



ВІСНИК

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»**

58'2013

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Серія: Динаміка і міцність машин

№ 58 (1031) 2013

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2013

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2013. – № 58 (1031). – 194 с.

Державне видання

**Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року**

Збірник виходить українською та російською мовами.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).

Координаційна рада:

Голова: Л. Л. Товажнянський, д-р техн. наук, проф.;

Секретар: К. О. Горбунов, канд. техн. наук, доц.;

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.; Є.І.Сокол, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;

Є. С. Александров, д-р техн. наук, проф.; А. В. Бойко, д-р техн. наук, проф.;

Ф. Ф. Гладкий, д-р техн. наук, проф.; М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, проф.;

А. І. Грабченко, д-р техн. наук, проф.; В. Г. Данько, д-р техн. наук, проф.;

В. Д. Дмитрисенко, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. Домнін, д-р техн. наук, проф.;

В. В. Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. Зайцев, канд. техн. наук, проф.;

П. О. Качанов, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Клепіков, д-р техн. наук, проф.;

С. І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф.; В. М. Кошельник, д-р техн. наук, проф.;

В. І. Кравченко, д-р техн. наук, проф.; Г. В. Лісачук, д-р техн. наук, проф.;

О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.; В. І. Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;

П. Г. Перерва, д-р екон. наук, проф.; В. А. Пуляев, д-р техн. наук, проф.;

М. І. Рищенко, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Самородов, д-р техн. наук, проф.;

Г. М. Сучков, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. Тимофієв, д-р техн. наук, проф.;

М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний секретар: А.Г.Андрєєв, канд. техн. наук, доц.

К.В.Аврамов, д-р техн. наук, проф.; Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;

Д.В.Бреславський, д-р техн. наук, проф.; Ю.С.Воробйов, д-р техн. наук, проф.;

А.П.Зиньковський, д-р техн. наук, проф.; Л.В.Курпа, д-р техн. наук, проф.;

Г.І.Львов, д-р техн. наук, проф.; Ю.В.Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.;

М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.; Ю.М.Шевченко, академік НАНУ, д-р техн. наук, проф.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Динаміка і міцність машин», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 9 від 1 листопада 2013 р.

© Національний технічний університет «ХПІ», 2013

К ЮБИЛЕЮ УЧЕНОГО, УЧИТЕЛЯ, ЧЕЛОВЕКА
70 лет доктору технических наук, профессору
ЛЬВОВУ ГЕННАДИЮ ИВАНОВИЧУ



30 июля 2013 года – день рождения Геннадия Ивановича Львова, заведующего кафедрой динамики и прочности машин НТУ «ХПИ», 70-тилетний юбилей которого не только повод отметить его заслуги, но и продемонстрировать пример активной жизненной позиции и целеустремленности.

Львов Геннадий Иванович – ученый-механик, известный своими научными трудами в области нелинейной механики, ползучести и длительной прочности тонкостенных конструкций, контактных задач упруго-пластического деформирования, технологических задач формообразования оболочек, доктор технических наук, профессор, академик АН высшей школы Украины.

Жизненный путь

Жизненный путь Геннадия Ивановича Львова является образцом подражания для молодежи, примером достижения поставленных целей, доказательством исполнимости желаний, если их приближению неукоснительно следовать, невзирая ни на какие, даже неблагоприятные обстоятельства, которыми полна жизнь любого человека. Геннадий Иванович Львов родился 30.07.1943г. в г.Харькове. После окончания средней школы и электромеханического техникума в г. Харькове, он служил в армии. С 1965 по 1969 гг. работал на Харьковском электромеханическом заводе инженером, а с 1969 по 1970 гг. – старшим инженером КБ Электроприборостроения. В 1971 году он с отличием окончил инженерно-физический факультет Харьковского политехнического института по специальности динамики и прочности машин.

Совмещая работу в КБ Электроприборостроения и учебу на инженерно-физическом факультете по специальности динамики и прочности машин, он всегда успешно сдавал зачеты и экзамены в институте. Его способности к самостоятельному овладению знаниями в довольно не простых областях фундаментальных наук, не могли не быть замеченными весьма квалифицированным в то время составом преподавателей кафедры динамики и прочности машин. Приходя на кафедру с занятием или экзамена, они живо обменивались свои впечатлениями о студенте Львове Г.И., приводили примеры его блестящих ответов и проявленных способностей. Не удивительно, что еще за год до окончания института Геннадий Иванович был приглашен на кафедру динамики и прочности машин для работы инженером. Это, несомненно, опреде-

лило его дальнейшую судьбу ученого и педагога в Харьковском политехническом институте. С 1970 года Геннадий Иванович работает на кафедре инженером в научной группе проблемной лаборатории кафедры динамики и прочности машин под руководством авторитетного ученого и талантливого педагога Анатолия Васильевича Бурлакова, который во многом определил и творческую судьбу Геннадия Ивановича. Не смотря на разницу в положении и возрасте сотрудников группы, Анатолий Васильевич умело поддерживал дух товарищества, требовательность и сосуществование разных интересов. Сам А.В. Бурлаков был всю свою жизнь увлеченным человеком с разносторонними интересами и собирал возле себя людей, интересы которых не сводились к работе, их масштаб был значительно шире: поэзия, литература, театр и спорт. Геннадий Иванович много читал, увлеченный художественной литературой, многое из А.П. Чехова знал на память, занимался спортом. В свое время, тренировки у видных тренеров Харькова по спортивному плаванию привели его в спортивную роту на службе в армии, где он был участником и победителем армейских соревнований. В это время, как оказалось и на всю жизнь, для Геннадия Ивановича наибольшим увлечением - хобби на уровне профессионализма – всегда был яхтенный спорт. Он получил удостоверение капитана крейсерских яхт и все свободное время проводил в знаменитом яхт-клубе при Харьковском заводе им. Малышева или участвовал в регатах по Черному морю, на Балтике. В это же время в научной группе А.В. Бурлакова работали выпускники кафедры динамики и прочности машин А.Д. Супрун, получивший международную известность на выставках работ как фотохудожник, О.К. Морачковский – в школьные годы обучался рисованию, имел неплохие акварельные этюды, увлекался журналистикой, поэзией и литературой.

Ученый

С приходом в научную группу проф. Бурлакова талантливого и опытного инженера Львова Г.И., заметно стали развиваться методы экспериментальных исследований в области высокотемпературной ползучести и численно-аналитические методы в расчетах на ползучесть оболочек с отверстиями. В 1975 году под руководством проф. Бурлакова А.В. он успешно защитил диссертацию, в которой дал оригинальное решение проблемы концентрации напряжений в многосвязных оболочках с отверстиями при ползучести, за что ему была присуждена ученая степень кандидата технических наук.

С этого времени началась настоящая творческая работа Г.И. Львова со своим учителем – профессором А.В. Бурлаковым. Они опубликовали работу в Журнале «Известия АН. Механика твердого деформируемого тела», в которой впервые были даны постановки и ряд аналитических решений обратных задач формообразования оболочек. Это направление научных исследований имело важное прикладное значение для ракетно-космической и авиационной техники. И после смерти учителя – проф. Бурлакова А.В., Геннадий Иванович продолжил исследования в этом направлении, получил важные теорети-

ческие и численные решения по проблеме, результаты которых были использованы в авиационной отрасли. С 1980 г. он назначается научным руководителем научно-исследовательских бюджетных и хоздоговорных работ в проблемной лаборатории кафедры, принимает участие в работе специализированного ученого совета по защитам диссертаций, как ученый секретарь и член совета.

В 1985 г. после успешной защиты докторской диссертации, в которой им были представлены решения ряда новых контактных задач упругопластического деформирования и технологических задач формообразования оболочек, Г.И.Львову присвоена ученая степень доктора технических наук по специальности динамики и прочности машин, а в 1986 г. – ученое звание профессора.

Проф. Львов Г. И. – талантливый преподаватель. Теория пластичности и ползучести – был его первым самостоятельным курсом лекций для студентов динамики и прочности машин. Этот курс лекций был создан ранее и с 1962 г. читался студентам проф. Бурлаковым А.В., а с 1975 года – передан доц. Бортовому В.В., работавшему в это время на кафедре динамика и прочность машин. С 1978 г. доц. Бортовой В.В. избирается заведующим кафедрой сопротивления материалов и с этого времени читает лекции по сопротивлению материалов для студентов специальности динамики и прочности машин. Геннадий Иванович сумел сохранить от предшественников фундаментальность этого курса, и вместе с тем сделал его современным. С тех пор перечень курсов лекций, который проф. Г.И. Львов читал на кафедре, заметно расширился, и включает лекционные курсы: «Теория упругости», «Основы механики сплошных сред», «Реология», «Теория пластин и оболочек». Проф. Львов Г.И. руководит аспирантами, курсовыми и дипломными работами студентов специальности динамики и прочности машин. Его лекции и учебные занятия для студентов отличаются высокой степенью завершенности и точностью изложения сути вопроса. Единение добытых в собственных исследования научных знаний с умением ясно передавать эти знания студентам – так кратко можно сформулировать принцип, который использует проф. Львов Г.И. в обучении студентов. Он активно проводит научные исследования, публикуется в отечественных и зарубежных научных изданиях, предлагает темы научных исследований для многих своих сотрудников и аспирантов. Им опубликовано более 150 научных публикаций, 5 монографий.

Организатор

В 1988 г. проф. Львов Г.И. избирается деканом инженерно-физического факультета, а с 1991 по 1999 гг. он работает проректором университета по научной работе, совмещая научную и педагогическую работу на кафедре.

С 1986 г. он активно участвует в государственных структурах по аттестации научных кадров: был членом экспертных советов Высшей Аттестационной Комиссии (с 1986 по 1998 гг.), заместителем председателя и с 1999 г. – председатель специализированного ученого совета по защитам диссертаций по специальности динамики и прочности машин.

В 1991 году проф. Львов Г.И. был избран заведующим кафедрой динамики и прочности машин. С приобретением опыта руководителя в университете, проф. Львов Г.И. становится талантливым организатором и координатором научно-исследовательских работ, руководит научными программами и темами, много внимания уделяет международному сотрудничеству, участию в международных конкурсах научных проектов. Он становится руководителем программ Европейского Союза и США «Темпус-Тасис», «Инко-Коперникус», Информационного агентства США. В настоящее время выполняется Европейский проект «INNOPIRES» по 7-й рамочной программе ЕС. Под его руководством защищено более десяти кандидатских и одна докторская диссертации.

Учитель и воспитатель

Избрание и, в последующем, работа заведующим кафедрой динамики и прочности машин для проф. Львова Г.И. оказались совмещенными с периодом его работы деканом инженерно-физического факультета и проректором по науке в университете. Организационные способности проф. Львова Г.И., мудрость и жизненный опыт в это время проявились наиболее ярко. Совмещение им каждого вида его служебной деятельности не отразилось на творческом пути развития кафедры. С переходом в Украине на ступенчатое образование, впервые стали готовить бакалавров и специалистов, позже магистров по специальности, которая стала называться «Динамика и прочность». На кафедре активно совершенствовалось образование. За счет перехода на бакалаврское направление «Механика», а не «Инженерная механика», как это в период коренных изменений в подготовке специалистов в Украине рекомендовалось Министерством образования Украины, профессору Львову Г.И. удалось сохранить существовавшие традиции учебных планов специальности динамики и прочности машин. Это стало возможным за счет привлечения на преподавательскую работу талантливых научных сотрудников кафедры. В настоящее время бакалаврское направление «Механика» в Украине переименовано в «Компьютерную механику» и на кафедре ведется подготовка по специальностям **«Информационные технологии проектирования»** и **«Компьютерная механика»**.

С приходом проф. Львова Г.И. на заведование кафедрой динамики и прочности машин заметно расширилась компьютерная база. За счет приобретения персональных компьютеров (ПЭВМ) был преобразован кафедральный вычислительный центр (ВЦ), сначала в обще-факультетский ВЦ, а затем в ВЦ кафедры со штатом сотрудников для его обслуживания. В освоении новой компьютерной техникой и технологий, при создании локальных сетей и их использовании в обучении студентов, большая роль принадлежит: О.Л. Шелудякову, талантливому выпускнику факультета по специальности динамики и прочности машин, заведующему ВЦ, а также сотрудникам кафедры: А.Н. Ломакину, канд. техн. наук, научному сотруднику, инженеру Л.И. Соболю и Г.Н. Багацкой, и многим другим.

Так впервые в истории кафедры динамики и прочности машин, профес-

сором Львовым Г.И., при непосредственном и активном участии преподавателей кафедры, была открыта новая специальность «Информационные технологии проектирования», студенты стали получать новую современную квалификацию инженера-системного аналитика.

Основной областью деятельности таких специалистов является: разработка, эксплуатация и сопровождение систем автоматизированного проектирования новой техники в турбиностроении, двигателестроении, транспортном машиностроении, биотехнологиях, медицине и других сферах деятельности. В содержание образования входят: современные компьютерные технологии проектирования. В отличие от подготовки по аналогичной специальности в Украине, на кафедре динамики и прочности машин для них реализуется усиленная механико-математическая подготовка по прочности материалов и конструкций. Традиции кафедры удалось сохранить благодаря традиционному подбору состава высококвалифицированных преподавателей на кафедре.

Современное состояние науки и повсеместное внедрение информационных технологий в научно-техническую деятельность, как веление времени, находит отражение и в подготовке бакалавров, специалистов и магистров.

Основной областью деятельности таких специалистов стало: проектирование новой техники на основе современных математических моделей прочности материалов и конструкций с использованием современных компьютерных технологий. В содержание образования включены: традиционная усиленная подготовка по математике, механике деформируемых тел, численным методам, теории оптимального проектирования, технической диагностике и другим дисциплинам, и специальная подготовка по информатике и компьютерным технологиям для исследований и решения практических задач прочности, надежности, оптимизации конструкций новой техники.

Студенты, окончившие инженерно-физический факультет по специальностям динамики и прочности, информационных технологий проектирования успешно ведут практическую работу исследователей и расчетчиков конструкторских отделов и экспериментальных лабораторий предприятий. Они получают работу в НПО «Турбоатом», ГП «Завод им. Малышева», на Харьковском тракторном заводе, ОАО «Потенциал», ОАО «Анкор-Теплоэнерго», ЦКБ «Энерго» и других государственных и акционерных предприятиях, где проектируют и создают новую технику.

Список книг и монографий: 1. Ползучесть тонких оболочек : монография. – Х.: Вища школа, изд-во при ХГУ, 1977. – 123 с. (соавторы Бурлаков А.В., Морачковский О.К.). 2. Длительная прочность оболочек : монография. – Х.: Вища школа, изд-во при ХГУ, 1981. – 102 с. (соавторы Бурлаков А.В., Морачковский О.К.). 3. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций : монография. – К.: Наукова думка, 1984. – 259 с. (савторы Подгорный А.Н, Бортовой В.В., Гонтаровский П.П. и др.). 4. Технология производства изделий и интегральных конструкций из композиционных материалов в машиностроении : монография. – М.: Готика, 2003. – 512 с. (савторы Боголюбов В.С. и др.). 5. Нелинейные контактные задачи для тонкостенных элементов конструкций в машиностроении. – М.: Doby and Co. – 310 с. (савторы Боголюбов В.С., Сироткин О.С.).

Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;
С. А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, ст. научн. сотр., НТУ «ХПИ»;
В. Л. ХАВИН, канд. техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ», Харьков

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ ЧЛЕНА-КОРРЕСПОНДЕНТА АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНЫ В. М. МАЙЗЕЛЯ

Статья посвящена описанию научной и педагогической деятельности выдающегося ученого в области механики, одного из основателей кафедры «Динамика и прочность машин», члена-корреспондента Академии наук Украины В. М. Майзеля.

Ключевые слова: механика, машиностроение, динамика, прочность, высшее техническое образование; термоупругость, теория гидротурбомашин, принцип Бетти–Майзеля, метод Майзеля.



В то время теоретическую механику в ХТИ преподавал заслуженный профессор Н. А. Столяров, в дальнейшем заштатный академик Всеукраинской Академии Наук (АН), председатель математической секции при Академии. Курсы лекций по сопротивлению материалов и строительной механике читал заслуженный профессор и заведующий механической лабораторией ХТИ В. М. Серебровский, ранее работавший под руководством В. Л. Кирпичева старшим лаборантом в Киевском Политехническом институте (КПИ) и с 1903 г. сменивший его на кафедре сопротивления материалов и на посту заведующего механической лабораторией КПИ. Яркое впечатление на В. М. Майзеля оказали

лекции по методам испытания материалов и прикладной механике заслуженного профессора Я. В. Столярова. Курсы лекций по графической статике, проектированию, черчению читал профессор М. А. Воскресенский. Столяров и Воскресенский были учениками В. Л. Кирпичева и Д. С. Зернова.

Выпускник 1891 г. ХТИ, профессор Г. Ф. Бураков, в дальнейшем Председатель Постоянного бюро теплотехники Научно-технического управления Высшего Совета народного хозяйства (ВСНХ) Украинской ССР, преподавал техническую термодинамику. Профессор Г. Ф. Проскура, ученик Н. Е. Жуковского и Д. С. Зернова, читал курсы лекций по регуляторам хода машин, гидравлике, гидравлическим двигателям.

В 1921 г. Майзель получил диплом с отличием в ХТИ и начал работать

инженером Главкомхоза по гидромашиностроению. В 1922 г. он успешно завершил учебу на физико-математическом отделении Харьковского института народного образования (ХИНО), в который был преобразован Харьковский университет. Во время обучения Майзель прослушал лекции по аналитической и дифференциальной геометрии председателя Харьковского математического общества Д. М. Синцова; по теории вероятностей и математической статистике профессора С. Н. Бернштейна; по теоретической механике ректора ХИНО А.-Б. П. Пшеборского, который из-за «антипольского указа» 1864 г. смог лишь в ХТИ получить с 1898 г. должность штатного доцента механики.

В 1923 г. Майзель получил диплом Харьковского института народного хозяйства, учебный план которого был выработан в соответствии с целевой установкой «готовить организаторов промышленности». В 1924-1925 гг. он работал инженером конструкторского бюро Харьковского паровозостроительного завода, где занимался проектированием гидравлических машин.

В Харьковской индустриально-технической группе Укрглавпрофобром было образовано 12 научно-исследовательских кафедр по различным направлениям, из которых 9 – на основе ХТИ. Майзель начал вести научную работу, став внештатным аспирантом научно-исследовательской кафедры гидромеханики и авиации при ХТИ (заведующий - декан механического факультета ХТИ Г. Ф. Проскура), а впоследствии ее научным сотрудником вместе с Блохом и Ксандровым.

В 1925 г. Майзель стал заместителем начальника Научно-технического управления ВСНХ УССР – центрального советского органа по регулированию и управлению основными отраслями промышленности и строительства. Под эгидой Научно-технического управления в УССР была создана сеть научно-исследовательских институтов индустриального профиля: промышленной энергетики, металлов, угольный, сооружений, физико-технический (УФТИ) и др. В январе 1926 г. был образован первый общетехнический украинский журнал «Науково-технічний вісник» (тираж 3000 экз.), который являлся органом Технической Секции Харьковского Научного Товарищества при Украинской АН, Управления научными организациями НКО и Научно-Технического Отдела ВСНХ.

В октябре 1928 г. в журнале «Науково-технічний вісник» № 10 выходит статья Майзеля: «Визначення характеристик відосередкових смоків». В том же году во французском журнале «Comptes rendus» была опубликована его статья, включавшая доказательства двух теорем о вращении цилиндрических тел («Sur le mouvement relatif d'un liquide remplissant un vase tournant»). В 1929 г. Майзель защитил диссертацию «К исследованию работы и движения жидкости во вращающихся лопастях центробежных насосов». Оппонентами были академики Н.М. Крылов и Г.Ф. Проскура, профессор С.П. Шенберг. В диссертации Майзель изучил движение жидкости внутри колес центробежных насосов с учетом влияния числа лопаток и их профиля при любом значе-

нии внутреннего диаметра лопасти.

В 1928 г. Майзель начал преподавать в ХТИ. Он совмещал преподавание в институте с разработкой методов расчетов прочности конструкций в Украинском научно-исследовательском институте сооружений, в котором сотрудничал с профессором Я. В. Столяровым и выпускником ХТИ А. П. Филипповым, в дальнейшем академиком АН УССР. В 1930 г. в Харькове состоялся Первый Всесоюзный математический съезд. На нем В. М. Майзель выступил с докладом «Дифференциальные уравнения, охватывающие физические явления целиком; интегралы этих явлений».

В начале 1930-х годов решено было образовать специализированные институты для подготовки инженерно-технических кадров. В период с 1930 по 1941 гг. профессор Майзель преподавал в харьковских институтах: механико-машиностроительном (ХММИ), инженерно-строительном, авиационном (ХАИ), автодорожном (ХАДИ) и др. Блох был заведующим кафедрами пневматических устройств и сопротивления материалов ХММИ. Ксандров стал первым деканом факультета самолетостроения ХАИ и заведующим кафедрой строительной механики ХАДИ.

После отъезда академика АН СССР С. Н. Бернштейна в Ленинград в 1933 г. В. М. Майзель стал заведующим кафедрой прикладной механики в Харьковском физико-химико-математическом институте (ХФХМИ). В воссозданном Харьковском университете с 1934 г. Майзель заведовал восстановленной кафедрой теоретической механики. Также он стал заведующим секцией механики Научно-исследовательского института математики и механики. Майзель вел активную научную деятельность, с 1934 г. он также работал в качестве старшего научного сотрудника в Институте строительной механики АН УССР.



На созданном в 1930 г. физико-механическом факультете ХММИ профессор Майзель заведовал также специальностью «Динамика машин» (в дальнейшем кафедра «Динамика и прочность машин»), которая положила начало подготовке инженеров-исследователей в области механики. Первым деканом нового факультета стал директор и один из организаторов УФТИ, академик И. В. Обреимов. Затем деканом физико-механического факультета был профессор Блох. Существенный вклад в организацию специальности и в дальнейшее ее развитие внес заместитель директора института по учебной работе профессор И. М. Бабаков. В те годы на факультете

работали ученые, которые в дальнейшем обрели всемирное признание – академики Л. Д. Ландау, К. Д. Синельников, А. К. Вальтер, А. И. Лейпунский и др.

В «системе ФизМеха» сочетались и дополняли друг друга фундамен-

тальное образование, инженерные дисциплины, научно-исследовательская работа студентов с использованием передовых приборов и установок на базе ведущих институтов и конструкторских бюро. Кафедра «Динамика и прочность машин» Ленинградского политехнического института была организована в 1934 году на основе специальности «Динамические явления в машинах и механизмах», которую открыл заслуженный деятель науки Е. Л. Николаи. В 1961 г. специальность «Динамика и прочность машин» появилась в Московском высшем техническом училище. Затем она была введена в двенадцати вузах СССР.

Среди учеников Майзеля выделим А. Н. Боголюбова, обучавшегося у него в Харьковском университете на механическом отделении физико-математического факультета, по окончании которого в 1936 г. поступившего в ХММИ. По рекомендации Майзеля Боголюбов, который учился два года по специальности «Динамика машин», начал исследования в области механики машин, сдал кандидатские экзамены и написал диссертацию на тему «Синтез механизмов» во время работы в ХММИ. В дальнейшем Боголюбов стал членом-корреспондентом АН УССР, Заслуженным деятелем науки и техники УССР, лауреатом премии им. Н. М. Крылова и Международной премии им. А. Койре. Выпускник ХММИ 1935 г. П. Е. Саблев стал Героем Социалистического Труда, лауреатом Сталинской премии СССР за создание танковых дизель-моторов; директором Харьковских завода «Серп и Молот» и тракторного завода; Заслуженным машиностроителем УССР. Выпускник ХММИ 1937 г. Э. Я. Саркисянц стал главным конструктором Волгоградского тракторного завода, лауреатом Государственной премии СССР, директором Алтайского тракторного завода. Студент предвоенных лет А. В. Дабагян был исполняющим обязанности заведующего родной кафедры ДПМ, основателем и заведующим кафедрами «Автоматическое управление движением» и «Автоматизированные системы управления» в Харьковском политехническом институте, Заслуженным работником высшей школы Украины.

Основные научные работы В. М. Майзеля относятся к термоупругости, динамике машин, теории гидротурбомашин. Он является автором основополагающих работ по проблеме напряженного состояния упругих систем под влиянием температуры, в которых обобщил принцип взаимности Бетти (названный затем принципом Бетти-Майзеля). Полученная Майзелем формула обобщила теорему о взаимности работ на случай статической и квазистатической задач термоупругости и охватила широкий класс задач в строительной механике и механике твердого тела. В. М. Майзель впервые использовал этот принцип для создания метода экспериментального определения напряженно-деформированного состояния в нагретых телах, получившего название «метод Майзеля». В 1941 г. фундаментальная работа Майзеля «Обобщение теоремы Бетти-Максвелла на случай термического напряженного состояния и некоторые его приложения» была опубликована в «Докладах АН СССР» (Т. 30, № 2). Метод Майзеля вошел в учебники и, например, изложен

в знаменитом курсе С. П. Тимошенко и Дж. Гудьера «Теория упругости», монографии А.Д. Коваленко «Основы термоупругости». Директор Института механики АН УССР, академик А. Д. Коваленко с 1936 г. работал вместе с В. М. Майзелем в Институте строительной механики АН УССР и после его смерти продолжил исследования в области термоупругости.

В. М. Майзель достиг значительного прогресса в разработке метода оптического определения напряжений в деталях машин и теории гибких валов. В. М. Майзель развил достигнутые им в теории насосов результаты на турбомашин, в том числе на роторные компрессоры. Он предложил новый цикл работы компрессоров. Решенные им задачи были чрезвычайно актуальны для машиностроения и индустриализации страны в годы первых пятилеток. Под его редакцией вышли несколько томов фундаментального справочного руководства по машиностроению (Харьков; Киев: ОНТИ Гос. науч.-тех. изд-во Украины; 4000 экз.), каждый объемом около 800 страниц.

Методы, разработанные Майзелем, лежали в основе научных исследований, проводившихся в те годы на кафедре ДПМ. Профессор Майзель создал при кафедре ДПМ хорошо оснащенную лабораторию, в которой были реализованы его идеи. Только в 1939 г. у него в «Доповідах Академії наук УРСР» вышли следующие статьи: «Визначення напруженого стану за допомогою «трикомпонентного тензометра», «Метод наближеного визначення характеристичних чисел у деяких фізико-механічних і технічних питаннях», «Методика застосування запропонованого методу наближеного визначення характеристичних чисел і ступінь одержуваної точності», «Про одне розв'язання методу подібності і застосування його до питань міцності».

Зарождение моделирования в науке связано с появлением понятия «подобие», применявшимся в основном для решения ряда задач строительной механики, после этого перешедшим в иные области техники. Формирование данного типа моделирования привело к образованию теории, именуемой порой теорией подобия. Профессор В. Л. Кирпичев первым из ученых в Российской империи поставил вопрос о теории подобия физических процессов и вывел условия подобия при упругих явлениях. Г. Ф. Проскура разрабатывал теорию подобия в гидроаэродинамике и закон динамического подобия турбомашин. В. М. Майзель применял теорию подобия при исследовании и моделировании задач прочности, устойчивости, колебаний; процессов в гидромашинах. Теория подобия является важной составляющей аналогового моделирования.

22 февраля 1939 г. крупный ученый в области теории упругости, гидромеханики и гидромашиностроения В. М. Майзель был избран членом-корреспондентом АН УССР. В соответствии с Постановлением Общего собрания АН УССР и докладом президента АН УССР А. А. Богомольца было принято Постановление Президиума АН УССР от 19.03. 1939 г. (протокол № 9), в котором было поручено комиссии в составе академиков Г.Ф. Проскуры и В. М. Хрущова, члена-корреспондента АН УССР В. М. Майзеля разрабо-

тать окончательный проект организации Института энергетики и прикладной механики АН УССР и подать надлежащие ходатайства в Совнарком УССР и соответствующие наркоматы. Постановлением Совнаркома УССР от 16.11.1939 г. № 1483 в г. Харькове был создан Институт энергетики АН УССР. Кадровую основу института составили ученые и выпускники ХММИ и Харьковского электротехнического института.

Продолжая преподавать и работать старшим научным сотрудником Института строительной механики, В. М. Майзель стал заведующим отделом динамики энергетических машин Института энергетики АН УССР. В 1940 г. Президиум АН УССР выделил ему 10000 руб. на тему «Методика экспериментального вивчення напруг за допомогою трикомпонентного тензометра». Тема по изучению работы валов при числе оборотов выше первой критической была выполнена Майзелем как хозрасчетная. Он сделал много докладов на сессиях АН УССР, научных семинарах, предприятиях. В 1940 г. в «Вістях Академії наук УРСР» (№ 9) среди работ, выполненных Отделом технических наук АН УССР, отмечалась разработка Майзелем «трехкомпонентного тензометрического прибора» для измерения главных напряжений в металлических конструкциях.

В самом начале Великой Отечественной войны были эвакуированы в Уфу почти все научно-исследовательские учреждения Академии наук УССР. Главным направлением работы Майзеля стало решение задач прочности конструкций оборонного значения, особенно по заданиям для авиационной промышленности (ГУ и НИИ Военно-воздушных сил (ВВС) КА, Центральный Институт Авиамоторостроения (ЦИАМ)) и транспортного машиностроения (Главтрансмаш). Он активно работал над интенсификацией технологических процессов и улучшением качеств боевых машин, провел множество консультаций и экспертиз для оборонной промышленности, ежедневно выполнял разные исследования для заводов. В частности, апробация работы проводилась на уфимском заводе № 26, где был развернут выпуск моторов М-105 для истребителей.

В. М. Майзель был одним из членов Ученого совета Отдела технических наук Академии наук УССР. 20 февраля 1942 г. он был включен в состав создающейся Комиссии при Академии наук УССР по восстановлению разрушенных врагом городов и предприятий Украины под председательством президента Академии наук УССР А. А. Богомольца.

На заседании Президиума Академии наук УССР 17.04 1942 г. было заслушано письмо Народного комиссариата авиационной промышленности СССР с просьбой начать разработку трехкомпонентного тензометра и заключение директора Института строительной механики АН УССР Н. В. Корноухова о том, что Институт не имеет условий в Уфе для ее выполнения. В дальнейшем под руководством В. М. Майзеля группа сотрудников Института строительной механики АН УССР по особому заданию НИИ ВВС разработала и изготовила специальный тензометр для записи статических и динамиче-

ских напряжений в деталях сложных конфигураций, в частности, в винтах двигателей самолета во время полета.

Несмотря на проблемы с публикацией научных работ в условиях военного времени, только в 1942 г. у Майзеля в «Доповіях АН УРСР» вышли следующие статьи: «Визначення реакцій підпор в статично невизначених системах при наявності температурного поля», «Деякі приклади визначення температурних реакцій в пружних системах», «Мінімальні принципи для температурного напруженого стану пружного тіла», «Переміщення в пружному тілі, викликані впливом нестационарного температурного поля». Майзель сделал много докладов на сессиях АН УССР, научных семинарах, предприятиях. Так на январской сессии Академии наук в 1942 г. он выступил с докладами «Метод определения термического напряженного состояния в упругом теле» и «Трехкомпонентный промышленный тензометр и его применение».

Майзель был единственным кандидатом, выдвинутым Президиумом Академии наук УССР по Отделу технических наук АН УССР, на учрежденную Сталинскую премию за работу «Метод теоретичного та експериментального дослідження температурного напруженого стану в пружних системах і його застосування» (протокол № 44 от 18.12 1942 г.).

В 1943 г. на базе отдела гидродинамики Института энергетики в городе Уфа была организована Лаборатория проблем быстроходных машин и механизмов как самостоятельное научно-исследовательское учреждение АН УССР. После ряда реорганизаций Лаборатория проблем быстроходных машин и механизмов была преобразована в Институт проблем машиностроения НАН Украины. В соответствии с Постановлениями Президиума АН УССР от 23.03. 1947 г. (протокол № 8) и Совета Министров УССР от 05.05. 1947 г. № 639 Институт энергетики АН УССР был разделен на Институт теплоэнергетики (в настоящее время Институт технической теплофизики) и Институт электротехники (в настоящее время Институт электродинамики) АН УССР. Таким образом, Институт энергетики стал прародителем базовых институтов Отделения физико-технических проблем энергетики АН Украины.



Президиум АН УССР 16.04 1943 г. решил опубликовать на русском языке работы члена-корреспондента В. М. Майзеля. Президиум АН УССР 23.04 1943 г. рекомендовал опубликовать работу Майзеля «Метод теоретичного і експериментального дослідження температурного напруженого стану в пружних системах та його застосування».

В отчете Института строительной механики АН УССР про работу в эвакуации среди основных научных достижений был особо отмечен «предложенный и широко развитый В. М. Майзелем метод

теоретического и экспериментального исследования температурного напряженного состояния, который имел важное практическое значение для котло-, паро-, турбо-, самолето- и моторостроения».

В. М. Майзель скончался 28 ноября 1943 года от интенсивного труда на пределе человеческих возможностей и простуды, вызванной переездом из Уфы на работу в Москву. Он был похоронен в Москве на Донском кладбище. Урна с прахом покоится в здании храма (бывшего крематория). Президиум Академии наук УССР 2.12 1943 г., заслушав сообщение председателя Отдела технических наук, академика Г.Ф. Проскуры о смерти члена-корреспондента АН УССР Майзеля; поручил составить мотивированное ходатайство в СНК УССР о назначении персональной пенсии матери покойного.

В 1946 году в сборнике работ Института энергетики АН УССР «Памяти академика В. М. Хрущева» выходит работа В. М. Майзеля «К теории начальных напряжений и перемещений». В 1951 году монография В. М. Майзеля «Температурная задача теории упругости» была опубликована в издательстве АН УССР в Киеве.

Мы должны сохранить память про выдающегося ученого в области механики, известного педагога, одного из основателей кафедры «Динамика и прочность машин», члена-корреспондента АН Украины Вениамина Михайловича Майзеля.

Поступила в редколлегию 26.02.2013

УДК 539.3

Основные работы члена-корреспондента академии наук Украины В. М. Майзеля / Г. И. Львов, С. А. Назаренко, В. Л. Хавин // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 8-15.

Стаття присвячена опису життєвого шляху й творчої спадщини видатного вченого у галузі механіки, талановитого педагога, члена-кореспондента Академії наук України В. М. Майзеля.

Ключові слова: механіка, машинобудування, динаміка, міцність, технічна освіта, метод подібності, нестационарне температурне поле, термопружність.

The article is devoted scientific and pedagogical activity of the prominent scientist in Mechanics, professor Meisel.

Keywords: mechanics, statics, dynamics, durability of machines, scientific- pedagogical activity, higher technical education, engineer.

Г. О. АНИЩЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

ПОВЗУЧИСТЬ ТА РУЙНУВАННЯ ПЛАСТИН З НАДРІЗАМИ В УМОВАХ ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Представлены результаты численного исследования ползучести и разрушения пластин, ослабленных острыми надрезами. Установлено существенное влияние циклического нагружения на релаксацию напряжений, накопление повреждаемости и разрушение пластин вследствие динамической ползучести.

Ключевые слова: надрезы, циклическое нагружение, релаксация напряжений, повреждаемость, разрушение, динамическая ползучесть.

Вступ. Довготривала міцність багатьох деталей машин, що працюють за умов повзучості при спільній дії статичних та циклічних навантажень, залежить від процесів деформування в послаблених різноманітними надрізами областях. В літературі відомі рішення задач повзучості для тіл с надрізами та отворами при статичному навантаженні. В даній статті надані результати досліджень впливу циклічного навантаження на розподіл напружено-деформованого стану, на процес накопичення пошкоджень й руйнування внаслідок динамічної повзучості пластин, які послаблені гострими надрізами.

Постановка задачі. Запропонований у [1] метод розрахунку довготривалої міцності тіл при швидкому циклічному навантаженні базується на сучасних уявленнях щодо повзучості й руйнування, включає досягнення континуальної механіки пошкоджень. З використанням методу асимптотичних розкладень початково-крайова задача повзучості тіл, які знаходяться під дією гармонійного циклічного навантаження $P = P_0 + P_a \Phi(\Omega t)$, зведена до інтегрування двох взаємопов'язаних систем диференціальних рівнянь, що відповідають руху системи за «повільним» (повзучість) та «швидким» часом (вимушені коливання). Перша початково-крайова задача відповідає задачі термповзучості, яка розглядається в масштабі «повільного часу t ». Для розв'язку цієї задачі використано метод скінчених елементів (крайова) та багато-кроковий метод прогнозу-корекції (початкова задача). За допомогою методу скінчених елементів задача термповзучості зводиться до розв'язання системи диференційних рівнянь відносно глобального вектора вузлових переміщень u^0 :

$$[K] \dot{u}^0 = \dot{F} + \dot{F}_c, \quad (1)$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості системи; \dot{F} – вектор швидкостей вуз-

лових навантажень; \dot{F}_c – вектор додаткових навантажень, який підраховується за компонентами тензора швидкостей незворотних деформацій повзучості \dot{c}^0 . Для визначення останніх до (1) необхідно додати рівняння стану. Початкові умови до системи (1) визначаються розв’язанням відповідної задачі щодо пружного деформування тіла при статичному навантаженні. Друга початково-крайова задача розглядається в масштабі «швидкого часу ξ » й відповідає вимушеним коливанням пружного тіла під дією гармонійного навантаження. Ця задача за допомогою МСЕ після розділення змінних по координатах й часу ξ зводиться до системи рівнянь відносно вектора амплітудних значень вузлових переміщень u^1 в площині тіла, яке дискретизовано:

$$([K] - \Omega^2 [M])u^1 = R^1, \quad (2)$$

де $([K] - \Omega^2 [M])$ – матриця динамічної жорсткості; $[M]$ – глобальна матриця мас; R^1 – вектор, яких підраховується за амплітудними значеннями гармонійної складової навантаження, прикладеного до поверхні тіла. Задача вимушених коливань у скінчено-елементній постановці розв’язується за допомогою модифікованого фронтального методу.

Рівняння стану. У роботі рівняння стану для повзучості прийняти у вигляді:

$$\dot{c}_{kl}^0 = \frac{3}{2} \frac{\dot{c}_i^0}{\sigma_i^0} S_{kl}^0. \quad (3)$$

Тут зв’язок між еквівалентними швидкостями деформацій повзучості з напруженнями й пошкодженнями, які накопичуються за «повільний час» в точці тіла, визначаються теорією Ю. М. Работнова зі структурними параметрами [2] так, що згідно з [1]:

$$\begin{cases} \dot{c}_i^0 = \Lambda(c_i^0) \left\langle F \left(\frac{\sigma_i^0 K(A(t), \xi)}{1 - \omega^0} \right) \right\rangle; \\ \dot{\omega}^0 = \left\langle Q \left(\frac{\sigma_e^0 K(A(t), \xi)}{1 - \omega^0} \right) \right\rangle; \\ c^0(0) = \omega^0(0) = 0; \\ \omega^0(t_c) = 1, \end{cases} \quad (4)$$

де $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$ – оператор усереднювання функцій за період T ; Λ , F , Q – відомі функції, які встановлюються за кривими повзучості; t_c – час закінчення прихованого руйнування. Відмітимо, що у другому кінетичному рівнянні системи (4) для параметра пошкоджуваності еквівалентне напруження приймалося рівним

$$\sigma_e = (1 - \alpha)\sigma_i + \alpha\sigma_1, \quad (5)$$

де $\sigma_i = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$ – інтенсивність напружень Мізеса; σ_1 – максимальне головне напруження; α – число ($0 \leq \alpha \leq 1$), значення котрого коректує значення еквівалентних напружень Мізеса ($\alpha = 0$) у відповідності з даними дослідів з руйнуванню матеріалів. В рівняннях (4) вплив циклічного навантаження визначається функцією $K(A(t), \xi) = 1 + A(t) \cdot \phi(\xi)$ за допомогою введеного параметру асиметрії циклу напружень A :

$$A(t) = \frac{\sigma_{ik}^1}{\sigma_i^0}, \quad (6)$$

який є відношенням інтенсивностей, які підраховані по амплітудним напруженням, що знайдені з системи (2), й інтенсивностей поточних напружень при повзучості, які визначаються за рішенням системи рівнянь (1).

Рівняння (3), (4), для багатьох конструкційних матеріалів конкретизуються у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{c}_i = B \frac{\sigma_i^{n-1} H(A)}{(1 - \omega^r)^m} [C] \underline{\sigma}; \\ \dot{\omega} = D \frac{\sigma_i^k G(A)}{(1 - \omega^r)^l}; \\ 0 \leq \omega \leq 1, \end{cases} \quad (7)$$

де B, D, k, l, m, n, r – матеріальні сталі, які підлягають визначенню за кривими післядії; $\sigma_i = (\underline{\sigma}^T [g] \underline{\sigma})^{\frac{1}{2}}$ – інтенсивність напружень; $[C], [g]$ – числові матриці;

$$H(A) = \int_0^1 F [1 + A(t) \cdot \phi(\xi)] d\xi; \quad (8)$$

$$G(A) = \int_0^1 Q [1 + A(t) \cdot \phi(\xi)] d\xi. \quad (9)$$

У разі відсутності циклічної складової навантаження ($A = 0$) рівняння (4) набудуть вигляду звичайних рівнянь теорії повзучості, де враховано руйнування внаслідок повзучості. Система (1) разом з рівняннями стану (7) після конкретизації усіх функцій й параметрів, що входять до них, є повною системою рівнянь початково-крайової задачі термповзучості плоских тіл при одночасній дії статичного й швидкозмінного циклічного навантаження.

Для інтегрування невідомих задачі використаний метод прогнозу-корекції третього порядку. На кожному кроці повзучості за допомогою мето-

ду Холецького визначаються швидкості вузлових переміщень \dot{u}^0 з системи лінійних рівнянь (1) з незмінною для даної задачі матрицею жорсткості й змінною правою частиною. Система рівнянь (2) розв’язувалася за допомогою модифікованого фронтального методу. Запропонована методика реалізована у вигляді програмного комплексу, який орієнтований на розв’язання задач статичної та динамічної повзучості плоских тіл [3]. Детальний опис алгоритмів можна знайти у роботі [4].

Результати досліджень. В статті надані результати досліджень, які були виконані на основі вище описаного методу, щодо впливу циклічного навантаження на напружено–деформований стан й накопичення прихованих пошкоджень внаслідок повзучості в пластинах, які виготовлені з титанового сплаву Ti-6Al-2Cr-2Mo при температурі $T = 675$ К, модуль пружності $E = 1,2 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, дані про фізико-механічні характеристики якого наведені в [5]. Досліджувалися прямокутні пластини з базовою довжиною $L = 12 \cdot 10^{-3}$ м, шириною $H = 7,2 \cdot 10^{-3}$ м, товщиною $h = 2,4 \cdot 10^{-3}$ м, які послаблені симетричними гострими надрізами глибиною $l \cdot 10^{-3}$ м та кутом надрізу $\alpha \div 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ (рис. 1). Пластини розтягувались в осьовому напрямку силою, що має статичну та циклічну складові: $P = P_0 + P_a \sin \Omega t$, де $A = P_a / P_0$ – стале значення коефіцієнта асиметрії циклу зовнішнього навантаження; P_0, P_a – стала та амплітудна складові зовнішнього навантаження; Ω – кругова частота циклічної складової навантаження.

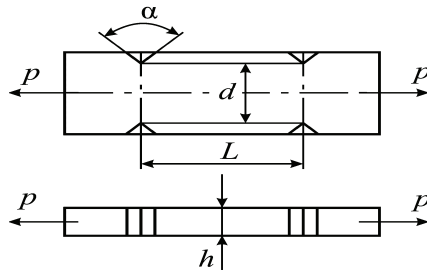


Рисунок 1 – Розрахункова схема пластини з симетричними гострими надрізами

Зауважимо, що біля надрізів пластин при розтягу має місце концентрація напружень, величина якої при пружному деформуванні може бути окремо визначена за формулами Нейбера. Розрахунками напруженого стану пластин при визначенні коефіцієнтів концентрації та порівнянні їх з відомими [6] встановлено достатній ступінь дискретизації розрахункових областей. Із врахуванням симетрії пластин у розрахунках розглянуто їхні 1/8 частини, скінченно-елементне розбиття якої складає $NE = 148$ скінчених елементів, $NY = 98$ вузлів.

Розрахунки на статичну повзучість з урахуванням пошкоджуваності

пластин з гострими надрізами ($\alpha = 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$) при розтягуванні силою $P = P_0 = 400$ МПа ($\sigma_{ном} = 600$ МПа; $\sigma_{приск} = 433$ МПа) показали, що збільшення кута надрізу в розглянутих випадках суттєво впливає як на змінення рівня максимальних еквівалентних напружень в період прихованого руйнування, так і на час закінчення періоду прихованого руйнування t_c . Так, для надрізу з кутом 50° : $\sigma_e^{max}(0) = 1328$ МПа; $\sigma_e(t_c) = 255$ МПа; $t_c = 160$ годин; з кутом 60° : $\sigma_e^{max}(0) = 1257$ МПа; $\sigma_e(t_c) = 171$ МПа, $t_c = 191$ година; з кутом 70° : $\sigma_e^{max}(0) = 1240$ МПа; $\sigma_e(t_c) = 162$ МПа, $t_c = 198$ годин.

На основі одержаних результатів можна зробити наступний висновок про те, що чим менший кут гострого надрізу, тим вищий рівень максимальних напружень біля контуру надрізу (коефіцієнт концентрації $K = \frac{\sigma_e^{max}}{\sigma_{ном}} = 2,2; 2,096; 2,085$) та менший період прихованого руйнування $t_c = 160; 191; 198$ годин відповідно.

В період прихованого руйнування йде процес накопичення пошкоджень матеріалу пластини, при цьому значення параметра пошкодження ω , який вводиться для описання прихованого руйнування, знаходиться в діапазоні значень від $\omega(t=0) = 0$ до $\omega(t_c) = 1$. Максимальні значення параметра пошкоджуваності локалізовані безпосередньо біля вершин надрізів, причому, чим менший кут надрізу, тим на меншу площу розповсюджуються не тільки максимальні значення ω , а й значення $0,01 \ll \omega \ll 0,05$.

Вплив циклічного навантаження на повзучість й руйнування був досліджений на прикладі пластини з гострим надрізом, кут надрізу якого $\alpha = 60^\circ$, при циклічному розтягненні навантаженням, яке змінюється за законом $P = P_0 + P_a \sin \Omega t$. Статична складова навантаження складала $P_0 = 400$ МПа, а амплітуда – задавалась різною для кожного розрахунку: $P_a = 100; 120; 200$ МПа. Таким чином, розрахунки виконувались для різних значень коефіцієнта асиметрії циклу навантаження $A = 0,25; 0,3; 0,5$ відповідно.

Розрахунками встановлено, що форми вільних коливань розглянутих пластин відповідають подовжнім коливанням і їх власні частоти для титанового сплаву Ті-6Al-2Сг-2Мо с масовою густиною $\rho = 4,4 \cdot 10^4$ Н²/м⁴, відповідно дорівнюють: $\omega_1 = 3,28 \cdot 10^5$ рад/с; $\omega_2 = 9,93 \cdot 10^5$ рад/с; $\omega_3 = 14,38 \cdot 10^5$ рад/с. Частота зовнішнього навантаження в розрахунках була прийнята рівною $\Omega = 25$ Гц $= 1,57 \cdot 10^2$ рад/с.

Розрахунки на повзучість виконані при кроці за часом $dt = 0,5$ години й загальний час повзучості встановлювався по досягненню параметром пошкоджуваності ω значення, яке наближене до одиниці: $\omega(t_c) \approx 0,98$. Таким чином, розрахунки виконувались до моменту завершення періоду прихованого руйнування t_c . В ході цього періоду спостерігається суттєвий перерозподіл

внаслідок повзучості еквівалентних напружень в пластині. Так, наприклад, еквівалентне напруження в точці, яка віддалена вздовж осі симетрії від надрізу на відстані $x = 10^{-4}$ м, має найбільше значення при пружному деформуванні $\sigma_e^{\max}(0) = 1257$ МПа, яке зменшується за час повзучості до $\sigma_e(t_c) = 261,2; 95,2; 79,7$ МПа при $A = 0,25; 0,3; 0,5$ відповідно. Рівень максимальних значень еквівалентних напружень при цьому зменшився більш ніж в два рази, й змістився в область, яка віддалена від границь надрізу.

На рисунках надані розрахункові дані розподілення параметра пошкоджуваності ω (рис. 2) й коефіцієнта асиметрії циклу напружень $A_i(x_i, y_i, t)$ (рис. 3) в пластині з плином часу, при $P_a = 200$ МПа ($A = 0,5$).

У зв'язку з симетрією напружено-деформованого стану пластини результати наведені для її чверті: нижня ліва чверть відповідає початковому моменту часу $t = 0$ г; верхня ліва – відповідає повзучості в момент часу $\frac{t_c}{3} = 20$ г; верхня й нижня праві частини – $\frac{2t_c}{3} = 40$ г и $t_c = 59$ г, де t_c – встановлений розрахунками час закінчення періоду прихованого руйнування. Максимальне значення параметра пошкоджуваності в перші години повзучості опиняється в області, яка віддалена від надрізу, а в подальшому точки пластини з суттєвими значеннями пошкоджуваності утворюють область, яка розширюється та наближається к границям надрізу.

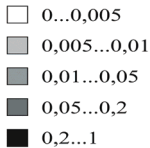
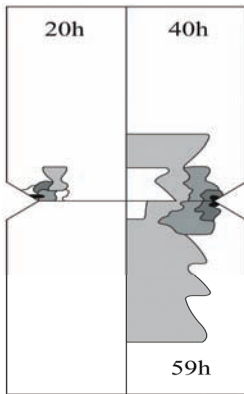


Рисунок 2 – Розподілення параметра пошкоджуваності ω в пластині

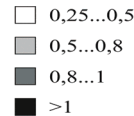
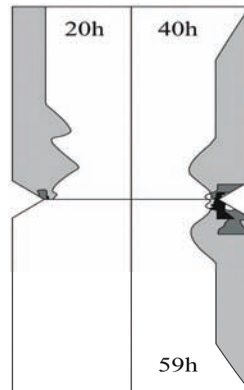


Рисунок 3 – Розподілення коефіцієнта асиметрії циклу напружень $A_i(x_i, y_i, t)$

Розподілення значень коефіцієнта асиметрії циклу напружень точок пластини $A_i(x_i, y_i, t)$, який входить до рівнянь стану (7), суттєво неоднорідне й відображає неоднорідний перерозподіл інтенсивностей напружень внаслідок динамічної повзучості. Причому з плином часу ця неоднорідність стає все більш суттєвою. В початковий момент часу $t=0$ значення A_i для всіх точок пластини приблизно дорівнюють 0,5 (вплив сил інерції на амплітудні значення напружень в даному випадку незначне). При повзучості A_i зростають біля контуру надрізу й в момент закінчення прихованого руйнування $t_c = 59$ г їх значення тут досягають значень, які дорівнюють 4. При віддаленні від контуру, значення A_i знижуються в достатньо великій за розміром області. Значення $A_i > 0,8$ охоплюють зони пластини, які розташовані вздовж неавантажених торців пластини. Разом з тим, в пластині утворюються області, в яких значення A_i зменшуються в процесі повзучості й досягають значень 0,35 – 0,45, що менші ніж первісні значення.

При вивченні дії циклічного навантаження подалі від резонансу було встановлено, що суттєвий вплив на процес накопичення пошкоджень в точках пластин при динамічній повзучості, а отже, й на час прихованого руйнування, чинить значення параметра асиметрії циклу зовнішнього навантаження A . Так, розрахунками встановлено, що при $A = 0,25$ час прихованого руйнування становить $t_c = 109$ годин, при $A = 0,3$ – $t_c = 88,5$ г, при $A = 0,5$ – $t_c = 59$ г. При статичному навантаженні ($A = 0$), як було встановлено раніше, час прихованого руйнування був більшим – $t_c = 191$ година.

Висновки. В наведених прикладах встановлено, що вплив циклічного навантаження на напружено-деформований стан та довготривалу міцність пластин с надрізами навіть при незначних значеннях коефіцієнта асиметрії циклу зовнішнього навантаження досить суттєвий. Накладання навіть незначної за величиною амплітудної складової циклічного навантаження ($A = 0,25$) зменшує час прихованого руйнування майже у два рази. При цьому заміна циклічного навантаження статичним з навантаженням, яке дорівнює максимальному його значенню в циклі, призводить до зниженню значень часу завершення прихованого руйнування. Таким чином, при циклічному навантаженні, навіть при невеликих значеннях амплітудних складових навантаження, потрібно враховувати їх вплив на повзучість, що підвищить адекватність оцінок повзучості й довготривалої міцності.

Список літератури: 1. Морачковский О.К. О нелинейных задачах ползучести тел при воздействии быстро осциллирующего поля / О.К. Морачковский // Прикл. мех. – 1992. – Т. 28, № 8. – С. 17-23. 2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 3. Анищенко Г.О. Влияние циклического нагружения на ползучесть и длительную прочность пластины с отверстиями / Г.О. Анищенко, Д.В. Бреславский, О.К. Морачковский // Доповіді Національної академії наук України. – 1998. – № 8. – С. 59– 64. 4. Анищенко Г.О. Ползучесть и повреждаемость в телах при плоском напряженном состоянии / Г.О. Анищенко, Д.В. Бреславский // Динамика и прочность машин. Респ. межвед. н.-т. сборник. – Х.: ХГПУ, 1997. – Вып. 55. – С. 23–32. 5. Walczak J. On the analysis of creep stability and rupture / J. Walczak, J.

УДК 539.3

Повзучість та руйнування пластин з надрізами в умовах циклічного навантаження / Г. О. Аніщенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 16-23. – Бібліогр.: 6 назв.

Надані результати чисельних досліджень повзучості та руйнування пластин, які послаблені гострими надрізами. Встановлено суттєвий вплив циклічного навантаження на релаксацію напружень, на накопичення пошкоджень й руйнування пластин внаслідок динамічної повзучості.

Ключові слова: надрізи, циклічне навантаження, релаксація напружень, пошкоджуваність, руйнування, динамічна повзучість.

Numerical results on creep and destruction for plates weakened by snips are presented. The essential influence of a high-frequency loading on stress relaxation, damage accumulation, and plate's fracture due to dynamic creep is established.

Keywords: snips, high-frequency loading, stress relaxation, damage, fracture, dynamic creep.

УДК 539.3

Д. В. БРЕСЛАВСКИЙ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПІ»;
В. А. МЕТЕЛЕВ, студент, НТУ «ХПІ»;
О. К. МОРАЧКОВСКИЙ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПІ»;
О. А. ТАТАРИНОВА, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

РАСЧЕТЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Статья посвящена расчетам динамической ползучести и повреждаемости элементов конструкций, изготовленных из ортотропных материалов, на основе разработанного авторами метода. Описание закономерностей повреждающихся вследствие ползучести материалов осуществлено на основе тензорных соотношений инкрементальной теории ползучести, использующих тензорный параметр повреждаемости. Эти соотношения с помощью метода многих масштабов и усреднения на периоде изменения нагрузки преобразованы в соотношения динамической ползучести анизотропных материалов, повреждающихся вследствие ползучести. Расчеты для циклически нагруженных плоских тел выполнены методом конечных элементов. Для ползучести пластины с центральным отверстием, изготовленной из титанового сплава, численно получены изменения во времени компонент перемещений и тензорных полей напряжений, деформаций, по значениям параметра повреждаемости дана оценка времени до разрушения.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, циклическое нагружение, тензорный параметр повреждаемости, МКЭ, пластина с отверстием, титановый сплав.

© Д. В. Бреславский, В. А. Метелев, О. К. Морачковский, О. А. Татарина, 2013

1 Введение. Легкие сплавы и металлические композиционные материалы широко используются в промышленности. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что материалы рассматриваемого класса обладают анизотропией свойств ползучести и связанной с ней повреждаемостью, что требует использования тензорных характеристик для описания свойств деформации ползучести и повреждаемости. Такие модели для случая статического нагружения были предложены Мураками [1], Кордебуба-Сидоровым [2], О.К.Морачковским [3] и другими, в последние годы эти подходы были использованы в расчетах конструкций.

Часто элементы конструкций подвергаются совместному действию статических и циклически повторяющихся нагрузок. Как известно [4], в этом случае в материале развиваются процессы так называемой динамической ползучести. Для них характерно существенные ускорения ползучести и повреждаемости, что приводит к уменьшению времени до окончания разрушения по сравнению со статическим нагружением.

При статическом нагружении уравнения состояния ползучести начально ортотропных материалов с тензорным параметром повреждаемости рассмотрены ранее в [3]. В данной работе эти соотношения с помощью метода многих масштабов и усреднения на периоде нагрузки преобразованы в соотношения динамической ползучести анизотропных материалов, повреждающихся вследствие ползучести. Для материалов с изотропными свойствами определяющие уравнения для описания динамической ползучести с повреждаемостью ранее были предложены в работах [5, 6].

2 Законы анизотропной ползучести с повреждаемостью. Рассмотрим физические соотношения ползучести с повреждаемостью для анизотропных материалов, соответствующие общей линейной тензорной зависимости для главных осей симметрии ползучести и повреждаемости анизотропного тела. Накопление повреждаемости в этом случае будет описываться тензором второго ранга ω_{ij} .

Будем предполагать, что тензору повреждаемости ω_{ij} , как внутреннему параметру состояния, соответствует ассоциированный с ним тензор R_{ij} – поток термодинамических напряжений в повреждаемой среде. Для материалов с начальной анизотропией эквивалентное напряжение σ_V определим через совместные инварианты тензора напряжений σ_{ij} с материальными тензорами a_{ij} , b_{ijkl} , а эквивалентное напряжение σ_{*V} определим, соответственно, через совместные инварианты тензора σ_{ij} с материальными тензорами g_{ij} , d_{ijkl} :

$$\sigma_V = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \sigma_1 = a_{ij}\sigma_{ij}, \quad \sigma_2 = \sqrt{b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}};$$

$$\sigma_{*V} = \sigma_{*1} + \sigma_{*2}, \quad \sigma_{*1} = g_{ij}\sigma_{ij}, \quad \sigma_{*2} = \sqrt{d_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}}.$$

Потенциалы диссипации для скоростей деформаций ползучести и повреждаемости представим в виде:

$$\dot{D} = \dot{D}(\sigma_V; \eta, T) = \sigma_{ij} \dot{c}_{ij}; \quad \dot{\Omega} = \dot{\Omega}(\sigma_{*V}; \eta, T) = \sigma_{ij} \dot{\omega}_{ij}. \quad (1)$$

Кинетические уравнения для скоростей деформаций ползучести и повреждаемости с использованием градиентального закона принимаем в виде:

$$\dot{c}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \dot{D}}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \dot{\omega}_{ij} = \dot{\lambda}_* \frac{\partial \dot{\Omega}}{\partial R_{ij}},$$

где скалярные множители $\dot{\lambda}, \dot{\lambda}_*$ в дальнейшем определим из равенств (1) после конкретизации вида каждого из потенциалов.

Для формулирования критерия разрушения в инвариантной скалярной форме рассмотрим ту часть диссипации, которая происходит вследствие повреждаемости, и ее предельное значение в момент времени при окончании скрытого разрушения:

$$\Omega(t) = \int_0^t \dot{\Omega} dt, \quad \Omega_* = \int_0^{t_*} \dot{\Omega} dt.$$

Предположим, что предельное значение диссипации вследствие повреждаемости материала при ползучести является вполне определенной характеристикой материала. В этом случае, принимая в качестве энергетической скалярной меры для критерия разрушения величину $\eta(t) = \Omega(t)/\Omega_*$, критерий разрушения можно записать в виде $\eta(t_*) = 1$, где t_* – значение времени в момент разрушения.

Используя термодинамические допущения для материалов с начальной анизотропией при ползучести, получим следующие уравнения состояния:

$$\dot{c}_{ij} = \frac{\dot{D}}{\sigma_V} \left(a_{ij} + \frac{b_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_2} \right), \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{\dot{\eta}}{R_V} \left(g_{ij} + \frac{d_{ijkl} R_{kl}}{R_2} \right), \quad (2)$$

где c_{ij}, ω_{ij} – симметричные тензоры необратимых деформаций ползучести и повреждаемости; $\dot{D} = \sigma_{ij} \dot{c}_{ij}$ – мощность диссипации вследствие ползучести; $\dot{\eta} = R_{ij} \dot{\omega}_{ij}$ – мощность диссипации вследствие повреждаемости, отнесенная к предельному значению диссипации Ω_* в момент разрушения (мера повреждаемости, $0 \leq \eta \leq 1$).

Используя принцип эквивалентности деформаций, влияние тензора повреждаемости на эффективные напряжения учтем при использовании следующего равенства: $R_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - \eta)$, причем $\dot{\eta} = R_{ij} \dot{\omega}_{ij}$, ($0 \leq \eta \leq 1$), $\eta(t_*) = 1$.

При сохранении требования основного термодинамического неравенства $\dot{D} + \dot{\Omega} \geq 0$ диссипативные потенциалы (1) теперь можно записать следующим образом:

$$\dot{D}(\sigma_V; \eta, T) = \dot{D}(R_V), \quad \dot{\Omega}(\sigma_{*V}; \eta, T) = \dot{\Omega}(R_{*V}), \quad (3)$$

где $R_V = \sigma_V / (1 - \eta)$; $R_{*V} = \sigma_{*V} / (1 - \eta)$ – инварианты эффективного напряжения.

В рамках принятых допущений главные направления материальной анизотропии считаются неизменными вплоть до разрушения, а поверхности потенциалов диссипации в пространстве напряжений расширяются со временем пропорционально одному параметру, связанному с принятой мерой повреждения $0 \leq \eta \leq 1$.

Далее рассмотрим уравнения состояния (2) для трансверсально-изотропных при ползучести материалов. Потенциалы диссипации (3) конкретизируем в виде степенных функций от инвариантов напряжений:

$$\dot{D} = R_V^N, \quad \dot{\eta} = R_{*2}^k / (1 - \eta)^S, \quad (4)$$

где N, k, S – константы.

