



ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»

57'2014

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 57 (1099) 2014

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2014

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 57 (1099). – 154 с.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Збірник виходить українською та російською мовами.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).

Координаційна рада:

Голова: Л. Л. Товажнянський, д-р техн. наук, проф.;

Секретар: К. О. Горбунов, канд. техн. наук, доц.;

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.; Є.І.Сокол, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;

Є. С. Александров, д-р техн. наук, проф.; А. В. Бойко, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. Гладкий, д-р техн. наук, проф.; М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, проф.;

А. І. Грабченко, д-р техн. наук, проф.; В. Г. Данько, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. Дмитрисенко, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. Домнін, д-р техн. наук, проф.;

В. В. Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. Зайцев, канд. техн. наук, проф.;

П. О. Качанов, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Клепиков, д-р техн. наук, проф.;

С. І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф.; В. М. Кошельник, д-р техн. наук, проф.;

В. І. Кравченко, д-р техн. наук, проф.; Г. В. Лісачук, д-р техн. наук, проф.;

О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.; В. І. Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;

П. Г. Перерва, д-р екон. наук, проф.; В. А. Пуляев, д-р техн. наук, проф.;

М. І. Рищенко, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Самородов, д-р техн. наук, проф.;

Г. М. Сучков, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. Тимофієв, д-р техн. наук, проф.;

М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний секретар: А.Г.Андрєєв, канд. техн. наук, доц.

К.В.Аврамов, д-р техн. наук, проф.; Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;

Д.В.Бреславський, д-р техн. наук, проф.; Ю.С.Воробйов, д-р техн. наук, проф.;

А.П.Зиньковський, д-р техн. наук, проф.; Л.В.Курпа, д-р техн. наук, проф.;

Г.І.Львов, д-р техн. наук, проф.; Ю.В.Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.; Ю.М.Шевченко, академік НАНУ, д-р техн. наук, проф.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 10 від 28 листопада 2014 р.

ISSN 2078-9130

© Національний технічний університет «ХПІ», 2014

А. Г. АНДРЕЕВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;

С. А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ УЧЕНЫХ ХПИ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Рассмотрена эволюция основных научных достижений ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в XIX – XXI ст. в области управления механическими системами: от паровых машин до уникальных космических аппаратов. Показано, как созданный учеными и выпускниками НТУ «ХПИ» научный потенциал позволил Харькову стать ведущим центром создания систем управления для важнейших объектов ракетостроения и космонавтики; наукоемкой и высокотехнологичной продукции оборонного и гражданского назначения, подготовки специалистов.

Ключевые слова: механика, машиностроение, высшее техническое образование; системы управления, динамика, ракетостроение, космонавтика, автоматическое регулирование.

С самого зарождения теории управления ученые и выпускники НТУ «ХПИ» делали большой вклад в ее развитие и практическое воплощение [1]. В статье сделана попытка исследования процесса становления и развития основных достижений многих поколений выдающихся ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в XIX – XXI ст. в области управления механическими системами: от паровых машин до космических аппаратов.

Теоретическую и практическую базу исследования в области теории управления в Украине получили с открытием второго в Российской империи Харьковского практического технологического института (ХПТИ). Основатель ХПТИ В. Л. Кирпичев являлся выпускником (1868 г.) и почетным членом (1895 г.) конференции (совета) Михайловской артиллерийской академии (в настоящее время Военная академия ракетных войск стратегического назначения), создателем которой был А. Д. Засядко. В. Л. Кирпичев был руководителем дел первого в Российской империи официального органа по воздухоплаванию – организованной в 1869 г. Комиссии по применению аэростатов к военным целям под председательством начальника инженерных войск Э. И. Тотлебена [2].

С 1871 г. В. Л. Кирпичев участвовал в организованном И. А. Вышнеградским «пентагональном» обществе взаимопомощи в научной разработке вопросов механики и теоретического машиностроения. Тогда И. А. Вышнеградский впервые изложил собственные суждения о расчетах регуляторов. В 1873 и 1876 годах В. Л. Кирпичев выезжал в научные командировки за границу, где в частности прослушал ряд лекций Дж. Максвелла [2]. Ведя уединенную жизнь в имении, Дж. Максвелл написал работу «О регуляторах» (On governors, 1868), которая осталась единственной, касающейся этой отрасли

знаний, и отличной от тех, выдающиеся исследования в которых сделали его знаменитым.

В 1876-77 г. И. А. Вышнеградский; в дальнейшем академик Императорской Санкт-Петербургской Академии Наук (АН), публикует большие работы «Об общей теории регуляторов» и «О регуляторах прямого действия», изданные почти одновременно на русском, французском и немецком языках. В этих работах разработана, в основном, общая теория линейных регуляторов и содержатся в зачаточном виде многие положения теории автоматического управления. Общий подход, который впервые применил И. А. Вышнеградский при составлении математической модели замкнутой системы «объект – регулятор», базирующийся на их совместном рассмотрении, до настоящего времени практически не изменился, за исключением некоторых деталей и терминологии [3].

Идеи основоположника теории автоматического регулирования И. А. Вышнеградского развивали его ученики и последователи – В. Л. Кирпичев, Д. С. Зернов, А. М. Ляпунов и др. Кирпичев был поставлен директором формируемого ХПТИ 3.7 1885 г. Он встретился с уходящим в отставку долголетним заслуженным профессором по кафедре механики Харьковского университета Д. М. Деларю, инициатором приглашения в Харьков в 1872 г. будущего академика В. Г. Имшенецкого. Его сын Михаил Деларю стал одним из первых студентов ХПТИ. Предложение занять освободившуюся кафедру механики в Харьковском университете в августе 1885 г. принял А. М. Ляпунов, весной того же года утвержденный в звании приват-доцента Санкт-Петербургского университета и собиравшийся осенью приступить к чтению курса лекций по теории потенциала. Член Ученого комитета Министерства народного просвещения В. Л. Кирпичев считал Ляпунова, одним из самых перспективных ученых Российской империи, и видел его в своей формирующейся команде преподавателей ХПТИ [2].

Развитие техники привело к увеличению требований к точности регулирования хода машин и необходимости математического решения проблемы устойчивости движения. Задачу, поставленную главой физической лаборатории Кембриджского университета Максвеллом, в 1875 году решил профессор Раус. Он сформулировал критерий устойчивости регулируемого процесса линейных систем, выражаемый в терминах характеристического полинома. По просьбе специалиста по паровым турбинам Стодолы в 1895 г. математик Гурвиц доказал другой (эквивалентный) критерий устойчивости многочлена с действительными коэффициентами, сводящийся к условию положительности некоторых определителей, составленных из коэффициентов многочлена.

В. Л. Кирпичев с 1887 г. привлек к чтению в ХПТИ курса аналитической механики А. М. Ляпунова, который тот вел до 1894 г. В 1888 г. в «Сообщениях Харьковского математического общества» А. М. Ляпунов издал работу «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости», в которой впервые были изложены ключевые идеи первого метода Ляпунова в теории

устойчивости. Далее он выпустил целый ряд статей, посвященных устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы, двигаясь от изучения частных задач к общим проблемам. Докторская диссертация А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения» стала основополагающей работой в теории устойчивости и принесла ему в дальнейшем мировую славу. Работа опередила время и обладает существенной значимостью в современной математике и механике, особенно в кибернетике, теории автоматического регулирования и управления [4].

В ХПТИ механические дисциплины, определявшие прогресс машинного производства, были базой процесса обучения. Из общего руслу механики в то время начали выделяться ряд сформировавшихся дисциплин: строительная и прикладная механика; паровые машины; термодинамика; регуляторы и другие. В. Л. Кирпичев проанализировал в «Заметке по вопросу о влиянии температуры на упругие напряжения в твердом теле» задачу нахождения распределения температур, обеспечивающего в теле при заданных механических и температурных свойствах отсутствие напряжений. Шестое издание книги В. Л. Кирпичева «Беседы о механике» вышло через 101 год после первого в серии «Физико-математическое наследие» [2]. В монографии есть раздел «Колебания регуляторов паровых машин».

Директор Харьковского технологического института (ХТИ) с 1898 года по декабрь 1902 года, профессор механики Д. С. Зернов подготовил ряд оригинальных научно-педагогических трудов [5]. В курсах лекций по паровым машинам Д. С. Зернов рассматривались также проблемы регулирования, чем было заложено начало симбиозу механики машин, термодинамики и теории управления [6]. Открытия и идеи профессора ХТИ Н. Д. Пильчикова положили начало исследованиям в области телемеханических систем радиодистанционного управления.

Профессор Харьковского университета и ХТИ в конце 19 – начале 20 веков Д. А. Граве в дальнейшем стал почетным членом АН СССР и первым математиком, ставшим академиком АН Украины [7]. Среди его учеников отметим члена-корреспондента АН УССР Н. И. Ахиезера. В 1925 г. академик Д. А. Граве был избран Председателем научного совета Общества по исследованию мирового пространства. Среди киевских учеников Д. А. Граве и Н. И. Ахиезера выделим Генерального конструктора ракетно-космической техники В. Н. Челомея.

В 1901 году Д. С. Зернов пригласил проводить в ХТИ лабораторные занятия по сопротивлению материалов своего и Н. Е. Жуковского ученика в Императорском Московском техническом училище Г. Ф. Проскуру, в дальнейшем члена Президиума и председателя отделения технических наук АН УССР [5]. В 1908 г. была напечатана первая работа Г. Ф. Проскуры «Регулирование хода машин – двигателей». Г. Ф. Проскура читал в ХТИ курсы лекций по регуляторам хода машин, проектированию, паровым машинам, гидравлике, гидравлическим двигателям и др. [7].

Выпускник ХТИ 1908 года Г. А. Ботезат; один из первых экспертов Национального консультативного комитета по авиации, создал по заказу Военно-воздушных сил США первый в мире вертолет, успешно совершивший устойчиво управляемый полет в 1922 г. В 1926 году под руководством А. Я. Щербакова в ХТИ была организована первая в Украине студенческая группа по исследованию проблем реактивного полета [8].

На основе ХТИ в 1930 г. было образовано 6 самостоятельных специализированных институтов для подготовки инженерно-технических кадров, в т. ч. Харьковский механико-машиностроительный (ХММИ), Харьковский электротехнический (ХЭТИ), Харьковский авиационный (ХАИ). Приблизительно до середины 30-х годов XX века теория регулирования формировалась в рамках отдельных технических дисциплин, таких как «регулирование машин», «гидравлические регуляторы», «регулирование электродвигателей», «электропривод» и т. п. Выпускник ХТИ 1924 года Р. Л. Аронов руководил проектированием и строительством центральной заводской лаборатории, наладкой выпускаемых на ХЭМЗе видов электрооборудования, в том числе первого отечественного блюминга и автоматической системы загрузки доменной печи. Наряду с этим он был преподавателем ХЭТИ и написал первый в СССР учебник по автоматическому управлению электроприводами [7].

Кадровую основу созданного в 1939 г. Института энергетики АН УССР составили ученые и выпускники ХММИ и ХЭТИ [9]. В институте работала лаборатория автоматического регулирования отдела автоматики и электроаппаратуры (заведующий В. Л. Иносов, старшие научные сотрудники В. А. Богомолов, Б. И. Алексеев и др.). Интенсивное проникновение следящих систем во все области техники, включая радиотехнику, счетно-решающие устройства и электронику началось с конца 30-х годов.

В феврале – мае 1939 г. в Отделе специальных конструкций, руководимом выпускником ХТИ 1929 года Щербаковым, были проведены успешные летные испытания первых в мире ракет с воздушно-реактивными двигателями и первых советских двухступенчатых ракет. В феврале 1940 г. под руководством А. Я. Щербакова впервые в стране совершил пилотируемый, использующий для своего движения силу реактивной струи ракетоплан РП-318-1, работу над которым начинал С. П. Королев [8].

Анализ тенденций развития военной техники во Второй Мировой войне показал, что ее перспективы связаны с использованием принципа реактивного движения, с развитием управляемых ракет различного назначения. Для решения проблем создания морских баллистических, крылатых и зенитных ракет в 1948 г. был создан Научно-исследовательский институт реактивного (в дальнейшем ракетно-артиллерийского) вооружения (4 НИИ ВМФ). Его первым начальником стал и более 10 лет возглавлял НИИ выпускник ХММИ 1933 г. Н. А. Сулимовский, ставший лауреатом 2 Государственных премий СССР. 16 сентября 1955 г. был произведен первый в мире старт с подводной лодки баллистической ракеты разработки ОКБ-1 и ОКБ-385, у истоков кото-

рых трудился А. Я. Щербаков.

Выпускник ХТИ 1925 г. М. И. Гуревич, ставший лауреатом Ленинской и 6 Государственных премий СССР, с 1949 г. по 1961 г. руководил проектированием, постройкой и испытанием первых советских серийных управляемых крылатых ракет, вошедших в состав вооружения самолетов-ракетоносцев Ту-4, Ту-16, Ту-95К и Ту-22, а также ракет класса «поверхность-поверхность», характеристики которых были лучше, чем у конструкций В. Н. Челомея. Выпускник (1930) ХММИ Г. Е. Лозино-Лозинский разработал самолетную силовую установку с первой в мире серийной форсажной камерой с регулируемым критическим сечением для ТРД и был основным разработчиком в течение 35 лет двигательных установок самых совершенных в мире истребителей и крылатых ракет ОКБ академика АН СССР А. И. Микояна и М. И. Гуревича [10].

В 1951 году основатель лаборатории моделирования систем управления Б. Я. Коган, выпускник ХЭТИ 1938 г., получил Государственную премию СССР за создание и внедрение аналоговых электронных моделирующих устройств, которые были единственным доступным в конце 40-х – начале 50-х годов вычислительным средством, моделировавшим работу системы управления летательными аппаратами. Никаких иных технических средств для решения задачи анализа динамики нелинейных систем автоматического регулирования тогда не имелось. В 1952 г. выходит работа Б. Я. Когана и директора Института автоматики и телемеханики АН СССР В. А. Трапезникова «Принципы построения моделирующих установок для исследования процессов автоматического регулирования». Б. Я. Коган и его сотрудники были одними из первых, инициировавших изучение теории и методов математического моделирования с использованием аналоговых и гибридных вычислительных систем для исследования сложных динамических систем, в первую очередь систем управления.

А. Я. Щербаков, ближайший друг и соратник основоположника космонавтики С. П. Королева, внес решающий вклад в доводку и организацию серийного выпуска первой советской баллистической управляемой ракеты Р-1 [8]. Постановлением Совета Министров СССР № 3539-1646сс от 21 сентября 1951 года в целях «организации производства аппаратуры системы управления для изделий Р-1» Харьковский завод «Электроинструмент» был передан Министерством строительного и дорожного машиностроения Министерству промышленности средств связи. Завод, получивший в дальнейшем наименование «Коммунар», стал первым предприятием в СССР по серийному производству аппаратуры бортовых автономных систем управления (СУ) и наземного испытательно-пускового электрооборудования ракетных комплексов [11].

Завод «Электроинструмент» (оригинальный прообраз современных учебно-производственно-научных комплексов) был создан на базе детской трудовой воспитательной коммуны им. Ф. Э. Дзержинского при поддержке

рабфака ХММИ. А. Я. Щербаков, работавший поблизости в 1927-1935 годах заместителем главного конструктора Харьковского авиазавода, был прекрасно информирован о его возможностях и перспективах, а также о большом вкладе ученых Харькова в зарождение и развитие теории управления [8]. Символично, что первый «ракетный генерал» А. Д. Засядко был похоронен в Куряжском Спасо-Преображенском Монастыре, в котором А. С. Макаренко через 85 лет организовал детскую колонию.

Выпускник ХММИ 1937 года, один из руководителей Головного института по ракетной технике Минобороны СССР А. А. Витрук стал первым начальником Командно-измерительного комплекса (КИК). Он внес большой вклад в развитие научно-исследовательских и испытательных работ, в осуществление контроля и управления первыми ИСЗ, в организацию и совершенствование методов управления космическими аппаратами (КА); участвовал в организации работ по созданию Евпаторийского центра дальней космической связи. Важнейшая неотъемлемая часть космонавтики – КИК представлял собой сложную инфраструктуру быстро совершенствующихся систем наземных средств обеспечения полетов КА и боевых межконтинентальных ракет, включающую средства навигации, контроля движения и состояния, управления; телеметрические средства и др. КИК позволял получать данные о работе агрегатов и систем ракет и КА; формировать их орбиту; управлять полетом, бортовым комплексом аппаратуры; получать и обрабатывать всю необходимую информацию [8].

Запуски на Научно-исследовательском испытательном полигоне № 5 (крупнейший космодром Байконур) первых в мире межконтинентальных баллистических ракет и КА проводила инженерно-испытательная часть под командованием бывшего студента ХЭТИ О. И. Майского. Он стал лауреатом Государственной премии СССР (1977) за создание, испытание и организацию серийного производства межконтинентальной ракеты УР-100. Под руководством бывшего студента ХММИ, лауреата Государственной премии СССР, Главного конструктора комплекса средней дальности М. Ю. Цирульникова были созданы первые мощные энергетические установки на твердом топливе для ракетно-космических систем.

В 1950 г. Харьковский политехнический институт (ХПИ) был восстановлен на базе 4 харьковских вузов (в т. ч. ХММИ, ХЭТИ). Студентам специальности «Динамика и прочность машин» (ДПМ) на инженерно-физическом факультете читали курсы заслуженные деятели науки и техники УССР И. М. Бабаков и А. П. Филиппов, Н. И. Ахиезер, А. В. Дабагян [12].

В становление и развитие кафедры ДПМ весомый вклад внес академик АН УССР Л. А. Шубенко-Шубин, Главный конструктор Харьковского турбинного завода, лауреат Государственной премии СССР [9]. С 1933 по 1935 гг. он под руководством члена-корреспондента АН СССР И. Н. Вознесенского, ученика Д. С. Зернова, исследовал вопросы автоматического регулирования турбин в Энергетическом институте АН СССР. В дипломной работе

(1951 г.) С. И. Богомолова, в дальнейшем заслуженного деятеля науки и техники УССР, на тему «Исследование системы регулирования турбины ВР-25-1 методом нелинейной механики» (руководитель – доцент А. В. Дабагян) был сделан анализ переходных процессов с помощью электроинтегратора при использовании метода определения критериев устойчивости А. И. Лурье, разработанным на базе теории устойчивости движения А. М. Ляпунова. Специализация в области автоматического регулирования позволила выпускникам специальности ДПМ в дальнейшем стать специалистами в области теории управления [11].

Выпускник первого послевоенного набора кафедры ДПМ К. Алексеев в соавторстве с Г. Бебениным в 1964 году выпустил монографию «Управление космическими летательными аппаратами», ставшую одной из первых в мире, посвященной данной проблеме. В 1970 году Алексеевым в соавторстве с Бебениным и Ярошевским был выпущен труд под названием «Маневрирование космических летательных аппаратов». Сотрудничество с первым председателем Совета «Интеркосмос», вице-президентом АН СССР Б. Н. Петровым и одним из основоположников авиационного приборостроения В. А. Боднером выразилось в издании совместных научных трудов по теории управления в «Докладах АН СССР». Доктор технических наук К. Б. Алексеев работал профессором (как и выпускник ХММИ 1931 г., заслуженный деятель науки и техники РСФСР А. С. Вольмир) в Военно-воздушной инженерной академии имени Н. Е. Жуковского, где он, в частности, учил первых советских космонавтов на новом этапе развития пилотируемой астронавтики [8].

На базе специальных КБ Харьковских заводов имени Т. Г. Шевченко и «Коммунар» в 1959 году было организовано Особое конструкторское бюро (ОКБ-692, а/я 67, КБ «Электроприборостроения», ОАО «Хартрон») по системам управления межконтинентальных ракет. Харьковское научно-производственное объединение «Хартрон» стало одной из трех организаций в бывшем СССР и единственной в Украине, которые создавали системы управления для ракет и КА, включая бортовые ЭВМ [13, 14].

В 1964 году по инициативе Главного конструктора КБ «Электроприборостроения» В. Г. Сергеева и профессора кафедры ДПМ А. В. Дабагына в ХПИ на инженерно-физическом (И) факультете была открыта кафедра под названием «Автоматическое управление движением» (АУД), которой вверялась подготовка инженеров-механиков – исследователей по специальности «Динамика полета и управление движением ракет и космических аппаратов». В дальнейшем В. Г. Сергеев стал Дважды Героем Социалистического Труда, лауреатом Ленинской и Государственных премий СССР и Украины, академиком НАН Украины; А. В. Дабагян – заведующим кафедрами АУД и «Автоматизированные системы управления», заслуженным работником высшей школы Украины, членом международной федерации по автоматическому управлению и контролю от СССР, членом редакционной коллегии и редакционного совета международного журнала «Engineering & automation» [11].

В 1977 году кафедру АУД (с 2000 года – кафедра «Системы и процессы управления» (СПУ)) возглавил выпускник кафедры ДПМ 1955 г., заслуженный работник народного образования Украины Е. Г. Голоскоков – известный специалист в области динамики и управления машин. Значительный вклад в становление и развитие кафедры внес Генеральный директор АО «Хартрон», заслуженный деятель науки и техники Украины Я. Е. Айзенберг, который был главным теоретиком четырех поколений систем управления ракетно-космической техники[11].

Дальнейшая математизация исследовательской деятельности привела к появлению новых теоретических представлений и методик анализа систем управления. КБ «Электроприборостроения» были созданы СУ для четырех поколений межконтинентальных баллистических ракет, трех поколений космических ракет-носителей, многих типов искусственных спутников земли и КА. Среди них межконтинентальные баллистические ракеты СС-7, СС-8, СС-9, СС-15, СС-18, СС-19, стратегический комплекс крылатых ракет «Метеорит», самая мощная в мире ракета-носитель «Энергия», ракета-носитель «Циклон», различные модули для орбитальных космических станций «Салют-6», «Салют-7», «Мир» и «МКС», более 150 спутников серии «Космос» и другие. Лауреатами Ленинских и Государственных премий СССР и Украины в области науки и техники стали выпускники ХПИ: Генеральные и Главные конструкторы СУ ракет Я. Е. Айзенберг, Г. А. Борзенко, А. И. Кривоносов, В. А. Уралов, В. Н. Горбенко, Г. И. Лящев; начальники отделов Б. М. Конорев, В. Ф. Шишков и др. В становлении «Хартрона», разработке, освоении в производстве и испытаниях приборов и аппаратуры СУ баллистических ракет стратегического назначения и космических аппаратов принимали участие выпускники ХПИ – Главные конструктора А. Н. Калногуз, Ю. М. Борушко, Б. Н. Гавранек и др. [13, 14].

Проведение работ по доводке рулевых двигателей для станции «Мир» с тягой в 2 и 10 кг; участие в создании уникальной системы ориентации КА в пространстве с привлечением разработанного датчика тягового потока, меньшего по весу по сравнению с применяемым ранее на 2 порядка, позволило в 1984 г. получить Государственную премию СССР коллективу, возглавляемому академиком АН СССР В. П. Мишиным (руководитель КБ «Энергия» после смерти С. П. Королева). От Украины были представлены бывшие студенты группы И-11: руководитель отдела моделирования тепловых и механических процессов Института проблем машиностроения АН УССР, профессор ХПИ Ю. М. Мацевитый и один из организаторов отраслевой лаборатории экспериментальных методов термopрочности элементов ГТД Д. Ф. Симбирский, а также Л. С. Григорьев [9].

Основоположник новой ветви средств выведения в космос конструкций – авиационно-космических транспортных систем Г. Е. Лозино-Лозинский являлся Генеральным конструктором НПО «Молния» – головного разработчика космоплана «Буран» и зенитных управляемых ракет-мишеней. Точная и

до сих пор единственная в мире автоматическая посадка «Бурана» с орбиты на аэродром в автоматическом режиме вошла в книгу рекордов Гиннеса. Кораблем управляла инерциальная система управления путем координации работы почти пятидесяти смежных систем. Лауреат Ленинской и двух Государственных премий СССР Г. Е. Лозино-Лозинский привлекал в 80-х годах ученых И факультета ХПИ к работам по «Бурану» [8-10].

Выпускник ХПИ, заслуженный машиностроитель Украины (1996) В. П. Чеховский стал лауреатом Государственной премии СССР (1989) за создание в КБ «Южное» твердотопливных ракетных комплексов. Для управления по крену на участке полета первой и второй ступеней использовались четыре аэродинамических руля, установленных на внешней поверхности головного обтекателя. Выпускник ХПИ, заместитель Генерального конструктора КБ «Южное», Генеральный директор ракетно-космического научно-исследовательского центра «Южкосмос» В. С. Фоменко стал лауреатом Государственной премии СССР за разработку систем управления и контроля агрегатов ракет и спутников [15].

Исследования по оптимизации элементов машин были начаты в Харькове в конце 60-х годов 20 столетия на стыке двух научных направлений: теории оптимального управления, которая развивалась в связи с потребностями космонавтики, и работ в области математического моделирования динамики и прочности высоконагруженных конструкций, проводившихся под руководством академика АН УССР А. П. Филиппова.

Задачи управления спектром собственных частот и статическими напряжениями лопаток и дисков вошли в цикл работ в области прочности энергетических машин, за который выпускники и профессора ХПИ А. П. Филиппов, С. И. Богомолов, А. В. Бурлаков, Ю. С. Воробьев, Е. Г. Голоскоков А. Н. Подгорный в 1984 г. были удостоены Государственной премии УССР [9]. За разработку метода оптимизации динамических систем с помощью функций Ляпунова выпускнику кафедры АУД Е. Е. Александрову Президиум Академии наук Высшей школы Украины присвоил звание лауреата премии Ярослава Мудрого в 1996 г.

Участие выпускников и профессоров ХПИ С. И. Богомолова, В. В. Бортового, В. Б. Гринева, Ю. Т. Костенко, В. М. Лукьяненко, Л. М. Любчика, Э. А. Симсона в разработке теоретических основ автоматизированного оптимального проектирования конструкций машин и приборов; создание на этой базе образцов турбокомпрессорной и космической техники было отмечено Государственной премией Украины в области науки и техники за 1997 г. [9]. Авторами были получены новые научные результаты по принципиальным вопросам теории управления – управлению системами с распределенными параметрами, теории инвариантности, теории робастного управления многомерными системами, методам решения обратных задач динамики.

Выпускники кафедры ДПМ внесли большой вклад в исследования в области моделирования, идентификации и управления теплофизическими про-

цессами. Заслуженный деятель науки и техники Украины Ю. М. Мацевитый стал в 2002 г. заведующим созданной кафедры «Газогидромеханики и теплообмена» инженерно-физического факультета Национального технического университета «ХПИ». Премией НАН Украины имени В. И. Толубинского был отмечен в 2005 г. академик НАН Украины Ю. М. Мацевитый за монографию «Обратные задачи теплопроводности» (в 2-х томах) [9].

Заслуженному деятелю науки и техники Украины Е. Е. Александрову как члену авторского коллектива была присуждена Государственная премия Украины 2000 г. за разработку теории и практики создания многоканальных систем управления транспортными объектами. За разработку уникальных автоматизированных тренажеров с видеосистемами и виртуальной системой управления танком для подготовки экипажей заведующий кафедрой автоматики и управления в технических системах ХПИ П. А. Качанов был удостоен Государственной премии Украины за 2004 г. [10].

В настоящее время под руководством академика–секретаря отделения механики и машиностроения Академии наук высшей школы Украины, декана И-факультета Д. В. Бреславского на кафедре СПУ проводятся исследования в области управления и динамики летательных аппаратов, моделирования их тепловых режимов и ресурса, навигации и навигационных систем. Основные научные результаты профессора В. Б. Успенского связаны с разработкой методов высокоточного управления ориентацией маневренных КА с помощью гирополовых избыточных систем [11 и др.].

Под руководством доцента А. Г. Андреева проводятся исследования в области управления механическими, технологическими, физическими, энергетическими параметрами сборки и разборки соединений с натягом сложных элементов конструкций при термовоздействии и др. [16 и др.]. Под руководством заведующего кафедрой сопротивления материалов В. Л. Хавина и заслуженного деятеля науки и техники Украины Э. А. Симсона изучаются задачи оптимального управления процессами в технологических системах высокоскоростной механообработки [17 и др.].

В статье рассмотрена эволюция основных научных достижений ученых и выпускников НТУ «ХПИ» в XIX – XXI ст. в области управления механическими системами: от паровых машин до уникальных космических аппаратов. Созданный учеными и выпускниками НТУ «ХПИ» научный потенциал помог Харькову стать ведущим центром создания систем управления для важнейших объектов ракетостроения и космонавтики; многих особо важных уникальных конструкторских разработок; наукоемкой и высокотехнологичной продукции оборонного и гражданского назначения, подготовки специалистов. Благодаря разностороннему творчеству ученых и выпускников НТУ «ХПИ» была создана передовая, признанная в мире школа систем управления, которая обеспечила решение задач управления объектами со сложными динамическими схемами. Ученые и выпускники НТУ «ХПИ» неоднократно отмечались государственными наградами и почетными званиями, Государст-

венными премиями в области науки и техники, премиями НАН Украины имени выдающихся ученых.

Список литературы: 1. *Бреславский Д. В.* Зарождение и развитие Харьковской школы теории управления / *Д. В. Бреславский, С. А. Горелова, А. А. Ларин* // *Вестник НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин.* – 2006. – Вып. 32. – С. 38-44. 2. *Александров Е. Е.* Деятельность основателя отечественной научной школы механики и машиностроения профессора В. Л. Кирпичева / *Е. Е. Александров, С. А. Назаренко, В. Л. Хавин* // *Механiка та машинобудування.* – 2012. – №2. – С. 230-249. 3. *Бреславский Д. В.* Иван Алексеевич Вышнеградский – основоположник теории автоматического управления (к 175-летию со дня рождения). / *Д. В. Бреславский, С. А. Горелова, А. А. Ларин* // *Вестник НТУ «ХПИ». Автоматика и приборостроение.* – 2007. – Вып. 10. – С. 3-12. 4. Академик Александр Михайлович Ляпунов: К 150-летию со дня рождения: Монография / *Л. Л. Товажнянский, К. В. Аврамов, Е. Е. Александров* и др. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 288 с. 5. *Назаренко С. А.* Основные работы профессора Д. С. Зернова / *С. А. Назаренко, В. Л. Хавин, Н. В. Непран, Л. П. Семенов* // *Вiсник НТУ «ХП».* Машинознавство та САПР. – 2011. – № 51. – С. 16–23. 6. *Зернов Д. С.* Паровые машины. (Теория. Термодинамика. Регуляторы). / *Д. С. Зернов.* – М.: ИМТУ, 1894. 7. История Харьковского технологического института в лицах [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://library.kpi.kharkov.ua/PREPODAVATELY/PR_%D0%9B.html. 8. *Назаренко С. А.* Деятельность воспитанников Харьковского политехнического института в области освоения космического пространства / *С. А. Назаренко* // *Журнал «Universitates = Университеты: Наука и просвещение».* – 2013. – № 2. – С. 64–74. 9. *Андреев А. Г.* Основные работы ученых ХПИ в области анализа термонапряженных конструкций / *А. Г. Андреев, С. А. Назаренко* // *Вiсник НТУ «ХП».* Динамика і міцність машин. – 2013. – № 63 (1036). – С. 3-11. 10. Еліта держави – видатні випускники Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут» / упоряд. *Л. Л. Товажнянський, Ю. Д. Сакара, А. В. Бистриченко* та ін. – Х. : НТУ «ХП», 2010. – 188 с. 11. Динамика полета и управление: 50 лет в ХПИ. / *Д. В. Бреславский, В. Б. Успенский, А. А. Ларин* и др. Под общей редакцией *Д. В. Бреславского* – Х.: НТУ «ХПИ», 2014. – 488 с. 12. *Морачковский О. К.* Инфиз: очерки истории творчества / *О. К. Морачковский.* – Х.: ЭнергоКлуб Украины, 2005. – 372 с. 13. *Хартрон.* Системы управления в космосе и на земле / *В. А. Сирук, С. А. Русаков.* – Х.: Хартрон, 2011. – 56 с. 14. НПП «Хартрон-Аркас». Хроника дат и событий 1959 – 2012 гг. / *Сост. В. И. Котович.* Под ред. *Ю. М. Златкина.* – Х.: Хартрон-Аркас, 2012. – 260 с. 15. Ракеты и космические аппараты конструкторского бюро «Южное» / Под ред. *С. Н. Конохова.* – Днепрпетровск: АРТ-ПРЕСС, 2004. – 260 с. 16. *Андреев А. Г.* Оптимизация температуры нагревания при сборке соединений с натягом / *А. Г. Андреев, А. В. Щепкин* // *Вестник машиностроения.* – 2013. – № 3. – С. 34-37. 17. *Симсон Э. А.* Методы анализа и оптимизации нагруженных элементов технологических систем / *Э. А. Симсон, С. А. Назаренко, И. Д. Прево* // *Вiсник НТУ «ХП».* Технології в машинобудуванні. – 2014. – № 42 (1085). – С. 187-192.

Bibliography (transliterated): 1. *Breslavskij D. V.* Zarozhdenie i razvitie Har'kovskoj shkoly teorii upravleniya. D. V. Breslavskij, S. A. Gorelova, A. A. Larin. Vestnik NTU «HPI». Dinamika i prochnost' mashin. 2006. Vyp. 32. 38-44. Print. 2. *Aleksandrov E. E.* Deyatel'nost' osnovatelya otechestvennoj nauchnoj shkoly mehaniki i mashinostroeniya professora V. L. Kirpicheva. E. E. Aleksandrov, S. A. Nazarenko, V. L. Havin. Mehanika ta mashinobuduvannya. 2012. №2. 230-249. Print. 3. *Breslavskij D. V.* Ivan Alekseevich Vyshnegradskij – osnovopolozhnik teorii avtomaticheskogo upravleniya (k 175-letiyu so dnya rozhdeniya). D. V. Breslavskij, S. A. Gorelova, A. A. Larin. Vestnik NTU «HPI». Avtomatika i priborostroenie. 2007. Vyp. 10. 3-12. Print. 4. *Akademik Aleksandr Mihajlovich Lyapunov:* K 150-letiyu so dnya rozhdeniya: Monografiya / *L. L. Tovazhnyanskij, K. V. Avramov, E. E. Aleksandrov* i dr. Kharkiv: NTU «HPI», 2007. 288 Print. 5. *Nazarenko S. A.* Osnovnye raboty professora D. S. Zernova. S. A. Nazarenko, V. L. Havin, N. V. Nepran, L. P. Semenov. Visnik NTU «HPI». Mashinознаvstvo ta SAPR. 2011. № 51. 16-23. Print. 6. *Zernov D. S.* Parovye mashiny. (Teoriya. Termodinamika. Regulatory). D. S. Zernov. M.: IMTU, 1894. Print. 7. *Istoriya Har'kovskogo tehnologicheskogo instituta v lichah.* http://library.kpi.kharkov.ua/PREPODAVATELY/PR_%D0%9B.html. 8. *Nazarenko S. A.* Deyatel'nost' vospitannikov Har'kovskogo

politehnicheskogo instituta v oblasti osvoeniya kosmicheskogo prostranstva / S. A. Nazarenko. Zhurnal «Universitates =University: Nauka i prosveschenie». 2013. № 2. 64–74. Print. **9.** Andreev A. G. Osnovnye raboty uchenyh HPI v oblasti analiza termonapryazhennykh konstrukcij. A. G. Andreev, S. A. Nazarenko. Visnik NTU «HPI». Dinamika i micnist' mashin. 2013. № 63 (1036). 3-11. Print. **10.** Elita derzhavi – vidatni vipuskniki Nacional'nogo tehnicnogo universitetu «Harkivs'kij politehnicnij institut». uporyad. L. L. Tovazhnyans'kij, Yu. D. Sakara, A. V. Bistrichenko ta in. Kharkiv: NTU «HPI», 2010. 188 Print. **11.** Dinamika poleta i upravlenie: 50 let v HPI. D. V. Breslavskij, V. B. Uspenskij, A. A. Larin i dr. Pod obschej redakciej D. V. Breslavskogo. Kharkiv: NTU «HPI», 2014. 488. Print. **12.** Morachkovskij O. K. Infiz: ocherki istorii tvorchestva / O. K. Morachkovskij. Kharkiv: EnergoKlub Ukrainy, 2005. 372 Print. **13.** Hartron. Sistemy upravleniya v kosmose i na zemle. V. A. Siruk, S. A. Rusakov. Kharkiv: Hartron, 2011. 56 Print. **14.** NPP «Hartron-Arkos». Hronika dat i sobytij 1959 – 2012 gg. Sost. V. I. Kotovich. Pod red. Yu. M. Zlatkina. Kharkiv: Hartron-Arkos, 2012. 260 Print. **15.** Rakety i kosmicheskie apparaty konstruktorskogo byuro «Yuzhnoe». Pod red. S. N. Konyuhova. Dnepropetrovsk: ART-PRESS, 2004. 260 Print. **16.** Andreev A. G. Optimizaciya temperatury nagrevaniya pri sborke soedinenij s natyagom. A. G. Andreev, A. V. Schepkin. Vestnik mashinostroeniya. 2013. № 3. 34-37 Print. **17.** Simson E. A. Metody analiza i optimizacii nagruzhennykh elementov tehnologicheskikh sistem. E. A. Simson, S. A. Nazarenko, I. D. Prevo. Visnik NTU «HPI». Tehnologii v mashinobuduvanni. 2014. № 42 (1085). 187-192 Print.

Поступила (received) 24.10.2014

УДК 534/143

А.Е.БОЖКО, д-р техн. наук, профессор, член-корр. НАН Украины, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Е.М. ИВАНОВ, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ «ХАДИ», Харьков;
З.А.ИВАНОВА, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., доцент, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
К.Б.МЯГКОХЛЕБ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МОДУЛЯТОРОВ ВИБРАЦИЙ

В данной работе осуществляется попытка более детально определить энергетические показатели электромагнитных вибровозбудителей, находящихся широкое применение в технологических процессах уплотнения сред, для передвижения в конвейерах материалов, в испытательных стендах и т.д. Энергетические показатели определяются с учетом вибрационного движения массы и потерь, возникающих в электрической и механической частях. Эти результаты необходимы для оптимального выбора управляющего устройства по энергетическим показателям.

Ключевые слова:якорь, воздушный зазор, демпфирование, жесткость, колебательная система.

© А.Е.Божко, Е.М. Иванов, З.А.Иванова, К.Б.Мягкохлеб, 2014

Введение. Электромагнитные вибровозбудители (ЭМВ) находят широкое применение в технологических процессах уплотнения сред, для передвижения в конвейерах материалов, в испытательных стендах и т.д. [3, 4, 5]. В каждом случае нагрузкой является масса, которая может быть расположена на подвижной части (якоря) ЭМВ непосредственно, либо через упругие элементы (пружины).

Постановка проблемы. Для формирования движения якоря в виде вибрации масс необходимо знать энергетические показатели ЭМВ. Подробный анализ и вывод энергетических соотношений с учетом механических нагрузок и частоты колебаний подвижной системы ЭМВ отсутствуют, хотя некоторые краткие данные о мощности ЭМВ в литературе имеются [4, 5]. Исходя из этого, в данной работе осуществляется попытка более детально определить энергетические показатели ЭМВ с учетом вибрационного движения массы и потерь, возникающих в электрической и механической частях. Рассмотрим одноконтурную электромеханическую схему ЭМВ (рис. 1).

При подключении зажимов обмотки 4 к источнику (U) в ней возникает ток i , который, в свою очередь, в силу действия закона полного тока

$$i\omega = \Phi/G, \quad G = (\mu_0 S)/(2\delta) \quad (1)$$

наводит в магнитопроводе 1 магнитный поток Φ . В выражении (1): w – число витков обмотки 4; G – магнитная проводимость; μ_0 – магнитная проницаемость воздушного зазора; S – площадь поперечного сечения полюсов магнитопровода 1 у воздушного зазора δ . Магнитный поток Φ , проходя по цепи (1, 2 δ , 2), создает в якоря 2 тяговое усилие F , вызывающее его колебания.

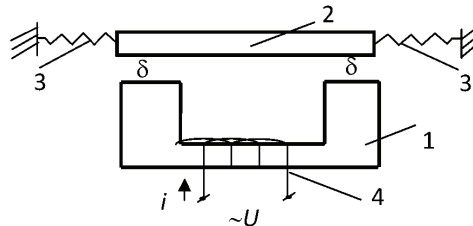


Рисунок 1 – Одноконтурная электромеханическая схема ЭМВ:

1 – магнитопровод; 2 – якорь; 3 – пружины; 4 – обмотка с электрическим током i ; U – задающее переменное напряжение; δ – воздушный зазор

Подвижная система 2 включает в себя якорь и испытуемый объект. Движение ее описывается дифференциальным уравнением вида

$$m \cdot d^2x/dt^2 + b \cdot dx/dt + cx = F, \quad (2)$$

где $m = m_{я} + m_{о}$ – общая масса; $m_{я}$ – масса якоря 2; $m_{о}$ – масса испытуемого объекта; b – коэффициент демпфирования; c – коэффициент жесткости; x – перемещение подвижной системы; t – время.

Для поддержания колебаний платформы стенда (подвижной системы) в течение периода необходим подвод энергии [1]

$$W_c = \int_0^{2\pi/\omega} F \dot{x} dt, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

где ω – круговая частота колебаний платформы стенда.

Как видно из (3) для определения W_c необходимо знать F и x . Известно [3], что

$$F = \Phi^2 / (\mu_0 S), \quad (4)$$

а если использовать выражение (1) и $i = I_m \sin \omega_1 t$, где ω_1 ($\omega_1 = \omega/2$) – частота входного напряжения U ; I_m – амплитуда тока, то тогда

$$W_c = \int_0^{2\pi/\omega} \dot{x} (i w / 2 \delta)^2 \mu_0 S dt = 1/2 \int_0^{2\pi/\omega} \dot{x} (I_m w / 2 \delta)^2 \mu_0 S (1 - \cos \omega t) dt. \quad (5)$$

Представим

$$x = x_a \cos(\omega t - \varphi), \quad (6)$$

где x_a – амплитуда колебаний; φ – сдвиг фаз между F и x .

Для колебательной системы с одной степенью свободы [2]

$$x_a = F_a / \left(m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b \omega / m)^2} \right). \quad (7)$$

Подставим в (5) продифференцированное по t выражение (6). Тогда получим

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega} (I_m w / 2 \delta)^2 \mu_0 S x_a \omega (1 - \cos \omega t) \times [-(\sin(\omega t - \varphi))] dt. \quad (8)$$

Учтем в (8) тригонометрическое преобразование вида $\sin \alpha \cdot \cos \beta = (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) / 2$ и введем обозначение

$$1/2 (I_m w / 2 \delta)^2 \mu_0 S x_a \omega = A. \quad (9)$$

В этом случае (8) будет иметь вид

$$W_c = A \int_0^{2\pi/\omega} [\cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) - \sin(\omega t - \varphi)] dt = \frac{A \pi}{\omega} \sin \varphi. \quad (10)$$

Таким образом, с учетом (9) и (10)

$$W_c = 1/2 (I_m w / 2 \delta)^2 \pi \mu_0 S x_a \sin \varphi \quad (11)$$

или, если учесть (7) и что

$$F_a = 1/2 (I_m w / 2 \delta)^2 \mu_0 S, \quad (12)$$

то

$$W_c = \pi F_a \cdot x_a \sin \varphi = \pi m x_a^2 \sin \varphi \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b \omega / m)^2} \quad (13)$$

или

$$W_c = \frac{\pi}{4} (\mu_0 S)^2 \cdot \left(\frac{I_m w}{2 \delta} \right)^4 \sin \varphi \times \left[m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b \omega / m)^2} \right]^{-1}, \quad (14)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{c/m}; \quad \varphi = \arctg(b\omega/(c - m\omega^2)). \quad (15)$$

Как видно из выражений (13) и (15) для поддержания колебаний платформы стенда с заданной максимальной амплитудой x_a при известных параметрах электромагнитного возбудителя m, b, c требуется подвод энергии W_c . При изменении механических параметров вибровозбудителя будет изменяться и величина W_c .

Средняя мощность, которой должен обладать усилитель мощности ЭМВС для возбуждения колебаний x , определяется выражением

$$P_{cp} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} F \dot{x} dt = \frac{\omega}{2\pi} W_c, \quad (16)$$

Подставим (16) в (14)

$$P_{cp} = \frac{\omega}{8} (\mu_0 S)^2 \cdot \left(\frac{I_m W}{2\delta} \right)^4 \sin \varphi \times \left[m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2} \right]^{-1}. \quad (17)$$

На основании закона Ома

$$I_m = U_m / r, \quad (18)$$

где U_m – амплитуда входного напряжения U ; r – активное сопротивление электрической цепи обмотки 4, получаем

$$P_{cp} = \frac{\omega}{8} (\mu_0 S)^2 \cdot \left(\frac{U_m W}{2\delta r} \right)^4 \sin \varphi \times \left[m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2} \right]^{-1}. \quad (19)$$

Выразим $\sin \varphi$ через параметры подвижной системы $\sin \varphi = tg \varphi / \sqrt{1 + tg^2 \varphi}$ и, учитывая (15), получим

$$\sin \varphi = b\omega / (c - m\omega^2) \left[\sqrt{1 + (b\omega / (c - m\omega^2))^2} \right]^{-1}. \quad (20)$$

Подставим (20) в (19)

$$P_{cp} = \frac{b\omega^2}{8(c - m\omega^2)} (\mu_0 S)^2 \cdot \left(\frac{U_m W}{2\delta r} \right)^4 \left[\sqrt{1 + (b\omega / (c - m\omega^2))^2} \right]^{-1} \times \left[m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2} \right]^{-1}. \quad (21)$$

ностью P_{cp} , то для осуществления колебаний платформы она будет уменьшена из-за мощности рассеяния, равной $P_r = b\dot{x}^2 + ri^2$. Поэтому общая средняя мощность генератора с напряжением U должна быть

$$P_{общ\text{ср}} = P_{cp} + P_r. \quad (22)$$

Выразим (22) через параметры ЭМВ, входное воздействие U и перемещение x . При этом будем учитывать максимальное значение P_r , а для этого возьмем $\dot{x} = \dot{x}_a = \omega x_a$ и $i = I_m = U_m / r$. Тогда $P_{r\text{max}} = b\omega x_a U_m^2 / r$, и общая мощность ЭМВС записывается выражением $P_{общ} = P_{cp} + P_{r\text{max}}$.

Если для движения платформы необходимо иметь несколько ЭМВ, то тогда

$$P_{общ} = \sum_{k=1}^n P_k = P_{cp} + \sum_{k=1}^n P_{rk}; \quad \sum_{k=1}^n P_{rk} = b\dot{x}^2 + \sum_{k=1}^n i_k^2 R_k. \quad (23)$$

Вывод. В статье представлено доскональное решение задачи об определении мощности ЭМВ стенда. Эти результаты необходимы для оптимального выбора управляющего устройства по энергетическим показателям.

Список литературы: 1. Божко А.Е. Воспроизведение вибраций. – К.: Наукова думка, 1975. – 191 с. 2. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. – К.: Наукова думка, 1980. – 188 с. 3. Божко А.Е., Пермяков В.И., Пушня В.А. Методы проектирования электромеханических вибровозбудителей. – К.: Наукова думка, 1989. – 208 с. 4. Вибрации в технике. В 6-ти т. – Т.2 / Под ред. д.т.н. И.И. Блехмана. – М.: Машиностроение, 1979. – 352 с. 5. Вибрации в технике. В 6-ти т. – Т.4 / Под ред. д.т.н. Э.Э. Лавендела. – М.: Машиностроение, 1981. – 510 с.

Bibliography (transliterated): 1. Bozhko A.E. Vosproizvedenie vibracij. Kyiv: Naukova dumka, 1975. 191 Print. 2. Bozhko A.E., Golub N.M. Dinamiko-energeticheskie svyazi kolebatel'nyh sistem. Kyiv: Naukova dumka, 1980. 188 Print. 3. Bozhko A.E., Permyakov V.I., Pushnya V.A. Metody proektirovaniya elektromehaničeskikh vibrovozbuditelej. Kyiv: Naukova dumka, 1989. 208 Print. 4. Vibracii v tehnikе. V 6-ti t. Vol.2. Pod red. d.t.n. I.I. Blehmana. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 352 Print. 5. Vibracii v tehnikе. V 6-ti t. Vol.4. Pod red. d.t.n. E.E. Lavendela. Moscow: Mashinostroenie, 1981. 510 Print.

Поступила (received) 04.02.2014

С.М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук, профессор, СумДУ, Сумы;
А.В.ДЕЙНЕКА, аспирант, СумДУ, Сумы

ТЕРМОУПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ ТРУБЫ С ЗАЩИТНЫМ СЛОЕМ ИЗ ДЮРАЛЮМИНИЯ И УГЛЕПЛАСТИКА

На основе классической теории упругости анизотропного тела сравнивается напряженно-деформированное состояние многослойного толстостенного цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и температуры. Защитный слой цилиндра выполнен из дюралюминия или углепластика. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются идеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. При этом внутреннее давление и температурная нагрузка изменяются по синусоидальному закону по длине цилиндра. Отмечается, что замена дюралюминиевого защитного слоя композитной трубы на углепластик, оказывает существенное влияние на ее напряженное состояние. При сравнении напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструктивных вариантов цилиндров более эффективным оказался вариант защитного слоя из углепластика.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр; температура; стеклопластик; углепластик.

Введение. Композиты многослойной структуры широко используются в различных областях современной техники. Известно, что элементы из композитов значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с их изотропными аналогами. Так, например, замена стальных труб стеклопластиковыми трубами увеличивает срок службы трубопроводов примерно в 4 раза и в 3 раза снижает его массу, а также исключает применение антикоррозионных защитных средств и дорогостоящих сварочных работ.

Однако для практической реализации этих преимуществ необходимо и дальше накапливать опыт проектирования такого рода конструкций. При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций из композиционных материалов на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например, участков непрочной или отслоений. Традиционно используемое в расчетных моделях предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта жестких армированных слоев оказывается существенно нарушенным.

В этой связи изучение напряженного состояния армированных оболочек при действии как статической, так и тепловой нагрузки на основе дискретно-структурной теории многослойных оболочек, когда учитываются реальные условия взаимодействия слоев и величина изменения контактных напряже-

ний на межслойных границах, представляется актуальной задачей. Подробный анализ последних результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзорах работ [1 – 2].

1. Основные уравнения. Пусть круговой полый цилиндр нагружен по цилиндрическим поверхностям $r = r_a$ и $r = r_b$ стационарными температурными нагрузками $t_a(z)$ и $t_b(z)$ и равномерно распределенными по окружной координате усилиями $q_a(z)$ и $q_b(z)$. Направление осей цилиндрической системы координат указано на рис. 1, *a*. Напряжения, которые возникают в точке цилиндра при действии внешней нагрузки, показаны на рис. 1, *б*. Считается, что температурная нагрузка и заданное по лицевым цилиндрическим поверхностям давление осесимметричны относительно продольной оси цилиндра. Но при этом их величина изменяется вдоль меридиана и зависит от координаты z . Кроме этого, цилиндр имеет конечную длину l , а на его торцах выполняются условия свободного опирания. Также при решении задачи может учитываться эффект проскальзывания слоев цилиндра друг относительно друга в продольном направлении.

