ISSN 2222-0631

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
1885
«ХПІ»

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

37'2013

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях

№ 37 (1010) 2013

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2013

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 37 (1010). – 232 с.

Державне видання
Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Збірник виходить українською та російською мовами.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлетень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).

Координаційна рада:
Л. Л. Товажнянський, д-р техн. наук, проф. (**голова**);
К. О. Горбунов, канд. техн. наук, доц. (**секретар**);
А. П. Марченко, д-р техн. наук, проф.; Є. І. Сокол, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;
Є. Є. Александров, д-р техн. наук, проф.; А. В. Бойко, д-р техн. наук, проф.;
Ф. Ф. Гладкий, д-р техн. наук, проф.; М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, проф.;
А. І. Грабченко, д-р техн. наук, проф.; В. Г. Данько, д-р техн. наук, проф.;
В. Д. Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. Домнін, д-р техн. наук, проф.;
В. В. Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. Зайцев, канд. техн. наук, проф.;
П. О. Качанов, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Клепіков, д-р техн. наук, проф.;
С. І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф.; В. М. Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
В. І. Кравченко, д-р техн. наук, проф.; Г. В. Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
О. К. Морачковський, д-р техн. наук, проф.; В. І. Ніколаєнко, канд. іст. наук, проф.;
П. Г. Перерва, д-р екон. наук, проф.; В. А. Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;
М. І. Рищенко, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Самородов, д-р техн. наук, проф.;
Г. М. Сучков, д-р техн. наук, проф.; Ю. В. Тимофієв, д-р техн. наук, проф.;
М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:
Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.
Заст. відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Відповідальний секретар: С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Члени редколегії: Ю. В. Гандель, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.

*У квітні 2013 р. Вісник Національного технічного університету «ХПІ», серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях», включений у довідник періодичних видань бази даних **Ulrich's Periodicals Directory (New Jersey, USA)**.*

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 5 від 4 червня 2013 р.

© Національний технічний університет «ХПІ», 2013

УДК 621.2

П.М. АНДРЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;
Р.Ю. БЛОШЕНКО, магістрант, НТУ «ХПІ»

РОЗРАХУНКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОЧОГО ПРОЦЕСУ В ГІДРАВЛІЧНІЙ ГАЛЬМІВНІЙ СИСТЕМІ ЛІТАКА У РЕЖИМІ ГАЛЬМУВАННЯ

На основі загальних рівнянь механіки та гідромеханіки запропоновано узагальнену математичну модель робочого процесу гідравлічної системи. Сформульовані припущення, що прийняті при її розробці. Наведено опис роботи та результати розрахункових досліджень робочого процесу гальмівної системи літака у режимі гальмування. Встановлено раціональний закон переміщення запірно-регулюючого елемента клапана.

Ключові слова: математична модель, гідравлічна система, робочий процес, клапан, запірно-регулюючий елемент.

Вступ і постановка проблеми. Гідравлічні системи завдяки своїм відомим перевагам, таким як мала вага та габарити на одиницю потужності, плавність регулювання швидкістю виконавчих механізмів, висока надійність тощо, знайшли широке застосування в системах керування сучасних літальних апаратів. Для таких систем надзвичайно актуальною є задача поліпшення характеристик виконавчих механізмів при одночасному збереженні їх високої надійності. Одним з ефективних напрямків вирішення цієї задачі є застосування, при побудові таких систем, гідроапаратів з поліпшеними робочими характеристиками.

Редукційний клапан з механічним керуванням є одним з основних гідравлічних апаратів гальмівної системи літака. Його вихідні характеристики значною мірою визначають характеристики гальмівної системи в цілому. Нами було удосконалено конструкцію редукційного клапана, відмінною особливістю якого є те, що його запірно-регулюючий елемент (ЗРЕ) виконано з трьох частин – штока, поршня та саме ЗРЕ, рис. 1. Слід зазначити, що при проектуванні гідравлічних систем та елементів широкі можливості відкриваються при використанні сучасних методів математичного моделювання з використанням прикладних програм, які базуються на математичних моделях їх робочих процесів.

