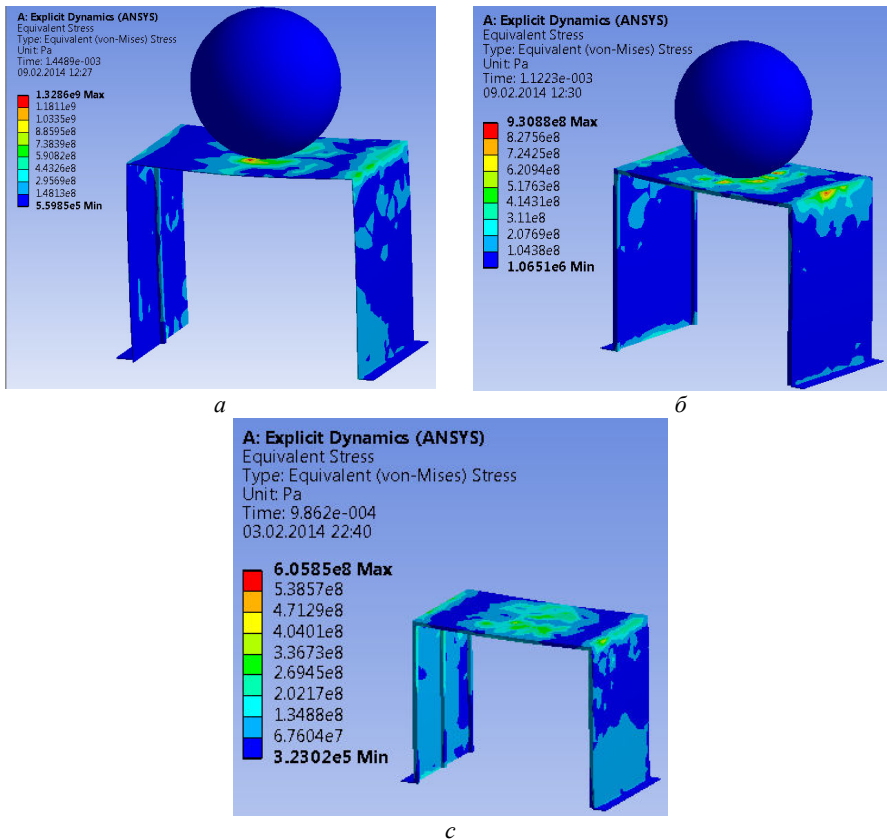


Рис.2 – Распределение эквивалентных напряжений (позиции указаны в тексте).

максимальными значениями уровней эквивалентных напряжений на верхней горизонтальной пластине П-образной тонкостенной конструкции в зоне контакта с жестким шаром; в случае *б* – имеет место снижение уровня эквивалентных напряжений, однако происходит распространение области пластического деформирования и на боковые (вертикальные) пластины П-подобной конструкции; в случае *с* – П-подобная тонкостенная конструкция обладает большей жесткостью и практически деформируется упруго.

**Выводы.** Расчет напряженно-деформированного состояния показывает существенное влияние количества и расположения подкрепляющих ребер на

жесткость и прочность П-образной тонкостенной конструкции.

При проектировании конструкций силовых корпусов необходимо решать задачу подбора оптимальных параметров подкрепляющих ребер и их рационального размещения с целью достижения ее наименьшего веса при сохранении прочностных и жесткостных характеристик.

**Список литературы:** 1. Артюхин Ю. П., Карасев С. Н., Митина С. В. Контактная задача о взаимодействии ребра с прямоугольной пластинкой и цилиндрической оболочкой. – Веб. Поволжского научно-технического совещания «Нелинейные задачи теории пластин и оболочек». Саратов, 1975. 2. Маневич Л. И., Павленко А. В. Динамическая контактная задача для стрингера, подкрепляющего невесомую полубесконечную пластинку. – В межвузовском научном сборнике «Гидроаэромеханика и теория упругости». Вып. 16, 1973. 3. Дмитриева Л. М. Пластинки и оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, под действием локальных динамических нагрузок *Исслед. по теор. пластин и оболочек*, 12 (1976), 172 – 187 4. Goldsmith: The theory and physical behaviour of colliding solids, Dover Publications 2001, London. 5. Hoppmann W. H. II Effects of Impact on Structures / Harris C.M. & Piersol A.G. – Harris' Shock And Vibration Handbook / 5th Ed / McGraw Hill 2002. 6. Fransplass H., Langseth M., Hopperstad O. S. Numerical study of the tensile behaviour of threaded steel fasteners at elevated rates of strain / International Journal of Impact Engineering, Volume 54, April 2013, Pages 19 – 30 7. Савин Г. Н., Флейшман М. И. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости Наукова думка, Киев, – 1964. – 384с. 8. Степук О.В., Автономова Л. В., Бондар С.В. Особливості деформування П-подібної тонкостінної конструкції при ударі // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 37(1010). – С. 193 – 199. 9. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел / Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

*Поступила в редколлегию 15.02.2014*

---

УДК 539.1

**Деформирование П-образной тонкостенной конструкции с ребрами жёсткости при ударе шаром / Л. В. Автономова, С. В. Бондарь, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 3 – 8. Бібліогр.: 9 назв. – ISSN 2222-0631.**

Проведено аналіз напружено-деформованого стану П-подібної тонкостінної захисної конструкції, яка підкріплена ребрами жорсткості, при центральному ударі падаючої на неї жорсткої кулі. Розглянуто вплив розміщення підкріплюючих ребер на локалізацію зон пластичної деформації конструкції. Скінчено-елементний розрахунок виконано на пакеті AVTO DYN.

**Ключові слова:** математичне моделювання, удар, пластичні деформації, скінчений елемент, П-подібна тонкостінна конструкція, ребра жорсткості.

UDC 539.1

**Deformation of a П-shaped thin-walled rib supported structure under the ball impact / L. V. Avtonomova, S. V. Bondar, A. V. Stepuk // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 3 – 8. Bibliog.: 9 titles. – ISSN 2222-0631.**

The stress-strain analysis of a П-shaped thin-walled protective structure, supported by ribs, under the central impact of an incident hard ball is carried out. The effect of placing the reinforcing ribs on the localization of structure plastic deformation zones is investigated. Finite-element calculations are performed using the software package AUTO DYN.

**Key words:** mathematical modeling, impact, plastic deformation, finite element, П-shaped thin-walled structures, ribs.

*П.М. АНДРЕНКО*, д-р. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;  
*М.С. СВИНАРЕНКО*, канд. техн. наук, доц., ХНУБА, Харків;  
*А.Х. РЕМЕТОВА*, магістрант, НТУ «ХПІ»

## **ПАРАМЕТРИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ГІДРАВЛІЧНОГО ГАСИТЕЛЯ ПУЛЬСАЦІЙ ТИСКУ З АВТОМАТИЧНИМ ПІДСТРОЮВАННЯМ ПАРАМЕТРІВ**

Запропоновано узагальнену математичну модель гасителя пульсацій тиску з автоматичним підстроюванням параметрів у безрозмірних конструктивних параметрах. Встановлено вплив безрозмірних конструктивних параметрів гасителя та частоти пульсацій тиску в гідроагрегаті на його коефіцієнт гасіння. Запропоновано використовувати для багатокритеріальної оптимізації конструктивних параметрів гасителя узагальнений критерій гашення пульсацій тиску, а для встановлення його технічного рівня – масогабаритний критерій.

**Ключові слова:** математична модель, гаситель пульсацій, коефіцієнт гасіння, втрати тиску, безрозмірні параметри, критерії ефективності.

**Вступ і постановка проблеми.** Гідравлічні гасителі пульсацій тиску (ГПТ) використовуються в об'ємних гідроагрегатах (ГА) для зменшення шуму та вібрації, значення яких регламентовано ДСТУ. Застосування ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів дозволяє підстроюватися до зміни тиску та витрати у ГА, викликаних спрацюванням виконавчих механізмів, що робить їх застосування більш ефективним. Стосовно таких ГПТ постають проблеми визначення раціональних конструктивних параметрів, які забезпечать їх ефективне функціонування при незначних втратах тиску в ньому та малих масогабаритних показниках, а також по встановленню впливу конструктивних параметрів ГПТ на його коефіцієнт гасіння.

Методика розрахунку та проектування ГПТ наведена в роботі [1]. В ній зроблено класифікацію ГПТ, розглянуто велику кількість їх конструктивних та схемних рішень, в тому числі і з автоматичним підстроюванням параметрів, описані фізичні моделі їх робочих процесів. Однак наведена методика проектування ГПТ базується на емпіричних залежностях, одержання яких пов'язане з проведенням коштовних експериментів. Методика для визначення раціональних конструктивних параметрів ГПТ трудомістка, а її використання потребує великої кількості розрахунків. Крім цього, наведені математичні моделі робочого процесу ГПТ не повністю враховують характеристики робочої рідини (РР), робочі параметри ГА і втрати тиску в гасителі.

У статті [2] наведені конструктивні схеми та конструкції ГПТ, приклади їх використання в ГА машин. Визначені діапазони частот в яких відбувається ефективне гасіння пульсацій тиску. Однак встановлені діапазони гасіння частот правомірні лише для гасителів з визначеними конструктивними розміра-

ми; крім того, не встановлено впливу конструктивних параметрів ГПТ на його коефіцієнт гасіння і не розглядається ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів. Експериментальним дослідженням ГПТ присвячені статі [3, 4]. Але в них не розглядається ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів. В статті [5] наведена методика і результати експериментальних досліджень ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів. В ній проаналізовано вплив деяких конструктивних параметрів ГПТ на його коефіцієнт гасіння, однак не визначені раціональні конструктивні параметри гасителя.

В статті [6] наведена математична модель робочого процесу ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів у складі ГА. Однак в ній не дано рекомендацій щодо вибору раціональних конструктивних параметрів ГПТ, не встановлено втрати тиску в них.

Визначенню раціональних конструктивних параметрів ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів шляхом багатокритеріальної оптимізації параметрів на базі удосконаленої математичної моделі робочого процесу присвячена стаття [7]. В математичній моделі враховували характеристики РР, а саме температуру, газоміст, тиск в ГА. Оптимізація конструктивних параметрів в ній проводилась за критеріями *коефіцієнта гасіння пульсацій тиску*, середнім значенням циклічної міцності пружного елемента та величини оберненої масі гасителя, які максимізували. Втрати тиску в гасителі розглядалися як функціональні обмеження. За результатами оптимізації встановлені раціональні конструктивні параметри ГПТ. Однак отримані результати не прив'язані до основного конструктивного параметра гідравлічних апаратів і пристроїв – діаметра умовного проходу, а критерії, за якими відбувалася оптимізація, не в повній мірі дозволяють проводити порівняння ГПТ різних типів.

Порівняння ефективності гасителів, в тому числі і різних типів, в [8] пропонується за узагальненим критерієм гасіння пульсацій тиску, який крім ступеня гасіння амплітуди вхідних пульсацій тиску РР враховує гідравлічні втрати тиску в ньому, та масогабаритним критерієм. Однак в [8] відсутнє приведення конструктивних параметрів ГПТ до діаметра умовного проходу та порівняння гасителів різних типів за цими критеріями. Таким чином, визначення безрозмірних, по відношенню до діаметра умовного проходу, раціональних конструктивних параметрів ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів та їх порівняння за запропонованими критеріями є актуальним науково-технічним завданням, рішення якого й присвячена дана стаття. В такій постановці дана задача не розглядалась.

**Математична модель ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів.** Такий ГПТ є найбільш перспективними для гасіння пульсацій тиску у широкому діапазоні частот, рис. 1, [9]. В ньому автоматичне підстроювання до зміни тиску у ГА забезпечується за рахунок з'єднання в одному корпусі фільтра низьких частот (проточні порожнини із внутрішніми патрубками 11) і паралельного резонансного контуру (проточні порожнини із центральною

трубою, в якій установлені пружні елементи зі змінною жорсткістю 7).

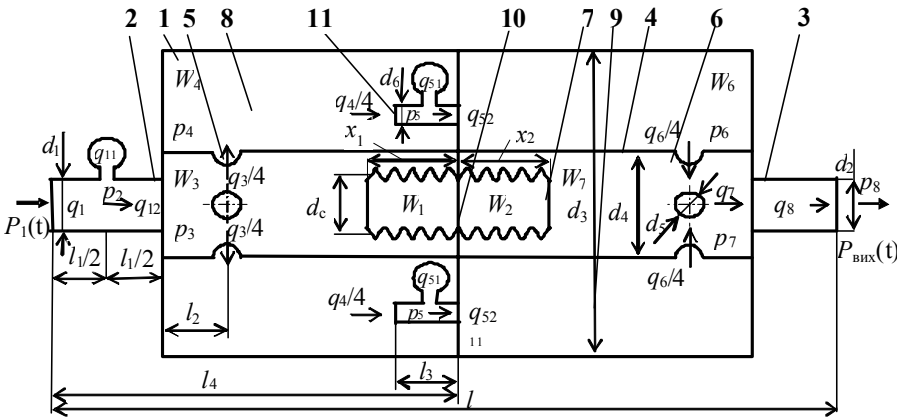


Рис. 1 – Розрахункова схема ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів:

1 – корпус; 2 і 3 – відповідно, вхідний і вихідний патрубки; 4 – центральна труба; 5 і 6 – отвори; 7 – пружні блоки зі змінною жорсткістю (сильфони); 8 і 9 – проточні порожнини; 10 – перегородка; 11 – короткі внутрішні патрубки.

В основі математичної моделі робочого процесу такого ГПТ у відносних геометричних параметрах (по відношенню до діаметра умовного проходу), лежить зосередження параметрів за Т- і Г-подібними схемами, та врахування газовмісту РР, її температури, змінність в часі густини, коефіцієнтів витрат, відносного індуктивного і активного опорів каналів. Вона складається з рівнянь:

– руху РР в каналі 1 (5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d q_{1(5)}(t)}{d t} &= \frac{1}{\bar{L}_{1(5)}(t)} \left[ p_{1(4)}(t) - p_{2(5)}(t) \right] - \frac{\bar{R}_{1(5)}(t)}{\bar{L}_{1(5)}(t)} q_{1(5)}(t), \\ \frac{d p_{2(5)}(t)}{d t} &= \frac{1}{\bar{C}_{1(5)}} q_{11(51)}(t) = \frac{1}{\bar{C}_{1(5)}} \left[ q_{1(5)}(t) - q_{12(52)}(t) \right], \\ \frac{d q_{12(52)}(t)}{d t} &= \frac{1}{\bar{L}_{1(5)}(t)} \left[ p_{2(5)}(t) - p_{3(6)}(t) \right] - \frac{\bar{R}_{1(5)}(t)}{\bar{L}_{1(5)}(t)} q_{12(52)}(t) \end{aligned} \right\}; \quad (1)$$

– зміни тиску в камерах зі змінним об'ємом 3 (7)

$$\frac{d p_{3(7)}(t)}{d t} = \left[ q_{12(6)}(t) - q_{3(7)}(t) \right] \frac{E}{\bar{W}(t)_{3(7)}}, \quad (2)$$

де  $\bar{W}(t)_{3(7)}$  – відносний об'єм камери;



– зміни відносного об'єму камери 3 (7)

$$\bar{W}(t)_{3(7)} = \pi \bar{d}_4^2 (\bar{l}_4 - \bar{l}_1) / 4 - \bar{W}(t)_{1(2)}, \quad (3)$$

де  $\bar{W}(t)_{1(2)}$  – змінний, під дією пульсуючого тиску, відносний об'єм камери сільфона, який розраховують за залежністю:

$$\bar{W}(t)_{1(2)} = \pi \bar{d}_C^2 [\bar{l}_C - \bar{l}_{p3(7)}(t)] / 4,$$

$$\bar{l}_{p3(7)}(t) = \begin{cases} \pi \bar{d}_C^2 p_{3(7)}(t) / 4c_{C\Sigma}, & \text{при } \pi \bar{d}_C^2 p_{3(7)}(t) / 4c_{C\Sigma} < \bar{l}_{\max}; \\ \bar{l}_{\max}, & \text{при } \pi \bar{d}_C^2 p_{3(7)}(t) / 4c_{C\Sigma} \geq \bar{l}_{\max}, \end{cases}$$

– витрати через отвори

$$1/4 q_{3(6)}(t) = \mu(\text{Re}) \bar{A}_0 \sqrt{2[p_{3(6)}(t) - p_{4(7)}(t)] / \rho_{3(6)}(t)}; \quad (4)$$

– зміни тиску в камері 4 (6)

$$\frac{dp_{4(6)}(t)}{dt} = [q_{3(6)}(t) - q_{4(6)}(t)] \frac{E}{\bar{W}_{4(6)}}, \quad (5)$$

де  $\bar{W}_{4(6)}$  – відносний об'єм камери,

$$\bar{W}_4 = \pi (\bar{d}_3^2 - \bar{d}_4^2) (\bar{l}_4 - \bar{l}_1) / 4 - \pi \bar{d}_6^2 \bar{l}_3; \quad \bar{W}_6 = \pi (\bar{d}_3^2 - \bar{d}_4^2) (\bar{l}_4 - \bar{l}_1) / 4;$$

– нерозривності

$$q_5(t) = q_4(t) / 4; \quad (6)$$

– витрати через отвори у внутрішніх камерах

$$q_6(t) / 4 = \mu(\text{Re}) \bar{A}_0 \sqrt{2[p_6(t) - p_7(t)] / \rho_6(t)}; \quad (7)$$

– руху РР у вихідному каналі 8

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq_7(t)}{dt} &= \frac{1}{\bar{L}_8(t)} [p_7(t) - p_8(t)] - \frac{\bar{R}_8(t)}{\bar{L}_8(t)} q_7(t), \\ \frac{dp_8(t)}{dt} &= \frac{1}{\bar{C}_8} q_{81}(t) = \frac{1}{\bar{C}_8} [q_7(t) - q_8(t)]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Рівняння (1) – (8) доповнюють наступними обмеженнями:

$$p_i(t) \geq p_{\text{пар}}, \quad \bar{l}_{\max} \leq n_C (\bar{l}_C - 2\bar{\delta}_C),$$

де  $p_{\text{пар}}$  – тиск насичених парів РР;  $\bar{d}_C$  – відносний діаметр сільфона;  $\bar{l}_C$  – відносна довжина сільфона;  $\bar{l}_{p3}(t)$ ,  $\bar{l}_{p7}(t)$  і  $\bar{l}_{\max}$  – відповідно відносні переміщення сільфона під дією тиску  $p_3$ , тиску  $p_7$  і максимальне;  $c_{C\Sigma}$  – коефіцієнт жорсткості сільфона по тиску;  $\bar{l}_C$  – відносний крок гофри сільфона;  $\bar{\delta}_C$  і  $n_C$  – відповідно відносна товщина стінки і кількість робочих гофрів сільфона.

Зауважимо, що при використанні в якості пружних елементів сільфонів, які працюють разом із гвинтовою циліндричною пружиною, або двох сільфонів коефіцієнт  $c_{C\Sigma}$  визначається як їх сумарна жорсткість.

У рівняннях (1) – (8) величини

$$\bar{L}_8(t) = \rho_8(t) \bar{l}_8 / \bar{A}_8 \quad \text{і} \quad \bar{L}_{1(5)}(t) = \rho_{1(5)}(t) \bar{l}_{1(5)} / 2\bar{A}_{1(5)}$$

– відіграють роль відносного індуктивного опору 8-го і 1 (5)-го каналів; величини

$$\bar{R}_8(t) = 8\nu_1 \rho_8(t) \bar{l}_8 / \bar{A}_8 \bar{r}_8^2 \quad \text{і} \quad \bar{R}_{1(5)}(t) = 8\nu_1 \rho_{1(5)}(t) \bar{l}_{1(5)} / 2\bar{A}_{1(5)} \bar{r}_{1(5)}^2$$

– роль відносного активного опору 8-го і 1 (5)-го каналів; величини  $\bar{C}_i = \bar{A}_i \bar{l}_i / E$  – роль відносної ємності  $i$ -го каналу, де  $\bar{l}_i = l_i / d_y$ . Крім того, позначено:  $\bar{r}_i$  – відносний радіус перетину  $i$ -го каналу,  $\bar{r}_i = r_i / d_y$ ;  $\bar{d}_C$  – відносний середній діаметр сільфона;  $\mu(\text{Re})$  і  $\bar{A}_0$  – відповідно коефіцієнт витрати і відносна площа отвору;  $\nu_1$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості РР;  $\bar{A}_i$  і  $\bar{r}_0$  – відповідно відносні площа і радіус каналу (трубопроводу),  $\bar{A}_i = \pi \bar{r}_i^2$ ;  $E$  – приведений модуль пружності РР, який розраховували з урахуванням вмісту повітря та товщини стінки трубопроводу (каналу).

**Критерії ефективності ГПТ.** Для оцінки ефективності гасителів пульсацій тиску використовували наступні критерії [8]:

- узагальнений критерій гашення пульсацій тиску, який крім ступеня гашення амплітуди вхідних пульсацій тиску РР враховує гідравлічні втрати тиску в ньому,

$$K_o = k_r (1 - \Delta p_{\text{сеп}} / p_{\text{вх сеп}}), \quad (9)$$

де  $k_r = a_{p \text{ вх}} / a_{p \text{ вих}}$ ;  $a_{p \text{ вх}}$ ,  $a_{p \text{ вих}}$  – відповідно амплітуда пульсацій тиску на вході і виході гасителя;  $\Delta p_{\text{сеп}}$  і  $p_{\text{вх сеп}}$  – відповідно середнє за період коливання РР втрати тиску в ГПТ і тиск на його вході;

- масогабаритний критерій

$$K_{mV} = (m_{\text{тр}} V_{\text{тр}}) / (m_r V_r), \quad (10)$$

де  $m_{\text{тр}}$  і  $m_r$  – відповідно маса трубопроводу одиничної довжини з діаметром умовного проходу гасителя і маса ГПТ;  $V_{\text{тр}}$  і  $V_r$  – відповідно об'єм трубопроводу одиничної довжини з діаметром умовного проходу гасителя і об'єм ГПТ.

При розрахунку втрат тиску в ГПТ приймали, що вони виконані з металевих труб круглого перетину однакової товщини. Втрати тиску в трубопроводі круглого перетину у статичному режимі при нехтуванні початковою ді-

лянкою розраховували за відомою залежністю:

$$\Delta p_T = p_1 - p_2 = \zeta_H v_0^2 \rho_{C0} / 2, \quad (11)$$

де  $p_1$  і  $p_2$  – відповідно тиск на вході і виході трубопроводу;  $v_0$  і  $\rho_{C0}$  – відповідно швидкість РР в трубопроводі і її густина в сталому режимі;  $\zeta_H$  – нестационарний коефіцієнт опору трубопроводу, який знаходиться за залежністю [10]:

$$\zeta_H = \zeta_{\text{ккк}} + 2 l_1 \sqrt{\omega / v_{1C0}} / \text{Re}_0, \quad (12)$$

$\text{Re}_0$  – число Рейнольдса, що розраховується за швидкістю сталого потоку, на який накладаються коливання;  $\omega$  – частота коливань (пульсацій тиску РР);  $v_{1C0}$  – кінематична в'язкість РР у сталому режимі;  $\zeta_{\text{ккк}}$  – квазістационарний коефіцієнт опору трубопроводу,

$$\zeta_{\text{ккк}} = \lambda l_1 / d_1, \quad (13)$$

$\lambda$  – квазістационарний коефіцієнт гідравлічного опору тертя, який залежить від числа Рейнольдса та визначається за залежностями з роботи [11].

Зауважимо, що площу прохідних перерізів трубопроводів та каналів вибирають згідно з рекомендаціями, наведеними у науково-технічній літературі залежно від допустимої швидкості рідини в них. Коефіцієнт місцевого опору  $\zeta_{\text{пз}}$  обумовлений поступовим звуженням потоку [11],

$$\zeta_{\text{пз}} = 0,5 k_{\text{пз}} (1 - d_2^2 / d_1^2), \quad (14)$$

$d_1$  і  $d_2$  – відповідно діаметри вхідного і вихідного трубопроводів;  $k_{\text{пз}}$  – коефіцієнт зм'якшення, враховуючий поступове звуження потоку рідини з кутом конусності сопла  $\alpha_c$ , який за даними роботи [11] для  $20^\circ \leq \alpha_c \leq 60^\circ$ , приблизно дорівнює 0,2, а в разі раптового звуження потоку дорівнює одиниці.

Коефіцієнт місцевого опору  $\zeta_{\text{рр}}$  обумовлений раптовим розширенням потоку [12]:

$$\zeta_{\text{рр}} = (1 - d_1^2 / d_2^2)^2. \quad (15)$$

Втрати тиску в отворі розраховували за тією ж залежністю, як для статичного режиму:

$$\Delta p_{\text{отв}} = \varphi_{\text{отв}} \varepsilon_{\text{отв}} v_{\text{отв}}^2 \rho_{C0} / 2, \quad (16)$$

де  $\varphi_{\text{отв}}$  і  $\varepsilon_{\text{отв}}$  – відповідно коефіцієнт швидкості і стиснення струменя, які визначаються з роботи [13];  $v_{\text{отв}}$  – швидкість РР в отворі.

Зауважимо, що діаметр отвору  $d_{\text{отв}}$  повинен бути не менше за 0,5 мм. Втрати тиску в камері розраховували за формулами, як для статичного режиму:

$$\Delta p_w = 0,5 \rho_{C0} \left( \zeta_{pp} v_1^2 + \zeta_{ps} v_2^2 \right), \quad (17)$$

де  $\zeta_{pp}$  і  $\zeta_{ps}$  – відповідно коефіцієнти місцевого опору, що обумовлені раптовим розширенням і звуженням потоку, які розраховуються за формулами, аналогічними (15) і (14) при  $k_{пз} = 1$ ;  $v_1$  і  $v_2$  – відповідно швидкості РР у вхідному і вихідному каналах.

Зазначимо, що тут і далі використовували значення квазістаціонарних коефіцієнтів місцевих опорів; як відмічено в роботі [13], вони забезпечують достатню для практичних розрахунків точність.

Розрахунок сумарного коефіцієнта опору в ГПТ при послідовному з'єднанні проводили за залежністю:

$$\zeta_{\Sigma} = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \dots + \zeta_i, \quad (18)$$

а при паралельному виконували так:

$$1/\zeta_{\Sigma} = 1/\zeta_1 + 1/\zeta_2 + 1/\zeta_3 + \dots + 1/\zeta_i. \quad (19)$$

**Розрахункові дослідження.** Їх проводили, розглядаючи ГПТ у складі об'ємного ГА. Вважали, що тиск зливу в ГА дорівнює атмосферному. Параметри РР: густина  $\rho_{C0} = 885 \text{ кг/м}^3$ ; кінематична в'язкість  $\nu_l = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ; температура  $50^\circ \text{C}$ , модуль об'ємної пружності  $E = 1,35 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ .

За базові параметри ГПТ, рис. 1, приймали:

$$d_1 = d_2 = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}; d_3 = 0,1 \text{ м}; d_4 = 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; d_5 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}; d_6 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ d_7 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}; d_c = 6 \cdot 10^{-2} \text{ м}; l = 27,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; l_1 = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}; l_2 = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ l_3 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}; l_4 = 0,1 \text{ м}; l_{c1} = l_{c2} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

максимальне переміщення сильфонів становило  $l_{c \max} = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ; діаметр отвору 5 дорівнював  $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ; стаціонарні коефіцієнти витрат отворів та дроселя  $\mu_c = 0,7$ . Коефіцієнт жорсткості сильфонів, які розташовані у вхідній та вихідній камерах гасителя, відповідно становить  $27 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$  і  $22 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ .

За математичними моделями робочого процесу ГПТ та допомогою пакета прикладних програм визначали коефіцієнт гасіння. Задавалися початковими і граничними умовами: опір ГА задавали за допомогою дроселя, встановленого на виході гасителя (діаметр дроселя становив  $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ), знаходили  $p_1(0) = p_1(T)$ ,  $p_1(0, t) = p_1(t)$ , де  $T$  – період повторення циклу коливань. Пульсації витрати з виходу об'ємного насоса, які моделювали напівсинусоїдами, що є найбільш наближеними до реальних пульсацій, становила 5 % від її усталеного значення, а частота  $f = 250 \text{ Гц}$ .

За результатами математичного моделювання робочих процесів у ГПТ з осцилограм пульсацій тиску знаходили амплітуди їх пульсацій і визначали коефіцієнт гасіння залежно від відносних його конструктивних параметрів, рис. 2, та аналізували їх вплив на коефіцієнт гасіння.

Проведені дослідження дозволили встановити, що при збільшенні відносного діаметра вхідного патрубку ГПТ (діаметра умовного проходу) коефіцієнт гасіння зменшується (рис. 2, *а*). При збільшенні відносної довжини вхідного патрубку ГПТ в ньому спостерігаються втрати тиску, обумовлені втратами на тертя (рис. 2, *б*). Значною мірою коефіцієнт гасіння залежить від відносних діаметрів отворів 5 і 7 (рис. 1), виконаних в центральній трубі 4 (рис. 2, *в*, *г*), де внаслідок дроселювання РР відбуваються значні втрати тиску. Зі збільшенням половини відносної довжини камери гасителя  $\bar{l}_4$  коефіцієнт гасіння незначно зростає (рис. 2, *д*).

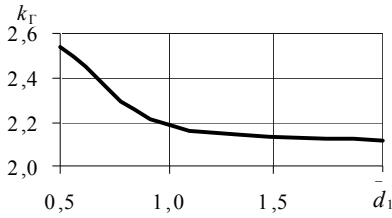
З рис. 2 видно, що залежність коефіцієнта гасіння від відносного внутрішнього діаметра корпусу  $\bar{d}_3$  має виразний мінімум. Це характеризує вплив на коефіцієнт гасіння властивостей камер гасителя, а саме в правій частині кривої більше проявляються акумулюючі (демпфуючі) властивості камери, а в лівій – пружні. Відносний діаметр короткого звуженого патрубку  $\bar{d}_6$  та його відносна довжина  $\bar{l}_3$ , в розглянутому діапазоні їх зміни, на коефіцієнт гасіння практично не впливають (рис. 2, *ж*, *з*). Таким чином, найбільший вплив на коефіцієнт гасіння ГПТ мають наступні його безрозмірні конструктивні параметри: діаметри отворів 5 і 7 (рис. 1), виконаних в центральній трубі 4, та внутрішній діаметр корпусу гасителя –  $d_3$ .

Зазначимо, що для ГПТ, що розглядається, конструктивні параметри сильфонів вибиралися нами за розробленою методикою з умови забезпечення максимального значення коефіцієнта гасіння, у залежності від робочих параметрів ГА. Тому їх вплив на коефіцієнт гасіння досліджуваного ГПТ незначний.

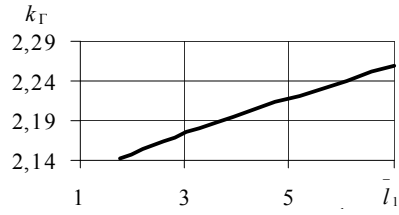
Установлено, що частота пульсацій тиску на виході з об'ємного насоса суттєво впливає на коефіцієнт, що досягається у гасителі, її збільшення призводить до збільшення цього коефіцієнта. Зміна температури РР у робочому діапазоні на коефіцієнт гасіння ГПТ практично не впливає. Зауважимо, що при роботі ГА температурний режим РР вибирають таким чином, щоб він був постійним. Зміна температурного режиму РР у ГА відбувається тільки на початкових стадіях його роботи і в даній роботі не розглядалась.

При розрахунку узагальненого критерію гашення пульсацій тиску за формулою (9) та масогабаритного за формулою (10) приймали, що середнє значення тиску на виході з об'ємного насоса становить 16 МПа, а середня витрата в ГА залежно від діаметра умовного проходу ГПТ визначається з табл. 1. Зазначимо, що коефіцієнт гасіння для заданої частоти пульсацій тиску та відносних розмірів ГПТ становив 1,8. Результати розрахунків наведено

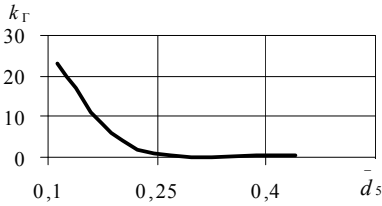
в табл. 2.



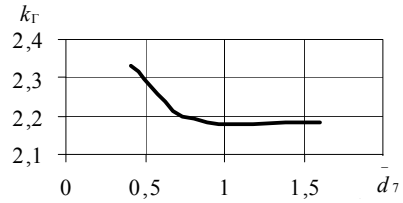
*a*



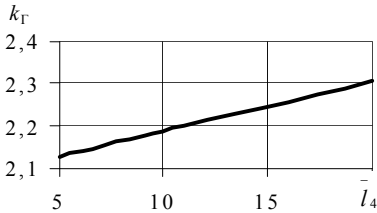
*б*



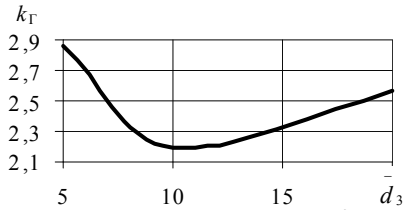
*в*



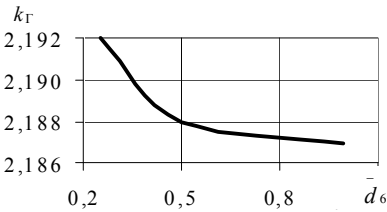
*г*



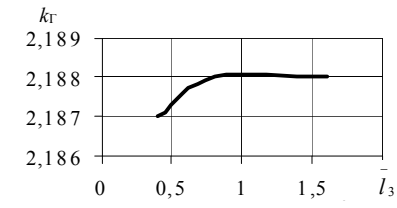
*д*



*е*



*ж*



*з*

Рис. 2 – Залежність коефіцієнта гасіння ГПТ від відносних конструктивних параметрів: *a* – діаметра вхідного патрубка  $\bar{d}_1$ ; *б* – довжини вхідного патрубка  $\bar{l}_1$ ; *в* – діаметра отвору 5; *г* – діаметра отвору 7  $\bar{d}_5$ ; *д* – половини довжини проточних камер гасителя  $\bar{l}_4$ ; *е* – внутрішнього діаметра корпусу  $\bar{d}_3$ ; *ж* – діаметра короткого внутрішнього патрубку  $\bar{d}_6$ ; *з* – довжини короткого внутрішнього патрубку  $\bar{l}_3$ .

Таблиця 1 – Витрата у ГА залежно від діаметра умовного проходу ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів

$d_y^*$ , мм	6 (0,6)	10 (1,0)	16 (1,6)	20 (2,0)	32 (3,2)
$q_{\text{ср}}$ , л/хв	12,5	32,0	100,0	160,0	250,0

\*В дужках наведені відносні діаметри умовного проходу ГПТ.

Таблиця 2 – Значення узагальненого критерію гашення пульсацій тиску та масогабаритного критерію залежно від діаметра умовного проходу ГПТ з автоматичним підстроюванням параметрів

$d_y^*$ , мм	6 (0,6)	10 (1,0)	16 (1,6)	20 (2,0)	32 (3,2)
$K_o$	1,79	1,79	1,79	1,79	1,79
$K_{mV} \cdot 10^2$	1,70	0,914	0,402	0,245	0,152

\*В дужках наведені відносні діаметри умовного проходу ГПТ.

Проведені розрахунки узагальненого критерію гашення пульсацій тиску  $K_o$  дозволили встановити, що він залежить тільки від відносних конструктивних параметрів ГПТ і його доцільно використовувати як основний критерій при проведенні багатокритеріальної оптимізації конструктивних параметрів ГПТ. Масогабаритний критерій  $K_{mV}$  суттєво залежить від діаметра умовного проходу, і його використання доцільно при проведенні багатокритеріальної оптимізації конструктивних параметрів ГПТ, а також і для порівняння показників технічного рівня ГПТ різних типів з однаковим діаметром умовного проходу.

**Висновки.** Запропоновано узагальнену математичну модель гасителя пульсацій тиску з автоматичним підстроюванням параметрів, що складена у безрозмірних конструктивних параметрах. Встановлено, що найбільший вплив на коефіцієнт гасіння ГПТ мають відносні діаметри отворів, виконаних в центральній трубі, та внутрішній діаметр корпусу гасителя. Збільшення частоти пульсацій тиску на виході з об'ємного насоса призводить у гасителі до збільшення коефіцієнта гасіння.

Запропоновано використовувати як основний критерій при проведенні багатокритеріальної оптимізації конструктивних параметрів ГПТ узагальнений критерій гашення пульсацій тиску, а масогабаритний критерій слугуватиме для порівняння показників технічного рівня ГПТ різних типів.

**Список літератури:** 1. Шорин В.П. Устранение колебаний в авиационных трубопроводах – М.: Машиностроение, 1980. – 156 с. 2. Tłumienie pulsacji w systemach hydraulicznych // Hydraulika i Pneumatyka, zeszyt 4/97. – S. 17 – 18. 3. Андренко П.Н., Дмитриенко О.В., Белоусов Э.В. Экспериментальное исследование преобразователей пульсацій // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 2000. – Вып. 79. – С. 32 – 33. 4. Андренко П.Н., Дмитриенко О.В., Стеценко Ю.Н., Миронов К.А. Экспериментальное исследование многокамерных преобразователей пульсацій // Интегровані технології та енергозбереження. – Хар-

ків: НТУ “ХПІ”, 2000. – № 4. С. 72 – 77. **5. Андренко П. М., Свиначенко М.С.** Експериментальні дослідження гідравлічного гасителя пульсацій тиску з автоматичним підстроюванням параметрів // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Харків. – 2010. – №4/6 (46). – С. 45 – 51. **6. Андренко П., Свиначенко М.** Математическая модель гидравлического гасителя пульсаций давления с автоматической подстройкой параметров // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences. – Lublin. – 2009. – Vol. 11b. – p. 42 – 49. **7. Андренко П.М., Дмитриенко О.В., Свиначенко М.С.** Методика розрахунку та проектування гідравлічного гасителя пульсацій тиску у складі гідроагрегата // Вестник НТУ “ХПІ”. – 2010. – № 54. С. 4 – 9. **8. Андренко П.Н., Дмитриенко О.В., Свиначенко М.С.** Универсальная методика проектирования пассивных гасителей пульсаций давления // XVIII Міжнародна науково-технічна конференція “Гідроаеромеханіка в інженерній практиці”. Київ 21 – 24 травня 2013 р.: матеріали конференції – К.: Підприємство УВОІ “Допомога” УСГ”, 2013. – С. 69 – 70. **9. Андренко П.М., Дмитриенко О.В., Свиначенко М.С.** Гасителі пульсацій тиску об’ємних гідроагрегатів: Монографія. Харків: Видавництво “НТМТ”, 2012. – 160 с. **10. Andrenko P.** Determining the limits of applicability of process gainsteadiness when designing hydraulic valves with dither linearisation // HYDRAULIC AND PNEUMATICS '2005 : international scientific-technical conference, 17 – 19 маја 2005. – Wrocław, 2005. – P. 713 – 720. **11. Атигуль А.Д., Киселев П.Г.** Гидравлика и аэродинамика. Основы механики жидкости: учеб. пособ. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с. **12. Приходько О.А., Сьомін Д.О.** Технічна аерогідромеханіка: навч. посіб. – Луганськ: СНУ ім. В. Даля, 2002. – 170 с. **13. Идельчик И.Е.** Справочник по гидравлическим сопротивлениям под ред. М.О. Штейнберга – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1992 – 672 с. **13. Попов Д.Н.** Динамика и регулирование гидро- и пневмосистем : учебник для вузов. – 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1987. – 464 с.

Надійшла до редакції 19.02.2014

---

УДК 621.22

**Параметричні дослідження гідравлічного гасителя пульсацій тиску з автоматичним підстроюванням параметрів / П. М. Андренко, М. С. Свиначенко, А. Х. Ремстова** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 9 – 19. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложена обобщенная математическая модель гасителя пульсаций давления с автоматической подстройкой параметров в безразмерных конструктивных параметрах. Установлено влияние безразмерных конструктивных параметров гасителя и частоты пульсаций давления в гидроагрегате на его коэффициент гашения. Предложено использовать для многокритериальной оптимизации конструктивных параметров гасителя обобщенный критерий гашения пульсаций давления, а для определения его технического уровня – массогабаритный.

**Ключевые слова:** математическая модель, гаситель пульсаций, коэффициент гашения, потери давления, безразмерные параметры, критерии эффективности.

UDC 621.22

**Parametrical study of a hydraulic damper of pressure pulsations with automatic tuning of parameters / P. M. Andrenko, M. S. Svinarenko, A. H. Remetova** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 9 – 19. Bibliog.: 13 titles. – ISSN 2222-0631.

A generic mathematical model of a hydraulic damper of pressure pulsations with automatic tuning of parameters in non-dimensional design parameters was proposed. The influence of the non-dimensional design parameters of the damper and the frequency of pressure pulsations in the hydraulic unit on the dumping coefficient of the hydraulic unit was determined. It was proposed to use the generic criterion of pressure pulsation dumping for multicriterion optimization of the damper structural parameters and the mass effect of the damper for evaluation of its technical level.

**Key words:** mathematical model, a pulsation damper, dumping coefficient, pressure losses, non-dimensional parameters, performance criteria.



**С.И. БОГУЧАРСКИЙ**, аспирант ХНУРЭ, Харьков

## **ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОМБИНИРОВАННОГО ВЕКТОРНОГО КВАНТОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛУКОНТРОЛИРУЕМОГО ОБУЧЕНИЯ**

Предложен метод полуконтролируемого обучения нейронных сетей векторного квантования, предназначенных для обработки больших массивов данных и, прежде всего, изображений. Особенностью развиваемого подхода является то, что данные на обработку последовательно подаются на входы нейросистемы в виде матриц. Введенные алгоритмы обучения характеризуются вычислительной простотой и высоким быстродействием.

**Ключевые слова:** матричные сигналы, изображение, обучение, самообучение, нейросистема, векторное квантование, последовательная обработка.

**Введение.** В задачах обработки и анализа больших массивов информации и, прежде всего, текстов и изображений самой различной природы достаточно широкое распространение получила техника *векторного квантования* [1, 2], позволяющая эффективно решать *задачи классификации, кластеризации, сегментации, компрессии* и тому подобные, и нашедшая свое воплощение в виде самоорганизующихся карт и нейронных сетей обучаемого векторного квантования [3, 4].

Основное отличие самоорганизующихся карт (SOM – Self-Organizing Map) от сетей обучаемого векторного квантования (LVQ – Learning Vector Quantization) состоит в принципах их обучения. При этом если SOM настраивает свои синаптические веса в процессе самообучения, когда нет никакой априорной информации о принадлежности образов обучающей выборки к тем или иным классам, то LVQ работает в режиме контролируемого обучения с учителем, при этом все данные обучающей выборки предварительно расклассифицированы (размечены). И хотя в результате обе нейросети решают одну и ту же задачу (установление принадлежности векторов-образов, подвергающихся обработке, к тому или иному классу) SOM в основном ориентирована на нахождение центров этих классов, а LVQ – на определение границ между этими же классами. В связи с этим представляется целесообразным объединить эти две задачи в рамках одной системы обработки информации.

**Анализ состояния исследований и постановка задачи.** При решении широкого круга практических задач приходится сталкиваться с ситуацией, когда часть данных обучающей выборки размечена, а об остальных образах нет данных об их принадлежности к тому или иному классу. В этом случае

приходится прибегать к так называемому *полуконтролируемому обучению* (semi-supervised learning) [5], реализуемому обычно на основе различных нейронных сетей, при этом было бы целесообразным обеспечить этот процесс на основе однотипных сетей, для чего наилучшим образом приспособлены архитектуры нейронных сетей *Т. Кохонена* [3].

Нейронная сеть *Т. Кохонена* имеет простую архитектуру и кроме нулевого (рецепторного) слоя содержит единственный слой нейронов, именуемый *слоем Кохонена* [6]. Каждый нейрон слоя *Кохонена* связан с каждым рецепторным узлом нулевого слоя прямыми связями и со всеми другими нейронами – поперечными латеральными связями. По этим латеральным связям обеспечивается возбуждение одних нейронов и торможение других. Благодаря такой организации связей как в *SOM*, так и в *LVQ*, каждый нейрон сети получает всю информацию об образе, поступившем на обработку, и порождает на своем единственном выходе соответствующий выходной сигнал. Далее в сети возникает так называемый *режим конкуренции*, в результате которой определяется единственный нейрон-победитель (winner), чей вектор синаптических весов наименее удален в смысле принятой метрики (обычно евклидовой) от входного вектора-образа.

Выходной сигнал нейрона-победителя по латеральным связям может возбуждать ближних нейронов-соседей и подавлять сигналы нейронов, далеко отстоящих от победителя. Таким образом, формируются однородные в некотором смысле группы нейронов, каждая из которых, описывает тот или иной класс в исходном массиве информации. Принципиальное отличие *SOM* от *LVQ* состоит лишь в принципах настройки их синаптических весов, при этом *SOM* оперирует с неразмеченной обучающей выборкой, а *LVQ* – с размеченной. Отсюда же вытекает и различие решаемых с помощью этих нейронных сетей задач: *SOM* – задачи кластеризации, сегментации, компрессии, *LVQ* – задачи классификации и распознавания образов.

Особенностью нейронных сетей *Кохонена*, как в прочем и большинства других сетей, является то, что информация подается на их входы в векторной форме и все операции, реализуемые системой, также описываются в терминах векторных пространств. В то же время существует достаточно широкий круг задач, прежде всего связанных с обработкой изображений, где информация задается в матричной форме, то есть требуется ее предварительное преобразование к векторным формам перед подачей в нейронную сеть.

В настоящее время существует ряд подходов к решению задач управления, фильтрации, идентификации, кластеризации с использованием матричных входных сигналов [7 – 10], в том числе и связанных с самообучением [10]. Определенную перспективу представляет распространение этих идей и на задачи полуконтролируемого обучения. Таким образом, целью работы является синтез комбинированной нейронной сети на основе архитектур *SOM* и *LVQ*, чьи синаптические веса должны настраиваться на основе принципов полуконтролируемого обучения, включающего в себя как самообучение, так

и обучение с учителем. При этом, с целью упрощения численной реализации в задачах обработки изображений, фрагменты этих изображений не должны предварительно трансформироваться в традиционную векторную форму, а сохраняются и обрабатываются в виде матричных сигналов-образов.

**Самообучение на основе матричных сигналов.** Пусть исходный массив данных (изображение) задан в виде  $(M \times N)$  числовой матрицы данных, которая должна быть разбита в процессе обучения на однородные в некотором смысле классы (кластеры, сегменты). Исходная матрица разделяется на блоки размера  $(m \times n)$ , каждый из которых в рамках традиционного подхода преобразуется тем или иным образом в  $(mn \times 1)$  – вектор. Далее на основе сформированной обучающей выборки, содержащей  $MN(mn)^{-1}$  векторов-образов  $x(k) \in R^{mn}$ ,  $k = 1, 2, \dots, MN(mn)^{-1}$ , производится самообучение самоорганизующейся карты, содержащей в слое Кохонена  $lp$  нейронов с статическими весами  $w_q^s$ , описываемыми  $(mn + 1)$ -векторами,  $q = 1, 2, \dots, lp$ . Заметим, что при традиционном подходе нейроны могут образовывать как 1-D структуру, так и 2-D – в форме  $(l \times p)$ -решетки. В [10] вместо  $(mn \times 1)$ -векторов-образов было предложено представить входные сигналы в форме  $(m \times n)$ -матриц

$$x(k) = \{x_{i_1 i_2}(k)\}, \quad i_1 = 1, 2, \dots, m; \quad i_2 = 1, 2, \dots, n;$$

а слой Кохонена – в виде  $(l \times p)$ -матрицы нейронов с синаптическими весами, также задаваемыми в виде матриц

$$w_{q_1 q_2}^s = \{x_{q_1 q_2 i_1 i_2}\}, \quad q_1 = 1, 2, \dots, l; \quad q_2 = 1, 2, \dots, p,$$

и матричным выходным сигналом  $y^s(k) = \{y_{q_1 q_2}^s(k)\}$ .

Процесс обработки информации в такой SOM состоит в том, что на матричный рецепторный слой последовательно подаются элементы обучающей выборки,  $x(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, MN(mn)^{-1}$ , предварительно пронормированные на сферическую матричную норму  $(Sp(x(k)x^T(k)))^{1/2}$  этих сигналов. Каждый рецептор нулевого слоя связан со всеми нейронами слоя Кохонена, каждый из которых имеет  $mn$  настраиваемых синаптических весов, задаваемых в форме  $(m \times n)$ -матриц  $w_{q_1 q_2}^s$ . Скалярный выходной сигнал каждого нейрона вычисляется с помощью выражения

$$y_{q_1 q_2}^s(k) = Sp(w_{q_1 q_2}^T(k-1)x(k)) = E_w^T(w_{q_1 q_2}^s(k-1) \otimes x(k))E_n,$$

где индекс времени  $(k-1)$  матрицы синаптических весов  $w_{q_1 q_2}^s(k-1)$  означает, что она была получена на основании выборки образов  $x(1), x(2), \dots$ ,

$x(k-1)$ ;  $E_m$  и  $E_n$  – векторы-столбцы, образованные единицами, размерностей  $(m \times 1)$  и  $(n \times 1)$  соответственно,  $\otimes$  – символ *прямого матричного произведения*.

Процесс самообучения данной нейронной сети начинается с задания начальных синаптических весов, которые могут быть выбраны случайным образом, после чего каждая весовая матрица нормируется на свою сферическую норму  $(Sp(w_{q_1q_2}^S(0)w_{q_1q_2}^{ST}(0)))^{1/2}$ . Далее на вход сети подается первая матрица-образ  $x(1)$ , и вычисляются выходные сигналы всех нейронов слоя Кохонена

$$y_{q_1q_2}^S(1) = Sp(w_{q_1q_2}^{ST}(0)x(1)) = E_m^T(w_{q_1q_2}^S(0) \otimes x(1))E_n.$$

Следующим этапом является определение нейрона-победителя  $w_{j_1j_2}^{S*}$  такого, что  $\forall q_1 = 1, 2, \dots, l, q_2 = 1, 2, \dots, p$ ,

$$Sp((x1) - w_{q_1q_2}^{S*}(0))(x1) - w_{q_1q_2}^{S*}(0))^T < Sp((x1) - w_{q_1q_2}^S(0))(x1) - w_{q_1q_2}^S(0))^T;$$

при этом нейрон-победитель имеет наибольшее, по сравнению со всеми остальными, значение выходного сигнала  $y_{q_1q_2}^{S*}(1) > y_{q_1q_2}^S(1) \forall q_1$  и  $q_2$ .

Настройка синаптических весов нейрона-победителя производится по правилу – *победитель получает все* [3] в форме

$$w_{q_1q_2}^{S*}(1) = w_{q_1q_2}^{S*}(0) + \eta(1)(x(1)) - w_{q_1q_2}^{S*}(0)$$

для первого шага настройки и

$$w_{q_1q_2}^{S*}(k+1) = w_{q_1q_2}^{S*}(k) + \eta(k+1)(x(k+1) - w_{q_1q_2}^{S*}(k)) \quad (1)$$

для  $(k+1)$ -го. Здесь  $\eta(k+1)$  – шаг настройки, выбираемый обычно исходя из эмпирических соображений так, чтобы он монотонно уменьшался в процессе обучения.

Можно показать, что правило (1) минимизирует квадратичный критерий самообучения

$$E^{k+1} = \sum_{S=1}^{k+1} Sp((x(s) - w_{q_1q_2}^S)(x(s) - w_{q_1q_2}^S)^T),$$

а при  $\eta(k+1) = (k+1)^{-1}$  в качестве центра кластера дает оценку среднего арифметического

$$w_{q_1q_2}^S(k+1) = \frac{\sum_{S=1}^{k+1} x(S)}{k+1}$$

в случае, если нейрон  $q_1q_2$   $(k+1)$  раз был победителем.

В процессе настройки матрица синаптических весов нейрона-

победителя «подтягивается» по входному образу на расстояние, определяемое сферической матричной нормой

$$(Sp(x(k+1) - w_{q_1 q_2}^{s*}(k))(x(k+1) - w_{q_1 q_2}^{s*}(k))^T)^{1/2}$$

и шагом настройки  $\eta(k+1)$ .

Одной из особенностей карты Кохонена является наличие этапа кооперации в процессе самообучения, когда нейрон-победитель определяет так называемую локальную область топологического соседства, в которой возбуждается не только он сам, но и его ближайшее окружение в слое Кохонена, при этом более близкие к победителю нейроны возбуждаются сильнее, чем более удаленные. Эта топологическая область определяется *функцией соседства*, зависящей от расстояния между победителем и любым из нейронов слоя Кохонена. Как правило, в качестве функции соседства используется колоколообразная функция, чаще всего – *гауссиан* [3], зависящая не только от расстояния, но и некоторого параметра ширины, выбираемого обычно из сугубо эмпирических соображений. Заметим также, что в матричном алгоритме [10] также был использован традиционный двумерный гауссиан.

Заметим, что использование в качестве функции соседства выходного сигнала каждого из нейронов не противоречит идеям самообучения по Кохонену, при этом естественно, что в этом случае будет обучаться не единственный нейрон-победитель, но сразу все нейроны сети, при этом, чем больше отклик конкретного нейрона, тем интенсивнее он будет подтягиваться по входному образу. Чем дальше нейрон отстоит от входного сигнала, тем слабее реагируют его синаптические веса.

В этом случае вместо правила самообучения (1) для единственного нейрона-победителя можно записать правило настройки для всех нейронов сети

$$w_{q_1 q_2}^s(k+1) = w_{q_1 q_2}^s(k) + \eta(k+1) y_{q_1 q_2}^s(k+1) (x(k+1) - w_{q_1 q_2}^s(k)), \quad (2)$$

при этом критерий самообучения может быть записан в виде

$$E^{k+1} = \sum_{s=1}^{k+1} y_{q_1 q_2}^s(s) Sp((x(s) - w_{q_1 q_2}^s(s))(x(s) - w_{q_1 q_2}^s(s))^T),$$

а рекуррентная оценка

$$w_{q_1 q_2}^s(k+1) = \frac{\sum_{s=1}^{k+1} y_{q_1 q_2}^s(s) x(s)}{\sum_{s=1}^{k+1} y_{q_1 q_2}^s(s)}.$$

Резюмируя вышеизложенное, матричный алгоритм самообучения карты Кохонена на  $(k+1)$ -м шаге можно представить в виде структурной схемы, приведенной на рис. 1.

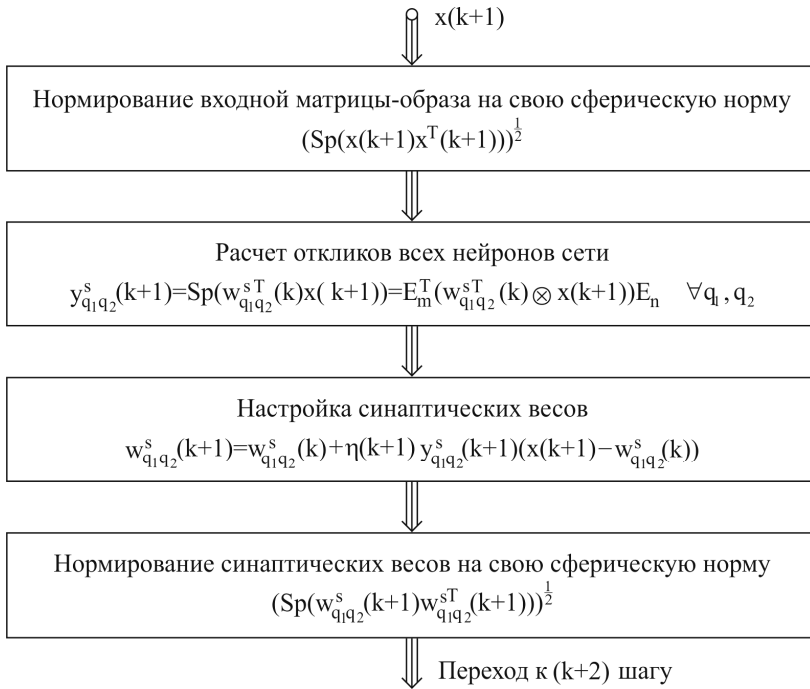


Рис. 1 – Структурная схема самообучения матричной самоорганизующейся карты.

**Контролируемое обучение на основе матричных сигналов.** Еще одним важным классом нейронных сетей, основанных на идеях конкуренции, являются *нейронные сети обучаемого векторного квантования*, также введенные Кохоненом [3] и имеющие архитектуру, полностью совпадающую с архитектурой самоорганизующейся карты. В основе этих сетей лежит техника векторного квантования, состоящая в компактном представлении больших массивов информации, заданных в виде векторов, а в нашем случае  $(m \times n)$ -матриц  $x(k)$ , в форме ограниченного набора центров (прототипов, кодовых слов)  $w_{q_1q_2}^L$ ,  $q_1 = 1, 2, \dots, l$ ;  $q_2 = 1, 2, \dots, p$ , достаточно хорошо в смысле принятой метрики аппроксимирующих исходное пространство. В результате квантования формируется, так называемая, *коддовая книга*, кодовые слова которой описывают центры кластеров.

Процесс контролируемого обучения LVQ происходит следующим образом. Для каждого пренормированного образа-матрицы

$$x(k+1) \quad (Sp(x(k+1)x^T(k+1)) = 1)$$

определяется нейрон-победитель, синаптические веса  $w_{q_1q_2}^{L*}(k)$  которого соответствуют центру определенного кластера. Иначе говоря, победителем, как

и в SOM, является нейрон с минимальным расстоянием до входной матрицы

$$\begin{aligned} & Sp((x(k+1) - w_{q_1 q_2}^{L*}(k))(x(k+1) - w_{q_1 q_2}^{L*}(k))^T) < \\ & Sp((x(k+1) - w_{q_1 q_2}^L(k))(x(k+1) - w_{q_1 q_2}^L(k))^T), \\ & \forall q_1 = 1, 2, \dots, L; q_2 = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Поскольку обучение является контролируемым, принадлежность матрицы  $x(k+1)$  к конкретной области пространства  $X$  известна, что позволяет рассмотреть две типичные ситуации, возникающие в обучаемом векторном квантовании:

1) входной образ  $x(k+1)$  и нейрон-победитель  $w_{q_1 q_2}^{L*}(k)$  относятся к одному и тому же классу;

2) входной образ  $x(k+1)$  и нейрон-победитель  $w_{q_1 q_2}^{L*}(k)$  принадлежат разным классам.

Тогда матричная модификация наиболее популярного правила обучения LVQ 1 может быть записана в виде

$$w_{q_1 q_2}^{L*}(k+1) = \begin{cases} w_{q_1 q_2}^{L*}(k) + \eta(k+1)(x(k+1) - w_{q_1 q_2}^{L*}(k)), \\ \text{если } x(k+1) \text{ и } w_{q_1 q_2}^{L*}(k) \text{ принадлежат одному классу;} \\ w_{q_1 q_2}^{L*}(k) - \eta(k+1)(x(k+1) - w_{q_1 q_2}^{L*}(k)), \\ \text{если } x(k+1) \text{ и } w_{q_1 q_2}^{L*}(k) \text{ принадлежат разным классам;} \\ w_{q_1 q_2}^L(k), \\ \text{для нейронов, не победивших в момент } k+1. \end{cases} \quad (3)$$

Правило (3) имеет достаточно явный физический смысл: если нейрон-победитель и предъявляемый образ относятся к одному классу, то центр  $w_{q_1 q_2}^{L*}(k)$  подтягивается к  $x(k)$ , минимизируя тем самым критерий

$$E^{k+1} = \sum_{S=1}^{k+1} Sp((x(S) - w_{q_1 q_2}^L)((x(S) - w_{q_1 q_2}^L)^T),$$

в противном случае прототип  $w_{q_1 q_2}^{L*}(k)$  отталкивается от  $x(k+1)$ , максимизируя этот же критерий. Заметим, что на этой же идее «притяжения-отталкивания» основаны различные модификации алгоритмов обучения сетей векторного квантования типа OLVQ1, LVQ2 и тому подобных [3]. Кроме того, введенный нами алгоритм самообучения (2) также реализует эту же идею в отличие от стандартной процедуры Кохонена.

Повысить быстродействие процесса обработки информации с помощью процедуры (3) можно, специальным образом выбирая шаг обучения  $\eta(k+1)$ . Для этого перепишем первые два соотношения (3) в виде

$$w_{q_1q_2}^{L^*}(k+1) = (1 - \eta^* \eta(k+1))w_{q_1q_2}^{L^*}(k) + \eta^* \eta(k+1)x(k+1), \quad (4)$$

где  $\eta^* = 1$ , если  $x(k+1)$  и  $w_{q_1q_2}^{L^*}(k)$  принадлежат одному классу, и  $\eta^* = -1$ , в противном случае. Выбор параметра шага в форме [3]

$$\eta(k+1) = \eta(k)(1 + \eta^* \eta(k))^{-1}$$

ведет к так называемому *оптимизированному алгоритму* LVQ1 (OLVQ1). Принципиальное отличие процедур (3) и (4) состоит в том, что LVQ1 вычисляет среднее арифметическое в качестве центра класса по типу  $k$ -средних, а OLVQ1 основывается на *процедуре экспоненциального сглаживания*.

Аналогично предыдущему получаем матричный алгоритм контролируемого обучения LVQ-сети на  $(k+1)$ -м шаге в виде структурной схемы, представленной на рис. 2.

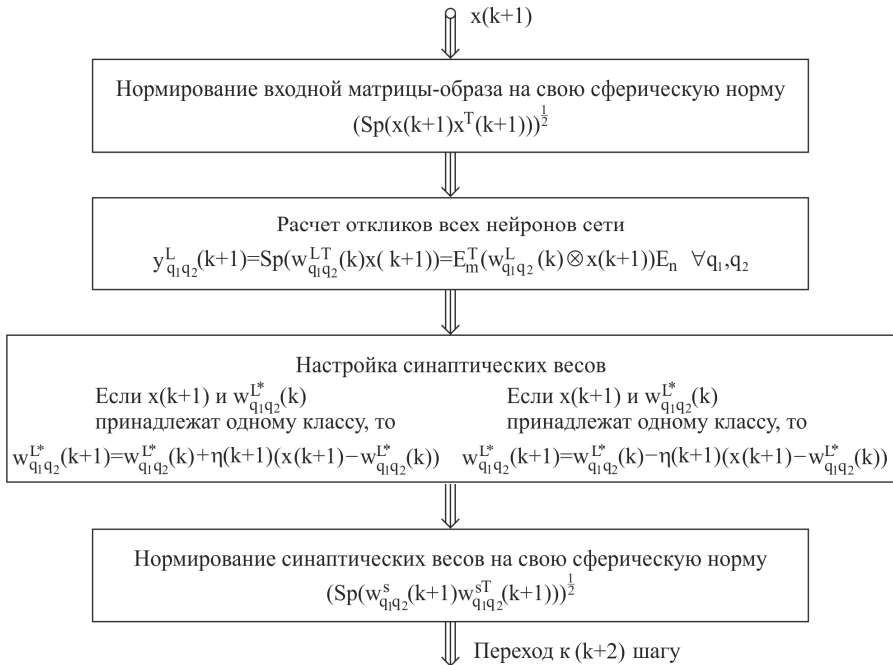


Рис. 2 – Структурная схема контролируемого обучения матричной LVQ-нейронной сети.

**Полуконтролируемое обучение на основе матричных сигналов.** Для того чтобы реализовать процесс полуконтролируемого обучения, когда часть исходных данных размечена, а часть – нет, целесообразно организовать совместную одновременную обработку информации с помощью SOM и LVQ. В [11] описана *система адаптивного распознавания образов*, состоящая из по-



следовательно соединенных векторных SOM и LVQ, при этом SOM реализует компрессию входной информации, а LVQ решает собственно задачу распознавания образов.

Для решения рассматриваемой задачи целесообразно параллельное соединение SOM и LVQ так, как это показано на рис. 3.

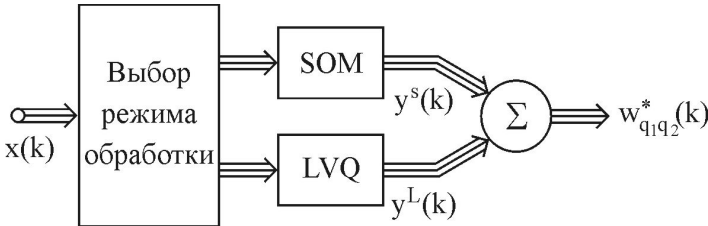


Рис. 3 – Структурная схема полуконтролируемого обучения.

Входные сигналы  $x(k)$  последовательно подаются на блок выбора режима обработки, где принимается решение о том, с помощью какой системы SOM или LVQ, будет производиться его обработка. При этом в каждый момент времени  $k$  работает только одна из сетей. На выходе системы в каждый момент появляется матричный сигнал, соответствующий центру класса  $w_{q_1q_2}^{L*}(k)$ , к которому отнесен входной образ.

**Выводы.** Предложен метод полуконтролируемого обучения комбинированной искусственной нейронной сети, основанный на технике векторного квантования и предназначенный для решения задач обработки (реставрации, сегментации, классификации, распознавания и т.п.) изображений различной природы. Особенностью предлагаемого метода является то, что он позволяет обрабатывать как размеченные, так и не размеченные предварительно фрагменты изображений в последовательном режиме. В основе вычислительной процедуры лежат алгоритмы стохастической аппроксимации, что упрощает их реализацию. Высокое быстродействие метода определяется тем, что в процессе его реализации исключаются операции векторизации-девекторизации, что позволяет анализировать не традиционные векторы-образы, а непосредственно фрагменты изображений, заданные в форме «бегущего» двумерного прямоугольного окна.

**Список литературы:** 1. Linde Y., Buzo A., Gray R. M. An algorithm for vector quantized design // IEEE Trans. on Communications. – 1980. – Vol. 28. – P. 84 – 95. 2. Gray R. M. Vector quantization // IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing Magazine. – 1984. – Vol. 4. – P. 9 – 31. 3. Kohonen T. Self-organizing maps – Berlin: Springer Verlag, 1995. – 362 p. 4. Nasrabadi N., Feng Y. Vector quantization of images based upon the Kohonen self-organization feature maps // Proc. IEEE Int. Conf. on Neural Networks. – San Diego, CA, 1988. – Vol. 2. – P. 10 – 108. 5. Bezdek J. C., Keller J., Krisnapuram R., Pal N. R. Fuzzy models and algorithms for pattern recognition and image processing – N.Y.: Springer Science+Business, Inc., 2005. – 776 p. 6. Tsoukalas L. H., Uhrig R. E. Fuzzy and neural approaches in engineering – N. Y.: John Wiley&Sons, Inc, 1997. – 587 p. 7. Куницевич В. М. О решении задачи двумерной дискретной фильтрации // Автоматика и телемеханика. – 1987. – №6. – С. 68 –

78. **8.** Бодянский Е. В., Плисс И. П. О решении задачи управления матричным объектом в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 2. – С. 175 – 178. **9.** *Bodyanskiy Ye., Pliss I., Timofeev V.* Discrete adaptive identification and extrapolation of two-dimensional fields // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1995. – vol. 5, No 3. – pp. 410 – 416. **10.** *Ведмедь А. Г., Маисталир С. В., Сакало Е. С.* Матричный алгоритм самообучения карты Кохонена в задачах обработки изображений // Системы управління, навігації та зв'язку. – 2009. – Вип. 1(9). – С. 188 – 192. **11.** *Haykin S.* Neural networks. A comprehensive foundation – Upper Saddle River N.J.: Prentice Hall, Inc., 1999. – 482 p.

*Поступила в редколлегию 10.02.2014*

---

УДК 519.71

**Обработка изображений на основе комбинированного векторного квантования с использованием полуконтролируемого обучения / С. И. Богучарский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 20 – 29. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано метод напівконтрольованого навчання нейронних мереж векторного квантування, призначених для обробки великих масивів даних і, насамперед, зображень. Особливістю підходу, який розвивається, є те, що дані на обробку послідовно подаються на входи нейросистеми у вигляді матриць. Введені алгоритми навчання характеризуються обчислювальною простотою і високою швидкістю.

**Ключові слова:** матричні сигнали, зображення, навчання, самонавчання, нейросистема, векторне квантування, послідовна обробка.

UDC 519.71

**Image processing based on combined vector quantization using semi-supervised learning / S. I. Bogucharskiy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 20 – 29. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.**

A method of semi-supervised learning of vector quantization neural networks for large data sets (first of all images) processing has been proposed. The approach peculiarity lies in the fact that the data in are submitted to the neural network input sequentially in the matrix form rather than in the traditional vector form. The introduced learning algorithms are characterized by computing simplicity and speed, which allows processing information stored in large-scale databases or coming in real time.

**Key words:** image, learning, neurosystem, sequential processing.

УДК 004.932:616-073.7

*Д.А. БОЙКО*, аспирант, НТУ «ХПІ»;

*А.Е. ФИЛАТОВА*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

## **МЕТОД ВИЗУАЛИЗАЦИИ ПАТОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР НА МАММОГРАММАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОСЛОЙНОГО НАЛОЖЕНИЯ**

Проанализированы основные этапы обработки медицинских радиологических изображений. Рассмотрен алгоритм Канны и приведены результаты его работы на реальных данных. Предложен

---

© Д. А. Бойко, А. Е. Филатова, 2014

метод визуализации маммограмм на основе послойного наложения изображений для улучшения выявления патологических структур. Разработанный метод протестирован на реальных маммограммах, проведен анализ результатов и предложены дальнейшие перспективы исследований.

**Ключевые слова:** маммограмма, методы нахождения границ, фильтрация, оператор Канни, методы наложения.

**Вступление.** За последние годы в Украине значительно выросло количество заболеваний молочной железы. Своевременная диагностика данных заболеваний позволяет проводить более эффективный комплекс лечебных мероприятий. *Маммография* – это один из методов диагностики заболеваний молочной железы. Основной задачей медицинских радиологических исследований является нахождение визуально слабо различимых *областей интереса* (уплотнения, опухоли, микрокальциномы и другие патологии) на рентгеновских изображениях. С целью повышения эффективности работы врача-маммолога необходимо создать систему поддержки принятия решений (СППР), основной задачей которой является визуализация патологических структур на маммограммах.

**Постановка проблемы и анализ литературы.** Для создания такой СППР в [1, 2] были рассмотрены следующие группы методов:

- бинаризация (с одним и несколькими порогами);
- контрастирование (линейное и нелинейное) и изменение яркости;
- фильтрация (низкочастотная, высокочастотная и полосовая);
- методы нахождения границ объектов (*операторы Собеля, Прюитта, Робетса, Канни, Шарра*).

На сегодняшний день *алгоритм Канни* является самым перспективным алгоритмом выделения границ объектов на изображениях. Для реализации алгоритма необходимо задать 4 параметра ( $A$  – размер апертуры,  $\sigma$  – среднеквадратичное отклонение,  $ThH$  – верхний порог и  $ThL$  – нижний порог), которые существенно влияют на результат работы данного алгоритма [3]. При этом Канни предложил для поиска границ объектов анализировать не только норму градиента, но и угол между градиентом и направлением строк цифрового изображения. Для расчета градиентов используется разностные фильтры. Поскольку эти фильтры чувствительны к шумам, то предварительно необходимо использовать низкочастотную фильтрацию.

Исследование работы алгоритма Канни на реальных маммограммах показали, что данные алгоритмы не дают удовлетворительных результатов на слабоконтрастных изображениях (рис. 1), поскольку происходит выделение множества ложных границ объектов.

Анализ методов показал, что для решения поставленной задачи применение одного метода недостаточно для визуализации патологических структур на маммограммах.

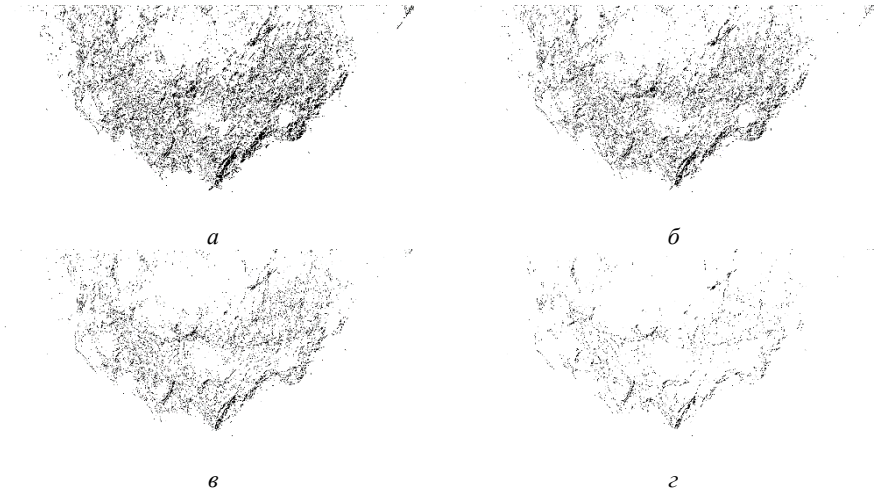


Рис. 1 – Результаты работы алгоритма Канны (инвертированные):  
 а –  $A=7$ ,  $\sigma=2$ ,  $ThH=7$  и  $ThL=2$ ; б –  $A=5$ ,  $\sigma=1,4$ ,  $ThH=10$  и  $ThL=5$ ;  
 в –  $A=3$ ,  $\sigma=1$ ,  $ThH=15$  и  $ThL=5$ ; г –  $A=5$ ,  $\sigma=1$ ,  $ThH=20$  и  $ThL=0$ .

Это объясняется тем, что маммограммы представляют собой слабоконтрастные изображения с патологическими структурами, не имеющие однородных областей и четких границ. Поэтому разработка эффективных методов визуализации зон интереса на слабоконтрастных изображениях является актуальной задачей при создании СППР в медицинской радиологии.

**Целью** данной статьи является разработка эффективного метода выделения патологических структур на слабоконтрастных изображениях для улучшения визуализации маммограмм.

**Метод выделения патологических структур на маммограммах.** Особенностью маммограмм является то, что границы патологических структур размыты, а зоны интереса не имеют однородных областей. Поэтому алгоритмы выделения границ малоэффективны.

Для визуализации патологических структур предлагается использовать идею наложения на исходное изображение некоторого корректирующего изображения, которое позволило бы изменить яркость пикселей на основе анализа их градиентов.

С учетом выше перечисленных особенностей применения методов обработки полутоновых изображений предлагается метод визуализации патологических структур на маммограммах, состоящей из следующих этапов.

1. Фильтрация исходного изображения  $S = \left[ s_{ij} \right]_{i=1, j=1}^{n, m}$  ядром Гаусса

$$h[i, j] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{i^2+j^2}{2\sigma^2}}.$$

Для фильтрации предлагается использовать линейный фильтр с апертурой  $5 \times 5$  и  $\sigma^2 = 1.4$  [4],

$$Gaus_{ij} = \begin{bmatrix} 0.0121 & 0.0261 & 0.0337 & 0.0261 & 0.0121 \\ 0.0261 & 0.0561 & 0.0724 & 0.0561 & 0.0261 \\ 0.0337 & 0.0724 & 0.0935 & 0.0724 & 0.0337 \\ 0.0261 & 0.0561 & 0.0724 & 0.0561 & 0.0261 \\ 0.0121 & 0.0261 & 0.0337 & 0.0261 & 0.0121 \end{bmatrix}.$$

Отфильтрованное изображение  $F = \left[ f_{ij} \right]_{i=1, j=1}^{n, m}$  получается в результате свёртки  $F = S ** Gaus$ , где  $**$  – оператор двумерной свёртки.

2. Вычисление градиентов яркости пикселей отфильтрованного изображения  $F$  с помощью разностного фильтра предлагается использовать оператор Собеля с масками:

$$M_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } M_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

где  $M_x, M_y$  – маски оператора Собеля.

Составляющие градиентов пикселей по пространственным координатам вычисляются по выражениям:

$G_x = M_x ** F$ ,  $G_y = M_y ** F$ , где  $G_x = [g_{xij}]_{i=1, j=1}^{n, m}$ ,  $G_y = [g_{yij}]_{i=1, j=1}^{n, m}$  – матрицы составляющих градиентов по осям  $x$  и  $y$ , соответственно.

Тогда норма градиента  $G = [g_{ij}]_{i=1, j=1}^{n, m}$  вычисляется как  $g_{ij} = \sqrt{g_{xij}^2 + g_{yij}^2}$  и угол  $\alpha$  между градиентом  $g_{xij}$ ,  $g_{yij}$  и направлением строки изображения вычисляется по формуле  $\alpha_{ij} = \arctg(g_{yij} / g_{xij})$ .

3. Формируется корректирующее изображение  $C = [c_{ij}]_{i=1, j=1}^{n, m}$ . Для этого формируется изображение  $C' = [c'_{ij}]_{i=1, j=1}^{n, m}$ :

$$c'_{ij} = \begin{cases} kg_{ij}, & \text{если } g_{ij} > 0 \text{ и } \alpha_{ij} = \frac{n\pi}{2} (n = 0, 1, 2, \dots), \\ g_{ij} / k, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1)$$

где  $k > 0$ , коэффициент преобразования.

Поскольку в результате преобразования (1) динамический диапазон полученного изображения  $C'$  не соответствует диапазону  $[0, 255]$ , необходимо выполнить *линейное контрастирование* [5]. В результате этого получается корректирующее изображение  $C$ :

$$c_{ij} = \frac{c'_{ij} - \min_{i,j} c'_{ij}}{\max_{i,j} c'_{ij} - \min_{i,j} c'_{ij}} 255.$$

4. Результирующее изображение  $R = [r_{ij}]_{i=1,j=1}^{n,m}$  получается путем наложения корректирующего изображения  $C$  на исходное  $S$  по следующему правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{2s_{ij}c_{ij}}{255}, & \text{если } c_{ij} \leq T; \\ (255 - 2(c_{ij} - T)) \frac{s_{ij}}{255} + 2(c_{ij} - T), & \text{если } c_{ij} > T, \end{cases}$$

где  $c_{ij}$  – яркость значение пикселя  $(i, j)$  корректирующего изображения;  $s_{ij}$  – яркость значение пикселя  $(i, j)$  исходного изображения;  $T$  – порог.

**Перспективы дальнейших исследований.** Авторы считают перспек-

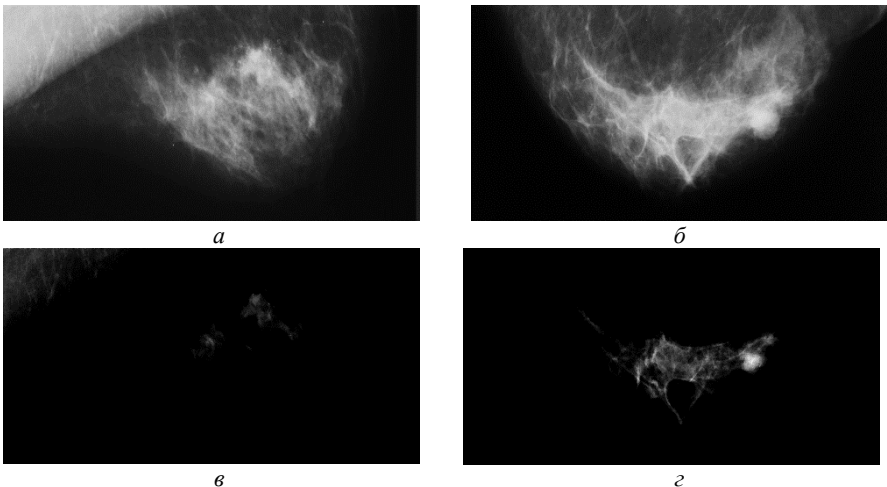


Рис. 2 – Результаты работы предложенного метода:  
*a* и *б* – исходные изображения маммограммы,  
*в* и *г* – выделенные объекты патологических структур.

тивным направление исследований, связанное с разработкой методов визуа-

лизации слабоконтрастных изображений, к которым относятся маммограммы. Разработанный метод может быть реализован в виде отдельного модуля при создании СППР, основной задачей которой является визуализация патологических структур на маммограммах для оказания помощи врачу-маммологу. В его основе лежит пошаговое наложение изображений с целью повышения яркости патологических структур и уменьшению яркости нормы для увеличения контрастности изображения (рис. 2).

**Выводы.** Исследования показали, что стандартные методы нахождения границ могут быть применимы лишь в комбинации с различными методами улучшения визуализации. Использование поиска перепада яркости пикселей на основе анализа углов градиентов позволило увеличить процент обнаружения патологий на маммограммах. Недостатком данного метода является обнаружение ложных патологий, которые представляют собой индивидуальные особенности строения организма. Это обусловлено тем, что они лежат в одном и том же диапазоне яркости, что и патологии. Для устранения данного недостатка необходимо разработать метод кластеризации выделения участков с целью отделения патологии от нормы.