На основе классической теории анизотропного упругого тела [3] для решения поставленной задачи были составлены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения.

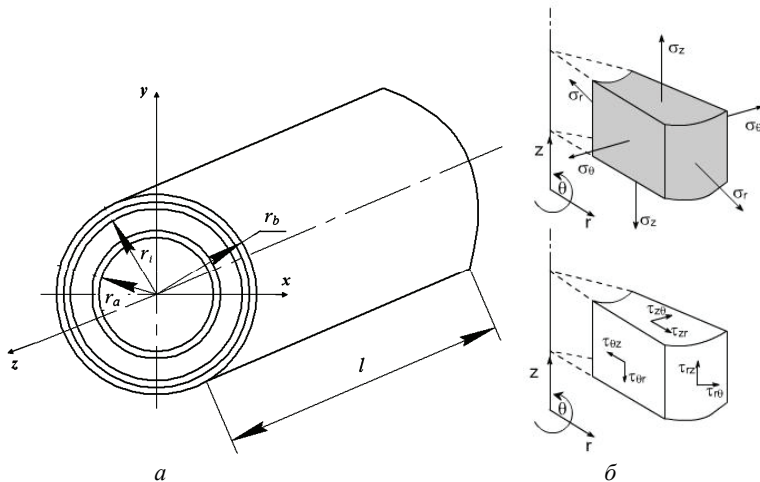


Рисунок 1 – Многослойный круговой полый цилиндр конечной длины
a – направление осей координат; *б* – направление действия напряжений

1.1. Физические соотношения. Приняв цилиндрическую систему координат r, θ, z и задав направление оси x , от которой отсчитывается угол θ (рис. 1, *a*), физические соотношения для i -го ортотропного слоя с цилиндрической

анизотропией запишутся в виде

$$\{\sigma_r^i\} = [B_r^i] \{\sigma_r^i\} + \{\alpha_r^i \Delta t\} \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (1)$$

где

$$\{\sigma_r^i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{\theta z}^i \\ \tau_{rz}^i \\ \tau_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_r^i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^i \\ \varepsilon_\theta^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{\theta z}^i \\ \gamma_{rz}^i \\ \gamma_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{Bmatrix} \alpha_r^i \Delta t \\ \alpha_\theta^i \Delta t \\ \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$[B_r^i] = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & b_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & b_{55}^i & 0 \\ & & & & & b_{66}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta r}^i}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{zr}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}^i}{E_r^i} & \frac{1}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{z\theta}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}^i}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta z}^i}{E_\theta^i} & \frac{1}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}^i} \end{bmatrix} -$$

матрицы-столбцы напряженно-деформированного состояния и температурных деформаций, а также матрица коэффициентов податливости $[B_r^i]$ соответственно. Здесь E_r^i, E_θ^i, E_z^i – модули упругости соответственно в радиальном, круговом и продольном направлениях; $G_{\theta z}^i, G_{rz}^i, G_{r\theta}^i$ – модули сдвига в плоскостях $\theta z, r\theta, r\theta$ соответственно; ν_{kj}^i ($k, j = r, \theta, z$) – коэффициенты Пуассона; α_j^i ($j = r, \theta, z$) – температурный коэффициент линейного расширения в направлениях осей цилиндрической системы; Δt – изменение температуры на поверхностях цилиндра; N – количество слоев цилиндра. Решая систему уравнений (1) относительно напряжений, несложно найти следующие физические соотношения

$$\{\sigma_r^i\} = [A_r^i] \{\varepsilon_r^i\} - \{\alpha_r^i \Delta t\}, \quad (2)$$

где

$$[A_r^i] = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^i & a_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & a_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^i & 0 \\ & & & & & a_{66}^i \end{bmatrix}; \quad \{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{Bmatrix} (a_{11}^i + a_{12}^i + a_{13}^i) \alpha_r^i \Delta t \\ (a_{12}^i + a_{22}^i + a_{23}^i) \alpha_\theta^i \Delta t \\ (a_{13}^i + a_{23}^i + a_{33}^i) \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты матрицы жесткости $[A_r^i]$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= [b_{22}^i b_{33}^i - (b_{23}^i)^2] \Delta^{-1}; & a_{22}^i &= [b_{11}^i b_{33}^i - (b_{13}^i)^2] \Delta^{-1}; \\ a_{33}^i &= [b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2] \Delta^{-1}; & a_{12}^i &= [b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i] \Delta^{-1}; \\ a_{13}^i &= [b_{12}^i b_{23}^i - b_{22}^i b_{13}^i] \Delta^{-1}; & a_{23}^i &= [b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i] \Delta^{-1}; \\ \Delta &= b_{11}^i b_{22}^i b_{33}^i + b_{12}^i b_{23}^i b_{31}^i + b_{21}^i b_{32}^i b_{13}^i - \\ &- b_{13}^i b_{22}^i b_{31}^i - b_{21}^i b_{12}^i b_{33}^i - b_{11}^i b_{32}^i b_{23}^i; \\ a_{44}^i &= \frac{1}{b_{44}^i}; & a_{55}^i &= \frac{1}{b_{55}^i}; & a_{66}^i &= \frac{1}{\theta_{66}^i}. \end{aligned}$$

1.2. Геометрические соотношения.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; & \varepsilon_\theta^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}; & \varepsilon_z^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & \gamma_{\theta z}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; \\ \gamma_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; & \gamma_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_r^i , u_θ^i , u_z^i – перемещения в радиальном, окружном и продольном направлении i -го ортотропного слоя цилиндра ($r_i < r < r_{i+1}$) соответственно.

В связи с тем, что рассматриваемая задача в осесимметричной постановке относительно оси z , перемещение u_θ^i не изменяется в окружном направлении. Поэтому выражения (3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; & \varepsilon_\theta^i &= \frac{u_r^i}{r}; & \varepsilon_z^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & \gamma_{\theta z}^i &= 0; \\ \gamma_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; & \gamma_{r\theta}^i &= -\frac{u_\theta^i}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4)$$

1.3. Уравнения равновесия. При осесимметричной двумерной постановке задачи уравнения равновесия классической анизотропной теории упругости [3] принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_r^i}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\sigma_r^i - \sigma_\theta^i}{r} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^i}{r} = 0. \quad (5)$$

Система из двух уравнений равновесия дополняется третьим уравнением теплопроводности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) t^i = 0. \quad (6)$$

Для решения поставленной задачи, составленную систему из трех дифференциальных уравнений в частных производных (5) – (6), необходимо задать граничные условия на торцах и лицевых поверхностях цилиндра, а также условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев.

1.4. Граничные условия:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned} u_r^i(r, 0) = 0; \quad \sigma_z^i(r, 0) = \tau_{rz}^i(r, 0) = 0; \\ u_r^i(r, l) = 0; \quad \sigma_z^i(r, l) = \tau_{rz}^i(r, l) = 0; \\ \sigma_r^1(r_a, z) = q_a(z); \quad \tau_{rz}^1(r_a, z) = 0; \\ \sigma_r^N(r_b, z) = q_b(z); \quad \tau_{rz}^N(r_b, z) = 0; \\ t^i(r, 0) = t^i(r, l) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ t^1(r_a, z) = t_a(z); \quad t^N(r_b, z) = t_b(z). \end{aligned} \quad (7)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned} \sigma_r^{i-1}(r_i, z) = \sigma_r^i(r_i, z); \quad \tau_{rz}^{i-1}(r_i, z) = \tau_{rz}^i(r_i, z); \\ u_r^{i-1}(r_i, z) = u_r^i(r_i, z); \quad u_z^{i-1}(r_i, z) - u_z^i(r_i, z) = K \cdot \tau_{rz}^i(r_i, z); \\ t^{i-1}(r_i, z) = t^i(r_i, z); \quad \lambda^{i-1} \frac{\partial t^{i-1}(r_i, z)}{\partial r} = \lambda^i \frac{\partial t^i(r_i, z)}{\partial r} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (8)$$

В последнем условии (8) параметр λ^i соответствует коэффициенту теплопроводности i -го слоя.

В качестве предельных из уравнения (8) имеет место два варианта: при $1/K^{(i)} = 0$ – имеет место упругое проскальзывание соседних слоев друг относительно друга по сопряженным поверхностям, при $K^{(i)} = 0$ – идеальный контакт.

1.5. Безразмерные параметры. Для упрощения ввода исходных данных и обобщения полученных численных результатов, следуя работе [4], вводятся следующие безразмерные величины:

$$R = \frac{r}{r_b}; \quad R_a = \frac{r_a}{r_b}; \quad R_b = \frac{r_b}{r_b} = 1; \quad Z = \frac{z}{r_b};$$

$$\begin{aligned}
L &= \frac{l}{r_b}; & A_{kl}^i &= \frac{a_{kl}^i}{E_0}; & \Gamma_k^i &= \frac{\gamma_k^i}{\alpha_0 E_0}; \\
T^i &= \frac{t^i}{t_0}; & \Lambda^i &= \frac{\lambda^i}{\lambda_0}; & U_r^i &= \frac{u_r^i}{\alpha_0 E_0 r_b}; & U_z^i &= \frac{u_z^i}{\alpha_0 E_0 r_b}; \\
S_r^i &= \frac{\sigma_r^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; & S_z^i &= \frac{\sigma_z^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; & S_\theta^i &= \frac{\sigma_\theta^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; \\
TU_{rz}^i &= \frac{\tau_{rz}^i}{\alpha_0 E_0 t_0}; & Q_a(z) &= \frac{q_a(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}; & Q_b(z) &= \frac{q_b(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}; \\
T_a(z) &= \frac{t_a(z)}{t_0}; & T_b(z) &= \frac{t_b(z)}{t_0},
\end{aligned} \tag{9}$$

где E_0 , λ_0 , и α_0 – значения модуля Юнга, теплопроводности и коэффициента теплового линейного расширения эталонного материала; t_0 – эталонная температура цилиндра.

1.6. Постановка краевой задачи. Подставляя геометрические соотношения (4) в уравнения (5), а также с учетом безразмерных параметров введенных выше, можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
& \left[A_{11}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_r^i + \\
& + \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial R}; \\
& \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_r^i + \\
& \left[A_{55}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + A_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial Z}; \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) T^i + \frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Граничные условия (7), (8), записанные при помощи безразмерных параметров (9), принимают вид:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned}
U_r^i(R, 0) &= 0; & S_z^i(R, 0) &= TU_{rz}^i(R, 0) = 0; \\
U_r^i(R, l) &= 0; & S_z^i(R, l) &= TU_{rz}^i(R, l) = 0; \\
S_r^1(R_a, z) &= Q_a(z); & TU_{rz}^1(R_a, z) &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_r^N(R_b, z) &= Q_b(z); & TU_{rz}^N(R_b, z) &= 0; \\
T^i(R, 0) &= T^i(R, l) = 0 & (i = 1, 2, \dots, N), \\
T^1(R_a, z) &= T_a(z); & T^N(R_b, z) &= T_b(z).
\end{aligned} \tag{11}$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned}
S_r^{i-1}(R_i, z) &= S_r^i(R_i, z); & TU_{rz}^{i-1}(R_i, z) &= TU_{rz}^i(R_i, z); \\
U_r^{i-1}(R_i, z) &= U_r^i(R_i, z); & U_z^{i-1}(R_i, z) - U_z^i(R_i, z) &= K \cdot TU_{rz}^i(R_i, z); \\
T^{i-1}(R_i, z) &= T^i(R_i, z); & \Lambda^{i-1} \frac{\partial T^{i-1}(R_i, z)}{\partial R} &= \Lambda^i \frac{\partial T^i(R_i, z)}{\partial R} \quad (i = 1, 2, \dots, N).
\end{aligned} \tag{12}$$

2. Алгоритм решения краевой задачи. Решение краевой задачи (10) – (12) в направлении продольной оси цилиндра ищется в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned}
U_r^i(R, Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^i(R) \sin(\beta Z); & U_z^i(R, Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^i(R) \cos(\beta Z); \\
T_r^i(R, Z) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n^i(R) \sin(\beta Z).
\end{aligned} \tag{13}$$

где $\beta = \frac{n\pi \chi_b}{L}$. Принятые выражения (13) удовлетворяют условиям свободного опирания на торцах цилиндра.

Подставляя (13) в систему уравнений (10), несложно получить ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \left[A_{11}^i \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \beta^2 \right] \Phi_n^i(R) + \\
& \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r^i \frac{dF_n^i(R)}{dR}; \\
& \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Phi_n^i(R) + \\
& \left[A_{55}^i \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) + A_{33}^i \beta^2 \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r^i F_n^i(R); \\
& \left[\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \beta^2 \right] F_n^i(R) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

По аналогичной схеме преобразовываются и граничные условия (11), (12):

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned}
A_{11}^1 \frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR} + A_{12}^1 \frac{\Phi_n^1(R_a)}{R} - \beta A_{13}^1 \Psi_n^1(R_a) &= Q_{an}, \\
\beta \Phi_n^1(R_a) + \frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR} &= 0, \\
A_{11}^N \frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR} + A_{12}^N \frac{\Phi_n^N(R_b)}{R} - \beta A_{13}^N \Psi_n^N(R_b) &= Q_{bn}, \\
\beta \Phi_n^N(R_b) + \frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR} &= 0, \\
F_n^1(R_a) = T_{an}, F_n^N(R_b) = T_{bn}. &
\end{aligned} \tag{15}$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned}
A_{11}^{i-1} \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^{i-1} \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^{i-1} \Psi_n^{i-1}(R^i) &= \\
= A_{11}^i \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^i \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^i \Psi_n^i(R^i); & \\
\beta \Phi_n^{i-1}(R^i) + \frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR} = \beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR}; & \quad \Phi_n^{i-1}(R^i) = \Phi_n^i(R^i); \\
\Psi_n^{i-1}(R^i) - \Psi_n^i(R^i) = K \left(\beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR} \right); & \quad F_n^{i-1}(R^i) = F_n^i(R^i); \\
A^{i-1} \frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR} = A^i \frac{dF_n^i(R^i)}{dR}. &
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
Q_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_a(Z) \sin(\beta Z) dZ; & Q_{bn} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_b(Z) \sin(\beta Z) dZ; \\
T_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_a(Z) \sin(\beta Z) dZ; & T_{bn} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_b(Z) \sin(\beta Z) dZ.
\end{aligned}$$

Считается, что в радиальном направлении функции $\Phi_n^i(R^i)$, $\Psi_n^i(R^i)$, $F_n^i(R^i)$ непрерывны по толщине i -го слоя, тогда при помощи рядов Тейлора их можно будет записать в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^i (R-1)^k; & \Psi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k^i (R-1)^k; \\
F_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k^i (R-1)^k. & &
\end{aligned} \tag{17}$$

Подставив (17) в уравнения (15) и приравняв коэффициенты при $(R-1)^k$

к нулю, несложно получить следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}
 C_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{aligned} &-(k+1)C_{k+1}^i + \frac{A_{22}^i + \beta^2 A_{55}^i}{A_{11}^i} C_k^i - \\ &(k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{11}^i} B_{k+1}^i - \beta \frac{A_{13}^i - A_{23}^i}{A_{11}^i} B_k^i + \frac{\Gamma_r^i(k+1)}{A_{11}^i} D_{k+1}^i \end{aligned} \right]; \\
 B_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{aligned} &-(k+1)B_{k+1}^i + \frac{\beta^2 A_{33}^i}{A_{55}^i} B_k^i - \\ &(k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{55}^i} C_{k+1}^i - \beta \frac{A_{55}^i + A_{23}^i}{A_{55}^i} C_k^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} D_k^i \end{aligned} \right]; \\
 D_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[-(k+1)D_{k+1}^i + \beta^2 B_k^i \right]. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Из рекуррентных соотношений (18) следует, что все коэффициенты C_k^i , B_k^i и D_k^i могут быть выражены через C_0^i , C_1^i , B_0^i , B_1^i , D_0^i , D_1^i , когда $k > 1$. Тогда решения системы уравнений (15) могут быть записаны в компактной форме

$$\begin{aligned}
 \Phi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} &g_c^i(k,1)C_0^i + g_c^i(k,2)C_1^i + g_c^i(k,3)B_0^i \\ &+ g_c^i(k,4)B_1^i + g_c^i(k,5)D_0^i + g_c^i(k,6)D_1^i \end{aligned} \right] (R-1)^k; \\
 \Psi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} &g_b^i(k,1)C_0^i + g_b^i(k,2)C_1^i + g_b^i(k,3)B_0^i \\ &+ g_b^i(k,4)B_1^i + g_b^i(k,5)D_0^i + g_b^i(k,6)D_1^i \end{aligned} \right] (R-1)^k; \\
 F_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{aligned} &g_d^i(k,1)C_0^i + g_d^i(k,2)C_1^i + g_d^i(k,3)B_0^i \\ &+ g_d^i(k,4)B_1^i + g_d^i(k,5)D_0^i + g_d^i(k,6)D_1^i \end{aligned} \right] (R-1)^k, \tag{19}
 \end{aligned}$$

где $g_b^i(k, o)$, $g_c^i(k, j)$, $g_d^i(k, j)$ константы, определяемые при помощи рекуррентных соотношений (19). Неизвестные константы C_0^i , C_1^i , B_0^i , B_1^i , D_0^i , D_1^i , число которых определяется количеством дискретных слов цилиндра N , находятся путем подстановки выражений (19) в граничные условия (15), (16). Полученная при этом линейная алгебраическая система уравнений включает $6N$ неизвестных констант.

Определив значение выражений (19) и подставив их в заданные решения (13), несложно при помощи геометрических и физических соотношений, представленных выше, получить решение рассматриваемой термоупругой краевой задачи.

3. Пример расчета. Геометрические параметры многослойного кругового полого цилиндра $r_a = 0,156$ м, $r_b = 0,188$ м и $l = 2,163$ м. Эталонные значения температуры, модуль Юнга, и коэффициент теплового расширения равны: $T_0 = 50$ К, $E_0 = 40$ ГПа, а $a_0 = 7,0 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹. Температурные нагрузки на

внутренней и наружной поверхности, а также внутреннее и внешнее давление, заданы в следующем виде:

$$T_a(z) = 0, T_b(z) = \Delta T \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad q_a(z) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), q_b(z) = 0,$$

где $q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К.

Цилиндр состоит из 4 слоев: 1) твердый полиэтилен высокого давления ($h = 4$ мм) – $E = 260$ МПа; $\nu = 0,4$; $\lambda = 0,44$ Вт/м·К; $\alpha = 20 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$; 2) стеклопластик ($h = 20$ мм) – $\lambda = 0,4$ Вт/м·К; $\alpha_z = \alpha_\theta = 5 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$; $\alpha_r = 7 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$; 3) пеновинилпласт ($h = 4$ мм) – $E = 83$ МПа; $\nu = 0,33$; $\lambda = 0,4$ Вт/м·К; $\alpha = 15 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$; 4) дюралюминий ($h = 4$ мм) – $E = 71$ ГПа; $\nu = 0,31$; $\lambda = 160$ Вт/м·К; $\alpha = 2,3 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$; углепластик – $\lambda = 0,4$ Вт/м·К, $\alpha_z = -5,7 \cdot 10^{-7}$ К $^{-1}$, $\alpha_\theta = 3,0 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$, $\alpha_r = 7 \cdot 10^{-6}$ К $^{-1}$.

Для первого, третьего и четвертого слоев, изготовленных из упругого изотропного материала, справедливы следующие соотношения:

$$E_z = E_\theta = E_r = E; \quad G_{\theta z} = G_{r\theta} = G_{rz} = G;$$

$$\nu_{z\theta} = \nu_{zr} = \nu_{\theta r} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} = \nu_{r\theta} = \nu_z; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе [1]. Модули упругости E_θ , сдвига G_θ и коэффициент Пуассона ν_θ наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_\theta = 55000$ МПа, $G_\theta = 22000$ МПа и $\nu_\theta = 0,25$. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_m = 3550$ МПа, $G_m = 1270$ МПа и $\nu_m = 0,4$. В каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70 % общего объема.

Углепластик. Согласно паспортным данным модули упругости E_θ , сдвига G_θ и коэффициент Пуассона ν_θ углеродного волокна ЛУ-03 соответственно равны 235000 МПа, 90400 МПа и 0,3. Механические характеристики связующего углепластика (сополимер эпоксифенольной и анилиноформальдегидной смол) – $E_m = 3500$ МПа, $G_m = 1320$ МПа и $\nu_m = 0,32$. В каждом монослое толщиной 0,171 мм объем, занимаемый волокнами, составляет 55 % общего объема.

Технические постоянные рассматриваемых многослойного стеклопластика и углепластика сведены в табл. 1.

На рис. 2 – 4 показаны графики распределения перемещений и напряжений в толстостенном цилиндре.

Анализ теоретических результатов, показанных на рис. 2, позволяет отметить следующее. Осевые напряжения в несущем стеклопластиковом слое цилиндра уменьшаются примерно в 3,5 раза, когда дюралюминиевый защитный слой заменяется защитным слоем из углепластика.

Из рис. 3 видно, что в результате замены дюралюминиевого внешнего защитного слоя цилиндра углепластиковым слоем величина окружных на-

пряжений в несущем стеклопластиковом слое уменьшается в 1,4 раза при совместном действии температурной нагрузки и внутреннего давления.

Таблица 1 – Упругие характеристики угле и стеклопластиков

Материал	E_{ii} , МПа	G_{ij} , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
Углепластик	$E_{\theta} = 84457$	$G_{\theta z} = 12410$	$\nu_{\theta z} = 0,21$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_z = 42026$	$G_{r\theta} = 4287$	$\nu_{r\theta} = 0,28$	$\nu_{r\theta} = 0,049$
	$E_r = 14703$	$G_{rz} = 3677$	$\nu_{rz} = 0,3$	$\nu_{rz} = 0,1$
Стеклопластик	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7490$	$\nu_{z\theta} = 0,077$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_{\theta} = 33500$	$G_{rz} = 5014$	$\nu_{zr} = 0,397$	$\nu_{rz} = 0,4$
	$E_r = 23870$	$G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{\theta r} = 0,405$	$\nu_{r\theta} = 0,284$

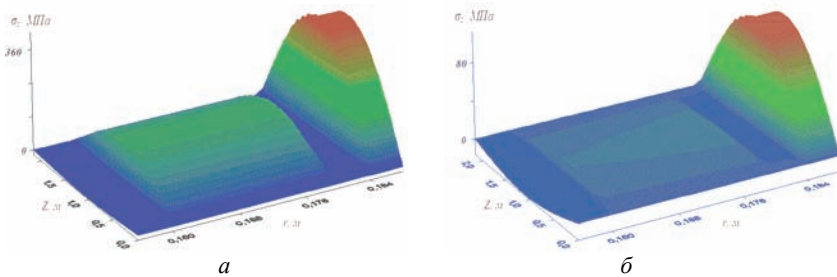


Рисунок 2 – Распределение осевых напряжений в цилиндре ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К) защитный слой: а – дюралюминий; б – углепластик

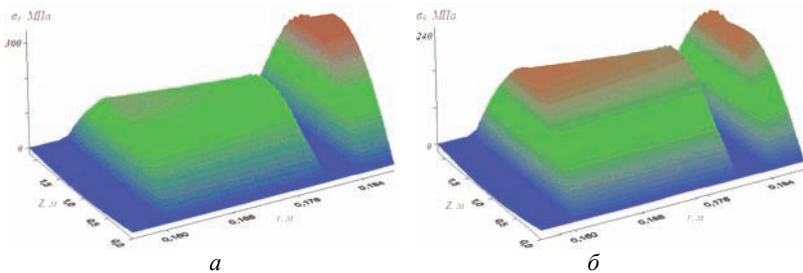


Рисунок 3 – Распределение окружных напряжений в цилиндре ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К) защитный слой: а – дюралюминий; б – углепластик

Заметно изменяется картина распределения осевых напряжений в защитном слое многослойного цилиндра ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К). Максимальные напряжения σ_z в дюралюминиевом слое в 3 раза больше максимальных напряжений в углепластиковом слое. Изменяется картина распределения напряжений поперечного сдвига (рис. 4) в полом неоднородном толстостенном

цилиндре при использовании углепластика вместо дюралюминия для конструкции защитного слоя.

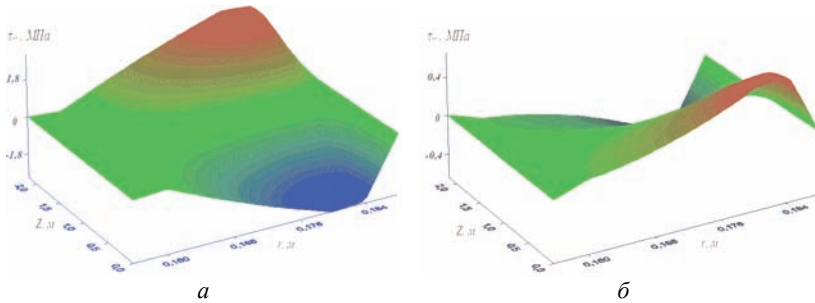


Рисунок 4 – Распределение напряжений поперечного сдвига в цилиндре ($q_0 = 20$ МПа, $\Delta T = 80$ К) защитный слой: а) дюралюминий; б) углепластик

Выводы. На основе дискретно-структурной теории проведены исследования напряженно-деформированного состояния многослойных оболочек при действии как статической, так и температурной нагрузки. Предложенный алгоритм решения, рассмотренного класса задач, позволяет получать расчетные данные для оценки влияния физико-механических характеристик отдельных слоев на термоупругое деформированное состояние неоднородного по толщине цилиндра. При сравнение напряженно-деформированного состояния цилиндров с внешними защитными слоями из углепластика и дюралюминия, более эффективным оказался углепластик.

Список литературы: 1. *Верещака С.М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / *С.М. Верещака.* – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с. 2. *Пискунов В.Г.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек / *В.Г.Пискунов, А.О.Рассказов* // Прикладная механика. – 2002. – Т 38. № 2. – С. 22-56. 3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / *С.Г. Лехницкий.* – М.: Наука, 1977. – 416 с. 4. *Shao Z. S.* Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / *Z. S. Shao* // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82. – P. 155-163.

Bibliography (transliterated): 1. *Vereschaka S.M.* Nelinejnoe deformirovanie i ustojchivost' mnogoslujnyh elementov konstrukcij s defektami struktury. *S.M. Vereschaka.* Sumy: Izd-vo SumGU, 2009. 286 Print. 2. *Piskunov V.G.* Razvitie teorii sloistyh plastin i obolochek. *V.G.Piskunov, A.O.Rasskazov.* Prikladnaya mehanika. 2002. T 38. № 2. 22-56 Print. 3. *Lehnickij S.G.* Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. *S.G. Lehnickij.* Moscow: Nauka, 1977. 416 Print. 4. *Shao Z. S.* Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length. *Z. S. Shao.* International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2005. Vol. 82. 155-163 Print.

Поступила (received) 25.03.2014

Д.В. ЛАВИНСКИЙ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

В статье представлен метод анализа связанных электромагнитных и механических полей в технологических системах. Связанность учтена с помощью объемных электромагнитных сил, которые определяются по результатам анализа распределения электромагнитного поля. Для определения характеристик электромагнитного поля используются понятия векторного магнитного потенциала. Решение предполагается по схеме метода конечных элементов. Проведено решение для системы «индуктор – проводник». Представление сравнения с аналитическим решением. Проанализировано распределение интенсивности напряжений.

Ключевые слова: электромагнитные поля, векторный магнитный потенциал, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

Введение и актуальность проблемы. Высокоинтенсивные электромагнитные поля (ЭМП) являются условиями эксплуатации множества технических и технологических объектов. Взаимодействие ЭМП с электропроводными телами может приводить к их движению и деформированию. Уровни энергии, развиваемой ЭМП могут значительными до такой степени, что могут привести к разрушению элементов конструкций и машин. Создание эффективных методов анализа напряженно-деформированного состояния электропроводных тел при действии ЭМП является актуальной проблемой в научном и практическом плане. Отметим, что традиционные подходы предусматривают последовательный анализ распределения векторных характеристик ЭМП, подсчет электромагнитных сил (объемных либо поверхностных) и анализ НДС. Аналитические методы решения рассматривают, как правило, тела канонической формы. Таким образом, на современном этапе целесообразным является применение численных методов анализа подобных задач.

Математическая постановка задачи. Анализ распределения векторных характеристик ЭМП и тензорных характеристик процесса деформирования опирается на две группы уравнений. Первая группа описывает процессы распространения ЭМП в материале, при этом наиболее часто используются представления Максвелла, которые легли в основу одноименных дифференциальных уравнений, связывающих вектора напряженности электрического и магнитного поля, вектора электрической и магнитной индукции, токи и заряды.

Нестационарное деформирование системы взаимодействующих тел описывается известными соотношениями, которые включают дифференци-

альные уравнения движения, геометрические зависимости (например, в форме Коши) и уравнения состояния. Последние могут описывать упругое, упруго-пластическое либо пластическое поведение материала.

Дифференциальные уравнения, описывающие нестационарное распределение ЭМП и процессы деформирования, должны дополняться соответствующими граничными и начальными условиями. В тех случаях, когда рассматривается деформирование составных конструкций, также должны вводиться условия «сопряжения» на границах взаимодействия. Эти условия должны отражать как процессы проникновения ЭМП через границу раздела, так и механические процессы (начальный зазор (натяг), сцепление, проскальзывание, трение). Одним из возможных способов учета контактного взаимодействия при решении подобных задач является введение контактных слоев [1]. Фактически, контактный слой – это искусственно вводимое между взаимодействующими новое тело, физико-механические свойства которого позволяют в определенных рамках моделировать условия реального контакта. Доказана эффективность введения контактных слоев для решения задач механики, в то же время использование контактных слоев при решении задач распространения ЭМП не нашло широкого применения. По нашему мнению, использование контактных слоев при анализе деформирования составных конструкций при наличии ЭМП является оправданным, так как позволяет рассматривать задачу в рамках единой расчетной схемы.

Явление связанности ЭМП и полей механических напряжений и деформаций традиционно учитывается через рассмотрение объемных электромагнитных сил.

Полная математическая постановка упруго-пластического деформирования системы взаимодействующих тел при наличии импульсного ЭМП приведена, например, в работе [2].

Во многих случаях геометрия и условия работы технологической системы позволяют свести задачу анализа ЭМП и НДС к осесимметричной постановке. При проведении численного либо численно-аналитического анализа распространения ЭМП удобно использовать понятие векторного магнитного потенциала [3] $\vec{A}(r, z, \varphi, t)$. Он вводится из условия: $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$. Так как, в осесимметричной постановке вектор магнитной индукции всегда лежит в меридиональной плоскости rOz , векторный магнитный потенциал будет иметь только одну ненулевую компоненту – окружную. В этом случае распределение ЭМП в цилиндрической системе координат при нестационарном внешнем воздействии описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \mu_0 J = \mu \lambda \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (1)$$

где μ , λ – удельная магнитная проницаемость и электропроводность материала подобласти, A – окружная компонента векторного магнитного потенциала, J – плотность тока.

В работе [4] доказано, что в случае импульсного ЭМП при оценке прочности возможно использование квазистационарного приближения. В дальнейшем мы будем проводить исследования в рамках данного приближения.

Эффективным методом анализа поставленной задачи является метод конечных элементов (МКЭ). В основу конкретного использования МКЭ может быть положено вариационное уравнение, описывающее условие минимума полной энергии системы:

$$\delta E = 0, \quad E = U + W, \quad (2)$$

здесь U – энергия упругого деформирования, W – энергия ЭМП, которая может быть представлена в виде:

$$W = \int_V \int_0^B \bar{H} d\bar{B} dV, \quad (3)$$

где \bar{H} – вектор напряженности магнитного поля, \bar{B} – вектор магнитной индукции. Выражение в виде (3) рассматривается в том случае, когда имеет место нелинейная зависимость между \bar{H} и \bar{B} . Если эффектами нелинейности можно пренебречь, тогда выражение (3) упрощается и может быть представлено в векторно-матричном виде следующим образом:

$$W = \frac{1}{2} \{A\}^T [M] \{A\}, \quad (4)$$

где $[M]$ – «магнитная» матрица материала, которая зависит от его электрофизических свойств и геометрии рассматриваемого тела, $\{A\}$ – вектор-столбец магнитного потенциала. Подобным образом можно представить и энергию упругого деформирования:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}, \quad (5)$$

где $\{u\}$ – вектор-столбец перемещений, $[K]$ – матрица жесткости.

Теперь применим операцию варьирования к функции полной энергии с учетом соотношений (4) и (5):

$$\delta E = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial u} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [M] \{A\} + [M_k] \{u\} = 0; \\ [K] \{u\} + [K_m] \{A\} = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$[M_k] = \frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{A\}}; \quad [K_m] = \frac{1}{2} \{A\}^T \frac{\partial [M]}{\partial \{u\}},$$

здесь $[M_k]$ и $[K_m]$ – матрицы, которые характеризуют взаимное влияние ЭМП и механических полей (связанность задачи). Если пренебречь эффектами магнитострикции (которые выражает матрица $[M_k]$), то формально система уравнений распадается на два уравнения, которые можно решать последовательно. Слагаемое $[K_m] \{A\}$ из второго уравнения – это не что иное, как век-

тор-столбец электромагнитных сил, взятый с обратным знаком. Этот факт легко проверить, если применить принцип виртуальной работы к выражению (4). Приведенный способ учета электромагнитных сил, по нашему мнению, является более предпочтительным по сравнению с традиционным, когда значения электромагнитных сил вычисляются отдельно. Отметим, что подобный подход к учету электромагнитных сил представлен, например, в работе [5].

Пример расчета и анализ полученных результатов. В качестве примера использования предложенного метода анализа рассмотрим систему «индуктор – проводник», решение для которой приводится в работе [6] и базируется на методе использования интегральных уравнений для расчета ЭМП, предложенном в работах [3,7].

Здесь индуктор представляет собой кольцо с прямоугольным меридиональным сечением высотой $2a$. Проводник – прямой цилиндр, высота которого больше высоты индуктора. Были приняты следующие числовые данные: $a = 0,1$ м; $r_2 = 0,22$ м; $r_3 = 0,1$ м; $\delta_0 = 0,02$ м. Материал индуктора – магнитная сталь, материал проводника – медь. Источником поля выступает ток, равномерно распределенный по сечению индуктора с амплитудой плотности $J = 50$ кА/м².

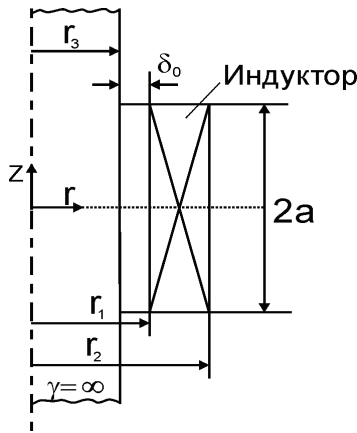


Рисунок 1 – Расчетная схема

Численное решение с использованием МКЭ согласно методу, описанному в данной работе, проводилось для схожей расчетной схемы. Отличия состояли в том, что проводник рассматривался конечной высоты ($4a$), система взаимодействующих тел окружалась воздушной средой, на внешних границах которой задавались условия затухания векторного магнитного потенциала.

На рис. 2 приведено качественное распределение касательной компо-

ненты магнитной индукции по поверхности проводника. Сравнение решения МКЭ и аналитического решения показывает достаточную степень приближения. Отметим, что максимальное расхождение не превышает 15 %. В то же время аналитическое решение не может считаться абсолютно точным, так как оно не учитывало внешнюю (воздушную) среду. В подобных задачах аналитические решения могут рассматриваться как завышенное оценочное приближение.

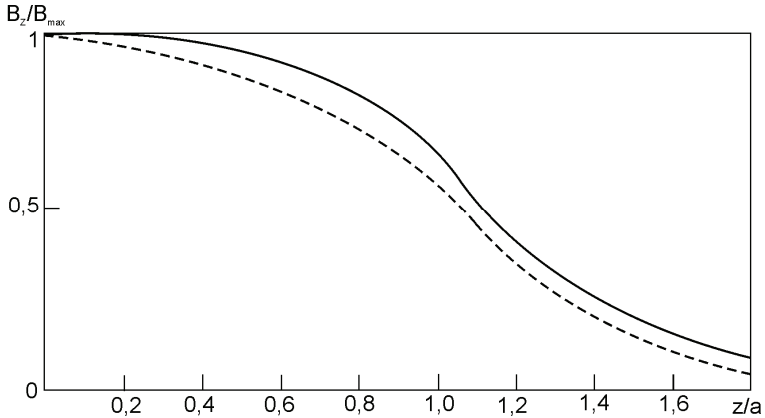


Рисунок 2 – Распределение касательное составляющей магнитной индукции на поверхности проводника (нормировка на максимум). Сплошная линия – аналитическое решение; штриховая линия – решение МКЭ

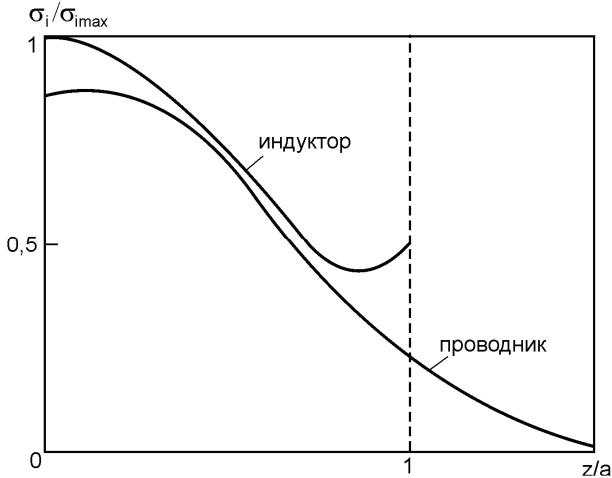


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений по внутренней поверхности индуктора и по внешней поверхности проводника (нормировка на максимум)

Далее рассмотрим некоторые результаты упругого деформирования индуктора и проводника. На торцах они принимались жестко закрепленными, нагрузкой выступали электромагнитные силы, вводимые по способу, указанному ранее. Качественное распределение интенсивности напряжений (рис. 3) показывает, что индуктор является более нагруженным по сравнению с проводником, у которого на удалении от источника поля интенсивность напряжений стремится к нулю.

Выводы. Представлен метод анализа распределения векторных характеристик ЭМП и тензорных характеристик НДС. Связанность ЭМП и полей механических напряжений и деформаций, осуществляется при помощи введения электромагнитных сил. Представлены расчеты в рамках осесимметричной расчетной схемы для системы «индуктор – проводник».

Список литературы: 1. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.Н.Подгорный, П.П.Гонтаровский, Б.Н.Киркач и др. – К.: Наукова думка, 1989. – 232 с. 2. Лавинський Д.В. Задачі пружно-пластичного деформування тіл при магнітно-імпульсному навантаженні / Лавинський Д.В. // *Машинознавство*. – № 7-8 (169-170). – Львів: «КІНПАТРІ ЛТД», 2011. – С. 48-51. 3. Тозони О.В., Расчет трехмерных электромагнитных полей / Тозони О.В., Маергойз И.Д. – К.: Техніка, 1974. – 352 с. 4. Батыгин Ю.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю.В.Батыгин, В.И. Лавинский, Л.Т. Хименко. – Х.: МОСТ-Торнадо, 2003. – 288 с. 5. Тозони О.В., Расчет трехмерных электромагнитных полей / Тозони О.В., Маергойз И.Д. – К.: Техніка, 1974. – 352 с. 5. Ren Z. Calculation of local magnetic forces in magnetized materials / Z.Ren, M.Besbes, S.Boukhache // *Proc. International Workshop on Electric and Magnetic Fields*. – 1992. – PP. 64.1-64.6. 6. Подольцев А.Д. Элементы теории и численного расчета электромагнитных процессов в проводящих средах / А.Д.Подольцев, И.Н.Кучерявая. – К.: Изд. Ин-та электродинамики НАН Украины, 1999. – 363 с. 7. Тозони О.В., Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах / Тозони О.В. – К.: Техніка, 1967. – 252 с.

Bibliography (transliterated): 1. Zadachi kontaktного vzaïmdeïstvïya elementov konstrukcij. A.N.Podgornyj, P.P.Gontarovskij, B.N.Kirkach i dr. Kyiv: Naukova dumka, 1989. 232 Print. 2. Lavins'kyj D.V. Zadachi pruzhno-plastychnoho deïformuvannya til pry mahnitno-ïmpul'snomu navantazhenni. Lavins'kyj D.V. Mashynoznavstvo. № 7-8 (169-170). L'viv: «KINPATRI LTD», 2011. 48-51 Print. 3. Tozoni O.V., Raschet trehmernyh elektromagnitnyh polej / Tozoni O.V., Maergojz I.D. Kyiv: Tehnika, 1974. 352 Print. 4. Batygin Yu.V. Impul'snye magnitnye polya dlya progressivnyh tehnologij. Yu.V.Batygin, V.I. Lavinskij, L.T. Himenko. Kharkiv: MOST-Tornado, 2003. 288 Print. 5. Tozoni O.V., Raschet trehmernyh elektromagnitnyh polej. Tozoni O.V., Maergojz I.D. Kyiv: Tehnika, 1974. 352 Print. 5. Ren Z. Calculation of local magnetic forces in magnetized materials. Z.Ren, M.Besbes, S.Boukhache. Proc. International Workshop on Electric and Magnetic Fields. 1992. 64.1-64.6 Print. 6. Podol'cev A.D. Elementy teorii i chislennogo rascheta elektromagnitnyh processov v provodyaschih sredah. A.D.Podol'cev, I.N.Kucheryavaya. Kyiv: Izd. In-ta elektrodinamiki NAN Ukrainy, 1999. 363 Print. 7. Tozoni O.V., Raschet elektromagnitnyh polej na vychislitel'nyh mashinah. Tozoni O.V. Kyiv: Tehnika, 1967. 252 Print.

Поступила (received) 22.07.2014

О. О. ЛАРИН, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХП»;
Ю. А. ПЕТРОВА, аспірант, НТУ «ХП»

ВИЗНАЧЕННЯ ЦИКЛІВ НАПРУЖЕНЬ ЕЛЕМЕНТІВ ПНЕВМА-ТИЧНОЇ ШИНИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЦЕДУРИ СУБМОДЕЛЮВАННЯ

В ході даної роботи були створені геометрична та скінчено-елементна моделі пневматичної шини, з урахуванням ортотропії механічних властивостей у гумово-кордних шарах. Таке моделювання було здійснено за допомогою введення локальних фінітно-тороїдальних систем координат. Був проведений розрахунок задачі контактної взаємодії шини з дорожнім покриттям з урахування геометричної і фізичної нелінійності. Для отримання достовірних результатів по напруженням, був використаний підхід двомасштабного субмоделювання.

Ключові слова: композити, субмоделювання, цикли напружень.

Вступ. Пневматична шина є важливим елементом сучасних транспортних засобів (ТЗ), від параметрів якого залежать, наприклад, експлуатаційні та функціональні характеристики ТЗ, а також, безпека руху. Показники жорсткості у радіальному та аксіальному напрямках суттєво впливають на плавність ходу, керованість і стійкість руху [1]. Особливості контактної взаємодії визначають їх гальмівні та динамічні характеристики (спилка). Циклічне деформування, що виникає в шині під час кочення формує процеси теплоутворення [2], які обумовлюють демпфуючі властивості колеса, а отже, впливають на плавність ходу та опір коченню [3,4].

Однією з важливих характеристик якості шин також є термін їх служби, який визначається здатністю шинних матеріалів чинити опір різним видам руйнування.

Традиційні інженерні підходи до визначення основних експлуатаційних показників шин засновані на експериментальних (стендових та дорожніх) випробуваннях та теоретичному моделюванні із застосуванням методу скінчених елементів (МСЕ) [5].

Експериментальні дослідження є коштовними та дають результати лише по інтегральним та усередненим показникам. Задача синтезу внутрішньої будови шини та аналізу впливу конструкційних особливостей на характеристики шин є надзвичайно складною. Навіть за великої кількості експериментів, що зокрема потребують складного обладнання, виготовлення дослідницьких зразків і т.п., ми отримаємо лише усереднені характеристики. Крім того, технічно дуже складно визначити внутрішню локалізацію НДС в шині, тим більше, в процесі експлуатації.

Аналогічно, експериментальні методи складно застосовувати для дослі-

дження процесів внутрішнього теплоутворення та теплопровідності, процесів накопичення втоми, старіння матеріалів тощо [3,6].

Слід також наголосити, що відмічені процеси здатні істотно змінювати характеристики пневматичних шин в процесі експлуатації та з часом [7]. Так, нагрів гумоподібних матеріалів, змінює їх властивості, а отже, і особливості деформування, і жорсткісні характеристики колеса і т.д. Дослідження таких явищ є окремою і самостійною задачею, що є цікавою з теоретичної і практичної точок зору.

Відмічені особливості пояснюють той факт, що у сучасній практиці проектування пневматичних шин все більше застосовується комп'ютерне моделювання [8]. При цьому, зазвичай, розв'язується контактна задача пружного та термопружного деформування на основі МСЕ.

У сучасній науковій практиці експериментальні методи застосовуються для визначення властивостей матеріалів, параметризації моделей і для перевірки адекватності та достовірності побудови моделі.

Основні характеристики шин визначаються особливостями деформування, що виникає під час роботи, характером контакту шини з дорогою, значеннями напружено-деформованого стану (НДС) і характером розподілу напружень у зоні контакту.

Чисельні розрахунки даної задачі ускладнюються низкою особливостей, а саме, наявністю шарів з ортотропними властивостями матеріалу, геометричної нелінійності, нелінійності фізичних співвідношень для гумових матеріалів, контактної взаємодії. Врахування всіх цих особливостей, призводить до суттєвої нелінійності математичної моделі. А при збільшенні розмірності нелінійної системи виникає проблема досягнення збіжності чисельних процедур, що застосовуються для пошуку розв'язку.

Так, при тривимірному моделюванні шини найбільш грубою є СЕ сітка, параметри якої задовольняють вимогам, що висуваються до СЕ: ширини сторін 1:5, кути $> 20^\circ$.

Практика розрахунків задачі статичного деформування пневматичної шини із твердою основою з урахуванням ортотропії властивостей, нелінійності в поведінці матеріалів, великих прогинів показує, що суттєві проблеми із збіжністю розв'язків виникають для систем, що мають 10^5 рівнянь при розв'язанні методом Ньютона-Рафсона.

Разом з тим достовірно визначення параметрів НДС потребує побудови докладної моделі з високою густиною сітки СЕ в областях, в яких очікуються великі значення деформацій. Тобто використання систем, розмірність яких більша за 10^5 .

Проте нехтування нелінійними ефектами неприпустимо. Так, досвід попередніх результатів вивчення даного об'єкту показує, що, наприклад, неврахування геометричної нелінійності дає похибку обчислень близько 30%, навіть у визначенні статичного прогину [9].

Для вирішення вищезазначених проблем, в даній роботі запропоновано

використати метод субмоделювання.

Відповідно до підходу задача розв'язується у декілька етапів. На першому етапі проводиться розрахунок повної моделі з досить грубою СЕ сіткою, яка не дає достовірної картини НДС, але є достатньою для отримання якісної картини деформування.

На другому етапі, з повної розрахункової моделі вилучається певна її частина, для якої відбувається перестроювання сітки, що дозволяє виконати більш докладний аналіз для виділеної області. Це дозволяє отримати більш точну інформацію для частини конструкції, не збільшуючи розмірності задачі.

Метою роботи є комп'ютерне моделювання циклічного НДС пневматичної шини, що виникає внаслідок контактної взаємодії з дорожнім покриттям, на основі тривимірних СЕ моделей, що враховують багатшарову структуру, ортотропію механічних властивостей, геометричні та фізичні нелінійності. Для досягнення цієї мети запропоновано застосувати багатомасштабний підхід, що дозволяє підвищити ефективність чисельного моделювання.

1. Об'єкт, що досліджується. На всіх етапах моделювання враховувались основні особливості конструкції, характеристики матеріалів та їх неоднорідність тощо. Зокрема враховувалось, що конструкція пневматичної шини складається з різних за властивостями і функціональному призначенню шарів (рис. 1).

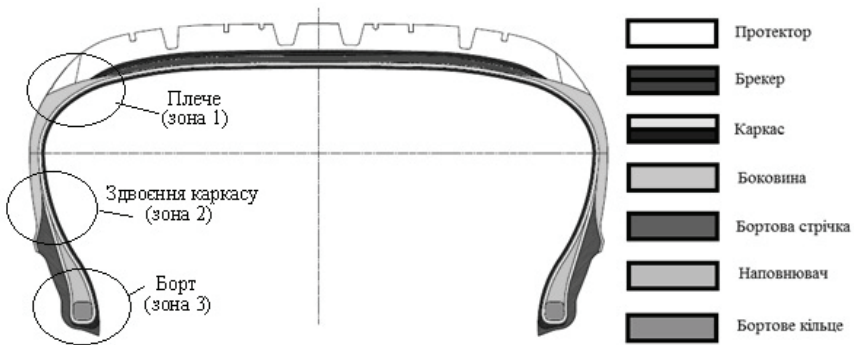


Рисунок 1 – Структурна карта пневматичної шини

Показники механічних характеристик окремих шинних матеріалів помітно відрізняються один від одного (див. табл. 1) і тому в даній роботі всі вони явним чином враховувались в СЕ моделях всіх рівнів розгляду.

В ході попередніх досліджень було виявлено наявність великих прогинів та помірних деформацій (~100 %). Тому явно просліджується необхідність врахування геометричної нелінійності для розрахунків даного об'єкту. Крім того спостерігається гіперпружна поведінка гумових матеріалів. Для враху-

вання цієї фізичної нелінійності в даній роботі була використана модель Нео-Гука, яка досить точно апроксимує поведінку гумових матеріалів за великих прогинів, але помірних деформацій.

Таблиця 1 – Властивості матеріалів гумових шарів

	Модуль пружності	Коефіцієнт Пуассона	Щільність
	E , МПа	ν	ρ , кг/м ³
Протектор	3,00	0,49	1200
Боковина	3,74	0,49	1200
Бортова стрічка	7,00	0,49	1200
Наповнювач	16,00	0,49	1200

Таким чином, гумовим шарам (протектор, боковина, бортова стрічка, наповнювач) властивості задавались відповідно моделі Нео-Гука.

Перерахунок технічних констант в константи моделі Нео-Гука (η , d) здійснюється за формулами:

$$\eta = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad d = \frac{2E}{3(1-2\nu)}. \quad (1)$$

Значну особливість даної конструкції також становить наявність композитних гумово-кордних шарів, які представляють собою гумову матрицю з текстильним (каркас) та металевим (брекер) кордом. Жорсткість корду брекера 1333 Н/нитку, з частотою укладання волокон 600 ниток/м. У випадку текстильної нитки жорсткість складає 294 Н/нитку з частотою укладання 1130 ниток/м. Діаметр волокон у шарах каркасу і брекера 0,63 мм і 0,64 мм відповідно.