Уравнения (2) рассматриваются как уравнения состояния для материалов с начальной анизотропией и с асимметрией свойств ползучести и повреждаемости, в частности, при растяжении и сжатии. При отсутствии эффектов асимметрии свойств $a_{ij} = g_{ij} = 0$. В этом случае для трансверсально-изотропных материалов уравнения состояния ползучести с учетом повреждаемости могут быть переписаны следующим образом:

$$\dot{\underline{c}} = b_{1111}^{(N+1)/2} \frac{\bar{\sigma}_2^{N-1}}{(1-\eta)^N} [B] \underline{\sigma}, \quad \dot{\underline{w}} = d_{1111}^{k/2} \frac{\sigma_{*2}^{k-2}}{(1-\eta)^{k+S-1}} [D] \underline{\sigma}, \quad (5)$$

$$\dot{\eta} = d_{1111}^{k/2} \frac{\sigma_{*2}^k}{(1-\eta)^{k+S}}, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta(t_*) = 1, \quad (6)$$

где $\dot{\underline{c}} = (\dot{c}_{11}, \dot{c}_{22}, 2\dot{c}_{12})^T$, $\underline{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$, $\dot{\underline{w}} = (\dot{w}_{11}, \dot{w}_{22}, 2\dot{w}_{12})^T$ – векторы скоростей деформаций ползучести, напряжений и скоростей параметра повреждаемости; $\bar{\sigma}_2^2 = \underline{\sigma}^T [B] \underline{\sigma}$, $\sigma_{*2}^2 = \underline{\sigma}^T [D] \underline{\sigma}$ – инварианты напряжений,

$$[B] = \begin{vmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 4\beta \end{vmatrix}, \quad \beta_{12} = -\frac{1}{2} b_{1111}, \beta_{22} = \frac{b_{2222}}{b_{1111}}, 4\beta = \frac{b_{1212}}{b_{1111}},$$

$$[D] = \begin{vmatrix} 1 & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 4\delta \end{vmatrix}, \quad \delta_{12} = -\frac{1}{2} d_{1111}, \delta_{22} = \frac{d_{2222}}{d_{1111}}, 4\delta = \frac{d_{1212}}{d_{1111}}.$$

Для приведенной модели ползучести получим уравнения, описывающие влияние циклического нагружения на ползучесть и повреждаемость [4]. Принимаем, что тензор напряжений состоит из статической составляющей σ_0 и быстро изменяющейся составляющей σ_1 : $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, $\sigma_1 = \sigma^a \sin(2\pi ft)$. f – частота вынужденных колебаний, $f = 1/T$; σ^a – амплитудное значение напряжения. Воспользуемся описанным в работе [6] методом, использованным там для уравнений со скалярным параметром повреждаемости. Используем метод многих масштабов и асимптотические разложения основных неизвестных по

малому параметру $\mu = T/t$.

Применим этот подход к уравнениям (5)–(6). Представим в виде асимптотических разложений процессы роста деформаций ползучести и накопления повреждаемости в двух масштабах времени (медленном и быстром $\xi = \tau/T$, где $\tau = t/\mu$):

$$c \cong c^0(t) + \mu c^1(\xi), \quad \eta \cong \eta^0(t) + \mu \eta^1(\xi), \quad \omega \cong \omega^0(t) + \mu \omega^1(\xi), \quad (7)$$

где $c^0(t)$, $\eta^0(t)$, $\omega^0(t)$, $c^1(\xi)$, $\eta^1(\xi)$, $\omega^1(t, \xi)$ – функции, отвечающие основному процессу ползучести с повреждаемостью в медленном (0) и быстром (1) масштабах времени.

Учитывая зависимость деформации ползучести, параметра и меры повреждаемости только от «медленного» времени [5], после усреднения получим:

$$\begin{aligned} \langle c^0(\xi) \rangle &= \int_0^1 c^0(t) d\xi \cong c^0(t); & \langle c^1(\xi) \rangle &= \int_0^1 c^1(\xi) d\xi \cong 0; \\ \langle \eta^0(\xi) \rangle &= \int_0^1 \eta^0(t) d\xi \cong \eta^0(t); & \langle \eta^1(\xi) \rangle &= \int_0^1 \eta^1(\xi) d\xi \cong 0; \\ \langle \omega^0(\xi) \rangle &= \int_0^1 \omega^0(t) d\xi \cong \omega^0(t); & \langle \omega^1(\xi) \rangle &= \int_0^1 \omega^1(\xi) d\xi \cong 0. \end{aligned}$$

Таким образом, используя метод асимптотических разложений с последующим усреднением на периоде циклического нагружения, для случая сложного напряженного состояния получим уравнения состояния для динамической ползучести с повреждаемостью для сплавов с ортотропными при ползучести свойствами:

$$\dot{\underline{c}} = b_{1111}^{(N+1)/2} K(A_n) \frac{\bar{\sigma}_2^{N-1}}{(1-\eta)^N} [B] \underline{\sigma}; \quad \dot{\underline{\omega}} = d_{1111}^{k/2} H_1(A_k) \frac{\sigma_{*2}^{k-2}}{(1-\eta)^{k+S-1}} [D] \underline{\sigma}; \quad (8)$$

$$\dot{\eta} = d_{1111}^{k/2} H_2(A_k) \frac{\sigma_{*2}^k}{(1-\eta)^{k+S}}; \quad \eta(0) = 0, \quad \eta(t_*) = 1, \quad (9)$$

где
$$K(A_n) = \int_0^1 (1 + A_n \sin(2\pi\xi))^N d\xi; \quad H_1(A_k) = \int_0^1 (1 + A_k \sin(2\pi\xi))^{k-1} d\xi;$$

$$H_2(A_k) = \int_0^1 (1 + A_k \sin(2\pi\xi))^k d\xi; \quad A_n = \frac{\bar{\sigma}_2^a}{\sigma_2}; \quad A_r = \frac{\sigma_{*2}^a}{\sigma_{*2}}; \quad (\bar{\sigma}_2^a)^2 = (\underline{\sigma}^a)^T [B] \underline{\sigma}^a;$$

$(\sigma_{*2}^a)^2 = (\underline{\sigma}^a)^T [D] \underline{\sigma}^a$ – инварианты циклических напряжений.

3 МКЭ для решения плоской задачи. Рассматриваем постановку двумерной задачи теории ползучести для плоского напряженного состояния.

Пусть плоское тело объемом V , изготовленное из материала с анизотропными свойствами ползучести и повреждаемости, закреплено по части поверхности S_1 и нагружено поверхностными силами $p \{p_1, p_2\}$ на остальной части поверхности S_2 . В системе координат OX_1X_2 плоское движение континуума материальных точек при ползучести будем описывать в рамках Лагранжевого подхода. Введем в рассмотрение вектор смещений точек $u = \{u_1, u_2\}^T$ и их скорости $v = \{v_1, v_2\}^T$. В этих предположениях задача ползучести для случая малых смещений и деформаций описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \dot{v}_i, \quad (i,j=1,2) \quad x_1, x_2 \in V; \quad \sigma_{ij} n_j = p_i + p_i^a \sin 2\pi f t, \quad x_1, x_2 \in S_2. \quad (10)$$

$$v_1 = du_1/dt = \dot{u}_1; \quad v_2 = du_2/dt = \dot{u}_2 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (12)$$

Рассматриваем случай, когда напряжения не превосходят предела текучести материала. Принимаем, что компоненты упругих деформаций e_{ij} и деформаций ползучести c_{ij} , а также их скорости, аддитивны:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{c}_{ij}, \quad (13)$$

Полученная система уравнений (10)-(13) должна решаться совместно с уравнениями состояния (8)-(9), причем необходимо добавить граничные условия на частях поверхности S_1 : $\dot{u}_i = \dot{u}_i^*$ и S_2 : $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$ и начальные условия, считая, что в момент времени $t = 0$ напряженно-деформированное состояние определяется решением задачи теории упругости.

Система (8-13) решается путем использования метода двух масштабов времени совместно с осреднением за период вынужденных колебаний $1/f$. Полное описание применения данного метода можно найти в [5,6]. Таким образом, задача сводится к упрощенной, подобной задаче со статическим нагружением, но с уравнениями состояния (8)-(9).

В расчетах использован метод конечных элементов с использованием линейных треугольных элементов. Разрешающее уравнение МКЭ, сформулированное в скоростях, имеет вид:

$$[K] \dot{\underline{\delta}} = \dot{\underline{F}} + \dot{\underline{F}}_c, \quad (14)$$

где $[K] = \sum_e \int [B]^T [D][B] dV$ – глобальная матрица системы;

$\dot{\underline{F}} = \sum_e \int [N]^T \dot{p} d\Sigma$, $\dot{\underline{F}}_c = \sum_e \int [B]^T \underline{\sigma}^* dV$ – векторы, составляющие глобаль-

ный вектор нагружения тела и фиктивных сил, определяемых деформациями ползучести.

Программное обеспечение для расчетов разработано в НТУ «ХПИ».

4 Анизотропная ползучесть и повреждаемость в титановых пластинах. Разработанный метод и программное обеспечение были использованы для моделирования ползучести и повреждаемости в титановых пластинах из сплава ВТ1-0 (аналоги – сплавы IM125 или Т40). Свойства ползучести и длительной прочности образцов, вырезанных из плоского листа в трех направлениях, были экспериментально получены при температуре $T = 773$ °К О. К. Морачковским и В. Н. Конкиным [7]. Значения констант в уравнениях (8)-(9), полученные после обработки экспериментальных данных, следующие:

$$\begin{aligned}
 b_{1111} &= 2,303 \cdot 10^{-4}, & b_{1122} &= -1,151 \cdot 10^{-4}, & b_{2222} &= 1,924 \cdot 10^{-4}, \\
 b_{1212} &= 2,058 \cdot 10^{-4}, & & & & & & (\text{МПа})^{-2N/N+1}/(\text{ч})^{2N+1}; & d_{1111} &= 3,542 \cdot 10^{-5}, \\
 d_{1122} &= -1,771 \cdot 10^{-5}, & d_{2222} &= 3,324 \cdot 10^{-5}, & d_{1212} &= 3,127 \cdot 10^{-5}, & & (\text{МПа})^{-2}/(\text{ч})^{2k}, \\
 & & & & & & & & & k = N = 5, s = 1.
 \end{aligned}$$

Вначале, для оценки достоверности получаемых результатов, было проведено сравнение численных расчетов с экспериментальными данными при статической ползучести вплоть до разрушения для образцов, вырезанных в различных направлениях. Образцы рассматривались как длинные прямоугольные пластины при растяжении. Отличия не превосходили 25-32 %.

Далее были численно промоделированы статическая и динамическая ползучесть титановой пластины (0,8 м x 0,8 м) с центральным отверстием, радиус которого равен 0,1 м. Была рассмотрена одна четверть пластины и проанализированы напряженно-деформированное состояние и изменение повреждаемости во времени. На рисунке представлено распределение меры повреждаемости для случая статического нагружения с нагрузкой в 10 МПа в момент времени $t = 220$ час, близком к моменту времени до разрушения $t_* = 221$ час. Расчетами установлена нелинейная зависимость характеристик ползучести и повреждаемости от нагрузки: так, например, увеличение нагрузки с 10 до 13 МПа приводит к уменьшению времени до разрушения от 221 часа до 68,5 часа.

Приведем результаты моделирования динамической ползучести этой же пластины. Осевая нагрузка в данном случае состоит из статической составляющей $p_0 = 16,9$ МПа и циклической, которая изменяется по синусоидальному закону с частотой 10 Гц. Введем параметр нагружения $L = p_0/p_a$ где p_a – амплитудное значение нагрузки. Рассмотрено изменение L от 0 до 0,3.

Время до разрушения при такой программе нагружения уменьшается с увеличением L от 0,166 ч для $L = 0$ до 0,122 ч для $L = 0,3$. Установлено, что характер перераспределения напряжений и меры повреждаемости качественно совпадает со случаем статического нагружения, но имеет место существенное ускорение процессов ползучести и последствия вследствие динамической ползучести.

Расчетами установлено, что для малых значений нагрузок, и соответственно, малых значений напряжений в пластине, характер процесса отличается

ся от выше проанализированного. Динамическая нагрузка ускоряет релаксацию напряжений в области отверстия, как и в случае динамической ползучести [6], при которой уровень напряжений настолько мал, что скорость накопления повреждаемости значительно снижается. Например, для $p_0 = 13$ МПа время до разрушения для $L = 0$ составляет $t_* = 68,5$ ч, но добавление малой циклической составляющей ($L = 0,05$) приводит к увеличению времени $t_* = 72,6$ ч. Последующее увеличение L приводит к аналогичному увеличению времени до разрушения в связи с быстрой динамической релаксацией в начале процесса: для $L = 0,1$; $t_* = 120,1$ ч.

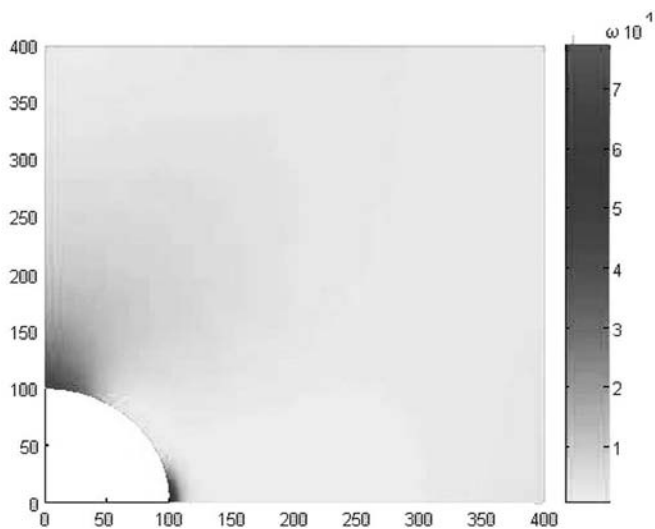


Рисунок – Распределение меры повреждаемости при $t = 220$ ч

5 Выводы. В статье представлен метод для эффективного математического моделирования динамической ползучести и повреждаемости в элементах конструкций, изготовленных из материалов с анизотропными свойствами. Использование метода двух масштабов времени совместно с асимптотическим разложением по малому параметру и последующим осреднением на периоде позволяет избежать прямого интегрирования по циклу и решать задачу при действии только статической нагрузки, но с уравнениями состояниями специального вида, полученными в работе. Эффекты существенного ускорения роста деформаций и накопления повреждаемости, а также релаксации напряжений при динамической ползучести установлены для пластины с отверстием, изготовленной из титанового сплава с анизотропными свойствами ползучести и повреждаемости.

Список литературы: 1. *Murakami S.* Notion of Continuum Damage Mechanics and Its Application to Anisotropic Creep Damage Theory / *S. Murakami* // Journ. Engng. Mater. Techn. – 1983. – Vol. 105. – P. 99-105. 2. *Cordebois J. P.* Damage Induced Elastic Anisotropy / *J. P. Cordebois, F. Sidoroff* //

Mechanical Behavior of Anisotropic Solids. // J. P. Boehler, editor. – Colloque Euromech 115, Villard-de-Lans, June 19-22. – Martinus Nijhoff Publishers, 1979. – P. 761-774. 3. Морачковский О.К. Исследование влияния на ползучесть материалов приобретенной анизотропии вследствие предварительной ползучести / О.К. Морачковский, М.А. Пасынок // Вестник ХГПУ. – Х.: ХГПУ, 1998. – Вып. 27. – С. 197-203. 4. Таїра С. Теория высокотемпературной прочности материалов / С. Таїра, Р. Отани. – М.: Металлургия, 1986. – 280 с. 5. Breslavsky D. A new model of nonlinear dynamic creep / D. Breslavsky, O. Morachkovsky // IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics. – Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995. – PP. 161-166. 6. Breslavsky D. Dynamic creep continuum damage mechanics: FEM-based design analysis / D. Breslavsky, O. Morachkovsky // Computational Plasticity: Fundamentals and Applications. Proc. of the Fifth International Conference on Computational Plasticity held in Barcelona, Spain, 17-20 March 1997. – IMNE, Barcelona IMNE, 1997. – Part 1. – PP. 1071-1076. 7. Конкин В.Н. Ползучесть и длительная прочность легких сплавов, проявляющих анизотропные свойства / В.Н. Конкин, О.К. Морачковский // Проблемы прочности. – 1987. – № 5. – С. 38-42.

Поступила в редколлегию 01.06.2013

УДК 539.3

Расчеты динамической ползучести и повреждаемости элементов конструкций из анизотропных материалов / Д. В. Бреславский, В. А. Метелев, О. К. Морачковский, О. А. Татаринова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 23-31. – Бібліогр.: 7 назв.

Статтю присвячено розрахункам динамічної повзучості і пошкоджуваності елементів конструкцій, що виготовлені з ортотропних матеріалів, на основі методу, який розроблено авторами. Для таких матеріалів опис закономірностей повзучості з пошкодженням здійснено на основі тензорних співвідношень, що використовують тензорний параметр пошкоджуваності для інкрементальної теорії повзучості. Ці співвідношення за допомогою методу багатьох масштабів та усереднення на періоді навантаження перетворені в співвідношення динамічної повзучості анизотропних матеріалів, що пошкоджуються внаслідок повзучості. Розрахунки для циклічно навантажених плоских тіл виконані методом скінчених елементів. Для повзучості пластини з центральним отвором, яку виготовлено з титанового сплаву, чисельно отримані зміни у часі компонент переміщень та тензорних полів напружень, деформацій, і за значеннями параметру пошкоджуваності надано оцінку часу до руйнування.

Ключові слова: повзучість, пошкоджуваність, циклічне навантаження, тензорний параметр пошкоджуваності, МСЕ, пластина з отвором, титановий сплав.

The paper is devoted to the calculations of dynamic creep and damage of structural elements made from orthotropic materials? By use of the method had been developed by authors. For these materials the creep-damage description were done by use of tensor relations which use tensor damage parameter for creep incremental theory. This relations were transformed to the dynamic creep-damage law for anisotropic materials by use of methods of many time scales and averaging over the period of loading. The calculations for cyclically loaded plane solids were done by use of Finite Element Method (FEM). The time variation of displacement components as well as stress and strain tensor fields for creep of plate with central hole made from titanium alloy were obtained numerically. By use of damage parameter value the fracture times were estimated.

Keywords: creep, damage, cyclic loading, tensor damage parameter, FEM, plate with a hole, titanium alloy.

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, д-р техн. наук, професор, НТУ «ХП»;
С. О. ПАЩЕНКО, студент, НТУ «ХП»;
О. В. ГУДЗЕНКО, аспірант, НТУ «ХП»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРЬОХВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КОРПУСА СУПУТНИКА ТИПУ «СІЧ-2»

Стаття посвящена решению трехмерной задаче нестационарной теплопроводности в корпусе искусственного спутника Земли типа «Сич-2» при его движении по околоземной орбите. Получено распределение температур в блоке гироскопов, установленном на данном космическом аппарате, для разных моментов времени. Определена площадь радиаторных пластин для отвода тепловой энергии с целью обеспечения работы гироскопов в заданном диапазоне температур в штатном режиме. Проведено исследование нагрева корпуса спутника с различными коэффициентами теплоизоляции внутренней стенки.

Ключевые слова: температура, нестационарная теплопроводность, искусственный спутник Земли, теплоизоляция, метод конечных элементов, радиационное излучение тепла.

Вступ. Останнім часом в космічній техніці (наприклад, у супутниках) спостерігається перехід від механічних гіроскопів до лазерних, одним із елементів яких є оптоволоконні трубки. В багатьох випадках якість керування космічним апаратом залежить від того, настільки точно датчик може зчитати параметри кутової швидкості та прискорення. Матеріал, з якого виготовлені оптоволоконні трубки, достатньо чутливий на зміну температури оточуючого середовища (в даному випадку – стінки блока гіроскопа): при відносно незначній зміні температури стінки легко деформуються, тим самим даючи значну похибку показань гіроскопа. Для того, щоб якісно провести керування космічним апаратом, необхідно враховувати теплову похибку. Одним з ефективних шляхів вирішення цієї проблеми є розв'язання задачі теплопровідності.

У зв'язку з тим, що всі фізичні процеси протікають у космосі, в якому відсутні «робочі» тіла, що передають теплову енергію (наприклад, газ), можуть мати місце значні перегріві апаратних частин супутника. У зв'язку з цим виникає завдання сконструювати корпус таким чином, щоб поглинання та випромінювання теплової енергії було приблизно однаковим, а гіроскопи знаходилися в робочому температурному діапазоні. Таким чином, необхідно розв'язати дві задачі:

- 1) знайти еволюцію температурного поля на корпусі;
- 2) запропонувати конструкторське рішення, що забезпечить вихід температурного поля на заданий режим роботи.

1 Умови функціонування. Супутник, який наведено на рис. 1, знаходиться на високій орбіті Землі, висота якої 700 км, період обертання 100 хв.

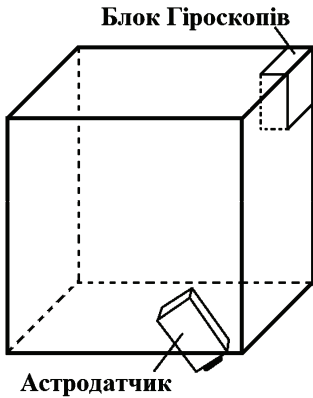


Рисунок 1 – Схема штучного супутника Землі типу «Січ-2»

В момент відділення від ракети-носія супутник спрямований скануючим пристроєм на Землю, а площиною, на якій розташовано астродатчик, – на Сонце. Корпус супутника представляє собою порожнистий паралелепіпед, товщина стінки якого $\delta = 20$ мм, довжина зовнішньої грані – $a = 740$ мм, внутрішньої – $b = 700$ мм. Увесь корпус супутника виготовлено зі сплаву дюралюмінію із коефіцієнтами теплопровідності, рівними за всіма напрямками: $k_x = k_y = k_z = 160$ Вт/мм · К. Густина матеріалу – $\rho = 2500$ кг/м³. Протягом всього періоду обертання сканер не змінює свого положення, тобто завжди є спрямованим на Землю.

Корпус супутника здійснює скануючи коливання земної поверхні в діапазоні кута $\alpha = 30^\circ$ з періодом $T_1 = 10$ хв. Супутник періодично входить в зону тіні Землі, кут якої складає $\gamma = 100^\circ$, та рухається за круговою орбітою. Схему руху представлено на рис. 2.

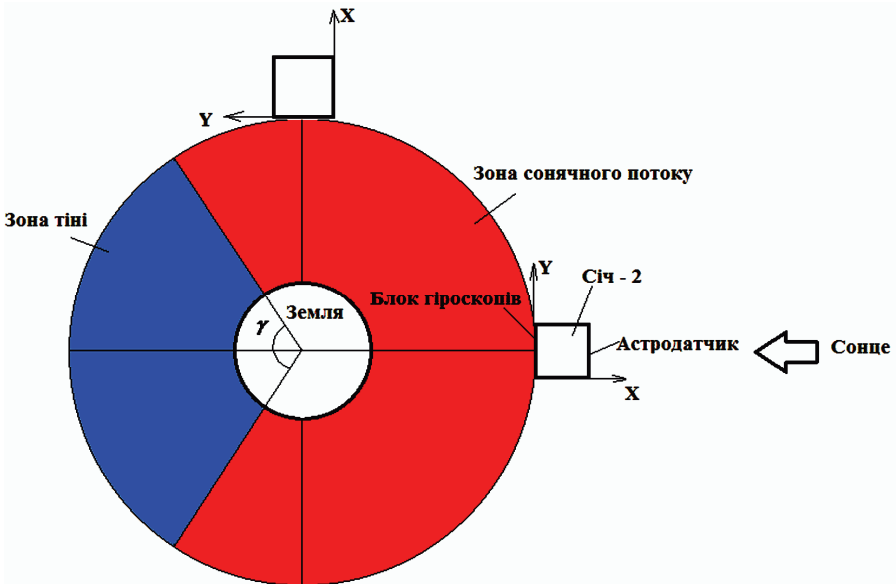


Рисунок 2 – Схема обертання штучного супутника Землі типу «Січ-2»

Вважатимемо, що на сонячній стороні теплообмін відбувається за законом Неймана, а в тіньовій стороні – за законом Стефана-Больцмана [1]. На внутрішніх поверхнях корпусу супутника передача теплової енергії відбувається шляхом радіаційного випромінювання. На віддалених орбітах середня інтенсивність теплового (сонячного) потоку складає $\bar{q} = 133,6 \text{ Вт/мм}^2$ [2].

2 Математична постановка задачі. Розв'язуємо задачу трьохвимірної нестационарної теплопровідності [1] у замкненої області Ω , що обмежена поверхнею S :

$$u_t = k_x u_{xx} + k_y u_{yy} + k_z u_{zz} + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

де $u(x, y, z, t)$ – невідома функція розподілу температури; $f(x, y, z, t)$ – функція розподілу теплових джерел; k_x, k_y, k_z – коефіцієнти теплопровідності в напрямках осей OX, OY, OZ відповідно.

У зв'язку з тим, що корпус супутника постійно знаходиться в процесі руху, заданий температурний режим на поверхні буде відсутнім, тобто крайові умови першого роду не включаються в постановку задачі. Отже, сформулюємо закони теплообміну наступним чином.

Крайові умов 2 роду (Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{s_2} = q(t), \quad (2)$$

s_2 – поверхня, на якій задано інтенсивність теплового потоку у вигляді функції $q(t)$.

Крайові умови 4 роду (радіаційний теплообмін):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{s_3} = A e \delta (T_1^4 - T_2^4), \quad (3)$$

де A – площа поверхні, на якій відбувається радіаційний теплообмін з оточуючим середовищем; e – коефіцієнт чорноти; δ – константа Стефана-Больцмана, $\delta = 5,670373 \cdot 10^{-8}$; T_1 – температура тіла на поверхні S_3 ; T_2 – температура оточуючого середовища.

Як початкові умови приймаємо розподіл температур при $t = 0$:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \quad (4)$$

3 Метод розв'язання. Задачу розв'язуємо методом скінченних елементів. Проводячи дискретизацію області на скінченні елементи та застосовуючи основні співвідношення методу зважених відхилів для кожного елементу, отримаємо постановку трьохвимірної задачі нестационарної теплопровідності методом скінченних елементів [3, 4], що була розглянута раніше в статті [5]. Відмінність даної задачі від попередніх є в тому, що до закону теплообміну на поверхні додаються додаткові умови теплового радіаційного випромінювання. Далі коротко опишемо алгоритм, зосереджуючись на розв'язку задачі з крайовими умовами четвертого роду Стефана-Больцмана.

Представимо шуканий розв'язок у вигляді ряду [3], [4]:

$$u(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) N_i(x, y, z), \quad (5)$$

де $N_i(x, y, z) | i=1, n$ – базисні функції (БФ), які залежать від 3х геометричних координат; $u_i(t)$ – нестационарний температурний розподіл у вузлах СЕ сітки, що є функцією часу. Побудуємо зважені відхили по області Ω , границі Γ_1 , на якій задані крайові умови 2 роду та границі Γ_2 , на якій задано тепловий радіаційний потік. Для того, щоб найточніше знайти розв'язок задачі (1), (2), (3), вимагатимемо, щоб сума відхилів дорівнювала нулю [3]:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma_1} \overline{W}_l R_{\Gamma_1} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \overline{\overline{W}}_l R_{\Gamma_2} d\Gamma = 0, \quad (6)$$

де W_l – вагова функція для області; \overline{W}_l – вагова функція для границі, де задано тепловий потік; $\overline{\overline{W}}_l$ – вагова функція для границі, де задано радіаційне випромінювання. Для мінімізації першого відхилу виразу (6), підставимо припустимий розв'язок (5) в диференціальне рівняння (1), та після цього отримаємо:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{du_i(t)}{dt} W_l N_i(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega} k_x \sum_{i=1}^n u_i(t) W_l \frac{\partial^2 N_i(x, y, z)}{\partial x^2} d\Omega + \quad (7)$$

$$+ \int_{\Omega} \left[k_y \sum_{i=1}^n u_i(t) W_l \frac{\partial^2 N_i(x, y, z)}{\partial y^2} + k_z \sum_{i=1}^n u_i(t) W_l \frac{\partial^2 N_i(x, y, z)}{\partial z^2} \right] d\Omega + \int_{\Omega} f(x, y, z, t) W_l d\Omega.$$

Для мінімізації зважених відхилів теплового та радіаційного потоків, підставимо апроксимацію (5) до другого та третього доданку виразу (6) відповідно:

$$\int_{\Gamma_1} \overline{W}_l \left(\bar{q} - \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial N_i(x, y, z)}{\partial n} \right) d\Gamma = 0; \quad \int_{\Gamma_1} \overline{\overline{W}}_l \left(Ae\delta(T_1^4 - T_2^4) - \sum_{i=1}^n u_i(t) \frac{\partial N_i(x, y, z)}{\partial n} \right) d\Gamma.$$

Мінімізуємо одночасно відхил по області та по границі з тепловим потоком, взявши задалегідь граничні функції ваги наступним чином:

$$W_l = -\overline{W}_l.$$

Застосовуючи формулу Гріна для правої частини рівняння (7), отримаємо наступний вираз:

$$\left[\int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \frac{du_i(t)}{dt} \right] = k_x \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right] u_i(t) + k_y \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right] u_i(t) +$$

$$+ k_z \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right] u_i(t) + \int_{\Omega} f(x, y, z, t) N_j d\Omega.$$

Даний підхід дозволяє перевести базисні функції з класу диференційованості C_2 до класу C_1 . Тим самим для розв'язання задачі виберемо трилінійні базисні функції, що мають наступний вигляд:

$$N_i = \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \left(\frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) \left(\frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right).$$

Для розрахунків застосуємо скінчений елемент у вигляді правильного восьмивузлового паралелепіпеду.

Введемо матрицю вкладу, що має назву локальної матриці теплопровідності:

$$K_{ij} = k_x \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right] + k_y \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right] + k_z \left[\int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right].$$

По аналогії з матрицею теплопровідності введемо матрицю, елементи якої обчислюються як інтеграли добутків базисних функцій:

$$P_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega.$$

Узагальнені термодинамічні сили позначимо, як:

$$Q_j = \int_{\Omega} f(x, y, z, t) N_j d\Omega.$$

Узагальнені поверхневі сили, що утворюють тепловий потік, позначимо наступним чином:

$$S_j = \int_{\Gamma} q N_j d\Gamma.$$

Узагальнені поверхневі сили, що утворюють радіаційне випромінювання, розіб'ємо на дві частини та позначимо наступним чином:

$$R^1_j = \int_{\Gamma} (Ae\delta(T_1^4 - T_2^4)) N_j d\Gamma; \quad R^2_j = u_j \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial N_i}{\partial n} \right) N_j d\Gamma,$$

де R^1_j – вектор-стовпець, в який входять вільні зважені члени від радіаційного потоку; R^2_j – вектор-стовпець, в який входять зважені добутки нормальних похідних від базисних функцій.

На кожному елементі локальні матриці мають розмірність 8×8 , тобто $i = 1 \dots 8$; $j = 1 \dots 8$. До того ж всі локальні матриці будуть позитивно визначеними та симетричними. Тоді, з урахуванням всіх позначень, задача переформулюється у наступному вигляді:

$$P_{ij} \frac{du_j(t)}{dt} = (K_{ij} + R^2_j) u_j(t) + Q_j + S_j + R^1_j. \quad (8)$$

До (8) додаємо початкові умови (4).

Процес ансамблювання локальних матриць в глобальну детальніше роз-

глянуто в роботі [3-5], а створення геометричної моделі – у [5,6].

Для дискретизації виразу (8) за часом застосуємо чисельну схему Ейлера: представимо похідну вузлової температури через відношення скінченних різниць:

$$\frac{du_i(t)}{dt} \approx \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t} . \quad (9)$$

Після підстановки виразу (9) у формулу (8), отримаємо:

$$P_{ij} \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t} = (K_{ij} + R_j^2) u_i(t + \Delta t) + Q_j + S_j + R_j^1 .$$

Провівши перетворення, маємо:

$$\left(K_{ij} - \frac{P_{ij}}{\Delta t} + R_j^2 \right) u_i(t + \Delta t) = -\frac{P_{ij}}{\Delta t} u_i(t) - Q_j + S_j + R_j^1 .$$

4 Аналіз результатів. Прийmemo, що після відділення корпусу супутника від ракети-носія його початкова температура складає 320 °К. Для розв’язання вище поставленої задачі побудуємо скінченно-елементну модель корпусу супутника, кількість елементів якої складає 6400. Застосуємо тактовий крок для ітераційної схеми Ейлера $\tau = 2$ хв. З метою зменшення підведення теплової енергії, що надходить від сонячного потоку візьmemo коефіцієнт чорноти для сплаву дюралюмінію $e = 0,04$ [2] .

З урахуванням періодів руху супутника навколо Землі та сканування задамо вирази для теплових потоків: для поверхонь $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, що зображені на рис. 3, де S_3 – поверхня корпусу супутника, на якій розміщено астродатчик; S_4 – поверхня корпусу супутника, на якій розміщено блок гіроскопів.

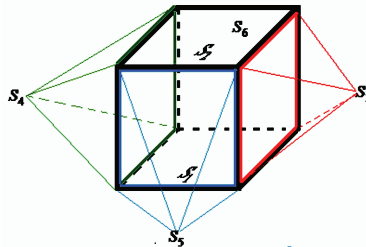


Рисунок 3 – Схема граней, на які діють теплові потоки Сонця та радіаційне випромінювання

Для поверхні S_3 :

$$Q = \bar{q} \cos\left(\frac{2t\pi}{T}\right) \sin(\varphi) ,$$

де Q – кількість теплоти, що приймає поверхня від Сонця; t – поточний мо-

мент часу; T – період обертання супутника навколо Землі, $T = 6000$ с; \bar{q} – інтенсивність теплового потоку; φ – кут, що характеризує коливання в процесі сканування:

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{2t\pi}{T_1}\right),$$

де T_1 – період коливань при скануванні, $T_1 = 600$ с.

Для поверхні S_5 :

$$Q = \bar{q} \sin\left(\frac{2t\pi}{T}\right) \sin(\varphi).$$

Для поверхонь S_2, S_1 :

$$Q = \bar{q} \sin(\varphi).$$

Поверхні S_4, S_6 знаходяться в першій чверті періоду в тіньовій стороні. В останніх чвертях періоду обертання теплові потоки знаходяться аналогічним чином. Розглянемо, як веде себе температурне поле в залежності від коефіцієнта ізоляції λ внутрішніх стінок. Коефіцієнт ізоляції змінюється в межах $0 \dots 1$, де 0 характеризує повністю ізольоване тіло, а 1 – повну відсутність ізоляції.

На рис. 4 надано результати розв’язання задачі нестационарної теплопровідності для СЕ, які знаходяться у місті встановлення блоку гіроскопів, протягом періоду обертання супутника навколо Землі.

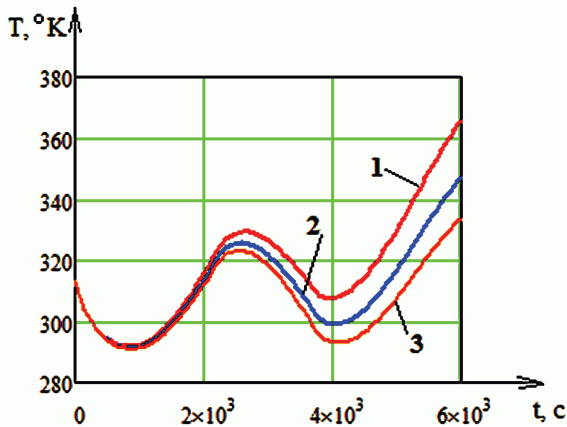


Рисунок 4 – Змінювання температури у блоці гіроскопів при різних коефіцієнтах теплоізоляції

Крива 1 описує еволюцію температури на блоці гіроскопа з коефіцієнтом теплоізоляції $\lambda = 1$; крива 2 – $\lambda = 0,5$; крива 3 – $\lambda = 0,2$.

На проміжку часу з 0 до 900 секунди спостерігається інерційне остиган-

ня блока гіроскопів. Це явище має місце у зв'язку з двома причинами: передача теплової енергії від нагрітої Сонцем поверхні за рахунок теплопровідності не може бути миттєвою; блок гіроскопів знаходиться в тіньовій стороні супутника, на поверхні якого відбувається остигання за рахунок радіаційного випромінювання. Після того, як супутник перетинає кут 90° , грань, на якій встановлено гіроскопи, повертається до сонячної сторони, у зв'язку з чим спостерігається інтенсивний нагрів блока гіроскопа, проте, починаючи з 2267 секунди, супутник входить в зону тіні Землі, і спостерігається інерційний нагрів блока гіроскопа. Після того, як супутник виходить із зони тіні Землі, грань гіроскопа знову повернена до Сонця, у зв'язку з чим спостерігається значне підвищення температури аж до завершення періоду обертання. Як видно з рис. 4, самостійно супутник охолодитися не може (за рахунок його тіньової сторони), а зони тіні Землі також для цього не достатньо. Це виникає через те, що кількість теплоти, що приходить від сонячного потоку більша, ніж випромінена на тіньовій стороні шляхом радіаційного теплообміну.

За один період обертання спостерігається підвищення температурного поля відносно початкового. Хоча теплоізоляція дозволяє знизити кількість теплової енергії на блоках гіроскопів, проте через декілька періодів обертань температура перевищить робочий температурний діапазон гіроскопів, і вони не зможуть працювати у штатному режимі.

Далі проаналізовано змінювання температури за часом у разі встановлення радіаторних панелей на грань, де знаходяться гіроскопи, з метою виходу на початковий температурний режим. Площу панелей розраховано для різних коефіцієнтів теплоізоляції. Місце встановлення радіаторних пластин обрано, виходячи з того, що дана грань максимально довго знаходить в тіньовій стороні.

На рис. 5 показано змінювання температури у місці розташування блоку гіроскопів з урахуванням встановлених радіаторних пластин. Розглянути три випадки, що відповідають різним коефіцієнтам теплоізоляції λ внутрішніх стінок.

На рис. 5 криву 1 побудовано для випадку $\lambda = 1$; криву 2 – $\lambda = 0,5$, криву 3 – $\lambda = 0,2$.

На рис. 5 видно, що за рахунок радіаторних пластин кут інерційного остигання та нагрівання суттєво збільшився. На проміжку часу від 1200 до 2267 с (до зони входу супутника в тінь Землі) спостерігається значний стрибок температурного поля за рахунок того, що пластини повернуті до Сонця. Але у зв'язку з тим, що цей вплив відбувається недовго, то в зоні тіні Землі спостерігається суттєве остигання.

В ході циклу розрахунку для різних коефіцієнтів теплоізоляції було знайдено площі радіаторів: для $\lambda = 1$ – $S = 2700 \text{ мм}^2$, для $\lambda = 0,5$ – $S = 2300 \text{ мм}^2$, для $\lambda = 0,2$ – $S = 2100 \text{ мм}^2$. Незважаючи на те, що зміна температури з радіаторними пластинами стала більш інтенсивною, даний підхід дозволяє вивести температурне поле в заданий початковий режим з абсолют-

ною величиною температур, що знаходяться в робочому діапазоні гіроскопів.

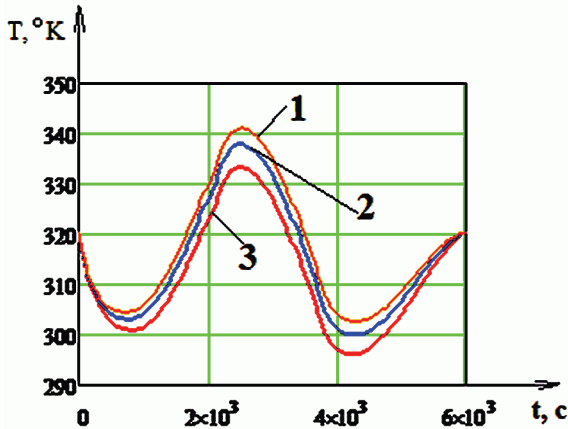


Рисунок 5 – Еволюція температурних полів з різними коефіцієнтами теплоізоляції

Висновки. Розроблений програмний засіб для розв’язання нестационарних задач теплопровідності методом скінченних елементів [5] доповнено можливістю розв’язання задач нестационарної теплопровідності з крайовими умовами четвертого роду. Виконано чисельне моделювання перерозподілу температурних полів у корпусі штучного супутника Землі типу «СІЧ-2». Проведено розрахунки для радіаторних пластин, виготовлених з матеріалів з різними коефіцієнтами теплоізоляції. Показано можливість підтримання необхідного теплового режиму у корпусі супутника, визначено площі радіаторних пластин з матеріалів з різними коефіцієнтами теплоізоляції, необхідних для відведення теплової енергії.

Список літератури: 1. Самарский А.А. Уравнения математической физики (5-е изд.) / А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – М.: Наука, 1977. – 728 с. 2. Санин Ф.П. Космос и технологии: Учебное пособие / Ф.П. Санин. – Д.: АРТ-ПРЕСС, 2007. – 456 с. 3 Морган О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Морган, К. Зенкевич. – М.: Мирб 1986. – 309 с. 4. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 212 с. 5. Бреславський Д.В. Розробка алгоритмічного та програмного забезпечення для розв’язку трьохвимірних нестационарних задач теплопровідності методом скінченних елементів / Д.В. Бреславський, С.О. Пащенко // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП», 2012. – № 67. – С. 31-38. 6. Бреславський Д.В. Программные средства для конечноэлементного моделирования двумерных задач теории ползучести / Д.В. Бреславский, Ю.Н. Корытко, П.М. Лисак // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП», 2007. – № 38. – С. 24-29.

Надійшла до редколегії 01.06.2013

УДК 536

Розв’язання трьохвимірної задачі нестационарної теплопровідності для корпусу супутника типу «Січ-2» / Д. В. Бреславський, С. О. Пащенко, О. В. Гудзенко // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 32-41. – Бібліогр.: 6 назв.

Стаття присвячена розв'язанню трьохвимірної задачі нестационарної теплопровідності у корпусі штучного супутника Землі типу «Січ-2» при його русі за навколосемною орбітою. Отримано розподіл температур у блоці гіроскопів, встановленому на даному космічному апараті, для різних моментів часу. Визначено площу радіаторних пластин для відведення теплової енергії з метою забезпечення роботи гіроскопів в заданому діапазоні температур у штатному режимі. Проведено дослідження залежності нагрівання корпусу супутника від різних коефіцієнтів теплоізоляції внутрішньої стінки.

Ключові слова: температура, нестационарна теплопровідність, штучний супутник Землі, теплоізоляція, метод скінченних елементів, радіаційне випромінювання тепла.

The paper is devoted to solving of the three-dimensional transient heat conduction problem for the case of the Earth artificial satellite of «Sich-2» type. The temperature distribution for the gyroscope block installed on the spacecraft is obtained. Area for heat extraction in order to ensure the gyroscope's work in a regular mode in a given temperature range is determined. An investigation of the satellite's heating with different coefficients of thermal insulation of the inner wall is performed.

Keywords: temperature, transient heat conduction, artificial Earth satellite, thermal insulation, Finite Element Method, heat radiation emission.

УДК 539.3

С. М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук, доцент, Сумской государственной университет;

Д. А. ЖИГИЛИЙ, канд. техн. наук, ассистент, Сумской государственной университет

ОДИН ВАРИАНТ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С МЕЖСЛОЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского предоставлены дифференциальные уравнения движения тонкостенных конструкций из композиционных материалов. Рассмотрена дискретно-структурная модель многослойных оболочек, согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта соединенных поверхностей анизотропных слоев с различными направлениями армирования материала. Расчет задачи осуществляется на основе геометрически нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и обжатия.

Ключевые слова: вариационный принцип Гамильтона-Остроградского, композиционные материалы, нелинейная теория оболочек.

Работы по расчету конструкций из композиционных материалов при действии динамических нагрузок привлекают в последние годы все большее внимание исследователей вследствие их безусловной практической значимости. Имеющиеся к настоящему времени исследования характеризуются большим разнообразием подходов, моделей разрушения, уровнем строгости

© С. М. Верещака, Д. А. Жигилий, 2013

решения задач, методов решения [1-4].

Следует отметить, что решение задач динамического поведения конструкций с расслоениями, пока остается актуальной проблемой. Анализ различных моделей деформирования слоистых оболочек с дефектами структуры выполнен в обзоре [5]. Экспериментальное и аналитическое исследование процесса разрушения сложных пластин при действии продольной сжимающей импульсной нагрузки рассмотрено в [6, 7]. Высокоскоростная киносъемка процесса разрушения [6] показывает, что распространение дефекта в пластине связано с расслоением и локальным выпучиванием отдельных слоев пластины. Аналитическое моделирование такого разрушения в квазистатической постановке с использованием методов механики разрушения выполнено в [7] в предположении, что область расслоения представляет собой полосу, а в [6] рассмотрено развитие дефекта эллипсоидальной формы. Определены условия роста и остановки расслоения в зависимости от нагрузки и геометрии расслоения, области неустойчивого и устойчивого расслоений.

В [8] на примере сферической оболочки в контактной постановке конечно-разностным методом исследовано влияние расслоений на характер волновых переходных процессов. Сферическая оболочка с расслоением рассматривается как система трех оболочек. Осесимметричное деформирование оболочек описывается системой уравнений гиперболического типа, учитывающей инерцию вращения и сдвига. На границе расслоения, соответствующей стыку оболочек, выполняются условия равенства сил и моментов и условия равенства линейных и угловых скоростей. При описании контактного взаимодействия двух оболочек в зоне расслоения местное сжатие материала на поверхности контакта и трение не учитываются. Численно исследована зависимость прогиба в полусе оболочке от параметров расслоения и начального импульса. Из полученных результатов следует, что учет контактного взаимодействия необходимо учитывать при решении таких задач. Наличие расслоения может качественно менять характер переходного процесса.

Импульсное воздействие на многослойные элементы конструкций с тонкими клеевыми прослойками подробно обсуждается в [9]. Принятая модель расслоения является обобщением известной линейной модели клеевого соединения Голанда-Рейсснера, учитывающим нелинейность характеристик прослойки в поперечном направлении и в продольной плоскости склейки. Результаты численных экспериментов свидетельствуют о том, что влияние параметров нелинейности и предельных деформаций склейки на процесс расслоения несущественно, а определяющую роль играют стандартные характеристики клеевого слоя – предельные напряжения отрыва и сдвига.

Обычно в теории тонких многослойных пластин и оболочек с идеальным контактом между слоями применяются два различных подхода к построению уточненных двумерных теорий [10], называемых сейчас часто феноменологическим и дискретно-структурным. При феноменологическом подходе кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка

рассматривается как квазиоднородная с приведенными упругими характеристиками. Порядок получающихся при этом уравнений не зависит от числа слоев. При дискретно-структурном подходе учитывается неоднородность строения оболочки введением кинематических или статических (или кинематических и статических) гипотез для каждого отдельного слоя. Порядок получающихся при этом уравнений зависит от числа слоев, но эти уравнения позволяют учитывать локальные эффекты на границах контакта слоев. Поэтому именно дискретно-структурный подход оказался пригодным в частности для расчета многослойных конструкций с разного рода несовершенствами по поверхностям контакта сопряженных слоев.

Постановка контактной задачи механики многослойных пластинок и оболочек даны в [11-15], где на основе дискретного подхода построены функционалы и системы уравнений решения задачи при условии неидеального контакта слоев. Новый метод решения нелинейных задач о контакте между двумя оболочками разной формы и эквидистантными слоями, а также обзор по этой проблеме, изложены в книге [16].

Данная статья посвящена выводу дифференциальных уравнений движения тонкостенных конструкций из композиционных материалов на основе дискретно-структурной модели многослойных оболочек [17], согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала.

Постановка задачи. Пусть многослойная оболочка состоит из n жестких слоев. Для обозначения площади нижней и верхней лицевой поверхности применяются символы $-S^0$ и S^n ; боковой поверхности $-G$. Считается, что каждый слой недеформированной оболочки отнесен к нормальной криволинейной системе координат α^i ($i = 1, 2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантой поверхности $S_z^{(k)}$ k -слоя. Индекс « z » при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ эквидистантой поверхности $S_z^{(k)}$. При этом положение данной точки рассматривается в момент времени t и определяется радиус-вектором

$$\vec{\rho}^{(k)} = \vec{r}^{(k)} + \vec{m}^{(k)} z^{(k)}, \quad -\frac{h^{(k)}}{2} \leq z^{(k)} \leq \frac{h^{(k)}}{2}, \quad (1)$$

базисные векторы в точке $(\alpha^i, z^{(k)}, t)$ поверхности $S_z^{(k)}$ равны

$$\vec{\rho}_i^{(k)} = \frac{\partial \vec{\rho}^{(k)}}{\partial \alpha^i} = \vec{r}_j^{(k)} (\delta_i^j - z^{(k)} b_i^j), \quad \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)}. \quad (2)$$

Здесь $\vec{r}^{(k)}$ – радиус – вектор точки срединной поверхности $S^{(k)}$, $\vec{m}^{(k)}$ – нормаль единичной длины к поверхности $S^{(k)}$; δ_i^j – тензорная запись символа Кронекера;

$$a_{ij}^{(k)} = \bar{r}_i^{(k)} \bar{r}_j^{(k)}, \quad b_{ij}^{(k)} = -\bar{m}_i^{(k)} \bar{r}_j^{(k)} = \bar{m}_j^{(k)} \bar{r}_i^{(k)},$$

$$b_i^{j(k)} \bar{r}_j^{(k)} = -\bar{m}_i^{(k)}, (i = 1, 2; j = 1, 2) - \quad (3)$$

коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности $S^{(k)}$;

$$\bar{m}_i^{(k)} = \frac{\partial \bar{m}^{(k)}}{\partial \alpha^i} - \text{производная нормали } \bar{m}^{(k)}.$$

Вектор полного перемещения $\bar{u}_z^{(k)}$ точки k – жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек Тимошенко можно представить в виде

$$\bar{u}_z^{(k)} = \bar{u}^{(k)} + z^{(k)} \bar{\gamma}^{(k)} + g(z) \bar{\psi}^{(k)}, \quad (4)$$

где $\bar{u}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\bar{\gamma}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ – вектор углов поворота нормали к точкам поверхности $S^{(k)}$ в процессе деформации; $g(z)$ – заданная функция, характеризующая нелинейный закон распределения тангенциальных перемещений по толщине жесткого слоя; $\bar{\psi}^{(k)}(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\bar{u}^{(k)}, \bar{\gamma}^{(k)}, \bar{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи символов $u_i^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \psi_i^{(k)}$.

$$\bar{u}^{(k)} = \bar{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \bar{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \bar{\gamma}^{(k)} = \bar{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)}; \quad \bar{\psi}^{(k)} = \bar{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (5)$$

Тогда радиус-вектор точки k – слоя оболочки после деформации запишется

$$\bar{\rho}^{(k)*} = \bar{\rho}^{(k)} + \bar{u}_z^{(k)}, \quad (6)$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\bar{\rho}_i^{(k)*} = \bar{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}, \quad \bar{\rho}_3^{(k)*} = \bar{m}^{(k)} + \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial z}. \quad (7)$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)}, t)$ определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$2\mathcal{E}_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)};$$

$$2\mathcal{E}_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)};$$

$$2\mathcal{E}_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \quad (8)$$

где

$$g_{ij}^{(k)} = \bar{\rho}_i^{(k)} \bar{\rho}_j^{(k)}; \quad g_{ij}^{(k)*} = \bar{\rho}_i^{(k)*} \bar{\rho}_j^{(k)*}; \quad g_{i3}^{(k)} = \bar{\rho}_i^{(k)} \bar{\rho}_3^{(k)};$$

$$g_{i3}^{(k)*} = \bar{\rho}_i^{(k)*} \bar{\rho}_3^{(k)*}; \quad g_{33}^{(k)} = \bar{\rho}_3^{(k)} \bar{\rho}_3^{(k)} = \bar{m}^{(k)} \bar{m}^{(k)} = 1;$$

$$g_{33}^{(k)*} = \bar{\rho}_3^{(k)*} \bar{\rho}_3^{(k)*}; \quad (i = 1, 2; j = 1, 2). \quad (9)$$

Подставляя в (8), (9) значения базисных векторов (2), (7), нетрудно найти геометрические зависимости между деформациями и перемещениями в векторной форме

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^{(k)z} &= \frac{1}{2} \left[\bar{\rho}_i^{(k)} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^j} + \bar{\rho}_j^{(k)} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^j} \right]; \\ \varepsilon_{i3}^{(k)z} &= \frac{1}{2} \left[\bar{\rho}_3^{(k)} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} + \bar{\rho}_i^{(k)} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial z^i} + \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial z} \right]; \\ \varepsilon_{33}^{(k)z} &= \bar{\rho}_3^{(k)} \frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_z^{(k)}}{\partial z} \right)^2.\end{aligned}\quad (10)$$

Уравнения движения многослойных оболочек. Для нахождения энергии упругой деформации R и граничных условий многослойной оболочки широко применяются вариационные принципы Лагранжа, Кастильяно, Рейсснера. Значение функционала энергии такого класса задач, следуя Рейсснеру, можно представить в виде

$$R = \sum_{k=1}^n (\Pi_{(k)} + A_{(k)}), \quad (11)$$

$$\text{где} \quad \Pi_{(k)} = - \iiint_{V_k} [\sigma_{(k)}^{ij} \varepsilon_{ij}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{i3} \varepsilon_{i3}^{(k)z} + \sigma_{(k)}^{33} \varepsilon_{33}^{(k)z} - W_{(k)}] dV - \quad (12)$$

потенциальная энергия деформации k – жесткого слоя;

$$\begin{aligned}A_{(k)} &= \iiint_{V_k} \bar{u}_z^{(k)} \bar{F}^{(k)} dV + \iint_{S^0} \bar{u}_z^{(0)} \bar{P}^{(0)} dS + \iint_{S^n} \bar{u}_z^{(n)} \bar{P}^{(n)} dS + \\ &+ \iint_{\Gamma_1^{(k)}} \bar{u}_z^{(k)} \bar{P}_s^{(k)} dS + \iint_{\Gamma_2^{(k)}} (\bar{u}_z^{(k)} - \bar{u}_z^{(k)s}) \bar{X}^{(k)} dS -\end{aligned}\quad (13)$$

работа внешних сил, приложенных к k – жесткому слою оболочки. Индекс «s» указывает на заданные величины. В формулах (11)–(13) введены величины: $\sigma_{(k)}^{ij}$, $\sigma_{(k)}^{i3}$, $\sigma_{(k)}^{33}$ – компоненты тензора напряжений в деформированной косоугольной системе координат α^i и z , определенные для каждого заданного ранее слоя оболочки; $\bar{P}^{(n)}$, $\bar{u}_z^{(n)}$, $\bar{P}^{(0)}$, $\bar{u}_z^{(0)}$ – векторы заданных внешних напряжений и перемещений, которые действуют на ограничивающие лицевые поверхности S^n , S^0 соответственно; $V^{(k)}$ – объем k – жесткого слоя $\bar{F}^{(k)}$ – вектор заданных объемных сил; $\bar{P}_s^{(k)}$ – вектор внешней нагрузки на части боковой поверхности k – жесткого слоя $\Gamma_1^{(k)}$; $\bar{X}^{(k)}$ – вектор внутренних напряжений на части боковой поверхности $\Gamma_2^{(k)}$ с заданным вектором смещения $\bar{u}_z^{(k)}$; $W^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации рассматриваемых слоев, выраженная через напряжения.

Если между k и $k+1$ слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k,k+1)}$ могут возник-

каты неизвестные векторы усилий $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость: $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в функционал энергии R необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу силы контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k-1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{U}_z^{(m)} dS. \quad (14)$$

При решении динамических задач, когда имеет место функционал энергии упругих деформаций R , используется вариационный принцип Гамильтона-Остроградского

$$\delta H = \delta \int_{t_0}^{t_1} (R - T) dt = 0. \quad (15)$$

Здесь $T = \sum_{k=1}^n T^{(k)}$ – кинетическая энергия многослойной системы, t – время.

Согласно вариационному принципу Гамильтона-Остроградского в процессе движения тела на отрезке времени между моментами t_0 и t_1 среди кинематически допустимых перемещений, удовлетворяющих геометрическим граничным условиям на границе тела и заданных в начальный $t = t_0$ и конечный $t = t_1$ моменты времени, истинными будут те перемещения, которые приводят функционал H к стационарному значению.

Функционал кинетической энергии k – жесткого слоя оболочки запишется:

$$T^{(k)} = \frac{\rho^{(k)}}{2} \iiint_{V^{(k)}} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial t} dV, \quad (16)$$

где $\rho^{(k)}$ – плотность k – слоя материала слоистой оболочки.

Подставляя компоненты вектора перемещения (4) в (16) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} &= \frac{\partial \vec{u}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + z^{(k)} \frac{\partial \vec{\gamma}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} + \varphi^{(k)}(z) \frac{\partial \vec{\psi}^{(k)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} = \\ &= \nabla_i \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \nabla_i \left(\vec{\gamma}^{(k)} + f^{(k)}(z) \vec{\psi}^{(k)} \right) = \nabla_i \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \nabla_i \vec{\beta}^{(k)}; \\ \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} &= \vec{\gamma}^{(k)} + \frac{\partial \varphi^{(k)}(z)}{\partial z^{(k)}} \vec{\psi}^{(k)} = \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)'}(z) \vec{\psi}^{(k)} = \vec{\theta}^{(k)}, \end{aligned} \quad (17)$$

будут иметь место зависимости:

$$\begin{aligned}
T = & \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S^{(k)}} \left(\rho_0^{(k)} \frac{\partial u_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} + \rho_1^{(k)} \left(\frac{\partial u_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial \gamma_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} \right) \right) \cdot dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S^{(k)}} \left(\rho_0^{(k)} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} + \rho_1^{(k)} \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_3^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{(k)}^3}{\partial t} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right) \right) \cdot dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S^{(k)}} \left(\rho_2^{(k)} \frac{\partial \gamma_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial \gamma_i^{(k)}}{\partial t} + \rho_3^{(k)} \left(\frac{\partial u_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t} \right) \right) \cdot dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S^{(k)}} \left(\rho_2^{(k)} \frac{\partial \gamma_{(k)}^3}{\partial t} \frac{\partial \gamma_3^{(k)}}{\partial t} + \rho_3^{(k)} \left(\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \frac{\partial \psi_3^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{(k)}^3}{\partial t} \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right) \right) \cdot dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S^{(k)}} \left(\rho_4^{(k)}(z) \left(\frac{\partial \gamma_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial \gamma_i^{(k)}}{\partial t} \right) + \rho_5^{(k)} \frac{\partial \psi_{(k)}^i}{\partial t} \frac{\partial \psi_i^{(k)}}{\partial t} \right) \cdot dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \iint_{S^{(k)}} \left(\rho_4^{(k)}(z) \left(\frac{\partial \gamma_{(k)}^3}{\partial t} \frac{\partial \psi_3^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{(k)}^3}{\partial t} \frac{\partial \gamma_3^{(k)}}{\partial t} \right) + \rho_5^{(k)} \frac{\partial \psi_{(k)}^3}{\partial t} \frac{\partial \psi_3^{(k)}}{\partial t} \right) \cdot dS.
\end{aligned} \tag{18}$$

Обобщенные плотности $\rho_m^{(k)}(z)$, которые входят в выражение функционала (18), имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho_0^{(k)} &= \rho^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} dz = \rho^{(k)} (\delta_k - \delta_{k-1}); & \rho_1^{(k)} &= \rho^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z dz = \rho^{(k)} \frac{\delta_k^2 - \delta_{k-1}^2}{2}; \\
\rho_2^{(k)} &= \rho^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z^2 dz = \rho^{(k)} \frac{\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3}{3}; \\
\rho_3^{(k)} &= \rho^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \varphi(z) \cdot dz = -\rho^{(k)} (\delta_k^2 - \delta_{k-1}^2) \left[3 (\delta_k^2 + \delta_{k-1}^2) - 2 \delta_{k-1} \delta_k \right]; \\
\rho_4^{(k)} &= \rho^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} z \varphi(z) \cdot dz = \\
&= -\rho^{(k)} \left[\frac{2}{5} (\delta_k^5 - \delta_{k-1}^5) + \frac{3}{4} (\delta_k^4 - \delta_{k-1}^4) (\delta_k - \delta_{k-1}) - 2 (\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3) \delta_{k-1} \delta_k \right]; \\
\rho_5^{(k)} &= \rho^{(k)} \int_{\delta_{k-1}}^{\delta_k} \varphi^2(z) \cdot dz = \rho^{(k)} \left[\frac{4 (\delta_k^7 - \delta_{k-1}^7)}{7} - \frac{9 (\delta_k^5 - \delta_{k-1}^5)}{5} \right].
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\cdot \left(\delta_k - \delta_{k-1} \right)^2 + 12 \left(\delta_k^3 - \delta_{k-1}^3 \right) \delta_{k-1}^2 \delta_k^2 + \left(\delta_k^6 - \delta_{k-1}^6 \right) \left(\delta_k - \delta_{k-1} \right) - \frac{9 \left(\delta_k^4 - \delta_{k-1}^4 \right) \left(\delta_k - \delta_{k-1} \right) \delta_{k-1} \delta_k + 12 \left(\delta_k^5 - \delta_{k-1}^5 \right) \delta_{k-1} \delta_k}{2} \left. \right],$$

где функция $\varphi^{(k)}(z)$ определяется выражением:

$$\varphi^{(k)}(z) = z \left(-2z^2 + 3z(\delta_{k-1} - \delta_k) - 6\delta_{k-1}\delta_k \right); \quad z \in [\delta_{k-1}, \delta_k],$$

а $\delta^{(k)}$ – толщина k – жесткого слоя.

Из условия стационарности функционала энергии (15)

$$\delta H = \int_{t_0}^{t_1} (\delta R - \delta T) dt = 0, \quad (20)$$

в котором варьируются независимые между собой перемещения и напряжения, позволяет получить систему уравнений движения многослойных оболочек, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Использование обобщенного закона Гука, нелинейного варианта деформационных соотношений в квадратичном приближении с учетом поперечного сдвига по уточненной теории Тимошенко значительно упрощает вывод рассматриваемых уравнений и граничных условий.