**Список литературы:** 1. *Бойко Д.А.* Основные этапы обработки изображений при проектировании биотехнических систем в медицинской радиологии / *Д.А. Бойко, А.Е. Филатова* // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х: ХУПС, 2012 – Вип. 2(31). – С. 85 – 88. 2. *Бойко Д.А.* Метод визуализации патологических структур на маммограммах / *Д.А. Бойко, А.Е. Филатова* // Вісник НТУ «ХП». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ «ХП». – 2013. – №39 (1012). – С. 9 – 14. 3. *John Canny.* A computational approach to edge detection. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, PAMI-8(6):679 – 698, Nov. 1986.* 4. *Young I.T.* Fundamentals of image processing *Young I.T., Gerbrands J.J., L.J. Van Vliet.* Publisher: Delft University of Technology. – 1998. – P. 113. 5. *Meyer F.* Morphological Segmentation. *Meyer F., Beucher S.* – J. Visual Comm. Image Rep. – 1990. – 1(1): – p. 21 –46.

*Поступила в редколлегию 14.02.2014*

---

УДК 004.932:616-073.7

**Метод визуализации патологических структур на маммограммах с использованием послыоного наложения** / **Д. А. Бойко, А. Е. Филатова** // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 29 – 35. **Бібліогр.:** 5 назв. – ISSN 2222-0631.

Проналізовано основні етапи обробки медичних радіологічних зображень. Розглянуто алгоритм Канні та наведено результати його роботи на реальних даних. Запропоновано метод візуалізації мамограм на основі пошарового накладання зображень для покращення виявлення патологічних структур. Розроблений метод протестований на реальних маммограммах, проведено аналіз результатів і запропоновані подальші перспективи досліджень.

**Ключові слова:** мамограми, методи знаходження границь, фільтрація, оператор Канні, методи накладення.

UDC 004.932:616-073.7

**A method of visualization of pathological structures on mammograms using superimposition** / **D. A. Boyko, A. E. Filatova** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 29 – 35. **Bibliogr.:** 5 titles. – ISSN 2222-0631.

The main stages of medical radiological image processing were analyzed. The Canny algorithm and the results of its application to real data were considered. A mammogram visualization method based on layered image superimposition was proposed to improve detection of the pathological structures. The developed method was tested on real mammograms, the results were analyzed and further research prospects were proposed.

**Key words:** mammograms, edges detection methods, filtering, Canny edge detector, overlay methods.

УДК 621. 822

*А.В. ГАЙДАМАКА*, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ МЕЖДУ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ ОДНОРЯДНОГО РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА: УЧЁТ УГЛОВ КОНТАКТА, РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА И ИЗГИБА КОЛЕЦ**

Уточнено распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения с кольцами, радиального зазора и изгиба колец: получены и проанализированы выражения для радиальных и касательных сил на дорожках качения колец.

**Ключевые слова:** подшипник, тела качения, нагрузка, угол контакта, радиальный зазор, перемещения от изгиба колец.

**Введение.** В статьях [1, 2] о распределении радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта, а также с учётом совместного влияния углов контакта и радиального зазора, исследованы касательные силы на дорожках качения колец, которые затормаживают движение одних роликов и ускоряют движение других в зоне радиального нагружения. Уточнение распределения радиальной нагрузки между телами качения подшипника с учётом влияния изгиба колец является дальнейшим развитием указанных работ.

**Анализ известных исследований.** Влияние жёсткости деталей подшипника на распределение радиальной нагрузки между телами качения исследовалось преимущественно экспериментальными методами [3 – 5]. Теоретическое исследование влияния изгиба колец подшипника на распределение радиальной нагрузки между телами качения [6] выполнено без учёта углов контакта тел качения, что не позволяет выявить особенности взаимодействия деталей.

На основании вышеизложенного, задача по уточнению распределения радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника с учётом совместного влияния углов контакта тел качения с кольцами, радиального зазора и изгиба колец является актуальной.



**Постановка задачи.** Задача по уточнению распределения радиальной нагрузки  $F_r$  между телами качения идеального однорядного радиального подшипника состоит в построении геометрических уравнений связи радиального сближения колец  $\delta_0$  в окрестности центрального тела качения и радиальных сближений колец  $\delta_{\gamma}$  в окрестности остальных тел качения зоны  $\psi$  радиального нагружения подшипника при упругом контактном деформировании с учётом различного положения центров колец, радиального зазора  $g$  и перемещений  $u_n$  и  $u_e$  при изгибе соответственно наружного внутреннего колец.

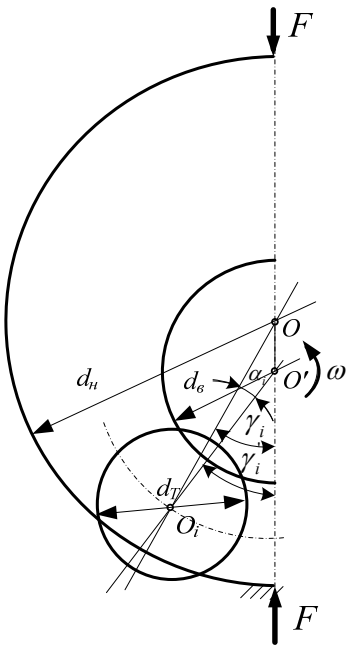


Рис. 1 – Модель сближения колец в произвольном радиальном направлении с учётом углов контакта тел качения с кольцами, радиального зазора и изгиба наружного при абсолютно жёстком внутреннем кольце.

В общем случае радиальное сближение колец в произвольном радиальном направлении с учётом их перемещений  $u_n$  и  $u_e$  при деформировании определяются из уравнения

$$(0,5d_n + u_n)^2 = (0,5d_e + 0,5d_T - \delta_{\gamma_i} + u_e)^2 + (g + \delta_0)^2 + 2(g + \delta_0)(0,5d_e + 0,5d_T - \delta_{\gamma_i} + u_e) \cos \gamma'_i, \quad (1)$$

**Математическая модель.** При решении поставленной задачи приняты следующие допущения:

- детали подшипника имеют идеальную геометрическую форму;
- перекосы колец и повороты роликов не учитываются;
- радиальные сближения наружного и внутреннего колец с телами качения за счёт контактной деформации одинаковы на заданном радиальном направлении;
- динамические эффекты, обусловленные вращением внутреннего кольца при неподвижном наружном, не влияют на работу деталей.

Радиальное сближение колец в произвольном направлении от перемещений  $u_n$  при изгибе, например наружного кольца, при абсолютно жёстком внутреннем с учётом углов контакта тел качения с кольцами и радиального зазора определяется с учётом модели кольца, сжимаемого силами  $F$  (рис. 1).

где величины  $u_n$  и  $u_e$  рассчитывают для толстых колец согласно [7]:

$$u_n = \frac{F_i \cdot R_n^3}{4E \cdot I_n} \cos \gamma_i - \frac{F_i \cdot R_n^3}{E \cdot I_n \cdot \pi} + \frac{F_i \cdot R_n^3}{4E \cdot I_n} \gamma_i \cdot \sin \gamma_i;$$

$$u_e = \frac{F_i \cdot R_e^3}{4E \cdot I_e} \cos \gamma_i - \frac{F_i \cdot R_e^3}{E \cdot I_e \cdot \pi} + \frac{F_i \cdot R_e^3}{4E \cdot I_e} \gamma_i \cdot \sin \gamma_i,$$

где  $E$  – модуль упругости;  $I_n, I_e$  – моменты инерции,  $m^4$ .

После преобразования выражения (1) без учёта малых высшего порядка по сравнению с  $\delta$  и  $g$ , получим:

$$\delta_\gamma = \delta_0 \cos \gamma'_i + g(\cos \gamma'_i - 1) - (u_n - u_e). \quad (2)$$

Угол зоны нагружения  $\psi$  подшипника определяется из выражения (2) при условии  $\delta_\gamma = 0$ , когда  $\gamma'_i = \psi$ :

$$\psi = \arccos \frac{g + u_n - u_e}{g + \delta_0}. \quad (3)$$

С учётом физических уравнений связи деформаций и сил, действующих на шарикоподшипники [8], а также выражения (2)

$$\delta_0 = C_{uu} \cdot F_0^{2/3};$$

$$\delta_1 = \delta_0 \cos \gamma'_1 + g(\cos \gamma'_1 - 1) - (u_n - u_e) = C_{uu} \cdot F_1^{2/3};$$

.....;

$$\delta_n = \delta_0 \cos \gamma'_n + g(\cos \gamma'_n - 1) - (u_n - u_e) = C_{uu} \cdot F_n^{2/3}, \quad (4)$$

где  $C_{uu}$  – постоянная [8], определяемая механическими свойствами материалов и геометрией деталей,  $C_{uu} = 1,31 \cdot \sqrt[3]{[(1 - \mu^2)/E] \cdot (R_1 + R_2)/(R_1 \cdot R_2)}$ ,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Отношение левых и правых частей выражений (4) даёт связь  $F_0$  и  $F_i$

$$\delta_0/\delta_1 = \delta_0 / \left( \delta_0 \cdot \cos \gamma'_1 + g(\cos \gamma'_1 - 1) - (u_n - u_e) \right) = (F_0/F_1)^{2/3};$$

.....;

$$\delta_0/\delta_n = \delta_0 / \left( \delta_0 \cdot \cos \gamma'_n + g(\cos \gamma'_n - 1) - (u_n - u_e) \right) = (F_0/F_n)^{2/3}, \quad (5)$$

откуда:

$$F_1 = F_0 \left( \cos \gamma'_1 + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_1 - 1) - \frac{1}{\delta_0} (u_n - u_e) \right)^{3/2};$$

.....;

$$F_n = F_0 \left( \cos \gamma'_n + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_n - 1) - \frac{1}{\delta_0} (u_n - u_e) \right)^{3/2}. \quad (6)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием сил  $F_r$  и  $F_i$ ,

$$F_r = F_0 + 2F_1 \cdot \cos \gamma'_1 + \dots + 2F_n \cdot \cos \gamma'_n,$$

можно определить силу, действующую на наиболее нагруженный шар:

$$F_0 = F_r / \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^n \cos \gamma'_i \left( \cos \gamma'_i + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_i - 1) - \frac{1}{\delta_0} (u_n - u_\epsilon) \right)^{3/2} \right). \quad (7)$$

При  $g = 0$ ,  $u_n = u_\epsilon = 0$  имеем выражение для силы, действующей на наиболее нагруженное тело качения идеального шарикоподшипника.

Распределение нагрузки  $F_r$  между роликами получено с учётом физических уравнений связи сближений  $\delta_y$  роликов с кольцами и сил  $F_i$ , действующих на ролики [8], а также выражения (2):

$$\begin{aligned} \delta_0 &= C_{p0} \cdot F_0; \\ \delta_1 &= \delta_0 \cos \gamma'_1 + g (\cos \gamma'_1 - 1) - (u_n - u_\epsilon) = C_{p1} \cdot F_1; \\ &\dots; \\ \delta_n &= \delta_0 \cos \gamma'_n + g (\cos \gamma'_n - 1) - (u_n - u_\epsilon) = C_{pn} \cdot F_n, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $C_{pi}$  – переменная от сил  $F_i$ , определяемая механическими свойствами материалов и геометрией деталей [8],

$$C_{pi} = \frac{0,579}{l \cdot E} \left[ \ln \frac{1,727l \cdot E \cdot (R_1 + R_2)}{F_i} + 0,814 \right],$$

$l$  – длина линии контакта.

Отношение левых и правых частей выражений (8) даёт связь  $F_0$  и  $F_i$ :

$$\begin{aligned} \delta_0 / \delta_1 &= \delta_0 / \left( \delta_0 \cos \gamma'_1 + g (\cos \gamma'_1 - 1) - (u_n - u_\epsilon) \right) = c_{p01} (F_0 / F_1); \\ &\dots; \\ \delta_0 / \delta_n &= \delta_0 / \left( \delta_0 \cos \gamma'_n + g (\cos \gamma'_n - 1) - (u_n - u_\epsilon) \right) = c_{p0n} (F_0 / F_n), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c_{p01} = C_{p0} / C_{p1}$ , ...,  $c_{p0n} = C_{p0} / C_{pn}$ ; откуда

$$\begin{aligned} F_1 &= C_{p01} \cdot F_0 \left( \cos \gamma'_1 + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_1 - 1) - \frac{1}{\delta_0} (u_n - u_\epsilon) \right); \\ &\dots; \\ F_n &= C_{p0n} \cdot F_0 \left( \cos \gamma'_n + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_n - 1) - \frac{1}{\delta_0} (u_n - u_\epsilon) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием сил  $F_r$  и  $F_i$ ,

$$F_r = F_0 + 2F_1 \cdot \cos \gamma'_1 + \dots + 2F_n \cdot \cos \gamma'_n,$$

можно определить силу, действующую на наиболее нагруженный ролик:

$$F_0 = F_r / \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^n C_{p0i} \cdot \cos \gamma'_i \left( \cos \gamma'_i + \frac{g}{\delta_0} (\cos \gamma'_i - 1) - \frac{1}{\delta_0} (u_n - u_e) \right) \right). \quad (11)$$

Выражение для сил  $F_i^*$  имеет вид:

$$F_i^* = F_i \times \sin \left\{ \arccos \frac{[0,5d_n - 0,5(d_T - \delta_\gamma) + u_n]^2 + [0,5d_e + 0,5(d_T - \delta_\gamma) + u_e]^2 - (g + \delta_0)^2}{2[0,5d_n - 0,5(d_T - \delta_\gamma) + u_n][0,5d_e + 0,5(d_T - \delta_\gamma) + u_e]} \right\}. \quad (12)$$

Таблица – Результаты расчётов распределения радиальной нагрузки  $F_r$

Число роликов	Уменьш. Диаметра $\Delta \cdot 10^{-5}$ , м	Нагрузка, Н						
		$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_1^*$	$F_2^*$	$F_3^*$
14	4,1	15179	13484	7328	0	4,67	2,13	0
	1,4	15600	13640	7539	0	4,6	2,36	0
	0,8	15690	13624	7596	0	4,17	2,41	0
15	4,0	14476	12984	7755	0	4,34	2,26	0
	1,4	14844	13165	7960	0	4,2	2,43	0
	0,7	14928	13240	8132	0	4,0	2,5	0
16	3,6	13862	12713	8096	0	4,2	2,31	0
	1,3	14212	12808	8320	0	4,05	2,48	0
	0,7	14292	12813	8362	0	3,74	2,47	0

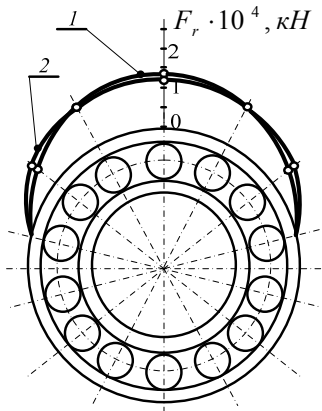


Рис. 2 – Распределение радиальной нагрузки между роликами подш. типа 2726: 1 – по [5]; 2 – по формулам (10, 11).

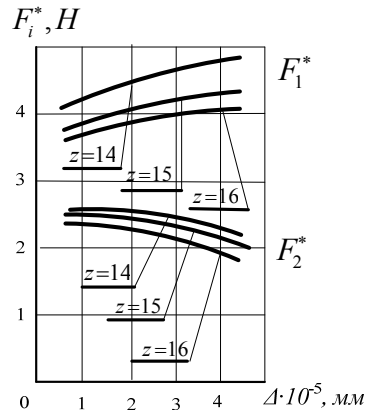


Рис. 3 – Зависимость касательных сил от жёсткости наружного кольца.

Результаты расчётов распределения радиальной нагрузки  $F_r = 50$  кН между цилиндрическими роликами подшипника типа 2726 с радиальным зазором  $g = 10$  мкм по разным методикам и касательных сил  $F_i^*$  в контакте роликов с беговыми дорожками колец для трёх вариантов изгибной жёсткости наружного кольца ( $b = 0,08$  м;  $d_g = 0,222$  м;  $d_n = 0,290, 0,324, 0,358$  м;  $b$  – ширина кольца;  $d_g$  – внутренний диаметр;  $d_n$  – наружный диаметр) с абсолютно жёстким внутренним кольцом приведены в таблице, а графики изменения радиальных  $F_i$  и касательных сил  $F_i^*$  – соответственно на рис. 2 и рис. 3.

Изменение касательных сил в контакте роликов с кольцами в зависимости от конструктивных параметров подшипника типа 2726 (а именно, жёсткости наружного кольца с диапазоном толщин  $h = 0,068 \dots 0,136$  м, с диапазоном количества тел качения в подшипнике  $z = 14 \dots 16$  и соответствующим количеством тел качения в зоне радиального нагружения  $z_n = 5$ ) и радиальной нагрузки  $F_r = 30, 40, 50$  кН показано на рис. 4.

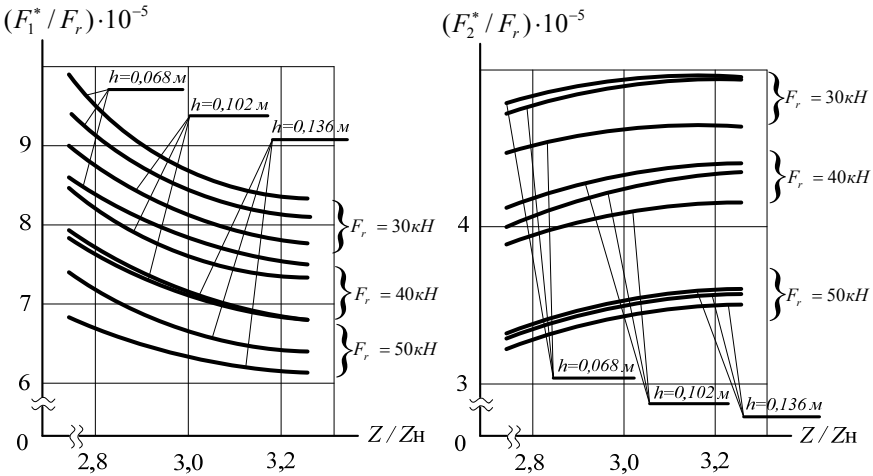


Рис. 4 – Зависимости касательных сил  $F_i^*$  в контакте роликов с кольцами от конструктивных параметров подшипника типа 2726 и радиальной нагрузки.

**Выводы:** Результаты расчёта распределения радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника по предложенной методике с учётом углов контакта тел качения с кольцами, радиального зазора, жёсткости колец и по известной методике отличаются не существенно (до 5 %).

Достоинство предложенной методики состоит в возможности исследо-

вания особенности взаимодействия деталей по краям зоны радиального нагружения подшипника.

Расчёт касательных сил в контакте роликов с кольцами в зависимости от конструктивных параметров на примере подшипника типа 2726 показало, что пятикратное увеличение жёсткости наружного кольца с абсолютно жёстким внутренним способствует повышению ( $\approx 10\%$ ) касательных сил между роликами и кольцами по краям зоны радиального нагружения.

**Список литературы:** 1. *Гайдамака А. В.* Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта // *Вісник НТУ «ХП»*. – Харків, 2013. – № 37 (1010). – С. 26 – 35. 2. *Гайдамака А. В.* Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта и радиального зазора // *Вісник НТУ «ХП»*. – Харків, 2013. – № 54 (1027). – С. 50 – 59. 3. *Перель Л.Я.* Опоры на подшипниках качения в механизмах прокатных станов – М.: Машиностроение, 1972. – 183 с. 4. *Горелик В.С., Богатырёв В.М., Гунько Б.А., и др.* Измерение контактных давлений в подшипниковых узлах с помощью оптически активных моделей / Труды VIII Всесоюзной конференции по методу фотоупругости. – Таллин, 1979. – Т.4. – С. 89 – 90. 5. *Перель Л.Я.* Подшипники качения: Расчёт, проектирование и обслуживание опор: Справочник.– М.: Машиностроение, 1983. – 543 с. 6. *Иванов Б.А., Беломытцев О.М.* Влияние жёсткости сопрягаемых элементов на распределение нагрузки между телами качения в быстроходных радиальных роликоподшипниках / Повышение прочности и эксплуатационной надёжности деталей: Матер.науч.-техн. конф. Пермского политех. ин-та. – 1968. – С. 162 – 168. 7. *Тимошенко С.П.* Сопrotивление материалов. – Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 364 с. 8. *Макушин В.М.* Деформация и напряжённое состояние деталей в местах контакта. – М.: ГНТИ, 1952. – 62 с.

*Поступила в редколлегию 08.01.2014*

---

УДК 621.822

**Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиально-го подшипника: учёт углов контакта, радиального зазора и изгиба колец / А. В. Гайдамака** // *Вісник НТУ «ХП»*. Серия: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 35 – 41. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Уточнено розподіл радіального навантаження між тілами качення ідеального однорядного радіального підшипника з урахуванням кутів контакту тіл качення з кільцями, радіального зазору та згину кільця; розраховані та проаналізовані радіальні та дотичні сили на доріжках качення кільця.

**Ключові слова:** підшипник, тіла качення, навантаження, кут контакту, радіальний зазор, переміщення кільця при згині.

UDC 621.822

**Distribution of the radial load between the rollers of one-row radial bearing: considering contact angles, radial clearance and ring bend. / A.V. Gaidamaka** // *Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies.* – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 35 – 41. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

The distribution of the radial load between the rollers of one-row radial bearing was specified with the angles of contact of rolling elements with rings, radial clearance and ring bend taken into account. The radial and tangential forces on the ring race groove were calculated and analyzed.

**Key words:** bearing rolling elements, load, contact angle, radial clearance, move the rings bending.

**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## МОДЕРНИЗАЦИЯ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСЧЁТА ИНТЕНСИВНЫХ ИМПУЛЬСОВ НАГНЕТЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Использована базовая модель движения вязкой жидкости по трубопроводу, приводящая к телеграфному уравнению. Для моделирования импульсов большой амплитуды дополнительно учтены местные сопротивления и скорости переноса. Показано, что и в этом случае расчёт можно проводить методом характеристик, имеющим постоянный шаг сетки по координате. Влияние скорости переноса сводится к изменению шага сетки по времени, а местное сопротивление при входе, выходе или повороте потока заменяется распределённым. В местах установки дросселей расчётная схема усложняется и включает решения квадратных уравнений.

**Ключевые слова:** гидродинамический расчёт, трубопровод, импульс нагнетания, акустическое приближение, телеграфное уравнение, метод характеристик, инварианты Римана, гидравлическое сопротивление, скорость переноса, расчётная сетка.

### Введение и постановка задачи. После появлением компьютеров для

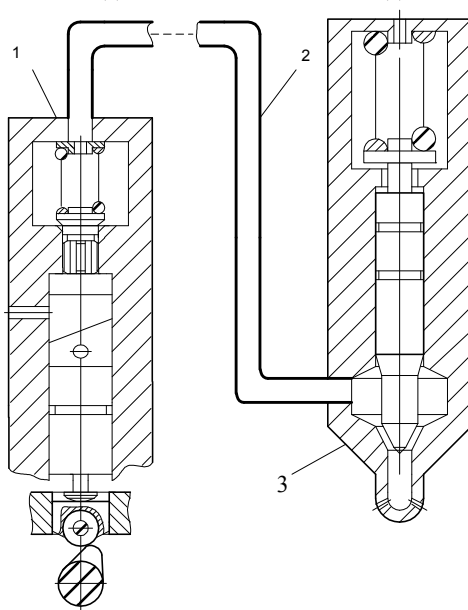


Рис. 1 – Линия высокого давления топливной аппаратуры дизеля:  
1 – насос; 2 – трубопровод; 3 – форсунка.

проектирования многих образцов техники начали разрабатываться специальные программные комплексы, при помощи которых моделировались важнейшие характеристики этих устройств. С течением времени комплексы совершенствовались и усложнялись, переводились на новую техническую базу, что позволяло повысить эффективность и глубину моделирования. В некоторых случаях эта работа продолжалась на протяжении 10 и более лет; такой комплекс становился ядром формирования научной школы и аккумулировал её достижения.

В качестве примеров, имеющих прямое отношение к теме статьи, можно указать на работы [1] и [2], защищенные в МГТУ и в ХПИ по тематике топливной аппаратуры дизелей. Презентованные комплексы продолжают при-

меняться и сейчас; так, развитием работы [2] послужила диссертация [3], использующая математические модели [4, 5]. Учитывая кризис отечественного дизелестроения, приходится искать и другие приложения разработанным методам исследования.

В ряде гидравлических систем, используемых в образцах современной техники, реализуется импульсный режим течения вязкой жидкости по трубопроводам, имеющий высокий коэффициент скажности импульсов. В качестве конкретных примеров можно указать системы подачи горючего и окислителя в камеру сгорания жидкостного ракетного двигателя (ЖРД), а также топливную систему дизельного двигателя (рис. 1, 2).

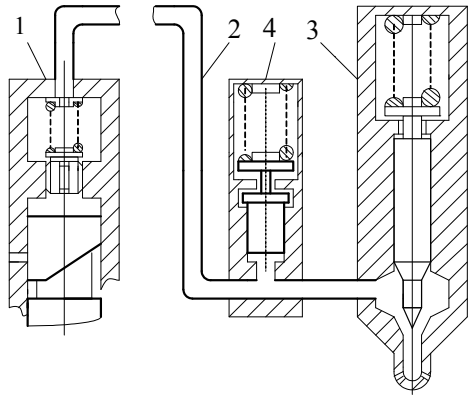


Рис. 2 – Система с модулятором:  
4 – модулятор; остальные поз. – см. рис. 1.

При проектировании систем питания ЖРД расчёт гидромагистралей традиционно производится с использованием дискретной модели В.Ф. Присяжкова [6]. Модель включает уравнения динамики и неразрывности течения жидкости следующего вида:

$$J \ddot{m} = p_{\text{вх}} - p_{\text{вых}} - (\xi / \rho) \cdot \dot{m}^2, \quad C \dot{p} = \Delta \dot{m} + (l / a) \ddot{m}. \quad (1)$$

Здесь  $J = l / f$  – коэффициент инерционных потерь;  $m = \rho l f$  – масса жидкости в рассматриваемом отрезке магистрали, имеющем длину  $l$  и площадь поперечного сечения  $f$ ;  $\rho = m / V$  – её плотность;  $C = \rho V / E$  – коэффициент ёмкостных потерь (акустическая податливость объёма жидкости  $V$ );  $E$  – модуль сжатия жидкости, определяемый с учётом податливости стенок магистрали;  $a$  – скорость распространения звуковой волны по столбу жидкости в трубопроводе;  $p, p_{\text{вх}}, p_{\text{вых}}$  – давления жидкости на данном и соседних участках магистрали;  $\Delta \dot{m}$  – изменение расхода рабочего тела;  $\xi$  – коэффициент гидравлических потерь, учитывающий распределённые  $\xi_{mp}$  и местные  $\xi_M$  сопротивления,

$$\xi = \xi_{mp} + \xi_M.$$

Следует заметить, что уравнение неразрывности (1) носит эвристический характер и даёт хорошее приближение к результатам использования известных уравнений гидромеханики [7] только лишь в области малых частот и больших длин волн, превышающих длину магистрали в 10 и более раз. Указанное ограничение, напр., выполняется для маршевых двигателей верхних ступеней ракетносителей среднего класса, где время срабатывания клапа-



нов в 20...50 раз превышает время распространения звуковой волны по магистрали. Что позволило в [8] с успехом использовать дискретную модель при разработке ЖРД *VG 143 PH «Вега»*. С другой стороны, проводить здесь гидродинамический расчёт, интегрируя уравнения гиперболического типа *методом характеристик* (при котором моделируемый процесс будет длительное время находиться на границе устойчивости), затруднительно и неэффективно.

Но для двигателей малой тяги, используемых в системах ориентации космических аппаратов, время срабатывания клапанов уменьшается на порядок, и это требует изменения используемых методов расчёта. В перспективных образцах таких ЖРД это время снижается до 1...2мс, то есть до уровня, который уже давно достигнут в топливных системах высокооборотных дизелей. Заметим, что в этих системах дискретные модели трубопроводов ещё в 1960-е годы были отброшены как недостаточно точные и заменены на континуальные модели. Но в силу известной специфики систем питания ЖРД (напр., существенного влияния местных сопротивлений, а также наличия начального свободного объёма магистрали, не заполненного нагнетаемой жидкостью) эти континуальные модели могут быть использованы после соответствующей доработки. Некоторые результаты доработки моделей и их апробация на примере расчёта дизельной топливной аппаратуры приведены в данной публикации, другие – указаны в [9] или будут опубликованы позже.

Моделирование импульсного движения жидкости по нагнетательному трубопроводу топливной системы дизеля в [10 – 12] производится в *акустическом приближении* при помощи *телеграфного уравнения*, которое интегрируется *методом характеристик*. В [13] при моделировании учитываются скорости переноса, а получаемая система гиперболических уравнений интегрируется *методом распада разрыва*. При этом влияние местных гидравлических сопротивлений не учитывается, что обусловлено следующими причинами.

В нагнетательном тракте топливной аппаратуры, включающем трубопровод и топливоподводящий канал форсунки, как правило, избегают резких поворотов и изменений площади поперечного сечения потока топлива. Потери энергии в импульсе подачи, вызванные преодолением гидравлического сопротивления во входном и выходном сечениях трубопровода, а также в фильтре форсунки и, возможно, других местах тракта, в значитель-

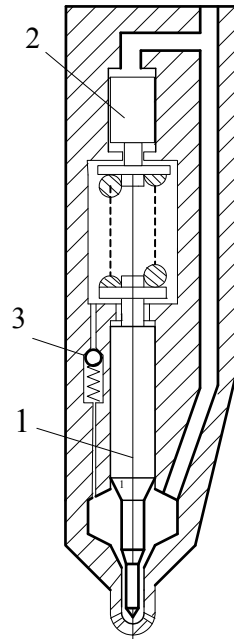


Рис. 3 – Форсунка с дифференциальным поршнем:

- 1 – игла; 2 – поршень;
- 3 – клапан.

ной мере компенсируются увеличением давления топлива в полости насоса и

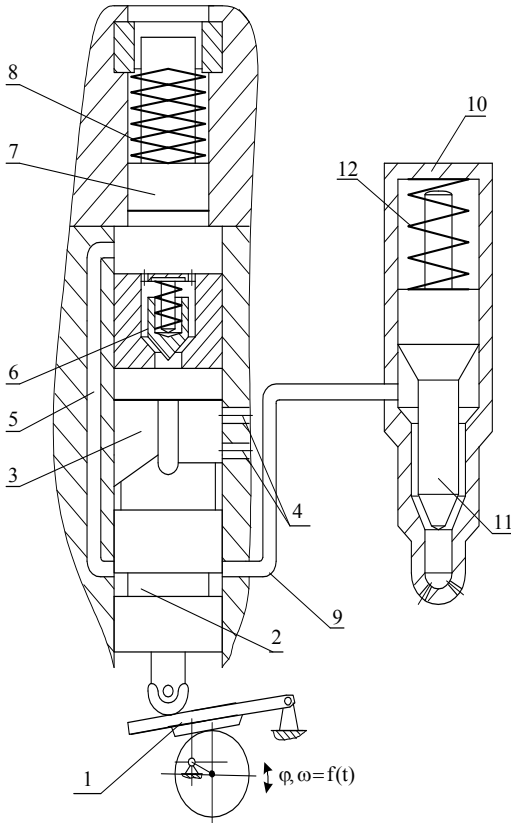


Рис. 4 – Схема топливной аппаратуры СПД:

- 1 – рычажно-эксцентриковый привод;
- 2 – золотниковый канал; 3 – дозирующий плунжер; 4 – дозирующие окна;
- 5, 9 – отрезки трубопровода; 6 – клапан;
- 7 – аккумулирующий плунжер;
- 8 – тарельчатая пружина; 10 – форсунка;
- 11 – игла; 12 – пружина форсунки.

не приводят к существенному изменению основных показателей топливоподачи. Кроме того, для метода характеристик не был определен порядок учета этих сопротивлений, что связано с недостаточной мотивацией для выполнения этой работы.

Такая мотивация возникла в ходе разработки топливных систем интенсивного впрыскивания, использующих *модуляторы импульсов давления* [2, 14] или *дифференциальные* (другое название – *адаптивные поршни* [15]). В системах с модуляторами (рис. 2) или с дифференциальными поршнями (рис. 3) максимальные скорости течения топлива по трубопроводу достигают 100...120 м/с и более, что в 3 – 4 раза превышает их уровень, обычный для данного класса устройств. Соответственно в 10 – 15 раз увеличиваются потери давления, связанные с преодолением местных сопротивлений при входе, выходе и повороте потока.

**Коэффициент сопротивления золотника.** Однако и ранее существовали такие

типы аппаратуры, для которых учет местных гидравлических сопротивлений является не только желательным, но и необходимым элементом их гидродинамического расчета. В первую очередь это относится к топливной аппаратуре (рис. 4), разработанной ЦНИТА для свободно-поршневого двигателя (СПД). Выпуск топлива из аккумуляторной полости 1 топливного насоса 2 производится через дополнительную золотниковую часть нагнетающего

плунжера. Покажем, что влияние золотникового канала может быть учтено как влияние местного гидравлического сопротивления в нагнетательном трубопроводе.

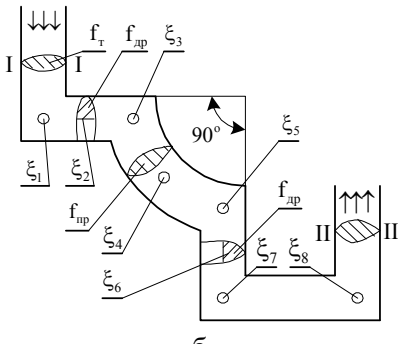
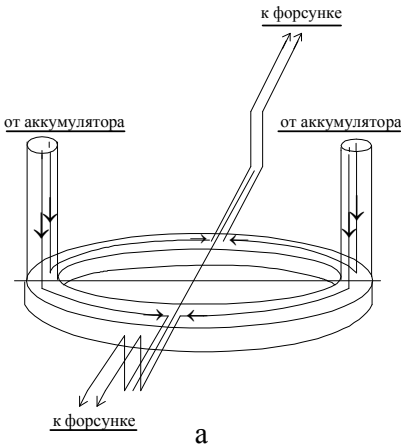


Рис. 5 – Схема золотника:  
а – форма каналов; б – местные сопротивления.

Влияние этого сопротивления приводит к потере (перепаду) давления  $\Delta P_M$  между сечениями I и II (рис. 5 б), связанной с объёмной скоростью  $U_{об}$  топлива в районе сопротивления формулой:

$$(2/\rho)\Delta P_M = \xi_M U_{об} |U_{об}|,$$

где  $\rho$  – плотность топлива, а коэффициент  $\xi_M$  определяется как сумма коэффициентов  $\xi_i$  потерь на отдельных участках гидравлической системы в районе золотника:

$$\xi_M = \sum_{i=1}^8 \xi_i.$$

На рис. 5  $\xi_1, \xi_7, \xi_8$  – коэффициенты потерь при резком повороте потока на  $90^\circ$  в трубопроводе,  $\xi_3, \xi_5$  – в золотниковом канале,  $\xi_4$  – при плавном повороте канала,  $\xi_2, \xi_6$  – при входе и выходе из канала.

Значения этих коэффициентов определяются по диаграммам и формулам справочника [16]:

$$\xi_1 = \xi_7 = \xi_8 = 1.2 / f_m^2; \quad \xi_3 = \xi_5 = 0.96 / f_{np}^2;$$

$$\xi_4 = 0.1 / f_{np}^2;$$

$$\xi_2 = [(1 + ((1 - f_{dp} / f_m) / 2)^{1/2}) / f_{dp} - 1 / f_{np}]^2;$$

$$\xi_6 = [(1 + ((1 - f_{dp} / f_{np}) / 2)^{1/2}) / f_{dp} - 1 / f_m]^2,$$

где  $f_{np}$  – площадь поперечного сечения золотникового канала;  $f_{dp}$  – эффективная площадь проходного сечения дросселя, зависящая от текущей величины  $h_n$  хода плунжера.

При работе аппаратуры коэффициент  $\xi_M$  изменяется от бесконечно больших значений (когда дроссель полностью закрыт) до пренебрежимо малых значений (дроссель полностью открыт). Фактически это означает, что на расстоянии  $l_0$  от начала трубопровода 3 (рис. 6) установлен дроссель 4 с пе-

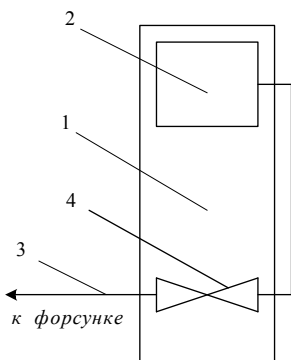


Рис. 6 – Принципиальная схема насоса.

ременным проходным сечением  $f_{op} = f(h_n)$ .

На дросселе создается перепад давлений  $\Delta P_M$ , удовлетворяющий условию

$$\Delta P_M = \xi_M \rho U_M |U_M| / 2, \quad (2)$$

где  $\xi_M$  – коэффициент сопротивления,

$$\xi_M = f_T^2 / f_d^2 - 1;$$

$U_M$  – скорость течения топлива по трубопроводу в районе местного сопротивления.

**Решение модельной задачи.** Покажем, что при выпуске топлива из аккумулялирующего топливного насоса местное гидравлическое сопротивление золотника оказывает существенное значение на давление впрыскивания топлива. Тем самым будет подтверждена необходимость правильного учёта этого фактора при проведении гидродинамических расчётов.

Для этого мы воспользуемся решением модельной задачи, расчётная схема которой приведена на рис. 7. В этой задаче давления топлива в аккумуляляторе  $p_{ak}$  и газов в цилиндре  $p_{ц}$ , а так же эффективные проходные площади золотникового канала  $\mu f_z$  и форсунки  $\mu f_\phi$  считаются известными и постоянными величинами.

В анализируемой системе время распространения волны сжатия или расширения по трубопроводу превышает 1 мс, поэтому на формирование в сечении II – II прямой волны  $F(t)$  отражённые от форсунки волны  $W(t)$  влияния не оказывают. Для оценки максимального давления  $p_{\phi.M}$  топлива в форсунке можно воспользоваться следующей системой соотношений:

$$F(t) = (a\rho)^{-1}(p_{II} - p_{ocm}); W(t) = (a\rho)^{-1}(p_{\phi.M} - p_{II});$$

$$U(L) = F(t - L/a) - W(t); U(0) = F(t);$$

$$\mu f_\phi [(2/\rho)(p_{\phi.M} - p_{ц})]^{1/2} = f_T U(L); \mu f_z [(2/\rho)(p_{ak} - p_{II})]^{1/2} = f_T \cdot U(0),$$

где  $U(x)$  – скорость течения в  $x$ -м сечении трубопровода,  $x \in [0, L]$ .

Результаты расчёта представлены на рис. 8. Графики соответствуют:

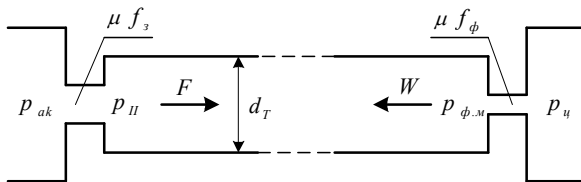


Рис. 7 – Расчётная схема нагнетательного тракта.

1 –  $\mu f_3 = 1.0 \text{ мм}^2$ ; 2 –  $\mu f_3 = 1.5 \text{ мм}^2$ ; 3 –  $\mu f_3 = 2.0 \text{ мм}^2$ ; 4 –  $\mu f_3 = 2.5 \text{ мм}^2$ ;  
остальные параметры составляют:

$$\mu f_\phi = 0.4 \text{ мм}^2; p_u = 10 \text{ МПа};$$

$$p_{ak} = 90 \text{ МПа}.$$

Как следует из этих данных, принятое в исходном варианте значение  $d_T = 2.0 \text{ мм}$  не оптимально и должно быть увеличено до уровня 2.5...3.0 мм.

Увеличение (в момент формирования максимального импульса  $F$ ) площади  $\mu f_3$  с уровня 1.0...1.5 мм<sup>2</sup> до 2.0...2.5 мм<sup>2</sup> позволит повысить давления впрыскивания на 20...30 МПа и превысить максимальное давление топлива в аккумуляторе. Для использования этого резерва увеличения интенсивности впрыскивания надо изменить геометрию золотника, резко увеличив скорость его открытия. В рамках принятой схемы проблема увеличения площади сечения золотника решалась за счёт увеличения диаметра трубопровода.

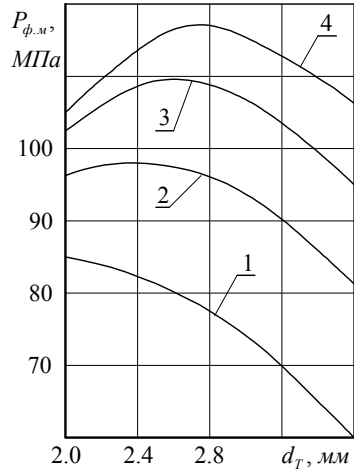


Рис. 8 – Зависимость давления  $p_{ф.м}$  от диаметра  $d_T$  и площади  $\mu f_3$ .

### Коэффициенты местных сопротивлений нагнетательного тракта.

Приведём ещё несколько примеров коэффициентов потерь на преодоление местных гидравлических сопротивлений, возникающих в нагнетательном тракте дизельной топливной аппаратуры.

Так, при входе потока в трубопровод из объема штуцера насоса  $\xi_m = 0.5$ , при выходе из трубопровода в карман распылителя форсунки  $\xi_m = 0$  (в соответствии с законом потерь скоростей [16] здесь полностью теряется скоростной напор, но давление изменяется непрерывно). При повороте потока на 90° в кольцевой проточке распылителя дизеля Д80  $\xi_m = 1.2$  (рис. 9); такой же коэффициент потерь отвечает движению топлива по кольцевой проточке модулятора импульсов давления, схема которого показана на рис. 10.

Для щелевого фильтра форсунки (рис. 11) коэффициент местного сопротивления вычисляется по формуле

$$\xi_{м.ф} = [0.5 \mu \delta l_k i_k / f_T]^2,$$

где  $\delta$  – диаметральный зазор между стержнем и корпусом фильтра;  $l_k, i_k$  – длина канавок на поверхности стержня и их общее число;  $\mu = 0.7...0.9$ .

Значение коэффициента  $\mu$  зависит от относительной глубины и ширины канавок, а также степени загрязнённости фильтра при эксплуатации. По данным работы [17] для форсунки дизеля Д 70 зарегистрированные в экспериментах потери давления в фильтре отвечают коэффициенту  $\xi_{м.ф} = 2...5$ .

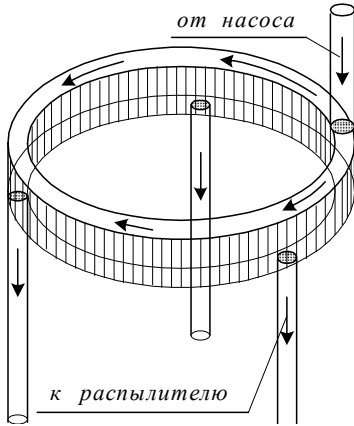


Рис. 9 – Схема распределения топлива в форсунке тепловозного дизеля.

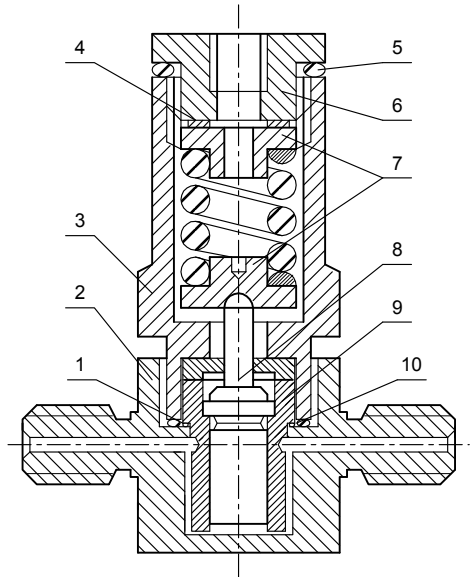


Рис. 10 – Конструкция модулятора:

1, 5, 10 – уплотнительные кольца; 2 – корпус; 3 – стакан; 4 – регулировочная прокладка; 6 – нажимной штуцер; 7 – тарелка пружины; 8 – плунжер; 9 – втулка.

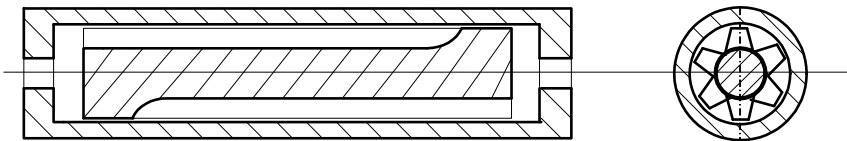


Рис. 11 – Схема щелевого фильтра.

**Метод эквивалентной замены местного сопротивления распределённым гидравлическим сопротивлением.** Для учета местных гидравлических сопротивлений, которым отвечает коэффициент потерь  $\xi_m < 10$ , выполним модернизацию базовой методики гидродинамического расчета [12], разработанной Ю.Я. Фоминым. В рамках этой методики движение жидкости по нагнетательному трубопроводу моделируется системой уравнений

$$\{ (1/(a^2 \rho)) \partial P / \partial t = -\partial U / \partial x ; \partial U / \partial t = -(1/\rho) \partial P / \partial x - 2KU, \quad (3)$$

которая после исключения давления  $P$  приводится к виду

$$(1/a^2)\partial^2 U/\partial t^2 - \partial^2 U/\partial x^2 + (2K/a^2)\partial U/\partial t = 0 \quad (4)$$

и интегрируется на пространственно-временной сетке "  $x - t$  " вдоль характеристик

$$x - at = const ,$$

где  $a$  – скорость звука в трубопроводе с жидкостью,

$$a = 1/\sqrt{(\alpha + [(R^2 + r^2)/(R^2 - r^2) + \mu_{mp}]/E_{mp})\rho} ;$$

$\alpha$  – коэффициент сжимаемости;  $R, r$  – наружный и внутренний радиус трубопровода;  $E_{mp}, \mu_{mp}$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона для его материала;  $K$  – фактор гидравлического сопротивления трубопровода, вычисляемый в зависимости от режима течения топлива и значения средней по сечению скорости  $U(x, t)$  по формулам Пуазейля, Блазиуса или Идельчика [12]:

$$K(U) = 4\nu/r^2 \text{ – для ламинарного потока,}$$

$$K(U) = [0.079\sqrt[4]{\nu/2r}/(2r)] |U|^{3/4} \text{ – для переходной области,}$$

$$K(U) = [1/([1.14 + 2\lg(2r/\delta r)]^2 16r)] |U| \text{ – для турбулентного потока,}$$

$\nu$  – вязкость жидкости;  $\delta r$  – шероховатость трубопровода.

Конечноразностный аналог уравнения (4) имеет вид:

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = K\Delta t (u_{i,j+1} + u_{i-1,j} - u_{i,j} - u_{i-1,j-1}), \quad (5)$$

где  $u_{i,j} = U(i\Delta x, j\Delta t)$ ,  $i \in \overline{1 \dots (n-1)}$ ,  $j \geq 0$ ;  $\Delta t$  – шаг интегрирования уравнения (4) по времени;  $\Delta x$  – шаг интегрирования по координате;  $\Delta x = a\Delta t$ .

На концах характеристики первое уравнение системы (3) порождает граничные условия, в которых используются давления  $p_{i,j} = P(i\Delta x, j\Delta t)$ :

$$u_{0,j+1} + u_{0,j-1} - 2u_{1,j} = (a\rho)^{-1}(p_{0,j+1} - p_{0,j-1});$$

$$2u_{n-1,j} - u_{n,j+1} - u_{n,j-1} = (a\rho)^{-1}(p_{n,j+1} - p_{n,j-1}).$$

Уравнения для граничных условий интегрируются совместно с жёсткими системами дифференциальных уравнений, описывающих гидромеханические узлы (насос, форсунку, модулятор); специально разработанные для этой цели консервативные схемы расчёта описаны в [18].

Чтобы избежать использования сеток с подвижными границами, шаг  $\Delta x$  остаётся постоянным для всего расчёта и определяется по формуле

$$\Delta x = l/n ,$$

где  $n$  – число расчётных отрезков трубопровода; обычно  $n = 50 \dots 200$ .

При этом шаг  $\Delta t$  зависит от скорости звука, и в ходе расчёта его величина отклоняется от среднего значения на 10 – 15%.

В методе [12] использовалось два упрощения: величина скорости звука  $a$  определялась по давлению  $P(0, t)$ , что обеспечивало прямолинейность характеристики. Этим же давлением определялась величина вязкости жидко-

сти, которая использовалась при вычислении фактора  $K$ .

Но различным узлам характеристики отвечает разное давление, и изменение скорости звука вдоль характеристики при интенсивном нагнетании углеводородного (либо другого жидкого) топлива может достигать 20 – 30%. Поэтому от первого упрощения следует отказаться, и считать, что *скорость звука определяется величиной текущего давления*  $P(x,t)$ , а характеристика имеет искривлённую форму.

Что касается второго упрощения, то его следует сохранить: для внутренних узлов трубопровода давления жидкости по этому методу расчёта не определяются, а влияние гидравлического сопротивления не велико. Поэтому коэффициент  $K \Delta t$  из правой части формулы (5) можно вычислять, как в [12], либо, что, как правило, приносит меньшую погрешность – по среднему давлению, определённом для начала и конца текущей характеристики.

Несимметричный шаблон (рис.12), использованный в правой части равенства для аппроксимации первой производной, обеспечивает (по сравнению с обычной разностной формулой) дополнительную устойчивость метода, но если ниже считать величину  $\Delta t$  фиксированным параметром, отвечает изменённому дифференциальному уравнению:

$$(1/a^2)\partial^2 U / \partial t^2 - \partial^2 U / \partial x^2 + (2K/a^2)\partial U / \partial t = (K\Delta t/a)\partial^2 U / \partial t \partial x. \quad (6)$$

Поэтому для сходимости метода нужно иметь возможность пренебречь правой частью уравнения (4), то есть выполнить условие

$$K \Delta t \ll 1.$$

При учёте гидравлического сопротивления трубопровода, как правило, получаем оценку  $K \Delta t < 0.001$ , но влияние местных сопротивлений окажется большим, и для технических приложений достаточно иметь

$$K \Delta t < 0.05. \quad (7)$$

В используемой математической модели величина  $2KU\rho\Delta x$  определяет потерю давления  $\Delta P_{распр}$ , связанную с преодолением гидравлического сопротивления трубопровода на его отрезке длиной  $\Delta x$ . Поэтому имеется возможность использовать эту же модель для учёта местных гидравлических сопротивлений.

Пусть местное сопротивление  $\xi_m$  расположено на отрезке трубопровода между расчетными точками  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ . Определим фактор местного гидравлического сопротивления  $K_m$  формулой

$$K_m = \xi_m / (4 \Delta x) U_m$$

и при вычислении фактора  $K$  для расчета скорости жидкости  $U$  в узле  $x = x_0 + \Delta x$  прибавим к его значению величину  $K_m$ .

Тогда выражение  $2K_m U_m \rho \Delta x$ , как несложно проверить, совпадёт с изменением давления  $\Delta P_m$ , определяемым равенством (2).



**Универсальный метод учёта местного гидравлического сопротивления.** Описанный в предыдущем пункте метод учета местных сопротивлений прост, но, к сожалению, не универсален. Условие (7) с учетом соотношения  $\Delta x = a \Delta t$  приводит к неравенству

$$\xi_m \cdot [|U_m| / (4a)] < 0.05,$$

которое эквивалентно условиям

$$\xi_m < 5 \text{ или } \xi_m < 2.5 \quad (8)$$

для топливной аппаратуры традиционного типа (где  $U_m < 50 \text{ м/с}$ ) или для новых систем интенсивного впрыскивания (где  $U_m < 120 \text{ м/с}$ ).

Условия (8), как это показано выше, выполняется с достаточным запасом для большинства местных сопротивлений, которые встречаются в топливной аппаратуре. При расчёте щелевого фильтра учитывается, что его длина отвечает суммарной длине нескольких расчётных участков,

$$l_k > \Delta x,$$

и общий коэффициент потерь  $\xi_{m,\phi}$  равномерно распределяется на все эти участки.

Однако это условие не выполняется, например, для дросселя (рис. 5) если  $f_{dp} < f_T / 2$ ; поэтому для данного случая пришлось разрабатывать другой, более сложный метод.

На рис. 12 показаны три характеристики, которые используются в базовой методике [12] для последовательного расчета скоростей топлива  $U$  в узлах пространственно-временной сетки. Сечению трубопровода у дросселя соответствует индекс  $i_0$ . Как и в методе [14], в отрезках трубопровода, непосредственно примыкающих к сечению  $i_0$ , будем

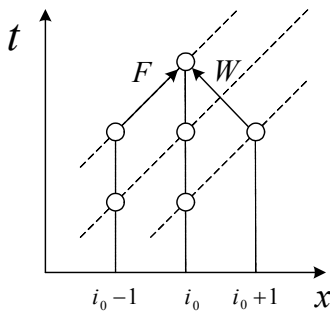


Рис. 12 – Расчётные узлы метода характеристик.

пренебрегать влиянием гидравлического сопротивления трубопровода (здесь  $K_m \gg K$ ). Тогда для данных отрезков будут справедливы соотношения одномерного волнового процесса колебаний, основанные на представлении полей скоростей и давлений топлива в виде суперпозиции прямых и отраженных волн. Используя эти соотношения, несложно получить следующие формулы для определения прямой  $F$  и отраженной  $W$  волн давления, показанных на рис.12:

$$F = 0.5(P_d - p_{ост} - a\rho U_m) + a\rho U_d; \quad W = 0.5(P_n - p_{ост} - a\rho U_m) - a\rho U_n, \quad (9)$$

где  $P_d, P_n$  – давления топлива до и после дросселя;  $p_{ост}$  – остаточное дав-

ление топлива;  $U_m, U_l, U_n$  – скорости топлива в сечениях трубопровода с индексами  $i_0, i_0 - 1, i_0 + 1$ , соответственно.

Все величины, используемые в формулах (9), соответствуют 1-ой (нижней) характеристике, и поэтому их значения известны. Запишем уравнения для узла  $i_0$ , попадающего на 3-ью (верхнюю) характеристику (соответствующие значения будем помечать знаком "\*"),

$$2F = P_l^* - p_{ocm} + a\rho U_m^*; \quad 2W = P_n^* - p_{ocm} - a\rho U_m^*;$$

и, преобразовав их с учетом равенств (6), получим

$$\Delta P_m^* + 2a\rho U_m^* = \Delta P + 2a\rho(U_l + U_n - U_m), \quad (10)$$

где

$$\Delta P = P_l - P_n; \quad \Delta P^* = P_l^* - P_n^*.$$

Перепад давлений  $\Delta P^*$  и скорость топлива  $U_m^*$  связаны соотношением:

$$\sqrt{\xi_m} U_m^* = \sqrt{(2/\rho) |\Delta P_m^*|} \operatorname{sign}(\Delta P_m^*). \quad (11)$$

Для решения системы уравнений (10), (11) обозначим:

$$y = \sqrt{\Delta P_m^*}; \quad s = \operatorname{sign}(\Delta P^*); \quad A = a\rho\sqrt{2/(\rho\xi_m)}; \quad B = 2a\rho(U_l + U_n - U_m).$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$y^2 + 2Ay - Bs = 0,$$

и его положительное решение определится формулой

$$y = -A + \sqrt{A^2 + |B|},$$

причём знак перепада давлений  $\Delta P_m^*$  совпадёт со знаком коэффициента  $B$ , то есть

$$s = \operatorname{sign}(B).$$

Выполним обратные замены и найдём искомые величины

$$\Delta P_m^* = y^2 s \quad \text{и} \quad U_m^* = Ays/(a\rho).$$

Таким образом, в рамках данного метода учет местного сопротивления удалось свести к решению квадратного уравнения, а число переменных, постоянно хранимых в памяти компьютера, увеличилось на единицу (новая переменная – величина перепада давлений  $\Delta P_m^*$ ). Ясно, что указанные изменения не влияют на общую трудоемкость алгоритма гидродинамического расчета дизельной топливной аппаратуры.

**Обобщение и примеры использования методов учёта местных сопротивлений.** Описанный в предыдущем пункте метод был использован для расчёта топливной системы, схема которой показана на рис. 4, 5. На графиках рис. 13, 14 используются, в основном, принятые выше обозначения; кроме того величины  $h_k, h_{ak}$  обозначают перемещения клапана насоса и плунжера

аккумулятора, а  $P_{II}$ ,  $P_a$  – давления топлива в сечении  $II-II$  магистрали и в

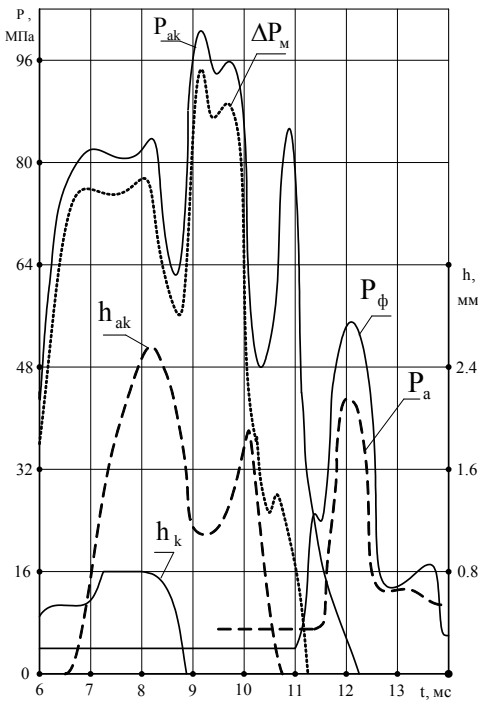


Рис. 13 – Результаты гидродинамического расчёта базового образца топливной системы СПД.

использован для гидродинамического расчета топливной аппаратуры дизеля Д80, у которого площади топливоподводящих каналов до и после кольцевой проточки распылителя различаются в два раза [21].

Метод замены местного сопротивления на эквивалентное распределённое сопротивление использовался при гидродинамических расчётах топливной системы дизеля 4 ДТНА 1, описание которой дано в [22]. Учёт местных сопротивлений привёл к заметному изменению основных характеристик процесса впрыскивания: в сопоставимых условиях расчётного эксперимента максимальное давление в форсунке уменьшилось на 4 – 6%. Для этой аппаратуры влияние местных сопротивлений оказалось сопоставимым с влиянием распределённого гидравлического сопротивления, которое традиционно учитывается при её гидродинамических расчётах.

**Приближённый учёт скоростей переноса.** В топливных системах интенсивного впрыскивания максимальные скорости движения жидкости по

колодце распылителя форсунки. Штриховкой выделены импульсы нагнетания для насоса и форсунки оптимизированного варианта. Порядок оптимизации этой топливной системы описан в [19, 20].

Этот же метод был обобщен на случай, когда трубопровод до и после дросселя имеет различные площади внутреннего сечения –  $f_{T.l}$  и  $f_{T.n}$ . Здесь в узле  $i_0$  происходит скачкообразное изменение линейной скорости  $U$  течения жидкости, но объемная скорость  $Q$  остается непрерывной. Оказалось, что если определять скорость жидкости  $U_m$  в узле  $i_0$  по правилу

$$U_m = 0.5(1/f_{T.l} + 1/f_{T.n}) \cdot Q,$$

то есть как полусумму её значений до и после узла, то все расчетные формулы метода останутся прежними.

В таком виде метод был использован

трубопроводу достигают 6 – 8 % от величины скорости звука, и для повышения точности моделирования желательнее отказаться от использования акустического приближения и учесть влияние скорости переноса. Уточненные уравнения системы (2) приобретут следующий вид:

$$\begin{aligned} \{\partial P / \partial t + U \partial P / \partial x = -a^2 \rho \partial U / \partial x; \\ \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x = \\ = -\rho^{-1} \partial P / \partial x - 2KU. \end{aligned} \quad (12)$$

В [13] систему (12) интегрируют при использовании *инвариантов Римана* и метода распада разрыва; в современной прикладной гидромеханике такой подход к решению проблемы по праву считается универсальным и наилучшим, поскольку он, напр., позволяет учесть изменение температуры жидкости, от чего зависят её физические характеристики. Но расчёт дизельной топливной аппаратуры обладает тремя особенностями:

- перенос жидкости в основном осуществляется в одном направлении (от насоса или аккумулятора к форсунке);
- в области больших скоростей прямые волны давления преобладают над обратными волнами,  $|F| \gg |W|$ ;
- пиковые значения *числа Маха* удовлетворяют условию  $M < 0.1$ , а средние значения – условию  $M < 0.01$ ;
- длина трубопровода невелика, и изменения давления и скорости в импульсе подачи не приводит к образованию ударной волны.

Далее мы покажем, что благодаря этим особенностям гидродинамический расчёт можно и далее проводить в акустическом приближении, если скорректировать значение скорости звука  $a$ .

Действительно, от системы (12) можно перейти к уравнениям для инвариантов Римана  $\sigma_+, \sigma_-$ :

$$\partial \sigma_+ / \partial t - (a + U) \partial \sigma_+ / \partial x = -2KU, \quad \partial \sigma_- / \partial t + (a - U) \partial \sigma_- / \partial x = -2KU, \quad (13)$$

где

$$d\sigma_+ = dU + dP / (a\rho), \quad d\sigma_- = dU - dP / (a\rho).$$

Инварианты распространяются вдоль характеристик

$$x - (a + U)t = const \quad \text{и} \quad x + (a - U)t = const.$$

Поскольку значение и влияние обратного инварианта  $\sigma_-$  мало, уравне-

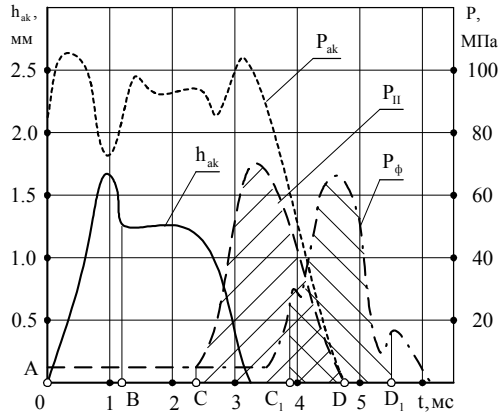


Рис.14 – Динамические характеристики оптимизированного образца.

ния (13) можно приближённо заменить такими:

$$\partial\sigma_+/\partial t - (a+U)\partial\sigma_+/\partial x = -2KU ; \partial\sigma_-/\partial t + (a+U)\partial\sigma_-/\partial x = -2KU , \quad (14)$$

то есть искусственно изменить коэффициент наклона обратной характеристики (для анализируемого случая – максимум на 16%).

В акустическом приближении (3) также можно перейти к уравнениям для инвариантов Римана  $\sigma_+, \sigma_-$  (здесь их чаще называют *затухающими волнами Даламбера* и обозначают  $F, W$ , см. рис. 12):

$$\partial\sigma_+/\partial t - a\partial\sigma_+/\partial x = -2KU , \quad \partial\sigma_-/\partial t + a\partial\sigma_-/\partial x = -2KU . \quad (15)$$

Структура уравнений (14) и (15) одинакова. Поэтому, если для уравнений (14) выбрать шаг интегрирования по времени в соответствии с формулой  $\Delta t = \Delta x/(a+U)$ ,

то для расчёта скоростей жидкости в трубопроводе можно использовать метод характеристик и рекуррентное равенство (5).

Описанный подход был использован при гидродинамических расчётах топливной системы дизеля 4 ДТНА 1, и привёл к незначительному уточнению результатов. Так, в сопоставимых условиях расчётного эксперимента максимальное давление в насосе и в форсунке после учёта конвекции уменьшилось соответственно на 1% и на 0.5%, а запаздывание начала подачи сократилось на 1.5%. Поэтому привлекать здесь для учёта скорости переноса более точные и сложные математические модели, использующие трудоёмкие методы расчёта, не целесообразно.

**Общее замечание относительно использования методов, уточняющих результаты моделирования.** При разработке новых или уточнении известных математических моделей сложных технических устройств не следует забывать, что любая модель – это идеализация, имеющая некоторую относительную погрешность определения основных характеристик. По величине допустимой погрешности обычно различают *модели первого уровня* (с допустимой погрешностью 5...10%), *модели второго уровня* (погрешность 1...2 %) и *модели высокого уровня* (погрешность меньше 0.5%).

С понятной долей условности процесс уточнения характеристики  $f(X)$  можно представить в виде последовательного суммирования начального отрезка степенного ряда:

$$f(X) \approx \sum_{j=0}^N a_j X^j , \quad (16)$$

где  $N$  обозначает уровень модели. Пусть  $a_j = f^{(j)}(0)/j!$ , тогда, как правило, внутри круга сходимости увеличение  $N$  повышает точность результата. Но если коэффициенты  $a_j$  имеют другие значения, то при увеличении  $N$  точность результата может понижаться.

Если вернуться к задаче моделирования, то каждый коэффициент будет результатом наложения многих факторов, действующих примерно в одну силу. Учесть все влияющие факторы практически не возможно, а при увеличе-

нии числа учитываемых факторов можно нарушить достигнутый баланс и вместо повышения точности получить ухудшение. Критерием отбора служит практика (качество соответствия расчётных и экспериментальных данных).

Методы гидродинамического расчёта дизельных топливных систем, описанные в [12], используют модели второго уровня точности. Модернизация метода характеристик, описанная выше, позволила сохранить этот уровень моделирования и применить имеющийся пакет прикладных программ для анализа новых систем интенсивного впрыскивания. Другие возможные приложения этого метода (например, для расчёта пуско-отсечных клапанов систем питания ЖРД) ждут своей проверки в эксперименте.

**Выводы.** Выполнена модернизация метода характеристик, актуальная для расчёта интенсивных импульсов нагнетания жидкости по трубопроводу, которая позволила учесть следующие физические эффекты:

- влияние местных сопротивлений при входе, выходе и повороте потока, а также в местах установки дросселей;
- изменение скорости звука в зависимости от величины давления;
- влияние переноса жидкости на скорость распространения импульсов нагнетания и их форму.

Описаны примеры использования модернизированного метода для расчёта топливных систем тепловых двигателей.

**Список литературы:** 1. *Грехов Л.В.* Научные основы разработки систем топливоподачи в цилиндры двигателей внутреннего сгорания: автор. дис... докт. техн. наук. – М., 1999. – 32 с. 2. *Григорьев А.Л.* Разработка универсальных методов гидродинамического расчёта, динамического анализа и оптимизационного синтеза основных элементов топливной аппаратуры дизелей: автор. дис... докт. техн. наук. – Харьков, 2004. – 40 с. 3. *Врублевский А.Н.* Научные основы создания аккумуляторной топливной системы для быстроходного дизеля: автор. дис... докт. техн. наук. – Харьков, 2010. – 36 с. 4. *Врублевский А.Н., Григорьев А.Л., Грицюк А.В., и др.* Особенности математического моделирования гидромеханических процессов электрогидравлической форсунки // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков, 2007. – №1. – С.44 – 52. 5. *Врублевский А.Н., Григорьев А.Л., Бовда А.М.* Математическая модель быстродействующего электромагнита для топливной системы ДВС // Автомобильный транспорт. – Сб. науч. труд. – Харьков: 2006. – Вып.19. – С.138 – 143. 6. *Присяжков В.Ф.* Динамика жидкостных ракетных двигательных установок. – М.: Машиностроение, 1983. – 248 с. 7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. – 736 с. 8. *Бойко В.С.* Усовершенствование электромагнитных клапанов жидкостных ракетных двигателей верхних ступеней ракет-носителей. – Дис... канд. техн. наук. – Днепропетровск, 2013. – 186 с. 9. *Григорьев А.Л.* Использование интегралов Дюамеля для расчёта импульсов давления и скорости течения вязкой жидкости по трубопроводу // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2013. – № 54(1027). – С.63 – 86. 10. *Астахов И.В., Трусов В.И., Хачиян А.С. и др.* Подача и распыливание топлива в дизелях. – М.: Машиностроение, 1972. 11. *Крук Б.А.* Методика гидродинамического расчёта топливоподачи дизелей // Труды ЦНИГА. – 1969 – Вып.40 – С.12 – 16. 12. *Фомин Ю.Я.* Гидродинамический расчет топливных систем дизелей с использованием ЭЦВМ.–М.: Машиностроение, 1973. 13. *Грехов Л.В.* Топливная аппаратура и системы управления дизелем / Л.В. Грехов, Н.А. Иващенко, В.А. Марков.– М.: Легион-Автодата, 2004. – 344 с. 14. *Григорьев О.Л., Врублевский О.М.* Математична модель для гідродинамічного розрахунку паливної системи з модулятором імпульсів тиску впорскування палива // Теплоенергетичні установки та екологія на залізничному транспорті. – Харків: ХарДАЗТ, 1998. – Вып. 32. – С.87 –92. 15. *Грицюк А.В., Врублевский А.Н., Щербаков Г.А., Овчинников А.А.* Выбор параметров адаптивного задания топливоподачи автомобильного дизеля 4СН8,8/8,2 в условиях моторного стенда // Двига-

тели внутреннего сгорания. – Харьков, 2012. – №1. – С. 10 – 13. **16.** Справочник по гидравлике // Под редакцией В.А.Большакова. – К.: Вища школа, 1984. **17.** Васильченко И.Д., Еремеева Л.Н. Исследование гидравлических характеристик щелевых фильтров форсунки дизеля Д80 // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: Вища школа, 1978. – Вып.27. – С. 78 – 81. **18.** Григорьев А.Л., Георгян Ю.Л. Алгоритмы интегрирования жёстких уравнений клапанных гидромеханических узлов // Вісник НТУ «ХП». – Харків, 2012. – №54(960). – С.39 – 55. **19.** Григорьев А.Л. Особенности гидродинамического расчёта топливного насоса высокого давления с подпружиненным аккумулярующим плунжером // Вестник ХГПУ – Вып. 68. – 1999. – С. 3 – 10. **20.** Григорьев А.Л., Хесин А.Я. Оптимизация параметров аккумулярующей топливной аппаратуры с пружинным приводом плунжера // Вестник ХГПУ. – Харьков, 2000 – Вып. 89 – С. 97 – 104. **21.** Єроценков С.А., Григор'єв О.Л., Зонов В.Д. Математичне моделювання процесу паливоподачі в форсунках спеціальної конструкції // Теплоенергетичні установки та екологія на залізничному транспорті. Збірник наукових праць. – Харків, ХарДАЗТ. – 2001. – Вип. 45. – С. 82 – 88. **22.** Абрамчук Ф.І., Альохін С.О., Блов О.М., та інші. Техніко-економічне обґрунтування необхідності державної підтримки у виконанні інноваційно-інвестиційного проекту «Розроблення та впровадження у виробництво малолітражного автомобільного дизеля потужністю 100-175 к.с. подвійного призначення (Слобожанський дизель)». – Харків: ХНАДУ, 2012. – 162 с.

Поступила в редколлегию 27.01.2014

---

УДК 539.1

**Модернизация метода характеристик для расчёта интенсивных импульсов нагнетания жидкости / А. Л. Григорьев // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 42 – 58. Бібліогр.: 22 назв. – ISSN 2222-0631.**

Використано базову модель руху в'язкої рідини по трубопроводу, яка приводить до телеграфного рівняння. Для моделювання імпульсів значної амплітуди додатково враховані місцеві опори та швидкості переносу. Показано, що і в цьому випадку розрахунок можна проводити методом характеристик, який має постійний крок сітки за координатою. Вплив швидкості переносу зводиться до зміни кроку сітки за часом, а місцевий опір при вході, виході або повороті потоку змінюється на розподілений. У місцях установки дроселів розрахункова схема ускладнюється і включає розв'язання квадратних рівнянь.

**Ключові слова:** гідродинамічний розрахунок, трубопровід, імпульс нагнітання, акустичне наближення, телеграфне рівняння, метод характеристик, інваріанти Римана, гідравлічний опір, швидкість переносу, розрахункова сітка.

UDC 539.1

**Modernization of the method of characteristics for calculating intensive fluid pumping pulses / A. L. Grigoriev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 42 – 58. Bibliog.: 22 titles. – ISSN 2222-0631.**

We use the basic model of motion of viscous fluid through a conduit leading to the telegraph equation. To model large-amplitude pulses the local resistances and the transfer rates are additionally taken into account. It is shown that in this case the calculation can be carried out by the method of characteristics in a regular coordinate grid. The influence of the transfer rate is reduced to changing the grid step in time, and the local resistance at the input, output, or flow reversal point is replaced by the distributed one. In the choke installation locations the calculation scheme becomes more complicated and involves solving quadratic equations.

**Key words:** hydrodynamic calculation, conduit, pumping pulse, acoustic approximation, the telegraph equation, the method of characteristics, Riemann invariants, hydraulic resistance, transfer rate, computational grid.

*С.Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО*, ст. пр., НТУ «ХП»

## АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЛЕВИТАНА В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Рассмотрены асимптотически почти периодические функции Левитана. Приведена теорема единственности и некоторые свойства этих функций. Доказано, что квазиравномерная сходимость этих функций (а также асимптотически почти периодических и асимптотически почти автоморфных функций) не выводит из их класса.

**Ключевые слова:** асимптотически почти периодические функции, асимптотически почти автоморфные функции, асимптотические почти периодические функции Левитана, квазиравномерная сходимость.

**Введение.** Настоящая работа является продолжением исследований автора в области квазиравномерной сходимости абстрактных функций, начатых в статьях [2 – 5]. В этих статьях было установлено, что квазиравномерная сходимость переводит непрерывные, почти периодические, почти автоморфные и Левитановские почти периодические функции в функции того же класса.

Наряду с указанными выше абстрактными функциями, асимптотически почти периодические (а.п.п.) и их обобщение – асимптотически почти автоморфные (а.п.а.) функции имеют значительный практический интерес. Асимптотически почти периодические функции были введены *Фреше* [10] в 1941 г. Сейчас эти классы абстрактных функций широко используются в теории дифференциальных уравнений. Основные свойства а.п.п. и а.п.а. функций хорошо изучены и могут быть найдены в [13] и [1], соответственно.

Отметим, что как для асимптотически почти периодических, так и для асимптотически почти автоморфных функций до настоящего времени рассматривалась только равномерная сходимость. В данной работе показано, что не только равномерная, но и более слабая, такая как – квазиравномерная сходимость, переводит асимптотические функции в функции того же вида.

Кроме того, автором введен новый более широкий класс асимптотических функций – *асимптотически почти периодические функции Левитана* (а.Л.-п.п.), обобщающие а.п.п. и а.п.а. функции. При этом а.Л.-п.п. функции, в отличие от предыдущих двух классов, могут быть неограниченными. Доказано, что квазиравномерная сходимость для таких достаточно общих асимптотических функций, также не выводит из класса а.Л.-п.п.

**Обозначения и определения.** Рассматриваются функции, заданные на оси  $\mathbb{R}$  и на полуоси  $\mathbb{R}^+ = [0; \infty)$  со значениями в *пространстве Фреше*  $Y$ . То-



пология пространства  $Y$  задается либо счетной системой полунорм  $p_\alpha(\cdot)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ , либо метрикой

$$\rho(x; y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{p_\alpha(x-y)}{1+p_\alpha(x-y)}.$$

Обобщение почти периодических функций впервые рассмотрел Б. М. Левитан (см. [7], [8]). В настоящей работе будем опираться на критерий Б. Я. Левина [6] с поправкой А. Райха [10].

**Критерий Левина L-почти периодичности.** Для того чтобы непрерывная функция  $f(t) : R \rightarrow Y$  была Левитановской почти периодической (L-п.п.) функцией необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности вещественных чисел  $\{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$  можно было извлечь подпоследовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которой

$$\lim_{\min(m,n) \rightarrow \infty} f(t + \xi_m - \xi_n) = f(t), \quad \forall t \in (-\infty; \infty). \quad (1)$$

В работе [2] показано, что Левитановские почти периодические функции являются непрерывными на оси в естественной топологии и в топологии  $\mathfrak{T}_N$ , порожденной окрестностями

$$B_{N,\varepsilon,f} = \left\{ \tau \in R : \sup_{x \in N} \rho(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon \right\},$$

где  $N$  – конечное множество чисел,  $\varepsilon > 0$ . Множества  $B_{N,\varepsilon,f}$  являются относительно плотными на интервале  $(-\infty; \infty)$ . Компактные L-п.п. функции называются почти автоморфными функциями [3], [10], [11].

**Определение 1.** Непрерывная функция  $f(t) : R^+ \rightarrow Y$ , называется асимптотически почти периодической функцией Левитана (a.L-п.п.), если она представима в виде:

$$f(t) = g(t) + w(t), \quad (2)$$

где  $g(t)$  является непрерывной L-п.п. функцией на  $(-\infty; \infty)$ , а функция  $w(t)$  является непрерывной на множестве  $[0; \infty)$  со значениями в пространстве Фреше и  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ .

**Определение 2.** Последовательность непрерывных функций  $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $f_n(t) : R \rightarrow Y$  называется квазиравномерно сходящейся к функции  $f(t)$  по всем подпоследовательностям, если:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ ,  $t \in (-\infty; \infty)$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\forall N > 0$   $\exists$  конечное число индексов  $n_1, n_2, \dots, n_k$  таких, что  $\inf_{1 \leq i \leq k} \rho(f_{n_i}(t), f(t)) < \varepsilon$ ,  $t \in (-\infty; \infty)$ ,  $N < n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ;

3. Условие 2 справедливо и для любой подпоследовательности функций  $\{f_{s_n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Теорема единственности.** Основной вопрос, связанный с представлением (2) – это единственность представления.

**Теорема 1.** Представление асимптотически почти периодической функции Левитана  $f(t) = g(t) + w(t)$  единственно,  $t \in [0; \infty)$ .

*Доказательство.* Допустим, что существуют хотя бы два представления

$$f(t) = g_1(t) + w_1(t) \quad \text{и} \quad f(t) = g_2(t) + w_2(t),$$

где  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$  Л-п.п. функции на  $(-\infty; \infty)$ , а  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$  непрерывные функции,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w_2(t) = 0, \quad t \in [0; \infty).$$

Тогда

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t) = w_2(t) - w_1(t).$$

Рассмотрим последовательность  $\{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которой

$$\xi'_1 \geq 1, \quad \xi'_{m+1} \geq 2\xi'_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

и выберем из нее подпоследовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{\xi'_n\}_{n=1}^{\infty}$  так, чтобы выполнялось равенство (1) одновременно для функций  $g_1(t)$  и  $g_2(t)$ . В силу выбора будем иметь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \xi_{n+1} - \xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g_1(t + \xi_{n+1} - \xi_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} g_2(t + \xi_{n+1} - \xi_n) = g_1(t) - g_2(t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} w_2(t + \xi_{n+1} - \xi_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(t + \xi_{n+1} - \xi_n) = 0, \quad \forall t \in (-\infty; \infty). \end{aligned}$$

Предел вычисляется для каждой точки отдельно. Функции  $w_1(x)$  и  $w_2(x)$  определены для неотрицательных аргументов, и поэтому для каждого  $t$  при вычислении предела используются только неотрицательные аргументы  $t + \xi_{n+1} - \xi_n$ . Это возможно так, как  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_{n+1} - \xi_n) = \infty$ , и начиная с некоторого номера  $n$  аргументы  $t + \xi_{n+1} - \xi_n$  положительны. Тогда

$$g_2(t) = g_1(t), \quad \forall t \in (-\infty; \infty) \quad \text{и} \quad w_2(t) = w_1(t), \quad t \in [0; \infty),$$

что доказывает единственность представления.

**Замечание.** Приведенное доказательство единственности представления справедливо и для асимптотически почти периодических и асимптотически почти автоморфных функций. Все они являются асимптотически Л-почти периодическими функциями. Другое доказательство для асимптотически почти

периодических функций дано в работе [12], а для асимптотически почти автоморфных функций – в работе [1].

**Свойства асимптотически почти периодических функций Левитана.**

Легко видеть, что выполняются следующие свойства этих функций.

1. Сумма и разность двух а.L-п.п. функций является а.L-п.п. функцией.

Если заданы а.L-п.п. функции  $f_1(t) = g_1(t) + w_1(t)$  и  $f_2(t) = g_2(t) + w_2(t)$ , то

$$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t) = [g_1(t) \pm g_2(t)] + [w_1(t) \pm w_2(t)].$$

Алгебраическая сумма двух L-п.п. функций  $g_1(t) \pm g_2(t)$  является L-п.п. функцией. Из свойств предела следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} [w_1(t) \pm w_2(t)] = 0$ . Следовательно,  $f(t)$  также является а.L-п.п. функцией.

2. Произведение ограниченной числовой а.L-п.п. функции  $k(t)$  и ограниченной абстрактной а.L-п.п. функции  $f(t)$  является а.L-п.п. функцией.

$$k(t)f(t) = [k_g(t) + k_w(t)][g(t) + w(t)] = [k_g(t)g(t)] + [k_g(t)w(t) + g(t)k_w(t) + k_w(t)w(t)].$$

Произведение  $k_g(t)g(t)$  двух L-п.п. функций является L-п.п. функцией. Каждое слагаемое суммы  $k_g(t)w(t) + g(t)k_w(t) + k_w(t)w(t)$  является произведением двух функций, первая из которых ограничена, а вторая имеет предел 0. Следовательно, предел этой суммы равен нулю. Таким образом, произведение  $k(t)f(t)$  является а.L-п.п. функцией.

**Теорема 2.** Квазиравномерный предел асимптотически почти периодических функций Левитана также является асимптотически почти периодической функцией Левитана.

Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма.** Пусть последовательность функций  $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}, f_n(t): R^+ \rightarrow Y$  квазиравномерно сходится к функции  $f(t)$  по всем подпоследовательностям. Тогда, если для последовательности чисел  $\{h_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \in [0; \infty)$  и для  $\forall t \in (-\infty; \infty)$  выполняются условия: 1)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} h_\beta = +\infty$ ; 2)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} f_n(t + h_\beta) = \varphi_n(t), n \in N$ ; 3)  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} f(t + h_\beta) = \varphi(t)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), t \in (-\infty; \infty)$ , причем последовательность  $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  квазиравномерно сходится по всем подпоследовательностям к функции  $\varphi(t)$  и возможна, перестановка пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_n(t + h_\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t + h_\beta). \tag{4}$$

*Доказательство.* Допустим, что хотя бы для одной точки  $t_0$  предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t_0)$  не существует или не равен  $\varphi(t_0)$ . Тогда  $\exists \varepsilon_0 > 0$  и для  $\forall N$  найдется бесконечное множество номеров  $n > N$ , что

$$\rho(\varphi_n(t_0), \varphi(t_0)) \geq \varepsilon_0.$$

Рассмотрим подпоследовательность функций  $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  с этими номерами. Она сходится квазиравномерно, так как есть квазиравномерная сходимость по всем подпоследовательностям. Не ограничивая общности, будем считать, что это первоначальная последовательность с номерами 1, 2, 3, ... .

Сначала заметим, что из квазиравномерной сходимости последовательности непрерывных функций  $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  по всем подпоследовательностям следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  и для любой бесконечной последовательности чисел  $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $z'_n \geq 0$  существует номер  $n_0$  и бесконечная подпоследовательность  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которых

$$\rho(f_{n_0}(z_n), f(z_n)) < \varepsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Это легко показать по определению 2, заметив, что номеров  $\{n_i\}_{i=1}^{i=k}$  конечное число, а последовательность  $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$  содержит бесконечное число элементов. Тогда, для одного из номеров  $n_0$  найдется бесконечное число элементов  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которых выполняется неравенство (5).

Согласно этому замечанию по числу  $\varepsilon_0/3$  и последовательности чисел  $\{t_0 + h'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$  выбираем индекс  $n_0$  и подпоследовательность  $\{t_0 + h'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$  так, чтобы

$$t_0 + h'_\beta \geq 0, \quad \rho(f_{n_0}(t_0 + h'_\beta), f(t_0 + h'_\beta)) < \frac{\varepsilon_0}{3}, \quad \beta = 1, 2, 3, \dots$$

Используя поточечную сходимость последовательности  $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ , по числу  $\varepsilon_0/3$  выбираем  $M_1$  так, чтобы

$$t_0 + h'_\beta \geq 0, \quad \rho(f(t_0 + h'_\beta), \varphi(t_0)) < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{для } \beta > M_1.$$

Также для функции  $f_{n_0}(t)$  находим  $M_2$ , чтобы

$$t_0 + h'_\beta \geq 0, \quad \rho(f_{n_0}(t_0 + h'_\beta), \varphi_{n_0}(t_0)) < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{для всех } \beta > M_2.$$

Тогда для всех  $\beta > \max\{M_1, M_2\}$  имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\leq \rho(\varphi(t_0), \varphi_{n_0}(t_0)) \leq \rho(\varphi(t_0), f(t_0 + h'_\beta)) + \\ &+ \rho(f(t_0 + h'_\beta), f_{n_0}(t_0 + h'_\beta)) + \rho(f_{n_0}(t_0 + h'_\beta), \varphi_{n_0}(t_0)) < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \text{ для любого } t \in (-\infty; \infty).$$

Из квазиравномерной сходимости последовательности  $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  к функции  $f(t)$  следует, что если задано  $\varepsilon > 0$ , то для любого  $\varepsilon_1$ ,  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$  и индекса  $N$  существуют индексы  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ( $n_i > N, i = 1, 2, \dots, k$ ) такие, что

$$\inf_{1 \leq i \leq k} \rho(f_{n_i}(t'), f(t')) < \varepsilon_1, \forall t' \in [0; \infty).$$

Неравенство верно и для любого  $t' = t + h'_\beta, t + h'_\beta \geq 0, t \in (-\infty; \infty)$ ,

$$\inf_{1 \leq i \leq k} \rho(f_{n_i}(t + h'_\beta), f(t + h'_\beta)) < \varepsilon_1.$$

Из этого неравенства вытекает, что при любом фиксированном  $t \in (-\infty; \infty)$  из конечности чисел  $n_1, n_2, \dots, n_k$  следует, что для бесконечной подпоследовательности  $\{h''_\beta\}_{\beta=1}^{\infty} \subset \{h'_\beta\}_{\beta=1}^{\infty}$  существует индекс  $n_j(t) \in \{n_j\}_{j=1}^k$ , и выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_{n_j(t)}(t), \varphi(t)) &= \lim_{\beta} \rho(f_{n_j(t)}(t + h''_\beta), f(t + h''_\beta)) = \\ &= \lim_{\beta} \inf_{1 \leq j \leq k} \rho(f_{n_j}(t + h''_\beta), f(t + h''_\beta)) \leq \varepsilon_1 < \varepsilon, \\ \inf_{1 \leq j \leq k} \rho(\varphi_{n_j}(t), \varphi(t)) &\leq \rho(\varphi_{n_j(t)}(t), \varphi(t)) < \varepsilon, \forall t \in (-\infty; \infty). \end{aligned}$$

Последовательность  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  квазиравномерно сходится к функции  $\varphi(t)$  выполняя условия 1 и 2 определения 2. Так как последовательность  $\{f_n(t)\}$  сходится квазиравномерно по всем подпоследовательностям, то и последовательность  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  сходится также квазиравномерно по всем подпоследовательностям к функции  $\varphi(t)$ , то есть выполняется и условие 3 определения 2.

Справедливость равенств (4) следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} f_n(t + h_\beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} f(t + h_\beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t + h_\beta), \\ t &\in (-\infty; \infty), t + h_\beta \geq 0. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы.

*Доказательство теоремы.* Пусть последовательность  $f_n(x)$  сходится квазиравномерно к функции  $f_0(x)$ , и  $\{\xi'_m\}_{m=1}^{\infty}$  – произвольная последовательность, которая имеет бесконечный предел. Из нее выбираем подпоследовательность  $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$  так, чтобы:

$$\text{а) } \tau_m = \xi_{m+1} - \xi_m > 0, \lim_m \tau_m = +\infty;$$

б) существовали все пределы  $\lim_m g_n(t + \tau_m) = g_n(t)$ ,  $\lim_m w_n(t + \tau_m) = 0$ ,  $\lim_m f_n(t + \tau_m) = g_n(t)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; в)  $g_0(t) = \lim_m f_0(t + \tau_m)$ .

Для обеспечения условия а) можно взять последовательность  $\{\xi_m\}_{m=1}^{\infty}$  из теоремы 1. Для обеспечения условия б) надо воспользоваться *критерием Левина* и применить его последовательно ко всем функциям  $g_n(t)$ , а потом использовать *канторовский диагональный процесс*. Для диагональной последовательности будет выполняться условие а),  $\lim_m g_n(t + \tau_m) = g_n(t)$  для любого  $n$ . Так как каждая из функций  $f_n(t)$  является а.Л.-п.п., то

$$\lim_m w_n(t + \tau_m) = 0, \quad \lim_m f_n(t + \tau_m) = g_n(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для обеспечения условия в) используем то, что последовательность функций  $f_n(x)$  сходится квазиравномерно к функции  $f_0(x)$ , а также лемму, где  $\varphi_n(t) = g_n(t)$ ,  $h_\beta = \tau_m$ . Тогда для любого  $t$

$$g_0(t) = \lim_m f_0(t + \tau_m) = \lim_m \lim_n f_n(t + \tau_m) = \lim_n \lim_m f_n(t + \tau_m) = \lim_n g_n(t).$$

Используя лемму, получаем, что последовательность  $g_n(t)$  сходится квазиравномерно к  $g_0(t)$ .

Согласно [5] квазиравномерный по всем подпоследовательностям предел Л.-п.п. функций является Л.-п.п. функцией. Пусть  $w_0(t) = f_0(t) - g_0(t)$ . Тогда последовательность  $w_n = f_n - g_n$ , сходится квазиравномерно к  $f_0 - g_0 = w_0$  и

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} w_0(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} [f_0(t) - g_0(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_n [f_n(t) - g_n(t)] = \\ &= \lim_n \lim_{t \rightarrow \infty} [f_n(t) - g_n(t)] = \lim_n \lim_{t \rightarrow \infty} w_n(t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, предельная функция  $f_0(x)$  является а.Л.-п.п. функцией.

**Замечание.** Теорема 2 справедлива и для асимптотически почти периодических функций и для асимптотически почти автоморфных функций. В этих случаях используются теоремы из [4] и [5].

**Выводы.** Любую асимптотически почти периодическую функцию Левитана единственным образом можно представить как сумму почти периодической функции Левитана и непрерывной функции с пределом, равным нулю на бесконечности. Квазиравномерный предел асимптотически почти периодической функции Левитана (асимптотически почти периодической, асимптотически почти автоморфной функций) является асимптотически почти

периодической функцией Левитана (асимптотически почти периодической, асимптотически почти автоморфной) функцией.

**Список литературы:** 1. *Bugajewski D., N'Guérékata G. M.*, Almost periodicity in Fréchet spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 299 (2004) 534 – 549 2. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Представление  $L$  – почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе // *Вісник національного технічного університету «ХПІ»*. – 68'2010, Харків, – С. 65 – 75. 3. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Почти автоморфные функции как компактные непрерывные функции на группе. // *Вісник національного технічного університету «ХПІ»*. – 27'2012, Харків, – С. 82 – 85. 4. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Необходимые и достаточные условия сходимости почти периодических функций. Сборник статей по результатам международной конференции Тараповские чтения 2012: «Современные проблемы математики, механики и информатики». – ХНУ имени В. Н. Каразина. Механико-математический факультет: Изд-во „Апостроф”, – 2012, – С. 332 – 338. 5. *Димитрова-Бурлаенко С. Д.* Квазиравномерный предел левитановских почти периодических функций. // *Вісник національного технічного університету «ХПІ»*. – 54'2013, Харків, – С. 111 – 117. 6. *Левин Б.Я.* О почти периодических функциях Левитана // *УМЖ*. – Т.1, № 1. – 1949, – С. 49 – 101. 7. *Левитан Б. М.* Новое обобщение почти периодических функций Н. Bohr'a // *Зап. Харьк. ин-та матем. и матем. о-ва*, XV, №2, 1938. 8. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, Московский университет – 1978. – С. 204. 9. *Frechet M.* Fonctions Asymptotiquement Presque-Periodiques, *Revue Scietifique (Revue Rose Illustree)*vol. 79, 341 – 354, (1941). 10. *Reich A.* Präkompakte Gruppen and Fastperiodizität // *Math. Z.* – 116, – P. 216 – 234. 11. *Veech W. A.* Almost automorphic functions on groups // *Amer. J. Math.*, 87. – №3. – 1965. – P. 719 – 751. 12. *Zaidman S.* Almost-periodic functions in abstract spaces. // *Pitman Advanced Publishing Program*, Boston, London, Melbourne, 1985.

*Поступила в редколлегию 20.02.2014*

---

УДК 513.88

**Асимптотически почти периодические функции Левитана в пространствах Фреше / С. Д. Димитрова-Бурлаенко** // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 59 – 66. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглянуто асимптотично майже періодичні функції Левітана. Наведено теорема про єдине рішення і деякі властивості цих функцій. Доказано, що квазірівномірна збіжність цих функцій (а також асимптотично майже періодичних функцій та асимптотично майже автоморфних функцій) не виводить з цього класу.

**Ключові слова:** асимптотично майже періодичні функції, асимптотично майже автоморфні функції, асимптотично майже періодичні функції Левітана, квазірівномірна збіжність.

UDC 513.88

**Asymptotically almost periodic Levitan's functions in the Freshet space / S. D. Dimitrova-Burlayenko** // *Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies*. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 59 – 66. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

Asymptotically almost periodic Levitan's functions are considered. The uniqueness theorem and some properties of these functions are shown. It was proven that the quasi-uniform limit of these functions (as well as asymptotically almost periodic and asymptotically almost automorphic functions) belongs to the same functional class.

**Key words:** asymptotically almost periodic Levitan's functions, asymptotically almost periodic functions, asymptotically almost automorphic functions, quasi-uniform convergence.

**Г.Й. ЗАЙОНЧКОВСЬКИЙ**, д-р техн. наук, проф., НАУ, Київ;  
**Я.Б. ФЕДОРИЧКО**, інж., ПАТ «КЦКБА», Київ

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ЗМІН ТЕХНІЧНОГО СТАНУ МАЛОГАБАРИТНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ КЛАПАНІВ**

Розроблено математичні моделі експлуатаційних змін технічного стану малогабаритних електромагнітних пневматичних клапанів з використанням стохастичної теорії накопичення пошкоджень в елементах і вузлах клапана в процесі відпрацювання ресурсу. На прикладі клапана з електромагнітним поляризованим двопозиційним приводом розглянуто застосування розроблених моделей для визначення ресурсних можливостей клапана на етапі його проектування.

**Ключові слова:** електромагнітний клапан, стохастична модель, експлуатаційні зміни, технічний стан, руйнування, відмова, ресурс, критичний елемент.

**Вступ.** Накопичений досвід розробки і експлуатації малогабаритних електромагнітних клапанів (ЕМК) для систем обладнання виробів авіакосмічної техніки [1] показує, що особливостями їх функціонування є:

- циклічність спрацювання;
- імпульсний характер переміщення і контактування рухомої системи клапана з нерухомими елементами конструкції під час спрацювання.

Останнє призводить до того, що в зоні контактування елементи конструкції клапана зазнають впливу динамічних навантажень великої інтенсивності, внаслідок яких в матеріалі деталей виникають значні динамічні напруження. Це сприяє розвитку різних процесів утомленості та зношування в елементах і вузлах клапана, що призводить до їх руйнування після певного напрацювання в експлуатації. У більшості випадків ресурс клапана визначається міцністю його критичних елементів, що зазнають значних експлуатаційних навантажень.

Визначення ресурсних можливостей ЕМК зазвичай проводиться на підставі результатів стендових випробувань. Такий спосіб встановлення і обґрунтування ресурсу клапанів є дуже затратним і тривалим за часом, а у зв'язку зі значним збільшенням необхідних ресурсів клапанів для сучасної авіакосмічної техніки дуже актуальною стає задача зменшення обсягів стендових ресурсних випробувань за рахунок впровадження науково обґрунтованих методик прогнозування ресурсних можливостей клапанів на етапі їх проектування за результатами аналізу експлуатаційних змін технічного стану клапанів-аналогів і прискорених ресурсних випробувань клапанів, що проектуються. Однією з таких методик є *метод прогнозування ресурсу ЕМК* на підставі математичного моделювання можливих змін його технічного стану під дією експлуатаційних навантажень в процесі вироблення ресурсу та виявлення критичних елементів конструкції клапана, що лімітують його ресурсні можливості.



**Аналіз останніх досліджень.** Питанням експлуатаційної надійності малогабаритних ЕМК та аналізу змін їх технічного стану під час експлуатації за останній час приділяється достатньо велика увага [2 – 8]. В роботах [1 – 3] дано аналіз досягнутого рівня експлуатаційної надійності малогабаритних ЕМК з електромагнітним приводом (ЕМП) та типових відмов клапанів, що мають місце в процесі виробітку ресурсу. В роботі [4] розглянуто питання прогнозування можливих змін функціональних параметрів ЕМК в експлуатації. Робота [5] присвячена особливостям застосування метода прикінцевих елементів для визначення напруженого стану деталей конструкції ЕМК з двопозиційним електромагнітним приводом під час його закриття та відкриття. Значна увага приділена питанням вибору запасів працездатності пневматичних ЕМК [6 – 8], авторами розроблено інженерні методики визначення запасів працездатності малогабаритних пневматичних клапанів на етапі проектування. В той же час потребують подальшого розвитку наукові основи математичного моделювання процесів зміни технічного стану ЕМК під дією експлуатаційних навантажень під час вироблення ресурсу.

Враховуючи викладене вище, актуальною є розробка універсальної математичної моделі для оцінки можливих змін технічного стану критичних елементів конструкції малогабаритних ЕМК, що лімітують їх ресурс.

**Постановка задачі.** Для оцінки ресурсних можливостей ЕМК, що проектується, розглядається *задача розробки математичної моделі експлуатаційних змін технічного стану ЕМК з використанням стохастичної теорії накопичення пошкоджень в елементах і вузлах клапана в процесі вироблення ресурсу.* Для їх розробки була використана основана на *центральної граничній теоремі* ймовірнісна модель підсумовування пошкоджень в елементах авіаційних двигунів, описана в роботі *А.М. Ветрова і О.Г. Кучера* [9].

**Математична модель експлуатаційних змін технічного стану ЕМК.** В її основу було покладено ймовірнісну модель накопичення пошкоджень в конструктивних елементах і вузлах ЕМК.

Найявний досвід розробки і експлуатації малогабаритних ЕМК, які використовуються в авіакосмічній техніці, дозволяє зробити висновок, що експлуатаційні зміни в елементах і вузлах ЕМК під час вироблення ресурсу пов'язані з накопиченням невідновних пластичних деформацій, розвитком процесів утомленості, зносу, наклепу та іншими необоротними змінами технічного стану елементів і вузлів клапана. На розвиток цих процесів, в свою чергу, впливають зовнішні випадкові фактори – зміни умов роботи та параметрів навантаження деталей ЕМК в процесі експлуатації.

Слід відзначити, що під час дії кожного одиночного випадкового чи регулярного навантаження в матеріалі деталей клапана відбувається елементарний акт накопичення невідновних деформацій (прирошення пошкоджень), величина і характер якого є випадковою функцією механічних характеристик матеріалу, величин напружень, числа циклів спрацьовування та інших фак-

торів. Процес накопичення пошкоджень в ЕМК у цьому випадку можна розглядати як результат підсумовування великого числа рівномірно малих мікрострибків елементарних пошкоджень.

Позначимо через  $B_i$  величину пошкоджень в  $i$ -му елементарному циклі спрацьовування клапана. Тоді за  $n$  циклів спрацьовування величина накопичених пошкоджень (накопичена пошкоджуваність)  $B_n^\Sigma$  виразиться сумою

$$B_n^\Sigma = \sum_{i=1}^n B_i . \quad (1)$$

У виразі (1) величини  $n$ ,  $B_i$  і  $B_n^\Sigma$  випадкові. За деякий період часу, коли  $n$  досить велике, у силу центральної граничної теореми і зроблених припущень про ймовірнісний характер навантажень, накопичена пошкоджуваність  $B_n^\Sigma$  збігається до нормального розподілу. Такий процес накопичення пошкоджень в елементах і вузлах ЕМК можна розглядати як випадковий процес з незалежними прирощеннями, побудований за типом *марковської послідовності*.

Відзначимо, що для оцінки накопичення пошкоджень в конструктивних елементах і вузлах ЕМК можна розглядати зміну основних вихідних параметрів клапана, або непрямих параметрів, які достатньо добре відтворюють характер основних фізичних процесів накопичення пошкоджень в елементах конструкції ЕМК. Наприклад, зміну ходу золотника клапана з двопозиційним електромагнітним приводом в процесі експлуатації [4]. У цьому випадку характеристики випадкового процесу накопичення пошкоджень також можуть бути визначені, досліджені і прогнозовані стохастичними методами.

Оцінку накопичення пошкоджень в конструктивних елементах і вузлах ЕМК під час експлуатації можна також проводити аналогічним чином і у випадку, коли за *елементарну пошкоджуваність* прийняти *феноменологічну пошкоджуваність* (відносну довговічність, відносну деформацію тощо) за один елементарний цикл дії навантаження (під час одиничного спрацьовування клапана). Число циклів у цьому випадку є величиною детермінованою, що за відомої середньої тривалості циклу характеризує також і час навантаження.

Накопичення пошкоджень в деталях ЕМК в процесі експлуатації призводить до втомного руйнування *критичної деталі* клапана [2]. В якості критеріїв втомного руйнування деталей технічних виробів в інженерних розрахунках широко використовуються *деформаційні* [2, 9, 10] та *енергетичні* [6, 8] *критерії*. Їх відмінність полягає в тому, що в першому випадку накопичення пошкоджень від утоми обумовлене процесами, пов'язаними з циклічним деформуванням, а в другому – з накопиченням енергії руйнування матеріалу конструктивних елементів клапана.

Використання деформаційних критеріїв втомного руйнування дозволяє більш ґрунтовно підійти до гіпотези підсумовування пошкоджень від утоми. Найбільш сприйнятливою для оцінки ресурсних можливостей ЕМК є *лінійна*

гіпотеза підсумовування пошкоджень, відповідно до якої сума пошкоджень  $B_i$ , які в цьому випадку є відносними довговічностями, дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n B_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i(\sigma_i, \alpha_\tau)} = 1,$$

де  $n_i$  – число циклів напрацювання клапана за напруженням  $\sigma_i$ ;  $N_i$  – довговічність для цього ж рівня напруження у випадку стаціонарного навантаження;  $\alpha_\tau$  – параметр, що характеризує статистичне розсіювання властивостей міцності матеріалу конструктивного елемента (деталі) клапана.

Слід відзначити, що у кожному окремому циклі навантаження випадкова величина пошкоджуваності може приймати різні значення, обумовлені різною інтенсивністю силових впливів та стохастичним розсіюванням властивостей матеріалу конструктивного елемента клапана. Проте під час кожного спрацювання клапана в процесі навантаження є відома частка регулярності. *Чим вища якість матеріалу елемента та конструкції клапану, тим менший має бути розкид характеристик та діючих навантажень в кожному циклі, а з цим і менше розсіювання пошкоджуваностей.* Це дозволяє припустити, що ці випадкові величини елементарних пошкоджуваностей та сумарні пошкоджуваності, що накопичуються в деталях ЕМК, підкоряються одному і тому самому закону розподілу. Тоді можна вважати, що для стохастично незалежних пошкоджуваностей за цикл описаний процес є однорідним випадковим процесом з незалежними прирощеннями.

Імовірнісні характеристики закону розподілу пошкоджуваностей в деталях ЕМК можна визначити за допомогою усереднення ймовірнісних характеристик за  $n$  циклів навантаження.

Відзначимо два типи випадкових процесів (послідовностей), що мають місце під час вироблення ресурсу ЕМК і які будуть розглядатися надалі. Це, по-перше, вихідний процес виникнення елементарних пошкоджуваностей в конструктивних елементах (деталях) клапана

$$B'(t_1), B'(t_2), \dots, B'(t_n)$$

і породжений ним процес накопичення пошкоджень, тобто процес формування в конструктивних елементах клапана накопиченої пошкоженості

$$B^\Sigma(t_1) = B'(t_1), B^\Sigma(t_2) = B'(t_1) + B'(t_2), \dots, B^\Sigma(t_n) = \sum_{i=1}^n B'(t_i)$$

Перший з цих процесів можна також називати *прирощенням процесу накопичення пошкоджень*, оскільки

$$B^\Sigma(t_i) - B^\Sigma(t_{i-1}) = B'(t_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином, для процесу накопичення пошкоджень в конструктивних елементах клапана за  $n$  циклів навантаження можна записати співвідношення

$$B^\Sigma(t_n) = \sum_{i=1}^n B^\Sigma(t_i) - B^\Sigma(t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n B'(t_i), \quad B^\Sigma(t_0) = 0, \quad (2)$$

де  $B'(t)$  і  $B^\Sigma(t)$  – випадкові процеси елементарних пошкоджуваностей та накопиченої пошкодженості.

У випадку, коли замість процесів розглядають випадкові послідовності, співвідношення (2) приймає вигляд

$$B_n^\Sigma = \sum_{i=1}^n B_i', \quad (3)$$

де  $B_i'$  і  $B_n^\Sigma$  – випадкові величини пошкоджуваності за цикл і накопиченої пошкодженості.

Використовуючи гіпотезу лінійного підсумовування пошкоджень, маємо

$$B^\Sigma(t) = \int_0^t B'(t) dt.$$

З фізичної точки зору процес  $B'(t)$  являє собою миттєву швидкість зміни пошкоджуваності конструктивного елемента клапана. Для процесів (2) і послідовностей (3) цей процес є середньою лінійною швидкістю зміни пошкоджуваності в конструктивному елементі клапана за цикл. Надалі штрих у позначенні величини  $B_i'$  буде опускатися; для пошкоджуваності за цикл прийнято позначення  $B_i$  чи  $B_j$ , а для накопиченої пошкодженості –  $B_n^\Sigma$ .

У розглянутій вище моделі (3) накопичена пошкодженість є сумою великого числа незалежних випадкових величин, що характеризують елементарні пошкоджуваності, які у своїй сукупності підпорядковані єдиному закону розподілу  $F_n(B)$ , що не обов'язково повинен мати нормальний характер. До таких послідовностей відносяться процеси пошкоджуваності з сильним перемішуванням. При цьому накопичена сума, відповідно до центральної граничної теореми, задовільно апроксимується нормальним розподілом. Для оцінки числових характеристик пошкоджуваності за  $n$  циклів, якщо відомі значення елементарних пошкоджуваностей за кожен цикл навантаження, можна скористатися відомими формулами для оцінки математичного очікування та вибіркової дисперсії [11]:  $m = M[B]$ ;  $S^2 = D[B] = M[(B - m)^2]$ .

Приймаючи припущення, що закон розподілу накопичених пошкоджуваностей близький до нормального (це потім знайшло своє підтвердження за результатами обробки експериментальних даних ресурсних випробувань ЕМК), було розроблено імовірнісні моделі підсумовування як незалежних, так і залежних випадкових пошкоджуваностей в конструктивних елементах і вузлах клапана.

Слід зазначити, що в загальному випадку між пошкодженнями в  $i$  та  $j$  циклах можуть існувати кореляційні зв'язки, які можуть суттєво впливати на характер зміни імовірнісних характеристик накопиченої в конструктивному елементі клапана пошкоджуваності та інших характеристик міцнісної надійності ЕМК. Природу цих зв'язків можна встановити шляхом аналізу впливу

кожної з випадкових складових  $\sigma, \alpha_r, n$  функції пошкоджуваності. При цьому кожен з вихідних параметрів можна умовно зобразити у вигляді суми двох незалежних складових, з яких одна відображає залежність, а друга – незалежність між пошкодженнями елемента клапана в  $i$  та  $j$  циклах. У першому випадку пошкоджуваності  $B_i$  і  $B_j$  за цими параметрами є залежними, у другому – незалежними випадковими величинами. Так, наприклад, параметр, що визначає ймовірнісні властивості конструкційного матеріалу елемента (деталі) клапана можна цілком віднести до першої групи, тому що ймовірнісні характеристики міцності конструкційного матеріалу обумовлені його внутрішньою структурою і, частково, особливостями конструкції деталі і не залежать від номера циклу. А параметри експлуатаційного навантаження більш відносяться до другої групи, виходячи з того, що на параметри навантаження впливає цілий ряд незалежних випадкових факторів.

Розглянемо феноменологічну модель накопичення пошкоджуваностей в критичному елементі клапана, у якій випадковий процес побудований за типом *марковської послідовності* із залежними прирощеннями

$$B_n^\Sigma = \sum_{i=1}^n B_i,$$

де  $B_i$  – випадкова елементарна пошкоджуваність конструктивного елемента клапана в  $i$ -ому циклі.

Величину кореляційного зв'язку між пошкоджуваностями в  $i$ -му і  $j$ -му циклах, а також інші ймовірнісні характеристики пошкоджуваності конструктивного елемента клапана за цикл, можна оцінити за допомогою відомих статистичних методів [11]. Тільки в цьому випадку у виразах для моментних характеристик слід враховувати фактори чи складові факторів, що встановлюють кореляційні зв'язки між пошкоджуваностями  $i$ -го та  $j$ -го циклів шляхом введення параметра  $k_{B_i B_j} = M[B_i, B_j]$  – кореляційного моменту між  $B_i$  і  $B_j$ .

Вважаючи, що елементарні пошкоджуваності критичного конструктивного елемента клапана за цикл є залежними випадковими величинами, можна записати для числових характеристик накопиченої пошкоджуваності наступні співвідношення:

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i; \quad S_n^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} S_i S_j, \quad (4)$$

де  $m_i, S_i, (i = \overline{1, n})$  – математичні очікування і середні квадратичні відхилення пошкоджуваностей в  $i$ -ому циклі;  $r_{ij} = k_{B_i B_j} / S_i S_j$  – коефіцієнт кореляції випадкових величин  $B_i$  і  $B_j$ .

Розглянемо випадок, коли випадкові величини пошкоджуваностей за цикл  $B_i$  у своїй сукупності підпорядковані єдиному закону розподілу ймові-

рностей  $F_n(B)$ . У загальному випадку вигляд цього закону може бути довільним з кінцевими значеннями математичного очікування  $m$  та дисперсії  $S^2$ . Проте для досить великого  $n$ , відповідно до центральної граничної теореми, закон розподілу суми слабо залежних випадкових пошкодженостей буде близьким до нормального.

Якщо між усіма пошкоджуваностями  $B_i$  і  $B_j$ , ( $i, j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ ) існує зв'язок з постійним коефіцієнтом кореляції  $r_{ij} = r$ , то вирази (4) набудуть вигляду

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i = nm; \quad S_n^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i < j} r_{ij} S_i S_j = S_n^2 (1 + (n-1)r).$$

Щільність і функція розподілу накопиченої пошкоджуваності в критичному конструктивному елементі клапана у цьому випадку будуть дорівнювати

$$f_{B_n^\Sigma} (B_n^\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S^2 n(1+(n-1)r)}} \exp \left( -\frac{(B_n^\Sigma - nm)^2}{2S^2 n(1+(n-1)r)} \right);$$

$$F_{B_n^\Sigma} (B_n^\Sigma) = \Phi \left( \frac{B_n^\Sigma - nm}{S\sqrt{n(1+(n-1)r)}} \right).$$

Крім імовірнісних характеристик пошкоджуваності можна визначити і імовірнісні характеристики надійності критичного конструктивного елемента клапана, зокрема, імовірнісні характеристики числа циклів до його руйнування. Так, для заданого граничного ступеня пошкоджуваності критичного конструктивного елемента клапана  $B_0^\Sigma$  імовірність того, що випадкова величина числа циклів  $N$  до появи відмови клапана унаслідок втомного руйнування менша  $n$ , буде дорівнювати ймовірності перевищення накопиченою пошкоджуваністю  $B_n^\Sigma$  припустимого рівня  $B_0^\Sigma$ :

$$P(N < n) = P(B_n^\Sigma > B_0^\Sigma) = \int_{B_0^\Sigma}^{\infty} f_{B_n^\Sigma} (B_n^\Sigma) dB_n^\Sigma = 1 - \Phi \left( \frac{B_0^\Sigma - nm}{S\sqrt{n(1+(n-1)r)}} \right).$$

Аналогічно визначається й імовірність неруйнування конструктивного елемента клапана:

$$P_{\text{неруйн}} = P(B_n^\Sigma < B_0^\Sigma) = \int_{-\infty}^{B_0^\Sigma} f_{B_n^\Sigma} (B_n^\Sigma) dB_n^\Sigma = 1 - P_{\text{руйн}}.$$

Щільність розподілу чисел циклів до руйнування деталі клапана  $f_N(n)$  знаходиться диференціюванням виразу для  $dF_N(n)$

$$f_N(n) = \frac{dF_N(n)}{dn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi nS^2}} \frac{B_0^\Sigma + nm}{2n} \exp\left(-\frac{(B_0^\Sigma - nm)^2}{2nS^2}\right).$$

Вирази для математичного очікування, дисперсії і коефіцієнта варіації чисел циклів до досягнення критичного стану (руйнування) конструктивного елемента клапана мають вигляд

$$m_{\text{кр}} = \int_0^\infty n f_N(n) dn = \frac{B_0^\Sigma}{m} + \frac{S^2}{2m^2}; \quad S_{\text{кр}}^2 = \frac{B_0^\Sigma S^2}{m^3} + \frac{5}{4} \frac{S^4}{m^4};$$

$$v_{\text{кр}} = \frac{S_{\text{кр}}}{m_{\text{кр}}} = \frac{S}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{B_0^\Sigma + 5S^2/(4m)}}{B_0^\Sigma + S^2/(2m)}.$$

Якщо відомі функції і щільності розподілу чисел циклів до руйнування критичного конструктивного елемента клапана, то можна також визначити інтенсивність відмов ЕМК унаслідок втомного руйнування за формулою

$$\lambda_N(n) = \frac{f_N(n)}{1 - F_N(n)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi nS^2}} \frac{B_0^\Sigma + nm}{2n} \exp\left(-\frac{(B_0^\Sigma - nm)^2}{2nS^2}\right)}{\Phi\left(\frac{B_0^\Sigma - nm}{\sqrt{n}S}\right)}.$$

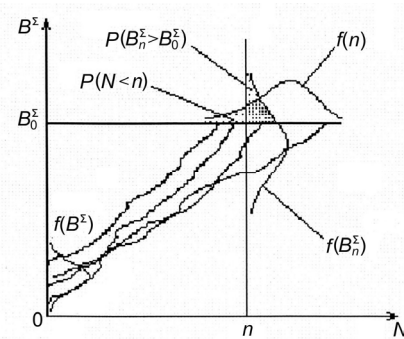


Рис. 1 – Модель підсумовування пошкоджуваностей за  $r \approx 0$ .

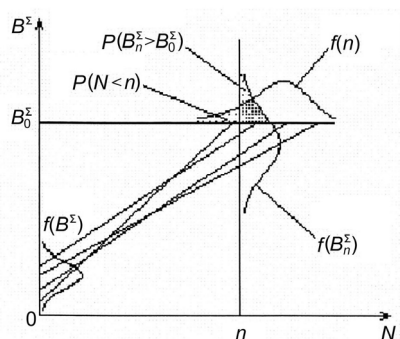


Рис. 2 – Модель підсумовування пошкоджуваностей за  $r = 1$ .

На рис. 1 і 2 зображено моделі підсумовування пошкоджуваностей для незалежних ( $r \ll 1$ ) і залежних ( $r = 1$ ) випадкових пошкоджуваностей конструктивного елемента клапана за цикл.

**Визначення ресурсу клапана на підставі аналізу наявних випадкових процесів пошкоджуваності його критичного елемента.** На підставі запропонованих моделей накопичення пошкоджуваностей в елементах ЕМК роз-

роблено методику визначення ресурсних можливостей проектного клапана на прикладі ЕМК з поляризованим двопозиційним електромагнітним приводом (рис. 3).

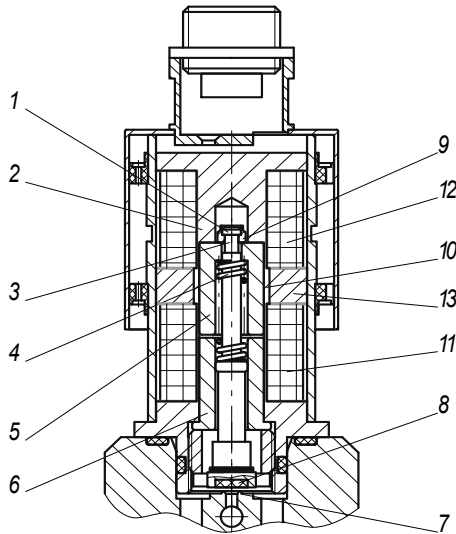


Рис. 3 – Конструктивна схема клапана з поляризованим двопозиційним електромагнітним приводом:

1 – голівка штока; 2 – корпус електромагніта; 3 – шток; 4 – буферна пружина; 5 – повзун (якір); 6 – нижній стоп; 7 – сідло; 8 – золотник; 9 – стопорна шайба; 10 – розподільна трубка; 11 – обмотка закриття; 12 – обмотка відкриття; 13 – постійний магніт.

У відкритому положенні золотник 8 утримується біля верхнього стопа корпусу електромагніта 2 силою магнітного потоку постійного магніту 13.

При подачі керуючого сигналу  $U_{\text{закр}}$  на закриття клапана струм в обмотці 11 створює силу притягання в робочому зазорі між повзуном 5 і нижнім стопом 6 і ослаблює магнітний потік постійного магніту 13. Під дією цих сил повзун з рухомою частиною клапана переміститься до нижнього стопа. Але, внаслідок того, що величина ходу золотника менша за величину робочого зазору, золотник сяде на сідло 7, а повзун, продовжуючи переміщення, стисне буферну пружину 4 на величину зусилля герметизації, утворивши деякий зазор зі стопорною шайбою 9. Тепер робочий зазор між повзуном і верхнім стопом збільшився, а між повзуном і нижнім стопом зменшився; магнітний потік постійного магніту перекладається до нижнього стопа, і при знятті сигналу  $U_{\text{закр}}$  рухома частина клапана буде утримувати у нижньому (закритому) положенні золотник 8 притиснутим до сідла 7.

При подачі керуючого сигналу  $U_{\text{відкр}}$  на відкриття клапана струм в обмотці 12 створює силу притягання в робочому зазорі між повзуном 5 і верх-



нім стопом корпусу електромагніта 2 і ослаблює магнітний потік постійного магніту 13. Під дією цих сил повзун, вдаряючи по стопорній шайбі 9, переміститься до верхнього стопа і «відірве» таким чином золотник від сідла. Через те, що робочий зазор між повзуном і верхнім стопом зменшився, а між повзуном і нижнім стопом збільшився, магнітний потік постійного магніту перекладається до верхнього стопа, і при знятті сигналу  $U_{\text{відкр}}$  рухома частина клапана буде утримуватися у верхньому (відкритому) положенні.

Таким чином, при відкритті клапана (переміщенні рухомої його частини від сідла) відбуваються наступні руйнівні процеси:

- ударне циклічне контактування повзуна 5 і шайби 9, що призводить до викришування внаслідок утоми торцевих поверхонь контакту і зміни відносного положення деталей 5 і 9;

- циклічне прикладення розподіленого імпульсного зусилля, нормального до площини контакту шайби і головки штока, що призводить до зміни форми деталей 9 і 3 внаслідок накопичення однобічних пластичних деформацій, зміни взаємного положення деталей та накопичення мікропошкоджень у матеріалі шийки штока 3;

- ударне циклічне контактування повзуна 5 і верхнього стопа 2, що призводить до деградації макрорельєфу поверхонь контакту деталей 5 і 2.

При закритті клапана (переміщенні рухомої його частини до сідла) відбуваються два ударних циклічних контактування:

- золотника 8 і сідла 7, що призводить до деградації макрорельєфу поверхонь ущільнення на золотнику;

- повзуна 5 і нижнього стопа 6, що призводить до деградації торцевих поверхонь контакту деталей 5 і 6.

Крім того, в процесі зворотного-поступального переміщення рухомої частини клапана має місце процес зносу циліндричних поверхонь повзуна 5 і розподільної трубки 10. Внаслідок цього відбувається поступова деградація мікрорельєфу поверхонь тертя і збільшення сил тертя.

Для детального вивчення зазначених процесів, які відбуваються під час циклічного імпульсного спрацьовування клапанів, були проведені спеціальні ресурсні випробування (до повної відмови) клапанів вибраного типу. В процесі випробувань періодично, через кожні 20 тис. циклів спрацьовування, що складала один блок-цикл, контролювалися основні функціональні параметри клапана (напруга  $U_{\text{відкр}}$  і час  $t_{\text{відкр}}$  відкриття клапана, напруга  $U_{\text{закр}}$  і час  $t_{\text{закр}}$  його закриття), проводився мікрообмір деталей клапана і визначався хід золотника  $x_{\text{зол}}$ . Були зроблені фотографії деталей клапанів після відмови, а також проведені дослідження поверхонь контактів та місць руйнування шийки штока.

Виявлені зміни технічного стану клапана призводять до відповідних змін його функціональних параметрів: має місце незначне зменшення напруги  $U_{\text{відкр}}$  і часу  $t_{\text{відкр}}$  відкриття клапана, незначне збільшення напруги  $U_{\text{закр}}$  і часу  $t_{\text{закр}}$  його закриття, а також суттєве зменшення ходу золотника  $x_{\text{зол}}$ .

На рис. 4 наведені залежності зміни ходу золотника  $x_{\text{зол}}$  для п'яти клапанів, що проходили ресурсні випробування, від кількості блок-циклів спрацювання  $n_{\text{б.ц}}$ .

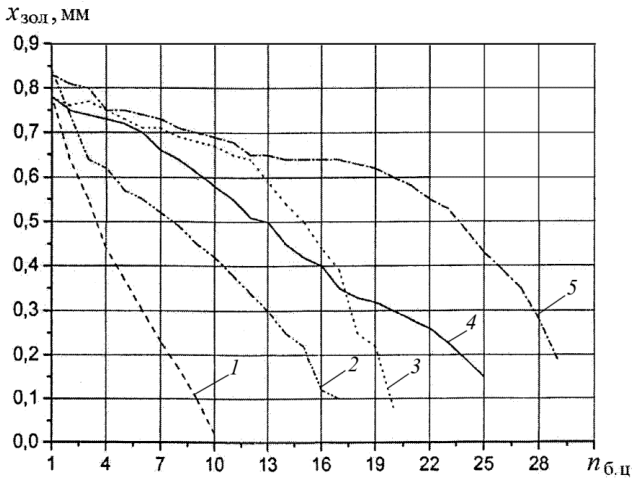


Рис. 4 – Залежність ходу золотника від кількості блок-циклів напрацювання (1 блок-цикл дорівнює 20000 циклів) для п'яти клапанів: 1, 2, 3, 4, 5 – номери клапанів.

Аналіз наведених залежностей показує, що в процесі напрацювання ресурсу суттєво зменшується величина  $x_{\text{зол}}$  за рахунок зміни положення повзуна 5 відносно шайби 9 і штока 3 внаслідок виробки кільцевої канавки на торцевій поверхні повзуна ( $c''$ ) та пластичної деформації деталей 3 і 9 на величину  $c'$  (рис. 5):  $\Delta x_{\text{зол}} = c' + c''$ , а також збільшується довжина камери під буферну пружину 4, що призводить до зменшення встановлювального і робочого зусилля пружини.

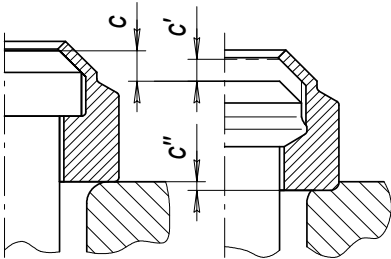


Рис. 5 – Зміна форми головки штока і стопорної шайби в процесі напрацювання ресурсу клапана.

Наявність циклічних імпульсних динамічних напружень у матеріалі штока призводить (при певній кількості спрацювання  $N$ ) до руйнування шийки штока внаслідок втоми. Результати ресурсних випробувань, а також досвід експлуатації показують, що величина  $N$  перебуває у відносно великому діапазоні (від 200 до 600 тис. циклів).

Наведений аналіз результатів ресурсних досліджень і моделювання експлуатаційних напружень в елементах

клапану [5] показує, що критичним параметром функціонування клапану з двопозиційним електромагнітним приводом є хід золотника  $x_{зол}$ , а елементом, що лімітує ресурсні можливості клапану – шток (після певного числа спрацьовувань має місце руйнування шийки штока).

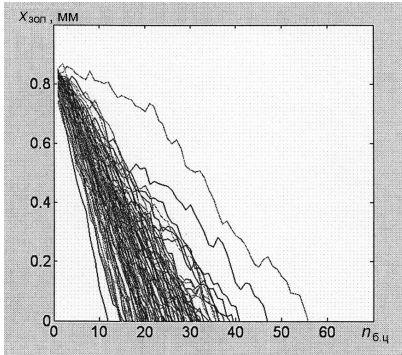


Рис. 6 – Характеристики процесу пошкоджуваності штока клапана (зміна величини ходу золотника клапана з напрацюванням).

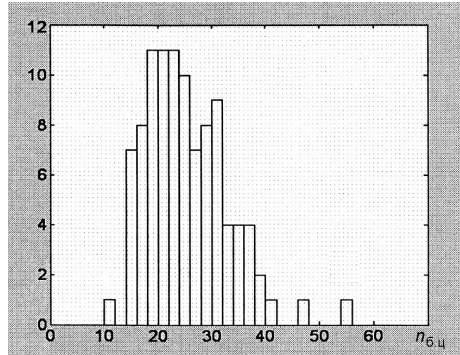


Рис. 7 – Гістограма емпіричного розподілу числа відмов клапана унаслідок руйнування шийки штока від числа блок-циклів напрацювання.

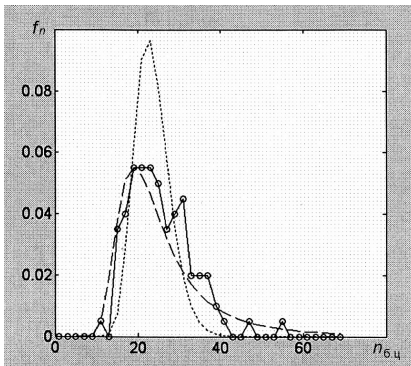


Рис. 8 – Щільність розподілу чисел блок-циклів напрацювання клапана до руйнування шийки штока.

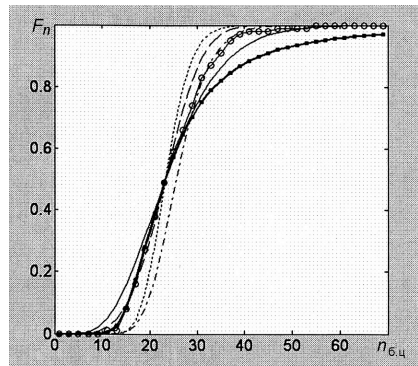


Рис. 9 – Функції розподілу чисел блок-циклів напрацювання клапана до руйнування шийки штока.

Узагальнення досвіду експлуатації ЕМК з поляризованим двопозиційним електромагнітним приводом і результатів проведення спеціальних ресурсних досліджень дозволяють зробити висновок, що в якості узагальненого інтегрованого параметру, зміна якого відображає процеси накопичення пошкоджуваностей в елементах і вузлах клапана, можна використовувати хід золотника  $x_{зол}$ . Це дозволило провести оцінку ресурсних можливостей клапанів даного типу, використовуючи розроблені математичні моделі зміни технічного стану ЕМК в процесі виробітку ресурсу.

На першому етапі, на основі відомих методів статистичного аналізу, визначалися основні характеристики процесу пошкоджуваності клапана (зміни ходу золотника з напрацюванням клапана): математичне очікування, дисперсія та коефіцієнт кореляції між пошкоджуваностями блок-циклів, визначався також вид закону розподілу пошкоджуваності за 1 блок-цикл, кореляційна функція процесу пошкоджуваності та його граничне значення.

На другому етапі на основі цієї інформації проводилося моделювання процесів виникнення і накопичення пошкоджуваностей (величин  $B_i$  і  $B_n^\Sigma$ ) до перетину останнім процесом граничних значень сумарної пошкоджуваності  $B_0^\Sigma$  та визначення характеристик надійності клапана – числа циклів (блок-циклів) напрацювання клапана до руйнування, на основі яких будуються гістограми та розраховуються числові та імовірнісні характеристики ресурсу критичної деталі клапана.

На рис. 6 наведено змодельовані характеристики процесу пошкоджуваності штока клапана, що характеризувалися зміною величини ходу золотника клапана  $x_{\text{зол}}$  в залежності від блок-циклів напрацювання  $n_{\text{б.ц}}$ . На рис. 7 – гістограма емпіричного розподілу числа відмов клапана унаслідок руйнування шийки штока від числа блок-циклів напрацювання, на рис. 8 – емпірична щільність розподілу чисел циклів до руйнування шийки штока, а на рис. 9 – функції емпіричного розподілу чисел циклів до руйнування шийки штока.

Отримані залежності дозволяють з необхідною ймовірністю визначити ресурсні можливості клапана на етапі проектування за результатами ресурсних випробувань дослідних зразків або досвіду експлуатації клапанів-аналогів.

На основі результатів проведених досліджень розроблено стандарт підприємства СТУ КЦКБА-252 «Методика прогнозування технічного стану електромагнітних клапанів з приводом ДШВ (двопозиційний штовхаюче-втягаючий) на етапі проектування», який впроваджено в ПАТ «Київське центральне конструкторське бюро арматуробудування».

**Перспективи подальших досліджень.** Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані зі створенням алгоритмів оцінки технічного стану ЕМК на підставі регулярного оперативного контролю основних функціональних параметрів клапанів в процесі експлуатації.

**Висновки.** Узагальнюючи результати проведених досліджень можна зробити наступні висновки.

Розроблено математичні моделі експлуатаційних змін технічного стану ЕМК з використанням стохастичної теорії накопичення пошкоджуваностей в елементах і вузлах ЕМК в процесі відпрацювання, в тому числі:

- ймовірнісна модель підсумовування незалежних випадкових пошкоджуваностей в елементах і вузлах клапана;
- ймовірнісна модель підсумовування залежних випадкових пошкоджуваностей в елементах і вузлах клапана.

Отримано математичні залежності для визначення математичного очі-

кування і дисперсії накопиченої пошкоджуваності в елементах і вузлах клапана, а також щільності і функції розподілу накопиченої пошкоджуваності для різних можливих значень коефіцієнта кореляції.

Отримано математичні залежності для визначення математичного очікування, дисперсії і коефіцієнта варіації чисел циклів до досягнення критичного стану (руйнування) конструктивного елемента клапана, які рекомендовано використовувати для оцінки імовірнісних характеристик надійності й довговічності ЕМК.

Розглянуті ймовірнісні моделі підсумовування математичні моделі пошкоджень в елементах клапана складають теоретичну основу розробленої методики прогнозування ресурсу пневматичних клапанів з електромагнітним приводом, яку покладено в основу стандарту підприємства СТУ КЦКБА-252 «Методика прогнозування технічного стану електромагнітних клапанів з приводом ДШВ на етапі проектування», впровадженого в ПАТ «Київське центральне конструкторське бюро арматуробудування».

**Список літератури:** 1. Хильчевский В.В., Ситников А.Е., Ананьевский В.А. Надежность трубопроводной пневмо- гидроарматуры. – М.: Машиностроение, 1989. – 208 с. 2. Ситников А.Е. Отказы электромагнитных клапанов // Вестник Национального технического университета Украины “Киевский политехнический институт”. Машиностроение. – Вып. № 42. – Т. 2. – К.: НТУУ “КПИ”, 2002. – С. 46 – 49. 3. Ситников А.Е. Анализ и стохастическая оценка изменение технического состояния электромагнитных клапанов при эксплуатации // Вибрации в технике и технологиях, 2003, № 2 (28) – С. 82 – 86. 4. Ситников А.Е., Федоричко Я.Б., Кучер А.Г., Зайончковский Г.И., Сухоруков А.Ю. Прогнозирование изменения функциональных параметров клапанов с электромагнитным приводом при выработке ресурса // Промислова гідравліка і пневматика. – 2004. – №3 (5). – С. 10 – 22. 5. Рыкуніч Ю.М., Ситніков О.С., Федоричко Я.Б., Кучер О.Г., Зайончковський Г.І., Харитон В.В., Чердовських Я.І. Аналіз напруженого стану робочих елементів пневматичних клапанів з електромагнітним приводом // Промислова гідравліка і пневматика. – 2005. – № 4 (10). – С. 55 – 62. 6. Рыкуніч Ю.Н., Ситніков А.Е. Выбор запасов работоспособности проектируемых электромагнитных клапанов с использованием энергетических критериев // Промислова гідравліка і пневматика. – 2006. – № 1 (11). – С. 43 – 46. 7. Рыкуніч Ю.М. Визначення запасів працездатності малогабаритних електромагнітних клапанів / Ю.М. Рыкуніч // Промислова гідравліка і пневматика. – 2012. – №2 (36). – С. 85-91. 8. Рыкуніч Ю.Н., Ситніков А.Е., Александров Л.Г., Барилук Е.И., Зайончковский Г.И. Исследование по энергетическим критериям запасов работоспособности поляризованных двухпозиционных электромагнитных клапанов двигателях // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина. – 2013. – №4 (20). – С. 61 – 67. 9. Ветров А.Н., Кучер А.Г. Вероятностные методы оценки остаточного ресурса конструктивных элементов ГТД в эксплуатации. // Проблемы прочности, 1989, №8. – С. 70 – 76. 10. Рыжов Э.В., Колесников Ю.В., Суслов А.Г. Контактное взаимодействие твердых тел при статических и динамических нагрузках. – К: Наукова думка, 1982. – 172 с. 11. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Высшая школа. 2001. – 575 с.

Надійшла до редколегії 17.01.2014

УДК 621.646.4

**Математичне моделювання експлуатаційних змін технічного стану малогабаритних електромагнітних клапанів / Г. І. Зайончковський, Я. Б. Федоричко // Вісник НТУ «ХП».** Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 67 – 81. Бібліогр.: 11 назв. – ISSN 2222-0631.

Разработаны математические модели эксплуатационных изменений технического состояния малогабаритных электромагнитных пневматических клапанов с использованием стохастиче-

ской теории накопления повреждений в элементах и узлах клапана в процессе отработки ресурса. На примере клапана с электромагнитным поляризованным двухпозиционным приводом рассмотрено применение разработанных моделей для определения ресурсных возможностей клапана на этапе его проектирования.

**Ключевые слова:** электромагнитный клапан, стохастическая модель, эксплуатационные изменения, техническое состояние, разрушение, отказ, ресурс, критический элемент.

UDC 621.646.4

**Mathematical modeling of operational changes of the technical state of small-size electromagnetic pneumatic valves / G. I. Zaionchkovskiy, Ya. B. Fedorychko** // Bulletin of National Technical University «KhPI.» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 67 – 81. Bibliog.: 11 titles. – ISSN 2222-0631.

Mathematical models of small-size electromagnetic pneumatic valve technical state operational changes were developed using the stochastic theory of damage accumulation in the elements and units of a valve in the process of the resource exploitation. A valve with electromagnetic polarized two-position drive was used to demonstrate application of the developed models for definition of the resource possibilities of a valve at the designing phase.

**Key words:** electromagnetic valve, stochastic model, operational changes operational changing, technical state, destruction, rejection, resource, critical element.

УДК 681.526

*Ю.С. КОЗЬМИН*, канд. техн. наук, науч. сотр., ИСМА НАНУ, Харьков

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ**

Рассматриваются вопросы управления процессами выращивания скнтилляционных кристаллов. Кристаллизатор, как объект управления, представляется системой с распределенными параметрами. В качестве физической модели рассмотрен стержень с одномерным распределением физических свойств и температурных полей. Получена система уравнений в пространстве состояний. Построен алгоритм управления температурным полем объекта при перемещении кристаллизатора внутри установки. Приведены способы стабилизации температуры в заданной точке пространства при перемещении объекта. Полученные методики служат тестовыми для изучения процессов управления объектами на основе более сложных физических моделей.

**Ключевые слова:** система с распределенными параметрами, управление, стабилизация, температурное поле.

**Введение.** Скнтилляционные кристаллы получили большое распространение при использовании в качестве детекторов ионизирующего излучения. Для совершенствования и интенсификации технологического процесса выращивания скнтилляционных кристаллов необходимо понимание процессов, происходящих в рабочем объеме. В то же время, физические поля, возникающие в ампуле, можно оценить только косвенно. В этом случае только математическое моделирование позволяет технологам целенаправленно

повышать производительность ростовых установок при сохранении качества полученной продукции и снижении энергетических затрат.

В практических задачах автоматического управления особое место занимает проблема управления ростом кристаллов. В общей постановке объект управления представляет собой многомерный объект, который характеризуется многосвязностью переменных, нелинейностью, нестационарностью и стохастичностью. Все это в условиях недостатка информации о возмущающих воздействиях и ограниченностью контроля основных переменных существенно затрудняет использование подходов классической теории автоматического управления. Широкие возможности в этой области представляют методы современной теории автоматического управления: *адаптивные, с прогнозирующими моделями* (MPC – Model predictive control)[1], а также *интеллектуальные* [2]. Следует подчеркнуть, что, ни один из методов не является универсальным.

Задача стабилизации заранее заданных распределений температур является типичной для термических установок выращивания кристаллов [3 – 5]. В ряде теоретических и экспериментальных работ установлено, что рациональная организация тепловых полей позволяет существенно увеличить отвод тепла от зоны кристаллизации, а соответственно и повысить производительность ростовой установки [6]. Одним из возможных путей решения этой проблемы является управление тепловыми потоками в расплаве на основе изменения формы теплового поля на внешнем контуре контейнера. При этом, в зависимости от градиентов температурного поля и физических свойств материала, расплав может оставаться в равновесии, либо могут возникать естественноконвективные движения расплава, переходящие от ламинарных потоков к турбулентным [7]. В этом случае моделирование осуществляется на основе уравнений механики жидкости. В выращенном кристалле управление тепловым полем позволяет достигать снижения тепловых напряжений, чтобы избежать растрескиваний. Эта задача решается на основании уравнений механики деформированного тела и применения методов механики разрушения.

Целью данной работы является поиск таких управляющих воздействий, которые позволяют сформировать и поддерживать заданное распределение температуры объекта с требуемой точностью, на основе математической модели ростовой установки, построенной с использованием физически обоснованных упрощающих гипотез. Необходимо отдельно отметить тот факт, что в роли управляемой величины следует рассматривать все пространственное распределение функции состояния объекта. Подобные системы получили название *систем с распределенными параметрами* [8].

При этом предполагается, что результаты, полученные на простых моделях, могут быть полезны для понимания физических процессов и, в дальнейшем, могут быть обобщены на более сложные случаи.

**Моделирование температурного поля в кристаллизаторе.** Одним из

широко применяемых методов выращивания кристаллов из расплава является метод Бриджмена-Стокбаргера. Контейнер с расплавом медленно опускается в тепловую камеру, разделенную диафрагмой на две температурные области. В верхней части камеры температура поддерживается выше точки кристаллизации расплава, а в нижней части, соответственно ниже точки кристаллизации (рис. 1). Кристаллизация происходит в зоне диафрагмы, где создается температурный градиент. Для успешного проведения процесса необходимо поддерживать резкий температурный перепад на границе растущего кристалла (*фронт кристаллизации*) и высокую температуру расплава [6].

Общая задача моделирования тепловых процессов в ростовой установке распадается на две составляющие задачи: внешний и внутренний теплообмен.

К внешнему теплообмену в теплотехнике относят процессы переноса тепла, происходящие в рабочем пространстве установки и приводящие к поступлению тепла на внешнюю поверхность тигля или к отводу тепла от этой поверхности в случае охлаждения.

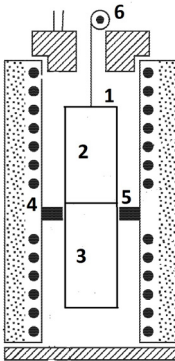


Рис. 1 – Схема установки для выращивания монокристаллов по методу Бриджмена-Стокбаргера.

1 – контейнер; 2 – расплав; 3 – монокристалл; 4 – нагреватель; 5 – тепловая диафрагма; 6 – механизм опускания контейнера с веществом.

Под внутренним теплообменом обычно понимают процесс распространения тепла в кристаллизаторе. Эта задача формулируется в виде уравнения теплопроводности с соответствующими краевыми (начальными и граничными) условиями [9].

Для управления процессом необходимо получить систему уравнений в канонической форме, именуемой *моделью в пространстве состояний* (приведена ниже). Как правило, для таких сложных объектов модели получают на основе обработки экспериментальных данных, с помощью регрессионных методов [1].

В данной работе рассмотрим подход, основанный на физическом моделировании процесса. Кристалли-

затор (контейнер с находящимся внутри расплавленным кристаллизующим материалом) представляет собой сложный объект для физического моделирования.

Вначале, когда колба с материалом находится в верхней зоне, происходит плавление исходного сырья, затем, по мере опускания в холодную зону, в районе диафрагмы происходит кристаллизация с выделением тепла. В нижней, низкотемпературной зоне, происходит охлаждение и последовательное снижение температуры (отжиг). Существенно на процессы кристаллизации влияют теплофизические свойства материала контейнера. При этом карти-



на распределения температур на внутренней поверхности тигля может существенно отличаться от распределения температур на внешней поверхности из-за перетока тепла вдоль контейнера в нижнюю часть кристаллизатора.

В качестве модели объекта управления в данной работе рассматривается стержень длиной  $L$ , характеризующийся одномерным распределением теплофизических свойств по независимой пространственной переменной  $x$ . Температура  $T(x, t)$  поддерживается нагревателями, создающими тепловое поле вокруг стержня.

При моделировании температурного поля стержня конечной длины используется уравнение теплопроводности [10, 11]:

$$c\rho \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\alpha^B(x) \cdot S}{V} [T(x, t) - T^{OC}(x, t)] + F(x, t) \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha^{T(x=0)} \cdot S^T \cdot [T(0, t) - T^{OC}(0, t)], \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -\alpha^{T(x=L)} \cdot S^T \cdot [T(L, t) - T^{OC}(L, t)] \quad (3)$$

и начальными условиями:

$$T(x, 0) = T^{OC}(x). \quad (4)$$

Здесь  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $c$  – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $\alpha^B$  и  $\alpha^T$  – коэффициенты теплоотдачи боковой и торцевой поверхностей, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $S$  – площадь боковой поверхности стержня, м<sup>2</sup>;  $S^T$  – площадь торцевой поверхности стержня, м<sup>2</sup>;  $V$  – объем стержня, м<sup>3</sup>;  $T^{OC}(x, t)$  – температура окружающей среды, К.

Функция  $F(x, t)$  характеризует удельную мощность внутренних источников тепла. Для процессов роста кристаллов под *внутренними источниками* мы понимаем процессы выделения скрытой теплоты кристаллизации на границе раздела фаз, поглощенную энергию инфракрасного излучения нагревателей или энергию дополнительных внутренних нагревателей (например, при *ОТФ – методе* [32]).

Для данной модели ростовой установки примем:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - kT(x, t) + kT^{OC}(x, t) + \bar{F}(x, t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + k_1 T(0, t) = k_1 T^{OC}(0, t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + k_2 T(L, t) = k_2 T^{OC}(L, t), \quad (7)$$

где  $a = \lambda / (c\rho)$ ,  $k = (\alpha^B S) / (Vc\rho)$ ,  $k_U = P^H / (Vc\rho)$ ,  $\bar{F}(x, t) = F(x, t) / (c\rho)$ ,

$$\bar{F}(x, t) = F(x, t) / (c\rho), \quad k_2 = \alpha^{T(x=L)} \cdot S^T / \lambda.$$

**Решение методом конечных интегральных преобразований.** Для решения поставленной задачи применим *метод конечных интегральных преобразований*. С его помощью удается построить физически прозрачные модельные представления, что оказывается полезным для последующего решения задач управления объектами с распределенными параметрами. Однако необходимо отметить, что эффективность метода интегральных преобразований ограничивается классом линейных моделей для простых форм областей изменения пространственных аргументов [8].

Метод применяется для дифференциальных уравнений вида

$$A_1(x,t) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = C(x,t) \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + B_1(x,t) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + C_1(x,t)Q(x,t) + f(x,t,u(x,t)) \quad (8)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\alpha(x_0,t)Q(x_0,t) + \beta(x_0,t) \frac{\partial Q(x_0,t)}{\partial x} = g_0(t,u_0(t)), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\alpha(x_1,t)Q(x_1,t) + \beta(x_1,t) \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = g_1(t,u_1(t)), \quad t > 0, \quad (10)$$

$$Q(x,0) = Q_o^{(0)}(x), \quad \frac{\partial Q(x,0)}{\partial t} = Q_o^{(1)}(x), \quad x \in (x_0, x_1). \quad (11)$$

В общем случае конечное интегральное преобразование изначально рассматривается в виде

$$Q(\mu,t) = \int_{x_0}^{x_1} Q(x,t) \cdot \phi(\mu,x) \cdot r(x) dx \quad (12)$$

с ядром преобразования  $\phi(\mu,x)$ , которое является решением однородного уравнения:

$$C(x,t) \frac{\partial^2 \phi(\mu,x)}{\partial x^2} + B_1(x,t) \frac{\partial \phi(\mu,x)}{\partial x} + C_1(x,t)\phi(\mu,x) = -\mu^2 \phi(\mu,x) \quad (13)$$

параметром  $\mu$  и весовой функцией  $r(x)$ :

$$r(x) = \frac{1}{C(x)} \exp \left[ \int_{x_0}^{x_1} \frac{B_1(x)}{C(x)} dx \right]. \quad (14)$$

Ядро преобразования  $\phi(\mu,x)$  находится из решения соответствующей системе (8) – (11) *краевой задачи Штурма-Лиувилля*. Эта задача, иначе называемая *спектральной задачей*, имеет отличные от нуля решения только при определенных вещественных значениях параметра  $\mu$ , называемых *собственными значениями*. Собственные значения  $\mu_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) образуют возрастающую последовательность (*спектр собственных чисел*). Каждому собственному числу соответствует собственная функция  $\phi_n(x)$ , определяемая с точностью до постоянного множителя. Система собственных функций

$[\phi_n(x)]$  ортогональна с весом  $r(x)$  на промежутке  $[x_0, x_1]$  и образует полную систему функций в смысле *среднеквадратичного приближения* [8].

Таким образом, всякая функция состояния рассматриваемого объекта при некоторых допущениях может быть представлена ее разложением в сходящийся в среднем ряд по ортогональной системе собственных функций (*ряд Фурье*):

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \cdot \phi_n(x). \quad (15)$$

Сходимость в среднем означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_1} [(Q(x, t) - \sum_{n=1}^N Q_n(t) \cdot \phi_n(x))]^2 dx = 0. \quad (16)$$

Это позволяет ограничиться конечным числом гармоник, исходя из удовлетворительной аппроксимации  $Q(x, t)$ .

Для данной задачи удается получить компактную систему разрешающих уравнений относительно невысокого порядка (по сравнению с сеточными методами). Это, в дальнейшем, позволит использовать классические методы теории управлений в пространстве состояний.

Ядро преобразования  $\phi(\mu, x)$  находится из решения соответствующей системе (8) – (11) краевой задачи Штурма-Лиувилля вида [5]:

$$\phi''(\mu, x) = -\mu^2 \phi(\mu, x), \quad (17)$$

с граничными условиями:

$$\phi'(\mu, 0) + k_1 \phi(\mu, 0) = 0; \quad \phi'(\mu, L) + k_2 \cdot \phi(\mu, L) = 0. \quad (18)$$

Весовая функция на основании формулы (13) принимает вид:

$$r(x) = 1/a. \quad (19)$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$\phi(\mu, x) = A \cdot \sin(\mu \cdot x) + B \cdot \cos(\mu \cdot x). \quad (20)$$

Подставляя соотношения (15) – (16) в (14) получим *характеристическое уравнение*:

$$\operatorname{tg}(\mu \cdot L) = \mu \cdot (k_2 - k_1) / (\mu^2 + k_1 \cdot k_2), \quad (21)$$

имеющее бесконечное число собственных значений  $\mu_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Каждому собственному значению соответствует собственная функция  $\phi_n(x)$ , определяемая решением задачи (17) – (19) с точностью до постоянного множителя. Система собственных функций образует ортогональную систему:

$$\phi_n(x) = \cos(\mu_n \cdot x) - \frac{k_1}{\mu_n} \sin(\mu_n \cdot x), \quad (22)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi_m(x) \cdot \phi_n(x) \cdot r(x) dx = \begin{cases} E_n^2, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь  $E_n^2$  – квадрат нормы собственных функций.

В дальнейшем, при редукции системы уравнений будем использовать

нормированную систему собственных функций  $\phi_n^*(x) = \phi_n(x) / E_n$ .

Применим метод конечных интегральных преобразований к системе (5) – (7). Учитывая, что:

$$T_n(t) = \int_{x_0}^{x_1} T(x,t) \cdot \phi_n^*(x) \cdot 1/a \cdot dx \quad (25)$$

и, применяя интегрирование по частям, перейдем к системе разрешающих уравнений для поставленной задачи о распределении температуры в стержне:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = A_{nn}T_n(t) + kT_n^{OC}(t) + \bar{F}_n(t) + [k_1T^{OC}(L,t) \cdot \phi_n(L) - k_1T^{OC}(0,t) \cdot \phi_n(0)], \quad (26)$$

$$A_{nn} = -(a\mu_n^2 + k),$$

где  $n = 1 \dots N$ .

Приближенное решение исходной системы (5) – (7) описывается суммой первых  $N$  членов разложения  $T(x,t)$  по системе собственных функций  $\phi_n^*(x)$ :

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^N T_n(t) \cdot \phi_n^*(x). \quad (27)$$

В практических задачах количество членов разложения  $N$ , а соответственно и порядок разрешающей системы уравнений (26), определяется сравнением приближений  $T(x,t)$  с последовательно увеличивающимися значениями  $N$ .

Воздействия  $\bar{F}_n(t)$  в уравнении объекта (26), реализуемые обычно за счет внутренних источников энергии или вещества, называют *внутренними управлениями* [8].

Управляющие воздействия

$$[k_1T^{OC}(L,t) \cdot \phi_n(L) - k_1T^{OC}(0,t) \cdot \phi_n(0)] \text{ и } kT_n^{OC}(t)$$

в уравнении (26) называют *граничными управлениями* (управлениями по граничным условиям). Они характеризуют целенаправленное воздействие со стороны окружающей среды на границе пространственной области.

Составляющие граничных управлений в квадратных скобках, сконцентрированные в точках  $x_0$  и  $x_1$  на границах отрезка  $[x_0, x_1]$ , представляют собой сосредоточенные воздействия, которые изменяются во времени.

**Результаты расчетов.** Рассмотрим распределение температурного поля в стальном стержне с размерами  $L = 0,3$  м;  $r = 0,03$  м;  $L_2 = 0,4$  м;  $L_0 = 0,2$  м.

Примем, что температура в камере распределена по закону (см. на рис. 3 сплошную линию):

$$T^{OC}(x,t) = \begin{cases} T_1, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T_2 + (x - L_2) \cdot (T_1 - T_2) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T_2, & 0 < x < L_2. \end{cases} \quad (28)$$

Где  $T_1 = 150^\circ\text{C}$  и  $T_2 = 50^\circ\text{C}$  – температуры в высоко- и низкотемпературной зоне. Для углеродистой стали  $\lambda = 50\text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ;  $c = 460\text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $\alpha^T = 27\text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$  (воздух). В этом случае решение трансцендентного уравнения (15) при  $n = 8$  дает следующий спектр:

$$\mu_m = 0,10089; 10,472; 20,944; 31,416; 41,888; 52,360; 62,832; 73,4.$$

Первые четыре ортонормированные базисных функции представлены на рис. 2. Аппроксимация заданного распределения температуры в камере при различных значениях  $n$  представлена на рис. 3.

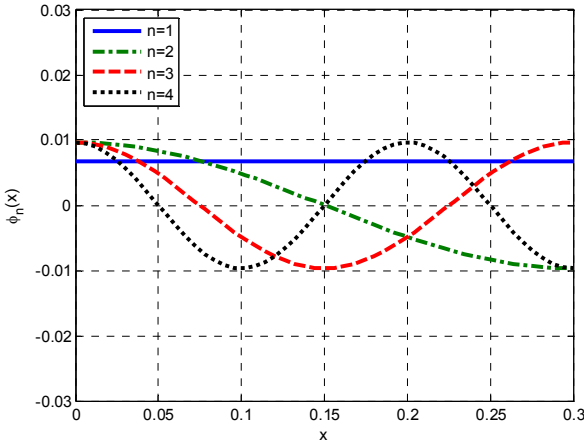


Рис. 2 – Базисные функции ( $n = 1, 2, 3, 4$ ).

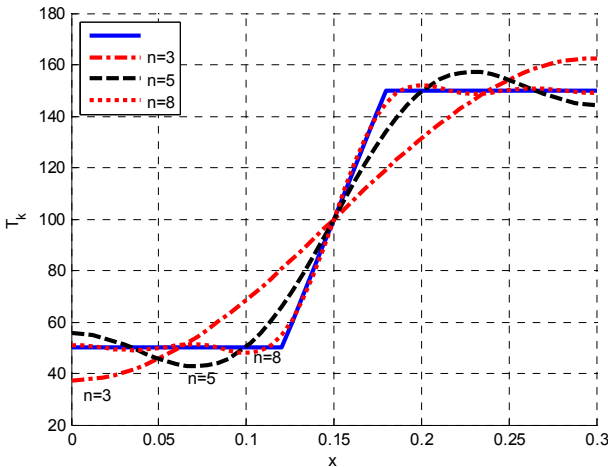


Рис. 3 – Аппроксимация заданного распределения температуры в камере с помощью конечного разложения по базисным функциям ( $n = 3, 5, 8$ ).

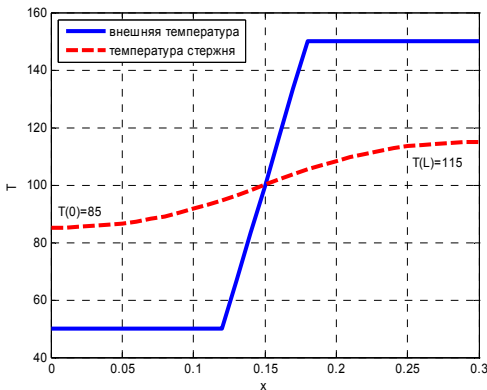


Рис. 4 – Распределение температуры в стержне (пунктир) при заданном распределении внешней температуры (сплошная линия).

Решение задачи о распределении температуры в стержне в квазистационарной постановке ( $dT_n(t)/dt = 0$ ) проиллюстрировано пунктирной линией на рис. 4.

**Модель системы управления в пространстве состояний.** Математическая модель объекта управления представлена системой уравнений(26). Обычно в теории управления уравнения, описывающие поведение управляемого объекта, записываются в следующей канонической форме (уравнения в пространстве состояний):

$$\frac{d\vec{T}(t)}{dt} = A \cdot \vec{T}(t) + B \cdot \vec{u}(t), \quad \vec{T}(0) = \vec{T}_0, \quad (29)$$

где  $\vec{T}(t) \in R^n$  –  $N$ -мерный вектор состояния системы с составляющими  $T_i(t)$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $\vec{T}_0$  – его начальное состояние;  $\vec{u}(t) \in R^P$  –  $P$ -мерный вектор управления.

Предполагается, что распределение температуры в стержне реализуется с помощью заданного распределения температур в камере:

$$T(x) = \begin{cases} T^{1K}, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T^{2K} + (x - L_2) \cdot (T^{1K} - T^{2K}) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T^{2K}, & 0 < x < L_2. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь  $T^{1K}$  и  $T^{2K}$  температуры в верхней и нижней зонах камеры соответственно. В этом случае под компонентами вектора управления мы понимаем температуры в зонах:

$$u_1(t) = T^{1K}(t) \text{ и } u_2(t) = T^{2K}(t). \quad (31)$$

Матрица системы  $A$  диагональная и ее элементы можно представить в виде:

$$A_{ij} = \begin{cases} -(k + a \cdot \mu_i^2), & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (32)$$

Далее рассмотрим несколько простейших случаев нахождения управлений температурным полем для квазистационарного случая.

Для рассматриваемой системы, при  $N = 5$ , матрицы системы (29) имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} -2,97 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,83 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6,41 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,41 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,4710^{-2} \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4.0905 \cdot 10^{-2} & 4.0905 \cdot 10^{-2} \\ -3.6231 \cdot 10^{-2} & 3.6231 \cdot 10^{-2} \\ 1.7834 \cdot 10^{-5} & 1.7834 \cdot 10^{-5} \\ 1.0517 \cdot 10^{-2} & -1.0517 \cdot 10^{-2} \\ 1.6737 \cdot 10^{-5} & 1.6737 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

**Нахождение температур зон для заданного распределения температур.** Полученная система уравнений (19) позволяет решать обратную задачу: о нахождении значений температур зон тепловой камеры для заданного распределения температур стержня  $T^*(x)$ . В квазистационарном случае система уравнений (19) принимает вид;

$$B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^* = 0. \quad (33)$$

Данная задача относится к *переобусловленным системам* [12], то есть к таким системам, в которых число уравнений больше числа неизвестных. Решение подобной задачи называют *квазирешением* и получают из условия минимума невязки при условии близости к некоторому заданному решению  $\vec{u}_0$ :

$$(B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^*, B \cdot \vec{u} + A \cdot \vec{T}^*) + \alpha(\vec{u} - \vec{u}_0, \vec{u} - \vec{u}_0) \Rightarrow \min. \quad (34)$$

Пусть, например, заранее заданное распределение температуры по длине стержня имеет кусочно-линейный вид (рис. 5), причём  $T_1^* = 105^\circ \text{C}$ , а  $T_2^* = 95^\circ \text{C}$ :

$$T^*(x) = \begin{cases} T_1^*, & L_2 + L_0 < x < L; \\ T_2^* + (x - L_2) \cdot (T_1^* - T_2^*) / L_0, & L_2 < x < L_2 + L_0; \\ T_2^*, & 0 < x < L_2. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения  $T^*(x)$  по базисным функциям вычислены по формуле (25):

$$T_m^* = 1.4672 \cdot 10^4; -6.4968 \cdot 10^2; 5.3217 \cdot 10^{-1}; 1.8897 \cdot 10^2; 1.3829 \cdot 10^{-1}.$$

В результате решения задачи минимизации (34) получаем искомые температуры зон:  $T^1 = 127,2^\circ \text{C}$ ;  $T^2 = 72,8^\circ \text{C}$ .

## Управление расположением фронта кристаллизации. Одна из важных

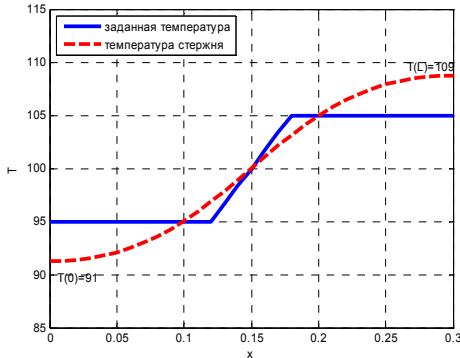


Рис. 5 – Нахождение распределения внешней температуры (сплошная) по заданному распределению температуры в стержне (пунктир).

Другие графики демонстрируют изменение температурного поля при опускании стержня на величины  $H = 0,02$  м и  $H = 0,04$  м соответственно.

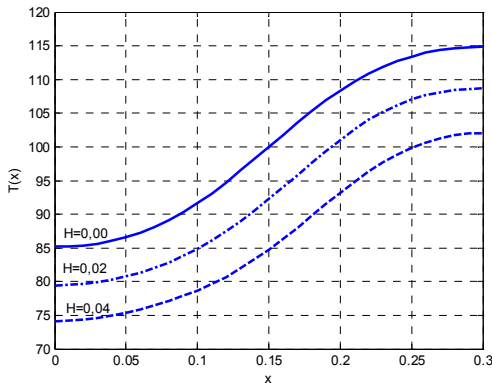


Рис. 6 – Изменение распределения температуры в стержне при опускании стержня.

Штрихпунктирная линия показывает результат управляющего воздействия.

Рассмотрим изменение температуры в точке стержня на уровне, соответствующей верхнему краю диафрагмы.

В первоначальный момент (точка  $A$  на графике) значение температуры стержня в заданной точке равно  $T_A = 94,7^\circ \text{C}$ . После того, как стержень опустился на  $H = 0,04$  м, температура в этой точке повышается (точка  $B$  на графике) и становится равной  $T_B = 101,8^\circ \text{C}$ . Далее, в результате теплообмена, температура стержня снижается, что соответствует пунктирной кривой на графике, а температура стержня в данной точке пространства (точка  $B$  на

проблем управления температурным полем при росте кристаллов состоит в стабилизации положения фронта кристаллизации (границы между расплавом и зарождающимся кристаллом) относительно неподвижной системы координат.

Рассмотрим изменение температурного поля при опускании ампулы с кристаллизующим веществом (рис. 6). Первоначальное распределение температуры, показанное на рис. 6 сплошной линией, соответствует положению стержня, симметричному относи-

На модельном примере стержня попробуем стабилизировать это положение, управляя температурой верхней зоны. На рис. 7 приведено 3 линии распределения температур. Сплошная линия соответствует исходному, симметричному относительно диафрагмы расположению стержня, пунктирной линией показано распределение температур для опущенного стержня без изменения температурных условий. Штрихпунктирная линия показывает результат управляющего воздействия.



рисунке) становится равной  $T_C = 86,4^\circ \text{C}$ .

Поскольку управление осуществляется одним параметром – температурой верхней зоны, решение проблемы можем осуществить с помощью *метода дихотомии* [12]. При невысокой скорости сходимости, дихотомия проста в реализации, устойчива к ошибкам округления и сходится для любых непрерывных функций.

Для представленного примера, расчетным путем установлено, что для стабилизации температуры в данной точке пространства  $T_D = 94,7^\circ \text{C}$  необходимо поднять температуру в верхней зоне до  $T_1^* = 173^\circ \text{C}$ .

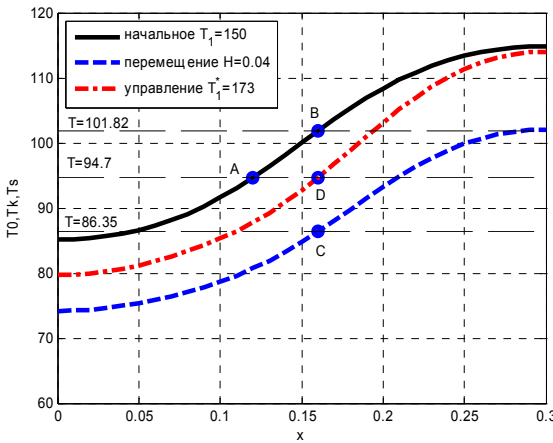


Рис. 7 – Стабилизация температуры в заданной точке стержня (над диафрагмой) при опускании стержня на заданное значение  $H = 0,04$  м.