У табл. 2 наведені механічні властивості складових композитних шарів.

Таблиця 2 – Властивості матеріалів кордних шарів (технічні константи)

	Корд		Гумова матриця	
	Модуль пружності, МПа	Коефіцієнт Пуассона	Модуль пружності, МПа	Коефіцієнт Пуассона
	E	ν	E	ν
Каркас	77120	0,3	6	0,49
Брекер	74730	0,3		

Таким чином, шари каркасу і брекера – завдяки корду мають достатньо велику жорсткість. Для їх моделювання достатньо використати закон Гука, але з яскраво вираженими трьома основними напрямками властивостей. Відповідно, модель матеріалу, використана для їх моделювання – ортотропна. В даному випадку використовувались усереднені характеристики матеріалу. Механічні властивості цих шарів наведені в табл. 3. Використані дані наведені в [10].

Важливою частиною моделювання даної конструкції є проблема урахування криволінійної ортотропії механічних властивостей в гумово-кордних

шарах. Дійсно, орієнтація волокон корда композитних шарів в одному напрямку повторює поперечний переріз шини, а в іншому співпадає з окружним напрямом колеса або під кутом до нього. Для вирішення цієї проблеми було введено локальні фінітно-тороїдальні системи координат, в яких напрямки осей повторюють геометрію відповідних шарів (рис. 2).

Таблиця 3 – Властивості гумово-кордних шарів шини

	Модуль пружності, МПа			Коефіцієнт Пуассона			Модуль зсуву, МПа		
	E_x	E_y	E_z	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}	G_{xy}	G_{yz}	G_{xz}
Каркас	11,8	11,8	4380	0,44	0,0012	0,0012	9,9	9,9	3,3
Брекер	11,4	5430	439,7	0,008	0,17	0,086	921,7	9,57	9,57

Побудова шарів каркаса і брекера відбувається шляхом протягування з обертанням відповідних частин профілю шини. При цьому елементи профіля, що відповідають каркасу розбиваються на кілька поверхонь, таким чином, аби контур кожної з них являв собою дугу кола, радіус якої і буде параметром даної локальної системи.

На рис.2 представлено положення локальних систем координат і розбиття на поверхні, в межах яких діє кожна з них.

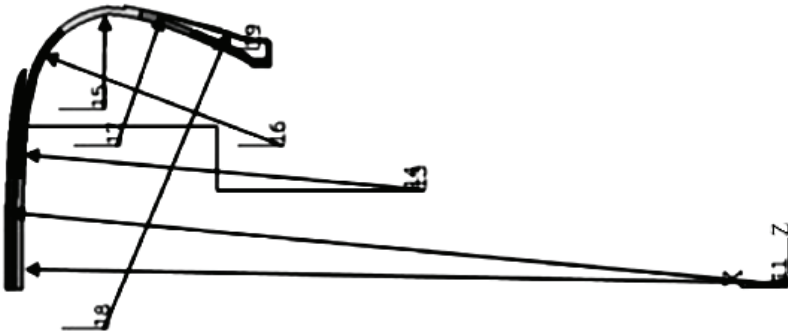


Рисунок 2 – Розташування локальних фінітно-тороїдальних систем координат

2. Скінченно-елементне моделювання. Відповідно до запропонованої методики в даній роботі СЕ моделювання здійснюється у кілька етапів. На кожному етапі певна частина шини розглядається у більш докладному масштабі, використовуючи підхід субмоделювання. Спочатку створюється СЕ модель з такою сіткою, яка цілком достатня для адекватного опису основних особливостей силової дії і виділення зон великих деформацій, але є недостатньо дрібною, щоб отримати достовірні результати по характеристикам НДС. Потім встановлюється, яка область моделі вимагає уточненого аналізу з використанням підмоделі. В даному випадку, потрібно отримати більше подро-

биць в зоні високих деформацій (зона контакту шини з дорожнім покриттям).

Таким чином, на першому етапі створюється повна модель шини, з урахуванням основних конструктивних особливостей, геометричної та фізичної нелінійностей. Розмірність цієї SE-сітки є максимально можливою, за якої досягається збіжність чисельного розв'язку.

При побудові об'ємної SE моделі використовується восьмивузловий твердотільний скінчений елемент із трьома ступенями свободи в вузлі.

Об'ємна SE модель будується шляхом екструдування поверхонь.

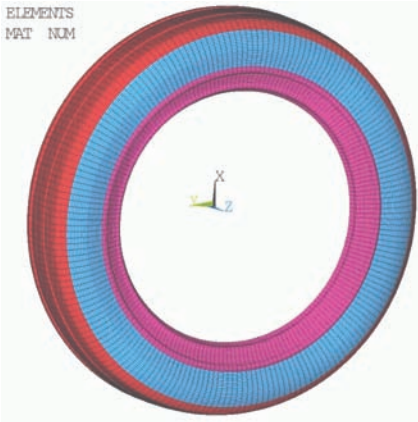


Рисунок 3 – Об'ємна SE модель

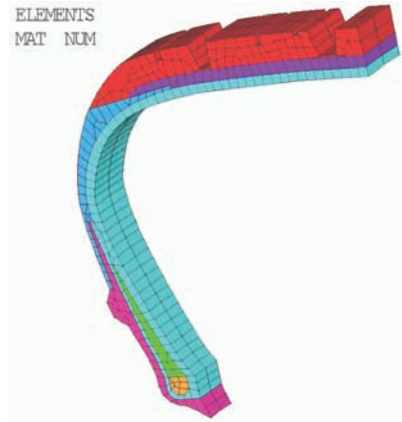


Рисунок 4 – Сегмент SE моделі

В якості кінематичних граничних умов виступає обмеження переміщень по всіх напрямках частини зовнішньої поверхні бортової стрічки, що імітує взаємодію з диском. Деформування шини аналізувалось в рамках її контактної взаємодії із дорожнім покриттям. До силових граничних умов відноситься тиск розміром 0.2 МПа, прикладений до внутрішньої поверхні каркаса та навантаження, що імітує відповідну частину ваги автомобіля, прикладається до дорожнього покриття. Враховуються наявність площини симетрії.

Результатами розгляду на цьому етапі є загальна картина деформування шини в контакт з дорогою (рис. 5). Це дає можливість визначити місця з найбільшим градієнтом деформацій для подальшого детального їх розгляду.

На другому етапі в якості субмоделі був виділений сегмент у 45 градусів з повної моделі шини, яка була розрахована на попередньому етапі. Для цієї моделі створена нова значно подрібнена сітка (кількість SE елементів сегменту дорівнює кількості SE елементів всієї шини).

В якості граничних умов субмоделі використані ті ж граничні умови, що й в повній моделі та додатково на границях сектору (рис.6) прикладені переміщення, отримані в цих вузлах при розрахунку повної моделі для імітації дії відкинutoї частини.

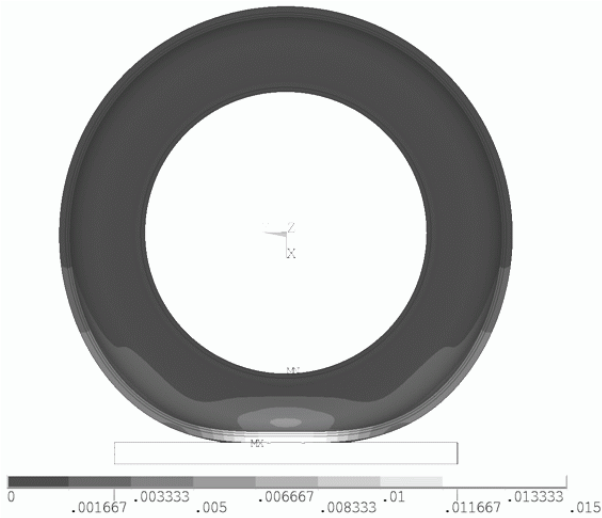


Рисунок 5 – Деформована форма повної моделі

На третьому етапі субмоделювання з 45-градусного сегменту виділяються дві ще менші – 15-градусні сегменти за аналогічною процедурою. Відповідно розмірність SE сітки кожного з 15-градусних сегментів дорівнює розмірності 45-градусного. Конкретизація проведення другого етапу субмоделювання наведена на рис.6, де також проілюстровані граничні умови, які імпортувались в якості переміщень, отриманих при розрахунку 45-градусного сегменту, у відповідних зонах.

Визначення напружень у найбільш деформованих зонах

Аналіз отриманих даних по НДС елементів шини дозволяє визначити, що найбільш навантаженими є каркас та брекер, у яких можна виділити чотири зони найбільших деформацій (3 у шарі каркасу та 1 у шарі брекера, див рис. 7). Ці зони відповідають наступним областям: плечовій (каркас та брекер), бортовій (каркас) та місцю здвоєння каркасу. Бортова зона має найбільші деформації на секторі (0-15)°. А решта областей відповідно на секторі (30-45)°.

Результати достовірного визначення напружень отримані в ході вищезазначених розрахунків потребують додаткового уточнення. Оскільки, з отриманих результатів неможливо виділити складові напружень, які виникають у корді та гумовій матриці.

Відповідне довизначення напружень виконується шляхом перерахунку отриманих деформацій окремо для матеріалів гумової матриці та кордів згідно до узагальненого закону Гука (2). Технічні константи для кордної та гумової частини композитних шарів наведено в табл. 3.

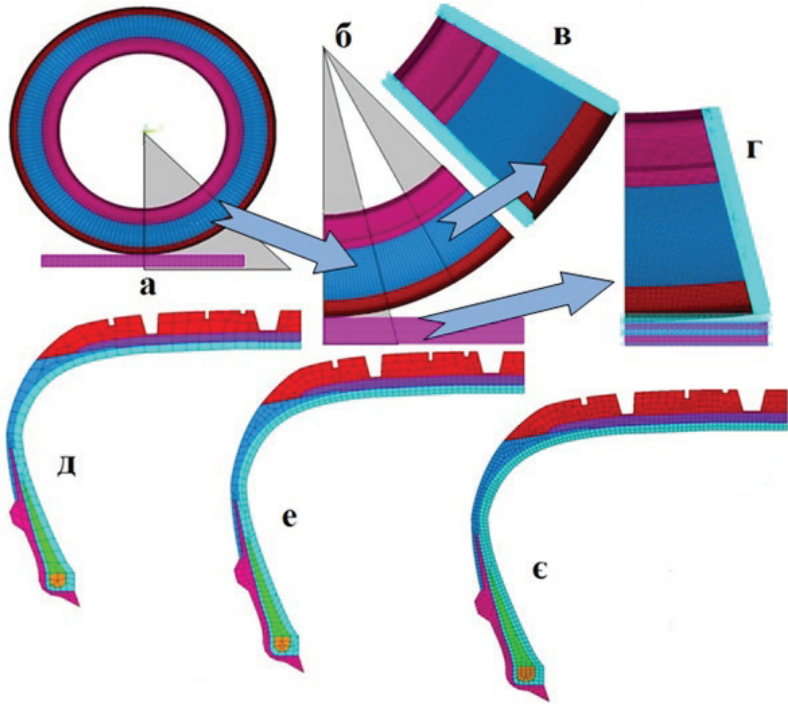


Рисунок 6 – Схема субмоделювання: а – повна SE-модель шини з дорогою, б – 45-градусний сегмент, в – 15-градусний сегмент (боковий), г – 15-градусний сегмент(центральный), д, е, є – порівняння SE сіток

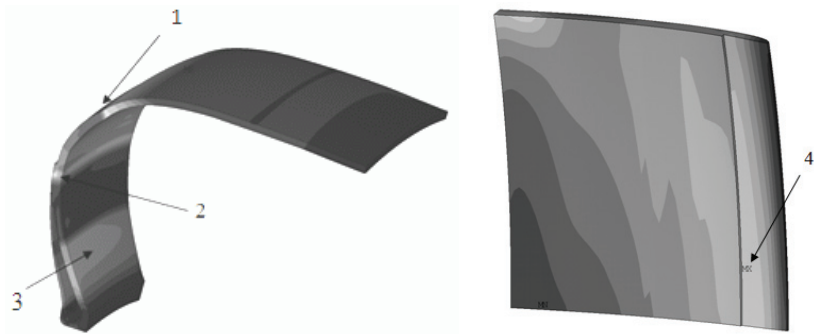


Рисунок 7 – Зони найбільших деформацій каркасу та брекера: 1 – плечова зона каркасу; 2 – здвоєння каркасу; 3 – бортова зона каркасу, 4 – брекер

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень, ε_{ij} – компоненти тензора деформацій, λ , μ – константи Ляме, які задаються окремо для матеріалів гумової матриці та кордів.

Розподіл напружень в елементах шини внаслідок лінійності перерахунків якісно співпадає з розподілом деформацій, які наведені на рис. 7. Для кількісного аналізу в даній роботі пропонується побудувати цикли зміни максимальних напружень, що матимуть місце при обертті колеса.

Отримані цикли зміни напруженого стану найбільш деформованих зон композитних шарів є необхідними для подальшого аналізу втомі, і, як результат, прогнозування ресурсу шини, а також, для оцінки процесів теплоутворення.

Процедура побудови циклів передбачала апроксимацію напружень по значеннях, що були визначені на 15 – градусних сегментах, а також, в зоні віддаленій від контакту.

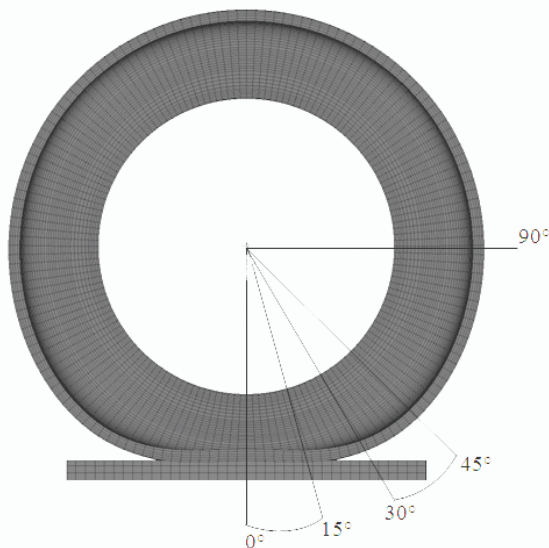


Рисунок 8 – Зони, в яких визначаються значення деформацій

В композитних шарах 15-градусних сегментів (центрального і бокового) обираємо найбільш деформовані зони. Отримуємо значення деформацій в вузлах цих зон, що знаходяться вздовж ліній, де дві координати зафіксовано, а змінюється лише окружна координата. Користуючись формулою (2) визначаємо значення напружень. Нижче наведені зони, для яких були визначені значення напружень у відповідних шарах (рис. 8).

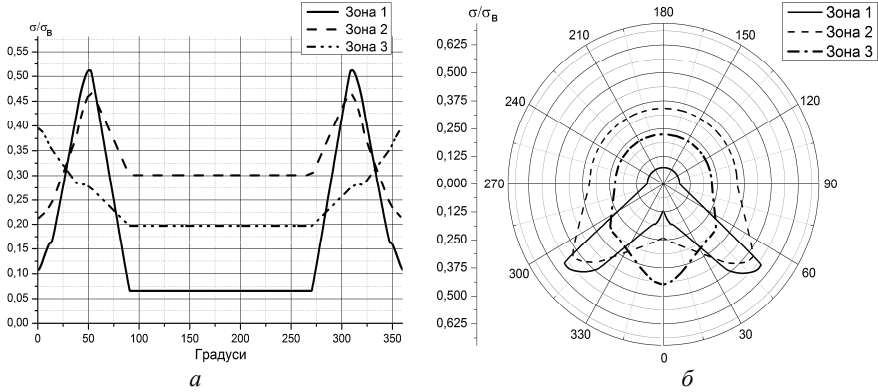


Рисунок 9 – Цикл напруженого стану корду каркасу:
 a – у декартовій системі координат, b – у полярній системі координат

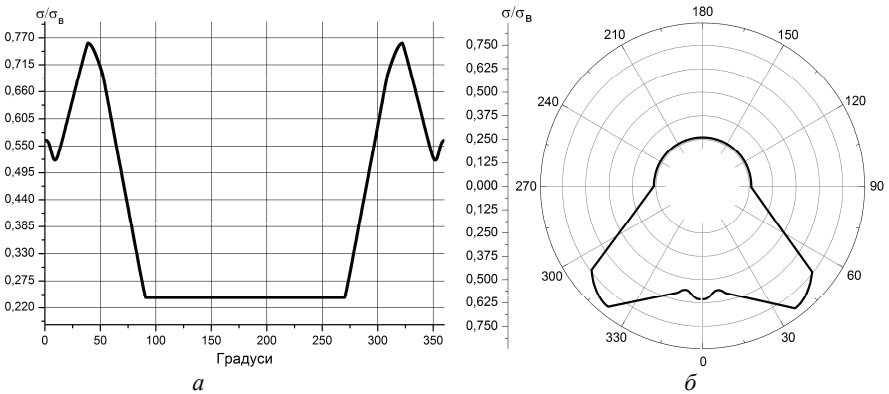


Рисунок 10 – Цикл напруженого стану корду брекєру
 a – у декартовій системі координат, b – у полярній системі координат

На рис. 9 відображені цикли напруженого стану корду у всіх контрольних зонах каркасу. Аналіз цього графіку показує, що найбільші напруження зафіксовані вздовж ліній з окружною координатою 50 і 307 градусів, що відповідають зміні області контакту на безконтактну. Слід відзначити, що шкала напружень у відносних одиницях. Поточні напруження віднесені до границі

міцності. Для полегшення аналізу продемонстровані цикли напруженого стану у полярних координатах рис.9, б – рис. 12, б (0° відповідає області контакту шини з дорожнім покриттям).

На рис. 10 зображено цикл напруженого стану корду брекера. Максимальні напруження зафіксовано вздовж ліній з окружною координатою 42 і 324 градуси, що також відповідають зміні області контакту на безконтактну (але ближче до контактної, ніж у попередньому випадку).

Цикл напружень гумової матриці брекера наведений у вигляді рис. 12. Свої максимуми він має у місцях відповідних до тих, що спостерігались у корді.

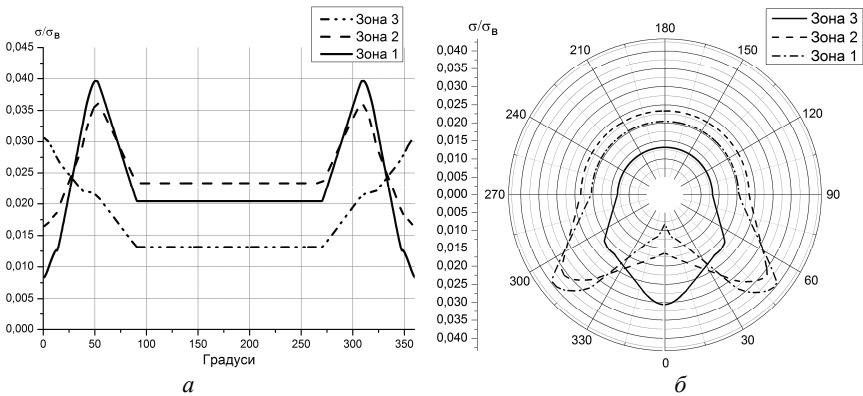


Рисунок 11 – Цикл напруженого стану гумової матриці каркасу:
 a – у декартовій системі координат , b – у полярній системі координат

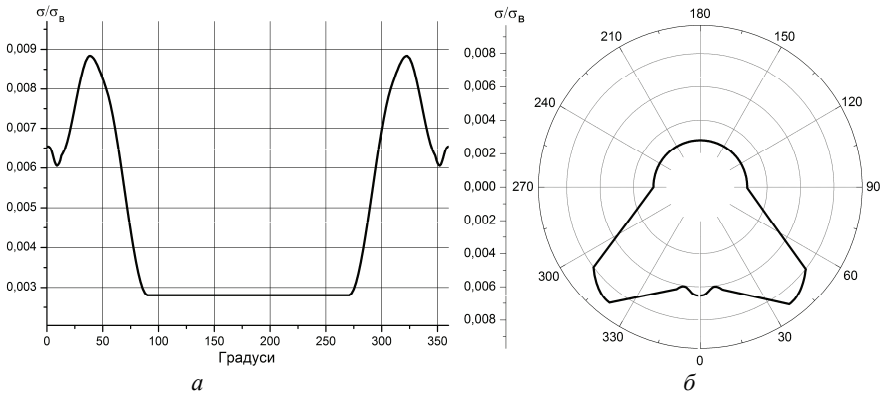


Рисунок 12 – Цикл напруженого стану гумової матриці брекера:
 a – у декартовій системі координат , b – у полярній системі координат

Узагальнення наведених результатів показує, що найбільш навантаже-

ною областю є плечова зона. Також слід відмітити, що дана зона має два сплески напружень за один оберт колеса. Така ж ситуація спостерігається і в зоні 2. А в бортовій зоні, на відміну від інших, має місце лише один сплеск напружень за один оберт.

Висновки. В ході даної роботи були створені геометрична та скінчено-елементна моделі пневматичної шини, з урахуванням ортотропії механічних властивостей у гумово-кордних шарах (каркас і брекер). Таке моделювання було здійснено за допомогою введення локальних фінітно-тороїдальних систем координат. Були проведені розрахунки з урахування геометричної і фізичної нелінійності, отримані результати НДС шини під дією внутрішнього тиску (0.2 МПа). Проведений розрахунок контактної задачі.

Для отримання достовірних результатів по напруженням, був використаний підхід двомасштабного моделювання. У якості результатів отримані картини розподілу напружень та деформацій. Виявлені найбільш деформовані зони гумово-кордних шарів. Побудовано графіки циклів напруженого стану рухомої шини в контрольних зонах окремо для кордної і гумової складової.

Список літератури: 1. *Yong-Woo K.* Micromechanically consistent calculation of rotational stiffness of radial tire / *Yong-Woo K.* // Journal of Mechanical Science and Technology 23. – 2009. – P. 1294-1305. 2. *Sokolov S. L.* Analysis of the heat state of pneumatic tires by the finite element method / *S. L. Sokolov* // Journal of machinery manufacture and reliability. – 2009. – Vol. 38, № 3. – P. 310-314. 3. *Cho J.R.* Numerical estimation of rolling resistance and temperature distribution of 3-D periodic patterned tire / *J.R. Cho, H.W. Lee, W.B. Jeong, K.M. Jeong, K.W. Kim* // International journal of solids and structures 50. – 2013. – P. 86-96. 4. *Gai-ling M.A.* Computation of rolling resistance caused by rubber hysteresis of truck radial tire / *M. A. Gai-ling, X.U. Hong, C.U.I. Wen-yong* // J Zhejiang University Science A. – 2007. – P. 778-785. 5. *Sokolov S. L.* Calculation of the stress-strain state of pneumatic tires by the finite element method / *S. L. Sokolov* // Journal of machinery manufacture and reliability. – 2007. – P. 45-49. 6. *Zuo S. G.* Prediction procedure for wear distribution of transient rolling tire/ *S. G. Zuo, T. X. Ni, X. D. Wu, K. Wu, X. W. Yang* // International Journal of Automotive Technology. – 2014. – P. 505-515. 7. *Rao Shiguo* Mechanical properties and failure behavior of cord/rubber composites / *Shiguo Rao Isaac M. Daniel, Emmanuel E. Gdoutos* // Applied Composite Materials. – 2004. – 11. – P. 353-375. 8. *Sheshenin S. V.* Three-Dimensional Modeling of Tires / *S. V. Sheshenin* // Mechanics of Solids. – 2007. – Vol. 42, № 3. – P. 338-345. 9. *Кондрикова А.А.* Моделювання контактної взаємодії пневматичних шин з дорогою з урахуванням геометричної та фізичної нелінійності їх деформування / *А.А. Кондрикова, О.О. Ларін* // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Динаміка та міцність машин». – 2011. – № 52. – С. 94-101. 10. *Larin O.* Two-scale approach to modelling of pneumatic tyres / *O. Larin, Yu. Petrova, V. Mateichyk* // Systems and means of motor transport. Selected problems. – Monographia № 4. Seria: Transport. – Rzeszow: Politechnika Pzeszowska Im. Ignacego Lukaszewicza, 2013. – P. 123-128.

Bibliography (transliterated): 1. *Yong-Woo K.* Micromechanically consistent calculation of rotational stiffness of radial tire. *Yong-Woo K.* Journal of Mechanical Science and Technology 23. 2009. P. 1294-1305 Print. 2. *Sokolov S. L.* Analysis of the heat state of pneumatic tires by the finite element method. *S. L. Sokolov* Journal of machinery manufacture and reliability. 2009. Vol. 38, № 3. 310-314 Print. 3. *Cho J.R.* Numerical estimation of rolling resistance and temperature distribution of 3-D periodic patterned tire. *J.R. Cho, H.W. Lee, W.B. Jeong, K.M. Jeong, K.W. Kim.* International journal of solids and structures 50. 2013. 86-96 Print. 4. *Gai-ling M.A.* Computation of rolling resistance caused by rubber hysteresis of truck radial tire. *M. A. Gai-ling, X.U. Hong, C.U.I. Wen-yong.* J Zhejiang University

Science A. 2007. 778-785 Print. **5.** Sokolov S. L. Calculation of the stress-strain state of pneumatic tires by the finite element method. S. L. Sokolov. Journal of machinery manufacture and reliability. 2007. 45-49 Print. **6.** Zuo S. G. Prediction procedure for wear distribution of transient rolling tire. S. G. Zuo, T. X. Ni, X. D. Wu, K. Wu, X. W. Yang. International Journal of Automotive Technology. 2014. 505-515 Print. **7.** Rao Shiguo Mechanical properties and failure behavior of cord/rubber composites. Shiguo Rao Isaac M. Daniel, Emmanuel E. Gdoutos. Applied Composite Materials. 2004. 11. 353-375 Print. **8.** Sheshenin S. V. Three-Dimensional Modeling of Tires. S. V. Sheshenin. Mechanics of Solids. 2007. Vol. 42, № 3. 338-345 Print. **9.** Kondrykova A.A. Modelyuvannya kontaktnoyi vzayemodiyi pnevmatychnykh shyn z dorohoyu z urakhuvannyam heometrychnoyi ta fizychnoyi nelineynosti yikh deformuvannya. A.A. Kondrykova, O.O. Larin. Visnyk NTU «KhPY». Seriya «Dynamika ta micnist' mashyn». 2011. № 52. 94-101 Print. **10.** Larin O. Two-scale approach to modelling of pneumatic tyres. O. Larin, Yu. Petrova, V. Mateichyk. Systems and means of motor transport. Selected problems. Monographia № 4. Seria: Transport. Rzeszow: Politechnika Pzeszowska Im. Ignacego Lukasiewicza, 2013. 123-128 Print.

Поступила (received) 16.04.2014

УДК 621.643.8

Г.І. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, професор, НТУ «ХП»;
В.Г. МАРТИНЕНКО, студент НТУ «ХП»

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТНОЇ ПОВЕДІНКИ ДІЛЯНКИ ТРУБОПРОВОДУ З В'ЯЗКОПРУЖНОЮ РЕМОНТНОЮ НАКЛАДКОЮ

У статті описано аналітичні дослідження напружено-деформованого стану ділянки трубопроводу з в'язкопружною ремонтною накладкою в плоскій постановці. Побудована крайова задача для інтегро-диференціальних рівнянь та запропоновано метод її вирішення. Результати розрахунків представлено у вигляді графіків розподілу переміщень та напружень за радіусом та у часі. Зроблено висновок щодо впливу в'язкопружності на загальну оцінку міцності конструкції.

Ключові слова: трубопровід, бандаж, в'язкопружність, інтегральне рівняння

Вступ. В процесі експлуатації газових трубопроводів, що є одними з найважливіших складових енергетичної інфраструктури будь-якої економічно розвинутої країни, стикаються з рядом проблем, серед яких однією з найгостріших є виникнення локальних дефектів трубопроводу, що з'являються внаслідок корозії металу, з якого він виготовлений, а також внаслідок дії сторонніх чинників. В цьому випадку ситуація руйнування особливо критична, оскільки ми маємо справу з легкозаймистою і вибухонебезпечною речовиною. Для ремонту такої конструкції використовують бандажування компози-

© Г.І. Львов, В.Г. Мартиненко, 2014

тними накладками (бандажами) [1] в місці дислокації дефекту (рис. 1). Під час цього ремонту виникає питання щодо його доцільності при різних розмірах та конфігураціях дефекту, а також щодо параметрів ремонту.



Рисунок 1 – Композитна ремонтна накладка, нанесена на трубопровід

Саме тому аналіз напружено-деформованого стану (НДС) відремontованого таким чином трубопроводу є актуальною на даний момент задачею. Адже якщо у ході розрахунків з'ясується, що умова міцності за еквівалентними напруженнями не виконується, то це доведе недоречність такого виду ремонту трубопроводу взагалі [2]. А це, в свою чергу, дозволяє зберегти економічні, трудові та фінансові ресурси на виконанні даремної ремонтної операції.

1. Постановка задачі. В роботі розглядається знаходження напружено-деформованого стану трубопроводу з нанесеною на нього ремонтною накладкою [1]. Розрахунки проводяться аналітично в плоскій постановці за умови сумісного навантаження внутрішнім тиском довгої ділянки трубопроводу та композитної ремонтної накладки. Вважається, що ділянка трубопроводу з накладкою (рис. 1) є достатньо довгою для того, щоб на більшій її частині спостерігався напружено-деформований стан, близький до плоского.

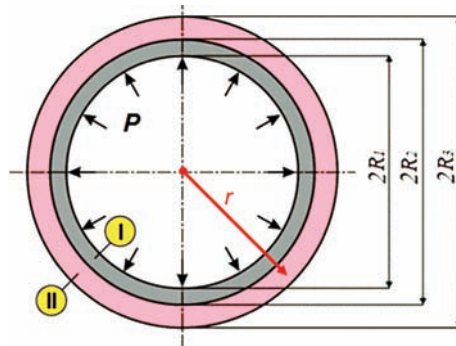


Рисунок 2 – Схема задачі в плоскій постановці

На рис. 2 представлена розрахункова схема задачі, на якій сталевий трубопровід показаний позначкою (I), а склопластикова накладка – позначкою (II). Сталь вважається пружним однорідним ізотропним матеріалом, а склопластик – в'язкопружним однорідним ортотропним. На конструкцію діє внутрішній рівномірно розподілений тиск P . Така постановка задачі дозволяє зробити припущення про відсутність окружних переміщень, а відтак вона може бути зведена до одновимірної з лише однією змінною – радіальною координатою r . При цьому впливом на напружено-деформований стан конструкції дефекту нехтується, оскільки він носить доволі локальний характер, що дуже незначно вплине на досягнення основної мети – дослідження впливу в'язкопружних властивостей склопластику на навантажену поведінку конструкції.

2. Теоретичні положення. Запишемо повну систему рівнянь теорії пружності для випадку пружного ізотропного матеріалу в полярній системі координат в вісесиметричній постановці [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_r^{(I)}(r,t)}{dr} + \frac{\sigma_r^{(I)}(r,t) - \sigma_\theta^{(I)}(r,t)}{r} = 0; \\ \varepsilon_r^{(I)}(r,t) = \frac{du^{(I)}(r,t)}{dr}; \\ \varepsilon_\theta^{(I)}(r,t) = \frac{u^{(I)}(r,t)}{r}; \\ \sigma_r^{(I)}(r,t) = B_{11}\varepsilon_r^{(I)}(r,t) + B_{12}\varepsilon_\theta^{(I)}(r,t); \\ \sigma_\theta^{(I)}(r,t) = B_{21}\varepsilon_r^{(I)}(r,t) + B_{22}\varepsilon_\theta^{(I)}(r,t), \end{array} \right. \quad (1)$$

де r – радіальна координата; t – координата часу; u – радіальне переміщення; $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ – радіальні та окружні деформації відповідно; σ_r, σ_θ – радіальні та окружні напруження відповідно; $B_{11} = B_{22}, B_{12} = B_{21}$ – коефіцієнти матриці жорсткості ізотропного матеріалу, що можуть бути виражені через модуль пружності та коефіцієнт Пуассона; $(I), (II)$ – позначки для матеріалу трубопроводу та матеріалу бандажу відповідно.

Тоді рівняння Ляме, відповідне до системи (1), матиме наступний вигляд:

$$\frac{d^2u^{(I)}(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(I)}(r,t)}{dr} - \frac{u^{(I)}(r,t)}{r^2} = 0. \quad (2)$$

Розв'язок рівняння (2) запишеться наступним чином:

$$u^{(I)}(r,t) = A_1(t)r + A_2(t)/r, \quad (3)$$

де $A_1(t), A_2(t)$ – в загальному випадку залежні від часу та незалежні від радіусу константи інтегрування диференційного рівняння (2).

Тепер узагальнимо систему рівнянь (1) для випадку ортотропного в'язкопружного матеріалу [4], в якому ступінь анізотропії в'язкопружності ви-

значається ступенем анізотропії пружних властивостей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_r^{(II)}(r,t)}{dr} + \frac{\sigma_r^{(II)}(r,t) - \sigma_\theta^{(II)}(r,t)}{r} = 0; \\ \varepsilon_r^{(II)}(r,t) = \frac{du^{(II)}(r,t)}{dr}; \\ \varepsilon_\theta^{(II)}(r,t) = \frac{u^{(II)}(r,t)}{r}; \\ \sigma_r^{(II)}(r,t) = C_{11} \left[\varepsilon_r^{(II)}(r,t) - \int_0^t K(t-s) \varepsilon_r^{(II)}(r,s) ds \right] + C_{12} \left[\varepsilon_\theta^{(II)}(r,t) - \int_0^t K(t-s) \varepsilon_\theta^{(II)}(r,s) ds \right]; \\ \sigma_\theta^{(II)}(r,t) = C_{21} \left[\varepsilon_r^{(II)}(r,t) - \int_0^t K(t-s) \varepsilon_r^{(II)}(r,s) ds \right] + C_{22} \left[\varepsilon_\theta^{(II)}(r,t) - \int_0^t K(t-s) \varepsilon_\theta^{(II)}(r,s) ds \right], \end{array} \right. \quad (4)$$

де C_{11} , C_{22} , C_{12} = C_{21} – коефіцієнти матриці жорсткості ортотропного матеріалу, що можуть бути виражені через модуль пружності та коефіцієнти Пуассона; $K(t-s)$ – ядро релаксації, в загальному випадку представлено рядом Проні:

$$K(t-s) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(-b_i(t-s)), \quad (5)$$

де a_i , b_i – відповідно коефіцієнти та показники ряду Проні, n – кількість членів ряду Проні.

Якщо прийняти $n = 1$ у формулі (5), то вона запишеться у наступному вигляді:

$$K(t-s) = a \exp(-b(t-s)). \quad (6)$$

Тоді, спираючись на рівність (6), рівняння закону Гуку з системи (4) можуть бути переписані в наступному вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r^{(II)}(r,t) = C_{11} \left[\varepsilon_r^{(II)}(r,t) - a \int_0^t e^{-b(t-s)} \varepsilon_r^{(II)}(r,s) ds \right] + C_{12} \left[\varepsilon_\theta^{(II)}(r,t) - a \int_0^t e^{-b(t-s)} \varepsilon_\theta^{(II)}(r,s) ds \right]; \\ \sigma_\theta^{(II)}(r,t) = C_{21} \left[\varepsilon_r^{(II)}(r,t) - a \int_0^t e^{-b(t-s)} \varepsilon_r^{(II)}(r,s) ds \right] + C_{22} \left[\varepsilon_\theta^{(II)}(r,t) - a \int_0^t e^{-b(t-s)} \varepsilon_\theta^{(II)}(r,s) ds \right]. \end{array} \right. \quad (7)$$

Рівняння Ляме, що відповідає системі (4) з врахуванням (7), матиме наступний інтегро-диференціальний вигляд:

$$f(r,t) - a \int_0^t e^{-b(t-s)} f(r,s) ds = 0, \quad (8)$$

$$\text{де } f(r,t) = \frac{d^2 u^{(II)}(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(II)}(r,t)}{dr} - \gamma^2 \frac{u^{(II)}(r,t)}{r^2}; \quad \gamma^2 = \frac{C_{22}}{C_{11}}.$$

Рівняння (8) являє собою однорідне інтегральне рівняння Вольтера другого роду [5] відносно функції $f(r,t)$, що представляє собою диференціальний оператор другого порядку, застосований до функції переміщень бандажу $u^{(II)}(r,t)$. Можна показати, наприклад, методом диференціювання, що розв'язок інтегрального рівняння (8) є однорідним:

$$f(r,t) \equiv 0, \quad (9)$$

тобто:

$$\frac{d^2 u^{(II)}(r,t)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^{(II)}(r,t)}{dr} - \gamma^2 \frac{u^{(II)}(r,t)}{r^2} = 0. \quad (10)$$

Таким чином, з (10) отримуємо звичайне диференційне рівняння другого порядку, що за виглядом співпадає з рівнянням Ляме для ортотропного пружного матеріалу, описаним в роботі [6].

Рішення рівняння (10) набуває наступного вигляду:

$$u^{(II)}(r,t) = A_3(t)r^\gamma + A_4(t)r^{-\gamma}. \quad (11)$$

Вирази (3) та (11) для переміщень пружного ізотропного трубопроводу та в'язкопружного ортотропного бандажу містять у собі загалом чотири невідомі функції часу $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $A_4(t)$, які можуть бути знайдені з граничних умов та умов спряженості:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(I)}(R_1, t) = -P; \\ u_r^{(I)}(R_2, t) = u_r^{(II)}(R_2, t); \\ \sigma_r^{(I)}(R_2, t) = \sigma_r^{(II)}(R_2, t); \\ \sigma_r^{(II)}(R_3, t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Після переписування системи (12) в переміщеннях за допомогою систем (1) та (4) та подальшого використання рівностей (3) та (11) вона буде являти собою змішану неоднорідну систему алгебраїчних та інтегральних рівнянь відносно функцій часу $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $A_4(t)$. Розв'язавши таку систему методом диференціювання, отримаємо наступні вирази для шуканих функцій:

$$\begin{cases} A_3(t) = \begin{cases} \bar{\delta} \frac{(b - \bar{a}e^{-(b-\bar{a})t})}{(b - \bar{a})}, & \{\bar{a} \neq b\}; \\ \bar{\delta}(1 + \bar{a}t), & \{\bar{a} = b\}; \end{cases} \\ A_4(t) = \frac{[\gamma C_{11} + C_{12}]}{[\gamma C_{11} - C_{12}]} R_3^{2\gamma} A_3(t); \\ A_1(t) = \left(R_2 + \frac{R_1^2 R_2^{-1} [B_{11} + B_{12}]}{[B_{11} - B_{12}]} \right)^{-1} \left[R_2^\gamma A_3(t) + R_2^{-\gamma} A_4(t) - \frac{R_1^2 R_2^{-1} P}{[B_{11} - B_{12}]} \right]; \\ A_2(t) = \frac{R_1^2}{[B_{11} - B_{12}]} (P + [B_{11} + B_{12}] A_1(t)), \end{cases} \quad (13)$$

де \bar{a} , $\bar{\delta}$ – прийняті для зручності коефіцієнти, які складним чином залежать від коефіцієнтів матриць жорсткості обох матеріалів, характерних радіусів конструкції та внутрішнього розподіленого тиску.

Після підстановки системи виразів (13) у рішення (3) та (11) отримуємо залежність радіальних переміщень трубопроводу та бандажу від радіуса та часу, а використавши системи (1) та (4), можемо обчислити відповідні деформації та напруження, що дасть нам в рамках обраної математичної моделі

повну картину напружено-деформованого стану конструкції.

3. Результати та обговорення. В ході розрахунків напружено-деформованого стану конструкції були використані наступні її геометричні та фізичні параметри:

$$R_1 = 0.510 \text{ [м]}, \quad R_2 = 0.522 \text{ [м]}, \quad R_3 = 0.572 \text{ [м]};$$

$$B_{11} = B_{22} = 23.08 \cdot 10^{10} \text{ [Па]}, \quad B_{12} = B_{21} = 6.92 \cdot 10^{10} \text{ [Па]};$$

$$C_{11} = 87.57 \cdot 10^8 \text{ [Па]}, \quad C_{22} = 131.35 \cdot 10^8 \text{ [Па]}, \quad C_{12} = C_{21} = 31.52 \cdot 10^8 \text{ [Па]};$$

$$a = 0.002 \text{ [-]}, \quad b = 0.003 \text{ [-]}, \quad P = 5 \cdot 10^6 \text{ [Па]}.$$

На рис. 3, *a*, *б*, та 3, *в* представлені графіки залежності відповідно радіальних переміщень (u_r), окружних (σ_θ) та радіальних (σ_r) напружень у небандажованому (позначено пунктиром) та бандажованому (позначено суцільною лінією) трубопроводах від радіальної координати (r) для нульового моменту часу. Як видно з графіку, бандажування ортотропним склопластиковим бандажем знижує рівень окружних напружень приблизно на 20 %.

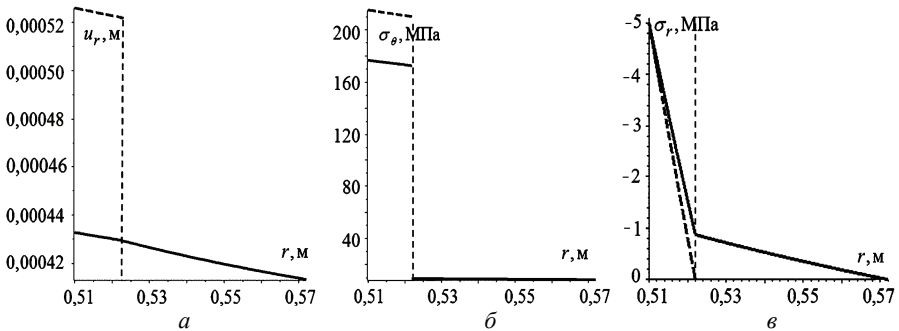


Рисунок 3 – Результати розрахунків для початкового моменту часу:

a – радіальні переміщення, *б* – окружні напруження, *в* – радіальні напруження

Як витікає з аналітичної моделі, описаної у п.2, розв’язок задачі з врахуванням в’язкопружності для початкового моменту часу ($t = 0$) відповідає пружному рішенню [6].

На рис. 4 показані графіки зміни шуканих величин у часі. Рис. 4, *a* ілюструє переміщення точки бандажу внаслідок в’язких властивостей композиту. Водночас, завдяки такому ефекту відбувається релаксація напружень у бандажі, що для окружних напружень показано на рис. 4, *б*. Їхні значення стабілізуються приблизно у момент часу 200 годин, що також збігається з результатами, отриманими за допомогою скінченно-елементної моделі, описаної в [6].

При цьому разом із релаксацією напружень у бандажі спостерігається

їхнє зростання у трубопроводі, що можна побачити на рис. 4, в. Так, для моменту часу 200 годин відносна різниця між пружним та в'язкопружним рішеннями для окружних напружень у трубопроводі складає більше 7 %, що вже доволі значно може вплинути на подальші висновки щодо міцності конструкції як без, так і з врахуванням дефектів у стінках трубопроводу.

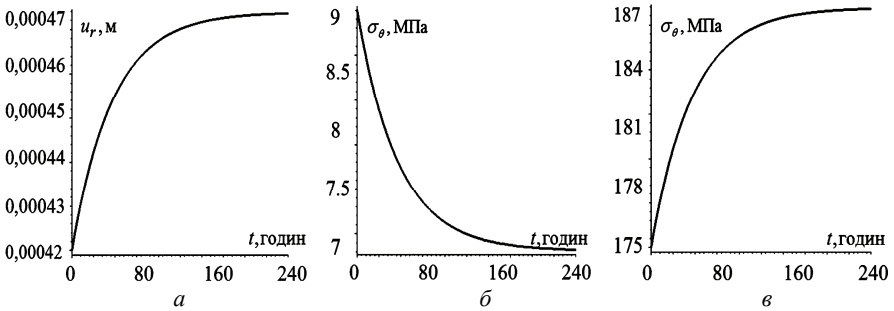


Рисунок 4 – Результати розрахунків у часі:
 а – радіальні переміщення у бандажі, б – окружні напруження у бандажі,
 в – окружні напруження у трубопроводі

Висновки. У ході розробки математичної моделі було запропоновано метод вирішення інтегро-диференційної крайової задачі. Розв'язання інтегральних рівнянь проводилось за допомогою методу диференціювання. Отримані результати для в'язкопружної поведінки конструкції в нульовий момент часу співпадають з пружним рішенням. Встановлено, що релаксація напружень в накладці й, відповідно, їхній вихід на стабільний рівень у трубопроводі для обраного набору геометричних та фізичних вихідних даних відбувається у момент часу близько 200 годин. При цьому небезпечні окружні напруження в сталевій трубі збільшуються, у порівнянні з пружним рішенням, приблизно на 7%. Це свідчить про те, що неврахування в'язких властивостей композиту вносить значну похибку у висновки щодо міцності конструкції в бік покращення. Одночасно, за наявності дефекту як концентратору напружень, ця похибка може збільшитись у рази. Відтак розроблена аналітична модель з врахуванням в'язкопружності матеріалу може бути використана для уточнення результатів оцінки статичної міцності.

Список літератури: 1. Мустафин Ф.М. Защита трубопроводов от коррозии. Т. 2 / Ф.М. Мустафин, Л.И. Быков. – М.: Недра, 2007. – 708 с. 2. Захаров М.Н. Методология оценки несущей способности магистральных трубопроводов с локальными дефектами / М.Н. Захаров. – М.: ГНЦ РФ ЦНИИТмаш, 2002. 3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с. 4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 5. Краснов М.Л. Интегральные уравнения / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1968. – 192 с. 6. Львов Г.И. Особливості моделювання та аналізу ділянок трубопроводів з експлуатаційними дефектами та в'язкопружними ремонтними накладками / Г.И. Львов, В.Г. Мартиненко // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ«ХП», 2013. – № 63. – С. 81-90.

Bibliography (transliterated): 1. Mustafin F.M. Zashchita truboprovodov ot korrozii. Vol. 2. F.M. Mustafin, L.I. Bykov. Moscow: Nedra, 2007. 708 Print. 2. Zaharov M.N. Metodologiya ocenki nesuschej sposobnosti magistral'nyh truboprovodov s lokal'nymi defektami. M.N. Zaharov. Moscow: GNC RF CNIITmash, 2002 Print. 3. Samul' V.I. Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti. V.I. Samul'. Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 264 Print. 4. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstrukcij. Yu.N. Rabotnov. Moscow: Nauka, 1966. 752 Print. 5. Krasnov M.L. Integral'nye uravneniya. M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makarenko. Moscow: Nauka, 1968. 192 Print. 6. L'vov G.I. Osoblyvosti modelyuvannya ta analizu dilyanok truboprovodiv z ekspluatacijnyimi defektamy ta v'язkopruzhnymy remontnymy nakladkamy. G.I. L'vov, V.H. Martynenko. Visnyk NTU «KhPI». Kharkiv: NTU«KhPI», 2013. № 63. 81-90. Print.

Поступила (received) 27.10.2014

УДК 531.382

Г. Ю. МАРТЫНЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
А. В. ОЛЕЙНИК, студент, НТУ «ХПИ»

ИДЕНТИФИКАЦИЯ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ РОТОРА ГАЗОТУРБИННОЙ УСТАНОВКИ В МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ И ДИНАМИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ

Описаны расчетные исследования по поиску по неполным данным расчетной конечно-элементной модели ротора газотурбинной установки в магнитных подшипниках, предназначенной для углубленного анализа его динамического поведения. Данные исследования выполнялись с помощью параметрического моделирования и проведения серии вариантов статических и динамических расчетов с целью определения параметров расчетной модели сопоставлением с известными данными. Результаты численных экспериментов свидетельствуют об адекватности найденной расчетной модели и ее пригодности для выполнения дальнейших исследований.

Ключевые слова: газотурбинная установка, динамика ротора, магнитные подшипники.

Введение. В настоящее время все большую актуальность приобретает использование газотурбинных теплоэлектростанций малой мощности на базе газотурбинных установок для выработки электроэнергии и тепла для бытовых и промышленных потребителей, расположенных в районах с невозможностью или труднореализуемостью централизованной поставки от крупных теплоэлектроцентралей (ТЭЦ). Одной из таких разработок, практическая разработка которых за 7 лет на около 100 энергоблоках составила 356 тысяч часов, является газотурбинная теплоэлектроцентраль (ГТ ТЭЦ) на базе газотурбинных установок ГТЭ-009М единичной электрической мощностью 9 МВт,

© Г. Ю. Мартыненко, А. В. Олейник, 2014

предназначенная для выработки электроэнергии и тепла [1-2]. Данные станции производятся на предприятиях группы «Энергомаш» (генеральный проектировщик ОАО «ГТ-ТЭЦ Энерго»), начиная с 2000 г., и используются для теплоэлектроснабжения небольших городов и поселков, отдельных микрорайонов, промышленных и непромышленных потребителей [1]. В ее состав входит высокооборотный турбогенератор ТФЭ-10-2(3×2)/6000 УЗ с частотой 101,6 Гц, а для выдачи электроэнергии во внешнюю сеть с частотой 50 Гц используется тиристорного преобразователя частоты. На ГТ ТЭЦ установлено по два газотурбинных блока, состоящих из газотурбинных агрегатов типа ГТЭ-009М, рекуперативных воздухоподогревателей, водогрейных котлов-утилизаторов и водогрейных котлов [2]. Газотурбинная установка ГТЭ-009М является одновальной с частотой вращения, равной 6096 об/мин, на магнитных подвесах (подшипниках) [3-4] с секционными камерами сгорания и с осевым выходом газов после турбины. Использование системы электромагнитного подвеса, то есть активных магнитных подшипников (АМП), заменяет в турбоагрегате масляные подшипники [3-4], что повышает долговечность и экологическую чистоту энергетической установки [5-6]. Внешний вид этой установки представлен на рис. 1, а опорных узлов (магнитных и страховочных подшипников) на рис. 2.

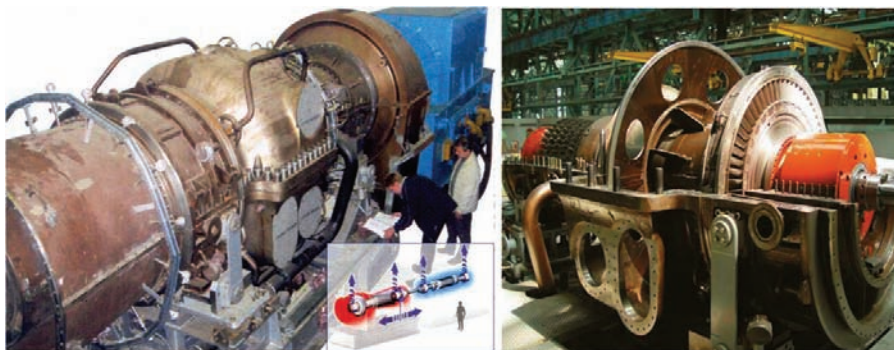


Рисунок 1 – Внешний вид газотурбинной установки ГТЭ-009М [1,3]

1. Анализ существующих решений. Валопровод установки представлен на рис. 3. Он состоит из ротора турбокомпрессора (1), ротора генератора (2) и промежуточного вала (3) [2].