Принимая обозначения [17], для случая одностороннего контакта по области $S_z^{(k,k+1)}$, когда между слоями отсутствуют кинематические связи, можно получить уравнения движения в скалярной форме:

$$\begin{aligned} & \nabla_i T_{(k)}^{ij} - b_i^{j(k)} Q_{(k)}^i + q_{(k)}^i + X_{(k)}^i - \rho_0^{(k)} \frac{\partial^2 u_{(k)}^i}{\partial t^2} - \\ & - \frac{\rho_1^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{(k)}^i}{\partial t^2} - \frac{\rho_3^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 \psi_{(k)}^i}{\partial t^2} = 0, \quad (i=1,2); \\ & \nabla_i Q_{(k)}^i + b_{ij}^{(k)} T_{(k)}^{ij} + q_{(k)}^3 + X_{(k)}^3 - \rho_0^{(k)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2} - \frac{\rho_1^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{(k)}^3}{\partial t^2} - \frac{\rho_3^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 \psi_{(k)}^3}{\partial t^2} = 0; \\ & \nabla_i M_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^i - T_{(k)}^{ij} \gamma_j^{(k)} + M_{(k)}^i - \frac{\rho_1^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 u_{(k)}^i}{\partial t^2} - \\ & - \rho_2^{(k)} \frac{\partial^2 \gamma_{(k)}^i}{\partial t^2} - \frac{\rho_4^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 \psi_{(k)}^i}{\partial t^2} = 0, \quad (i=1,2); \\ & \nabla_i L_{(k)}^{ij} - Q_{(k)}^{0i} - \frac{\rho_3^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 u_{(k)}^i}{\partial t^2} - \frac{\rho_4^{(k)}}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{(k)}^i}{\partial t^2} - \rho_5^{(k)} \frac{\partial^2 \psi_{(k)}^i}{\partial t^2} = 0, \quad (i=1,2). \end{aligned} \quad (21)$$

Кроме того, как дополнение к уравнениям движения из выражения (20) следуют: статические –

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(k)s} &= T_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}, \quad \Phi_\tau^{(k)s} = T_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \quad \Phi_m^{(k)} = Q_{(k)}^i n_i^{(k)} + Q_{(k)}^{0i} n_i^{(k)} + \frac{\partial M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}}{\partial S}; \\ G_n^{(k)s} &= M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}; \quad H_\tau^{(k)s} = -M_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}; \quad L_n^{(k)s} = L_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} n_j^{(k)}; \\ \Lambda_\tau^{(k)s} &= L_{(k)}^{ij} n_i^{(k)} \tau_j^{(k)}, \end{aligned} \quad (22)$$

геометрические –

$$\begin{aligned} u_n^{(k)s} &= u_{(k)}^i n_i^{(k)}; \quad u_\tau^{(k)s} = u_{(k)}^i \tau_i^{(k)}; \quad w_{(k)}^s = w_{(k)}; \quad \gamma_n^{(k)s} = \gamma_{(k)}^i n_i^{(k)}; \\ \gamma_\tau^{(k)s} &= \gamma_{(k)}^i \tau_i^{(k)}; \quad \psi_n^{(k)s} = \psi_{(k)}^i n_i^{(k)}; \quad \psi_\tau^{(k)s} = \psi_{(k)}^i \tau_i^{(k)}, \end{aligned} \quad (24)$$

граничные условия на части контуров $\Gamma_1^{(k)}$ и $\Gamma_2^{(k)}$ соответственно. В выражениях (21)–(24) приняты обозначения: $X_{(k)}^i, X_{(k)}^3$ – тензор внутренних и внешних сил, приложенных к срединной поверхности $S_{(k)}$; $T_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^{ij}, M_{(k)}^i$ – тензоры внутренних усилий и моментов, а также тензор внешних моментов соответственно, приведенные к срединной поверхности $S_{(k)}$; $Q_{(k)}^i$ – тензор поперечных сил; $Q_{(k)}^{0i}, L_{(k)}^{ij}$ – тензоры дополнительных обобщенных внутренних удельных усилий сдвига и моментов соответственно, которые появляются при выводе уравнений равновесия с учетом деформаций поперечного сдвига; ∇_i – символ ковариантного дифференцирования по метрике $a_{ij}^{(k)}$; $u_n^{(k)s}, u_\tau^{(k)s}, w_{(k)}^s, \gamma_n^{(k)s}, \gamma_\tau^{(k)s}, \psi_n^{(k)s}, \psi_\tau^{(k)s}$ – заданные ковариантные компоненты векторов обобщенных перемещений; $\Phi_n^{(k)s}, \Phi_\tau^{(k)s}, \Phi_m^{(k)s}, G_n^{(k)s}, H_\tau^{(k)s}, L_n^{(k)s}, \Lambda_\tau^{(k)s}$ – ковариантные компоненты заданных векторов внешних усилий $\vec{\Phi}_{(k)}^s$, моментов $\vec{G}_{(k)}^s$ и дополнительных моментов $\vec{L}_{(k)}^s$, приложенных к части граничного контура $\Gamma_1^{(k)}$; $n_i^{(k)}, \tau_i^{(k)}$ – ковариантные компоненты векторов единичной нормали \vec{n} и касательной $\vec{\tau}$ к контурной линии.

Усилия контактного взаимодействия $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$ возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (25)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (25) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k,k+1)}$ в процессе деформации, усилие $\vec{q}_{(k)}$ в формулах (16) принимает значение $\vec{q}_{(k)} = 0$. Статические и кинематические граничные условия на контуре области $S_z^{(k,k+1)}$ имеют вид зависимостей (23), (24).

Таким образом, имея уравнения равновесия (21) несложно с заданной точностью найти значение контактного давления на основе итерационного

метода, предложенного в [16].

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой, толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю. Тогда в соответствии с допущениями первого варианта модели предполагается упругое проскальзывание жестких слоев относительно друг друга, то есть по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(k)+} &= \sigma_{i3}^{(k+1)-}; & \sigma_{i3}^{(k)-} &= \sigma_{i3}^{(k-1)+}, & (i = 1, 2); \\ \sigma_{33}^{(k)+} &= \sigma_{33}^{(k+1)-}; & \sigma_{33}^{(k)-} &= \sigma_{33}^{(k-1)+}. \end{aligned} \quad (26)$$

Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. Статические условия контакта (26) по сопряженным лицевым поверхностям k -го слоя удовлетворяются согласно процедуры метода штрафных функций. Уравнения движения (21) должны дополниться вектором

$$\vec{P}_{(k)} = K \left(\vec{X}_{(k-1)}^+ - \vec{X}_{(k)}^- \right)^2,$$

где K – коэффициент штрафа. После несложных преобразований в первые три уравнения правой части системы уравнений (21), составленных для k – слоя, войдут соответствующие штрафные функции:

$$P_{(k)}^1 = 2K(\sigma_{13}^{(k-1)+} - \sigma_{13}^{(k)-}); \quad P_{(k)}^2 = 2K(\sigma_{23}^{(k-1)+} - \sigma_{23}^{(k)-}); \quad P_{(k)}^3 = 2K(\sigma_{33}^{(k-1)+} - \sigma_{33}^{(k)-}).$$

В [17] получены функции распределения напряжений поперечного сдвига и обжатия $\sigma_{i3}^{(k)}$, $\sigma_{33}^{(k)}$ ($i = 1, 2$) по толщине слоя, которые соответствуют введенным ранее допущениям об изменениях деформаций $\varepsilon_{i3}^{(k)z}$, $\varepsilon_{33}^{(k)z}$.

Выводы. Таким образом, в данной статье на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получены дифференциальные уравнения движения тонкостенных конструкций из композиционных материалов. Рассматривалась дискретно-структурная модель многослойных оболочек, согласно которой реализуются как идеальные, так и ослабленные условия контакта сопряженных поверхностей анизотропных слоев с разными направлениями армирования материала. Расчет задачи проводится на основе геометрически нелинейной теории оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и обжатия.

Список литературы: 1. *Leissa A. W.* Vibration of shells. – NASA SP – 288, 1973. – 428 с. 2. *Marku* The mechanics of vibration of cylindrical shells. – Amsterdam: Elsevier, 1988. – 159 p. 3. *Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкарь А. И.* Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1986. – 171 с. 4. *Рассказов А. О., Соколовская И.И.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с. 5. *Григолюк Э. И., Коган Е. А., Мамай В. И.* Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 2. – С. 6-32. 6. *Чай Х., Бэбкок К. Д., Кнаусс В. Г.* О моделировании роста дефекта расслоения в

композитной пластине при действии продольной импульсной нагрузки // Прочность и разрушение композитных материалов. Тр. 2-го советско-американского симпозиума. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 45-47. 7. *Chai H., Babcock C. D., Knauss W. G.* One dimensional modelling of failure in laminated plates by domination buckling // Int. J. Solids and Struct. – 1981. – V. 17, № 11. – P. 1069-1083. 8. *Мальшев А. П.* Переходные процессы в оболочке с расслоениями // Изв. АН СССР. МТТ. – 1978. – № 6. – С. 101-105. 9. Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций / Под ред. *А. В. Кармишина*. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с. 10. *Григолоу Э. И., Коган Ф. А.* Современное состояние теории многослойных оболочек // Прикл. механика. – 1972. – Т. 8, №6. – С. 3-17. 11. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. I. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 832-836. 12. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. II. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77-84. 13. *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. 14. *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. 15. *Паймушин В. Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочности // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32-38. 16. *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. *Подгорный А.Н.* : АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с. 17. *Верещака С. М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.

Поступила в редколлегию 25.09. 2013.

УДК 539.3

Один вариант теории колебания многослойных оболочек с межслойными дефектами структуры / С. М. Верещака, Д. А. Жигилий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 41-51. – Бібліогр.: 17 назв.

На основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського надані диференціальні рівняння руху тонкостінних конструкцій із композиційних матеріалів. Розглянута дискретно-структурна модель багатопшарових оболонок, згідно з якою реалізуються як ідеальні, так і ослаблені умови контакту сполучених поверхонь анізотропних шарів з різними напрямками армування матеріалу. Розрахунок задачі здійснюється на основі геометрично нелінійної теорії оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

Ключові слова: варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського, композиційні матеріали, нелінійна теорія оболонок.

Based on the variational principle of Hamilton-Ostrogradskii was given the conclusion of differential equations of motion of thin-walled constructions made of composite materials on the base of discrete structural model of multilayer shells, according to which implemented as ideal, so as weakened contact conditions of the mating surfaces of anisotropic layers with different directions of the reinforcement material. The calculation of the task is carried out on the basis of geometrically nonlinear theory of shells taking into account the transverse shear deformations and compression.

Key words: variational principle of Hamilton-Ostrogradskii, composite materials, nonlinear theory of shells.

Д.В.ДАНИЛОВ, студент, НТУ «ХПИ»;

А.Г.АНДРЕЕВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ НДС КОЛЕСНОЙ ПАРЫ ПОД ВЛИЯНИЕМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗОК ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ТОРМОЖЕНИЯ

Рассмотрено НДС колесной пары вагона под влиянием температурных нагрузок, возникающих при экстренном и длительном режимах торможения, средствами ПК ANSYS.

Ключевые слова: колесная пара, цельнокатаное колесо, ось, напряжения, перемещения, деформации, контактное давление.

Вступление. Колесные пары относятся к ходовым частям и являются одним из ответственных элементов вагона. Они предназначены для направления движения вагона по рельсовому пути и восприятия всех нагрузок, передающихся от вагона на рельсы при их вращении. Колесные пары, воспринимающие статическую и динамическую нагрузку, обеспечивают непосредственный контакт экипажа и пути и направляют подвижной состав в рельсовой колее, через них передается на рельсы нагрузка от вагона, а колесные пары жестко воспринимают все толчки и удары от неровностей пути.

Работая в современных режимах эксплуатации железных дорог и экстремальных условиях окружающей среды, колесная пара вагона должна удовлетворять следующим основным требованиям: обладать достаточной прочностью, имея при этом минимальную необрессоренную массу (с целью снижения тары подвижного состава и уменьшения непосредственного воздействия на рельсовый путь и элементы вагона при прохождении неровностей рельсовой колее); обладать некоторой упругостью, обеспечивающей снижение уровня шума и смягчение толчков, возникающих при движении вагона по рельсовому пути; совместно с буксовыми узлами обеспечивать возможно меньшее сопротивление при движении вагона и возможно большее сопротивление износу элементов, подвергающихся изнашиванию в эксплуатации.

Постановка задачи. В рамках проведенных исследований было изучено НДС колесной пары под влиянием температурных нагрузок возникающих как при экстренном торможении до полной остановки, так и при продолжительном торможении на затяжном спуске.

Для расчета температур в ситуации экстренного торможения условно принимаем, что вся кинетическая энергия в результате торможения перехо-

дит в энергию нагрева обода колеса и колодки. Удельный тепловой поток (внешняя тепловая нагрузка для расчета температур), возникающий на ободу колеса при торможении, определяется

$$Q = \frac{K}{8t \times S_{\text{обода}}} n, \quad (1)$$

где K – кинетическая энергия вагона, переходящая в нагрев обода колеса, $K = MV^2/2$; t – время торможения; $S_{\text{обода}}$ – площадь поверхности обода колеса; n – коэффициент распределения теплового потока между ободом и колодкой,

$$n = \frac{S_{\text{обода}}}{S_{\text{обода}} + 3S_{\text{кол}}}; S_{\text{кол}} - \text{площадь колодки.}$$

Тепловой поток на колесе в процессе экстренного торможения определялся для груженого вагона массой 80 т, движущегося перед торможением со скоростью 120 км/час до полной остановки через 60 секунд. При расчетах торможения композиционными колодками принимается, что 95 % тепла, выделяющегося при трении, поступает в колесо, поэтому в формуле (1) значение коэффициента n принимаем 0,95. До торможения колесная пара находился в стационарном режиме теплового состояния, температура воздуха 25 °С.

Значение теплового потока на обод колеса ($Q = 174000 \text{ Вт/м}^2$) при длительном торможении продолжительностью 1200 секунд принималось согласно работе В. Г. Иноземцева [1], в которой определено это значение.

На рис. 1, 2 и в табл. 1 представлены геометрические характеристики составных частей колесной пары РУ1Ш-950.

Ниже на рис. 3 приведена твердотельная модель расчетной конструкции, смоделированная средствами ПК ANSYS. С помощью условных обозначений показаны граничные условия и условия нагружения.

Свойства материалов деталей были выбраны в соответствии с регламентируемой в ГОСТах приоритетной маркой стали для такого типа конструкций – Сталь 90. При проектировании данной задачи в ПК ANSYS была учтена зависимость свойств материала от значения температуры исследуемой детали (рис. 4-6).

Температура окружающей среды и начальная температура конструкции была принята равной 25 °С.

Коэффициент теплоотдачи был выбран для разницы между температурой тела и температурой окружающей среды $\Delta t = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ и длиной исследуемой детали $l = 0,5 \text{ м}$ исходя из экспериментальных данных (рис. 7). Таким образом он равен $h = 1,8 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град}$.

Величина удельного теплового потока излучаемого при теплоотдачи конвекцией не является величиной постоянной; это функция разности температур тела и окружающей среды. Согласно закону Ньютона, теплопередача конвекцией описывается следующей формулой:

$$q'' = q / A = h (T_S - T_B), \quad (2)$$

где q – тепловой поток; A – площадь поверхности; T_S – температура поверхности; T_B – средняя температура окружающей среды.

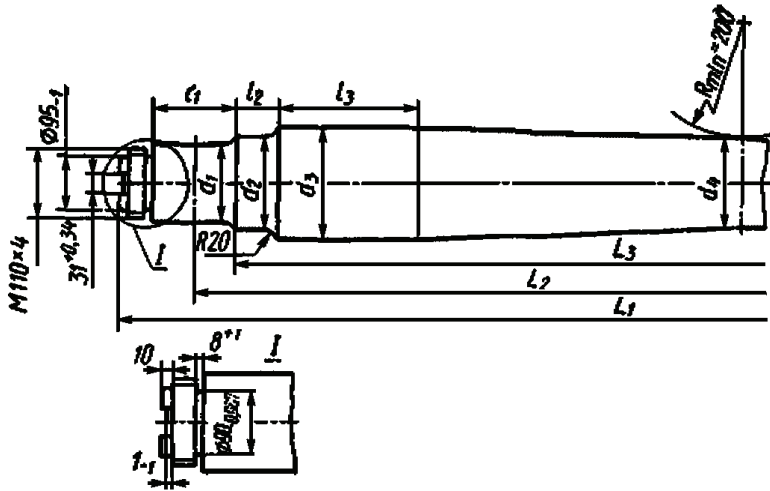


Рисунок 1 – Основные размеры вагонной оси РУ1Ш

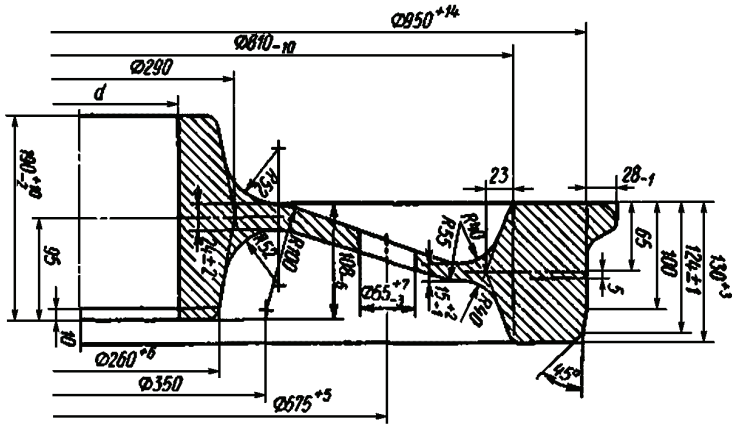


Рисунок 2 – Основные размеры цельнокатаного колеса

Таблица 1 – Основные размеры вагонной оси РУ1Ш

Параметр	d_1	d_2	d_3	d_4	l_1	l_2	l_3	L_1	L_2	L_3
Номинальный размер, мм	130	165	194	165	176	76	265	2294	2038	1836
Допуск, мм	+0,052 +0,025	+0,2 +0,12	+6 -0,5	+5	+1 -0,5	+1 -1	-	+1 +3	-	+1 -1

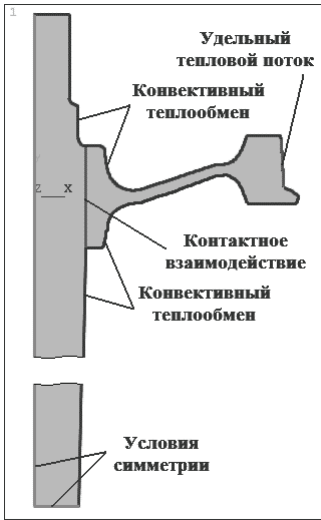


Рисунок 3 – Твердотельная модель расчетной конструкции

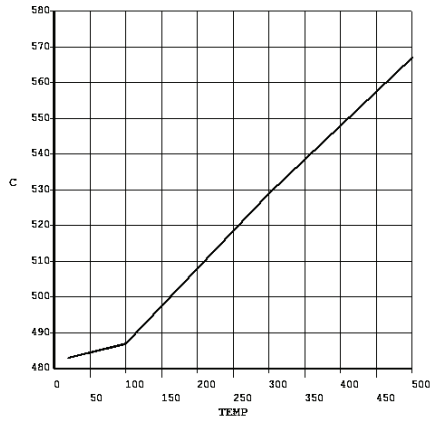


Рисунок 4 – Удельная теплоемкость

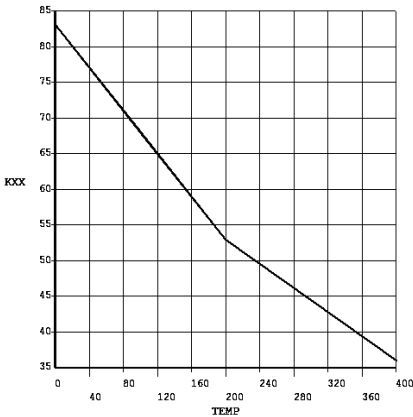


Рисунок 5 – Теплопроводность

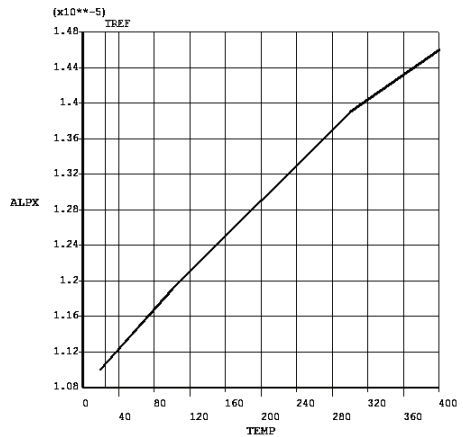


Рисунок 6 – Коэффициент теплового расширения

Полученные результаты и их анализ. В ходе анализа было проведено два расчета, соответствующих различным режимам торможения: длительное (1200 с.) торможение грузового вагона на продолжительных спусках и экстренное (60 с.) торможение до полной остановки.

Далее рассмотрим и проанализируем результаты соответствующие длительному торможению грузового вагона.

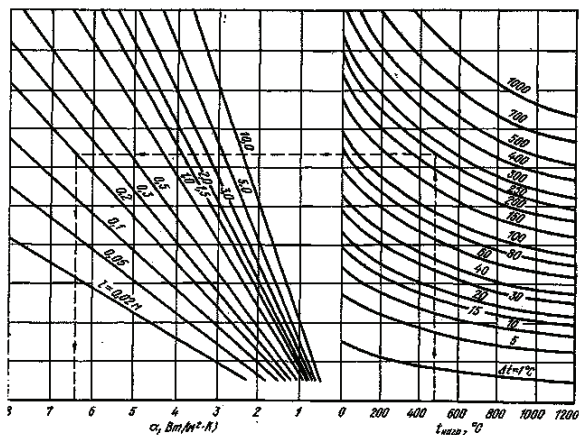


Рисунок 7 – Коэффициент теплоотдачи конвекцией при свободном движении воздуха

Исходя из логических соображений, по виду нагружения можно сказать, что максимальные значения характеристик НДС колесной пары следует ожидать в момент времени $t = 1200$ с., тогда как минимальные характеристики НДС, практически соответствующие статическому положению колесной пары, будут наблюдаться в момент времени $t = 0,5$ с. (время конца первого подшага расчета). Ниже представлено сопоставление характеристик НДС, которые соответствуют этим моментам времени: суммарные перемещения, температура, эквивалентные напряжения, контактное давление. В виду сильного качественного изменения характера распределения контактного давления, эта характеристика НДС помимо указанных моментов времени показана также в промежуточные моменты времени: 300, 600, 900 с. Это сделано с целью наглядной анимации поведения данной характеристики во времени.

На основании этих данных можно сделать вывод о том, что при длительном торможении грузового вагона в результате нагрева колеса максимальная температура была ожидаемо достигнута на поверхности катания и составила $564,43$ °С, максимальные суммарные перемещения – $6,094$ мм, максимальные эквивалентные напряжения – 1220 МПа, максимальное контактное давление между колесом и осью – $65,7$ МПа. Достаточно незначительное снижение максимального контактного давления может ввести в заблуждение касательно предположения о том, что температурная нагрузка, возникающая при длительном торможении, оказывает малое влияние на прочность соединения с натягом между колесом и осью. Однако на самом деле происходит абсолютно противоположный эффект – сильное понижение надежности соединения с натягом. Этот эффект обусловлен не количественным изменением максимального значения контактного давления, а качественным перераспределением контактного давления по всей зоне натяга. Наглядно демонстрируют этот эффект рис. 18-22.

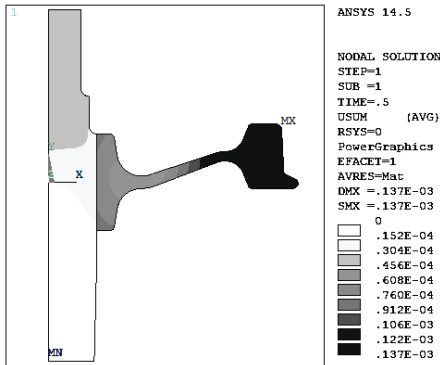


Рисунок 8 – Суммарные перемещения при $t = 0,5$ с.

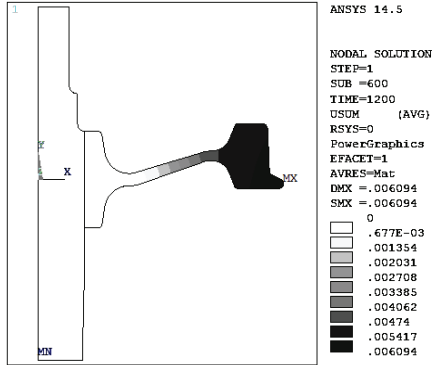


Рисунок 9 – Суммарные перемещения при $t = 1200$ с.

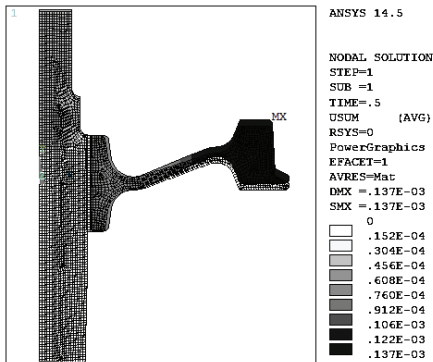


Рисунок 10 – Форма деформирования при $t = 0,5$ с.

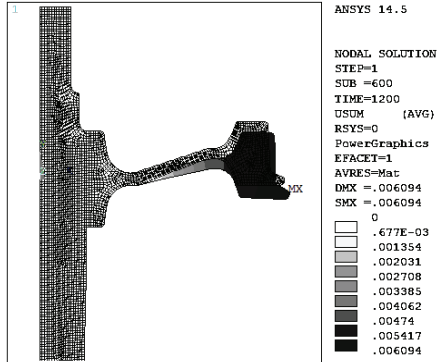


Рисунок 11 – Форма деформирования при $t = 1200$ с.

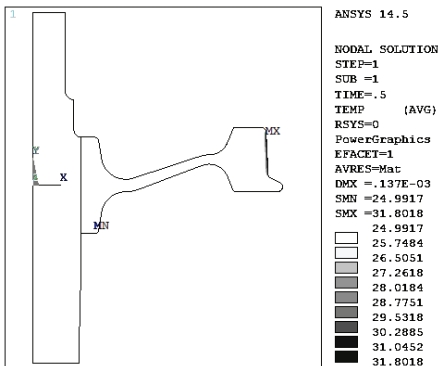


Рисунок 12 – Температурное поле при $t = 0,5$ с.

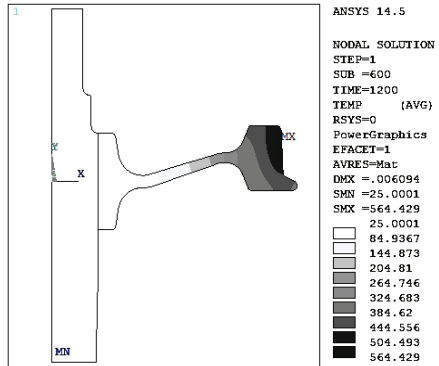


Рисунок 13 – Температурное поле при $t = 1200$ с.

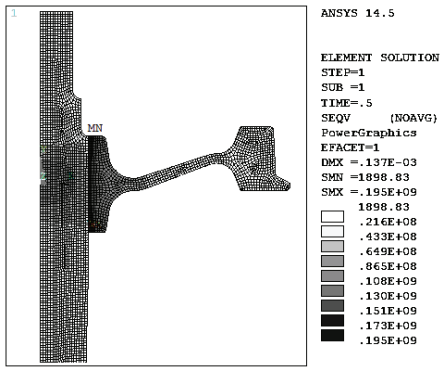


Рисунок 14 – Эквивалентные напряжения при $t = 0,5$ с.

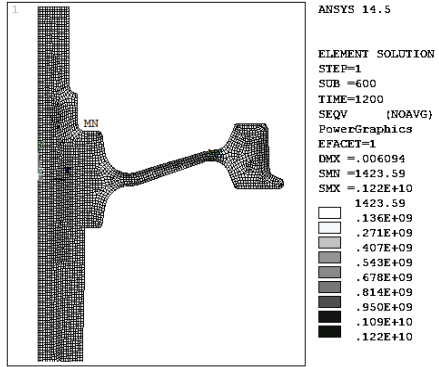


Рисунок 15 – Эквивалентные напряжения при $t = 1200$ с.

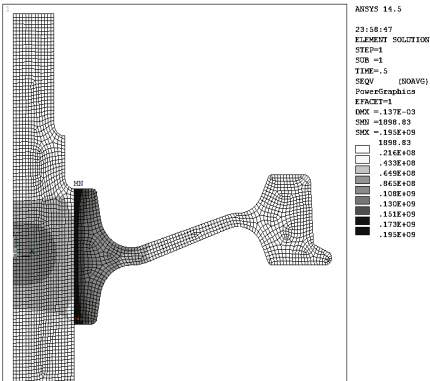


Рисунок 16 – Эквивалентные напряжения при $t = 0,5$ с.

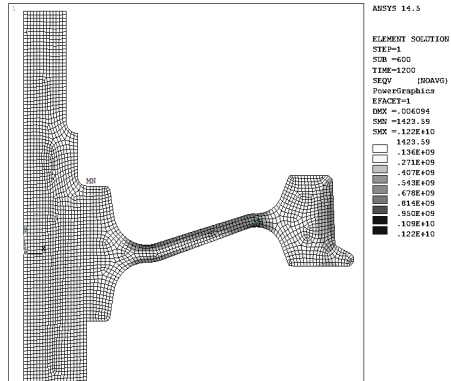


Рисунок 17 – Эквивалентные напряжения при $t = 1200$ с.

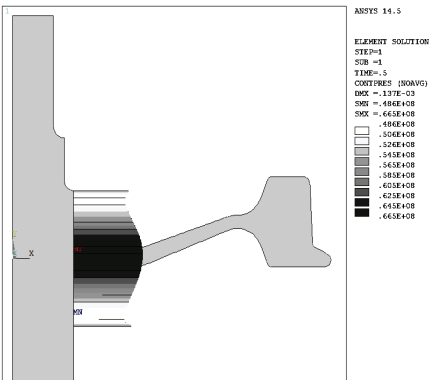


Рисунок 18 – Контактное давление при $t = 0,5$ с.

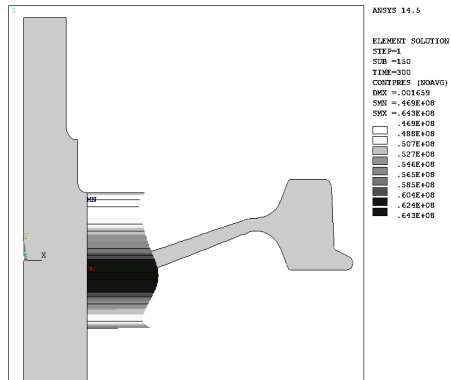


Рисунок 19 – Контактное давление при $t = 300$ с.

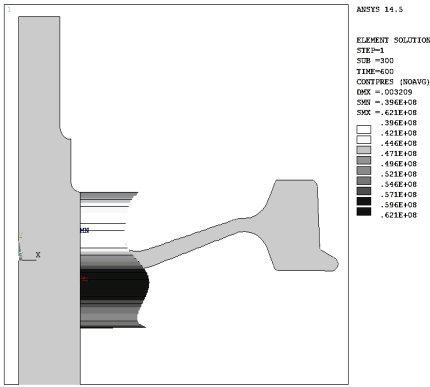


Рисунок 20 – Контактное давление при $t = 600$ с.

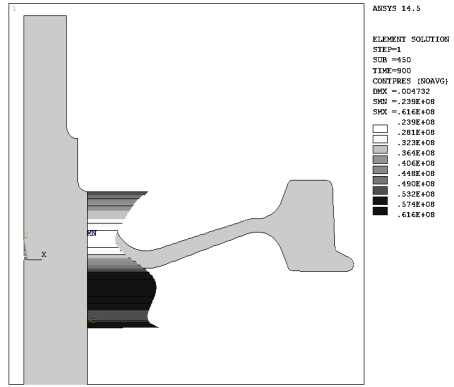


Рисунок 21 – Контактное давление при $t = 900$ с.

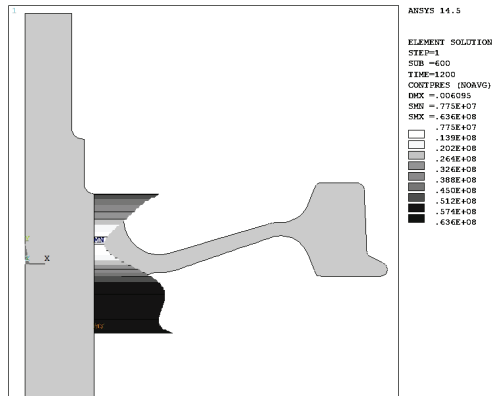


Рисунок 22 – Контактное давление при $t = 1200$ с.

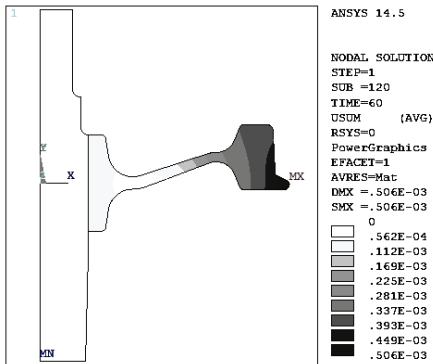


Рисунок 23 – Суммарные перемещения при $t = 60$ с.

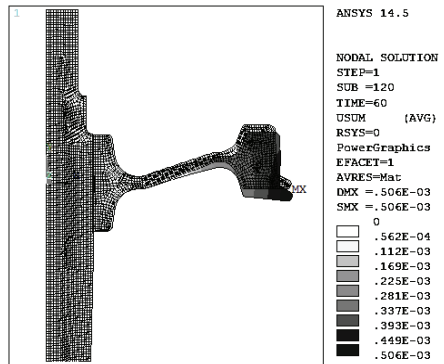


Рисунок 24 – Форма деформирования при $t = 60$ с.

Рассмотрим и проанализируем результаты соответствующие экстренному торможению грузового вагона. Для определения удельного теплового потока (1), сообщаемого колесу при торможении, предполагалось что масса вагона составляет 80 т, его скорость до начала торможения – 100 км/ч, а сам процесс торможения занимает 60 с. Исходя из этих данных значение удельного теплового потока составило 233723 Вт/м².

Ниже на рисунках представлены характеристики НДС колесной пары в момент времени $t = 60$ с (рис. 23-27). Распределение характеристик НДС в момент времени $t = 0,5$ с. аналогичное режиму длительного торможения, поэтому соответствующие рисунки ниже не приводятся.

При данном режиме торможения эффект с качественным перераспределением контактного давления в зоне натяга не наблюдается. В этом можно убедиться исходя из рис. 28-32.

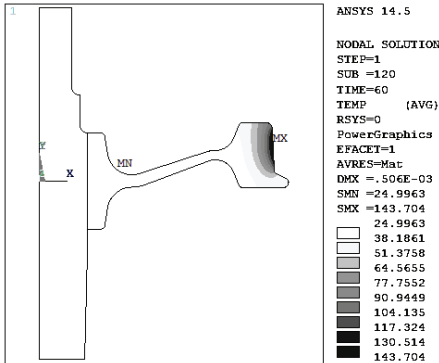


Рисунок 25 – Температурное поле при $t = 60$ с.

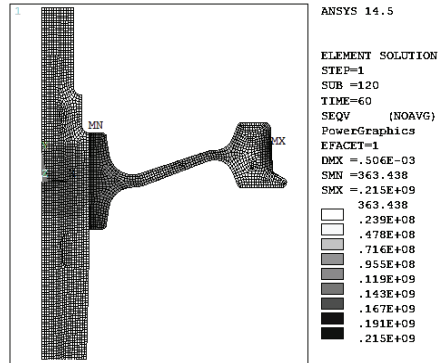


Рисунок 26 – Эквивалентные напряжения при $t = 60$ с.

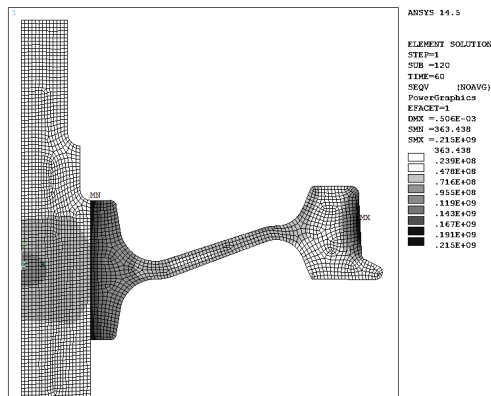


Рисунок 27 – Эквивалентные напряжения при $t = 60$ с.

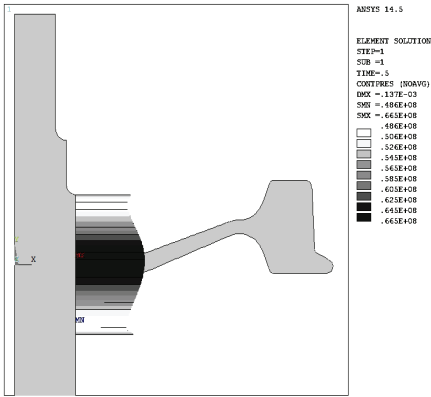


Рисунок 28 – Контактное давление при $t = 0,5$ с.

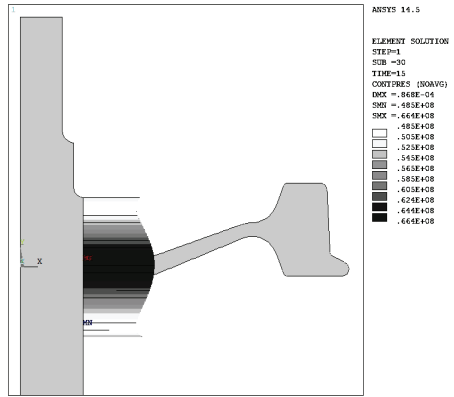


Рисунок 29 – Контактное давление при $t = 15$ с.

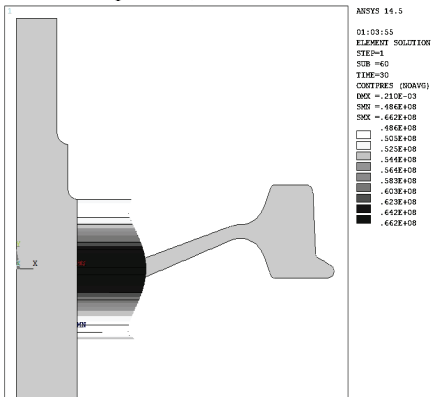


Рисунок 30 – Контактное давление при $t = 30$ с.

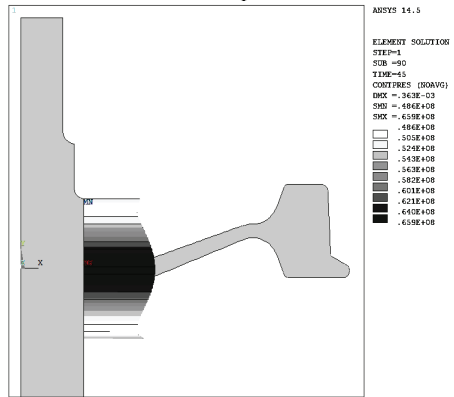


Рисунок 31 – Контактное давление при $t = 45$ с.

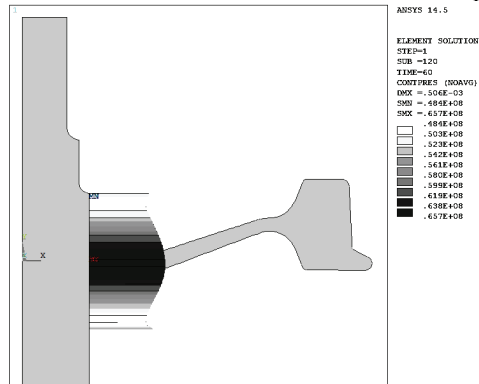


Рисунок 32 – Контактное давление при $t = 60$ с.

На основании результатов расчета экстренного режима торможения грузового вагона можно сделать вывод о том, что в этом случае максимальная температура поверхности катания колеса составила 143,7 °С, максимальные суммарные перемещения – 6,094 мм; максимальные эквивалентные напряжения – 215 МПа; максимальное контактное давление между колесом и осью – 65,7 МПа.

Таблица 2 – Максимальные значения характеристик НДС колесной пары

Режим торможения	Суммарные перемещения, мм	Температура, град.	Эквивалентные напряжения, МПа	Контактное давление, МПа
Экстренное	0,506	143,7	215	65,7
Длительное	6,094	564,4	1220	63,6

Выводы. Наиболее опасные значения характеристик НДС следует ожидать при длительном режиме торможения грузового вагона в момент времени $t = 1200$ с., тогда как минимальные характеристики НДС, соответствующие статическому положению колесной пары, будут наблюдаться в момент времени $t = 0,5$ с. Под опасными значениями характеристик НДС понимаются такие, которые могут отрицательно влиять на прочность колесной пары и надежность соединения с натягом между колесом и осью.

При длительном торможении грузового вагона в результате нагрева колеса максимальная температура была ожидаемо достигнута на поверхности катания и составила 564,43 °С. При этом, максимальные суммарные перемещения по сравнению с состоянием колесной пары до торможения выросли в 44,5 раза; максимальные эквивалентные напряжения – в 6,25 раз; снижение максимального контактного давления между колесом и осью составило 4,36 %.

При экстренном торможении грузового вагона в результате нагрева максимальная температура поверхности катания колеса составила 143,7 °С. При этом рост максимальных суммарных перемещений по сравнению с состоянием колесной пары до торможения составил 269 %; рост максимальных эквивалентных напряжений – 10,25 %; снижение максимального контактного давления между колесом и осью составило 1,2%.

При длительном торможении грузового вагона сильное понижение надежности соединения с натягом обусловлено не количественным изменением максимального значения контактного давления, а качественным перераспределением контактного давления по всей зоне натяга.

Список литературы: 1. *Миронов А.А., Образцов В.Л.* О взаимном нагреве колеса и буксового узла в процессе эксплуатации подвижного состава / Вестник ВНИИЖТ. – 2007. – № 2. – С. 37-40. 2. *Кузьмич Л. Д.* Вагоны. – М.: Машиностроение, 1978. – 376 с. 3. *Вершинский С. В. и др.* Расчет вагонов на прочность : изд 2-е / Под ред. Л. А. Шадура. – М.: Машиностроение, 1971. – 432 с. 4. *Басов К. А.* ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Надійшла до редколегії 15.06.2013

УДК 531

Исследование НДС колесной пары под влиянием температурных нагрузок возникающих при различных режимах торможения / Д.В.Данилов, А.Г.Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 52-62. – Бібліогр.: 4 назв.

Розглянутий НДС колісної пари вагону під впливом температурних навантажень, які виникають при екстремому і тривалому режимах гальмування, засобами ПК ANSYS.

Ключові слова: колісна пара, цільнокатане колесо, вісь, напруження, переміщення, деформації, контактний тиск.

It is considered by the deflected mode of wheel pair the car under influence of the temperature loadings arising at emergency and long modes of braking, means of personal computer ANSYS.

Keywords: wheel pair, solid-rolled wheel, axis, stress, displacement, deformations, contact pressure.

УДК 531

Д.В.ДАНИЛОВ, студент, НТУ «ХПИ»;

А.Г.АНДРЕЕВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ НДС КОЛЕСНОЙ ПАРЫ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ УЧАСТКОВ ПУТИ

Рассмотрено НДС колесной пары вагона при движении по прямолинейным и криволинейным участкам пути с учетом влияния ветровой нагрузки средствами ПК ANSYS.

Ключевые слова: колесная пара, цельнокатаное колесо, ось, напряжения, перемещения, деформации, контактное давление.

Вступлення. Колесные пары относятся к ходовым частям и являются одним из ответственных элементов вагона. Они предназначены для направления движения вагона по рельсовому пути и восприятия всех нагрузок, передающихся от вагона на рельсы при их вращении. Колесные пары, воспринимающие статическую и динамическую нагрузку, обеспечивают непосредственный контакт экипажа и пути и направляют подвижной состав в рельсовый колее, через них передается на рельсы нагрузка от вагона, а колесные пары жестко воспринимают все толчки и удары от неровностей пути.

Работая в современных режимах эксплуатации железных дорог и экстремальных условиях окружающей среды, колесная пара вагона должна удовлетворять следующим основным требованиям: обладать достаточной прочностью, имея при этом минимальную необрессоренную массу (с целью снижения тары подвижного состава и уменьшения непосредственного воздействия на рельсовый путь и элементы вагона при прохождении неровностей рельсовой колеи); обладать некоторой упругостью, обеспечивающей снижение уровня шума и смягчение толчков, возникающих при движении вагона по рельсовому пути; совместно с буксовыми узлами обеспечивать возможно меньшее сопротивление при движении вагона и возможно большее сопротивление износу элементов, подвергающихся изнашиванию в эксплуатации.

© Д. В. Данилов, А. Г. Андреев, 2013

Постановка задачи. В рамках проведенных исследований было изучено НДС колесной пары под действием веса вагона как при движении на прямолинейных участках пути, так и при прохождении криволинейных участков (поворот направо с учетом действия ветровой нагрузки в противоположную повороту сторону). Радиус поворота был принят 400 м, скорость прохождения – 80 км/ч, масса вагона – 80 т. На основании полученных данных в ходе двух расчетов было произведено сопоставление результатов.

На рис. 1, 2, табл. 1 представлены геометрические характеристики составных частей колесной пары РУШ-950.

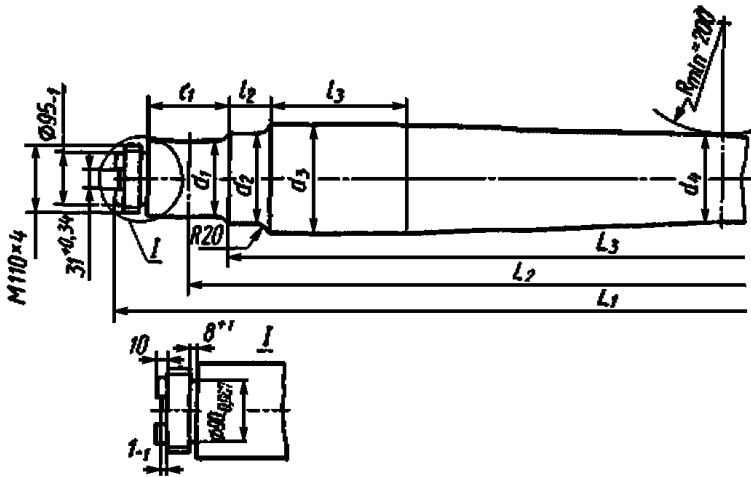


Рисунок 1 – Основные размеры вагонной оси РУШ

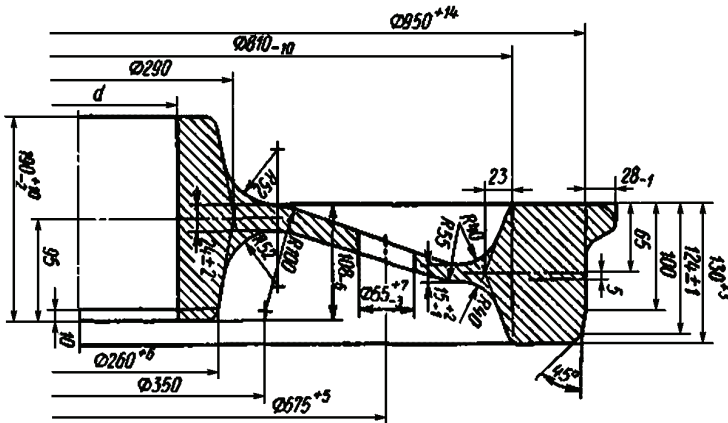


Рисунок 2 – Основные размеры цельнокатаного колеса

Таблица 1 – Основные размеры вагонной оси РУ1Ш

Параметр	d_1	d_2	d_3	d_4	l_1	l_2	l_3	L_1	L_2	L_3
Номинальный размер, мм	130	165	194	165	176	76	265	2294	2038	1836
Допуск, мм	+0,052 +0,025	+0,2 +0,12	+6 -0,5	+5	+1 -0,5	+1 -1	-	+1 +3	-	+1 -1

При движении вагона по криволинейным участкам пути помимо центробежных сил так же было учтено влияние ветровой нагрузки на боковую поверхность вагона. Методика нахождения горизонтальных и вертикальных составляющих равнодействующих сил, возникающих в подшипниках каждого колеса, приведена на рис. 3.

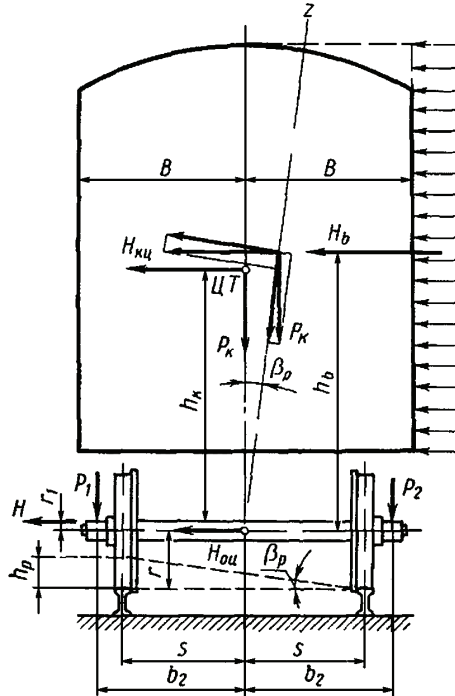


Рисунок 3 – Определение реакций возникающих в подшипниках

$$H_{кц} = P_{к} \left(\frac{V^2}{R \cdot g} - \frac{h_p}{2s} \right); \quad P_{ц1} \cdot 2b_2 \cdot m_0 = H_{кц} \cdot h_k + H \cdot r_1;$$

$$P_{ц1} = \frac{H_{кц} \cdot h_k + H \cdot r_1}{2b_2 \cdot m_0} = \frac{P_{к} \cdot h_k}{2b_2 \cdot m_0} \left(\frac{V^2}{R \cdot g} - \frac{h_p}{2s} \right);$$

$$H_B = F \cdot \omega; \quad H = \frac{H_{КЦ} + H_B}{m_0}; \quad P_{B1} = \frac{H_B \cdot h_B}{2b_2 \cdot m_0};$$

$$P_1 = P_{CT} + P_{Ц1} + P_{B1}; \quad P_2 = P_{CT} - P_{Ц1} - P_{B1},$$

где $H_{КЦ}$ – центробежная сила; P_K – сила тяжести; h_p – разница между уровнями правой и левой колеи; V – скорость движения вагона; R – радиус поворота; g – ускорение свободного падения; m_0 – количество колес в одной тележке вагона; h_K – расстояние от центра тяжести вагона до оси; $P_{Ц1}$ – значение разгрузки (дополнительной нагрузки) для правого (левого) подшипника, возникающей при повороте; H_B – приведенная сила распределенной ветровой нагрузки ω ; F – площадь боковой поверхности вагона; H – горизонтальная составляющая реакции в подшипниках; P_{B1} – вертикальная составляющая реакции в подшипниках, вызванная только ветровой нагрузкой; P_1, P_2 – суммарные вертикальные составляющие реакции в подшипниках.

Исследование поставленной задачи проводилось в программном комплексе ANSYS, в котором была построена твердотельная конструкция и смоделировано ее нагружение (рис. 4).

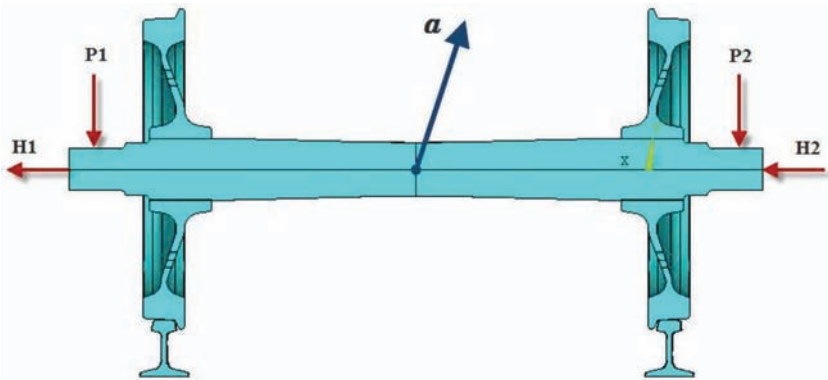


Рисунок 4 – Схема нагружения конструкции

На рис. 4 P_1 – вертикальная составляющая нагрузки в левом подшипнике; P_2 – вертикальная составляющая нагрузки в правом подшипнике; H_1 – горизонтальная составляющая нагрузки в левом подшипнике; H_2 – горизонтальная составляющая нагрузки в правом подшипнике; α – ускорение системы координат.

Полученные результаты и их анализ. В результате расчета были получены следующие характеристики НДС колесной пары: суммарные перемещения, эквивалентные напряжения и контактное давление. Рис. 5-16 иллюстрируют НДС колесной пары при прохождении криволинейных участков, 17-22 – при движении на прямолинейных участках пути.

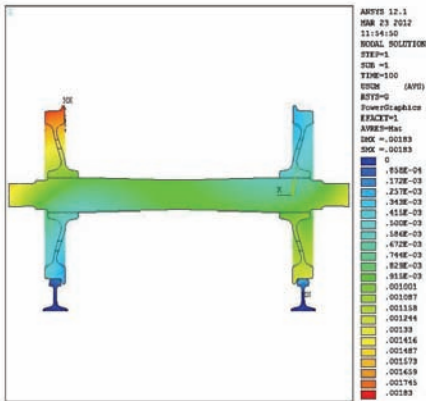


Рисунок 5 – Суммарные перемещения, м

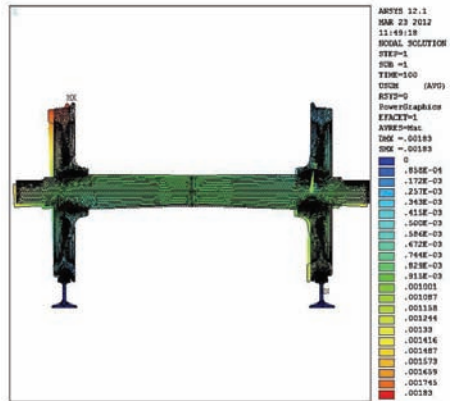


Рисунок 6 – Форма деформирования

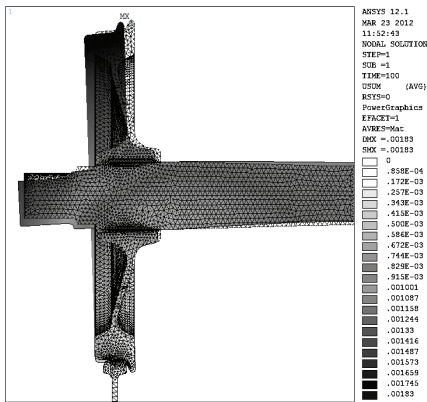


Рисунок 7 – Левое колесо

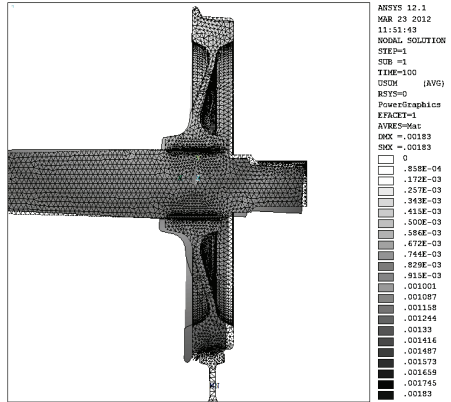


Рисунок 8 – Правое колесо

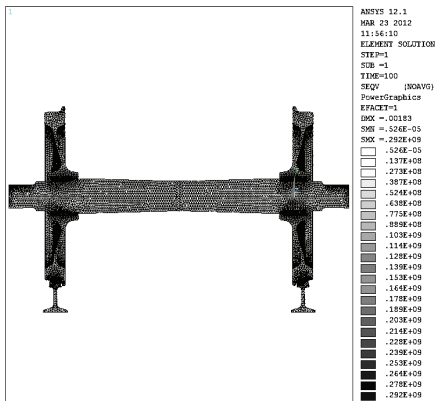


Рисунок 9 – Эквивалентные напряжения, Па

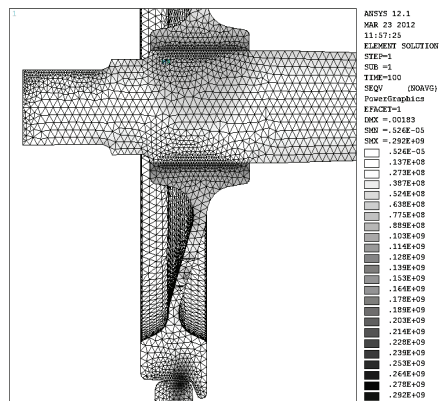


Рисунок 10 – Левое колесо

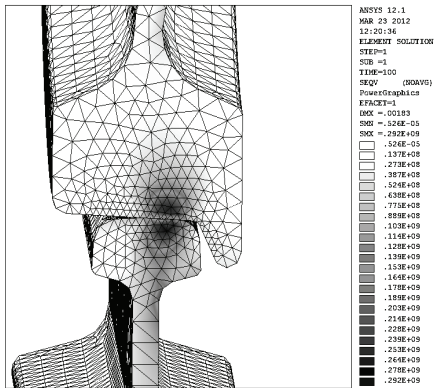


Рисунок 11 – Зона максимальных напряжений

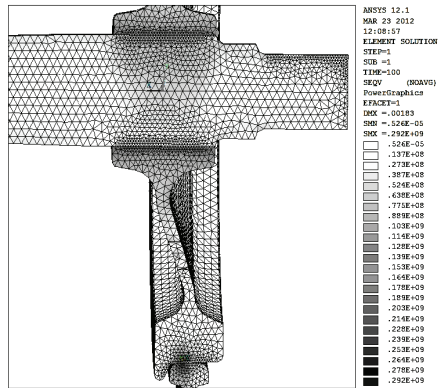


Рисунок 12 – Правое колесо

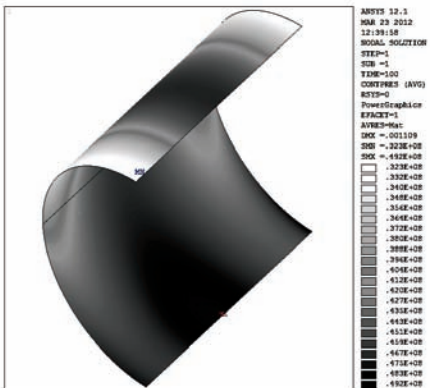


Рисунок 13 – Контактное давление на левой ступице, Па

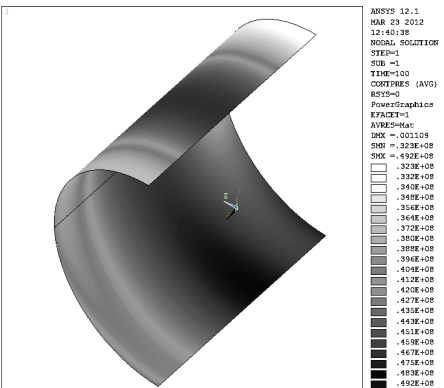


Рисунок 14 – Контактное давление на правой ступице, Па

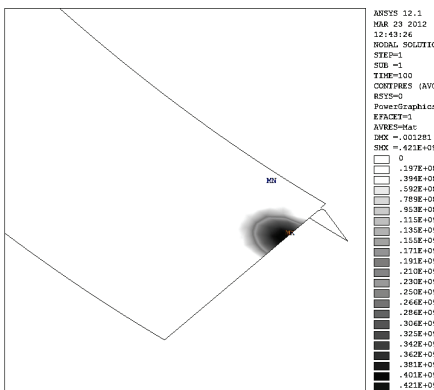


Рисунок 15 – Контактное давление на левом колесе, Па

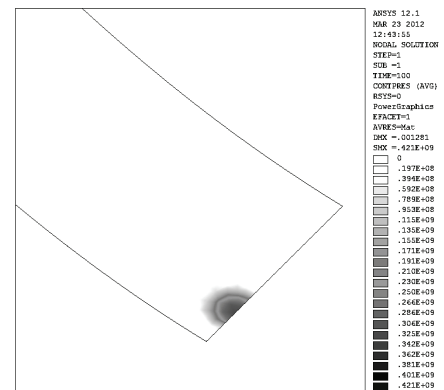


Рисунок 16 – Контактное давление на правом колесе, Па

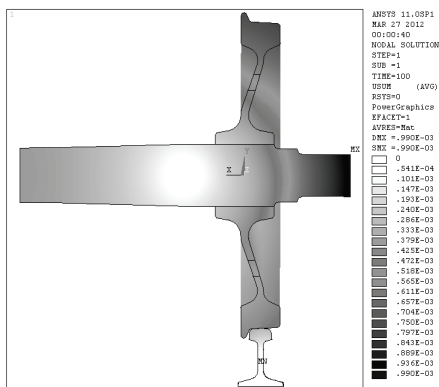


Рисунок 17 – Суммарные перемещения, м

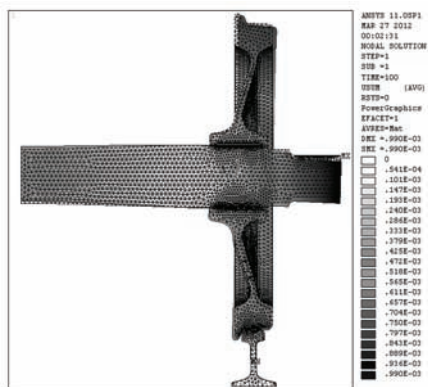


Рисунок 18 – Форма деформирования

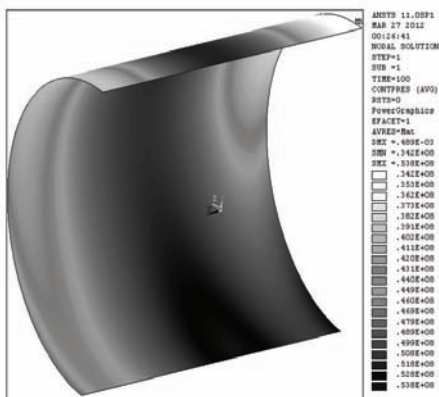


Рисунок 19 – Контактное давление на ступице, Па

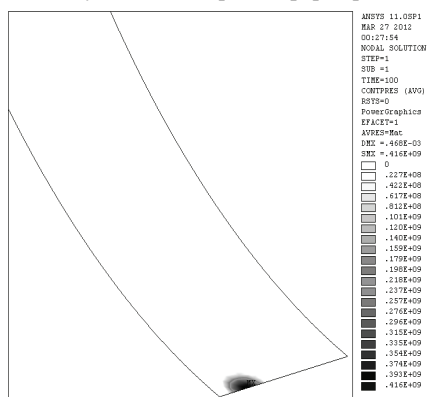


Рисунок 20 – Контактное давление на колесе, Па

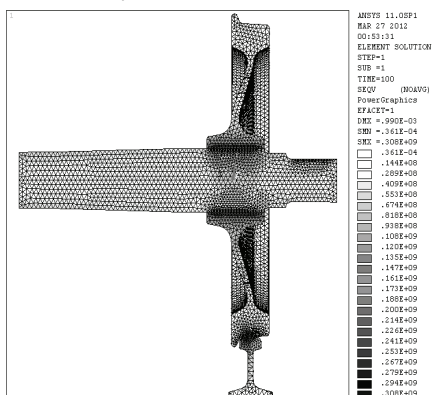


Рисунок 21 – Экв. напряжения, Па

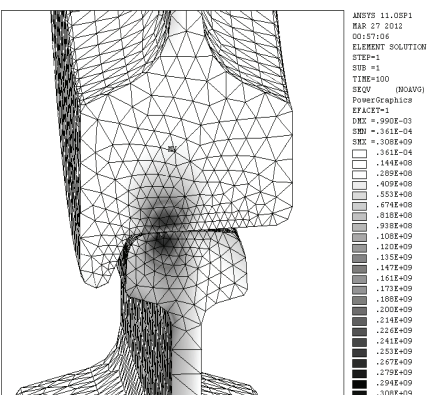


Рисунок 22 – Зона максимальных напряжений

Таблица 2 – Максимальные значения характеристик НДС колесной пары

Характер движения вагона	Суммарные перемещения, м		Эквивалентные напряжения, МПа		Контактное давление, МПа	
	Левое колесо	Правое колесо	Левое колесо	Правое колесо	Левое колесо	Правое колесо
Прямолинейное	0,00099	0,00099	308	308	416	416
Криволинейное	0,00183	0,001244	392	224	421	306

Выводы. При прохождении вагоном криволинейных участков пути наблюдается перераспределение характеристик НДС по сравнению с движением вагона по прямолинейным участкам пути: происходит их рост на левом колесе и снижение на правом. Относительное изменение максимальных суммарных перемещений составляет 84 %; максимальных эквивалентных напряжений – 5,48 %; максимального контактного давления – 1,2 %.