состояний, позволяющая в дальнейшем синтезировать регуляторы для процессов стабилизации температурного поля с использованием стандартных процедур теории автоматического управления.

Построен алгоритм управления температурным полем объекта при перемещении внутри установки. Приведены способы стабилизации температурного поля в заданной точке пространства при перемещении всего объекта.

Полученные методики служат модельными для управления усложненными моделями объектов.

**Список литературы:** 1. *Тевяшев А. Д., Шелкалин В. Н., Епифанов Ю. М., Козьмин Ю. С.* Об одном методе синтеза многосвязных регуляторов // Восточноевропейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 5/3(20). – С.56 – 64. 2. *Довбиш А.С., Козьмин Ю.С., Берест О.Б.* Информационно-экстремальный алгоритм навчання системи керування вирощуванням скінтіляційних монокристалів / Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ", Тематичний випуск «Системний аналіз, управління та інформаційні технології», – №30, – 2012, – С.54 – 60. 3. *Горилецкий В.И., Гринев Б.В., Заславский Б.Г., Смирнов Н.Н., Суздаль В.С.* Рост кристаллов. Галогениды щелочных металлов – Харьков. Акта, 2002. – 536с. 4. *Филиппов М.М., Бабушкин Ю.В., Грибеновков*

**Выводы.** В статье построена модель температурного поля кристаллизатора, как объекта с распределенными параметрами в пространстве состояний. В качестве упрощенной физической модели рассмотрен стержень с одномерным распределением физических свойств и температурных полей.

Получена каноническая система уравнений распределенного объекта в пространстве

*А.И., Гинсар В.Е.* Система управления многозонной термической установкой для выращивания кристаллов по методу Бриджмена // Известия Томского политехнического университета. – 2010. – Т. 316. – №5. – С. 146 – 151. **5.** *Филиппов М.М., Грибенюков А.И., Бабушкин Ю.В., Кочегуров В.А.* Оптимальная стабилизация температурного поля распределенного объекта // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 319. – № 4. – С. 21 – 26. **6.** *Багдасаров Х.С.* Высокотемпературная кристаллизация из расплава. – М.: ФИЗ-МАТЛИТ, 2004. – 160 с. **7.** *Полежаев В.И., Никитин С.А., Макишина М.Н.* Теплообмен и температурное расслоение при свободноконвективных взаимодействиях в замкнутых объемах. Труды пятой Российской национальной конференции по теплообмену. – Т.1. – М.: Издат. дом МЭИ, 2010. – С.55 – 63. **8.** *Ранопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными пара-метрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с. **9.** *Арутюнов В.А., Бухмиров В.В., Крупенников С.А.* Математическое моделирование тепловой работы промышленных печей: Учебник для вузов. – М. Металлургия, 1990, – 239 с. **10.** *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 384 с. **11.** *Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А.* Тепломассообмен. Изд-во: МЭИ, 2005, – 550 с. **12.** *Гоник М.М., Боевкин В.И.* Повышение точности управления температурным режимом в установках выращивания кристаллов // Управление большими системами. – 2010. – № 1. – С.211 – 229.

*Поступила в редколлегию 23.01.2014*

---

УДК 681.526

**Математическое моделирование объектов с распределёнными параметрами для управления процессами кристаллизации / Ю. С. Козьмин** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 81 – 93. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглядаються питання управління процесами вирощування скінтіляційних кристалів. Кристалізатор, як об'єкт управління, представляється системою з розподіленими параметрами. У якості фізичної моделі розглянуто стрижень з однимірним розподілом фізичних властивостей і температурних полів. Отримано систему рівнянь у просторі станів. Побудовано алгоритм управління температурним полем об'єкта при переміщенні кристалізатора всередині установки. Наведено способи стабілізації температури в заданій точці простору при переміщенні об'єкта. Отримані методики служать тестовими для вивчення процесів управління об'єктами на основі більш складних фізичних моделей.

**Ключові слова:** система з розподіленими параметрами, управління, стабілізація, температурне поле.

UDC 681.526

**Mathematical modeling of objects with distributed parameters for crystallization process control / Yu. S. Kozmin** // Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 81 – 93. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.

This article addresses the process of scintillation crystal growth. A crystallizer, known as an object of control, is considered to be a distributed parameters system. We used a rod (as a physical model) with one-dimensional distribution of physical properties and thermal fields. We obtained a system of equations in the state space. An algorithm of temperature control, when moving a crystallizer inside the unit, was developed. The ways to stabilize the temperature at a given point in space as the object moves were shown. The obtained methodologies were used as tests in order to study objects (based on more complex physical models).

**Key words:** distributed parameters system, control, stabilization, thermal field.

**А.Г. КОШОВИЙ**, ст. викл., НАКУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»,  
Харків;

**Г.І. КОШОВИЙ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НАКУ ім. М.Є. Жуковського  
«ХАІ», Харків

## **МЕТОД ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧАХ РОЗСПОВАННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ ДОФРАКТАЛЬНИМИ ГРАТКАМИ.**

На основі методу інтегральних рівнянь наведена узагальнена математична модель процесу розсіювання акустичної хвилі дофрактальними ґратками. Детально досліджується випадок акустично жорсткої ґратки. Запропонована нова математична модель у вигляді особливих інтегральних рівнянь, до яких вже можна застосовувати прямі чисельні методи. Отримана мікросмужна асимптотика.

**Ключові слова:** акустичні хвилі, задача розсіювання, дофрактальна ґратка, інтегральні рівняння, досконала множина.

**Вступ.** У випадку прямих задач теорії дифракції (у широкому розумінні), які полягають у вивченні поля заданих джерел при заданих геометричних і фізичних характеристиках розсіювачів, розробка теоретичних основ застосування методу інтегральних рівнянь для дослідження вказаного класу задач по суті є давно завершеною [1]. Правда, залишаються досить суттєві, з точки зору практичних застосувань, питання найбільш ефективної реалізації чисельних алгоритмів розв'язку конкретних задач. Зокрема, актуальним є поєднання добре розроблених класичних методів з новими теоріями, що виникають з практичних потреб. До них, зокрема, належить *теорія фракталів*, яка набула широкого розповсюдження при моделюванні різних об'єктів та явищ [2]. Зрозуміло, що нова теорія має бути розроблена на рівні, що відповідає класичному методу: *не варто мікроскопом забивати цвяхи*. Загальна теорія фракталів охоплює надзвичайно великий обсяг матеріалу і знаходиться у безперервному збагаченні за рахунок нових об'єктів моделювання. Тому саме поняття фрактал не має чіткого визначення і тлумачиться досить вільно. Це дає підстави багатьом науковцям ставитись до теорії фракталів без відповідної поваги.

**Ніде не щільні досконалі множини на прямій.** Окремі представники великої множини фракталів з'явилися у досить поважних галузях науки і використовувались визначними математиками минулого. Найперше це *К. Вейерштрас* зі своєю знаменитою функцією, далі *Г. Сміт*, який використовував відомий сучасникам *дисконтинуум Кантора* для побудови функції не інтегрованої за *Ріманом* раніше *Г. Кантора* – творця сучасної теорії множин [2]. Неможливо перерахувати, навіть досить відомих вчених, які мали справу з дивними математичними об'єктами, що зараз називаються фракта-

лами. Щоправда вони не могли надавати їм певної уваги, бо не бачили їх практичного застосування.

Під назвою *ніде не цільних досконалих множин* (НЩДМ), що вивчаються у курсах теорії множин та загальної топології, фрактали увійшли до загальноновизнаних підручників вишів [3]. Зрозуміло, що НЩДМ на прямій подавались не як вагомий інструмент математичного моделювання, а тільки як ілюстративний матеріал. Тому не проводився системний аналіз з точки зору практичного застосування у математичному моделюванні. Отже, якщо обмежитись тільки НЩДМ на прямій, які повністю задовольняють *означення фракталу, як множини розмірності Хаусдорфа (PX) якої строго більше за топологічну розмірність*, то можна розробити досить потужну теоретичну базу для строгого поєднання теорії самоподібних фракталів (СПФ) з теорією дифракції. В статтях [4, 5] запропоновано системний підхід до розробки теорії СПФ зі змінною PX з огляду на застосування цієї теорії для задач розсіювання електромагнітних хвиль дофрактальними ґратками. Там, зокрема, наведені структурні схеми побудови двох класів СПФ зі змінною PX на основі одновимірних НЩДМ.

Для кожної стадії побудови СПФ визначені вихідні функції  $x_m^n(t)$ , де  $n$  – номер стадії побудови, а  $t$  пробігає значення від 1 до  $N$  – кількості сегментів даної стадії побудови. Якщо маємо справу з класом СПФ з PX  $\ln 2/\ln \kappa$ , де коефіцієнт самоподібності  $\kappa > 2$ , то  $N = 2^n$  [4]; коли ж обираємо клас СПФ з PX  $\ln 3/\ln \kappa$ ,  $\kappa > 3$ , то кількість сегментів  $N = 3^n$  [5]. Зазначимо, що, подібним до зазначених статей чином, можна будувати і досліджувати класи СПФ з PX  $\ln l/\ln \kappa$ , з  $\kappa > l$ , де  $l \in$  натуральним числом, більшим за 3.

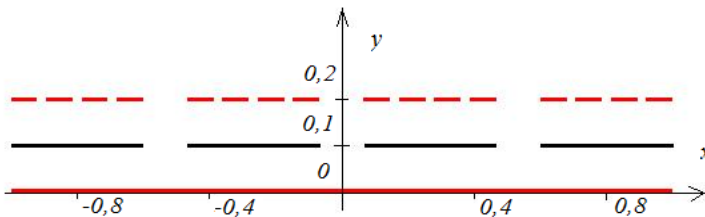


Рисунок – Процес побудови СПФ з PX  $\ln 4/\ln 5$ .

На рисунку приведена геометрична ілюстрація початку процесу творення СПФ з PX  $\ln 4/\ln 5$  у якого *носієм (ініціатором)* є сегмент  $[-1, 1]$ , а *утворювачем* – чотири сегменти, що визначаються аналітично функціями

$$x_{1,4}^1(t) = \mp 4/5 + \alpha t, \quad x_{2,3}^1(t) = \mp 4/15 + \alpha t, \quad \text{де } \alpha=0,2, \quad |t| \leq 1.$$

Вони наведені на прямій  $y = 0.1$ , а на прямій  $y = 0.2$  зображені 16 сегментів другої стадії процесу творення СПФ (*дофрактал* другої стадії). Коли цей процес творення продовжувати необмежено, то виникне зазначений

СПФ. Доведення проводиться подібно до того, як це зроблено у статті [4].

У цьому випадку  $N = 4^n$ , а в загальному –  $N = l^n$ . Вихідні функції  $x_m^n(t)$  при застосуванні методу інтегральних рівнянь (МІР) будуть відповідно вхідними. Математичний опис процесу розсіювання гармонічно залежної за часом акустичної хвилі ґраткою приводить до крайових задач для рівняння Гельмгольца [1]. Це зовнішня задача Діріхле, коли маємо акустично м'яку ґратку, та задача Неймана, коли ґратка є акустично жорсткою.

Основна перевага методу інтегральних рівнянь полягає у тому, що задачі поставлені у необмеженому просторі переводяться до задач у обмеженій області меншої топологічної розмірності.

Коли маємо планарну дофрактальну ґратку, то це буде математична модель у вигляді системи ІР за певною кількістю сегментів на прямій, впорядкованих у відповідності з певною стадією творення СПФ [4, 5]. Зазначена обставина є безумовно вирішальною з огляду чисельного аналізу. Зрозуміло, наявні переваги не досягаються без певних вад, пов'язаних, зокрема, з втратою єдиності розв'язку. Це зумовлює розробку аналітичних методів для подолання вказаних труднощів.

**Узагальнена модель процесу розсіювання.** Повернемося до задач розсіювання акустичної хвилі планарною дофрактальною стрічковою ґраткою. За методом інтегральних рівнянь (ІР) отримуємо систему

$$\sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m^{1,2}(t) H_0^{(1)}(|x_\kappa^n(\tau) - x_m^n(t)|) dt = f_\kappa^{1,2}(\tau) \quad |\tau| \leq 1, \quad \kappa = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Тут  $H_0^{(1)}(z)$  – функція Ханкеля, яка має логарифмічну особливість при  $z = 0$ , тобто система ІР є особливою. Права частина залежить від того, чи є ґратка м'якою чи жорсткою. У першому випадку акустично м'якої ґратки права частина системи ІР визначається за формулою

$$\frac{\pi}{2i} f_\kappa^1(\tau) = e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)},$$

а у другому – акустично жорсткої ґратки

$$\frac{\pi}{2i} f_\kappa^2(\tau) = A_\kappa e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)} + B_\kappa e^{-iq_1 x_\kappa^n(\tau)} - \frac{4}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)},$$

тут  $q_1$  та  $q_2$  – складові напрямного вектора хвилі. Користуючись відомим рядом для функції Ханкеля досить просто виділяється логарифмічна особливість у найпростішому вигляді

$$\int_{-1}^1 j_\kappa(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m(t) R_{\kappa m}(\tau, t) dt = f_\kappa(\tau). \quad (2)$$

В цьому рівнянні регулярні ядра мають наступний вигляд:

$$R_{mm}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(|x_m(\tau) - x_m(t)|) - \ln|\tau - t|,$$

$$R_{\kappa m}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(|x_\kappa(\tau) - x_m(t)|), \quad \kappa \neq m.$$

Тут і надалі верхні індекси не будемо писати, бо це зрозуміло буде з коментарів, з якою стадією побудови ми маємо справу. У випадку акустично м'якої ґратки безпосередньо використовуються відповідні квадратурні формули і досить точно знаходяться вихідні змінні даної моделі  $j_\kappa(t)$  [5, 6]. При дослідженні акустично жорстких ґраток за такою схемою діяти не можна, бо у правій частині маємо довільні сталі, за допомогою яких слід виділяти розв'язок системи ІР, що належить іншому класу функцій. Тут необхідно розробити спочатку аналітичний метод виключення невідомих сталих.

**Виключення сталих.** Оскільки за методом ІР у випадку задачі Неймана спочатку виникала система інтегро-диференціальних рівнянь, де під знаком похідної була функція Ханкеля, то доречно продиференціювати систему ІР за зовнішньою змінною. Та перед цим слід вказати на початкову умову при  $\tau = 0$ :

$$\int_{-1}^1 j_\kappa(t) \ln|t| dt + \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m(t) R_{\kappa m}(0, t) dt = f_\kappa(0), \quad \kappa = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Тут у правій частині маємо

$$f_\kappa(0) = a_\kappa + b_\kappa - \frac{4}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(0)}, \quad a_\kappa = A_\kappa e^{ix_\kappa^n(0)}, \quad b_\kappa = B_\kappa e^{-ix_\kappa^n(0)}.$$

Ці умови дають можливість виключити половину невідомих сталих. Решту сталих виключимо після диференціювання системи ІР за рахунок додаткових умов, що виділяють потрібний клас функцій, де будемо шукати розв'язок.

Після диференціювання (2) отримаємо систему ІР

$$\int_{-1}^1 \frac{j_\kappa(t)}{\tau - t} dt + \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m(t) \frac{\partial}{\partial \tau} R_{\kappa m}(\tau, t) dt = i\alpha_n \left( a_\kappa e^{i\alpha_n \tau} - b_\kappa e^{-i\alpha_n \tau} - \frac{4q_1}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)} \right), \quad (4)$$

де вже маємо більш сильну особливість у вигляді *інтеграла Коші*. Відомо, що ІР з *ядром Коші* мають три класи розв'язків [7]. У нашому випадку слід шукати розв'язок у вигляді

$$j_\kappa(t) = \varphi_\kappa(t) \cdot \sqrt{1-t^2},$$

де  $\varphi_\kappa(t)$  є неперервною у сегменті  $[-1, 1]$ .

Для цього виписуємо умови

$$\int_{-1}^1 \frac{F_\kappa(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 0,$$

де

$$F_\kappa(\tau) = i\alpha_n \left( a_\kappa e^{i\alpha_n \tau} - b_\kappa e^{-i\alpha_n \tau} - \frac{4q_1}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(\tau)} \right) - \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m(t) \frac{\partial}{\partial \tau} R_{\kappa m}(\tau, t) dt,$$

і використовуємо їх для виключення сталих. Виконуємо інтегрування і отри-

маємо співвідношення

$$i\alpha_n \pi J_0(\alpha_n)(a_\kappa - b_\kappa) = i\alpha_n \frac{4q_1}{kq_2} e^{iq_1 x_\kappa^n(0)} \pi J_0(\alpha_n q_1) + \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 d\tau \int_{-1}^1 \frac{\partial R_{\kappa m}(\tau, t)}{\partial \tau} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \kappa = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Коли об'єднаємо їх з попередніми співвідношеннями (3), то отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $a_\kappa$  та  $b_\kappa$ . Тобто є достатньо умов, щоб виключити сталі  $a_\kappa$  та  $b_\kappa$ , та мати систему інтегральних рівнянь з ядром Коші. Для цього знайдені  $a_\kappa$  та  $b_\kappa$  підставимо до (4) і у випадку ортогонального набігання акустичної хвилі ( $q_1 = 0, q_2 = 1$ ) отримуємо асиметричну систему IP першого роду

$$\int_{-1}^1 j_\kappa(t) \left[ \frac{1}{\tau - t} + 2\alpha_n \sin \alpha_n \tau \ln |t| \right] dt + \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 j_m(t) \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} R_{mm}(\tau, t) + 2\alpha_n \sin \alpha_n \tau R_{\kappa m}(0, t) - \frac{2 \cos \alpha_n \tau}{\pi J_0(\alpha_n)} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \tau} R_{\kappa m}(\tau, t) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right] dt = -\frac{4}{k} \alpha_n \sin \alpha_n \tau, \quad |\tau| \leq 1, \quad \kappa = 1, \dots, N.$$

Ця система завдяки накладеним вище  $2N$  умовам (3) та (5) рівносильна попередній системі IP (1) з верхнім індексом 2 та невідомими сталими у правій частині. Вона належить до добре теоретично вивчених і має вже єдиний розв'язок [7]. Його наближено можна знайти, використовуючи прямі чисельні методи, або асимптотичні вирази, звузивши діапазон параметрів задачі та явні розв'язки найпростіших IP [5]. Зокрема з отриманої математичної моделі також безпосередньо впливає асимптотичний вираз  $j_m^2(t) \approx -4\alpha_n^2 \sqrt{1-t^2} / \pi k$ , який співпадає з отриманим раніше з системи IP (1) [5]. Таким чином, доречно вважати систему особливих IP (6) загальною математичною моделлю процесу розсіювання акустичної хвилі дофрактальною ґраткою з акустично жорсткими стрічками, яка є більш ефективною, ніж попередня.

**Висновки.** Наведена узагальнена математична модель процесу розсіювання акустичної хвилі дофрактальними стрічковими ґратками у вигляді системи сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. У випадку акустично жорсткої ґратки загальна математична модель симетричного типу перетворена до більш ефективною асиметричної системи інтегральних рівнянь з ядром Коші, до якої вже безпосередньо можна застосовувати прямі чисельні методи, зокрема *метод механічних квадратур*. З отриманої математичної моделі також безпосередньо впливає мікросмужна асимптотика.

**Список літератури:** 1. Колтон Д., Кресс Р. Методи інтегральних уравнений в теории рассеяния: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 311 с. 2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр. 3. Александров П С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977, 368 стр. 4. Кошовий А.Г., Кошовий Г.І. Одновимірні самоподібні фрактали та їх використання у моделюванні. Вісник Національного по-

літехнічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011 – №42 – С.82 – 88. 5. *Koshovy G.I.* Systems approach to investigating prefractal diffraction gratings. *Telecommunications and Radio Engineering*. №71(6), 2012, 487 – 500pp. 6. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярних інтегральних уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев. Наук. Думка, 1984, 343с. 7. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.

*Надійшла до редколегії 07.03.2014*

---

УДК 513.85

**Метод інтегральних рівнянь в задачах розсіювання акустичних хвиль дофрактальними ґратками / А. Г. Кошовий, Г. І. Кошовий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 94 – 99. Бібліог.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.**

На основе метода интегральных уравнений приведена обобщенная математическая модель процесса рассеяния акустической волны предфрактальными решетками. Подробно исследуется случай акустически жесткой решетки. Предложена новая математическая модель в виде особых интегральных уравнений, к которым уже можно применять прямые численные методы. Получена микрополосковая асимптотика.

**Ключевые слова:** акустические волны, задача рассеивания, дофрактальная сетка, интегральные уравнения, совершенное множество.

UDC 513.85

**Method of integral equations for the problems of scattering of acoustic waves by prefractal gratings / A. G. Koshoviy, G.I. Koshoviy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 94 – 99. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.**

A mathematical model of scattering of acoustic waves by prefractal gratings, based on the integral equations method, has been summarized. The case of an acoustically rigid grating has been studied in details. A new mathematical model in the form of singular integral equations, to which it is possible to apply direct numerical methods, is offered. A microstrip asymptotics is obtained.

**Key words:** acoustic waves, diffraction problem, prefractal grating, integral equations, perfect set.

УДК 517.07

**Л.В. КУРПА**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;  
**А.А. ОСЕТРОВ**, ст. викл., НТУ «ХПІ»;  
**Т.В. ШМАТКО**, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПІ»

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ**

Предложен метод исследования спектра собственных частот и форм колебаний пологих оболочек неканонических форм в плане, изготовленных из функционально-градиентных материалов. Метод основывается на совместном применении уточненной теории первого порядка типа Ти-

---

© Л. В. Курпа, А. А. Осетров, Т. В. Шматко, 2014



мошенко, вариационного метода Ритца, теории  $R$ -функций (RFM) и сплайн-аппроксимации. Предложенный метод позволил провести исследование влияния вида граничных условий, кривизны и показателя степени объемной доли материала на спектр собственных частот и форм колебаний оболочек со сложной формой плана. Результаты, представленные в работе, получены как с помощью полиномиальной, так и с помощью сплайн-аппроксимации. Для подтверждения достоверности результатов приведено их сравнение с известными ранее в литературе для оболочек с прямоугольной формой плана.

**Ключевые слова:** функционально-градиентные материалы (ФГМ), пологие оболочки, теория  $R$ -функций (RFM), сплайн-аппроксимация, теория типа Тимошенко, спектр собственных частот, сложная форма плана.

**Введение.** Функционально-градиентные материалы (ФГМ) находят широкое применение на практике и, прежде всего, в авиационной и ракетно-космической промышленности. По своей структуре ФГМ обычно состоят из смеси микроскопических частиц металла и керамики. Посредством варьирования объемными долями материалов удастся получить плавное изменение свойств от одной лицевой поверхности к другой. Такое изменение свойств материала позволяет существенно сократить уровни концентрации напряжений в элементах конструкций при действии различных факторов, например, при воздействии температуры. Изготовление тонкостенных элементов конструкций из ФГМ приводит к необходимости создания эффективных методов моделирования и расчета их динамического поведения.

**Анализ последних достижений.** К числу первых публикаций, посвященных изучению свойств функционально-градиентных материалов, можно отнести работы *M. Yamanoushi* и др. [1] и *M. Koizumi* [2]. Теория пластин и оболочек, изготовленных из ФГМ, интенсивно развивается в последние годы, что подтверждает большее число появившихся работ [3 – 10] и др. Как следует из обзора литературы, детально изучаются вопросы линейного и нелинейного динамического и статического анализа функционально-градиентных пластин и оболочек. При этом наибольшее внимание уделено объектам прямоугольной или круглой формы, свободно опертых или жестко защемленных по всему контуру. Практически отсутствуют работы, в которых исследуются пластины и оболочки со сложной формой плана. Поэтому разработка эффективных методов моделирования динамического поведения функционально-градиентных оболочек и пластин со сложной формой плана и различными видами граничных условий является актуальной.

В настоящей работе из общего класса оболочек выбраны пологие оболочки. Для решения задач о свободных колебаниях пологих оболочек из ФГМ предлагается использовать теорию  $R$ -функций и вариационный метод Ритца. Как и в случае анизотропных и многослойных пологих оболочек, применение метода  $R$ -функций (RFM) [11] в сочетании с вариационными методами позволяет исследовать функционально-градиентные пологие оболочки и пластины различной геометрической формы при различных способах их закрепления и степени искривленности.

**Математическая постановка задачи.** Будем рассматривать пологие

оболочки постоянной толщины  $h$ , изготовленные из смеси керамики и металла. Механические свойства композита непрерывно изменяются вдоль толщины оболочки таким образом, что верхняя часть панели ( $z = h/2$ ) является керамической, а нижняя ( $z = -h/2$ ) – металлической. Как известно [3 - 9], материальные свойства ФГМ структур зависят от объемных частей составляющих материалов и определяются для двух составляющих следующим образом:

$$P(z) = (P_c - P_m)V + P_m, \quad (1)$$

где  $V$  выражает объемную долю керамики и определяется формулой:

$$V = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (2)$$

Выражение (1) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости, коэффициента Пуассона и плотности композита,  $P_c, P_m$  – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени объемной доли керамики  $k$  в формуле (2) может изменяться от нуля до бесконечности, то есть  $0 \leq k < \infty$ . При этом если  $k = 0$ , то структура является полностью керамической, если же  $k = \infty$ , то – металлической.

Аналогично, как и в случае однослойных пластин и оболочек, применение RFM требует знания вариационной постановки задачи о колебаниях многослойных оболочек и пластин.

Если рассматриваются гармонические свободные колебания в рамках *уточненной теории первого порядка*, базирующейся на идеях *С. П. Тимошенко*, то вектор неизвестных функций представляется в виде

$$\begin{aligned} \vec{U}(u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t)) = \\ = \vec{U}(u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)) \sin \lambda t, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  – частота колебаний;  $u, v, w$  – перемещения срединной поверхности в направлениях осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно;  $\psi_x, \psi_y$  – углы поворота нормали относительно осей  $Oy$  и  $Ox$ .

Вариационное уравнение имеет вид

$$\delta I = 0, \quad (3)$$

где

$$I = U_{\max} - T_{\max}.$$

Максимальные значения для потенциальной  $U_{\max}$  и кинетической энергии  $T_{\max}$  определяются с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12}) d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}) d\Omega \end{aligned}$$

и

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho_1 \left[ u^2 + v^2 + w^2 + \frac{h^2}{12} (\psi_x^2 + \psi_y^2) \right] dx dy .$$

Здесь деформации определяются равенствами:

$$\varepsilon_{11} = \partial_x u + k_1 w, \quad \varepsilon_{22} = \partial_y v + k_2 w, \quad \varepsilon_{12} = \partial_y u + \partial_x v ,$$

$$\chi_{11} = \partial_x \psi_x, \quad \chi_{22} = \partial_y \psi_y, \quad \chi_{12} = \partial_y \psi_x + \partial_x \psi_y ,$$

где  $k_1, k_2$  – главные кривизны оболочки, а  $N_{ij}, M_{ij}, (i, j = 1, 2)$  – усилия и моменты, которые вычисляются в результате интегрирования вдоль оси  $Oz$  и имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_1(1-\nu)/2 & 0 & 0 & E_1(1-\nu)/2 \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & E_2(1-\nu)/2 & 0 & 0 & E_3(1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix} ,$$

$$E_1 = \left( E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left( \frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left( \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3 .$$

Перерезывающие силы  $Q_x, Q_y$  определяются равенствами:

$$Q_x = k_s^2 \frac{E_1 h}{2(1+\nu)} (\partial_x w + \psi_x), \quad Q_y = k_s^2 \frac{E_1 h}{2(1+\nu)} (\partial_y w + \psi_y),$$

где  $k_s^2$  – коэффициент сдвига, который ниже принимается равным  $5/6$ .

Плотность композита  $\rho_1$  также определяется в результате интегрирования по толщине оболочки:

$$\rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left( \rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h .$$

Разрешающие уравнения дополняются граничными условиями, характер которых определяется способом закрепления контура оболочки.

**Метод решения.** Минимизацию функционала (3) будем выполнять с помощью метода Ритца, согласно которому неизвестные функции  $u, v, \psi_x, \psi_y, w$  представляются в виде

$$u = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{N_2} b_i v_i, \quad \psi_x = \sum_{i=1}^{N_3} c_i \psi_{xi}, \quad \psi_y = \sum_{i=1}^{N_4} d_i \psi_{yi}, \quad w = \sum_{i=1}^{N_5} e_i w_i,$$

где  $\{u_i\}, \{v_i\}, \{\psi_{xi}\}, \{\psi_{yi}\}, \{w_i\}$  – последовательности координатных функций, удовлетворяющие, по крайней мере, главным граничным условиям,  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума функционала (3). В настоящей работе использованы последовательности координатных функций  $\{u_i\}, \{v_i\}, \{\psi_{xi}\}, \{\psi_{yi}\}, \{w_i\}$ , которые были построены раньше и представлены в работах [12, 13] и др. Базой для построения таких последовательностей являются структуры решения краевой задачи.

**Численные результаты.** Для проверки достоверность предложенного подхода и созданного программного обеспечения рассмотрим некоторые тестовые задачи и сравним полученные результаты с известными. Решение будем выполнять в рамках классической и уточненной теорий первого порядка.

Таблица 1– Сравнение значений параметра  $\Omega$  для основных частот квадратных в плане оболочек  $a/h = 10$  из ФГМ с результатами работ [8 - 10]

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	$k$	RFM (CST, poly / spli)	RFM (FSDT, poly / spli)	(CST) [9]	(FSDT) [10]	(HSDT) [8]
0	0	0	0.0597 / 0.0597	0.0576 / 0.0576	0.0597	0.0577	0.0578
		0.5	0.0505 / 0.0506	0.0489 / 0.0489	0.0506	0.0490	0.0492
		1	0.0455 / 0.0455	0.0441 / 0.0441	0.0456	0.0442	0.0443
		4	0.0395 / 0.0395	0.0382 / 0.0382	0.0396	0.0383	0.0381
		10	0.0380 / 0.0380	0.0365 / 0.0365	0.0380	0.0366	0.0364
0.5	0.5	0	0.0770 / 0.0771	0.0753 / 0.0753	0.0779	0.0762	0.0751
		0.5	0.0665 / 0.0665	0.0652 / 0.0652	0.0676	0.0664	0.0657
		1	0.0605 / 0.0605	0.0593 / 0.0593	0.0617	0.0607	0.0601
		4	0.0508 / 0.0507	0.0496 / 0.0496	0.0519	0.0509	0.0503
		10	0.0472 / 0.0472	0.0462 / 0.0461	0.0482	0.0471	0.0464
0	0.5	0	0.0642 / 0.0642	0.0622 / 0.0622	0.0648	0.0629	0.0622
		0.5	0.0546 / 0.0547	0.0531 / 0.0531	0.0553	0.0540	0.0535
		1	0.0494 / 0.0494	0.0481 / 0.0481	0.0501	0.0490	0.0485
		4	0.0423 / 0.0423	0.0411 / 0.0411	0.0430	0.0419	0.0413
		10	0.0403 / 0.0402	0.0389 / 0.0389	0.0408	0.0395	0.0390
0.5	-0.5	0	0.0582 / 0.0582	0.0562 / 0.0562	0.0597	0.0580	0.0563
		0.5	0.0493 / 0.0493	0.0477 / 0.0477	0.0506	0.0493	0.0479
		1	0.0444 / 0.0444	0.0430 / 0.0430	0.0456	0.0445	0.0432
		4	0.0385 / 0.0385	0.0372 / 0.0372	0.0396	0.0385	0.0372
		10	0.0370 / 0.0370	0.0356 / 0.0356	0.0380	0.0368	0.0355

При этом для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах будем использовать как обычные степенные полиномы, так и сплайны. В качестве ФГМ выберем комбинацию  $Al / Al_2O_3$ . Механические характеристики для материалов, составляющих такой сплав, представляются

следующими параметрами [8 – 10]:

$$Al: E_m = 70 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3, \rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3, \\ Al_2O_3: E_c = 380 \text{ GPa}, \nu_c = 0.3, \rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3.$$

**Задача 1.** Исследуем собственные колебания пластины и пологой оболочки (сферической, цилиндрической или в форме гиперболического параболоида), опирающейся на квадратный план. Предположим, что оболочка свободно оперта по всему контуру. Результаты расчетов основных частот, полученные при использовании RFM как на основе полиномиальной, так и сплайн-аппроксимации (poly / spli), сравниваются с известными [8 - 10] в табл. 1. Данные в работе получены как на основе уточненной теории первого порядка (FSDT), так и классической (CST), причем сетка сплайнов для сплайн-аппроксимации была выбрана [10×10], а степени аппроксимирующих полиномов для функций  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$  выбирались равными соответственно 10,10,11,10,10. Соотношение характерного геометрического размера к толщине принято равным  $a/h = 10$ , а результаты для основной частоты представлены в виде безразмерного параметра  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ .

Сравнение показывает, что результаты, полученные с помощью уточненной теории первого порядка (RFM, FSDT), практически совпадают с представленными в работе [10]. Отклонения от результатов теории более высокого порядка (HSDT) [8] не превышает 3.8 %. Не менее устойчивое совпадение результатов наблюдается и при использовании классической теории (RFM, CST) [9]. В целом следует отметить, что классическая теория приводит в большинстве случаев к завышенным значениям основных частот по сравнению с уточненными теориями, так как моделирует оболочку как более жесткую. Результаты, полученные с помощью RFM при использовании аппроксимации неопределенных компонент степенными полиномами или сплайнами, в данном случае практически совпадают. Этот факт является дополнительным подтверждением достоверности получаемых результатов.

Проведенное тестирование предложенного метода и разработанного программного обеспечения позволяет рассматривать пластины и оболочки со сложной формой плана и различными видами граничных условий. Ниже представлена одна из таких задач.

**Задача 2.** Исследуем свободные колебания функционально-градиентной оболочки ( $Al / Al_2O_3$ ), опирающейся на план, изображенный на рис. 1. Предположим, что на границе области заданы условия неподвижного в тангенциальном направлении шарнира или условия жесткого закрепления.

Учитывая, что края плана оболочки являются прямолинейными, структурные формулы для неподвижного шарнира можно выбрать в виде:

$$u = \omega_1 P_1, \quad v = \omega_2 P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega_1 P_4, \quad \psi_y = \omega_2 P_5,$$

а для жесткой заделки в виде:

$$u = \omega P_1, \quad v = \omega P_2, \quad w = \omega^2 P_3, \quad \psi_x = \omega P_4, \quad \psi_y = \omega P_5,$$

где  $P_i = P_i(x, y)$ ,  $i = \overline{1, 5}$  – неопределенные компоненты в структурных формулах, которые будем аппроксимировать как степенными полиномами, так и *бикубическими сплайнами Шенберга* [13].

Для конкретизации структуры решения необходимо задать уравнения участков  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 0$  и уравнение всей границы области  $\omega = 0$ .

Уравнение всей границы области может быть определено так:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4),$$

где

$f_1 = ((a^2 - x^2)/2a) \geq 0$  – вертикальная полоса, ограниченная прямыми  $x = \pm a$ ;

$f_2 = ((b^2 - y^2)/2b) \geq 0$  – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми  $y = \pm b$ ;

$f_3 = ((a_1^2 - x^2)/2a_1) \geq 0$  – вертикальная полоса, ограниченная прямыми  $x = \pm a_1$ ;

$f_4 = ((b_1^2 - y^2)/2b_1) \geq 0$  – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми  $y = \pm b_1$ ,

знаки  $\wedge_0, \vee_0$  обозначают  $R$  – конъюнкцию и  $R$  – дизъюнкцию [11] соответственно.

Функции  $\omega_1, \omega_2$  можно построить следующим образом:

$$\omega_1 = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_2 \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6 \vee_0 f_7 \vee_0 f_8),$$

$$\omega_2 = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_1 \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10} \vee_0 f_{11} \vee_0 f_{12}).$$

В последних формулах выражения для функций  $f_i$ , ( $i = \overline{5, 12}$ ) имеют вид:

$$f_5 = \left( (r_1^2 - (x + d_1)^2 - (y + b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_6 = \left( r_1^2 - (x + d_1)^2 - (y - b_1)^2 \right) / (2r_1) \geq 0,$$

$$f_7 = \left( (r_1^2 - (x - d_1)^2 - (y + b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_8 = \left( (r_1^2 - (x - d_1)^2 - (y - b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_9 = \left( (r_2^2 - (x + a_1)^2 - (y + d_2)^2) / (2r_2) \right) \geq 0,$$

$$f_{10} = \left( (r_2^2 - (x - a_1)^2 - (y + d_2)^2) / 2r_2 \right) \geq 0,$$

$$f_{11} = \left( (r_2^2 - (x + a_1)^2 - (y - d_2)^2) / 2r_2 \right) \geq 0,$$

$$f_{12} = \left( (r_2^2 - (x - a_1)^2 - (y - d_2)^2) / (2r_2) \right) \geq 0,$$

где  $r_1 = \frac{a-a_1}{2}$ ,  $r_2 = \frac{b-b_1}{2}$ ,  $d_1 = \frac{a+a_1}{2}$ ,  $d_2 = \frac{b+b_1}{2}$ .

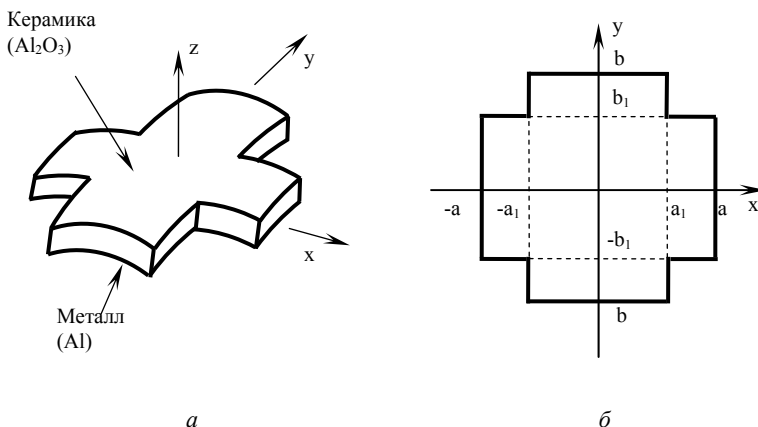


Рис. 1 – Вид исследуемой полой оболочки из ФГМ:  
 а – пространственная форма; б – форма в плане.

Геометрические параметры оболочки выбраны следующими:

$$h/(2a) = 0.2; \quad b/a = 1; \quad b_1/a_1 = 1; \quad b_1/(2a) = 0.3.$$

Для исследования сходимости значений собственных частот был проведен вычислительный эксперимент с помощью полиномиальной и сплайн-аппроксимации при использовании различного количества координатных функций. В качестве примера в табл. 2 представлены результаты проведенных исследований для сферической оболочки  $a/R_x = a/R_y = 0.5$  (рис. 1) при показателе степени объемной доли керамики  $k = 4$ . Для сплайн-аппроксимации была выбрана сетка от  $[5 \times 5]$  до  $[25 \times 25]$ , а степени аппроксимирующих полиномов для функций  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$  приведены в табл. 2 – 3.

Таблица 2 – Сходимость значений частотного параметра  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$  для основной частоты сферической оболочки из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (жесткая заделка),  $(h/(2a) = 0.2, a/R_x = a/R_y = 0.5)$

Полиномиальная аппроксимация		Сплайн-аппроксимация	
Степени полиномов	Значения частотного параметра $\Omega$	Сетка сплайнов	Значения частотного параметра $\Omega$
7,7,10,7,7	0.2606	5x5	0.2626
9,9,12,9,9	0.2604	10x10	0.2615
11,11,14,11,11	0.2603	15x15	0.2609
13,13,16,13,13	0.2599	20x20	0.2605
-	-	25x25	0.2599

Таблица 3 – Сходимость значений частотного параметра  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$  для основной частоты сферической оболочки из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (шарнирное опирание),  $(h/(2a) = 0.2, a/R_x = a/R_y = 0.5)$

Полиномиальная аппроксимация		Сплайн-аппроксимация	
Степени полиномов	Значения частотного параметра $\Omega$	Сетка сплайнов	Значения частотного параметра $\Omega$
7,7,10,7,7	0.2149	5x5	0.2175
9,9,12,9,9	0.2123	10x10	0.2143
11,11,14,11,11	0.2112	15x15	0.2126
13,13,16,13,13	0.2104	20x20	0.2113
-	-	25x25	0.2092

Анализ результатов табл. 2 для жестко закрепленной оболочки показывает стабилизацию собственных частот в третьем знаке после запятой. Из табл. 3 следует, что для шарнирно опертых оболочек стабильными остаются два знака после запятой. Таким образом, расчет для других типов оболочек был выполнен при использовании сетки сплайнов  $[10 \times 10]$  и сохранении степеней аппроксимирующих степенных полиномов (9,9,12,9,9), что соответствует следующему количеству координатных функций для  $u, v, w, \psi_x, \psi_y$ : (15,15,28,15,15). При этом следует отметить, что количественно уточнение результата для  $\Omega$  в рамках рассмотренного диапазона степеней полиномов и сеток сплайнов оказывается существенно меньшим для жестко закрепленной оболочки (табл. 2), чем для шарнирно опертой (табл. 3) и составляет соответственно 1% и 3%. Это, очевидно, объясняется большей механической податливостью шарнирно опертой оболочки.

Таблица 4 – Значения основного частотного параметра  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$  для оболочек различной кривизны из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (жесткая заделка),  $h/(2a) = 0.2$

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	RFM approximation	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	poly	0.368	0.319	0.290	0.244	0.226	0.187
		spli [10x10]	0.371	0.321	0.292	0.246	0.228	0.188
0.5	0.5	poly	0.394	0.342	0.311	0.260	0.240	0.200
		spli [10x10]	0.396	0.344	0.313	0.262	0.241	0.201
0	0.5	poly	0.379	0.328	0.299	0.251	0.232	0.193
		spli [10x10]	0.381	0.330	0.300	0.252	0.233	0.194
0.5	-0.5	poly	0.383	0.333	0.303	0.254	0.235	0.195
		spli [10x10]	0.385	0.335	0.305	0.256	0.236	0.196

В табл. 4, 5 приведены результаты исследования влияния различных значений показателя степени объемной доли керамики  $k$  и кривизны на величины параметров  $\Omega$  основных частот оболочек из ФГМ. Причем исследова-



ние проведено для двух различных видов граничных условий, а именно, для жесткой заделки (табл. 4) и шарнирного опирания (табл. 5), с использованием полиномиальной (poly) и сплайн-аппроксимации (spli).

Таблица 5 – Значения основного частотного параметра  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$  для оболочек различной кривизны из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (шарнирное опирание),  $h/(2a) = 0.2$

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	RFM approximation	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	poly	0.302	0.261	0.237	0.200	0.186	0.154
		spli [10x10]	0.307	0.266	0.242	0.203	0.189	0.156
0.5	0.5	poly	0.322	0.279	0.253	0.211	0.196	0.164
		spli [10x10]	0.327	0.283	0.257	0.214	0.199	0.166
0	0.5	poly	0.309	0.266	0.241	0.202	0.189	0.157
		spli [10x10]	0.314	0.271	0.246	0.206	0.191	0.160
0.5	-0.5	poly	0.309	0.266	0.241	0.202	0.188	0.157
		spli [10x10]	0.315	0.272	0.246	0.206	0.191	0.160

Сопоставление результатов в табл. 4 – 5, полученных с помощью полиномиальной и сплайн-аппроксимации, показывает, что отклонение между ними не превышает 1% – 2%.

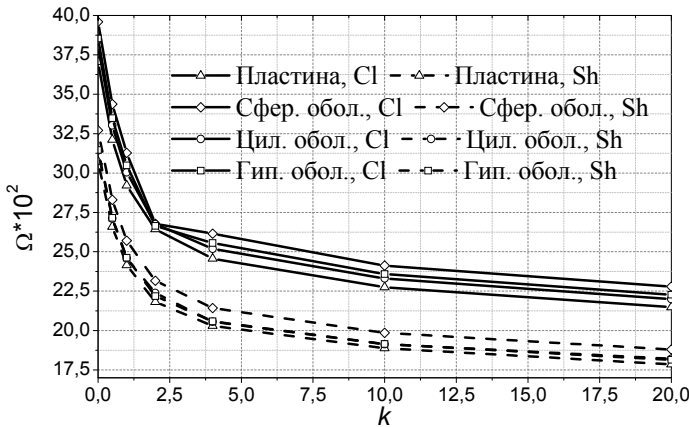


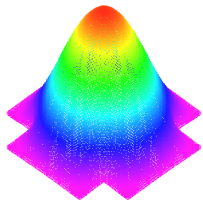
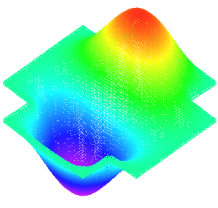
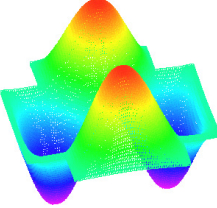
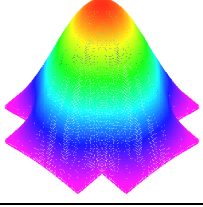
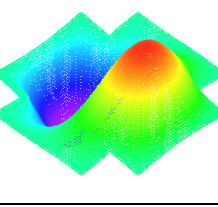
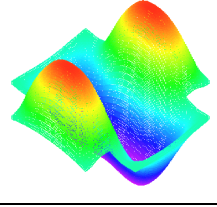
Рис. 2 – Зависимость значений параметра  $\Omega$  для основных частот оболочек из ФГМ (рис. 1) от показателя степени объемной доли керамики  $k$ .

Смягчение граничного условия с жесткой заделки (табл. 4) до шарнирного опирания (табл. 5) приводит к уменьшению основной частоты до 18% вне зависимости от типа кривизны и значения показателя степени объемной доли керамики  $k$ . На графиках (рис. 2) представлена зависимость значений

параметра  $\Omega$  от величины  $k$  для основных частот оболочек из ФГМ (рис. 1) при условиях жесткой заделки (Cl) и шарнирного опирания (Sh). Исследование проведено для следующих значений кривизн:  $a/R_y = a/R_x = 0$  (пластина),  $a/R_y = a/R_x = 0.5$  (сфер. обол.),  $a/R_y = 0$ ;  $a/R_x = 0.5$  (цил. обол.),  $a/R_y = 0.5$ ;  $a/R_x = -0.5$  (гип. обол.).

Анализ графиков позволяет оценить качественное поведение значений основной частоты в зависимости от показателя степени для закона (2) изменения механических характеристик  $k$ . При росте величины  $k$ , вне зависимости от типа граничного условия, наблюдается уменьшение значений основной частоты колебаний. Частоты «асимптотически» приближаются к соответствующим значениям частот металлической оболочки или пластины. При этом влияние кривизн оболочек при варьировании  $k$  оказывается несущественным. Стоит отметить, что как для жесткой заделки, так и для шарнирного опирания во всем диапазоне изменения значений величины  $k$ ,  $k \in [0, 20]$  наибольшие величины основных частот наблюдались для случая сферических оболочек, а наименьшие для пластин.

Таблица 6 – Первые формы и величины  $\Omega_i = \omega_i h \sqrt{\rho_c / E_c}$  собственных колебаний сферических оболочек из ФГМ (рис. 1) при  $k = 4$

Жесткая заделка		
		
$\Omega_1 = 0.2615$	$\Omega_2 = 0.4157$	$\Omega_3 = 0.5774$
Шарнирное опирание		
		
$\Omega_1 = 0.2143$	$\Omega_2 = 0.3683$	$\Omega_3 = 0.4863$

В табл. 6 приведены первые три формы колебаний сферических ( $a/R_y = a/R_x = 0.5$ ) оболочек и соответствующие им величины  $\Omega$  при значении параметра  $k = 4$  для случаев жесткой заделки и шарнирного опирания.

Анализ первых трех собственных частот колебаний, приведенных в табл. 6, показывает, что изменение типа граничного условия с жесткой заделки на шарнирное опирание приводит к уменьшению второй собственной частоты примерно на 11%, что меньше, чем для основной. Таким образом, последующие частоты менее чувствительны к изменению граничных условий, чем основные.

**Выводы.** В работе предложен и численно реализован метод исследования спектра собственных частот и форм колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана и различными видами граничных условий. С помощью предложенного метода проведено исследование влияния механических и геометрических факторов (типа граничных условий, кривизны срединной поверхности, показателя степени объемной доли керамики) на собственные частоты и формы колебаний оболочек со сложной формой плана. Расчет выполнен с использованием полиномиальной и сплайн-аппроксимации неизвестных функций. Для оболочек с квадратным планом выполнено сравнение полученных результатов с известными в литературе. Практическое их совпадение подтверждает достоверность разработанного метода и созданного программного обеспечения, которые могут быть использованы для решения широкого класса задач.

**Список литературы:** 1. *M. Yamanoushi, M. Koizumi, T. Hirai, I. Shiota (Eds.)*, Proceedings of the First International Symposium on Functionally Graded Materials, Japan, 1990. 2. *M. Koizumi*, The concept of FGM, Ceramic Trans. Functionally Graded Mater. 34 (1993) 3 - 10. 3. *Carrera E, Brischetto S, Robaldo A*. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. AIAA J 2008;46:194 – 203. 4. *Zenkour AM*. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Appl Math Modell 2006;30:67 – 84. 5. *Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Martins PALS*. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. Compos Struct 2004;69:449 – 57. 6. *Altenbach, H.; Eremeyev, V.* Direct approach based analysis of plates composed of functionally graded materials. Archive of Applied Mechanics, vol. 78, no. 10, pp. 775 – 794. 7. *Loy CT, Lam KY, Reddy JN*. Vibration of functionally graded cylindrical shells. Int J Mech Sci 1999;41:309 – 24. 8. *Matsunaga H*. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. Compos Struct 2008;84(2):132 – 46. 9. *Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., Bakhtiari-Nejad, F.* Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. J. Sound Vib. 330, 1432 – 1454 (2011). 10. *S.M. Chorfi, A. Houmat* Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures 92 (2010) 2573-2581. 11. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с. 12. *Курпа Л. В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с. 13. *Jan Awrejcewicz, Lidiya Kurpa, and Andrey Osetrov*. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation // ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 1 – 10 (2011) / DOI 10.1002/zamm.2010001648).

Поступила в редколлегию 11.02.2014

---

УДК 517.07

**Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л. В. Курпа, А. А. Осетров, Т. В. Шматко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіяx. – Ха-**

рків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 99 – 111. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.

Запропоновано метод дослідження спектру власних частот та форм пологих оболонок неканонічних форм у плані, що утворюються з функціонально-градієнтних матеріалів. Метод базується на сумісному використанні уточненої теорії першого порядку типу Тимошенко, варіаційного методу Ритца, теорії  $R$ -функцій (RFM) та сплайн-апроксимації. Запропонований метод дозволив провести дослідження впливу типу граничних умов, кривини та показника степені об'ємної частки матеріалу на спектр власних частот та форм оболонок зі складною формою плану. Результати, що наведені у роботі, отримані як за допомогою поліноміальної, так і за допомогою сплайн-апроксимації. Для підтвердження достовірності результатів наведено їх порівняння з відомими раніш в літературі для оболонок з прямокутною формою плану.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), пологі оболонки, теорія  $R$ -функцій (RFM), сплайн-апроксимація, теорія типу Тимошенко, спектр власних частот, складна форма плану.

UDC 517.07

**Determining eigen frequencies of functionally graded shallow shells using the R-function theory and spline-approximation / L. V. Kurpa, A. A. Osetrov, T. V. Shmatko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 99 – 111. Bibliog.: 13 titles. – ISSN 2222-0631.**

The article suggests a method of investigation of natural frequencies and eigen forms of shallow shells with non-canonical plan-forms consisting of functionally graded materials. The solution method is based on the joint usage of the refined shallow shell theory of the first order (Timoshenko's type), the Ritz variational method, the R-function theory and spline-approximation. The proposed approach allows investigating the influence of boundary conditions, type of curvature and the volume fraction power coefficient on the natural frequencies and eigen forms of shallow shells with complex planform. The results presented in the article are obtained by both polynomial and spline-approximation. To prove the reliability of the obtained results we compare them with the once previously known for the shells with rectangular planform.

**Key words:** functionally-graded materials (FGM), shallow shells, the R-functions theory (RFM), spline-approximation, the Timoshenko's type theory, natural frequencies, complex planform.

УДК 66.023

*А.Ю. ЛЕБЕДЕВ*, аспірант, НТУ «ХПІ»

## **ПІДВИЩЕННЯ ТЕХНІЧНОГО РІВНЯ ЛАБІРИНТНО-ГВИНТОВОГО НАСОСА ЗА РАХУНОК ВДОСКОНАЛЕННЯ ЙОГО РОБОЧИХ ОРГАНІВ**

Наведено методику визначення технічного рівня лабіринтно-гвинтового насоса. Проведено аналіз впливу форми робочих органів насоса та газомісту робочої рідини на цей показник. Отримані дані дозволяють на етапі проектування оцінити і визначити шляхи підвищення технічного рівня лабіринтно-гвинтового насоса.

**Ключові слова:** лабіринтно-гвинтовий насос, робочі органи, гвинтова канавка, технічний рівень, газоміст.

**Вступ та постановка проблеми.** Завдяки здатності перекачування хімічно активних, вибухо- і пожежонебезпечних рідин в'язкістю до 500 сСт, яка

містить не більше ніж 2 % твердих домішок розміром до 0,1 мм та має температуру до 105°С, *лабіринтно-гвинтові насоси* (ЛГН) знайшли широке використання у хімічній та харчовій галузях промисловості. ЛГН значно простіші у виготовленні, компактні та легші за вихрові і завдяки особливостям робочого процесу та відсутністю механічного тертя більш надійніші. Вони можуть використовуватися як свердловинні занурювальні насоси для місцевого водопостачання та входні ступені відцентрових насосів при нафтовидобутку.

Значною мірою характеристики ЛГН залежать від їх робочих органів – гвинта і втулки, у яких виконані багатозахідні нарізки, спрямовані у протилежні сторони [1]. Як відмічено у статті [2], стратегічним напрямком розвитку ЛГН є удосконалення форми їх проточної частини, встановлення оптимальних конструктивних і робочих параметрів.

Методикам розрахунку та проектування ЛГН присвячені роботи [1, 3]. В них наведені характеристик ЛГН, що мають робочі органи з напівкруглою, трапецеїдальною та трикутною нарізками. Для більш малих напорів перевагу слід надавати напівкруглій та трапецеїдальній нарізкам, так як вони простіші у виготовленні, їх гідравлічні характеристики кращі та у меншому ступені залежать від зазору між гвинтом і втулкою. Однак в даних роботах не встановлено технічний рівень ЛГН у залежності від форми нарізок робочих органів та їх конкурентоспроможність.

Оцінка технічного рівня об'ємних гідромашин розглядається у роботі [4]. В ній наведені прості та комплексні критерії для порівняння показників технічного рівня об'ємних гідромашин, систематизовано інформацію щодо робочих параметрів гідромоторів передових зарубіжних фірм, проаналізовано вплив деяких характеристик гідромоторів на їх технічний рівень. Однак не визначений економічний ефект від впровадження даних гідромоторів, не встановлені числові значення показники їх технічного рівня. Таким чином, наведена методика не може бути цілком використана для встановлення технічного рівня ЛГН.

Методика визначення технічного рівня гідромашин наведена у роботі [5]. В ній розглядається технічний рівень *аксіально-поршневого насоса*. Однак наведені в ній показники технічного рівня, як і у роботі [4], придатні тільки для використання широкої гами об'ємних гідромашин, а для встановлення технічного рівня ЛГН потребують уточнення. Безрозмірні критерії для порівняння ЛГН з робочими органами різної форми наведені у [6]. Але в ній, як і у роботах [1, 3], відсутні відомості щодо технічного рівня ЛГН та їх конкурентоспроможності. Таким чином, розробка методики та встановлення показників технічного рівня ЛГН є актуальним науково-технічним завданням. В такій постановці дана задача не розглядалась.

**Удосконалені конструкції ЛГН.** В основу розробки проточних частин робочих органів насоса була поставлена задача підвищення напору, ККД та зменшення ймовірності виникнення кавітації на вході в насос. В рамках проведеної роботи нами розроблено дві вдосконалені конструкції робочих органів ЛГН.

Перша, відрізняється тим, що на вході і виході втулки та гвинта ЛГН в

гвинтових канавках виконані фаски, довжина яких дорівнює чотирьом гідралічним радіусам гвинтової канавки втулки та гвинта (рис. 1). При цьому фас-

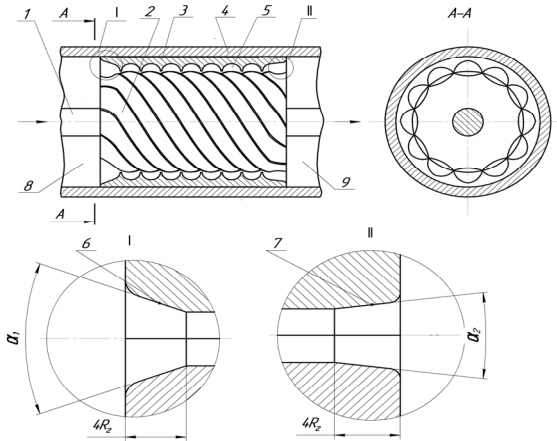


Рис. 1 – Удосконалені робочі органи насоса [7]: 1 – привідний вал; 2 – гвинт; 3 – втулка; 4 – корпус; 5 – гвинтова канавка; 6 – вхід в робочу зону ЛГН; 7 – вихід з робочої зони ЛГН; 8 – камера підводу; 9 – камера відводу.

ка на вході втулки та гвинта виконана у вигляді конфузора, з кутом конусності  $20^\circ \dots 60^\circ$ , а фаска зі сторони камер відводу – у вигляді дифузора з кутом конусності  $8^\circ \dots 15^\circ$ , причому кромки на вході і виході гвинтових канавок втулки і гвинта виконані тупими [7].

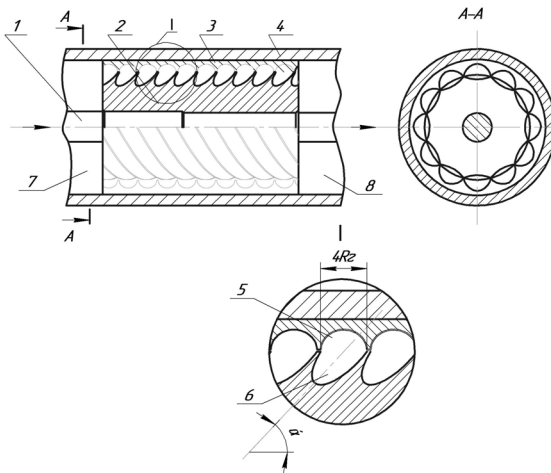


Рис. 2 – Удосконалені робочі органи насоса [8]: 1 – привідний вал; 2 – гвинт; 3 – втулка; 4 – корпус; 5 – гвинтова канавка напівкруглої форми; 6 – гвинтова канавка довгастої форми; 7 – камера підводу; 8 – камера відводу.

Нами також запропоновано конструкцію ЛГН, робочі органи якого відрізняються тим, що гвинтові канавки на гвинті виконані у вигляді еліпса, вісь яких утворює з віссю гвинта, у напрямку подачі рідини, гострий кут  $\alpha$ , та ширина яких, в перетині на зовнішній поверхні гвинта, дорівнює ширині гвинтових канавок на внутрішній поверхні втулки, чи чотирьом гідравлічним радіусам гвинтової канавки втулки, а кромки на вході та виході гвинтових канавок втулки і гвинта виконані тупими [8]. При такому виконанні гвинтові канавки насоса утворюють *резисторний діод* (рис. 2).

**Визначення технічного рівня ЛГН.** Якісну оцінку технічного рівня проводили порівнянням сукупності показників якості вдосконалених ЛГН з відповідною сукупністю показників аналога – конструкції ЛГН, що серійно випускається на ПАТ «ХЕМЗ–ІРЕС» (м. Харків).

Для оцінки технічного рівня ЛГН використовували наступні основні класифікаційні та оціночні показники: гідравлічний радіус, діаметр гвинта, зазор між гвинтом та втулкою ЛГН, довжину гвинта, кут нарізок гвинта, подачу і напір ЛГН, його ККД та вагу. Результати розрахунків наведені у таблицях 2 – 4. Параметри, які є постійними для всіх конструкцій насосу, що розглядаються, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – Загальні (або незмінні) параметри ЛГН

Найменування параметру	Величина показника
Гідравлічний радіус $R_c \cdot 10^4$ , м	2,25
Діаметр гвинта $d_c \cdot 10^3$ , м	65
Зазор між гвинтом та втулкою $\delta \cdot 10^4$ , м	0,5
Довжина гвинта $l_c$ , м	0,112
Подача ЛГН $q$ , м <sup>3</sup> /доб	80

Враховуючи умови експлуатації ЛГН, була проведена оцінка його технічного рівня при роботі на газорідинній суміші з 20% повітря, яка за своїми властивостями наближена до умов його реальної роботи (табл. 3).

Ступінь відповідності параметрів оцінюваних ЛГН показникам еталону розраховували за формулою [9]

$$I_i = P_i / P_i^e, \quad (1)$$

де  $I_i$  – параметричний індекс  $i$ -го параметра;  $P_i$  та  $P_i^e$  – відповідно, значення  $i$ -го параметра, який характеризує споживчі властивості оцінюваного ЛГН і ЛГН-еталону.

Показник уніфікації, який характеризує ступінь насиченості пристрою стандартизованими і уніфікованими деталями, це коефіцієнт використання:

$$K_{\text{уп}} = \frac{P_d - P_{d0}}{P_d} \cdot 100, \quad (2)$$

де  $P_d$  – загальна кількість деталей, шт.;  $P_{d0}$  – кількість оригінальних деталей, шт.

Зведений індекс показників технічного рівня розраховували за формулою:

$$I_n = \sum_{i=1}^n B_i \cdot I_i, \quad (3)$$

де  $B_i$  – величина вагомості  $i$ -го параметру.

Таблиця 2 – Оцінка показників технічного рівня удосконаленого ЛГН з фасками [7]

Найменування основних параметрів	Величина показників якості за варіантами			Відносний показник технічного рівня виробу		Вагомість показника, бали	Зведений індекс показника технічного рівня	
	Аналог	Проект	Еталон	Аналог	Проект		Аналог	Проект
1. Кут нарізок гвинта $\alpha$ , °	70	70	70	1,0	1,0	0,05	0,05	0,05
2. Напір $H$ , м	62,8	72,2	72,2	0,87	1,0	0,15	0,13	0,15
3. ККД, %	29,4	34,1	43,0	0,67	0,79	0,25	0,17	0,2
4. Вага $m$ , кг	52	51	51	0,98	1,0	0,05	0,043	0,05
5. Однакові показники	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5
Комплексний показник	-	-	-	-	-	-	0,893	0,95

Рівень показників технічного рівня ЛГН визначали за формулою:

$$K = I_n / I_{он}, \quad (4)$$

де  $I_{он}$  – зведений індекс показників технічного рівня ЛГН-аналогу.

Зведений індекс показника технічного рівня ЛГН з вдосконаленими робочими органами коливається у діапазоні від 0,94 до 0,97 у залежності від умов експлуатації і, за класифікацією [10], відповідає вищій категорії якості. Конкурентоспроможність ЛГН з вдосконаленою конструкцією робочих органів, розрахована за залежністю (4), становить 1,06 ... 1,07 для ЛГН з фасками, та 1,09 для ЛГН з діодним виконанням канавок, тобто за показниками технічного рівня перевищує ЛГН-аналог.

Використання ЛГН з удосконаленими робочими органами при роботі на робочій рідині з 20%-м газовмістом є більш ефективним, так як показник його технічного рівня зростає до 7,2 %. Причому показник уніфікації розрахований за формулою (2) для ЛГН, що має робочі органи з фасками на вході і виході з них, та ЛГН-аналога – однаковий.



Таблиця 3 – Оцінка показників технічного рівня удосконаленого ЛГН з фасками [7], при 20%-ному газовмісті робочої рідини

Найменування основних параметрів	Величина показників якості за варіантами			Відносний показник технічного рівня виробу		Вагомість показника, бали	Зведений індекс показника технічного рівня	
	Аналог	Проект	Еталон	Аналог	Проект		Аналог	Проект
1. Кут нарізок гвинта $\alpha$ , °	70	70	70	1,0	1,0	0,05	0,05	0,05
2. Напір $H$ , м	62,8	69,7	69,7	0,9	1,0	0,15	0,14	0,15
3. ККД, %	29,4	33,9	43,0	0,67	0,78	0,25	0,17	0,19
4. Вага $m$ , кг	52	50,7	50,7	0,98	1,0	0,05	0,05	0,05
5. Однакові показники	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5
Комплексний показник	-	-	-	-	-	-	0,894	0,94

Таблиця 4 – Оцінка показників технічного рівня удосконаленого ЛГН з канавками, що утворюють резисторний діод [8]

Найменування основних параметрів	Величина показників якості за варіантами			Відносний показник технічного рівня виробу		Вагомість показника, бали	Зведений індекс показника технічного рівня	
	Аналог	Проект	Еталон	Аналог	Проект		Аналог	Проект
1. Кут нарізок гвинта $\alpha$ , °	70	85	85	0,82	1,0	0,05	0,041	0,05
2. Напір $H$ , м	62,8	73,5	73,5	0,85	1,0	0,15	0,13	0,15
3. ККД, %	29,4	38,2	43,0	0,67	0,89	0,25	0,17	0,22
4. Вага $m$ , кг	52	50,5	50,5	0,97	1,0	0,05	0,048	0,05
5. Однакові показники	-	-	-	-	-	0,5	0,5	0,5
Комплексний показник	-	-	-	-	-	-	0,89	0,97

**Висновки.** Розроблена методика та вперше встановлено технічний рівень ЛГН і вплив на нього форми робочих органів насоса. Показано, що за-

стосування вдосконалених робочих органів ЛГН дозволяє підвищити його технічний рівень на 6,4 % при застосування робочих органів з фасками на вході і виході з них та на 9 % при формі канавок, що утворюють резисторний діод. Причому при 20%-ному газомісті робочої рідини технічний рівень ЛГН з фасками на вході і виході з робочих органів зростає, у порівнянні з ЛГН-аналогом, до 7,2 %.

**Список літератури:** 1. Голубев А.И. Лабиринтно-винтовые насосы и уплотнения для агрессивных сред. – 2 изд. – М.: Машиностроение, 1981 – 112 с. 2. Андренко П.Н., Лурье З.Я. Тенденции развития объемных гидроприводов // Промислова гідравліка і пневматика. – Вінниця ВДАУ, 2013. – № 3 (41). – С. – 3 – 14. 3. Голубев А.И. Лабиринтные насосы для химической промышленности. – М.: Машиностроение, 1961 – 76 с. 4. Аврунін Г.А., Кириченко І.Г., Мороз І.І. Основы объемного гидроприводу і гидропневмоавтоматики: навч. посіб. Під ред. Г.А. Авруніна. – Х.: ХНАДУ, 2009. – 424 с. 5. Гидроприводы объемные, пневмоприводы, и смазочные системы. Оценка технического уровня и качества: ОСТ2 Н06-35-84. – [Чинний від 1985-01-01]. – М.: ВНИИТЭМР, 1985. – 39 с. (Отраслевой стандарт). 6. Андренко П.Н., Лебедев А.Ю. Критерии для сравнения характеристик лабиринтно-винтовых насосов. XVIII Міжнародна науково-технічна конференція “Гідроаеромеханіка в інженерній практиці”. Київ 21 – 24 травня 2013 р. матеріали конференції – К.: Підприємство УВОІ “Допомога” УСІ”, 2013. – С. 135. 7. Патент на корисну модель 68863 Україна, МПК F04D 3/00. Лабіринтно-гвинтовий насос / Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А.; заявник і патентовласник Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А. – № у 2011 12505; заявл. 25.10.2011; опубл. 10.04.2012, Бюл. №7. 8. Патент на корисну модель 73119 Україна, МПК F04D 3/00. Лабіринтно-гвинтовий насос / Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А.; заявник і патентовласник Андренко П.М., Стеценко Ю.М., Білокінь І.І., Лебедев А.Ю., Макогон В.А. – № у 2012 02788; заявл. 12.03.2012; опубл. 10.09.2012, Бюл. №17. 9. Яковлев А.І. Соціально-економічна ефективність за умов ринку: навч. посібник / А.І. Яковлев. – К.: ІСДО, 1994. – 228 с. 10. Гидроприводы объемные, пневмоприводы, и смазочные системы. Оценка технического уровня и качества: ОСТ2 Н06-35-84. – [Чинний від 1985-01-01]. – М.: ВНИИТЭМР, 1985. – 39 с. (Отраслевой стандарт).

*Надійшла до редакції 28.02.2014*

УДК 66.023

**Підвищення технічного рівня лабиринтно-гвинтового насоса за рахунок вдосконалення його робочих органів / А. Ю. Лебедев // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 112 – 117. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведена методика определения технического уровня лабиринтно-винтового насоса. Проведен анализ влияния формы рабочих органов и газосодержания рабочей жидкости на этот показатель. Полученные данные позволяют на этапе проектирования оценить и определить пути повышения технического уровня лабиринтно-винтового насоса.

**Ключевые слова:** лабиринтно-винтовой насос, рабочие органы, винтовая канавка, технический уровень, газосодержание.

UDC 66.023

**Increasing the technical level of a labyrinth-helical pump by improving its working bodies / A.Y Lebedev // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 112 – 117. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.**

A method of determining the technical level of a labyrinth-helical pump is proposed. The influence of the form of working bodies and the gas content of working fluid on this index is analyzed. The data obtained allow estimating and identifying ways to improve the technical level of a labyrinth-helical pump at the design stage.

**Key words:** labyrinthine-screw pump, working bodies, screw groove, technical level, gas content.

**Б.Г. ЛЮБАРСКИЙ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОГО УГЛА НАКЛОНА КУЗОВА СКОРОСТНОГО ЭЛЕКТРОПОЕЗДА С ТЯГОВЫМ ПРИВОДОМ НА ОСНОВЕ РЕАКТИВНОГО ИНДУКТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ С АКСИАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ ПОТОКОМ**

Рассмотрен порядок определения рационального угла наклона кузова скоростного электропоезда с тяговым приводом на основе реактивных индукторных двигателей с аксиальным магнитным потоком. Использован комплексный критерий эффективности, определенный по результатам расчета кривых движения на участке пути.

**Ключевые слова:** электропоезд, механизм наклона кузова, реактивный индукторный двигатель, аксиальный магнитный поток, критерий эффективности.

**Введение.** Основным элементом электроподвижного состава (ЭПС) является *тяговый электропривод* – совокупность устройств, предназначенных для преобразования электрической энергии, получаемой из контактной сети, в полезную работу по перемещению электроподвижного состава. Его эффективность определяет в большей степени эффективность всего электропоезда. В работах [1, 2] отмечается, что определяющим для структуры тягового электропривода является электромеханический преобразователь энергии (ЭМП) – тяговый двигатель. Рассмотрены перспективные типы ЭМП для ЭПС. Одним из наиболее перспективных типов тяговых приводов для скоростного электропоезда является тяговый безредукторный привод на основе реактивного индукторного ЭМП с аксиальным магнитным потоком [3]. Также для улучшения эффективности тягового привода (по критериям расхода энергии и средней скорости движения) возможно применение системы наклона кузова электропоезда [4]. Снижение ограничений скорости движения при одновременном уменьшении затрат энергии на разгон электропоезда делают наклон кузова чрезвычайно привлекательным направлением для повышения эффективности электроподвижного состава. В работах [4, 5] рассмотрена одна из наиболее перспективных систем наклона кузова – электромеханическая система на основе линейного ЭМП. Однако повышение угла наклона кузова требует дополнительных затрат энергии для выполнения этой операции.

В работе поставлена следующая цель: определить рациональный угол наклона кузова скоростного электропоезда с тяговым приводом на основе реактивного индукторного ЭМП с аксиальным магнитным потоком.

**Математическая модель.** Расчет кривых движения основан на интегрировании уравнения движения [5, 6]:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{1}{1+\gamma} (F - W - B), \quad (1)$$

где  $m$  – масса электропоезда;  $v$  – скорость движения электропоезда;  $1+\gamma$  – коэффициент инерции вращающихся частей;  $t$  – текущее значение времени;  $F$  – сила тяги;  $B$  – тормозная сила;  $W$  – полное сопротивление движению;  $\gamma$  – безразмерный коэффициент, учитывающий влияние вращающихся частей на ускорение движения электропоезда.

Сила тяги и торможения зависят от режима работы тягового привода. На реально существующих участках пути минимизация расхода энергии является частью решения сложной многокритериальной задачи. Однако для выбора типа ЭМП нами предлагается (для рассматриваемых задач движения ЭПС на участке пути при требовании минимизации времени движения на участке пути с заданным профилем и графиком движения) предложить следующие режимы движения ЭПС:

- с максимальной допустимой силой тяги, которое осуществляется для разгона ЭПС;
- на выбеге со скоростью, близкой к заданной;
- с максимальной силой торможения при требовании резкого снижения скорости ввиду её ограничения согласно графику движения;
- при работе электропривода с максимальным КПД в режиме тяги со скоростями, близкими к заданной, и больших сопротивлений движению (на затяжных подъемах);
- при работе электропривода с максимальным КПД в режиме торможения – движении со скоростями, близкими к заданной, при больших отрицательных сопротивлениях движению (на затяжных спусках).

Эти режимы согласуются с *принципом максимума Понтрягина* [7], согласно которому, движение поезда должно осуществляться с максимальной силой тяги для достижения установленной скорости движения или на выбеге.

В качестве показателя эффективности для ЭПС рассматривались различные величины. Наибольшее распространение получил показатель расхода энергии  $A$  [8]. Однако при рассмотрении вопроса о создании скоростного ЭПС на первый план выходит время движения, поэтому в качестве этого показателя возможно выбрать среднюю скорость  $v_{sr}$ . Эти два показателя могут быть взаимно противоречивы, поэтому для принятия решения по определению лучшего типа предлагается ввести относительный показатель эффективности.

Под показателем эффективности, как меры степени соответствия результата операции требуемому [7], выбирается величина, определяющая отличие реализуемой кривой движения поезда от идеализированной, позволяющей осуществлять движения поезда по участку пути с предельной для данного участка скоростью реализуя при этом все СЭМП по преобразованию энергии. Этот показатель можно определить следующей формулой:

$$W_{oeemsi} = \frac{W_{real}}{W_{pred}}, \quad (2)$$

где  $W_{real}$  – энергия, преобразованная ЭПС из электрической в механическую энергию силы тяги или торможения;  $W_{pred}$  – предельно возможная энергия, которую может реализовать по условиям контакта колесо-рельс при максимально возможной скорости движения на участке пути.

Электрическая энергия, которую преобразовывала СЭМП, можно определить по выражению:

$$W_{real} = \frac{n}{3600} \left[ \int_0^{t_{КП}} \frac{P_{2ПСП}}{\eta_C} dt + \int_{t_{HT}}^{t_{КТ}} P_{2ТСП} \eta_{СП} dt \right], \quad (3)$$

где  $n$  – количество тяговых двигателей ЭП;  $P_{2ПСП}$ ,  $P_{2ТСП}$  – средняя мощность на валу двигателя при разгоне и торможении соответственно;  $t_{КП}$  и  $t_{КТ}$  – время конца пуска и торможения;  $t_{HT}$  – момент времени начала торможения;  $\eta_C$  и  $\eta_{СП}$  – КПД электропривода соответственно в режиме тяги и рекуперативного торможения.

Предельно возможная энергия, которую можно передать по условиям контакта колесо-рельс при максимально возможной скорости движения на участке пути, определяется так:

$$W_{real} = \frac{n}{3600} \int_0^{t_{\Sigma}} \frac{60 \mu v_{max}}{3.6 \pi D} \frac{M_k'(v_{max})}{9,55} dt, \quad (4)$$

где  $v_{max}$  – максимальная скорость на рассматриваемом участке движения,  $\mu$  – передаточное отношение редуктора ЭПС;  $D$  – диаметр среднеизношенного бандажа колесной пары,  $M_k'(v_{max})$  – максимально возможный момент на валу тягового двигателя по условию контакта колесо-рельс.

В результате в работе предлагается ввести комплексный критерий эффективности в виде:

$$W = \rho \left( \left[ \begin{array}{l} MIN(A_{emsi}) \\ MAX(v_{sri}) \end{array} \right], W_{oeemsi} \right), \quad (5)$$

где  $A_{emsi}$  – расход энергии  $i$ -го ЭПС,  $v_{sri}$  – средняя скорость  $i$ -го ЭПС.

**Результаты моделирования.** Для определения кривых движения поезда проведено интегрирование дифференциального уравнения (1) *методом Эйлера*.

Для анализа режимов работы выбран участок пути и графики движения, предложенные в работе [10] для участка Полтава-Красноград.

Результаты решения тяговой задачи приведены на рис. 1 – 3 (где  $M_2$  момент на валу тяговых двигателей), а основные энергетические показатели приведены в таблице.

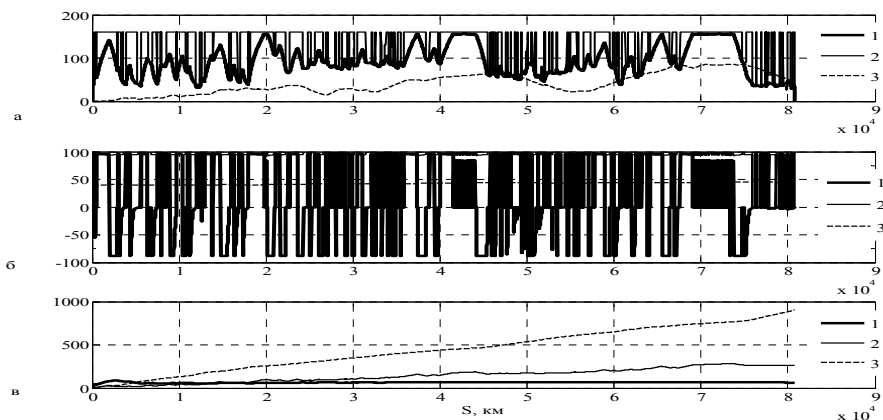


Рис. 1 – Кривые движения скоростного электропоезда без наклона кузова:

а: 1 – скорость движения, км/ч, 2 – заданная скорость, км/ч, 3 – профиль пути, м;

б: 1 –  $M_2/50$ , 2 – КПД, %, 3 – температура тягового двигателя, °С;

в: 1 –  $W_{oeemsi} \cdot 1000$ , 2 – расход энергии, кВт ч, 3 – время движения/4, с.

Как видно из рисунков и таблицы, использование наклона кузова на  $4^\circ$  позволяет резко повысить среднюю скорость движения поезда с 76,52 км/ч до 123,28 км/ч, при этом расход энергии также увеличился. Увеличение наклона с  $4^\circ$  до  $6^\circ$  приводит к незначительному изменению как скорости дви-

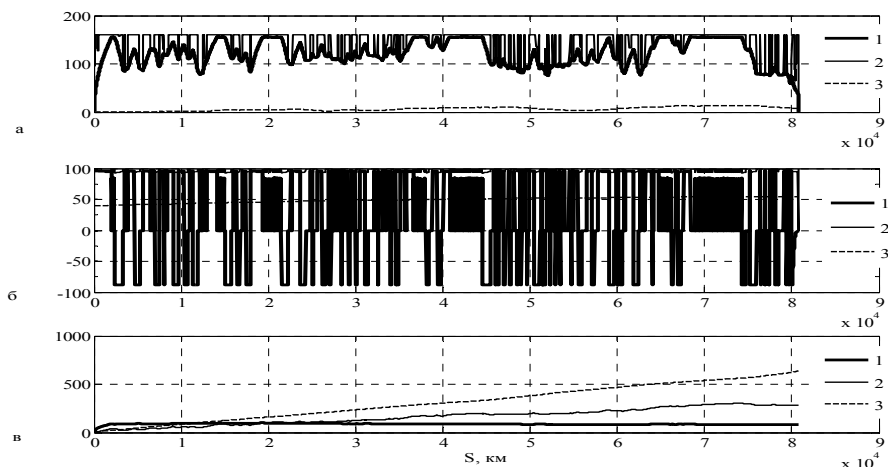


Рис. 2 – Кривые движения скоростного электропоезда при максимальном наклоне кузова на 4 градуса: а: 1 – скорость движения, км/ч, 2 – заданная скорость движения, км/ч, 3 – профиль пути, м; б: 1 –  $M_2/50$ , 2 – КПД, %, 3 – температура тягового двигателя, °С; в: 1 –  $W_{oeemsi} \cdot 1000$ , 2 – расход энергии, кВт ч, 3 – время движения/4, с.

жения, так и расхода энергии. Это обусловлено незначительным изменением числа ограничений скорости движения. Расход энергии, затрачиваемый на наклон кузова, несоизмеримо мал, с расходом энергии на тягу.