Валопровод устанавливается в активные магнитные подшипники (см. рис. 2) – один радиальный (4) и один радиально-осевой (5) АМП ротора турбокомпрессора, два радиальных (6 и 7) АМП ротора генератора. Промежуточный вал собственных подшипников не имеет. Слева и справа от каждого радиального подшипника располагаются датчики радиальных перемещений ротора. В каждом радиальном МП дополнительно установлено по два страховочных подшипника с керамическими телами качения без смазки (рис. 2),

которые необходимы для обеспечения выбега ротора в случае отказа системы магнитной подвески [1].

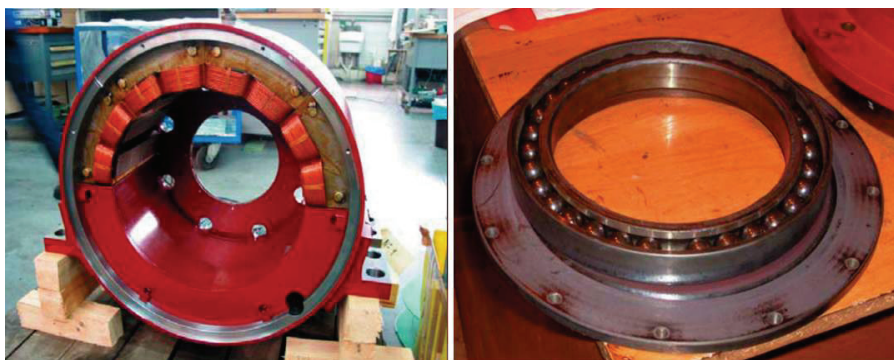


Рисунок 2 – Радиальные АМП (диаметр 400 мм) и страховочный подшипник [1]

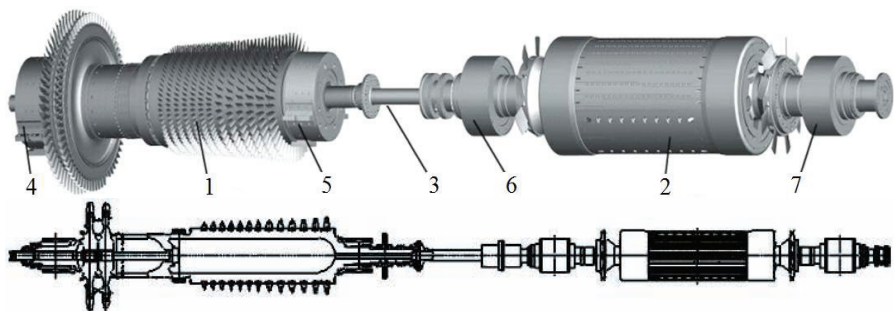


Рисунок 3 – Геометрическая модель и чертеж ротора газотурбинной установки [1,2]

Проектирование роторов ГТУ, левитирующих в АМП, выполнялось по результатам динамических расчетов роторов турбины и турбогенератора по отдельности и всего валопровода в целом [1]. Эти расчеты были выполнены с использованием балочной конечно-элементной модели, способной моделировать как плоский изгиб, так и особенности, связанные с динамикой роторов, а именно, осуществлять учет гироскопических моментов [4]. Результаты данных расчетов представляют собой частоты и формы собственных колебаний невращающихся роторов, а также критические скорости, определяемые диаграммами Кэмпбелла [4]. Расчетные данные сравнивались с результатами экспериментального определения собственных частот свободного вала, что подтвердило их корректность [1]. Экспериментально также были подтверждены расчетные значения критические частоты вращения валопровода, установленного в магнитных подшипниках, а расхождение фактических значений с расчетными не превысило 3 % [1]. Кроме того, к известным особенностям системы относится то, что валопровод при выходе на номинальную час-

тоту вращения 6096 об/мин проходит формы колебаний вала как жесткого тела, а затем первую изгибающую форму колебаний ротора турбогенератора, которая подавляется средствами управления АМП [1]. Также установлено, что вибросмещения качественно отбалансированного ротора турбины при работе под нагрузкой не превышают 40...50 мкм при предельно допустимых значениях вибросмещений, равных 105 мкм [1].

Однако для проведения различных расчетных исследований с целью проверки адекватности аналитических моделей динамики роторов в магнитных подшипниках [7], апробации различных алгоритмов и законов управления АМП, а также моделирования характерных для таких систем явлений роторной динамики, необходимо создание трехмерных расчетных моделей, обладающих возможностью учета как динамических характеристик рассматриваемой роторной системы, так и управляемых жесткостных и демпфирующих свойств подшипниковых узлов электромагнитной природы.

2. Объект и цели исследований. Целью данной работы является идентификация расчетной модели, пригодной для выполнения анализа динамического поведения роторов турбокомпрессора, генератора и всего валопровода энергетической газотурбинной установки в целом. Неполными исходными данными для решения этой задачи являются схема ротора ГТУ с нанесенными габаритными и межопорными размерами, представленная на рис. 4 [4], а также массы турбокомпрессора с частью промежуточного вала (~6300 кг), генератора с частью промежуточного вала (~4700 кг), всего валопровода ГТУ (~11000 кг), поперечные, экваториальные моменты инерции и центры тяжести, заданные отдельно для каждого ротора и ротора в сборе [1,4]. Кроме того, известными являются собственные частоты невращающегося ротора, находящиеся в диапазоне с верхней границей, в полтора раза превышающей рабочую частоту (6096 об/мин или 101,6 Гц), и формы, соответствующие им, которые характеризуют конструкцию при тестовом значении жесткости всех АМП равной 1 МН/м [4]. Для окончательной проверки модели могут использоваться зависимости собственных частот от скорости вращения ротора, представленные в виде частотных диаграмм Кэмпбелла и позволяющие определять критические скорости ротора [4].

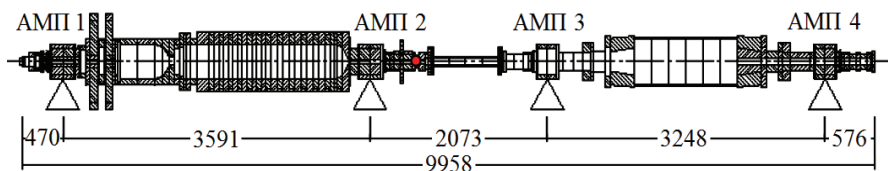


Рисунок 4 – Расчетная схема ротора газотурбинной установки [4]

3. Параметрическое моделирование. Для решения поставленной задачи использовался программный комплекс, реализующий метод конечных

элементов (МКЭ). Параметрическая модель ротора создавалась с помощью трехузловых балочных конечных элементов (КЭ) с шестью степенями свободы в каждом узле. В зависимости от участка валопровода конечному элементу присваивалось либо круглое поперечное сечение, либо кольцевое, причем для каждого такого сечения задавалось еще и внутреннее разбиение на подобласти для аппроксимации искомых величин (перемещений) по сечению. Активные магнитные подшипники как упруго-демпферные опоры моделировались с помощью конечных элементов специального типа. Так, для радиальных подшипников применялись конечные элементы, моделирующие радиальное расположение упруго-демпферных элементов с общим узлом, расположенным на оси ротора. Для этих элементов жесткость пружин и коэффициенты демпфирования задавались в вертикальном и горизонтальном направлениях, а также направлениях, расположенных под 45° к ним. Размещение этих элементов выполнялось согласно расчетной схеме (рис. 4) посередине цапф радиальных АМП, причем их узлы, не лежащие на оси ротора, фиксировались по всем шести степеням свободы, присущим также и этому элементу. Осевой подшипник моделировался конечным элементом линейной жесткости, один узел которого располагался на оси ротора в центре роторной части АМП 2, а второй также лежал на оси балочной модели, но не принадлежал ей, а закреплялся по всем шести степеням свободы. Конечно-элементные модели ротора ГТУ, а также отдельных конструктивных элементов – роторов турбокомпрессора и генератора – представлены на рис. 5. Здесь дана визуализация сечений балочных конечных элементов с разными константами сечений, а упруго-демпферные конечные элементы обозначены как К0. Эта модель включает в себя около 125 балочных КЭ, 4 упруго-демпферных КЭ, моделирующих радиальные АМП, и одного моделирующего осевую опору. Общее количество степеней свободы для данной модели – около 2000. Качество этой модели было подтверждено результатами серии статических расчетов при действии на ротор постоянных сил тяжести. Для дальнейших исследований был принят вариант, расчетная погрешность для которого менее 0,5 %.

Для автоматического параметрического построения конечно-элементной модели применялся созданный программный код на языке параметрического программирования, позволяющий выполнять как статические, так и динамические варианты расчетов. При этом возможно варьирование следующего набора параметров: видов сечения и диаметров отдельных участков каждого ротора, физических констант материалов роторов турбокомпрессора и генератора (модуля упругости и плотности), а также коэффициентов жесткости и демпфирования опор.

4. Идентификация модели на основе вариантных расчетов. Поиск геометрических и физических параметров для модели ротора ГТУ, удовлетворяющей известным данным и пригодной для дальнейшего выполнения различных типов анализов динамического поведения, производился в два этапа.

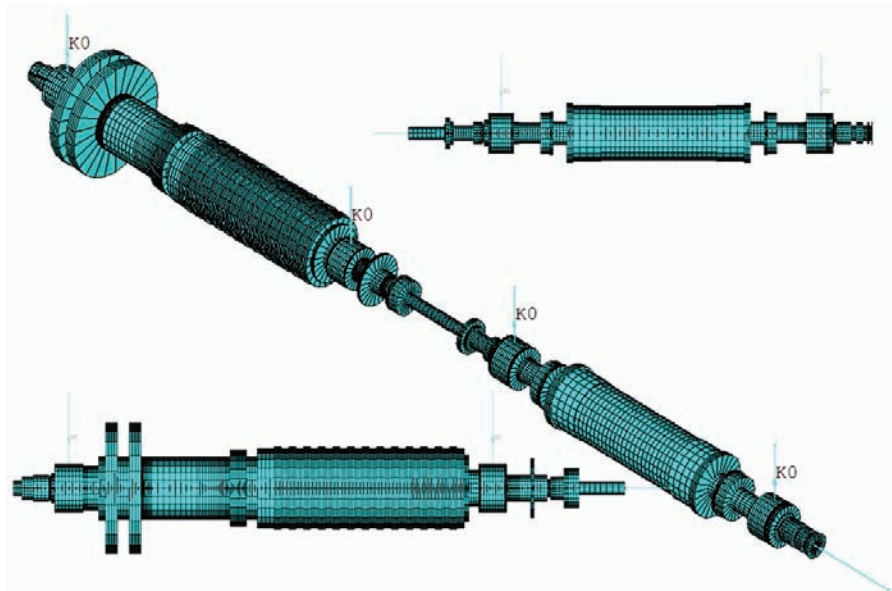


Рисунок 5 – Балочная конечно-элементная модель ротора ГТУ и его элементов

На первом этапе варьированием типами сечений, их диаметрами и плотностью материала ротора турбокомпрессора и генератора был найден вариант модели, для которого обеспечивалось совпадение с известными данными, влияющими только на статическое поведение конструкции, то есть на результаты статического анализа при приложении к конструкции нагрузок, не зависящих от времени. Этими известными данными являлись массы турбокомпрессора, генератора, всего валопровода ГТУ, поперечные, экваториальные моменты инерции и центры тяжести каждого ротора и ротора в сборе. Отклонение от этих величин для найденного после проведения серии расчетов варианта модели составило не более 0,5 %. При этом общее приведенное значение плотности материала турбокомпрессора равно 7511 кг/м^3 , а генератора – 8134 кг/м^3 .

На втором этапе исследований, результаты которых сведены в табл. 1 и представлены на рис. 6, удовлетворялось равенство собственных частот (СЧ) эталонным значениям при одинаковых формах собственных колебаний (СФ) при жесткости всех опор, равной 1 МН/м. Это выполнялось подбором общих приведенных значений модулей упругости материалов отдельных конструктивных элементов ротора ГТУ. Для трансляционных форм колебаний, когда ротор как твердое тело совершает движения типа цилиндрической или конической прецессий, собственные частоты не зависят от жесткостных свойств ротора, а определяются только его массовыми характеристиками и жесткостью опор, требуемые значения собственных частот были получены автома-

тически (табл. 1, №1-4). Для деформационных форм (табл. 1, №5-7) совпадение частот достигалось подбором значений модулей упругости. Так, для турбокомпрессора найденная величина, обеспечивающая требуемые значения собственных частот, равна $1,87 \cdot 10^{11}$ Па, а для генератора – $1,065 \cdot 10^{11}$ Па. Анализ результатов показывает, что расхождения для всех собственных частот, находящихся в диапазоне возможных значений частот вращения ротора, имеют приемлемые значения (табл. 1).

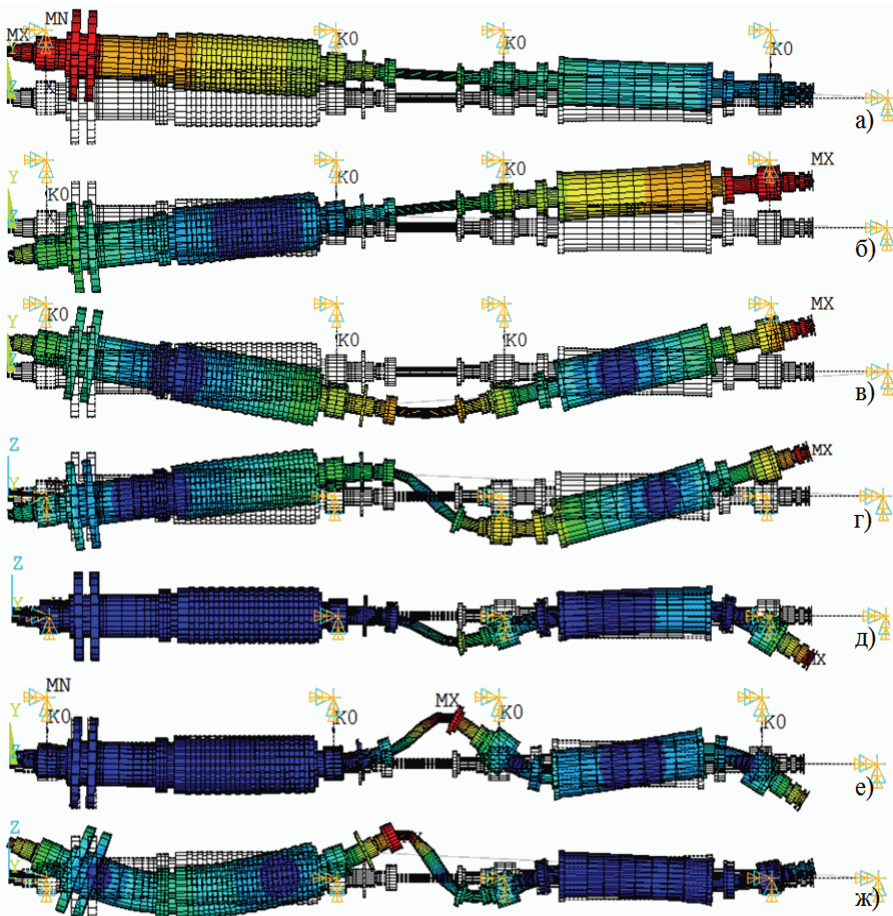


Рисунок 6 – Формы собственных колебаний валопровода при жесткости опор 1 МН/м

Результаты анализа собственных колебаний отдельно для каждого ротора, входящего в состав валопровода ГТУ, для окончательных значений искомых параметров сведены в табл. 2 и представлены на рис. 7.

Таблица 1 – Результаты анализа собственных колебаний ротора ГТУ

№	Собственная частота, Гц			Характер колебаний на СФ	Вид СФ
	расчетное значение	эталонное значение [4]	расхождение, %		
1	2,93	2,9	0,2	поступательные РТК	рис. 6, а
2	3,46	3,4	0,2	поступательные РГ	рис. 6, б
3	5,57	5,9	5,4	угловые РГ	рис. 6, в
4	21,87	23,1	5,3	угловые РГ	рис. 6, г
5	83,90	79,3	5,8	изгибные РГ	рис. 6, д
6	118,95	117,1	1,6	изгибные РГ	рис. 6, е
7	154,42	151,7	1,8	изгибные РТК	рис. 6, ж

Примечание: РТК – ротор турбокомпрессора, РГ – ротор генератора

Таблица 2 – Результаты анализа собственных колебаний для каждого ротора, входящего в состав валопровода ГТУ

№	Собственные частота [Гц] и форма				Характер колебаний на собственной форме
	турбокомпрессора		генератора		
1	2,0	рис. 7, а	2,3	рис. 7, д	поступательные осевые
2	2,8	рис. 7, б	3,3	рис. 7, е	поступательные радиальные
3	4,3	рис. 7, в	5,9	рис. 7, ж	угловые радиальные
4	145,4	рис. 7, з	89,1	рис. 7, з	изгибные без узлов
5	-	-	132,9	рис. 7, и	изгибные с одним узлом

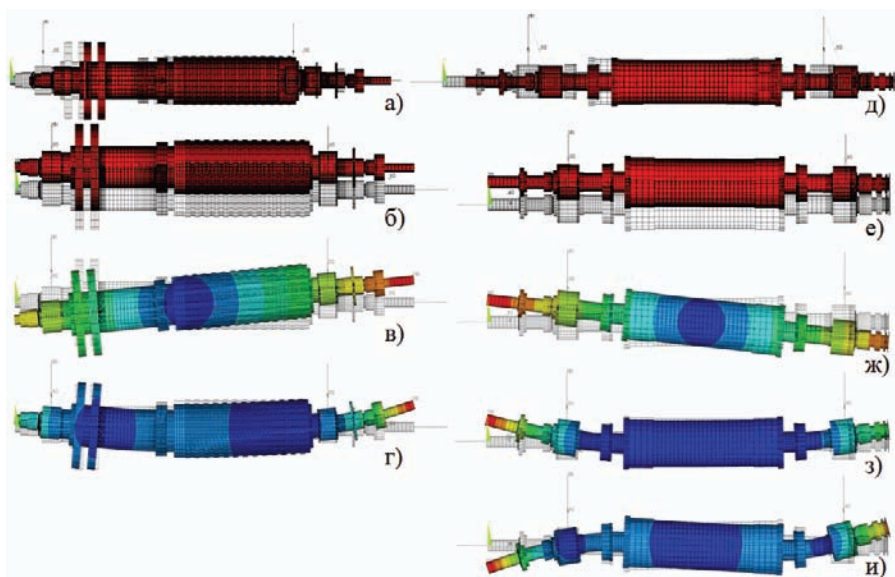


Рисунок 7 – Формы собственных колебаний роторов турбокомпрессора и генератора при жесткости опор 1 МН/м

Заключительная верификация расчетной модели ротора ГТУ осуществлялась по значениям критических скоростей вращающегося ротора при изменении частоты вращения в диапазоне от 0 до максимально возможного при эксплуатации значения 6600 об/мин [4]. Определение значений критических скоростей, соответствующих прямой и обратной прецессиям, осуществлялось с помощью частотной диаграммы Кэмбелла, рассчитанной для ротора, помещенного в опоры с жесткостью 1 МН/м, и представленной на рис. 8. Сами значения критических ротора ГТУ для выполнения сравнительного анализа сведены в табл. 3.

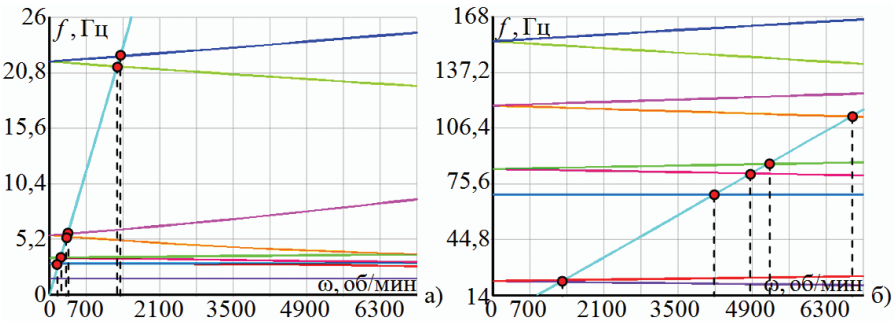


Рисунок 8 – Частотная диаграмма Кэмбелла для ротора ГТУ с указанием критических скоростей вращения (при жесткости опор 1 МН/м)

Таблица 3 – Результаты анализа критических скоростей ротора ГТУ

№	СЧ при $\omega=0$, Гц	Критические скорости, об/мин					
		обратная прецессия			прямая прецессия		
		расчетное значение	эталонное значение [4]	расхождение, %	расчетное значение	эталонное значение [4]	расхождение, %
1	2,9	175,5	177,8	1,3	175,8	178,3	1,4
2	3,5	206,8	211,1	2,0	208,1	212,4	2,0
3	5,6	327,1	319,4	2,4	342,3	335,1	2,1
4	21,9	1284,9	1299,4	1,1	1341,4	1363,1	1,6
5	83,9	4883,0	4768,8	2,4	5195,6	5067,2	2,5

Анализ результатов расчетов собственных частот и критических скоростей вращения так же, как и предыдущие результаты, подтверждают адекватность построенной расчетной конечно-элементной модели ротора ГТУ.

5. Анализ вынужденных колебаний. Результаты анализа динамического поведения ротора ГТУ под действием гармонических сил, вызванных собственной неуравновешенностью, равной $6,3 \cdot 10^{-6}$ кг·м для турбокомпрессора и $4,7 \cdot 10^{-6}$ кг·м для генератора, при относительном демпфировании 4%, представлены на рисунке 9 в виде амплитудно-частотной ха-

рактические и орбиты точек оси, соответствующих критическим и рабочей частотам (табл. 3).

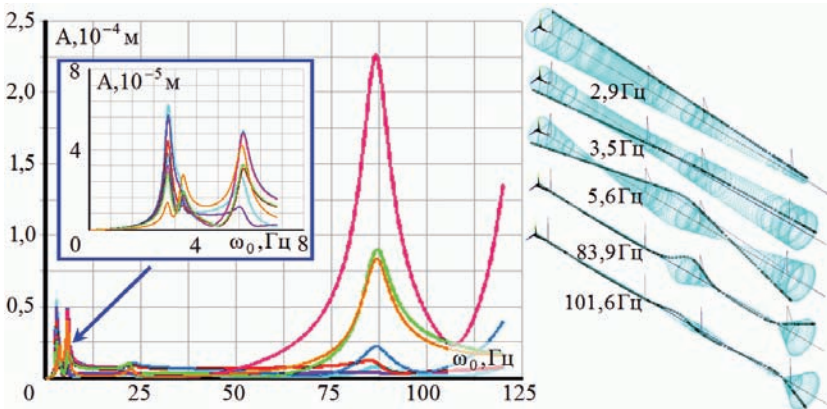


Рисунок 9 – Амплитудно-частотная характеристика ротора ГТУ и орбиты точек оси ротора, соответствующие критическим и рабочей частотам вращения

На рис. 10 и 11 представлены аналогичные результаты гармонических анализов для роторов турбокомпрессора и генератора, которые полностью коррелируют с параметрами собственных колебаний (табл. 2 и рис. 7).

Эти результаты позволяют подтвердить допустимость использования построенной расчетной модели для выполнения более углубленных динамических анализов системы и каждого ротора в отдельности.

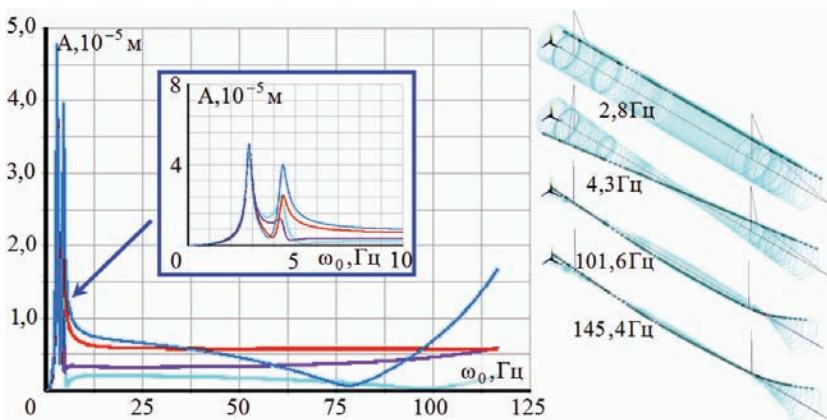


Рисунок 10 – Амплитудно-частотная характеристика ротора турбокомпрессора и орбиты точек оси ротора, соответствующие критическим и рабочей частотам вращения

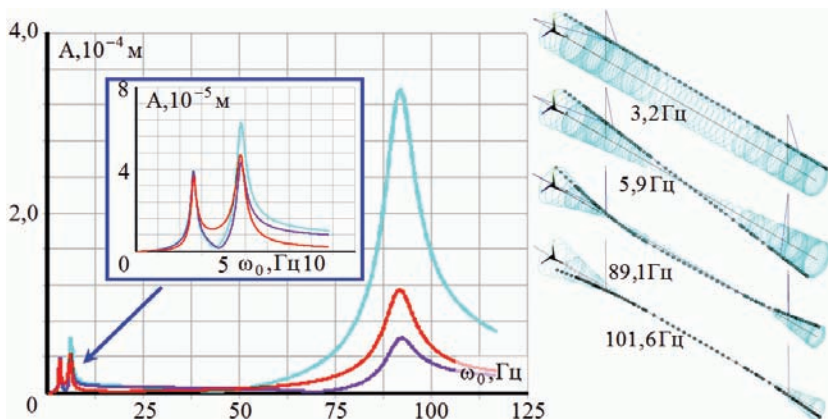


Рисунок 11. Амплитудно-частотная характеристика ротора генератора и орбиты точек оси ротора, соответствующие критическим и рабочей частотам вращения

Заключение. В ходе проведения численных исследований найдена расчетная конечно-элементная модель, состоящая из балочных конечных элементов, моделирующих роторы турбокомпрессора и генератора газотурбинной установки, и упруго-демпферных конечных элементов, моделирующих активные магнитные подшипники. Для этой модели удовлетворяется тождественность всем известным интегральным данным исходной конструкции, таким как массы, моменты инерции, расположения центров масс, а также всем известным динамическим характеристикам, а именно параметрам собственных колебаний (значениям собственных частот при известных формах колебаний) и значениям критических скоростей.

Таким образом, данная модель может использоваться в дальнейших расчетных исследованиях, например, для проведения сравнительных анализов результатов моделирования роторной динамики, выполнения расчетных исследований по изучению вынужденных колебаний системы под действием сил, вызванных неуравновешенностью отдельных навесных элементов, исследований по изучению особенностей динамики при использовании опор с переменными жесткостью и демпфирующими свойствами, зависящими от скорости вращения ротора, что возможно при наличии в системе управления АМП алгоритмов активного подавления вибраций на резонансных частотах или отстройки от них.

Список литературы: 1. Ануров Ю.М. Разработка и эксплуатация серийных энергетических ГТУ на магнитных подшипниках / Ю.М. Ануров, Е.В. Литвинов // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Х.: Технологический центр, 2009. – № 4/4 (40). – Тем. вып. Современные технологии в газотурбостроении. – Ч. 1. – С. 34-39. 2. Газотурбинная ТЭЦ нового поколения с агрегатами ГТЭ-009М // Рекламный буклет ЭНЕРГОМАШ (ЮК) Лимитед, 2003. – М.: Энергомаш. – 20 с. 3. Магнитные подшипники для нефтегазовой промышленности. Технологии S2M проверенные решения для нефтяной и газовой отрасли // Рекламный буклет, 2008. – SKF-S2M. – 18 с. (Раздел: Турбогенератор с приводом от газовой турбины). 4. SKF-S2M. Магнитные систе-

мы. Технология // Д. Каушанов / Рекламная презентация SKF-S2M, 2010. - SKF-S2M. – 66 с.
5. G. Schweitzer, E.H. Maslen Magnetic bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. – Berlin: Springer, 2009. – 535 p. 6. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 7. Мартыненко Г.Ю. Общий подход к моделированию нелинейной динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов / Г.Ю. Мартыненко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 3. – С. 78-84.

Bibliography (transliterated): 1. Anurov Yu.M. Razrabotka i ekspluataciya serijnyh energeticheskikh GTU na magnitnyh podshipnikah. Yu.M. Anurov, E.V. Litvinov. Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. Kharkiv: Tehnologicheskij centr, 2009. № 4/4 (40). Tem. vyp. Sovremennye tehnologii v gazoturbostroenii. Vol. 1. 34-39 Print. 2. Gazoturbinnaya TEC novogo pokoleniya s agregatami GTE-009M. Reklamnyj buklet ENERGOМASH (YuK) Limited, 2003. Moscow: Energomash. 20 Print. 3. Magnitnye podshipniki dlya neftegazovoj promyshlennosti. Tehnologii S2M proverennye resheniya dlya neftyanoj i gazovoj otrasli. Reklamnyj buklet, 2008. SKF-S2M. 18 Print. 4. SKF-S2M. Magnitnye sistemy. Tehnologiya. D. Kashtanov. Reklamnaya prezentaciya SKF-S2M, 2010. SKF-S2M. 66 Print. 5. G. Schweitzer, E.H. Maslen Magnetic bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. Berlin: Springer, 2009. 535 Print. 6. Zhuravlev Yu.N. Aktivnye magnitnye podshipniki: Teoriya, raschet, primenenie. Sankt Petersburg: Politehnika, 2003. 206 Print. 7. Martynenko G.Yu. Obschij podhod k modelirovaniyu nelinejnoj dinamiki zhestkih rotorov v magnitnyh podshipnikah razlichnyh tipov. G.Yu. Martynenko. Dopovidi NAN Ukrainy. 2012. № 3. 78-84 Print.

Поступила (received) 14.11.2014

УДК 534.1

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ, Харьков;

С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Модернизированным методом энергетического баланса выведены приближенные формулы для расчета амплитуд малых затухающих колебаний осциллятора переменной массы при действии силы сухого трения. Рассмотрены варианты колебаний при постоянном значении силы трения и переменном, когда сила трения пропорционально массе осциллятора. Проведено сравнение численных результатов, к которым приводят полученные формулы и известные более точные решения. Показано, что выведенные компактные приближенные формулы имеют хорошую точность и удобны для инженерных расчетов.

Ключевые слова: свободные колебания, линейно-переменная масса, сухое трение.

Введение. В технике распространены механизмы, массы которых монотонно меняются с течением времени. Много примеров таких механизмов есть

© В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский, 2014

в монографиях [1,2]. Нередко их колебания проходят при действии сил сухого трения, что стало предметом специального исследования в [1]. В указанной монографии уравнения движения с монотонно переменными коэффициентами на коротких интервалах времени (полуциклах колебаний) приближенно заменяли уравнениями с постоянными коэффициентами. Затем, методом припасовывания сшивали аналитические решения уравнений с постоянными коэффициентами, меняя при этом скачкообразно массу колебательной системы в моменты ее остановок. Этот громоздкий способ расчета можно упростить, используя энергетический метод, который позволил сравнительно просто рассчитывать затухающие колебания осцилляторов постоянных параметров при нелинейном сопротивлении движению [3,4]. Но для повышения точности расчета колебаний осцилляторов переменной массы методом энергетического баланса нужно модернизировать метод, что послужило мотивом к этому исследованию.

Целью данной статьи является адаптация метода энергетического баланса к расчету колебаний осцилляторов переменной массы при действии силы сухого трения и демонстрация результатов, к которым приводит модернизация метода.

1. Колебания осциллятора при постоянном значении силы сухого трения. Без учета действия реактивной силы, их описываем дифференциальным уравнением

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -F_T \text{sign}\dot{x}. \quad (1)$$

В нем m_0 – начальное значение массы; δ – скорость изменения массы во времени t ; c – коэффициент жесткости пружины; F_T – значение силы трения; $x = x(t)$ – перемещение осциллятора, отсчет которого ведем по оси Ox от торца недеформированной пружины; точкой над x обозначена производная по t .

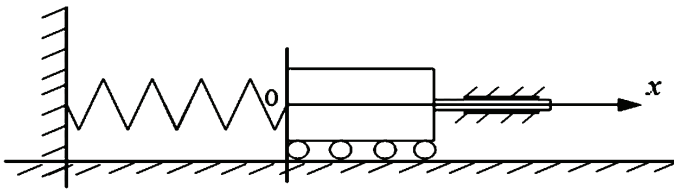


Рисунок 1 – Расчетная схема

Как видно из расчетной схемы на рис. 1, которая заимствована из монографии [1], в рассматриваемой задаче узел трения удален от массы и находится правее ее.

Рассматривая колебания, вызванные исходным отклонением x_0 , таким что $|x_0| > F_T / c$, уравнение (1) будем решать при начальных условиях:

$$x(0) = x_0 < 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Согласно (2), на начальном этапе движения осциллятора до первой его остановки, производная $\dot{x} > 0$ и вместо (1) можно решать более простое уравнение

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -F_T. \quad (3)$$

Введя обозначение $\Phi(t, \ddot{x}) = \delta t \ddot{x}$, уравнение (3) преобразуем к форме

$$m_0 \dot{x} + cx = -F_T - \Phi(t, \ddot{x}), \quad (4)$$

где левая часть имеет постоянные коэффициенты.

Следуя работе [3], далее приближенно задаем закон движения осциллятора в виде

$$x = -a \cos(\omega t),$$

где $\omega = \sqrt{c/m_0}$; $a = a(t)$ – функция медленного изменения, для которой допустимо приближенно принять

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t); \quad \ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t). \quad (5)$$

Учитывая (5), вычисление $\Phi(t, \ddot{x})$ сводим к формуле

$$\Phi(t, \ddot{x}) = \delta t a \omega^2 \cos(\omega t). \quad (6)$$

Согласно методу энергетического баланса [3], за один полуцикл колебаний, изменение потенциальной энергии системы Δu равно работе A сил в правой части уравнения (4). При относительно медленном затухании колебаний изменение потенциальной энергии приближенно равно [3]

$$\Delta u = \frac{\pi}{\omega} ca \frac{da}{dt}.$$

Для вычисления работы имеем интеграл

$$A = - \int_0^{\pi/\omega} [F_T + \Phi(t, \ddot{x})] \dot{x} dt.$$

Подставив в него выражения (5) и (6), получаем

$$A = -2F_T a + \frac{\pi}{4} \delta \omega a^2.$$

Таким образом, равенство $\Delta u = A$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{da}{dt} = \frac{\delta}{4m_0} (a - b), \quad (7)$$

в котором $b = \frac{8F_T \sqrt{m_0}}{\pi \delta \sqrt{c}}$.

Проинтегрировав уравнение (7), при начальном условии

$$a(0) = a_0 = |x_0|,$$

находим выражение верхней огибающей графика колебаний на начальном этапе движения

$$a(t) = b + (a_0 - b) \exp\left(\frac{\delta t}{4m_0}\right). \quad (8)$$

При $\delta \rightarrow 0$ выражение (8) переходит в уравнение прямой

$$a(t) = a_0 - \frac{2F_T}{\pi\sqrt{cm_0}} t,$$

что согласуется с известными результатами [3, 4], где решали уравнение (7), полагая $\delta = 0$.

Согласно (5), первый останов осциллятора произойдет, когда $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}$.

Подставив это значение t в (8), получаем

$$a_1 = a_0 \exp\left(\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - \frac{8F_T\sqrt{m_0}}{\pi\delta\sqrt{c}} \left(\exp\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - 1\right)\right). \quad (9)$$

Масса осциллятора в этот момент времени равна

$$m_1 = m_0 + \pi\delta\sqrt{\frac{m_0}{c}}.$$

Обобщая эти формулы, вычисление амплитуды и массы осциллятора в конце k -го размаха сводим к рекуррентным соотношениям:

$$a_k = a_{k-1} \exp\left(\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - \frac{8F_T\sqrt{m_{k-1}}}{\pi\delta\sqrt{c}} \left(\exp\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - 1\right)\right); \quad (10)$$

$$m_k = m_{k-1} + \pi\delta\sqrt{\frac{m_{k-1}}{c}}. \quad (11)$$

В пределе, при $\delta \rightarrow 0$, из (10) следует известное выражение изменения амплитуд колебаний в осцилляторе постоянной массы [3]

$$a_k = a_{k-1} - \frac{2F_T}{c}.$$

Движение осциллятора завершится, когда

$$a_k \leq \frac{F_T}{c}.$$

Оценим, сколько размахов сделает осциллятор за время его движения $t \in (0; t_*)$. Время полного останова $t = t_*$ определим приближенно, положив в (8) $a(t) = 0$.

Корень этого уравнения равен

$$t_* = \frac{4m_0}{\delta} \ln \frac{b}{b-a_0}. \quad (12)$$

Заметим, что в случае убывания массы ($\delta < 0$), решение (8) имеет физический смысл лишь на интервале $t \in (0; -m_0 / \delta)$, когда положительна масса осциллятора. Поэтому вычисленное по (12) значение t_* применимо для дальнейших расчетов только при $m_0 + \delta t_* > 0$.

Используя t_* , легко найти натуральные числа:

$$k_* = \begin{matrix} \text{округленное} \\ \text{до целого} \end{matrix} \left(\frac{\sqrt{ct_*}}{\pi\sqrt{m_0}} \right); \quad k^* = \begin{matrix} \text{округленное} \\ \text{до целого} \end{matrix} \left(\frac{\sqrt{ct_*}}{\pi\sqrt{m_0 + \delta t_*}} \right). \quad (13)$$

Учитывая изменения длительностей полуциклов во времени, приходим к выводу, что за время движения осциллятора, с положительным значением его массы, количество размахов k удовлетворяет неравенствам:

$$k^* \leq k \leq k_* \quad (14)$$

при возрастании массы ($\delta > 0$) и

$$k_* \leq k \leq k^* \quad (15)$$

при убывании массы ($\delta < 0$).

Подчеркнем, что двойные неравенства (14) и (15) годятся лишь для ориентировочной, приближенной оценки числа размахов, поскольку они получены в результате экстраполирования на весь интервал движения выражения (8), которое построено для расчета убывания амплитуд колебаний осциллятора только на начальном этапе движения, то есть во время первого размаха.

Точные, но односторонние оценки числа размахов, можно предложить, сравнивая колебания осцилляторов переменной и постоянной масс. Так, если число размахов n_* за время движения осциллятора постоянной массы $\delta = 0$ равно

$$n_* = \begin{matrix} \text{целая часть} \\ \text{числа} \end{matrix} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ca_0}{F_T} + 0,99999 \right) \right], \quad (16)$$

то при возрастании массы ($\delta > 0$) число размахов k будет удовлетворять неравенству $k \geq n_*$. При убывании массы выполняется противоположное неравенство $k \leq n_*$.

2. Колебания осциллятора с переменной силой трения. Силу трения определяем по формуле

$$F_T(t) = fg(m_0 + \delta t), \quad (17)$$

в которой f – коэффициент трения; g – ускорение свободного падения. Такую зависимость имеем при движении массы по шероховатой горизонтальной плоскости, согласно схеме, показанной на рис. 2.

Теперь, при вычислении работы силы трения, нужно использовать инте-

грал

$$I = -fga\omega \int_0^{\pi/\omega} (m_0 + \delta t) \cdot \sin(\omega t) dt = -fga\omega \left(\frac{2m_0}{\omega} + \frac{\delta\pi}{\omega^2} \right) =$$

$$= -2fg \left(m_0 + \frac{\delta\pi}{2} \sqrt{\frac{m_0}{c}} \right) \cdot a.$$

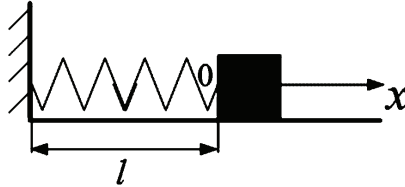


Рисунок 2 – Расчетная схема

Раньше, при постоянной силе трения, имели $I = -2F_T a$.

Из равенства интегралов находим эквивалентное постоянное значение силы трения на первом полуцикле

$$F_T = fg \left(m_0 + \frac{\delta\pi}{2} \sqrt{\frac{m_0}{c}} \right), \quad (18)$$

которое нужно подставить в (9). Указанная подстановка дает

$$a_1 = a_0 \exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - \frac{8fgm_0(\sqrt{cm_0} + 0,5\pi\delta)}{\pi\delta c} \left(\exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - 1 \right).$$

Обобщив это выражение, получаем рекуррентное соотношение для вычисления амплитуды колебаний в конце k -го размаха

$$a_k = a_{k-1} \exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - \frac{8fgm_{k-1}(\sqrt{cm_{k-1}} + 0,5\pi\delta)}{\pi\delta c} \left(\exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - 1 \right). \quad (19)$$

Вычисление переменных значений массы, как прежде, проводим по (11).

В пределе, при $\delta \rightarrow 0$, из (19) следует известная формула убывания амплитуд вибратора с постоянной массой, равной m_0 :

$$a_k = a_{k-1} - \frac{2fgm_0}{c}.$$

Процесс движения осциллятора полностью завершится, когда

$$|a_k| \leq fgm_k c^{-1}.$$

Учитывая (12), приближенную оценку времени завершения движения осциллятора проводим по формуле:

$$t^* = \frac{4m_0}{\delta} \ln \frac{d}{d-a_0}, \quad (20)$$

в которой $d = \frac{8fgm_0}{\pi\delta c} (\sqrt{cm_0} + 0,5\pi\delta)$.

Вычисленное значение t^* , при $\delta < 0$, можно подставлять в (13), (15), для оценки числа размахов, только в том случае, когда $m_0 + \delta t^* > 0$.

Точную но одностороннюю, оценку количества размахов k удобно проводить с помощью неравенства: $k \leq n^*$ – при возрастании массы и $k \geq n^*$ – при убывании массы, где

$$n^* = \begin{matrix} \text{целая часть} \\ \text{числа} \end{matrix} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ca_0}{fgm_0} + 0,99999 \right) \right]. \quad (21)$$

Анализ численных результатов. Для проведения расчетов принимаем: $m_0 = 3$ кг; $c = 1962$ Н/м; $F_T = 5,886$ Н; $a_0 = 0,0615$ м; $\delta = \pm 1,5$ кг/с и $\delta = \pm 2$ кг/с. Вычисленные по формуле (10) значения амплитуд размахов записаны в числителе табл. 1.

Таблица 1 – Значения амплитуд размахов при $F_T = \text{const}$; $m_0 = 3$ кг

K	100 a_K , м при $\delta > 0$		100 a_K , м при $\delta < 0$	
	$\delta = 1,5$ кг/с	$\delta = 2$ кг/с	$\delta = -1,5$ кг/с	$\delta = -2$ кг/с
1	5,641	5,671	5,461	5,431
	5,639	5,669	5,459	5,429
2	5,121	5,178	4,780	4,723
	5,118	5,173	4,777	4,718
3	4,591	4,671	4,107	4,025
	4,587	4,665	4,103	4,019
4	4,052	4,152	3,443	3,339
	4,047	4,143	3,438	3,331
5	3,504	3,620	2,788	2,665
	3,498	3,610	2,783	2,656
6	2,947	3,077	2,144	2,005
	2,940	3,066	2,137	1,994
7	2,381	2,524	1,509	1,359
	2,374	2,511	1,503	1,348
8	1,808	1,959	0,886	0,729
	1,800	1,946	0,879	0,717
9	1,227	1,385	0,274	0,116
	1,219	1,371	0,267	0,104
10	0,638	0,802	–	–
	0,630	0,787	–	–
11	0,042	0,209	–	–
	0,034	0,194	–	–

Знаменатели в табл. 1 заимствованы из [6, табл. 2.4]. Там они были получены для указанных выше исходных данных ВБК-методом. Расхождения результатов в числителях и знаменателях табл. 1 незначительны, за исключением малых амплитуд размахов в конце процесса движения.

Проверим, как теоретические оценки согласуются с тем количеством размахов, что имеем в табл. 1. Подставив указанные выше числовые данные в (16), находим, что $n_* = 10$. Тогда, при $\delta > 0$ количество размахов $k \geq 10$, а при $\delta < 0 - k \leq 10$. Указанные в табл. 1 количества размахов удовлетворяют этим неравенствам.

В числители табл. 2 записаны значения амплитуд размахов, к которым приводит формула (10), при $m_0 = 4$ кг; $c = 1600$ Н/м; $a_0 = 0,05$ м; $F_T = 8$ Н; $\delta = \pm 1$ кг/с и $\delta = \pm 2$ кг/с.

В знаменатели табл. 2 помещены результаты, взятые из [6, табл. 2.11 и 2.12], где расчет колебаний проведен ВБК-методом. Имеем хорошее совпадение значений амплитуд размахов, вычисленных разными способами.

Таблица 2 – Значения амплитуд размахов при $F_T = \text{const}$; $m_0 = 4$ кг

K	100 a_K , м при $\delta > 0$		100 a_K , м при $\delta < 0$	
	$\delta = 1$ кг/с	$\delta = 2$ кг/с	$\delta = -1$ кг/с	$\delta = -2$ кг/с
1	4,044	4,089	3,956	3,913
	4,044	4,088	3,956	3,911
2	3,079	3,158	2,922	2,843
	3,078	3,155	2,921	2,840
3	2,103	2,207	1,897	1,794
	2,102	2,203	1,896	1,790
4	1,118	1,237	0,882	0,765
	1,117	1,232	0,881	0,761
5	0,124	0,250	0,122*	0,241*
	0,123	0,244	0,123*	0,245*

Символом * помечены те размахи, при которых осциллятор, попав в зону застоя, не проходит положения $x = 0$.

Проверим согласование количеств размахов, указанных в табл. 2 с неравенствами (14) и (15). При $\delta = 1$ кг/с имеем: $b \approx 1,0186$ м; $t_* \approx 0,805$ с; k_* равно округленному до целого (5,125) 5; k^* равно округленному до целого (4,676) 5. Согласно (14): $5 \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 5$. При $\delta = -1$ кг/с находим: $b \approx -1,0186$ м; $t_* \approx 0,767$ с; k_* равно округленному до целого (4,883) 5; k^* равно округленному до целого (5,431) 5. Согласно (15): $5 \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 5$. В обоих случаях указанные количества размахов в табл. 2 согласуются с неравенствами (14) и (15).

Используя формулу (19), рассмотрим убывание амплитуд колебаний осциллятора при действии переменной силы трения. Следуя работе [5], для

проведения расчетов принимаем: $m_0 = 3$ кг; $c = 1962$ Н/м; $a_0 = 0,0615$ м; $f = 0,3$; $\delta = 2,5$ кг/с. Полученные двумя методами значения амплитуд размахов и масс в моменты остановок указаны в табл. 3.

Таблица 3 – Значения амплитуд и масс в моменты остановок

k	по формулам (19) и (11)		из статьи [5]	
	a_{K_1} , м	m_{K_1} , кг	a_{K_2} , м	m_{K_2} , кг
1	0,0535	3,307	0,053	3,315
2	0,0443	3,630	0,044	3,645
3	0,0338	3,967	0,034	3,991
4	0,0220	4,321	0,022	4,354
5	0,0088	4,689	0,008	4,733
6	0,0058	5,073	0,006	5,083

Результаты расчетов модернизированным энергетическим методом в табл. 3 близки к результатам численного интегрирования дифференциального уравнения движения в работе [5].

В числителях табл. 4 записаны значения амплитуд размахов, вычисленные по формуле (19) при $m_0 = 4$ кг; $c = 1600$ Н/м; $a_0 = 0,05$ м; $f = 0,2$; $\delta = \pm 0,5$ кг/с и $\delta = \pm 1$ кг/с. В знаменатели записаны результаты расчетов, проведенных методом ВБК в работе [6, табл. 2.13, 2.14].

Таблица 4 – Значения амплитуд размахов при переменной силе трения

k	100 a_{K_1} , м при $\delta > 0$		100 a_{K_2} , м при $\delta < 0$	
	$\delta = 0,5$ кг/с	$\delta = 1$ кг/с	$\delta = -0,5$ кг/с	$\delta = -1$ кг/с
1	4,032	4,044	4,007	3,994
	4,031	4,044	4,006	3,994
2	3,039	3,039	3,037	3,035
	3,038	3,038	3,037	3,034
3	2,021	1,984	2,091	2,123
	2,021	1,982	2,090	2,121
4	0,979	0,878	1,168	1,256
	0,978	0,875	1,167	1,252
5	0,088*	0,280*	0,269	0,433
	0,089*	0,284*	0,267	0,428
6	–	–	–	0,346*
				0,348*

Имеем хорошее согласование значений амплитуд, вычисленных двумя методами.

Вычислим, к каким значениям k приводят оценочные неравенства при $\delta = \pm 1$ кг/с. Подставив числовые данные в формулу (21) получаем $n^* = 5$. Согласно теоретическим оценкам: при $\delta = 1$ кг/с – $k \leq 5$, а при $\delta = -1$ кг/с – $k \geq 5$.

Количества размахов, указанные в табл. 4 не противоречат этим оценкам.

Определим далее числа k^* и k^* . При $\delta = 1$ кг/с находим: $d \approx 1,0189$ м; $t^* \approx 0,805$ с; k^* равно округленному до целого (5,126) 5; k^* равно округленному до целого (4,676) 5. Согласно (14): $5 \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 5$. При $\delta = -1$ кг/с имеем: $d \approx -0,980$ м; $t \approx 0,796$ с; k^* равно округленному до целого (5,071) 5; k^* равно округленному до целого (5,666) 6. Согласно (15): $5 \leq K \leq 6$. Число размахов k в табл. 4 удовлетворяет этому двойному неравенству.

Выводы. Вычисления подтвердили, что полученные модернизированным энергетическим методом формулы вполне пригодны для расчета затухающих амплитуд колебаний осциллятора линейно-переменной массы при действии силы сухого трения.

Список литературы: 1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с. 2. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass / L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p. 3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с. 4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с. 5. Ольшанский В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси при наявності сухого тертя / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 54 (1027). – С. 172-178. 6. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Мис'кдрук, 2014. – 264 с.

Bibliography (transliterated): 1. Bessonov A.P. Osnovy dinamiki mehanizmov s peremennoj massoj zven'ev. A.P. Bessonov. Moscow: Nauka, 1967. 267 Print. 2. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, 1998. 300 Print. 3. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mehanicheskikh kolebanij. Ya.G. Panovko. Moscow: Nauka, 1980. 270 Print. 4. Bogolyubov N.N. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. N.N. Bogolyubov, Yu.A. Mitropol'skij. Moscow: Nauka, 1974. 504 Print. 5. Ol'shans'kyj V.P. Vil'ni kolyvannya oscylyatora zminnoyi masy pry nayavnosti sukhoho tertya. V.P. Ol'shans'kyj, S.V. Ol'shans'kyj. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematyчне modelyuvannya v tekhnici ta tekhnolohiyakh. 2013. № 54 (1027). 172-178. Print. 6. Ol'shanskij V.P. Metod VBK v raschetah nestacionarnykh kolebanij oscillyatorov. V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij. Kharkiv: Mis'kdruck, 2014. 264 Print.