Список литературы: 1 Кузьмич Л. Д. Вагоны. – М.: Машиностроение, 1978. – 376 с. 2 Вершинский С. В. и др. Расчет вагонов на прочность : изд 2-е / Под ред. Л. А. Шадура. – М.: «Машиностроение», 1971. – 432 с. 3 Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Надійшла до редколегії 22.06.2013

УДК 531

Исследование НДС колесной пары при прохождении криволинейных участков пути / Д.В. Данилов, А.Г. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 63-70. – Бібліогр.: 3 назв.

Розглянутий НДС колісної пари вагону при русі по прямолінійних і криволінійних ділянках колії з урахуванням впливу вітрового навантаження засобами ПК ANSYS.

Ключові слова: колісна пара, цільнокатане колесо, вісь, напруження, переміщення, деформації, контактний тиск.

It is considered by the deflected mode of wheel pair the car at movement on rectilinear and curvilinear sites of a gauge in view of influence of wind loading by means of personal computer ANSYS.

Keywords: wheel pair, solid-rolled wheel, axis, stress, displacement, deformations, contact pressure.

С. ДАРИЯ ЗАДЕ, аспирант, НТУ «ХПИ»

ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОНАПРАВЛЕННО АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ

Данная статья посвящена исследованию эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов. Результаты получены при помощи ПК ANSYS. В результате численного исследования напряженного состояния представительской ячейки были определены эффективные упругие свойства однонаправленно армированного композита.

Ключевые слова: однонаправленный композит, эффективные упругие свойства.

Введение. Первые работы в области механики структурно-неоднородных сред были посвящены исследованиям эффективных механических характеристик микронеоднородных материалов по правилу механического смешивания [1, 2]. В 1946 году И. М. Лифшиц и Л. Н. Розенцвейг [3] предложили рассчитывать макроскопические свойства поликристаллов, решая стохастическую краевую задачу. Этот математический метод моделирования был развит впоследствии в трудах основоположников современной механики композитных материалов стохастической структуры В. А. Ломакина [4], Л. П. Хорошуна [5], Т. Д. Шермергора [6], Г. А. Ванина [7], М. Берана [8], Н. А. Алфутова [9] и многих других ученых. В настоящее время достигнуты значительные результаты прогнозирования эффективных линейно и нелинейно-упругих свойств, упругопластических и вязкоупругих характеристик, процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных материалов.

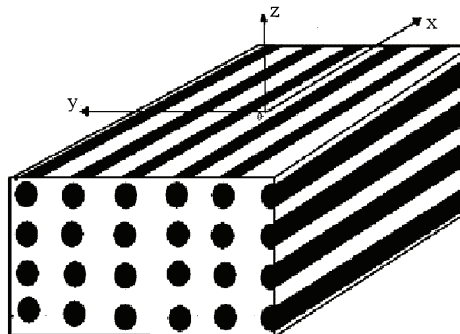


Рисунок 1 – Схема армирования композита

Рассмотрим композиционный материал, однонаправленно армированный волокнами, параллельными оси x (рис. 1).

В объемах, значительно превышающих радиус волокна, композит может рассматриваться как однородный ортотропный материал. Напряженное и деформированное состояния такого однородного материала характеризуется средними по объему V величинами:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV; \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (1)$$

В системе ортогональных декартовых координат, совпадающей с плоскостями симметрии однородного ортотропного материала, закон Гука имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= b_{11} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{13} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \sigma_y \rangle &= b_{21} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{22} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{23} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \sigma_z \rangle &= b_{31} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{32} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{33} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \tau_{xy} \rangle &= b_{44} \langle \gamma_{xy} \rangle; \quad \langle \tau_{yz} \rangle = b_{55} \langle \gamma_{yz} \rangle; \quad \langle \tau_{zx} \rangle = b_{66} \langle \gamma_{zx} \rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь b_{ij} – упругие постоянные эквивалентного однородного материала.

Матрица упругих постоянных является симметричной, то есть $b_{ij} = b_{ji}$. Для квадратной схемы армирования упругие свойства рассматриваемого композита одинаковы в направлениях z и y . Вследствие этого имеет место равенство:

$$b_{22} = b_{33}; \quad b_{21} = b_{31}; \quad b_{55} = b_{66}. \quad (3)$$

Целью настоящей работы является определение этих характеристик по известным упругим свойствам волокон и связующего. Материал волокон и связующего предполагается изотропным.

Для численного исследования выделяется минимальный представительский объем (рис 2), грани которого являются плоскостями симметрии геометрической структуры композита.

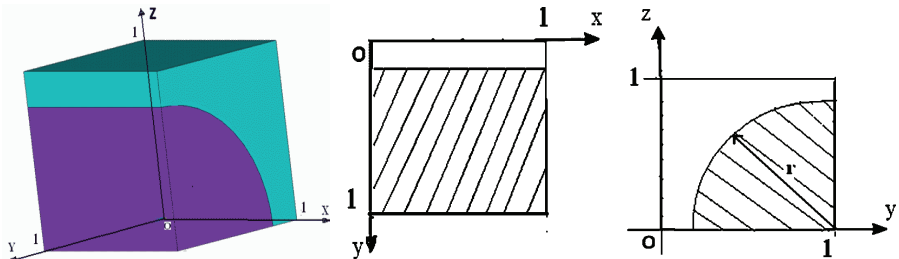


Рисунок 2 – Схема минимального представительского объема

Для нахождения эквивалентных упругих постоянных b_{ij} выполняется анализ напряженного состояния представительского объема в условиях, мо-

делирующих один из видов одноосного деформированное состояния или чистого сдвига в трех плоскостях.

Первый численный эксперимент моделирует одноосное растяжение осредненного материала в направлении оси x .

Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значения

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для структурного анализа представительского объема, соответствующие этому виду деформирования композита, следующие:

На грани $x = 1$:

$$u_x = 10^{-3}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0.$$

здесь u_x – перемещение в направлении оси x .

На остальных гранях задаются условия симметрии относительно соответствующих в плоскостей.

Для численного анализа методом конечных элементов применен программный комплекс ANSYS. Для моделирования использовали элемент SOLID 95 с 20 узлами конечно-элементная имела 15436 элементов (рис. 3) [10].

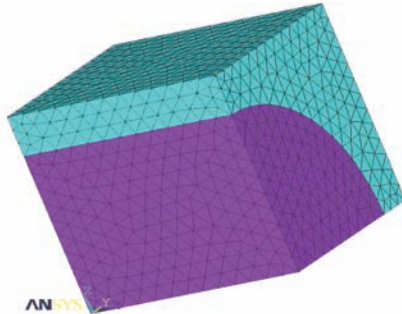


Рисунок 3 – Схема разбиения конструкции на КЭ

После завершения анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений:

$$\langle \sigma_x \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_x dydz; \quad \langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_y dx dz; \quad \langle \sigma_z \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_z dx dy. \quad (5)$$

Результаты первого численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) три упругие характеристики эквивалентного материала

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{21} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{31} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}. \quad (6)$$

Численный анализ представительского объема дает возможность исследовать его напряженно-деформированное состояние и оценить локальную

концентрацию напряжений. На рис. 4 представлены результаты для первого численного эксперимента.

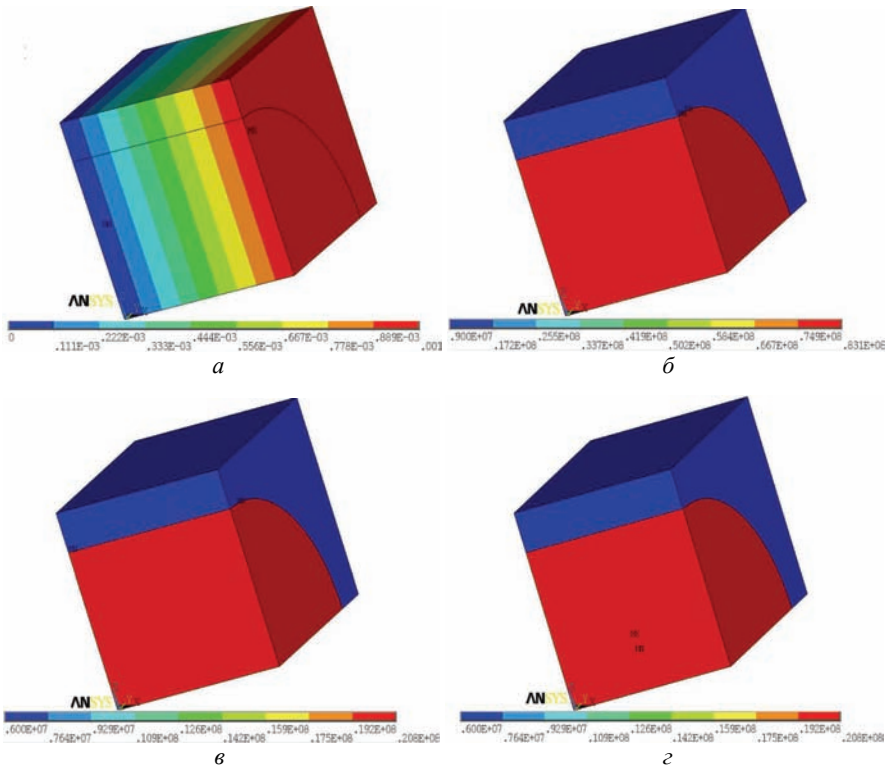


Рисунок 4 – Результаты для первого численного эксперимента: *а* – перемещение вдоль оси *x* при $u_x = 10^{-3}$; *б-г* – распределение нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

Второй численный эксперимент моделирует одноосное деформирование в направлении оси *y*. Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значение

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (7)$$

Для структурного анализа представительского объема, граничные условия, соответствующие этому виду деформирования композита, являются следующими:

На грани $y = 1$:

$$u_y = 10^{-3}; \quad \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0.$$

здесь u_y – перемещение в направлении оси *y*.

На остальных гранях задаются условия симметрии относительно соответствующих плоскостей. Средние значения напряжений вычислялись в

постпроцессоре после завершения анализа:

$$\langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_y dx dz; \quad \langle \sigma_z \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_z dx dy. \quad (8)$$

Результаты второго численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) следующие упругие постоянные

$$b_{22} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_y \rangle}; \quad b_{32} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_y \rangle}. \quad (9)$$

Третий численный эксперимент моделирует сдвиг материала в плоскости $xу$. Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значение:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (10)$$

На грани $x = 1$:

$$u_y = 10^{-3}; \quad \sigma_x = \tau_{xz} = 0.$$

На гранях $y = 0, y = 1$:

$$u_x = 0; \quad \sigma_y = \tau_{yz} = 0,$$

здесь u_y – перемещение грани $x = 1$ в направлении оси y .

На грани $x = 0$ перемещение во всех направлениях равно нулю, на гранях $x = 1; z = 0; z = 1$ задаются условия симметрии относительно соответствующих в плоскостей.

После завершения анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений:

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \tau_{xy} dy dz. \quad (11)$$

Результаты третьего численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) упругую характеристику эквивалентного материала

$$b_{44} = \frac{\langle \tau_{xy} \rangle}{\langle \gamma_{xy} \rangle}. \quad (12)$$

Четвертое численное исследование моделирует сдвиг материала в плоскости $уз$. Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значение

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (13)$$

На грани $z = 1$:

$$u_y = 10^{-3}; \quad \sigma_z = \tau_{zx} = 0.$$

На гранях $y = 0; y = 1$:

$$u_z = 10^{-3}; \quad \sigma_y = \tau_{yx} = 0,$$

здесь u_y – перемещение грани $z = 1$ в направлении оси y .

На грани $z = 0$ перемещение во всех направлениях равно нулю; на гранях $x = 0; x = 1; z = 1$ задаются условия симметрии относительно соответ-

вующих плоскостей.

После завершения анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений

$$\langle \tau_{yz} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \tau_{yz} dy dx . \quad (14)$$

Результаты четвертого численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) упругую характеристику эквивалентного материала

$$b_{55} = \frac{\langle \tau_{zy} \rangle}{\langle \gamma_{zy} \rangle} . \quad (15)$$

Для решения практических задач часто используется закон Гука в прямой форме

$$\langle \varepsilon \rangle = [A] \cdot \langle \sigma \rangle . \quad (16)$$

где $[A]$ – обратная матрица упругих постоянных $[A] = [B]^{-1}$.

На основе матрицы $[A]$ определяем упругие характеристики свойства, включая модули упругости, коэффициенты Пуассона и модули сдвига эквивалентного материала

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_x}; & a_{22} &= \frac{1}{E_y}; & a_{33} &= \frac{1}{E_z}; \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_y} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}; & a_{13} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_z} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x}; & a_{23} &= -\frac{\nu_{zy}}{E_z} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y}. \end{aligned}$$

$$G_{xy} = b_{44}; \quad G_{yz} = b_{55}; \quad G_{zx} = b_{66} . \quad (17)$$

Таблица 1 – расчет эффективных упругих постоянных

Параметр		Значение	Единица измерения
Модуль упругости	E_x	43840	МПа
	E_y	18050	
	E_z	18050	
Модуль сдвига	G_{xy}	4100	МПа
	G_{xz}	4900	
	G_{yz}	4900	
Коэффициент Пуассона	ν_{xy}	0,18	–
	ν_{xz}	0,18	
	ν_{yz}	0,33	

Численные расчеты. Механические свойства матрицы типа эпоксидного полимера следующие: $E_m = 4200$ МПа; $G_m = 1500$ МПа, $\nu_m = 0,4$, для волокна с модулем упругости $E_a = 74800$ МПа; $G_a = 31000$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu_a = 0,2$ [3,6].

Для композита с постоянным радиусом $0 < r < 1$ для волокна коэффици-

ент объемного содержания определяется из соотношения (см. рис. 2):

$$\xi = \frac{1}{4} \pi r^2. \quad (18)$$

В табл. 1 даны упругие свойства при $\xi = 0,636$.

Выводы. Разработана методика нахождения эффективных упругих характеристик однонаправленно армированных волокнистых композитов.

Были определены эффективные упругие свойства стеклопластики с использованием программного комплекса ANSYS. Исследования проводились методом конечных элементов.

Список литературы: 1. *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysic. – В.: Teubner, 1928. – 962 S. 2. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // *Z. Angew. Math. u. Mech.* – 1929. – Bd. 9, №. 4. – S. 49-64. 3. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // *ЖЭТФ.* – 1946. – Т. 16, вып. 11. – С. 967-980. 4. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1980. – 512 с. 5. *Хорошун Л. П., Вецало Ю. А.* К теории эффективных свойств идеальнопластических композитных материалов // *Прикл. мех.* – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 86-90. 6. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с. 7. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с. 8. *Beran M.* Statistical continuum theories. – N.-Y.: Interci. Publ., 1968. – 493 p. 9. *Алфутов Н. А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. 10. *Jahedmotlagh H. R., Nooban. M. R., Eshraghee. M. A.* ANSYS. – Tehran University, 2006.

Поступила в редколлегию 25.04.2013

УДК 539.3

Численная методика определения эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов / С. Дария Заде // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 71-77. – Бібліогр.: 10 назв.

Стаття присвячена дослідженню ефективних характеристик однонаправленно армованих композитів. Результати отримані за допомогою ПК ANSYS. В результаті чисельного дослідження напруженого стану представницької комірки були визначені ефективні пружні властивості однонаправленно армованого композиту.

Ключові слова: однонаправлений композит, ефективні пружні властивості.

This paper is devoted to the study of effective characteristics of unidirectionally reinforced composites. The results were obtained using ANSYS software. As a result of numerical studies of stress state in a representative cell were determined the effective elastic properties of unidirectionally reinforced composite.

Keywords: unidirectional composite, effective elastic properties.

В. М. ДЕЕВ, канд. техн. наук, доц., Пермский государственный педагогический университет, Россия

О НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМАХ

В статье рассмотрено комплексное число – кватернион, содержащее три мнимых единицы.

Ключевые слова: кватернион, мнимая единица.

В 1853 г. У.Р.Гамильтон изобрел новое комплексное число – кватернион, содержащее три мнимых единицы i, j, k , удовлетворяющие следующим зависимостям

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1. \quad (1)$$

Кватернион Гамильтона имеет вид

$$K_{\Gamma} = A + \alpha i + \beta j + \gamma k, \quad (2)$$

где A – действительное число, состоящее из действительных единиц, α, β, γ – действительные числа. Мнимая единица i уже была известна. Бомбелли Раффазле (1530–1579) уже использовал формулу $i = \sqrt{-1}$ и развил элементарную теорию действий (арифметических) с мнимыми и комплексными числами, опередив математику своего времени. Однако до создания ТФКП было еще далеко. Заслуга Гамильтона заключалась в введении трех мнимых единиц. Вскоре он догадался, как перемножать введенные им мнимые единицы. Эти правила приведены в работе [1]. В 1847 г. Гамильтон ввел новый термин – вектор, который был комплексной составляющей кватерниона. Вектор Гамильтона может быть записан в виде

$$V_{\Gamma} = \alpha i + \beta j + \gamma k. \quad (3)$$

Мы говорим, что Гамильтон придумал новый термин. Однако ясно, что, наряду с кватернионом K_{Γ} , он создал еще новый математический объект – вектор V_{Γ} . Связь кватерниона K_{Γ} и вектора V_{Γ} следует из

$$K_{\Gamma} = A + V_{\Gamma}. \quad (4)$$

Правила умножения мнимых единиц, данные в [1], годятся только для вектора V_{Γ} . При умножении кватернионов Гамильтона через черную точку нужно к этим правилам прибавить еще следующие зависимости

$$A \cdot A = A^2; \quad i \cdot A = iA; \quad j \cdot A = jA; \quad k \cdot A = kA. \quad (5)$$

Мы вводим эту поправку, опираясь на утверждение Мартина Ома (1792–1872) – брата известного физика Георга Ома. М. Ом предложил считать мнимую единицу особым действительным числом. Кватернион и вектор явились самыми удачными комплексными структурами. Гамильтон сумел их внедрить в физику и технику.

В этой работе мы пытаемся расширить эти системы и вводим комплексные числа, которые называем n -кватернионами и n -векторами. Эти системы отличаются от кватернионов и векторов тем, что содержат n мнимых единиц, причем $n > 3$. Число n может быть целым натуральным числом 4, 5, 6, ... и т.д.

Рассмотрим для примера 4-кватернион и 4-вектор, которые имеют вид

$$4K_{\Gamma} = A + \alpha i + \beta j + \gamma k + \delta l; \quad (6)$$

$$4V_{\Gamma} = \alpha i + \beta j + \gamma k + \delta l. \quad (7)$$

В (6) и (7) фигурируют мнимые единицы i, j, k, l и действительное число A . Запишем систему умножения единиц. Эти правила следующие

$$i \cdot j = k; \quad j \cdot k = l; \quad k \cdot l = i; \quad l \cdot i = j. \quad (8)$$

$$j \cdot i = -k; \quad k \cdot j = -l; \quad l \cdot k = -i; \quad i \cdot l = -j. \quad (9)$$

Для каждого n мы получаем систему аналогично (8), (9), но содержащих в каждой части по n уравнений.

Рассматривая n -кватернионы (6), видим, что они образуют алгебру над действительными числами $A, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ с образующими i, j, k, l , которые удовлетворяют уравнениям (8), (9) и уравнения имеем в виде

$$\left. \begin{aligned} A \cdot A &= A^2; \\ i \cdot A &= iA; \\ j \cdot A &= jA; \\ k \cdot A &= kA; \\ l \cdot A &= lA. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Расширение системы n -кватернионов приводит к n -мерной алгебре и позволяет решать задачи, связанные с технологией – многомерные задачи.

Список литературы: 1. Алексеев К.Б., Деев В.М., Машина И.В., Петрокас А.В. О некоторых числовых системах // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХП», 2012. – Вип. 67 – С. 9-11. 2. Деев В.М., Машина И.В. Новая трактовка теории определителей // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХП», 2012. – Вип. 55 – С. 64-66.

Поступила в редколлегию 20.09.2013.

УДК 539.3

О некоторых комплексных числовых системах / В. М. Деев // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 78-79. – Бібліогр.: 2 назв.

У статті розглянуто комплексне число – кватерніон, яке містить три уявних одиниці.

Ключові слова: кватерніон, уявна одиниця.

Quaternion, containing three imaginary units is considered in the article.

Keyword: quaternion, imaginary unit.

А. С. КАИРОВ, д-р техн. наук, профессор, НУК им. адм. Макарова, Николаев;
С. А. МОРГУН, аспирант, НУК им. адм. Макарова, Николаев

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕНЦА РАБОЧИХ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН С УЧЕТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Изложена методика исследования вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования. С использованием метода конечных элементов разработана уточненная математическая модель секции «сектор диска – лопатка с демпферными связями», учитывающая конструктивную неоднородность пера лопатки и диска. Приведены результаты расчета амплитуд вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбины, вызванных воздействием переменной газодинамической силы.

Ключевые слова: вынужденные колебания, демпфирование, газодинамическая сила, амплитуды колебаний, метод конечных элементов.

Введение. В современных условиях, учитывая общемировую тенденцию ограничения применения ядерной энергии из-за высоких экологических рисков, стоит задача увеличения выработки электроэнергии на украинских тепловых электростанциях для обеспечения энергетического баланса страны. Этот процесс сопровождается увеличением единичной мощности турбоагрегатов при обязательном условии повышения их экономичности и надежности. Проблема обеспечения надежности особенно важна для мощных турбомашин, причем ее важность с ростом единичной мощности турбин возрастает, так как выход из строя одного узла приводит к высоким капитальным затратам на ремонт всего двигателя и, как следствие, к большим экономическим потерям. Отсюда возникает необходимость изучения вибрационных процессов в наиболее нагруженных узлах турбин, особенно в лопаточном аппарате, который испытывает воздействие нестационарных газодинамических сил.

Анализ последних исследований и литературы. Основные вопросы расчета амплитуд и частот вынужденных колебаний рабочих колес компрессоров и турбин в рамках стержневой теории приведены в работах [1, 2, 5]. Лопатки рассматриваются как незакрученные жестко закрепленные в диске стержни, совершающие колебания в одной из главных плоскостей изгиба, а решения полученных уравнений находят методом Ритца. В работе [7] вынужденные колебания венца рабочих лопаток турбины, возникающие под действием внешней нагрузки, разложенной в тригонометрический ряд Фурье, исследуются с помощью метода начальных параметров. Однако, в [7] не ука-

© А. С. Каиров, С. А. МоргуН, 2013

зан метод вычисления амплитуд гармоник возмущающих газодинамических сил. В работах [1, 3] данная проблема решается с применением метода конечных элементов (МКЭ), однако, в [1] не учитывается демпфирование, а используемый в [3] метод статической конденсации не позволяет получать удовлетворительные результаты при решении задач динамики и описании сложных форм колебаний. Исследование частот и форм колебаний отдельных лопаток методом динамических суперэлементов приведено в работе [4], а экспериментальным путем – в работе [6].

Цель исследования. Целью данной работы является разработка уточненной математической модели вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования, используя метод конечных элементов.

Постановка задачи. Разработка комплекса мероприятий по повышению вибрационной надежности турбомашин неосуществима без детального изучения колебательных процессов, протекающих в таком ответственном узле как лопаточный аппарат и вызванных воздействием на лопатки нестационарных газодинамических сил. Поэтому возникает необходимость разработки уточненной математической модели вынужденных колебаний венцов рабочих лопаток. В ней необходимо учитывать влияние на амплитуды колебаний как внутреннего, так и конструкционного демпфирования в месте соединения демпферных связей с пером лопатки.

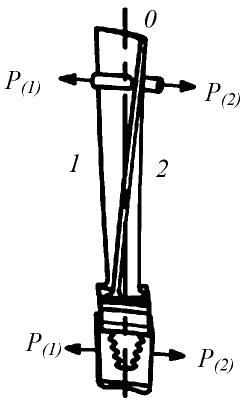


Рисунок 1 – Модель секции («сектор диска с лопаткой и участками связей») для расчетов вынужденных колебаний рабочих лопаток турбомашин

Материалы исследований. Циклически симметричную систему можно интерпретировать в виде совокупности χ секций с одинаковыми геометрическими, инерционными и жесткостными свойствами. При этом χ определяет порядок симметрии системы [3]. Венец, состоящий из z идентичных рабочих лопаток, также может рассматриваться в виде циклически симметричной системы с порядком симметрии z . Секция такой системы, которая в общем случае включает в себя сектор диска и укрепленную в нем лопатку с участками связей представлена на рис. 1.

В граничных узлах секции приложены неизвестные силы P_1 и P_2 . Цифрой 1 обозначена левая граница секции, цифрой 0 – средняя часть, а цифрой 2 – правая граница. Известными являются возмущающие газодинамические силы F^0 . Вследствие периодичности возмущающих сил каждую из них можно разложить в ряд Фурье и

выделить любую k -ую гармонику.

Вначале необходимо рассмотреть способ вычисления амплитуд колебаний отдельной лопатки без учета сектора диска и демпферных связей. Для этого, воспользовавшись методом конечных элементов (МКЭ) и принципом Лагранжа II рода, запишем уравнения вынужденных колебаний одной из лопаток рассматриваемого венца [5]:

$$M_{JJ} \ddot{y}_J + C_{JJ} \dot{y}_J + K_{JJ} y_J = F_J, \quad (I, J=1, \dots, n), \quad (1)$$

где C_{JJ} – матрица демпфирования ($C_{JJ} = 2\theta M_{JJ}$) [3]; θ – коэффициент затухания; y_J – абсолютные перемещения узлов секции; n – число степеней свободы секции; F_J – k -ая гармоника возмущающей силы:

$$F_J = F_J^{(1)} \cos k\omega t + F_J^{(2)} \sin k\omega t;$$

ω – частота вынужденных колебаний секции.

Решение системы уравнений (1) представлено в виде:

$$y_J = a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t, \quad (J = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

где $a_J^{(1)}$ и $a_J^{(2)}$ – амплитуды колебаний узлов левой и правой границ секции соответственно.

Для того чтобы определить $a_J^{(1)}$ и $a_J^{(2)}$ необходимо решить систему уравнений, образуемую путем подстановки (2) в (1):

$$M_{JJ} \left(a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t \right)'' + C_{JJ} \left(a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t \right)' + K_{JJ} \left(a_J^{(1)} \cos k\omega t + a_J^{(2)} \sin k\omega t \right) = F_J^{(1)} \cos k\omega t + F_J^{(2)} \sin k\omega t \quad (3)$$

Для решения (3) используется метод расчета амплитуд резонансных колебаний на основе разложения по m главным формам свободных колебаний системы [5]. Искомые амплитуды $a_J^{(1)}$ и $a_J^{(2)}$ могут быть представлены в следующем виде:

$$a_J^{(1)} = \varphi_{Jl} q_l^{(1)}; \quad a_J^{(2)} = \varphi_{Jl} q_l^{(2)}. \quad (4)$$

$$(J = 1, \dots, n; l = 1, \dots, r)$$

где φ_{Jl} – компоненты форм свободных колебаний; $q_l^{(1)}$ и $q_l^{(2)}$ – новые обобщенные координаты.

После подстановки (4) в (3) и с учетом свойств главных форм колебаний, (3) преобразуется в (5):

$$\begin{aligned} \left[(f_h)^2 - (k\omega)^2 \right] q_l^{(1)} + (2\theta k\omega) q_l^{(2)} &= F_l^{(1)} \varphi_{Jl}; \\ (-2\theta k\omega) q_l^{(1)} + \left[(f_i)^2 - (k\omega)^2 \right] q_l^{(2)} &= F_l^{(2)} \varphi_{Jl}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$(I, J = 1, \dots, n; l = 1, \dots, r; h = 1, \dots, m)$$

где f_h – частоты свободных колебаний секции.

Определитель Δ системы (5) может быть найден из формулы (6):

$$\Delta = \left[(f_h)^2 - (k\omega)^2 \right] - F_k^{(2)} \varphi_{Jl} (2\theta k\omega)^2 \quad (6)$$

Тогда решение системы (6) будет представлено в следующем виде:

$$q_I^{(1)} = \frac{F_k^{(1)} \varphi_{JI} [(f_h)^2 - (k\omega)^2] - F_I \varphi_{JI} (2\theta k\omega)}{\Delta};$$

$$q_I^{(2)} = \frac{F_k^{(2)} \varphi_{JI} [(f_h)^2 - (k\omega)^2] + F_I \varphi_{JI} (2\theta k\omega)}{\Delta}.$$
(7)

Подставив (7) в (4) возможно определить амплитуды $a^{(1)}_J$ и $a^{(2)}_J$, входящие в решение (2) системы уравнений (1).

На основе представленного выше способа вычисления амплитуд вынужденных колебаний рабочих лопаток турбомашин осуществляется переход к рассмотрению секции лопаточного венца «сектор диска – лопатка с демпферными связями». Уравнения вынужденных колебаний такой секции во многом аналогичны уравнениям (1) и будут иметь вид:

$$M_{IJ} \ddot{y}_J + C_{IJ} \dot{y}_J + K_{IJ} y_J = F_I + P_R,$$

$$(I, J = 1, \dots, n, R = 1, \dots, g),$$
(8)

где P_R – неизвестные нагрузки в граничных узлах секции; g – число граничных узлов секции.

Решение (8) отыскивается с использованием (2) и (3). В результате получаем следующую систему для коэффициентов при $\cos k\omega t$:

$$\Lambda_{11} a_1^{(1)} + \Lambda_{10} a_0^{(1)} + \Lambda_{12} a_2^{(1)} + \Psi_{11} a_1^{(2)} + \Psi_{10} a_0^{(2)} + \Psi_{12} a_2^{(2)} = F_1^{(1)} + P_1^{(1)};$$

$$\Lambda_{01} a_1^{(1)} + \Lambda_{00} a_0^{(1)} + \Lambda_{02} a_2^{(1)} + \Psi_{01} a_1^{(2)} + \Psi_{00} a_0^{(2)} + \Psi_{02} a_2^{(2)} = F_0^{(1)};$$

$$\Lambda_{21} a_1^{(1)} + \Lambda_{20} a_0^{(1)} + \Lambda_{22} a_2^{(1)} + \Psi_{21} a_1^{(2)} + \Psi_{20} a_0^{(2)} + \Psi_{22} a_2^{(2)} = F_2^{(1)} + P_2^{(1)}.$$
(9)

где $\Psi_{IJ} = 2\theta k\omega M_{IJ}$, а $\Lambda_{IJ} = K_{IJ} - (k\omega)^2 M_{IJ}$; Λ_{11} , Λ_{01} , Λ_{21} , и. т. д. – блоки динамической матрицы жесткости, соответствующей степеням свободы левой границы (индекс 1), средней части (индекс 0) и правой границы (индекс 2) секции. Аналогично и для динамической матрицы демпфирования Ψ ; $a_1^{(1)}$, $a_0^{(1)}$, $a_2^{(1)}$ и т. д. – амплитуды вынужденных колебаний левой границы, средней части и правой границы секции (индексы 1, 0, 2) соответственно, возбуждаемых силой $F^{(1)}$. Индексы в скобках обозначают: (1) – амплитуды при $\cos k\omega t$, а (2) – при $\sin k\omega t$.

Аналогичная (9) система уравнений записывается и для коэффициентов при $\sin k\omega t$:

$$-\Psi_{11} a_1^{(1)} - \Psi_{10} a_0^{(1)} - \Psi_{12} a_1^{(2)} + \Lambda_{11} a_1^{(2)} + \Lambda_{10} a_0^{(2)} + \Lambda_{12} a_2^{(2)} = F_1^{(2)} + P_1^{(2)};$$

$$-\Psi_{01} a_1^{(1)} - \Psi_{00} a_0^{(1)} - \Psi_{02} a_1^{(2)} + \Lambda_{01} a_1^{(2)} + \Lambda_{00} a_0^{(2)} + \Lambda_{02} a_2^{(2)} = F_0^{(2)};$$

$$-\Psi_{21} a_1^{(1)} - \Psi_{20} a_0^{(1)} - \Psi_{22} a_1^{(2)} + \Lambda_{21} a_1^{(2)} + \Lambda_{20} a_0^{(2)} + \Lambda_{22} a_2^{(2)} = F_2^{(2)} + P_2^{(2)}.$$
(10)

На основе свойств циклической симметрии рассматриваемой системы (венца лопаток) можно записать:

$$a_2^{(1)} = a_1^{(1)} \cos \alpha + a_1^{(2)} \sin \alpha; \quad P_2^{(1)} = P_1^{(1)} \cos \alpha + P_1^{(2)} \sin \alpha;$$

$$a_2^{(2)} = -a_1^{(1)} \sin \alpha + a_1^{(2)} \cos \alpha; \quad P_2^{(2)} = -P_1^{(1)} \sin \alpha + P_1^{(2)} \cos \alpha.$$
(11)

где $\alpha = 2\pi k/z$; k – номер гармоники периодической возмущающей силы; z – количество лопаток в венце.

Учитывая соотношения (11), а также систему уравнений (9) и аналогичную ей систему для коэффициентов при $\sin k\omega t$ (10), получаем систему (12):

$$[S] \cdot \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_0^{(1)} \\ P_1^{(1)} \\ a_1^{(2)} \\ a_0^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_0^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(2)} \\ F_0^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Матрица $[S]$ имеет следующую структуру:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix}$$

где $S_{11} = S_{44} = \Lambda_{11} + \Lambda_{12} \cos \alpha - \Psi_{12} \sin \alpha$; $S_{12} = S_{45} = \Lambda_{10}$; $S_{13} = S_{43} = -E$; $S_{14} = -S_{41} = \Psi_{11} + \Psi_{12} \cos \alpha + \Lambda_{12} \sin \alpha$; $S_{15} = -S_{42} = \Psi_{10}$; $S_{16} = S_{23} = S_{26} = S_{46} = S_{53} = S_{56} = 0$; $S_{21} = S_{54} = \Lambda_{01} + \Lambda_{02} \cos \alpha - \Psi_{02} \sin \alpha$; $S_{22} = S_{55} = \Lambda_{00}$; $S_{24} = S_{51} = \Psi_{01} + \Psi_{02} \cos \alpha + \Lambda_{02} \sin \alpha$; $S_{25} = S_{52} = \Psi_{00}$; $S_{31} = S_{64} = \Lambda_{21} + \Lambda_{22} \cos \alpha - \Psi_{22} \sin \alpha$; $S_{32} = S_{65} = \Lambda_{20}$; $S_{33} = -S_{66} = -E \cos \alpha$; $S_{34} = -S_{61} = \Psi_{21} + \Psi_{22} \cos \alpha + \Lambda_{22} \sin \alpha$; $S_{35} = -S_{62} = \Psi_{20}$; $S_{36} = -S_{63} = -E \sin \alpha$; E – единичная матрица.

Решая систему (12) относительно неизвестных a и P , возможно определить амплитуды вынужденных колебаний узлов левой границы и средней части, а с помощью выражений (10) – и правой границы рассматриваемой секции.

Учитывая то обстоятельство, что венец рабочих лопаток рассматривается как циклически симметричная система, можно предположить, что все секции, из которых он состоит, находятся в одинаковых условиях. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод, о том, что достаточно рассмотреть всего одну секцию и обобщить полученные результаты для всей исследуемой системы.

Результаты исследований. С целью изучения практической пригодности разработанной математической модели проведены расчеты амплитуд вынужденных колебаний венца рабочих лопаток третьей ступени турбины, возмущаемых нестационарной газодинамической силой. Неоднородность сопловой решетки задавалась отклонением угла установки сопловых лопаток от номинальной величины. Также учитывалась неравномерность угла закрутки по высоте рассматриваемых рабочих лопаток. Демпфирование колебаний рассматривалось в предположении неполного проскальзывания с жестким закреплением середин зон контакта пера лопатки и демпфера.

Исследуемый лопаточный венец состоял из 80 рабочих лопаток переменного поперечного сечения с замкнутыми на круг связями. Высота лопатки $l = 135$ мм; материал лопаток – жаропрочная сталь СМ88У – ВИ (плотность материала $\rho = 8100$ кг/м³, модуль Юнга $E = 1,79 \cdot 10^6$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$). Диаметр диска $D = 450$ мм. Лопатки имеют хвостовики елочного типа с торцевой заводкой в диск. Угол выхода потока из сопловых каналов α_1 изменялся от $16^\circ 30'$ (кривая 1) до $18^\circ 30'$ (кривая 2); угол выхода потока из лопаточного венца $\alpha_2 = 73^\circ$.

Конечно-элементная модель пера лопатки строилась на основе суперпараметрического криволинейного элемента, состояла из 20 конечных элементов и имела 385 степеней свободы. Демпферные связи лопаток в колесе моделировались при помощи стержневого конечного элемента. Модель хвостовика лопатки состояла из 189 изопараметрических призматических элементов первого порядка с 960 степенями свободы. Модель сектора диска включала в себя 230 призматических конечных элементов первого порядка, имеющих 1254 степеней свободы.

На рис. 2 представлена амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний венца рабочих лопаток третьей ступени турбины.

Анализируя представленные на рис. 2 графические зависимости можно сделать вывод о том, что амплитуда вынужденных колебаний плавно возрастает с увеличением частоты колебаний. Затем при достижении резонансной частоты происходит резкое возрастание, а после прохождения состояния резонанса – резкое падение и в дальнейшем плавное уменьшение величины амплитуды. Как известно, резонанс наступает при совпадении частоты вынужденных колебаний лопаточного венца с частотой вращения ротора турбомашин. Поэтому знание частот вынужденных колебаний позволяет провести так называемую отстройку от резонансного режима, то есть исключить возникновение резонанса в диапазоне рабочих частот, переведя его в быстропроходящие режимы запуска и остановки двигателя. Достигнуть недопущения совпадения частоты вращения ротора турбины с частотой вынужденных колебаний венца лопаток можно также при помощи изменения параметров газового потока, а именно, снижения перепада давления газа перед и за рассматриваемой турбинной ступенью. Это, в свою очередь, позволит уменьшить переменную составляющую газодинамической силы, которая возникает

из-за неравномерности течения газового потока и является основным возбудителем колебаний лопаточного венца. Еще одним способом улучшения равномерности течения потока, как показано на рис. 2, является существенное снижение конструктивной неоднородности сопловой решетки, то есть уменьшения отклонения угла установки сопловых лопаток от номинальной величины.

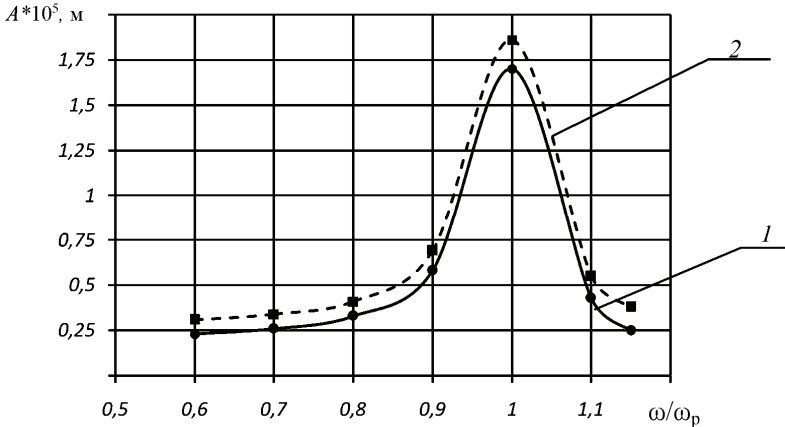


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования: A – амплитуда колебаний; ω – частота колебаний, Гц; $\omega_p = 1325$ Гц – резонансная частота колебаний. Кривая 1 – угол выхода потока из сопловых каналов $\alpha_l = 16^\circ 30'$; кривая 2 – угол выхода потока из сопловых каналов $\alpha_l = 18^\circ 30'$

Выводы. С использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача расчета амплитуд и частот вынужденных колебаний венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования. Для решения данной задачи разработана уточненная математическая модель секции «сектор диска – лопатка с демпферными связями», позволяющая в достаточно полной мере учитывать особенности конструкции пера и хвостовика лопатки, демпферных связей, диска. Определение амплитуд и частот колебаний лопаточного венца с замкнутыми на круг демпферными связями может быть представлено в виде расчета амплитуд и частот колебаний совокупности таких секций, вызванных воздействием нестационарной газодинамической силы. Анализ полученных результатов подтверждает адекватность данной модели и указывает на то, что для недопущения возникновения резонанса частот вынужденных колебаний венца лопаток с частотой вращения ротора, необходимо уменьшить неравномерность течения газового потока, являющуюся основной причиной возникновения переменной газодинамической силы, возмущающей колебания лопаточного венца. Разработанная математическая модель может быть использована для исследования колебаний венцов лопаток турбомашин в

предположении отсутствия циклической симметрии, а также рабочих колес турбин, лопатки которых имеют бандажные полки.

Список литературы: 1. *Воробьев Ю. С.* Динамика авиационных газотурбинных двигателей / Ю. С. Воробьев. – К.: Наукова думка, 1988. – 224 с. 2. *Жирицкий Г. С.* Конструкция и расчет на прочность деталей паровых и газовых турбин / Г. С. Жирицкий, В. А. Струнkin. – М.: Машиностроение, 1973. – 520 с. 3. *Иноземцев А. А.* Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок / А. А. Иноземцев, М. А. Нихамкин, В. Л. Сандрацкий. – М.: Машиностроение, 2007. – 232 с. 4. *Каиров А. С.* Исследование собственных колебаний лопаток газотурбинного двигателя методом динамических суперэлементов / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Проблемы обчислительной механики и прочности конструкций. Сборник научных работ. – Днепропетровск: Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 176–182. 5. *Костюк А. Г.* Динамика и прочность турбомашин / А. Г. Костюк. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с. 6. *Моргун С. А.* Экспериментальное исследование свободных колебаний лопаток газотурбинного двигателя / С. А. Моргун, А. С. Каиров // Методи розв'язання прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Збірник наукових праць. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011. – Вип. 12. – С. 224–229. 7. *Троценко В. Т.* Несущая способность лопаток ГТД при вибрационных нагружениях / В. Т. Троценко, В. В. Матвеев, Б. А. Грязнов. – К.: Наукова думка, 1981. – 316 с.

Поступила в редколлегию 25.03.2013

УДК 539.3

Вынужденные колебания венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 80-87. – Бібліогр.: 7 назв.

Викладено методику досліджень вимушених коливань вінців робочих лопаток турбомашин з урахуванням демпфування. З використанням методу кінцевих елементів розроблено уточнену математичну модель секції «сектор диску – лопатка з демпферними зв'язками», яка враховує конструктивну неоднорідність пера лопатки та диску. Наведено результати розрахунку амплітуд вимушених коливань вінця робочих лопаток турбіни, вимушених дією змінної газодинамічної сили.

Ключові слова: вимушені коливання, демпфування, газодинамічна сила, амплітуди коливань, метод кінцевих елементів.

The problem of turbine engines bladed disks forced vibration has been studied; the internal and constructional damping has also been considered. The new mathematical model that gives an opportunity to take blade's structural inhomogeneity into consideration has been developed by means of finite elements method. The results of the turbine bladed disk vibration amplitudes, forced by variable aerodynamic force are attached.

Key words: forced vibration, damping, aerodynamic force, vibration amplitudes, finite elements method.

С.В. КРАСНИКОВ, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»

МОДЕЛЮВАННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ФУНДАМЕНТУ ТУРБОГЕНЕРАТОРУ ПОТУЖНІСТЮ 200 МВт

Приведены результаты исследования собственных частот и форм колебаний фундамента турбогенератора мощностью 200 МВт. Проанализирован частотный спектр в контролируемых диапазонах и соответствующие им формы колебаний. Отмечены места, которые нуждаются в повышении жесткости. Моделирование и расчеты выполнены методом конечных элементов.

Ключевые слова: фундамент турбины, наиболее нагруженные зоны, модели разрушения.

Вступ. Основним обладнання електростанцій, що має високі вібраційні навантаження є турбогенератор та його фундамент. У вітчизняному будівництві електростанцій більшість фундаментів є залізобетонними та монолітними конструкціями. За звичай фундаменти будуються за типовим проектом. Проте критерії проектування, згідно норм на час будівництва більшості енергоблоків потужністю 200 МВт, були надто прозорими та спрощеними, що зумовлено складністю розрахунків статичного та особливо вібраційного стану фундаментів турбогенераторів. Внаслідок цього фундаменти можуть мати резонансні процеси у робочому діапазоні [1]. Значний час експлуатації майже всіх фундаментів турбогенераторів, що розглядаються в даній роботі, низив їх властивості демпфування та жорсткості. Все це становить актуальним задачу аналізу власних частот та форм коливань типових фундаментів, що встановлені в енергоблоках 200 МВт.

Мета роботи. Побудова моделі вібраційного стану фундаменту турбогенератору потужністю 200 МВт. Аналіз власних частот у контрольованих діапазонах та відповідних форм власних коливань. Дослідження найменш жорстких місць та елементів фундаменту.

Розрахункова модель. Моделювання та розрахунки фундаменту виконано за допомогою метода скінчених елементів. Система рівнянь для задачі власних коливань за цим методом має вигляд:

$$M \{\ddot{q}(t)\} + K \{q(t)\} = 0,$$

де M – матриця мас, K – матриця жорсткості, $q(t)$ – вектор переміщень.

Для фундаменту побудовано серію скінченноелементних моделей згідно раніше розроблених методик [2]. Серед них для розрахунку було обрано модель, що показано на рис. 1. Цифрами означено номери пар колон.

Параметри цієї моделі: 105954 вузлів, 65311 скінчених елементів. Граничні умови, що накладено на модель щільне закріплення нижньої площини

фундаменту. Перевірка на математичну збіжність розрахунків показала, що похибка обчислення деформацій та переміщень складає менше 1 %.

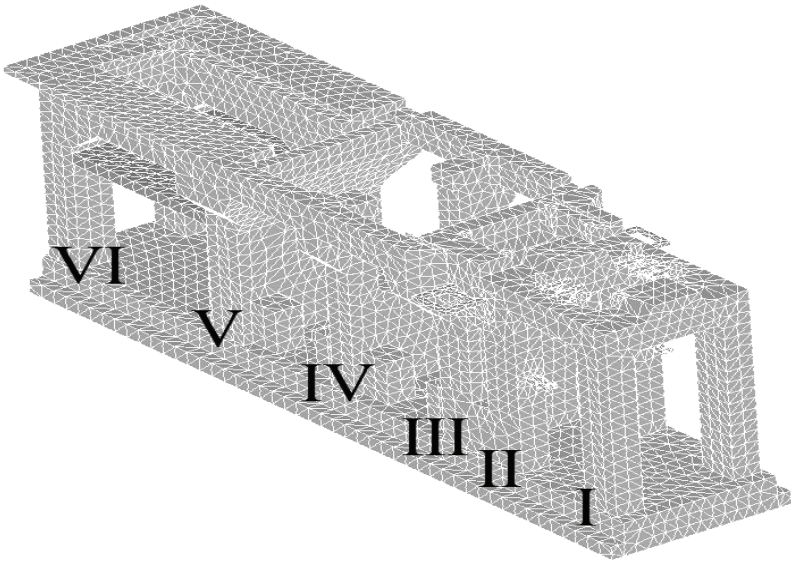


Рисунок 1 – Скінченноелементна модель фундаменту

Чисельні дослідження. Проведено розрахунки власних коливань у діапазоні 0-55 Гц. Цей діапазон є можливим діапазоном роботи турбогенератору. При перевищенні частоти 55 Гц турбогенератор зупиняється автоматикою обладнання електростанції. Регламентований робочий діапазон турбін цього типу є 49,0-50,5 Гц. На частоті кратній 2 можливо появлення автоколивального процесу. Тому додатково контрольованим діапазоном є 24,5-25,5 Гц. Враховуючи розбіжність характеристик залізобетону фундаменту та його значний час експлуатації контрольованими діапазонами зазначимо 47-55 Гц та 24-27 Гц.

За результатами розрахунків знайдено наступні кількості власних частот:

- 1) в діапазоні від 0 до 55 Гц – 65 власних частот;
- 2) в діапазоні від 47 до 55 Гц – 17 власних частот;
- 3) в діапазоні від 24 до 27 Гц – 5 власних частот.

Власні форми коливань за прийнятою класифікацією [3, 4] поділяються на два види:

- глобальні, що характеризуються значними амплітудами коливань більшої частини елементів фундаменту;
- локальні, що відповідають наступному розподілу: найбільші амплітуди коливань мають один чи декілька елементів фундаменту, а більшість в порівнянні до них – близькі до нуля значення амплітуд коливань.

У відповідності до вищезазначеного аналіз власних форм коливань показав:

- 1) в діапазоні від 0 до 55 Гц – 11 глобальних форм коливань;
- 2) в діапазоні від 47 до 55 Гц – 2 глобальні форми коливань;
- 3) в діапазоні від 24 до 27 Гц – 0 глобальних форм коливань.

Найбільша кількість форм коливань фундаменту є локальними, що характеризуються найбільшими амплітудами коливань металевих частин фундаменту. На рис. 2-4 показано форми власних коливань відповідно до діапазону частот 47-55 Гц, що характеризуються найбільшими амплітудами коливань залізобетонних елементів фундаменту.

На рис. 2 показано локальну форму коливань. Найбільші амплітуди мають пара колон № I та металеві конструкції між парами колон № V та VI.

На рис. 3 показано глобальну форму коливань. Найбільші амплітуди мають пари колон № I, IV, V, верхні балки поблизу пари колон № IV та металеві конструкції між парами колон № V та VI.

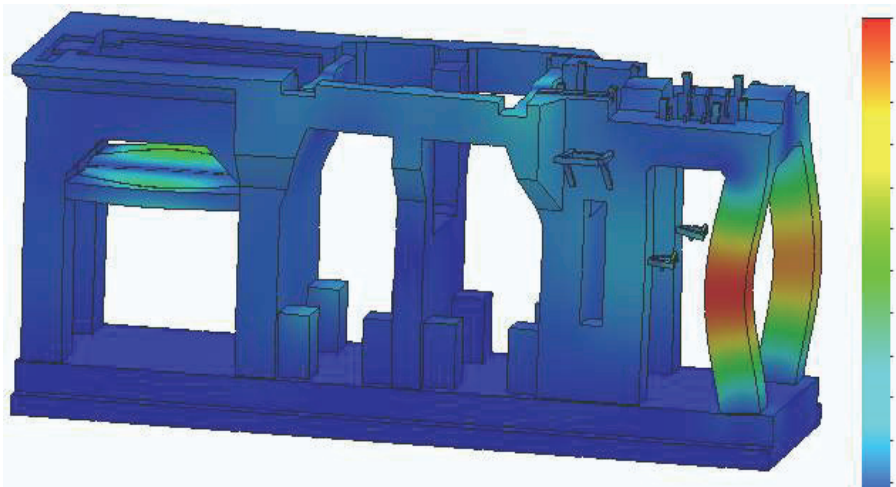


Рисунок 2 – Локальна форма коливань на власній частоті 48,3 Гц

На рис. 4 показано глобальну форму коливань. Максимальні амплітуди коливань у пари колон № IV. Крім них найбільші амплітуди мають пари колон № I, II, V, верхні балки поблизу пари колон № IV та металеві конструкції між парами колон № V та VI.

З проведеного аналізу бачимо, що серед залізобетонних елементів найбільші амплітуди мають пари колон № I та IV. Серед них пара колон № IV знаходиться посеред конденсатору, що декілька підвищує жорсткість близьких до нього залізобетонних елементів фундаменту. Тому найбільші вібрації у робочому діапазоні турбогенератора виникають у пари колон № I фундаменту.

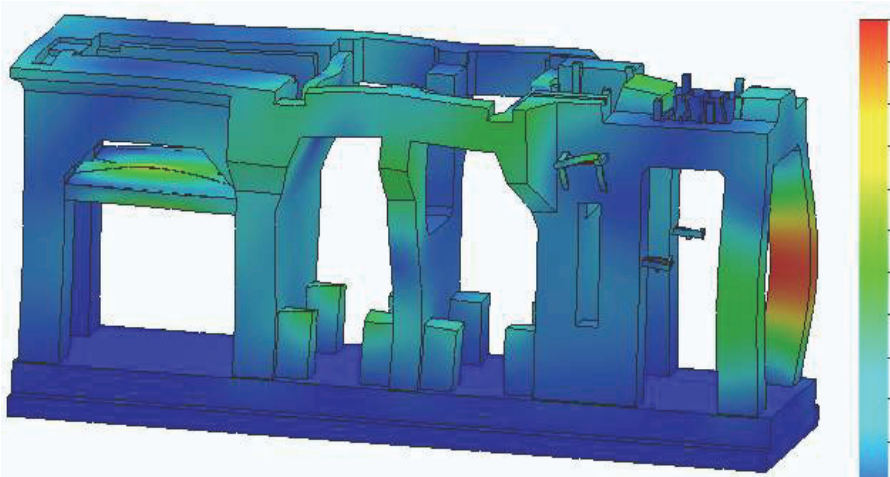


Рисунок 3 – Форма коливань на власній частоті 50,1 Гц

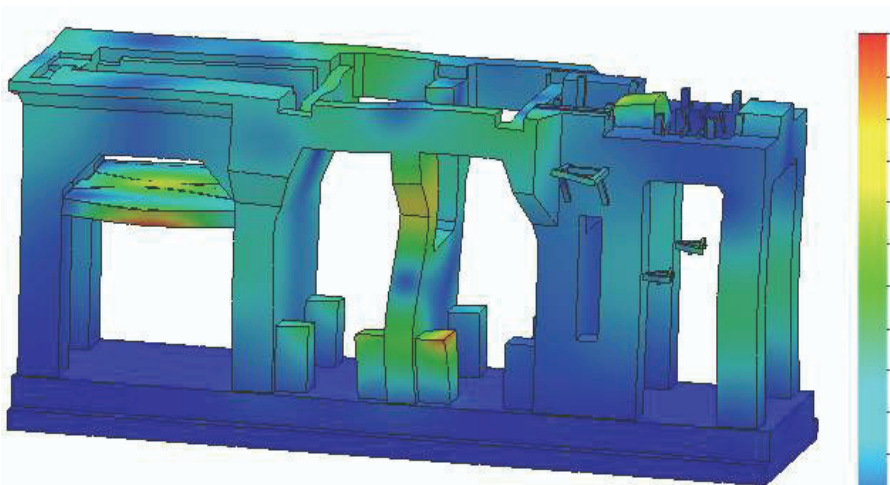


Рисунок 4 – Форма коливань на власній частоті 50,9 Гц

Висновки. Проведено дослідження власних коливань фундаменту турбогенератору 200 МВт. Побудовано скінченноелементну модель. Проведено аналіз власних частот коливань, фундамент має щільний їх спектр, що є характерним для конструкцій цього типу. В контрольованих діапазонах частот знаходиться лише дві власні частоти, що мають відповідні до них глобальні форми коливань. Найбільші амплітуди коливань мають залізобетонні пари колон № I та IV. У першу чергу підвищувати жорсткість рекомендовано у пари колон № I.

Список літератури: 1. Шульженко Н.Г., Воробьев Ю.С. Численный анализ колебаний систем турбоагрегат-фундамент. – К.: Наукова думка, 1991. – 232 с. 2. Красніков С.В., Степченко О.С., Торянік А.В. Комп'ютерне моделювання багатокорпусного турбоагрегату та аналіз його вібраційних характеристик // *Машинознавство*. – Львів: Кінпатрі, 2009. – № 2. – С.27-33. 3. Шейнин И.С., Цейтлин Б.В. Теоретическое исследование динамических характеристик ряда фундаментов под мощные турбоагрегаты // *Изв. ВНИИГ им. Веденеева*. – 1981. – № 151. – С. 81-87. 4. Красніков С.В. Моделювання та аналіз вібраційних характеристик фундаменту енергоблоку потужністю 300 МВт // *Вісник НТУ «ХП»*. – Х.: НТУ «ХП», 2011. – № 52. – С. 107-111.

Надійшла до редколегії 31.07.2013

УДК 519 : 539 : 534

Моделювання власних коливань фундаменту турбогенератору потужністю 200 МВт / С. В. Красніков // *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 88-92. – Бібліогр.: 4 назв.

Наведено результати дослідження власних частот та форм коливань фундаменту турбогенератору потужністю 200 МВт. Проаналізовано частотний спектр у контрольованих діапазонах та відповідні їм форми коливань. Означено місця, що потребують підвищення жорсткості. Моделювання та розрахунки виконано за методом скінчених елементів.

Ключові слова: фундамент турбіни, найбільш навантажені зони, моделі руйнування.

The results of the study of natural frequencies and modes of foundation turbogenerator 200 MW are described. The analysis of the frequency range of the controlled ranges and their corresponding forms of vibrations are given. Appointing places, requiring increasing rigidity foundation are completed. Modeling and calculations performed by the method of finite elements.

Key words: foundation turbine, most loaded areas, damage model.

УДК 539.3

Д.В. ЛАВИНСКИЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СИСТЕМ ДЛЯ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ СИЛАМИ ИМПУЛЬСНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В статье рассмотрены возможные подходы к анализу напряженно-деформированного состояния технологических систем при действии импульсных электромагнитных полей. Создана расчетная схема системы «индуктор–заготовка» для операции по выправлению дефектов. Задача решена методом конечных элементов. Проанализировано распределение полей напряжений и деформаций в индукторе и заготовке. Сделаны выводы по практическому применению подобных технологических систем.

Ключевые слова: импульсные электромагнитные поля, индукторная система, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние.

© Д.В. Лавинский, 2013

Актуальность и состояние проблемы. Системы для обработки материалов силами импульсных электромагнитных полей (ЭМП) являются характерным примером того, как импульсное ЭМП влияет на процесс деформирования элементов системы. Как известно, магнитно-импульсная обработка металлов (МИОМ) основана на явлении пластического деформирования заготовок пондеромоторными силами (ПС) ЭМП. При этом ПС в одинаковой степени приводят к возникновению напряжений как в заготовке так и в инструменте (индукторе). Причем опыт эксплуатации различных систем для МИОМ показывает, что нарушение прочности (стойкости) индуктора является очень часто ключевым моментом, которые не позволяет внедрять перспективные расчетные схемы. Таким образом, анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) индукторов при МИОМ с целью оценки их прочности является актуальной научно-практической задачей.

В равной степени анализ НДС заготовок в подобных расчетных схемах также является актуальной задачей. Так как, при МИОМ и индуктор, и заготовка «работают» как единая технологическая система, логично проводить анализ их НДС одновременно, в рамках единой расчетной модели. Сложность геометрии и разнообразные условия закрепления и нагружения, приводят к тому, что наиболее целесообразным является использование численных методов анализа. В данное время наибольшей популярностью пользуется метод конечных элементов (МКЭ), на основе которого создано большое количество программных комплексов. В последнее время МКЭ с успехом применяется не только для решения задач механики деформируемых твердых тел, но и для моделирования и последующего решения задач анализа различных физических полей, в том числе и электромагнитных.

Отметим, что традиционные подходы анализа НДС систем при наличии ЭМП базируются на введении интегральных показателей ПС. Так, при традиционных расчетах систем для МИОМ широко используется понятие, так называемого, магнитного давления, которое прикладывается к поверхностям деформируемых тел. В то же время известно, что ЭМП влияет на всю область, занятую электропроводным телом, то есть ПС являются по своей природе объемными силами. Использование МКЭ позволяет избежать указанного противоречия и учитывать действие ПС в каждой точке электропроводного тела. Отметим также, что традиционные оценки сил ЭМП чаще всего являются приближенными и проводятся на основе аналитических решений для тел канонической формы (полуплоскость, плоскость, полупространство и т.д.).

Одним из направлений, по которым развивается МИОМ является исправление дефектов готовых изделий, что характерно для автомобильной и авиапромышленности. Применение МИОМ для, например, выправления вмятин корпусов позволяет производить эту операцию в большинстве случаев без размонтирования конструкции и без повреждения финишного покрытия поверхности. Вмятина в каждом конкретном случае может иметь индивиду-

альную форму и размеры, поэтому анализ НДС систем «индуктор–заготовка с вмятиной» всякий раз будет являться уникальной задачей, и общие рекомендации в данном случае выработаны быть не могут. Более практичным является моделирование процесса взаимодействия индуктора с недеформированной заготовкой. Задача в такой постановке позволяет сделать оценки прочности индуктора и определить зоны возникновения пластических деформаций в заготовке. То есть такой подход может рассматриваться как фундамент для дальнейшего исследования пластического формоизменения заготовки.

Процессы МИОМ являются нестационарными, но воздействие является импульсным, то есть кратковременным. В работах [1,2] показано, что максимальные значения напряжений, перемещений и деформаций наблюдаются на первом максимуме импульса ЭМП. Данный факт позволяет проводить исследования в квазистационарной постановке, где величины внешнего воздействия соответствуют амплитудным значениям в импульсе.

При анализе НДС систем «индуктор–заготовка» необходимо дать ответы на ряд вопросов: оценить прочность индуктора, определить величины внешнего воздействия, при которых в заготовке развиваются пластические деформации и т.д.

В работе [3] показана возможность численного моделирования ЭМП в системах для МИОМ и проведены сравнения численных результатов с экспериментальным и аналитическим решением. Для того, чтобы имелась возможность корректного сопоставления численных и аналитических результатов, в работе использовалась упрощенная расчетная схема, так как только для нее возможно получение аналитического решения. Теперь рассмотрим анализ НДС подобной технологической системы, но уже используя уточненную расчетную схему индуктора.

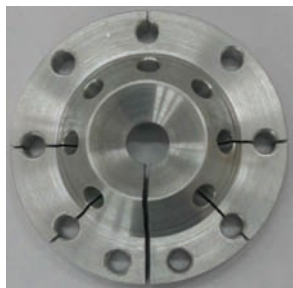


Рисунок 1 – Индуктор

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим один из вариантов индуктора, используемого для деформирования тонкостенных элементов конструкций. Индуктор представляет собой массивное тело вращения сложной формы – рис. 1. В центре индуктора выполнено отверстие (окно) в форме усеченного конуса. Реальные особенности геометрии индуктора необходимы для того, чтобы рабочий ток концентрировался по поверхности конического окна и удовлетворял условиям осевой симметрии [4]. Таким образом, в первом приближении индуктор может быть смоделирован как осесимметричное тело вращения.

Рассмотрим совместное деформирование индуктора и тонкой круглой пластины. Расчетная схема решения данной задачи представлена на рис. 2.

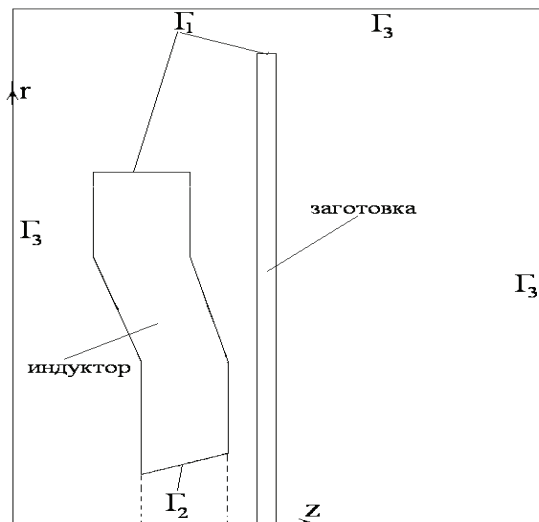


Рисунок 2 – Расчетная схема

Для первоначального анализа распределения компонент ЭМП индуктор и заготовка рассматриваются совместно с окружающей средой (воздухом). Размеры области, заполненной воздухом должны выбираться из условия затухания ЭМП на удалении от источника поля.