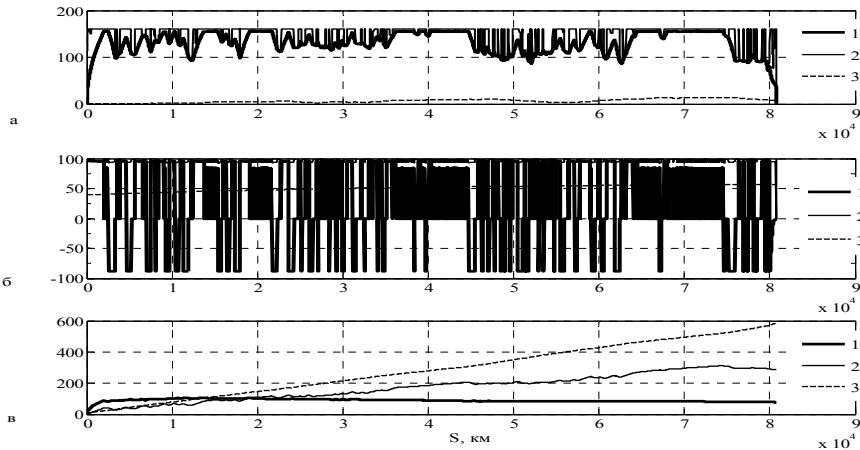


Рис. 3– Кривые движения скоростного электропоезда при максимальном наклоне кузова на 6 градуса: *а*: 1 – скорость движения, км/ч, 2 – заданная скорость движения, км/ч, 3 – профиль пути, м; *б*: 1 –  $M_2 / 50$ , 2 – КПД, %, 3 – температура тягового двигателя, °С; *в*: 1 –  $W_{oeemsi} \cdot 1000$ , 2 – расход энергии, кВт ч, 3 – время движения/4, с.

Таблица – Основные энергетические показатели движения скоростного электропоезда на участке пути Полтава-Красноград

Угол наклона кузова, град.	Расход энергии на тягу, кВт·ч	Расход энергии на изменение наклона кузова, кВт·ч	Суммарный расход энергии, кВт·ч	Средняя скорость движения, км/ч	Показатель эффективности, отн. един.
0	263,715	0	263,715	76,52	0,0637
4	281,089	0,316	281,405	113,16	0,0797
6	288,093	0,825	288,918	123,28	0,0775

Поэтому даже значительное относительное изменение этих затрат не повлекло за собой увеличение общего расхода энергии. Согласно критерия эффективности, наилучшим решением является: скоростной электропоезд с наклоном кузова до  $4^\circ$ .

**Выводы.** В качестве критерия эффективности выбран комплексный критерий со следующими составляющими: расход энергии электропоезда, средняя скорость движения, показатели эффективности. Определено, что расход энергии на изменение наклона кузова несоизмеримо мал по сравнению с расходом энергии на тягу. Поэтому даже значительное относительное

изменение этих затрат не повлекло за собой увеличение общего расхода энергии. Согласно критерия эффективности, наилучшим решением является: скоростной электропоезд с наклоном кузова до  $4^\circ$ .

**Список литературы:** 1. *Омельяненко В.И., Любарский Б.Г., Рябов Е.С., Демидов А.В., Глебова Т.В.* Анализ и сравнение перспективных тяговых электродвигателей // *Залізничний транспорт України*. – 2008. – №2/1. – С. 26 – 31. 2. *Омельяненко В.И., Любарский Б.Г., Рябов Е.С., Демидов А.В., Глебова Т.В.* Электродвигатели для перспективного электроподвижного состава // *Локомотив-информ*. – 2008. – №1. – С. 16 – 19. 3. *Рябов Е.С.* Безредукторный тяговый привод на основе реактивного индукторного двигателя с аксиальным магнитным потоком для скоростного электроподвижного состава / Е.С. Рябов // *дисс. ... канд. техн. наук.* – Харьков. 2011 – 162с. 4. *Якунин Д.И.* Электромеханическая система привода с линейным двигателем для наклона кузовов скоростного подвижного состава / Д.И. Якунин // *дисс. ... канд. техн. наук.* – Харьков. 2010 – 202с. 5. *Правила тяговых расчетов поездной работы.* – М.: Транспорт. 1985. – 287 с. 6. *Основы локомотивной тяги. Учебник для техникумов ж.-д. трансп. / С.И. Осипов, К.А. Миронов, В.И. Ревич.* 3-е изд., доп. и перераб. – М.: Транспорт, 1979. – 440 с. 7. *Постол Б.Г.* Теоретические основы разработки рациональных режимов вождения поездов и расчета масс составов: Уч. пособие. – Хабаровск: ДВГУПС. 1998. 61с. 8. *Мушинский Л.А., Илютович А.У., Ябло И.А.* Энергооптимальные методы управления движением поездов: сб. науч. тр. «ВНИИЖТ». – М.: Интекст, 2012. – 80с. 9. *Логонова Е.Ю., Солдатенко Д.А.* Использование критериев эффективности при выборе тягового электродвигателя для электрической передачи тепловоза / *Транспорт: наука, техника, управление.* – 2009. – №2. – С. 22 – 27 10. *Якунин Д.И.* Предпосылки для моделирования движения по рельсовому пути экипажа, оборудованного устройствами для наклона кузова / Д.И. Якунин Е.Ю. Зверев А.Н. Срибник // *Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт».* – Харьков: НТУ «ХПИ», 2013. – № 32. – С. 76 – 80.

*Поступила в редколлегию 26.02.2014*

---

УДК 621.313

**Определение рационального угла наклона кузова скоростного электропоезда с тяговым приводом на основе реактивного индукторного двигателя с аксиальным магнитным потоком / Б. Г. Любарский** // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 118 – 123. *Бібліогр.*: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Розглянуто визначення раціонального кута нахилу кузова швидкісного електропоїзда з тяговим приводом на основі реактивних індукторних двигунів з аксіальним магнітним потоком на основі комплексного критерію ефективності, визначеного за результатами розрахунку кривих руху на ділянці шляху.

**Ключові слова:** електропоїзд з механізмом нахилом кузова, реактивний індукторний двигун аксіальним магнітним потоком, критерій ефективності.

UDC 621.313

**Determination of the rational angle of the body of a speed train with an electric traction drive based on the inductor jet engine with axial magnetic flux / B. G. Lyubarskiy** // *Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies.* – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 118 – 123. *Bibliog.*: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

The article deals with calculating the rational tilting angle of the body of a speed train with an electric traction drive based on the inductor jet engine with axial magnetic flux using complex efficiency criterion determined by the results of calculation of motion curves on the plot path.

**Key words:** train with tilting mechanism, efficiency criterion of inductor jet engine with axial flux.



**О.С. МАЗУР**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

**В.В. ТКАЧЕНКО**, асистент, НТУ «ХПІ»

## ДИНАМІЧНА СТІЙКІСТЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Продемонстровано застосування теорії  $R$ -функцій для розв'язання задач про параметричні коливання та динамічну стійкість багатошарових пластин складної форми плану. Математичну постановку задачі виконано в рамках класичної теорії, а рівняння руху представлено в мішаній формі. Розроблений алгоритм зведення початкової системи в частинних похідних до звичайного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами застосовано для дослідження тришарових пластин зі складною геометричною формою.

**Ключові слова:** параметричні коливання, динамічна стійкість, багатошарові пластини, теорія  $R$ -функцій.

**Вступ.** З огляду літератури, яка присвячена проблемі дослідження параметричних коливань та динамічної стійкості багатошарових пластин [8], можна зробити висновки, що найбільш використаними є нелінійні диференціальні рівняння руху в мішаній формі, які побудовані відносно функції зусиль та прогину ( $w - \Phi$ ). Раніш в роботах [3, 6] було запропоновано метод дослідження ізотропних та ортотропних пластин складної форми, який базується на використанні мішаної форми рівнянь руху. В даній роботі метод узагальнено для багатошарових пластин довільної геометричної форми плану. Як і в попередніх роботах принциповою відзнакою є використання теорії  $R$ -функцій [4], що саме і дозволяє досліджувати пластини довільної форми. Даний підхід особливо є зручним при дослідженні пластин з однорідним докритичним станом при деяких видах крайових умов, оскільки істотно спрощується алгоритм чисельної реалізації.

**Математична постановка задачі.** Розглянемо коливання багатошарової пластини постійної товщини  $h$ , що знаходиться під дією періодичного навантаження  $p = p_0 + p_1 \cos \theta t$ . Математичну постановку задачі виконаємо в рамках класичної теорії при ігнорування інерційних сил в серединній площині. Для того, щоб отримати рівняння руху в мішаній формі, введемо функцію зусиль  $\Phi$  за допомогою наступних співвідношень

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = N_y, \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = T.$$

Тоді система рівнянь руху прийме такий вигляд [7]:

$$L_1 \Phi = L(w, w), \tag{1}$$

$$L_2 w = NL(w, \Phi) - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2}$$

В рівняннях (1) – (2) оператори

$$L_1 = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4},$$

$$L_2 = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$L(w, w) = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

де матриця

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{pmatrix}$$

пов'язує вектори деформацій та зусиль співвідношенням

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{A}] \cdot \{N\},$$

$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}$  та  $\mathbf{D}$  – матриці зведених жорсткісних коефіцієнтів:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}.$$

Зведені жорсткісні характеристики  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  ( $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ ) визначаються наступним чином [1]:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^{(s)}(1, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

де  $B_{ij}^{(s)}$  – пружні константи  $s$ -го шару. В загальному випадку, коли осі анізотропії не співпадають з напрямками осей  $Ox$  та  $Oy$ , пружні константи  $s$ -го шару  $B_{ij}^{(s)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) визначаються за відомими формулами [1], які одержано у зв'язку з поворотом осей анізотропії на деякий кут  $\alpha$ .

**Метод розв'язання.** Як і у випадку одношарової пластини представимо прогин пластини та функцію зусиль у вигляді

$$w(x, y, t) = w_1(x, y) y(t), \quad \Phi(x, y, t) = f^2(t) \Phi_1(x, y) + p \Phi_0, \quad (3)$$

де  $w_1(x, y)$  – власна функція задачі про лінійні коливання пластини, що відповідає основній частоті  $\omega_L(x, y)$ . Розв'язання задачі про вільні коливання багат шарових пластин зі складною формою плану детально описано в робо-

ті [4]. Функції  $\Phi_0$  та  $\Phi_1$  у співвідношеннях (3) є розв'язками наступних рівнянь:

$$L_2\Phi_0 = 0,$$

з виконанням на навантаженій частині умов

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\tau^2} = -1, \quad \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial n\partial\tau} = 0,$$

та

$$L_2\Phi_1 = -\frac{1}{2}C_1L(w_1, w_1),$$

відповідно.

Знаходження функцій  $\Phi_0$  та  $\Phi_1$  у випадку складної геометрії пластини було виконано за допомогою варіаційних методів та теорії  $R$ -функцій.

Слід зауважити, що у випадку, коли пластина має однорідний докритичний стан і навантаження, прикладене вздовж сторін, паралельних осям  $Ox$ ,  $Oy$ , функцію зручно шукати у вигляді

$$\Phi_0 = -\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}.$$

Підставляючи (3) в рівняння руху (2) та застосовуючи *метод Бубнова – Гальоркіна*, отримуємо диференціальне рівняння

$$y''(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cos \theta t)y(t) + \beta y^3(t) = 0 \quad (4)$$

де

$$\Omega_L = \omega_L \sqrt{1 - p_0\alpha}$$

– частота коливань пластини під дією статичного навантаження  $p_0$ ,

$$k = \frac{p_1\alpha}{2(1 - p_0\alpha)}$$

– коефіцієнт збудження, коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$  визначаються як:

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_0) w_1 d\Omega, \quad \beta = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} L(w_1, \Phi_1) w_1 d\Omega.$$

У випадку дії на пластину періодичного навантаження в серединній площині основний недеформований стан пластини може ставати нестійким, тому виникає необхідність визначення областей параметрів навантаження, що призводять до динамічної нестійкості, а також визначення амплітуд установлених коливань в зонах нестійкості. Для дослідження динамічної стійкості, як показано в [2], достатньо розглянути лінеаризоване рівняння (4), тобто при  $\beta = 0$ :

$$y''(t) + \Omega_L^2(1 - 2k \cdot \cos(\theta t))y(t) = 0. \quad (5)$$

Співвідношення (5) є *рівняння Мат'є*, головна область нестійкості (поблизу  $\theta = 2\Omega_L$ ) якого обмежена кривими [2]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - k} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + k}.$$

В цьому інтервалі виникає *головний параметричний резонанс*.

Дослідження усталених коливань в зоні головного параметричного резонансу виконано методом тригонометричних рядів, викладеним в [2], та отримана залежність між частотним відношенням  $\theta/2\Omega_L$  та амплітудою коливань  $A$ :

$$A = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\beta}} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2\Omega}\right)^2 - 1 \pm k}.$$

**Чисельні результати.** Проілюструємо запропонований алгоритм на прикладі тришарової пластини, представленої на рис. 1. Нехай пластина навантажена періодичними зусиллями, які прикладені вздовж сторін паралельних осі  $Oy$  та направлені паралельно осі  $Ox$ .

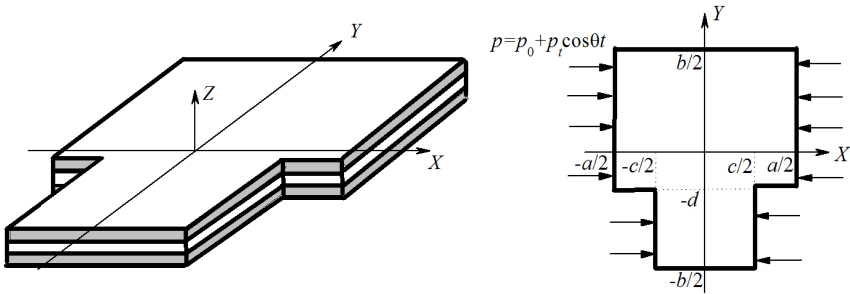


Рис. 1 – Форма пластини.

Шари пластини виготовлені з графіту, механічні характеристики якого визначаються умовами

$$E_1 / E_2 = 40, \quad G / E_2 = 0.6, \quad \mu_1 = 0.25,$$

Також будемо вважати, що всі шари мають однакову товщину, загальна товщина пластини дорівнює:  $h/a = 0.01$ . Шари укладено згідно закономірності:  $0^\circ / 90^\circ / 0^\circ$ . Будемо вважати, що на межі виконуються наступні умови:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = -p, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \tau} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega_2,$$

де  $\partial\Omega_1$ ,  $\partial\Omega_2$  – навантажена та ненавантажені частини контуру відповідно.

Зауважимо, що в розглянутій задачі маємо *однорідний докритичний стан*, а тому функції  $\Phi_0$  буде мати вигляд:

$$\Phi_0 = -\frac{y^2}{2}.$$

В таблиці представлені значення параметру критичного навантаження

$$\bar{p}_{kr} = p_{kr} \cdot \frac{a^2}{E_2 h^3},$$

отримані для  $T$ -подібної пластини. Результати були здобуті за допомогою динамічного підходу [5]. Також в таблиці представлені порівняльні результати параметру критичного навантаження для квадратної пластини, отримані в [1] та в [5]. Зауважимо, що в останній роботі авторами запропоновано методи знаходження критичного навантаження, які також використовують *теорію R-функцій*, але початкова система руху представлена в переміщеннях.

Таблиця 1 – Значення безрозмірного параметру критичного навантаження

	$c/a = 0.6,$ $d/a = 0.3,$ $b/a = 1$	$c/a = 0.8,$ $d/a = 0.4,$ $b/a = 1$	Квадратна	Квадратна, [5]	Квадратна [1]
$\bar{p}_{kr}$	42.43	37.31	36.18	36.20 <sup>(а)</sup> , 36.17 <sup>(б)</sup>	36.16

(а) – енергетичний підхід, (б) – динамічний підхід

Зменшення розміру вирізів спрямовує до виродження пластини в квадратну, відповідно значення критичного параметру навантаження наближаються до значення критичного параметру квадратної пластини.

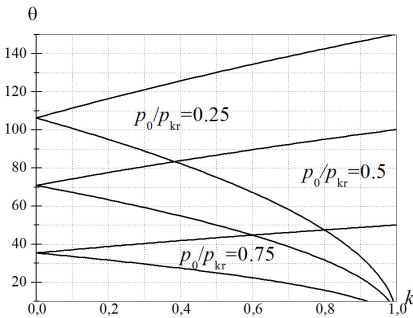


Рис. 2 – Области динамічної нестійкості.

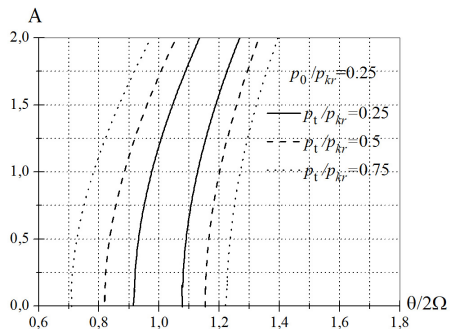


Рис. 3 – Амплітудно-частотні залежності.

Наступні результати отримані при геометричних параметрах

$$c/a = 0.6, b/a = 1, d/a = 0.3.$$

На рис. 2 побудовані області динамічної нестійкості в залежності від постійної складової навантаження  $p_0$  ( $p_0/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75$ ). При більших значеннях  $p_0$  нестійкість виникає при менших значеннях збуджуючої частоти  $\theta$ .

На рис. 3 побудовані амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для різних значень амплітуди змінної частини навантаження  $p_t$ :

$$p_t/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75 \text{ та } p_0/p_{kr} = 0.25.$$

Зменшення цього параметру приводить до зближення гілок АЧХ.

**Висновки.** В роботі запропоновано метод дослідження параметричних коливань та динамічної стійкості багат шарових пластин симетричної структури зі складною геометричною формою. Початкова система руху представлена в мішаній формі. Розроблений алгоритм дискретизації системи руху базується на використанні теорії  $R$ -функцій та варіаційних методів. Чисельна реалізація алгоритму виконана за допомогою розробленого програмного забезпечення в рамках системи POLE-RL. Запропонований підхід застосовано для дослідження параметричних коливань тришарової  $T$ -подібної пластини, виготовленої з графіту. Для розглянутої пластини побудовані головна область динамічної нестійкості та амплітудно-частотні залежності при різних значеннях параметрів навантаження.

**Список літератури:** 1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин – М.: Наука, 1967.-266с. 2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М: Гостехиздат, 1956. – 600 с. 3. Курпа Л.В., Мазур О.С. Параметрические колебания ортотропных пластин сложной формы // Машинознавство. – 2010. – № 4. – С. 83 – 95. 4. Курпа Л.В. Метод  $R$ -функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек – Х.: НТУ"ХПИ", 2009. – 407с. 5. Курпа Л.В., Ткаченко В.В. Исследование колебаний и устойчивости сжатых многослойных пластин с помощью метода  $R$ -функций // Теоретическая и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1(47). – С. 95 – 105. 6. Мазур О. С. Сравнительный анализ двух подходов к исследованию параметрических колебаний ортотропных пластин сложной формы // Вісник НТУ «ХПІ». – 2013. – №5. – С. 155 – 162. 7. Manoj T., Ayyappan M., Krishnan K.S., Nageswara Rao B. Nonlinear vibration analysis of thin laminated rectangular plates on elastic foundations //Z. Angew. Math.Mech. 80 (2000) – p. 183 – 192. 8. Sahu S. K., Datta P. K. Research Advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987-2005 – Part1: conservative system // Applied mechanics reviews. – 2007. – 60. – P. 65 – 75.

Надійшла до редколегії 20.02.2014

---

УДК 539.3

**Динамічна стійкість багат шарових пластин складної форми / О. С. Мазур, В. В. Ткаченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 124 – 129. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Продемонстрировано применение теории  $R$ -функций для решения задач о параметрических колебаниях и динамической устойчивости многослойных пластин сложной формы плана. Математическая постановка задачи выполнена в рамках классической теории, а уравнение движения представлены в смешанной форме. Разработанный алгоритм сведения исходной системы в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению с периодическими коэффициентами применен к исследованию трехслойной пластины со сложной геометрической формой.

**Ключевые слова:** параметрические колебания, динамическая устойчивость, многослойные пластины, теория  $R$ -функций.

UDC 539.3

**Dynamic stability of laminated plates with complex form / O. S. Mazur, V. V. Tkachenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 124 – 129. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

In this paper an application of the  $R$ -function theory for solving problems of parametric vibrations and dynamic stability of multilayer plates with complex shape is demonstrated. The mathematical formulation of the problem is made in the frame of classical theory and the equations of motion are presented in mixed form. The algorithm of reducing the original system of partial differential equations to an ordinary differential equation with periodic coefficients is applied to study three-layer plates with complex geometry.

**Key words:** parametric variations, dynamic stability, laminated plates, the  $R$ -functions theory.

**О.С. МАЧУГА**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НЛТУ України, Львів

## **ОСОБЛИВОСТІ ПРОЕКТУВАННЯ ЛІСОЗАГОТІВЕЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ДЛЯ РОБОТИ НА ТЕРИТОРІЯХ З УХИЛОМ. ЧАСТИНА 1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ**

Побудовано математичну модель руху лісозаготівельної машини із начепним асиметричним обладнанням, яка рухається територією із ухилом. Одночасно із рухом виконуються операції виробничої функції. Постановка задачі не обмежує напрям руху машини лісосікою та розташування маніпулятора начіпного обладнання. Отримано рівняння тягового балансу із урахуванням виробничої функції та виведено відношення для визначення нормальних та дотичних складових реакцій опорної поверхні – ґрунту. Отримані результати дозволяють виконувати проектуючі розрахунки для двигуна і рушіїв механізму, планування режимів експлуатації існуючих машин.

**Ключові слова:** лісозаготівельна машина, тяговий баланс, опорні реакції, проектуючі розрахунки.

**Вступ.** Основи розрахунку та проектування лісотransпортних засобів для випадку їх руху горизонтальною площиною або висхідною лінією площини зі ухилом викладено в роботах [1, 2]. Отримані результати базуються на припущенні симетричності навантаження рушіїв правого та лівого борту.

Сучасні засади освоєння лісових масивів пов'язуються із проектуванням та будівництвом лісовозних доріг, влаштуваних косогірними ходами, що обґрунтовано зокрема в роботі [3]. Рух такими дорогами лісозаготівельної та дорожно-будівельної техніки супроводжуються виникненням нерівномірності навантаження рушіїв лівого та правого борту. Експлуатація лісотransпортних машин та дорожно-будівельних механізмів із начіпним технологічним обладнанням, яке може локалізуватись по один бік машини, також супроводжується перевантаженням рушіїв одного борту у порівнянні з рушіями протилежного борту. Крім того двигун транспортного засобу повинен мати певний запас потужності для одночасного виконання транспортної та виробничої функцій, які систематизовано в роботі [4].

Запропоновано математичну модель руху *харвестера* територією з ухилом – лісосікою, лісовозною дорогою тощо, з одночасним виконанням деяких операцій виробничої функції. Такий підхід дозволяє визначати необхідну потужність двигуна харвестера та опорні реакції ґрунту від дискретної дії рушіїв у залежності від параметрів ухилу опорної поверхні, напрямку руху машини та розміщення начіпного технологічного обладнання. Отримані результати можливо використовувати для відповідних проектуючих розрахунків лісовозної (автопотяги з гідроманіпулятором для самозавантажування), дорожно-будівельної (екскаватори, автогрейдери тощо) та сільськогосподарської (механізми з начіпним знаряддям зокрема штангові обприскувачі) техніки.

**Постановка задачі.** Розглянемо самохідний тривісний колісний харвес-

тер, охарактеризований в роботі [5], який рухається площиною з ухилом  $\alpha$  до горизонту зі швидкістю  $v$  уздовж осі, що утворює кут  $\beta$  з висхідною лінією площини руху. Виробнича функція виконується стрілою – маніпулятором з харвестерною (процесорною) головкою, напрям стріли відведено від напрямку руху на кут  $\gamma$  (див. рис. 1).

Запровадимо декартову систему координат  $Oxyz$  з площиною  $xOy$ , яка співпадає з горизонтальною площиною, вісь  $z$  – перпендикулярна до неї. Осі координат  $x_1, y_1, z_1$  утворюються поворотом осей  $xuz$  на кут  $\alpha$  навколо осі  $Ox$  так, що координатна площина  $x_1Oy_1$  співпадає з площиною руху харвестера, вісь  $z_1$  утворює кут  $\alpha$  з віссю  $z$ . Осі координат  $x_2, y_2, z_2$  утворюються шляхом повороту осей  $x_1, y_1, z_1$  на кут  $\beta$  навколо осі  $Oz_1$  так, що координатна площина  $x_2Oy_2$  співпадає з площиною руху, а напрям руху розглядуваного механізму співвісний з  $y_2$ . На координатній площині  $x_2Oy_2$  виділимо осі  $y_2$  та  $y_2'$ , які співпадають з напрямками руху рушіїв правого та лівого бортів відповідно, та вісь  $y_2''$ , яка співпадає з напрямком переміщення центру ваги харвестера в транспортному положенні. Точка  $A$  є проекцією основи стріли – маніпулятора на площину  $x_2Oy_2$ , а відрізок  $AB$  співпадає з проекцією осі стріли – маніпулятора на цю ж площину. В загальному випадку  $AB$  складає кут  $\gamma$  з віссю  $y_2''$ .

Наслідуючи метод, обґрунтований в роботі [1], введемо в розгляд нормальні складові реакції ґрунту на рушій  $R_i$ , ( $i=1\div 6$ ) – прикладені до центрів контактних площадок рушіїв уздовж нормалі до поверхні руху механізму та  $T_i$ , ( $i=1\div 6$ ) – тангенційні (дотичні) складові цих реакцій. Позначимо  $F_{ki}$ , ( $i=1\div 6$ ) – колові сили на тягові колеса, прикладені уздовж напрямку руху. Вважаємо усі колеса тяговими, а точку прикладання сил – в центрі мас контактних площадок рушії з ґрунтом;  $M_{fi}$ , ( $i=1\div 6$ ) – моменти опору коченню коліс;  $G_T$  – сила ваги механізму (без урахування ваги стріли та харвестерної головки), прикладена у його центрі мас та направлена вертикально вниз.

Сила  $G_T$  має складові: нормальну до площини руху силу  $G_T \cdot \cos \alpha$  та дотичну складову в площині  $x_2Oy_2$ .

Розглянемо двосекційний шарнірний маніпулятор. Довжини секцій  $L_{M1}$  та  $L_{M2}$ , сили ваги –  $G_{M1}$  та  $G_{M2}$ , прикладені вертикально вниз у центрах мас, що знаходяться на висоті від площини колових осей, відповідно, –  $h_{M1}$  та  $h_{M2}$ . Сила ваги процесорної головки  $G_G$  прикладена у центрі мас головки на висоті  $h_G$  від поверхні руху. Стріла – маніпулятор механізму розкривається з кутовою швидкістю  $\omega = 2d\varphi/dt$ , де  $2\varphi$  – кут розкриття маніпулятора. Зазначимо, що для телескопічної стріли – маніпулятора викладки є аналогічні в припущенні  $\varphi = 90^\circ$ .

Побудова даної розрахункової моделі базується на припущенні рівномі-



рності руху та незначної швидкості механізму, тому сили інерції та сили лобового опору потоку повітря є малими і ними можна знехтувати.

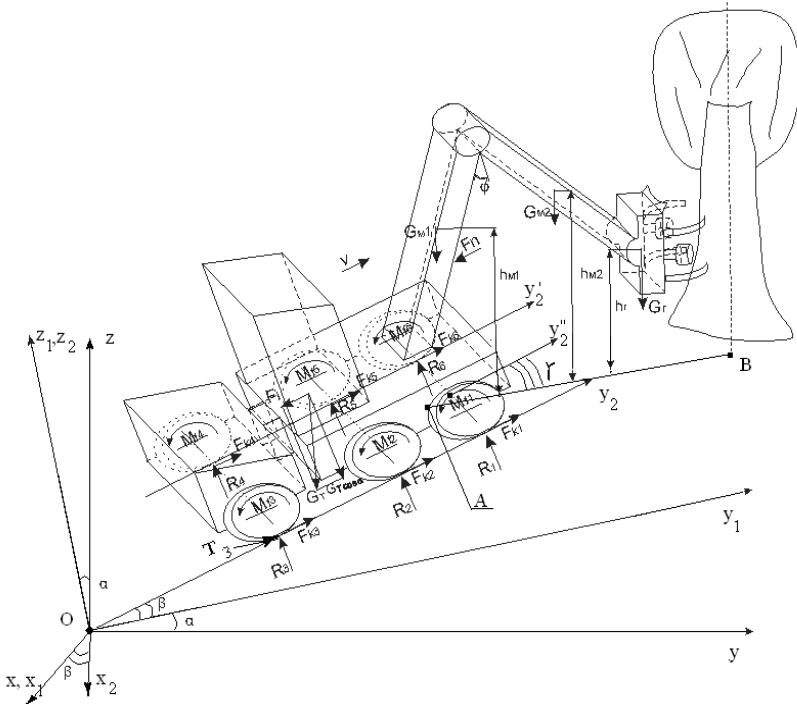


Рис. 1 – Схема руху харвестера площиною з ухилом.

Рух харвестера лісосікою в гірській місцевості може супроводжуватись одночасним виконанням ним окремих операцій виробничої функції, які пропонуються згрупувати наступним чином.

*A – захоплення стовбура.* Харвестер рухається лісосікою до вибраного оператором для рубання дерева, оператор підводить маніпулятором багатоопераційну головку до стовбура і захоплює його в найнижчій з можливих точці. В момент захоплення стовбур контактує з ножами та подавальними вальцями, які дозволяють опустити харвестерну головку якомога нижче, щоб після зрізання не залишати занадто високих пнів. На даному етапі одночасно виконуються наступні процеси: 1 – рух харвестера лісосікою; 2 – обертвий рух kabіни з маніпулятором; 3 – осьовий рух маніпулятора; 4 – коловий (захоплюючий) рух ножів та вальців із стисканням стовбура.

*B – зрізання дерева.* Перед зрізанням стовбур затискається харвестерною головкою, маніпулятор здійснює вертикальний натяг стовбура для зменшення сили дії стовбура на ланцюгову пилку під час різання. Одночасно виконується такі операції: 1 – рух харвестера лісосікою; 2 – коловий (захоплюючий) рух ножів та вальців із стисканням стовбура; 3 – натяг стовбура; 4 –

рух приводу повороту ланцюгової пилки; 5 – рух приводу механізму пиляння.

*В – падіння дерева.* Оператор виконує рух маніпулятором (поворот, або рух від кабіни) для надання дереву відповідного валочного моменту. Під час падіння харвестер може рухатись від напрямку валки дерева з одночасним переміщенням маніпулятора і поворотом харвестерної головки. Дерево падає кроною на землю, відземок залишається у харвестерній головці, яка повертається до осі дерева і переміщається уздовж стовбура, здійснюючи його первинну обробку. На етапі *В* одночасно виконуються наступні операції: 1 – рух харвестера лісосікою; 2 – виконання маневру маніпулятором із затисненням стовбуром; 3 – повертання багатоопераційної головки у відповідне положення; 4 – протягнення стовбура уздовж харвестерної головки зі значним пришвидшенням або сповільненням.

*Г – первинне оброблення стовбура* виконується коли він позиціонується у горизонтальному положенні. Подавальний механізм харвестерної головки забезпечує відповідну швидкість протяжки, зрізування гілок та облік об'єму заготовленої деревини. Оброблена частина стовбура розкрязжується на сортименти. Процеси виробничої функції зосереджені у механізмах стріли – маніпулятора та багатоопераційної головки, харвестер не переміщується (для забезпечення високої якості розкрязжування). На даному етапі виконуються наступні операції: 1 – рух маніпулятора; 2 – протяжка стовбура подавальними вальцями; 3 – коловий рух гілкорізними ножами; 4 – рух приводу повороту ланцюгової пилки; 5 – привід ланцюгової пили; 6 – поворот кабіни зі стрілою – маніпулятором та затисненим стовбуром.

На усіх етапах виконується ряд допоміжних операцій, зокрема робота механізму стабілізації положення платформи кабіни, освітлення, кондиціонування та вентиляція кабіни тощо. Для забезпечення цих операцій також необхідно використовувати відповідну частку потужності двигуна.

Задача полягає у побудові системи рівнянь для визначення потужності двигуна харвестера, який рухається гірською лісосікою й одночасно виконує операції виробничої функції, та реакцій опорної поверхні – ґрунту від дискретної дії рушіїв такого харвестера.

**Рівняння потужнісного балансу.** Проектуючи на вісь  $Oy_2$  зовнішні сили, що діють на харвестер, отримано рівняння тягового балансу:

$$\sum_{i=1}^6 (F_{ki} - \frac{M_{fi}}{r_i}) - np_{y_2} (G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_{\Gamma}) = 0, \quad (1)$$

де  $r_i$  – радіуси коліс;  $np_{y_2}$  – проекція сил на вісь  $y_2$ . Для знаходження таких проекцій розглядається графічна схема визначення кута  $\theta$  між віссю руху харвестера та горизонтальною площиною  $xOy$  (див. рис. 2 а):

$$\left\{ \sin \alpha = \frac{h}{l}, \sin \theta = \frac{h}{L}, L = \frac{l}{\cos \beta} \Rightarrow \sin \theta = \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad (2) \right.$$

де  $h$  – висота, на яку підіймається харвестер;  $l$  – довжина найкоротшої висхідної лінії координатної площини  $x_1Oy_1$  якою можна досягнути висоти  $h$ ;

$L$  – довжина реальної траєкторії харвестера, відведеної на кут  $\beta$  від найкоротшої висхідної лінії, рухаючись якою він досягає висоти  $h$ .

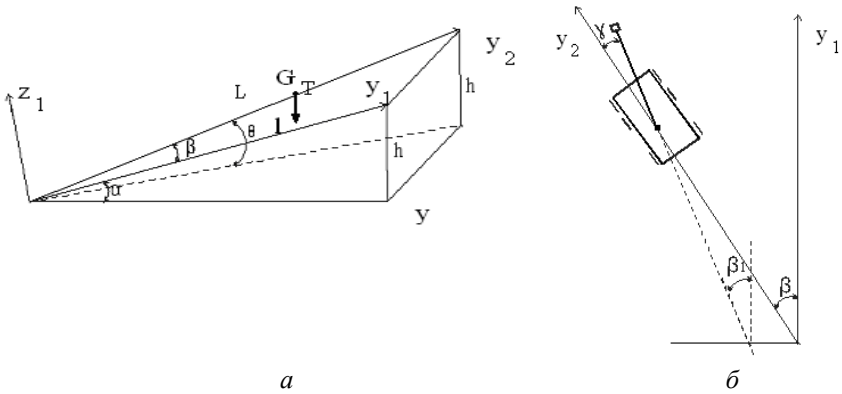


Рис. 2 – Геометричні будування:  $a$  – кут  $\theta$  між віссю руху харвестера та горизонтальною площиною  $xOy$ ,  $G_T$  – сила ваги харвестера, скерована вертикально вниз;  $b$  – кут  $\beta_1$  між віссю  $y_1$  та напрямом розкладення стріли харвестера в площині  $x_1Oy_1$ .

Вважатимемо, що сума усіх колових сил на тягових колесах  $F_{ki}$  рівна загальній коловій (тяговій) силі  $F_k$ . Від моментів опору коченню коліс перейдемо до відповідних сил опору  $F_{fi}$ :  $M_{ik} = F_{fi} \cdot r_i = f_i \cdot R_i \cdot r_i$ , де  $f_i$  коефіцієнти сил опору. Оскільки тут розглядається баланс потужності і механізму в цілому, для спрощення викладок можливо замінити суму сил опору окремих рушіїв на сумарну силу опору з узагальненим коефіцієнтом опору  $f$ , пов'язаним із сумарною нормальною реакцією харвестера, що підіймається висхідною лінією –  $(G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_G) \cdot \cos \alpha$ . Із врахуванням цих припущень та відношень (2) із формули (1) слідує:

$$F_K = (G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_G)(f \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta),$$

$$D = f \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad (3)$$

де  $D$  – динамічний фактор, тобто відношення колової сили до ваги харвестера в цілому. Аналіз величини  $D$  у залежності від параметрів лісосіки за використання аналогічного підходу подано в роботах [6, 7].

Із формул (3) можливо отримати вираз необхідної потужності двигуна харвестера під час його руху площиною з ухилом без виконання операцій виробничої функції:

$$N_{TP} = \frac{v \cdot (G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_G) \cdot (f \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta)}{v_e}, \quad (4)$$

де  $v_e = (0,95 \div 0,96)$  – коефіцієнт корекції потужності, який враховує втрати стенової потужності двигуна на трансмісію в дійсних умовах. Повна потужність двигуна харвестера складається із суми  $N_{TP}$  та потужності задіяних начепних знарядь і допоміжних механізмів  $N_{BIP}$ . Рівняння потужнісного балансу в безрозмірній формі набуде вигляду:

$$N^0 = 1 + \frac{N_{BIP} \cdot v_e}{(G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_T) \cdot v \cdot (f \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \beta)}, \quad (5)$$

де  $N^0$  – безрозмірна потужність двигуна, отримана відношенням повної потужності двигуна до потужності транспортної функції. Величина  $N_{BIP}$  будується окремо для кожної з груп операцій  $A - \Gamma$  виробничої функції. Далі визначено потужності окремих операцій.

1. *Обертвий рух кабіни з маніпулятором* у даній постановці вважається рівноприскореним. Нехай кутова швидкість обертання кабіни  $\omega_1$  змінюється за час  $\Delta t_1$  від 0 до величини  $\omega_1^{\max}$ , тоді відповідне кутове прискорення  $\varepsilon_1 = \omega_1^{\max} / \Delta t_1$ . Рівняння обертowego руху кабіни матиме вигляд:

$$M_1 = (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \cdot \varepsilon_1 = (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \cdot \omega_1^{\max} / \Delta t,$$

де  $J_1 - J_4$  – момент інерції кабіни, першої та другої секції маніпулятора й харвестерної головки відповідно відносно осі обертання,  $M_1$  – крутний момент, що викликає обертання кабіни. Вираз максимальної потужності обертowego руху розглядуваного процесу набере вигляду:

$$N_1 = M_1 \cdot \omega_1^{\max} = (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) \cdot (\omega_1^{\max})^2 / \Delta t. \quad (6)$$

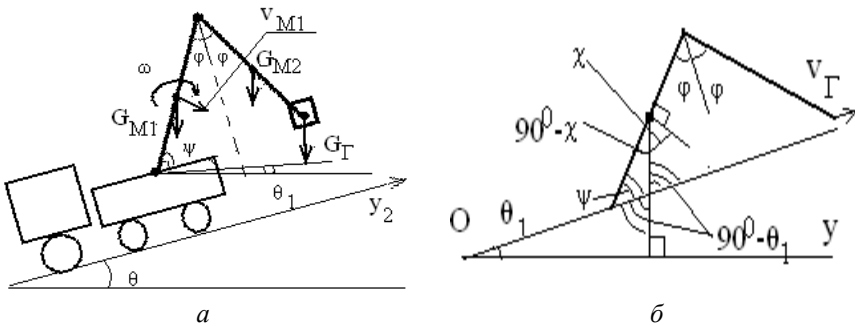


Рис. 3 – Схема руху першої секції маніпулятора під час його осьового руху: а – загальний вигляд; б – будовання кута  $\chi$ .

2. *Осьовий рух маніпулятора з харвестерною головкою* під час його розкладання (складання) для спрощення викладу вважатимемо таким, що харвестерна головка зберігає постійну відстань до площини руху  $x_1 O y_1$ . Перша секція маніпулятора під час його розкладання обертається з кутовою швидкістю  $\omega = -\partial \psi / dt = \partial \varphi / dt$  навкруг опорного шарніра (див. рис. 3 а) у верти-

кальній площині, що співпадає з площиною, в якій знаходиться маніпулятор. Ця площина утворює кут  $\gamma$  з напрямом руху харвестера та кут  $\beta_1 = \beta - \gamma$  з висхідною лінією площини  $x_1Oy_1$  (див. рис. 2 б). За аналогією до попереднього викладу запровадимо кут  $\theta_1$  між горизонтальною площиною  $xOy$  та проекцією маніпулятора харвестера на площину його руху  $x_1Oy_1$ . З рис. 2 та формули (2) слідує:

$$\sin \theta_1 = \sin \alpha \cdot \cos \beta_1 = \sin \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma). \quad (7)$$

Введемо у розгляд кут  $\chi$  між напрямом вектора лінійної швидкості центра мас першої секції маніпулятора  $v_{M1}$  під час розкладання маніпулятора та нормаллю до площини  $xOy$  (до прямої  $Oy$  на рис. 3 б):

$$\chi = 90^\circ - \varphi + \theta_1, \quad (8)$$

тоді проекція  $v_{M1}$  на вертикальну вісь (вісь  $z$ ) становитиме

$$np_z(v_{M1}) = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L_{M1} \cdot \cos \chi = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L_{M1} \cdot \sin(\varphi - \theta_1). \quad (9)$$

Сила ваги  $G_{M1}$  виконує роботу на переміщенні першої секції маніпулятора, як це визначено у викладі [8], з потужністю, що визначається добутком векторів сили ваги та швидкості центра мас. Міркуючи аналогічно, можливо отримати відповідний вираз потужності другої секції маніпулятора. Отже розкладання маніпулятора супроводжується вивільненням потужності

$$N^M = \frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L_{M1} \cdot \sin(\varphi - \theta_1) \cdot (G_{M1} + G_{M2}). \quad (10)$$

Зазначимо, що під час складання маніпулятора еквівалентну потужність повинен витратити двигун харвестера.

Головка харвестера під час розкладання його стріли – маніпулятора підіймається уверх уздовж лінії, яка характеризується кутом  $\theta_1$  (див. рис. 3 б). Швидкість висхідного руху головки  $v_\Gamma = (L_{M1} + L_{M2}) \cdot \omega \cdot \cos \varphi$ , а її проекція на вертикальну вісь  $z$

$$np_z(v_\Gamma) = v_\Gamma \cdot \sin \theta_1 = (L_{M1} + L_{M2}) \cdot \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma), \quad (11)$$

Потужність, яку слід витратити для забезпечення такого руху,

$$N^\Gamma = G_\Gamma \cdot (L_{M1} + L_{M2}) \cdot \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma). \quad (12)$$

Під час розкладання харвестера двигун витрачає потужність на висхідний рух головки у відповідності до формули (12), а сили тяжіння вивільняють потужність, як це вказано у формулі (10). Оскільки гідропривід механізмів розкладання-складання маніпулятора не оснащений засобами рекуперації, до уваги слід прийняти потужність  $N^\Gamma$ . Для складання маніпулятора двигун харвестера повинен забезпечити потужність  $N^M$ .

Отже потужність  $N_2$  операції розкладання-складання стріли – маніпулятора з головою повинна бути величиною, більшою серед двох значень –  $N^\Gamma, N^M$ :

$$N_2 = \max(N^G, N^M), \quad (13)$$

де величини  $N^G, N^M$  визначаються відношеннями (10), (12).

3. Коловий рух ножів та подавальних вальців харвестерної головки під час захоплення стовбура визначає потужність  $N_3$ :

$$N_3 = M_3^{on} \cdot \omega_3, \quad (14)$$

де  $M_3^{on}$  – момент опору деревини стисканню вальцями;  $\omega_3$  – кутова швидкість розглядуваного колового руху. Величина моменту опору деревини визначається податливістю деревини та залежить від породи зрубубаного дерева, його якості і віку.

4. Натяг стовбура перед початком зрубубання потребує виконання роботи, еквівалентної за величиною до потенційної енергії  $U$  стиснення основи стовбура та ґрунту навколо цієї основи власне стовбуром із кроною. Для визначення такої енергії необхідно розв'язати контактну задачу теорії пружності для зануреного пружного штампа складної форми на пружній основі, визначити нормальні напруження в стовбурі нижче пропила –  $\sigma_{CT}$  та у ґрунті –  $\sigma_{GP}$  й використати вираз потенційної енергії, прийнятий у викладі [9]:

$$U = \int_{V_{GP}} \frac{\sigma_{GP}^2}{2 \cdot E_{GP}} dV_{GP} + \int_{V_{CT}} \frac{\sigma_{CT}^2}{2 \cdot E_{CT}} dV_{CT},$$

де  $V_{GP}$  – об'єм ґрунту, що деформується унаслідок дії сили ваги стовбура з кроною;  $V_{CT}$  – об'єм комлевої частини стовбура;  $E_{GP}, E_{CT}$  – модуль пружності ґрунту та деревини вздовж волокон відповідно.

Для проектних розрахунків пропонується розглядати комлеву частину стовбура як циліндр, що опирається на жорстку основу ( $E_{GP} \rightarrow \infty$ ), див. рис.4.

Потенційна енергія стисненої комлевої частини стовбура в припущенні  $\sigma_{CT} = 4 \cdot G_{CT} / \pi D^2$ , матиме вигляд:

$$U = \frac{2 \cdot G_{CT}^2}{\pi \cdot E_{CT} \cdot D_{CT}^2} \cdot \Delta l. \quad (15)$$

Двигун харвестера під час натягу стовбура повинен витратити потужність рівну за величиною енергії  $U$  протягом відповідного часу  $t_4$ :

$$N_4 = \frac{2 \cdot G_{CT}^2}{\pi \cdot E_{CT} \cdot D_{CT}^2} \cdot \frac{\Delta l}{t_4} \quad N_4 = \frac{2 \cdot G_{CT}^2}{\pi \cdot E_{CT} \cdot D_{CT}^2} \cdot \frac{\Delta l}{t_4}. \quad (16)$$

5. Операції подачі ланцюгової пилки та обертання її пильного ланцюга потребують потужності  $N_5$ . Для оцінки цієї величини використаємо описані в роботі [10] величини:  $N_{БП}$  – потужність будь-якої ланцюгової бензопили,  $\delta_{БП}$  [ $см^2 / с$ ] – продуктивність пиляння цієї ж бензопили за одиницю часу. Для харвестера продуктивність пиляння становитиме

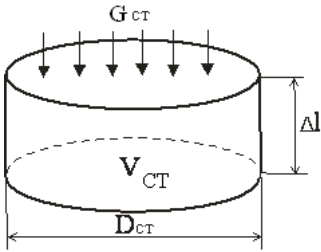


Рис. 4 – Схема для визначення потенціальної енергії стиску комлевої частини стовбура:  $\Delta l$  – висота комлевої частини стовбура,  $D_{CT}$  – діаметр стовбура в площині пропила.

го стовбура з кроною. Результуюча потужність цієї операції має вигляд:

$$N_6 = \max\left(\frac{1}{2} \cdot \omega \cdot L_{M1} \cdot \sin(\varphi - \theta) \cdot (G_{M1} + G_{M2}), (G_T + G_{CT}) \cdot (L_{M1} + L_{M2}) \cdot \omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma)\right), \quad (19)$$

Зазначимо, що величина  $G_{CT}$  може визначатись методикою, запропонованою в роботі [11], або з сортиментних таблиць [12].

7. Вважатимемо, що потужність, яку потрібно затратити на *обертання харвестерної головки навкруг осі її підвісу*, є значно менша інших потужностей і нею можна знехтувати:  $N_7 \approx 0$ .

8. Максимальна потужність, що витрачається для *протягнення стовбура уздовж харвестерної головки з пришвидшенням або сповільненням*, визначається відношенням

$$N_8 = \frac{G_{CT}}{g} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t_8} v_{\max}, \quad (20)$$

де  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$  – пришвидшення вільного падіння;  $\Delta v$  – зміна лінійної швидкості протягнення зрубаного стовбура відносно харвестерної головки протягом вибраного часу  $\Delta t_8$ ;  $v_{\max}$  – максимальна швидкість протягнення стовбура харвестерною головкою; вважається що рух є рівноприскореним.

9. *Обертаний рух кабіни зі стрілою-маніпулятором та затисненим стовбуром*. Аналогічно до пункту 1 даного викладу із виразу (6) отримуємо:

$$N_9 = M_9 \cdot \omega_9^{\max} = (J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5) \cdot (\omega_9^{\max})^2 / \Delta t, \quad (21)$$

де  $J_5$  – момент інерції зрізаного стовбура з кроною відносно осі обертання кабіни;  $M_9$  – крутний момент, наданий двигуном маніпулятору з головкою і стовбуром, внаслідок чого він рівноприскорено обертається;  $\omega_9^{\max}$  – максимальне значення кутової швидкості обертання маніпулятора із затисненим головкою стовбуром.

Підсумовуючи виклад, запишемо рівняння потужнісного балансу для

$$\delta = \pi \cdot D_{CT}^2 / (4 \cdot t_5), \quad (17)$$

де  $t_5$  – час спилування стовбура харвестером;  $\pi \cdot D_{CT}^2 / 4$  – площа зрізу стовбура.

За міркуваннями пропорційності із відношення (17) випливає:

$$N_5 = \frac{N_{БП}}{\delta_{БП}} \cdot \frac{\pi \cdot D_{CT}^2}{4} \cdot \frac{1}{t_5}. \quad (18)$$

6. Щодо *осьового руху маніпулятора з харвестерною головкою, яка утримує стовбур зрубаного дерева*, вирази потужності визначаються відношеннями (10), (12), де в останньому вага головки  $G_T$  замінюється на суму  $G_T + G_{CT}$  ваги головки та зрізаного

кожної з груп  $A - \Gamma$  операцій виробничої функції:

$$N_A^0 = 1 + \frac{\frac{1}{k_e} \cdot (N_1 + N_2 + N_3)}{N_{TP}}, \quad N_B^0 = 1 + \frac{\frac{1}{k_e} \cdot (N_3 + N_4 + N_5)}{N_{TP}},$$

$$N_B^0 = 1 + \frac{\frac{1}{k_e} \cdot (N_6 + N_8)}{N_{TP}}, \quad N_\Gamma^0 = \frac{\frac{1}{k_e} \cdot (N_3 + N_5 + N_6 + N_8 + N_9)}{N_{TP}}, \quad (22)$$

де потужності  $N_i, i = 1 \dots 9$  визначаються відношеннями (6), (13), (14), (16), (18), (19), (20) та (21) відповідно; величина  $k_e = (0,8 - 0,9)$  – коефіцієнт втрат потужності приводами робочих органів операцій виробничої функції;  $N_{TP}$  – потужність транспортної функції харвестера (4);  $N_A^0 \div N_\Gamma^0$  – безрозмірна потужність двигуна під час виконання груп операцій  $A - \Gamma$  виробничої функції, отримана відношенням відповідної повної потужності двигуна до потужності транспортної функції.

Для харвестера в цілому безрозмірна повна потужність двигуна становитиме

$$N^0 = \max(N_A^0, N_B^0, N_\Gamma^0). \quad (23)$$

**Опорні реакції ґрунту.** *Нормальні складові опорних реакції* визначаються із рівнянь рівноваги просторової системи сил, перпендикулярних до напрямку руху харвестера лісосікою. Ці сили (нормальні складові реакцій, проєкції сил ваги складових харвестера на нормаль до напрямку руху тощо) утворюють систему, для якої слід застосувати одне рівняння рівноваги сил вздовж лінії спільного напрямку дії (вісь  $z_1$  на рис. 1) та два рівняння рівноваги моментів відносно осей, що перетинаються, як це вказано у викладі [8]. Для тривісного харвестера кількість невідомих нормальних реакцій дорівнює 6, тому дана система сил є *статично невизначеною*. Методи розкриття статичної невизначеності передбачають розчленування рами харвестера із введенням відповідних розрізних моментів та перерізаючих сил – зокрема так, як в роботі [13], врахування рельєфу поверхні руху тощо. Можливі спрощення, наприклад прийняття  $R_1 = R_2 = \dots = R_6$ , не забезпечують мети поставленої задачі – визначення нерівномірності розподілу реакції внаслідок особливостей руху харвестера лісосікою та виконання виробничої функції.

Вважатимемо, що у складеному (транспортному) положенні маніпулятора харвестера, який рухається горизонтальною площиною, центр ваги механізму знаходиться у такій точці, що всі нормальні реакції опорної поверхні (грунту) рівні між собою:

$$R = \frac{1}{6}(G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_\Gamma), \quad (23)$$

де  $R$  – середнє значення опорної реакції на одне колесо.

Для складання рівняння рівноваги розглядуваної системи сил виконано наступне геометричне будовання (див. рис. 5 а). Аналогічним чином, як під



час виведення формули (2) (див. рис. 2 а), для кута  $\xi$  отримуємо:

$$\sin \xi = \sin \alpha \cdot \cos(90^\circ - \beta) = \sin \alpha \cdot \sin \beta . \quad (24)$$

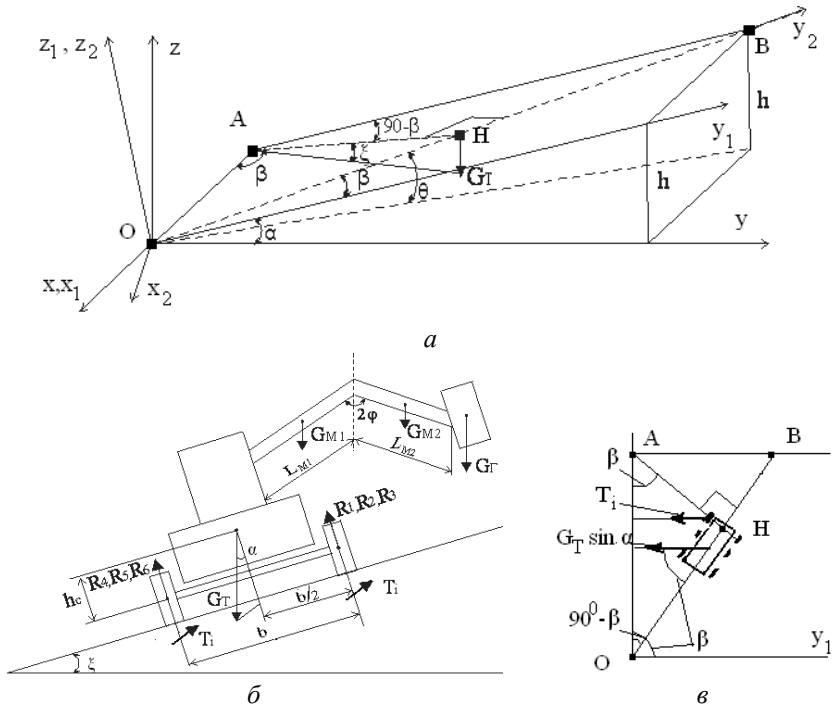


Рис. 5 – Геометричні будовання для визначення положення харвестера під час його руху поверхню із ухилом: *a* – кут  $\xi$  між перпендикуляром  $AH$  до осі  $OB$  руху харвестера та горизонтальною площиною  $xOy$ ; *b* – схематичний переріз харвестера вертикальною площиною, що проходить через відрізок  $AH$ , сили  $G_T, G_{M1}, G_{M2}, G_T$  та  $T_i, i = 1 \div 6$  знаходяться поза цією площиною, *в* – схема руху харвестера в площині  $OAB$  та визначення проєкцій сил на осі  $OB$  та  $AH$ .

Сили ваги частин харвестера розкладемо на нормальні та дотичні складові до площини руху. З рис. 5 *б* видно, що кут між силою ваги  $G_T$  та перпендикуляром до площини руху харвестера  $x_1Oy_1$  рівний  $\alpha$ , тому нормальна складова цієї сили становитиме  $G_T \cdot \cos \alpha$ ; аналогічним є вираз для нормальних складових сил ваги інших частин харвестера. Рівняння рівноваги проєкцій сил на нормаль до площини руху (вісь  $z_1$ ) має вигляд:

$$\sum_i F_{zi} : \sum_{i=1}^6 R_i - (G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_G) \cdot \cos \alpha = 0. \quad (25)$$

Для будовання двох рівнянь рівноваги моментів слід розглянути схему руху харвестера (див. рис. 5 б):  $h_C$  – висота центра ваги харвестера над коловою віссю,  $b$  – ширина колії харвестера. Припускаючи для спрощення, що перша секція маніпулятора кріпиться до корпусу харвестера на рівні колової осі, висоти центрів мас секцій маніпулятора над площиною колових осей становитиме

$$h_{M1} = \frac{L_{M1}}{2} \cdot \cos \varphi, \quad h_{M2} = \left( L_{M1} - \frac{L_{M2}}{2} \right) \cdot \cos \varphi. \quad (26)$$

Визначимо довжини проекцій секцій маніпулятора на його вісь в площині  $x_1Oy_1$ :

$$l_{M1} = L_{M1} \cdot \sin \varphi, \quad l_{M2} = L_{M2} \cdot \sin \varphi, \quad (27)$$

а також проекції цих довжин на вертикальну площину, що проходить через відрізок  $AH$ :

$$l_{M1}^{np} = L_{M1} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \gamma, \quad l_{M2}^{np} = L_{M2} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \gamma. \quad (28)$$

Дотична складова сили ваги  $G_T$  в площині руху  $x_1Oy_1$  дорівнює  $G_T \cdot \sin \alpha$  – розкладається на проекції на перпендикулярні осі  $OB$  та  $AH$ :

$$np_{AH}(G_T) = G_T \cdot \sin \xi, \quad np_{OB}(G_T) = G_T \cdot \sin \theta. \quad (29)$$

Аналогічний вигляд матимуть вирази для дотичних складових сил ваги інших частин харвестера. Тангенційні (дотичні) складові реакцій опорної поверхні –  $T_i, (i = 1 \div 6)$  – проєктуються на осі  $AH$  та  $OB$  наступним чином (див. рис. 5 в):

$$np_{AH}(T_i) = T_i \cdot \sin \beta, \quad np_{OB}(T_i) = T_i \cdot \cos \beta. \quad (30)$$

Рівняння рівноваги моментів відносно осі, що проходить через центри мас контактних площадок рушіїв 1, 2, 3 з ґрунтом, із урахуванням формул (27), (28), (29), (30) має вигляд:

$$\left[ G_T \frac{b}{2} + G_{M1} \frac{b - l_{M1}^{np}}{2} + G_{M2} \frac{b - 2 \cdot l_{M1}^{np} - l_{M2}^{np}}{2} + G_T \left( \frac{b}{2} - l_{M1}^{np} - l_{M2}^{np} \right) \right] \cdot \cos \alpha - \\ - (R_4 + R_5 + R_6) \cdot b + \\ + (G_T \cdot (h_C + r) + G_{M1} \cdot (h_{M1} + r) + G_{M2} \cdot (h_{M2} + r) + G_T \cdot r) \cdot \sin \xi = 0, \quad (31)$$

в припущенні, що центр мас харвестерної головки знаходиться на рівні колової осі,  $r$  – радіус рушія цієї колової осі.

Для будовання рівняння рівноваги моментів відносно колової осі рушіїв  $i = 1; 6$  з метою спрощення викладок вважається, що стріла харвестера змонтована на осі рушіїв  $i = 1; 6$ , центр мас харвестера знаходиться над віссю рушіїв  $i = 2; 5$ , база харвестера  $a$ , відстань між осями рушіїв  $i = 1; 6$  та  $i = 2; 5$  рівна  $a_2$ . Отже:

$$\begin{aligned} \sin \theta (G_T \cdot h_C + G_{M1} \cdot h_{M1} + G_{M2} \cdot h_{M2}) - a_2 (R_2 + R_5) - a (R_3 + R_4) + \sum_{i=1}^6 T_i \cdot r \cos \beta + \\ + \left[ G_T \cdot a_2 - \left[ G_{M1} \cdot \frac{L_{M1}}{2} + G_{M2} \left( L_{M1} + \frac{L_{M2}}{2} \right) + G_T (L_{M1} + L_{M2}) \right] \sin \varphi \cos \gamma \right] \cos \alpha + \\ + \sum_{i=1}^6 T_i \cdot r \cos \beta = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

де  $\sum_{i=1}^6 T_i$  – сума тангенційних складових реакцій опорної поверхні (грунту), яка визначається із рівняння рівноваги проекцій діючих сил на вісь  $Oy_1$ :

$$\sum_{i=1}^6 T_i = (G_T + G_{M1} + G_{M2} + G_G) \cdot \sin \alpha. \quad (33)$$

Система рівнянь (25), (31), (32) побудована для визначення нормальних складових реакцій опорної поверхні (грунту) для харвестера в робочому положенні. Аналогічна система рівнянь може бути записана для опорних реакцій у випадку утримання харвестером натягнутого або зрубаного стовбура заміною ваги харвестерної головки на суму ваги головки та стовбура:

$$G_T \Rightarrow G_T + G_{CT}. \quad (34)$$

*Дотичні (тангенційні) складові реакцій опорної поверхні* визначаються двома рівняннями рівноваги – проекцій діючих сил на вісь  $Oy_1$  (33) та моментів сил в площині  $x_1Oy_1$  відносно будь-якого центру. Виберемо за такий центр точку  $M$  (див. рис. 6) – основу стріли маніпулятора, яка згідно попередніх припущень знаходиться над коловою віссю рушіїв  $i = 1; 6$ ; центр мас харвестера – точка  $C$  – знаходиться над віссю рушіїв  $i = 2; 5$ .

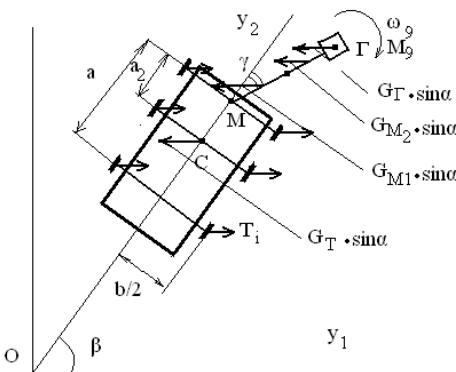


Рис. 6 – Схема руху харвестера площиною  $y_1Oy_2$ .

Постановка задачі передбачає обертання маніпулятора разом із зрізаним стовбуром із кутовою швидкістю  $\omega_9 = 0 \dots \omega_9^{\max}$ , що викликається, як вказано в попередньому пункті, крутним моментом  $M_9$  (або моментом  $M_1$  у випадку, коли таке обертання відбувається без зрізаного стовбура). Впливом сил розкладання (складання) маніпулятора на тангенційні складові реакцій  $T_i$ ,  $i = 1 \div 6$  в даній постановці задачі знехтувано. Рівняння

рівноваги моментів відносно центру  $M$  набере вигляду:

$$\frac{b}{2} \cdot \cos \beta \cdot \sum_{i=1}^3 (T_i - T_{i+3}) + \sin \beta \cdot \left( \sum_{i=2,5} T_i \cdot a_2 + \sum_{i=3,4} T_i \cdot a \right) - M_9 - G_T \cdot a_2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + \\ + \left[ G_{M1} \cdot \frac{L_{M1}}{2} + G_{M2} \cdot \left( L_{M1} + \frac{L_{M2}}{2} \right) + (G_T + G_{CT}) \cdot (L_{M1} + L_{M2}) \right] \times \\ \times \sin \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \sin (\beta - \gamma) = 0. \quad (35)$$

**Висновки та рекомендації.** Система рівнянь (22), (25), (31), (32), (33), (35), отримана із шести умов рівноваги просторової системи сил, є визначальною для потужності двигуна харвестера, який виконує операції виробничої функції під час руху лісосікою із ухилом у залежності зокрема від геометричних параметрів лісосіки та режимів руху, а також для нормальних та дотичних (тангенційних) реакцій опорної поверхні – ґрунту, які виникають в процесі руху, поєданого зі здійсненням технологічних операцій:

$$N^0 = N^0(\alpha, \beta, \gamma, \dots), R_i = R_i(\alpha, \beta, \gamma, \dots), T_i = T_i(\alpha, \beta, \gamma, \dots), i = 1 \div 6. \quad (36)$$

Знаходження розв'язків (36) системи рівнянь (22), (25), (31), (32), (33), (35) має важливе практичне значення для визначення необхідної потужності двигуна лісозаготівельних та дорожно-будівельних машин і механізмів, що працюють на територіях із заданими параметрами ухилу, а також розрахунку режиму руху, прийнятого для одночасного виконання операцій виробничої функції. Нормальні й дотичні складові реакцій опорної поверхні, визначені у (36), служать для вибору типорозміру рушіїв харвестера, розрахунку умов експлуатації технологічного транспорту без проковзування рушіїв з гарантованою курсовою й поперечною стійкістю руху.

Практичну значимість має також і обернена задача, коли для попередньо придбаного механізму із заданими потужністю двигуна та типорозміром рушіїв необхідно визначити ефективну технологію роботи на територіях із заданим ухилом, яка передбачала б повне використання потужнісних характеристик двигуна та запобігання передчасному зношенню рушіїв.

Методи розв'язування побудованої системи рівнянь для конкретних прикладів машин та практичне використання отриманих результатів буде подано в наступному дослідженні.

**Список літератури:** 1. *Біблюк Н.І.* Лісотransпортні засоби: Теорія: Підручник. – Львів: Видавничий дім «Панорама», 2004. – 453 с. 2. *Білик Б.В., Адамовський М.Г.* Проектування самохідних лісових машин: Вибір параметрів, компонування і тяговий розрахунок: Навчальний посібник. – Львів: «ЗУКЦ», 2004. – 160 с. 3. *Стіранівський О. А.* Природоохоронні засади транспортного освоєння гірських лісових територій: монографія / *О. А. Стіранівський, Ю. О. Стіранівський* // Львів: РВВ НЛТУ України, 2010. – 208 с. 4. *Біблюк Н.І.* Лісозаготівельні комбайни: особливості конструкції, функційні схеми, перспективи / *Н.І. Біблюк, О.С. Мачуга* // Вестник національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Машиностроєння. – К.: НТУУ «КПІ». – 2009. – 55. – С. 235 – 241. 5. *Біблюк Н.І.* Розробка та аналіз принципових гідравлічних схем лісозаготівельних комбайнів / *Н.І. Біблюк, О.С. Мачуга, Р.Н. Біблюк* // Промі-

слова гідравліка та пневматика. – 2008, № 4 (22). – С. 3 – 8. **6.** *Библюк Н.І.* Особливості проектування дорожно – будівельної та лісозаготівельної техніки для роботи на територіях з ухилом / *Н.І. Библюк, О.С. Мачуга, М.М. Бойко.* – В кн.: Міжнародна науково-технічна конференція «Енергоощадні машини і технології» 28 – 30 травня 2013 року. Тези доповідей. – Київ: КНУБА, 2013. – С. 22 – 25. **7.** *Мачуга О.С.* Особливості експлуатації лісозаготівельних комбайнів на лісо-сіках з ухилом. В кн.: Сучасні інформаційні та інноваційні технології на транспорті (MINTT – 2013): Збірка матеріалів конференції. У двох т. (29 – 30 травня 2013 р, Херсон). – Том 2. – Херсон: Херсонська державна морська академія, 2013. – С. 207 – 210. **8.** *Бухгольц Н.И.* Основной курс теоретической механики: Часть вторая. – М: Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1972. – 332 с. **9.** *Феодосьев В. М.* Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – М: Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 512 с. **10.** *Шкиря Т.М.* Технология и машины лесосечных работ. – Львов: Выща школа, Изд. Львов. ун-та, 1988. – 264 с. **11.** *Баринов К. Н., Александров В. А.* Проектирование лесопромышленного оборудования: Учебное пособие. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988. – 240 с. **12.** Сортиментные таблицы для таксации сосны, ели, пихты, дуба, бука, ясена, клена, граба, осины, березы, ольхи, липы, и акации белой. – К.: "Будівельник", 1973. – 443 с. **13.** *Рыбак Т.И., Мачуга О.С.* Расчет рам сельхозмашин методом минимума потенциальной энергии с учетом эффекта депланации // Физико-химическая механика материалов. – 1984, №1. – С. 97 – 101.

*Надійшла до редакції 17.02.2014*

---

УДК 630\*377.4:531.8

**Особенности проектирования лесозаготовительной техники для работы на территориях с уклоном. Часть 1. Математическая модель / О.С. Мачуга // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 130 – 144. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.**

Построена математическая модель движения лесозаготовительной машины с навесным асимметричным оборудованием, которая движется по территории с уклоном. Одновременно с движением выполняются операции производственных функций. Постановка задачи не ограничивает направление движения машины лесосекой и расположения манипулятора навесного оборудования. Получено уравнение тягового баланса с учетом производственной функции и выведено отношение для определения нормальных и касательных составляющих реакций опорной поверхности - почвы. Полученные результаты позволяют выполнять проектирующие расчеты для двигателя и колес механизма, а также планировать режимы эксплуатации существующих машин.

**Ключевые слова:** лесозаготовительная машина, тяговой баланс, опорные реакции, проектирующие расчеты.

UDC 630\*377.4:531.8

**Features of logging equipment to be used in areas with a slope. Part 1. Mathematical model / O. S. Machuga // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 130 – 144. Bibliog.: 13 titles. – ISSN 2222-0631.**

A mathematical model of motion of a forestry machine with hitched asymmetric equipment that moves across a slope was built. Product operations are performed along with the motion. The problem statement restricts neither the machine's movement direction in cutting area nor the position of the hitched equipment arm. A pulling balance equation with production function taken into account was obtained and a ratio to determine normal and tangential components of the reaction of bearing surface - soil was derived. The results obtained allow to perform designing calculations for mechanism's engine and wheels, and to plan the exploitation regimes of existing machines.

**Key words:** forestry machine, pulling balance, basic reactions, designing calculations.

**Р.П. МИГУЩЕНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**О.Ю. КРОПАЧЕК**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**М.П. АРТЬОМОВ**, канд. техн. наук, доц., ХНТУСГ ім. П.Василенка,  
Харків

## **ОДНОПАРАМЕТРОВИЙ КОНТРОЛЬ СТАНУ ДИНАМІЧНИХ ПРОМИСЛОВИХ ОБ'ЄКТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ТЕСТОВИХ СТАТИСТИК**

Розглянуті питання оцінки ефективності однопараметрового контролю функціонального стану вібраційних промислових об'єктів за вібросигналами їх вузлів при допомозі тестових  $Q$ -статистик. При оцінці отримані і досліджені характеристики вимірювального вібросигналу, що забезпечує інформаційну складову для контролю; розроблено та проаналізовано методичний базис для оцінки стану промислових динамічних об'єктів за їх вібраційними характеристиками; розроблені і досліджені однопараметрові моделі інформаційного вібросигналу.

**Ключові слова:** вібраційні характеристики, тестові статистики, динамічні об'єкти, контроль стану.

**Постановка проблеми.** Відомо, що одним з найбільш ефективних способів оцінки поточного функціонального стану більшості промислових об'єктів та його вузлів є визначення стану цих об'єктів за вібраційними процесами, що їх супроводжують. При цьому, важливою задачею контролю або альтернативної діагностики стану складних промислових об'єктів є виконання цієї задачі в динаміці, в режимі реального часу. Неперервний контроль в режимі реального часу дозволяє оптимізувати технологічні процеси в об'єктах, формувати уставки для систем управління, здійснювати неперервну індикацію стану вузлів, вчасно отримувати інформацію про аварійні ситуації в обладнанні тощо.

Неперервний контроль чи альтернативна діагностика стану динамічних промислових об'єктів в реальних виробничих умовах стикається з суттєвим впливом зовнішніх збурень, які пов'язані з різноманітністю режимів контрольованих об'єктів, та зовнішніми дестабілізуючими факторами. Такі збурення призводять до того, що робоча точка, яка відповідає стану контрольованого об'єкту, може змінювати своє положення в просторі інформативних ознак [1]. Причому такі зміни в реальних виробничих умовах, особливо коли об'єкти характеризуються малими постійними часу та транспортними запізненнями, можуть бути досить частими. Визначення дійсного стану об'єкту пов'язане з виконанням відповідної статистичної обробки вібросигналу. При виконанні прикладних задач контролю стану в інженерній практиці найбільш уживаними є одномодельні статистики [2]. Одномодельні статистики як параметри контролю змін спектральних характеристик інформаційних сигналів найбільш прийнятні у випадках, коли час спостереження обмежено триваліс-

тю перехідних процесів, що несуть інформацію про вигляд стану об'єкта контролю [3]. У цьому випадку ймовірнісна модель сигналу є випадковим процесом, який періодично нестационарний за дисперсією і за спектральною щільністю [4].

**Мета статті** полягає у визначенні ефективності однопараметрового контролю функціонального стану вібраційних промислових об'єктів за вібросигналами їх вузлів при допомозі тестових  $Q$ -статистик.

**Теоретичні засади.** Вібраційні процеси, які досліджуються в даній статті, є процесами нестационарними за спектральною щільністю і характеризуються зміною своїх частотних властивостей у часі. У цьому випадку загальна потужність випадкового процесу (дисперсія процесу) може залишатися практично незмінною, що накладає певні обмеження на вибір тестових статистик. Зміна частотних властивостей вібраційного процесу  $X(t)$  знаходить своє відображення в зміні нормованої автокореляційної функції  $R(\tau)$ . Оскільки остання пов'язана з енергетичним спектром (*теорема Вінера-Хінчина* [5]), виявлення змін автокореляційної функції зручно проводити за допомогою  $Q$ -статистик, які функціонально залежать від інтервалу кореляції  $\tau_0$ , що розділяє практично некорельовані один з одним відліки вібраційного процесу  $X(t)$ .

Відомо [4], що оцінкою інтервалу кореляції  $\tau_0$  є подвоєний середній інтервал між нулями реалізації  $x(t_i)$  процесу  $X(t)$ . Якщо скористатися методом тимчасової дискретизації для визначення щільності розподілу ймовірності між нулями стаціонарного нормального випадкового процесу, припускаючи, що стан об'єкта контролю –  $S_0$ , то можна замінити реалізації процесу  $x(t_i)$  послідовністю опорних імпульсів однакової тривалості

$$\Delta t = \frac{1}{2F_m}, \quad (1)$$

де  $F_m$  – максимальна частотна складова вібросигналу  $X(t)$ .

Вводячи умову статистичної залежності між імпульсами, розділеними інтервалом, не більше ніж  $2\Delta t$  (1), скористаємося наближеним виразом для розподілу інтервалів  $\tau_0$  між нулями стаціонарного центрованого процесу з автокореляційною функцією  $R(\tau)$  [5]:

$$P(\tau_0) = \frac{2 \arccos R(\tau_0) - \arccos R(2\tau_0)}{2 \arccos R(\tau_0)}.$$

Оскільки в експериментальній практиці мають справу з оцінками нормованої автокореляційної функції, то за величину  $\tau_0$  беруть інтервал відповідно до умови:

$$R(\tau_0) \approx R(2\tau).$$

У цьому випадку встановлюється ймовірність  $P(\tau_0) = 0.5$ , що відповідає такому вибору інтервалу дискретизації  $\Delta t$ , коли кількість перетинів вібро-сигналу нульового рівня  $n_1$  в два рази менше, ніж кількість відліків  $n_2$  процесу  $x(t_i)$  на інтервалі спостереження  $T$ .

Позначимо ймовірність зміни знака реалізацій центрованого процесу  $X(t)$  як

$$q = \frac{n_1}{n_2}.$$

Тоді статистичні моменти ймовірності  $q$  визначаються наступним чином:

$$\left\{ m_q = q; D_q = \sqrt{\frac{q(1-q)}{n_2}} \right.$$

Введемо статистику виявлення зміни частоти перетину нульового рівня процесом  $X(t)$ :

$$Q = \frac{q - m_q}{\sqrt{D_q}}.$$

Якщо в стані  $S_0$  виконується умова  $n_2 = 2n_1$ , то нормована статистика

$$Q = \frac{q - 0.5}{0.5} \sqrt{n_2}$$

має симетричне біноміальне розподілення з нульовим середнім значенням і одиничною дисперсією:

$$\left\{ m_Q^{(0)} = 0; D_Q^{(0)} = 1 \right.$$

Зміна інтервалу кореляції внаслідок переходу контрольованого об'єкта з базового стану  $S_0$  в новий  $S_1$  міняє ймовірність зміни знаку в  $q$ . Якщо ймовірність для нового стану об'єкта позначити як  $q_1$ , то середнє і дисперсія  $Q$ -статистики стануть відповідно:

$$\left\{ m_Q^{(1)} = \frac{q_1 - 0.5}{0.5} \sqrt{n_2}; D_Q^{(1)} = 4q_1(1 - q_1) \right.$$

При виконанні умови  $n_1 q > 10$  [6], умовні щільності розподілення  $Q$ -статистики для станів  $S_0$  і  $S_1$  можуть бути замінені нормальними розподіленнями:

$$\left\{ f(Q/S_0) \sim N(0,1); f(Q/S_1) \sim N\left(\frac{q_1 - 0.5}{0.5} \sqrt{n_2}, 4q_1(1 - q_1)\right) \right.$$

Ймовірності помилок першого  $\alpha$  і другого  $\beta$  роду при використанні  $Q$ -статистик для виявлення зміни інтервалу кореляції, а отже, і нормованої спектральної щільності процесу  $X(t)$ , визначаються наступним чином:



$$\left\{ \alpha = 1 - 2\Phi\left(U_{\alpha/2}\right); \beta = \Phi_0\left(\frac{U_{\alpha/2} - m_Q^{(1)}}{\sqrt{D_Q^{(1)}}}\right) - \Phi_0\left(\frac{-U_{\alpha/2} - m_Q^{(1)}}{\sqrt{D_Q^{(1)}}}\right), \right. \quad (2)$$

де  $\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$  – нормована функція Лапласа [6];  $U_{\alpha/2}$  – процентна точка нормованого розподілення для заданого рівня значущості  $\alpha$ .

**Експериментальні дослідження.** Проаналізуємо ефективність застосування  $Q$ -статистик при однопараметровому контролі змін спектральної щільності вібросигналу.

Ефективність тестових  $Q$ -статистик, як інформаційних параметрів, була перевірена експериментально на вібросигналах з двигуна автомобіля ГАЗ. Були оцінені кількісні дані тестових  $Q$ -статистик при насильній зміні режимів роботи двигуна відносно його заданого базового стану  $S_0$ . Нові стани двигуна автомобіля сформуливали вектор:

$$\left(S_1, S_2, S_3, S_4\right).$$

Таблиця 1 – Числові характеристики  $Q$ -статистик

Характеристики $Q$ -статистик	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
$q$	0.5	0.383	0.356	0.312	0.274
$m_Q$	0	-1.878	-2.521	-2.634	-3.985
$\sqrt{D_Q}$	1	0.964	0.953	0.945	0.868

При цьому, використовувався ємнісний перетворювач вібрації з вимірюванням віброприскорень в трьох геометричних координатах:

- $X_k$  – поздовжня вісь відносно руху;
- $Y_k$  – поперечна вісь відносно руху;
- $Z_k$  – вертикальна вісь,

який встановлювався безпосередньо на двигун автомобіля.

За даними експерименту авторами були отримані нормовані дані вібро-сигналів, які відповідають станам  $S_0 \div S_4$ , проаналізовані спектральні властивості вібро-сигналів шляхом побудови вейвлет-зображень та їх автокореляційних функцій.

При аналізі вібро-сигналів на основі  $Q$ -статистик враховувався періодичний характер нестационарності процесу  $X(t)$  і використовувались максимальні значення статистик  $Q$  при фіксованому розмірі часового вікна ідентифікації моделі  $T = 2.32$  сек. та інтервалі дискретизації  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$  сек.

У табл. 1 наведені значення ймовірностей переходу через нуль центрованого вібросигналу, а також його числові характеристики (середнє  $m_Q$  і середнє квадратичне відхилення  $\sqrt{D_Q}$ )  $Q$ -статистик для базового  $S_0$  і чотирьох насильно введених режимів об'єкту  $S_1 \div S_4$ .

Важливою оцінкою одинірних статистик є їх потужність  $\gamma_{0j} = 1 - \beta_{0j}$  при переході об'єкту контролю зі стану  $S_0$  в стани  $S_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ), а також ймовірність помилки ідентифікації при перевірці *основної гіпотези*  $H_0$  і *альтернативної гіпотези*  $H_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) при рівні значущості  $\alpha = 0.05$ .

В табл. 2 представлені результати обчислень потужності і ймовірності помилки за (2) критеріальних  $Q$ -статистик при виявленні змін кореляційних властивостей вібросигналу  $X(t)$  при парній перевірці основної і однієї з конкуруючих гіпотез.

Як видно з табл. 2 ймовірності помилок однопараметрового контролю по  $Q$ -статистикам досить суттєві (мінімум в три рази більше заданого рівня значущості ( $\alpha = 0.05$ )).

Таблиця 2 – Дані потужності та ймовірності помилок для  $Q$ -статистик при різних гіпотезах стану об'єкта

Гіпотези	Потужність $Q$ -статистики	Ймовірність помилки
$(H_0, H_1)$	0.563	0.245
$(H_0, H_2)$	0.665	0.202
$(H_0, H_3)$	0.764	0.145
$(H_0, H_4)$	0.783	0.152

**Висновки.** Дослідження у статті дозволили отримати наступні результати:

- отримані і досліджені характеристики вимірювального вібросигналу, що забезпечує інформаційну складову для контролю та діагностики;
- розроблено та проаналізовано методичний базис для оцінки стану промислових динамічних об'єктів за їх вібраційними характеристиками;
- на основі  $Q$ -статистик, розроблені і досліджені однопараметрові моделі інформаційного вібросигналу.