Поступила (received) 16.04.2014

Я.В. ПАВЛЮК, канд. техн. наук, інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України, Київ, Україна

ДО РОЗРАХУНКУ РЕЛАКСАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ОДНОВІСНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Розглянуто задачу визначення релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів при різних режимах нестационарного деформування, а саме в умовах стаціонарного, одноступеневого і циклічного деформування. Розрахунок будується на основі нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю за рахунок використання діаграми миттєвого деформування, як ізохрони для нульового моменту часу і згладжуючих кубічних сплайнів в якості апроксимації нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі. Програма навантаження реалізується у вигляді послідовності елементарних навантажень, що задаються за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Розв'язані і експериментально апробовані задачі розрахунку деформацій повзучості і релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одного ступеневого навантаження, часткового розвантаження, а також циклічного навантаження.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, нелінійна повзучість, нелінійна релаксація, дробово-експоненційне ядро спадковості, нелінійно-в'язкопружні матеріали, нестационарне навантаження.

Вступ. Основне завдання одновимірної теорії повзучості формується як задача побудови за допомогою деяких операторів часу рівнянь зв'язку між деформаціями і напруженнями як скалярними величинами [1]. При цьому передбачається, що серія експериментальних кривих повзучості при постійних напружених містить всі необхідні дані для ідентифікації параметрів будь-якої феноменологічної теорії повзучості. Для перевірки таких теорій використовуються, як правило, результати зіставлення розрахункових і експериментальних кривих релаксації і кривих повзучості при змінних режимах навантаження. Рішення задач релаксації і нестационарної повзучості представляє і певний практичний інтерес, оскільки відображає реальні умови експлуатації багатьох матеріалів та елементів конструкцій.

Для задання залежності між деформаціями, напруженнями і часом широкого поширення набули теорії повзучості спадкового типу, що дозволяють врахувати історію навантаження [2-5]. Основна складність, яка виникає при використанні спадкової теорії, пов'язана з вибором ядра інтегрального рівняння, знаходженням відповідної резольвенти і визначенням параметрів ядра. На даний час однією із найбільш перспективних теорій вважається нелінійна теорія Работнова [1]. Визначальні рівняння теорії отримані виходячи з умов подібності ізохронних діаграм повзучості [6, 7]. В роботі [8] умова подібності

ізохронних діаграм повзучості розширена за рахунок введення в умову подібності і відповідно у визначальні рівняння теорії експериментальної діаграми миттєвого деформування. Отримані в результаті визначальні рівняння апробовані на задачах розрахунку деформацій повзучості ряду нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного навантаження [9]. У даній роботі вирішується задача розрахунку деформацій повзучості за умов стаціонарного навантаження та релаксації напружень за умов стаціонарного, одноступеневого та циклічного деформування.

Постановка задачі дослідження. Об'єкт дослідження

Визначальні рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю задаються співвідношеннями [1]

$$\begin{cases} \varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau; \\ \sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – повна деформація, що містить пружну компоненту ε^e і компоненту повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – ядра повзучості і релаксації відповідно.

Нелінійність процесів повзучості заданих рівнянням (1.1) визначається видом функції $\varphi_0(\cdot)$, котра в роботі задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

де $a_{0,j}$; $a_{1,j}$; $a_{2,j}$; $a_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядра спадковості $K(t-\tau)$ та $R(t-\tau)$ задаються дробово-експоненційними функціями, так що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.3)$$

а

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.4)$$

де α , β – параметри ядер, що підлягають визначенню із експерименту ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$).

Використовуючи подальшу процедуру обернення функцій, визначальні рівняння (1.1) записуються у формі

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \psi_0 \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right]; \\ \sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau) \varphi_0(\varepsilon(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (1.5)$$

де $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ – обернення функції $\varphi_0(\cdot)$, яке задається співвідношенням

$$\varphi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3; \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

де $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію $\varphi_0^{-1}(\cdot)$.

Довільний закон зміни напружень σ_t та деформацій ε_t в момент навантаження τ задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень σ_k та деформацій ε_k

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k; \\ \varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \varepsilon_k, \end{cases} \quad (1.7)$$

де $h(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови $t = \tau$; t – момент спостереження ($t \geq \tau$).

В роботі в рамках рівнянь (1.5) розв'язується задача розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного деформування для склопластику ТС-8/3-250 під кутом 45° до напрямку армування, шаруватого пластику, полівінілхлоридного пластикату, поліетилену високої щільності та нестаціонарного деформування для плексигласу. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними запозиченими з [2, 10, 11, 12, 13, 14].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези подібності для досліджуваних матеріалів, визначення параметрів входять у визначальне рівняння і експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного та нестаціонарного деформування.

2 Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовані виходячи із умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Існування єдиної ізохронної діаграми обґрунтовується експериментально.

Єдина ізохронна діаграма деформування відображає подібність ізохронних діаграм повзучості $\varphi(\varepsilon)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon)$. Подіб-

ність діаграм $\varphi_t(\varepsilon)$ і $\varphi_0(\varepsilon)$ встановлюється у площині « $\varphi - \varepsilon$ » для кожного із фіксованих рівнів деформацій ε_i в інтервалі $i = \overline{1, q}$ по параметру t_j в інтервалі $j = \overline{1, \ell}$. В цьому випадку умова подібності j -ої ізохронної діаграми повзучості $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i, 0)$ записується у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i, 0) = (1 + G(t_j)) \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (2.1)$$

де $(1 + G(t_j))$ – функція подібності, що визначається для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості. Функції $\varphi_0(\cdot)$ і $\varphi_t(\cdot)$ задають величини напруження σ_i по діаграмі миттєвого деформування і по ізохронних діаграмах повзучості відповідно для кожного із моментів часу t_j .

Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ визначається із співвідношення

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \cdot \varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}^2}, \quad (2.2)$$

яке усереднює функції подібності $(1 + G(t_j))$, знайдені для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розрахувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

Замінюючи в умові подібності (2.2) функцію подібності $(1 + G(t_j))$ на її осереднене значення $\overline{1 + G(t_j)}$, для визначення приведених дискретних значень $\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)}$ ізохронних діаграм повзучості отримуємо співвідношення

$$\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)} = \overline{(1 + G(t_j))} \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j). \quad (2.3)$$

Вважається, що єдина ізохронна діаграма обґрунтована із похибкою δ , якщо приведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу, обмеженого величиною δ по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина δ може бути прийнята рівною $\pm 5\%$.

Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для розглянутих в'язкопружних матеріалів виконано на рис. 1.

Видно, що зведені ізохронні діаграми повзучості (точки) не виходять за межі інтервалу у $\pm 5\%$ (штрихові лінії) від діаграми миттєвого деформування (суцільні лінії). Це свідчить, що гіпотеза єдиної ізохронної діаграми деформування обґрунтована із похибкою $\delta = 10\%$.

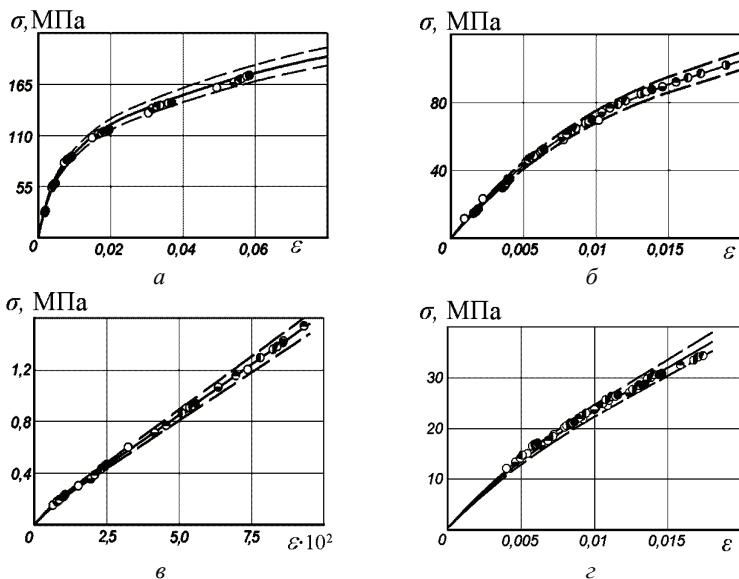


Рисунок 1 – Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування на прикладі склопластику TC-8/3-250, $\varphi = 45^\circ$ (а) для $t_j = 20$ (○), 30 (◐), 72 (◑), 132 (●) годин, шаруватого пластику Grade C (б) для $t_j = 20114$ (○), 5506 (◐), 10899 (◑), 16966 (◒), 21011 (◓), 82035 (●) годин, полівінілхлоридного пластику (в) $t_j = 0,32$ (○), 1,23 (◐), 2,74 (◑), 6,07 (◒), 8,47 (◓), 19,6 (●) годин, плексигласу (г) $t_j = 25$ (○), 183 (◐), 553 (◑), 800 (◒), 1607 (◓), 9320 (●) годин

3 Визначення параметрів моделі

Параметри α , β , λ , що відповідають за нелінійно-в'язкопружне деформування у визначальних рівняннях нелінійної повзучості та релаксації, визначаються із умови існування єдиної ізохронної діаграми миттєвого деформування по усередненій функції подібності $\overline{1 + G(t_j)}$ з використанням експериментальних даних на повзучість при постійних напруженнях.

В якості критерію найкращого узгодження функції подібності (2.2) із експериментальними значеннями усередненої функції подібності $(\overline{1 + G(t_j)})_{\text{exp}}$ прийнято мінімум квадратичного відхилення між розрахунковими і експериментальними значеннями усередненої функції подібності $(\overline{1 + G(t_j)})_{\text{exp}}$. Задача зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \overline{1 + G(t_j)}_{\text{exp}} - \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha)]} \right] \right\}^2. \quad (3.1)$$

Мінімізація функціоналу (3.1) здійснюється із використанням ітерацій-

ного методу Лівенберга-Маркардта [15]. Значення параметрів α , β , λ , що розраховано згідно (3.1), наведені у табл. 1. На рис. 2 показано співставлення експериментальних даних усередненої функції подібності $\overline{1+G(t_j)}$ із розрахунковими.

Як видно із співставлення розрахункових даних із експериментальними отримано задовільне узгодження результатів.

Таблиця 1 – Визначальні параметри моделі

В'язкопружні матеріали	Параметри ядра		
	α	β , год ^{-(1+α)}	λ , год ^{-(1+α)}
Шаруватий пластик Grade C	-0,864	0,052	0,416
Склопластик ТС 8/3-250 $\varphi = 45^\circ$	-0,651	0,195	0,124
Поліетилен високої щільності	-0,209	1,233	0,784
Полівінілхлоридний пластикат	-0,504	0,339	0,435
Плексиглас 1А	-0,591	0,014	0,02

На рис. 2 показано співставлення експериментальних даних усередненої функції подібності $\overline{1+G(t_j)}$ (точки) із розрахунковими (штрихові лінії) для склопластику ТС-8/3-250 $\varphi = 45^\circ$ (а), шаруватого пластику Grade C (б). Як видно із співставлення розрахункових даних із експериментальними отримано задовільне узгодження результатів.

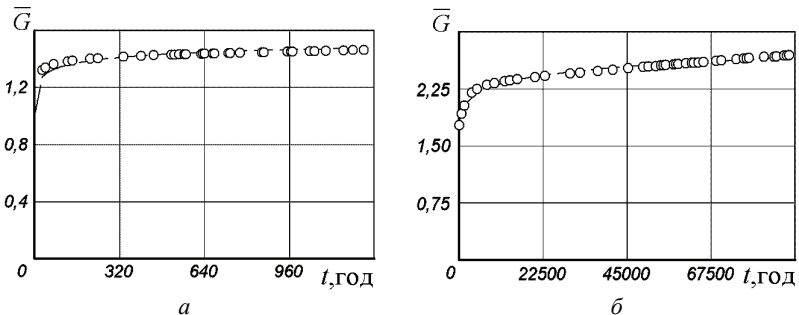


Рисунок 2 – Співставлення експериментальних даних усередненої функції подібності $\overline{1+G(t_j)}$ (точки) із розрахунковими (штрихові лінії): а – для склопластику ТС-8/3-250 $\varphi = 45^\circ$, б – для шаруватого пластику Grade C (б)

Значення коефіцієнтів сплайн апроксимації, котрі здають зворотну діаграму миттєвого деформування у рівнянні (1.2).

Значення коефіцієнтів сплайн апроксимації, котрі задають зворотну діаграму миттєвого деформування у рівнянні (1.2) $\varphi_0(\cdot)$ приведені в табл. 2

Таблиця 2 – Коефіцієнти сплайн апроксимації

Матеріал	j	σ_j , МПа	b_3 , МПа ⁻³	b_2 , МПа ⁻²	b_1 , МПа ⁻¹	b_0
Шаруватий пластик Grade C			$1,1394 \cdot 10^{-8}$	$-4,6547 \cdot 10^{-7}$	$11,50 \cdot 10^{-5}$	$-2,4658 \cdot 10^{-5}$
Склопластик ТС-8/3-250 при $\varphi = 45^\circ$	0	0	$6,4951 \cdot 10^{-10}$	$3,5238 \cdot 10^{-7}$	$5,2862 \cdot 10^{-5}$	0
	1	46	$1,84845 \cdot 10^{-8}$	$-2,1232 \cdot 10^{-6}$	$16,7406 \cdot 10^{-5}$	$-17,70 \cdot 10^{-4}$
	2	84	$1,59732 \cdot 10^{-8}$	$-1,4848 \cdot 10^{-6}$	$11,3308 \cdot 10^{-5}$	$-24,0 \cdot 10^{-5}$
	3	117	$6,2612 \cdot 10^{-9}$	$1,9318 \cdot 10^{-6}$	$28,7333 \cdot 10^{-5}$	$15,422 \cdot 10^{-3}$
	4	160	$2,47375 \cdot 10^{-8}$	$-6,958 \cdot 10^{-6}$	$11,38407 \cdot 10^{-4}$	$-60,800 \cdot 10^{-3}$
	5	195				
Поліетилен високої щільності			$1,85 \cdot 10^{-5}$	$-17,0 \cdot 10^{-5}$	$24,67 \cdot 10^{-4}$	$-75,0 \cdot 10^{-5}$
Полівінілхлоридний пластикат	0	0	$75,61956 \cdot 10^{-3}$	$10,72626 \cdot 10^{-3}$	$40,963237 \cdot 10^{-3}$	0
	1	0,17	$-69,2558 \cdot 10^{-3}$	$85,79805 \cdot 10^{-3}$	$27,996293 \cdot 10^{-3}$	$74,7 \cdot 10^{-5}$
	2	0,40	$-51,91 \cdot 10^{-5}$	$16,4146 \cdot 10^{-4}$	$62,341469 \cdot 10^{-3}$	$-39,3 \cdot 10^{-4}$
	3	1,5				
Плексиглас 1А			$8,653 \cdot 10^{-9}$	$3,88276 \cdot 10^{-6}$	$33,08803 \cdot 10^{-5}$	$-11,0 \cdot 10^{-5}$

4 Повзучість за умов стаціонарного навантаження

Умова навантаження постійним у часі напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \quad (k = \overline{1, m}), \quad (4.1)$$

що отримується із (1.5) при умові $t_{k+1} > t$.

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов постійних напружень, виходячи із (1.5) із урахуванням (4.1), записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + b_{2,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^3; \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де коефіцієнти $b_{0,j}$, $b_{1,j}$, $b_{2,j}$, $b_{3,j}$ визначаються за результатами апроксимації функції $\psi_0(\cdot)$ згладжуючим кубічним сплайном (1.6).

В режимі стаціонарного навантаження (4.1) на підставі рівняння (4.2), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості нелінійно-в'язкопружних композитів та їх компонентів для декількох рівнів постійних напружень σ_k . Результати розрахунків наведені на рис. 3 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками для склопластику ТС-8/3-

250 (а) при напруженнях $\sigma_k = 19,9$ (○), 39,8 (◐), 59,7 (◑), 79,6 (◒), 99,5 (◓), 119,4 (◔) МПа, для шаруватого пластику (б) при напруженнях $\sigma_k = 6,4$ (○), 13,1 (◐), 19,65 (◑), 26,2 (◒), 32,75 (◓), 39,3 (◔) МПа, для полівінілхлоридного пластикату (в) при напруженнях $\sigma_k = 0,125$ (○), 0,25 (◐), 0,5 (◑), 0,75 (◒), 1,0 (◓) МПа та плексигласу (г) при напруженнях $\sigma_k = 11$ (○), 13,78 (◐), 17,23 (◑), 18,58 (◒), 20 (◓), 22,44 (◔), 25,51 (◕) МПа.

Результати розрахунків деформацій стаціонарної повзучості, що виконані за рівнянням (4.2), достатньо задовільно, як це видно із рис. 3, узгоджується із експериментальними даними. Найбільша похибка складає 10 % і отримана для плексигласу рис. 3, г при $\sigma = 25,5$ МПа. В цілому, у межах рівняння (4.2) враховуються особливості повзучості нелінійно-в'язкопружнопластичних матеріалів як в області сингулярності, коли при $t \rightarrow 0$ швидкість повзучості $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \infty$, так і при $t \rightarrow \infty$, коли швидкість повзучості $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$, що відповідає врахуванню ефекту затухаючої пам'яті.

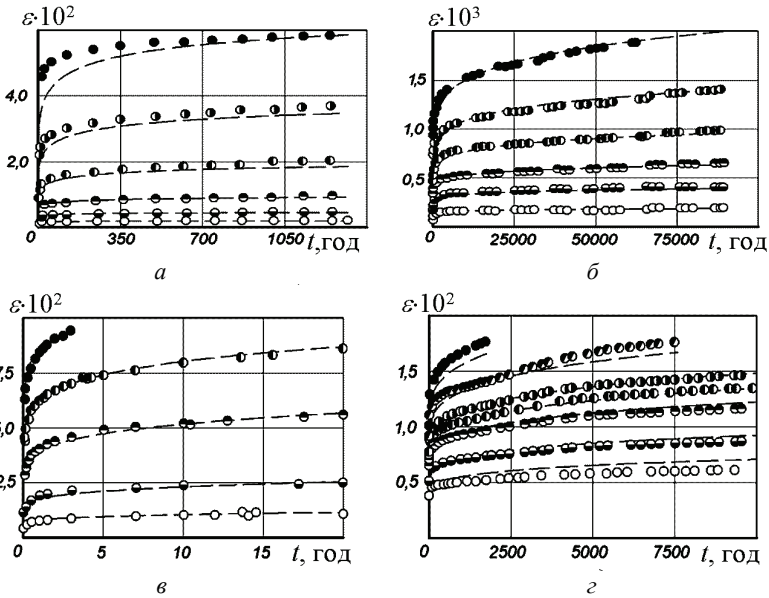


Рисунок 3 – Результати розрахунків (штрихові лінії), експериментальні дані нанесені точками: а – для склопластику ТС-8/3-250, б – для шаруватого пластику; в – для полівінілхлоридного пластикату; г – для плексигласу

5 Релаксація напружень

Найбільш обґрунтована експериментальна перевірка застосування дробово-експоненційного ядра (1.3) і параметрів ядра, знайдених із даних на повзучість, здійснюється на задачі із розрахунку релаксації напружень. В режимі релаксації напружень початкова умова навантаження $\tau = 0$ задається спів-

ВІДНОШЕННЯМ

$$\varepsilon(t) = h(t - t_1)k_1; \quad (k = 1, m), \quad (5.1)$$

де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t - t_1) = 0$ при $t - t_1 < 0$ і $h(t) = 1$ при $t - t_1 > 0$).

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов постійних деформацій, виходячи із (1.5) із урахуванням (5.1), записується у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^3 a_{i,j}(\varepsilon_1)^j \left[h(t - t_1) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right]. \quad (5.2)$$

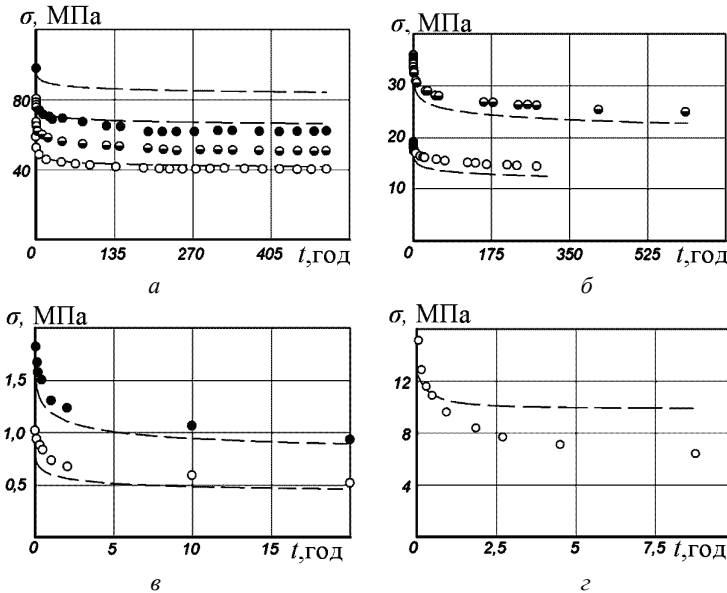


Рисунок 4 – Результати розрахунків (штрихові лінії), експериментальні дані нанесені точками: а – для склопластику ТС-8/3-250 при $\varphi = 45^\circ$; б – для шаруватого пластику; в – для полівінілхлоридного пластикату; з – для поліетилену високої щільності

В режимі релаксації напружень на підставі рівняння (5.2), розраховано та експериментально апробовано релаксацію напружень нелінійно-в'язкопружних композитів та їх компонентів для декількох рівнів постійних деформацій ε_k . Результати розрахунків наведені на рис. 4 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками для склопластику ТС-8/3-250 при $\varphi = 45^\circ$ (а) початкові напруження складали $\sigma_k = 59,7$ (○), 79,6 (⊖), 99,5 (●) МПа, для шаруватого пластику (б) початкові напруження складали $\sigma_k = 59,85$ (○), 37,85 (⊖) МПа, для полівінілхлоридного пластикату (в) початкові напру-

ження складали $\sigma_k = 0,81$ (○), $1,65$ (●) МПа та для поліетилену високої щільності (z) початкові напруження складали $\sigma_k = 15,8$ (○) МПа.

У цілому, як видно із рис. 4 результати розрахунків за побудованими визначальними рівнянням (5.2) нелінійної релаксації низки в'язкопружних матеріалів достатньо задовільно узгоджуються із експериментальними даними.

б Розрахунок релаксації напружень за умов одноступеневого деформування

Умова навантаження (1.7) для режиму однократного ступеневого деформування конкретизується у вигляді

$$\varepsilon(t) = h(t-t_1)\varepsilon_1 + h(t-t_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (6.1)$$

де ε_1 – початкові деформації, прикладені в момент часу $\tau = 0$; ε_2 – деформація прикладена в момент часу $\tau = t_1$.

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одноступеневого деформування, виходячи із (1.5) із урахуванням (6.1), записується у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^3 a_{i,j} \left(\varepsilon(t)^i - \lambda \left[(\varepsilon_1)^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right) + (\varepsilon_2)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]} \right] \right). \quad (6.2)$$

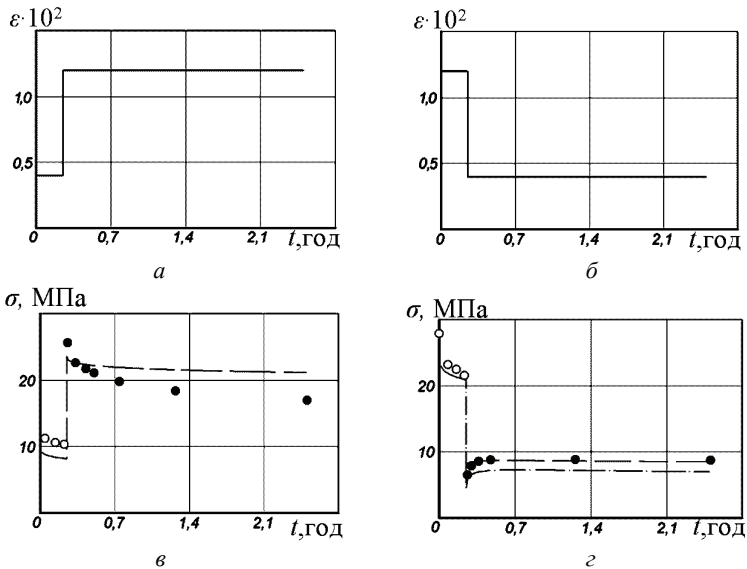


Рисунок 5 – Результати розрахунків програм навантаження

Результати розрахунків програм навантаження наведені на рис. 5, а, б штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками для плексигласу. Режим деформування плексигласу за умов одноступеневого деформування включав початкове деформування складало $\varepsilon_1 = 0,004$ (○) із посліду- ючим збільшенням деформацій в момент часу $t_1 = 0,25$ до величини $\varepsilon_2 = 0,012$ (●) та режим часткового розвантаження від деформацій $\varepsilon_1 = 0,012$ (○) із по- слідуючим частковим розвантаженням до деформацій в момент часу $t_1 = 0,25$ до величини $\varepsilon_2 = 0,004$ (●). Розрахунки здійснено із використанням значень параметрів α, β, λ , що наведені в табл. 1. Експериментальні дані взято відпо- відно із [14].

7 Розрахунок релаксації напружень за умов циклічного деформування

Умова навантаження (1.7) для режиму циклічного деформування, що за- дається програмою навантаження, а конкретизується у вигляді рис. 6 а, б, де ε_1 – початкове значення деформації на момент часу t_1 ; $\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$ – при- ріст ($\varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k$) або зменшення ($\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$) деформації в момент часу t_k ; v – кі- лькість циклів деформування; $\Delta\varepsilon_k$ – амплітуда напруження у циклі; t_0 – три- валість напівциклу навантаження.

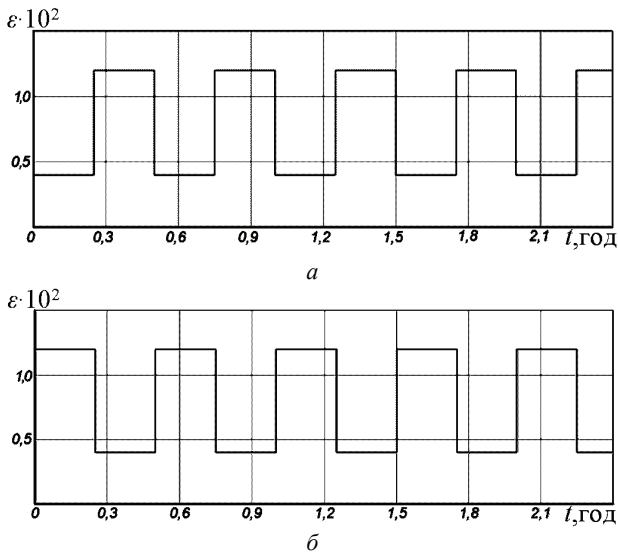


Рисунок 6 – Умова навантаження (1.7) для режиму циклічного деформування

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов циклічного деформування, виходячи із (1.5) із урахуван- ням (7.1), записується у вигляді:

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^3 a_{i,j} \left\{ \left(h(t-t_i) \varepsilon_1(0) \pm \sum_{k=1}^{2v-1} h(t-t_{k+1}) |\Delta \varepsilon_k| \right)^i - \lambda \left[\sum_{k=1}^{2v-1} (\varepsilon_k)^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_k)^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} - \right. \right. \right. \quad (7.2)$$

$$\left. \left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_{k+1})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} \right) + (\varepsilon_{2v})^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_{2v})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} \right] \right\},$$

Результати розрахунків наведені на рис. 7 для порівняння результатів розрахунків із експериментальними даними виконано для плексигласу штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками. Розрахунки здійснено із використанням значень параметрів α , β , λ , що наведені в табл. 1. Експериментальні дані взято відповідно із [14]. Величина деформацій в циклі $\varepsilon_0 = 0,008$, тривалість півциклу $t_0 = 0,25$ години, кількість циклів навантаження $v = 5$.

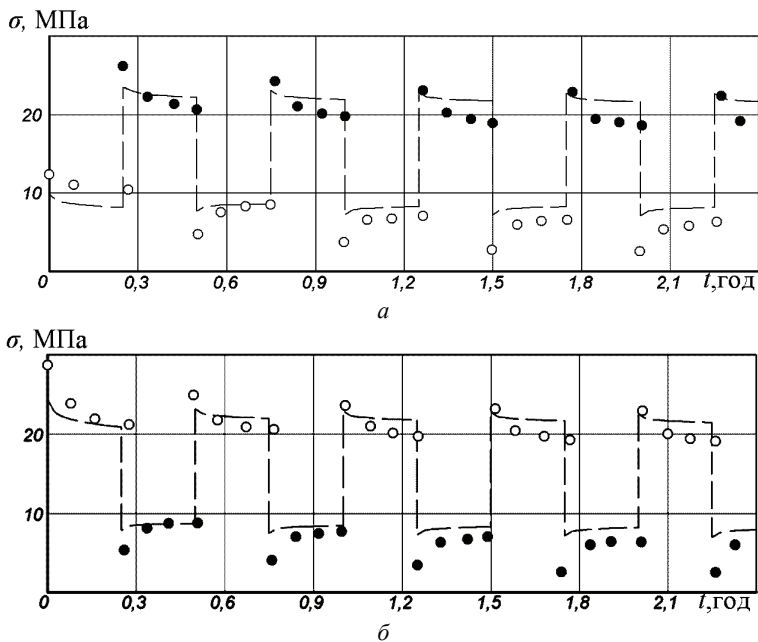


Рисунок 7 – Результати розрахунків для режиму циклічного деформування

8 Обговорення результатів

Як видно із результатів розрахунків, отримано якісне узгодження, експериментальних даних із розрахунковими, варто також відмітити, при розрахунках використано параметри ядер, визначених із експерименту на повзучість при постійних напруженнях, незважаючи на те, що сам експеримент проводився на іншому обладнанні.

В цілому, як видно з даних, представлених на рис. 3-5, 7, отримано якісне узгодження результатів розрахунку деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при різних режимах нестационарного деформування з експериментальними даними. Розрахунки виконані із використанням нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю за рахунок використання згладжуючих кубічних сплайнів у якості апроксимацій нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі, та дробово-експоненційного ядра спадковості Работнова і параметрів ядра знайдених із експериментів при постійних напруженнях.

Розраховано деформації повзучості за умов стаціонарного навантаження, релаксацію напружень за умов стаціонарного, одноступеневого та циклічного деформування. Максимальна похибка у задачах розрахунку нестационарної релаксації складала для плексигласу в режимі циклічного деформування і становить 36 %, це пов'язано із тим, що в процесі циклічного деформування, з'являються деформації після дії, що не встигають зникнути за півцикл розвантаження, ці деформації накопичуються із кожним циклом. Варто також відмітити, при розрахунках використано параметри ядер, визначених із експерименту на повзучість при постійних напруженнях, незважаючи на те, що сам експерименти на релаксацію проводились на іншому обладнанні.

Нелінійна-модель в'язкопружності дала можливість врахувати ряд механічних ефектів, які виникають в результаті нестационарного деформування. Так після часткового розвантаження на рис. 5, 2 видно, що величина напружень спочатку зростає хоча деформації залишаються постійними. Цей ефект пояснюється тим, що внаслідок різкого стискання матеріал чинить опір. Також для режиму часткового розвантаження здійснювалось порівняння результатів розрахунку виконаного за допомогою принципу суперпозиції їх на рис. 5, 2 нанесено штрих-пунктирними лініями. Як бачимо метод сумування кривих дав більше розходження між експериментальними і розрахунковими даними, похибка розрахунку складала 21%. Як видно із рис. 7 в процесі циклічного деформування, величина напружень із кожним циклом зменшується, на відміну від режиму циклічної повзучості, де деформації зростали, пояснюється тим, що відбувається зміцнення матеріалів. Даний ефект якісно враховується моделлю.

Висновки. Задача із побудови системи розв'язкових рівнянь для прогнозування деформацій повзучості та релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних конструкційних матеріалів за умов нестационарного одновісного розтягу та стиску залишається одною із найбільш актуальних в механіці твердого деформівного тіла і має велике теоретичне і прикладне значення. Успішний розв'язок цієї задачі пов'язаний із необхідністю створення надійних методів із розрахунку напружено-деформівного стану композитних матеріалів і конструкцій із них в нелінійній області довготривалого в'язкопружного деформування за умов нестационарного навантаження і прогнозування

на цій основі довготривалої міцності елементів конструкцій. Задовільне узгодження результатів розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів із експериментальними даними отримано, перш за все через використання нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю із згладжуючими кубічними сплайнами у якості апроксимацій нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі, та дробово-експоненційних функцій, що задають ядра спадковості.

Список літератури: 1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 2. Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. – 1971. – 1. – С. 74-87. 3. Брызгалин Г.И. К проверке теории наследственного возврата // Ползучесть и длительная прочность. – Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963. – С. 145-147. 4. Брызгалин Г.И. О ползучести при переменных напряжениях // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1962. – 3. – С. 73-77. 5. Golub V.P., Romanov A.V., Romanova N.V. Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension // International Applied Mechanics. – 2008. – Т. 44, 9. – Р. 459-470. 6. Суворова Ю.В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров. – 1977. – 6. – С. 976-980. 7. Суворова Ю.В., Васильев А.Е., Машинская Г.П. Исследование процессов деформирования органотекстолитов // Механика композитных материалов. – 1980. – 3. – С. 538-556. 8. Голуб В.П. Об одном методе построения определяющих уравнений в теории нелинейной ползучести // Теоретическая и прикладная механика. – 2002. – 36. – С. 23-29. 9. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. Нелинейная ползучесть вязкоупругих органических волокон при растяжении // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, 7. – С. 102-115. 10. Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. – 1971. – 3. – С. 391-397. 11. Findley W.N., Khosla G. Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain and time hardening to creep of plastics under changing loads // Journ. of Applied Physics. – 1955. – 26, 7. – P. 821-832. 12. Самарин Ю.П., Сорокин О.В. О ползучести поливинилхлоридного пластика при переменных нагрузках // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195, 2. – С. 333 – 336. 13. Крегерс А.Ф., Вилкс У.К., Лейтане М.Я. Прямая и обратная ползучесть нелинейного полимерного материала // Механика полимеров. – 1973. – 5. – С. 786-795. 14. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука, 1973. – 287 с. 15. More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E. Users guide to minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – P. 640-650.

Bibliography (transliterated): 1. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstrukcij. Moscow: Nauka, 1966. 752 Print. 2. Rabotnov Yu.N., Papernik A.H., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelinejnoj teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennyh effektov v polimernyh materialah. Mehanika polimerov. 1971. 1. 74-87 Print. 3. Bryzgalin G.I. K proverke teorii nasledstvennogo vozvrata. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost'. Novosibirsk, Izd-vo SO AN SSSR, 1963. 145-147 Print. 4. Bryzgalin G.I. O polzuchesti pri peremennyh napryazheniyah. Zhurnal prikl. mehaniki i tehn. fiziki. 1962. 3. 73-77 Print. 5. Golub V.P., Romanov A.V., Romanova N.V. Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension. International Applied Mechanics. 2008. Т. 44, 9. 459-470 Print. 6. Suvorova Yu.V. Nelinejnyye efekty pri deformirovanii nasledstvennyh sred. Mehanika polimerov. 1977. 6. 976-980 Print. 7. Suvorova Yu.V., Vasil'ev A.E., Mashinskaya G.P. Issledovanie processov deformirovaniya organotekstolitov. Mehanika kompozitnyh materialov. 1980. 3. 538-556 Print. 8. Golub V.P. Ob odnom metode postroeniya opredelyayuschih uravnenij v teorii nelinejnoj polzuchesti. Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika. 2002. 36. 23-29 Print. 9. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., Fernati P.V. Nelinejnaya polzuchest' vyazkouprugih organicheskikh volokon pri rastyazhenii. Prikl. mehanika. 2005. Vol. 41, 7. 102-115 Print. 10. Rabotnov Yu. N., Papernik A.H., Stepanychev E.I. Nelinejnaya polzuchest' stekloplastika TS8/3-250. Mehanika polimerov. 1971. 3. 391-397 Print. 11. Findley W.N., Khosla G. Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain and time hardening to creep of plastics under changing loads. Journ. of Applied Physics. 1955. 26, 7.

821-832 Print. **12.** Samarin Yu.P., Sorokin O.V. O polzuchesti polivinilhloridnogo plastikata pri pere-mennyh zagruzkah. DAN SSSR. 1970. Vol. 195, **2.** 333-336 Print. **13.** Kregers A.F., Vilks U.K., Le-jtane M.Ya. Pryamaya i obratnaya polzuchest' nelinejnogo polimernogo materiala. Mehanika polimerov. 1973. **5.** 786-795 Print. **14.** Bugakov I.I. Polzuchest' polimernyh materialov. Moscow: Nauka, 1973. 287 Print. **15.** More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E. Users guide to minipack. Argone National Laboratory Publication ANL-80-74. 1980. 640-650 Print.

Поступила (received) 06.10.2014

УДК 517.928 : 536.24

А.М. ПОГРЕБИЦКАЯ, доцент, Национальная академия природоохранного и курортного строительства, Симферополь

НАХОЖДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ТЕПЛА В ПЛАСТИНЕ ТЕПЛООВОГО РАДИАТОРА С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН ПОДХОДА

В работе представлено решение задачи о нахождении плотности теплового потока в пластине радиатора. Цель работы – применение асимптотического гибридного подхода к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые описывают процессы теплообмена в различных конструкциях. Для нахождения недостающего значения производной функции найдено замкнутое аналитическое решение.

Ключевые слова: асимптотические методы, двойной гибридный ВКБ-Галеркин метод, плотность теплового потока, пластина теплового радиатора

1 Введение. Большинство математических моделей реальных процессов имеют ряд существенных особенностей, которые не позволяют исследователям получать точные аналитические решения. Такими особенностями являются, например, нелинейности в уравнениях, переменные коэффициенты, границы сложной формы и другие. Для решения подобных задач исследователи вынуждены применять прямые численные или приближенные аналитические методы. Среди приближенных аналитических методов важное место занимают асимптотические методы возмущений с малым параметром, который естественно возникает в уравнениях или вводится искусственно [1, 2].

Как указано в ряде работ [3, 4], одним из эффективных асимптотических подходов являются гибридные методы, идея которых заключается в соединении любого асимптотического разложения (метод возмущений, ВКБ и другие) и метода Галеркина. Использование гибридного асимптотико-численного метода на базе двойного асимптотического разложения в нелинейных

© А.М. Погребницкая, 2014

уравнениях является одним из новых направлений исследования задач теплоизлучения.

Целью исследования является применение двойного гибридного подхода к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые описывают процессы теплообмена в различных конструкциях.

2 Постановка задачи. Стало общепризнанным, что отток тепла от горячего тела к холодной жидкости можно ускорить за счет расширения поверхности тела путем добавления выступающих пластин. Анализируя этот вопрос для пластины в виде кольца постоянной толщины, Чамберс и Сомерс [5] установили, что функция распределения температуры в такой пластине является решением следующей граничной задачи

$$U''(r) + \frac{\rho - 1}{(\rho - 1)r + 1} U'(r) - \beta U^4(r) = 0; \quad U(0) = 1; \quad U'(1) = 0, \quad (1)$$

где $U = T/T_i$; $r = (r - r_i)/(r_0 - r_i)$; $\rho = r_0/r_i$; $\beta = (r_0 - r_i)^2 e \sigma T_i / (k \delta)$ – безразмерный параметр; T – функция распределения температуры в пластине; T_i – температура основания пластины; r_i, r_0 – внутренний и внешний радиусы пластины соответственно; e – коэффициент эмиссии; σ – постоянная Планка; k – коэффициент теплопроводности; δ – толщина пластины.

С математической точки зрения задача сводится к отысканию функции $U(r)$, а за тем, недостающих значений $U'(0)$ для различных пар значений ρ и β , для того, что бы вычислить плотность потока тепла по формуле

$$q_W = -k dT/dr|_{r=r_i} = -[kT_i/(r_0 - r_i)] dU(0)/dr. \quad (2)$$

Задача (1) аналогична задаче рассмотренной в работах [4, 6] за исключением того, что теперь толщина пластины постоянна. Поэтому для (1) может быть применим подход двойного гибридного разложения, который подробно изложен в упомянутых работах и показал достаточно высокую точность результатов в задаче о теплоизлучении ребра трапецеидального сечения.

3 Методика двойного гибридного ВКБ-Галеркин разложения

Так как гибридный метод был эффективно применен к ряду нелинейных задач для различных значений параметра при старшей производной (как при $\varepsilon^2 < 1$, так и при $\varepsilon^2 \geq 1$), тогда рассмотрим (1) при $\varepsilon^2 = 1$.

Введем замену $a(r) = \frac{\rho - 1}{(\rho - 1)r + 1}$, $b(r) = 1$, и (1) запишется в общем виде

$$\varepsilon^2 U''(r) + a(r)U'(r) - \beta b(r)U^4(r) = 0, \quad U'(1) = 0, \quad U(0) = 1, \quad (3)$$

где ε, β – параметры, $a(r), b(r)$ – некоторые функции.

Для нахождения решения уравнения (3) функция U записывается в виде ряда по степеням параметра β

$$U(r, \beta) = U_0(r) + \beta U_1(r) + \beta^2 U_2(r) + \dots \quad (4)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра β , в результате внешнего разложения получена система линейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $U_0(r)$, $U_1(r)$, $U_2(r)$,

...

$$\beta^0: \varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0; \quad U_0(0) = 1; \quad U_0'(1) = 0; \quad (5)$$

$$\beta^1: \varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4; \quad U_1(0) = 0; \quad U_1'(1) = 0; \quad (6)$$

$$\beta^2: \varepsilon^2 U_2'' + a(r)U_2' = 4b(r)(U_0 U_1^3 + U_0^3 U_1); \quad U_2(0) = 0; \quad U_2'(1) = 0.$$

Ограничиваясь двумя слагаемыми в (4) и используя гибридный метод, ВКБ-Галеркин решение уравнения (5) находится в виде

$$U_0^H(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{E(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{E(r)}, \quad (7)$$

где

$$G_{1,2}(r) = \exp\left(\int_0^r \delta_{0,2}^* \sqrt{g(\tau)} d\tau\right); \quad E(r) = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^r a(\tau) d\tau\right);$$

$$\delta_{0,2}^* = G \pm \sqrt{\varepsilon^{-2} + G^2}; \quad G = \frac{g(0) - g(1)}{4 \int_0^1 \sqrt{g^3(x)} dx}; \quad g(r) = \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(r)}{2} - b(r).$$

Аналогично находится решение уравнения (6), то есть функция U_1^H .

$$U_1^H(r) = -\frac{G_1(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}^* - \delta_{0_1}^*)E(r)} \left(\int_0^r \frac{E(x)b(x)(U_0^H(x))^4}{\sqrt{g(x)}G_1(x)} dx + s_1 \right) +$$

$$+ \frac{G_2(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}^* - \delta_{0_1}^*)E(r)} \left(\int_0^r \frac{E(x)b(x)(U_0^H(x))^4}{\sqrt{g(x)}G_2(x)} dx + s_2 \right). \quad (8)$$

Найденные функции (7) и (8) подставляются в разложение (4) и в результате имеем

$$U^H(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{E(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{E(r)} + \beta \left(-\frac{G_1(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}^* - \delta_{0_1}^*)E(r)} (c_1^4 I_1(r) + 4c_1^3 c_2 I_2(r) + 6c_1^2 c_2^2 I_3(r) + 4c_1 c_2^3 I_4(r) + c_2^4 I_5(r) + s_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{G_2(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2}^* - \delta_{0_1}^*)E(r)} (c_1^4 I_6(r) + 4c_1^3 c_2 I_1(r) + 6c_1^2 c_2^2 I_2(r) + 4c_1 c_2^3 I_3(r) + c_2^4 I_4(r) + s_2) \right), \quad (9)$$

где

$$I_1(r) = \int_0^r f(x) \exp(3\delta_{0_1}^* h(x)) dx; \quad I_4(r) = \int_0^r f(x) \exp(3\delta_{0_2}^* h(x)) dx;$$

$$I_2(r) = \int_0^r f(x) \exp\left((2\delta_{0_1}^* + \delta_{0_2}^*)h(x)\right) dx; \quad I_5(r) = \int_0^r f(x) \exp\left((4\delta_{0_2}^* - \delta_{0_1}^*)h(x)\right) dx;$$

$$I_3(r) = \int_0^r f(x) \exp\left((\delta_{0_1}^* + 2\delta_{0_2}^*)h(x)\right) dx; \quad I_6(r) = \int_0^r f(x) \exp\left((4\delta_{0_1}^* - \delta_{0_2}^*)h(x)\right) dx;$$

$$f(x) = \frac{b(x)}{E^3(x)\sqrt{g(x)}}; \quad h(x) = \int_0^x \sqrt{g(\tau)} d\tau.$$

В решение (9) входят интегралы $I_j(r)$, $j = \overline{1,6}$, которые точно не берутся. Поэтому для их оценки используется приближенный метод, основанный на методе интегрирования по частям и описанный следующей формулой

$$\begin{aligned} \int_0^r f(x) \exp(kh(x)) dx = & + \frac{1}{k} \left[\frac{f(r)}{h'(r)} \exp(kh(r)) - \frac{f(0)}{h'(0)} \exp(kh(0)) \right] + \\ & + \frac{1}{k^2} \left[\left(\frac{f(0)}{h'(0)} \right)' \frac{\exp(kh(0))}{h'(0)} - \left(\frac{f(r)}{h'(r)} \right)' \frac{\exp(kh(r))}{h'(r)} \right] + \\ & + \frac{1}{k^3} \left[\left(\left(\frac{f(r)}{h'(r)} \right)' \frac{1}{h'(r)} \right)' \frac{\exp(kh(r))}{h'(r)} - \left(\left(\frac{f(0)}{h'(0)} \right)' \frac{1}{h'(0)} \right)' \frac{\exp(kh(0))}{h'(0)} \right] + O\left(\frac{1}{k^4}\right), \end{aligned}$$

где

$$k = 3\delta_{0_1}^*; \quad 2\delta_{0_1}^* + \delta_{0_2}^*; \quad \delta_{0_1}^* + 2\delta_{0_2}^*; \quad 3\delta_{0_2}^*; \quad 4\delta_{0_2}^* - \delta_{0_1}^*; \quad 4\delta_{0_1}^* - \delta_{0_2}^*.$$

В работе [7] доказывается ε -асимптотичность решения (9) уравнения (3).

4 Сравнение результатов. Для доказательства эффективности предложенного двойного асимптотического разложения на базе объединения метода Пуанкаре и ВКБ-Галеркин подхода уравнения (1) проведено сравнение результатов с уже существующими методами. Например, построено двойное разложение на базе объединения метода Пуанкаре и ВКБ-подхода, то есть к каждому уравнению системы (5)-(6) для задачи (1) был применен метод фазовых интегралов. Однако результаты, полученные с помощью гибридного ВКБ-Галеркин подхода, точнее результатов, полученных другими методами (табл. 1).

Для нахождения плотности потока тепла (2) найдено недостающее значение производной $U'(0)$ для различных пар параметров ρ и β .

В работах [5, 8] задача решена численно (например, в [8] методом инвариантного погружения, обозначенным T в табл. 2). Результаты, полученные двойным гибридным ВКБ-Галеркин подходом, хорошо сочетаются с результатами из [8] и представлены в табл. 2.

Таблица 1 – Относительные ошибки гибридного (ΔU^H) и ВКБ (ΔU^{WKB}) методов для различных значений параметров внешнего разложения, %.

r	$\rho = 1,5$				$\rho = 3,0$	
	$\beta = 0,4$		$\beta = 1,6$		$\beta = 0,4$	$\beta = 1,6$
	ΔU^H	ΔU^{WKB}	ΔU^H	ΔU^{WKB}	ΔU^H	ΔU^H
0,1	0,951	2,513	0,158	8,613	0,839	1,585
0,2	1,561	4,664	0,509	15,617	2,088	3,313
0,4	2,238	7,860	1,333	25,942	3,486	4,123
0,6	2,889	9,731	2,216	32,426	4,861	7,023
0,8	3,329	10,524	2,799	35,809	3,126	5,603
1,0	3,545	10,635	3,023	36,726	1,146	1,617

Таблица 2 – Недостающее значение производной.

β	$dU(0)/dr$ для $\rho = 1,5$			$dU(0)/dr$ для $\rho = 3,0$		
	T	U^H	U^{WKB}	T	U^H	U^{WKB}
0,4	-0,3487	-0,3485	-0,3462	-0,5085	-0,5083	-0,5063
0,8	-0,5587	-0,5585	-0,5497	-0,7782	-0,7781	-0,7758
1,2	-0,7158	-0,7157	-0,5911	-0,9694	-0,9692	-0,8171
1,6	-0,8445	-0,8443	-0,7134	-1,1212	-1,1211	-1,0097

5 Выводы. В результате сравнительного анализа при увеличении параметра β было установлено, что наибольшую погрешность результатов по сравнению с численным методом дает разложение на базе объединения метода Пуанкаре и ВКБ-подхода. Результаты двойного гибридного ВКБ-Галеркин решения были существенно близки к численным (табл. 1). Также найдено недостающее значение производной функции для дальнейших вычислений плотности потока тепла.