Задача решалась по схеме МКЭ согласно осесимметричной постановки. Для этого был введен в рассмотрение векторный магнитный потенциал [5] – $\vec{A}(r, z, \varphi, t)$:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (1)$$

В осесимметричной постановке вектор магнитной индукции \vec{B} всегда лежит в плоскости модели (в плоскости rOz), следовательно векторный магнитный потенциал всегда перпендикулярен к этой плоскости, то есть имеет только одну ненулевую компоненту $A_\varphi = A$. Для ненулевой компоненты векторного магнитного потенциала в данном случае может быть построен функционал:

$$\text{Mag} = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\mu_r} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 \right] - 2I_m A \right\} r d\Omega, \quad (2)$$

где μ_r – относительная магнитная проницаемость подобласти, I_m – амплитуда импульса тока. В данном случае ток является источником ЭМП и рассматривается распределенным по линии Γ_2 . На внешних границах воздушной среды Γ_3 задавались условия затухания ЭМП:

$$A|_{\Gamma_3} = 0. \quad (3)$$

Для использования граничных условий вида (3) необходимо проводить анализ влияния размеров расчетной области на распределение компонент ЭМП вблизи источника поля. Подобный анализ был проведен и показал, что величина окружающей воздушной области перестает влиять на распределение компонент ЭМП при удалении от источника поля на величину равную максимальной толщине индуктора.

Для анализа НДС системы «индуктор–заготовка» рассматривался функционал типа Лагранжа с объемными ПС. В качестве граничных условий рассматривалось закрепление индуктора и заготовки по границам Γ_1 . Воздушная среда при анализе НДС из рассмотрения исключалась. Задача решалась по схеме МКЭ в перемещениях с использованием осесимметричного четырехугольного конечного элемента с билинейной аппроксимацией перемещений и векторного магнитного потенциала. При конечно элементном моделировании объемные ПС приводились к узлам конечно-элементной модели.

Анализ полученных результатов. Решение было проведено для следующих геометрических параметров системы: внешний диаметр индуктора – 100 мм; толщина индуктора – 15 мм; угол наклона конической поверхности – 60° ; толщина пластины (заготовки) – 2 мм; наименьшее расстояние между индуктором и заготовкой – 2 мм; диаметр заготовки в полтора раза больше, чем диаметр индуктора (это оправдано тем, что подобный индуктор должен использоваться для удаления вмятин на корпусах транспортных средств, то есть его размеры являются меньшими размеров обрабатываемой поверхности). О выборе размеров воздушной среды было сказано выше. Физико-механические свойства элементов расчетной схемы принимались следующими: индуктор – материал медь: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1$, модуль упругости – 180 ГПа, коэффициент Пуассона – 0,33, предел текучести порядка 200–210 МПа; заготовка – материал сталь: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1,3$, модуль упругости – 210 ГПа, коэффициент Пуассона – 0,28, предел текучести порядка 250–280 МПа; воздух: относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1$. Задача решалась в квазистационарной постановке, источником поля рассматривался ток, равномерно распределенный по линии Γ_2 ($I_m = 50$ кА).

На первом этапе решения были получены пространственные распределения компонент ЭМП. Мы не будем останавливаться на их анализе, отметим лишь, что полученные распределения в окрестности конического окна индуктора согласуются с численными решениями, приведенными в [3,4]. Далее анализировалось распределение полей напряжений и деформаций в индукторе и заготовке. На рис. 3 представлено деформированное состояние индуктора и заготовки. Видно, что заготовка деформируется в гораздо большей степени, чем индуктор. Это объясняется конструктивными особенностями: индуктор более массивное тело. Анализ перемещений точек, принадлежащих индуктору, свидетельствует, что их значения не велики, то есть в процессе

работы форма индуктора практически не искажается, и, соответственно, создаваемое ЭМП будет иметь стабильную пространственную конфигурацию. Максимальные перемещения заготовки наблюдаются непосредственно напротив конического окна индуктора. На рис. 4 представлено распределение интенсивности напряжений. Видно, что максимальные значения интенсивности напряжений, как в индукторе, так и в заготовке наблюдаются в окрестности конического окна, то есть в непосредственной близости от источника поля. Можно прогнозировать, что применение подобного типа индуктора для выправления дефектов будет оправдано, так как наибольшие напряжения действительно возникают в непосредственной близости от рабочей зоны (конического окна). Максимальная интенсивность напряжений в заготовке превышает предел текучести материала, то есть при данной величине внешнего воздействия (величине силы тока) заготовка будет деформироваться пластически. Но, и в индукторе максимальные значения интенсивности напряжений также превышают предел текучести, что может отрицательно сказаться на его работоспособности (например, вызвать явление малоциклового усталости при повторных включениях). Для ликвидации данного явления необходимо применять особые конструктивные решения, одним из которых может быть использование бандажей из непроводящих материалов. Бандажи, присоединенные с натягом, создадут предварительное напряженное состояние, которое, при наложении рабочих напряжений понизит их.

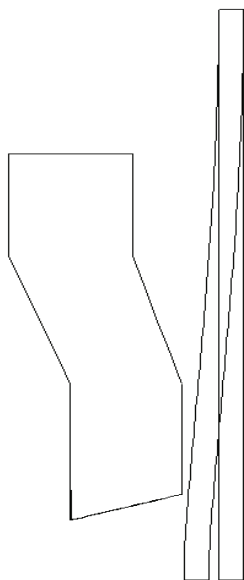


Рисунок 3 – Деформированное состояние индуктора и заготовки

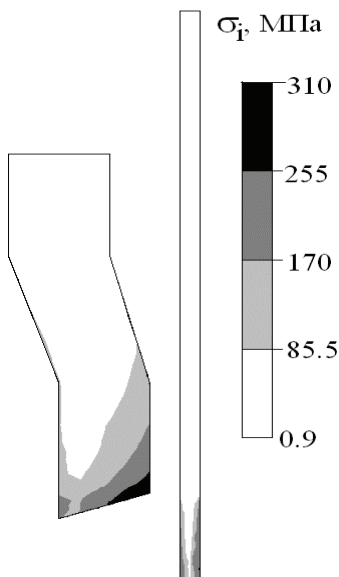


Рисунок 4 – Распределение интенсивности напряжений

Выводы. Рассмотрены возможные пути численного моделирования и анализа НДС технологических систем при действии импульсных ЭМП. Для одного варианта индукторной системы создана расчетная схема и на базе МКЭ проведен анализ НДС. По результатам проведенного анализа сделаны предложения по улучшению работоспособности индуктора.

Список литературы: 1. *Лавинский Д.В.* Колебания круглой пластины в переменном магнитном поле / *Лавинский Д.В.* // Матем. мет. в техн. и технологиях – ММТТ-25: сб. трудов XXV Междунар. науч. конф.: в 10 т. – Т. 3. Секции 5 / Под общ. ред. А.А.Большакова. – Волгоград: Волгогр. гос. техн. ун-т, 2012; X.: Национ.техн. ун-т «ХПИ», 2012. – 184 с. – С. 58-59. 2. *Oleg K. Morachkovsky* Nonlinear dynamics of a thin plate in a nonstationary electromagnetic field of the inductor / *Oleg K. Morachkovsky, Denis V. Lavinsky* // Нелінійна динаміка / Тезиси доповідей 4-ої міжнародної конференції (19-22 червня., 2013р., Севастополь). – Х.: Вид-во «Точка», 2013. – С. 299-304. 3. *Лавінський Д.В.* Моделювання та аналіз імпульсних електромагнітних полів у системах для обробки матеріалів / *Лавінський Д.В.* // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2012. – № 67 (973). – С. 61-67. 4. *Туренко А.Н.* Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Т. 3: Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями: Монография / *Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатюв А.В.* – Х.: ХНАДУ, 2009. – 240 с. 5. *Тозони О.В.* Расчет трехмерных электромагнитных полей / *Тозони О.В., Маергойз И.Д.* – К.: Техніка, 1974. – 352 с.

Поступила в редколлегию 22.07.2013

УДК 539.3

Анализ напряженно-деформированного состояния систем для обработки материалов силами импульсных электромагнитных полей / Д.В. Лавинский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 92-98. – Бібліогр.: 5 назв.

У статті розглянуто можливі підходи до аналізу напружено-деформованого стану технологічних систем при дії імпульсних електромагнітних полів. Створена розрахункова схема системи «індуктор-заготовка» для операції з виправлення дефектів. Задача розв’язана методом скінчених елементів. Проаналізовано розподіл полів напружень і деформацій в індукторі та заготовці. Зроблені висновки щодо практичного застосування подібних технологічних систем.

Ключові слова: імпульсні електромагнітні поля, індукторна система, метод скінчених елементів, напружено-деформований стан.

The possible approaches to the analysis of the stress-strain state technological systems under the action of pulsed electromagnetic fields are considered in the article. The settlement scheme for the system of the «inductor-billet» for correct of defects is created. The problem is solved by the finite element method. The distribution of stress and strain fields in inductor and billet is analyzed. Conclusions for the practical application of such technological systems are made.

Keywords: pulse electromagnetic fields, inductor system, finite element method, stress-strain state.

Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;

С. М. ВЕРЕЩАКА, д-р техн. наук; доцент, Сумской государственной
университет

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ОСЛАБЛЕННЫМ КОНТАКТОМ МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ СЛОЯМИ

На основе дискретно-структурной теории тонких оболочек предложен вариант уравнений устойчивости, включающий параметры критической загрузки тонкостенных оболочек вращения слоистой структуры с ослабленным межфазным контактом. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта соседних слоев равны друг другу. Допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта сопряженных слоев. Уравнения устойчивости включают компоненты геометрически нелинейного моментного докритического состояния сжатых тонкостенных элементов. Установлено, что изменение кинематических и статических условий контакта на межфазных границах слоистых элементов тонкостенных конструкций оказывает заметное влияние на величину критических напряжений.

Ключевые слова: теория тонких оболочек, критические напряжения.

В большинстве работ, посвященных исследованию устойчивости оболочек из композитов, предполагается, что между слоями выполняется условие идеального контакта. Это предположение является одной из идеализаций расчетной модели слоистой оболочки. На практике на границах слоев, как правило, имеют место локальные участки непрочекля и отслоений. В этом случае предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта не выполняется.

Расчетная модель оболочек с расслоениями, в которой наличие межслоевых дефектов учитывается путем модификации выражения для изгибной жесткости, представляется наиболее простой и предлагается, например, в работе [1]. Очевидно, что эта модель не позволяет проанализировать множество механических явлений, которые сопутствуют процессу докритического деформирования и потере устойчивости слоистых конструкций.

Решение задачи устойчивости элементов конструкций с расслоениями с учетом локальных эффектов дано в [2, 3]. Благодаря такой постановке, проведено исследование влияния размеров и расположения межслоевых дефектов на устойчивость цилиндрических и сферических оболочек. Многослойные оболочки вращения с зазорами между слоями рассматривались в [4].

Вопрос о точности результатов расчета устойчивости оболочек с расслоениями, полученных при помощи различного рода допущений, был изучен в [5]. Отмечается, что двумерная теория в задачах устойчивости слои-

стых оболочек с неидеальным контактом слоев приводит к более существенным погрешностям, чем в случае оболочек неоднородной структуры без дефекта.

В данной работе для моделирования участков ослабленного контакта на межфазных границах рассматривается один из вариантов модели контактной задачи сопряжения жестких анизотропных слоев. Для этого варианта модели (первая модель) характерно выполнение статических условий контакта по поверхности сопряжения отдельных слоев. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. При этом допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев. Если на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями.

Оценка достоверности результатов, полученных по первой модели, осуществлялась с привлечением непрерывно-структурной модели теории пластин и оболочек (вторая модель). Вторая модель хорошо известна и часто используется при расчете анизотропных тонкостенных элементов, когда кусочно-неоднородная по толщине слоистая пластина или оболочка рассматриваются как квазиоднородные с приведенными упругими характеристиками. При этом учитывается, что выполняется допущение об идеальном жестком контакте смежных слоев.

Постановка задачи. В соответствии с дискретно-структурной теорией математическая модель рассматриваемой здесь многослойной оболочки состоит из n тонких анизотропных слоев. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α^i ($i = 1, 2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$; k – номер слоя. Индекс « z » при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек С.П.Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z) \vec{\psi}^{(k)}, \quad (1)$$

где $\vec{u}^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон, перпендикулярных к недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине слоя [6]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}$, $\vec{\gamma}^{(k)}$, $\vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (2)$$

Компоненты тензора конечных деформаций в точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до и после деформации

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \quad 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \quad 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1. \quad (3)$$

С учетом введенных обозначений вариационное уравнение Рейснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)} \right) dV = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты z от единицы до n . При этом $F^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации; $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

Если по сопряженным лицевым поверхностям слоя выполняются условия идеального контакта:

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}; \quad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \quad (5)$$

вариацию элементарной работы внешних сил δA_R можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta A_R = & \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iint_{S_{(k)}} \left(\bar{X}_{(k)}^i \delta \bar{u}_i^{(k)} + M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(k)z} \right) dS + \\ & + \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} \left(\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{u}_i^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\psi}^{(k)} \right) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} \left(\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{u}_i^{(k)} + G_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + \right. \\ & \left. + \left(\bar{u}_i^{(k)} - \bar{u}_i^S \right) \delta \bar{\Phi}_{(k)} + \left(\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_S^{(k)} \right) \delta \bar{G}_{(k)} + \left(\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_S^{(k)} \right) \delta \bar{L}_{(k)} \right) dl. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь $S^{(k)}$ – срединная поверхность слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – части контура $l^{(k)}$; $\bar{X}_{(k)}$, $\bar{M}_{(k)}$, $\bar{B}_{(k)}$ – векторы внешних усилий, моментов и дополнительных моментов соответственно.

Элементарная работа (6) также включает векторы усилия $\bar{\Phi}_{(k)}^S$, момента $\bar{G}_{(k)}^S$, дополнительного момента $\bar{L}_{(k)}^S$, которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на $l_1^{(k)}$. Векторы усилия $\bar{\Phi}_{(k)}$, момента $\bar{G}_{(k)}$, дополнительного момента $\bar{L}_{(k)}$, имеют место в точках контура $l_2^{(k)}$ при наличии заданного вектора перемещений точек контура \bar{u}_i^S .

Второе слагаемое уравнения (4) следует представить в виде

$$\delta \Pi_R = \sum_{k=1}^n \left(\delta \Pi_{1R}^{(k)} + \delta \Pi_{2R}^{(k)} \right) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \left(\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)} \right) \delta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (7)$$

где $\delta \Pi_{1R}^{(k)} = \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} \left(\sigma_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)\neq} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{(k)\neq} + \sigma_{(k)}^{33} \delta \varepsilon_{33}^{(k)\neq} \right) dV$;

$$\delta\Pi_{2R}^{(k)} = -\iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = -\iiint_{V^{(k)}} \left\{ \left(\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{ij} - \varepsilon_{ij}^{(k)\neq} \right) \delta \sigma_{(k)}^{ij} + \left(\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{i3} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\neq} \right) \times \right. \\ \left. \times \delta \sigma_{(k)}^{i3} + \left(\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{33} - \varepsilon_{33}^{(k)\neq} \right) \delta \sigma_{(k)}^{33} \right\} dV \quad (i, j = 1, 2).$$

Подставив геометрические соотношения (1)-(3) в (4), на основе вариационного принципа Рейснера несложно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий.

Линеаризованные уравнения устойчивости. Для вывода линеаризованных уравнений устойчивости многослойных оболочек вращения используются геометрически нелинейные уравнения дискретно-структурной теории и статический критерий Эйлера, то есть допускаются смежные формы равновесия сжатого элемента конструкции, близкие к исходной, но отличные от нее. Критическая нагрузка определяется как наименьшая из нагрузок, при достижении которых наряду с исходной формой равновесия возможны смежные формы равновесия.

Пусть существование смежной равновесной конфигурации при действии внешней нагрузки определяется выражениями

$$u_i^{(k)0} + u_i^{(k)}; \quad w^{(k)0} + w^{(k)}; \quad \gamma_i^{(k)0} + \gamma_i^{(k)}; \quad \psi_i^{(k)0} + \psi_i^{(k)}; \\ \gamma^{(k)0} + \gamma^{(k)}; \quad T_{ii}^{(k)0} + T_{ii}^{(k)}; \quad T_{12}^{(k)0} + T_{12}^{(k)}; \quad R_{i3}^{(k)0} + R_{i3}^{(k)}; \quad M_{ii}^{(k)0} + M_{ii}^{(k)}; \\ M_{12}^{(k)0} + M_{12}^{(k)}; \quad L_{ii}^{(k)0} + L_{ii}^{(k)}; \quad L_{12}^{(k)0} + L_{12}^{(k)}; \quad Q_i^{(k)0} + Q_i^{(k)}; \quad Q_3^{(k)0} + Q_3^{(k)} \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Здесь компоненты исходного докритического напряженно-деформированного состояния отмечены нулем на месте верхнего индекса, дополнительные компоненты перемещений и усилий возмущенного состояния указаны без индекса.

Подставляя (8) в уравнения равновесия и вычитая из полученных соотношений уравнения равновесия исходного состояния, линеаризованные уравнения устойчивости k -го слоя многослойной оболочки, которые позволяют учесть деформации поперечного сдвига и обжатия, принимают вид

$$\frac{\partial \left(B^{(k)} T_{11}^{(k)} \right)}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial \left(A^{(k)} T_{12}^{(k)} \right)}{\partial \alpha_2^{(k)}} + T_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - T_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\ + A^{(k)} B^{(k)} k_1^{(k)} R_{13}^{(k)} = 0 \quad \left(1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)} \right); \\ \frac{\partial \left(B^{(k)} R_{13}^{(k)} \right)}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial \left(A^{(k)} R_{23}^{(k)} \right)}{\partial \alpha_2^{(k)}} - A^{(k)} B^{(k)} \left(k_1^{(k)} T_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} T_{22}^{(k)} \right) = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(B^{(k)}M_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}M_{12}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} - \\
& - A^{(k)}B^{(k)}(R_{13}^{(k)} - T_{11}^{(k)0}\omega_1^{(k)} - T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)} - T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)0} - T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)0}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}); \\
& \frac{\partial(B^{(k)}L_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}L_{12}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} - \\
& - A^{(k)}B^{(k)}L_{13}^{(k)} = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}). \quad (9)
\end{aligned}$$

При учете обжатия k -го слоя к системе (9) добавляется восьмое уравнение

$$\frac{\partial(B^{(k)}M_{13}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}M_{23}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)}L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)}) = 0. \quad (10)$$

Аналогично уравнениям (9) – (10) линеаризуются и геометрические соотношения:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)0}; & 2\chi_{ij}^{(k)} &= \nabla_i\gamma_j^{(k)} + \nabla_j\gamma_i^{(k)} - \varepsilon_i^{(k)\gamma}e_{j\gamma}^{(k)} - \varepsilon_j^{(k)\gamma}e_{i\gamma}^{(k)}; \\
2\varepsilon_{i3}^{(k)} &= 2\varepsilon_{i3}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)'}(z)\psi_i^{(k)}; & \varepsilon_{33}^{(k)} &= \gamma^{(k)}. \quad (11)
\end{aligned}$$

Уравнения (9) – (10) следует дополнить граничными условиями, которые определяются из условий закрепления границ рассматриваемой пластины или оболочки.

При выводе уравнений (9)-(10) дополнительные перемещения $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ считались малыми величинами, что послужило достаточным основанием не учитывать эти величины выше первой степени. Поэтому на основе полученной системы уравнений можно найти только «верхние» значения критических нагрузок. Подчеркнутые слагаемые в четвертом и пятом уравнениях (9) при допущении о безмоментном докритическом состоянии обращаются в нуль.

На основе линеаризованных уравнений устойчивости (9) – (10), геометрических соотношений (11), физических соотношений и заданных граничных условий имеет место разрешающая система из 14-ти однородных дифференциальных уравнений в частных производных для k -го слоя оболочки

$$\frac{\partial\bar{Y}^{(k)}}{A_{(k)}\partial\alpha_1^{(k)}} = F \left(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \bar{Y}^{(k)}, \frac{\partial\bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)}\partial\alpha_2^{(k)}} \right) \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где

$$\bar{Y}^{(k)} = \{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_{14}^{(k)}\}^T = \{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, I_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}^T -$$

вектор решений.

Полагая, что физико-механические и геометрические характеристики оболочек вращения не изменяются в направлении координаты α_2 , решение

разрешающих уравнений (12) задачи устойчивости можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{1,n}^{(k)} \cos n\alpha_2; \quad \vec{Y}_2^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{2,n}^{(k)} \sin n\alpha_2, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{Y}_1^{(k)} = & \{T_{11}^{(k)}, T_{22}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{22}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{22}^{(k)}, Q_3^{(k)}, \\ & u_1^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \chi_{11}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)}, \psi_{11}^{(k)}, \psi_{22}^{(k)}\}^T; \\ \vec{Y}_2^{(k)} = & \{T_{12}^{(k)}, R_{23}^{(k)}, Q_2^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, L_{13}^{(k)}, L_{23}^{(k)}, u_2^{(k)}, \psi_2^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}, \psi_{12}^{(k)}\}^T. \end{aligned} \quad (14)$$

После подстановки (13) – (14) в систему уравнений (12) получается система обыкновенных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}_n^{(k)}}{A(k)d\alpha_1^{(k)}} = F_n^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, n, \vec{Y}_n^{(k)}) \quad k=1,2,\dots,n. \quad (15)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \vec{Y}_n^{(k)} = & \{Y_{1,n}^{(k)}, Y_{2,n}^{(k)}, \dots, Y_{14,n}^{(k)}\}^T = \{T_{11,n}^{(k)}, T_{12,n}^{(k)}, R_{13,n}^{(k)}, M_{11,n}^{(k)}, M_{12,n}^{(k)}, L_{11,n}^{(k)}, L_{12,n}^{(k)}, \\ & u_{1,n}^{(k)}, u_{2,n}^{(k)}, w_n^{(k)}, \gamma_{1,n}^{(k)}, \gamma_{2,n}^{(k)}, \psi_{1,n}^{(k)}, \psi_{2,n}^{(k)}\}^T - \end{aligned}$$

вектор решений. Такая система для k -го слоя оболочки имеет четырнадцатый порядок.

Граничные условия, которые определяют условия закрепления торцов k -го слоя оболочки можно представить в матричной форме

$$B_0^{(k)}\vec{Y}_{(k)}(\alpha_{10}^{(k)}) = 0; \quad B_n^{(k)}\vec{Y}_{(k)}(\alpha_{1n}^{(k)}) = 0, \quad (16)$$

где $B_0^{(k)}$, $B_n^{(k)}$ прямоугольные матрицы размерности 7×14 .

Устойчивый вычислительный процесс при численном решении краевой задачи (15) – (16) обеспечивает метод ортогональной прогонки С.К.Годунова. В результате интегрирования представленных уравнений имеет место система семи алгебраических уравнений относительно компонент вектора произвольных постоянных $\vec{C}^{(k)}$:

$$B_n^{(k)}Z(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda)\vec{C}^{(k)} = 0.$$

Здесь $Z(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda)$ – матрица размера 7×7 , коэффициенты которой получены в результате ортогонализации и нормирования системы векторов решения на каждом шаге численного интегрирования, λ – собственное значение.

Для существования нетривиального решения задачи устойчивости (15) – (16) должно выполняться условие

$$\left| B_n^{(k)}Z(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda) \right| = 0. \quad (17)$$

Равенство нулю определителя (17) дает величину собственного значения

задачи λ . Величина λ представляет собой верхнюю критическую нагрузку и находится методом подбора, пока для двух последующих итераций λ определитель (17) не будет менять знак. Уточняется величина собственного значения λ методом хорд до выполнения условия

$$\left| \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

где ε – заданное число, которое определяется с требуемой точностью решения, i – шаг итерации.

Если оболочка составлена из двух и более жестких слоев, то при составлении разрешающей системы уравнений устойчивости такой слоистой системы необходимо учесть статические и кинематические условия контакта по сопряженным поверхностям каждого слоя.

Кинематические и статические условия идеального контакта отдельных слоев тонкостенных элементов по лицевым сопряженным поверхностям записуются:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)} \left(\frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)} \left(\frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)} \quad (i = 1, 2),$$

$$2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}; \quad (18)$$

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+} \quad (i = 1, 2),$$

$$\sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (19)$$

Выполняя кинематические (18) и статические (19) условия контакта по лицевым сопряженным поверхностям при помощи метода штрафных функций, нетрудно составить полную систему разрешающих уравнений (15) для решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой (толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю), в предлагаемом варианте модели допускается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, то есть по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта (19).

Система уравнений (9) включает усилия $T_{11}^{(k)0}$, $T_{12}^{(k)0}$, $T_{22}^{(k)0}$, перемещения и деформации сдвига координатной поверхности k -го слоя $u_2^{(k)0}$, $w_{(k)}^0$, $\gamma_1^{(k)0}$, $2\varepsilon_{13}^{(k)0}$, которые определяют докритическое напряженно-деформированное состояние.

Проведенное сопоставление систем разрешающих уравнений равновесия и уравнений устойчивости указывает на их подобие, что позволяет по-

строить единый вычислительный процесс определения напряжений и деформаций нелинейного моментного докритического состояния оболочек вращения и вычисления критических параметров внешней нагрузки.

Если между слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k,k+1)}$ могут возникать неизвестные векторы усилий $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-го закона Ньютона имеет место зависимость: $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в вариационное уравнение принципа Рейсснера (4) необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу сил контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$A_q = \sum_{m=1}^{n-1} \iint_{S_z^{(m,m+1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{u}_z^{(m)} dS.$$

Усилия контактного взаимодействия $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$ возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (20)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (20) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k,k+1)}$ в процессе деформации, контактное давление $\vec{q}_{(k)}$ в уравнениях равновесия принимает значение $\vec{q}_{(k)} = 0$. Решая указанную задачу несложно с заданной точностью найти значение контактного давления докритического состояния на основе итерационного метода, предложенного в [4].

Результаты расчета. Оценка эффективности предлагаемого варианта расчетной модели при решении задач устойчивости сжатых цилиндрических оболочек проводится на тестовом примере работы [7]. Рассматривались двухслойные цилиндры из стеклопластика симметричной структуры с толщиной каждого слоя $h = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Цилиндры отличались друг от друга углами армирования слоев φ : $[0^\circ/0^\circ]$, $[20^\circ/-20^\circ]$, $[30^\circ/-30^\circ]$, $[45^\circ/-45^\circ]$, $[60^\circ/-60^\circ]$, $[75^\circ/-75^\circ]$, $[90^\circ/-90^\circ]$. Всего исследовалось семь типов цилиндров с разной структурой армирования. Радиус оболочек $R = 0,1$ м, длина $L = (2,4)R$ с отношением $R = (100,45)h$. Физико-механические характеристики волокон и матрицы соответственно равны: $E_g = 8,6 \cdot 10^5$ МПа; $E_m = 3,5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_g = 0,21$; $\nu_m = 0,35$.

Объемное содержание стекловолокна составляет 45 %. Остальные параметры стеклопластика определялись по методике, предложенной в [8]. Так, например, для цилиндров со структурой первого типа модуль сдвига, модули упругости стеклопластика в меридиональном и окружном направлениях со-

ответственно равны – $G_{12} = 4,0 \cdot 10^3$ МПа; $E_{11} = 4,4 \cdot 10^4$ МПа;
 $E_{22} = 1,2 \cdot 10^4$ МПа.

Исследования проведены для двух вариантов расчетной модели анизотропных элементов. Учитывалось влияние нелинейного моментного докритического состояния, деформаций поперечного сдвига и обжатия на величину критических напряжений (см. таблицу).

Таблица – Значения критических напряжений при осевом сжатии цилиндрических оболочек из стеклопластика

Тип структуры	-Структура	L/R	$\sigma_{кр}$, МПа				
			Форма потери устойчивости				
			осесимметричная			неосесимметричная	
			клас. теория	модель		модель	
			вторая	первая	вторая	первая	
1	2	3	4	5	6	7	8
$R/h = 100,0$							
1	[0°/0°]	2,0	132,74	131,99	59,12	54,78 (7)	45,00 (10)
		4,0		131,25	59,12	52,01 (4)	44,62 (8)
2	[20°/ – 20°]	2,0	123,23	106,99	69,34	79,71 (7)	56,00 (3)
		4,0		106,99	69,34	78,57 (4)	55,70 (5)
3	[30°/ – 30°]	2,0	116,13	94,26	69,34	94,26 (0)	57,01 (6)
		4,0		94,26	69,34	94,26 (0)	57,37 (8)
4	[45°/ – 45°]	2,0	112,07	97,99	39,89	84,06 (1)	39,89 (0)
		4,0		97,99	39,89	84,06 (1)	39,89 (0)
5	[60°/ – 60°]	2,0	116,13	94,26	45,93	94,26 (0)	45,93 (0)
		4,0		94,26	45,93	94,26 (0)	45,93 (0)
6	[75°/ – 75°]	2,0	127,13	131,99	69,34	71,85 (8)	42,44 (11)
		4,0		126,99	69,34	70,73 (3)	42,44 (11)
7	[90°/ – 90°]	2,0	132,74	131,99	69,34	54,06 (7)	46,05 (10)
		4,0		131,25	69,34	52,01 (3)	45,67 (8)

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7	8
$R/h = 45,0$							
1	[0°/0°]	2,0	294,98	275,02	135,06	116,99 (5)	104,56 (8)
		4,0		275,02	129,93	116,99 (5)	104,56 (8)
2	[20°/ -20°]	2,0	273,85	239,99	110,01	177,99 (5)	104,00 (3)
		4,0		239,99	109,74	181,92 (6)	102,02 (5)
3	[30°/ -30°]	2,0	258,07	219,99	95,41	208,00 (2)	92,46 (1)
		4,0		219,99	94,95	208,00 (2)	92,46 (1)
4	[45°/ -45°]	2,0	249,04	188,43	77,59	188,43 (0)	77,59 (0)
		4,0		188,43	77,02	185,07 (1)	77,02 (0)
5	[60°/ -60°]	2,0	258,07	210,01	127,99	183,01 (5)	89,08 (1)
		4,0		210,01	123,99	182,85 (1)	88,69 (1)
6	[75°/ -75°]	2,0	282,52	245,01	136,04	175,02 (4)	87,01 (8)
		4,0		245,01	135,66	169,14 (5)	86,77 (7)
7	[90°/ -90°]	2,0	294,98	275,02	108,95	122,01 (5)	75,02 (9)
		4,0		275,02	108,95	122,01 (5)	74,79 (8)

Расхождение результатов классической теории при осесимметричной форме потери устойчивости, которые получены при помощи формулы $\sigma_{кр} = h\sqrt{\bar{E}_{11}E_{22}}/(R\sqrt{3})$ и предлагаемого варианта уточненной теории, составило 1-19 % при $R/h = 100,0$ и 6-25 % при $R/h = 45,0$. В выражение для нахождения $\sigma_{кр}$ введено обозначение $\bar{E}_{11} = E_{11}(1 - \nu_{12}\nu_{21})$. Заметное снижение величины критических напряжений исследуемых оболочек дают расчеты на основе первой модели. Считалось, что оболочка включает два жестких анизотропных слоя одинаковой толщины с ослабленными условиями контакта по сопряженным лицевым поверхностям.

Анализ результатов позволяет отметить, что форма потери устойчивости исследуемых элементов, исключая цилиндры с углами армирования – 30°, 45°, 60°, является неосесимметричной. При этом результаты, полученные

согласно второй расчетной модели, во многом определяются направлением армирования отдельных слоев цилиндра. Так, например, критические напряжения оболочки с третьим типом структуры более чем в 1,7 раза выше критических напряжений цилиндров со структурой первого и седьмого типов.

Значения критических напряжений, которые определялись на основе первой расчетной модели, мало зависят от направления армирования слоя и отличаются друг от друга не более чем на 30 %.

Вывод. В процессе исследований установлено, что изменение кинематических и статических условий контакта по сопряженным поверхностям жестких слоев анизотропных элементов тонкостенных конструкций существенно влияет на характер распределения деформаций поперечного сдвига и является одним из основных факторов определяющих величину параметра критической нагрузки рассматриваемых цилиндров. Вариант модели, когда напряжения поперечного сдвига и обжатия на межфазных границах контакта равны между собой, но при этом допускается упругое проскальзывание этих слоев друг относительно друга, адекватно отражает работу слоистых тонкостенных конструкций при больших деформациях.

Список литературы: 1. *Бабич Д.В.* Влияние расслоения материала на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек / *Д.В.Бабич* // Прикладная механика. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 52-56. 2. *Андреев Л.В.* О бифуркации равновесия сферических оболочек с расслоениями / *Л.В.Андреев, И.П.Железко, Н.И.Ободан* // Проблемы прочности. – 1986. – № 2. – С. 49-53. 3. *Болотин В.В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов / *В.В.Болотин* // Механика композитных материалов. – 1984. – № 2. – С. 239-255. 4. *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / *Б.Я.Кантор* / Отв. ред. *А.Н.Подгорный*; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – К.: Наукова думка, 1990. – 136 с. 5. *Гузь А.Н.* Механика разрушения при сжатии композитных материалов / *А.Н.Гузь*. – К.: Наукова думка, 1990. – 630 с. 6. *Болотин В.В.* Механика многослойных конструкций / *В.В.Болотин, Ю.Н.Новичков*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 7. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов / *В.В.Васильев*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с. 8. *Верещака С.М.* Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / *С.М.Верещака*. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.

Поступила в редколлегию 21.05.2013

УДК 539.3

Устойчивость многослойных оболочек вращения с ослабленным контактом между жесткими слоями / Г. И. Львов, С. М. Верещака // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 99-110. – Бібліогр.: 8 назв.

На основі дискретно-структурної теорії тонких оболонок запропонований варіант рівнянь стійкості, який включає параметри критичного навантаження тонкостінних оболонок обертання шаруватої структури з послабленим міжфазним контактом. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту сусідніх шарів дорівнюють один одному. Припускається пружне проковзування на поверхні контакту суміжних шарів. Рівняння стійкості включають компоненти геометрично нелінійного моментного докритичного стану стиснутих тонкостінних елементів. Встановлено, що зміна кінематичних та статичних умов контакту на міжфазних границях шаруватих елементів тонкостінних конструкцій суттєво впливає на величину критичних напружень.

Ключові слова: теорія тонких оболонок, критичні напруження.

Based on the discrete - structural theory of thin plates and shells, a variant of the equations of buckling with parameter of critical loading of thin-walled elements of layered structure with the weakened interfacial contact is put forward. It is assumed that the transverse shear and compression stresses are equal on the interfaces. Elastic slippage is allowed over the interfaces between adjacent layers. The equations buckling include components of geometrically nonlinear moment sub buckling conditions of the compressed thin-walled elements. It is found that the kinematic and static contact conditions on the interfaces of layered thin-walled structural members greatly affect the magnitude of critical stresses.

Key words: theory of thin plates and shells, critical stresses.

УДК 539.3

Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;

В. А. ЛЕВАШОВ, канд. техн. наук, зав. отд., ПАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе»;

О. А. КОСТРОМИЦКАЯ, научн. сотр., НТУ «ХПИ»

УСТАЛОСТНАЯ ПРОЧНОСТЬ РАБОЧИХ КОЛЕС ЦЕНТРОБЕЖНЫХ КОМПРЕССОРОВ

На основании расчетов напряженно-деформированного состояния колеса сделан прогноз усталостной долговечности. Результаты показывают взаимосвязи между количеством циклов до разрушения и максимально допустимыми напряжениями и перемещениями. Исследуется зависимость поврежденности от числа циклов для разных режимов вибрации на резонансных частотах.

Ключевые слова: многоцикловая усталость, долговечность, поврежденность, циклическое нагружение.

Введение. Необходимость оценки усталостной прочности обусловила как развитие теоретических основ усталости материалов, так и разработку нормативных документов и стандартов [1,2].

В численных методах решения задач механики деформируемого твердого тела развиваются два основных подхода к решению вопроса условий разрушения конструкций [3, 4]. Первый подход – моделирование развития дефектов (поры, трещины и т.п.) с учетом изменения граничных условий в рассматриваемом элементе конструкции и перестроение сетки при изменении размеров дефекта [5]. Второй подход – оценка степени поврежденности материала в элементах конструкции при условии, что дефекты и их рост в явном виде не рассматриваются [6,7].

Первый подход является индивидуальным для каждой конкретной задачи и приводит к написанию собственного программного обеспечения или макросов в существующих системах конечно-элементного анализа (ANSYS и т.п.).

© Г. И. Львов, В. А. Левашов, О. А. Костромицкая, 2013

Второй подход позволяет получить наглядную картину степени поврежденности конструкции на основе используемых моделей накопления повреждений. Этот подход соответствует требованиям, предъявляемым к методам исследования процессов разрушения в системах конечно-элементного анализа, используемых при решении инженерных задач. К недостаткам данного подхода можно отнести то, что не учитывается влияние деградации свойств материала вследствие накопления повреждений при анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) рассматриваемых элементов конструкций. Для учета деградации необходимо написание пользовательских программ, меняющих свойства материала в зависимости от накопленной поврежденности. В ANSYS, например, такая программа должна заменить аналогичную стандартную, затем после компиляции нового исполняемого файла Ansys.exe расчеты можно проводить с пользовательским материалом.

Для многоциклового усталости второй подход применяется в системе ANSYS с учетом таких допущений: процесс накопления повреждений, приводящий к разрушению конструкций, локализован в малой области, размеры которой много меньше характерных размеров конечных элементов конструкций; разрушение происходит при напряжениях, меньших предела текучести; в процессе разрушения не происходит изменения геометрических размеров конструкций и их элементов.

Колеса центробежных компрессоров для магистральных газопроводов в процессе эксплуатации подвергаются центробежным нагрузкам на рабочих угловых скоростях, действию давления и температуры перекачиваемого газа.

1 Этапы расчета долговечности при многоциклового усталости

При решении задачи оценки усталостной долговечности традиционно выделяют ряд основных этапов [8]:

- назначение опасной точки;
- определение истории нагружения в выбранной опасной точке;
- формирование эквивалентного напряжения;
- подсчет усталостной долговечности.

Далее рассматривается каждый из указанных выше этапов применительно к задаче расчета многоциклового усталости рабочего колеса центробежного турбокомпрессора газоперекачивающего агрегата СПЧ 16/76-1.7. Геометрическая модель колеса построена в формате dwg. Импорт геометрической модели в программный комплекс ANSYS осуществлялся с использованием формата x_t. Разбиение на конечные элементы выполнено в комплексе ANSYS (рис. 1) с помощью конечного элемента SOLID92.

1.1 Назначение опасной точки

В качестве опасной точки выбран узел 33210 с максимальным эквивалентным напряжением (рис. 2), полученным при расчете собственных значений преднапряженного центробежными силами колеса, на резонансной час-

тоте с 6-ю узловыми диаметрами. Как известно, результаты расчетов на собственные значения получаются с точностью до масштабного коэффициента (sf). Его значения выбираются так, чтобы максимальное суммарное перемещение колеса составляло около 1 мм при одновременном вращении и колебаниях на указанной частоте.

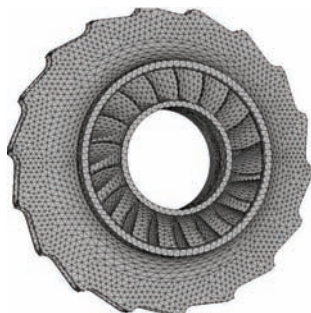


Рисунок 1 – Конечно-элементная модель рабочего колеса

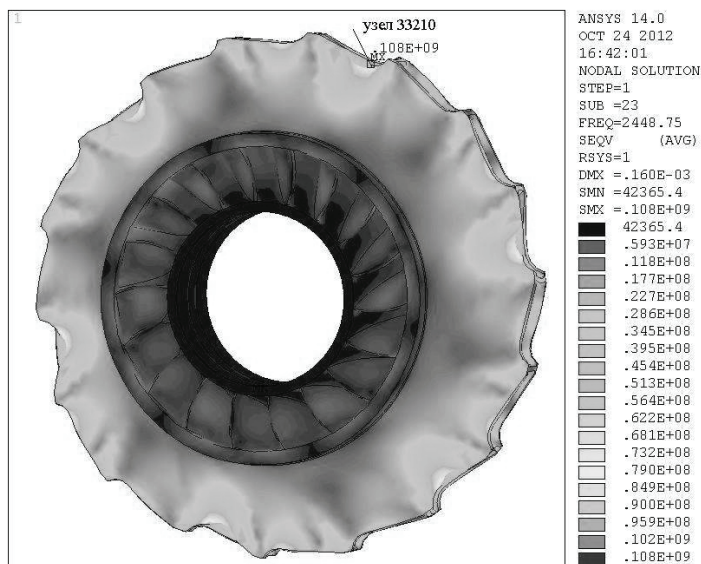


Рисунок 2 – Напряжения эквивалентные по Мизесу Seqv, Па

1.2 Определение истории нагружения

В общем случае история нагружения представляет собой случайную функцию, а напряженное состояние, как правило, является многоосным.

Принято разбивать все нагружения на два основных типа: регулярное

нагружение и случайное нагружение [9]. Все методы оценки усталостной долговечности используют нагрузку в виде, характерном для описания регулярного нагружения, – цикла нагружения, характеризующегося средним и амплитудным значениями [9, 10].

Исходя из имеющихся исходных данных, для построения цикла предварительно проводились два расчета рабочего колеса:

- расчет НДС, назовем его НДС1, колеса, вращающегося с рабочей угловой скоростью;
- расчет собственных частот и форм, а также НДС (назовем его НДС2) колебаний вращающегося колеса на резонансной частоте, форма которой имеет шесть узловых диаметров.

На основе двух предварительных расчетов выбран следующий цикл нагружения всего колеса и в том числе опасной точки:

1-ое нагружение– НДС1 при вращении колеса с заданной угловой скоростью, соответствует среднему значению эквивалентного напряжения цикла;

2-ое нагружение – НДС при колебании вращающегося колеса на рассматриваемой частоте, является результатом вычитания НДС2 из НДС1;

3-е нагружение – НДС при колебании вращающегося колеса на рассматриваемой частоте, вычисляется как НДС1+НДС2.

В табл. 1 приведены эквивалентные по Мизесу напряжения и суммарные перемещения в опасной точке для трех видов нагружения.

Таблица 1 – Перемещения и эквивалентные напряжения в опасной точке

	1 нагружение	2 нагружение	3 нагружение
Seqv, Па	$433 \cdot 10^9$	$534 \cdot 10^9$	$338 \cdot 10^9$
Usum, м	$0.846 \cdot 10^{-3}$	$0.951 \cdot 10^{-3}$	$0.748 \cdot 10^{-3}$

В инженерных приложениях для характеристики истории нагружения используется подход, при котором внешнее воздействие описывается зависимостью компонент тензора напряжений в опасной точке от времени [9].

Для перехода от реальной истории нагружения к ее схематизированному аналогу, который может быть сопоставлен с экспериментальными данными, применяются различные подходы, основное отличие которых состоит в последовательности выполнения следующих операций: схематизация истории нагружения, переход от многоосного к одноосному НДС и переход от асимметричного к симметричному нагружению.

1.3 Формирование эквивалентного напряжения

Одноосное НДС, эквивалентное по поврежденности данному многоосному состоянию, описывается следующими соотношениями в соответствии с гипотезами максимального касательного напряжения (Треска–Сен-Венана) и удельной энергии формоизменения (Губера-Мизеса-Генки), соответственно

$$\sigma_{eqv} = |\sigma_1 - \sigma_3|, \quad (1)$$

$$\sigma_{eqv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}, \quad (2)$$

где σ_{eqv} – эквивалентное напряжение, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения данного НДС.

Для описания перехода от асимметричного к симметричному циклу нагружения используются зависимости, связывающие амплитуду напряжения эквивалентного по повреждаемости симметричного цикла нагружения σ_{aeqv} с амплитудным и средним напряжением данного асимметричного цикла нагружения.

Одна из таких зависимостей – зависимость Гудмана

$$\sigma_{aeqv} = \sigma_a + \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_m, \quad (3)$$

где σ_a, σ_m – амплитудное и среднее напряжение данного асимметричного цикла нагружения, σ_{-1} – предел усталости при симметричном цикле нагружения ($\sigma_m = 0$), σ_B – предел прочности.

Результатом процесса схематизации и сведения к эквивалентным значениям истории нагружения является последовательность значений эквивалентных амплитуд напряжений при одноосном симметричном цикле нагружения σ_{aeqv}^l , где $l = \overline{1, N_b}$, где N_b – число циклов, выделенных при схематизации нерегулярного нагружения.

При многоцикловой усталости основной характеристикой материала, используемой для описания его долговечности, является кривая Велера. На рис. 3 приведены исходная кривая Велера [11] и пересчитанная, как показано ниже, используемая кривая Велера.

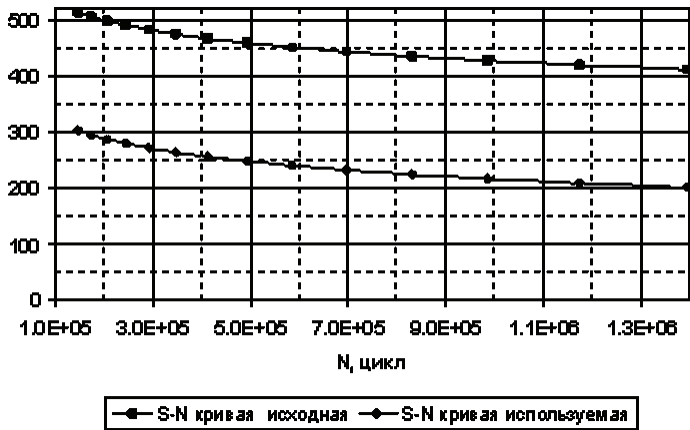


Рисунок 3 – Результаты испытаний на усталость плоских образцов из стали X3CrNiMo13.4

Исходная кривая на рис. 3 аппроксимирована уравнением [11, ч.2]:

$$\sigma_a = A + B \lg N, \quad (4)$$

где N – число циклов до разрушения при σ_a ; $A = 1050 \cdot 10^6$ и $B = -104,14 \cdot 10^6$.

Для описания перехода от асимметричного к симметричному циклу нагружения используется зависимость Гудмана (3). Из [11, ч.1] выбираем $\sigma_B = 845,3$ МПа, $\sigma_{-1} = 410$ МПа. Среднее значение $\sigma_m = 433$ МПа берем из статического расчета (табл.1). Тогда добавка к амплитудному значению σ_a будет равна

$$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B} \sigma_m = \frac{410}{845,3} \cdot 433 \approx 210 \text{ МПа}. \quad (5)$$

На основании этого можно пересчитать значения на кривой Велера для случая несимметричного нагружения (используемая кривая на рис. 3).

1.4 Подсчет усталостной долговечности

Процедура оценки степени поврежденности, возникающей в опасной точке конструкции, в модуле *Fatigue* системы ANSYS в соответствии с ASME Boiler and Pressure Vessel Code [1] содержит следующие шаги:

1. Каждое нагружение сравнивается с каждым другим нагружением и определяется максимальное касательное напряжение.

А. Подсчитывается вектор разностей напряжений:

$$\{\sigma\}_{i,j} = \{\sigma\}_i - \{\sigma\}_j, \quad (8)$$

где $\{\sigma\}_i$ – вектор напряжений для нагружения i , $\{\sigma\}_j$ – вектор напряжений для нагружения j .

В данной работе три нагружения, $i = \overline{1,3}$; $j = \overline{1,3}$. На данном этапе работы определяются компоненты напряжений в Па в опасной точке в глобальной декартовой системе координат для первого, второго и третьего нагружений.

В. Для каждого $\{\sigma\}_{i,j}$ находится эквивалентное напряжение $\sigma_I(i,j)$ по критерию Треска по формуле

$$\sigma_I = \max \{ \|\sigma_1 - \sigma_2\| \|\sigma_2 - \sigma_3\| \|\sigma_3 - \sigma_1\| \}. \quad (9)$$

С. Далее, вычисляется максимальное касательное напряжение

$$\sigma_{ij}^c = \frac{\sigma_I(i,j)}{2}. \quad (10)$$

2. Общее число возможных комбинаций нагружений равно $l/2(l-1)$, где l – число нагружений. Следующим шагом является сортировка нагружений (в соответствии с методом падающего дождя) таким образом, чтобы первым было наибольшее значение σ_{ij}^c .

Результаты работы ANSYS на данном этапе, содержат все напряжения σ_{ij}^c за историю нагружения. При этом определяется, что амплитудное напряжение σ_{23}^c между вторым нагружением и третьим является наибольшим и составляет 111,03 МПа. Это значение сравнивается с кривой Велера, которая

вводится таблично, и участвует в дальнейшем расчете поврежденности и количества циклов до разрушения.

3. Пусть M_T – число повторений амплитуды σ_{ij}^c в процессе нагружения. Нам надо оценить поврежденность после $M_T = 146600$ циклов – минимального значения числа циклов на кривой Велера. Подсчет фактора поврежденности Usage factor осуществляется по методу Минера:

$$f_u = M_T / M_A, \quad (11)$$

где f_u – параметр поврежденности; M_A – число циклов до разрушения при амплитуде напряжения σ_{ij}^c , определяемое с использованием кривой Велера. Полученное значение f_u добавляется в f_u^c – накопленную поврежденность:

$$f_u^c = \sum f_u. \quad (12)$$

Для одного события, одного цикла из трех нагружений $f_u^c = f_u$.

В данном случае за 146600 циклов, каждый из которых состоит из трех нагружений с амплитудой 111,03 МПа, накопленная поврежденность равна 0,10485. Число циклов до разрушения изучаемого элемента конструкции равно 0,1398E+07.

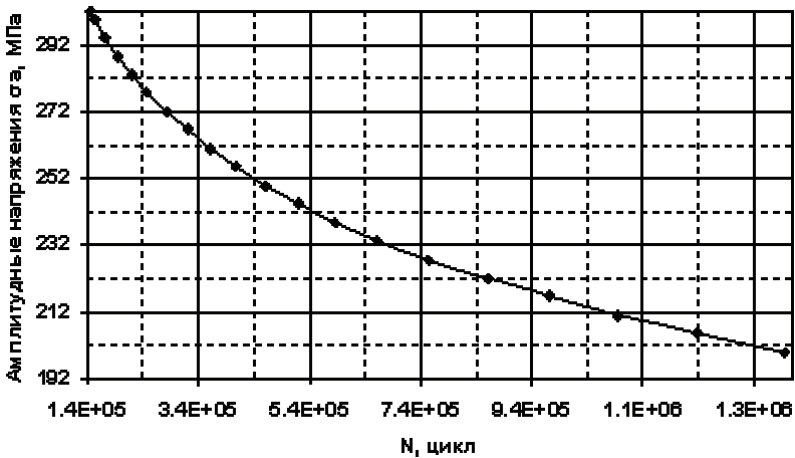


Рисунок 4 – Зависимость числа циклов до разрушения от амплитудных напряжений $\sigma_a = \sigma_{23}^c$ в опасной точке

2 Результаты расчета усталостной долговечности рабочего колеса

Проведена серия из 22-х расчетов с различными масштабными коэффициентами sf , значения которых меняются от 0,000200 до 0,000544. Задаваемые значения обеспечивают, что амплитудные эквивалентные напряжения находятся в области значений напряжений кривой Велера (рис. 3). При $sf = 0,000200$ максимальное суммарное перемещение (нагружение 2) в опас-

ном узле равно 0,9509 мм, для $sf = 0,000544$ – равно 1,143 мм. При этом эквивалентное напряжение в опасной точке не превышает предела текучести: $S_{eqv} = 711,447 \text{ МПа} < \sigma_T = 791,4 \text{ МПа}$ [11, ч.1].

Для разных значений sf решаются задачи по описанному в разделе 1.5 алгоритму. Результаты получены в виде числа циклов до разрушения при различных значениях амплитудных и максимальных эквивалентных напряжений и суммарных перемещений (нагружение 2) в опасной точке. Если значения напряжений и перемещений меньше соответствующих минимальных, указанных на рисунках (4-6), а это имеет место при $sf < 0,00036$; $U_{sum} < 1,039 \text{ мм}$; $S_{eqv} < 615,9 \text{ МПа}$; $\sigma_{23}^c < 199,85 \text{ МПа}$, то усталостное разрушение не наступает.

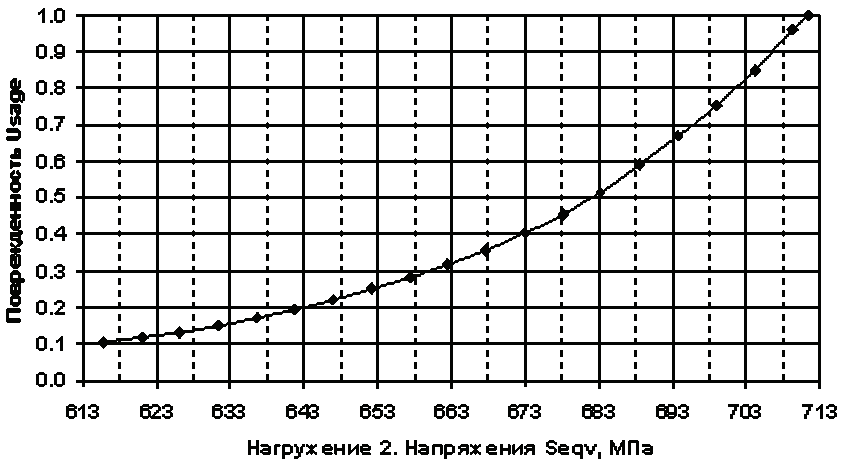


Рисунок 5 – Зависимость поврежденности, оцениваемой за 146600 циклов, от максимальных напряжений в опасной точке

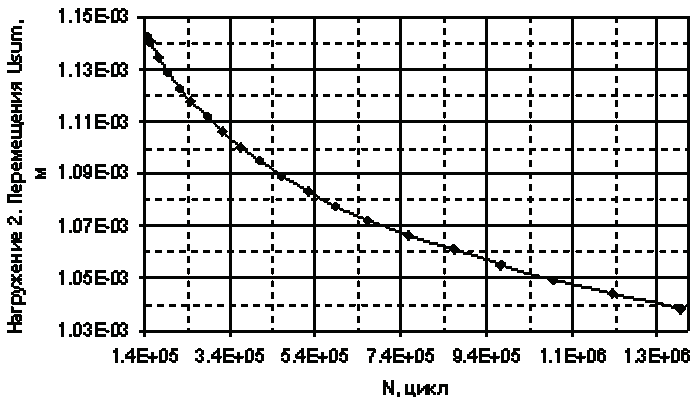


Рисунок 6 – Зависимость циклов до разрушения от перемещений в опасной точке

Заключення. Предложена методика оценки усталостной прочности рабочих колес центробежных компрессоров на резонансных режимах. Методика основана на результатах конечно-элементных расчетов двух типов:

- статического анализа НДС колеса под действием центробежных сил;
- анализа собственных частот и форм колебаний рабочих колес с учетом влияния центробежных сил.

Вычисление повреждения проводится в одной точке, узле, в котором наблюдаются максимальные эквивалентные напряжения на резонансной частоте. На основании расчетов НДС рабочего колеса сделан прогноз долговечности с помощью модуля Fatigue ANSYS. Результаты показывают взаимосвязи между количеством циклов до разрушения и максимально допустимыми напряжениями и перемещениями. Исследуется рост накопленной поврежденности в зависимости от числа циклов для различных режимов вибрации на резонансных частотах. На основании выполненных расчетов установлены предельные уровни амплитуд вибраций, при которых усталостное разрушение не наступает.

Список литературы: 1. ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII, Rules for construction of pressure vessels, Division 2 – Alternative rules // ASME, 2003. 2. European Standard for Unfired Pressure Vessels // EN 13445: 2002, BS EN 13445:2002 // BSI, London, 2002. 3. *Болотин В. В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с. 4. *Проников А. С.* Параметрическая надежность машин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 560 с. 5. *Карзов Г. П., Марголин Б. З., Швецова В. А.* Физико-механическое моделирование процессов разрушения. – СПб.: Политехника, 1993. – 391 с. 6. ANSYS theoretical manual. 7. *Hanq D. A., Walters A. J., Beuth J. L.* Development of an object-oriented fatigue tool // Engineering with computers. – 2000. – V. 16. – P. 131-144. 8. *Берендеев Н. Н.* Применение системы ANSYS к оценке усталостной долговечности. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы в исследованиях и разработках информационно-телекоммуникационных систем и технологий». – Нижний Новгород, 2006. – 84 с. 9. *Козаев В. П.* Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1993. – 364 с. 10. *Павлов П. А.* Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. – Л.: Машиностроение, 1988. – 321 с. 11. Исследование сопротивления усталости основного металла, сварных и паяных соединений стали X3CRNIMO13.4 (W.NR1.4313) EN10028/EN10088-3 применительно к изготовлению рабочих колес ГПА. – Этап №№ 2,1, х/д № 1373 от 06.10.2009 г. Киев 2010. – с. 10-12.

Поступила в редколлегию 30.08.2013

УДК 539.3

Усталостная прочность рабочих колес центробежных компрессоров / Г. И. Львов, В. А. Левашов, О. А. Костромицкая // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 110-119. – Бібліогр.: 11 назв.

За допомогою чисельних розрахунків напружено-деформованого стану колеса зроблений прогноз втоми до довговічності. Результати показують взаємозв'язки між кількістю циклів до руйнування і максимально допустимими напруженнями і переміщеннями. Досліджується залежність пошкодженості від числа циклів для різних режимів вібрації на резонансних частотах.

Ключові слова: багаточиклова втома, довговічність, пошкодженість, циклічне навантаження.

On the basis of numerical calculations of the stressed-deformed state of wheel the prognosis of life time is done. The results are shown relations between the number of cycles to failure and maximally possible stresses and displacements. Relation of cumulative fatigue damage is researched depending on the number of cycles for the different modes of vibration on resonances frequencies.

Keywords: high-cycle fatigue, life time, damageability, cyclic loading.

УДК 539.3

Г.И.ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;
В.Г.СУКИАСОВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

На основе принципа Вольтерра решена плоская задача для двухслойного цилиндра с вязкоупругим слоем. Искомые величины в виде функций времени найдены с помощью одностороннего интегрального преобразования Лапласа.

Ключевые слова: плоская задача, вязкоупругость, преобразование Лапласа.

Бандажирование считается в настоящее время одним из наиболее эффективных способов ремонта магистральных трубопроводов. В качестве материалов ремонтной накладки целесообразно применять композиты на полимерной основе, сочетающие благоприятные физико-механические свойства с доступностью технологии, что дает возможность для быстрого восстановления работоспособности действующего трубопровода без вывода из эксплуатации поврежденного участка. Перспективность данной методики определяет необходимость теоретического изучения различных аспектов ее реализации, при этом последовательное уточнение применяемых подходов имеет целью полное прояснить особенности получаемых решений. Среди значимых аспектов можно указать формирующееся в ходе отверждения напряженное состояние вследствие объемной усадки полимерного связующего, что оказывает благоприятное сжимающее воздействие на трубу. В дальнейшем это воздействие ослабевает за счет релаксации напряжений. В этой связи представляет определенный интерес исследование развития во времени напряженно-деформированного состояния трубопровода совместно с бандажом, при этом описание полимера моделью линейно вязкоупругой среды позволяет рассматривать независимо эффекты от усадочных напряжений и нагружения трубы внутренним давлением. Аналитическое решение, описывающее вязкоупругое деформирование одиночного цилиндра, приведено в [1]. Решение

© Г.И.Львов, В.Г.Сукиасов, 2013

для вязкоупругого цилиндра внутри упругой оболочки получено в [2] методом аппроксимаций. В настоящей работе предложено замкнутое решение для составного цилиндра на основе одной из частных моделей вязкоупругой среды.

Рассматривается фрагмент трубопровода с ремонтной накладкой из полимерного материала. Расчетная модель представляет собой составной цилиндр под действием внутреннего давления, в условиях плоской деформации. Внутренний цилиндр считается упругим, наружный цилиндр обладает вязкоупругими свойствами.

В общем случае сложного напряженного состояния определяющие соотношения для линейной вязкоупругой среды наследственного типа имеют вид [2]

$$s_{kl}(t) = 2G_0 \left[e_{kl}(t) - \int_0^t R(t-\zeta) e_{kl}(\zeta) d\zeta \right], \quad (k, l = \overline{1,3}); \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = K_0 \left[\theta(t) - \int_0^t V(t-\zeta) \theta(\zeta) d\zeta \right], \quad (2)$$

где $G_0 = \frac{1}{2} E_0 / (1 + \nu_0)$ и $K_0 = \frac{1}{3} E_0 / (1 - 2\nu_0)$ – мгновенные модуль сдвига и объемный модуль соответственно; ν_0 – коэффициент Пуассона; $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{kk}$ – среднее нормальное напряжение; $\theta = \varepsilon_{kk}$ – относительное изменение объема при малых деформациях; $s_{kl} = \sigma_{kl} - \sigma_0 \delta_{kl}$ и $e_{kl} = \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} \theta \delta_{kl}$ – компоненты девиаторов напряженного и деформированного состояний; δ_{kl} – символ Кронекера; R и V – ядра сдвиговой и объемной релаксации соответственно.

Реальные полимерные материалы практически не обнаруживают объемной вязкости [2], что позволяет в прикладных расчетах вместо (2) использовать закон Гука:

$$\sigma_0 = K_0 \theta. \quad (3)$$

Применение одностороннего преобразования Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (4)$$

к зависимостям (1) при условии $G_0(t) = \text{const}$ дает связь изображений

$$\tilde{s}_{kl}(p) = 2G_0 \tilde{e}_{kl}(p) [1 - \tilde{R}(p)], \quad (k, l = \overline{1,3}), \quad (5)$$

внешне подобную закону Гука для компонент девиаторов, с заменой модуля сдвига на $G_0 [1 - \tilde{R}(p)]$, где p – параметр преобразования.