**Список літератури:** 1. Мигущенко Р.П. Классификация состояния форсунок дизель-генераторной установки по числовым характеристикам / Р. П. Мигущенко, В. К. Гусельников, О. Ю. Валуцкая // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Энергетика и преобразовательная техника. – 2004. – №5. – С. 88 – 92. 2. Малайчук В.П. Інформаційно-вимірювальні технології неруйнівного контролю: [навчальний посібник] / В. П. Малайчук, О. В. Мозговой, О. М. Петренко. – Дніпропетровськ: РВВ ДНУ, 2001. – 2001 с. 3. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / [М. Басвиль, А. Вилеки, А. Бенвенист и др.]; пер. с англ.; под ред. М. Басвиль, А. Бен-

виста. – М.: Мир, 1989. – 278 с. 4. *Жовинский А.Н.* Инженерный экспресс-анализ случайных процес сов / А. Н. Жовинский, В. Н. Жовинский. – М.: Энергия, 1979. – 112 с. 5. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статической радиотехники / Б. Р. Левин. – М.: Советское радио, 1975. – 392 с. 6. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения: [учебное пособие для ВТУЗ] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

*Надійшла до редколегії 28.02.2014*

УДК 519.254

**Однопараметровий контроль стану динамічних промислових об'єктів за допомогою тестових статистик** / Р. П. Мигущенко, О. Ю. Кропачек, М. П. Артьомов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 145 – 150. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассмотрены вопросы оценки эффективности однопараметрового контроля функционального состояния вибрационных промышленных объектов во вибрации их узлов при помощи тестовых  $Q$ -статистик. При оценке получены и исследованы характеристики измерительного вибросигнала, обеспечивающего информационную составляющую для контроля; разработан и проанализирован методический базис для оценки состояния промышленных динамических объектов по их вибрационным характеристикам; разработаны и исследованы однопараметровые модели информационного вибросигнала.

**Ключевые слова:** вибрационные характеристики, тестовые статистики, динамические объекты, контроль состояния.

UDC 519.254

**One-parameter control of the functional state of dynamic industrial objects using Q-test statistics** / R. P. Migushchenko, O. Y. Kropachek, M. P. Artemov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 145 – 150. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

The question of evaluating the efficiency of one-parameter control of the functional state of industrial vibration objects by vibration level of their units using  $Q$ -test statistics is addressed. Characteristics of measuring vibration signal, which provides information component for monitoring, are received and investigated. A methodological basis for estimating industrial dynamic objects by their vibration characteristics is developed and analyzed. One-parameter models of information vibration signal are designed and tested.

**Key words:** vibration characteristics, Q-test statistics, dynamic objects, functional state control.

УДК 539.3

**А.Г. НИКОЛАЕВ**, д-р физ.-мат. наук, зав. каф. высшей математики  
НАКУ им. М.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков;

**Е.А. ТАНЧИК**, ассист., НАКУ им. М.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков

## **НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА В ОБЛАСТИ МЕЖДУ ЧЕТЫРЬМА СФЕРОИДАЛЬНЫМИ ПОРАМИ**

Исследуется напряженное состояние упругого пористого материала, в котором поры моделиру-

© А. Г. Николаев, Е. А. Танчик, 2014

ются четырьмя сфероидальными полостями, центры которых расположены в вершинах квадрата. Материал находится под действием одноосного или двуосного растяжения, приложенного на бесконечности, а поры свободны от нагрузки. Поле перемещений строится при помощи обобщенного метода Фурье. Приведен численный анализ распределения напряжений на линиях, соединяющих центры пор, в зависимости от геометрических параметров задачи.

**Ключевые слова:** обобщенный метод Фурье, пористый материал, теоремы сложения, напряженно-деформированное состояние, сфероидальная полость.

**Введение.** Композиционные материалы широко применяются в авиационно-космической технике, поэтому очень актуальной задачей является изучение их прочностных характеристик. В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В работе [1] предложен метод расчета эффективных упругих модулей зернистых композитов, основанный на модели упругого деформирования пористых материалов. Отличительная особенность метода заключается в осреднении микроскопических напряжений и деформаций не по полному, а по эффективному объему фаз. Получены расчетные зависимости эффективных объемов осреднения от упругих модулей и объемного содержания фаз. Проведено сопоставление результатов расчета с экспериментальными данными при различном сочетании упругих модулей и произвольной объемной концентрации фаз.

В работе [2] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений *механики стохастических композитов*. Они могут быть сведены к *стохастическим уравнениям теории упругости* структурно неоднородного тела, к уравнениям *теории эффективных упругих модулей*, к уравнениям *теории упругих смесей* или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, поскольку уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В статьях [3 - 5] методами теории аналитических функций решаются некоторые осесимметричные задачи теории упругости для системы сферических и сфероидальных полостей и включений.

В статье [6] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, то есть учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик свя-

зующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В работах [7, 8] методом обобщенных аналитических функций построены решения осесимметричных задач для шара со сферической полостью и пространства с двумя сферическими полостями.

В работе [9] методами теории гармонических функций исследовано напряженное состояние в упругом пространстве с двумя осесимметрично расположенными сферическими включениями.

В работе [10] введена локальная осесимметричная модель пористого материала, в которой напряженное состояние определяется равномерным давлением, создаваемым внутри пор. В работе [11] разработана локальная математическая модель напряженно-деформированного состояния зернистого композиционного материала, основанная на *обобщенном методе Фурье*. Численная реализация модели позволила получить характер распределения локальных напряжений в области их концентрации. Проведено сравнение результатов с решением *методом конечных элементов*.

Данная работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния пористого материала. Исследуется влияние геометрии и расположения пор на характер распределения напряжений на линиях, соединяющих их центры. Поры моделируются четырьмя вытянутыми сфероидальными полостями, центры которых расположены в вершинах квадрата в упругом пространстве, находящемся под действием одноосного или двuosного растяжения.

**Постановка задачи.** Рассматривается упругое пространство  $\Omega$  с четырьмя непересекающимися сфероидальными полостями, центры которых находятся в вершинах  $O_j$  квадрата со стороной  $a$  (рис. 1).

Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$  и *вытянутые сфероидальные системы координат*  $(\xi_j, \eta_j, \varphi_j)$ , начала которых отнесены к центрам пор  $O_j$ ,  $j = 1 \div 4$ . Будем считать, что на бесконечности приложены постоянные растягивающие усилия  $\sigma_z^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho z}^\infty = \tau_{\varphi z}^\infty = 0$  (одноосное растяжение) или  $\sigma_\rho^\infty = T$ ,  $\tau_{\rho\varphi}^\infty = \tau_{\rho z}^\infty = 0$  (двuosное растяжение), а границы полостей свободны от усилий.

Уравнения поверхностей полостей  $\Gamma_j$  в цилиндрических координатах имеют вид:

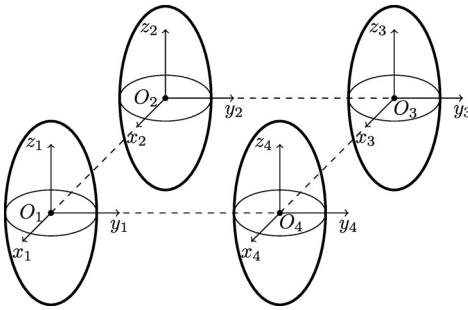


Рис. 1 – Геометрия расположения пор.

задачи для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

в упругом пространстве  $\Omega$  ищется в виде суперпозиции линейно независимых внешних частных решений уравнения Ламе:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0, \quad (3)$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{n=0}^3 \sum_{m=-n-1}^{\infty} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j), \quad (4)$$

где  $\mathbf{U}$  - в общем случае функция перемещений,  $\sigma$  - коэффициент Пуассона. Перемещение  $\mathbf{U}_0$  соответствует напряженно-деформированному состоянию на бесконечности (для одноосного и двухосного растяжения упругого пространства):

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T\sigma\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{2} \frac{Tz}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_0 = -\frac{1}{2} \frac{T(\sigma-1)\rho}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_\rho - \frac{1}{2} \frac{T\sigma z}{G(\sigma+1)} \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

где  $T$  - усилие на бесконечности,  $G$  - модуль сдвига,  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  - орты цилиндрической системы координат.

Введем следующий набор линейно независимых частных решений уравнения Ламе для вытянутого сфероида [12]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{\pm(5)} = \frac{c}{2n+1} \mathbf{D}_s \left[ u_{n-1,m}^{\pm(5)} - u_{n+1,m}^{\pm(5)} \right], \quad s = 1, 3, \quad (7)$$

$$\mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = \mathbf{D}_2 u_{n,m}^{\pm(5)} - cq_0^2 \mathbf{D}_1 u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{D}_1 = \nabla$ ,  $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$  (здесь  $i$  - мнимая единица),  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $q = ch\xi$ ,  $q_0 = ch\xi_0$ ,  $u_{n,m}^{\pm(5)}$  - полный набор частных решений уравнения Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах.

В развернутой координатной форме формулы (7) – (8) имеют вид:

$$\Gamma_j : \frac{z^2}{d_{1j}^2} + \frac{\rho_j^2}{d_{2j}^2} = 1, \quad (1)$$

где  $d_{1j}$  и  $d_{2j}$  - большая и малая полуоси сфероидов соответственно. В сфероидальных координатах уравнения поверхностей полостей имеют простой вид  $\xi = \xi_{0j}$ .

Общее решение краевой за-

$$\mathbf{U}_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}_{3,n,m}^{\pm(5)} = -u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & qu_{1,n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - qu_{1,n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \\ & - [qu_{1,n,m}^{\pm(5)} + \chi u_{n,m}^{\pm(5)}] \mathbf{e}_0 + c(q^2 - q_0^2) \nabla u_{n\pm 1,m}^{\pm(5)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $u_{n,m}^{\pm(5)} = u_{n,m}^{\pm} S_n^m$ ,  $u_{n,m}^+ = Q_n^{-m}(q)$ ,  $u_{n,m}^- = P_n^{-m}(q)$ ,  $u_{1,n,m}^{\pm(5)} = u_{1,n,m}^{\pm} S_n^m$ ,  $u_{1,n,m}^+ = (n+m+1)Q_{n+1}^{-m}(q)$ ,  $u_{1,n,m}^- = -(n-m)P_{n-1}^{-m}(q)$ ,  $S_n^m = P_n^m(\cos \eta)e^{im\varphi}$ ,  $P_n^m$  и  $Q_n^m$  - присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно. Базис  $(\mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0)$  связан с ортами цилиндрической системы координат следующим образом:

$$\left\{ \mathbf{e}_{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}, \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}, \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z. \right. \quad (12)$$

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$  имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right]. \quad (13)$$

Применяя к формулам (9) – (11) оператор (13) на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$  получим:

$$\mathbf{FU}_{1,n,m}^{\pm(5)} = 2G \frac{h}{c} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_{-1} - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{2,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left\{ \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm(5)}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & - \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm(5)}) - 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_1 - \\ & \left. - \left[ q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm(5)}) + (1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm(5)} \right] \mathbf{e}_0 \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{FU}_{3,n,m}^{\pm(5)} = & 2G \frac{h}{c} \left[ - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{2,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_{-1} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm(5)} - \frac{1}{2} u_{3,n,m}^{\pm(5)} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{m}{2} \frac{q}{q} u_{n,m}^{\pm(5)} \mathbf{e}_0 \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $u_{2,n,m}^+ = \omega^- Q_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$ ,  $u_{3,n,m}^+ = Q_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$ ,  $u_{3,n,m}^- = P_n^{-m}(q) S_n^{m+1}$ ,  $u_{2,n,m}^- = \omega^- P_n^{-m}(q) S_n^{m-1}$ ,  $\omega^- = (n+m)(n-m+1)$ ,  $h = (q^2 - p^2)^{-1/2}$ ,  $\bar{q} = sh\xi$ .

**Теоремы сложения.** Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары сфе-

роидов. Справедливы следующие теоремы сложения [12]:

$$\mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) = \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} T_{s,n,m}^{t,k,l,j,\alpha} \mathbf{U}_{t,k,l}^{-(5)}(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (17)$$

где  $i, j = 1, 2, i \neq j$ .

$$T_{s,n,m}^{t,k,l,j,\alpha} = \left\{ \delta_{st} - \delta_{t1} \delta_{s2} \left[ q_{j0}^2 \left( c_j \frac{\partial}{\partial c_j} - n - 1 \right) + q_{\alpha 0}^2 \left( c_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha} - k \right) + z_{j\alpha} \frac{\partial}{\partial z_{j\alpha}} \right] \right\} f_{1,n,m,j,\alpha}^{\pm(55)k,l}, \quad (18)$$

$$f_{1,n,m,j,\alpha}^{+(55)k,l} = \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pk} \left( \frac{c_\alpha}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-l} \beta_{rn} \left( \frac{c_j}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}), \quad (19)$$

$$f_{1,n,m,j,\alpha}^{-(55)k,l} = \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) \frac{c_\alpha}{c_j} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_{pn} \left( \frac{c_\alpha}{2} \right)^p \times \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{m-l} \beta_{rk} \left( \frac{c_j}{2} \right)^{r+1} u_{r+p,m-l}^{+(4)}(r_{j\alpha}, \theta_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}), \quad (20)$$

$$\beta_{kj} = \varepsilon_{kj} \left[ \Gamma \left( \frac{k-j}{2} + 1 \right) \Gamma \left( \frac{k+j}{2} + \frac{3}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (21)$$

$\delta_{kj}$  - дельта-символ Кронекера,  $\Gamma$  - гамма-функция Эйлера;  $\varepsilon_{kj} = 1$ , если  $k$  и  $j$  одной четности, и  $\varepsilon_{kj} = 0$  в противном случае;  $(r, \theta, \varphi)$  - сферические координаты;  $u_{n,m}^{+(4)} = (n-m)! r^{-n-1} P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$  - внешнее базисное частное решение уравнения Лапласа для сферы.

**Разрешающая система уравнений.** Относительно перемещения  $\tilde{\mathbf{U}}$  получаем краевую задачу для уравнения (2) с граничными условиями  $\mathbf{F}\tilde{\mathbf{U}}|_{\Gamma_i} = -\mathbf{F}\mathbf{U}_0|_{\Gamma_i}$ . Применяя оператор (13) к формулам (5) – (6), на площадке с нормалью  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$  для одноосного и двухосного растяжения получим соответственно:

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = Th \operatorname{sh} \xi \cos \eta \mathbf{e}_z, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U}_0 = Th \operatorname{ch} \xi \sin \eta \mathbf{e}_\rho. \quad (23)$$

Используя теоремы сложения (17) – (18), представим вектор перемещения  $\tilde{\mathbf{U}}$  в системе координат с началом в точке  $O_j$ :



$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n-1}^{n+1} A_{s,n,m}^{(j)} \mathbf{U}_{s,n,m}^{+(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) + \\ & + \mathbf{U}_{s,n,m}^{-(5)}(\xi_j, \eta_j, \varphi_j) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{s,n,m}^{t,k,l,\alpha,j}. \end{aligned} \quad (24)$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_{s,n,m}^{(j)}$ :

$$\sum_{s=1}^3 A_{s,n,m}^{(j)} F_{s,n,m}^{+(r)}(\xi_{j0}) + F_{s,n,m}^{-(r)}(\xi_{j0}) \sum_{\alpha \neq j} \sum_{t=1}^3 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-k-1}^{k+1} A_{t,k,l}^{(\alpha)} T_{s,n,m}^{t,k,l,\alpha,j} + F_{0,n,m}^{(r)} = 0, \quad (25)$$

$$r = -1, 0, 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -n - 1 \div n + 1,$$

где  $F_{0,n,m}^{(0)} = \frac{Td_{2j}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$ ,  $F_{0,n,m}^{(-1)} = F_{0,n,m}^{(1)} = 0$  для одноосного растяжения и

$$F_{0,n,m}^{(0)} = 0, \quad F_{0,n,m}^{(-1)} = \frac{Td_{1i}}{G} \delta_{n1} \delta_{m0}, \quad F_{0,n,m}^{(1)} = -\frac{Td_{1i}}{2G} \delta_{n1} \delta_{m0}$$

для двуосного растяжения,

$$F_{1,n,m}^{\pm(-1)} = \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m-1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(1)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m+1}^{\pm}, \quad F_{1,n,m}^{\pm(0)} = -\frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(-1)} = q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m-1}^{\pm}) - 2\sigma u_{2,n,m}^{\pm}, \quad F_{2,n,m}^{\pm(1)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m+1}^{\pm}) + 2\sigma u_{3,n,m}^{\pm},$$

$$F_{2,n,m}^{\pm(0)} = -q^2 \frac{\partial}{\partial \xi} (q^{-1} u_{1,n,m}^{\pm}) + (2\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n,m}^{\pm}.$$

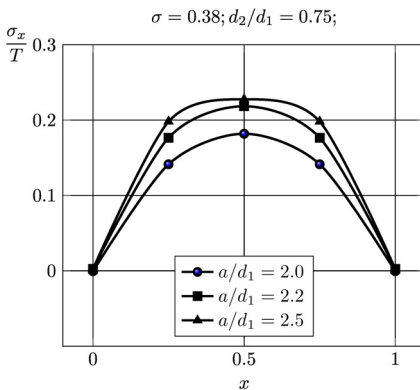


Рис. 2 – Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении.

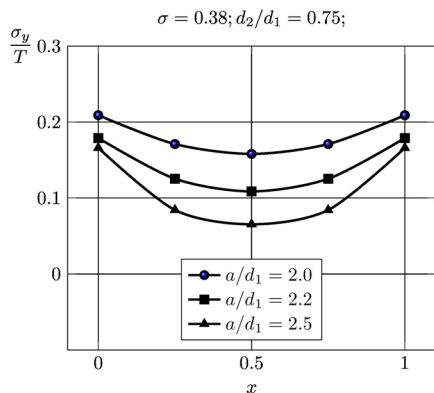


Рис. 3 – Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении.

Оператор системы уравнений (25) является фредгольмовым при условии пересечения граничных поверхностей.

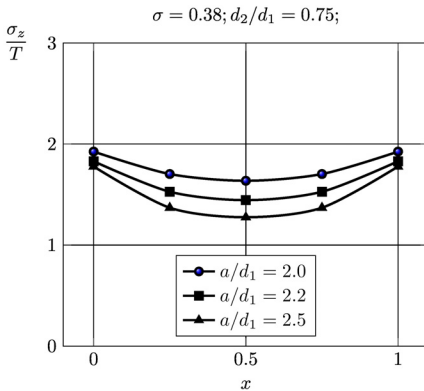


Рис. 4 – Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при одноосном растяжении.

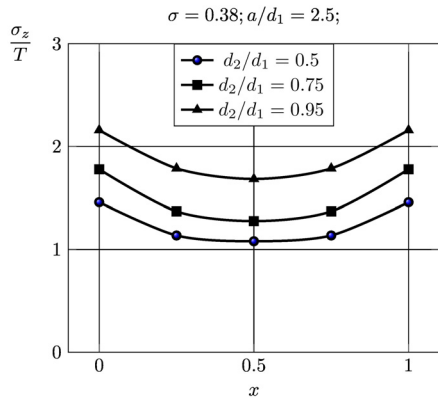


Рис. 5 – Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном растяжении.

**Анализ результатов.** Разрешающая система решалась численно *методом редукции*. При численной реализации задачи рассмотрен материал с коэффициентом Пуассона  $\sigma = 0.38$ . На рисунках 2 – 4 представлены графики напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры соседних

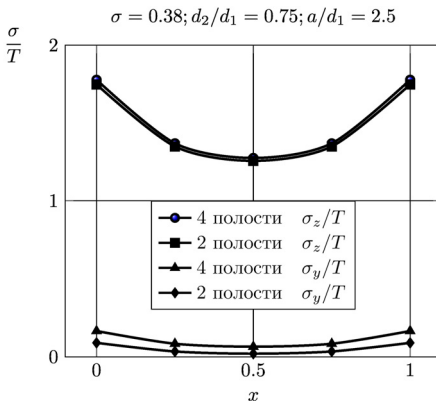


Рис. 6 – Сравнение результатов расчета для двух и четырех полостей при одноосном растяжении.

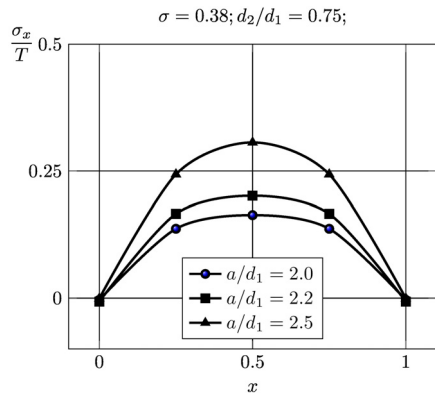


Рис. 7 – Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении.

полостей и расположенной параллельно оси  $Ox$ , в зависимости от относи-

тельного расстояния между полостями при одноосном растяжении пространства. Напряжения  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$  растут с приближением полостей друг к другу, напротив, напряжения  $\sigma_x/T$  - убывают.

На рис. 5 представлен график напряжений  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры соседних полостей, в зависимости от соотношения полуосей сфероидов при одноосном растяжении. Максимальные напряжения наблю-

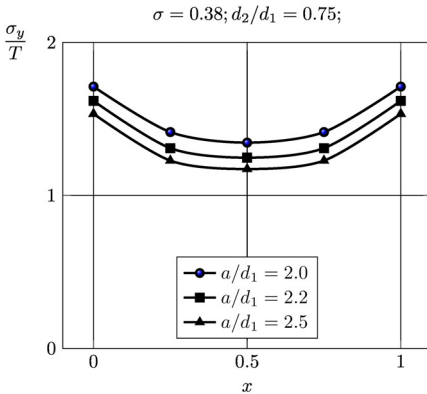


Рис. 8 – Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении.

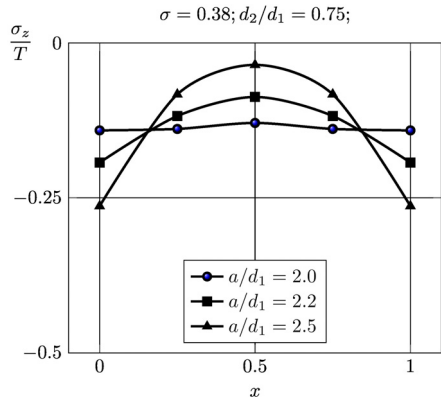


Рис. 9 – Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры полостей, в зависимости от расстояния между полостями при двuosном растяжении.

даются на границах полостей, и они растут при увеличении  $d_2/d_1$ .

На рис. 6 приведен график сравнения результатов расчета для двух и четырех полостей для напряжений  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$ . Наблюдается незначительное отличие результатов в этих случаях для расчетной геометрической конфигурации.

На рис. 7 – 9 приведены графики напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_y/T$  и  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры соседних полостей, расположенной параллельно оси  $Ox$ , в зависимости от относительного расстояния между полостями при двuosном растяжении пространства. Определяющими являются напряжения  $\sigma_y/T$ .

**Выводы.** В работе исследовано напряженно-деформированное состояние пористого материала. В отличие от известных работ в этой области рассмотренная задача обладает неосесимметричной и существенно многосвязной геометрией. Исследования показали высокую эффективность предложенного аналитико-численного метода. Достоверность полученных результатов подтверждается их сравнением с результатами решения аналогичной задачи в случае двух сфероидальных полостей. Выявлены особенности в

распределении напряжений на линии, соединяющей центры соседних полостей при одноосном и двуосном растяжении упругого материала.

**Список литературы:** 1. Федотов А. Ф. Приложение модели деформирования пористых материалов к расчёту эффективных упругих модулей зернистых композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т. 17. – С. 3 – 18. 2. Khoroshun L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // International Applied Mechanics. – 2000. – V. 36, No 10. – P. 1284 – 1316. 3. Вольперт В. С., Олегин В. С. Осесимметричное напряжённое состояние пространства, содержащего систему сферических полостей или включений // Новосиб. ин-т инж. ж.-д. транспорта. - 1977. – 19 с. - Деп. в ВИНТИ. №3266 - 77. 4. Олегин И. П. Осесимметричное напряжённое состояние в трансверсально-изотропной упругой среде с двумя жесткими эллипсоидальными включениями // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. - Т. V, № 1(9). – С. 127 - 132. 5. Олегин И. П. Решение пространственной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного тела, содержащего периодическую систему эллипсоидальных полостей // Сибирский журнал индустриальной математики. – 1999. - Т. II, № 1. – С. 117 - 122. 6. Гаришин О. К., Комар Л. А. Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2003. - Т. 9, № 3. – С. 278 – 286. 7. Капишевский А. А., Копытца Н. П., Ломонос Л. Н. Осесимметричное напряжённое состояние шара с неконцентрической шаровой полостью // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. - №9. – С. 50 - 55. 8. Ломонос Л. Н., Первая основная задача об осесимметричном напряжённом состоянии пространства с двумя сферическими полостями // Мат. физика и нелинейная механика. – 1990. - №13. – С. 51 - 56. 9. Tsuchida E. On the axisymmetric problem of elasticity theory for an infinite elastic solid containing two spherical inclusions / E. Tsuchida, I. Nakahara, M. Kodama // Bull. JSME. – 1980. – V. 23, №181. – С. 1072 - 1080. 10. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – 2009. - Т. 2 (58). - С. 48 - 58. 11. Николаев А. Г., Танчик Е. А. Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // Вестн. Харьк. Нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. - 2010. - Т. 922. - С. 4 - 19. 12. Николаев А. Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе. - Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. - Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, № 1178 - Ук 93.

Поступила в редколлегию 27.02.2014

---

УДК 539.3

**Напряжённое состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – №6 (1049). – С. 150 – 160. Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2222-0631.**

Досліджується напружений стан пружного пористого матеріалу, в якому пори моделюються чотирма сфероїдальними порожнинами, центри яких розташовані у вершинах квадрата. Матеріал знаходиться під дією одноосного або двоосного розтягування, прикладеного на нескінченності, а пори вільні від навантаження. Поле переміщень будується за допомогою узагальненого методу Фур'є. Наведено чисельний аналіз розподілу напружень на лініях, що з'єднують центри пор, залежно від геометричних параметрів задачі.

**Ключові слова:** узагальнений метод Фур'є, пористий матеріал, напружено-деформований стан, сфероїдальна порожнина, теореми додавання.

UDC 539.3

**Stress state of porous material in the domain between four spheroidal pores / A. G. Nikolaev, E. A. Tanchik // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – №6 (1049). – pp. 150 – 160. Bibliog.: 12 titles. – ISSN 2222-0631.**

Stress state of elastic porous material in which pores are modelled by four spheroidal cavities

whose centers are located in the corners of a square is investigated. The material is subjected to uniaxial or biaxial tension applied at the infinity, and the pores are free from load. Displacement field is constructed using the generalized Fourier method. The numerical analysis of the stress distribution on the lines connecting the centers of pores depending on the geometric parameters of the problem is carried out.

**Key words:** generalized Fourier method, porous material, the stress-strain state, spheroidal cavity, addition theorems.

УДК 534.1

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

### **ВБК – ПРИБЛИЖЕНИЕ В РАСЧЁТАХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ**

Методом ВБК построены приближённые формулы для вычисления амплитуд затухающих колебаний осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением. Проведено сравнение результатов, полученных без учёта реактивной силы с помощью предложенных формул и путём численного интегрирования исходного дифференциального уравнения движения. Подтверждена состоятельность ВБК – метода в рассматриваемом классе задач.

**Ключевые слова:** осциллятор, линейно-переменная масса, сухое трение, ВБК – метод.

**Введение.** В технике часто используют механизмы со звеньями, масса или жёсткость которых изменяется в процессе работы механизма. Динамическому расчёту таких механизмов посвящены монографии [1], [2], в которых рассматривали варианты монотонного (непериодического) изменения параметров звеньев во времени. Это направление исследований получило мощное развитие в общей теории механических колебаний [3], [4], [5], [6]. В этих публикациях разрабатывали и использовали различные, в первую очередь асимптотические, методы аналитического решения дифференциальных уравнений движения с переменными коэффициентами. В дополнение к ним, здесь предлагается для расчёта колебаний осциллятора переменных параметров использовать *ВБК–метод* [7], который давно распространён в физических исследованиях [8]. В механике этим методом решены различные задачи в [9], [10].

Целью данной статьи является вывод и апробация приближённых формул для расчёта амплитуд затухающих колебаний системы с одной степенью свободы при действии силы сухого трения.

Средством достижения цели выбран ВБК – метод. Аналогично [1], далее различаем варианты силы трения с постоянной амплитудой и с амплитудой, пропорциональной массе осциллятора.

**Колебания при действии силы трения постоянной величины.** Их описываем дифференциальным уравнением

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -F_T \text{sign}(\dot{x}). \quad (1)$$

Здесь  $m_0$  – начальная масса осциллятора;  $\delta$  – скорость изменения массы во времени  $t$ ;  $F_T$  – сила трения;  $x = x(t)$  – перемещение осциллятора вдоль координатной оси  $Ox$ , показанной на рис. 1;  $c$  – коэффициент жёсткости пружины; точкой над  $x$  обозначены производные по  $t$ .



Рис. 1 – Расчётная схема.

Уравнение (1) дополняем начальными условиями

$$x(0) = x_0 < 0; \dot{x}(0) = 0, \quad (2)$$

то есть рассматриваем движение, вызванное начальным отклонением  $x_0$ , таким что

$$c|x_0| > F_T.$$

Во время первого размаха, в выбранной системе отсчёта,  $\dot{x} > 0$ , поэтому уравнение (1) принимает вид

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -F_T. \quad (3)$$

Его частным решением есть

$$x_r = -F_T / c. \quad (4)$$

Однородное уравнение, соответствующее (3), решаем приближённо методом ВБК [9], его представляем суммой

$$x_0(t) = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{1/2} [a_1 \cos(\eta - \eta_0) + a_2 \sin(\eta - \eta_0)], \quad (5)$$

в которой  $\eta_0 = \frac{2}{|\delta|} \sqrt{cm_0}$ ;  $\eta = \eta_0 \sqrt{1 + \frac{\delta t}{m_0}}$ ;  $a_1, a_2$  – произвольные множители.

Постоянные  $a_1$  и  $a_2$ , в общем решении уравнения (1)

$$x(t) = x_0(t) + x_r,$$

находим, удовлетворяя начальным условиям (2). Учитывая (4) и (5), получаем

$$x(t) = \left(x_0 + \frac{F_T}{c}\right) \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{1/2} \left[ \cos(\eta - \eta_0) - \frac{1}{2\eta_0} \sin(\eta - \eta_0) \right] - \frac{F_T}{c}; \quad (6)$$

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{x_0 + F_T c^{-1}}{2\sqrt{\eta_0 \eta}} \left[ \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0}\right) \cos(\eta - \eta_0) - \left(2\eta + \frac{1}{2\eta_0}\right) \sin(\eta - \eta_0) \right].$$

Во время остановки в конце первого размаха  $dx/d\eta = 0$ . Для вычисления времени остановки, согласно (6), следует найти наименьший положительный корень  $\eta = \eta_1$  трансцендентного уравнения

$$\left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_0}\right) \cos(\eta_1 - \eta_0) - \left(2\eta_1 + \frac{1}{2\eta_0}\right) \sin(\eta_1 - \eta_0) = 0. \quad (7)$$

Определяя этот корень приближённо, принимаем, что

$$\eta_1 - \eta_0 = \pi_* + \varepsilon_1, \quad (8)$$

причём  $\varepsilon_1 \ll 1$ ;  $\pi_* = \pi \operatorname{sign}(\delta)$ .

При малом значении  $\varepsilon_1$ :

$$\cos(\eta_1 - \eta_0) \approx -1; \quad \sin(\eta_1 - \eta_0) \approx -\varepsilon_1. \quad (9)$$

Подставив (9) в (7), после отбрасывания слагаемых степени  $\varepsilon_1^2$  и выше, получаем линейное уравнение относительно  $\varepsilon_1$ , из которого находим

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi_*}{2\eta_0^2 + 2\pi_*\eta_0 + 1,5}.$$

Далее, с помощью (6) и (9), определяем амплитуду колебаний  $|x_1|$  в конце первого размаха

$$|x_1| = \left(|x_0| - \frac{F_T}{c}\right) \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_0}} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{2\eta_0}\right) - \frac{F_T}{c}.$$

Обобщая это решение, приходим к формуле амплитуды колебаний в конце  $k$ -го размаха

$$|x_k| = \left(|x_{k-1}| - \frac{F_T}{c}\right) y_k - \frac{F_T}{c}. \quad (10)$$

$$\text{Здесь } y_k = \sqrt{\frac{\eta_k}{\eta_{k-1}}} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{2\eta_{k-1}}\right); \quad \varepsilon_k = -\frac{\pi_*}{2\eta_{k-1}^2 + 2\pi_*\eta_{k-1} + 1,5};$$

$$\eta_0 = \frac{2}{|\delta|} \sqrt{cm_0}; \quad \eta_1 = \eta_0 + \pi_* + \varepsilon_1; \quad \eta_k = \eta_{k-1} + \pi_* + \varepsilon_k.$$

Таким образом, расчёты амплитуд размахов по формуле (10) сводится к их последовательному вычислению:  $|x_1|, |x_2|, |x_3|, \dots$

Определение амплитуд несколько упрощается, если положить  $\varepsilon_k = 0$ . Тогда в формуле (10)

$$y_k = \left(1 + \frac{\pi_*}{\eta_0 + (k-1)\pi_*}\right)^{1/2}. \quad (11)$$

При  $\eta_{k-1} \gg \pi$  такое упрощение не вносит существенных погрешностей в расчёты.

В случае осциллятора постоянной массы ( $\delta \rightarrow 0; y_k \rightarrow 1$ ), формула (10) переходит в известное рекуррентное соотношение

$$|x_k| = |x_{k-1}| - \frac{2F_T}{c}.$$

Амплитуду  $|x_k|$  можно также выразить через начальное отклонение осциллятора  $|x_0|$ . Преобразовав (10), получаем

$$|x_k| = \left( |x_0| - \frac{F_T}{c} \right) \prod_{j=1}^k y_j - \frac{2F_T}{c} \Phi(y_k) - \frac{F_T}{c}. \quad (12)$$

Здесь

$$\Phi(y_1) = 0; \Phi(y_2) = y_2; \Phi(y_3) = (y_2 + 1)y_3; \Phi(y_4) = ((y_2 + 1)y_3 + 1)y_4;$$

$$\Phi(y_k) = (\Phi(y_{k-1}) + 1)y_k = \left( \left( \left( \left( (y_2 + 1)y_3 + 1 \right) y_4 + 1 \right) y_5 + \dots \right) + 1 \right) y_k.$$

Далее несложно вычислить начальное отклонение, при котором осциллятор переменной массы совершает  $k$  размахов. Такое отклонение равно

$$|x_0| = \frac{F_T}{c} \left\{ \frac{2}{\prod_{j=1}^k y_j} [\Phi(y_k) + 1] + 1 \right\}. \quad (13)$$

В случае осциллятора постоянных параметров:

$$y_j = 1; \prod_{j=1}^k y_j = 1; \Phi(y_k) = k - 1$$

и формула (13) переходит в известное выражение

$$|x_0| = \frac{F_T}{c} (2k + 1).$$

Расчёт по формуле (13) существенно упрощается, если для вычисления  $y_k$  применять (11).

Таблица 1 – Амплитуды колебаний осцилляторов возрастающей и убывающей массы при  $F_T = const$

$k$	значения $100 x_k $ , м, при $\delta \geq 0$			значения $100 x_k $ , м, при $\delta < 0$	
	$\delta = 0$	$\delta = 1,5$ кг/с	$\delta = 2$ кг/с	$\delta = -1,5$ кг/с	$\delta = -2$ кг/с
1	5,550	5,639	5,669	5,459	5,429
2	4,950	5,118	5,173	4,777	4,718
3	4,350	4,587	4,665	4,103	4,019
4	3,750	4,047	4,143	3,438	3,331
5	3,150	3,498	3,610	2,783	2,656
6	2,550	2,940	3,066	2,137	1,994
7	1,950	2,374	2,511	1,503	1,348
8	1,350	1,800	1,946	0,879	0,717
9	0,750	1,219	1,371	0,267	0,104
10	0,150	0,630	0,787	–	–
11	–	0,337	0,194	–	–



Используя (12), рассмотрим убывание амплитуд колебаний, когда  $m_0 = 3 \text{ кг}$ ;  $c = 1962 \text{ Н/м}$ ;  $F_T = 5,886 \text{ Н}$ ;  $|x_0| = 0,0615 \text{ м}$ ; а  $\delta = \pm 1,5$  или  $\pm 2 \text{ кг/с}$ . Вычисленные по (12) значения  $|x_k|$  записаны в табл. 1.

Цифры 1, 2 на рис. 2 соответствуют значениям  $\delta = 1,5; 2 \text{ кг/с}$ , а на рис. 3 –  $\delta = -1,5; -2 \text{ кг/с}$ .

Если при указанных исходных данных осциллятор постоянных параметров совершит 10 размахов, то в осцилляторе возрастающей массы их будет больше, а у осциллятора убывающей массы – меньше. Это согласуется с графиками перемещений осциллятора, представленными на рис. 2 и рис. 3.

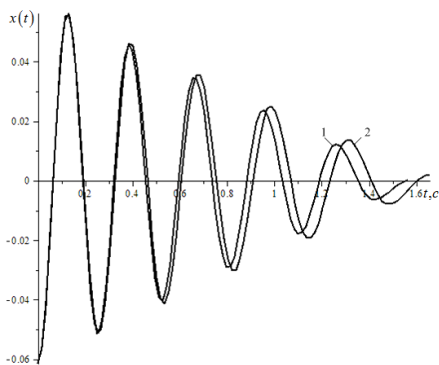


Рис. 2 – Перемещения осциллятора при возрастании массы

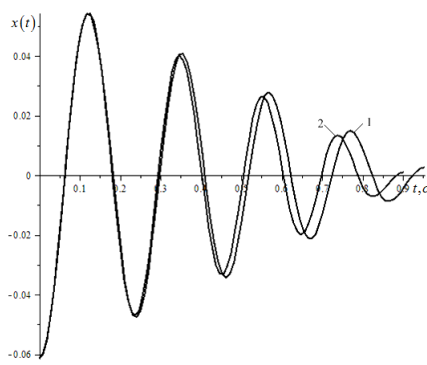


Рис. 3 – Перемещения осциллятора при убывании массы.

Графики  $x(t)$  при указанных выше исходных данных получены численным интегрированием уравнения (1).

Таблица 2 – Значения начального отклонения  $|x_0|$  при разных  $k$  и  $\delta$

$k$	значения $100 x_k $ , м, при $\delta > 0$			$100 x_k $ , м, при $\delta < 0$	
	$\delta = 0 \text{ кг/с}$	$\delta = 1 \text{ кг/с}$	$\delta = 2 \text{ кг/с}$	$\delta = -1 \text{ кг/с}$	$\delta = -2 \text{ кг/с}$
5	3,300	3,213	3,134	3,398	3,508
6	3,900	3,779	3,672	4,038	4,199
7	4,500	4,340	4,201	4,687	4,910
8	5,100	4,896	4,721	5,341	5,641
9	5,700	5,448	5,234	6,007	6,396
10	6,300	5,994	5,740	6,680	7,177
11	6,900	6,536	6,238	7,362	7,987
12	7,500	7,074	6,729	8,052	8,828

В табл. 2 записаны начальные отклонения  $|x_0|$ , при которых осциллятор совершает заданное количество размахов  $k$ . Расчёты проведены по формуле (13). Вычисления показывают, что заданное число размахов осциллятор воз-

растающей массы совершает при меньшем значении  $|x_0|$ , чем осциллятор убывающей массы.

**Колебания осциллятора при действии силы трения, пропорциональной переменной массе.** Их моделируем дифференциальным уравнением

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -fg(m_0 + \delta t)\text{sign}(\dot{x}), \quad (14)$$

при начальных условиях (2).

В (14)  $f$  – коэффициент трения скольжения;  $g$  – ускорение свободного падения.

При движении во время первого размаха, вызванным начальным отклонением  $x_0 < 0$ , производная  $\dot{x} > 0$ , и вместо (14) решаем уравнение

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -fg(m_0 + \delta t). \quad (15)$$

Частным решением (15) является

$$x_r = -\frac{fg}{c\lambda^2}\eta^2, \quad \lambda = \frac{2}{|\delta|}\sqrt{c},$$

что, совместно с (5), приводит к общему решению

$$x(t) = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{1/2} [a_1 \cos(\eta - \eta_0) + b_1 \sin(\eta - \eta_0)] - \frac{fg}{c\lambda^2}\eta^2. \quad (16)$$

Его производная равна

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{1}{2\sqrt{\eta\eta_0}} [(a_1 + 2\eta b_1) \cos(\eta - \eta_0) + (b_1 - 2\eta a_1) \sin(\eta - \eta_0)] - 2\frac{fg}{c\lambda^2}\eta. \quad (17)$$

Подставив (16) и (17) в (2), находим произвольные постоянные  $a_1$  и  $b_1$ :

$$a_1 = x_0 + \frac{fgm_0}{c}; \quad b_1 = \frac{1}{2\eta_0} \left( \frac{3fgm_0}{c} - x_0 \right).$$

Из (17) следует, что для вычисления времени остановки в конце первого размаха нужно найти наименьший положительный корень  $\eta = \eta_1$  трансцендентного уравнения

$$(a_1 + 2\eta_1 b_1) \cos(\eta_1 - \eta_0) + (b_1 - 2\eta_1 a_1) \sin(\eta_1 - \eta_0) = \frac{4fgm_0}{c} \left( \frac{\eta_1}{\eta_0} \right)^{3/2}. \quad (18)$$

Этот корень представляем суммой

$$\eta_1 = \eta_0 + \pi_* + s_1. \quad (19)$$

Считая малым параметр  $s_1$ , вводим приближения:

$$\cos(\eta - \eta_0) \approx -1; \quad \sin(\eta - \eta_0) \approx -s_1. \quad (20)$$

Подставив (19) и (20) в (18), после отбрасывания слагаемых высшего порядка малости, получаем линейное уравнение, из которого находим

$$s_1 = -\frac{a_1 + 2b_1(\eta_0 + \pi_*) + A_1}{3b_1 - 2a_1(\eta_0 + \pi_*) + 1,5\frac{A_1}{\eta_0 + \pi_*}}. \quad (21)$$

$$\text{Здесь } A_1 = \frac{4fgm_0}{c} \left(1 + \frac{\pi_*}{\eta_0}\right)^{3/2}.$$

Далее подставив (19) и (20) в (16), с учётом (21), выводим формулу отклонения осциллятора в конце первого размаха:

$$|x_1| = \left(1 + \frac{\pi_* + s_1}{\eta_0}\right)^{1/2} \left[|x_0| - \frac{fgm_0}{c} - \frac{s_1}{2\eta_0} \left(\frac{3fgm_0}{c} + |x_0|\right)\right] - \frac{fgm_0}{c} \left(1 + \frac{\pi_* + s_1}{\eta_0}\right)^2.$$

Обобщая это решение, для вычисления амплитудного отклонения  $|x_k|$ , в конце  $k$ -го размаха, получаем рекуррентное соотношение

$$|x_k| = \left(1 + \frac{\pi_* + s_k}{\eta_{k-1}}\right) \left[|x_{k-1}| - \frac{fgm_{k-1}}{c} - \frac{s_k}{2\eta_{k-1}} \left(\frac{3fgm_{k-1}}{c} + |x_{k-1}|\right)\right] - \frac{fgm_{k-1}}{c} \times \left(1 + \frac{\pi_* + s_k}{\eta_{k-1}}\right)^2. \quad (22)$$

$$\text{В нём } s_k = -\frac{a_k + 2b_k(\eta_{k-1} + \pi_*) + A_k}{3b_k - 2a_k(\eta_{k-1} + \pi_*) + 1,5\frac{A_k}{\eta_{k-1} + \pi_*}};$$

$$A_k = \frac{4fgm_{k-1}}{c} \left(1 + \frac{\pi_*}{\eta_{k-1}}\right)^{3/2}; \quad a_k = \frac{fgm_{k-1}}{c} - |x_{k-1}|; \quad b_k = \frac{1}{2\eta_{k-1}} \left(\frac{3fgm_{k-1}}{c} + |x_{k-1}|\right);$$

$$m_k = m_0 \left(\frac{\eta_k}{\eta_0}\right)^2; \quad \eta_0 = \frac{2}{|\delta|} \sqrt{cm_0}; \quad \eta_1 = \eta_0 + \pi_* + s_1, \dots, \quad \eta_k = \eta_{k-1} + \pi_* + s_k.$$

Используя изложенный алгоритм, по известным  $m_0, |x_0|$  и  $\eta_0$  на первом шаге ( $k=1$ ) надо последовательно вычислить  $a_1, b_1, A_1, s_1, \eta_1, m_1$  и  $|x_1|$ . На втором шаге ( $k=2$ ), зная  $m_1, |x_1|$  и  $\eta_1$ , следует найти  $a_2, b_2, A_2, s_2, \eta_2, m_2, |x_2|$  и в такой же последовательности реализовать следующие шаги.

Расчёт несколько упрощается, если положить  $s_k = 0$ . При таком упрощении:

$$|x_k| = \left(1 + \frac{\pi_*}{2\eta_{k-1}}\right) |x_{k-1}| - \frac{2fg}{c} \left(\frac{\eta_{k-1}}{\lambda}\right)^2 \left(1 + \frac{5}{4} \frac{\pi_*}{\eta_{k-1}}\right); \quad (23)$$

$$\eta_{k-1} = \eta_0 + (k-1)\pi_*.$$

Погрешности формулы (23) оказываются небольшими, когда в процессе расчёта  $\eta_k \gg \pi$ .

С целью апробации полученных формул, проведены вычисления  $|x_k|$

при  $m_0 = 3 \text{ кг}$ ;  $c = 1962 \text{ Н/м}$ ;  $f = 0,3$ ;  $|x_0| = 0,0615 \text{ м}$ ; и  $\delta = \pm 2,5 \text{ кг/с}$ . Результаты расчётов записаны в табл. 3.

Таблица 3 – Значения  $|x_k|$  вычисленные двумя способами

$k$	100 $ x_k $ , м, при $\delta = 2,5 \text{ кг/с}$		100 $ x_k $ , м, при $\delta = -2,5 \text{ кг/с}$	
	форм. (22)	форм. (23)		форм. (22)
1	5,347	5,350	5,147	5,150
2	4,420	4,425	4,250	4,256
3	3,364	3,371	3,453	3,461
4	2,174	2,181	2,750	2,760
5	0,845	0,852	2,137	2,148
6	0,618	0,623	1,606	1,619
7	–	–	1,153	1,167
8	–	–	0,773	0,786
9	–	–	0,459	0,473
10	–	–	0,207	0,219
11	–	–	0,125	0,022

В целом расхождения результатов расчёта по формулам (22) и (23) небольшие, за исключением малых амплитуд колебаний осциллятора убывающей массы.

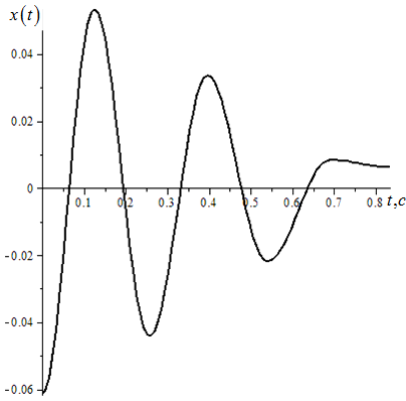


Рис. 4 – Перемещения осциллятора при возрастании массы.

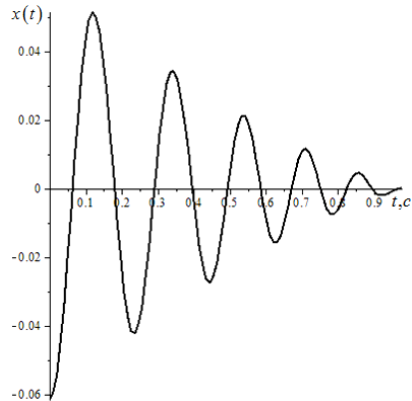


Рис. 5 – Перемещения осциллятора при убывании массы.

Анализ чисел в табл. 3 показывает, что при возрастании массы колебания затухают более быстро, чем при её убывании. В случае возрастания массы количество размахов вибратора до полной остановки равно шести. Это меньше, чем в случае убывания массы, что объясняется возрастанием силы трения с увеличением массы.

Число размахов  $n_*$  осциллятора постоянных параметров легко определить по приближённой формуле

$$n_* \approx \text{целая часть} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{cx_0}{fm_0g} + 0,999999 \right) \right]$$

и для принятых числовых данных  $n_* = 7$ . Как видим, при возрастании массы осциллятора число размахов меньше  $n_*$ , а при убывании массы их больше  $n_*$ .

На рис. 4 и 5 показаны графики  $x(t)$ , полученные численным интегрированием уравнения (1) для указанных выше исходных данных. Сопоставление амплитуд колебаний, представленных в табл. 3 и на рис. 4 и 5, позволяет сделать вывод о хорошем согласовании результатов расчёта двумя методами. ВБК – метод приводит к достаточно точным расчётным формулам.

**Выводы.** Применение ВБК–метода позволило, не прибегая к специальным функциям, построить приближённые формулы для расчёта амплитуд затухающих колебаний осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением. Сравнение с результатами численного интегрирования исходного нелинейного дифференциального уравнения подтвердило хорошую точность ВБК – приближения.

**Список литературы:** 1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов – М.: Наука, 1967. – 267 с. 2. *Sveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Sveticanin. Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p. 3. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю.А. Митропольский. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 283 с. 4. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. / А.П. Филиппов. – М. Машиностроение, 1970. – 736 с. 5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974 – 504 с. 6. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с. 7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с. 8. Фреман Н. ВБК – приближение / Н. Фреман, П.У. Фреман. – М.: Мир, 1967. – 166 с. 9. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Адрианов. – М. Машиностроение, 1991. – 416 с. 10. Найфэ А. Методы возмущений / А. Найфэ – М.: Мир, 1984. – 456 с.

*Поступила в редколлегию 10.01.2014*

УДК 534.1

**ВБК – приближение в расчётах колебаний осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технології. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 160 – 169. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.**

Методом ВБК побудовано наближені формули для обчислення амплітуд затухаючих коливань осцилятора лінійно-змінної маси з сухим тертям. Проведено порівняння результатів, отриманих без урахування реактивної сили за допомогою запропонованих формул і шляхом числового інтегрування вихідного диференціального рівняння руху. Підтверджено спроможність ВБК – метода в розглянутому класі задач.

**Ключові слова:** осцилятор, лінійно-змінна маса, сухе тертя, ВБК - метод.

UDC 534.1

**WBK – approximation for calculation of linearly variable mass oscillator with dry friction / V. P. Olshanskii, S. V. Olshanskii // Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series:**

Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 160 – 169. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

The WBK-method was used to derive approximate formula for calculating amplitudes of a damped linearly variable mass oscillator with dry friction. The results obtained using the proposed formulas while ignoring the reactive power and those of numerical integration of the original differential equations of motion were compared. Consistency of the WBK-method for this class of problems was confirmed.

**Key words:** an oscillator, linear-variable mass, dry friction, WBK – method.

УДК 621.43.013.6

**В.В. ПИЛЬОВ**, аспірант, НТУ «ХПІ»

## **УДОСКОНАЛЕННЯ ОПИСУ ЗНОСУ ПАЛИВНИХ СТРУМЕНІВ ТАНГЕНЦІЙНИМ ВИХОРОМ РОБОЧОГО ТІЛА В ОБ'ЄМІ КАМЕРИ ЗГОРЯННЯ ДИЗЕЛЯ**

Запропоновано вдосконалення способу врахування вихоревого руху робочого тіла в камері згоряння дизеля у відомій моделі робочого процесу проф. М. Ф. Розлейцева. Досягнуто уточнення траєкторій руху вершин паливних струменів, часу досягнення ними стінки камери згоряння, точок їх контакту з останньою.

**Ключові слова:** двигун внутрішнього згоряння, моделювання робочого процесу дизеля, вихор робочого тіла, камера згоряння дизеля, розвиток паливного струменя, деформація траєкторії, точка контакту струменю зі стінкою

**Постановка проблеми.** Якість протікання робочого процесу двигуна внутрішнього згоряння у значній мірі впливає на показники його економічності та екологічності. В свою чергу, одним із важливих факторів, що зумовлюють вигляд характеристики випаровування палива у камері згоряння, а через неї тепловиділення та робочого процесу в цілому, виступає динаміка паливних факелів. При застосуванні частково-динамічної теплоізоляції поверхні поршнів, за умов об'ємно плівкового сумішоутворення, особливого значення набувають час досягнення паливними струменями стінки та геометрія утвореної на ній паливної плівки. Для їх визначення, наряду з впорскуванням палива та розвитком паливного струменя у стисненому середовищі, повинно здійснюватись моделювання зносу струменя вихором робочого тіла.

**Аналіз публікацій.** Серед нульвимірних математичних моделей робочого процесу дизеля, через свою достатню для практичних цілей точність при збереженні мінімальної ресурсоемності розрахункових досліджень, широко застосування набула модель, запропонована проф. М.Ф. Розлейцевим.

При сучасному стані її розвитку вплив вихору на розвиток паливних струменів у об'ємі камери згоряння здійснюється згідно наступних рівнянь [1, с. 29 – 30; 2, с. 57]. Тут швидкість тангенційного руху робочого тіла в то-

щі  $s$  – вершині паливного струменя визначається за формулою:

$$W_t = \chi H \pi n R / 30,$$

де  $\chi$  – ступінь затухання вихору;  $H$  – вихрове відношення (кутових швидкостей обертання робочого тіла та колінчастого вала);  $n$  – частота обертання колінчастого вала;  $R$  – радіус циліндру.

Прирошення швидкості вершини струменя у напрямі, нормальному осі розпилюючого отвору становитиме

$$dU_t/d\tau = A \cdot W_t^{1,5}; \quad A \approx C_0 \cdot 0,75 \cdot (\rho_B/\rho_f) \cdot (\nu^{0,5}/d_{32}^{1,5}),$$

де  $C_0 = 1...5$  – емпіричний коефіцієнт, який враховує відмінність поведінки окремих крапель від таких, що знаходяться у складі струменя;  $\rho_B, \rho_f$  – густина повітря та палива;  $\nu$  – кінематична в'язкість робочого тіла;  $d_{32}$  – *діаметр крапель Заутера*;

Сумарний знос вершини струменя визначається так:

$$y = \sum_{r=0}^{R=R_W} U_t \Delta \tau \cos \beta,$$

де  $R_W$  – радіус камери згоряння (КЗ);  $\Delta \tau$  – розрахунковий часовий крок;  $\beta$  – проекція кута між віссю розпилюючого отвору та нормаллю до стінки камери згоряння на горизонтальну площину.

Вплив вихору на розвиток паливної плівки на стінці здійснюється або аналогічним чином [1, с. 30], або шляхом визначення емпіричних коефіцієнтів  $K_j$  відносної зміни довжини півосей при розтіканні овальної плями [2, с. 55 – 56], які у загальному вигляді залежать від кута приходу паливного струменя на поверхню стінки камери згоряння. Його проекції на горизонтальну площину визначені як

$$\gamma_{3,4} = \pi/2 \mp \arcsin(U_{TW}/U_{KW}),$$

де  $U_{TW}, U_{KW}$  – тангенційна та осьова складові швидкості точки  $s$  при досягненні нею радіусу  $R_W$ .

Ця модель не дозволяє визначити зміщення вихором точок контакту струменів зі стінкою з достатньою точністю та видає однаковий час розвитку для всіх однотипних струменів. На цій основі **метою** роботи є її відповідне вдосконалення.

**Розробка математичної моделі.** Вкажемо на недоліки у записі приведеної моделі, та розкриємо запропоновані зміни у ній.

1. Вплив зі сторони вихору на паливний факел повинен здійснюватись не з локальною швидкістю руху робочого тіла  $\vec{W}_t$ , а із відповідною швидкістю відносно вершини струменя  $\vec{W}_r = \vec{W}_t - \vec{V}$ , де  $\vec{V}$  – вектор повної швидкості точки  $s$ . У цьому випадку, швидкість крапель палива за умови тривалого впливу вихору буде прагнути до швидкості останнього. Тобто струмінь зага-

льмується у повітряному середовищі, в той час, як згідно базової моделі пришвидшуватиметься необмежено.

Як і в базовій моделі нами враховується лише горизонтальна складова зносу, перпендикулярна осі струменя. Осьова складова не може бути врахована, оскільки при зміщеному розташуванні форсунки, зважаючи на зміну швидкості впорскування, кожна порція крапель буде мати відмінну траєкторію, тобто відбудеться зруйнування струменя вихором. Можна висунути припущення, що в реальному фізичному процесі повному зруйнуванню буде частково протидіяти течія робочого тіла, викликана рухом самого струменя. Через неможливість врахування цього та інших можливих ефектів без суттєвої переробки моделі, ми вважаємо осьовий знос вже врахованим у напівемпіричному законі руху точки  $s$  в напрямку осі розпилюючого отвору із відповідним впливом на коефіцієнти. Врахування складової зносу викликаної тангенційним вихором вздовж перпендикулярної струменю осі у вертикальній площині позбавлено сенсу, оскільки не враховується дія вертикальної складових вихорю, від якої слід очікувати в кілька разів більший ефект.

2. Незважаючи на знехтування вказаними складовими зносу, лобовий супротив прирощення швидкості вершини струменя повинен бути визначеним як функція від повної відносної швидкості  $\bar{c}_w(\bar{W}_r)$ , оскільки проекція цього вектору на перпендикулярну струменю горизонтальну вісь  $\bar{c}_{tw}(\bar{W}_r)$  не дорівнює значенню функції спротиву від проекції відносної швидкості  $\bar{c}_w(\bar{W}_{tr})$ .

3. Визначення відносної швидкості  $\bar{W}_r$  на кожному розрахунковому кроці повинно здійснюватись для точок траєкторії вершини струменя з урахуванням попередньої деформації вихором.

4. З огляду на вказану деформованість траєкторії, змінюються час руху і шлях струменя до стінки. Відповідна перевірка має виконуватись на кожному розрахунковому кроці, додатково враховуючи профіль гребеня поршня та переміщення останнього.

Нижче приведено вигляд запропонованих рівнянь руху довільного паливного струменя.

Декартові координати вершини паливного струменя (точки  $s$ ) подано у правій системі відліку з початком на осі циліндру, вісь  $x$  спрямовано горизонтально, проходячи крізь точку  $p$  перетину осей розпилюючих отворів,  $z$  – вздовж осі циліндру донизу:

$$x(\tau) = l_s(\tau) \cos \gamma_g \cos \gamma_v - l_t(\tau) \sin \gamma_g + x_{s0}; \quad (1)$$

$$y(\tau) = l_s(\tau) \sin \gamma_g \cos \gamma_v - l_t(\tau) \cos \gamma_g; \quad (2)$$

$$z(\tau) = l_s(\tau) \sin \gamma_v, \quad (3)$$

де  $l_s(\tau)$ ,  $l_t(\tau)$  – переміщення точки  $s$  вздовж осі розпилюючого отвору та перпендикулярно їй;  $\gamma_v$  – кут нахилу осі розпилюючого отвору до горизонтальної площини;  $\gamma_g$  – проекція на цю площину кута між осями отвору та  $x$ ;



$x_{s0}$  – відстань від точки  $p$  до осі циліндру.

Полярні координати точки  $s$  :

$$R(\tau) = \sqrt{x^2(\tau) + y^2(\tau)} ; \quad (5)$$

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \arctg y(\tau)/x(\tau) + \pi, & x(\tau) < 0, \\ y(\tau)/|y(\tau)| \cdot \pi/2, & x(\tau) = 0, \\ \arctg y(\tau)/x(\tau), & x(\tau) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Кут між напрямком дії вихору та проекцією осі розпилюючого отвору на горизонтальну площину становитиме:

$$\beta(\tau) = \varphi(\tau) - \gamma_g + \pi/2 . \quad (7)$$

Швидкість тангенційного руху робочого тіла в точці  $s$  є наступною:

$$W_t(\tau) = \chi(\tau) H \pi n R(\tau) / 30 . \quad (8)$$

Повна швидкість переміщення вершини струменя дорівнює

$$V(\tau) = \sqrt{U_s^2(\tau) + U_t^2(\tau)} , \quad (9)$$

де  $U_s(\tau)$  – осьова швидкість переміщення вершини струменя.

Швидкість руху робочого тіла відносно точки  $s$  визначається за формулою:

$$W_r(\tau) = \sqrt{(W_t(\tau) \cos \beta(\tau) - U_s(\tau) \cos \gamma_v)^2 + (W_t(\tau) \sin \beta(\tau) - U_t(\tau))^2 + U_s^2(\tau) \sin^2 \gamma_v} . \quad (10)$$

Коефіцієнт лобового опору руху для крапель у струмені, з урахуванням їх взаємодії, згідно [3, с. 115],

$$c_w(Re, \tau) \approx \frac{24}{Re(\tau)} \left( 1 + 0,15 Re(\tau)^{0,687} \right) , \quad (11)$$

де число Рейнольдса для сферичної краплі:

$$Re(\tau) = W_r(\tau) d_{32} / \mu . \quad (12)$$

Прирощення швидкості вершини факелу, що відбулося б за умови врахування всіх складових від дії тангенційного вихору і лише від нього, становитиме

$$\Delta(\tau) = \frac{3 \rho_B}{4 \rho_f} \frac{W_r^2(\tau)}{d_{32}} c_w(Re, \tau) . \quad (13)$$

Складова цього прирощення у напрямку, перпендикулярному осі розпилюючого отвору в горизонтальній площині,

$$\frac{dU_t(\tau)}{d\tau} = \frac{W_t(\tau) \sin \beta(\tau) - U_t(\tau)}{W_r(\tau)} \Delta(\tau) . \quad (14)$$

Прирощення переміщення в цьому напрямку дорівнює

$$\frac{dl_t(\tau)}{d\tau} = U_t(\tau) . \quad (15)$$

Проекція кута відхилення швидкості точки  $s$  від осі розпилюючого

отвору на горизонтальну площину визначається за формулою:

$$\psi(\tau) = \arcsin U_t(\tau)/V(\tau), \quad (16)$$

а проекція кута відхилення швидкості точки  $s$  від нормалі до стінки КЗ на горизонтальну площину – за формулою:

$$\beta_r(\tau) = \pi/2 + \psi(\tau) - \beta(\tau). \quad (17)$$

**Результати досліджень.** Достовірність моделі було перевірено на прикладі робочого процесу двигуна 4ЧН12/14 на номінальному режимі його роботи ( $N_e = 100$  кВт,  $n = 2000$  хв<sup>-1</sup>). При цьому залежність  $\chi(\tau)$  є невідомою і приймалася незмінно дорівнюючою одиниці. На рис. 1 приведено розрахова-

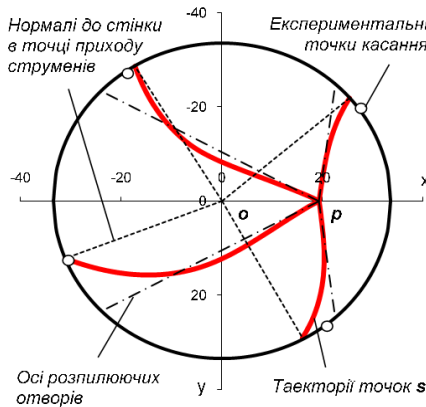


Рис. 1 – Знос паливних струменів вихором робочого тіла.

ні траєкторії переміщення точки  $s$  для чотирьох паливних струменів цього двигуна. Точки їх контакту зі стінкою збігаються з визначеними експериментально, поданими на рис. 2, із задовільною точністю.

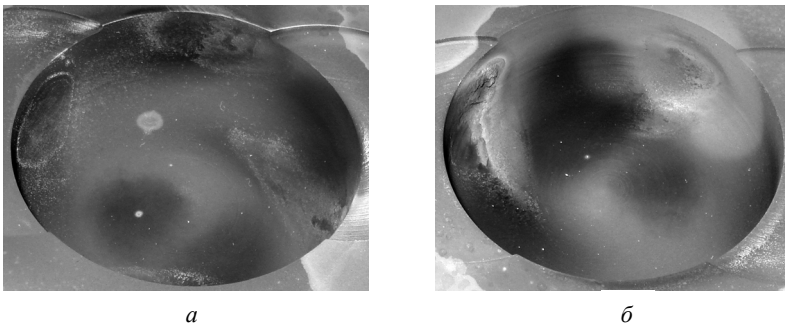


Рис. 2 – Експериментальні точки контакту струменів зі стінкою:  
а – довгих; б – коротких.

Також було отримано відмінні значення часу розвитку однотипних струменів до стінки камери згоряння. Для довгих струменів розрахована різниця становить 3, а для коротких – 4 градуса повороту колінного валу.

Слід відзначити, що зміна кута падіння палива на стінку призвела до отримання рядом коефіцієнтів  $K_j$  форми паливної плівки від'ємних значень, що пояснюється переміщенням всієї маси палива, яке підходить, у напрямку, протилежному тому, що описує відповідний коефіцієнт. Це явище не в повній мірі передбачено моделлю робочого процесу. Більш того, для верхнього короткого струменя (див. рис. 1), який приходить на стінку проти напрямку руху вихору, значення цих коефіцієнтів стали повністю хибними, вказуючи на продовження розвитку плівки в той же бік, коли експеримент засвідчує протилежне. Таким чином, опис паливної плівки за допомогою лише подібних коефіцієнтів є недостатнім, вплив вихору на рух елементарних порцій палива повинен враховуватись і після їх потрапляння на стінку.

**Висновки.** Запропоновано уточнення опису паливних струменів у моделі робочого процесу М. Ф. Разлейцева, яке полягає у врахуванні відносності швидкості вихору до руху вершин струменів та деформованості їх траєкторій. Це дозволяє точніше визначати час розвитку струменів та точки їх контакту зі стінкою, а так і кількість палива, що потрапило на неї.

**Подальший напрямок робіт** пов'язаний із удосконаленням частини математичної моделі, що описує розвиток паливної плівки по стінці під дією вихору, урахуванням його складової у вертикальній площині та згасання, викликаного взаємодією зі стінкою.

**Список літератури:** 1. Кулешов А.С. Программа расчета и оптимизации двигателей внутреннего сгорания ДИЗЕЛЬ-ПК. Описание математических моделей, решение оптимизационных задач – М.: МГТУ им. Баумана, 2004. – 123 с. 2. Сукачов І. І. Поліпшення паливної економічності форсованих дизелів шляхом узгодження характеристик вприскування палива та форми камери згоряння : дис. ... канд. техн. наук.: спец. 05.05.03 «Теплові двигуни» / Сукачов Іван Іванович. – Харків, 2005. – 233 с. 3. Ashgriz N. Handbook of Atomization and Sprays. / N. Ashgriz. – New-York : Springer Science+Business Media, LLC, 2011. – 490 p.

*Надійшла до редколегії 05.03.2014*

---

УДК 621.43.013.6

**Удосконалення опису зносу паливних струменів тангенційним вихором робочого тіла в об'ємі камери згоряння дизеля / В. В. Пильов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 6 (1049). – С. 169 – 175. Бібліогр.: 3 назв. – ISSN 2222-0631.**

Предложено усовершенствование способа учета вихревого движения рабочего тела в камере сгорания дизеля в известной модели рабочего процесса проф. Н. Ф. Разлейцева. Достигнуто уточнение траекторий движения вершин топливных струй, времени достижения ими стенки камеры сгорания, точек их контакта с последней.

**Ключевые слова:** двигатель внутреннего сгорания, моделирование рабочего процесса дизеля, вихрь рабочего тела, камера сгорания дизеля, развитие топливной струи, деформация траектории, точка контакта струи со стенкой.

**Improvement of the mathematical description of the fuel spray swirl drift in a diesel combustion chamber volume** / V. V. Pylyov // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 169 – 175. Bibliog.: 3 titles. – ISSN 2222-0631.

Improvement of the method of considering the cylinder charge swirl in the M. F. Rozleycey diesel working process model is proposed. The fuel spray front motion trajectories, the time of sprays reaching the combustion chamber wall and the points of these contacts are obtained with better precision.

**Key words:** internal combustion engine, diesel working process simulation, diesel combustion chamber, cylinder charge swirl, fuel spray propagation, trajectory deformation, spray and wall point of contact.

УДК 629.7.05

**Ю.А. ПЛАКСІЙ**, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

## ТРЬОХЧАСТОТНІ АНАЛІТИЧНІ ЕТАЛОННІ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

Запропонована нова аналітична еталонна модель обертання твердого тіла, основана на тригонометричному мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації. Показані можливості моделі для оцінювання точності алгоритмів визначення орієнтації в БІНС.

**Ключові слова:** кватерніон, орієнтація, еталонна модель, дрейф.

**Вступ і постановка задачі.** Розглядається задача оцінювання точності визначення орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) за допомогою спеціальних алгоритмів, орієнтованих на використання первинної інформації про обертання об'єкта на такті обчислень  $[t_{n-1}, t_n]$  у вигляді *квазікоординат* [1]

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта  $\vec{\omega}$  на зв'язані осі. Оскільки алгоритми визначення орієнтації в БІНС відтворюють цифровий образ інерціального трієдра осей в бортовому обчислювачі, тобто відіграють роль *аналітичної платформи* [2], питання отримання коректних оцінок точності цих алгоритмів і визначення найбільш ефективного алгоритму для кожного конкретного рухомого об'єкту, що може здійснювати певні обертальні рухи, є актуальною задачею.

Для алгоритму визначення орієнтації, що має порядок  $m$ , математична похибка на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  становить величину  $O(\theta_n^{*m+1})$ , де  $\theta_n^*$  – модуль век-

тора приросту позірного повороту  $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)^T$  на такті, компонентами якого є квазікоординати (1). Отримати аналітичний вираз для похибки  $O(\theta_n^{*m+1})$  у випадку довільного обертання об'єкта, як твердого тіла, не представляється можливим.

Провести порівняльний аналіз фактичної точності алгоритмів визначення орієнтації одного математичного порядку можна тільки за допомогою спеціальних *еталонних моделей обертання*, які можуть бути дискретними або неперервними [4]. Звичайно у якості неперервних еталонних моделей використовують випадки існуючих точних розв'язків сукупності динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла (*моделі кінцевого руху* [5, 6] та *регулярної прецесії* [7, 8]). У роботі [3] наведені аналітичні вирази для асимптотичних локальних похибок типу дрейфу та швидкості дрейфу деяких алгоритмів визначення орієнтації у випадку кінцевого обертання об'єкту. Отримані оцінки мають, насамперед, методологічне значення, але практична цінність їх для селекції алгоритмів визначення орієнтації у випадку довільного обертання об'єкта викликає певні сумніви. Проведений в [3] аналіз дозволив зробити висновок, що кінцевий рух не дозволяє виявити всі особливості похибок алгоритмів визначення орієнтації, тому кінцевий рух не може вважатися найгіршим випадком з точки зору точності методів. Раніше вважалося, що регулярна прецесія є найгіршим прикладом руху в сенсі поведінки похибок алгоритмів, але результати оцінювання алгоритмів на запропонованій в [9] новій неперервній еталонній моделі показують, що похибки алгоритмів типу дрейфу мають у випадку цієї моделі виражений зростаючий характер, в той час, як на моделі регулярної прецесії похибки цих алгоритмів типу дрейфу мають суто гармонічний характер.

Таким чином, використання моделей кінцевого руху та регулярної прецесії для оцінювання похибок і подальшої оптимізації алгоритмів визначення орієнтації не може вважатися цілком коректним, бо, по-перше, реальний рух об'єкта не завжди відповідає кінцевому руху або регулярній прецесії, по-друге, існує точний алгоритм визначення орієнтації в термінах квазікоординат у випадку регулярної прецесії [8].

Еталонна модель обертання твердого тіла цілком визначається прийнятими в ній аналітичними представленнями компонент *кватерніона орієнтації*

$$\Lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T \text{ в умовах } \|\Lambda(t)\| = 1.$$

Диференціюючи ці вирази і використовуючи *обернене кінематичне рівняння*, отримаємо аналітичні представлення для проєкцій вектора кутової швидкості у вигляді [9]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\dot{\lambda}_1 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_1 + \lambda_3 \dot{\lambda}_2 - \lambda_2 \dot{\lambda}_3); \\ \omega_2 &= 2(\dot{\lambda}_2 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_2 + \lambda_1 \dot{\lambda}_3 - \lambda_3 \dot{\lambda}_1); \\ \omega_3 &= 2(\dot{\lambda}_3 \lambda_0 - \dot{\lambda}_0 \lambda_3 + \lambda_2 \dot{\lambda}_1 - \lambda_1 \dot{\lambda}_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Квазікоординати (1) модельного руху при цьому визначаються також аналітично з формул:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

де  $\theta_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – компоненти вектора позірнього повороту  $\vec{\theta}(t) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt$ .

В даній роботі пропонуються нові неперервні моделі обертання твердого тіла, основані на тригонометричному мультиплікативному представленні модельного кватерніона орієнтації у вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \quad \lambda_{j_1}(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t);$$

$$\lambda_{j_2}(t) = \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t + \beta_3); \quad \lambda_{j_3}(t) = \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t + \beta_3), \quad (4)$$

де  $k_1, k_2, k_3, \beta_3$  – постійні параметри, а індекси  $j_1, j_2, j_3$  компонент векторної частини кватерніона  $\Lambda(t)$  утворюють деяку перестановку чисел (1, 2, 3).

Зауважимо, що вирази (4) узагальнюють представлення кватерніона еталонної моделі обертання, що наведена в [4]. Еталонні моделі обертання з представленням кватерніона орієнтації у вигляді (4) будемо називати *трьохчастотними* і позначати  $EM_{j_1, j_2, j_3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$ . У відповідності до кількості всіх можливих перестановок в (4) будемо мати 6 трьохчастотних еталонних моделей орієнтації. При  $\beta_3 = 0$  і основній перестановці індексів (1, 2, 3) в (4) будемо мати еталонну модель  $EM_{1,2,3}(k_1; k_2; k_3; 0)$ , яка описана в [4].

### **Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла.**

Всі можливі еталонні моделі  $EM_{j_1, j_2, j_3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$ , основані на представленні кватерніона орієнтації у вигляді (4), утворюють дві групи однотипних моделей. Першу групу однотипних моделей утворюють моделі з перестановками індексів  $j_1, j_2, j_3$ , що мають парну кількість інверсій в перестановках відносно основної перестановки, тобто моделі

$$EM_{1,2,3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3), \quad EM_{2,3,1}(k_1; k_2; k_3; \beta_3), \quad EM_{3,1,2}(k_1; k_2; k_3; \beta_3).$$

Для цієї групи моделей з (2) будемо мати наступні вирази для компонент вектора модельної кутової швидкості:

$$\omega_{j_1}(t) = (k_1 - k_3) + (k_1 + k_3) \cos(2k_2 t);$$

$$\omega_{j_2}(t) = 2k_2 \cos((k_1 - k_3)t - \beta_3) + (1/2)(k_1 + k_3)(\cos((2k_2 - k_1 + k_3)t + \beta_3) - \cos((2k_2 + k_1 - k_3)t - \beta_3));$$

$$\omega_{j_3}(t) = (1/2)(k_1 + k_3)(\sin((k_1 + 2k_2 - k_3)t - \beta_3) + \sin((2k_2 - k_1 + k_3)t + \beta_3)) - 2k_2 \sin((k_1 - k_3)t - \beta_3). \quad (5)$$

Компоненти вектора позірнього повороту  $\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t))^T$  при цьому визначаються формулами:

$$\begin{aligned}
\theta_{j_1}(t) &= (k_1 - k_3)t + (k_1 + k_3) \sin(2k_2 t) / (2k_2); \\
\theta_{j_2}(t) &= 2k_2 (\sin((k_1 - k_3)t - \beta_3) + \sin \beta_3) / (k_1 - k_3) + (1/2)(k_1 + k_3) \times \\
&\quad \times ((\sin((2k_2 - k_1 + k_3)t + \beta_3) - \sin \beta_3) / (2k_2 - k_1 + k_3) - \\
&\quad - (\sin((2k_2 + k_1 - k_3)t - \beta_3) + \sin \beta_3) / (2k_2 + k_1 - k_3)); \\
\theta_{j_3}(t) &= (-1/2)(k_1 + k_3) ((\cos((k_1 + 2k_2 - k_3)t - \beta_3) - \cos \beta_3) / (k_1 + 2k_2 - k_3) + \\
&\quad + (\cos((2k_2 - k_1 + k_3)t + \beta_3) - \cos \beta_3) / (2k_2 - k_1 + k_3)) + \\
&\quad + 2k_2 (\cos((k_1 - k_3)t - \beta_3) - \cos \beta_3) / (k_1 - k_3). \tag{6}
\end{aligned}$$

Якщо належним чином задати частоти  $k_1, k_2, k_3$  і фазу  $\beta_3$  в (4), то еталонна модель обертання  $EM_{j_1, j_2, j_3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$  представляється квазікоординатами (3), де компоненти вектора позірного повороту визначаються виразами (6), і відповідним до (3) точним кватерніоном орієнтації (4).

Другу групу однотипних моделей утворюють моделі з перестановками індексів  $s_1, s_2, s_3$  в кватерніоні орієнтації (4) з непарною кількістю інверсій відносно основної перестановки (1, 2, 3), тобто моделі

$$EM_{1,3,2}(k_1; k_2; k_3; \beta_3), EM_{3,2,1}(k_1; k_2; k_3; \beta_3), EM_{2,1,3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3).$$

Базовий кватерніон орієнтації для цієї групи моделей задається у вигляді

$$\begin{aligned}
\lambda_0(t) &= \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \quad \lambda_{s_1}(t) = \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \\
\lambda_{s_2}(t) &= \sin(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t + \beta_3); \quad \lambda_{s_3}(t) = \sin(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t + \beta_3). \tag{7}
\end{aligned}$$

Компоненти вектора модельної кутової швидкості у випадку кватерніона орієнтації (7) згідно (2) визначаються формулами

$$\begin{aligned}
\omega_{s_1}(t) &= (k_1 + k_3) + (k_1 - k_3) \cos(2k_2 t); \\
\omega_{s_2}(t) &= 2k_2 \sin((k_1 + k_3)t + \beta_3) + (1/2)(k_3 - k_1) \times \\
&\quad \times (\sin((2k_2 + k_1 + k_3)t + \beta_3) + \sin((2k_2 - k_1 - k_3)t - \beta_3)); \\
\omega_{s_3}(t) &= 2k_2 \cos((k_1 + k_3)t + \beta_3) + (1/2)(k_1 - k_3) \times \\
&\quad \times (\cos((2k_2 - k_1 - k_3)t - \beta_3) - \cos((2k_2 + k_1 + k_3)t + \beta_3)). \tag{8}
\end{aligned}$$

Інтегруючи вирази для  $\omega_{s_i}(t)$  на інтервалі  $[0, t]$ , отримаємо для компонент вектора позірного повороту  $\bar{\theta}(t)$  наступні вирази:

$$\begin{aligned}
\theta_{s_1}(t) &= (k_1 + k_3)t + (k_1 - k_3) \sin(2k_2 t) / (2k_2); \\
\theta_{s_2}(t) &= -2k_2 (\cos((k_1 + k_3)t + \beta_3) - \cos \beta_3) / (k_1 + k_3) - (1/2)(k_3 - k_1) \times \\
&\quad \times ((\cos((2k_2 + k_1 + k_3)t + \beta_3) - \cos \beta_3) / (2k_2 + k_1 + k_3) + \\
&\quad + (\cos((2k_2 - k_1 - k_3)t - \beta_3) - \cos \beta_3) / (2k_2 - k_1 - k_3)); \\
\theta_{s_3}(t) &= 2k_2 (\sin((k_1 + k_3)t + \beta_3) - \sin \beta_3) / (k_1 + k_3) + (1/2)(k_1 - k_3) \times \\
&\quad \times ((\sin((2k_2 - k_1 - k_3)t - \beta_3) - \sin \beta_3) / (2k_2 - k_1 - k_3) - \\
&\quad - (\sin((2k_2 + k_1 + k_3)t + \beta_3) - \sin \beta_3) / (2k_2 + k_1 + k_3)). \tag{9}
\end{aligned}$$

Еталонна модель другої групи  $EM_{s_1, s_2, s_3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$  реалізується формулами (3), (9) для квазікоординат і виразами для компонент модельного кватерніону орієнтації (7), якщо попередньо задати частоти  $k_1, k_2, k_3$  і фазу  $\beta_3$ .

Оскільки при побудові запропонованих еталонних моделей обертання були також отримані і представлення для компонент вектора модельної кутової швидкості, то ці моделі можна використовувати і у випадку первинної інформації про обертання у вигляді проекцій  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  вектора абсолютної кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі в моменти часу  $t_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

**Приклади конкретної реалізації моделі.** Побудуємо еталонну модель обертання  $EM_{1,2,3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$ , що належить до першої групи однотипних моделей, для деяких наборів частот  $k_1, k_2, k_3$  і фази  $\beta_3$ .