Список литературы: 1. *Samoilenko V. H.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / *V. H. Samoilenko, Yu. I. Samoilenko* // *Ukrainian Mathematical Journal*. – 2007. – № 1. – С. 126-139. 2. *Старун І.І.* Лінійні сингулярно збудені системи / *І.І. Старун, М.І. Шкіль* // *Український математичний журнал*. – 2002. – № 12. – С. 1688-1693. 3. *Грицак В. З.* Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування / *В. З. Грицак*. – Запоріжжя : ЗНУ, 2009. – 226 с. 4. *Gristchak V. Z.* On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems / *V. Z. Gristchak, A. M. Pogrebetskaya* // *Technische Mechanik*. – 2011. – V. 31, № 2. – С. 112–120. 5. *Chambrs R.L.* Radiation in efficiency for one-dimensional heat flow in a circular fin / *R.L. Chambrs, E.V. Somers* // *Heat Transfer*. – 1999. – V. 81, November. – С. 327–329. 6. *Грицак В. З.* Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеїдальної форми / *В. З. Грицак, Г. М. Погребіцька* // *Математичні методи та фізико-механічні поля*. – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 217–223. 7. *Погребіцька А. М.* Об оценке точности аналитического гибридного решения задачи теплопереноса / *А. М. Погребіцька, С. И. Смирнова* // *Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия: Физико-математические науки*. – 2010. – Т. 23 (62), № 2. – С. 113–123. 8. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / *Ц. На*. – М. : Мир, 1982. – 294 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Samoilenko V. H.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. *V. H. Samoilenko,*

Yu. I. Samoilenko. Ukrainian Mathematical Journal. 2007. № 1. 126-139. Print. **2.** Starun I.I. Linijni synhulyarno zbureni systemy. I.I. Starun, M.I. Shkil'. Ukrayins'kyj matematychnyj zhurnal. 2002. № 12. 1688-1693. Print. **3.** Hryshchak V. Z. Hibrydni asymptotychni metody ta tekhnika yikh zastosuvannya. V. Z. Hryshchak. Zaporizhzhya: ZNU, 2009. 226 Print. **4.** Gristchak V. Z. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. V. Z. Gristchak, A. M. Pogrebickaya. Technische Mechanik. 2011. V. 31, № 2. 112-120 Print. **5.** Chambrs R.L. Radiation in efficiency for one-dimensional heat flow in a circular fin. R.L. Chambrs, E.V. Somers. Heat Transfer. 1999. V. 81, November. 327-329 Print. **6.** Hryshchak V. Z. Podvijnyj asymptotychnyj rozklad u problemi promenevoho teploobminu kil'cevykh reber trapeceyidal'noyi formy. V. Z. Hryshchak, H. M. Pohrebyc'ka. Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya. 2009. Vol. 52, № 3. 217-223 Print. **7.** Pogrebickaya A. M. Ob ocenke tochnosti analiticheskogo gibridnogo resheniya zadachi teploperenosa. A. M. Pogrebickaya, S. I. Smirnova. Uchenye zapiski Tavricheskogo nacional'nogo universiteta im. V. I. Vernadskogo. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2010. Vol. 23 (62), № 2. 113-123 Print. **8.** Na C. Vychislitel'nye metody resheniya prikladnyh granichnyh zadach. C. Na. Moscow: Mir, 1982. 294 Print.

Поступила (received) 05.10.2014

УДК 531.3

Б.В. УСПЕНСКИЙ, аспирант, НТУ «ХПИ»;
К.В. АВРАМОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИЛОВЫХ ПЕРЕДАЧ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ШОУ-ПЬЕРА

В статье предложена модификация метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Такая модификация позволяет вдвое снизить размерность системы обыкновенных уравнений, используемой для расчета форм, увеличивая таким образом точность и быстродействие метода. Рассмотрены механические системы с двумя степенями свободы, которые описывают колебания элементов силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, формы Пьера-Шоу, кусочно-линейная система, крутильные колебания, свободные колебания, силовая передача.

Введение. Технические системы часто включают в себя элементы, которые односторонне контактируют между собой. Такие системы моделируют разнообразные технологические процессы [1]. Кусочно-линейные системы описывают динамику механических систем с зазорами, шлицевыми соединениями, упругими муфтами, зубчатыми передачами. Такие системы могут совмещать крутильные, продольные и изгибные колебания [2, 3]. Поэтому мно-

© Б. В. Успенский, К. В. Аврамов, 2014

го было предпринято усилий для исследования кусочно-линейных систем [4, 5]. Нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах рассматриваются в работах [6, 7]. Общая теория нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера описана в работах [8, 9]. Нелинейные нормальные формы Каудерера-Розенберга подробно рассмотрены в монографии [10]. Обзор теоретических исследований по нелинейным формам представлен в статье [11], а обзор по прикладным исследованиям содержится в [12].

В этой статье предлагается новый вариант метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования кусочно-линейных систем. Основой для разработки этого алгоритма была статья [7]. В результате подхода, предложенного в настоящей статье, разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений для определения нелинейной нормальной формы в два раза меньше по сравнению с системой, предложенной в [7].

1 Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы и трилинейной упругой характеристикой:

$$M \ddot{z} + F(z) = 0; \quad (1)$$

$$F(z) = \begin{cases} K_1 z; & \Delta_2 \leq h^T z \leq \Delta_3; \\ K_2 z - b_2; & h^T z < \Delta_2; \\ K_3 z - b_3; & \Delta_3 < h^T z, \end{cases} \quad (2)$$

где z – вектор обобщенных координат системы размерности N ; $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$; h – вектор-столбец размерности N ; K_1, K_2, K_3 – матрицы размерности $N \times N$; b_2, b_3 – векторы-столбцы, обеспечивающие непрерывность трилинейной упругой характеристики; $\Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$.

Теперь, следуя [6, 7], перейдем к главным координатам, соответствующим линейному участку системы $\Delta_2 \leq h^T z \leq \Delta_3$. Для этого введем замену переменных:

$$z = Q \eta, \quad (3)$$

где Q – матрица собственных векторов матрицы $M^{-1}K_1$. Относительно координат η система (1) приобретает следующий вид:

$$\ddot{\eta} + \Lambda_1 \eta = f(\eta), \quad (4)$$

где $\Lambda_1 = Q^{-1}M^{-1}K_1Q = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ – диагональная матрица, состоящая из квадратов собственных частот. Кусочно-линейная вектор-функция $f(\eta) = (f_1, \dots, f_N)$ принимает следующий вид:

$$f(\eta) = \begin{cases} 0, & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3; \\ Z^{(2)} \eta + Q^{-1}M^{-1}b_2, & h^T Q \eta < \Delta_2; \\ Z^{(3)} \eta + Q^{-1}M^{-1}b_3, & \Delta_3 < h^T Q \eta, \end{cases} \quad (5)$$

где $Z^{(2)} = \Lambda_1 - Q^{-1}M^{-1}K_2Q$; $Z^{(3)} = \Lambda_1 - Q^{-1}M^{-1}K_3Q$; $Z^{(2)} = \{z_{ij}^{(2)}\}$;
 $Z^{(3)} = \{z_{ij}^{(3)}\}$.

2 Построение ННФ Шоу-Пьера. Следуя работам [8, 9], введем ведущие координаты $(\eta_i, \dot{\eta}_i)$. Для этих координат воспользуемся следующей заменой переменных:

$$\eta_i(t) = a(t) \cos \varphi(t); \quad \dot{\eta}_i(t) = -\omega_i a(t) \sin \varphi(t). \quad (6)$$

Тогда ведомые координаты выражаются через уравнения, описывающие нелинейную нормальную форму:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j(a, \varphi) &= P_j(a, \varphi); \\ \eta_j(a, \varphi) &= R_j(a, \varphi); \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Движения на нелинейной нормальной форме описываются следующей динамической системой:

$$\dot{a} = -\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi; \quad \dot{\varphi} = \omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos \varphi. \quad (8)$$

Функции $P_j(a, \varphi)$ из (7) разложим по следующей системе базисных функций:

$$P_j(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_j^{(l,m)} T_{l,m}(a, \varphi), \quad (9)$$

где $T_{l,m}(a, \varphi) = A_l(a) \cos(m-1)\varphi$; $A_l(a)$, $l = 1, \dots, N_a$ – система базисных функций; $C_j^{(l,m)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подчеркнем, что в работах [7-9] производилось разложение функции $Q_j(a, \varphi)$ по системе ортонормированных функций. В предлагаемом здесь подходе это разложение не используется, что сокращает в два раза размерность разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений. В этом состоит основное преимущество предлагаемого здесь метода.

Используя соотношения (7,9) и правила дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} (A'_l \cos[(m-1)\varphi] \cdot \dot{a} - A_l(m-1) \sin[(m-1)\varphi] \cdot \dot{\varphi}); \\ \ddot{\eta}_j &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \left(\cos[(m-1)\varphi] [A''_l \dot{a}^2 + A'_l \ddot{a} - A_l(m-1)^2 \dot{\varphi}^2] - \right. \\ &\quad \left. - \sin[(m-1)\varphi] [2(m-1)A'_l \dot{a} \dot{\varphi} + A_l \ddot{\varphi}] \right); \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения первых производных, входящих в соотношения (10), использовались уравнения (8). Для расчета вторых производных использовались следующие соотношения:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_i} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \dot{\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \right] \sin \varphi + f_i \cos \varphi \right); \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_i a} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - f_i \frac{\dot{a}}{a} \right] \cos \varphi - f_i \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \right). \quad (12)$$

Отметим, что частные производные от функции f_i из (8) определяются так:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a} = \begin{cases} 0; & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a}; & h^T Q \eta < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a}; & \Delta_3 < h^T Q \eta; \end{cases} \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0; & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi}; & h^T Q \eta < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi}; & \Delta_3 < h^T Q \eta, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial a} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_k^{l,m} A_l^m \cos(m-1)\varphi; & k \neq i; \\ \cos \varphi; & k = i; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi} = \begin{cases} -\sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_k^{l,m} (m-1) A_l^m \sin(m-1)\varphi; & k \neq i; \\ -a \sin \varphi; & k = i. \end{cases}$$

Основными неизвестными нелинейной нормальной формы (9) являются коэффициенты $C_j^{(l,m)}$. Для их расчета к динамической системе (4) применим метод Галеркина, который выражается так:

$$\int_{a_{1,0}}^{a_{2,0}} \int_0^{2\pi} \left\{ \ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j - f_j(\eta) \right\} T_{l,m} da d\varphi = 0;$$

$$j = 1, \dots, N; j \neq i;$$

$$l = 1, \dots, N_a; m = 1, \dots, N_\varphi. \quad (14)$$

В уравнения (14) вместо вторых производных вводят соотношения (10, 11, 12).

Система (14) представляет собой систему $(N-1)N_a N_\varphi$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $(N-1)N_a N_\varphi$ коэффициентов $C_j^{l,m}$. Если эти коэффициенты рассчитаны, то нелинейная нормальная форма (9) приближенно определена. После определения нелинейной нормальной формы исследуется динамика на ней. Динамика на форме описывается системой (8).

Для численного решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона-Рафсона. Интегрирование в (14)

осуществляется по области $a \in [0; a_0]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Область интегрирования $a \in [0; a_0]$ разбивается на N_s участков $[a_j; a_{j+1}]$; $j=1, \dots, N_s$; $a_1=0$; $a_{N_s+1}=a_0$. На каждом участке строится своя система ортогональных базисных функций $A_l, l=1, \dots, N_a$. Следуя [7-9], на каждом участке воспользуемся линейными базисными функциями:

$$A_1(a) = \frac{a - a_j}{a_{j+1} - a_j}; \quad A_2 = \frac{a_{j+1} - a}{a_{j+1} - a_j}.$$

3 Численный анализ механических систем с конечным числом степеней свободы. С помощью нелинейных нормальных форм исследуем крутильные колебания силовых передач двигателей внутреннего сгорания с противоположно движущимися поршнями. Модели таких систем рассмотрены в работах [13-15]. Крутильные колебания опишем системой с кусочно-линейной упругой характеристикой, представленной на рис. 1.

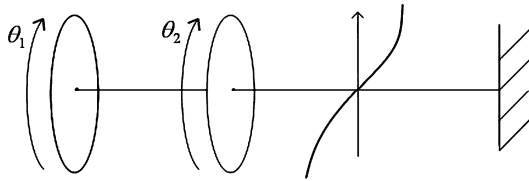


Рисунок 1 – Механическая система

Эта система описывается следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_1(\theta_2 - \theta_1) &= 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c_1(\theta_2 - \theta_1) + f(\theta_2) &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_1 \theta_2, & \theta_2 < \Delta; \\ c_2 \theta_2 - \Delta(c_2 - c_1), & \theta_2 \geq \Delta, \end{cases} \quad (16)$$

где θ_1, θ_2 – обобщенные координаты, описывающие колебания двух коленчатых валов двигателя; c_1 – жесткость зубчатой передачи между коленчатыми валами. Билинейная упругая характеристика $f(\theta_2)$ описывает нелинейную упругую муфту.

Численный анализ проводился для следующих значений параметров системы:

$$c_1 = 300 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \Delta = 0,00104 \text{ рад}; \quad I_1 = 0,3 \text{ кг/м}^2; \quad I_2 = 0,45 \text{ кг/м}^2. \quad (17)$$

Собственные частоты линейных колебаний системы с малыми амплитудами таковы: $\omega_1 = 577,350 \text{ рад/с}$; $\omega_2 = 1414,214 \text{ рад/с}$.

Проводились расчеты нелинейной нормальной формы с помощью под-

хода представленного выше. Результаты расчетов для $c_2 = 0,5 c_1$ приводятся на рис. 2. На рис. 2, *а* представлена нелинейная нормальная форма в безразмерном пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Из этого рисунка следует, что нелинейная нормальная форма достаточно близка к плоскости. Напомним, что плоскостью является нормальная форма линейной системы. Для исследования отличия нелинейной нормальной формы (рис. 2, *а*) от плоскости строились линии уровня. Они представлены на рис. 2, *б*. Как видно из этого рисунка, линии уровня отличаются от прямых, что свидетельствует о влиянии нелинейности на вид нелинейной нормальной формы.

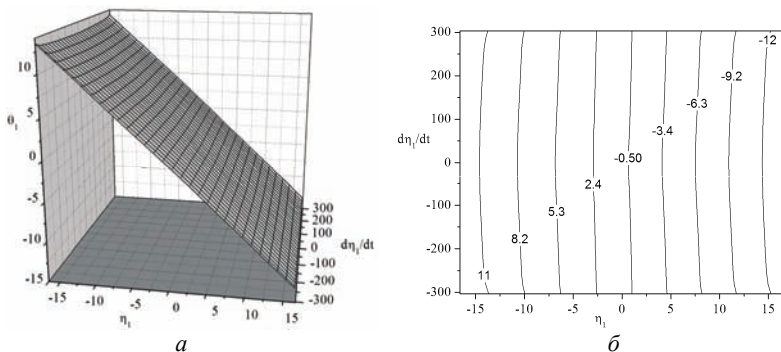


Рисунок 2 – Нелинейная нормальная форма для случая $c_2 = 0,5 c_1$; *а* – поверхность в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$, *б* – линии уровня этой поверхности

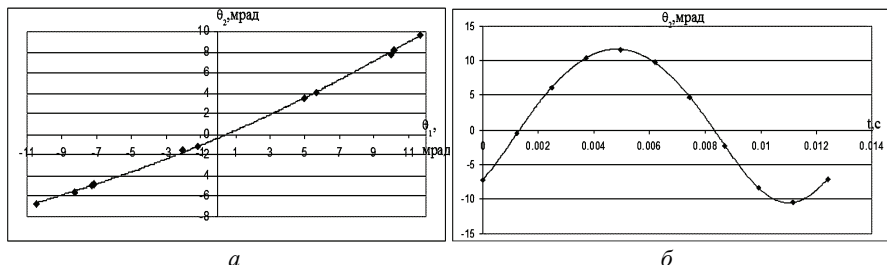


Рисунок 3 – Нелинейная нормальная форма; *а* – форма представлена в конфигурационном пространстве; *б* – изменение координаты θ_2 с течением времени

Полученная нелинейная нормальная форма перестраивается в конфигурационном пространстве [11] обобщенных координат системы (15). Результаты расчетов представляются сплошной линией на рис. 3, *а*. Итак, исследуемая нелинейная нормальная форма также является формой Каудерера-Розенберга, так как ее можно представить в виде однозначной функции $\theta_2(\theta_1)$. Отметим некоторые свойства нормальной формы Каудерера-Розенберга. Во-первых, эта нормальная форма не проходит через точку $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Во-

вторых, эта нормальная форма удовлетворяет соотношению: $|\max \theta_1| \neq |\min \theta_1|$. Оба эти свойства объясняются несимметричностью билинейной упругой характеристики рассматриваемой динамической системы.

Для подтверждения правильности расчетов нелинейной нормальной формы проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, принадлежащих нелинейной нормальной форме. Результаты расчетов представлены на рис. 3, а точками. Близость результатов, полученных различными методами, свидетельствует, что нелинейная нормальная форма получена правильно. На рис. 3, б сплошной линией представлены движения системы $\theta_1(t)$ на нелинейной нормальной форме, а точками показаны результаты прямого численного интегрирования системы (15) из начальных условий, соответствующих нелинейной нормальной форме. Колебания, полученные из нелинейной нормальной формы и результаты прямого численного интегрирования системы (15) близки.

Как следует из рис. 2, нелинейная нормальная форма билинейной системы близка к плоскости в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Подчеркнем, что эта нелинейная нормальная форма значительно больше отклоняется от плоскости, если ее изобразить в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_1)$. Эта поверхность изображена на рис. 4, а. На рис. 4, б показаны линии уровня. В этом случае они значительно отличаются от прямых.

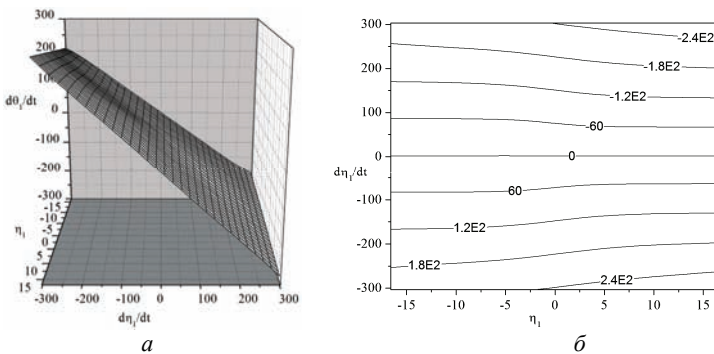


Рисунок 4 – Нелинейная нормальная форма в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_1)$

Нелинейные нормальные формы рассчитывались для разных значений амплитуд колебаний a_0 . Для каждой амплитуды определялась частота движений на нелинейной нормальной форме Ω_1 . Результаты такого расчета представлены на скелетной кривой (рис. 5).

Теперь рассмотрим нелинейные нормальные формы крутильных колебаний механической системы (15) с трилинейной упругой характеристикой, которая имеет следующий вид:

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_2\theta_2 + \Delta(c_2 - c_1), & \theta_2 \leq -\Delta; \\ c_1\theta_2, & -\Delta < \theta_2 < \Delta; \\ c_2\theta_2 - \Delta(c_2 - c_1), & \theta_2 \geq \Delta. \end{cases} \quad (18)$$

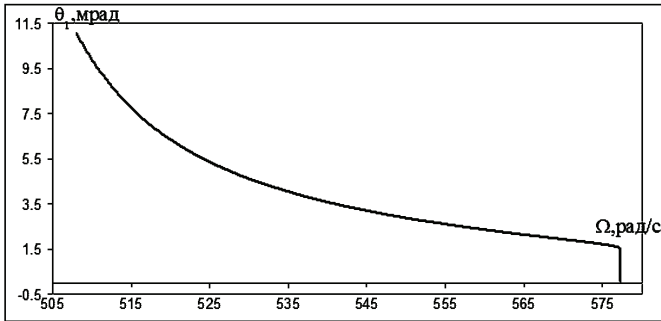


Рисунок 5 – Скелетная кривая колебаний θ_1

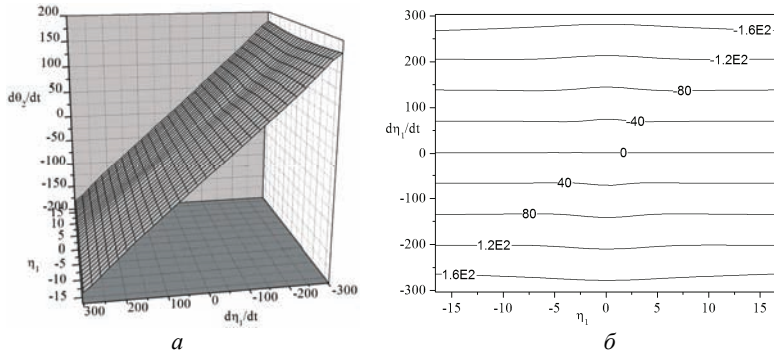


Рисунок 6 – Нелинейная нормальная форма системы с трилинейной упругой характеристикой

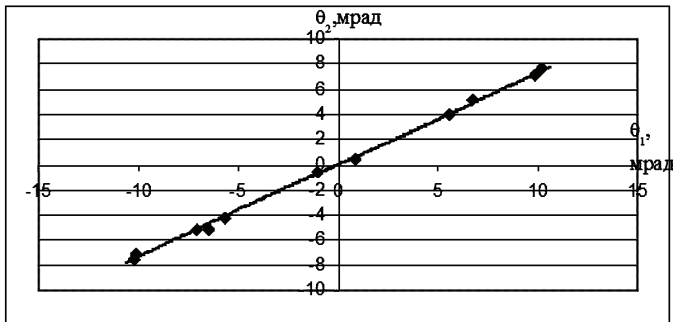


Рисунок 7 – Нелинейная нормальная форма Каудерера-Розенберга

Рассмотрим нелинейную нормальную форму системы с нелинейностью (18) для параметров (17) при $c_2 = 0,7 c_1$. Нелинейная нормальная форма этой системы в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_2)$ представлена на рис. 6, а. На рис. 6, б показаны линии уровня этой поверхности. Полученная нелинейная нормальная форма близка к плоскости. На рис. 7 показана эта же нелинейная нормальная форма в конфигурационном пространстве (θ_1, θ_2) . Итак, нелинейная нормальная форма Каудерера-Розенберга $\theta_2(\theta_1)$ проходит через начало координат. Более того, она является симметричной относительно начала координат. Все эти свойства нелинейной нормальной формы являются следствием симметричности тринейной упругой характеристики. Для проверки правильности расчета нелинейной нормальной формы (рис. 7) проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, которые находятся на нелинейной нормальной форме. Результаты прямого численного интегрирования представлены точками на рис. 7. Близость результатов, полученных двумя методами, свидетельствует о правильности проведенных расчетов.

Выводы. В статье предложен альтернативный работам [6, 8] подход к расчету нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера в кусочно-линейной системе. В предлагаемом подходе разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений в два раза меньше аналогичной системы, рассмотренной в статье [7].

Показано, что в модальных координатах одного из линейных участков нелинейная нормальная форма близка к плоскости. Она может существенно отличаться от плоскости, если ее перестроить в пространстве, в которое будут входить как модальные координаты одного линейного участка, так и обобщенные скорости исходной механической системы.

Из результатов численного интегрирования следует, что нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах могут быть представлены в виде модальных линий в конфигурационном пространстве. Эти нелинейные нормальные формы являются формами Каудерера-Розенберга.

Список литературы: 1. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Мухлин. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с. 2. Whiston G.S. Impacting under harmonic excitation / G.S. Whiston // Journal of Sound and Vibration. – 1979. – № 67. – P. 179-186. 3. Sakai T. Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox / T. Sakai, Y. Doi, K. Yamamoto, T. Ogasawara, M. Narita // Society of Automotive Engineers. – 1981. – Paper № 810773. – P. 1–10. 4. Bishop R.S. Impact oscillators / R.S. Bishop // Philosophical Transactions of the Royal Society. – 1994. – № A347. – P. 347-351. 5. Ostrovsky L.A. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator / L.A. Ostrovsky, I.M. Starobinets // Chaos. – 1995. – № 5 (3). – P. 496-500. 6. Chen S.L. Normal modes for piecewise linear vibratory systems / S.L. Chen, S.W. Shaw // Nonlinear Dynamics. – 1996. – № 10. – P. 135-164. 7. Jiang D. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems / D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – № 272. – P. 869-891. 8. Shaw S.W. Normal modes for non-linear vibratory systems / S.W. Shaw, C. Pierre // Journal of Sound and Vibration. – 1993. – № 164. – P. 85-124. 9. Pesheck E. A new Galerkin-based approach for accurate nonlinear normal modes through invariant manifolds /

E. Pesheck, C. Pierre, S.W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – № 249. – P. 971-993. **10.** *Vakakis A.* Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / *A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin.* – New-York: Wiley, 1996. – 552 p. **11.** *Mikhlin Yu.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / *Yu. Mikhlin, K.V. Avramov* // Applied Mechanics Reviews. – 2010. – № 63. – P. 4-20. **12.** *Avramov K. V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems / *K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin* // Applied Mechanics Reviews (in press). **13.** *Avramov K.V.* Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics / *K.V. Avramov, V.N. Karaban* // International Applied Mechanics. – 1997. – Vol. 33 (7). – P. 584-588. **14.** *Avramov K.V.* Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces / *K.V. Avramov* // International Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 38 (9). – P. 1151-1156. **15.** *Avramov K.V.* Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics / *K.V. Avramov, A.S. Belomytsev, V.N. Karaban* // International Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 30 (5). – P. 396-402.

Bibliography (transliterated): **1.** Avramov K.V. Nelinejnaya dinamika uprugih sistem. Vol. 1. Modeli, metody, yavleniya. K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin. Moscow, Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haticheskaya dinamika», Institut komp'yuternyh issledovanij, 2010. 704 Print. **2.** Whiston G.S. Impacting under harmonic excitation. G.S. Whiston. Journal of Sound and Vibration. 1979. № 67. 179-186 Print. **3.** Sakai T. Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox. T. Sakai, Y. Doi, K. Yamamoto, T. Ogasawara, M. Narita. Society of Automotive Engineers. 1981. Paper № 810773. 1–10 Print. **4.** Bishop R.S. Impact oscillators. R.S. Bishop. Philosophical Transactions of the Royal Society. 1994. № A347. 347-351 Print. **5.** Ostrovsky L.A. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator. L.A. Ostrovsky, I.M. Starobinets. Chaos. 1995. № 5 (3). 496-500 Print. **6.** Chen S.L. Normal modes for piecewise linear vibratory systems. S.L. Chen, S.W. Shaw. Nonlinear Dynamics. 1996. № 10. 135-164 Print. **7.** Jiang D. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw. Journal of Sound and Vibration. 2004. № 272. 869-891 Print. **8.** Shaw S.W. Normal modes for non-linear vibratory systems. S.W. Shaw, C. Pierre. Journal of Sound and Vibration. 1993. № 164. 85-124 Print. **9.** Pesheck E. A new Galerkin-based approach for accurate nonlinear normal modes through invariant manifolds. E. Pesheck, C. Pierre, S.W. Shaw. Journal of Sound and Vibration. 2002. № 249. 971-993 Print. **10.** Vakakis A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin. New-York: Wiley, 1996. 552 Print. **11.** Mikhlin Yu. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. Yu. Mikhlin, K.V. Avramov. Applied Mechanics Reviews. 2010. № 63. 4-20 Print. **12.** Avramov K. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin. Applied Mechanics Reviews (in press). **13.** Avramov K.V. Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics. K.V. Avramov, V.N. Karaban. International Applied Mechanics. 1997. Vol. 33 (7). 584-588 Print. **14.** Avramov K.V. Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces. K.V. Avramov. International Applied Mechanics. 2002. Vol. 38 (9). 1151-1156 Print. **15.** Avramov K.V. Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics. K.V. Avramov, A.S. Belomytsev, V.N. Karaban. International Applied Mechanics. 1994. Vol. 30 (5). 396-402 Print.

Поступила (received) 19.10.2014

Р.А. ШЕВЧЕНКО, студент, НТУ «ХПИ»;

А.Г. АНДРЕЕВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ПРОФИЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ ПРИ ОСЕВЫХ НАГРУЗКАХ

Статья посвящена проблеме проектирования профильных соединений с натягом и выбору рациональных геометрических параметров сопрягаемых деталей, обеспечивающих надежное соединение с соблюдением условий прочности. Использована программа, интегрированная с ПК ANSYS, которая позволяет проводить анализ соединений с натягом валов и втулок разных форм под действием осевых нагрузок. Благодаря простоте своего графического интерфейса для проведения анализа пользователю достаточно последовательно перейти от пункта к пункту, заполняя нужные параметры.

Ключевые слова: профильные соединения, натяг, программа.

Вступление. Данная работа посвящена актуальной технической проблеме проектирования профильных соединений с натягом. Выбор рациональных геометрических параметров сопрягаемых деталей, обеспечивающих надежное соединение с соблюдением условий прочности, предполагает построение адекватной расчетной схемы и выполнение многовариантных расчетов, что, в свою очередь, требует автоматизации подготовки исходных моделей и обработки результатов. Целью настоящей статьи является разработка программы для компьютерного моделирования соединений с натягом валов круглой и шестигранной формы, круглых и квадратных втулок при осевых нагрузках.

Постановка задачи. При рассмотрении соединения с натягом вала 1 с втулкой 2 (рис. 1), когда вал испытывает внешнее осевое давление P , мы полагаем, что в сечении Z_B вал имеет возможность смещения не только в направлении Z , то есть U_{ZB} , но и в радиальном направлении, то есть V_{RB} , в то же время реакция втулки предполагает отсутствие смещения в осевом направлении в сечении A , то есть $U_{ZA} = 0$, но возможность перемещения в этом сечении в радиальном направлении, то есть $V_{RA} = 0$. В связи с этим задача решается в объемной постановке.

В работе проводится компьютерное моделирование соединений с натягом следующих деталей: круглого и шестигранного валов, круглых и квадратных втулок. Целью является демонстрация программных средств, благодаря которым пользователь имеет возможность проводить расчет, не прибегая к углубленным знаниям ANSYS для решения задач подобного рода.

© Р.А. Шевченко, А. Г. Андреев, 2014

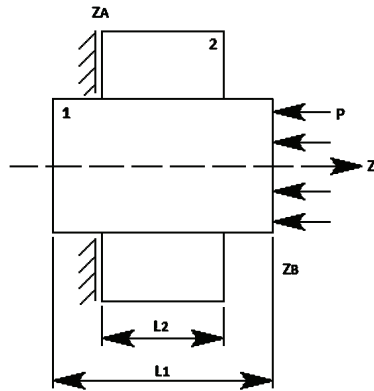


Рисунок 1 – Расчетная схема

Для проведения инженерного анализа с помощью программы пользователю необходимо ввести параметры, которые удовлетворяют основным ее требованиям:

- геометрические величины с учетом натяга для заданного варианта сборки;
- нужный материал из предлагаемого списка материалов;
- необходимую величину осевого давления (если необходимо решить задачу о распрессовочной нагрузке в соединении).

Теоретические сведения. Поставленная задача моделировалась интегрированными средствами программы и ANSYS. Для получения исходной геометрии и разбиения ее на конечно – элементную сетку применялся стандартный конечный элемент ПК ANSYS–SOLID185–трехмерный восьмиузловой, четырехугольный, прочностной твердотельный элемент, имеющий три степени свободы в каждом узле. Реализация контактной деформированной поверхности требует создания на этой поверхности контактных элементов CONTA172 и целевых элементов TARGE169, отвечающих первым. Контактная задача в большинстве случаев моделируется одним из пунктов меню ANSYS–ContactPair. Для ее реализации необходимо указать контактируемые поверхности и внести определенные настройки в опциях предоставленной операции. Всю дальнейшую работу по созданию контактных конечных элементов (CONTA172 и TARGE169) и задание необходимых констант ANSYS берет на себя. Решение задачи МКЭ приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\},$$

где $[K]$ – матрица жесткости тела, состоящая из матриц жесткости конечных элементов, $\{U\}$ – вектор столбец узловых перемещений, $\{F\}$ – вектор приведенной внешней нагрузки.

Типы материалов, применяемых для моделирования валов и втулок в этой работе, приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Характеристики материалов

Название физического параметра	Сталь 40Х	Медь М1Ф
Модуль Юнга E , МПа	$2,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона ν	0,3	0,35
Плотность ρ , кг/м ³	7800	8920
Коэффициент теплового расширения α , град. ⁻¹	$11,7 \cdot 10^{-6}$	$16,5 \cdot 10^{-6}$
Предел текучести σ_T , МПа	785	300
Предел прочности σ_B , МПа	980	400
Коэффициент трения μ	0,15	0,18

При разработке расчетных схем использованы варианты моделей соединений с натягом, изображенные на рис. 2-4 и в табл. 2.

Таблица 2 – Геометрические размеры соединений с натягом

Название геометрического параметра	Значение, мм
Радиус круглого отверстия r_0	62
Внешний радиус круглой втулки r_D	110
Периметр зоны контакта S	390
Внешний периметр втулки S_1	691
Длина стороны шестигранника m_1	65
Радиус криволинейного квадрата (втулки) r'_0	30
Величина прогиба криволинейного квадрата (втулки) f	5
Длина изогнутой стороны криволинейного квадрата (втулки) n	63
Величина натяга Δ	0,12
Осевой размер вала L_1	30
Осевой размер втулки L_2	20

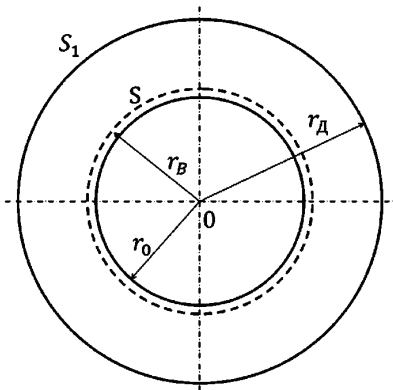


Рисунок 2 – Вариант: круглый вал, круглая втулка

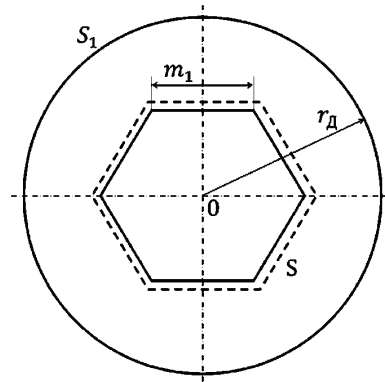


Рисунок 3 – Вариант: шестигранный вал, круглая втулка

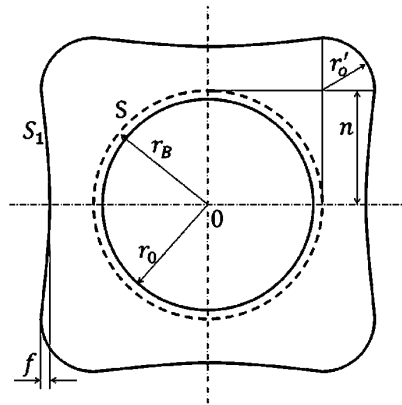


Рисунок 4 – Вариант: круглый вал, квадратная втулка

На рис. 5-7 приведены варианты соединений с натягом, смоделированные с помощью программы в трехмерной постановке.

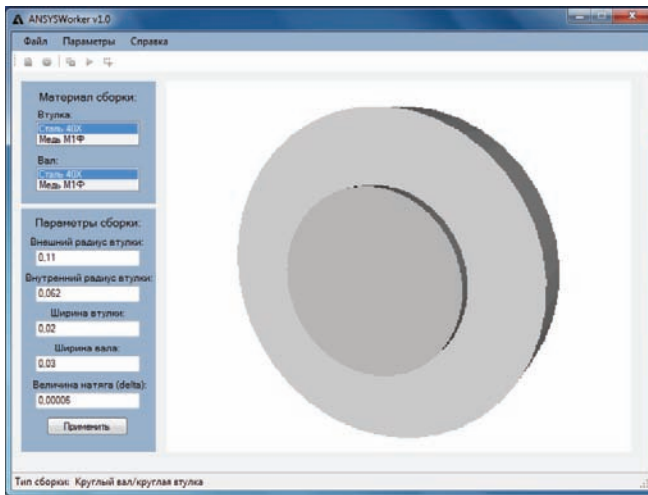


Рисунок 5 – Вариант: круглый вал, круглая втулка

Описание информационной системы. Программа, предложенная в данной работе, проектировалась на языке программирования C# с использованием графической библиотеки OpenGL. Основным алгоритмом выполнения анализа является редактируемый APDL – макрос. Программа изначально работает с макросом, редактируя его содержимое. Впоследствии, после всех проведенных действий, программа передает макрос расчетному ядру ANSYS, тот в свою очередь выполняет расчетные действия и экспортирует получен-

ный результат в соответствующие файлы. После того, как итоговые файлы будут получены и сохранены, программа имеет возможность визуализировать содержащиеся в них результаты.

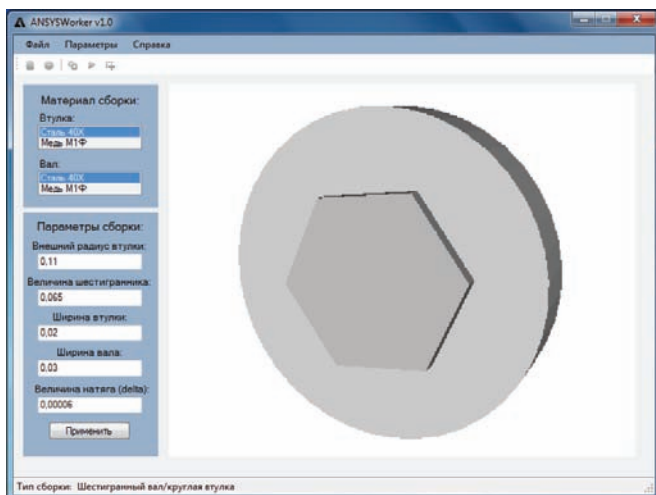


Рисунок 6 – Вариант: шестигранный вал, круглая втулка

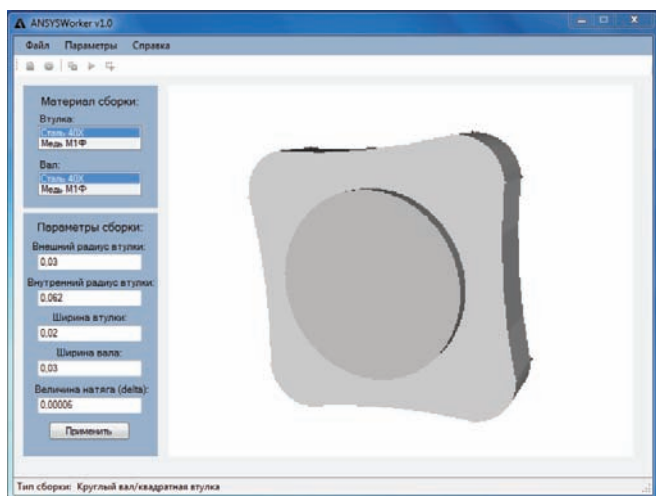


Рисунок 7 – Вариант: круглый вал, квадратная втулка

За предоставление вышеописанных действий отвечают два основных модуля: графический и расчетный. Эти компоненты являются главной структурой программы, без которых невозможно предоставить результат пользо-

вателю. Графический модуль был разработан на первом этапе проектирования, так как представляет более высокий приоритет в применении. Универсальность данной работы заключается в проектировании такой программы, которая могла бы максимально не зависеть от участия сторонних продуктов графической визуализации, при этом сохраняя наибольшую эффективность в инженерном использовании. Графический модуль данной программы был разработан средствами библиотеки OpenGL, которая благодаря своей простоте в применении позволяет моделировать большое количество разнообразных визуальных средств в инженерном проектировании. Данный модуль состоит из двух классов, первый из которых выполняет важную функцию, позволяя загружать и визуализировать геометрию, содержащуюся в файлах формата vml. Второй класс содержит методы для рендеринга изначально заданной геометрии и редактирования ее параметров.

Расчетный модуль программы представляет собой два класса, которые также играют немаловажную роль в функциональности. Первый класс применяется для редактирования данных макроса. Основным алгоритмом выполнения программой поставленной задачи является макрос, который содержит полный метод расчета приведенных вариантов задачи. Все команды макроса написаны на языке APDL и служат в качестве управляемых команд ANSYS. Второй класс выполняет операцию синхронизации программы и расчетного ядра ANSYS. Этот класс является самым сложным в понимании и требует более глубокого описания. Поскольку ANSYS Mechanical APDL не имеет своего управляемого API, программно использовать его функции нельзя. Для установления с ним связи, необходимо осуществить взаимодействие через определенные свойства процессов и потоков. Стандартные библиотеки .NET языка C# для таких операций содержат специальный класс Process, который предоставляет доступ к локальным и удаленным процессам, позволяет запускать и останавливать локальные и системные процессы. С помощью этого класса можно установить синхронизацию программы и ANSYS, что впоследствии привело к способу передачи информации из потока данных программы в поток расчетного ядра ПК ANSYS.

Анализ полученных результатов. С помощью разработанной программы был проведен анализ напряженно-деформированного состояния трех вариантов соединений валов и втулок, при котором придерживались следующих условий: во всех вариантах соединений предполагалось равенство внешних периметров втулок S_1 , периметров контактных поверхностей S , осевых размеров валов L_1 и втулок L_2 , величин натяга $\Delta = 0,12$ мм. Полученные результаты позволили выявить критическое осевое давление, действующее на вал, при котором вал начинает существенно смещаться относительно втулки в осевом направлении, что в дальнейшем приводит соединение к разрушению.

В табл. 3 приведены основные характеристики НДС соединений.

Таблица 3 – Основные НДС характеристики рассчитываемых вариантов соединений

Вариант соединения	Суммарные перемещения (М)	Напряжения (по Мизесу) (Па)	Контактные давления (Па)	Осевое критическое давление (Па)
Круглый вал, круглая втулка	$5,413 \cdot 10^{-05}$	$1,829 \cdot 10^{+08}$	$6,474 \cdot 10^{+07}$	$14.873 \cdot 10^{+06}$
Шестигранный вал, круглая втулка	0,00016	$2,744 \cdot 10^{+08}$	$1,340 \cdot 10^{+08}$	$15.211 \cdot 10^{+06}$
Круглый вал, квадратная втулка	$5,299 \cdot 10^{-05}$	$2,016 \cdot 10^{+08}$	$6,498 \cdot 10^{+07}$	$11.959 \cdot 10^{+06}$

На рис. 8-16 приведены суммарные перемещения, напряжения, контактные давления вариантов соединений с натягом.

Суммарные перемещения: (М)

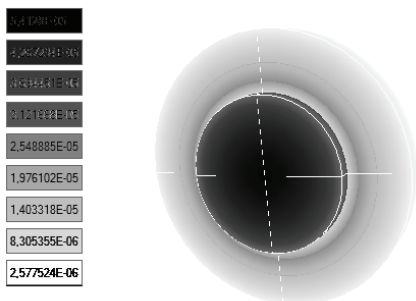


Рисунок 8 – Вариант: Круглый вал, круглая втулка. Суммарные перемещения

Напряжения (по Мизесу): (Па)

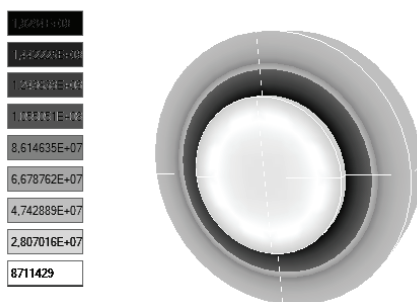


Рисунок 9 – Вариант: Круглый вал, круглая втулка. Напряжения (по Мизесу)

Контактные давления: (Па)

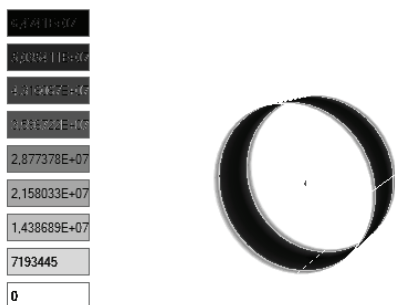


Рисунок 10 – Вариант: Круглый вал, круглая втулка. Контактные давления

Суммарные перемещения: (М)

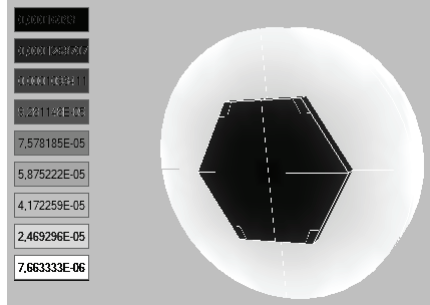


Рисунок 11 – Вариант: Шестигранный вал, круглая втулка. Суммарные перемещения

Напряжения (по Мизесу): (Па)

3,07961E+08
2,16710E+08
1,46224E+08
1,12209E+08
1,29210E+08
1,00174E+08
7,11381E+07
4,21021E+07
1,30661E+07

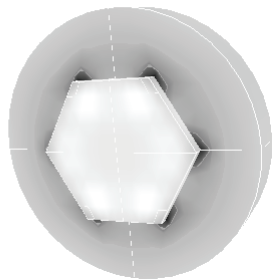


Рисунок 12 – Вариант: Шестигранный вал, круглая втулка. Напряжения (по Мизесу)

Контактные давления: (Па)

1,20001E+08
1,05496E+08
4,83442E+07
5,44222E+07
5,95911E+07
4,46933E+07
2,97956E+07
1,48977E+07
0

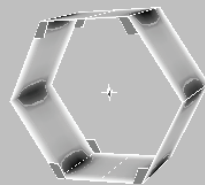


Рисунок 13 – Вариант: Шестигранный вал, круглая втулка. Контактные давления

Суммарные перемещения: (М)

3,07961E-05
4,12260E-05
3,94959E-05
3,03220E-05
2,49510E-05
1,93441E-05
1,37371E-05
8,13012E-06
2,52314E-06

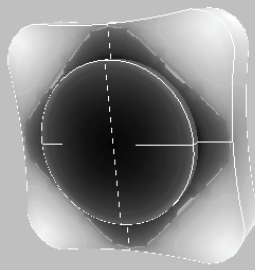


Рисунок 14 – Вариант: Круглый вал, квадратная втулка. Суммарные перемещения

Напряжения (по Мизесу): (Па)

3,07961E+08
1,48933E+08
1,1683E+08
1,11229E+08
9,49333E+07
7,36E+07
5,22666E+07
3,09333E+07
9600000

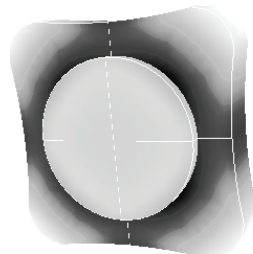


Рисунок 15 – Вариант: Круглый вал, квадратная втулка. Напряжения (по Мизесу)

Контактные давления: (Па)

3,07961E+08
2,88817E+07
2,16613E+07
2,88817E+07
2,16613E+07
1,44408E+07
7220445
0



Рисунок 16 – Вариант: Круглый вал, квадратная втулка. Контактные давления

Выводы. Исходя из результатов расчета соединений с натягом, можно сделать вывод, что каждая конструкция выдерживает относительно большое осевое давление, но оптимальным является вариант с втулкой стандартной круглой формы, и шестигранным валом. В силу своих геометрических особенностей данное соединение имеет лучшие показатели надежности по распрессовке. Что касается самой программы, то благодаря простоте своего графического интерфейса, для проведения анализа пользователю достаточно последовательно перейти от пункта к пункту, заполняя нужные параметры. При использовании программы удалось достичь результатов за достаточно малое время, так как система требует установки только основных параметров, после чего процесс идет в автоматическом режиме, что позволяет сосредоточиться непосредственно на анализе.

Список литературы: 1. Тарабасов Н.Д. Расчет напряженных посадок в машиностроении. – М.: Машгиз, 1961. – 264 с. 2. Берникер Е.И. Посадка с натягом в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1968. – 168 с. 3. Данилов Д.В., Андреев А.Г. НДС профильных соединений с натягом под действием контактных нагрузок // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 52. – С. 63-76. 4. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с. 5. Троелсен Э. Язык программирования C# 5.0 и платформа .NET 4.5. – Вильямс, 2013. – 1311 с. 6. Хилл Ф. OpenGL. Программирование компьютерной графики. – СПб.: Питер, 2002. – 1082 с.

Bibliography (transliterated): 1. Tarabasov N.D. Raschet napryazhennykh posadok v mashinostroenii. Moscow: Mashgiz, 1961. 264 Print. 2. Berniker E.I. Posadka s natyagom v mashinostroenii. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 168 Print. 3. Danilov D.V., Andreev A.G. NDS profil'nykh soedinenij s natyagom pod dejstviem kontaktnykh nagruzok. Vestnik NTU «ХПИ». 2011. № 52. 63-76 Print. 4. Basov K.A. ANSYS: spravochnik pol'zovatelya. Moscow: DMK Press, 2005. 640 Print. 5. Troelsen E. Yazyk programmirovaniya C# 5.0 i platforma .NET 4.5. Vil'yams, 2013. 1311 Print. 6. Hill F. OpenGL. Programirovanie komp'yuternoj grafiki. SPb.: Piter, 2002. 1082 Print.

Поступила (received) 26.10.2014

А. Н. ШУПИКОВ, д-р техн. наук, профессор, зав. отд. прочности и оптимизации конструкций, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Л. А. ЛИТВИНОВ, д-р техн. наук, профессор, зав. отд. монокристаллов корунда, Институт монокристаллов НАН Украины, Харьков;
С. В. УГРИМОВ, канд. техн. наук, докторант, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
С. Ю. СОТРИХИН, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
В. Г. ЯРЕЩЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В САПФИРОВЫХ СТРЕЖНЯХ

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование процесса распространения волн в сапфировых стержнях с различной ориентацией кристаллографических осей. Получены теоретические значения скорости распространения волн Релея при низкоскоростном продольном ударе. Проведено их сравнение с теоретическими значениями, рассчитанными по классической стержневой модели, а также с экспериментальными данными, полученными методом динамического широкополосного тензометрирования. Установлено хорошее совпадение результатов теоретического расчета с данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: теория упругости, распространение волн, волна Релея, удар, анизотропия, сапфир.

Введение. Исследование процесса распространения волн в анизотропных телах является сложной математической задачей [1]. Законы распространения волн в телах выводятся из общих трехмерных уравнений движения упругой среды. В неограниченной анизотропной среде возмущение распространяется не сферическим фронтом, как в изотропной среде, а некоторой поверхностью. Задачу нахождения скорости волны в анизотропной среде решают, как правило, упрощенно путем рассмотрения движения плоских волн и сведением задачи к решению уравнения Кристоффеля [1, 2].

Анизотропия механических свойств сапфира связана с кристаллической структурой и ее типом симметрии [3, 4]. Известно, что по виду симметрии кристаллы сапфира относятся к кристаллам с гексагональной сингонией [3]. Они обладают одной осью симметрии L_6 [1, 3, 5].

Сапфир обладает комплексом уникальных физико-механических и химических свойств [3]. Он имеет высокую механическую прочность и твердость. Твердость сапфира по шкале Мооса составляет 9 единиц. При этом сапфир является оптически прозрачным материалом, способным работать в

условиях воздействия высоких температур и радиации. Наличие таких свойств способствовало широкому применению сапфира в технике, в том числе, как элемента прозрачной брони.

Изделия из лейкосапфира обладают анизотропными свойствами. В силу этого упругие свойства, прочность, а также скорость распространения волн в сапфире зависят от направления. Изготавливая изделия из сапфира необходимо учитывать это различие механических свойств и за счет определенного выбора осей можно повысить общую прочность изделия.

Состояние научной проблемы. Несмотря на широкое применение сапфира в технике [3], его механические свойства, особенно для случая ударных нагрузений, все еще недостаточно изучены [3, 4, 6-10]. В силу сложности математического моделирования поведения сапфира при ударном нагружении, основная часть работ в этой области носит экспериментальный характер. Так, в работе [4] представлены результаты экспериментальных исследований поведения сапфира при сжатии в различных кристаллографических направлениях. Экспериментальные значения скорости распространения волн в сапфировых стержнях с тремя различными ориентациями кристаллографических осей приведены в работе [10]. В этой же работе приведены теоретические значения для скорости распространения волн в сапфировом стержне, который рассматривается по классической стержневой модели.

Цель работы. Целью работы было исследование скорости распространения волн в сапфировых стержнях с различной ориентацией кристаллографических осей на основе модели Релея и экспериментальных методов.