Принцип Вольтерра [1] дает возможность трактовать компоненты НДС в решении упругой задачи как изображения соответствующих величин из задачи вязкоупругой, если в упругом решении выполнена указанная выше замена. На основе этого подхода рассматривается плоская задача о взаимодействии упругой трубы $a \leq r \leq b$ с вязкоупругим бандажом $b \leq r \leq c$ под дей-

ствием внутреннего давления P_a . Напряжения и радиальное перемещение в трубе (верхний индекс I) и в упругом бандаже (верхний индекс II) выражены через сдвиговой и объемный модули соответствующих материалов и зависят от величины контактного давления P_k :

$$\sigma_{rr}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[P_a a^2 - P_k b^2 - (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r^2} \right]; \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[P_a a^2 - P_k b^2 + (P_a - P_k) \frac{a^2 b^2}{r^2} \right]; \quad \sigma_{zz}^I = \frac{1}{b^2 - a^2} \frac{3K^I - 2G^I}{3K^I + G^I} [P_a a^2 - P_k b^2];$$

$$u^I = \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \left[3 \frac{P_a a^2 - P_k b^2}{3K^I + G^I} r + \frac{P_a - P_k}{G^I} \frac{a^2 b^2}{r} \right];$$

$$\sigma_{rr}^{II} = \frac{P_k b^2}{c^2 - b^2} \left[1 - \frac{c^2}{r^2} \right]; \quad \sigma_{\theta\theta}^{II} = \frac{P_k b^2}{c^2 - b^2} \left[1 + \frac{c^2}{r^2} \right]; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}^{II} = \frac{P_k b^2}{c^2 - b^2} \frac{3K^{II} - 2G^{II}}{3K^{II} + G^{II}}; \quad u^{II} = \frac{P_k b^2}{2(c^2 - b^2)} \left[\frac{3}{3K^{II} + G^{II}} r + \frac{1}{G^{II}} \frac{c^2}{r} \right].$$

Учет сдвиговой вязкости наружного цилиндра по принципу Вольтерра при $P_a = \text{const}$ требует замены P_a на P_a/p , K^{II} на K_0 , а G^{II} на $G_0[1 - \tilde{R}(p)]$. Для модели стандартного вязкоупругого тела [3] с ядром релаксации

$$R(t) = \frac{1 - \beta}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (8)$$

где $\beta = G_\infty / G_0 < 1$; G_∞ – длительный модуль сдвига; τ – время релаксации, в формулах вида (7) относительно изображений на месте G^{II} окажется величина $G_0 \frac{p + \beta/\tau}{p + 1/\tau}$. Дальнейшие преобразования приводят к довольно громозд-

ким выражениям, поэтому вводятся промежуточные обозначения. В частности, при отсутствии радиального натяга изображение контактного давления определяется формулой

$$\tilde{P}_k = \frac{A(p + \beta/\tau)(p + \kappa/\tau)}{p[B(p + 1/\tau)^2 + D(p + 1/\tau)(p + \beta/\tau) + H(p + \beta/\tau)(p + \kappa/\tau)]}, \quad (9)$$

где $A = \frac{P_a a^2 (4G^I + 3K^I) G_0 (G_0 + 3K_0)}{(b^2 - a^2) G^I (G^I + 3K^I)}$; $B = \frac{3c^2 K_0}{c^2 - b^2}$; $D = \frac{(3b^2 + c^2) G_0}{c^2 - b^2}$;

$$H = \frac{G_0 (G_0 + 3K_0)}{b^2 - a^2} \left(\frac{3b^2}{G^I + 3K^I} + \frac{a^2}{G^I} \right); \quad \kappa = \frac{G_0 \beta + 3K_0}{G_0 + 3K_0}.$$

Контактное давление, найденное путем обращения (9), имеет вид

$$P_k(t) = \frac{A}{B+D+H} \left\{ \frac{\beta\kappa}{\mu} + \frac{1}{\rho-\chi} \left[\left(\beta + \kappa - \chi - \rho \frac{\beta\kappa}{\mu} \right) \exp\left(-\chi \frac{t}{\tau}\right) + \left(\rho - \beta - \kappa + \chi \frac{\beta\kappa}{\mu} \right) \exp\left(-\rho \frac{t}{\tau}\right) \right] \right\}, \quad (10)$$

где $\chi = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu}$; $\rho = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu}$; $\lambda = \frac{2B + (1 + \beta)D + (\beta + \kappa)H}{2(B + D + H)}$;

$$\mu = \frac{B + \beta D + \beta\kappa H}{B + D + H}.$$

Большинство величин в формулах (6) и (7) по характеру зависимости от времени повторяют контактное давление. Осевое напряжение и радиальное перемещение в бандаже помимо P_k зависят также непосредственно от свойств вязкоупругого материала. Поэтому для отыскания этих величин в виде функций времени применяется описанный выше подход, основанный на принципе соответствия. В результате получены выражения

$$\sigma_{zz}''(t) = M \left(2K_0 - \frac{4}{3}G_0 \right) \left[\frac{\varphi\beta}{\mu} + \frac{(\beta-\chi)(\chi-\varphi)}{\chi(\rho-\chi)} \exp\left(-\chi \frac{t}{\tau}\right) + \frac{(\rho-\beta)(\rho-\varphi)}{\rho(\rho-\chi)} \exp\left(-\rho \frac{t}{\tau}\right) \right]; \quad (11)$$

$$u''(t) = \frac{1}{\mu} \left(M\beta r + N \frac{\kappa}{r} \right) + \frac{\chi-1}{\chi(\rho-\chi)} \left[M(\beta-\chi)r + N \frac{\kappa-\chi}{r} \right] \exp\left(-\chi \frac{t}{\tau}\right) + \frac{\rho-1}{\rho(\rho-\chi)} \left[M(\rho-\beta)r + N \frac{\rho-\kappa}{r} \right] \exp\left(-\rho \frac{t}{\tau}\right), \quad (12)$$

где $\varphi = \frac{3K_0 - 2\beta G_0}{3K_0 - 2G_0}$; $M = \frac{3Ab^2}{2(B + D + H)(c^2 - b^2)(G_0 + 3K_0)}$;

$$N = \frac{3Ab^2 c^2}{2(B + D + H)(c^2 - b^2)G_0}.$$

Наглядное представление о характере полученных зависимостей могут дать представленные ниже диаграммы, построенные при следующих исходных данных: размеры объекта $a = 0,485$ м, $b = 0,510$ м, $c = 0,560$ м; давление в трубе $P_a = 7$ МПа; упругие свойства трубы $E^I = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu^I = 0,3$; характеристики вязкоупругого бандажа $E_0 = 3,4 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_0 = 0,35$; $\beta = 0,65$; $\tau = 2400$ с. Рис. 1 иллюстрирует процесс релаксации контактного давления. На рис. 2-4 показаны напряжения и перемещения в трубе и бандаже в зависимости от радиальной координаты и времени.

При анализе вязкоупругого деформирования изотропного цилиндра изображения компонент НДС получаются в виде дробно-рациональных функций переменной p , что позволяет находить оригиналы в замкнутой форме. Для композита на полимерной основе учет ортотропии свойств при-

водит к трансцендентным зависимостям от p в изображениях, что требует применения специальных приемов для поиска решения.

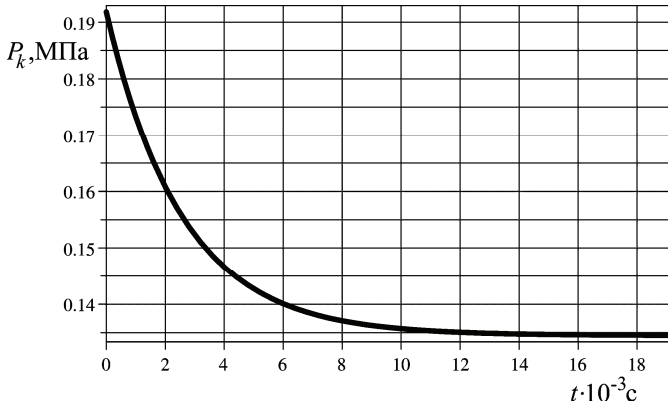


Рисунок 1 – Изменение во времени контактного давления

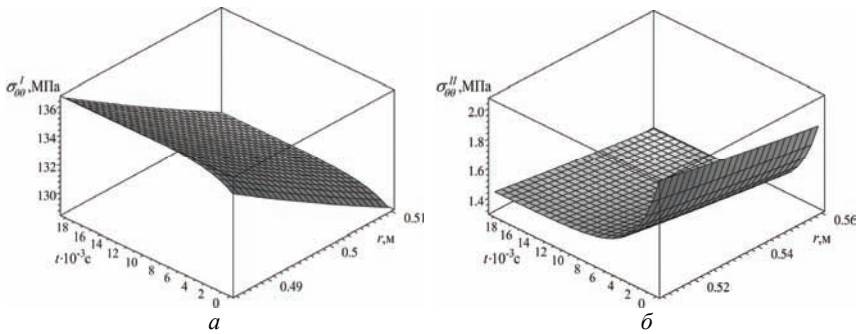


Рисунок 2 – Окружные напряжения: a – в трубе, b – в бандаже

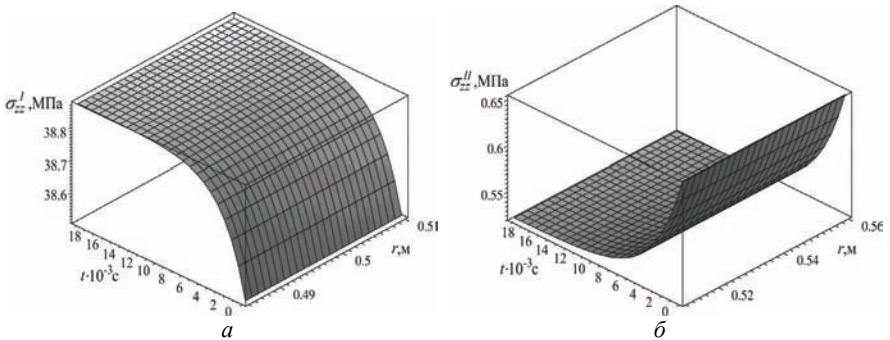


Рисунок 3 – Осевые напряжения: a – в трубе, b – в бандаже

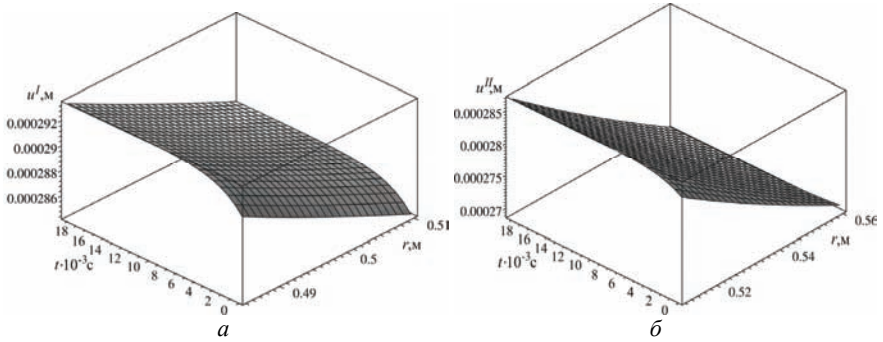


Рисунок 4 – Радиальні переміщення: *a* – в трубі, *б* – в бандажі

Список літератури: 1. *Малинин Н.Н.* Прикладна теорія пластичності і ползучесті. – М.: Машиностроєння, 1975. – 400 с. 2. *Москвитин В.В.* Спротивлення в'язко-упругих матеріалів. – М.: Наука, 1972. – 328 с.

Поступила в редколлегию 05.07.2013

УДК 539.3

Исследование вязкоупругого деформирования составного цилиндра / Г.И.Львов, В.Г.Сукиасов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 119-124. – Бібліогр.: 2 назв.

На основі принципу Вольтерра вирішена плоска задача для двошарового циліндра з в'язкопружним шаром. Шукані величини у вигляді функцій часу знайдені за допомогою одностороннього інтегрального перетворення Лапласа.

Ключові слова: плоска задача, в'язкопружність, перетворення Лапласа.

On the basis of Volterra principle a planar problem for a two-layer cylinder with a viscoelastic layer was solved. Unknown quantities as functions of time were found using one-way integral Laplace transform.

Keywords: plane problem, viscoelasticity, Laplace transform.

Г. Ю. МАРТЫНЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИНАМИКИ МОДЕЛЬНОГО РОТОРА В КОМБИНИРОВАННОМ МАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

Описаны экспериментальные исследования по изучению динамики модельного ротора в комбинированном пассивно-активном магнитном подвесе. Исследования выполнены с использованием специализированного программно-аппаратного комплекса. Результаты представлены в виде амплитудно-частотных характеристик. На основании анализа экспериментальных данных предложена модифицированная конструкция ротора, позволявшая снизить амплитуды колебаний при значениях скоростей вращения близких к критическим.

Ключевые слова: динамика ротора, магнитные подшипники, критические скорости.

Введение. Использование магнитных подшипников для опирания вращающихся роторов в современном приборостроении, энергетическом и транспортном машиностроении, которое в настоящее время находит все большее применение, нуждается в развитии экспериментальных методов исследования динамического поведения таких систем. Это необходимо для обоснования достоверности расчетных результатов и подтверждения корректности применяемых на практике технических решений. Малое трение в магнитном подвесе позволяет реализовывать в таких роторных машинах, например, как детандеры, ультрацентрифуги и турбокомпрессоры, скорости вращения роторов, ограничиваемые только прочностью материалов. Особой экономичностью, эффективностью и малой стоимостью отличаются комбинированные магнитные подвесы, в которых совместно с управляемыми активными магнитными подшипниками (АМП) используются подшипники на постоянных магнитах (МПМ) [1].

Обеспечение правильной работы роторных систем с магнитными подшипниками невозможно без принятия в расчет большого числа различных факторов, касающихся особенностей конкретного ротора, включая его динамические характеристики [2]. Решение вопроса об устойчивости движения высокооборотного левитирующего ротора невозможно без наличия данных по оценке дестабилизирующего воздействия на него как традиционных эксплуатационных нагрузок, так и специфических, например, магнитного трения, вызываемого вихревыми токами, а также данных по конфигурации магнитного поля в рабочем зазоре, обуславливающей силовые характеристики магнитных опор и величину виброперемещений ротора.

В связи с этим работы по экспериментальному изучению и оценке динамического поведения роторов на магнитных подшипниках, позволяющие

© Г. Ю. Мартыненко, 2013

выявить специфические особенности их поведения, а также присущие только таким системам явления являются актуальными.

1 Объект и цели исследований. Целью данной работы является экспериментальное изучение динамического поведения вращающегося ротора в магнитных подшипниках различных типов и выявление особенностей, вносимых в роторные системы магнитными подшипниками. Для достижения поставленных целей была использована лабораторная установка, представленная на рис. 1 [2]. В ней реализован комбинированный магнитный подвес ротора, который состоит из двух радиальных магнитных подшипников на постоянных магнитах и одного осевого активного магнитного подшипника двухстороннего действия. Кольца МППМ имеют осевую намагниченность и обеспечивают самоцентрирование в радиальном направлении.

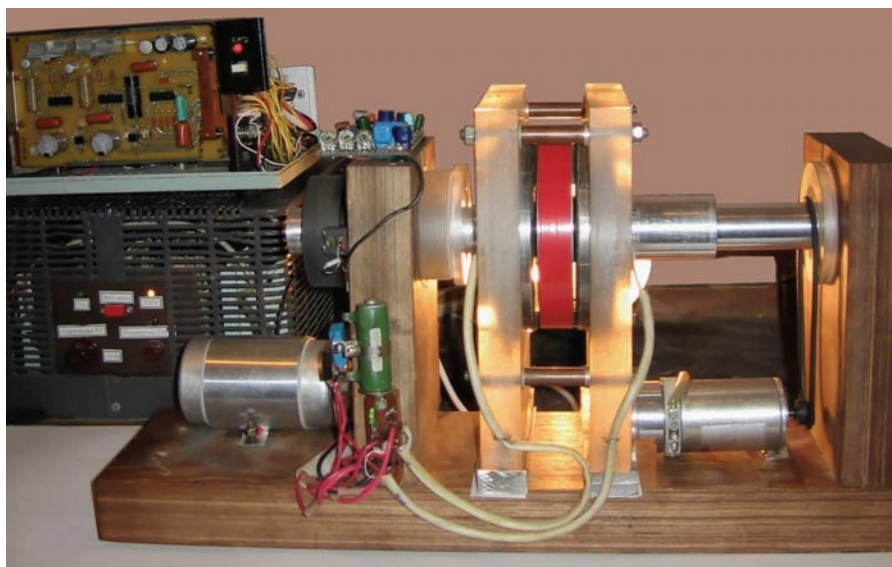


Рисунок 1 – Лабораторная установка ротора в комбинированном магнитном подвесе

2 Системы управления АМП, регистрации, обработки и анализа экспериментальных данных. В осевом направлении устойчивость ротора лабораторной установки обеспечивает АМП, а изменение управляющих напряжений, подаваемых на обмотки, производится системой управления в зависимости от положения ротора, как показано на рис. 2 [2]. При этом токи создают необходимое для стабилизации значение магнитной силы. Лабораторная установка оснащена аналоговыми магнитными сенсорами на эффекте Холла для контроля положения ротора и дискретным датчиком Холла для измерения его частоты вращения. Разгон ротора осуществлялся электродвигателем с изменением частоты вращения в диапазоне от 0 до 3000 об/мин.

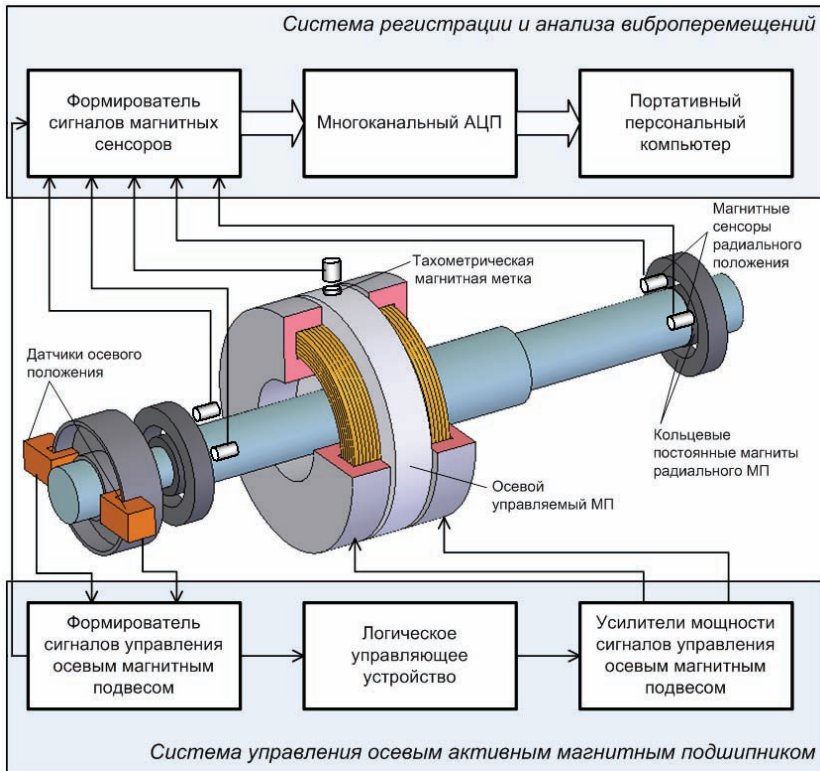


Рисунок 2 – Структурная схема системы регистрации и анализа виброперемещений ротора лабораторной установки [2]

Для сбора и обработки данных был использован разработанный программно-аппаратный измерительный комплекс [2], который позволяет выполнять построение осциллограмм сигналов, их спектрограмм, траекторий движения отдельных точек и амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) вращающегося ротора в магнитных подшипниках, а также других динамических характеристик системы.

Определение отклонения точек ротора в магнитных подшипниках на постоянных магнитах основано на измерении величины напряженности магнитного поля в зазоре этого подшипника с помощью датчика Холла в микросхемном исполнении с элементами усиления и стабилизации. Для измерения частоты вращения ротора в системе используется датчик Холла (магнитоуправляемая микросхема, работающая в ключевом режиме), который выдает импульсы напряжения с частотой, пропорциональной скорости вращения ротора. Управляющим элементом является миниатюрный постоянный магнит, закрепленный на роторе (магнитная метка на диске осевого АМП).

Для регистрации данных о виброперемещениях набора точек ротора и их специального анализа с целью определения динамических параметров системы в программно-аппаратном измерительном комплексе использован набор стандартных и специальных процедур и функций, объединенных в единое программное обеспечение [2].

3. Параметры лабораторной установки, постановка и проведение экспериментальных исследований. Первоначальные исследования проводились на лабораторной установке, изображенной на рис. 1, полная геометрическая модель которой приведена на рис. 3.

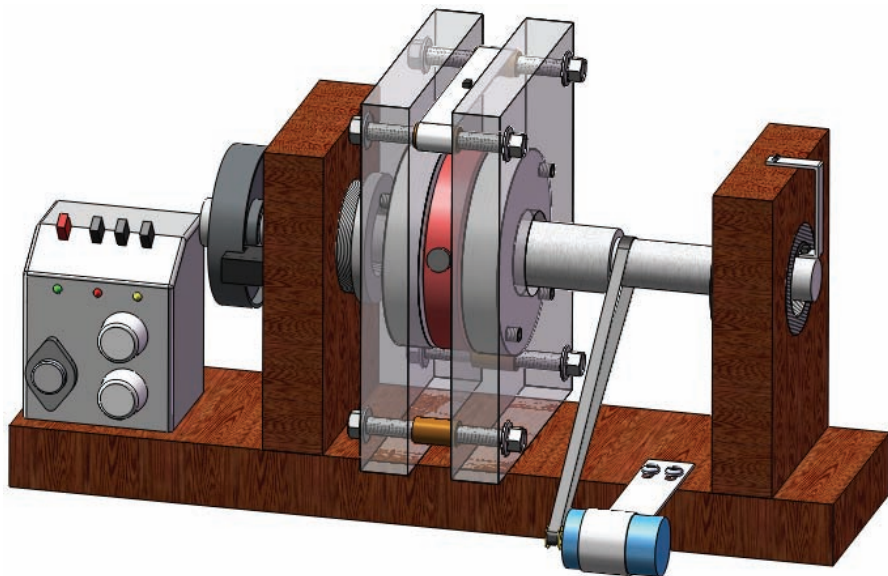


Рисунок 3 – Полная геометрическая модель лабораторной установки ротора в МП

Данная лабораторная модель включает основание с четырьмя стойками для крепления неподвижных колец радиальных МППМ и статоров осевого АМП, а также сам ротор из дюралюминия, на котором размещены диск осевого АМП из ферромагнитного материала, кольцевые постоянные магниты радиальных МППМ и диск системы регистрации (измерения). На основании размещен блок управления осевым АМП и электродвигатель, а на стойках радиальных МППМ – оптические датчики системы измерения положения ротора. Статоры осевого АМП выполнены из стали, каждый с двумя полюсами – внутренним и внешним. Между полюсами статоров АМП в цилиндрических пазах размещены обмотки управления. В центральном положении ротора центры масс подвижных и неподвижных кольцевых магнитов совпадают, а диск находится посередине между статоров.

Геометрическая модель ротора, находящегося в магнитных подшипниках, с указанием местоположения светодатчиков осевого положения, приведена на рис. 4.

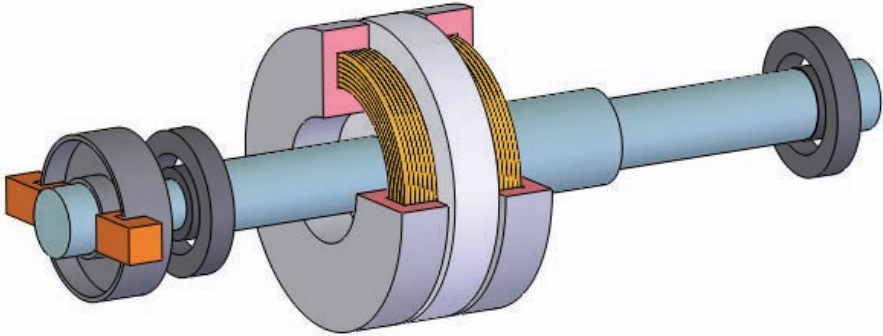


Рисунок 4 – Модель ротора в радиальных МППМ и осевом АМП со светодатчиками осевого положения

Подробное описание проведенных на этой модели экспериментальных исследований, выполненных для идентификации математической модели жесткого ротора, приведено в [4]. Следует отметить, что первоначальные измерения проводились только одним датчиком, регистрирующим вертикальные отклонения центра правого опорного участка (см. рис. 3) с использованием универсальной платы сбора аналоговой и ввода/вывода цифровой информации АЦП ЛА-1.5РСІ, установленной в ПЭВМ [4]. При проведении экспериментов осциллограммы движения правой опорной участка ротора в вертикальном направлении фиксировались дискретно для выбранных значений скорости вращения ротора в диапазоне от 0 до 3000 об/мин. При проведении экспериментов было выявлено, что прохождение третьего резонансного режима отличалось неустойчивостью, амплитуды колебаний достигали величины зазоров, и дальнейший разгон ротора был возможен только при внесении дополнительного механического демпфирования в диапазоне ~1750-1950 об/мин (~29-32,5 Гц). Амплитудно-частотная характеристика, полученная путем построения зависимости амплитуды первой (основной) гармоники радиального виброперемещения центра правого опорного участка (y_2) от частоты вращения, представлена на рис. 5.

Такая же неустойчивость движения была обнаружена и при проведении второй серии экспериментальных исследований на этой лабораторной модели, в которых уже использовалась аппаратура и программное обеспечение, описанное в п. 2. Здесь контролировались все пять степеней свободы ротора в МП – горизонтальные и вертикальные смещения центров радиальных опорных участков (левого x_1 , y_1 и правого x_2 , y_2) и осевое смещение. Амплитудно-частотная характеристика системы представлена на рис. 6. На ней область неустойчивых движе-

ний в диапазоне $\sim 1850\text{--}2280$ об/мин ($\sim 31\text{--}38$ Гц), в которой амплитуды колебаний без внесения дополнительного механического демпфирования превышали радиальный зазор МППМ, отмечена штриховыми линиями.

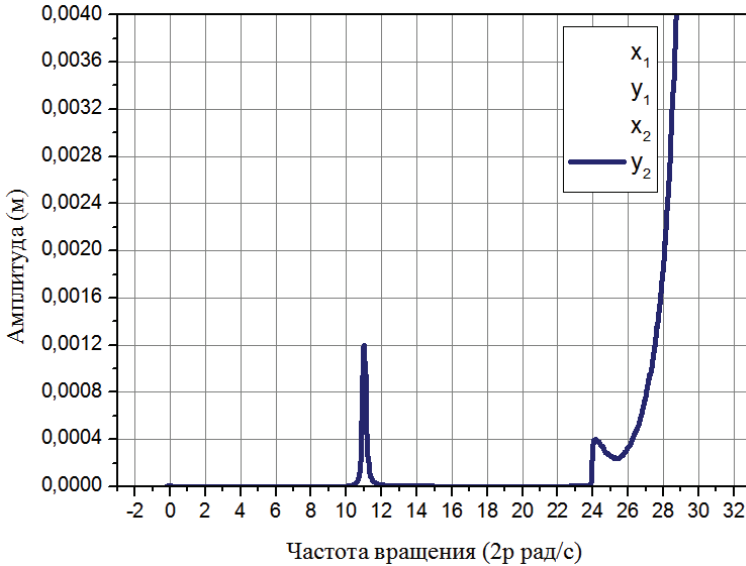


Рисунок 5 – Амплитудно-частотная характеристика ротора лабораторной установки с комбинированным магнитным подвесом (первый эксперимент)

Таким образом, был сделан вывод, что изменением параметров управления осевым активным магнитным подшипником, невозможно достичь снижения амплитуд колебаний в резонансном режиме, когда ротор совершает движение типа прямой конической прецессии. Статическое уравнивание с помощью балансира, в качестве которого использовалась магнитная метка, также не дало результата, так как при таких колебаниях основной вклад в дестабилизирующие силы вносит моментная неуровненность.

Кроме того, в ходе проведения экспериментов было установлено, что моментная неуровненность может возникать и от взаимодействия магнитных полей, создаваемых магнитной меткой, расположенной на диске АМП (см. рис. 3), и переменных магнитных полей, создаваемых электромагнитами этого АМП. Причем обнаружено, что в этом случае большее влияние оказывает не величина намагниченности, а взаимная полярность магнитов, зависящая от стороны магнитной метки, которой она крепится к диску. Кроме того, изменение электромагнитных полей в процессе работы системы управления делает эту электромагнитную неуровненность переменной, что приводит к возникновению дестабилизирующих усилий, частота изменения которых совпадает с частотой вращения.

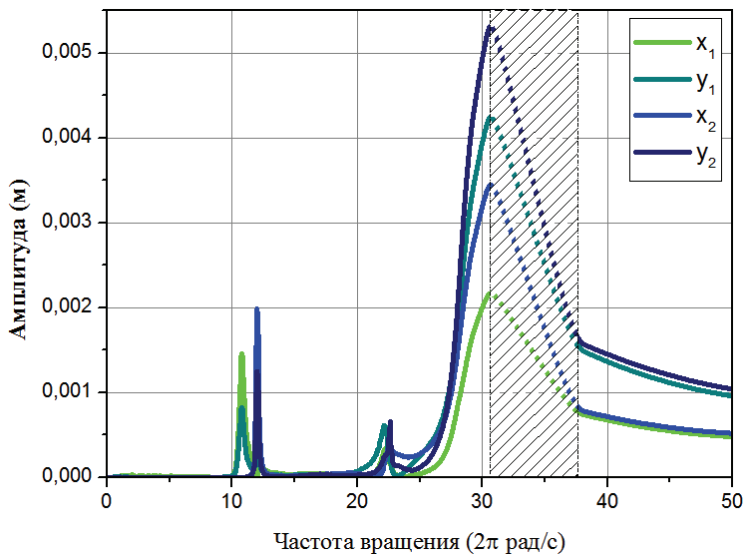


Рисунок 6 – Амплитудно-частотная характеристика ротора лабораторной установки с комбинированным магнитным подвесом (второй эксперимент)

Было также определено, что еще одной причиной неустойчивости движения является значительное удаление точки измерения осевого отклонения и точки стабилизации (расположения электромагнитов осевого АМП).

Учитывая вышесказанное, было принято решение модифицировать лабораторную установку. При этом были внесены следующие изменения: перенесена точка измерения осевых смещений ротора за счет расположения светодиодчиков в непосредственной близости от точки управления (электромагнитов осевого АМП), укорочен ротор, а вместо пластмассового диска системы измерений применен диск, изготовленный из латуни.

Такой подход кроме устранения указанных недостатков позволил еще и приблизить центр масс ротора к среднему положению между радиальными МППМ, что также положительно сказывается на устойчивости движения ротора вследствие обеспечения горизонтальности его оси в положении статического равновесия.

Полная геометрическая модель модифицированной лабораторной установки и модель ротора с навесными элементами в магнитных подшипниках, приведены на рис. 7 и 8 соответственно.

Амплитудно-частотная характеристика, полученная при проведении экспериментальных исследований для этой модели лабораторной установки, представлена на рис. 9. Следует отметить, что такой подход позволил снизить амплитуды колебаний ротора в резонансных областях (отмечены штриховыми линиями) до величин, не превышающих радиальные зазоры МППМ,

что дало возможность выполнить разгон и остановку ротора без внесения дополнительного механического демпфирования.

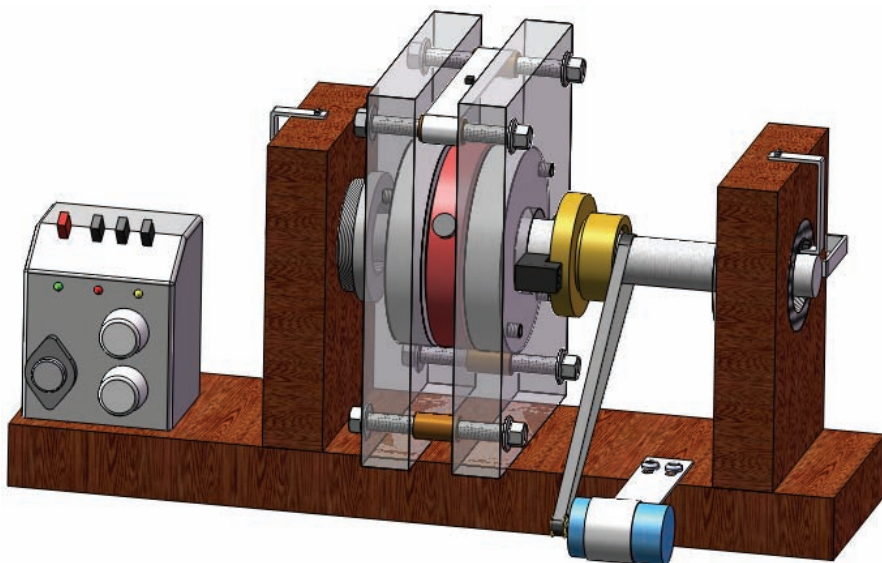


Рисунок 7 – Геометрическая модель модифицированной лабораторной установки

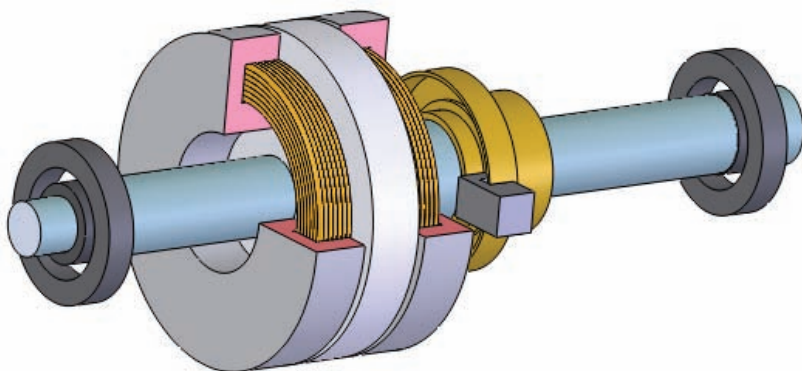


Рисунок 8 – Модель модифицированного ротора в радиальных МППМ и осевом АМП со светодатчиками осевого положения

Таким образом показано, что дальнейшее проведение экспериментальных исследований с целью выявления особенностей динамического поведения роторов в МП могут проводиться путем сбора и обработки данных, построения осциллограмм сигналов, их спектрограмм, траекторий движения отдельных точек и АЧХ с использованием именно этой модели.

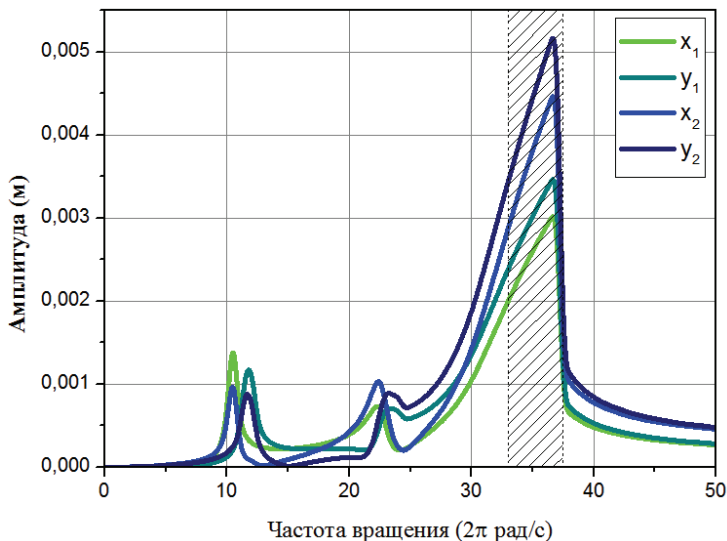


Рисунок 9 – Амплитудно-частотная характеристика ротора модифицированной лабораторной установки с комбинированным магнитным подвесом

Для обеспечения возможности идентификации математических моделей (путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных) в процессе проведения исследований по измеренным геометрическим параметрам роторов обеих конструкций, представленных на рис. 10, выполнено расчетное определение геометрических и физических параметров лабораторных установок, результаты которых сведены в таблицу.

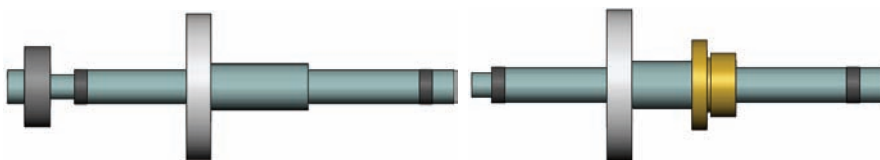


Рисунок 10 – Модели роторов с навесными элементами (для расчета геометрических и физических параметров)

При этом для магнитных сил принята нелинейная аппроксимация экспериментальных и расчетных данных, выполненная методом наименьших квадратов кубическими полиномами вида [5]:

$$\begin{aligned}
 F_{M\rho}(\rho) &= k_{\rho 2}\rho^3 + k_{\rho 1}\rho^2 + k_{\rho 0}\rho + f_{\rho 0}; \\
 F_{Mz}(z) &= k_{z 4}z^5 + k_{z 3}z^4 + k_{z 2}z^3 + k_{z 1}z^2 + k_{z 0}z + f_{z 0}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Таблица – Параметры лабораторных установок ротора в МП

Параметр	Значение параметра	
	модель 1	модель 2
<i>Физические параметры</i>		
Масса ротора m , [кг]	2,496	2,690
Экваториальный момент инерции J_1 , [кг·м ²]	0,0107386	0,0099722
Полярный момент инерции J_3 , [кг·м ²]	0,0033177	0,0034713
<i>Геометрические параметры</i>		
Расстояние от левого МППМ до ц.т. l_1 , [м]	0,107	0,118
Расстояние от правого МППМ до ц.т. l_2 , [м]	0,177	0,166
Линейный эксцентриситет e_2 , [м]	0,00006	0,00006
Угловой эксцентриситет γ_1 , [рад]	0,003	0,003
<i>Параметры магнитных подшипников</i>		
Зазор в радиальном МППМ δ_{rv} , [м]	0,0055	0,0055
Зазор в осевом АМП δ_{zs} , [м]	0,003	0,003
Коэффициент магнитной силы k_{p2} [Н/м ³]	$-0,11488 \times 10^9$	$-0,11488 \times 10^9$
Коэффициент магнитной силы k_{p1} [Н/м ²]	$-0,13321 \times 10^{-3}$	$-0,13321 \times 10^{-3}$
Коэффициент магнитной силы k_{p0} [Н/м]	$-0,59298 \times 10^4$	$-0,59298 \times 10^4$
Магнитная сила при $\rho = 0$ f_{p0} [Н]	0	0
Коэффициент магнитной силы k_{z5} [Н/м ⁵]	$-0,1728 \times 10^{15}$	$-0,1728 \times 10^{15}$
Коэффициент магнитной силы k_{z4} [Н/м ⁴]	$0,67752 \times 10^3$	$0,67752 \times 10^3$
Коэффициент магнитной силы k_{z3} [Н/м ³]	$0,48766 \times 10^9$	$0,48766 \times 10^9$
Коэффициент магнитной силы k_{z2} [Н/м ²]	$-0,52963 \times 10^{-2}$	$-0,52963 \times 10^{-2}$
Коэффициент магнитной силы k_{z1} [Н/м]	$-0,83604 \times 10^4$	$-0,83604 \times 10^4$
Магнитная сила при $z = 0$ f_{z0} [Н]	0	0

Корректность расчетных параметров лабораторной установки, необходимых для аналитических математических моделей, описанных, например, в [6], подтверждена сопоставлением со значениями, полученными в результате замеров. Так, например, массы роторов исходной и модифицированной конструкций, найденные в результате взвешивания, равны 2,5 и 2,7 кг соответственно, а расстояния от центра масс до центров левого и правого опорных участков 110 мм и 180 мм для исходной конструкции и 120 мм и 170 мм для модифицированной.

Таким образом, расхождение результатов не превышает 0,5%, что позволяет сделать вывод о возможности использования полученных параметров в математических моделях без внесения существенных погрешностей в результаты расчетов, связанных с некорректным заданием исходных данных.

Заключение. В ходе проведения предварительных экспериментальных исследований на лабораторной установке, реализующей комбинированный пассивно-активный магнитный подвес ротора было обнаружено, что причинами неустойчивости движения вращающегося ротора могут быть как конструкционные несовершенства (недопустимая величина статической и момент-

ной неуравновешенностей, отдаленность точки измерения и управления осевого АМП), так и специфичные факторы, свойственные только таким системам, например, электромагнитная неуравновешенность, связанная с неоднородностью в окружном направлении магнитного поля, создаваемого осевым АМП. Для устранения перечисленных недостатков конструкция лабораторной установки была модифицирована с целью дальнейшего проведения экспериментальных исследований по выявлению особенностей роторной динамики, связанных с применением магнитных подшипников.

Список литературы: 1. *Мартыненко Г.Ю.* Магнитные подшипники как упруго-демпферные опоры роторов с управляемой жесткостью / *Г.Ю. Мартыненко* // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2008. – № 47. – С. 111-124. 2. *Мартыненко Г.Ю.* Программно-аппаратный комплекс для анализа виброперемещений роторов на магнитных подшипниках / *Г.Ю. Мартыненко, Ю.Н. Ульянов, А.Н. Пригорнев* // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2012. – Вип. 7 (105). – С. 109-116. 4. *Мартыненко Г.* Ідентифікація математичної моделі жорсткого ротора в пасивно-активному магнітному підвісі на підставі експериментальних даних / *Г. Мартыненко* // Машинознавство. – Львів: Кінпатрі Лтд, 2009. – № 11 (149). – С. 9-14. 5. *Мартыненко Г.Ю.* Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах / *Г.Ю. Мартыненко* // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2007. – № 38. – С. 83-95. 6. *Мартыненко Г.Ю.* Обобщенный подход к моделированию нелинейной динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов / *Г.Ю. Мартыненко* // Доповіді Національної академії наук України. – К.: Доповіді НАН України, 2012. – № 3. – С. 78–84.

Поступила в редколлегию 14.10.2013

УДК 621.375

Методика экспериментальных исследований динамики модельного ротора в комбинированном магнитном подвесе / Г. Ю. Мартыненко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 99-99. – Бібліогр.: 6 назв.

Описано експериментальні дослідження з вивчення динаміки модельного ротора в комбінованому пасивно-активному магнітному підвісі. Дослідження виконано з використанням спеціалізованого програмно-апаратного комплексу. Результати представлено у вигляді амплітудно-частотних характеристик. На підставі аналізу експериментальних даних запропонована модифікована конструкція ротора, що дозволила знизити амплітуди коливань при значеннях швидкостей обертання близьких до критичних.

Ключові слова: динаміка ротора, магнітні підшипники, критичні швидкості.

The experimental investigations of the rotor dynamics of the model with the combined passive and active magnetic suspension are described. The studies are performed using specialized hardware and software. Results are presented as amplitude-frequency characteristics. Based on the analysis of experimental data the rotor modified construction is offered. It is possible to reduce oscillation amplitude values when rotational speeds are near-critical.

Keywords: rotor dynamics, magnetic bearings, critical speed.

В. Л. МИСАЙЛОВ, канд. техн. наук, старш. научн. сотр., Харьковский университет воздушных сил;

Ю. Н. УЛЬЯНОВ, канд. техн. наук, старш. научн. сотр., НТУ «ХПИ»

ВОЗМОЖНОСТИ ПОВЫШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ ВЕТРА В ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ ВЕТРОКОЛЕСА

Показана возможность увеличения количества энергии, отбираемой ветроэнергетической установкой с горизонтальной осью вращения от набегающего ветрового потока за счет учета заблаговременно получаемой информации о параметрах поля скорости ветра. Обоснованы требования к дистанционному измерителю скорости ветра для ветроэнергетической установки с горизонтальной осью вращения.

Ключевые слова: ветроэнергетическая установка, поле скорости ветра, турбулентность.

Введение. В настоящее время в ветроэнергетике наибольшее распространение получили ветроэнергетические установки (ВЭУ) с горизонтальной осью вращения (рис. 1).



Рисунок 1 – Ветрогенератор ВЭУ-20М

В таких ВЭУ часть энергии поступательного движения ветрового потока с помощью ветроколеса (ВК) превращается в механическую энергию вращающегося вала электрогенератора и далее – в электрическую энергию. Эффективность работы ВЭУ в значительной мере определяется нестационарностью поля ветра, выражающейся в его порывистости, наличии вертикальных и горизонтальных сдвигов скорости и направления ветра. Так как скорость ветра может изменяться в широких пределах, то для отбора большего количества энергии от ветрового потока и исключения аварий в условиях

шторма используются системы регулирования положения лопастей ВК «под ветер».

На рис. 2 показаны для ветрогенераторов фирмы ENERCON типа E82 и E53 зависимости развиваемой электрической мощности от скорости ветра [6].

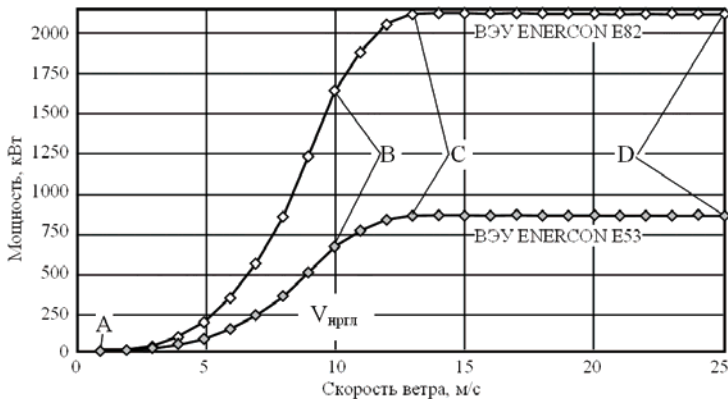


Рисунок 2 – Зависимости мощности, развиваемой ВЭУ фирмы ENERCON типов E82 и E53 от скорости ветра

Точки А соответствуют скорости ветра V_{in} , при которой ветроколесо начинает вращаться. На участках АВ для подстройки под ветер производится доворот ветроколеса против ветра, а мощность ВЭУ здесь пропорциональна кубу скорости. Точки В соответствуют скорости ветра $V_{иртг}$, при которой начинается регулирование положения лопастей ветроколеса. На участках CD система управления (СУ) ВЭУ изменяет положение лопастей ВК (их угол атаки) таким образом, чтобы обеспечить постоянство мощности на валу электрогенератора вплоть до достижения максимальной рабочей скорости ветра $V_{отс}$, выше которой происходит аварийное отключение ВЭУ [8]. Структурная схема такой СУ ВЭУ показана на рис. 3.

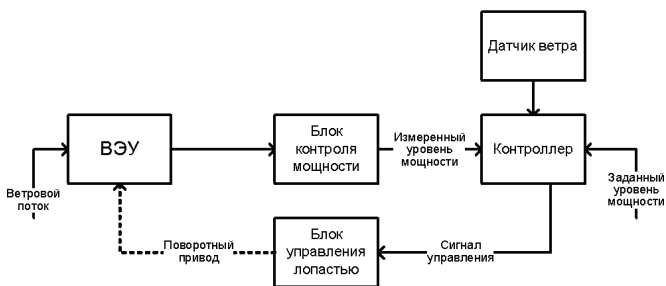


Рисунок 3 – Структурная схема системы управления ветроколесом ВЭУ

Информация о скорости ветра V от контактного датчика поступает в контроллер СУ, где с учетом заданного режима работы ВЭУ, вырабатываются сигналы на поворот лопастей ВК.

Для эффективного управления ВК необходимо знать характеристики набегающего ветрового потока (то есть получать заблаговременную инфор-

мацию о поле ветра), однако получение таких данных является довольно сложной задачей, которая до сих пор на всю глубину не решена.

Анализ литературы. В настоящее время информацию о скорости и направлении ветра обычно получают от метеодатчиков контактного типа, установленных на гондole ВЭУ или на отдельно стоящей метеомачте.

В первом варианте, как правило, используются анеморумбометры, располагаемые за ветроколесом в хвостовой части гондолы ВЭУ (рис. 1). Метеодатчики регистрируют параметры ветрового потока, который уже прошел через ВК, что приводит к запаздыванию информации. К тому же, вращающееся ветроколесо нарушает структуру ветрового потока, что вносит дополнительную погрешность в результат измерения характеристик ветрового потока [7].

Во втором варианте возникает проблема пространственной и временной репрезентативности полученных данных, так как датчики ветра измеряют параметры ветрового потока в точке своего размещения, на метеомачте находящейся на некотором удалении от ВЭУ, при высоте мачты, как правило, меньшей высоты башни ветрогенератора.

В отдельных случаях, для измерения ветра используют дистанционные неконтактные средства зондирования атмосферы, такие как акустические и лазерные локаторы (сонары и лидары). Недостатком сонаров является их слабая помехозащищенность по отношению к окружающим акустическим шумам, создаваемым работающими ВЭУ. По этой причине сонар приходится относить от ВЭУ, что приводит к снижению репрезентативности получаемых данных. Недостатком лидаров является их высокая стоимость (более 100 000 €), вследствие чего эти приборы используются для обслуживания групп ВЭУ. Увеличение объема пространства, обслуживаемого лидаром, повышает требования к его техническим характеристикам (а соответственно возрастает цена) и может снижать надежность получения метеоданных (поглощение оптического излучения в тумане, осадках и т.п.).

В настоящее время для адаптации ВЭУ к вариациям поля ветра, кроме прямых метеоданных, используют модельные представления ветрового потока. Наиболее полно, в пригодном для практического применения виде, эти модели представлены в международном стандарте IEC 61400 Wind turbines Part 1: Design requirements (МЭК 61400 Установки электрические ветровые Часть 1: Требования к конструкции) [2].

Для технико-экономической оценки ветровых ресурсов в конкретной местности выделяют ветровые зоны (wind zone). Классификация ветровых зон (ВЗ) выполнена по средней годовой скорости ветра V_{ave} . Существующая классификация ВЗ показана в табл. 1 [1].

В свою очередь по экстремальным значениям скорости ветра V_{ref} и интенсивности турбулентности I_{15} их делят на классы и подклассы. Такая классификация показана в табл. 2 и 3.

Таблица 1 – Ветровые зоны

Зона	Среднегодовая скорость ветра V_{ave} на высоте, м/с		Энергетический потенциал на высоте, Вт/м ²	
	10 м	50 м	10 м	50 м
I	0 – 4,4	0-5,6	<100	<200
II	4,4 – 5,1	5,6-6,4	100-150	200-300
III	5,1 – 5,6	6,4 - 7,0	150-200	300-400
IV	5,6 – 6,0	7,0 - 7,5	200-250	400-500
V	6,0 – 6,4	7,5 - 8,0	250-300	500-600
VI	6,4 – 7,0	8,0 - 8,8	300-400	600-800
VII	>7,0	>8,8	>400	>800

Таблица 2 – Классы ветра

Класс	Базовая скорость ветра V_{ref} , м/с
I	50
II	42,5
III	37,5

Таблица 3 – Подклассы ветра

Подкласс	Интенсивность турбулентности I_{15} , %
A	16
B	14
C	12

Как видно из табл. 3 текущее значение скорости ветра может отличаться от среднего (по которому устанавливается положение лопастей ветроколеса) на величину более 12-16 %, что приводит к неправильной (неоптимальной) установке лопасти по отношению к ветру. В свою очередь, при усилении ветра это приводит к дополнительным нагрузкам на лопасти, ветроколесо в целом, вал ВЭУ и т.д. При спадении ветра неоптимальная установка лопастей ВК приводит к уменьшению мощности на валу ВК, изменению частоты вращения ВК, уменьшению мощности ВЭУ. Таким образом, изменение скорости ветра и неоптимальная подстройка под него приводит к ухудшению качества и уменьшению количества вырабатываемой электроэнергии.

Цель статьи. Целью статьи является анализ путей повышения коэффициента использования энергии ветра в ветроэнергетических установках с горизонтальной осью вращения ветроколеса.

Потери мощности горизонтальных ВЭУ с регулируемым положением лопастей ветроколеса из-за турбулентности. Оценим потери мощности ВЭУ с регулируемым положением лопастей ветроколеса за счет турбулентности.

В качестве примера возьмем ВЭУ фирмы ENERCON E82 мощностью 2 МВт. Технические характеристики этой ВЭУ приведены в табл. 4 [6].

Таблица 4 – Технические характеристики ENERCON E82 E2

Проектная мощность, кВт	2000
Ветровая зона	III
Класс ветра	II A
Диаметр ветроколеса D_{BK} , м	82
Площадь обметания, m^2	5281
Высота ВЭУ, м	78-138
Минимальная рабочая скорость ветра V_{in} , м/с	2
Максимальная рабочая скорость ветра V_{out} , м/с	28-34

Согласно данным, приведенным в таблице 4, ВЭУ ENERCON E82 E2 предназначена для работы при средней годовой скорости ветра $V_{ave} = 8,5$ м/с и отклонении скорости ветра от расчетной за счет турбулентности до 16% [2, 9]. СУ ВЭУ позволяет вырабатывать электроэнергию при скорости ветра 2–34 м/с.

Проектная мощность достигается при скорости ветра 13 м/с (см. рис.2), а регулируемый участок начинается со скорости 10 м/с (участок BC). Увеличение скорости ветра больше 13 м/с не приводит к увеличению мощности, отбираемой ВЭУ от ветрового потока (участок CD). Так происходит в квазистатическом режиме, когда время изменения средней скорости ветра $T_{изм}$ много больше времени реакции СУ ВЭУ τ_{pCU} . Для современных СУ ВЭУ τ_{pCU} находится в широком интервале от нескольких секунд до десятков минут и определяется временем цикла измерений метеодатчиков, интервалом вычисления средней скорости ветра, а также собственными частотами колебаний ВЭУ.

В реальных условиях ВК взаимодействует не со средним, а с мгновенным ветром $v_{мен}(t)$, значение которого может быстро меняться.

Для упрощенной оценки влияния ошибок установки угла атаки лопастей ветроколеса из-за инерционности СУ ВЭУ на количество вырабатываемой энергии представим мгновенное значение скорости ветра в виде суммы средней и турбулентной составляющих:

$$v_{мен}(t) = v_{cp}(t) + \Delta v_{турб}(t), \quad (1)$$

где $v_{cp}(t)$ – текущее значение средней скорости ветра; $\Delta v_{турб}(t)$ – отклонение скорости ветра от среднего значения за счет турбулентности.

Значение v_{cp} определяется крупномасштабными синоптическими процессами и зависит от времени, так как атмосфера – нестационарная среда, а осреднение выполняется за ограниченный отрезок времени $T_{оср}$:

$$v_{cp}(t) = \frac{1}{T_{оср}} \int_{t-T_{оср}}^t v_{мен}(t) dt. \quad (2)$$

В общем случае и $\Delta v_{турб}$ также зависит от времени, однако сейчас эту зависимость учитывать не будем и примем гипотезу о стационарности турбулентности с нулевым средним значением [5, 8]. По своей природе $\Delta v_{турб}$ является случайной величиной, текущее значение которой предсказать невоз-

можно и о котором можно говорить только в статистическом смысле.

ВЭУ преобразует энергию ветра в электрическую с некоторым коэффициентом преобразования $k_{ВЭУ}(v)$. Упрощенно предположим, что $k_{ВЭУ}(v)$ состоит из двух сомножителей:

$$k_{ВЭУ}(v) = k_{БК}(v) \cdot k_{огр}, \quad (3)$$

где $k_{БК}(v)$ – коэффициент преобразования энергии поступательного движения ветрового потока во вращательное движение ветроколеса. Его числовое значение определяется СУ; $k_{огр}$ – коэффициент, ограничивающий мощность ВЭУ на максимальном уровне.

Для упрощения записи опустим зависимость величин от времени, и тогда значение мощности на валу ВЭУ можно записать как:

$$P_{вал} = v_{мщ} k_{БК}(v). \quad (4)$$

Для ВЭУ ENERCON E82 E2 зависимость мощности и $k_{БК}(v)$ от скорости ветра представлена в табл. 5 и на рис. 5 [6].

Таблица 5 – Зависимость мощности ВЭУ и $k_{БК}(v)$ от скорости ветра для ENERCON E82 E2

Скорость ветра, м/с	Мощность, кВт	$k_{БК}(v)$, Вт·(м/с) ⁻¹
1	0,0	0
2	3,0	1,5
3	25,0	8,3
4	82,0	20,5
5	174,0	34,8
6	321,0	53,5
7	532,0	76,0
8	815,0	101,9
9	1180,0	131,1
10	1580,0	158,0
11	1810,0	164,5
12	1980,0	165,0
13	2050,0	157,7
14	2050,0	146,4
15	2050,0	136,7
16	2050,0	128,1
17	2050,0	120,6
18	2050,0	113,9
19	2050,0	107,9
20	2050,0	102,5
21	2050,0	97,6
22	2050,0	93,2
23	2050,0	89,1
24	2050,0	85,4
25	2050,0	82,0

Как видно из рис. 4 функция $k_{BK}(v)$ существенно нелинейная.

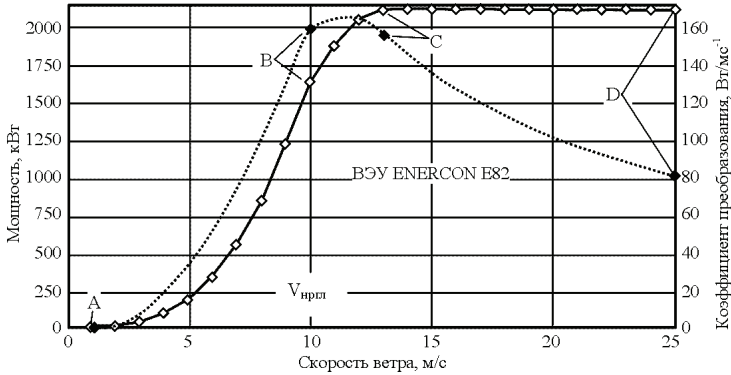


Рисунок 4 – Зависимость выходной мощности и коэффициента преобразования $k_{BK}(v)$ от скорости ветра ВЭУ ENERCON E82 E2

Для моделирования влияния ошибок установки угла атаки лопастей ветроколеса из-за инерционности СУ ВЭУ на количество вырабатываемой энергии представим ветер в виде периодического процесса с амплитудой V и периодом $T_{изм}$:

$$v_{мгн} = v_{cp} + \Delta v_{турб} \sin(\omega_1 t), \quad (5)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T_{изм}$ – собственная частота колебаний скорости ветра.

Рассмотрим следующих два возможных случая работы СУ ВЭУ:

1) когда время осреднения результатов измерения ветра много меньше времени изменения ветра ($T_{оср} \ll T_{изм}$). В этом случае можно считать, что СУ выставляет положение лопастей так, что $k_{BK} = k_{BK}(v_{мгн})$;

2) когда время осреднения результатов измерения ветра много больше времени изменения ветра ($T_{оср} \gg T_{изм}$). В этом случае можно считать, что СУ выставляет положение лопастей так, что $k_{BK} = k_{BK}(v_{cp})$.

В первом случае мощность на валу ВК можно записать как:

$$P_{вал1} = v_{мгн} k_{BK}(v_{мгн}), \quad (6)$$

а во втором случае:

$$P_{вал2} = v_{мгн} k_{BK}(v_{cp}). \quad (7)$$

Так как $k_{BK}(v)$ нелинейная функция, то анализ выражений (6) и (7) выполним ниже с помощью моделирования.

ВЭУ является нестабильным источником электрической энергии, поэтому потребителя интересует не только расчетная мощность ветрогенератора, но и количество произведенной им энергии за время $T_{ген}$.

Для оценки количества вырабатываемой энергии при наличии в ветровом потоке турбулентности рассмотрим варианты работы ВЭУ при больших скоростях ветра и управляемом положении лопастей ВК, то есть на участке CD рабочей характеристики ВЭУ (см. рис. 4).

Среднегодовое количество времени работы ВЭУ в таком режиме T_{CD} можно найти как:

$$T_{CD} = 365 \cdot 24 \cdot [P(V_D) - P(V_C)], \text{ ч/год}, \quad (8)$$

где V_D и V_C – скорости ветра соответственно в точках С и D рабочей характеристики ВЭУ; $P(V)$ – вероятностная функция распределения, используемая для описания распределения скоростей ветра за продолжительный период времени.

Часто $P(V)$ задается в виде [2]:

$$P(V) = 1 - \exp \left[-\pi \left(\frac{V}{2V_{ave}} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Подставляя в (9) и (8) значения $V_D = 25$ м/с и $V_C = 13$ м/с, получаем $T_{CD} = 1385$ часов в год.

Теперь оценим влияние турбулентности. На рис. 5-6 показаны результаты моделирования выражений (1), (6) и (7) при $v_{cp} = 20$ м/с; $V_{турб} = 2$ м/с; $T_{изм} = 1$ с; $T_{оср} = 4$ с.

На рис. 5 показаны постоянный средний ветер (линия 1) и переменное значение мгновенного ветра (кривая 2).

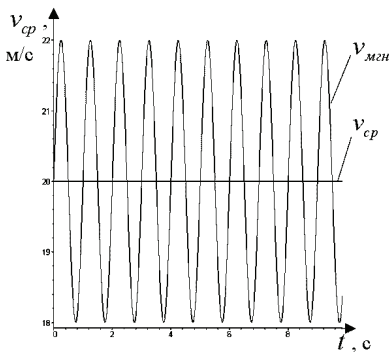


Рисунок 5 – Модельные мгновенная и средняя скорости ветра

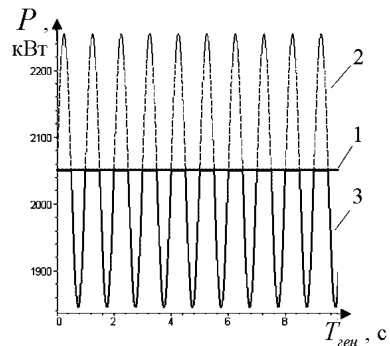


Рисунок 6 – Результаты моделирования работы СУ ВЭУ: 1 – $P_{вал1}$; 2 – $P_{вал2}$; 3 – $P_{вал1} \cdot k_{оср}$

На рис. 6 линия 1 соответствует работе безинерционной СУ, которая обеспечивает постоянство мощности на валу ВК вне зависимости от изменения скорости ветра. Кривая 2 рис. 6 показывает колебания мощности на валу ВЭУ когда СУ обладает большой инерционностью и ВК не успевает под-

строиться под ветер. Наблюдаются спады и подъемы мощности в соответствии с уменьшением и увеличением скорости ветра. Для защиты от перегрузок в ВЭУ используются системы, ограничивающие максимальную вырабатываемую мощность. Это могут быть как механические, так и электронные устройства, время срабатывания которых измеряется десятками долями секунды [5, 7]. Кривая 3 рис. 6 показывает мощность ВЭУ с учетом ограничения ее максимального значения. Таким образом, мы получаем, что при наличии турбулентности, если СУ ВЭУ не успеваеет подстроиться под изменчивый ветер, то это приводит к уменьшению количества вырабатываемой энергии. Для оценки этих потерь необходимо знать амплитуду и частоту отклонений скорости ветра из-за $\Delta v_{турб}$ от среднего значения.

Так как величина $\Delta v_{турб}$ по своей природе случайная, то для оценки разброса ее значений относительно нулевого среднего используют значение среднеквадратического отклонения σ_1 :

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_{мгн}(t_i) - \hat{v}_{cp})^2, \quad (10)$$

где n – количество измерений; $v_{мгн}(t_i)$ – значение мгновенной скорости ветра, измеренное в момент времени t_i ; $\hat{v}_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{мгн}(t_i)$ – оценка средней скорости ветра, выполненная за время $T_{оср}$.