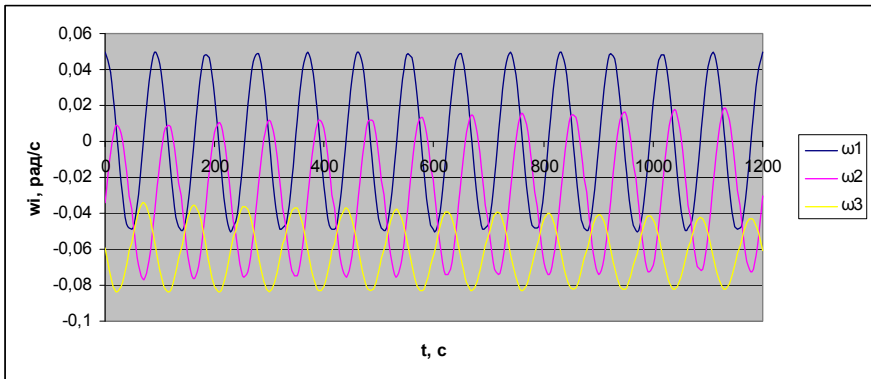


Рис. 1 – проекції вектора кутової швидкості моделі  $EM_{1,2,3}(0,025; -0,034; 0,0251; \pi/3)$ .

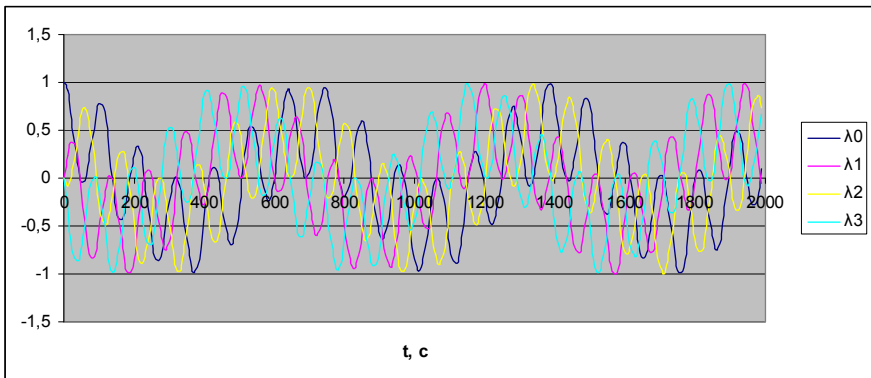


Рис. 2 – компоненти кватерніона орієнтації моделі  $E_{1,2,3}(0,025; -0,034; 0,0251; \pi/3)$ .

На рис. 1 представлені залежності проекцій вектора кутової швидкості модельного руху від часу при  $k_1 = 0,025$ ,  $k_2 = -0,034$ ,  $k_3 = 0,0251$  і



$\beta_3 = \pi/3$ . Відповідні залежності від часу компонент кватерніона орієнтації моделі наведені на рис. 2.

На рис. 3 представлені залежності проекцій вектора кутової швидкості від часу для моделі  $EM_{1,2,3}(0,005; 0,140; 0,024; \pi/3)$ . Компоненти модельного кватерніона орієнтації наведені на рис. 4.

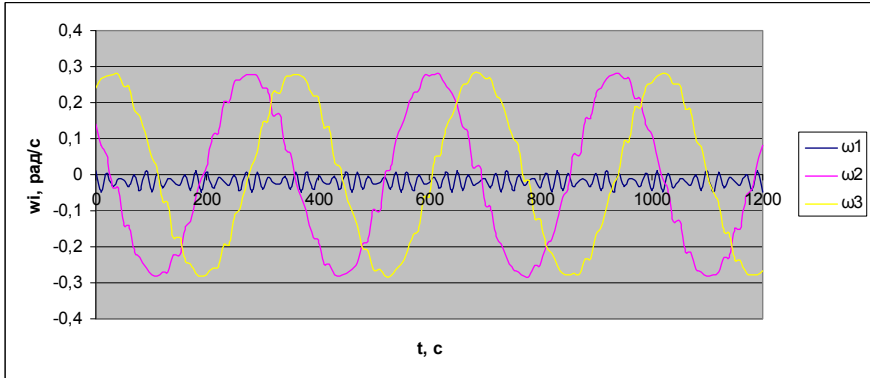


Рис. 3 – проекції вектора кутової швидкості моделі  $EM_{1,2,3}(0,005; 0,140; 0,024; \pi/3)$ .

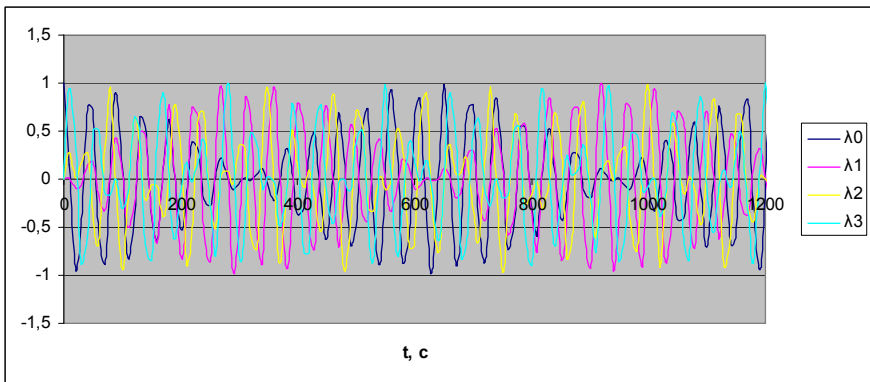


Рис. 4 – компоненти кватерніона орієнтації моделі  $EM_{1,2,3}(0,005; 0,140; 0,024; \pi/3)$ .

Розглянемо тепер еталонну модель другої групи однотипних моделей, а саме модель  $EM_{1,3,2}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$ . Побудуємо цю модель для деяких значень частот  $k_1, k_2, k_3$  і фази  $\beta_3$ . На рис. 5 показані залежності від часу проекцій вектора модельної кутової швидкості при  $k_1 = 0,0152$ ,  $k_2 = 0,025$ ,  $k_3 = 0,0151$  і  $\beta_3 = \pi/4$ . Кватерніон орієнтації для цієї моделі представлено на рис.6. За характером поведінки проекцій кутової швидкості і компонент

кватерніона орієнтації можна зробити висновок, що при вказаних значеннях параметрів модель  $EM_{1,3,2}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$  близька до регулярної прецесії. Компоненти кутової швидкості і кватерніона орієнтації моделі  $EM_{1,3,2}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$  при  $k_1 = -0,045$ ,  $k_2 = 0,0345$ ,  $k_3 = 0,025$ ,  $\beta_3 = \pi/2$  представлені на рис. 7 і рис. 8; вони описують обертальний рух, який більш складний, ніж регулярна прецесія.

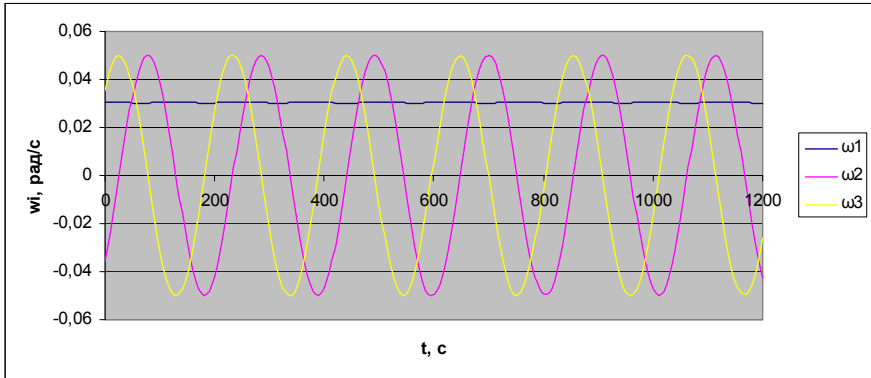


Рис. 5 – проєкції вектора кутової швидкості моделі  $EM_{1,3,2}(0,0152; 0,025; 0,0151; \pi/4)$ .

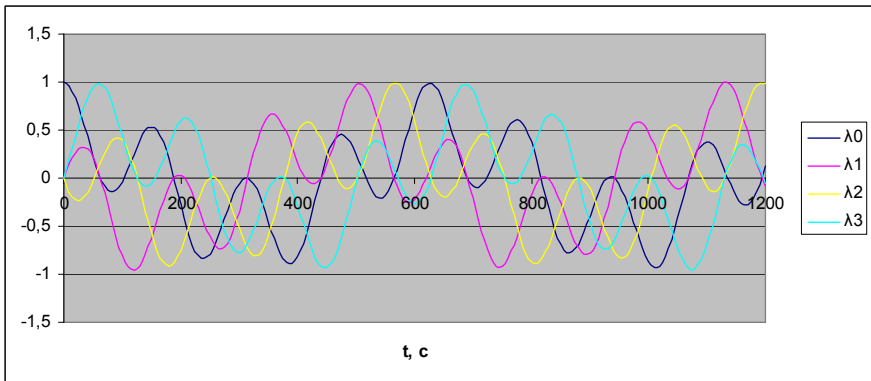


Рис. 6 – компоненти кватерніона орієнтації моделі  $EM_{1,3,2}(0,0152; 0,025; 0,0151; \pi/4)$ .

Аналіз результатів моделювання дозволяє зробити висновок, що запропонована трьохчастотна еталонна модель обертання, основана на тригонометричному мультиплікативному представленні кватерніона орієнтації, охоплює достатньо широкий спектр рухів об'єкта як твердого тіла.

**Застосування трьохчастотних еталонних моделей для оцінювання**

**похибок алгоритмів визначення орієнтації.** Проведемо оцінювання похибки типу дрейфу для алгоритму визначення орієнтації четвертого порядку, наведеного в [10]. На рис. 9 – 10 показані отримані в результаті чисельного експерименту залежності похибки типу дрейфу від часу для такту обчислень  $\Delta t = 0,1$  с у випадку моделі першої групи  $EM_{1,2,3}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$ , реалізованої при двох наборах параметрів  $k_1, k_2, k_3, \beta_3$ . Як видно з рис. 10, для значень

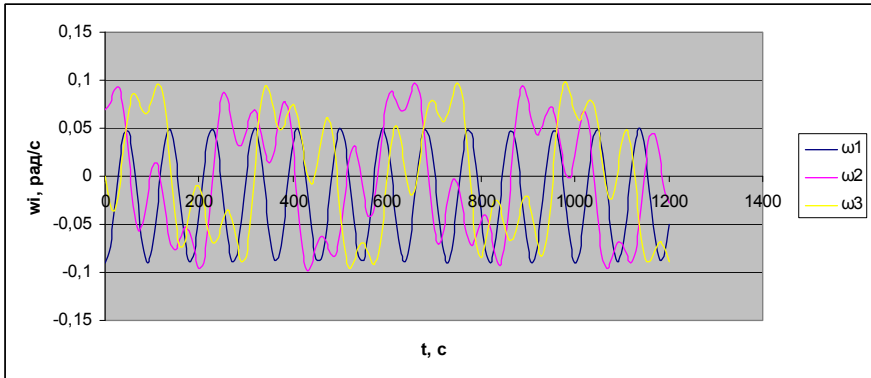


Рис. 7 – проєкції вектора кутової швидкості моделі  $EM_{1,3,2}(-0,045; 0,0345; 0,025; \pi/2)$ .

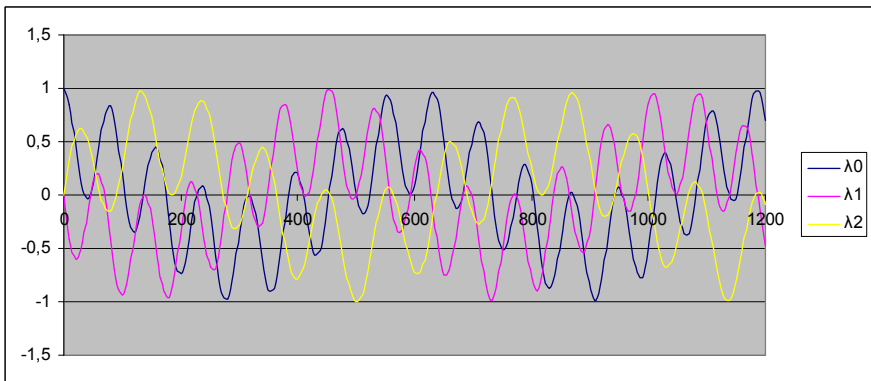


Рис. 8 – компоненти кватерніона орієнтації моделі  $EM_{1,3,2}(-0,045; 0,0345; 0,025; \pi/2)$ .

параметрів моделі  $k_1 = 0,005, k_2 = 0,140, k_3 = 0,024$  і  $\beta_3 = \pi/3$  похибка алгоритму зростає з часом. На рис. 11 – 12 наведені похибки типу дрейфу, отримані на моделі  $EM_{1,3,2}(k_1; k_2; k_3; \beta_3)$ , що відноситься до другої групи моделей. З'ясовано, що характер поведінки похибки алгоритму на цій моделі при різних наборах параметрів має теж різний характер. Так, при значеннях

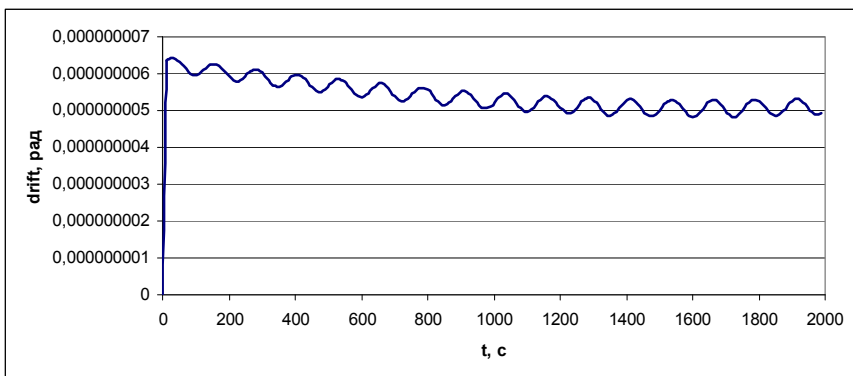


Рис. 9 – похибка типу дрейфу на моделі  $EM_{1,2,3}(0,025; -0,034; 0,0251; \pi/3)$ .

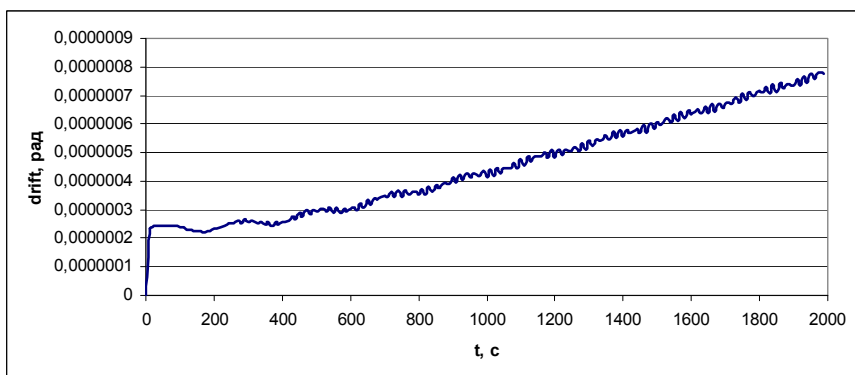


Рис. 10 – похибка типу дрейфу на моделі  $EM_{1,2,3}(0,005; 0,140; 0,024; \pi/3)$ .

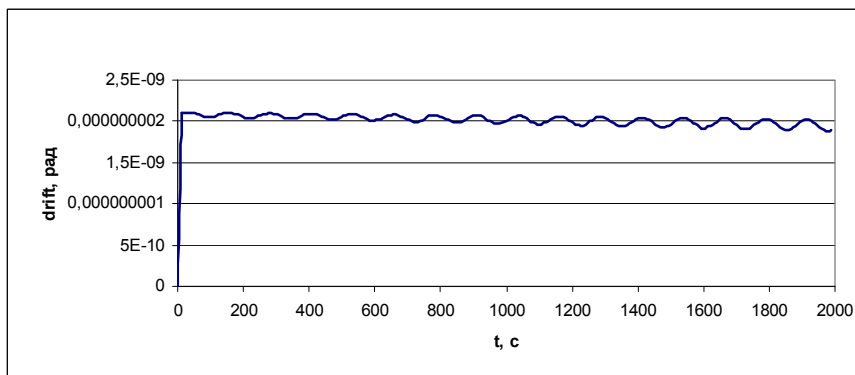


Рис. 11 – похибка типу дрейфу на моделі  $EM_{1,3,2}(0,0152; 0,025; 0,0151; \pi/4)$ .

параметрів  $k_1 = -0,045$ ,  $k_2 = 0,0345$ ,  $k_3 = 0,025$ ,  $\beta_3 = \pi/2$  похибка визначення орієнтації типу дрейфу для цього алгоритму має явно виражену зростаючу складову. Отже, при оцінюванні алгоритмів визначення орієнтації «найгіршими» (з точки зору похибок алгоритмів) еталонними моделями з розглянутих можна вважати моделі  $EM_{1,2,3}(0,005; 0,140; 0,024; \pi/3)$  і  $EM_{1,3,2}(-0,045; 0,0345; 0,025; \pi/2)$ .

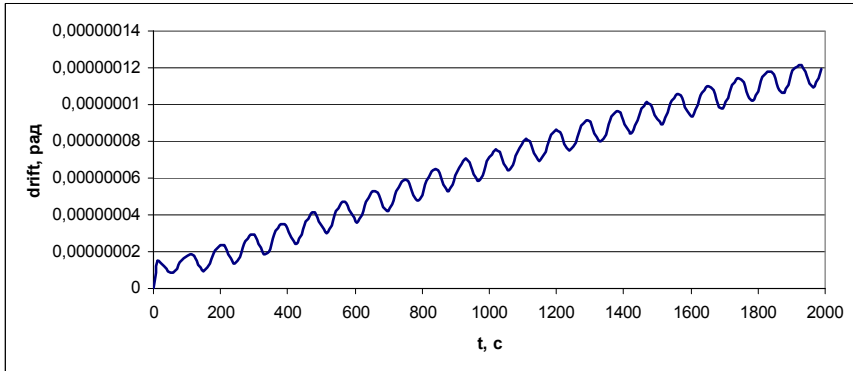


Рис. 12 – похибка типу дрейфу на моделі  $EM_{1,3,2}(-0,045; 0,0345; 0,025; \pi/2)$ .

**Висновки.** Запропоновані нові аналітичні трьохчастотні еталонні моделі обертання твердого тіла, в основі яких лежить тригонометричне мультиплікативне представлення кватерніона орієнтації. Показано, що за допомогою цих моделей при належному виборі параметрів можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла. Для відомого алгоритму четвертого порядку на запропонованих еталонних моделях при різних значеннях параметрів отримані оцінки похибки визначення орієнтації типу дрейфу. Показано, що на різних моделях похибки мають різний характер, причому моделі, близькі до регулярної прецесії, не дозволяють в повній мірі провести аналіз похибок.

**Список літератури:** 1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. 2. Mortensen R.E. Strapdown Guidance Error Analysis. – IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst., 1974, vol.10, No 4, pp. 451 – 458. 3. Панов А.П. Асимптотические оценки погрешностей методов вычислений параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. – 1980. – Вып.47. – С. 59 – 71. 4. Кузнецов Ю.А., Олейник С.В., Деменков В.А., Плаксий Ю.А. Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // Труды XII Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. – С.-Петербург: ЦНИИ “Электронприбор”. – 2010. – С. 114 – 116. 5. Ткаченко А.И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22. 6. Панов А.П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела// Механика гироскоп. систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112. 7. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9. 8. Плаксий Ю.А. Аналитические оценки точности алгорит-

мов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2. – 1992, вып. 11. – С.79 – 83. **9. Плаксі́й Ю.А.** Еталонна тригонометрична кватерніонна модель обертання прецесійного типу твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ», випуск 37'2013. – Математичне моделювання в техніці та технологіях. – С. 141 – 147. **10. Бранець В.Н., Шмыглевский И.П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

Надійшла до редколегії 16.01.2014

---

УДК 629.7.05

**Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла / Ю. А. Плаксі́й //** Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 175 – 185. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2222-0631.

Предложена новая аналитическая эталонная модель вращения твердого тела, основанная на тригонометрическом мультипликативном представлении кватерниона ориентации. Показаны возможности модели для оценивания точности алгоритмов определения ориентации в БИНС.

**Ключевые слова:** кватернион, ориентация, эталонная модель, дрейф.

UDC 629.7.05

**Three-frequency analytical reference model of a rigid body rotation. / Yu. A. Plaksiy //** Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 175 – 185. Bibliog.: 10 titles. – ISSN 2222-0631.

A new analytical reference model of a rigid body rotation based on the trigonometric multiplicative representation of the orientation quaternion is suggested. The resources of the model for error analysis of orientation algorithms in strapdown inertial navigation systems are demonstrated.

**Key words:** quaternion, orientation, reference model, drift.

УДК 621.9

**М.С. СТЕПАНОВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;

**М.І. ГАСАНОВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

**І.В. ВОЛОШКІНА**, інж., НТУ «ХПІ»

## **МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМУ В ТЕХНОЛОГІЧНІЙ СИСТЕМІ ОХОЛОДЖЕННЯ ШЛІФУВАЛЬНОГО ВЕРСТАТУ**

Наведено математичну модель для розрахунку температури мастильно-охолоджуючої рідини (МОР) у підсистемі використання. Температура визначається в залежності від етапу циклу шліфування. Модель побудована на основі рівняння зміни температури при проходженні рідини крізь місцевий опір.

**Ключові слова:** мастильно-охолоджувальна рідина, температура, підсистема використання МОР, теплові потоки.

**Вступ.** Ефективність використання мастильно-охолоджувальних рідин (МОР) при шліфуванні визначається не тільки оптимальним складом, але і

їхнім тепловим станом [1]. Дослідження показали, що під час обробки нагрівання МОР впливає на теплові деформації елементів технологічної системи шліфування [2]. Ці деформації збільшують похибки у розмірах і формі деталей. Крім того, при підвищенні температури МОР до 35 °С прискорюється розвиток мікроорганізмів, особливо при збільшенні механічних домішок та інших рідин, які є в МОР [3].

**Постановка задачі.** Для визначення теплового стану МОР в різноманітних умовах процесу обробки слід розробити математичну модель, яка допomoже прогнозувати точність виготовлення деталей на шліфувальних верстаках.

**Математична модель.** В основу математичної моделі покладено рівняння зміни температури рідини при проходженні її крізь місцевий опір (дроселі, клапани, очисники тощо) [4]:

$$\Delta t = t_{\text{вх}} - t_{\text{вих}} = \frac{P_{\text{вх}} - P_{\text{вих}}}{\rho_{\text{жс}} \cdot c_{\text{жс}} \cdot m_t},$$

де  $t_{\text{вх}}$  і  $t_{\text{вих}}$  – температура рідини на вході та виході з опору, °С;  $P_{\text{вх}}$  і  $P_{\text{вих}}$  – тиск рідини на вході і виході з опору, кг/см<sup>2</sup>;  $\rho_{\text{жс}}$ ,  $c_{\text{жс}}$  – щільність, кг/см<sup>3</sup> та питома теплоємність рідини, ккал/кг·°С;  $m_t$  – технічний еквівалент теплоти, кг·см/ккал.

Модель враховує зміну фізичних параметрів МОР (щільності, питомої теплоємності та інших) від температури. При визначенні температури нагрівання МОР, яка йде від зони різання, враховуються наступні параметри шліфування: тангенціальна складова сили різання, швидкість шліфувального круга і параметри, які характеризують долю тепла, що йде в МОР.

Розроблено схему розподілу теплових потоків в системі використання МОР (рис. 1). Аналіз розрахункової схеми (рис. 2) показав, що рух МОР залежить від *етапу обробки (першого або другого)*; відповідно з цим виділяємо два контури руху МОР в системі. Перший контур рідини проходить під час завантаження та розвантаження заготовки, її зажиму та розжиму, а також під час швидкого підводу та відведення шліфувальної бабки. Другий контур рідини проходить під час *попереднього або кінцевого шліфування*, а також під час *виходжування*.

Запишемо рівняння зміни температури по ланках контурів системи.

Для елементів першого контуру зміна температури має вигляд:

$$t_1 = \frac{P_0 - P_1}{\rho_{\text{жс}0,1} \cdot c_{\text{жс}0,1} \cdot m_t} - t_0 \text{ – ланка } 0 - 1 \text{ (трубопровід),}$$

$$t_2 = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{жс}1,2} \cdot c_{\text{жс}1,2} \cdot m_t} - t_1 \text{ – ланка } 1 - 2 \text{ (насос),}$$

$$t_3 = \frac{P_2 - P_3}{\rho_{\text{жс}2,3} \cdot c_{\text{жс}2,3} \cdot m_t} - t_2 \text{ – ланка } 2 - 3 \text{ (трубопровід),}$$

$$t_4 = \frac{P_3 - P_4}{\rho_{жс3,4} \cdot c_{жс3,4} \cdot m_t} - t_3 - \text{ланка } 3 - 4 \text{ (очисник)},$$

$$t_{n-1} = \frac{P_4 - P_{n-1}}{\rho_{жс4,n-1} \cdot c_{жс4,n-1} \cdot m_t} - t_4 - \text{ланка } 4 - (n-1) \text{ (інші елементи та апарати)},$$

$$t_n = \frac{P_{n-1} - P_n}{\rho_{жсn-1,n} \cdot c_{жсn-1,n} \cdot m_t} - t_{n-1} - \text{ланка } (n-1) - n \text{ (інші елементи та апарати)},$$

$$t_{n+1} = \frac{P_n - P_{n+1}}{\rho_{жсn,n+1} \cdot c_{жсn,n+1} \cdot m_t} - t_n - \text{ланка } n - (n+1) \text{ (трубопровід)},$$

$$t_{n+2} = \frac{P_{n+1} - P_{n+2}}{\rho_{жсn+1,n+2} \cdot c_{жсn+1,n+2} \cdot m_t} - t_{n+1} - \text{ланка } (n+1) - (n+2) \text{ (клапан)},$$

$$t_{n+3} = \frac{P_{n+2} - P_{n+3}}{\rho_{жсn+2,n+3} \cdot c_{жсn+2,n+3} \cdot m_t} - t_{n+2} - \text{ланка } (n+2) - (n+3) \text{ (трубопровід)}.$$

Для елементів другого контуру зміна температури має вигляд:

$$t_{n+4} = \frac{P_n - P_{n+4}}{\rho_{жсn,n+4} \cdot c_{жсn,n+4} \cdot m_t} - t_n - \text{ланка } n - (n+4) \text{ (трубопровід)},$$

$$t_{n+5} = \frac{P_{n+4} - P_{n+5}}{\rho_{жсn+4,n+5} \cdot c_{жсn+4,n+5} \cdot m_t} - t_{n+4}$$

- ланка  $(n+4) - (n+5)$  (клапан керування),

$$t_{n+(m-1)} = \frac{P_{n+5} - P_{n+(m-1)}}{\rho_{жсn+5,n+(m-1)} \cdot c_{жсn+5,n+(m-1)} \cdot m_t} - t_{n+5}$$

- ланка  $(n+5) - (n+(m-1))$  (трубопровід),

$$t_{m+n} = t_{n+(m-1)} + \Delta t_{n+m}$$

- ланка  $(n+(m-1)) - (m+n)$  (між входом та виходом із зони різання),

$$t_{m+n+j} = t_{m+n} + \Delta t_{m+n+j}$$

- ланка  $(m+n) - (m+n+j)$  (на виході із зони різання та вході в резервуар).

Температура на виході із першого контура дорівнює

$$t_{m+n+j} = \frac{P_{n+2} - P_{n+3}}{\rho_{жсn+2,n+3} \cdot c_{жсn+2,n+3} \cdot m_t} - \frac{P_{n+1} - P_{n+2}}{\rho_{жсn+1,n+2} \cdot c_{жсn+1,n+2} \cdot m_t} -$$

$$- \frac{P_{n+1} - P_n}{\rho_{жсn,n+1} \cdot c_{жсn,n+1} \cdot m_t} - \frac{P_{n-1} - P_n}{\rho_{жсn-1,n} \cdot c_{жсn-1,n} \cdot m_t} - \frac{P_4 - P_{n-1}}{\rho_{жс4,n-1} \cdot c_{жс4,n-1} \cdot m_t}$$

$$- \frac{P_3 - P_4}{\rho_{жс3,4} \cdot c_{жс3,4} \cdot m_t} - \frac{P_2 - P_3}{\rho_{жс2,3} \cdot c_{жс2,3} \cdot m_t} - \frac{P_1 - P_2}{\rho_{жс1,2} \cdot c_{жс1,2} \cdot m_t} - \frac{P_0 - P_1}{\rho_{жс0,1} \cdot c_{жс0,1} \cdot m_t} - t_0.$$

Температура на виході із другого контура вираховується так:



$$t_{m+n+j} = \Delta t_{n+m} - \Delta t_{n+m+j} - \frac{P_{n+(m-1)} - P_{n+m}}{\rho_{жп+5,n+(m-1)} \cdot c_{жп+5,n+(m-1)} \cdot m_t} -$$

$$\frac{P_{n+4} - P_{n+5}}{\rho_{жп+4,n+5} \cdot c_{жп+4,n+5} \cdot m_t} - \frac{P_{n+4} - P_n}{\rho_{жп+4,n} \cdot c_{жп+4,n} \cdot m_t} - \frac{P_{n-1} - P_n}{\rho_{жп-1,n} \cdot c_{жп-1,n} \cdot m_t} -$$

$$\frac{P_4 - P_{n-1}}{\rho_{ж4,n-1} \cdot c_{ж4,n-1} \cdot m_t} - \frac{P_3 - P_4}{\rho_{ж3,4} \cdot c_{ж3,4} \cdot m_t} - \frac{P_2 - P_3}{\rho_{ж2,3} \cdot c_{ж2,3} \cdot m_t} - \frac{P_1 - P_2}{\rho_{ж1,2} \cdot c_{ж1,2} \cdot m_t} -$$

$$- \frac{P_0 - P_1}{\rho_{ж0,1} \cdot c_{ж0,1} \cdot m_t} - t_0.$$

Значення  $t_0$  визначається як температура, що встановилася в резервуарі на етапі 1

$$t_0 = t_d + \frac{A_0}{\sqrt[3]{V^2}},$$

де  $t_d$  – температура довкілля, °C;  $V$  – об'єм рідини в резервуарі, дм<sup>3</sup>;  $A_0$  – кількість тепла, яке виділяється в гідросистемі в одиницю часу, ккал/ч.

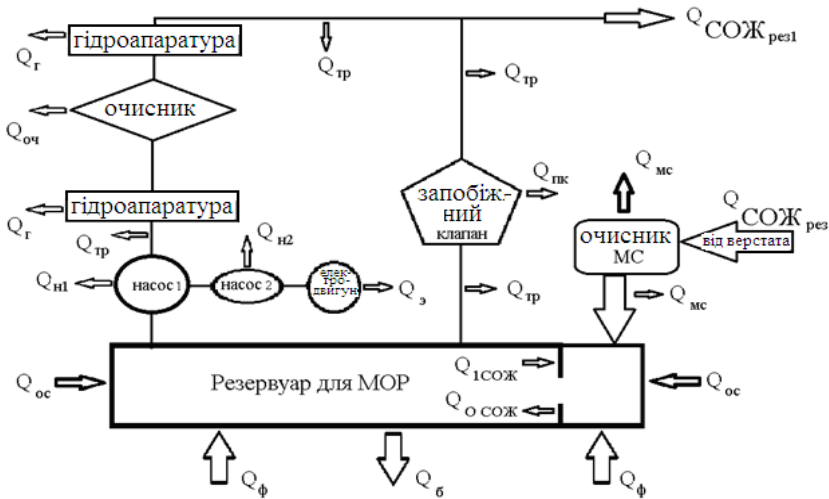


Рис. 1 – Розподіл теплових потоків в підсистемі використання МОР:

$Q_{н1}, Q_{н2}$  – тепло, яке виділяють насоси;  $Q_3$  – виділяє електродвигун насоса;

$Q_2$  – тепло, яке виділяється при проходженні гідроапаратури;  $Q_{тр}$  – при

проходженні трубопроводів;  $Q_{сож_рез}$  – тепло від МОР, яка зливається з верстагу;

$Q_{пк}$  – тепло, яке виділяється при проходженні запобіжного клапану;  $Q_{ос}$  – тепло від

довкілля;  $Q_{сож_рез1}$  – тепло, яке йде в зону різання;  $Q_{ф}$  – тепло від фундаменту;

$Q_{оч}$  – тепло, яке виділяється при проходженні очисника.

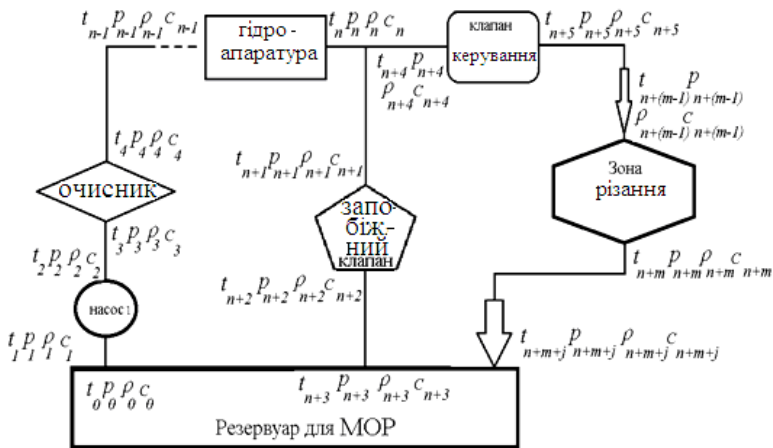


Рис. 2. – Розрахункова схема для моделювання температури в підсистемі використання МОР.

Значення  $A_0$  визначають за формулою:

$$A_0 = 860 N_{нід} \cdot (1 - \eta),$$

де  $\eta$  – повний ККД системи;  $N_{нід}$  – потужність, яка підводиться, кВт.

Потужність  $N_{нід}$  залежить від етапу циклу обробки (а саме від того, яким контуром йде рідина).

Для першого контура  $N_{нід}$  визначається за формулою

$$N_{нід} = N_{м.н} + \Delta N_n,$$

де  $N_{м.н}$  – теоретична потужність насоса, кВт;  $\Delta N_n$  – механічні втрати потужності, кВт.

Виникає потреба знати залежність фізичних параметрів рідини від температури у вигляді  $P_{жс} = f(t)$  і  $c_{жс} = f(t)$ .

Питому теплоємність можна визначити за формулою [5]:

$$c_{жс} = [2020 + 1,6(t_{жс} - 100)] / 4187 \text{ ккал/кг} \cdot ^\circ\text{C},$$

де  $t_{жс}$  – температура рідини,  $^\circ\text{C}$ .

Щільність рідини визначається наступною формулою [6]:

$$\rho = \frac{0,9}{g} \left[ 1 - \alpha(t - 15) - \frac{P_{аб} - P_{атм}}{H_u} \right],$$

де  $g$  – прискорення сили ваги,  $\text{см/с}^2$ ;  $t$  – температура,  $^\circ\text{C}$ ;  $P_{аб}$  і  $P_{атм}$  – відповідно абсолютний та атмосферний тиск;  $H_u$  – ізотермічний модуль об'ємної пружності;  $\alpha$  – коефіцієнт, який для мінеральних масел визначається в межах  $5 \cdot 10^{-4} < \alpha < 8,4 \cdot 10^{-4}$ .

Втрати тиску по довжині при ламінарному режимі течії в трубопроводах

розраховують за формулою:

$$\Delta p = p_{вх} - p_{вих} = 8 \cdot v \cdot Q \cdot L \cdot d^4 \text{ кг/см}^2,$$

де  $v$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості;  $Q$  – витрати рідини,  $\text{дм}^3/\text{хв}$ ;  $L$  – довжина трубопроводу, м;  $d$  – діаметр трубопроводу, мм.

Зміни тиску в очиснику залежать від його конструкції. Якщо в якості очисника використовується гідроциклон, то перепад тиску можна знайти з формули Честона:

$$Q = 23,6 \cdot F_{вх} \sqrt{\Delta p},$$

де  $F_{вх}$  – площа вхідного патрубку,  $\text{см}^2$ ;  $Q$  – витрати рідини через гідроциклон,  $\text{дм}^3/\text{хв}$ ;  $\Delta p$  – перепад тиску,  $\text{кг/см}^2$ .

Перепад тиску, який створюється насосом, становить

$$\Delta p = \frac{N_T}{Q_H + Q_T} \text{ кг/см}^2,$$

де  $N_T$  – теоретична (індикаторна) потужність,  $\text{кг}\cdot\text{см}/\text{хв}$ ;  $Q_H$  – фактична продуктивність насоса,  $\text{см}^3/\text{хв}$ ;  $Q_T$  – протічка рідини,  $\text{см}^3/\text{хв}$ .

Перепад тиску на клапані визначається за формулою витрат

$$\Delta p = (\rho / 2g)(Q / \mu f)^2 \text{ кг/см}^2,$$

де  $\rho$  – щільність рідини,  $\text{кг/см}^3$ ;  $g$  – прискорення сили ваги,  $\text{см}/\text{с}^2$ ;  $Q$  – витрати рідини через клапан,  $\text{см}^3/\text{с}$ ;  $\mu$  – коефіцієнт витрати;  $f$  – площа перерізу робочого вікна,  $\text{см}^2$ .

Температуру нагрівання МОР (на виході із зони різання) можна визначити за формулою:

$$t_{\text{МОР}} = \frac{Q_{\text{МОР}}}{c \cdot M},$$

де  $Q_{\text{МОР}}$  – тепло, яке втрачається на нагрівання МОР;  $c$  – питома теплоємність;  $M$  – маса МОР в контакті:

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot Q \cdot t,$$

$Q$  – витрати рідини,  $\text{см}^3/\text{с}$ ;  $t$  – час, хв.

Тепло, яке йде на нагрівання МОР визначається так:

$$Q_{\text{МОР}} = k_{\text{МОР}} \cdot P_z \cdot V_k,$$

де  $P_z$  – тангенціальна складова сили різання;  $V_k$  – швидкість різання, м/с,  $k_{\text{МОР}}$  – коефіцієнт, що вказує яка доля тепла йде в МОР. За даними С. С. Шахновського 85% тепла, яке виникає при шліфуванні, йде в МОР.

**Висновки.** Результати моделювання дають можливість визначити обсяг МОР в підсистемі використання МОР шліфувальних верстатів в залежності від режиму шліфування.

**Список літератури:** 1. Чулок А.И., Лобанцева В.С. Термический анализ эффективности действия СОЖ. – М.: Машиностроение, 1988. – 40с. 2. Марцинкявичус А.Ю. Снижение тепловых деформаций круглошлифовального станка. Станки и инструмент. – 1991. – №5. – С. 7 – 10. 3. Бульжжев Е.М., Худобин Л.В. Ресурсосберегающее применение смазочно-охлаждающих жидкостей при ме-

таллообработке. – М.: Машиностроение, 2004. – 352с. 4. *Баица Т.М.* Машиностроительная гидравлика. Справочное пособие. – М.: Машгиз., 1963. – 696 с. 5. *Абрамов Е.И.* и др. Элементы гидропривода. Справочник. – Киев.: Техніка, 1977. – 320с. 6. *Кондаков Л.А.* и др. Машиностроительный гидропривод. – М.: Машиностроение, 1978 – 455с.

*Надійшла до редколегії 14.01.2014*

---

УДК 621.9

**Моделювання теплового режиму в технологічній системі охолодження шліфувально-го верстату / М. С. Степанов, М. І. Гасанов, І. В. Волошкіна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 185 – 191. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Приведена математическая модель расчета температуры смазывающе-охлаждающей жидкости (СОЖ) в подсистеме применения. Температура определяется в зависимости от этапа цикла шлифования. Модель построена на основе уравнения изменения температуры при прохождении жидкости через местное сопротивление.

**Ключевые слова:** масляно-охлаждающая жидкость, температура, подсистема использования СОЖ, тепловые потоки.

UDC 621.9

**Modeling of the thermal regime of a grinding machine mechanical cooling system / M. Stepanov, M. Hasanov, I.V. Voloshkina // Bulletin of National Technical University «KhPI.» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 185 – 191. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.**

A mathematical model for calculating the temperature of a machine tool coolant in the coolant application subsystem is proposed. The temperature is defined depending on the stage of the grinding cycle. The model is based on the equation describing the change of the machine tool coolant temperature on passing through the local resistance.

**Key words:** machine tool coolant, temperature, application subsystem, heat flow.

УДК 519.281.2:62-97/-98

**Ф.Ф. СІРЕНКО**, асист., НАКУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

## **ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧНІЙ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СПРОЩЕНОЇ СТАТИЧНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГТД НА ДІЛЯНЦІ ЗАПУСКУ**

Математичне моделювання робочих процесів застосовується на етапах розробки та доведення авіаційних двигунів, зокрема при відпрацюванні програм системи автоматичного керування. В НАКУ «ХАІ» розроблено метод моделювання запуску, що базується на широкому використанні експериментальних даних та апріорних знань про об'єкт. В роботі наведено структуру моделі і алгоритм, який базується на апроксимації експериментальних даних зваженим методом найменших квадратів, що унеможливило отримання нефізичних результатів.

**Ключові слова:** стеганографія, стеганологія, стегоповідомлення, контейнер, вейвлет-перетворення.

---

© Ф. Ф. Сіренко, 2014

**Вступ.** Математичне моделювання робочих процесів знайшло широке застосування при проектуванні і доведенні газотурбінних двигунів. Математичні моделі супроводжують усі етапи проектування газотурбінного двигуна (ГТД): від ескізного проектування до випробувань готового двигуна та здійснення його технічної підтримки в експлуатації. Серед напрямків розробки двигуна найбільш дорогим та тривалим є створення системи автоматичного керування. Тому використання математичного моделювання на цьому етапі є дуже важливим.

Широке розповсюдження отримали математичні моделі робочих процесів двигуна, що зазвичай моделюють процеси на робочих режимах. Проте збільшення вимог до безпеки та надійності авіаційних ГТД та гострі умови конкуренції серед виробників двигунів привели до необхідності використання при проектуванні систем автоматичного керування (САК) авіаційними двигунами також і моделей запуску двигуна. Створення останніх поєднано з рядом проблем, що пов'язані зі складністю фізичного описання процесів запуску.

Стаття описує особливості використання загально відомого метода найменших квадратів при синтезі і структурну та параметричну ідентифікації спрощеної статичної моделі запуску.

**Аналіз останніх досліджень.** Загально відомо, що природа робочих процесів в авіаційному газотурбінному двигуні є досить складною, і зазвичай описується нелінійними моделями. Ці моделі являють собою сукупність характеристик вузлів та рівнянь термодинаміки, які поєднують окремі параметри цих характеристик з параметрами, що моделюються [1]. Наприклад, характеристика компресора являє собою залежності

$$\pi_K^* = f(G_{n\text{ пр}}, n_{np}), \quad (1)$$

$$\eta_K^* = f(G_{n\text{ пр}}, n_{np}), \quad (2)$$

де  $\pi_K^*$  – степінь підвищення тиску в компресорі;  $\eta_K^*$  – коефіцієнт корисної дії компресора;  $G_{n\text{ пр}}$  – витрата повітря через каскад компресора;  $n_{np}$  – частота обертання ротору компресора.

Повільність виконання розрахунків з застосуванням цих моделей унеможливило їх використання для моделювання робочих процесів у двигуні в реальному часі, що досить часто є необхідним при розробці та випробуваннях САК. Для вирішення цих складностей нелінійні моделі лінеаризуються в області окремих усталених режимів.

Розглянемо приклад лінеаризації моделі частоти обертання ротору. Фізично, швидкість зміни частоти обертання описується рівнянням балансу крутного моменту турбіни та компресора:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_T(G_n, n) - M_K(n), \quad (3)$$

де  $d\omega/dt = (\pi/30)(dn/dt)$ .

Представимо це рівняння у формі малих відхилень:

$$J \frac{\pi}{30} \frac{dn}{dt} = \frac{\partial M_T}{\partial n} \cdot \Delta n + \frac{\partial M_T}{\partial G_n} \cdot \Delta G_n - \frac{\partial M_K}{\partial n} \cdot \Delta n, \quad (4)$$

де  $\Delta n$  і  $\Delta G_n$  є невеликими відхиленнями від усталеного режиму.

Трансформуємо рівняння до форми, що описує динаміку частоти обертання ротору в просторі станів:

$$\frac{dn}{dt} = a_{11} \cdot \Delta n + b_{11} \cdot \Delta G_n, \quad (5)$$

$$\text{де } a_{11} = \left( \frac{\partial M_T}{\partial n} - \frac{\partial M_K}{\partial n} \right) / J \frac{\pi}{30}, \quad b_{11} = \left( \frac{\partial M_T}{\partial G_n} \right) / \left( J \frac{\pi}{30} \right).$$

Слід відзначити, що у разі, якщо двигун має декілька роторів, то слід додатково враховувати їх взаємний вплив. Тоді рівняння (5) змінюється на наступне:

$$\begin{bmatrix} \dot{n}_1 \\ \dots \\ \dot{n}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta n_1 \\ \dots \\ \Delta n_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \end{bmatrix} \cdot \Delta G_n \quad (6)$$

Моделюванням процесів запуску розпочали займатися в 2001 році. Основними проблемами, з якими зіштовхнулись вчені при розробці методів синтезу моделей запуску були наступні:

- відсутність експериментально визначених характеристик двигуна на режимах запуску;
- неможливість застосування загальновідомих підходів моделювання до етапу запуску.

Наведемо декілька прикладів математичних методів для моделювання запуску. Проф. В. Секстон запропонував застосовувати математичні методи, зокрема *методи теорії подібності* [2], для екстраполяції визначених в діапазоні робочих режимів характеристик в область запуску. Так зокрема за Секстоном, для отримання нових напірних гілок на характеристиці компресора слід використовувати наступні рівняння:

$$\frac{(G_n)_{i-1}}{(G_n)_i} = \left[ \frac{n_{i-1}}{n_i} \right], \quad (7)$$

$$\frac{(L_{num})_{i-1}}{(L_{num})_i} = \left[ \frac{n_{i-1}}{n_i} \right]^2, \quad (8)$$

$$\frac{(N)_{i-1}}{(N)_i} = \left[ \frac{(n)_{i-1}}{(n)_i} \right]^3. \quad (9)$$

Недоліками даного методу було те, що він може бути застосований лише для нестисливих рідин. Ця проблема була вирішена проф. Дональдом Готье, котрий запропонував варіювати показниками степенів задля урахування стисливості робочого тіла в двигунах. Процес варіювання складається з двох

етапів.

1. Із використанням двох відомих напірних ліній характеристики, що знаходяться найближче до області режимів запуску (дві крайні ліві експериментально визначені напірні лінії характеристики), визначаються показники  $p$ ,  $q$  і  $r$  в рівняннях

$$\frac{(G_n)_{i-1}}{(G_n)_i} = \left[ \frac{n_{i-1}}{n_i} \right]^p; \quad (10)$$

$$\frac{(L_{num})_{i-1}}{(L_{num})_i} = \left[ \frac{n_{i-1}}{n_i} \right]^q; \quad (11)$$

$$(N)_{i-1}/(N)_i = [n_{i-1}/n_i]^r. \quad (12)$$

2. Формуються нові напірні лінії. Показники степені  $p$ ,  $q$  і  $r$  приймаються однаковими для всієї ділянки запуску. За версією автора такий підхід є правильним, оскільки за низької частоти обертання стисливість проявляється слабо.

Більш докладний огляд методів моделювання можна знайти в роботі [3]. Проте жоден з розглянутих методів не знайшов широкого визнання та застосування в практиці.

**Постановка задачі** Для забезпечення конкурентоздатності українських виробників авіаційних двигунів та САК на міжнародному ринку було розроблено метод, що дозволяє моделювати запуск з точністю, достатньою для відпрацювання алгоритмів САК. В основі метода лежить синтез моделі на основі широкого використання експериментальної та апіорної інформації.

Модель, що пропонується, має складену структуру. Вона складається зі спрощеної статичної та лінійної динамічної моделей.

Лінійна динамічна модель (ЛДМ) має однакову структуру з моделлю робочих режимів [4]. ЛДМ формалізується у вигляді системи алгебраїчних та диференціальних рівнянь, їх кількість та складові залежать від системи вимірювань в двигуні та використання параметрів, що вимірюються в алгоритмах САК.

Спрощена статична модель (ССМ) являє собою сукупність прямих залежностей між параметрами-аргументами моделі та параметрами, що моделюються. При синтезі ССМ використовується аналіз експериментальної інформації. Заміна описаної вище «фізичної» статичної характеристики спрощеною та лінеаризація динамічної моделі на базі ССМ можуть призводити до помилкових результатів.

Це дослідження має на меті розглянути особливості та розробити прикладні алгоритми для унеможливлення помилок при синтезі ССМ і ЛДМ.

**Спрощена математична модель.** Як було зазначено, спрощена статична модель є сукупністю прямих залежностей. Ці залежності математично формалізуються у вигляді функції, що складається з трьох ділянок (лінійної, не-

лінійної-зв'язки та функції, сформованої за характеристикою робочих режимів, як зображено на рисунку), які пов'язані між собою умовами рівності абсолютних значень параметрів та похідних цих функцій в точках переходу між ділянками:

$$\begin{cases} k \cdot (Q_i)_1 + (U_i)_0 = a_0 + a_1 \cdot (Q_i)_1 + a_2 \cdot (Q_i)_1^2; \\ k = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (Q_i)_1; \\ (U_i)_{m2} = a_0 + a_1 \cdot (Q_i)_{m2} + a_2 \cdot (Q_i)_{m2}^2; \\ ((U_i)_{m2})' = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (Q_i)_{m2}, \end{cases} \quad (13)$$

де значення  $(U_i)_0$ ,  $(U_i)_{m2}$ ,  $(Q_i)_{m2}$ ,  $((U_i)_{m2})'$  – відомі, чи можуть бути визначені за допомогою моделі робочих режимів.

Ця система рівнянь не може бути розв'язана аналітично, тому необхідно застосувати спеціальний алгоритм ідентифікації (фактично цей алгоритм має на меті визначення кута нахилу лінійної ділянки), що базується на апріорних знаннях про об'єкт та спеціальному аналізі експериментальної інформації [5].

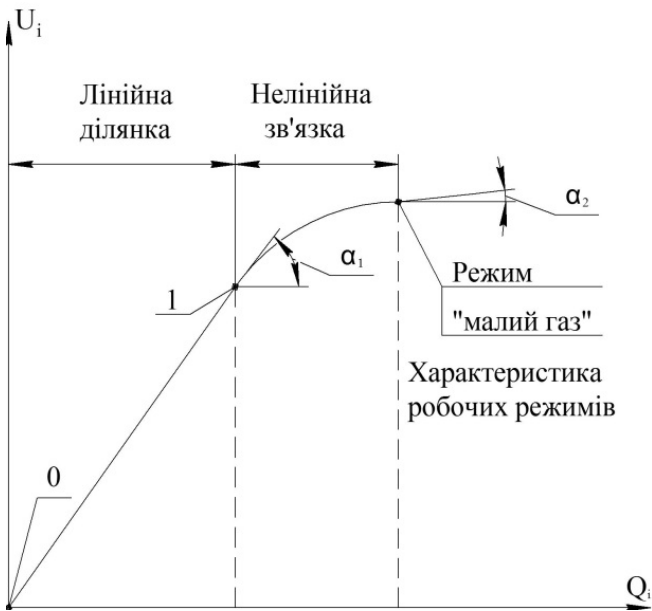


Рисунок – Геометрична інтерпретація прямої залежності ССХ.

Сформуємо вимоги до безпомилковості ідентифікації з апріорних знань про об'єкт:

– оскільки при вимкненому двигуні параметри, що моделюються, мають мінімальні значення, то першими двома критеріями є



$$(U_i)_{0 \text{ апрокс}} = (U_i)_{0 \text{ апіор}} ; \quad (14)$$

$$U_i \in \left( (U_i)_{0}, (U_i)_{мг} \right). \quad (15)$$

– в точці малого газу значення параметра, що моделюється, мають дорівнювати значенню параметра, який було розраховано по моделі робочих режимів:

$$(U_i)_{мг \text{ апрокс}} = (U_i)_{мг \text{ апіор}} . \quad (16)$$

– похідні в точці малого газу, розраховані за формулою

$$\left( (U_i)_{мг} \right)' = \frac{|(U_i)_{мг} \pm \Delta U_i - U_i|}{\Delta Q_i}, \quad (17)$$

мають бути рівні.

– ідентифікована пряма залежність має якісно описувати експериментальну інформацію (забезпечувати мінімальну похибку).

Тож, розглянемо алгоритм ідентифікації прямих залежностей (пошуку параметра  $k$ ):

1) За допомогою моделі робочих режимів визначимо значення параметрів, що відповідає параметрові-аргументу на режимі малого газу ( $Q_i$  мг) і в точці ( $Q_i$  мг +  $\Delta Q_i$ );

2) Проведемо апроксимацію експериментальних точок, що були отримані зі спеціального аналізу, і точок, зазначених в п. 1 цього алгоритму за методом зважених найменших квадратів. Визначимо коефіцієнти полінома ( $a_0, a_1, a_2$ )

$$\begin{aligned} e(Q_i) &= \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \left[ \overline{U_i}_{експ}(Q_i) - \overline{U_i}_{мод}(Q_i) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \left( \overline{U_i}_{експ}(Q_i) - \left[ a_0 + a_1 \cdot Q_i + a_2 \cdot (Q_i)^2 \right] \right) \end{aligned} \quad (18)$$

за методом найменших квадратів

$$\min_{a_i} J(a_i) = \min_{a_0, a_1, a_2} \sum_{i=1}^N \omega_i \cdot \left( \overline{U_i}_{експ}(Q_i) - \left[ a_0 + a_1 \cdot Q_i + a_2 \cdot (Q_i)^2 \right] \right). \quad (19)$$

Вагові коефіцієнти усіх експериментальних точок слід вибирати однаковими і такими, що дорівнюють одиниці, а точок, зазначених в п. 1 цього алгоритму, – 10...50.

Перш ніж продовжувати виконання алгоритму слід виконати перевірку умов (16) та (17). Вочевидь зазначені умови можуть бути виконані лише в певній мірі, тому слід замінити їх на наступні:

$$\left( (U_i)_{мг \text{ апрокс}} - (U_i)_{мг \text{ апіор}} \right) \leq \varepsilon_1, \quad (20)$$

$$\left| \frac{|(U_i)_{мг} + \Delta U_i - U_i|}{\Delta Q_i} - \frac{|U_i - (U_i)_{мг} - \Delta U_i|}{\Delta Q_i} \right| \leq \varepsilon_2. \quad (21)$$

У разі, якщо ці умови не виконуються, слід збільшити вагові коефіцієнти точок, зазначених в п. 1, чи виключити з розгляду точки, що є напевно хибними, і повторити апроксимацію.

3) Слід перевірити умови (14) та (15), за для чого необхідно визначити наступні величини:

– координати точки екстремуму

$$Q_{i \text{ екстр}} = \frac{a_1}{2 \cdot a_2}, \quad (22)$$

$$U_{i \text{ екстр}} = a_0 + a_1 \cdot Q_{i \text{ екстр}} + a_2 \cdot (Q_{i \text{ екстр}})^2, \quad (23)$$

– значення функції в точці  $Q_{i0}$

$$U_{i0} = a_0. \quad (24)$$

4) Розглянемо чотири можливі випадки:

– якщо  $(Q_{i \text{ екстр}} \in [Q_{i0}, Q_{i \text{ мг}}]) \wedge (U_{i \text{ екстр}} \notin [U_{i0}, U_{i \text{ мг}}])$ , тоді слід виконати п. 6 цього алгоритму;

– якщо  $(Q_{i \text{ екстр}} \notin [Q_{i0}, Q_{i \text{ мг}}]) \wedge (U_{i0} < U_{i0 \text{ апріор}})$ , тоді слід виконати п. 6 цього алгоритму;

– якщо  $(Q_{i \text{ екстр}} \in [Q_{i0}, Q_{i \text{ мг}}]) \wedge (U_{i \text{ екстр}} \in [U_{i0}, U_{i \text{ мг}}])$ , тоді слід виконати п. 5 цього алгоритму;

– якщо  $(Q_{i \text{ екстр}} \notin [Q_{i0}, Q_{i \text{ мг}}]) \wedge (U_{i0} > U_{i0 \text{ апріор}})$ , тоді слід виконати п. 5 цього алгоритму;

5) Аналітично розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} k \cdot (Q_i)_1 + (U_i)_0 = a_0 + a_1 \cdot (Q_i)_1 + a_2 \cdot (Q_i)_1^2; \\ k = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (Q_i)_1, \end{cases} \quad (25)$$

відносно невідомих  $k$  і  $(Q_i)_1$ .

6) Вибираємо кут нахилу лінійної ділянки, що може бути розрахований за формулою

$$k = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{U_{i \text{ мг}} - U_{i0}}{Q_{i \text{ мг}} - Q_{i0}}, \quad (26)$$

де  $\theta = 100 \dots 250$  (залежить від параметра, що моделюється).

Таким чином, наведений алгоритм дозволяє проводити ідентифікацію за будь якого розташування експериментальних точок без ризику отримати неадекватний результат.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** В статті описано алгоритм ідентифікації спрощеної статичної характеристики. Алгоритм базується на апроксимації експериментальних даних зваженим методом найменших квадратів із застосуванням інформації про об'єкт. Таке поєднання

забезпечує отримання адекватних результатів за будь-якого положення експериментальних точок.

**Список літератури:** 1. *Нечаев, Ю.Н., Федоров Р.М.* Теория авиационных газотурбинных двигателей т. 1 // – М.: Машиностроение, 1977. – 312 с. 2. *Sexton, W.R.* A Method to Control Turbofan Engine Starting by Varying Compressor Surge Valve Bleed: thesis master of science in mechanical engineering; presented 14.05.2001; approved 14.05.2001 / SextonWayne Randolph. – Blacksburg Virginia, 2001. – 112 p. 3. *Gaudet, S.R.* A simple sub-idle component map extrapolation method / S.R. Gaudet, J.E. Donald Gauthier // proceedings of ASME Turbo Expo 2007, 14 – 17 May 2007. – Montreal, 2007. – GT2007-27193. 4. *Епифанов, С.В.* Моделирование динамики турбовального двигателя в составе силовой установки летательного аппарата / С.В. Епифанов, Р.Л. Зеленский // Авиационно-космическая техника и технология. – 2008. – № 10/57. – С. 156 – 161. 5. *Епифанов, С.В.* Создание быстросчетной математической модели турбовального двигателя на этапе запуска для решения задач синтеза систем автоматического управления / С.В. Епифанов, Ф.Ф. Сиренко, С.И. Суховой, Р.Л. Зеленский // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – 9/96.– С. 234 – 242.

*Надійшла до редколегії 10.02.2014*

---

УДК 519.281.2:62-97/-98

**Особенности застосування методу найменших квадратів при параметричній ідентифікації спрощеної статичної характеристики ГТД на ділянці запуску / Ф.Ф. Сиренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 191 – 198. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.**

Математическое моделирование рабочих процессов используется на этапах разработки и доводки авиационных двигателей, в частности при отработке программ систем автоматического управления. В НАКУ «ХАИ» разработан метод моделирования запуска, основывающийся на применении экспериментальных данных и априорных знаний об объекте. В работе приведена структура модели и алгоритм, который базируется на аппроксимации экспериментальных данных взвешенным методом наименьших квадратов, что обеспечивает получения физических результатов.

**Ключевые слова:** упрощенная статическая математическая модель, характеристики ГТД, запуск, алгоритм, априорная информация.

UDC 519.281.2:62-97/-98

**The specificities of least square method when identifying simplified static performances of turboshaft engine at sub-idle modes. / F.F. Sirenko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 191 – 198. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.**

Mathematical modeling of working processes is widely used during all phases of aircraft engine designing and development, particularly in developing control programs of automatic control system (ACS). Methods to model engine operation at above-idle region are well-known, but there is no common opinion about engine starting modeling. Specialists of NASU “KhAI” proposed a method to model the starting. The method is based on the intense usage of experimental data and prior knowledge about the object. The structure of the model is chosen in the way to meet best the requirements of ACS designers. Because of the structure and considerations made, the direct application of known mathematical methods is impossible, because it may lead to results that make no physical sense.

The paper deals with the structure and an algorithm, which is based on approximation of experimental data by the least squares with weights. The algorithm ensures valid results.

**Key words:** simplified static mathematical model, performances of GTE, starting, algorithm, prior information.

**А.А. ТРОПИНА**, д-р техн. наук, проф. ХНАДУ, Харьков

## **ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА ПЛАЗМЕННЫХ МЕТОДОВ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА**

Предложена математическая модель фемтосекундного лазерного разряда, действующего на турбулентный поток сверхзвуковой вертикальной струи воздуха. На основе численных расчетов проведена оценка влияния тепловых возмущений, вызванных действием коротко-импульсного разряда, на профили скорости при различных числах Маха. Путем сравнения с экспериментальными данными отмечается, что данный способ измерения скоростей имеет наибольшую погрешность, вызванную влиянием тепловых возмущений, в сдвиговом слое на границе струи с окружающим воздухом.

**Ключевые слова:** лазерный разряд, математическая модель, численное моделирование, сверхзвуковой поток, профили скорости.

**Введение.** Развитие и совершенствование современных методов вычислительной газодинамики невозможно без совершенствования современных экспериментальных методов измерений скорости, особенно в турбулентных сверхзвуковых потоках. Однако при этом актуальным остается вопрос о точности проводимых экспериментов.

**Анализ последних исследований.** К самым известным методам измерения скорости в потоках можно отнести *бесконтактный метод цифровой трассерной визуализации* (метод PIV – Particle Image Velocimetry). Измерение мгновенного поля скорости потока основано на измерении с помощью рассеянного лазерного излучения перемещения специальных частиц (трассеров), которые добавляются в исследуемый поток газа или жидкости. Основным преимуществом метода является возможность регистрации мгновенных значений скорости в пространстве, что является особенно важным при изучении потоков, содержащих крупномасштабные вихревые структуры [1 – 2]. В то же время этот метод обеспечивает существенное разрешение только для достаточно больших изменений скорости. Для измерений значений или изменений скорости потока на очень малых расстояниях порядка *колмогоровского масштаба турбулентности* применяются методы, основанные на использовании электронной *рамановской флуоресценции*, вызванной лазерным разрядом [3]. Среди последних активно развивающихся методов можно отметить, так называемый, *FLEET* (Femtosecond Laser Electronic Excitation Tagging) *метод* [4], основанный на возбуждении молекул азота фемтосекундным лазерным импульсом и последующим слежением за этими молекулами с помощью камеры. При этом экспериментально отмечается увеличение температуры газа в фокальной области лазера порядка 30 мкм, что может повлиять на точность измерений скорости. Таким образом, основная цель

данной работы – оценка влияния быстрого нагрева газа при действии фемто-секундного лазерного разряда на профили скорости в сверхзвуковом потоке, является достаточно актуальной.

**Постановка задачи.** Основная система уравнений, описывающая нестационарное турбулентное движение газа в рамках  $k-\varepsilon$  модели турбулентности имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) &= 0, \\ \frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \tau_{ij} S_{ij} - \rho \varepsilon (1 + 2M_t^2), \\ \frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} S_{ij} - c_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k}, \\ \tau_{ij} &= \overline{\rho u_i u_j}, \tau_{ij} = \tau_{lij} + \tau_{tij}, \tau_{lij} = 2\mu \left( S_{ij} - \frac{S_{mn} \delta_{ij}}{3} \right), \end{aligned}$$

где  $u_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) – компоненты вектора скорости;  $\tau_{ij}$  ( $\tau_{tij}$ ) – тензор молекулярных (турбулентных) напряжений;  $\mu$  – турбулентная вязкость;  $k$  – кинетическая энергия турбулентности;  $\varepsilon$  – скорость диссипации турбулентной кинетической энергии;  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформаций. Остальные обозначения являются общепринятыми.

**Результаты расчетов.** Расчеты проводились для случая вертикальной сверхзвуковой струи воздуха (диаметр сопла  $d_0 = 30$  мкм, давление на выходе  $p_0 = 2$  атм). Во всей области число Маха варьировалось в диапазоне  $M = 0,02 \rightarrow 1,9$ . Геометрия задачи соответствовала геометрии экспериментальной установки для измерения значений скорости с помощью метода FLEET, изложенного в деталях в работе [4]. Задача решалась в осесимметричной постановке. Размер расчетной области составил  $1,5 \text{ см} \times 2,0 \text{ см}$ , количество ячеек сетки  $4,7 \times 10^5$  при минимальном размере ячейки  $1,5$  мкм. В расчетах использовался метод переменных направлений. Дискретизация исходных уравнений осуществлялась с использованием разностей второго порядка, ориентированных против потока, для конвективных слагаемых, и с использованием центральных разностей второго порядка для диффузионных слагаемых. Для удовлетворения уравнению неразрывности выполнялась процедура коррекции потока массы. Детали численного метода приведены в работе [5]. Учет влияния сжимаемости газа проводился в рамках модели каскадного процесса, основанного на Фурье-анализе поля скоростей.

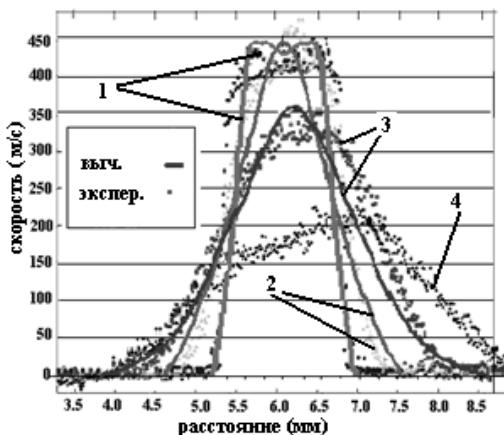


Рис. 1 – Средняя скорость потока на разных расстояниях от входного сечения при  $t = 0,5 \text{ мкс}$ . (1 –  $y/d=1$ , 2 –  $y/d=5$ , 3 –  $y/d=10$ , 4 –  $y/d=15$ ).

Экспериментальные данные взяты из работы [4]. Лазерный импульс был промоделирован как нестационарный источник в цилиндрической области высотой  $h=1 \text{ см}$  и радиусом  $R_c = 30 \text{ мкм}$ . Для оценки максимальной интенсивности источника тепла использовалось аналитическое решение уравнения теплопроводности при малых числах Фурье  $Fo = \chi\tau / R^2$  вида

$$T - T_0 = 2r^2 Fo \cdot Po / R_c^2, \text{ где } Po = QR_c^2 / (\lambda \cdot \delta T),$$

$R_c$  – радиус цилиндрической области с источником тепла;  $Q$  – максимальная интенсивность источника;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\chi$  – коэффициент температуропроводности.

В работе [4] отмечается, что в результате действия лазерного импульса шириной  $t_p = 120 \text{ фс}$  наблюдается повышение температуры воздуха в зоне разряда на величину  $\delta T = 200^\circ \text{ К}$ . Эти данные позволили оценить максимальную мощность источника  $Q$ . С учетом динамики фемтосекундного лазерного разряда временная зависимость теплового источника была смоделирована в виде линейной зависимости от времени до момента  $t = t_p / 3$ , когда достигалась максимальная интенсивность источника  $Q$ . После этого временная зависимость источника тепла предполагалась экспоненциально спадающей до  $t = t_p$ . Для проверки правильности вычислений было проведено сравнение полученных расчетных данных с экспериментальными данными о замерах скоростей на разных расстояниях от входного сечения  $y/d_0 = 1, 5, 10$ , соответствующих расстояниям 1, 5, 10 мм от входного сечения [4]. Результаты сравнения представлены на рис. 1 и демонстрируют хорошее соответствие

Вычисления проводились в два этапа. На первом шаге решалась стационарная задача расчета поля скоростей вертикальной турбулентной струи без внешнего источника тепла. На следующем шаге рассматривалась нестационарная задача, начальным условием для которой было решение стационарной задачи, а действие фемтосекундного лазерного разряда моделировалось источником тепла в уравнении теплопроводности следующим образом. С учетом размеров фокальной области лазера

между расчетными и экспериментальными данными во всей области за исключением точек в сдвиговых слоях.

Одной из причин таких отклонений является возможное влияние коротко-импульсного ввода энергии при действии фемтосекундного лазерного разряда (который использовался при проведении измерений скорости) на профили скорости при различных числах Маха. В качестве основного параметра, характеризующего такое влияние, был выбран безразмерный параметр  $\beta$ , представляющий собой относительное изменение осевой скорости  $v_y$ :

$$\beta = \text{abs}(v_y - v_y^{stat}) / v_y^{stat},$$

где  $v_y^{stat}$  – значение осевой скорости, полученное при решении стационарной задачи.

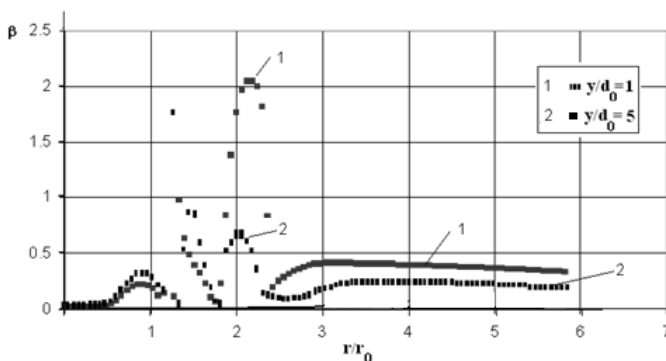


Рис. 2. – Относительные отклонения осевой скорости на разных расстояниях от входного сечения при  $t = 0.5$  мкс.

Сравнивая результаты расчетов параметра  $\beta$  в различных сечениях (кривые 1, 2 на рис. 2) в момент времени  $t = 0.5$  мкс, можно отметить, что основные отклонения в значениях скорости наблюдаются как раз в зоне разряда, моделируемого источником вдоль линии  $y/D = 1$ . При этом максимальные значения параметра  $\beta$ , а соответственно, и максимальные значения отклонений скорости вследствие этого локализованного ввода энергии находятся в сдвиговом слое, в области на границе между сверхзвуковой струей и окружающим воздухом. Возникновение подобных искажений профиля скорости при действии фемтосекундного лазерного разряда, вызывающего быстрый нагрев газа, можно объяснить тем фактом, что увеличение температуры вызывает появление градиента плотности. Этот процесс, в свою очередь, приводит к различным значениям ускорения газа в различных точках и, как следствие вызывает увеличение средней скорости сдвига, приводящее к увеличению кинетической энергии турбулентности, что следует из анализа уравнения баланса кинетической энергии турбулентности. Полученный результат также хорошо коррелирует с известным соотношением о пропорцио-

нальности временной зависимости радиуса разряда от среднеквадратичной скорости турбулентных пульсаций вида  $dr/dt \cong \sqrt{u^2(t)}$  [6].

Следует отметить, что вводимые разрядом возмущения медленно уменьшаются с течением времени, и становятся в два раза меньше при  $t = 1$  мкс, но по-прежнему велики в районе сдвигового слоя, что необходимо учитывать при обработке данных эксперимента. В тоже время количественный анализ возможного влияния импульсного ввода энергии фемтосекундного разряда на мелкомасштабную турбулентность еще находится в стадии рассмотрения, так как этот вопрос не может быть разрешен в рамках модельных RANS уравнений из-за ограничений замыкания для турбулентных напряжений и неразрешенных масштабов.

**Выводы.** Представлена тепловая модель фемтосекундного лазерного разряда в сверхзвуковом потоке газа. Проведенное сравнение экспериментальных и расчетных значений скорости подтверждает адекватность предложенной модели. Получено, что максимальные отклонения в значениях скорости наблюдаются в сдвиговом слое и являются результатом быстрого нагрева газа при действии разряда.

**Список литературы:** 1. Kang S., Patil B., Roy R.P. Effects of coincidence window and measuring volume size on laser Doppler velocimetry measurement of turbulence // *Experiments in Fluids*. – 2001. – Vol. 30. – P. 365 – 370. 2. Nakagawa S., Hanratty T.J. Particle image velocimetry measurements of flow over a wavy wall // *Physics of Fluids*. – 2001. – Vol. 13, №11. – P. 3504 – 3507. 3. Noullez G., Wallace W., Lempert W., Miles R.B., Frisch U. Transverse velocity increments in turbulent flow using the RELIFF technique // *J. Fluid Mech.* – 1997. – Vol.33. – P. 287 – 307. 4. Michael J.B., Edwards M.R., Dogariu A., Miles R.B. Femtosecond laser electronic excitation tagging for quantitative velocity imaging in air // *Applied Optics*. – 2011. – Vol.50, №20. – P.5158 – 5162. 5. Тропина А. А. / Теоретические основы процессов горения, стимулированных равновесной и неравновесной плазмой электрического разряда. Дисс. докт.техн.наук. – Киев: НАУ. – 2011 г. – 368с. 6. Shneider M.N. Turbulent decay of after-spark channel // *Phys. Plasmas*. – 2006. – Vol.13. – P. 07351(11).

Поступила в редколлегию 27.02.2014

---

УДК 537.523:538.4

**Численная оценка плазменных методов измерения скорости в сверхзвуковом потоке газа / А. А. Тропина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 199 – 204. Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2222-0631.**

Запропоновано математичну модель фемтосекундного лазерного розряду, який діє на турбулентний потік надзвукового вертикального струменя повітря. На основі чисельних розрахунків проведена оцінка впливу теплових збурювань, викликаних дією коротко-імпульсного розряду, на профілі швидкості при різних числах Маху. Шляхом порівняння з експериментальними даними відзначається, що даний спосіб виміру швидкостей має найбільшу погрешність, викликану впливом теплових збурювань, у зсунутому шарі на границі струменя з навколишнім повітрям.

**Ключові слова:** лазерний розряд, математична модель, чисельне моделювання, надзвуковий потік, профілі швидкості.



**Numerical evaluation of plasma methods for measuring velocity of a supersonic gas flow / A. A. Tropina** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 199 – 204. Bibliog.: 6 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of the femtosecond laser discharge, acting on a supersonic turbulent flow of a vertical air jet has been proposed. On the basis of numerical calculations the influence of thermal perturbations, caused by the short- pulse discharge, on the velocity profiles was evaluated for different Mach numbers. Comparison with the experimental data indicates that this method of velocity measurements has the biggest error, caused by the influence of thermal disturbances in the shear layer, at the boundary of the jet with the surrounding air.

**Key words:** laser discharge, mathematical model, numerical simulation, supersonic flow, velocity profiles.

УДК 669.189:621.746.62.001.57

**А.В. ФЕДОСОВ**, канд. техн. наук, доц., ПГТУ, Мариуполь

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СЛЯБА В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ МАШИНЫ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ ЗАГОТОВОК**

Разработана математическая модель процессов кристаллизации и усадки слэбов в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок. В основу численного решения уравнений модели положен метод конечных разностей, позволяющий производить неравномерную дискретизацию расчетной области. На базе этой модели проведены исследования по искажению профиля поперечного сечения слэба под воздействием рабочих стенок кристаллизатора.

**Ключевые слова:** метод конечных разностей, дифференциальное уравнение, дискретный аналог, непрерывнолитой слиток, кристаллизатор, машина непрерывного литья заготовок.

**Введение.** Машина непрерывного литья заготовок является ключевым агрегатом современного металлургического производства. Более 90 % жидкой стали, выплавляемой в развитых странах, разливается в непрерывнолитые заготовки различного типа. Кристаллизатор машины непрерывной разливки является ее важной составляющей, от работы которой во многом зависит процесс непрерывной разливки в целом. Кристаллизатор представляет собой медную водоохлаждаемую форму-металлоприемник, в которой начинает формироваться твердая оболочка (корочка) непрерывнолитой заготовки (НЛЗ). В этот период на неё воздействует комплекс теплофизических, гидродинамических и механических процессов, которые оказывают существенное влияние на зарождение и развитие большинства дефектов непрерывнолитой заготовки [1]. В связи с этим, совершенствованию методов исследования процессов, протекающих в кристаллизаторах машин непрерывного литья заготовок, уделяется много внимания.

**Анализ последних исследований.** На сегодняшний день в литературе представлен широкий спектр различных математических моделей формирования слитков в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок. Наиболее простые одномерные модели, как правило, применяют для решения сугубо тепловых задач охлаждения и затвердевания заготовок [2]. Разработка двухмерных моделей позволяет производить расчеты прочности и усадки поперечного сечения заготовки [3]. При решении гидродинамических задач, пространственная размерность модели должна быть представлена в трех измерениях [4]. Для численной реализации моделей наибольшее распространение получили *методы конечных разностей* (МКР) и *конечных элементов* (МКЭ). Последняя схема обладает рядом неоспоримых преимуществ: универсальность, возможность описания формы объекта практически любой сложности, неравномерная дискретизация расчетных сеток и др. [4]. Однако недостатком реализации МКЭ является относительно высокая ресурсоемкость при решении задач на персональных компьютерах.

Применение явной схемы МКР значительно сокращает требования вычислительной программы к машинным ресурсам. Однако основным требованием данного метода является то, что дискретизация моделируемого пространства должна производиться по строго ортогональным направлениям, в результате чего возникают сложности в описании объектов произвольной геометрической формы. Профиль слябовых непрерывнолитых заготовок имеет прямоугольную форму, что позволяет применять МКР при сохранении высокой точности аппроксимации пространства модели. Эти обстоятельства привели к широкому применению МКР для моделирования непрерывной разливки слябовых заготовок.

В большинстве представленных в литературе математических моделей непрерывной разливки, реализованных на базе МКР, применяется равномерная дискретизация геометрического пространства модели. Такой способ задания расчетной сетки не учитывает распределения температурных градиентов в теле модели, что ухудшает точность аппроксимации, и, как следствие – результатов расчета. В этом отношении МКР существенно проигрывает конечноэлементным методам, которые позволяют изменять плотность дискретизации в различных объемах модели в зависимости от величины температурных градиентов, что позволяет существенно уменьшить количество расчетных узлов при сохранении высокой точности аппроксимации искомой величины. В связи с этим, несомненный интерес представляет разработка конечноразностных методик, позволяющих оперировать неравномерными расчетными сетками, применение которых приближает эффективность МКР к эффективности конечноэлементных методов. При этом следует отметить, что на сегодняшний день в современной технической литературе уделяется мало внимания вопросу применения неравномерных расчетных сеток при моделировании процессов непрерывной разливки с использованием МКР.

**Постановка задачи.** Основной задачей данной работы является разработка дискретного аналога дифференциального уравнения теплопроводности

сти, позволяющего использовать неравномерную дискретизацию расчетной области с целью повышения точности и скорости численных расчетов. На основании этого уравнения составляется математическая модель затвердевания и усадки слябовой заготовки в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок и проводится анализ результатов моделирования.

**Математическая модель.** Моделирование нестационарного процесса охлаждения отливок основано на решении базового дифференциального уравнения теплопроводности [5]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) + Q_v, \quad (1)$$

где  $T$  – температура металла, °C;  $C$  – теплоемкость металла, Дж/(кг·°C);  $\rho$  – плотность металла, кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  – теплопроводность металла, Вт/(м·°C);  $\tau$  – время, с;  $Q_v$  – объемный источник тепла, Вт.

Применение МКР предусматривает замену бесконечно малых составляющих дифференциального уравнения конечными значениями, посредством дискретизации моделируемого пространства и применения гипотезы о линейном изменении температуры в пределах элемента. При этом, выражение (1) заменяется дискретным аналогом, из которого может быть получена система линейных уравнений. Обычно модель разбивают на равные по объёму и форме прямоугольные элементы, что значительно упрощает дискретный аналог дифференциального уравнения и алгоритм построения расчетной сетки. Однако, ввиду того, что такой подход обладает перечисленными выше недостатками, автором разработана конечноразностная модель, использующая неравномерную расчетную сетку.

Основным требованием к построению сетки для МКР является то, что узловые точки должны лежать на пересечениях линий, параллельных координатным осям, при этом варьируется только расстояние между этими линиями. Чем меньше шаг между линиями, тем (потенциально) точнее аппроксимация. В случае моделирования охлаждения слитка с учетом локальных коэффициентов теплоотвода желательнее повышать точность у корки слитка – на границе расчетной сетки. С учетом параболического характера распределения температуры в расчетной области предложено производить расчет линейных размеров сетки по уравнению:

$$\Delta x_i = \frac{L}{\sqrt{i}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $\Delta x_i$  – линейный размер  $i$ -того элемента, м;  $L$  – общий линейный размер модели, м;  $i$  – номер элемента;  $n$  – общее количество элементов;  $\sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$  – нормирующий коэффициент.

Нумерация элементов должна быть направлена от краев сетки к теплового центру рассматриваемого сечения.

В большинстве случаев в МКР не проводится точный вывод уравнений из (1). Вместо этого создаются упрощенные уравнения теплового баланса, оперирующие потоками, параллельными координатным осям и направленными от узла к узлу. При этом возникает понятие *контрольного объема* (КО), для которого производится расчет среднего значения теплового потока через его границы по направлениям координатных осей. На рис. 1 контрольные объемы выделены штриховкой.

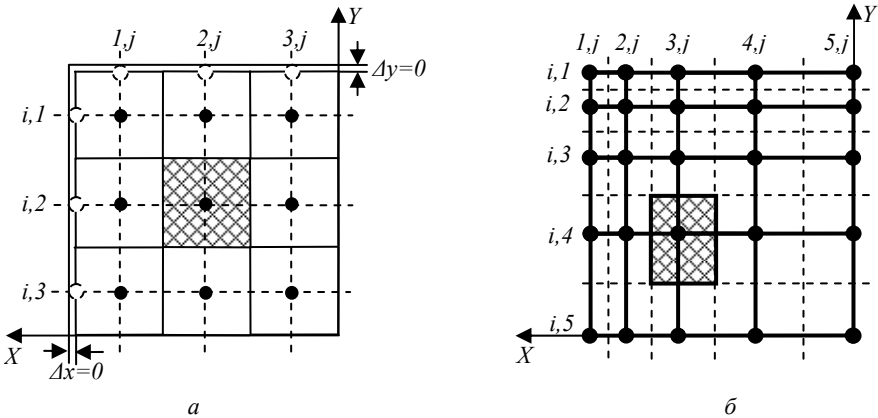


Рис. 1 – Пример дискретизации двухмерного моделируемого пространства с использованием равномерной (поз. а) и неравномерной (поз. б) расчетных сеток.