Постановка теоретической задачи. Теоретическое исследование процессов деформирования конструкций из сапфира базируется на уравнениях теории упругости анизотропных тел [11] и модели Релея [2]. Модель Релея базируется на гипотезе плоских сечений. Однако, в отличие от классической стержневой модели, она принимает во внимание не только инерцию продольного движения, но и инерцию поперечного движения элементов стержня [2].

Прежде всего, рассмотрим кристаллографическую структуру сапфира поскольку механические свойства стержней из сапфира зависят от ориентирования кристаллов. Кристаллографическая диаграмма сапфира приведена на рис. 1, а положение кристаллографических плоскостей, представляющих для нас интерес, показано на рис. 2 [2].

Процесс деформирования стержней из сапфира при ударном нагружении будем рассматривать в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. При этом с кристаллографическими осями сапфира свяжем жестко систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$, ось Ox'_3 которой направим вдоль оси L_6 (рис. 3).

Деформации сапфира предполагаются малыми и описываются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}), \quad i, k = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

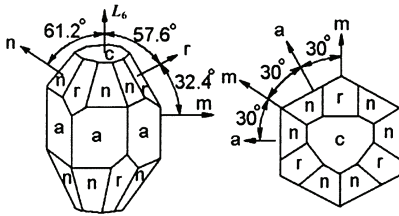


Рисунок 1 – Кристаллографическая диаграмма

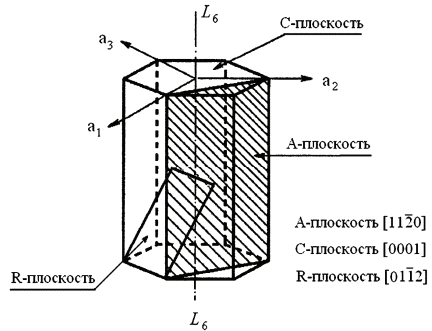


Рисунок 2 – Кристаллографические плоскости

Здесь u_i – перемещения точки сапфира в направлении оси x_i .

Связь между напряжениями p_{ik} и деформациями ε_{im} (2) для тела общего вида анизотропии [11, 12] имеет вид

$$p_{ik} = C_{iklm} \varepsilon_{lm}, \quad (2)$$

где C_{iklm} – тензор модулей упругости 4 ранга.

Выражение (2) можно представить в более компактном виде [11, 12]:

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где A_{ij} – сокращенное обозначение тензора упругости, введенное Фохтом [12].

Для гексагональной сингонии, характерной для сапфира, число независимых упругих постоянных в выражении (3) равно 5 [1, 11].

Для случая С-ориентации, когда оси системы координат $Ox'_1x'_2x'_3$ параллельны осям $Ox_1x_2x_3$ (рис. 3, а), зависимость между напряжениями и деформациями (3) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

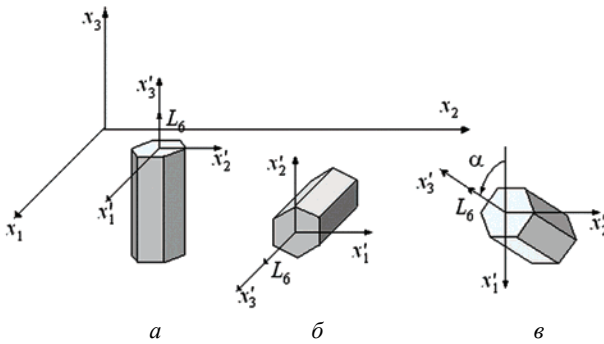


Рисунок 3 – Системы координат и расположение кристаллографических осей сапфира: *а* – сапфировый стержень С-ориентации, *б* – сапфировый стержень А-ориентации, *в* – сапфировый стержень, наклоненный под углом α к оси Ox_3 (вращение вокруг оси Ox_2)

Значения упругих констант сапфира: $A_{11} = 496$ ГПа, $A_{12} = 164$ ГПа, $A_{13} = 115$ ГПа, $A_{33} = 498$ ГПа, $A_{44} = 148$ ГПа [3].

В системе $Ox'_1 x'_2 x'_3$, жестко связанной с кристаллографическими осями сапфира, тензор модулей упругости всегда имеет вид, приведенный в формуле (4). Для системы координат $Ox_1 x_2 x_3$ компоненты тензора модулей упругости необходимо пересчитывать, учитывая направления кристаллографических осей сапфира относительно системы $Ox_1 x_2 x_3$, по формуле преобразования тензора при повороте системы координат [12]

$$C_{iklm} = \alpha_{ip'} \alpha_{kq'} \alpha_{lr'} \alpha_{ms'} C_{p'q'r's'} \quad (5)$$

где $\alpha_{ip'} = \cos(x_i \cdot x'_p)$ – направляющие косинусы.

Используя формулу (3), для случая А-ориентации сапфира (рис. 3, б) получим следующую зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{33} & A_{13} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Плотность сапфира равна 3,97-3,99 г/см³ [3].

Рассмотрим цилиндрический стержень из однородного материала с произвольной формой анизотропии. Один конец стержня жестко закреплен в опоре, а на второй действуют усилия, равнодействующая P которых параллельна оси стержня. Введем начало системы координат в центре тяжести сечения закрепленного конца стержня, ось Ox_3 направим вдоль стержня, а на

правление осей Ox_1, Ox_2 выбираем произвольно (рис. 4).

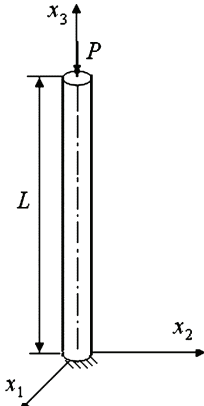


Рисунок 4 – Сапфировый стержень

Если ввести предположение, что усилия на концах стержня распределены равномерно, то граничное условие на незакрепленном конце стержня имеет вид

$$P_{33} = \frac{P}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

Если длина стержня значительно больше характерного размера поперечного сечения, а боковые поверхности свободны от нагрузок, то можно считать, что напряжения вдоль стержня удовлетворяют условиям [11]

$$P_{11} = P_{22} = P_{12} = P_{13} = P_{23} = 0, \quad (6)$$

Для рассматриваемого случая продольного нагружения стержня, учитывая в выражении (3) зависимости (6), получим, что деформации стержня должны удовлетворять условиям

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{43} \\ A_{53} \\ A_{63} \end{pmatrix} \varepsilon_{33}; \quad (7)$$

$$P_{33} = A_{31}\varepsilon_{11} + A_{32}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33} + A_{34}\varepsilon_{23} + A_{35}\varepsilon_{13} + A_{36}\varepsilon_{12}. \quad (8)$$

Решение системы (7) может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_{33}, \quad (9)$$

где ξ_i – константы.

В классической стержневой модели предполагается, что деформации не зависят от плоскостных координат x_1, x_2 [10]. В модели Релея предполагается, что только деформации ε_{33} не зависят от координат x_1, x_2 [2]. Тогда, учитывая соотношения (1) и (9), получим выражения для плоскостных перемещений

$$u_1 = \int \varepsilon_{11} dx_1 = \int \xi_1 \varepsilon_{33} dx_1 = \xi_1 \varepsilon_{33} x_1 = \xi_1 u_{3,3} x_1;$$

$$u_2 = \int \varepsilon_{22} dx_2 = \int \xi_2 \varepsilon_{33} dx_2 = \xi_2 \varepsilon_{33} x_2 = \xi_2 u_{3,3} x_2, \quad (10)$$

Напряжения p_{33} (8), учитывая (10), можно представить в виде

$$p_{33} = \varepsilon_{33} (A_{31} \xi_1 + A_{32} \xi_2 + A_{33} + A_{34} \xi_4 + A_{35} \xi_5 + A_{36} \xi_6) = \phi \varepsilon_{33}, \quad (11)$$

где $\phi = A_{31} \xi_1 + A_{32} \xi_2 + A_{33} + A_{34} \xi_4 + A_{35} \xi_5 + A_{36} \xi_6$.

Рассмотрим сапфировые стержни А- и С-ориентации [3, 10]. При С-ориентации ось L_6 параллельна оси Ox_3 , при А-ориентации – ось L_6 параллельна оси Ox_1 , а нормаль к плоскости А параллельна оси Ox_3 (рис. 1). Для этих случаев можно получить простые аналитические выражения для параметра ϕ , входящего в формулу (11):

$$\text{при С-ориентации} - \phi = A_{33} - \frac{2A_{13}^2}{A_{11} + A_{12}}; \quad (12)$$

$$\text{при А-ориентации} - \phi = A_{11} + \frac{2A_{12}A_{13}^2 - A_{11}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2}{A_{11}A_{33} + A_{13}^2}. \quad (13)$$

Значение параметра ϕ для более сложных случаев ориентации кристаллографических осей проще всего получить численно, используя формулы преобразования тензора упругости при повороте осей (2).

Уравнения движения. Уравнения движения сапфирового стержня, а также граничные условия выводятся с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона [10, 13]

$$\int_0^t \int_0^L \int_S (\delta \Pi - \delta K + \delta' F) dS dx_3 dt = 0. \quad (14)$$

Здесь Π – потенциальная энергия деформаций, K – кинетическая энергия, $\delta' F$ – элементарная работа внешних сил.

Учитывая введенные предположения (6), потенциальная энергия деформаций стержня может быть представлена следующим образом

$$\Pi = \frac{1}{2} p_{33} \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^2 \cdot \phi. \quad (15)$$

Кинетическая энергия деформаций стержня с учетом зависимостей (10) имеет вид

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2 = \frac{1}{2} \rho ((\xi_1 \dot{\varepsilon}_{33} x_1)^2 + (\xi_2 \dot{\varepsilon}_{33} x_2)^2 + (\dot{u}_3)^2) = \\ &= \frac{1}{2} \rho ((\xi_1 \dot{u}_{3,3} x_1)^2 + (\xi_2 \dot{u}_{3,3} x_2)^2 + (\dot{u}_3)^2), \end{aligned} \quad (16)$$

где ρ – плотность сапфирового стержня, $u_3 = u_3(x_3, t)$ – перемещения точек стержня вдоль его оси. Здесь точками обозначены производные по времени.

Элементарная работа внешних сил для исследуемого случая имеет вид

$$\delta' F = P \delta u_3. \quad (17)$$

В результате подстановки вариаций потенциальной (15), кинетической энергий (16), а также элементарной работы внешних сил (17) в уравнение (14) было получено уравнение движения стержня

$$\phi \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\rho R^2}{4} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} = P(t). \quad (18)$$

Третье слагаемое уравнения (18) описывает влияние инерции поперечного движения стержня. Для изотропного случая это уравнения было получено Релеем.

На концах стержня должны быть заданы значения перемещений u_3 или продольных деформаций $u_{3,3}$.

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : u_3 = u_3(0, t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_3(0, t)}{\partial x_3}; \\ x_3 = L : u_3 = u_3(L, t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_3(L, T)}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Кроме того, уравнения движения необходимо дополнить начальными условиями

$$t = 0 : u_3(x_3, 0) = u_{30}(x_3), \quad \dot{u}_3(x_3, 0) = \dot{u}_{30}(x_3).$$

Теоретическое значение скорости волны деформаций. Решение уравнения (18) будем искать в виде суперпозиции гармонических волн, идущих в прямом и обратном направлениях

$$u = \exp(i \frac{2\pi}{L}(Vt - x_3)) + \exp(i \frac{2\pi}{L}(x_3 - Vt)), \quad (19)$$

где V – скорость распространения волн.

Подставляя выражение для прямой волны (19) в уравнение (18), получим значение скорости распространения волны Релея

$$V = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \cdot (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)}, \quad (20)$$

где V_0 – скорость распространения волны деформаций по классической стержневой модели (без учета поперечной инерции), которая равна [10]

$$V_0 = \sqrt{\phi/\rho}. \quad (21)$$

Из формулы (20) видно, что волна Релея зависит от линейных размеров стержня и распространяется немного медленнее по сравнению со скоростью, полученной по классической стержневой модели, которая не зависит от линейных размеров.

Скорость волн деформаций по классической стержневой модели для сапфировых стержней А- и С-ориентации может быть определена посредством формул (12), (13) и (21):

$$\text{С-ориентация} \quad - \quad V_0 = \sqrt{\frac{\phi}{\rho}} = \sqrt{\frac{A_{33} - \frac{2A_{13}^2}{A_{11} + A_{12}}}{\rho}} \approx 10726 \text{ м/с};$$

$$\text{А-ориентация} \quad - \quad V = \sqrt{\frac{\phi}{\rho}} = \sqrt{\frac{A_{11} + \frac{2A_{12}A_{13}^2 - A_{11}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2}{A_{11}A_{33} + A_{13}^2}}{\rho}} \approx 10384 \text{ м/с}.$$

Скорость волн Релея (20) для сапфировых стержней А- и С-ориентации диаметром 19 мм и длиной 550 мм составляет:

$$\text{С-ориентация} \quad - \quad V = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \cdot (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)} \approx 10725 \text{ м/с};$$

$$\text{А-ориентация} \quad - \quad V = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \cdot (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)} \approx 10383 \text{ м/с}.$$

Таким образом, для рассмотренных длинных сапфировых стержней наблюдается незначительное отличие значений скоростей, полученных по модели Релея и классической стержневой модели.

Значение скоростей волн деформаций для других случаев ориентации кристаллографических осей имеет более сложный вид. Удобней всего получать эти значения численно, используя преобразование тензора деформаций при повороте осей (2) и зависимости (7), (11) для определения параметра ϕ .

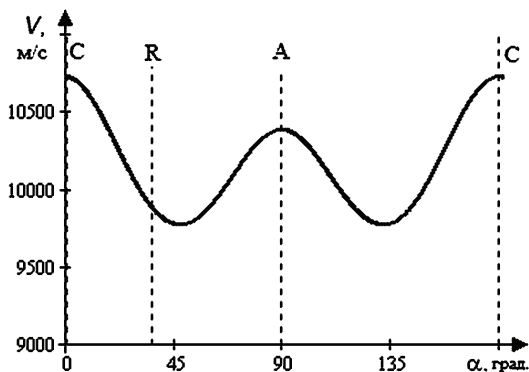


Рисунок 5 – Зависимость скорости волны от угла поворота осей кристалла

На рис. 5 представлен результат расчета скорости волны Релея в зависимости от значений угла поворота α осей кристалла вокруг оси Ox_2 (рис. 3, в) для стержня диаметром 19 мм и длиной 550 мм. Здесь А обозначен угол

поворота для стержня А-ориентации, С – для стержня С-ориентации и R – для стержня R-ориентации. Результаты по классической стержневой теории на рисунке не приводятся, поскольку они практически совпадают с данными, полученными по модели Релея (для рассмотренных геометрических размеров стержня учет влияния инерции поперечного движения стержня несущественен). Из рисунка видно, что значение скорости волны деформаций зависит от ориентирования кристаллографических плоскостей в изделии. Для R-ориентации скорость распространения волны составила 9888 м/с.

Эксперимент. Целью экспериментальных исследований было зафиксировать скорость волны деформаций в сапфировом стержне. Экспериментальные исследования процесса распространения волн в сапфире при ударе проведены на базе метода динамического широкополосного тензометрирования [10]. На стержень вблизи концов стержня наклеивались тензодатчики для фиксации деформаций в продольном направлении (рис. 6). При ударе по концу стержня возникает волна деформаций, которая распространяется вдоль стержня и вызывает его деформацию, которая и фиксируется тензодатчиками. Отличие времени начала деформаций на различных датчиках и известное расстояние между ними позволяет установить скорость волны.

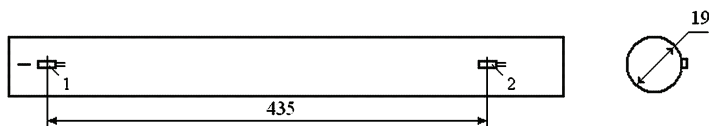


Рисунок 6 – Стержень с тензодатчиками

Измерение деформаций проводится по мостовой схеме. Четверть моста находится в измерительной части, четверть – в калибровочной, а оставшаяся половина – в тензоусилителе. Тензоусилитель работает по принципу амплитудной модуляции с несущей частотой 1000 кГц. Для минимизации тока в измерительной диагонали мост подстраивается по активной и реактивной составляющим сопротивления. Непосредственно перед испытанием, после балансировки канала усиления, проводится его градуировка, то есть устанавливается зависимость $\varepsilon = \varepsilon(U)$, где U – электрическое напряжение сигнала, регистрируемого аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

Сигналы с тензодатчиков, наклеенных на образец, поступают на тензометрический усилитель, а затем на АЦП, где проводится регистрация регистрируемого сигнала с заданной частотой, после чего сигнал записывается на компьютер. В качестве АЦП использовались преобразователи Е-2010.

Стержень устанавливался вертикально на стенде. Один конец стержня жестко закреплялся в специальной сборной пятке из органического стекла. Нагружение осуществлялось путем сбрасывания на образец с высоты 1,5 м стального цилиндрического ударника с закругленным сферическим концом. Параметры ударника: масса – 76,78 г, длина – 47 мм, диаметр 16 мм.

Сапфировые стержни. В экспериментальных исследованиях использовались сапфировые стержни А-, С- и R-ориентации оптического качества диаметром 19 мм. Стержень А-ориентации имел длину 560 мм, а С-ориентации – 550 мм. Стержни были выращены методом Степанова из чистой (99,995 % основного вещества) шихты фирмы RSA (Франция) на ростовых установках «Кристалл-606» в среде особо чистого аргона [10, 14]. После выращивания стержни отжигались в вакууме в изотермических условиях при 1950 °С для разрушения рассеивающих центров в объеме кристалла.

Результаты и анализ экспериментальных исследований. Результаты экспериментальных исследований скорости волны деформаций в стержнях А-, С- и R-ориентации были подробно приведены в работе [10]. Для каждого стержня проводилась серия экспериментов по измерению значений скорости продольной волны, которые затем усреднялись по всей серии экспериментов. В результате средняя скорость волны деформаций в экспериментах составила для стержней

$$\text{А-ориентации} - V_{cp}^e \approx 10419 \text{ м/с};$$

$$\text{С-ориентации} - V_{cp}^e \approx 10752 \text{ м/с};$$

$$\text{R-ориентации} - V_{cp}^e \approx 10134 \text{ м/с}.$$

Таким образом, для А- и С-ориентации экспериментальные и теоретические данные отличаются на 0,3 %, а для R-ориентации на превышает 2,5 %.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведено теоретическое исследование процесса распространения волн в стержнях из сапфира с различной ориентацией кристаллографических осей. Поставлена и решена задача о распространении волн Релея в сапфировых стержнях при продольном ударе. Для сапфировых стержней с А- и С-ориентацией кристаллографических осей аналитически определены значения скоростей распространения волн по модели Релея и по классической стержневой теории. Кроме этого, аналитико-численно получена зависимость скорости волны от угла поворота кристаллографических осей в стержне. Установлено, что для рассмотренных длинных сапфировых стержней значения скоростей распространения волн, полученных по модели Релея и по классической стержневой теории, практически совпадают. При этом показано, что скорость волн в стержне существенным образом зависит от ориентирования кристаллографических осей сапфира. Установлено, что скорость распространения волн изменяется в пределах от 9777 м/с до 10725 м/с.

Теоретические результаты сопоставлены с данными экспериментальных исследований процесса распространения волн, проведенными с помощью метода динамического широкополосного тензометрирования. Получено хорошее совпадение результатов теоретических расчетов с данными эксперимента. Так, теоретическая скорость распространения волны в стержне с А-ориентацией составила 10383 м/с, а экспериментально была зафиксирована

скорость 10419 м/с, для стержня С-ориентации соответствующие скорости были 10725 м/с и 10752 м/с, а для стержня R-ориентации – 9888 м/с и 10134 м/с соответственно.

Дальнейшее исследование должно быть направлено на изучение процесса распространения волн и деформирования сапфировых пластин и трехмерных тел, обладающих гексагональной сингонией.

Список литературы: 1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1965. – 386 с. 2. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с. 3. Dobrovinskaya E. Sapphire in science and engineering / E. Dobrovinskaya, L. Lytvynov, V. Pischik. – Kharkiv: STC «Institute for Single Crystals», 2007. – 480 p. 4. Каннель Г. И. Поведение сапфира при упругом сжатии в различных кристаллографических направлениях / Г. И. Каннель, А. С. Савиных, С. В. Разоренов, В. Е. Фортвов // Успехи механики сплошных сред. – 2009. – С. 257–271. 5. Попов Г. М. Кристаллография / Г. М. Попов, И. И. Шафрановский. – М.: Высшая шк., 1964. – 370 с. 6. Nowak R. Peculiar surface deformation of sapphire: Numerical simulation of nanoindentation / R. Nowak, T. Manninen, K. Heiskanen [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83, № 25. – P. 5214–5216. 7. Voloshyn O. V. Potentialities for sapphire strength enhancement / O. V. Voloshyn, L. A. Lytvynov, E. V. Slyunin // Funct. Mater. – 2007. – Т. 14, № 4. – С. 569–572. 8. Синани А. Б. Сопrotивление упругих тел высокоскоростному внедрению на начальной стадии соударения / А. Б. Синани, А. А. Кожушко, Е. Л. Зильбербранд // Письма в Журнал технической физики. – 2008. – Т. 34, вып. 3. – С. 27–31. 9. Wang Y. Shock deformation of sapphire single crystals / Y. Wang, D. E. Mikkola // Materials Science and Engineering. – 1991. – Vol. 148, № 1 – P. 25–32. 10. Литвинов Л. А. Исследование волновых процессов деформирования сапфировых стержней при низкоскоростном ударе / Л. А. Литвинов, А. Н. Шушиков, С. В. Узримов [и др.] // Кристаллические материалы для оптики и электроники / ред. В. М. Пузи́ков. – Харьков: НТК «Ин-т монокристаллов» НАН Украины, 2012. – С. 305 – 329. 11. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1950. – 300 с. 12. Аквис М. А. Тензорное исчисление / М. А. Аквис, В. В. Гольдберг. – М.: Физматгиз, 2003. – 304 с. 13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М.: Мир, 1987. – 542 с. 14. Добровинская Е. П. Энциклопедия сапфира / Е. П. Добровинская, Л. А. Литвинов, В. В. Пищик. – Х.: НТК «Ин-т монокристаллов», 2004. – 508 с.

Bibliography (transliterated): 1. Fedorov, F. I. Teorija uprugih voln v kristallah. Moscow: Nauka, 1965. Print. 2. Rabotnov Ju. N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. Moscow: Nauka, 1979. Print. 3. Dobrovinskaya, E., L. Lytvynov and V. Pischik. Sapphire in science and engineering. Kharkiv: STC «Institute for Single Crystals», 2007. Print. 4. Kannel', G. I., A. S. Savinyh, S. V. Razorenov and V. E. Fortov. Povedenie sappira pri uprugom szhatii v razlichnyh kristallograficheskikh napravlenijah. Uspеhi mehaniki sploshnyh sred. 2009. 257–271. Print. 5. Popov, G. M. and I. I. Shafranovskij. Kristallografija. Moscow: Vysshaja shk., 1964. Print. 6. Nowak, R., et al. Peculiar surface deformation of sapphire: Numerical simulation of nanoindentation. Appl. Phys. Lett. 83, 25 (2003): 5214–5216. Print. 7. Voloshyn, O. V., L. A. Lytvynov and E. V. Slyunin Potentialities for sapphire strength enhancement. Funct. Mater. 14, 4 (2007): 569–572. 8. Sinani, A. B., A. A. Kozhushko and E. L. Zil'berbrand. «Soprotivlenie uprugih tel vysokoskorostnomu vnedreniju na nachal'noj stadii soudarenija.» Pis'ma v Zhurnal tehnicheckoy fiziki. 34, 3 (2008): 27–31. 9. Wang, Y., D. E. Mikkola. «Shock deformation of sapphire single crystals.» Materials Science and Engineering. 148, 1 (1991): P. 25–32. Print. 10. Lytvynov, L. A., et al. «Issledovanie volnovnyh processov deformirovanija sappirovyh stержnej pri nizkoskorostnom udare.» Kristallicheskie materialy dlja optiki i jelektroniki. Ed. V. M. Puzikov. Kharkiv: NTK «In-t monokristallov», 2012. 305 – 329. Print. 11. Lehnickij, S. G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela. Moscow-Leningrad: Gostehizdat, 1950. Print. 12. Akivis, M. A. and V. V. Gol'dberg. Tenzornoe ischislenie. Moscow: Fizmatgiz, 2003. Print. 13. Vasilzdu, K. Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. Moscow: Mir, 1987. Print. 14. Dobrovinskaja, E. R., L. A. Lytvynov and V. V. Pischik. Jenciklopedija sappira. Kharkiv: NTK «In-t monokristallov», 2004. Print.

Поступила (received) 10.10.2014

В. Г. ЯРЕЩЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ ЖЕСТКОЙ ПЛИТЫ НА УДАР ПТИЦЕЙ

Работа посвящена вопросам экспериментального исследования реакции жесткой плиты на удар птицей. Приведены данные экспериментальных исследований влияния кинематических факторов на реакцию деформируемой преграды при столкновении с птицей. Проведена серия экспериментов по определению деформаций плоской преграды при ударе тушкой птицы. Экспериментально исследовано влияние скорости и угла соударения на максимальные деформации преграды.

Ключевые слова: экспериментальное исследование, тензометрия, деформация, динамика, птицестойкость.

Введение. Анализ прочности элементов конструкций самолета при столкновении с птицей является одной из важных задач, возникающих при проектировании летательных аппаратов [1-4]. Конструкции современных самолетов проектируются с учетом возможного столкновения их с птицами. Так, действующие авиационные стандарты требуют, чтобы конструкция самолета позволяла экипажу безопасно завершить полет после столкновения с одиночной птицей массой 1,81 кг [5]. Это требование зафиксировано соглашением в рамках Международной организации авиации (ИКАО) [2].

Соударение конструкции и птицы является сложным динамическим процессом. Основными методами его изучения являются натурные испытания и расчеты с использованием крупных расчетных комплексов, базирующихся на МКЭ. Сложность теоретического анализа прочности элементов конструкций самолета при ударе птицей привела к широкому применению натурального эксперимента [6 – 8].

Состояние научной проблемы. Проведение комплексных исследований по птицестойкости предполагает применение многоканальных измерительных систем, обеспечивающих получение экспериментальной информации. Исследования динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций проводятся в основном методом тензометрирования [9, 10]. Этот метод в настоящее время является одним из наиболее изученных и надежных.

Нестационарные процессы деформирования вызывают в конструкциях колебания со спектром частот от 0,1 до 250 кГц и выше. Для регистрации таких колебаний необходима аппаратура, удовлетворяющая требованиям к диапазону регистрируемых частот и удовлетворяющая условиям теоремы

© В. Г. Ярещенко, 2014

Котельникова [11]. В силу сложности такой аппаратуры имеется весьма ограниченное количество работ, посвященных экспериментальным исследованиям поведения элементов конструкций при высокоскоростном деформировании.

В предлагаемой работе приводятся описание и результаты экспериментальных исследований деформаций жесткой мишени при ударе птицей. В работе приведены данные натурального эксперимента по исследованию влияния скорости и угла соударения на реакцию деформируемой преграды при ударе тушкой птицы.

Цель работы. Целью работы было экспериментальное исследование влияния скорости и угла соударения на реакцию деформируемой преграды при ударе тушкой птицы.

Постановка эксперимента. Для оценки влияния кинематических факторов на реакцию деформируемой преграды при столкновении с птицей был проведен натуральный эксперимент, в ходе которого исследовалась реакция (деформации) стальной плиты-мишени на удар тушек птиц. Механические характеристики плиты: модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность, $\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м³.

Испытательный стенд состоял из разгонного устройства для метания, тензометрического комплекса и плиты-мишени [8].

Для разгона метаемых объектов применялось пневматическое разгонное устройство АНТК им. О.К. Антонова. Пневматическое устройство (рис. 1) состоит из напорного резервуара 1, заполняемого сжатым воздухом под давлением P_0 , специального клапана быстрого выпуска воздуха 2 и ствола 3. Диаметр ствола составляет 150 мм, а базовая длина – 8,4 м. Для метания на высоких скоростях ствол наращивался до длины 14,7 м.

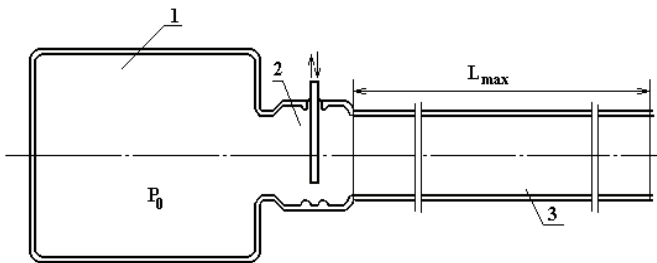


Рисунок 1 – Принципиальная схема пневматического устройства:
1 – ресивер; 2 – клапан; 3 – ствол

При зарядке ствол отделяется от клапана и откатывается вперед. Метаемый объект помещается внутрь ствола, после чего последний возвращается в исходное положение. Перед выстрелом клапан закрывается и в ресивер

нагнетается воздух до тех пор, пока давление достигнет значения P_0 , которое выбирается таким, чтобы обеспечить метаемому объекту массой M необходимую скорость V на срезе ствола.

За срезом канала ствола была установлена система измерения скорости. Метаемый объект поочередно разрывает 4 проволоки-датчика, соединенные с двумя счетными частотомерами, которые измеряют время прохождения рядом базы 0,5 м (расстояние между парами проволок).

Измерение деформаций проводилось методом динамического широкополосного тензометрирования. Для этого посередине тыльной поверхности мишени наклеивалась розетка малобазных (база измерения 1 мм) фольговых тензорезисторов. Необходимо отметить, что для качественной регистрации динамических процессов деформирования необходимо учитывать зависимость результатов измерений от соотношений между измерительной базой и длиной волны [9].

На рис. 2 представлена блок-схема применяемой аппаратуры, которая позволяет регистрировать текущие значения деформаций во времени и измерять временные интервалы с заданной точностью.

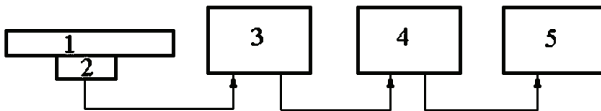


Рисунок 2 – Блок-схема экспериментальной установки

Сигналы с тензодатчиков (2), наклеенных на мишень (1), поступают на тензоусилитель (3), а затем – на измерительно-вычислительный комплекс. В качестве датчика остановки записи используется один из тензорезисторов (2). При приложении к плите нагрузки он вырабатывает сигнал, поступающий через линию связи и тензостанцию на генератор синхронных импульсов (ГСИ). ГСИ выполнен в стандарте КАМАК и используется для синхронизации остановки записи в кольцевую память всех измерительных каналов при поступлении на ГСИ сигнала с датчика запуска. Кроме того, в крейте КАМАК (4) расположены генератор тактовых импульсов, аналого-цифровые преобразователи с максимальной частотой тактирования 40 МГц, а также контроллер крейта. Генератор тактовых импульсов используется для подачи одинаковых по величине тактовых импульсов на все каналы измерения. Имеется возможность непосредственно с клавиатуры компьютера задавать режимы работы генератора тактовых импульсов, генератора синхронных импульсов и АЦП. Также задается объем информации, сохраняемый в кольцевой памяти до и после поступления сигнала остановки записи, что позволяет видеть процесс нагружения с самого начала. Адаптер, расположенный непосредственно в компьютере (5), и контроллер крейта служат для организации диалога между компьютером и блоками, расположенными в крейте КАМАК.

Тензоусилитель работает на принципе амплитудной модуляции с несущей частотой 1000 кГц, его характеристики приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Характеристики тензоусилителя

Характеристика	Значение
Число измерительных каналов	8
Несущая частота, кГц	1000
Полоса рабочих частот, кГц	0,04 – 200
Нелинейность АЧХ, дБ (не более)	$\pm 1,2$
Минимальная регистрируемая деформация, ЕОД	$30 \cdot 10^{-6}$
Динамический диапазон, дБ	80
Градуировочный диапазон, ЕОД	$30 \cdot 10^{-6} - 2,4 \cdot 10^{-3}$
Длина рабочих линий, м (не более)	20
Сопротивление используемых тензодатчиков, Ом	50 – 200

Измерение деформаций выполняется по мостовой схеме [12]. Четверть моста находится в измерительной части, четверть – в калибровочной, а оставшаяся половина – в тензоусилителе. Для минимизации тока в измерительной диагонали производится подстройка моста по активной и реактивной составляющим сопротивления. Непосредственно перед проведением испытаний, после балансировки канала усиления, производится его градуировка, то есть устанавливается зависимость деформаций $\varepsilon = \varepsilon(U)$, где U – электрическое напряжение сигнала, регистрируемого в АЦП.

Внешний вид стенда показан на рис. 3. Стенд состоит из: опорной конструкции (1); плиты для крепления (2) размером 1000x1000x100 мм, установленной вертикально на опорной конструкции (1); плиты для испытаний (3) размером 700x700x50 мм, закрепленной в плите (2). Крепление плиты (3) имитирует условия шарнирного опирания.

Удар метаемым объектом наносился в центр плиты для испытаний (3), которая отодвинута от ствола разгонного устройства на 2 м.

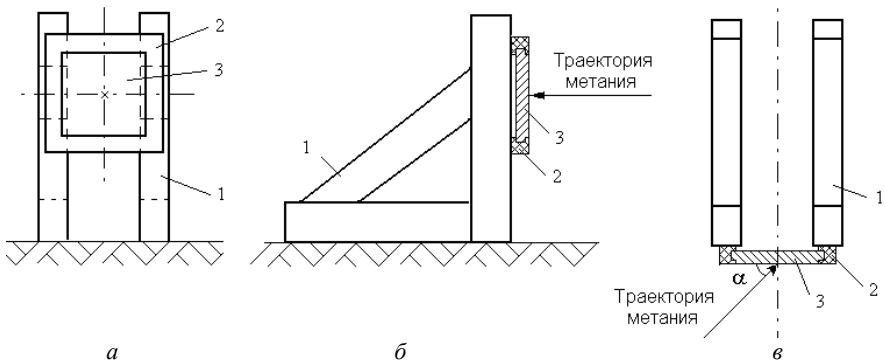


Рисунок 3 – Стенд-мишень: а – вид спереди, б – вид сбоку, в – вид сверху

Посередине тыльной поверхности плиты (рис. 4) наклеивалась четырех-компонентная розетка тензодатчиков (рис. 5). В ходе экспериментов измерялись деформации плиты ε_x , ε_y в направлениях горизонтальной и вертикальной осей. Таким образом, вся получаемая информация дублируется тензодатчиками, расположенными по два горизонтально и вертикально.

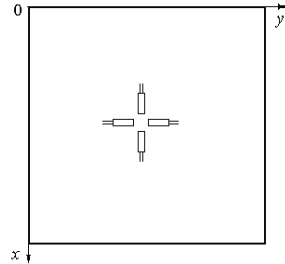
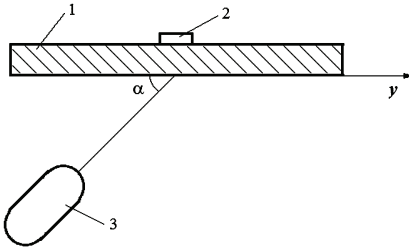


Рисунок 4 – Плита-мишень с тензодатчиками: 1 – плита, 2 – тензодатчики, 3 – птица
 Рисунок 5 – Розетка тензодатчиков

Исследование деформаций жесткой плиты при ударе. В качестве птиц в натурном эксперименте использовались тушки кур. Исследовалась реакция плиты при углах соударения 25° , 30° , 35° , 40° , 45° . Скорость метания составляла от 89 м/с до 206 м/с.

На рис. 6 а, б приведены деформации плиты ε_x , ε_y , зафиксированные при ударе тушкой птицы при углах соударения 40° и 25° . Сплошной линией показаны результаты при ударе тушкой птицы массой 1,750 кг при скорости соударения 158,63 м/с и угле 40° , пунктирной – при ударе тушкой птицы массой 1,740 кг при скорости соударения 153 м/с и угле соударения 25° .

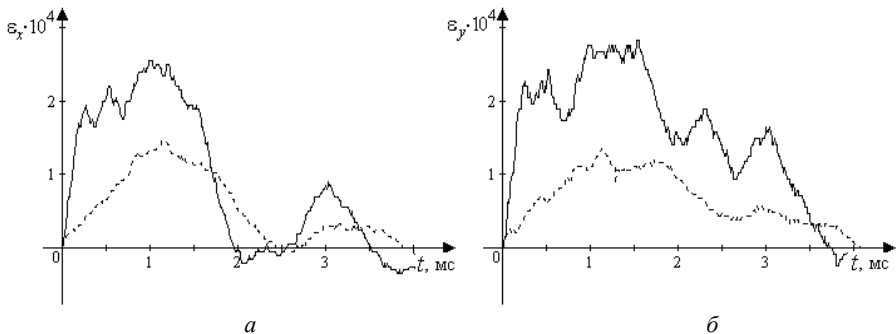


Рисунок 6 – Изменение во времени деформаций плиты:
 а – деформации ε_x , б – деформации ε_y

Из рис. 6 видно, что с уменьшением угла столкновения птицы с преградой максимальные деформации плиты уменьшаются.

Проведено исследование зависимости максимальных деформаций плиты-мишени от скорости и угла соударения метаемого тела.

Исследование зависимости максимальных деформаций плиты ϵ_x и ϵ_y от скорости удара птицей при угле соударения 45° представлено на рис. 7. Здесь кружками обозначены результаты, полученные с использованием тушек птиц, сплошной линией показаны результаты аппроксимации экспериментальных данных. Результаты эксперимента аппроксимировались полиномами с использованием метода наименьших квадратов.

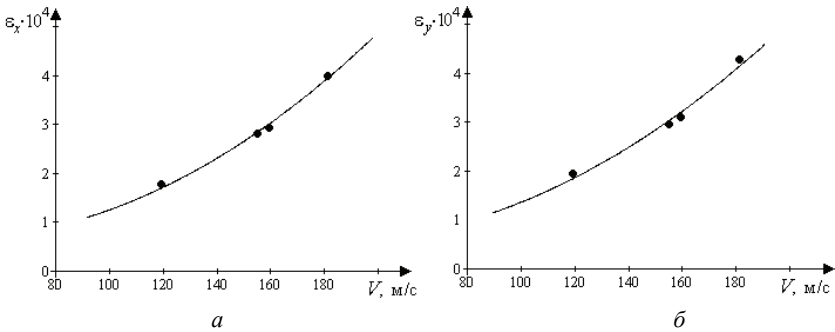


Рисунок 7 – Изменение деформаций плиты в зависимости от скорости соударения: *a* – деформации ϵ_x , *б* – деформации ϵ_y

Из рис. 7 видно, что при увеличении скорости метаемого объекта деформации плиты растут, при этом зависимость деформаций плиты от скорости близка к квадратичной.

Исследование влияния угла соударения α на максимальные значения деформаций плиты при столкновении с птицей массой 1,81 кг на скорости 155 м/с приведено на рис. 8.

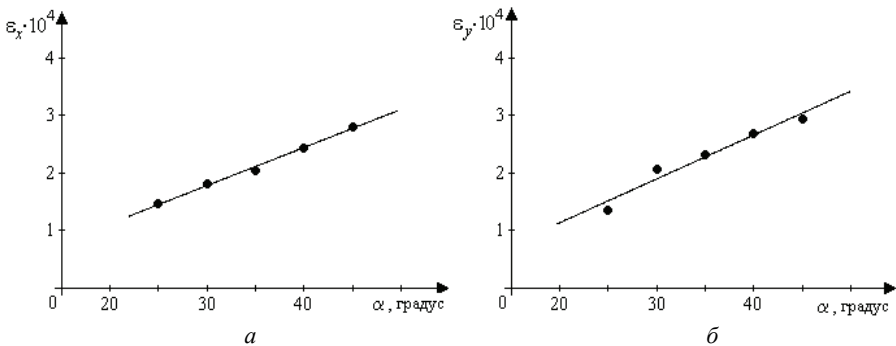


Рисунок 8 – Изменение деформаций пластины в зависимости от угла соударения: *a* – деформации ϵ_x , *б* – деформации ϵ_y

Из рис. 8 видно, что максимальные значения деформаций плиты уменьшаются с уменьшением угла соударения.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. С помощью метода широкополосного тензометрирования проведена серия экспериментов по определению деформаций испытательной плиты при ударе тушкой птицы. Исследовано влияние скорости и угла соударения на максимальные деформации. Установлено, что с уменьшением угла столкновения птицы с преградой максимальные деформации плиты уменьшаются, а при увеличении скорости метаемого объекта деформации плиты растут, при этом зависимость деформаций плиты от скорости близка к квадратичной.

Дальнейшее исследование должно быть направлено на экспериментальное исследование процесса деформирования реальных элементов конструкции самолета на удар птицей.

Список литературы: 1. *Лаврик В.С.* Летчик, внимание – птицы! / *В.С. Лаврик, И.Ф. Рубцов, Э.А. Шерер.* – М.: Изд-во Министерства обороны СССР, 1970. – 104 с. 2. *Фритши О.* Безопасность полетов – задача № 1 / *О. Фритши* // Курьер ЮНЕСКО. – 1978. – С. 20–22. 3. *Анцелович Л.Л.* Надежность, безопасность и живучесть самолета / *Л.Л. Анцелович.* – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с. 4. *Якоби В.Э.* Биологические основы предотвращения столкновений самолетов с птицами / *В.Э. Якоби.* – М.: Наука, 1974. – 169 с. 5. *Авиационные правила.* Ч. 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. – М.: МАК, 1993. – 483 с. 6. *Уилбек Дж.С.* Разработка модели птицы для ударных испытаний авиационных двигателей / *Дж.С. Уилбек, Дж.Л. Ренд* // Энергетические машины. – 1981. – Т. 103, № 4. – С. 126–133. 7. *Голощапов В.Н.* Некоторые результаты обобщения физических, геометрических и весовых характеристик птиц, необходимых для оценки динамических процессов при соударении с преградой / *В.Н. Голощапов, В.И. Лебединский, В.Э. Якоби, В.И. Янчина* // Защита материалов и технических устройств от птиц. Сер. Биологические повреждения. – М.: Наука, 1984. – С. 201–214. 8. *Shupikov A.N.* Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft components / *A.N. Shupikov, S.V. Ugrimov, N.V. Smetankina, V.G. Yareschenko, G.G. Onhirskey, V.P. Ukolov, V.F. Samoynenko, V.L. Avramenko* // Journal of Aircraft. – 2013. – V. 50, № 3. – P. 817–826. 9. *Тензометрия в машиностроении* / под ред. *Р.А. Макарова.* – М.: Машиностроение, 1975. – 288 с. 10. *Грановский В.А.* Динамические измерения: основы метрологического обеспечения / *В.А. Грановский.* – Л.: Энергоатомиздат, 1984. – 224 с. 11. *Котельников В.А.* О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи / *В.А. Котельников* // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, № 7. – С. 762–770. 12. *Карандеев К.Б.* Мостовые методы измерений / *К.Б. Карандеев.* – К.: Гос. изд-во техн. лит. Украинской СССР, 1953. – 246 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Lavrik, V. S., I. F. Rubcov and Je. A. Sherer.* Letchik, vniমানie – pticy! Moscow: Izdatel'stvo Ministerstva oborony SSSR, 1970. Print. 2. *Fritsh, O.* «Bezopasnost' poletoy – zadacha № 1.» Kur'er JuNESKO. 1978. 20-22. Print. 3. *Ancelovich, L. L.* Nadezhnost', bezopasnost' i zhivuchest' samoleta. Moscow: Mashinostroenie, 1985. Print. 4. *Jakobi, V. Je.* Biologicheskie osnovy predotvrashhenija stolknovenij samoletov s pticami. Moscow: Nauka, 1974. Print. 5. *Aviacionnye pravila.* Ch. 25. Normy letnoj godnosti samoletov transportnoj kategorii. Moscow: MAK, 1993. Print. 6. *Uilbek, Dzh.S. and Dzh. L. Rend.* «Razrabotka modeli pticy dlja udarnyh ispytanij aviacionnyh dvigatelej.» Jenergeticheskie mashiny 103.4 (1981): 126–133. Print. 7. *Goloshhapov, V. N., et al.* «Nekotorye rezul'taty obobshhenija fizicheskikh, geometricheskikh i vesovykh harakteristik ptic, neobhodimyh dlja ocenki dinamicheskikh processov pri soudarenii s pregradoj.» Zashhita materialov i tehniceskikh ustrojstv ot ptic. Ser. Biologicheskie povrezhdenija. Moscow: Nauka, 1984. 201-214. Print. 8. *Shupikov, A. N., et al.* «Bird dummy for investigating the bird-strike resistance of aircraft components.»

Journal of Aircraft 50.3 (2013): 817-826. Print. **9.** Tenzometrija v mashinostroenii. Ed. R. A. Makarova. Moscow: Mashinostroenie, 1975. Print. **10.** Granovskij, V. A. Dinamicheskie izmerenija: osnovy metrologicheskogo obespechenija. Leningrad: Jenergoatomizdat, 1984. Print. **11.** Kotel'nikov, V. A. «O propusknnoj sposobnosti «jeffira» i provoloki v jelektrosvjazi.» Uspehi fizicheskikh nauk 176.7 (2006): 762-770. Print. **12.** Karandeev, K. B. Mostovye metody izmerenij. Kiev: Gos. izd-vo tehn. lit. Ukrain-skoj SSR, 1953. Print.

Поступила (received) 13.10.2014

УДК 519 : 539 : 534

С. В. КРАСНИКОВ, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ ФУНДАМЕНТІВ ПАРОВИХ ТУРБІН

Розглядається працездатність фундаментів парових турбін, що мають значний час експлуатації. Запропоновані методики дослідження та прогнозування працездатності фундаментів при тривалому строку експлуатації. Вони базуються на нормативних, експериментальних та розрахункових даних з експлуатації фундаментів парових турбін електростанцій. В основі методик є оцінка поточного стану конструкції за параметрами вібрації. Розроблені методики пропонуються для використання на електростанціях для існуючих та нових фундаментів парових турбін.

Ключові слова: працездатність, вібрація, вимушені коливання, фундамент, парова турбіна.

Вступ. Фундаменти парових турбін для електростанцій у східній Європі традиційно виготовляються із залізобетону. Із середини ХХ століття застосовуються збірні залізобетонні конструкції замість монолітного виконання [1, 2], що дозволило скоротити строки будівництва й витрати залізобетону, але привело до зниження твердості нових фундаментів і збільшило ймовірність появи резонансу в робочому діапазоні. Наявні теоретичні методи на час проектування більшості енергоблоків не дозволяли обчислити необхідні вібраційні характеристики конструкцій. Було проведено значний обсяг експериментальних обстежень [3, 4]. Останні норми з вібраційної оцінки фундаментів турбоагрегатів базуються на проведенні експериментальних обстежень обмеженого ряду фундаментів. Їхнє застосування розраховано в першу чергу на нові фундаменти. Це є причиною наявності великого парку фундаментів, що не задовольняють прийнятим за останні 15 років стандартам. Такі фундаменти експлуатуються відповідно до індивідуальних норм. По суті кожний фундамент є унікальним у силу природи бетону та особливостей будівництва. Це пов'язано з тим, що при будівництві використовується, як правило, легкодосту-

© С. В. Красніков, 2014

пний у місці будівництва наповнювач. Сезон, строки зведення, кліматичні умови й інші фактори завжди мають відмінності при зведенні кожного фундаменту. Оскільки кожний фундамент має свою унікальність, то їх можна віднести до дрібносерійного й індивідуального виробництва. Це приводить до необхідності створення специфічних і індивідуальних математичних моделей, методів для дослідження вібраційного стану й прогнозування надійності фундаментів зі значним строком експлуатації.

Мета роботи. Створення математичної моделі дослідження працездатності фундаменту, проведення досліджень на основі комбінованого розрахунково-експериментального підходу з метою визначення засобів по підвищенню надійності.

Загальний опис методики. Для розрахункової частини методики зручно використовувати скінчено-елементний підхід [5, 6]. Згідно цього методу система рівнянь для опису вимушених коливань фундаменту парової має вигляд:

$$M \{\ddot{q}(t)\} + K \{q(t)\} = r(t), \quad (1)$$

де M – матриця мас, K – матриця жорсткості, $q(t)$ – вектор переміщень, $r(t)$ – вектор навантажень.

Пропонується методика моніторингу й оцінки працездатності фундаментів парових турбін з генератором електричного струму при тривалому строку експлуатації. Вона полягає у визначенні декількох граничних областей працездатних станів, визначенні поточного стану конструкції, прогнозування стану із часом і способами зміни положення цього стану в область працездатних станів з більшим ступенем надійності.

Поточний стан конструкції визначається вектором переміщень $q(t)$ у контрольних точках фундаменту. Це безумовно є спрощенням, для більше правильної оцінки працездатності варто оперувати величинами динамічних напруг.

Будемо розглядати наступні визначення області працездатних станів: загальна область працездатних станів, область стабільних працездатних станів, область індивідуальних стабільних працездатних станів, область проектного працездатного стану.

Загальна область працездатних станів – визначається величинами переміщень для вектора $q(t)$, при яких досягнення границі A_1 гарантовано приводить до відмови системи й руйнуванню конструкції. Ця область відповідає низькому ступеню надійності конструкції й невеликому строку експлуатації.

Область стабільних працездатних станів – визначається граничними величинами переміщень для вектора $q(t)$, що відповідають державним і промисловим нормам експлуатації (Б) для великого класу фундаментів. Знаходження усередині цієї області гарантує працездатний стан конструкції.

Область індивідуальних стабільних працездатних станів – границя (В)

визначається індивідуальними правилами технічної експлуатації. Знаходження усередині цієї області мають на увазі малу ймовірність відмови окремо взятої конструкції.

Область проектного працездатного стану – границя A_0 визначається проектними нормами, індивідуальними правилами технічної експлуатації. Знаходження усередині цієї області гарантує працездатний стан конструкції.

Позначимо поточний стан конструкції через Z :

$$Z = Z(q(t)). \quad (2)$$

Для (2) завжди виконується наступна умова:

$$Z(q(t)) < A_1. \quad (3)$$

У загальному випадку, як правило, виконується умова

$$A_0 < Z(q(t)) < A_1. \quad (4)$$

Обозначимо ресурс роботи фундаменту через T . Тоді імовірність безвідомної роботи можна записати наступним чином:

$$P(t) = P(Z(q(t)) < A_1, 0 < t < T). \quad (5)$$

У спрощеному варіанті поточний стан конструкції Z визначається величинами вібраційних переміщень $q(t)$ у контрольних точках. У загальному випадку Z визначається на основі комплексного аналізу вібраційних параметрів (переміщення, швидкості, прискорення, напруги, імовірність відмови окремих елементів та інше).