При равномерном во времени интервале выполнения измерений Δt $T_{оср} = n \cdot \Delta t$.

Величина σ_1 дает представление о скорости некоторого эквивалентного постоянного ветра, обладающего такой же энергией, как и турбулентный.

С учетом вышесказанного выражение (5) можно записать как:

$$v_{мгн} = v_{cp} \pm \sigma_1, \quad (11)$$

откуда (7) преобразуется к виду:

$$P_{вал2}^\sigma = v_{cp} k_{БК}(v_{cp}) \pm \sigma_1 k_{БК}(v_{cp}). \quad (12)$$

В выражении (12) второе слагаемое, взятое со знаком плюс, описывает дополнительные нагрузки на ВК, а взятое со знаком минус – потери.

На рис. 7 показаны результаты моделирования относительных потерь мощности из-за турбулентности для ВЭУ ENERCON E82 E2 на участке CD ее рабочей характеристики (см. рис. 4).

Как видно из рисунка, из-за неправильной подстройки под ветер потери мощности ВЭУ могут составлять порядка 16 % (330 кВт). С учетом ранее полученного значения T_{CD} , потери энергии $E_{нмп}$ составят:

$$E_{нмп} = 330 \text{ кВт} \times 1385 \text{ ч/год} = 457050 \text{ кВт} \cdot \text{ч/год}. \quad (13)$$

При цене 1 кВт·ч электроэнергии по «зеленому тарифу» 122,77 коп. [4], это эквивалентно 561 тыс. грн.

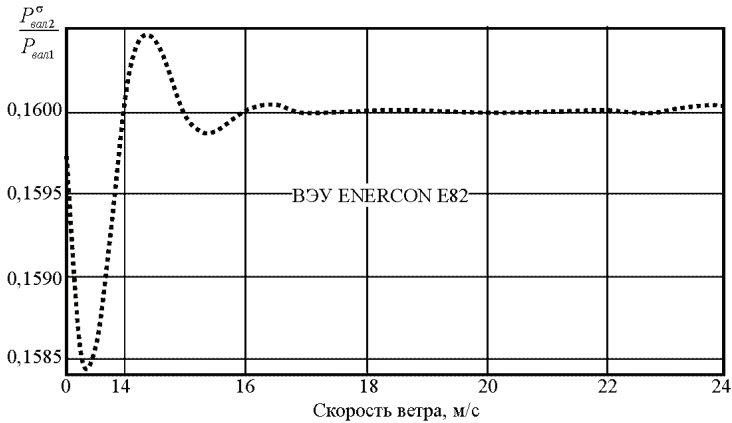


Рисунок 7 – Результаты моделирования относительных потерь мощности из-за турбулентности для ВЭУ ENERCON E82 E2 при $\sigma_1 = 0,16$

Потенциальные возможности подстройки под ветер. Для повышения точности оценки \hat{v}_{cp} и σ_1 в условиях реальной атмосферы необходимо минимизировать Δt и увеличивать n , что на практике достаточно сложно, поэтому зачастую σ_1 задают в виде [2, 5]:

$$\sigma_1^2 = \int_0^{\infty} S_1(f) df, \quad (14)$$

где $S_1(f)$ – односторонний спектр (спектральная плотность мощности) горизонтальной составляющей скорости ветра; f – частота.

Форма $S_1(f)$ дает представление о распределении мощности турбулентных колебательных движений по их частотам. Интуитивно понятно, что мелкомасштабная турбулентность с высокими колебательными частотами не оказывает существенного воздействия на ВК и приводит лишь к беспорядочной вибрации лопастей. Геометрические размеры лопасти ветроколеса представляются естественным ограничителем, не позволяющим ВЭУ полностью утилизировать энергию турбулентного движения воздуха. Следовательно, зная спектр горизонтальной составляющей скорости ветра и размеры лопасти ВК можно определить какую часть мощности турбулентного движения ветра ВК еще сможет отобрать и минимальное значение $\tau_{pсу}$.

Спектральная плотность мощности для близкой к реальной модели турбулентности (модель Каймала) задается в безразмерном виде [2, 5]:

$$\frac{f S_1(f)}{\sigma_1^2} = \frac{4 f L_1 / V_{hub}}{(1 + 6 f L_1 / V_{hub})^{\frac{5}{3}}}, \quad (15)$$

где $L_1 = 8,1 \cdot \Lambda_1$ – интегральный масштабный параметр горизонтальной со-

ставляющей вектора скорости; $\Lambda_1 = \begin{cases} 0,7 \cdot Z_{hub} & \text{при } Z_{hub} \leq 60 \text{ м} \\ 42 & \text{при } Z_{hub} > 60 \text{ м} \end{cases}$ – продоль-

ный масштабный параметр турбулентности воздушного потока; Z_{hub} – высота оси ветроколеса над поверхностью земли; V_{hub} – скорость набегающего воздушного потока на высоте оси ветроколеса.

Введем нормированный спектр $S_N(f)$ в виде:

$$S_N(f) = \frac{S_1(f)}{\int_0^\infty S_1(f) df} = \frac{S_1(f)}{\sigma_1^2} = \frac{4L_1/V_{hub}}{(1 + 6fL_1/V_{hub})^{\frac{5}{3}}}. \quad (16)$$

На рис. 8 показаны нормированные спектры турбулентности при различных значениях V_{hub} .

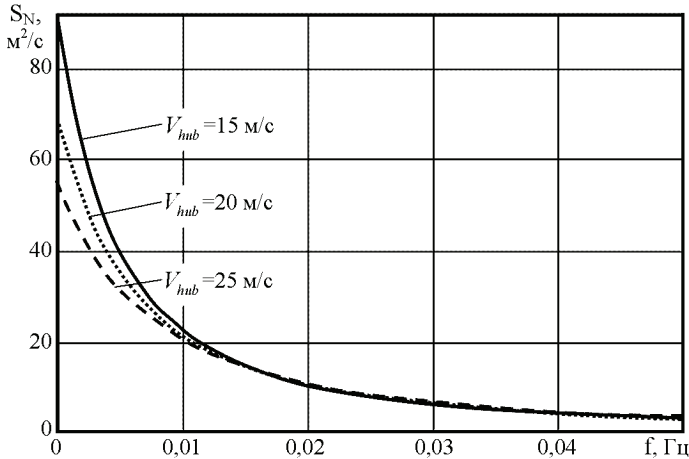


Рисунок 8 – Нормированные спектры турбулентности при различных значениях V_{hub}

Часть мощности ветра $\Delta P_{турб}$, заключенной в турбулентности с частотами от минимальной f_{min} до максимальной f_{max} , можно найти как:

$$\Delta P_{турб} = \int_{f_{min}}^{f_{max}} S_N(f) df. \quad (17)$$

При подстройке ВЭУ под ветер по значению среднего ветра получаем, что от турбулентности можно отобрать лишь часть мощности $\Delta P_{турб}^{cp}$, равную:

$$\Delta P_{турб}^{cp} = \int_0^{1/T_{ocp}} S_N(f) df. \quad (18)$$

На рис. 9 показана зависимость $\Delta P_{турб}^{cp}$ от времени осреднения для различных V_{hub} .

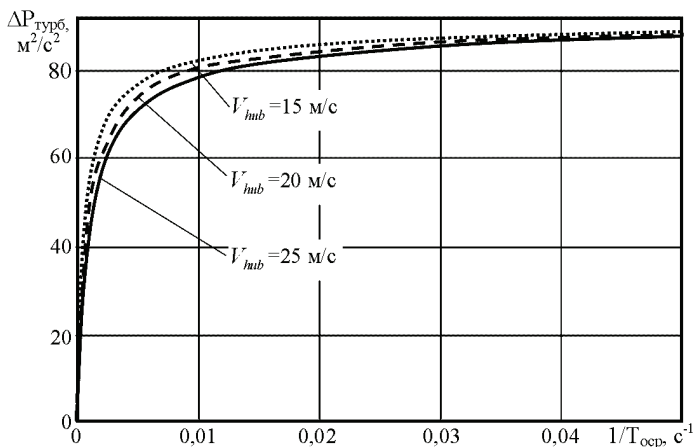


Рисунок 9 – Зависимость $\Delta P_{турб}^{cp}$ от времени осреднения для различных V_{hub}^r

Как видно из рисунка, подстройка ВЭУ под ветер по его среднему значению при интервале усреднения измерений порядка 10-15 минут от турбулентности можно отобрать лишь 10-12 % ее мощности. При сокращении же $T_{оср}$ до 1 с от турбулентности можно отобрать порядка 95 % ее мощности, а при $T_{оср} = 0,1$ с – 99 %.

При средней скорости ветра 13-25 м/с и времени осреднения $T_{оср} = 0,1$ с путь $L_{сов}$, проходимый единичным объемом воздуха составляет 1,3-2,5 м, что сравнимо с шириной (хордой) лопасти ВК ВЭУ ENERCON E82. Таким образом, потенциально даже крупные современные ВЭУ способны почти полностью утилизировать энергию, заключенную в турбулентном движении воздуха. Но здесь есть некоторые ограничения. Мощность на валу ВК есть результирующая ветрового воздействия не только поперек, но и вдоль всей лопасти. Функция корреляции продольной составляющей скорости ветра по пространству $Coh(r, f)$ может быть задана как [2]:

$$Coh(r, f) = \exp \left[-8,8 \sqrt{\left(\frac{f \cdot r}{V_{hub}} \right)^2 + \left(\frac{0,12r}{L_{Coh}} \right)^2} \right], \quad (19)$$

где r – величина проекции вектора разделения между двумя точками на плоскость, перпендикулярную направлению вектора средней скорости ветра; $L_{Coh} = 8,1\Lambda_1$ – масштабный параметр когерентности.

На рис. 10 приведены графики, показывающие уровень корреляции скорости продольной составляющей ветра от расстояния при различных $f = 1/T_{оср}$.

Как видно из рисунка высокочастотные составляющие турбулентности имеют низкую корреляцию по пространству. Это является причиной того,

что для получения репрезентативных данных результаты измерений, выполненных современными малоинерционными точечными датчиками типа чашечных, пропеллерных или ультразвуковых анемометров, приходится осреднять за длительное время.

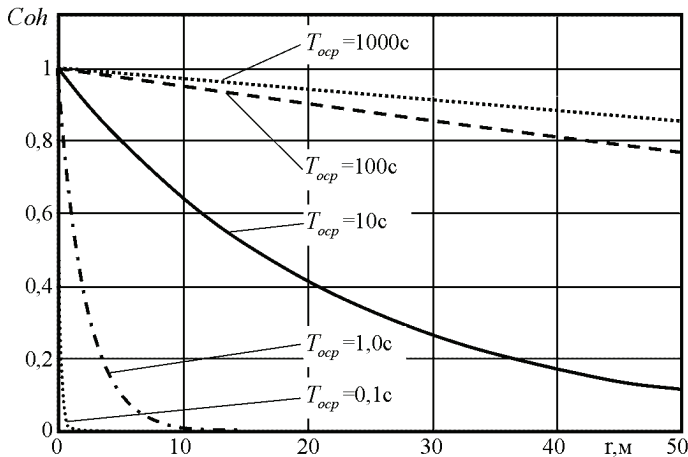


Рисунок 10 – Зависимость уровня корреляции скорости продольной составляющей ветра от расстояния при различных $f = 1/T_{осп}$

Таким образом, мы получаем следующее противоречие - даже крупные современные ВЭУ потенциально могут практически полностью утилизировать энергию турбулентности, но для этого нужны данные о скорости ветра, полученные за короткий промежуток времени, однако такие данные, полученные точечными измерителями, обладают малой репрезентативностью по пространству и для применения на практике их приходится осреднять за длительное время.

Для устранения этого противоречия необходимо средство измерения, которое бы:

- выполняло измерения скорости ветра за короткое время;
 - в процессе измерения выполняло осреднение данных по пространству.
- Предъявленным требованиям отвечает измеритель, предложенный в [3].

Выводы. Естественная турбулентность, всегда присутствующая в ветровом потоке приводит к потерям энергии, отбираемой ветроэнергетическими установками (ВЭУ) от ветра, по сравнению с расчетными данными.

Величина таких потерь может достигать 16%, что для ВЭУ мощностью 2000 кВт составляет порядка 500 тыс. грн. в год.

По своим конструктивным параметрам современные ВЭУ потенциально способны утилизировать энергию турбулентности практически полностью. Препятствием для этого является отсутствие информации о скорости ветра,

воздействующего на лопасть ветроколеса в каждый момент времени.

Данные, полученные с помощью точечных измерителей, не позволяют определить текущую скорость ветра, действующую на лопасть в целом.

Современные лазерные или радиолокационные системы дистанционно-го измерения скорости ветра имеют очень высокую стоимость (от €100 тыс.), а акустические локаторы – низкую помехозащищенность, что делает их мало пригодными для нужд ветроэнергетики.

Системы горизонтального радиоакустического зондирования наибольшей мере отвечают требованиям, предъявляемым к средствам измерения для обеспечения ВЭУ информацией о ветре.

Список литературы: 1. Классы ветров [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.src-vertical.com/wind_geography/wind_class/. 2. Национальный стандарт РФ. Установки электрические ветровые. МЭК-61400-1 проект (1,2 Мбайт). Рецензируется ГРЦ-Вертикаль [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.src-vertical.com/files/misc/national.pdf>. 3. *Ульянов Ю.Н.* Горизонтальное радиоакустическое зондирование для измерения скорости ветра для ветроэнергетических установок / *Ю.Н. Ульянов, В.Л. Мисайлов, Г.Ю. Мартыненко* // Збірник наукових праць. Системи обробки інформації. – Х.: Харківський університет Повітряних Сил, 2011. – Вип. 2 (92). – С.168-172. 4. НКРЕ, Постанова від 28.12.2011 № 222 (із змінами) Про встановлення величин «зелених» тарифів на електричну енергію на січень 2012 року [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nerc.gov.ua/control/uk/publish/article?showHidden=1&art_id=123806&cat_id=34446. 5. *Burton T.* Wind Energy Handbook [Текст] / *T. Burton, D. Sharpe, N. Jenkins, E. Bossanyi*. – Chichester: John Wiley & Sons, 2001. – 642 p. 6. ENERCON Wind energy converters. Product overview [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.enercon.de/p/downloads/EN_Productoverview_0710.pdf. 7. *Erih Hau* Wind Turbines. Fundamentals, Technologies, Application, Economics 2nd edition [Текст] / *Erih Hau*. – Berlin: Springer, 2006. – 791 p. 8. *Fernando D. Bianchi* Wind turbine control systems: principles, modelling and gain scheduling design. [Текст] / *Fernando D. Bianchi, Hernán De Battista, Ricardo J. Mantz*. – London: Springer-Verlag London Limited, 2007. – 218 p. 9. Wind turbine classes [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.vestas.com/en/wind-power-plants/wind-project-planning/siting/wind-classes.aspx#vestas-univers>.

Надійшла до редколегії 30.08.2013

УДК 620.9; 621.548

Возможности повышения коэффициента использования энергии ветра в ветроэнергетических установках с горизонтальной осью вращения ветроколеса / В. Л. Мисайлов, Ю. Н. Ульянов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 136-149. – Бібліогр.: 9 назв.

Показана можливість збільшення кількості енергії, відбіраної вітроенергетичною установкою з горизонтальною віссю обертання від набігаючого вітрового потоку за рахунок врахування завчасно отримуваної інформації про параметри поля швидкості вітру. Обґрунтовані вимоги до дистанційного вимірника швидкості вітру для вітроенергетичної установки з горизонтальною віссю обертання.

Ключові слова: вітроенергетична установка, поле швидкості вітру, турбулентність.

Possibility of energy amount increase is shown, that is taken away by horizontal windturbine against a sudden appearing wind stream at the expense of the account of the information got in advance about the parameters of the wind speed field. The requirements to the remote control wind speed field measuring device for the horizontal windturbine are grounded in the article.

Keywords: windturbine, wind speed field, turbulence.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ,
Харьков;

С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАЗИВЕРТИКАЛЬНОГО ПАДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Найдено решение системы нелинейных дифференциальных уравнений квазивертикального движения шара, радиус которого уменьшается по дробно-линейному закону. Первые интегралы выражено при помощи функций Бесселя, а для вторых интегралов предложены приближенные асимптотические формулы.

Ключевые слова: тело переменной массы, квазивертикальное движение, функции Бесселя.

Актуальность темы и цель исследования. Движение шара переменной массы и размеров рассматривают при изучении полета: горящих частиц топлив [1,2], капель диспергированных огнетушащих веществ, которые испаряются в высокотемпературной среде [3], мелкодисперсных химически активных отходов (выбросов) производств, падающих сгорающих метеоритов и пр. Поэтому исследование особенностей баллистики тел, у которых меняются размеры во времени, относится к актуальным научно-техническим задачам.

При движении тела переменного размера появляется ряд особенностей. Процесс движения становится нестационарным. Поэтому при падении тела переменной массы теряет смысл понятие «скорость витания», величину которой определил Н.Е. Жуковский [4]. Траектория тела убывающей массы может обрываться вследствие полного сгорания или испарения движущегося тела, что исключено при полете тела постоянной массы. Следует также упомянуть об эффекте отражения легкого тела встречным потоком [3], а также о существовании экстремума скорости [5, 6], характерного только при движении малой частицы переменной массы.

При моделировании движения шара используют различные законы изменения размера тела [7, 8], в том числе линейный, экспоненциальный и закон В. Срезневского. Известен также дробно-линейный закон, которому уделено меньше внимания. Его рассматривали В.А. Сапа и Н.Е. Сагитов [9] для линейного аэродинамического сопротивления движению. В отличие от [9] здесь рассматриваем случай квадратичного сопротивления газовой среды.

Постановка задачи Коши. Рассмотрим не строго вертикальное падение, а движение центра масс шара под небольшим углом к вертикальной оси. Такая задача возникает, например, при вертикальной подаче распыленной струи, факел которой имеет вид конуса, а траектория большинства частиц

отклоняется от вертикали. Моделирование такого движения нужна, для расчета размера области орошения горизонтальной плоскости, на которую направляют сверху распыленную струю.

Допускаем, что сила аэродинамического сопротивления F_c пропорциональна площади сечения сферического тела и квадрату скорости его центра масс.

Ориентируясь на скорость полета $v > 5$ м/с, примем квадратичную зависимость сил аэродинамического сопротивления R_c от скорости

$$R_c = C_v S v^2, \quad (1)$$

Здесь C_v – коэффициент сопротивления; S – площадь поперечного сечения сферического тела.

Предполагаем, что изменение радиуса r падающего сферического тела описывается дробно-линейной функцией времени t :

$$r = \frac{r_0}{1 + \gamma t}, \quad (2)$$

где $r_0 = r(0)$ γ – параметр, характеризующий интенсивность убывания радиуса и массы однородного шара.

Процесс падения тела уменьшающего радиус по дробно-линейному закону (2), в соответствии с расчетной схемой на рис. 1 и зависимостью (1), описываем системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\ddot{z} + \frac{k\dot{z}}{r} (\dot{z}^2 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} = g; \quad \ddot{x} + \frac{k\dot{x}}{r} (\dot{z}^2 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} = 0, \quad (3)$$

где $k = \frac{3 C_v}{4 \rho}$ – сведенный коэффициент аэродинамического сопротивления,

ρ – плотность частицы.

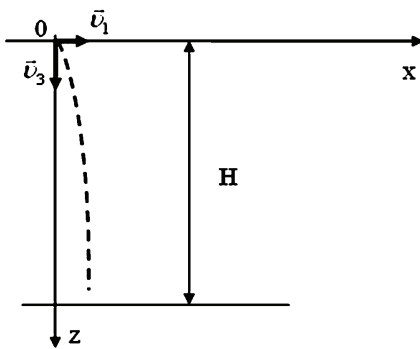


Рисунок 1 – Расчетная схема

Систему (3) дополняем начальными условиями

$$z(0) = x(0) = 0; \quad \dot{z}(0) = v_3; \\ \dot{x}(0) = v_1, \quad (4)$$

где v_1, v_3 – проекции стартовой скорости центра масс соответственно в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Ограничиваясь вариантом квазивертикального (близкого к вертикальному) движения тела, в дальнейшем принимаем, что

$$\arctg(v_1 v_3^{-1}) \leq 20^\circ, \quad (5)$$

чем ограничиваем угол наклона траектории к оси oz или угол конусности, в случае распыленной струи.

Чтобы найти приближенные аналитические решения поставленной задачи Коши, которую в общем случае приходится решать численно, несколько упростим систему (3). В силу ограничения (5) имеем $\dot{z} \gg \dot{x}$. Поэтому принимаем

$$(\dot{z}^2 + \dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} \approx \dot{z} \sqrt{1 + (v_1 v_3^{-1})^2}.$$

Таким образом, задача упрощенного расчета сводится к решению уравнений

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{r} \dot{z}^2 = g; \quad \ddot{x} + \frac{\beta}{r} \dot{x} \dot{z} = 0, \quad (6)$$

где $\beta = k \sqrt{1 + (v_1 v_3^{-1})^2}$.

Построение решения задачи Коши. Решим первое уравнение системы (6). Учитывая (2), перейдем в нем к новой переменной:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dr} \frac{dr}{dt} = -\frac{\gamma}{r_0} r^2 \frac{d}{dr}.$$

Представляем его в форме:

$$\frac{dv}{dr} - \beta_0 \frac{v^2}{r^3} = -\frac{g_0}{r^2}, \quad (7)$$

где $\beta_0 = \frac{\beta r_0}{\gamma}$; $g_0 = \frac{g r_0}{\gamma}$; $z'_r = v(r)$.

Запишем далее уравнение (7) в виде

$$v'_r = f(r)v^2 + h(r), \quad (8)$$

где $f(r) = \frac{\beta_0}{r^3}$; $h(r) = -\frac{g_0}{r^2}$.

Уравнение (8) является общим уравнением Риккати [10]. Используя преобразование

$$v = \exp\left(-\int f(r)u(r)dr\right), \quad (9)$$

переводим (7) в линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + 3r \frac{du}{dr} - \frac{\beta_0 g_0}{r^3} u = 0. \quad (10)$$

Дифференциальное уравнение (10), является уравнением типа Бесселя, общим решением которого является:

$$u(r) = \frac{1}{r} \left[c_1 I_{2/3}(\xi) + c_2 K_{2/3}(\xi) \right]. \quad (11)$$

Здесь $\xi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\beta_0 g_0}{r^{3/2}}}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_{2/3}(\xi), K_{2/3}(\xi)$

– соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда порядка $2/3$.

Обратное преобразование, для нахождения решения уравнения Риккати, имеет вид:

$$v = -\frac{u'_r}{uf(r)}. \quad (12)$$

Для дифференцирования используем формулы:

$$\frac{d}{d\xi} I_{2/3}(\xi) = I_{-1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi} I_{2/3}(\xi), \quad \frac{d}{d\xi} K_{2/3}(\xi) = -K_{1/3}(\xi) - \frac{2}{3\xi} K_{2/3}(\xi).$$

В итоге получаем первый интеграл первого уравнения системы (6)

$$v(t) = \dot{z}(t) = \sqrt{\frac{rg_0}{\beta_0}} \cdot \frac{cI_{-1/3}(\xi) - K_{1/3}(\xi)}{cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi)}. \quad (13)$$

Здесь $c = c_1 c_2^{-1}$; $I_{-1/3}(\xi), K_{1/3}(\xi)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индекса $-1/3$.

Решение (13) удовлетворяет второму начальному условию в (4), при

$$c = \frac{bK_{2/3}(\xi_0) + K_{1/3}(\xi_0)}{I_{-1/3}(\xi_0) - bI_{2/3}(\xi_0)}, \quad (14)$$

где $\xi_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\beta_0 g_0}{r_0^3}}$; $b = v_3 \sqrt{\frac{\beta_0}{r_0 g_0}}$.

Для определения горизонтальной проекции скорости падения $\dot{x}(t)$ обратимся ко второму уравнению системы (6). Учитывая (12), его представим в виде

$$\int \frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -\int \frac{du}{u}.$$

Откуда следует, что

$$\dot{x} = c_3 u^{-1}(t),$$

где c_3 – произвольная постоянная.

Ее находим из начального условия (4). Учитывая (12), получаем

$$\dot{x}(t) = \frac{v_1 r}{r_0} \frac{cI_{2/3}(\xi_0) + K_{2/3}(\xi_0)}{cI_{2/3}(\xi) + K_{2/3}(\xi)}, \quad (15)$$

причем константу c определяем выражением (14).

Таким образом, вычисление проекций скорости падения центра масс шара $\dot{z}(t)$ и $\dot{x}(t)$ можно проводить с помощью функций Бесселя.

Для определения перемещения центра масс шара необходимо вычислить интегралы:

$$z(t) = \int_0^t \dot{z}(t) dt \quad \text{и} \quad x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt,$$

которые не выражаются при помощи затабулированных или элементарных функций.

Для построения приближенных формул для расчета перемещений, введем асимптотику, которую находим интегрированием уравнения (6) при $g = 0$:

$$\dot{z}(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \dot{z}_a(t) = \frac{r_0}{\beta t(1 + 0,5\gamma t) + r_0 / \nu_3}; \quad \dot{x}(t) \xrightarrow{g \rightarrow 0} \dot{x}_a(t) = \frac{\nu_1}{\nu_3} \dot{z}_a(t). \quad (16)$$

Интегралы от $\dot{z}_a(t)$ и $\dot{x}_a(t)$ выражаются в замкнутом виде через элементарные функции

$$z_a(t) = \int_0^t \dot{z}_a(t) dt = \frac{r_0}{\gamma \beta a} \ln \frac{\left| t + \frac{1}{\gamma} - a \right| \left| \frac{1}{\gamma} + a \right|}{\left| t + \frac{1}{\gamma} + a \right| \left| \frac{1}{\gamma} - a \right|},$$

$$x_a(t) = \frac{\nu_1}{\nu_3} z_a(t), \quad a = \frac{1}{\gamma} \sqrt{1 - \frac{2r_0\gamma}{\beta\nu_3}}.$$

Невязки

$$\Phi_3(t) = \int_0^t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)] dt \quad \text{и} \quad \Phi_1(t) = \int_0^t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)] dt$$

положительны и удовлетворяют неравенствам:

$$\Phi_3(t) < t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)]; \quad \Phi_1(t) < t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)].$$

Для приближенного вычисления их при малых t можно использовать формулу трапеций. Тогда:

$$\Phi_3(t) \approx \frac{1}{2} t [\dot{z}(t) - \dot{z}_a(t)]; \quad \Phi_1(t) \approx \frac{1}{2} t [\dot{x}_a(t) - \dot{x}(t)].$$

В результате приближенный расчет перемещений центра масс сферического тела сводится к формулам:

$$z(t) \approx z_a(t) + \Phi_3(t); \quad x(t) \approx \frac{\nu_1}{\nu_3} z_a(t) - \Phi_1(t). \quad (17)$$

Результаты расчетов и их анализ. Для проверки предложенных приближенных аналитических решений проведем расчеты при $r_0 = 10^{-4}$ м; $k = 10^{-5}$; $\gamma = 3$ с $^{-1}$; $\nu_3 = 80$ м/с; $\nu_1 = 20$ м/с.

В табл. 1 указаны, рассчитанные двумя способами, значения проекций скорости падения. В числителе записано значения $\dot{z}(t)$ и $\dot{x}(t)$, полученные путем численного интегрирования системы (3). В знаменатели помещены значения проекций скорости, к которым приводят аналитические решения (13) и (15). На значительном промежутке времени наблюдается хорошее соответствие результатов, полученных разными методами, что подтверждает возможность перехода от (3) к более простой системе (6).

Таблица 1 – Значения $\dot{z}(t)$ и $\dot{x}(t)$, рассчитанные двумя методами

t, c	$\dot{z}(t), м/с$	$\dot{x}(t), м/с$	t, c	$\dot{z}(t), м/с$	$\dot{x}(t), м/с$
0,25	21,87	5,10	1,25	5,11	0,34
	21,84	5,10		5,04	0,33
0,50	11,27	2,23	1,50	4,58	0,18
	11,22	2,22		4,51	0,18
0,75	7,61	1,15	1,75	4,21	0,10
	7,55	1,14		4,14	0,09
1,00	5,98	0,63	2,00	3,93	0,05
	5,91	0,61		3,87	0,05

Таблица 2 – Значения $z(t)$ и $x(t)$, рассчитанные двумя методами

t, c	$z(t), м$	$x(t), м$	t, c	$z(t), м$	$x(t), м$
0,25	10,24	2,51	1,25	19,46	4,10
	10,21	2,51		18,94	4,16
0,50	14,12	3,36	1,50	20,67	4,16
	14,02	3,36		19,91	4,27
0,75	16,41	3,76	1,75	21,77	4,19
	16,21	3,77		20,71	4,36
1,00	18,09	3,98	2,00	22,78	4,21
	17,75	4,00		21,42	4,43

В табл. 2 записаны, полученные двумя способами, значения $z(t)$ и $x(t)$. Числители – результат численного интегрирования неупрощенной системы (3), а знаменатели – перемещения к которым приводят формулы (17). Сравнение чисел подтверждает состоятельность предложенных упрощений и достаточно высокую точность приближенного аналитического решения.

Выводы. Проведенное исследование подтверждает возможность упрощения нелинейной системы уравнений квазивертикального падения шара путем сведения к уравнениям, решения которых выражаются через функции Бесселя. Полученные приближенные формулы пригодны для расчета параметров траектории квазивертикального падения шара, радиус которого уменьшается во времени по дробно-линейному закону.

Список литературы: 1. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: 1977. – 277 с. 2. *Абрамчук Ф.И.* Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности / *Ф.И. Абрамчук, А.П. Марченко* и др. – К.: 1992. – 272 с. 3. *Кучеренко С.И.* Баллистика капель, які випаровуються при польоті / *С.И. Кучеренко, В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, Л.М. Тищенко.* – Х.: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. 4. *Жуковский Н.Е.* Сочинения. Т. 3. – М.: ОНТИ–НКТП, 1936. – 380 с. 5. *Ольшанский В.П.* Об условиях экстремума скорости падения сферического тела переменного радиуса / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып. «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Вып. 26. – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – С. 67-78. 6. *Ольшанский В.П.* О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25-29. 7. *Ольшанский В.П.* Аналитические решения уравнения Мещерского, описывающие вертикальное движение шара убывающей массы / *В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский* // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 36-42. 8. *Ольшанский В.П.* Замкнутые решения уравнения Мещерского при различных законах уменьшения радиуса летящего шара / *В.П. Ольшанский, К.В. Аврамов, С.В. Ольшанский* // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 207-214. 9. *Сагитов М.Н.* Некоторые случаи движения вращающегося шара переменной массы, ось которого горизонтальна / *М.Н. Сагитов* // Изв-тия АН Казахской ССР. Серия физ.-мат. наук. Математика и механика. – 1963. – Вып. 15. – С. 88-99. 10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

Поступила в редколлегию 25.01.2013

УДК 531.395

Решение задачи квазивертикального падения сферического тела переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 150-156. – Бібліогр.: 10 назв.

Знайдено розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь квазивертикального руху шару, радіус якого зменшується за дробово-лінійним законом. Перші інтеграли виражено за допомогою функцій Бесселя, а для обчислення других запропоновано наближені асимптотичні формули.

Ключові слова: тіло змінної маси, квазивертикальний рух, функції Бесселя.

The solution of the system of nonlinear differential equations of quasi-vertical motion of the sphere, the radius of which varies according to a fractional-linear law was found. First integrals are found with Bessel functions, for the second integrals an approximate asymptotic formula.

Key words: body of variable mass, quasi-vertical motion, Bessel functions.

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ,
Харьков;

С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

С помощью ВБК – метода построены формулы для вычисления коэффициента динамичности при переходе через резонанс осциллятора линейно-переменной массы под действием возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды. Проведены расчеты и проанализировано влияние различных факторов: скорости изменения массы, реактивной силы и силы вязкого сопротивления на амплитуду резонансных колебаний.

Ключевые слова: осциллятор, линейно-переменная масса, резонанс, ВБК – метод.

Введение. Специфической особенностью осциллятора переменной массы или жесткости является возможность попадания его в нестационарный резонанс под действием возмущающей силы постоянной частоты. На эту особенность колебательной системы монотонно (непериодически) переменных параметров уже давно обратили внимание в монографии [1], где с помощью аналоговой машины смоделировали прохождение резонанса. Актуальность исследования этого явления обоснована в [1] тем, что в технике систематически используют механизмы с переменной массой или жесткостью звеньев. Например, к таким относятся: механизмы экскаваторов и грейферов; машины шахтного подъема; вибрационные конвейеры; емкости и бункеры при загрузке жидкостью или сыпучим веществом; подрессоренные платформы транспортных средств, загруженные сыпучим грузом и пр. В отличие от публикации [1], здесь строится приближенное аналитическое решение задачи Коши в квадратурах. Построение решения проводится ВБК – методом, который эффективен при наличии большого параметра в уравнении колебаний [2], [3]. Обычно такой параметр возникает за счет малого изменения массы или жесткости осциллятора за один период его колебаний, но, в отличие от классических асимптотических методов исследования, в методе ВБК не используется понятие «медленного» времени.

Целью работы является построение аналитических зависимостей для расчета амплитуд колебаний при переходе через резонанс осциллятора линейно-переменной массы под действием возмущающей силы постоянной частоты и амплитуды.

Ставится задача анализа особенностей нестационарного резонанса, который невозможен в обычном линейном осцилляторе постоянных параметров.

Постановка задачи и ее аналитическое решение. Линейное перемещение осциллятора $x = x(t)$ описываем дифференциальным уравнением:

$$m_0(1 + \gamma t)\ddot{x} + (m_0\gamma\varepsilon + \mu)\dot{x} + cx = F \sin(\omega t), \quad (1)$$

в котором m_0 – начальная масса осциллятора; $m_0\gamma$ – скорость изменения массы во времени t ; $0 \leq \varepsilon \leq 1$ – коэффициент реактивности, определяющий какая часть изменяющейся массы идет на образование реактивной силы; μ – коэффициент вязкого линейного сопротивления; c – коэффициент жесткости пружины; F , ω – амплитуда и частота возмущающей силы; точкой над x обозначена производная по времени t .

Уравнение (1) решаем при нулевых начальных условиях:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Отметим, что при $F = 0$ однородное уравнение, соответствующее (1), решено в [4]. Аналитическое решение, при произвольных начальных условиях выражено в функциях Бесселя нецелого положительного и отрицательного индексов.

Введением новой переменной $\xi = 1 + \gamma t$ уравнение (1) и начальные условия (2) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 \xi} x = f(\xi); \quad (3)$$

$$x|_{\xi=1} = \dot{x}|_{\xi=1} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\lambda = \varepsilon + \frac{\mu}{m_0\gamma}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_0}}$; $f(\xi) = \frac{F}{m_0\gamma^2\xi} \sin\left(\frac{\omega}{\gamma}(\xi - 1)\right)$. (5)

Как отмечали выше, фундаментальные решения $x_1(\xi)$ и $x_2(\xi)$ однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{d\xi^2} + \frac{\lambda}{\xi} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 \xi} x = 0$$

выражается чрез функции Бесселя [4]. Но учитывая, что в технических расчетах обычно

$$(\omega_0 / \gamma)^2 \gg 1,$$

далее ограничимся приближенными выражениями $x_1(\xi)$ и $x_2(\xi)$. Их построим ВБК методом [2]. С точностью до слагаемых высшего порядка малости, указанный метод приводит к фундаментальным решениям:

$$x_1(\xi) = \eta^\beta \cos \eta; \quad x_2(\xi) = \eta^\beta \sin \eta, \quad (6)$$

в которых $\eta = \eta_0 \sqrt{\xi}$; $\eta_0 = \frac{2}{|\gamma|} \omega_0$; $\beta = \frac{1}{2} - \lambda$.

Общее решение неоднородного уравнения (3) ищем в виде:

$$x(\xi) = c_1(\xi)x_1(\xi) + c_2(\xi)x_2(\xi), \quad (7)$$

где $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$ – неизвестные функции.

Используя метод вариации произвольных постоянных, подстановкой (7) в (3), получаем квадратуры:

$$c_1(\xi) = -\int \frac{x_2(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)}d\xi; \quad c_2(\xi) = \int \frac{x_1(\xi)f(\xi)}{\Delta(\xi)}d\xi. \quad (8)$$

Здесь $\Delta(\xi)$ – определитель Вронского.

Поскольку

$$\frac{dx_1}{d\xi} = \frac{\eta_0^2 \eta^\beta}{2\eta} \left(\frac{\beta}{\eta} \cos \eta - \sin \eta \right); \quad \frac{dx_2}{d\xi} = \frac{\eta_0^2 \eta^\beta}{2\eta} \left(\frac{\beta}{\eta} \sin \eta + \cos \eta \right),$$

то

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \frac{dx_1}{d\xi} & \frac{dx_2}{d\xi} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \eta_0^2 \eta^{2\beta-1}. \quad (9)$$

Учитывая начальные условия (4), выражения (5), (6), (8), (9) и соотношение $d\xi = \frac{2\eta}{\eta_0^2} d\eta$, находим, что:

$$c_1(\xi) = -\frac{F}{c} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sin \eta}{\eta^\beta} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] d\eta; \quad (10)$$

$$c_2(\xi) = \frac{F}{c} \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos \eta}{\eta^\beta} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] d\eta.$$

Согласно (6) и (7), амплитуды колебаний осциллятора определяются выражением:

$$am(x) = \eta^\beta \sqrt{c_1^2(\xi) + c_2^2(\xi)}.$$

Тогда, вычисление коэффициента динамичности сводится к применению формулы:

$$K_\sigma = \frac{c}{F} am(x) = \eta^\beta \sqrt{a_1^2(\eta) + a_2^2(\eta)}, \quad (11)$$

в которой

$$a_1 = \eta_0^{1-\beta} \int_1^{\eta/\eta_0} \frac{\sin(\eta_0 y)}{y^\beta} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] dy; \quad (12)$$

$$a_2 = \eta_0^{1-\beta} \int_1^{\eta/\eta_0} \frac{\cos(\eta_0 y)}{y^\beta} \sin \left[\frac{\omega}{\gamma} (y^2 - 1) \right] dy.$$

Интегралы (12) не выражаются через известные затабулированные функции и их приходится вычислять на компьютере.

Итак, расчет коэффициента динамичности в нестационарном резонансе сводится к применению формул (11) и (12).

Результаты моделирования. Расчет колебаний осциллятора возрастающей массы проводим, используя следующие числовые данные: $m_0 = 2$ кг; $c = 5000$ Н/м; $\frac{\omega}{\omega_0} = 0,5$. На рис. 1 представлены зависимости, полученные при $\gamma = 0,2$ с⁻¹; $\varepsilon = 0$. Цифрам 1,2,3 соответствуют значения коэффициента динамичности, полученные при $\mu = 1,3,5$ Нс/м. Расчет показывает, что значения K_d существенно зависят от значения μ . Максимумы амплитуды резонансных колебаний достигают не при $\eta/\eta_0 = 2$, а при больших отношениях η/η_0 . Происходит смещение области резонанса вправо.

Смещение увеличивается с увеличением γ ; что подтверждается графиками на рис. 2, которые получены при $\gamma = 0,8$ с⁻¹. Здесь коэффициенты динамичности меньше, чем на рис. 1 ибо убыстряется прохождение резонанса, то есть осциллятор совершает резонансные колебания на более коротком промежутке времени.

На рис. 3 представлены K_d , вычисленные, без учета силы вязкого сопротивления при разных ε . Цифрам 1, 2, 3 соответствуют значения $\varepsilon = 0; 0,5; 1$. Реактивная сила несколько уменьшает коэффициент динамичности в осцилляторе возрастающей массы, но в целом ее влияние незначительно.

Расчет колебаний осциллятора убывающей массы проводили, используя следующие числовые данные: $m_0 = 2$ кг; $c = 5000$ Н/м; $\omega/\omega_0 = 0,5$. На рис. 4 представлены зависимости, полученные при $\gamma = -0,2$ с⁻¹; $\varepsilon = 0$. Цифры 1,2,3 соответствуют значениям коэффициента вязкого сопротивления $\mu = 1,3,5$ Нс/м. Коэффициент динамичности существенно зависит от μ .

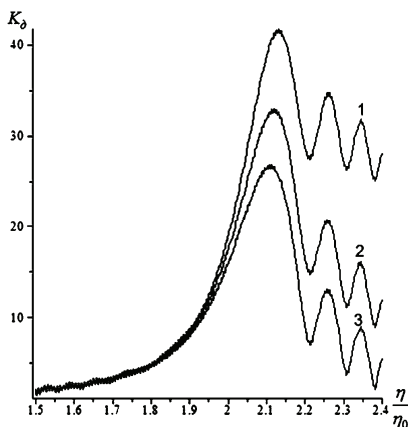


Рисунок 1 – Зависимость коэффициента динамичности K_d от η/η_0 при $\varepsilon = 0$; $\gamma = 0,2$ с⁻¹

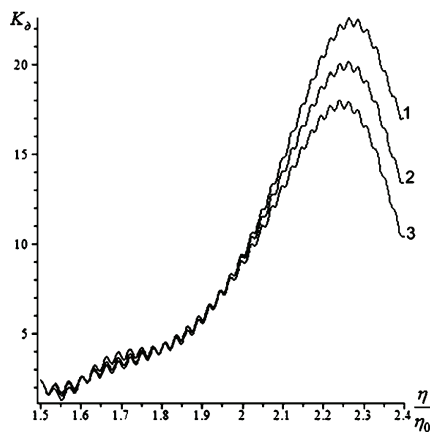


Рисунок 2 – Зависимость коэффициента динамичности K_d от η/η_0 при $\varepsilon = 0$; $\gamma = 0,8$ с⁻¹

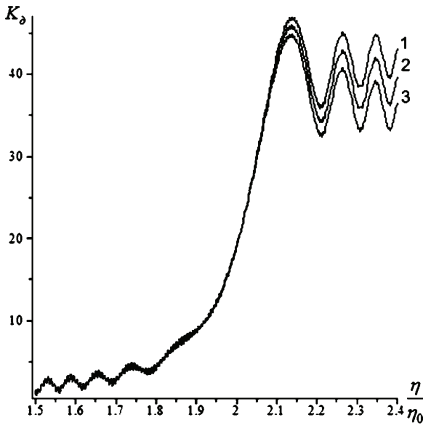


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента динамичности K_d от η/η_0 при $\mu = 0$; $\gamma = 0,2 \text{ c}^{-1}$

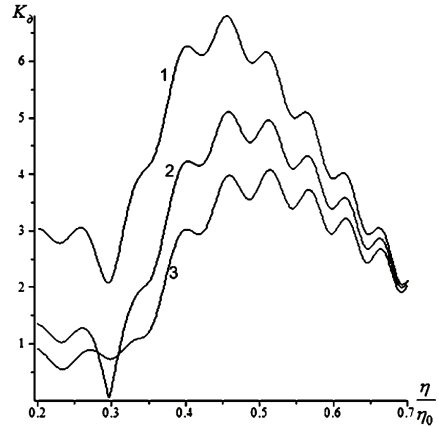


Рисунок 4 – Зависимость коэффициента динамичности K_d от η/η_0 при $\varepsilon = 0$; $\gamma = 0,2 \text{ c}^{-1}$

Эта зависимость несколько ослабевает с увеличением $|\gamma|$, что подтверждается графиками на рис. 5, которые получены при $\gamma = -0,8 \text{ c}^{-1}$.

Характерно, что в осцилляторе убывающей массы максимальные амплитуды колебаний достигаются не при $\eta/\eta_0 = 0,625$, а при меньших отношениях η/η_0 . Происходит смещение резонансной области влево.

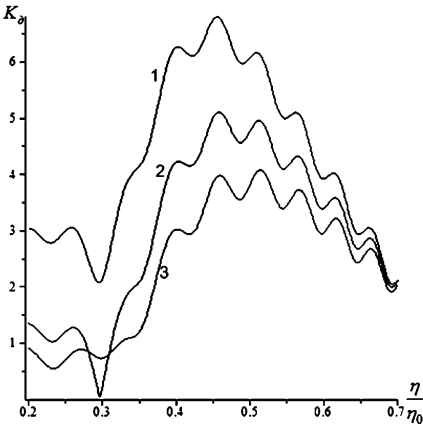


Рисунок 5 – Зависимость коэффициента динамичности K_d от η/η_0 при $\varepsilon = 0$; $\gamma = -0,8 \text{ c}^{-1}$

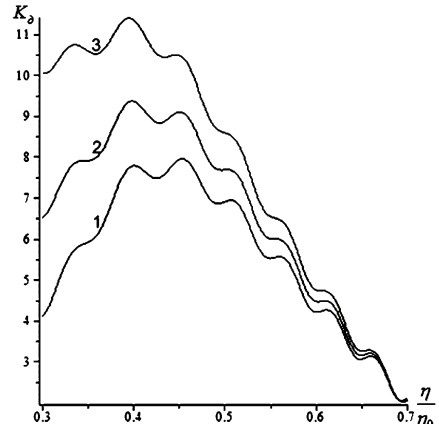


Рисунок 6 – Зависимость коэффициента динамичности K_d от η/η_0 при $\mu = 0$; $\gamma = -0,8 \text{ c}^{-1}$

На рис. 6 показана зависимость K_d от ε . Графики, отмеченные цифрами 1,2,3, соответствуют значениям $\varepsilon = 0; 0,5; 1$. Коэффициент динамичности воз-

растает с увеличением реактивной силы в осцилляторе убывающей массы, причем влияние K_δ от ε более существенно, чем на рис. 3.

Выводы. Амплитуды колебаний осциллятора в нестационарном резонансе существенно зависят от силы вязкого сопротивления. Максимум коэффициента динамичности достигается не при равенстве частот возмущающей силы и мгновенной собственной частоты осциллятора, а при некотором смещении отношения частот вправо при возрастании массы и влево – при ее убывании. Реактивная сила уменьшает амплитуды колебаний в осцилляторе возрастающей массы, а при убывании массы – увеличивает их. С увеличением модуля скорости изменения массы осциллятора, происходит уменьшение максимальных амплитуд колебаний в нестационарном резонансе.

Список литературы: 1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с. 2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с. 3. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И.Ф. Образцов, Б.В. Нерубайло, И.В. Андрианов. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с. 4. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p.

Поступила в редколлегию 25.06.2013

УДК 534.1

Резонансные колебания осциллятора линейно-переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 157-162. – Бібліогр.: 4 назв.

За допомогою ВБК – методу побудовано формули для обчислення коефіцієнта динамічності при переході через резонанс осцилятора лінійно-змінної маси під дією збуджуючої сили сталої частоти та амплітуди. Проведено розрахунки та проаналізовано вплив різних факторів: швидкості зміни маси, реактивної сили та сили в'язкого опору на амплітуди резонансних коливань.

Ключові слова: осцилятор, лінійно-змінна маса, резонанс, ВБК – метод.

With WBK method the formula to calculate the dynamics in the transition through the resonance oscillator linearly variable mass under the influence of the disturbing force of constant frequency and amplitude are constructed. The calculations and analyzes the influence of different factors: the rate of change in mass of reactive forces and viscous drag on the amplitude of resonant vibrations are performed.

Key words: an oscillator, linearly variable mass, resonance, WBK - method.

Э. С. ОСТЕРНИК, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ГП завод
Электротяжмаш, Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕКРЕМЕНТА КОЛЕБАНИЙ В МАГНИТОПРОВОДЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ТУРБОГЕНЕРАТОРА

Заблаговременно определено скалярное поле затухания в магнитопроводе турбогенератора. При накоплении статистических данных это позволит дать оценку его надежности с помощью кумулятивной модели отказов.

Ключевые слова: скалярное поле, затухание, магнитопровод, турбогенератор, надежность.

Введение, цель и постановка задачи. Ранее для оценки надежности турбогенератора рассматривались такие его механические характеристики, которые можно определить по окончании производства, в процессе стендовых и эксплуатационных исследований [1]. Сюда относятся механические напряжения и перемещения с их производными.

Вместе с этим целесообразно определить параметры, позволяющие оценить надежность основных узлов турбогенератора еще в процессе производства. Тогда можно при необходимости заблаговременно скорректировать состояние этих узлов, например магнитопровода статора.

Магнитопровод длиной до 5800 мм состоит из спрессованных сегментов листовой электротехнической ортотропной стали толщиной 0,5 или 0,35 мм. Эти кольцевые сегменты изолированы лаковой пленкой. Они имеют зубцовую зону и образуют продольные пазы, в которых помещаются токоведущие стержни статорной обмотки турбогенератора. Активная сталь статора совершает радиальные и тангенциальные, а в торцевых зонах – также аксиальные колебания [1]. В этих зонах возникают также термомеханические нагрузки.

Магнитопровод по длине делится на пакеты толщиной 45 или 50 мм. При радиальной системе его вентиляции эти пакеты отделяются каналами толщиной 10 или 5 мм с вентиляционными распорками, при осевой системе – стеклотекстолитовыми сегментами, аналогичными стальным.

В процессе производства турбогенератора мощностью 500 МВт динамика его магнитопровода была исследована еще до укладки обмотки, с ротором турбогенератора мощностью 300 МВт (свой ротор еще не был готов). Созданные на стенде нагрузки в режиме холостого хода соответствовали реальным. Оказалось, что уровень вибрации магнитопровода не превышает допустимого, и статор был пропущен в дальнейшее производство [2].

Из опыта ряда фирм известно, что в процессе длительной эксплуатации

под действием описанных выше колебаний плотность первоначально спрессованного магнитопровода снижается, особенно в торцевых зонах. Это может привести к пробое статорной обмотки, частичным выгораниям магнитопровода и другим дефектам. Такие аварии приводят к останову на ремонт, а иногда – к выходу турбогенератора из строя [3].

Снижение плотности магнитопровода соответствует росту его демпфирующих свойств, связанных с трением между сегментами. Кроме того, для ферромагнитных материалов, включая электротехническую сталь, существенным видом поглощения энергии является магнитоупругий гистерезис [4]. Как известно, демпфирование характеризуется декрементом колебаний δ . Имеющиеся значения δ , по данным эксплуатации [5], позволяют сравнить их с аналогичными результатами исследований нового магнитопровода и принять решение о его пропуске в дальнейшее производство или заблаговременной корректировке.

Методика испытаний. Ранее контроль плотности магнитопровода выполнялся с помощью ножевых устройств по глубине их забивания в наружную цилиндрическую поверхность. Этому контролю присуща значительная субъективность. Ножи могут повредить лаковую пленку сегментов.

Современный метод исследования плотности разработан ВНИИЭлектроэнергетики для магнитопроводов с радиальной системой вентиляции. Задача сводится к определению скорости ультразвука в осевом направлении для пакетов магнитопровода.

Турбогенераторы серии ТГВ мощностью 300 и 325 МВт имеют магнитопроводы статора с осевой системой вентиляции. Описанный в предыдущем абзаце метод к ним неприменим. Задача исследования плотности такого магнитопровода сводится к определению декремента колебаний δ .

Известен достаточно точный метод определения δ по ширине частотных характеристик или по частотному годографу, применимый для систем, проходящих хотя бы через первую резонансную частоту f_1 [6]. Однако конструкции статоров предусматривают, чтобы частота вынужденных колебаний 100 Гц была ниже f_1 [1].

Поэтому исследования проводились путем импульсного возбуждения радиальных свободных затухающих колебаний магнитопровода. Это направление колебаний является критериальным при нормировании вибронадежности статора. Колебания возбуждались ударами молотка с резиновым наконечником по зубцам магнитопровода, то есть из его расточки.

После опробования нескольких видов виброаппаратуры был выбран по критерию помехоустойчивости прибор фирмы RFT (Германия) типа SM-211, включающий в себя блок питания 11030, указатель 11025 и усилитель 11013 с пьезоакселерометром типа KD 38.

Обычно значение δ определяется по кривым собственных затухающих перемещений. Здесь декремент вычислялся по записи виброускорения [7].

Это позволило не вводить интегрирующие контуры прибора SM, что обеспечило достаточную чувствительность методики. Декремент (логарифмический декремент) вычислялся для малых затуханий по формуле

$$\delta = \frac{1}{i} \ln \frac{\ddot{q}_1}{\ddot{q}_i},$$

где \ddot{q} – амплитуда виброускорения, i – число полных периодов, взятых для обработки между \ddot{q}_1 и \ddot{q}_i .

Одновременно с декрементом δ по тем же записям определялась первая собственная частота радиальных колебаний магнитопровода f_1 .

Данные исследований. Параметры δ и f определяются на магнитопроводе статора после укладки, закрепления и запечки статорной обмотки. Аналогичные испытания проводились на месте эксплуатации во время ремонтов с целью контроля технического состояния.

Исследования выполнялись в пяти поперечных сечениях на расстояниях соответственно 0; 0,25; 0,50; 0,75 и 1,0 величины промежутка между шестью пакетами основных сегментов, находящимися по обоим торцам магнитопровода.

Данные по декременту колебаний содержатся в следующей таблице.

Таблица – Логарифмический декремент колебаний δ (непер)

Сечение	I	II	III	IV	V
δ_1	0,057	0,047	0,037	0,063	0,071
δ_2	0,049	0,041	–	0,055	0,076
$\bar{\delta}$	0,053	0,044	0,037	0,059	0,073

В каждом сечении, кроме III, измерения выполнялись дважды.

По усредненным данным из таблицы $\bar{\delta} = 0,037 \div 0,073$.

Значения $\bar{\delta}$ растут от середины к торцам магнитопровода.

Такие различия в магнитопроводе по δ позволяют говорить об эффективных значениях δ материала магнитопровода, а не об интегральном значении δ для магнитопровода в целом. Можно также говорить о скалярном поле δ в магнитопроводе.

Сравним этот результат с данными [5]. По упомянутым данным для турбогенераторов серии ТГВ мощностью 300 МВт $\delta = 0,023 \div 0,051$.

Сопоставление данных показывает, что декремент колебаний, то есть уровень затухания в турбогенераторе мощностью 325 МВт, выходит за рамки поля турбогенераторов мощностью 300 МВт.

В работе [5] сообщается также, что статор турбогенератора серии ТВВ мощностью 320 МВт (завод «Электросила» – Силовые машины) с сильным ослаблением плотности пакетов магнитопровода (из-за чего он и был списан) имел в крайних сечениях $\delta = 0,130 \div 0,140$. У нового статора такого же турбо-

генератора $\delta = 0,028 \div 0,049$.

Измерения параметра δ в процессе производства ранее не выполнялись.

Измерения собственной частоты радиальных колебаний магнитопровода показали, что $f_1 = 141,5$ Гц.

По данным [5], для турбогенераторов серии ТГВ мощностью 300 МВт частота находится в пределах $f_1 = 128 \div 162$ Гц.

Эти данные показывают, что магнитопроводы работают в дорезонансной области и подтверждают правильность выбора импульсной методики определения δ .

Отметим, что известны следующие способы повышения плотности прессовки магнитопровода статора в эксплуатации:

- 1 включение силовых аккумуляторов, имеющихся в турбогенераторе мощностью 325 МВт;
- 2 установка дополнительных стяжных устройств со шпильками с дифференциальной резьбой;
- 3 забивка стеклотекстолитовых клиньев – вставок, покрытых эпоксидным клеящим лаком [8].

По совокупности имеющейся информации было принято решение пропустить статор турбогенератора в дальнейшее производство, а также на монтаж и приемо-сдаточные испытания при условии выполнения следующих работ:

- 1 проводить контроль магнитопровода статора по стационарным вибропреобразователям в среднем и крайних сечениях во время приемо-сдаточных испытаний и в эксплуатации;
- 2 проводить контроль параметра прессовки плотности прессовки магнитопровода δ на месте установки;
- 3 при необходимости заблаговременно принимать меры для повышения плотности прессовки магнитопровода, перечисленные ранее, пользуясь данными виброконтроля по пп. 1 и 2.

О выборе оптимального давления прессовки магнитопровода. В настоящее время известные энергомашиностроительные фирмы применяют различный уровень удельного давления прессовки p [3]. Фирма «Альстом» применяет $p = 1,0 \div 1,2$ МПа, «Дженерал Электрик» – $1,4 \div 2,1$ МПа, «Крафтверкунион» – до 2,0 МПа. Установлено, что при повышении удельного давления осадка и, следовательно, уровень заполнения магнитопровода увеличиваются незначительно. Но высокие давления могут привести к нарушению целостности лаковой пленки [9].

С целью выбора p_{opt} решено исследовать образцы пакетов обычной толщины 50 мм, состоящих из квадратов 100×100 мм электротехнической стали, покрытой лаковой пленкой по известной технологии. Образцы прессуются в технологическом приспособлении давлениями p от 0,7 до 3,0 МПа через 0,1 или 0,2 МПа. При необходимости проводятся также предварительные подпрессовки давлениями $p' < p$ и подогревы пакетов.

На каждом образце определяется декремент колебаний δ . Путем тензометрии технологического приспособления с его предварительной тарировкой определяются коэффициент отдачи образца и равномерность распределения усилий отдачи по образцу [1].

Уровень заполнения пакета исследуется путем измерения осадки при прессовке и отдаче пакета. Измерения проводятся с помощью стрелочных индикаторов часового типа с ценой деления 0,01 или 0,002 мм.

Контролируются также качество изоляции лаковой пленкой и уровень потерь на вихревые токи и гистерезис в пакетах. Эксперименты проводятся на актуальной электротехнической стали, из которой фактически штампуются сегменты магнитопровода. Это позволит учесть реальные допуски на неплоскостность (волнистость) и разнотолщинность стали.

Решение о p_{opt} принимается по совокупности указанных параметров.

Выводы. В процессе производства определяются скалярное поле декремента колебаний в магнитопроводе и первая собственная частота его радиальных колебаний. Это позволяет заблаговременно либо пропустить статор турбогенератора в дальнейшее производство, либо скорректировать его состояние.

Целесообразно в дальнейшем накопить аналогичные статистические данные, включая динамику их изменений в процессе длительной эксплуатации. Это позволит применить к магнитопроводам методы теории надежности с помощью кумулятивной модели отказов [1]. Следует также определить оптимальное давление прессовки магнитопровода.

Список литературы: 1. *Остерник Э.С.* О механических параметрах для оценки надежности турбогенераторов // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. науч. тр. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – № 52. – 2011. – С. 142-156. 2. *Станиславский Л.Я., Гаврилов Л.Г., Остерник Э.С.* Вибрационная надежность турбогенераторов. – М.: 1985. – 240 с. 3. *Глебов И.А., Данилевич Я.Б.* Научные основы проектирования турбогенераторов. – Л.: 1986. – 184 с. 4. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем. – К.: 1965. – 716 с. 5. *Григорьев А.В., Осотов В.Н., Ямпольский Д.А.* О вибрационном контроле технического состояния статоров турбогенераторов ТГВ-300 // Электрические станции. – 1998. – № 8. – С. 27-35. 6. *Вибрации в технике.* – М.: 1981. – Т. 5. – 496 с. 7. *Иорши Ю.И.* Виброметрия. – М.: 1963. – 772 с. 8. *Руководство по капитальному ремонту турбогенератора ТГВ-300.* – М.: 1976. – 227 с. 9. *Технология крупного электромашиностроения.* В 3-х тт. Т. 1. *Циханович Б.Г., Фомин Б.П.* Турбогенераторы. – Л.: 1989. – 424 с.

Поступила в редколлегию 09.09.2013.

УДК 539.3:621.313

Исследование декремента колебаний в магнитопроводе для оценки надежности турбогенератора / Э. С. Остерник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 163-168. – Бібліогр.: 9 назв.

Завчасно визначено скалярне поле загасання в магнітопроводі турбогенератора. При накопиченні статистичних даних це дозволить дати оцінку його надійності за допомогою кумулятивної моделі відмов.

Ключові слова: скалярне поле, загасання, магнітопровід, турбогенератор, надійність.

We are determined the scalar field of damping in magnetic circuit of turbogenerator ahead the time. By accumulation of statistical data it will prevent to let reliability estimate by means of cumulative model of failures.

Keywords: scalar field, damping, magnetic circuit, turbogenerator, reliability.

УДК 629.7.05

Ю. А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХП»

СТЕПЕНЕВІ АЛГОРИТМИ ВИЗНАЧЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ ОРІЄНТАЦІЇ ТА ЇХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ МОДИФІКАЦІЇ

На основе разложения частного решения кинематического уравнения в кватернионах в ряд по степеням кажущихся поворотов получены степенные алгоритмы определения ориентации и их интерполяционные модификации. Показано, что учет динамики вращения твердого тела в алгоритмах приводит к повышению точности определения ориентации.

Ключевые слова: кватернион, ориентация, бесплатформенная инерциальная система

Вступ і постановка задачі. До алгоритмів визначення орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) пред'являються жорсткі вимоги по точності визначення параметрів орієнтації і завантаженню автономного обчислювача на такті. Це обумовлено тим, що алгоритм визначення орієнтації в БІНС математично відтворює інерціальну систему координат, тобто виступає в ролі «аналітичної платформи».

Для визначення поточної орієнтації триєдра зв'язаних осей відносно інерціального триєдра осей в БІНС в автономному обчислювачі на кожному такті $[t_{n-1}, t_n]$ реалізується алгоритм визначення кватерніонів орієнтації, який використовує первинну інформацію про обертання твердого тіла на такті у вигляді приростів інтегралів від проекцій вектора абсолютної кутової швидкості тіла $\vec{\omega}$ на зв'язані осі (позірні повороти) [1]:

$$\theta_{n,i}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Повна орієнтація при цьому обчислюється за формулою додавання поворотів

$$A_n^* = A_{n-1}^* \circ \Delta A_n^*, \quad (2)$$

де $A_n^* = A^*(t_n)$, $A_{n-1}^* = A^*(t_{n-1})$ – обчислені кватерніони орієнтації в момен-

© Ю. А. Плаксий, 2013

ти часу t_n та t_{n-1} відповідно, $\Delta\lambda_n^* = \Delta\lambda(\theta_n^*)$ – алгоритм визначення повороту (прийняте наближення до частинного розв’язку кінематичного рівняння $\dot{A} = 0,5A \circ \bar{\omega}$ з початковою умовою $A(0) = (1,0,0,0)^T$), \circ – знак кватерніонно-го множення.

Існуючі алгоритми визначення повороту базуються на формальних розкладеннях частинного розв’язку $\Delta\lambda_n$ в ряд по степенях кінцевих різниць «назад» вектора позірнього повороту $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)^T$ [1]. При цьому не враховується той факт, що $\bar{\omega}$ є розв’язком відповідних динамічних рівнянь.