Границы КО определяются пересечением линий, проведенных по средним точкам между координатами узлов расчетной сетки. При применении равномерной расчетной сетки геометрические размеры контрольных объемов и элементов сетки совпадают, а тепловой центр контрольного объема находится в его геометрическом центре (рис. 1 а), что существенно упрощает формулирование дискретного аналога для дифференциального уравнения теплопроводности. При использовании неравномерной расчетной сетки появляется два варианта взаимного расположения КО и расчетных узлов сетки. В первом варианте расчетный узел располагается на пересечении диагоналей КО и ассоциируется с тепловым центром КО. Однако при этом варианте невозможно получить узел на границе сетки. Проблема решается введением вокруг сетки дополнительного слоя нулевой толщины, создающего узлы на «открытых» гранях контрольных объемов (рис. 1 а). Новые объемы не нарушают физики, поскольку имеют нулевую теплоемкость, нулевую теплопроводность вдоль границы и бесконечно большую теплопроводность от границы в сетку. Однако ввод дополнительных узлов увеличивает размер системы уравнений.

При втором подходе границы КО располагаются посередине между узлами расчетной сетки, которые в свою очередь смещаются относительно геометрического центра КО (рис. 1 б). Второй вариант расстановки узлов вы-

глядит проще, и узлы на границе можно получить без дополнительных приемов. Но смещение узлов относительно геометрических центров контрольных объемов усложняет вывод формул, связывающих поле температур с полем потоков, а также усложняет учет теплоемкости и других свойств материала, зависящих от температуры, что в свою очередь может повлиять на точность метода.

В данной работе представлена двухмерная модель поперечного сечения НЛЗ. Применительно к условиям теплообмена в кристаллизаторе, расчет может выполняться для четверти сечения НЛЗ. В таком случае, по осям симметрии  $X$  и  $Y$  откладываются половины ширины и толщины сечения соответственно. Также в расчётах необходимо учитывать толщину сечения, которая зависит от условий разливки. Толщина направлена по оси  $Z$ , соответствующей продольной оси машины непрерывного литья заготовок, вдоль которой движется плоская система координат поперечного сечения. Для этих условий разработан вариант дискретного аналога уравнения 1, предусматривающий возможность применения неравномерных расчетных сеток со смещенным расположением узлов относительно центра КО:

$$\rho \cdot C_{Эi,j} \cdot \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta \tau} V_{(i,j)} = (Qx_{(i+1,j)} + Qx_{(i-1,j)} + Qy_{(i,j+1)} + Qy_{(i,j-1)}), \quad (3)$$

где  $C_{Эi,j}$  – эффективная теплоемкость материала в КО, ассоциированном с узлом  $(i, j)$ , Дж/кг, (кроме непосредственной зависимости от температуры, эта величина учитывает теплоту фазового перехода [5]);  $T_{i,j}^k, T_{i,j}^{k+1}$  – температура в узле  $(i, j)$ , в момент времени  $k$  и  $k+1$  соответственно, К;  $Qx, Qy$  – тепловые потоки по оси  $x$  и  $y$  соответственно, Вт;  $V_{(i,j)}$  – локальный объем, ассоциированный с узлом  $(i, j)$ , м<sup>3</sup>;  $\Delta \tau$  – шаг по времени, с,

$$V_{(i,j)} = \frac{(y_{(j+1)} + y_{(j-1)}) \cdot (x_{(i+1)} + x_{(i-1)})}{4} Z^k, \quad (4)$$

$x_{(i)}, y_{(i)}$  – координаты узла расчетной сетки по осям  $x$  и  $y$  соответственно, м;  $Z^k$  – толщина слоя поперечного сечения модели непрерывнолитого слитка, м.

Толщина слоя определяется в соответствии со скоростью разливки ( $v$ , м/с) формулой

$$Z^k = v / \Delta \tau. \quad (5)$$

Для расчета тепловых потоков по осям используются уравнения:

$$Qx_{(i-1,j)} = \left( \frac{\lambda_{(i-1,j)} + \lambda_{(i,j)}}{2} \right) \left( \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{x_{(i)} - x_{(i-1)}} \right) Sy_{(j)}; \quad (6)$$

$$Qx_{(i+1,j)} = \left( \frac{\lambda_{(i+1,j)} + \lambda_{(i,j)}}{2} \right) \left( \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{x_{(i+1)} - x_{(i)}} \right) Sy_{(j)}, \quad (7)$$

где  $\lambda$  – теплопроводность соответствующего узла, Вт/м·К;  $S_{y(j)}$  – площадь границы контрольного объема параллельной осям  $Y, Z$ .

$$S_{y(j)} = \frac{y_{(j+1)} + y_{(j-1)}}{2} Z^k, \quad (8)$$

Тепловые потоки  $Q_y$  в направлении оси  $Y$  и площади  $Sx_{(i)}$  в направлении осей  $X, Z$  рассчитываются аналогично уравнениям (6) – (8) с подстановкой соответствующих координат и величин.

Для узлов расположенных по наружной границе, тепловые потоки с внешней стороны определяются на основании граничных условий третьего рода. Коэффициент теплоотдачи рассчитывается для каждого внешнего узла с учетом условий контактного теплообмена и теплообмена излучением через газовый зазор [6]. При расчете контактного теплообмена учитывается толщина шлакового гарнисажа в зазоре между стенкой кристаллизатора и затвердевающей корочкой слитка. Толщина шлакового гарнисажа в начальный момент принимается в диапазоне 1–3 мм [7]. В дальнейшем, по высоте кристаллизатора толщина шлакового гарнисажа изменяется в зависимости от условий усадки поперечного сечения заготовки и конусности стенок кристаллизатора.

Усадка поперечного сечения определяется на основании данных об изменении линейных размеров элементов по ортогональным направлениям  $X$  и  $Y$ :

$$l_{i,j}^{k+1} = l_{i,j}^k \cdot \left( 1 + \frac{(\alpha_{i,j}^{k+1} + \alpha_{i,j}^k)}{2} (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k) \right), \quad (9)$$

где  $l_{i,j}^k, l_{i,j}^{k+1}$  – линейный размер расчетного элемента в текущий и следующий момент времени соответственно, м;  $\alpha_i$  – коэффициент линейного расширения стали, зависящий от температуры,  $^{\circ}C^{-1}$ .

Следует учесть, что уравнение (9) описывает свободную усадку элементов расчетной сетки. Применение условия сплошности материала в модели позволит рассчитать геометрическую форму поперечного сечения заготовки, обусловленную процессом свободной усадки стали при ее затвердевании и охлаждении.

Теплофизические свойства моделируемых материалов оказывают существенное влияние на результаты расчетов. Рассматриваемые процессы охлаждения и кристаллизации стали протекают в широком интервале температур (1000 – 1600  $^{\circ}C$ ), для которого, в зависимости от химического состава стали, могут происходить различные полиморфные превращения, приводящие к изменению теплофизических свойств стали. С целью повышения адекватности результатов моделирования целесообразно использовать функциональные зависимости теплофизических свойств стали от температуры. В разработанной модели применяется кусочно-линейная аппроксимация значений основных теплофизических свойств стали. Узловые значения теплофизических параметров принимаются на основании имеющихся в литературе экспери-

ментальных данных для моделируемых марок стали (рис. 2).

Применение кусочно-линейной аппроксимации позволяет достаточно точно учитывать изменения свойств стали при относительно простом способе программной реализации.

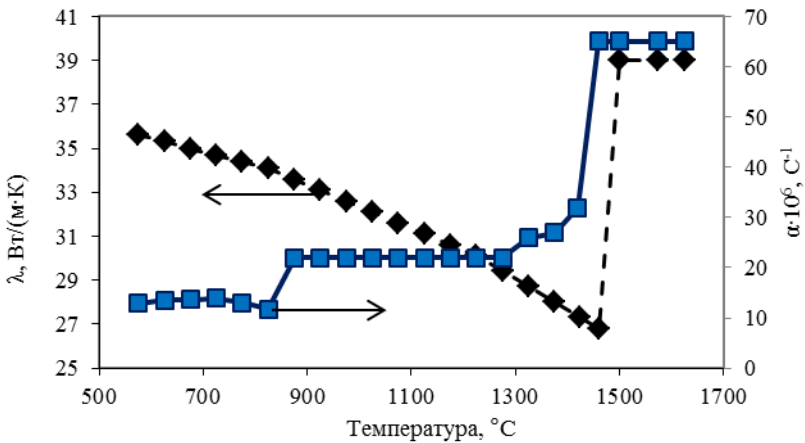


Рис. 2 – Зависимость величины теплопроводности и коэффициента термического сжатия от температуры низколегированной перитектической стали.

**Результат работы программы.** В результате использования представленной математической модели получаем тепловое поле и геометрическую форму поперечного сечения НЛЗ (рис. 3).

Прогнозирование геометрического профиля заготовки позволяет оценивать условия взаимодействия затвердевающей корочки со стенками кристаллизатора и роль их конусности в процессе формирования непрерывнолитой заготовки. Абсолютные значения величины усадки корочки стали по длине широкой грани существенно превосходят значения по длине узкой грани. Это приводит к искажению профиля заготовки в ее углах, что проиллюстрировано на рис. 3. Применение неравномерной расчетной сетки позволяет детально оценить характер искажений профиля заготовки (размеры элементов в углах заготовки на рис. 3 находятся на уровне 1,5 – 2 мм).

В представленных примерах расчета (рис. 3 б – з) рассмотрены несколько вариантов взаимодействия корочки стали со стенками кристаллизатора. На рис. 3 б конусность узких стенок кристаллизатора недостаточна для компенсации усадки твердой оболочки слитка. В этом случае происходит выпучивание узких граней сляба и формирование различных трещин в его углах.

Рис. 3 в – вариант избыточной конусности. В этом случае узкие стенки кристаллизатора воздействуют на корку стали, сформированную по широкой грани непрерывнолитой заготовки, поджимая ее в направлении оси заготовки. Усилия, приложенные к корке с двух сторон, могут вызывать ее деформацию и изменение условий контакта с широкими стенками кристаллизатора. Кроме этого, возрастает величина сил трения в углах нижней части кристаллизатора. В результате это приводит к повышенному износу рабочих

стенок кристаллизаторов и ухудшению качества поверхности непрерывнолитой заготовки.

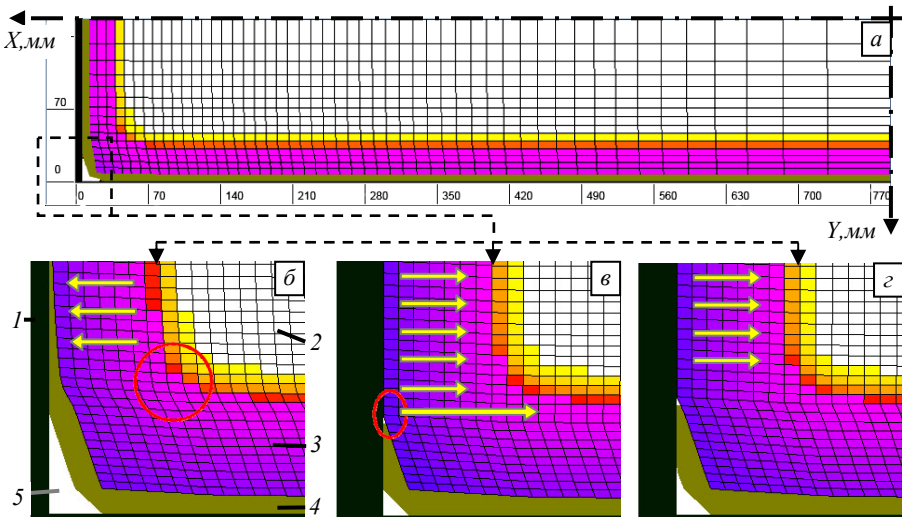


Рис. 3 – Результаты расчета теплового и геометрического профиля поперечного сечения НЛЗ в нижней точке кристаллизатора: *a* – общий вид расчетной сетки; *б* – недостаточная конусность; *в* – избыточная конусность; *з* – рациональная конусность; 1 – кристаллизатор; 2 – жидкая сталь; 3 – твердая корочка стали; 4 – шлаковый гарнисаж; 5 – газовый зазор.

Решая задачу оптимизации в рамках предложенной модели, возможно определение третьего варианта взаимодействия стенок кристаллизатора и корочки слитка – вариант рациональной конусности (рис. 3 *з*). Основным условием рациональной конусности стенок кристаллизатора является максимально точная компенсация усадки корочки стали сформированной по широкой грани слябовой заготовки.

Отдельный интерес представляет анализ распределения теплового потока по поверхности непрерывнолитой заготовки. Тепловой поток по основной площади широкой грани (рис. 4 *a*) монотонно уменьшается по мере продвижения расчетного сечения от мениска стали к выходу из кристаллизатора. Такой характер изменения величины теплового потока связан с уменьшением температуры поверхности слитка по мере роста толщины твердой корочки и увеличения ее теплового сопротивления. Резкое уменьшение теплового потока по краям широкой грани обусловлено термической усадкой корки твердой стали, сформированной по узкой грани, что сопровождается увеличением зазора между поверхностями слитка и кристаллизатора.

Тепловой поток по узкой грани сляба характеризуется большой неравномерностью. В отличие от широкой грани, посередине узкой происходит увеличение теплового потока. Это связано с уменьшением зазора между по-



верхностью заготовки и стенкой кристаллизатора, обусловленным величиной конусности его узких стенок. Пиковое значение теплового потока соответствует моменту плотного контакта корочки непрерывнолитой заготовки и рабочей стенки кристаллизатора. По краям узкой грани, также как и в случае с широкой гранью, происходит резкое уменьшение теплового потока, связанное с усадкой твердой оболочки стали.

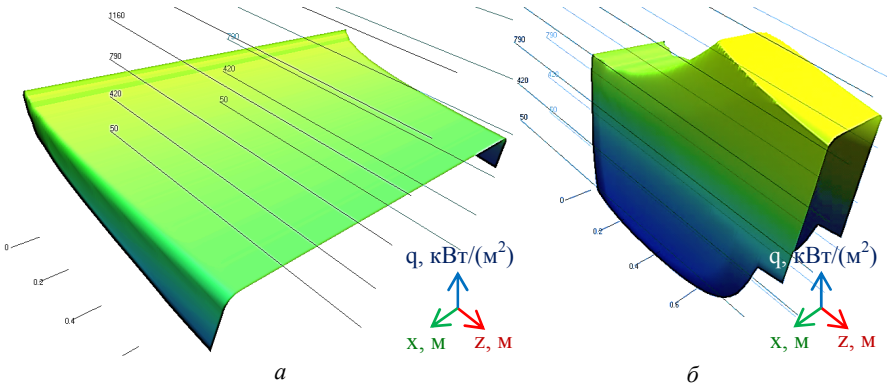


Рис. 4 – Распределение величины теплового потока: *а* – по широкой и *б* – по узкой граням непрерывнолитой заготовки.

Анализ результатов расчета позволяет сделать ряд заключений.

- На величину усадки корочки стали, сформированной по широкой грани заготовки, основное влияние оказывают свойства разливаемой стали и условия теплообмена по широким граням кристаллизатора. При этом локальные уменьшения коэффициента теплоотдачи в углах заготовки, вызванные изменением условий контакта и возникновением газового зазора, практически не оказывают влияния на величину усадки корочки в целом. Однако, негативное влияние резких изменений величины теплового потока в углах заготовки сказывается на термонапряженном состоянии твердой корочки стали, что в результате увеличивает вероятность образования трещин.

- Действие ферростатического давления на твердую оболочку слитка противоположно по направлению силам, возникающим в результате усадки. Преобладание силы ферростатического давления приводит к выпучиванию заготовки и возникновению растягивающих деформаций, сопровождающихся образованием трещин в твердой корочке стали. В этом случае стенки кристаллизатора выступают в роли формообразователя заготовки и принимают на себя воздействие ферростатического давления.

**Перспективы дальнейших исследований.** В представленной работе не приводится расчет и анализ влияния сил ферростатического давления на формирование твердой оболочки непрерывнолитой заготовки. Учитывая весомость данного фактора целесообразно учесть его в будущих работах.

**Выводы.** Предложенный вид конечноразностного дискретного аналога

дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности позволяет производить неравномерную геометрическую дискретизацию моделируемого пространства. Это, в свою очередь, позволяет учесть неравномерный характер распределения температурных градиентов по сечению заготовки и, тем самым, существенно повысить эффективность использования модели.

На базе предложенного подхода разработана математическая модель формирования непрерывнолитых слябов в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок, позволяющая повысить эффективность исследований процессов формирования теплового и геометрического профиля слябов. Результаты моделирования могут быть использованы при решении задач по оптимизации условий взаимодействия кристаллизатора и оболочки слитка.

**Список литературы:** 1. *Смирнов А.Н., Куберский С.В., Штенан Е.В.* Непрерывная разливка стали: Учебник. – Донецк: ДонНТУ, 2011. – 482 с. 2. *Шишкин В.А., Кузнецова Н.П., Чугункова М.С.* Исследование и совершенствование тепловой работы кристаллизатора машины непрерывного литья заготовок // Известия ВУЗов Черная Металлургия. – 2010. – №1. – С. 55 – 57. 3. *Ivanova A.A.* Criteria of the quality of the temperature field of a continuous-cast ingot // Metallurgist, Vol. 55, Nos. 9 – 10, January, 2012. – pp. 710 – 719. 4. *Jong-Кyu YOON* Applications of Numerical Simulation to Continuous Casting Technology // ISIJ International, Vol. 48 (2008), No. 7. – pp. 879 – 884. 5. *Патанкар С.В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. – М.: Издательство МЭИ, 2003. – 312 с. 6. *Дюдкин Д. А.* Качество непрерывнолитой стальной заготовки. – К.: Техніка, 1988. – 253 с. 7. *Ludlow, V., Harris, B., Riaz, S.*[etc.] Continuous casting mould powder and casting process interaction: why powders do not always work as expected // VII International Conference on Molten Slags Fluxes and Salts, The South African Institute of Mining and Metallurgy, 2004. – pp. 723 – 730.

*Поступила в редколлегию 24.01.2014*

---

УДК 669.189:621.746.62.001.57

**Математическое моделирование профиля поперечного сечения сляба в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок / А. В. Федосов** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 204 – 213. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

Розроблено математичну модель процесів кристалізації і усадки слябів в кристаллизаторі машини безперервного лиття заготовок. В основі чисельного рішення моделі покладено метод кінцевих різниць, що дозволяє проводити нерівномірну дискретизацію розрахункової області. На основі цієї моделі проведені дослідження з викривлення профілю поперечного перерізу слябу під впливом робочих стінок кристаллизатора.

**Ключові слова:** метод кінцевих різниць, диференціальне рівняння, дискретний аналог, безперервнолитий злиток, кристаллизатор, машина безперервного лиття заготовок.

UDC 669.189:621.746.62.001.57

**Mathematical modeling of the cross-sectional profile of the slab in the mold of continuous casting machine / A.V. Fedosov** // Bulletin of National Technical University NTU «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 204 – 213. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of the slabs crystallization and shrinkage processes in the mold of continuous casting machine is developed. The numerical solution of the model is based on the method of finite differences that allows to apply irregular sampling of calculation area. On the basis of this model, studies towards the distortion of the slab cross-sectional profile exposed to the mold working walls are conducted.

**Key words:** Finite difference method, differential equation, discrete analog, the strand, mold, continuous casting machine.

**В.Л. ХАВІН**, канд. техн. наук, зав. каф., НТУ «ХП»;

**Л.В. АВТОНОМОВА**, канд. техн. наук, провід. наук. співр., НТУ «ХП»;

**С.І. МАРУСЕНО**, наук. співр., НТУ «ХП»

## **МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИСОКОШВИДКІСНОГО РІЗАННЯ НА БАЗІ НЕЗАЛЕЖНОГО ПІДХОДУ ЛАГРАНЖА-ЕЙЛЕРА**

Розглянуто рішення зв'язаної динамічної термопружнопластичної контактної задачі взаємодії ріжучого інструменту і матеріалу, що обробляється, на основі методу скінчених елементів у формулюванні незалежного підходу Лагранжа-Ейлера (ALE). Чисельну реалізацію проведено методом скінчених елементів за допомогою пакету ABAQUS/Explicit.

**Ключові слова:** математичне моделювання, термопружнопластична контактна задача, процес різання, незалежний підхід Лагранжа-Ейлера, скінчений елемент.

**Опис проблеми.** Процес різання – комплексний процес, що полягає в утворенні зони великих пластичних деформацій і тепловиділення у зоні первинного здигу та подальшого інтенсивного пластичного деформування у вторинних зонах, які примикають в області контакту клина з матеріалом, що обробляється. У цій області за рахунок руху матеріалу уздовж інструменту спостерігається значне тертя. На думку *T.H. Childs* [1] труднощі математичного моделювання процесів відділення матеріалу ріжучим клином пов'язані із трьома основними причинами: значна свобода у формуванні стружки, що впливає на складність моделювання процесу, який представляється у вигляді крайової задачі зі змінними границями; високі рівні та градієнти полів пластичних деформацій, швидкостей деформацій і температур, які впливають на стан матеріалу в зоні обробки ріжучим клином та викликають значні труднощі при описі цього стану; складний характер тертя на поверхні контакту між інструментом та матеріалом. Для теоретичного аналізу процесів деформування тіл різної форми найчастіше використовується *метод скінчених елементів* (МСЕ). Імітаційне моделювання за допомогою МСЕ дозволяє розраховувати всі необхідні фізичні змінні процесу, які дуже складно одержати експериментально.

**Постановка задачі.** Ціль даної роботи – математичне моделювання процесів відділення матеріалу ріжучим клином за допомогою МСЕ в формулюванні незалежного підходу *Лагранжа-Ейлера* (ALE).

Розглядається зв'язана термопружнопластична контактна задача, яка описує взаємодію ріжучого клина та матеріалу, що зрізується.

Використання формулювання Лагранжа-Ейлера має на меті адаптацію сітки в процесі чисельного моделювання та може використовуватися у формулюванні Ейлера для розв'язку проблеми вільних поверхонь, а також у формулюванні Лагранжа, щоб уникнути значних викривлень сітки [2].

Математична модель для описання процесу відділення стружки в ALE включає рівняння *законів збереження маси, моменту та енергії* в відліковій системі координат і має наступний вигляд (штрихом позначено похідні по часу в відліковій системі координат):

$$\rho' + (v_i - v_i^g) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i}; \quad (1)$$

$$\rho v_i' + \rho(v_i - v_i^g) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i^B; \quad (2)$$

$$\rho e' + \rho(v_j - v_j^g) \frac{\partial e}{\partial x_j} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho r - \frac{\partial q_i}{\partial x_j}, \quad (3)$$

де  $\rho, \rho'$  – густина і швидкість її зміни;  $v_i, v_i'$  – швидкості й прискорення матеріальної точки;  $v_i^g, v_j^g$  – швидкості руху відрхункової системи координат;  $x_i(x_j)$  – декартова координата ( $i, j = x, y, z$ );  $e = e(\rho, T)$  – питома внутрішня енергія;  $\sigma_{ij}$  – компоненти *тензора напруг Гука*,  $r$  – щільність внутрішніх розподілених джерел тепла;  $q_i$  – компоненти вектора напруження теплового потоку;  $f_i^B$  – компоненти вектора об'ємних сил;  $T$  – температура.

При застосуванні гіпотези нестискування матеріалу в умовах пластичного деформування (для постійної гущини) рівняння (1) виконується тотожно, а динамічне рівняння рівноваги (2) в формулюванні рівняння віртуальної роботи в *інкрементальній формі* і лінеаризованому вигляді в момент часу  $t$  при відсутності об'ємних і поверхніх зусиль (окрім контактних) набуває такого вигляду [3, 4]:

$$\begin{aligned} & \int_V \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \delta e_{ij} dV + \int_V \bar{\sigma}_{ij} \delta e_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} dV + \int_V \rho \bar{a}_i \delta u_i dV + \int_V \rho (v_j - v_j^g) \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \delta u_i dV + \\ & + \int_V \rho (\bar{v}_i - \bar{v}_i^g) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i dV + \int_V (\bar{u}_k - \bar{u}_k^g) \sigma_{ij} \frac{\partial \delta e_{ij}}{\partial x_k} dV + \int_V \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_k} dV = \\ = & - \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV - \int_V \rho (v_j - v_j^g) \delta u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dV - \int_V \rho \bar{a}_i \delta u_i dV - \int_V \rho (v_k - v_k^g) \frac{\partial (a_i \delta u_i)}{\partial x_{kj}} \Delta t dV - \\ & - \int_V \rho (v_k - v_k^g) \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} - 2 \frac{\partial v_j^g}{\partial x_k} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i \Delta t dV - \\ & - \int_V \rho (v_k - v_k^g) (v_j - v_j^g) \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta u_i \right) \Delta t dV \Big|_t, \quad (4) \end{aligned}$$

де  $\dot{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + (v_k - v_k^g) \partial \sigma_{ij} / \partial x_k$  – компоненти тензору швидкостей напружень в матеріальній системі координат;  $\Delta t$  – інкрементальний крок по часу;

$e_{ij} = 0,5(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  – тензор деформацій;  $u_i, u_i^*$  – матеріальні і відлікові переміщення відповідно.

В рівнянні (4) введено залежності:

$$a_i|_{t+\Delta t} = a_i|_t + a_i^*, v_i|_{t+\Delta t} = v_i|_t + v_i^*, v_i^g|_{t+\Delta t} = v_i^g|_t + v_i^{*g}, \quad (5)$$

де  $a_i^*, v_i^*, v_i^{*g}$  – інкрементальний приріст прискорень і швидкостей на часовому кроці від  $t$  до  $t + \Delta t$ . Знак  $|_t$  показує належність відповідних співвідношень моменту часу  $t$ ,  $|_{t+\Delta t}$  – моменту часу  $t + \Delta t$ .

Фізичні співвідношення у швидкісній формі представляються у вигляді:

$$\sigma_{ij}^T = C_{ijkl} D_{kl}, \quad (6)$$

де  $\sigma_{ij}^T$  – компоненти *тензора швидкостей напруг за Трусделлом*:

$$\sigma_{ij}^T = \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\lambda v_k}{\partial x_k} \sigma_{ij} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sigma_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sigma_{jk},$$

$C_{ijkl}$  – компоненти пружно-пластичного тензору зв'язку напруги-деформації 4-го порядку,  $D_{kl} = 0,5(\partial v_k / \partial x_l + \partial v_l / \partial x_k)$  ( $k, l = x, y, z$ ) – компоненти тензору швидкостей деформацій;  $\dot{\sigma}_{ij}$  – компоненти тензору швидкостей напружень в матеріальній системі координат.

Пластичне деформування матеріалу підпорядковується асоційованому закону теорії течії в швидкісній формі:

$$D_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7)$$

де  $D_{ij}^p$  – пластична складова тензору швидкостей деформацій;  $\dot{\lambda}$  – параметр пластичності.  $F$  – пластичний потенціал, який задається у вигляді:

$$F(\sigma_{ij}, \sigma_y) = f(\sigma_{ij}) - \sigma_y \quad (8)$$

і обертається в нуль (тобто  $F(\sigma_{ij}, \sigma_y) = 0$ ) при настанні пластичної течії, де  $f(\sigma_{ij})$  – функція пластичності;  $\sigma_y$  – функціональна залежність для поточної межі текучості (напружень пластичної течії), яка залежить від еквівалентної деформації, еквівалентної швидкості пластичної деформації і температури, що представляють собою визначальне співвідношення (рівняння) для матеріалу:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p, \dot{\bar{\varepsilon}}^p, T), \quad (9)$$

де  $\bar{\varepsilon}^p$  – еквівалентна (ефективна) пластична деформація;  $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$  – швидкість еквівалентної пластичної деформації;  $T$  – температура. Вважається, що пластичний потенціал  $F$  не змінюється за часом (тобто  $\dot{F} = 0$ ). Залежності (5) – (9) створюють разом з (4) систему рівнянь, що дозволяє отримати нелінійне матричне рівняння, в яке лінійно входять інкрементальні переміщення  $u_i^k$  і

$u_i^{*g}$ , інкрементальні швидкості  $v_i^k$  і  $v_i^{*g}$  та прискорення  $a_i^*$ .

Повне динамічне рівняння в матричній формі методу скінченних елементів має вигляд [4]:

$$\begin{aligned} M^L \bar{a} + C^{A1} \bar{v} + C^{A2} (\bar{v} - \bar{v}^g) + K^L \bar{u} + K^A (\bar{u} - \bar{u}^g) = \\ = \bar{f} - (M^L + M^A) a + (C^{A1} + C^{A3} + C^{A4}) v|_t, \end{aligned} \quad (10)$$

де матриці  $M^L, M^A, C^{A1}, C^{A2}, C^{A3}, C^{A4}, K^L, K^A$  отримані в роботах [3, 4];  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{a}$  – збільшення векторів матеріальних вузлових переміщень, швидкостей і прискорень у момент часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ ;  $\bar{u}^g, \bar{v}^g$  – збільшення вузлових переміщень, швидкостей для незалежного руху вузлів сітки в момент часу від  $t$  до  $t + \Delta t$ ;  $v, a$  – значення вузлових матеріальних швидкостей і прискорень у момент часу  $t$ ;  $\bar{f}$  – вектор вузлових зусиль.

У процесах різання енергія, яка згенерована дисипацією роботи сил тертя і роботою пластичного деформування, передається у вигляді тепла через матеріал, що обробляється, стружку та інструмент і переходить у навколишнє середовище через випромінювання і конвекцію. Ріст температури впливає на властивості матеріалу та провокує збільшення деформацій.

Закон збереження енергії (3) представляється у вигляді нестационарного рівняння конвективно-кондуктивної теплопровідності, яке в рамках ALE має наступний вигляд [5]:

$$\rho c \dot{T} + \rho c (v_i - v_i^{*g}) \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial (\lambda^* \frac{\partial T}{\partial x_i})}{\partial x_i} = \dot{q}_v, \quad (11)$$

де  $c$  – теплоємність;  $\lambda^*$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\dot{q}_v$  – швидкість тепловиділення об'ємних джерел тепла.

Рівняння (11) в дискретизованій формі метода скінченних елементів представлено у вигляді [6]

$$C_T \dot{T}_n + K_T T_n = \dot{Q}(t_n), \quad (12)$$

де  $C_T$  – матриця теплоємності;  $K_T$  – матриця теплопровідності;  $\dot{Q}$  – вектор інтенсивностей вузлових «впливів», які викликані роботою пластичного деформування і сил тертя;  $T, \dot{T}$  – вектора вузлових температур і швидкостей зміни температури відповідно.

Швидкість виділення тепла внаслідок пластичного деформування визначається залежністю

$$\dot{q}_v = \eta^* \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cong \eta^* \sigma_{ij} D_{ij}^p, \quad (13)$$

де  $\eta^*$  – механічний еквівалент тепла ( $\eta^* \approx 0,9$ ).

Тепловиділення внаслідок тертя в контактi задається так:

$$\dot{q}_s = \eta^* |\tau_f v_f|, \quad (14)$$

де  $\tau_f, v_f$  – дотичні (фрикційні) зусилля і швидкість проковзування в області контакту зі проковзуванням. Розподіл тепла між інструментом і матеріалом, що обробляється, задається у відповідності з теплофізичними властивостями контактуючих тіл [7].

Крайова контактна механічна задача розв’язується в інкрементальній формі для прирощення вузлових прискорень, швидкостей і переміщень з кроком по часу  $\Delta t$ . По закінченню інкрементального кроку в механічній задачі розв’язується задача нестационарної теплопровідності для системи ріжучий клин – матеріал, що обробляється, і формується температурне поле, яке використовується як початковий стан для наступного шагу в задачі механіки.

Для розв’язання контактної задачі застосовується кінематичний метод, нелінійна пружно-пластична задача розв’язується *методом Ньютона-Рафсона*, інтегрування за часом здійснюється на основі чисельних залежностей для центрального диференціювання.

**Чисельна реалізація.** Розглянуто задачу ортогонального різання у вигляді двовимірної зв’язаної термомеханічної задачі плоскої деформації для термопружного ріжучого клину і пружно-пластичного матеріалу, що обробляється. Розрахункова схема надана на рис. 1, крайові умови представлені вільними лагранжевими границями (робочі поверхні інструменту, стружки і верхня частина області, яка зайнята матеріалом, що обробляється), ейлеровими границями – вхід і вихід матеріалу, що обробляється, зі швидкістю різання  $v_c$ , а також границею проковзування і границею контакту. На віддалених границях ріжучого клину реалізовані вимоги жорсткого закріплення.

Задача теплопровідності розв’язується при фіксованій температурі, яка дорівнюється початковій ( $T_0$ ) на бічних і нижніх границях області, яка зайнята матеріалом, а також на віддалених границях ріжучого клину. На вільних границях враховується вільний конвективний теплообмін з навколишнім середовищем.

Як зазначено раніше, було розглянуто двовимірну термомеханічну зв’язану контактну задачу плоскої деформації для термопружного ріжучого клину і термопластичного матеріалу, в якому виникають великі пластичні деформації. Задача розв’язується в формі незалежного підходу Лагранжа-Ейлера.

Визначальні співвідношення обрано в формі *моделі Джонсона-Кука*:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p, \dot{\varepsilon}_p, T), \\ \sigma_y &= (A + B\bar{\varepsilon}_p^n)(1 + C \ln \dot{\varepsilon}_p) \left[ 1 - (T^*)^m \right], \quad \varepsilon_p^* = \dot{\varepsilon}_p / \dot{\varepsilon}_{p0}, \\ T^* &= (T - T_0) / (T_m - T_0), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\bar{\varepsilon}_p, \dot{\varepsilon}_p$  – еквівалентні пластичні деформації і швидкості;  $T_m$  – температура плавлення матеріалу;  $T_0$  – початкова температура,  $A, B, C, n, m$  – константи;  $\dot{\varepsilon}_{p0}$  – відлікова швидкість деформацій.

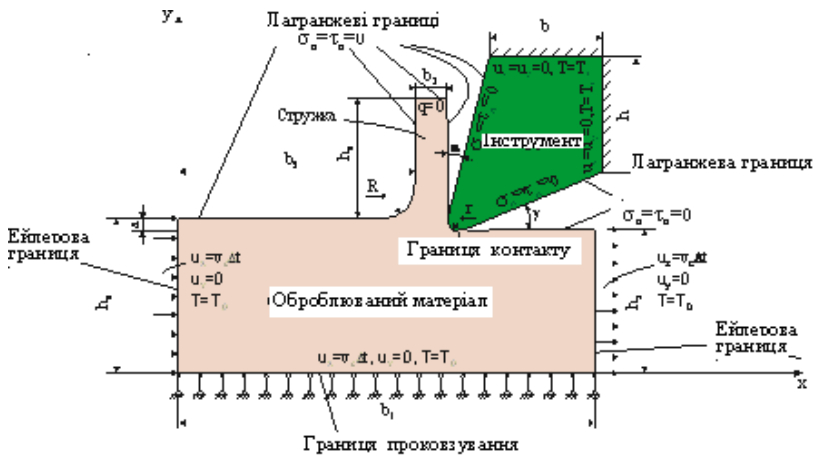


Рис. 1 – Розрахункова схема.

Модель тертя на контактній поверхні задавалась у вигляді:

$$\tau_n = \min(\mu\sigma_n, \tau_y), \quad (16)$$

де  $\tau_n, \sigma_n$  – контактні зсувні зусилля дотичної (напруження) і тиск (нормальні напруження в контакті);  $\mu$  – коефіцієнт тертя ( $\mu = 0,5$ ).

Таблиця 1 – Фізико-механічні характеристики

Характеристика	Матеріал сплав (20NiCrMo5)	Інструмент (карбід вольфраму)
Густина, кг/см <sup>3</sup>	7.8	15
Коеф. Пуассона	0.3	0.3
Модуль пружності, ГПа	210	800
Коеф. Теплопровідності, Вт/м °С	47.7	46
Теплоємність, Дж/кг °С	556	203
Коеф. лінійного розширення, 1/°С	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$

В табл. 1 наведено фізико-механічні характеристики матеріалу, що обробляється, і ріжучого клину, в табл. 2 – вхідні геометричні параметри ріжучого клину і технологічні процесу різання, в табл. 3 – константи рівняння Джоунсона – Кука [8].

Таблиця 2 – Геометрія ріжучого клину і технологічні параметри процесу різання

Параметр	Значення
Передній кут $\alpha$	$6^\circ$
Задній кут $\gamma$	$6^\circ$
Швидкість різання $v_0$ , мм/с	5000
Товщина зрізу $a$ , мм	0.1
Початковий радіус закруглення вістря $r$ , мм	0.1



Таблиця 3 – Константи рівняння Джонсона-Кука

Матеріал	Сплав 20NiCrMo5
$A$ , МПа	490
$B$ , МПа	600
$n$	0.21
$C$	0.015
$m$	0.6
$T_m$ , °К	1900
$T_0$ , °К	293

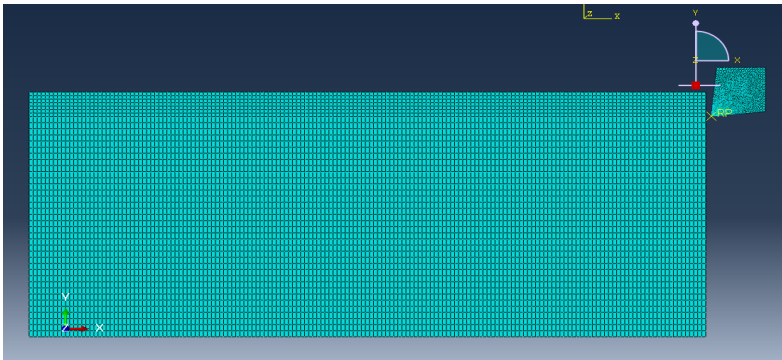


Рис. 2 – Сітка скінчених елементів.

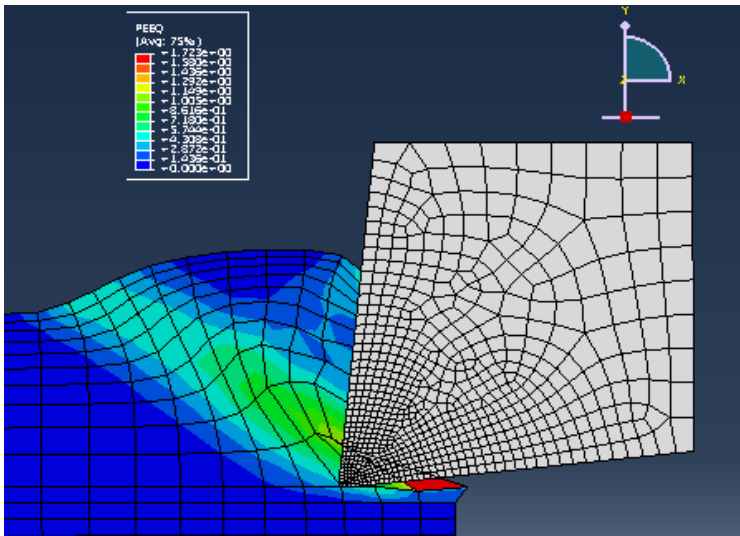


Рис. 3 – Еквівалентні пластичні деформації в початковій фазі процесу різання ( $t \approx 2 \cdot 10^{-5}$  с).

Чисельні розрахунки проводилися за допомогою пакету ABAQUS/Explicit з використанням зв'язаного термомеханічного білінійного кінцевого елемента CPE4RT; кількість елементів для матеріалу, що обробляється, становила 3005, для клина – 280 елементів.

На рис. 2 представлено розрахункову схему розбиття сіткою скінчених елементів.

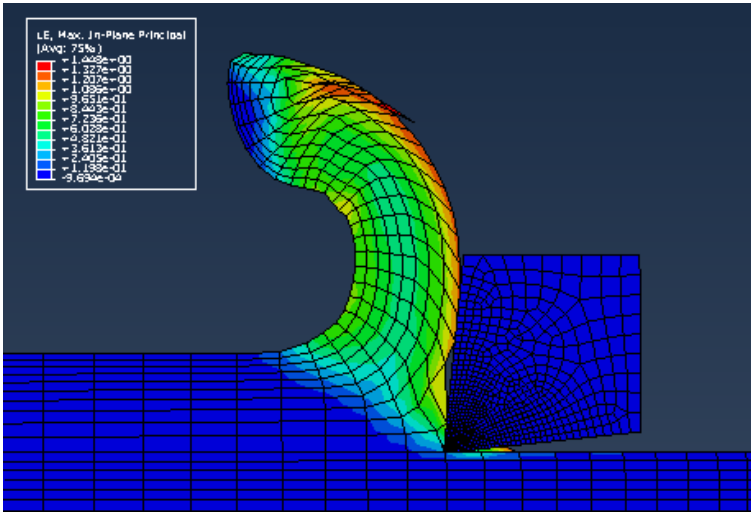


Рис. 4 – Еквівалентні пластичні деформації для сталого процесу різання ( $t \approx 1 \cdot 10^{-4}$  с).

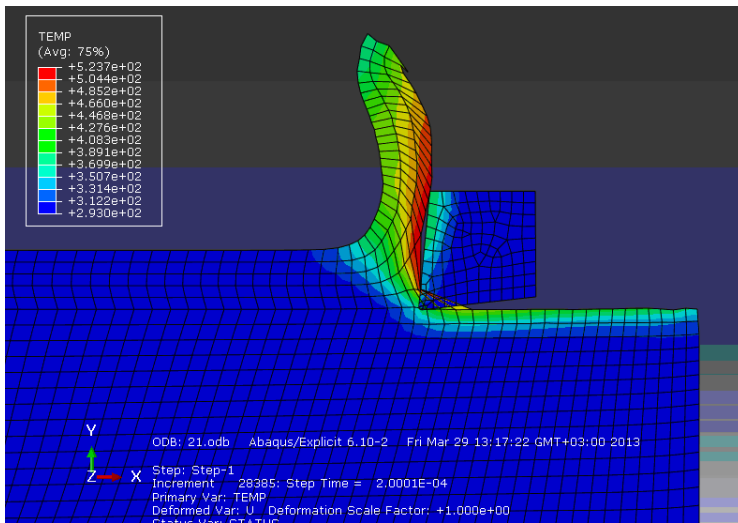


Рис. 5 – Температурні поля в контакті.

На рис. 3, 4 надано розподіл еквівалентних логарифмічних пластичних деформацій в початковій фазі процесу різання ( $t \approx 2 \cdot 10^{-5}$  с) і в момент квазі-сталого процесу різання  $t \approx 1 \cdot 10^{-4}$  с. На рис. 5 показано температурне поле в момент часу  $t \approx 1,5 \cdot 10^{-1}$  с. Слід відзначити, що температурне поле ще є не-стаціонарним і практично формується до моменту часу  $t \approx (2,5 - 3) \cdot 10^{-4}$  с.

**Висновки.** В роботі розглянуто розв'язання зв'язаної динамічної термопружнопластичної контактної задачі застосовано до процесу взаємодії ріжучого клину з матеріалом, що обробляється. Задача розв'язана за допомогою пакета ABAQUS/Explicit методом скінчених елементів в формулюванні незалежного підходу Лагранжа-Ейлера. Отримані результати показали реальну практичну можливість моделювання процесу утворення стружки на персональних комп'ютерах.

Застосування незалежного підходу Лагранжа-Ейлера дозволяє більш ефективно (з точки зору часу роботи процесора) розв'язувати істотно нелінійно зв'язану термомеханічну задачу моделювання процесу різання матеріалів з утворенням зливної (неперервної) стружки. Так, для розв'язання розглянутої задачі з достатньою точністю до моменту формування квазістаціонарного різання необхідно порядком 15 годин роботи процесора, для чисельного рішення розглянутої задачі на основі підходу Лагранжа необхідно декілька днів.

Внаслідок інерційності процесів теплообміну час розрахунків до формування квазістаціонарного температурного поля в 2–3 рази більший, ніж час формування сталого стружкоутворення.

Надалі для отримання більш точних кількісних результатів моделювання процесу стружкоутворення слід проводити за наступними напрямками:

- удосконалення моделі стану матеріалу, що обробляється, для високих рівнів швидкостей деформацій і температур;
- розробка нових моделей локального тертя, які враховують залежність від температури, тиску і швидкості проковзування;
- більш точний опис граничного теплообміну з навколишнім середовищем і в контакті ріжучого клину з матеріалом, що обробляється.

**Список літератури:** 1. Childs T.H.C. Material property needs in modeling metal machining / T.H.C. Childs // *Machining science and Technology*. – 1998. – V. 2, №2. – P. 303 – 316. 2. Movahhedy M.R. FE modeling of chip formation in orthogonal metal cutting process: An ALE approach. / *Machining Science and technology* / M.R. Movahhedy, M.G.Gadata, Y. Altintas // – 2000. – V.4. – PP. 15 – 47. 3. Movahhedy M.R. ALE simulation of chip formation in orthogonal metal cutting process / M.R. Movahhedy. – PhD Dissertation. The University of British Columbia. – 2000. 4. Bayoumi H.N. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for quasi-static and dynamic metal forming simulation / H.N.Bayoumi // University of British Columbia, PhD. Dissertation. – 2001. 5. Hsu T.R. The finite element method in thermomechanics / T.R. Hsu // Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA. – 1986. 6. Huener K.H. The finite element method for engineers / K.H. Huener, E.A. Thornton, T.G. Byrom // John Wiley and Sons Inc., New York, USA. – 1995. – 656 P. 7. Secto G.S. Numerical simulation of continuous chip formation during non-steady orthogonal cutting / G.S. Secto, J.L. Shenot // *Engineering computations*. – 1993. – Vol. 10. – P. 31 – 48. 8. Хавин В.Л. Моделирование накопления износа при высокоскоростном резании на основе МКЭ / В.Л. Хавин, А.М. Гриненко, Л.В. Автономова, А.В. Степук

---

УДК 539

**Моделювання процесу високошвидкісного різання на базі незалежного підходу Лагранжа-Ейлера / В. Л. Хавін, Л. В. Автономова, С. І. Марусенко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 214 – 223. Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2222-0631.

Рассмотрено решение связанной динамической термоупругопластической контактной задачи взаимодействия режущего инструмента и обрабатываемого материала на основе метода конечных элементов в формулировке независимого подхода Лагранжа-Эйлера (ALE). Численная реализация проведена методом конечных элементов с помощью пакета ABAQUS/Explicit.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, термоупругопластическая контактная задача, процесси різання, незалежний підхід Лагранжа-Эйлера, конечный элемент.

UDC 539

**Modelling the high-speed cutting process on the basis of the Lagrange-Euler arbitrary approach / V. L. Navin, L. V. Avtonomova, S. I. Marusenko** // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 214 – 223. Bibliog.: 8 titles. – ISSN 2222-0631.

The coupled dynamic thermal elastoplastic contact problem of cutting tool - processed material interaction is solved by the finite element method (FEM). The Lagrange-Euler (ALE) arbitrary approach is utilized. The numerical implementation is carried out by the FEM using the ABAQUS / Explicit software.

**Key words:** mathematical modeling, thermal elastoplastic contact problem, the cutting process, the Euler-Lagrange approach, final element modelling.

УДК 539.3

**В.И. ЩЕГЛОВ**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПІ»

## **ОБ ОДНОМ ЭФФЕКТЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО ПОЛОГО ШАРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО СФЕРИЧЕСКОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА**

Установлен эффект уменьшения диаметра внутренней граничной сферы упругого полого шара и граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью в результате их нагрева, вызванного действием на них сферических температурных полей специального вида, при положительности коэффициента линейного расширения и определенном характере зависимости от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона их материала.

**Ключевые слова:** полый шар, граничная сфера, нагрев, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения.

**Введение и цель работы.** При решении технических задач формообразования и тепловой сборки соединений с натягом в машиностроении возникает необходимость расчета векторных полей перемещений граничных поверхностей упругих тел, вызванных воздействием на эти тела различных температурных полей. Принципиально важным для решения вышеуказанных технических задач является нахождение у рассматриваемых упругих тел формы и размеров граничных поверхностей, образовавшихся в результате их термоупругих деформаций.

Целью настоящей работы является нахождение формы и размеров граничных поверхностей упругого полого шара и упругого пространства с шаровой полостью при воздействии на них сферических температурных полей, моделирующих нагрев этих тел, сконцентрированный вблизи внутренней граничной сферы – для полого шара и граничной сферы – для упругого пространства с шаровой полостью.

**Постановка задачи.** Пусть рассматриваются однородные и изотропные упругий полый шар, обозначаемый  $B$ , с граничными концентрическими сферами радиуса  $R_0$  и  $R_2$  ( $R_0 < R_2$ ) и упругое пространство с шаровой полостью радиуса  $R_0$ , обозначаемое  $\Pi$ . Центральные сечения указанных выше упругих тел  $B$  и  $\Pi$  показаны на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

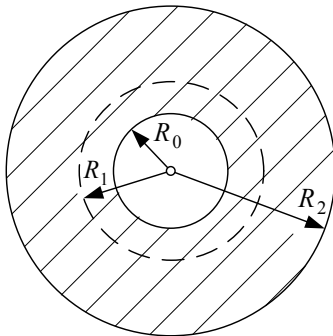


Рис. 1 – Сечение упругого полого шара.

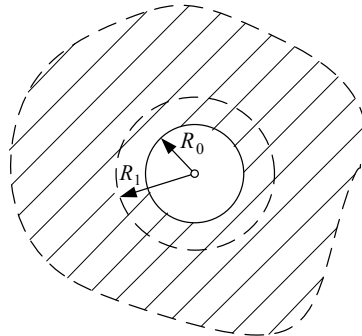


Рис. 2 – Сечение упругого пространства с шаровой полостью.

Все точки этих упругих тел имеют одинаковую исходную температуру, равную  $T_0$ , при которой эти тела находятся в ненапряженном состоянии. На рассматриваемые упругие тела  $B$  и  $\Pi$  действует температурное поле, вызывающее равномерный их нагрев до температуры  $T_n$  ( $T_n > T_0$ ) во всех точках замкнутого подмножества этих тел, представляющего собой полый шар  $B_1$ , одна из граничных сфер которого совпадает с граничной сферой радиуса  $R_0$  упругих тел  $B$  или  $\Pi$ , а другая граничная сфера тела  $B_1$  имеет радиус  $R_1 < R_2$ . Остальные точки тел  $B$  и  $\Pi$  после воздействия температурного поля имеют исходную температуру  $T_0$ . Сечение полого шара  $B_1$  показано на

рис. 1 и рис. 2. Требуется в рамках математической модели *несвязной квазистатической термоупругости* определить форму граничных поверхностей тел  $B$  и  $\Pi$  и их размеры после воздействия на эти тела вышеописанных температурных полей. Коэффициент теплопроводности материала тел  $B$  и  $\Pi$  считается не зависящим от температуры в пределах ее изменения от  $T_0$  до  $T_n$ .

**Решение задачи.** В силу сферической симметрии нагреваемых тел  $B$  и  $\Pi$ , а также того, что температурные поля, вызывающие их нагрев, являются сферическими, приходим к выводу, что граничные поверхности тела  $B$  в результате его нагрева будут иметь форму концентрических сфер, а граничная поверхность тела  $\Pi$  – форму сферы. Будем рассматривать как нагреваемые тела  $B$  и  $\Pi$ , так и функции распределения температурных полей, вызывающих их нагрев, в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром граничных сфер тела  $B$  или центром граничной сферы тела  $\Pi$ . Функции распределения температурных полей, возникающих в телах  $B$  и  $\Pi$  в результате их вышеописанного нагрева, в выбранной сферической системе координат имеют вид:

для полого шара

$$T = T_0 + (T_n - T_0)H(1 - r/R_1),$$

$$R_0 \leq r \leq R_2;$$

для упругого пространства с шаровой полостью

$$T = T_0 + (T_n - T_0)H(1 - r/R_1), \quad (1)$$

$$r \geq R_0,$$

где  $H(p)$ ,  $p \in (-\infty, +\infty)$  – *единичная функция Хэвисайда*, равная 1 при  $p \geq 0$  и равная 0 при  $p < 0$ ;  $r, \varphi, \theta$  – координаты точки тел  $B$  и  $\Pi$  во введенной выше сферической системе координат;  $\varphi, \theta$  – *азимутальный* и *зенитный* угол точки соответственно.

Функции распределения (1) рассматриваемых температурных полей, возникающих в результате нагрева тел  $B$  и  $\Pi$ , моделируют нагрев этих тел, сконцентрированный вблизи внутренней граничной сферы тела  $B$  или граничной сферы тела  $\Pi$ . Температурные поля, возникающие в телах  $B$  и  $\Pi$  в процессе нагрева, задаются функциями распределения:

для полого шара

$$T = T_0 + (T_n - T_0)f(\tau/\tau_n)H(1 - r/R_1),$$

$$R_0 \leq r \leq R_2, 0 \leq \tau \leq \tau_n;$$

для упругого пространства с шаровой полостью

$$T = T_0 + (T_n - T_0)f(\tau/\tau_n)H(1 - r/R_1), \quad (2)$$

$$r \geq R_0, 0 \leq \tau \leq \tau_n,$$

где  $\tau_n$  – время, прошедшее от начала до окончания нагрева тела  $B$  или тела  $\Pi$ ;  $\tau$  – время, отсчитываемое от начала нагрева тела  $B$  или тела  $\Pi$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_n$ );  $f(p)$  – числовая функция, возрастающая и гладкая на  $[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ .

Функции (2) являются решениями неоднородного уравнения теплопроводности при объемных плотностях распределения мощности источников

тепла, задаваемых обобщенными функциями. При  $\tau = \tau_n$  функции (2) равны соответствующим функциям (1).

Решение задачи определения размеров граничных поверхностей тел  $B$  и  $\Pi$  в результате их указанного выше нагрева (при  $\tau = \tau_n$ ) рассмотрим в двух следующих случаях:

1. Когда предполагается, что в процессе нагрева упругих тел  $B$  и  $\Pi$  ( $0 \leq \tau \leq \tau_n$ ) модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  их материала не зависят от температуры в пределах её изменения от  $T_0$  до  $T_n$ .

2. Когда учитывается при решении задачи зависимость от температуры модуля Юнга  $E$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и коэффициента линейного расширения  $\alpha$  материала упругих тел  $B$  и  $\Pi$ .

**В первом случае** формулы для вычисления отличных от тождественно нуля физических компонент  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_\theta$  тензора напряжений тела  $B$ , приведенные в работе [1], позволяют найти следующие равенства:

$$\begin{aligned} &\text{при } R_0 \leq r \leq R_1 && \text{при } R_1 < r \leq R_2 \\ \sigma_r(r) &= -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right) \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3}; && \sigma_r(r) = -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \frac{1 - R_0^3 / R_1^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} \left(1 - \frac{r^3}{R_2^3}\right); \\ \sigma_\varphi(r) &= \sigma_\theta(r) = && \sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = \\ &= -\frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(2 + \frac{R_0^3}{r^3}\right) \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3}; && = \frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right) \frac{1 + 2(r^3 / R_2^3)}{1 - R_0^3 / R_2^3}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $t_n = T_n - T_0$ ;  $E$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного расширения материала полого шара соответственно.

Используя закон Гука, находим формулы для вычисления компонент  $\varepsilon_\varphi$  и  $\varepsilon_\theta$  тензора деформаций полого шара  $B$  при любом  $r \in [R_0, R_2]$ :

$$\begin{aligned} &\text{при } R_0 \leq r \leq R_1 && \text{при } R_1 < r \leq R_2 \\ \varepsilon_\varphi(r) &= \varepsilon_\theta(r) = \alpha t_n \left[1 - \frac{1}{3(1-\nu)} \times \right. && \varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \frac{1}{3(1-\nu)} \frac{1 - R_0^3 / R_1^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} \frac{R_1^3}{r^3} \times \\ &\left. \times \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} (2(1-2\nu) + (1+\nu) \frac{R_0^3}{r^3})\right]; && \left. \times [1 + \nu + 2(1-2\nu) \frac{r^3}{R_2^3}]\right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Учитывая связь единственной, отличной от тождественного нуля, компоненты  $Ir$  вектора перемещений  $\vec{I}$  упругого тела  $B$  с компонентой  $\varepsilon_\theta$  тензора деформаций, находим:

$$\begin{aligned} &\text{при } R_0 \leq r \leq R_1 && \text{при } R_1 < r \leq R_2 \\ Ir(r) &= r\varepsilon_\theta(r) = \alpha t_n r \left\{1 - \frac{1}{3(1-\nu)} \times \right. && Ir(r) = r\varepsilon_\theta(r) = \frac{\alpha t_n}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^2} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1 - R_1^3 / R_2^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} [2(1 - 2\nu) + (1 + \nu) \frac{R_0^3}{r^3}]; \quad \times \frac{1 - R_0^3 / R_1^3}{1 - R_0^3 / R_2^3} \{1 + \nu + 2(1 - 2\nu) \frac{r^3}{R_2^3}\}. \quad (5)$$

Из формул (5) при  $r = R_0$  и  $r = R_2$  находим значение единственной, отличной от тождественного нуля, компоненты  $Ir$  вектора перемещений  $\vec{I}$  в точках граничных сфер полого шара  $B$ :

$$Ir(R_0) = \alpha_0 R_0 t_{cp}; \quad Ir(R_2) = \alpha_0 R_2 t_{cp}, \quad (6)$$

где  $t_{cp}$  – среднее значение изменения температуры нагрева полого шара при воздействии на него температурного поля (1);  $\alpha_0$  – коэффициент линейного расширения материала упругого полого шара при  $T = T_0$ .

Осуществляя предельный переход  $R_2 \rightarrow +\infty$  в формулах (3), (4), (5) находим выражения для  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ ,  $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$ ,  $Ir$  во всех точках упругого пространства с шаровой полостью:

при  $R_0 \leq r \leq R_1$

$$\sigma_r(r) = -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right),$$

$$\sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = -\frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \left(2 + \frac{R_0^3}{r^3}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \alpha t_n \left\{1 - \frac{1}{3(1-\nu)} \times [2(1-2\nu) + (1+\nu) R_0^3 / r^3]\right\},$$

$$Ir(r) = \frac{\alpha t_n (1+\nu)}{3(1-\nu)} r \left(1 - \frac{R_0^3}{r^3}\right),$$

при  $R_1 < r \leq R_2$

$$\sigma_r(r) = -\frac{2\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right);$$

$$\sigma_\varphi(r) = \sigma_\theta(r) = \frac{\alpha t_n E}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right);$$

$$\varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \frac{\alpha t_n (1+\nu)}{3(1-\nu)} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right) \frac{R_1^3}{r^3};$$

$$Ir(r) = \frac{\alpha t_n (1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{R_1^3}{r^2} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right). \quad (7)$$

Из формул (7) при  $r = R_0$  находим значение компоненты  $Ir$  вектора перемещений  $\vec{I}$  на граничной сфере упругого пространства с шаровой полостью:

$$Ir(R_0) = 0. \quad (8)$$

Необходимо отметить, что согласно работе [2] коэффициент Пуассона материала упругих тел  $B$  и  $\Pi$  удовлетворяет условию:  $-1 < \nu < 0,5$ . Коэффициент линейного расширения материала тел  $B$  и  $\Pi$  с учетом существования инварных сплавов может быть как положительным, так и равным нулю или отрицательным. Ввиду существования *эливарных сплавов* модуль Юнга материала исследуемых тел может при нагревании как уменьшаться, так и увеличиваться или не изменяться (по этим вопросам см. работу [3]).

Таким образом, при применении к исследованию деформаций упругих тел  $B$  и  $\Pi$  математической модели несвязной квазистатической термоупругости и предположения о неизменности в результате их нагрева модуля Юн-



га, коэффициента Пуассона, коэффициента линейного расширения и коэффициента теплопроводности их материала установлено, что в результате воздействия на нагреваемые тела температурных полей (1) граничные их сферы остаются сферами; диаметры граничных сфер пологого шара увеличиваются при  $\alpha_0 > 0$ , уменьшаются при  $\alpha_0 < 0$  и остаются неизменными при  $\alpha_0 = 0$ , радиусы граничных сфер изменяются на величину, задаваемую формулами (6); диаметр граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью в результате нагрева температурным полем (1) остается неизменным.

Необходимо отметить, что при воздействии на упругий полый шар температурного поля, задаваемого произвольной кусочно-непрерывной на  $[R_0, R_2]$  функцией распределения, диаметры граничных сфер упругого полого шара увеличиваются при  $\alpha_0 t_{cp} > 0$ , уменьшаются при  $\alpha_0 t_{cp} < 0$  и остаются неизменными при  $\alpha_0 t_{cp} = 0$ . При воздействии на упругое пространство с шаровой полостью температурного поля, задаваемого кусочно-непрерывной на  $[R_0, R_1]$  функцией распределения, равной  $T_0$  при  $r > R_1$ , диаметр ее граничной сферы остается неизменным.

**Второй случай решения** поставленной выше задачи о термоупругой деформации граничных сфер полого шара и граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью рассматривается, когда учитывается температурная зависимость модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала рассматриваемых упругих тел. Как и ранее предполагаем, что вызывающие термоупругие деформации этих упругих тел температурные поля являются сферическими и задаются в указанной выше сферической системе координат функциями (1). Функция распределения изменения температуры упругих тел  $B$  и  $\Pi$  зависит только от  $r$  – расстояния точки тела от начала координат и в дальнейшем обозначается  $t(r)$ . Тогда имеют место следующие равенства:

для полого шара

для упругого пространства с шаровой полостью

$$t(r) = \begin{cases} t_n = T_n - T_0, & R_0 \leq r \leq R_1; \\ 0, & R_1 < r \leq R_2; \end{cases} \quad t(r) = \begin{cases} t_n = T_n - T_0, & R_0 \leq r \leq R_1; \\ 0, & r > R_1. \end{cases} \quad (9)$$

В силу того, что воздействующие на рассматриваемые упругие тела температурные поля являются сферическими, имеем равенство нулю двух физических компонент  $(I_\varphi, I_\theta)$  вектора перемещений  $\vec{I}$  в каждой точке этих тел, а физическая компонента  $I_r$  зависит только от переменной  $r$ . В дальнейшем функцию, выражающую зависимость  $I_r$  от  $r$  будем обозначать  $u(r)$ , то есть имеет место равенство  $I_r = u(r)$ . Аналогично для физических компонент тензора деформаций:  $\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\varphi\theta} = 0$  и для физических компонент тензора напряжений:  $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\varphi\theta} = 0$ .

В каждом из открытых полых шаров  $B1: R_0 < r < R_1$  и  $B2: R_1 < r < R_2$ , являющихся подмножеством рассматриваемого полого шара  $B: R_0 \leq r \leq R_2$ , выполняются равенства:

$$\varepsilon_r = u'(r), \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = u(r)/r$$

– следствие связи физических компонент тензора деформаций с физическими компонентами вектора перемещений;

$$u'' + (2/r)u' - (2/r^2)u = 0$$

– следствие закона Гука, уравнений равновесия рассматриваемых упругих тел и связи физических компонент тензора деформаций и вектора перемещений. При рассмотрении упругого пространства с шаровой полостью имеют место такие же соотношения в открытом полом шаре  $B1$  и в пространстве с шаровой полостью радиуса  $R_0$ , обозначаемом  $B3$  (точки граничной сферы не принадлежат  $B3$ ). В случае рассмотрения термоупругих деформаций полого шара функция  $u(r)$ , являясь решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{2}{r}u' - \frac{2}{r^2}u = 0, \quad (10)$$

на  $(R_0, R_1)$  и  $(R_1, R_2)$ , имеет вид

$$u(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad R_0 < r < R_1; \quad u(r) = D_1 r + \frac{D_2}{r^2}, \quad R_1 < r < R_2. \quad (11)$$

и является непрерывной на сегменте  $[R_0, R_2]$ . Коэффициенты  $C_1, C_2, D_1, D_2$  однозначно определяются из следующих условий:

$$u(R_1 + 0) = u(R_1 - 0); \quad (12)$$

$$\sigma_r(R_0) = 0; \quad (13)$$

$$\sigma_r(R_2) = 0; \quad (14)$$

$$\sigma_r(R_1 + 0) = \sigma_r(R_1 - 0), \quad (15)$$

причём функции  $u(r)$  и  $\sigma_r(r)$  являются непрерывными на  $[R_0, R_2]$ .

Решая систему линейных алгебраических уравнений относительно  $C_1, C_2, D_1, D_2$ , полученную из условий (11) – (15), находим выражения для постоянных  $C_1, C_2, D_1, D_2$  через  $R_0, R_1, R_2, \nu_1 = \nu(T_n), \nu_2 = \nu(T_0), E_1 = E(T_n), E_2 = E(T_0), \alpha_1 = \alpha(T_n)$ , где, следуя работе [4],  $\alpha(T_n)$  – среднее значение коэффициента линейного расширения материала полого шара в диапазоне изменения температуры от  $T_0$  до  $T_n$ . Тогда, используя равенство (1), получаем: при  $R_0 \leq r \leq R_1$

$$u(r) = \alpha_1 t_n r \frac{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right] - \frac{R_0^3}{r^3}}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]}; \quad (16)$$

при  $R_1 < r \leq R_2$

$$u(r) = \alpha_1 t_n r \frac{\frac{R_1^3}{R_2^3} + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_1} \frac{E_1}{E_2} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{1+\nu_2}{2(1-2\nu_2)} \frac{R_2^3}{r^3}\right]}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]}. \quad (17)$$

Используя равенство (17), находим

$$u(R_2) = \alpha_1 t_n R_2 \frac{\frac{R_0^3}{R_2^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3}}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]}. \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что при  $\alpha_1 > 0$  диаметр внешней граничной сферы увеличивается, при  $\alpha_1 < 0$  – уменьшается, а при  $\alpha_1 = 0$  – остаётся неизменным.

Используя равенство (16), находим

$$u(R_0) = \alpha_1 t_n R_0 \frac{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right] - 1}{\frac{2(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} + \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1(1+\nu_2)}{E_2(1+\nu_1)} \frac{1-R_0^3/R_1^3}{1-R_1^3/R_2^3} \left[1 + \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \frac{R_1^3}{R_2^3}\right]}. \quad (19)$$

Из формулы (19) следует, что при  $\alpha_1 > 0$  и

$$R_0 < R_1 < R_2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\right) / \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_1}\right)} \quad (20)$$

диаметр внутренней граничной сферы полого шара уменьшается. Условие (20) может выполняться, только если имеет место неравенство

$$\frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1} < 1. \quad (21)$$

Условие (21) выполняется, например, для полого шара, если модуль Юнга материала с ростом температуры от  $T_0$  до  $T_n$  уменьшается, а коэффициент Пуассона увеличивается. В случае, когда для материала полого шара условие (21) не выполняется, при  $\alpha_1 > 0$  диаметр внутренней граничной сферы полого шара увеличивается, при  $\alpha_1 < 0$  – уменьшается, а при  $\alpha_1 = 0$  – остаётся неизменным. Если условие (21) выполняется, то для удобства установления тех случаев нагрева тела  $B$ , при которых диаметр его внутренней граничной сферы увеличивается, уменьшается или не изменяется, введем в рассмотрение величину  $\tilde{R}_1$ :

$$\tilde{R}_1 = R_2 \sqrt[3]{\left(1 - \frac{E_1}{E_2} \frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}\right) / \left(1 + \frac{E_1}{E_2} \frac{2(1-2\nu_2)}{1+\nu_1}\right)} < R_2. \quad (22)$$

Тогда, если  $\tilde{R}_1 \leq R_0$  :

для любого  $R_1 \in (R_0, R_2)$  диаметр внутренней граничной сферы тела  $B$  при  $\alpha_1 > 0$  – увеличивается, при  $\alpha_1 < 0$  – уменьшается, при  $\alpha_1 = 0$  – не изменяется;

если  $\tilde{R}_1 > R_0$  :

для любого  $R_1 \in (R_0, \tilde{R}_1)$  диаметр внутренней граничной сферы тела  $B$  при  $\alpha_1 > 0$  – уменьшается, при  $\alpha_1 < 0$  – увеличивается, при  $\alpha_1 = 0$  – не изменяется; для любого  $R_1 \in (\tilde{R}_1, R_2)$  диаметр граничной сферы тела  $B$  при  $\alpha_1 > 0$  – увеличивается, при  $\alpha_1 < 0$  – уменьшается, при  $\alpha_1 = 0$  – не изменяется; если  $R_1 = \tilde{R}_1$ , то диаметр внутренней граничной сферы полого шара не изменяется.

В случае рассмотрения упругого пространства с шаровой полостью функция  $u(r)$  задается равенством:

$$u(r) = \begin{cases} C_1 r + C_2 / r^2, & R_0 < r < R_1; \\ D / r^2, & r > R_1. \end{cases} \quad (23)$$

Коэффициенты  $C_1, C_2, D$ , входящие в представление (23), однозначно определяются путем удовлетворения условиям (12), (13), (15). Тогда при  $R_0 < r < R_1$  имеет место равенство

$$u(r) = \alpha_1 t_n \frac{\left[ \frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \left( 1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right) \right] r - \frac{R_0^3}{r^2}}{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{2(1 - 2\nu_1)}{1 + \nu_1} + \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \left( 1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right)}. \quad (24)$$

Из формулы (24), учитывая непрерывность функции  $u(r)$  на  $[R_0, +\infty)$  получаем:

$$u(R_0) = -\alpha_1 t_n R_0 \frac{\left( 1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right) \left( 1 - \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \right)}{\frac{R_0^3}{R_1^3} + \frac{2(1 - 2\nu_1)}{1 + \nu_1} + \frac{E_1 (1 + \nu_2)}{E_2 (1 + \nu_1)} \left( 1 - \frac{R_0^3}{R_1^3} \right)}. \quad (25)$$

В случае  $\alpha_1 > 0$ , убывания модуля Юнга и возрастания коэффициента Пуассона материала упругого пространства с шаровой полостью при возрастании температуры материала от  $T_0$  до  $T_n$  имеем в силу формулы (25) неравенство  $u(R_0) < 0$ . То есть в указанном случае при воздействии сферического температурного поля рассматриваемого вида на упругое пространство с шаровой полостью диаметр граничной сферы уменьшается.

Из формулы (25) в общем случае следует, что при выполнении условия  $\alpha_1 [1 - (E_1 : E_2)(1 + \nu_2) : (1 + \nu_1)] > 0$

диаметр граничной сферы уменьшается, при

$$\alpha_1[1 - (E_1 : E_2)(1 + \nu_2) : (1 + \nu_1)] < 0$$

– увеличивается, а при

$$\alpha_1[1 - (E_1 : E_2)(1 + \nu_2) : (1 + \nu_1)] = 0$$

– не изменяется.

**Результаты моделирования.** Рассмотрим пример расчета диаметра внутренней граничной сферы полого шара при воздействии на него температурного поля (1). Материал полого шара – медь,  $R_0 = 25$  мм,  $R_2 = 150$  мм,  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ ,  $T_n = 100^\circ\text{C}$ . В расчетах использовались следующие значения коэффициентов  $E, \nu, \alpha$ :  $E = 13,2$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0,31$ ,  $\alpha = 16,4 \cdot 10^{-6}$  1/К при  $T = 0^\circ\text{C}$ ;  $E = 12,8$  кг/мм<sup>2</sup>,  $\nu = 0,315$ ,  $\alpha = 17,1 \cdot 10^{-6}$  1/К при  $T = 100^\circ\text{C}$ .

В качестве среднего значения  $\alpha$  в диапазоне температур  $0 - 100^\circ\text{C}$  принято  $16,83 \cdot 10^{-6}$  1/К. Значения коэффициентов  $E, \nu, \alpha$  при  $T = 0^\circ\text{C}$  и  $T = 100^\circ\text{C}$  выбирались из различных информационных источников, в том числе из работы [5].

Согласно формуле (22) находим  $\tilde{R}_1 = 41,89$  мм (с точностью до сотой доли мм). Рассмотрим три характерных случая.

1)  $R_1 = \tilde{R}_1$ . Тогда, при учете температурной зависимости  $E, \nu, \alpha$  получаем с точностью до сотой доли мкм  $u(R_0) = 0$ . Следовательно, диаметр внутренней граничной сферы тела  $B$  не изменяется. Пренебрегая зависимостью  $E, \nu, \alpha$  от температуры нагрева полого шара, получаем  $u(R_0) = 0,71$  мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы тела  $B$  увеличивается на 1,42 мкм.

2)  $R_1 = 30$  мм  $< \tilde{R}_1$ . Тогда, при учете температурной зависимости  $E, \nu, \alpha$  получаем  $u(R_0) = -0,38$  мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы тела  $B$  уменьшается (в результате нагрева) на 0,76 мкм. При пренебрежении температурной зависимостью  $E, \nu, \alpha$  получаем  $u(R_0) = 0,14$  мкм, то есть, в результате нагрева, диаметр внутренней граничной сферы увеличивается на 0,28 мкм;

3)  $R_1 = 50$  мм  $> \tilde{R}_1$ . Тогда, учитывая температурную зависимость  $E, \nu, \alpha$  материала полого шара, находим  $u(R_0) = 0,57$  мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы увеличивается на 1,14 мкм. Пренебрегая температурной зависимостью  $E, \nu, \alpha$  материала полого шара при нагреве, получаем  $u(R_0) = 1,33$  мкм, то есть диаметр внутренней граничной сферы тела  $B$  увеличивается на 2,66 мкм.

**Выводы.** При использовании для исследования термоупругих деформаций полого шара и упругого пространства с шаровой полостью математической модели несвязной квазистатической термоупругости с учетом зависи-

мости от температуры модуля Юнга, коэффициента Пуассона и коэффициента линейного расширения материала нагреваемых упругих тел проявляется эффект уменьшения диаметра внутренней граничной сферы полого шара при воздействии на него сферического температурного поля вида (1) и выполнении условия (20) и  $\alpha_1 > 0$ , а также эффект уменьшения диаметра граничной сферы упругого пространства с шаровой полостью при воздействии на него сферического температурного поля вида (1), когда выполняются условия (21) и  $\alpha_1 > 0$ . Этот эффект не проявляется, если при расчетах пренебречь зависимостью от температуры модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала нагреваемых полого шара и упругого пространства с шаровой полостью.

**Список литературы:** 1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах. Том 1 / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко – М.: Машиностроение, – 1968. – 831 с. 2. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, – 1970. – 939 с. 3. Арзамасов Б.Н. [и др.] Материаловедение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, – 2004. – 648 с. 4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, – 1975. – 216 с. 5. Машиностроение: Энциклопедия. Т. 1.-2. Теоретическая механика. Термодинамика. Теплообмен / под ред К.С. Колесникова. – М.: Машиностроение, – 1999. – 600 с.

*Поступила в редколлегию 12.03.2014*

---

УДК 539.3

**Об одном эффекте деформирования упругого полого шара при воздействии на него сферического температурного поля специального вида / В.И.Шеглов // Вісник НТУ «ХПІ».** Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 223 – 233. Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2222-0631.

Встановлено ефект зменшення діаметру внутрішньої межової сфери пружної порожньої кулі та межової сфери пружного простору з кулевою порожністю в результаті їх нагрівання, яке визване дією на них сферичних температурних полів спеціалізованого виду, при додатності коефіцієнту лінійного розширення та визначеному характері залежності від температури модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона їх матеріалу.

**Ключові слова:** полая куля, межева сфера, нагрівання, модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, коефіцієнт лінійного розширення.

UDC 539.3

**On an effect of deformation of a resilient hollow ball under the influence of a spherical temperature field of a special type / V.I. Shcheglov // Bulletin of National Technical University «KhPI»** Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 223 – 233. Bibliog.: 5 titles. – ISSN 2222-0631.

The effect of diminishing of the diameter of the internal border sphere of a resilient hollow ball and the border sphere of a resilient space with a ball cavity as a result of heating, caused by acting on them of spherical temperature fields of a special type, is exposed for the positive coefficient of linear expansion and certain character of dependence of Young's modulus and Poisson's ratio of the material on the temperature.

**Key words:** hollow ball, border sphere, heating, Young's modulus, Poisson's ratio, coefficient of linear expansion.

## З М І С Т

<i>Автономова Л. В., Бондарь С. В., Степук А. В.</i> Деформирование П-образной тонкостенной конструкции с рёбрами жёсткости при ударе шаром.....	3
<i>Андренко П. М., Свинарченко М. С., Ремцова А. Х.</i> Параметричні дослідження гідравлічного гасителя пульсацій тиску з автоматичним підстроюванням параметрів.....	9
<i>Богучарский С. И.</i> Обработка изображений на основе комбинированного векторного квантования с использованием полуконтролируемого обучения.....	20
<i>Бойко Д. А., Филатова А. Е.</i> Метод визуализации патологических структур на маммограммах с использованием послойного наложения.....	29
<i>Гайдамака А. В.</i> Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта, радиального зазора и изгиба колец.....	35
<i>Григорьев А. Л.</i> Модернизация метода характеристик для расчёта интенсивных импульсов нагнетания жидкости.....	42
<i>Димитрова-Бурлаенко С. Д.</i> Асимптотически почти периодические функции Левитана в пространствах Фреше.....	59
<i>Зайончковський Г. Й., Федоричко Я. Б.</i> Математичне моделювання експлуатаційних змін технічного стану малогабаритних електромагнітних клапанів.....	67
<i>Козьмин Ю. С.</i> Математическое моделирование объектов с распределёнными параметрами для управления процессами кристаллизации.....	81
<i>Кошовий А. Г., Кошовий Г. І.</i> Метод інтегральних рівнянь в задачах розсіювання акустичних хвиль дофрактальними ґратками.....	94
<i>Курпа Л. В., Осетров А. А., Шматко Т. В.</i> Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью метода $R$ -функций и сплайн-аппроксимации.....	99
<i>Лебедєв А. Ю.</i> Підвищення технічного рівня лабіринтно-гвинтового насоса за рахунок вдосконалення його робочих органів.....	111
<i>Любарский Б. Г.</i> Определение рационального угла наклона кузова скоростного электропоезда с тяговым приводом на основе реактивного индуктивного двигателя с аксиальным магнитным потоком.....	118

<i>Мазур О. С., Ткаченко В. В.</i> Динамічна стійкість багат шарових пластин складної форми.....	124
<i>Мачуга О. С.</i> Особливості проектування лісозаготівельної техніки для роботи на територіях з ухилом. Частина 1. Математична модель.....	130
<i>Мигущенко Р. П., Кропачек О. Ю., Артёмов М. П.</i> Однопараметровий контроль стану динамічних промислових об'єктів за допомогою тестових статистик.....	145
<i>Николаев А. Г., Танчик Е. А.</i> Напряжённое состояние пористого материала в области между четырьмя сфероидальными порами.....	150
<i>Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.</i> ВБК – приближение в расчётах колебаний осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением.....	160
<i>Пильов В. В.</i> Удосконалення опису зносу паливних струменів тангенційним вихором робочого тіла в об'ємі камери згоряння дизеля.....	169
<i>Плаксий Ю. А.</i> Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла.....	175
<i>Степанов М. С., Гасанов М. І., Волошкіна І. В.</i> Моделювання теплового режиму в технологічній системі охолодження шліфувального верстату.....	185
<i>Сіренко Ф. Ф.</i> Особливості застосування методу найменших квадратів при параметричній ідентифікації спрощеної статичної характеристики ГТД на ділянці запуску.....	191
<i>Тропина А. А.</i> Численная оценка плазменных методов измерения скорости в сверхзвуковом потоке газа.....	199
<i>Федосов А. В.</i> Математическое моделирование профиля поперечного сечения сляба в кристаллизаторе машины непрерывного литья заготовок.....	204
<i>Хавін В. Л., Автономова Л. В., Марусенко С. І.</i> Моделювання процесу високошвидкісного різання на базі незалежного підходу Лагранжа-Ейлера.....	214
<i>Щеглов В. И.</i> Об одном эффекте деформирования упругого полого шара при воздействии на него сферического температурного поля специального вида.....	223



НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«ХПІ»**

**Збірник наукових праць**

Серія:  
Математичне моделювання  
в техніці та технологіях

№ 6 (1049)

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,  
Технічний редактор С. Д. Нижник

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».  
Кафедра вищої математики.  
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;  
e-mail: kpi\_mmtt@mail.ru

Обл.-вид. № 61 – 14.

Підп. до друку 08.04.2014 р. Формат 60×84 1/16. Папір офісний.  
Друк цифровий. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 10,0. Облік.-вид. арк. 10,0.  
Тираж 300 пр.(1-й завод 1 – 100) Зам. № ZD 1097. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта  
видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.  
61002, Харків, вл Фрунзе, 21

---

Цифрова друкарня ТОВ «Цифрова друкарня №1»  
Ідент. код юридичної особи: 37190180 від 27.07.2010.  
61001, Харків, пл. Повстання, 7/8, тел. (057) 754-49-40, (057) 754-49-42.