Пропонується наступна методика моніторингу й оцінки працездатності фундаментів під турбоагрегати при тривалому строку експлуатації:

- 1) визначення основних границь стану A_0, A_1 і додаткових B, B ;
- 2) визначення поточного стану конструкції Z ;
- 3) визначення діапазону розташування поточного стану конструкції Z ;
- 4) визначення кривих стану конструкції Z за час експлуатації та проведення його аналіз;
- 5) оцінка працездатності конструкції у поточний та майбутній час;
- 6) визначення причин зниження працездатності фундаменту та комплексу заходів щодо її підвищення;
- 7) проведення уточнення границь B і B за результатами реконструкції.

Другий і наступний етапи методики проводяться на основі результатів попередніх етапів.

Для проведення моніторингу стану конструкції за четвертим етапом пропонується використовувати графіки кривих станів конструкції Z . Для їх побудови пропонується наступна методика:

- 1) проведення розрахункових досліджень вібраційного стану фундаменту на основі проектної документації, побудова вихідних точок для кривих стану;

- 2) одержання експериментальних даних вібраційного стану фундаменту при початку експлуатації (пуску енергоблоку) одним із двох способів: проведення вимірів на новій конструкції або використання даних вібраційних вимірювань при прийомі фундаменту до експлуатації;

- 3) додавання нових крапок до кривих стану конструкції на основі розрахункових та експериментальних даних у пліні часу експлуатації;
- 4) апроксимація кривих стану на основі отриманих даних;
- 5) побудова графіків кривих стану в одному із двох діапазонів (A_0 , A_1) або $(0, A_1)$.

Для моніторингу стану конструкції можливі дві ситуації:

1) є достатня кількість розрахунково-експериментальних досліджень для одержання двох кривих стану (за розрахунковими та експериментальними даними);

2) обмежена кількість даних розрахунково-експериментальних досліджень, що дозволяють побудувати тільки один спільний графік кривої стану.

Для проведення експериментальних досліджень вібраційного стану фундаменту парової турбіни пропонується використовувати стаціонарний комплекс вібродіагностики, а за його відсутності – переносну низькочастотну багатоканальну апаратуру. Апаратура бажано має бути вимірювально-обчислювальним комплексом для виміру й реєстрації величин віброприскорень у часі з функціями запису, відтворення та експрес-аналізу швидкозмінних аналогових сигналів одночасно по кільком незалежним вимірювальним каналам.

При достатній кількості каналів за допомогою комплексу вібродіагностики можливо одразу за один вимір одержати всю необхідну інформацію. При недостатній кількості каналів пропонується наступна методика проведення виміру вібрації в одному з місць, що контролюються:

- 1) оцінка рівня шуму;
- 2) установка датчика;
- 3) підготовка обчислювального комплексу;
- 4) проведення виміру відповідно до обраної орієнтації;
- 5) завершення виміру, збереження даних і зняття датчика;
- 6) перехід до кроку 2 для зміни орієнтації датчика;
- 7) запуск спеціалізованого програмного забезпечення з алгоритмами обробки діаграм;
- 8) оцінка погрішності виміру параметрів вібрації в обраному напрямку;
- 9) повернення до кроку 1 або перехід до наступного місця виміру.

Висновки. Для дослідження та прогнозування працездатності фундаментів парових турбін електростанцій при тривалому строку експлуатації запропоновано загальна та дві допоміжні методики. Визначено декілька областей працездатності фундаменту. Дослідження поточного стану конструкції базується на експериментальних та розрахункових даних. В якості характеристик поточного стану пропонуються параметри вібрації в контрольованих місцях. Запропонована методика пов'язує існуючі нормативні документи, щодо оцінки працездатності, та наявні умови експлуатації фундаментів парових турбін на електростанціях.

Список літератури: 1. Рунов Б.Т. Исследование и устранение вибрации паровых турбоагрегатов. – М.: Энергоиздат, 1982. – 352 с. 2. Абашидзе А.И., Сапожников Ф.В., Казанджян А.Т. Фундаменты машин тепловых электростанций. – М.: Энергия, 1975. – 256 с. 3. Шейнин И.С., Цейтлин Б.В. Теоретическое исследование динамических характеристик ряда фундаментов под мощные турбоагрегаты // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1981. – № 151. – С. 81-87. 4. Шульженко Н.Г., Воробьев Ю.С. Численный анализ колебаний систем турбоагрегат-фундамент. – К.: Наукова думка, 1991. – 232 с. 5. Красніков С.В. Моделювання та аналіз вібраційних характеристик фундаменту енергоблоку потужністю 300 МВт // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2011. – № 52. – С. 107-111. 6. Красніков С.В. Моделювання власних коливань фундаменту турбогенератору потужністю 200 МВт // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 88-92.

Bibliography (transliterated): 1. Runov B.T. Issledovanie i ustranenie vibracii parovyh turboagregatov. Moscow: Energoizdat, 1982. 352 Print. 2. Abashidze A.I., Sapozhnikov F.V., Kazandzhyan A.T. Fundamenty mashin teplovyh elektrostancij. Moscow: Energiya, 1975. 256 Print. 3. Shejnin I.S., Cejtin B.V. Teoreticheskoe issledovanie dinamicheskikh karakteristik ryada fundamentov pod moschnye turboagregaty. Izv. VNIIG im. Vedeneeva. 1981. № 151. 81-87 Print. 4. Shul'zhenko N.G., Vorob'ev Yu.S. Chislennyj analiz kolebanij sistem turboagregat-fundament. Kyiv: Naukova dumka, 1991. 232 Print. 5. Krasnikov S.V. Modelyuvannya ta analiz vibracijnykh kharakterystyk fundamentu enerhobloku potuzhnisty 300 MVt. Visnyk NTU «KhPI». Kharkiv: NTU «KhPI», 2011. № 52. 107-111 Print. 6. Krasnikov S.V. Modelyuvannya vlasnykh kolyvan' fundamentu turboheneratoru potuzhnisty 200 MVt. Visnyk NTU «KhPI». Kharkiv: NTU «KhPI», 2013. № 58 (1031). 88-92 Print.

Поступила (received) 29.10.2014

РЕФЕРАТИ

УДК 539.3

Основні роботи вчених НТУ «ХП» у галузі управління механічними системами / А. Г. Андрєєв, С. О. Назаренко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 3-14. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9130.

Стаття присвячена дослідженню процесу становлення та розвитку науково – педагогічної діяльності вчених та випускників НТУ «ХП» в XIX – XXI ст. у галузі управління механічними системами. Показано, як створений вченими та випускниками НТУ «ХП» науковий потенціал дозволив Харкову стати ведучим центром створення систем управління для найважливіших об'єктів ракетобудування та космонавтики; науково ємної та високотехнологічної продукції оборонного та громадянського призначення, підготовки спеціалістів.

Ключові слова: механіка, машинобудування, вища технічна освіта; системи управління, динаміка, ракетобудування, космонавтика, автоматичне регулювання, оптимізація.

УДК 534/143

Дослідження потужності електромагнітних модулаторів вібрацій / А.Е.Божко, Е.М. Іванов, З.А.Іванова, К.Б.Мягкохлеб // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 14-18. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-9130.

У даній роботі здійснюється спроба детальніше визначити енергетичні показники електромагнітних вібробудувачів, які знаходять широке застосування в технологічних процесах ущільнення середовищ, для пересування в конвєсах матеріалів, у випробувальних стендах та ін. Енергетичні показники визначаються з урахуванням вібраційного руху маси і втрат, що виникають в електричній і механічній частинах. Ці результати необхідні для оптимального вибору керуючого пристрою за енергетичними показниками.

Ключові слова: якір, повітряний зазор, демпфірування, твердість, коливальна система.

УДК 539.3

Термопружний напружений стан багатошарової труби із захисним шаром дюралюмінію та склопластику / Верещака С.М., Дейнека А. В. // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 19-30. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.

На основі класичної теорії пружності анізотропного тіла порівнюється напружено-деформований стан багатошарового товстостінного циліндра кінцевої довжини при дії внутрішнього тиску і температури. Захисний шар циліндра виконаний з дюралюмінію та вуглепластика. Кінематичні і статичні умови контакту по сполучених поверхнях сусідніх шарів вважаються ідеальними. Рішення задачі отримане у віссиметричній постановці. При цьому внутрішній тиск і температурне навантаження змінюються за синусоїдальним законом по довжині циліндра. Відзначається, що заміна дюралюмінієвого захисного шару композитної труби на вуглепластик, суттєво впливає на її напружений стан. Під час порівняння напружено-деформованого стану розглянутих конструктивних варіантів циліндрів більш ефективним виявився варіант захисного шару з вуглепластика.

Ключові слова: товстостінний циліндр; температура; склопластик; вуглепластик.

УДК 539.3

Аналіз електромагнітних і механічних полів в складених конструкціях / Д.В. Лавинський // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 31-36. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

У статті представлено метод аналізу зв'язаних електромагнітних та механічних полів у технологічних системах. Зв'язаність враховано за допомогою об'ємних електромагнітних сил, які визначаються за результатами аналізу розподілу електромагнітного поля. Для визначення характеристик електромагнітного поля використовуються поняття векторного магнітного потенціалу. Розв'язання передбачається за схемою метода скінчених елементів. Проведено розв'язок для системи «індуктор – провідник». Представлення порівняння із аналітичним розв'язком. Про-

аналізовано розподіл інтенсивності напружень.

Ключові слова: електромагнітні поля, векторний магнітний потенціал, метод скінчених елементів, напружено-деформований стан.

УДК 539.3:629.3.027.52

Визначення циклів напружень елементів пневматичної шини з використанням процедури субмоделювання / О.О. Ларін, Ю.А. Петрова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 37-49. – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130.

В ході даної роботи були створені геометрична та скінчено-елементна моделі пневматичної шини, з урахуванням ортотропі механічних властивостей у гумово-кордних шарах. Таке моделювання було здійснено за допомогою введення локальних фінітно-гороїдальних систем координат. Був проведений розрахунок задачі контактної взаємодії шини з дорожнім покриттям з урахування геометричної і фізичної нелінійності. Для отримання достовірних результатів по напруженням, був використаний підхід двомасштабного субмоделювання.

Ключові слова: пневматична шина, гумо-кордні композити, субмоделювання, цикли напружень.

УДК 621.643.8

Аналітичне дослідження контактної поведінки ділянки трубопроводу з в'язкопружною ремонтною накладкою / Г.І. Львов, В.Г. Мартиненко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 49-56. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

У статті описано аналітичні дослідження напружено-деформованого стану ділянки трубопроводу з в'язкопружною ремонтною накладкою в плоскій постановці. Побудована крайова задача для інтегро-диференціальних рівнянь та запропоновано метод її вирішення. Результати розрахунків представлено у вигляді графіків розподілу переміщень та напружень за радіусом та у часі. Зроблено висновок щодо впливу в'язкопружності на загальну оцінку міцності конструкції.

Ключові слова: трубопровід, бандаж, в'язкопружність, інтегральне рівняння.

УДК 531.382

Ідентифікація розрахункової моделі ротора газотурбінної установки в магнітних підшипниках за геометричними та динамічними параметрами / Г.Ю. Мартиненко, О.В. Олійник // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 56-67. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

Описано розрахункові дослідження з пошуку за неповними даними розрахункової скінчено-елементної моделі ротора газотурбінної установки в магнітних підшипниках, призначеної для поглибленого аналізу його динамічної поведінки. Дані дослідження виконувалися за допомогою параметричного моделювання і проведення серії варіантних статичних та динамічних розрахунків з метою визначення параметрів розрахункової моделі зіставленням з відомими даними. Результати чисельних експериментів свідчать про адекватність знайденої розрахункової моделі та її придатність для виконання подальших досліджень.

Ключові слова: газотурбінна установка, динаміка ротора, магнітні підшипники.

УДК 539.3: 517.9.

Свободні коливання осцилятора лінійно-змінної маси з сухим тертям / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 67-76. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Модернізованим методом енергетичного балансу виведено наближені формули для розрахунку амплітуд малих затухаючих коливань осцилятора змінної маси при дії сили сухого тертя. Розглянуто варіанти коливань при сталому значенні сили тертя та змінному, коли сила тертя пропорційна масі осцилятора. Проведено порівняння числових результатів, до яких приводять

отримані формули та відомі більш точні розв'язки. Показано, що виведені компактні наближені формули мають хорошу точність та зручні для інженерних розрахунків.

Ключові слова: вільні коливання, лінійно-змінна маса, сухе тертя.

УДК 539.376

До розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів при нестационарному одновісному деформуванні / Я.В. Павлюк // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 77-91. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.

Розглянуто задачу визначення релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів при різних режимах нестационарного деформування, а саме в умовах стаціонарного, одноступеневого і циклічного деформування. Розрахунок будеться на основі нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю за рахунок використання діаграми миттєвого деформування, як ізохрони для нульового моменту часу і згладжуючих кубічних сплайнів в якості апроксимації нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі. Програма навантаження реалізується у вигляді послідовності елементарних навантажень, що задаються за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Розв'язані і експериментально апробовані задачі розрахунку деформацій повзучості і релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного ступеневого навантаження, часткового розвантаження, а також циклічного навантаження.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, нелінійна повзучість, нелінійна релаксація, дробово-експоненційне ядро спадковості, нелінійно-в'язкопружні матеріали, нестационарне навантаження.

УДК 517.928 : 536.24

Знаходження щільності потоку тепла в пластині теплового радіатора за допомогою асимптотичного гібридного ВКБ-Гальоркін підходу / Г.М. Погребницька // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 91-96. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

У роботі представлено розв'язання задачі про знаходження щільності теплового потоку в пластині радіатора. Мета роботи – застосування асимптотичного гібридного підходу до нелінійних диференціальних рівнянь, які описують процеси теплообміну в різних конструкціях. Для знаходження відсутнього значення похідної функції знайдено замкнутий аналітичний розв'язок.

Ключові слова: асимптотичні методи, подвійний гібридний ВКБ-Гальоркін метод, щільність теплового потоку, пластина теплового радіатора.

УДК 531.3

Аналіз вільних крутильних коливань силових передач методом нелінійних нормальних форм Шоу-П'єра / Б.В. Успенський, К.В. Аврамов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 96-105. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.

У статті запропоновано модифікацію метода нелінійних нормальних форм Шоу-П'єра для дослідження механічних систем з кусково-лінійними пружними характеристиками. Ця модифікація дозволяє вдвічі знизити розмірність системи звичайних рівнянь, що використовується для пошуку форм, підвищуючи таким чином точність та швидкість методу. Розглянуто механічні системи з двома ступіннями свободи, що описують коливання елементів силової передачі трьохциліндрового транспортного двигуна.

Ключові слова: нелінійні нормальні форми, форми П'єра-Шоу, кусково-лінійна система, крутильні коливання, вільні коливання, силова передача.

Комп'ютерне моделювання деяких типів профільних з'єднань з натягом при осьових навантаженнях / Р.А. Шевченко, А.Г. Андрєєв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 106-114. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Стаття присвячена проблемі проектування профільних з'єднань з натягом і вибору раціональних геометричних параметрів з'єднуваних деталей, які забезпечують надійне з'єднання дотриманням умов міцності. Використана програма, інтегрована з ПК ANSYS, яка дозволяє проводити аналіз з'єднань натягом валів і втулок різних форм під дією осьових навантажень. Завдяки простоті свого графічного інтерфейсу для проведення аналізу користувачеві достатньо послідовно перейти від пункту до пункту, заповнюючи потрібні параметри.

Ключові слова: профільні з'єднання, натяг, програма.

Теоретичне та експериментальне дослідження процесу розповсюдження хвиль у сапфірових стержнях / О. М Шупіков, Л. А. Литвинов, С. В. Угрімов, С. Ю Сотрихін, В. Г. Ярещенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 115-125. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.

Проведено теоретичне та експериментальне дослідження процесу розповсюдження хвиль у сапфірових стержнях із різною орієнтацією кристалографічних осей. Отримано теоретичні значення швидкості поширення хвиль при низькошвидкісному поздовжньому ударі. Проведено їх порівняння з теоретичними значеннями, розрахованими за класичною стержневою моделлю, а також з експериментальними даними, отриманими методом динамічного широкосмугового тензометрування. Встановлено хороший збіг результатів теоретичного розрахунку з даними експериментальних досліджень.

Ключові слова: теорія пружності, розповсюдження хвиль, хвиля Релея, удар, анізотропія, сапфір.

Експериментальне дослідження реакції жорсткої плити на удар птахом / В. Г. Ярещенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 126-133. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2078-9130.

Робота присвячена питанням експериментального дослідження реакції жорсткої плити на удар птахом методом динамічного широкосмугового тензування. Наведено дані експериментальних досліджень впливу кінематичних факторів на реакцію деформівної перешкоди при зіткненні із птахом. Проведено серію експериментів по визначенню деформацій плоскої перешкоди при ударі тушкою птаха. Експериментально досліджено вплив швидкості й кута зіткнення на максимальні деформації перешкоди.

Ключові слова: експериментальне дослідження, тензометрія, деформація, динаміка, птахоустійкість.

Методика дослідження та прогнозування працездатності фундаментів парових турбін / С.В. Красніков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 133-137. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Розглядається працездатність фундаментів парових турбін, що мають значний час експлуатації. Запропоновані методики дослідження та прогнозування працездатності фундаментів при тривалому строку експлуатації. Вони базуються на нормативних, експериментальних та розрахункових даних з експлуатації фундаментів парових турбін електростанцій. В основі методик є оцінка поточного стану конструкції за параметрами вібрації. Розроблені методики пропонуються для використання на електростанціях для існуючих та нових фундаментів парових турбін.

Ключові слова: працездатність, вібрація, вимушені коливання, фундамент, парова турбіна.

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

Основные работы ученых ХПИ в области управления механическими системами / А. Г. Андреев, С. А. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 3-14. – Бібліогр.: 17 назв. – ISSN 2078-9130.

Рассмотрена эволюция основных научных достижений ученых и выпускников НТУ "ХПИ" в XIX – XXI ст. в области управления механическими системами: от паровых машин до уникальных космических аппаратов. Показано, как созданный учеными и выпускниками НТУ "ХПИ" научный потенциал позволил Харьковской школе стать ведущим центром создания систем управления для важнейших объектов ракетостроения и космонавтики; наукоемкой и высокотехнологичной продукции оборонного и гражданского назначения, подготовки специалистов.

Ключевые слова: механика, машиностроение, высшее техническое образование; системы управления, динамика, ракетостроение, космонавтика, автоматическое регулирование.

УДК 534/143

Исследование мощности электромагнитных модуляторов вибраций / А.Е.Божко, Е.М. Иванов, З.А.Иванова, К.Б.Мягкохлеб // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 14-18. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2078-9130.

В данной работе осуществляется попытка более детально определить энергетические показатели электромагнитных вибровозбудителей, находящих широкое применение в технологических процессах уплотнения сред, для передвижения в конвейерах материалов, в испытательных стендах и т.д. Энергетические показатели определяются с учетом вибрационного движения массы и потерь, возникающих в электрической и механической частях. Эти результаты необходимы для оптимального выбора управляющего устройства по энергетическим показателям.

Ключевые слова: якорь, воздушный зазор, демпфирование, жесткость, колебательная система.

УДК 539.3

Термоупругое напряженное состояние многослойной трубы с защитным слоем из дюралюминия и углепластика / Верещака С.М., Дейнека А. В. // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 19-30. – Бібліогр.: 4 назв. – ISSN 2078-9130.

На основе классической теории упругости анизотропного тела сравнивается напряженно-деформированное состояние многослойного толстостенного цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и температуры. Защитный слой цилиндра выполнен из дюралюминия или углепластика. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются идеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. При этом внутреннее давление и температурная нагрузка изменяются по синусоидальному закону по длине цилиндра. Отмечается, что замена дюралюминиевого защитного слоя композитной трубы на углепластик, оказывает существенное влияние на ее напряженное состояние. При сравнении напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструктивных вариантов цилиндров более эффективным оказался вариант защитного слоя из углепластика.

Ключевые слова: толстостенный цилиндр; температура; стеклопластик; углепластик.

УДК 539.3

Анализ электромагнитных и механических полей в составных конструкциях / Д.В. Лавинский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57 (1099). – С. 31-36. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

В статье представлен метод анализа связанных электромагнитных и механических полей в технологических системах. Связанность учтена с помощью объемных электромагнитных сил, которые определяются по результатам анализа распределения электромагнитного поля. Для

определения характеристик электромагнитного поля используются понятия векторного магнитного потенциала. Решение предполагается по схеме метода конечных элементов. Проведено решение для системы «индуктор – проводник». Представление сравнения с аналитическим решением. Проанализировано распределение интенсивности напряжений.

Ключевые слова: электромагнитные поля, векторный магнитный потенциал, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

УДК 539.3:629.3.027.52

Определение циклов напряжений элементов пневматической шины с использованием процедуры субмоделирования / А. А. Ларин, Ю. А. Петрова // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 37-49. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

В ходе данной работы были созданы геометрическая и конечно-элементная модели пневматической шины, с учетом ортотропии механических свойств в резиново-кордных слоях. Такое моделирование было осуществлено посредством введения локальных финитно-тороидальных систем координат. Были проведены расчеты с учетом геометрической и физической нелинейности задачи контактного взаимодействия шины с дорогой. Для получения достоверных результатов по напряжениям, был использован подход двумасштабного субмоделирования.

Ключевые слова: пневматическая шина, резино-кордные композиты, субмоделирование, циклы напряжений.

УДК 621.643.8

Аналитическое исследование контактного поведения участка трубопровода с вязкоупругой ремонтной накладкой / Г.И. Львов, В.Г. Мартыненко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 49-56. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

В статье описаны аналитические исследования напряженно-деформированного состояния участка трубопровода с вязкоупругой ремонтной накладкой в плоской постановке. Построена краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений и предложен метод ее решения. Результаты расчетов представлены в виде графиков распределения перемещений и напряжений по радиусу и во времени. Сделан вывод о влиянии вязкоупругости на общую оценку прочности конструкции.

Ключевые слова: трубопровод, бандаж, вязкоупругость, интегральное уравнение.

УДК 531.382

Идентификация расчетной модели ротора газотурбинной установки в магнитных подшипниках по геометрическим и динамическим параметрам / Г.Ю. Мартыненко, А.В. Олейник // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 56-67. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

Описаны расчетные исследования по поиску по неполным данным расчетной конечно-элементной модели ротора газотурбинной установки в магнитных подшипниках, предназначенной для углубленного анализа его динамического поведения. Данные исследования выполнялись с помощью параметрического моделирования и проведения серии вариантных статических и динамических расчетов с целью определения параметров расчетной модели сопоставлением с известными данными. Результаты численных экспериментов свидетельствуют об адекватности найденной расчетной модели и ее пригодности для выполнения дальнейших исследований.

Ключевые слова: газотурбинная установка, динамика ротора, магнитные подшипники.

УДК 539.3: 517.9.

Свободные колебания осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 67-76. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Модернизированным методом энергетического баланса выведены приближенные форму-

лы для расчета амплитуд малых затухающих колебаний осциллятора переменной массы при действии силы сухого трения. Рассмотрены варианты колебаний при постоянном значении силы трения и переменном, когда сила трения пропорционально массе осциллятора. Проведено сравнение численных результатов, к которым приводят полученные формулы и известные более точные решения. Показано, что выведенные компактные приближенные формулы имеют хорошую точность и удобны для инженерных расчетов.

Ключевые слова: свободные колебания, линейно-переменная масса, сухое трение.

УДК 539.376

К расчету релаксации напряжений нелинейно-вязкоупругих материалов при нестационарном одноосном деформировании / Я.В. Павлюк // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 77-91. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.

Рассмотрена задача определения релаксационных напряжений нелинейно-вязкоупругих материалов при различных режимах нестационарного деформирования, а именно в условиях стационарного, одноступенчатого и циклического деформирования. Расчет строится на основе нелинейной модели вязкоупругости с независимой от времени нелинейностью за счет использования диаграммы мгновенного деформирования как изохронны для нулевого момента времени и сглаживающих кубических сплайнов в качестве аппроксимаций нелинейных диаграмм мгновенного деформирования, задающих нелинейность модели. Программа нагружения реализуется в виде последовательности элементарных нагрузок, задаваемой с помощью единичных функций Хевисайда. Решены и экспериментально апробированы задачи расчета деформаций ползучести и релаксации напряжений нелинейно-вязкоупругих материалов в условиях одноосного ступенчатого нагружения, частичной разгрузки, а также циклического нагружения.

Ключевые слова: нелинейная вязкоупругость, нелинейная ползучесть, нелинейная релаксация, дробно-экспоненциальное ядро наследственности, нелинейно-вязкоупругие материалы, нестационарное нагружение.

УДК 517.928 : 536.24

Нахождение плотности потока тепла в пластине теплового радиатора с помощью асимптотического гибридного ВКБ-Галеркин подхода / А.М. Погребницкая // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 91-96. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

В работе представлено решение задачи о нахождении плотности теплового потока в пластине радиатора. Цель работы – применение асимптотического гибридного подхода к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые описывают процессы теплообмена в различных конструкциях. Для нахождения недостающего значения производной функции найдено замкнутое аналитическое решение.

Ключевые слова: асимптотические методы, двойной гибридный ВКБ-Галеркин метод, плотность теплового потока, пластина теплового радиатора.

УДК 531.3

Анализ свободных крутильных колебаний силовых передач методом нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера / Б.В. Успенский, К.В. Аврамов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 96-105. – Бібліогр.: 15 назв. – ISSN 2078-9130.

В статье предложена модификация метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Такая модификация позволяет вдвое снизить размерность системы обыкновенных уравнений, используемой для расчета форм, увеличивая таким образом точность и быстрдействие метода. Рассмотрены механические системы с двумя степенями свободы, которые описывают колебания элементов силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, формы Пьера-Шоу, кусочно-линейная система, крутильные колебания, свободные колебания, силовая передача.

Компьютерное моделирование некоторых типов профильных соединений с натягом при осевых нагрузках / Р.А. Шевченко, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 106-114. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Статья посвящена проблеме проектирования профильных соединений с натягом и выбору рациональных геометрических параметров сопрягаемых деталей, обеспечивающих надежное соединение с соблюдением условий прочности. Использована программа, интегрированная с ПК ANSYS, которая позволяет проводить анализ соединений с натягом валов и втулок разных форм под действием осевых нагрузок. Благодаря простоте своего графического интерфейса для проведения анализа пользователю достаточно последовательно перейти от пункта к пункту, заполняя нужные параметры.

Ключевые слова: профильные соединения, натяг, программа.

УДК 534.1:539.3

Теоретическое и экспериментальное исследование процесса распространения волны в сапфировых стержнях / А. Н Шупиков, Л. А. Литвинов, С. В. Угримов, С. Ю Сотрихин, В. Г. Ярешенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 115-125. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-9130.

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование процесса распространения волн в сапфировых стержнях с различной ориентацией кристаллографических осей. Получены теоретические значения скорости распространения волн Релея при низкоскоростном продольном ударе. Проведено их сравнение с теоретическими значениями, рассчитанными по классической стержневой модели, а также с экспериментальными данными, полученными методом динамического широкополосного тензометрирования. Установлено хорошее совпадение результатов теоретического расчета с данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: теория упругости, распространение волн, волна Релея, удар, анизотропия, сапфир.

УДК 534.1:539.3

Экспериментальное исследование реакции жесткой плиты на удар птицы / В. Г. Ярешенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 126-133. – Бібліогр.: 12 назв. – ISSN 2078-9130.

Работа посвящена вопросам экспериментального исследования реакции жесткой плиты на удар птицы методом динамического широкополосного тензометрирования. Приведены данные экспериментальных исследований влияния кинематических факторов на реакцию деформируемой преграды при столкновении с птицей. Проведена серия экспериментов по определению деформаций плоской преграды при ударе тушкой птицы. Экспериментально исследовано влияние скорости и угла соударения на максимальные деформации преграды.

Ключевые слова: экспериментальное исследование, тензометрия, деформация, динамика, птицевостокость.

УДК 519 : 539 : 534

Методика исследования и прогнозирования работоспособности фундаментов паровых турбин / С.В. Красников // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2014. – № 57 (1099). – С. 133-137. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

Предложены методики исследования и прогнозирования работоспособности фундаментов при продолжительном сроке эксплуатации. Предложены методики исследования и прогнозирования работоспособности фундаментов при продолжительном сроке эксплуатации. Они базируются на нормативных, экспериментальных и расчетных данных из эксплуатации фундаментов паровых турбин электростанций. В основе методик лежит оценка текущего состояния конструкции по параметрам вибрации. Разработанные методики предлагаются для использования на электростанциях для существующих и новых фундаментов паровых турбин.

Ключевые слова: работоспособность, вибрация, вынужденные колебания, фундамент, паровая турбина.

ABSTRACTS

Main results of scientific and pedagogical activity of professors of mechanics and control systems of NTU «KhPI» / A. G. Andreev, S. A. Nazarenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 3-14. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9130.

The paper researches the dynamic process of establishment and development scientific – pedagogical activity of professors of mechanics of National Technical University "Kharkiv Polytechnical Institute» in the 19 – 21 centuries. The origination of the Ukrainian technical science in the field of theory of control systems is connected with the NTU «KhPI». It discovered and explored the main scientific trends of evolution of establishing optimal control of moving objects and technological processes. Main phases of formation and development of research and design school of NTU «KhPI», its earlier spacecraft related works, subsequent work in the present-day period and implications for the spacecraft industry in Ukraine are shown. Names of persons are referred to, which were associated with the NTU «KhPI» school or left it. The Kharkiv oldest, rocket and space enterprises «Kommunar» and «Khartron» are the largest, producer's control systems for ballistic rockets and spaceships. Additionally to specific space products (launchers, satellites, space components, etc.) scientists of NTU «KhPI» also created the number of «common» products for the needs of machinery, power production, etc.

Keywords: mechanics, dynamics, scientific – pedagogical activity, higher technical education, guided missile, theory of control, launchers, satellites, spacecraft industry, engineers, designers.

An investigation of the power of the electromagnetic modulator of vibrations / A.E.Bozhko, E.M. Ivanov, Z.A.Ivanova, K.B.Myagkoleb // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 14-18. – Bibliogr.: 5. – ISSN 2078-9130.

Electromagnetic vibroexciters find wide adaptation in technological processes of condensation of environments, for movement in conveyors of materials, in test beds, etc. In each case loading is the weight which can be located on mobile parts (rotor) electromagnetic exciters directly, or through elastic elements (springs). For formation of movement of an rotor in the form of weights vibration it is necessary to know power parameters electromagnetic vibroexciter. The detailed analysis and a conclusion of power correlation taking into account of mechanical loadings and frequencies of mobile system electromagnetic exciters vibrations are absent, though some brief data about power electromagnetic exciters in the literature are available. In this paper an attempt is made to further define the energy indicators of electromagnetic exciters with regard to the vibratory motion of the mass and losses arising in electrical and mechanical parts.

Key words: anchor, air gap, damping, rigidity, oscillatory system.

Comparison of thermal stress for multilayer pipes with a protective layer of duralumin or carbon fiber / S.M. Vereshchaka, A.V. Deineka // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 19-30. – Bibliogr.: 4. – ISSN 2078-9130.

On the basis of the classical theory of elasticity of an anisotropic body compared stress-strain state of multilayer thick-walled cylinder of finite length under the action of internal pressure and temperature. The protective layer of the cylinder is made of aluminium and carbon fiber.

Kinematic and static contact conditions on the surfaces of adjacent layers are considered ideal. The solution of the problem was obtained in axisymmetric setting. The internal pressure and temperature load change sinusoidal the length of the cylinder. It is noted that the replacement of the dural protective layer composite pipes in carbon, significantly affects its stress state. Protective layer of carbon fiber was more effective version when comparing the stress-strain state of the considered design options cylinders.

Keywords: hollow cylinder, temperature; fiberglass; carbon fiber.

Analysis of electromagnetic and mechanical fields in compound constructions / D.V. Lavinsky // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 31-36. – Bibliogr.: 7. – ISSN 2078-9130.

The article in presence is devoted to analysis of the coupled electromagnetic and mechanical fields in composite structures. High-intensity electromagnetic fields are conditions for a variety of technical and technological objects. The interaction of electromagnetic fields with conductive bodies can cause their movement and deformation. Energy levels that are developed by an electromagnetic field can be significant to such an extent that it can lead to the destruction of elements of structures and machines. The creation of effective methods of analysis of the stress-strain state of the conductive bodies under the influence of electromagnetic fields is an important problem in scientific and practical terms. The paper presents a general approach to the analysis of deformation of the conductive bodies in the electromagnetic field. This approach relies on the analysis of the distribution of a vector of characteristics of the electromagnetic field and tensor characteristics of the deformation process. These characteristics are determined from the solutions of the two groups of differential equations. The first group describes the propagation of the electromagnetic field in the material, while the most often used representation of Maxwell, which formed the basis of the differential equations of the vector electric and magnetic field vector electric and magnetic induction currents and charges. Unsteady deformation of a system of interacting bodies is described by the known relationships, which include differential equations of motion (equilibrium), the geometric dependence (in the form of Cauchy) and the equation of state. Coupling of "electromagnetic" and "mechanical" processes is taken into account through the introduction of "electromagnetic" forces. To conduct the numerical analysis of the propagation vector component of the electromagnetic field in the article the concept of a vector magnetic potential is used.

Keywords: electromagnetic fields, vector magnetic potential, finite element method, stress-strain state.

A sub-modeling procedure on stress cycles determination of pneumatic tire structural elements / O. O. Larin, Ju. A. Petrova // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 37-49. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

The paper deals with a multiscale finite element modelling of the pneumatic tire deformation in a contact with the road. The modeling gave a possibility to find cycles of the stresses in the most loaded layers of tire.

Geometric and finite-element model of a pneumatic tire has been created. The model has multi-layer structure with unique properties of each layer. Neo-Hookean law is used for rubber-like materials. The orthotropy of mechanical properties of rubber-cord layers (carcass and belt) has been also taken into account. The orthotropy was set using local finite-toroidal coordinate systems.

These features causes a problem with numerical convergence for large FE models. So, the calculation of accurate results of strains and stresses makes the demand of successive mesh refining by sub-modelling approach. Three scale of models were developed.

The analysis of contact interaction between pneumatic tire and pavement (road surface) has been carried out on the base of first scale of modelling. It included geometrical and physical nonlinearity. The general deformation was obtained. These results are used as boundary conditions for sub-models. Refined calculations were done for second and third scale of modelling.

As a result of this calculation we have obtained the character of stress's and strain's distribution. According to results the most deformed zone of reinforced layers were identified and stress's cycles of the working tire were built at control zones for cord and rubber component separately. A phenomena of double stress's peaks in one cycle for shoulder zone of carcass and belt was identified.

Keywords: pneumatic tire, rubber-cord composites, stress's cycles, sub-modeling.

Analytical study of contact behavior of a section of a pipeline with a viscoelastic repair layer / G.I. Lvov, V.G. Martynenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 49-56. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

In this paper an analytical study on a stress-strain state of a steel pipeline section with a repair fiberglass viscoelastic layer is described. The layer is considered long enough that allows to solve the problem in a flat axisymmetric statement. The analytical model including accounting of an isotropic

viscoelasticity involves the need to construct and solve the boundary value problem for a system of integro-differential equations. In order to do it an approach based on a method of differentiation of integral equations is proposed. It is shown that for the initial time moment a solution of viscoelastic problem coincides with an elastic solution. Calculation results are presented as displacement and stress distributions versus radius and time curves. The viscoelastic model lets detect and discover such important properties of viscoelasticity as an increase of displacement over time and a stress relaxation in the composite layer. It is observed that at the same time the stress relaxation in the layer causes an increase of dangerous circumferential stresses in the steel pipeline. According to these results a conclusion about an impact of viscoelasticity on an overall assessment of strength of the construction is made. Also it is shown that for the specific set of physical and geometrical parameters of the construction stress relaxation in layer occurs in the moment of time with a value 200 hours and the maximum circumferential stress value increases by seven percent. The time result coincide with relaxation time obtained using numerical model based on a finite-element method of a commercial computer-aided engineering complex. The stress increase result also responds to the numerical assessment and this value can be much higher in case of stress concentration due to presence of defects in pipeline walls. Proposed analytical model allows to save computational resources and to extend its application to more complex cases of the stress-strain state.

Keywords: pipeline, layer, viscoelasticity, integral equation.

Identification of a calculation model of rotor of gas turbine unit installed on magnetic bearings according to geometric and dynamic parameters / G.Yu. Martynenko, O.V. Oliinyk // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 56-67. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9130.

Computational studies on the search of a calculation finite-element model of a rotor of a gas turbine unit installed on magnetic bearings based on incomplete data is described. This model is intended for in-depth analysis of its dynamic behavior. These studies were performed using a parametric modeling and a series of variant static and dynamic calculations in order to determine parameters of the calculation model by comparison with the known data. Variable parameters were diameters of the rotor sections, as well as density and elastic modulus (Young's modulus) of the material of its components. Known data based on which model identification was performed were scheme of the rotor, overall dimensions and dimensions between supports, masses, transverse and equatorial moments of inertia and centers of gravity of the turbocharger, the generator and the drive shafting, as well as natural frequencies and forms of the rotor of the gas turbine unit. While performing variant calculations beam finite element model of the rotor, consisting of three-dimensional beam finite elements with circular and annular sections with different sizes for different parts of the rotor, was used. Modeling of active magnetic bearings was performed using special elastic-damper finite elements. Using this model, two types of analyzes were carried out. To search for a variant of the model with given masses, moments of inertia and mass centers series of static calculations with different densities and diameters of the sections was provided. After finding the values of these parameters a search of the model was made by selection of the elastic modules (Young) to match the natural frequencies with their reference values in a given range. Final checking of the model was performed by calculating of the natural frequencies depending on a rotational speed of the rotor, formation of Campbell diagram for finding the critical speeds and comparing it with the given diagram. Numerical results show an adequacy of the found calculation model and its suitability for further researches.

Keywords: gas turbine power plant, rotor dynamics, magnetic bearings.

Free fluctuations of linearly-variable weights oscillator with dry friction / V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 67-76. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

In this paper was carried out a brief overview of the current state of the problem and analysis of publications on it. The aim of this article is to adapt the method to calculate the energy balance oscillators with variable mass under the action of dry friction force. First we considered the problem of the oscillator at a constant value of dry friction force. The problem is reduced to the integration of non-linear differential equations with variable coefficients. With the modified method of energy balance

were obtained approximate formulas for the calculation of the amplitude and the mass of the oscillator at the end of the k -th magnitude. We also obtain estimates for the limited number of ranges oscillator with variable mass. Exact, but one-sided estimates of scale were constructed by comparing oscillator variable and constant mass. The second was considered problem of the oscillator with a variable frictional force. Here, based on the energy balance method, formulas for calculating the amplitude of the oscillations at the end of the k -th magnitude were obtained. The conditions are investigated under which the process of the oscillator are complete. The work carried out numerical calculations in which a comparison of oscillation amplitudes obtained by the method of energy balance and the WKB method. A good agreement between the values in the amplitude calculated in different ways. Review the adequacy of two-sided estimates for the number of oscillation amplitudes. Also was compared the values of the amplitudes obtained by approximate formulas with the results of numerical integration of initial differential equations. Calculations were confirmed that received an upgraded energy method are quite suitable formula for calculating the amplitude damped oscillator linearly variable mass under the action of dry friction force.

Key words: free vibrations, linear-variable mass, dry friction.

On the calculation of the stress relaxation of nonlinear viscoelastic materials under uniaxial loading regimes / Y.V.Pavlyuk // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 77-91. – Bibliogr.: 15. – ISSN 2078-9130.

The problem of the calculation of creep strains of non linearly-viscoelastic materials under different regimes of nonstationary deformation, namely in terms of a stationary, single-stage and cyclic deformation is considered. The calculation is based on the nonlinear model of viscoelasticity with time-independent nonlinearity due to the use of diagrams instantaneous deformation as isochronous for zero time and smoothing cubic splines as approximations of nonlinear instantaneous deformation diagrams that define the non-linearity of the model. The nonstationary loading regimes are given by the Heviside's function. The calculation results of creep strains and stress relaxation of some nonlinear-viscoelastic materials under additional loading, partial unloading and cyclic loading have been approved experimentally.

Key words: nonlinear viscoelastic, nonlinear creep, nonlinear relaxation, exponential-fractional hereditary kernel, nonlinear viscoelastic materials, nonstationary loading.

Finding heat flux density in the plate of a heat sink by means of asymptotic Galerkin WKB-hybrid approach / A.M. Pogrebetskaya // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 91-96. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9130.

The solution of the problem of finding the heat flux density in the plate of the heat sink is presented in the work. The task of the work is to use the asymptotic double hybrid approach to nonlinear differential equations that describe the processes of heat exchange in various designs. The method of expansion by the parameter with a nonlinear component is used for external decomposition. The idea of the inner expansion is to combine the methods of phase integrals and Bubnov-Galerkin method. To find the missing value of the derivative function a closed analytic solution is found. The use of dual asymptotic approach greatly increased the range of the parameter with a non-linear component. A comparative analysis of the results with those obtained by other methods is conducted.

Keywords: asymptotic methods, dual hybrid WKB-Galerkin method, the heat flux density, a plate of a heat sink.

Using Pierre-Shaw nonlinear normal modes for analysis of free torsional oscillations in power transmissions / B.V. Uspensky, K.V. Avramov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 96-105. – Bibliogr.: 15. – ISSN 2078-9130.

Piecewise linear systems of differential equations model various technological processes. Such systems are commonly used to model dynamics of systems with clearances, flexible couplings, gear trains and splined connections. Piecewise linear systems show complex dynamical behavior. A problem of obtaining Shaw-Pierre nonlinear normal modes for piecewise linear systems is considered in the paper. A modification of the Shaw-Pierre normal modes technique is suggested to half the number of corresponding algebraic equations. Efficiency of the method is demonstrated using a mathematical model of torsional oscillations of a power transmission in a triplex transport engine. Bilinear and symmetric trilinear types of elastic force are considered. A conclusion about connection between Shaw-Pierre and Rosenberg nonlinear normal modes has been made. Results of form calculations are numerically verified by comparing with expected system dynamics.

Keywords: nonlinear normal modes, Pierre-Shaw normal modes, piecewise linear system, torsional oscillations, free oscillations, power transmission.

Computer modelling of some types of shaped connections with interference at axial loadings / R. A. Shevchenko, A. G. Andreev // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 106-114. – Bibliogr.: 17. – ISSN 2078-9130.

Interference fit is one of the most common widely in construction and engineering strained compounds, some cases replacing bolted and riveted joints, partially drills and screw. In this paper proposes a program integrated with a PC ANSYS, which allows the analysis of compounds with interference shafts and bushings under the influence of different forms of axial loads. The program consists of a control unit, which consists of two main components. The first component allows you to perform data integration, given the program from your PC ANSYS, perform calculations and store the result in a file format vrm. Another component reads the data obtained from this file and means of the built-in OpenGL library has the ability to visualize them. This approach allows the development of a program to limit the use of third-party plug-ins in it to demonstrate the three-dimensional interactive vector graphics. Allows you to put more emphasis on the user interface directly with an interactive program. Reducing thus the time to design and allowing more focus on the analysis.

Keywords: shaped connection, interference, program.

Theoretical and experimental investigation of wave propagation in the sapphire rod / A. N. Shupikov, L. A. Lytvynov, S. V. Ugrimov, S. Yu. Sotrikhin, V. G. Yareschenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 115-125. – Bibliogr.: 14. – ISSN 2078-9130.

A theoretical study of the wave propagation in the sapphire rods with different orientation of the crystallographic axes is performed. The problem of propagation of Rayleigh waves in a sapphire rod under longitudinal impact is formulated and solved. The theoretical dependence of the wave velocity from the rotation angle of the crystallographic axes in the rod is obtained. A comparison of calculation results with data obtained by the classical rod model is performed. It is found the velocities of the wave propagation received by the Rayleigh model and the classical rod model for the considered long sapphire rod are practically identical. It is shown that the velocity of waves in a rod essentially depends on the orientation of the crystallographic axes of the sapphire in it. The theoretical results are compared with experimental data studies of wave propagation obtained with wide range strain measurement technique. The good agreement of the theoretical results with the experimental data is established.

Keywords: elasticity theory, wave propagation, Rayleigh wave, impact loading, anisotropy, sapphire.

Experimental research of the reaction of rigid plates on bird strike / V. G. Yareschenko // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 126-133. – Bibliogr.: 12. – ISSN 2078-9130.

The problem of experimental study of the reaction of rigid plates on a bird strike by dynamic broadband strain measurement are considered in work. Data of experimental researches of influence of kinematical factors on response of a deformable plate-target at collision with a bird are presented. A

series of experiments by definition of deformations of a flat plate are carried out at impact by the birds. Influence of different impact angles and velocities on maximum deformations of target is investigated. Extensive full-scale experiments in investigating the response of a plate have demonstrated that the maximum plate strain values decrease with decreasing impact angle. It is shown that, with increasing velocity of the fired object, the plate strain grows, the strain vs. velocity dependence being close to a quadratic one. Experimental data, obtained by using the dynamic wide-range strain measurement technique, are in good agreement with theoretical results.

Keywords: experimental research, strain gauges, deformation, dynamics, birdstrike resistance.

Method for research and forecasting of working capacity for steam turbine foundations / S.V. Krasnikov // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2014. – № 57 (1099). – P. 133-137. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

Considered working capacity steam turbine foundations with significant time of operation using. Particular attention is paid to the foundation with vibration levels higher than current standard rates. We consider first the most common of existing bases in Eastern Europe, which are made of reinforced concrete. The general and subsidiary methodics of research and forecasting efficiency foundations for long life are proposed. These methods are based on laws documents, experimental and calculated data bases of operation of steam turbine power plants. The methodology is to assess the current state of the design for the control parameters. As parameters, according to existing regulations, proposed to use speed vibration, movement or vibration, acceleration vibration. These options are experimental measurements and the results of calculations. Developed methodics of available for use in power plants for existing and new steam turbine foundations.

Key words: performance, vibration, forced oscillations, foundation, steam turbine.

ЗМІСТ

<i>Андреев А. Г., Назаренко С. А.</i> Основные работы ученых ХПИ в области управления механическими системами	3
Божко А. Е. , <i>Иванов Е. М., Иванова З. А., Мякохлеб К.Б.</i> Исследование мощности электромагнитных модуляторов вибраций	14
<i>Верещака С. М., Дейнека А. В.</i> Термоупругое напряженное состояние многослойной трубы с защитным слоем из дюралюминия и углепластика	19
<i>Лавинский Д. В.</i> Анализ электромагнитных и механических полей в составных конструкциях	31
<i>Ларін О. О., Петрова Ю. А.</i> Визначення циклів напружень елементів пневматичної шини з використанням процедури субмоделювання	37
<i>Львов Г. І., Мартиненко В.Г.</i> Аналітичне дослідження контактної поведінки ділянки трубопроводу з в'язкопружною ремонтною накладкою	49
<i>Мартыненко Г. Ю., Олейник А. В.</i> Идентификация расчетной модели ротора газотурбинной установки в магнитных подшипниках по геометрическим и динамическим параметрам	56
<i>Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.</i> Свободные колебания осциллятора линейно-переменной массы с сухим трением	67
<i>Павлюк Я. В.</i> До розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів при нестационарному одновісному деформуванні	77
<i>Погребницкая А. М.</i> Нахождение плотности потока тепла в пластине теплового радиатора с помощью асимптотического гибридного ВКБ-Галеркин подхода	91
<i>Успенский Б. В., Аврамов К. В.</i> Анализ свободных крутильных колебаний силовых передач методом нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера	96
<i>Шевченко Р. А., Андреев А. Г.</i> Компьютерное моделирование некоторых типов профильных соединений с натягом при осевых нагрузках	106
<i>Шушиков А. Н., Литвинов Л. А., Угримов С. В., Сотрихин С. Ю., Ярещенко В. Г.</i> Теоретическое и экспериментальное исследование процесса распространения волн в сапфировых стержнях	115
<i>Ярещенко В. Г.</i> Экспериментальное исследование реакции жесткой плиты на удар птицей	126
<i>Красніков С. В.</i> Методика дослідження та прогнозування працездатності фундаментів парових турбін	133
Реферати	138
Рефераты	142
Abstracts	146

CONTENTS

<i>Andreev A. G., Nazarenko S. A.</i> Main results of scientific and pedagogical activity of professors of mechanics and control systems of NTU «KHPI» . . .	3
Bozhko A. E. , <i>Ivanov E. M., Ivanova Z. A., Myagkohleb K. B.</i> Analysis of capacity of vibrations electromagnetic modulators	14
<i>Vereshchaka S. M., Deineka A.V.</i> Comparison of thermal stress for multi-layer pipes with a protective layer of duralumin or carbon fiber	19
<i>Lavinsky D.V.</i> Analysis of electromagnetic and mechanical fields in compound constructions	31
<i>Larin O. O., Petrova Ju. A.</i> A submodeling procedure on stress cycles determination of pneumatic tire structural elements	37
<i>Lvov G. I., Martynenko V. G.</i> Analytical study of contact behavior of a section of a pipeline with a viscoelastic repair layer	49
<i>Martynenko G. Yu., Oliinyk O. V.</i> Identification of a calculation model of rotor of gas turbine unit installed on magnetic bearings according to geometric and dynamic parameters	56
<i>Ol'shanskij V. P., Ol'shanskij S. V.</i> Free fluctuations of linearly-variable weights oscillator with dry friction	67
<i>Pavlyuk Y. V.</i> On the calculation of the stress relaxation of nonlinear viscoelastic materials under uniaxial loading regimes	77
<i>Pogrebitskaya A. M.</i> Finding heat flux density in the plate of a heat sink by means of asymptotic Galerkin WKB-hybrid approach	91
<i>Uspensky B. V., Avramov K. V.</i> Using Pierre-Shaw nonlinear normal modes for analysis of free torsional oscillations in power transmissions	96
<i>Shevchenko R. A., Andreev A. G.</i> Computer modelling of some types of shaped connections with interference at axial loadings	106
<i>Shupikov A. N., Lytvynov L. A., Ugrimov S. V., Sotrikhin S. Yu., Yareschenko V. G.</i> Theoretical and experimental investigation of wave propagation in the sapphire rod	115
<i>Yareschenko V. G.</i> Experimental research of the reaction of rigid plates on bird strike	126
<i>Krasnikov S. V.</i> Method for research and forecasting of working capacity for steam turbine foundation	133
Abstracts (in Ukrainian)	138
Abstracts (in Russian)	142
Abstracts	146
<hr/> ISSN 2078-9130. Вісник ХТУ «ХІІІ». 2014. № 57 (1099)	153

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»**

Збірник наукових праць

Серія:
Динаміка і міцність машин

№ 57 (1099)

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. О. К. Морачковський
Технічний редактор: О. В. Щепкін

Відповідальний за випуск: канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21,
НТУ «ХПІ». Каф. ДММ
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Обл.-вид № 99-14.

Підп. до друку 19.12.2014 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 9,25. Облік.-вид. арк. 9,5.
Тираж 100 пр. Зам. № 198. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вил Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра»
Свідоцтво про Державну реєстрацію 2480000000115022 від 01.01.2011 р.
Адреса: 61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28-А.