В роботі [2] отримане розкладення 5-го порядку частинного розв’язку $\Delta\lambda_n$ в ряд по степенях позірних поворотів (1) у вигляді:

$$\Delta\lambda_0 = 1 - \frac{1}{8}\theta^{*2} + \frac{1}{384}\theta^{*4} + O(\theta^{*5}); \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_1 = & \frac{1}{2}\theta_1^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta^{*2} - \frac{1}{12}b_1\right) - \frac{1}{24}\eta_1 + \frac{1}{3840}\theta_1^*\theta^{*4} + \frac{1}{1440}\theta_1^*(a_1b_1(a_2\theta_3^{*2} + \\ & + a_3\theta_2^{*2}) + a_2b_2\theta_3^{*2} - a_3b_3\theta_2^{*2}) + \frac{1}{720}a_2a_3b_1\theta_1^{*3} + \frac{1}{480}\theta_1^*(a_2b_3\theta_3^{*2} - a_3b_2\theta_2^{*2}) + \\ & + \frac{1}{960}b_1\theta_1^*\theta^{*2} + \frac{1}{1440}(b_2\mu_2\theta_3^* - b_3\mu_3\theta_2^* + \theta_1^*(a_3\mu_2^2 - a_2\mu_3^2) + a_1(a_2\mu_2\theta_3^{*2} - \\ & - a_3\mu_3\theta_2^{*2})) + \frac{1}{960}\eta_1\theta^{*2} + \frac{1}{720}a_1\rho_1\theta_2^*\theta_3^* + \frac{1}{480}(\mu_1\rho_1 - a_1\gamma_1 - a_2a_3\eta_1 - \theta_1^*(\mu_2^2 + \\ & + \mu_3^2)) + \frac{1}{360}\mu_1((a_2 + a_3)\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^* - \gamma_1) - \frac{1}{240}\theta_1^{*2}(a_2\mu_2\theta_3^* + a_3\mu_2\theta_2^*) + O(\theta^{*6}), \\ & (1,2,3), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\theta^{*2} = \theta_1^{*2} + \theta_2^{*2} + \theta_3^{*2}$; $a_1 = (I_2 - I_3)/I_1$, (1,2,3); I_1, I_2, I_3 – моменти інерції твердого тіла ($I_1 \geq I_2 \geq I_3$); $m_1 = M_1/I_1$, (1,2,3) – проекції приведенного вектора головного моменту \bar{M} на зв’язані осі; $b_1 = a_2\theta_3^{*2} - a_3\theta_2^{*2}$, (1,2,3); $\eta_1 = \mu_2\theta_3^* - \mu_3\theta_2^*$, (1,2,3); $\gamma_1 = a_2\mu_3\theta_3^* - a_3\mu_2\theta_2^*$, (1,2,3); $\rho_1 = \mu_2\theta_2^* + \mu_3\theta_3^*$, (1,2,3); (1,2,3) – символ кругової перестановки індексів.

Необхідно на основі розкладення (3), (4) побудувати алгоритми визначення повороту, що використовують тільки степені першої різниці вектора позірнього повороту, і отримати їх інтерполяційні модифікації.

Степеневі алгоритми визначення повороту і їх інтерполяційні модифікації. В умовах, коли на такті $[t_{n-1}, t_n]$ з’яому первинної інформації (1) приведені моменти m_i можна вважати постійними $m_i = m_i(t_{n-1})$ та обмеженими за величиною $|m_i| = O(\omega^2)$, $i = 1, 2, 3$, де $\omega = \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |\bar{\omega}(t)|$, з розкладень (3),

(4) можна отримати алгоритми визначення кватерніона повороту $\Delta\lambda_n^* = (\Delta\lambda_{n0}^*, \Delta\lambda_{n1}^*, \Delta\lambda_{n2}^*, \Delta\lambda_{n3}^*)^T$ різного порядку. Такі алгоритми назовемо степеневими, бо вони використовують тільки першу різницю вектора позір-ного повороту у вигляді (1). Алгоритми першого та другого порядку співпадають з різницеви-ми алгоритмами, отриманими в [1].

Степеневий алгоритм визначення повороту третього порядку (САВПЗ) має вигляд:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (5)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}b_1\right) - \frac{1}{24}\eta_1, \quad (1,2,3), \quad (6)$$

де $\theta_n^{*2} = \theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}$; $b_1 = a_2\theta_{n3}^{*2} - a_3\theta_{n2}^{*2}$, (1,2,3); $\eta_1 = \mu_2\theta_{n3}^* - \mu_3\theta_{n2}^*$, (1,2,3) і позначено $\mu_i = m_i(\Delta t)^2$, $i = 1,2,3$. Зазначимо, що $\mu_i = O(\theta_0^2)$, де $\theta_0^2 = \theta_{01}^2 + \theta_{02}^2 + \theta_{03}^2$, $\bar{\theta}_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T$ – вектор лінійного повороту [2], $\theta_{0i} = \omega_{i0} \cdot \Delta t$, ω_{i0} , $i = 1,2,3$ – компоненти вектора $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}(t_{n-1})$.

Степеневий алгоритм визначення повороту четвертого порядку (САВП4) задається формулами:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (7)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}b_1\right) - \frac{1}{24}\eta_1, \quad (1,2,3), \quad (8)$$

тобто відрізняється від алгоритму САВПЗ тільки доданком $\frac{1}{384}\theta_n^{*4}$ в скалярній частині кватерніона визначення повороту. Вплив динаміки обертання твердого тіла на орієнтацію визначається наявністю членів в векторній частині кватерніона визначення повороту в алгоритмах третього та четвертого порядку, які залежать від значень приведених моментів m_i на такті з'яому первинної інформації (1) і динамічних коефіцієнтів a_i .

У випадку вільного руху твердого тіла ($m_i = 0$, $i = 1,2,3$) алгоритми визначення повороту (5), (6) та (7), (8) набувають більш простого вигляду. Так, для степеневих алгоритмів третього порядку (САВПВОЗ) маємо:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (9)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}(a_2\theta_{n3}^{*2} - a_3\theta_{n2}^{*2})\right), \quad (1,2,3). \quad (10)$$

Відповідні формули для алгоритму четвертого порядку (САВПВО4) для випадку вільного обертання твердого тіла мають вигляд:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (11)$$

$$\Delta\lambda_{n1}^* = \frac{1}{2}\theta_{n1}^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2} - \frac{1}{12}(a_2\theta_{n3}^{*2} - a_3\theta_{n2}^{*2})), \quad (1,2,3). \quad (12)$$

Формули (6), (8), (10), (12) містять приведені моменти m_i і динамічні коефіцієнти a_i , які на практиці, звичайно, відомі з деякою похибкою. Це може внести додаткову складову в загальну похибку визначення орієнтації. Таким чином у приведеному вигляді алгоритми САВП3, САВП4, САВПВО3, САВПВО4 не можна безпосередньо застосувати в автономному обчислювачі для визначення кватерніона повороту. Наведені алгоритми мають, насамперед, методологічне значення, бо констатують наявний зв'язок кінематичних параметрів з динамікою обертання твердого тіла.

Для отримання розрахункових алгоритмів визначення повороту на основі розкладення (3), (4) використаємо отриманий в [2] зв'язок між проекціями вектора лінійного повороту $\bar{\theta}_0 = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T$ і проекціями вектора позірного повороту $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)^T$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \theta_{01} = & \theta_{n1}^* - \frac{1}{2}(a_1\theta_{n2}^*\theta_{n3}^* + \mu_1) + \frac{1}{12}a_1(\theta_{n1}^*(a_2\theta_{n3}^{*2} + a_3\theta_{n2}^{*2}) + (\mu_2\theta_{n3}^* + \mu_3\theta_{n2}^*)) - \\ & - \frac{1}{24}a_1(\theta_{n1}^*(a_2a_3\theta_{n1}^*\theta_{n2}^*\theta_{n3}^* + a_2\mu_3\theta_{n3}^* + a_3\mu_2\theta_{n2}^*) + \mu_2\mu_3) + O(\theta_n^{*5}), \quad (1,2,3). \quad (13) \end{aligned}$$

Оскільки $\mu_i = O(\theta_n^{*2})$, то з (13) можна виразити μ_i через компоненти векторів позірного та лінійного поворотів:

$$\mu_i = 2\theta_{n1}^* - 2\theta_{01} - a_1\theta_{n2}^*\theta_{n3}^*, \quad (1,2,3). \quad (14)$$

Виключимо μ_i в виразах для векторної частини кватерніона повороту САВП3 і САВП4, при цьому автоматично виключаться також динамічні коефіцієнти a_i . Отримаємо в результаті нескладних перетворень, що

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{12}(\bar{\theta}_0 \times \bar{\theta}_n^*). \quad (15)$$

На основі формули (15) можна отримати цілу низку алгоритмів визначення кватерніона повороту, якщо представити вектор лінійного повороту $\bar{\theta}_0$ на такті $[t_{n-1}, t_n]$ в функції первинної інформації виду (1) на такті $[t_{n-1}, t_n]$, з попередніх тактів, а також у випадку, коли точками з'йому позірних поворотів є внутрішні точки такту $[t_{n-1}, t_n]$. Очевидно, щоб порядок точності таких апроксимаційних алгоритмів відповідав порядку точності алгоритмів САВП3, САВП4, треба при апроксимації $\bar{\theta}_0$ забезпечити відповідний порядок по $\bar{\theta}_n^*$.

Якщо представити $\bar{\theta}_0$ як середньоарифметичне позірних поворотів на сусідніх тактах $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ і $[t_{n-1}, t_n]$, тобто

$$\bar{\theta}_0 = (\bar{\theta}_{n-1}^* + \bar{\theta}_n^*) / 2, \quad (16)$$

то підстановка цього наближення в (15) приводить до відомого різницевого алгоритму третього порядку, який приведений в [1]:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (17)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{24}(\bar{\theta}_{n-1}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (18)$$

Застосуємо для визначення $\bar{\theta}_0$ квадратичну інтерполяцію для $\bar{\theta}_n^*$ на такті $[t_{n-1}, t_n]$ в умовах $\bar{\theta}_n^*(t_{n-1}) = 0$:

$$\bar{\theta}_n^* = \bar{a}\tau^2 + \bar{b}\tau, \quad \tau \in [0, \Delta t], \quad (19)$$

що відповідає вектору кутової швидкості на такті $[t_{n-1}, t_n]$ у вигляді

$$\bar{\omega} = 2\bar{a}\tau + \bar{b}, \quad \tau \in [0, \Delta t],$$

де $\bar{\omega}_0 = \bar{b}$.

Для визначення $\bar{\theta}_0 = \bar{\omega}_0 \Delta t$ розглянемо дві точки з'йому первинної інформації: $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ та деяку внутрішню точку такту $t_{n-1+p} = t_{n-1} + p\Delta t$, $p \in (0,1)$ і позначимо відповідні позірні повороти як $\bar{\theta}_n^*$ та $\bar{\theta}_{n-1+p}^*$, тобто $\bar{\theta}_n^* = \bar{a}(\Delta t)^2 + \bar{b}\Delta t$, $\bar{\theta}_{n-1+p}^* = \bar{a}(p\Delta t)^2 + \bar{b}(p\Delta t)$. В результаті розв'язання системи лінійних рівнянь відносно \bar{a} та \bar{b} отримаємо, що:

$$\bar{\theta}_0 = \frac{\bar{\theta}_{n-1+p}^* - p^2\bar{\theta}_n^*}{p(1-p)}, \quad p \in (0,1). \quad (20)$$

Задамо $p = 0,5$, що відповідає внутрішній точці з'йому посередині такту, тобто $t_{n-1/2} = t_{n-1} + 0,5\Delta t$. В цьому випадку з (20) маємо наступну апроксимацію для вектора лінійного повороту:

$$\bar{\theta}_0 = 4\bar{\theta}_{n-1/2}^* - \bar{\theta}_n^*. \quad (21)$$

Підстановка $\bar{\theta}_0$ (21) в формулу (15) дає для векторної частини кватерніона повороту наступний вираз:

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{3}(\bar{\theta}_{n-1/2}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (22)$$

Таким чином, для двох точок з'йому позірних поворотів маємо інтерполяційний алгоритм визначення повороту 3-го порядку (АВП3і2) у вигляді:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (23)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{3}(\bar{\theta}_{n-1/2}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (24)$$

Відповідний алгоритм визначення повороту 4-го порядку (АВП4і2) записється так:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (25)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{3}(\bar{\theta}_{n-1/2}^* \times \bar{\theta}_n^*). \quad (26)$$

Застосуємо кубічну інтерполяцію для $\bar{\theta}_n^*$ на такті $[t_{n-1}, t_n]$ в умовах $\bar{\theta}_n^*(t_{n-1}) = 0$:

$$\bar{\theta}_n^* = \bar{a}\tau^3 + \bar{b}\tau^2 + \bar{c}\tau, \quad \tau \in [0, \Delta t]. \quad (27)$$

Для вектора кутової швидкості маємо представлення:

$$\bar{\omega} = 3\bar{a}\tau^2 + 2\bar{b}\tau + \bar{c}, \quad \tau \in [0, \Delta t],$$

де $\bar{\omega}_0 = \bar{c}$.

Для визначення $\bar{\theta}_0$ використаємо три точки з'йому первинної інформації: точку $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ та дві внутрішні точки такту $t_{n-1+p} = t_{n-1} + p\Delta t$ та $t_{n-1+m} = t_{n-1} + m\Delta t$, $p \in (0,1)$, $m \in (0,1)$, $p \neq m$. Відповідні позірні повороти позначимо як $\bar{\theta}_n^*$, $\bar{\theta}_{n-1+p}^*$ та $\bar{\theta}_{n-1+m}^*$. Після розв'язання системи лінійних рівнянь відносно \bar{a} , \bar{b} та \bar{c} отримаємо, що:

$$\bar{\theta}_0 = \frac{p^2 m^2 (p-m)\bar{\theta}_n^* + m^2 (m-1)\bar{\theta}_{n-1+p}^* + p^2 (1-p)\bar{\theta}_{n-1+m}^*}{pm(p-m)(1-p-m+pm)}, \quad (28)$$

де $p \in (0,1)$, $m \in (0,1)$, $p \neq m$.

Задамо $p = 1/3$; $m = 2/3$, тобто виберемо внутрішні точки з'йому t_{n-1+p} , t_{n-1+m} так, що $t_n - t_{n-1+m} = t_{n-1+p} - t_{n-1} = 1/3 \Delta t$. За таких умов з (28) маємо:

$$\bar{\theta}_0 = -(9/2)\bar{\theta}_{n-2/3}^* + 9\bar{\theta}_{n-1/3}^* + \bar{\theta}_n^*, \quad (29)$$

де позначено $\bar{\theta}_{n-2/3}^* = \bar{\theta}^*(t_{n-2/3})$, $t_{n-2/3} = t_{n-1} + 1/3 \Delta t$, $\bar{\theta}_{n-1/3}^* = \bar{\theta}^*(t_{n-1/3})$, $t_{n-1/3} = t_{n-1} + 2/3 \Delta t$.

Підстановка (29) в (15) дає:

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{3}{8}(2\bar{\theta}_{n-2/3}^* - \bar{\theta}_{n-1/3}^*) \times \bar{\theta}_n^*.$$

Отже, для трьох точок з'йому позірних поворотів t_n , $t_{n-2/3}$, $t_{n-1/3}$ маємо інтерполяційний алгоритм визначення повороту 3-го порядку (АВПЗі3) у вигляді:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}; \quad (30)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^*(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{3}{8}(2\bar{\theta}_{n-2/3}^* - \bar{\theta}_{n-1/3}^*) \times \bar{\theta}_n^*. \quad (31)$$

Відповідний алгоритм визначення повороту 4-го порядку (АВП4і3) задається формулами:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2} + \frac{1}{384}\theta_n^{*4}; \quad (32)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\bar{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{3}{8}(2\bar{\theta}_{n-2/3}^* - \bar{\theta}_{n-1/3}^*) \times \bar{\theta}_n^*. \quad (33)$$

Відзначимо, що на відміну від різницевих алгоритмів визначення повороту, наведених в [1], інтерполяційні алгоритми АВП3і2, АВП4і2, АВП3і3, АВП4і3 використовують позірні повороти у внутрішніх точках такту $[t_{n-1}, t_n]$ і не потребують «розгонки».

Чисельний експеримент. Для отримання оцінок методичних похибок розроблених інтерполяційних алгоритмів визначення повороту АВП3і2, АВП4і2, АВП3і3, АВП4і3 застосуємо аналітичну еталонну модель регулярної прецесії [3], що включає в себе аналітичні вирази для позірних поворотів:

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (34)$$

де $\theta_1(t) = 2a \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \psi) / k$, $\theta_2(t) = -2a \sin \alpha_1 \sin(\alpha_1 + \psi) / k$, $\theta_3(t) = \omega_3(0) \cdot t$, яким відповідає точний кватерніон орієнтації $\Lambda(t)$ з компонентами:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - r \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \\ \lambda_1(t) &= a \sin \alpha_2 \cos(\alpha_1 + \psi) / v; \\ \lambda_2(t) &= -a \sin \alpha_2 \sin(\alpha_1 + \psi) / v; \\ \lambda_3(t) &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + r \cos \alpha_1 \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (35)$$

де позначено: $a = (\omega_1^2(0) + \omega_2^2(0))^{1/2}$, $k = (1 - \xi_2)\omega_3(0)$, $\xi_2 = I_3 / I_1$, $\cos \psi = \omega_1(0) / a$, $\sin \psi = -\omega_2(0) / a$, $v = (a^2 + \xi_2^2 \omega_3^2(0))^{1/2}$, $r = \xi_2 \omega_3(0) / v$, $\alpha_1 = 0,5kt$, $\alpha_2 = 0,5\omega t$.

В якості похибки алгоритмів будемо розглядати похибку дрейфу [1], яка, на відміну від похибки норми кватерніона орієнтації Λ_n^* , є неусувною.

На рис. 1 показана отримана за допомогою еталонної моделі регулярної прецесії (34), (35), реалізованої на інтервалі часу $t \in [0; 2000]$ с з тактом $\Delta t = 0,1$ с при $\xi_2 = 12/35$ і початкових умовах $\vec{\omega}(0) = (0,012; -0,011; 0,015)$ рад/с, $\Lambda(0) = (1,0,0,0)^T$ оцінка похибки дрейфу для алгоритму визначення повороту (17), (18), який має третій порядок точності і позначений тут як АВПБШЗ. На рис. 2 представлена оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП3і2 (23), (24). Отримано, що для вказаної еталонної моделі похибка дрейфу алгоритму АВП3і2 приблизно на два порядки менша, ніж для алгоритму АВПБШЗ.

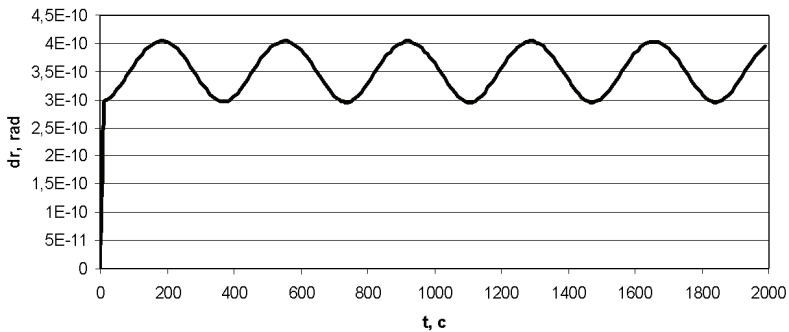


Рисунок 1 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВПБШЗ

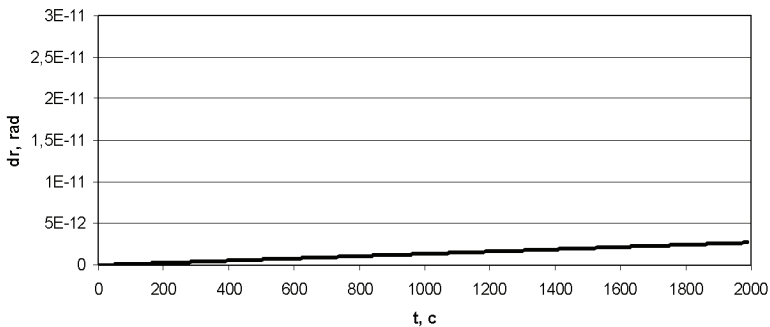


Рисунок 2 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВПЗі2

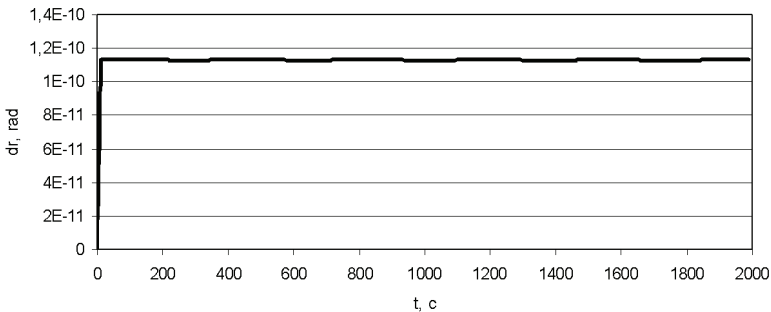


Рисунок 3 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВПБШ4

На рис. 3 представлена оцінка похибки дрейфу для алгоритму четвертого порядку, наведеного в [1], який позначимо як АВПБШ4. Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП4і2 (25), (26) показана на рис. 4. Порівняння результатів дозволяє зробити висновок, що алгоритм АВП4і2 має значно меншу похибку дрейфу, ніж різницевий алгоритм АВПБШ4.

Похибки дрейфу для алгоритмів АВПЗі3 (30), (31) і АВП4і3 (32), (33)

мають приблизно однакові значення (рис. 5), вони гірші, ніж для алгоритмів АВП3і2 і АВП4і2, але кращі, ніж для алгоритмів АВПБШ3 і АВПБШ4.

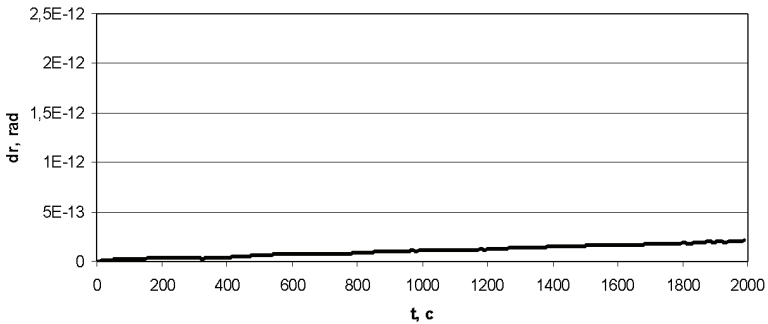


Рисунок 4 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму АВП4і2

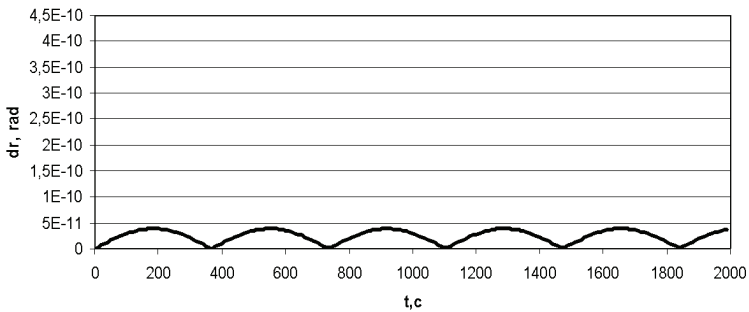


Рисунок 5 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритмів АВП3і3 і АВП4і3

Висновки. На основі отриманого в [2] розкладення 5-го порядку частинного розв’язку кінематичного рівняння в кватерніонах в степеневий ряд в термінах першої різниці вектора позірного повороту (1) одержані алгоритми третього та четвертого порядку, векторна частина кватерніона повороту яких явно залежить від динамічних коефіцієнтів a_i і приведених моментів m_i . Для степеневих алгоритмів побудовані їх інтерполяційні модифікації, що не містять динамічні коефіцієнти і приведені моменти. Це можливо за рахунок використання інформації про позірні повороти, що зняті у внутрішніх точках такту $[t_{n-1}, t_n]$. На еталонній моделі регулярної прецесії показано, що інтерполяційні модифікації степеневих алгоритмів мають підвищені точносні характеристики у порівнянні з відомими різницевиими алгоритмами.

Список літератури: 1. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский. – М.: Наука, 1973. – 320 с. 2. Плаксий Ю.А. Разложение 5-го порядка частного решения кинематического уравнения в кватернионах в ряд по степеням кажущихся поворотов / Ю.А.Плаксий // Вісник НТУ «ХП». – 2009. – № 42. – С. 137–141. 3. Плаксий Ю.А. Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах

УДК 629.7.05

Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації / Ю. А. Плакий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 168-177. – Бібліогр.: 3 назв.

На основі розкладення частинного розв'язку кінематичного рівняння в кватерніонах в ряд по степенях позірних поворотів отримані степеневі алгоритми визначення орієнтації та їх інтерполяційні модифікації. Показано, що врахування динаміки обертання твердого тіла в алгоритмах приводить до підвищення точності визначення орієнтації.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, безплатформена інерціальна навігаційна система

The orientation algorithms, based on the decomposition of the particular solution of the quaternion kinematic equation in the degree series of seeming turns, and their interpolation modifications are received. It is shown that the considering of a rigid body dynamics in algorithms gives orientation definitions to accuracy increase.

Keywords: quaternion, orientation, strapdown inertial navigation system

УДК 539.3

И. В. ФАУСТ, аспирант, НТУ «ХПИ»;

К.В.АВРАМОВ, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАРУНЕНА-ЛОЭВА ДЛЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ МОД КОЛЕБАНИЙ АРОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Применен метод Карунена-Лоева к исследованию колебаний арочных конструкций при их нелинейном деформировании.

Ключевые слова: метод Карунена-Лоева, колебания, арочные конструкции.

1 Введение. Пологие конструкции используются в различных отраслях техники. Например, они применяются в электромеханическом оборудовании для переключения режимов работы оборудования. Арочные конструкции используются для изоляции и гашения колебаний [1, 2].

Метод ортогональной декомпозиции был разработан независимо в раз-

личных областях науки. В механики жидкостей этот метод был предложен Каруненом и Лозе. Они его предложили, опираясь на работу Ламли [3]. Базисные функции, которые определяются вследствие его применения, в разных источниках называются: эмпирические собственные функции, эмпирические базисные функции и эмпирические нормальные функции [4]. Декомпозиции Карунена-Лозе широко применяются в механике жидкости [5-7]. Для исследования нелинейной динамики конструкций этот метод применялся в работах Вакакиса с соавторами [8, 9].

В данной работе моды Карунена-Лозе (К-Л) извлекаются из моделирования геометрически нелинейного деформирования арочных конструкций, которые описываются интегро-дифференциальным уравнением в частных производных. Метод сеток применяется для приведения уравнений в частных производных к нелинейной динамической системе с конечным числом степеней свободы большой размерности. Результаты прямого численного интегрирования этой системы являются основой для применения метода Карунена-Лозе.

2 Декомпозиция Карунена-Лозе. К-Л декомпозиция позволяет из некоторого динамического поля $u(x,t)$ определить систему базисных функций, которая используется для получения из системы уравнений в частных производных, описывающих это поле, нелинейную динамическую систему с конечным числом степеней свободы. Отметим, что динамическое поле конструкции $u(x,t)$ определено в пространственной области Ω . Разложим, это поле $u(x,t)$ на среднее $u(x) = \langle u \rangle$ и переменное по времени $v(x,t)$ так:

$$u(x,t) = u(x) + v(x,t). \quad (1)$$

Из представленного ниже анализа следует, что поля $u(x,t)$, $v(x,t)$ задаются в виде сеточной пространственно – временной функции. Функцию $v(x,t)$ представим в виде временного ряда $\{v_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Отметим, что каждая функция $v_n(x)$ зависит от пространственной координаты. Будем искать функцию $\varphi(x)$, которая наилучшим образом описывает все временные реализации $v_n(x)$. Эта задача может быть сформулировано так:

$$\min \left\{ \sum_{n=1}^N (\varphi(x) - v_n(x))^2 \right\}. \quad (2)$$

Данная минимизация проводится поточечно для различных значений x . В дальнейшем будет показано, что (2) сводится к проблеме собственных значений. Потребуем, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла следующему условию нормировки:

$$\int_{\Omega} \varphi^2(x) dx = 1. \quad (3)$$

В работе [4, 5] показано, что минимизация функционала (2) сводится к максимизации скалярного произведения:

$$(v_n, \varphi) = \int_{\Omega} v_n(x) \varphi(x) d\Omega. \quad (4)$$

Задачу представим в виде максимизации среднего значения, которое запишем так:

$$\langle \varphi, v_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\varphi, v_n).$$

В дальнейшем максимизируем $\langle \varphi, v_n \rangle^2$. Эту задачу можно записать так:

$$\max(\lambda); \quad \lambda = \left\langle \frac{(\varphi, v)^2}{(\varphi, \varphi)} \right\rangle. \quad (5)$$

Числитель, входящий в функционал (5), представим так:

$$\langle (\varphi, v)^2 \rangle = \left\langle \int_{\Omega} \varphi(x) v_n(x) dx \int_{\Omega} \varphi(x') v_n(x') dx' \right\rangle = \int_{\Omega} \left\langle v_n(x) v_n(x') \right\rangle \varphi(x) \varphi(x') dx. \quad (6)$$

Введем функцию

$$K(x, x') = \langle v_n(x), v_n(x') \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_n(x) v_n(x') \quad (7)$$

и линейный оператор R от этой функции:

$$R(\cdot) \equiv \int_{\Omega} K(x, x') (\cdot) dx'. \quad (8)$$

Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\langle (\varphi, v_n)^2 \rangle = \int_{\Omega} \{R\varphi\} \{\varphi\} dx = (R\varphi, \varphi). \quad (9)$$

Тогда задачу максимизации можно представить в виде операторной проблемы собственных значений:

$$R\varphi = \lambda\varphi. \quad (10)$$

В дальнейшем, воспользуемся методом, предложенным в [10]. Функцию $\varphi(x)$ разложим по временным реализациям:

$$\varphi(x) = \sum_k \alpha_k v_k(x). \quad (11)$$

Тогда проблема собственных значений представляется в матричном виде так:

$$[C]\{\alpha\} = \lambda\{\alpha\}, \quad (12)$$

где $\{\alpha\} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]$; элементы матрицы $[C]$ определяются так:

$$C_{nk} = \frac{1}{N} \int_{\Omega} v_n(x) v_k(x') dx'.$$

Отметим, что матрица $[C]$ является симметричной и положительно определенной. Собственные значения (12) расположим в порядке убывания так: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$. Первые p доминирующие собственные моды К-Л выбира-

ются из условия:

$$\frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \geq 0.999. \quad (13)$$

3 Уравнения колебаний пологой арки. Колебания арки с амплитудами, соизмеримыми с ее толщиной, опишем следующим уравнением в частных производных:

$$\frac{EA}{2L} y_{xx} \int_0^L \left\{ \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} dx + EI(y - y_0)_{xxxx} + \rho A y_{tt} = 0, \quad (14)$$

где $y_0(x)$ – начальные несовершенства арки; $y(x,t)$ – прогиб арки; EI – изгибная жесткость арки; A – площадь поперечного сечения арки; ρA – масса единицы длины арки; L – длина арки. Величина

$$\frac{EA}{2L} \int_0^L \left\{ \left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} dx$$

описывает цепные усилия, возникающие в арке; $\rho A y_{tt}$ – инерционная сила единицы длины. При умеренных амплитудах величины цепных усилий являются значительными. Начальные несовершенства арки представим так:

$$y_0 = \lambda_1 \sin(\pi x/L). \quad (15)$$

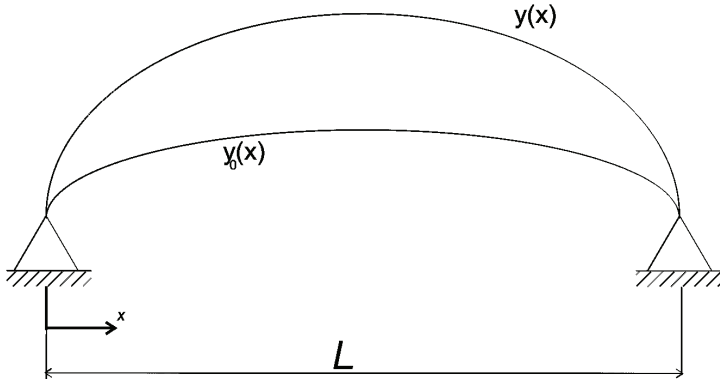


Рисунок 1 – Эскиз арки

Введем следующие безразмерные переменные:

$$u_0 = \frac{y_0}{\lambda_1}; \quad u = \frac{y}{\lambda_1}; \quad \xi = \frac{\pi}{L} x; \quad \tau = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \lambda_1 t. \quad (16)$$

Тогда уравнения движения арки в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\frac{u_{\xi\xi}}{2\pi} \int_0^L \{u_{0,\xi}^2 - u_{\xi}^2\} d\xi + EI(u - u_0)_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\tau\tau} = 0; \quad (17)$$

$$u_0 = \sin(\xi).$$

Для дискретизации уравнения (17) применяется метод конечных разностей. Использовались следующие соотношения:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_i \approx (u_{i-1} - u_i) \cdot \frac{1}{h};$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right|_i \approx (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \cdot \frac{1}{h^2};$$

$$\left. \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} \right|_i \approx (u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) \cdot \frac{1}{h^4}.$$

Тогда уравнение в частных производных (14) преобразуется к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 u_i}{d\tau^2} + \varepsilon \left[\frac{1}{h^4} (u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) - \sin(\xi_i) \right] - \frac{1}{4\pi h} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})$$

$$\times \sum_{j=1}^{n+1} \left[\frac{1}{h^2} ((u_{j-2} - u_{j-1})^2 + (u_{j-1} - u_j)^2) - (\cos^2(\xi_{j-1}) + \cos^2(\xi_j)) \right] = 0;$$

$$i = 1, \dots, M,$$

где $\xi_i = ih$; $\varepsilon = \frac{r^2}{\lambda_1^2}$.

Так как рассматриваемая арка является шарнирно-опертой, то граничные условия представим так:

$$u_0 = 0;$$

$$u_{n+1} = 0;$$

$$u_{-1} - 2u_0 + u_1 = 0;$$

$$u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} = 0.$$

Начальные условия для динамической системы (18) выбирались следующими:

$$u_i(0) = 0,024 \sin(\xi_i) + 1,263 \sin(2\xi_i);$$

$$\left. \frac{du_i}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0;$$

$$i = \overrightarrow{1, n}.$$
(20)

4 Численные исследования. Для исследования динамики арки, система (18) интегрировалась численно методом Мерсона при различном числе точек дискретизации арки M . Число M варьировалось от 30 до 100. Каждый шаг численного интегрирования давал новую функцию временного ряда $v_n(x)$; $n = 1, \dots, N$. Число N членов временного ряда выбирались равным 400. Эти временные реализации использовались для расчета матрицы $[C]$. Рассчитывались собственные значения матрицы $[C]$ на основании соотношений (12).

Таблица – Результаты расчета собственных значений

	λ_i
1	0,3488
2	0,0078
3	8,64E-17

Отметим, что для различного числа точек дискретизации арки M собственные значения арки λ_i являются близкими. Результаты расчета собственных значений приведены в таблице. Отметим, что величина собственного значения выше третьего чрезвычайно мала. Она имеет порядок 10^{-17} . Теперь используя условия (13), определим число доминирующих собственных мод p . Из анализа собственных значений следует, что это число $p = 2$. По результатам расчета собственных векторов, сформированы собственные моды колебаний $\varphi_i(x)$. К-Л. моды колебаний для различного числа точек дискретизации арки M чрезвычайно близки. Первые две моды колебаний К-Л приведены на рис. 2.

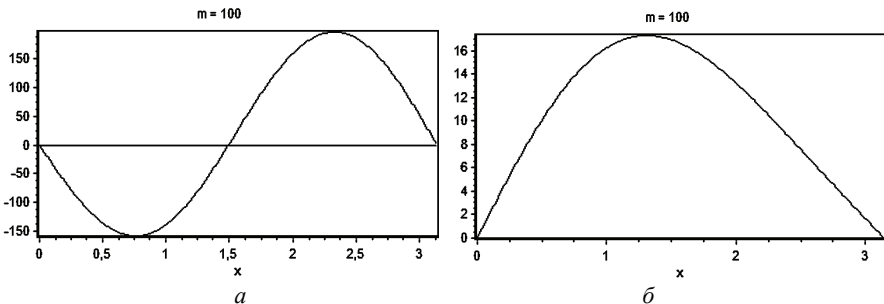


Рисунок 2 – Карунена-Лозве моды колебаний: a – первая мода, b – вторая мода

Выводы. В статье рассмотрен случай, когда амплитуды колебаний полой арки малы и система не прощелкивает между тремя состояниями равновесия. Поэтому моды колебаний получились близкими к первым двум модам собственных колебаний шарнирно-опертой балки. Мода колебаний (см. рис. 2, а) близка к моде $\sin(2\pi x/L)$, а мода (см. рис. 2, б) чрезвычайно близка к $\sin(\pi x/L)$. По-видимому, в движение прощелкивания могут быть вовлечены более высокие моды колебаний Карунена-Лозве. Это будет исследовано в последующих статьях авторов.

Список литературы: 1. *I. Breslavsky, K. Avramov, Yu. Mikhlin, R. Kochurov* Nonlinear modes of snap-through motions of a shallow arch // *Journal of Sound and Vibration* (2007). – doi:10.1016/j.jsv. – 2007.09.015. 2. *L.N. Virgin, R.B. Davis* Vibration isolation using buckled structures // *Journal of Sound and Vibration*. – 260 (2003). – P. 965-973. 3. *J. L. Lumely* The structure of inhomogeneous turbulence. In *A. M. Yaglom and V. L. Tatarski*, editors, *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pp 166-178. – Moscow: Nauka, 1967. 4. *P. Holmes, J.L. Lumley, G. Berkooz* Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry // *Cambridge university press*. – 1996. 5. *P. Bakewell and J. L. Lumely* Viscous sublayer and adjacent wall region in turbulent pipe flows // *Physics of Fluids*. – 10:1880-9, 1967. 6. *S. Herzog* The Large Scale Structure in the Near Wall Region of a Turbulent Pipe Flow // PhD thesis, Cornell University. – 1986. 7. *P. Moin, R. D. Moser* Characteristic-eddy decomposition of turbulence in a channel // *J. Fluid Mech*. – 200:471-509. – 1989. 8. *M.F. Azeez, A. F. Vakakis* Proper Orthogonal Decomposition of a Class of Vibroimpact Oscillations // *J. of Sound and Vib A*. – 240(5):589-889, 2001. 9. *A. F. Vakakis, X. Ma* Nonlinear Transient Localization and Beat Phenomena due to a Copled Flaxible System // *J. of Sound and Vib A*. – 236(1):42-44. – 2001. 10. *L. Strovich, M. Kirby* An eigenfunction approach to large scale transitional structures in jet flow // 1989 *Phisics of flueds A2*. – PP. 127-136.

Поступила в редколлегию 24.07.2013

УДК 539.3

Применение метода Карунена-Лозва для извлечения мод колебаний арочных конструкций при их геометрически нелинейном деформировании / И. В. Фауст, К. В. Аврамов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2013. – № 58 (1031). – С. 177-183. – Бібліогр.: 10 назв.

Застосовано метод Карунена-Лоева до дослідження коливань арочних конструкцій при їх нелінійному деформуванні.

Ключові слова: метод Карунена-Лоева, коливання, арочні конструкції.

The Karhunen-Loeve method is applied to study an arched constructions fluctuations subject to geometrically nonlinear deformation.

Key words: Karhunen-Loeve method, fluctuations, arched constructions.

В. Л. ХАВИН, канд. техн. наук, зав.кафедрой, НТУ «ХПИ»;
А. М. ГРИНЕНКО, магистр, НТУ «ХПИ»;
Л. В. АВТОНОМОВА, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
А. В. СТЕПУК, канд.физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ИЗНОСА ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ РЕЗАНИИ НА ОСНОВЕ МКЭ

Представлен пошаговый алгоритм расчета износа контактных поверхностей режущего клина, базирующийся на решении связанной термоупругопластической контактной задачи взаимодействия режущего инструмента и обрабатываемого материала. Численно алгоритм реализован с помощью пакета ABAQUS/Explicit совместно с оригинальной подпрограммой расчета скорости износа по зависимости Усуи.

Ключевые слова: математическое моделирование, накопление износа, контактная поверхность, пластические деформации, конечный элемент, режущий инструмент.

1 Описание проблемы. Процессы обработки материалов резанием широко применяются в машиностроительной промышленности и отличаются большим многообразием в зависимости от геометрии заготовки и детали, обрабатываемых и инструментальных материалов, конструкции и геометрии режущего инструмента, режимов обработки и т.п. При всем многообразии видов лезвийной обработки всегда решается задача разработки оптимального технологического процесса, что обеспечивает максимальную его эффективность при удовлетворении необходимых требований к качеству изделия.

Непосредственные экспериментальные исследования связи входных и выходных параметров процессов лезвийной обработки дают необходимую информацию для формирования оптимальных технологических операций, но представляют собой трудоемкий и очень длительный процесс для каждой пары инструмент – обрабатываемый материал.

Особую трудность представляют исследования, посвященные изучению процесса износа режущего клина лезвийных инструментов, так как процесс износа имеет физически сложный и комплексный характер. Вследствие этого интенсивное развитие получили аналитические и численные методы прогнозирующего моделирования процессов обработки резанием, позволяющие с достаточной степенью точности определить усилия и распределение температуры на поверхностях контакта инструмента с обрабатываемым материалом и, как следствие, обеспечить возможность теоретического прогнозирования накопления износа и определения периода стойкости инструмента.

Экспериментальные исследования для пары режущий клин – обрабатываемый материал делятся годами и полученные характеристики износа позво-

ляют достоверно прогнозировать стойкость инструмента в сравнительно узком диапазоне скоростей резания и скоростей подачи.

Имитационное численное моделирование процесса стружкообразования, например, при помощи метода конечных элементов, уже сегодня позволяет достаточно корректно расчетным путем определить распределение скорости относительного проскальзывания, напряжения и температуру на контактной поверхности режущий клин – обрабатываемый материал и на их основе успешно прогнозировать развитие процесса износа режущего клина.

Однако, подавляющее число работ, [1-3], посвященных расчету накопления износа и оценки периода стойкости инструмента основывается на начальной геометрии инструмента и интегральных выходных параметрах процесса, таких как силы и скорость резания, подача и средняя температура резания, что заметно уменьшает точность получаемых результатов и требует экспериментальной коррекции. Используемые модели износа учитывают, как правило, лишь один механизм износа, не учитывая его мультифизическую связанную структуру, а также комплексное влияние на скорость износа локальных параметров состояния в точках контактной поверхности.

2 Постановка задачи. Цель настоящей работы – реализация пошагового алгоритма накопления износа режущего инструмента, базирующегося на численном определении локальных параметров состояния в контакте .

В процессе резания поверхность лезвия режущего инструмента, контактируя сдвигающимся обрабатываемым материалом, находится под действием высоких сдвиговых усилий, давлений и температур, что приводит к мультифизическому износу контактной поверхности за счет комплексного механизма, включающего следующие составляющие:

- абразивный износ;
- адгезионный износ;
- окислительный износ;
- диффузионный износ;
- усталостный износ.

Интенсивность износа зависит от длительности процесса резания, скорости резания, подачи, ширины среза, геометрии режущей части инструмента, физико-механических свойств материала и др.

В зависимости от условий резания, инструментального и обрабатываемого материала интенсивный износ имеет место на передней, задней или по передней и задней контактными поверхностями одновременно.

В задачах прогнозирующего моделирования износа в процессе резания используются следующие модели:

1. Комбинированная модель Усуи [4] для износа на передней поверхности инструмента учитывает адгезию и диффузию:

$$\dot{W} = A \sigma_n v_c e^{(-B/T)}, \quad (1)$$

где A, B – const, σ_n – контактные давления, v_c – скорость скольжения стружки.

2. Такаяяма и Мюрата [5] предложили уравнение для учета абразивного и диффузионного износа по задней поверхности режущего клина:

$$\dot{W} = Av + Be^{(-E/RT)}, \quad (2)$$

где \dot{W} – скорость объемного износа, A, B, R – const, E – энергия активации, v – скорость относительного скольжения на контактной поверхности, T – температура, °C.

3. Модель, основанная на уравнении диффузии Аррениуса, была предложена в работе [6] для расчета диффузионного износа:

$$\dot{W} = Ae^{(-B/T)}, \quad (3)$$

В режущем клине наблюдается две зоны износа : износ задней поверхности, вызывающий увеличение условного радиуса закругления острия, и износ по передней поверхности, вызывающий появление лунки (кратера) износа на передней поверхности режущего клина (рис. 1).

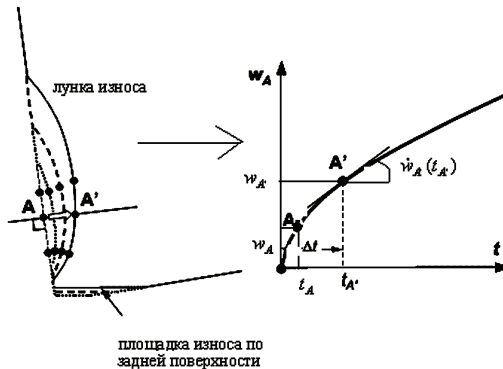


Рисунок 1 – Схема развития износа инструмента

Комбинация абразивного, адгезионного и диффузионного механизмов износа играет определяющую роль для всех процессов обработки резанием, а иные механизмы износа играют второстепенную роль для большинства известных инструментальных материалов. В отдельных случаях существенную роль играет также износ за счет окисления. Вклад каждого механизма износа зависит от условий резания, геометрии инструмента и свойств обрабатываемого и инструментального материала.

В настоящей работе рассматривается алгоритм численной оценки накопления износа режущего инструмента с помощью численного моделирования процесса стружкообразования и связанности физических процессов в зоне резания.

Схема пошагового алгоритма расчета накопления износа с учетом изменения геометрии режущего клина и соответствующего изменения параметров состояния в контактирующих точках представлена на рис. 2.

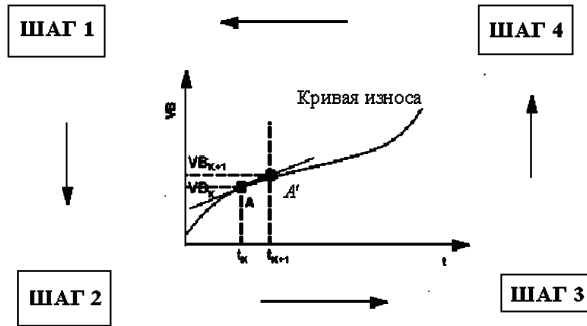


Рисунок 2 – Алгоритм расчета накопления износа режущего клина.

Шаг 1 – расчет механических параметров состояния на контактной поверхности при t_k (точка A на кривой износа). Шаг 2 – расчет температурного поля на поверхности контакта. Шаг 3 – расчет скорости объемного износа и величины накопленного линейного износа за время $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ (точка B на кривой износа). Шаг 4 – формирование измененной за счет износа на k -том шаге геометрии режущего клина и начального поля параметров состояния)

На шаге 1 численно с помощью МКЭ-пакета решается термоупругопластическая задача контактного взаимодействия режущего клина с обрабатываемым материалом и определяется напряженно-деформированное состояние зоны резания, контактные усилия и скорости проскальзывания для точек контактной поверхности в начальный момент времени $t_k = 0$.

На втором шаге решается нестационарная задача теплопроводности за период времени $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ с учетом тепловыделения за счет работы пластического деформирования и работы сил трения и определяется распределение температурного поля на контактных поверхностях.

Третий шаг состоит в расчете по соответствующим параметрам состояния скорости объемного износа в узловых точках сетки контактных конечных элементов режущего клина и вычислении величины линейного износа инструмента по нормали к контактной поверхности.

На четвертом шаге производится корректировка геометрии режущей части инструмента и осуществляется переход к шагу 1.

Данный алгоритм позволяет численно получить кривую износа для точек контактных поверхностей инструмента и на каждом временном шаге t_k определить величину лунки износа по передней поверхности контакта и площадки износа по задней поверхности режущего клина (рис. 2).

3 Численное моделирование. Численно данный алгоритм реализован с помощью пакета ABAQUS/Explicit совместно с оригинальной подпрограммой расчета скорости объемного износа по зависимости (1) и перестроения геометрии режущего клина на каждом вычислительном цикле.

В качестве примера рассматривался процесс ортогонального резания

сплава 20NiCrMo5 режущим лезвием из твердого сплава – карбида вольфрама. Рассматривалась двумерная термомеханическая связанная контактная задача плоской деформации для термоупругого режущего клина и термоупругопластического обрабатываемого материала, в котором возникают большие пластические деформации. Задача решается в постановке связанной формулировки Лагранжа-Эйлера [7]. Соотношения, определяющие пластическое состояние материала, представлялись зависимостью напряжений пластического течения от деформаций, скоростей деформаций и температуры в форме модели Джонсона-Кука:

$$\sigma_y = (A + B\bar{\epsilon}_p^n)(1 + \ln \dot{\epsilon}_p^*) [1 - (T^*)^m]; \quad \dot{\epsilon}_p^* = \dot{\epsilon}_p / \dot{\epsilon}_{p0}; \quad T^* = (T - T_0) / (T_m - T_0), \quad (4)$$

где $\bar{\epsilon}_p, \dot{\epsilon}_p$ – эквивалентные пластические деформации и скорости, T_m – температура плавления материала, A, B, C, n, m – const.

Модель трения на контактной поверхности задавалась законом Кулона с коэффициентом $\mu = 0,4$ и в виде постоянных касательных напряжений в области контакта, которые превышают предел текучести материала на сдвиг:

$$\tau_n = \min(\mu\sigma_n, \tau_y), \quad (5)$$

где τ_n, σ_n – контактные сдвиговые усилия и давления.

Физико-механические характеристики обрабатываемого материала и режущего клина приведены в табл. 1, входные геометрия режущего клина и параметры процесса резания – в табл. 2, константы уравнения Джонсона – Кука – в табл. 3.

Таблица 1 – Физические константы

Характеристика	Материал (20NiCrMo5)	Инструмент (карбид вольфрама)
Плотность (кг/см ³)	7,8	15
Коеф. Пуассона	0,3	0,3
Модуль упругости (Гпа)	210	800
Коеф. теплопроводности (Вт/м °С)	47,7	46
Теплоемкость (Дж/кг °С)	556	203
Коеф. линейного расширения (1/°С)	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$4,7 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2 – Геометрия режущего клина и параметры процесса резания

Параметр	Значение
Передний угол α	6°
Задний угол γ	6°
Скорость резания v , мм/с	5000
Толщина среза, мм	0,1
Начальный радиус закругления острия, мм	0,1

Численные расчеты осуществлялись на основе конечноэлементной модели, использовался связанный термомеханический билинейный конечный элемент CPE4RT из библиотеки пакета ABAQUS/Explicit, число элементов

для обрабатываемого материала – 3005, для клина – 280 элементов.

В таблице для иллюстрации процесса накопления износа даны значения приращения объемного износа ($\text{мм}^3/\text{с}$) передней поверхности режущего клина за два шага расчета для двенадцати узловых контактных узлов.

Таблица 3 – Константы уравнения Джонсона-Кука

Материал	20NiCrMo5
A , (МПа)	490
B , (МПа)	600
n	0,21
C	0,015
m	0,6
T	1900

Таблица 4 – Значения приращения объемного износа

Шаг $i = 1$	Шаг $i = 2$
$dW_1 := 0.001391152616$	$dW_{1_1} := 0.001448998216$
$dW_2 := 0.001391152616$	$dW_{1_2} := 0.002322929720$
$dW_3 := 0.001391152616$	$dW_{1_3} := 0.002417026770$
$dW_4 := 0.001929976669$	$dW_{1_4} := 0.0003714715329$
$dW_5 := 0.001929976669$	$dW_{1_5} := 0.001389331364$
$dW_6 := 0.001929976669$	$dW_{1_6} := 0.001972776311$
$dW_7 := 0.001929976669$	$dW_{1_7} := 0.001972776311$
$dW_8 := 0.001391152616$	$dW_{1_8} := 0.001389331364$
$dW_9 := 0.003037513019$	$dW_{1_9} := 0.001536734764$
$dW_{10} := 0.004910070027$	$dW_{1_{10}} := 0.001474891633$
$dW_{11} := 0.005290381033$	$dW_{1_{11}} := 0.0006189142035$
$dW_{17} := 0.001928865539$	$dW_{1_{12}} := 0.001845001970$

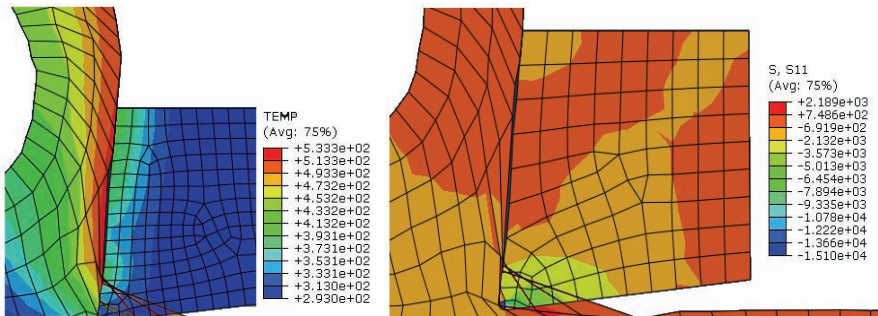


Рисунок 3 – Состояние зоны резания в момент времени $t_2 = 60$ с

На рис. 3 представлено распределение температуры и интенсивности напряжений (кг/см^2) для материала и режущего клина с величиной износа, полученного за отрезок времени $t_2 = 60$ с.

На рис. 4 и рис. 5 приведено изменение формы режущего клина соответствующей расчетному накоплению износа к моменту времени работы инструмента $t_2 = 60$ с и $t_k = 210$ с.

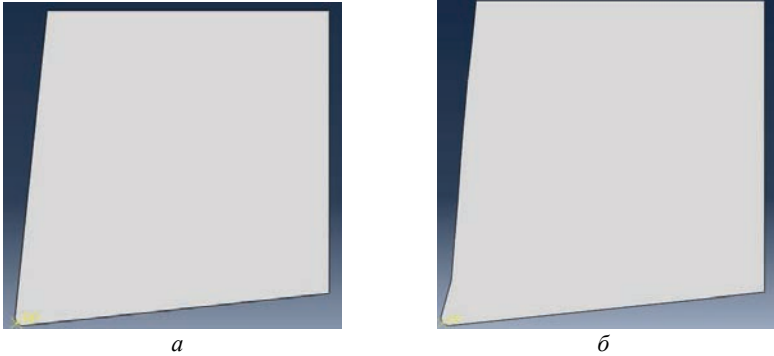


Рисунок 4 – Геометрия реза: *а* – в начальный момент времени; *б* – в момент времени $t_2 = 60$ с.

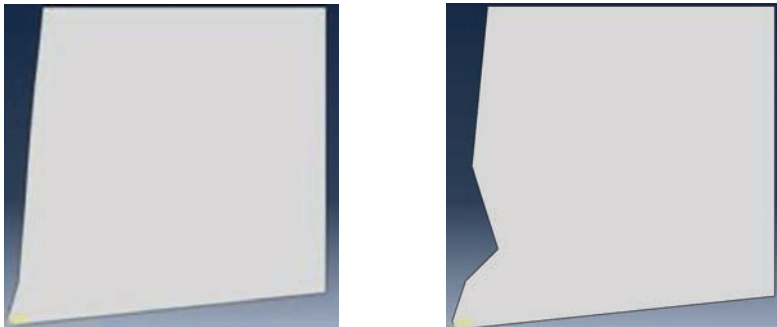


Рисунок 5 – Изменения геометрии режущего клина за отрезок времени от $t_2 = 60$ с до $t_k = 210$ с.

Выводы. В работе представлен один из возможных подходов к расчету накопления износа режущего инструмента на основе численного имитационного моделирования процесса стружкообразования при помощи МКЭ. Локальные параметры состояния в контакте определялись путем численного решения связанной термоупругопластической контактной задачи для термоупругого режущего клина и упруго-пластически деформируемого обрабатываемого материала.

Пошаговый алгоритм может быть использован для прогноза накопления

износа по передней и задней контактных поверхностях режущего клина. Для пары материалов сплав 20NiCrMo5 – карбид вольфрама приведена оценка накопления износа инструмента с применением модели Усуи для скорости износа. Предлагаемый подход позволяет получить кривые накопления износа в широком диапазоне параметров обработки резанием, обрабатываемых и инструментальных материалов.

Список литературы: 1. *Oxley P.L.* Calculating the shear angle in orthogonal metal cutting from fundamental stress, strain, strain-rate properties of the workpiece material / *P.L. Oxley, M.J.M. Welsh* // Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Tool Design and Research Conference. – 1963. – V.4. – P. 73-86. 2. *Ceretti E.* Application of 2D FEM to chip formation in orthogonal cutting / *E. Ceretti, P.Falbohermer, W.-T. Wu, T. Altan* // Journal Material. 3. *Shalta M.* Tool-workpiece interface in orthogonal cutting application of FEM modelling / *M. Shalta, Y.-C. Yen, T. Altan* // Transaction of the NAMR/SME. – 200. – V. XXVII. – P. 173-178. 4. *Usui E.* Analytical prediction of three dimensional cutting process, part 3: cutting temperature and crater wear of carbide tool / *E.Usui, T.Shirakahi, T.Kitagava* // Journal of Engineering for Industry. – 1978. – V. 100, № 5. – P. 233-239. 5. *Takeyama H.* Basic investigations on tool wear. Transactions of the ASME / *H.Takeyama, T.Murata* // Journal Engineering for Industry. – 1963. – V. 85. – P. 33-38. 6. *Mathew P.* Use of predicted cutting temperature in determining tool performance / *P.Mathew* // International Journal Machining Tools Manufacturing, chinability of Materials. – 2007. – V. 2, № 3. 7. *Yen Y.C.* Estimation of tool wear of carbide tool in orthogonal cutting using FEM simulation / *Y.C. Yen, J. Sohnet, H. Weule, J. Schmidt, T. Altan* // Proceedings of the CIRP International Workshop on Modelling of Machining Operations, West Lafayette, USA. – 2002. – P. 149-160.

Поступила в редакцию 25.09.2013

УДК 539

Моделирование накопления износа при высокоскоростном резании на основе МКЭ / В. Л. Хавин, А. М. Гриненко, Л. В. Автономова, А. В. Степук // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 184-191. – Бібліогр.: 7 назв.

Представлений покроковий алгоритм розрахунку зносу контактних поверхонь ріжучого клину, що базується на рішенні зв'язаної контактної термоупругопластичної задачі взаємодії ріжучого інструменту і оброблюваного матеріалу. Чисельно алгоритм реалізований за допомогою пакету Abaqus/explicit спільно з оригінальною підпрограмою розрахунку швидкості зносу по залежності Усуї.

Ключові слова: математичне моделювання, накопичення зносу, контактна поверхня, пластичні деформації, кінцевий елемент, ріжучий інструмент

Presented step-by-step algorithm for calculating the wear of contact surfaces of the cutting wedge. It is based on the solution of the bound thermal elasticoplastic contact problem for cutting tool and material interaction. The numerical algorithm is implemented with the ABAQUS/ Explicit software and the original routine using the Usui wear rate.

Key words: mathematical modeling, wear accumulation, contact surface, plastic deformation, finite element, cutting tool.

ЗМІСТ

К юбилею ученого, учителя, человека. 70 лет доктору технических наук, профессору Львову Геннадию Ивановичу	5
<i>Г. И. Львов, С. А. Назаренко, В. Л. Хавин</i> Основные работы члена-корреспондента Академии наук Украины В. М. Майзеля	8
<i>Г. О. Аніщенко</i> Повзучість та руйнування пластин з надрізами в умовах циклічного навантаження	16
<i>Д. В. Бреславский, В. А. Метелев, О. К. Морачковский, О. А. Татарникова</i> Расчеты динамической ползучести и повреждаемости элементов конструкций из анизотропных материалов	23
<i>Д. В. Бреславський, С. О. Пащенко, О. В. Гудзенко</i> Розв'язання трьохвимірної задачі нестационарної теплопровідності для корпусу супутника типу «СІС-2»	32
<i>С. М. Верещака, Д. А. Жигилый</i> Один вариант теории колебания многослойных оболочек с межслойными дефектами структуры	41
<i>Д. В. Данилов, А. Г. Андреев</i> Исследование НДС колесной пары под влиянием температурных нагрузок, возникающих при различных режимах торможения	52
<i>Д. В. Данилов, А. Г. Андреев</i> Исследование НДС колесной пары при прохождении криволинейных участков пути	63
<i>С. Дарязаде</i> Численная методика определения эффективных характеристик ортогонально армированных композитов	71
<i>В. М. Деев</i> О некоторых комплексных числовых системах	78
<i>А. С. Каиров, С. А. Моргун</i> Вынужденные колебания венца рабочих лопаток турбомашин с учетом демпфирования	80
<i>С. В. Красніков</i> Моделювання власних коливань фундаменту турбогенератору потужністю 200 МВт	88
<i>Д. В. Лавинский</i> Анализ напряженно-деформированного состояния систем для обработки материалов силами импульсных электромагнитных полей	92
<i>Г.И.Львов, А.С.Верещака</i> Устойчивость многослойных оболочек вращения с ослабленным контактом между жесткими слоями	99
<i>Г. И. Львов, В. А. Левашов, О. А. Костромицкая</i> Усталостная прочность рабочих колес центробежных компрессоров	110

<i>Г. И. Львов, В. Г. Сукиасов</i> Исследование вязкоупругого деформирования составного цилиндра	119
<i>Г. Ю. Мартыненко</i> Методика экспериментальных исследований динамики модельного ротора в комбинированном магнитном подвесе	125
<i>В. Л. Мисайлов, Ю. Н. Ульянов</i> Возможности повышения коэффициента использования энергии ветра в ветроэнергетических установках с горизонтальной осью вращения Вет-Роколеса	136
<i>В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский</i> Решение задачи квазивертикального падения сферического тела переменной массы	150
<i>В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский</i> Резонансные колебания осциллятора линейно-переменной массы	157
<i>Э. С. Остерник</i> Исследование декремента колебаний в магнитопроводе для оценки надежности турбогенератора	163
<i>Ю. А. Плаксий</i> Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації	168
<i>И. В. Фауст, К. В. Аврамов</i> Применение метода Карунена-Лоэва для извлечения мод колебаний арочных конструкций при их геометрически нелинейном деформировании	177
<i>В. Л. Хавин, А. М. Гриненко, Л. В. Автономова, А. В. Степук</i> Моделирование накопления износа при высокоскоростном резании на основе МКЭ	184

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»**

Збірник наукових праць

Серія:
Динаміка і міцність машин

№ 58 (1031)

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. О. К. Морачковський
Технічний редактор: О. В. Щепкін

Відповідальний за випуск: канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21,
НТУ «ХПІ». Каф. ДММ
Тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Обл.-вид № 38-13.

Підп. до друку 26.11.2013 р. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 9,75. Облік.-вид. арк. 10.
Тираж 100 пр. Зам. № 23. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію
суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вил Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра»
Свідоцтво про Державну реєстрацію 2480000000115022 від 01.01.2011 р.
Адреса: 61002, м. Харків, вул. Чернишевська, 28-А.