Розрахунку та проектуванню таких систем та елементів, розробці математичних моделей їх робочих процесів присвячені роботи *Башти Т.М.*, *Гаминіна Н.С.*, *Абрамова Е.И.*, *Зайончковського Г.Й.*, *Лур'є З.Я.*, *Raymonda E.T.* [1 – 5] й інших. Однак в даних роботах не розглядається гальмівна система літака з удосконаленим редукційним клапаном. В статті [6] наведена, розроблена нами, математична модель робочого процесу удосконаленого редук-

© П. М. Андренко, Р. Ю. Блошенко, 2013

ційного клапана, а в статті [7] – гідравлічної гальмівної системи літака. Відмінною особливістю розроблених математичних моделей є те, що вони комплексно враховують нестаціонарні гідродинамічні процеси, змінність параметрів робочої рідини (РР) та коефіцієнта витрат. Однак в розглянутих математичних моделях гідравлічних систем та апаратів розглядаються лише конкретні конструктивні рішення. Аналіз науково-технічної літератури виявив, що відсутні єдині підходи щодо до розроблення математичних моделей гідравлічних систем та апаратів. Ряд припущень, які приймаються при їх розробці, не цілком обґрунтовані. Відсутня також інформація щодо дослідження впливу параметрів редукційного клапана на робочі характеристики гальмівної системи літака. В зв'язку з вищевикладеним нами була поставлена задача, виходячи з єдиних методологічних принципів, розробити узагальнену математичну модель гідравлічної системи та дослідити вплив параметрів редукційного клапана на робочі характеристики гальмівної системи літака.

Узагальнена математична модель гідравлічної системи. Зазвичай при розроблені таких моделей приймають наступні припущення: корпуса гідроапаратів та магістралі – абсолютно жорсткі, а їх пружні властивості враховуються модулем об'ємної пружності РР; пружини працюють в межах, де їх характеристики лінійні та не відбувається відрив їх кінців від поверхонь контакту; початковими ділянками трубопроводів та каналів нехтують; у гідравлічній системі відсутні витоки, кавітація, гідравлічний удар і виконується умова нерозривності РР; швидкість звуку в РР є сталою та значно більшою за швидкість руху РР; РР – *ньютонівська*, а її течія – ізотермічна. Проводять декомпозицію гідравлічної системи та у залежності від конструктивних рішень окремих елементів розробляють їх математичні моделі. Для пришвидшення розробки яких нами пропонується використовувати узагальнену математичну модель.

Узагальнена математична модель гідравлічного елемента містить наступні співвідношення:

– *рівняння руху рухомих елементів*

$$m_{\text{ре}}\ddot{x}_{\text{ре}} = F_{\text{кер}}(t) - F_{\Delta p}(t) - F_{\text{пр}\,\Sigma}(t) - F_{\text{гд}}(t) - F_{\text{тр}}(t); \tag{1}$$

– *рівняння нерозривності*

$$q_{\text{гс}}(t) = q_1(t) + q_{\text{ст}}(t) + q_{\text{пер}}(t); \tag{2}$$

– *витрати через місцеві опори та канали*

$$q(t) = f(\text{Re}, A, \Delta p, \rho, t); \tag{3}$$

– *формули обмеження переміщення рухомих елементів*

$$0 < x_{\text{ре}}(t) \le x_{\text{ре max}}; \tag{4}$$

– *рівняння зміни стану РР*

$$T_a = const, \quad \rho(t) = f(p, T_a, t). \tag{5}$$

У співвідношеннях (1) – (5) $m_{\text{ре}}$ – це маса рухомих елементів; t – час; $x_{\text{ре}}(t)$ і $x_{\text{ре max}}$ – відповідно переміщення рухомих елементів і його максимальне значення; $F_{\text{кер}}(t)$, $F_{\Delta p}(t)$, $F_{\text{пр}\,\Sigma}(t)$, $F_{\text{гд}}(t)$ і $F_{\text{тр}}(t)$ – відповідно сили керування, перепаду тиску на рухомому елементі, сумарна сила пружин, гідродинамічна сила і сила тертя; p і Δp – відповідно тиск і перепад тиску; $q_{\text{гс}}(t)$, $q_1(t)$, $q_{\text{ст}}(t)$ і $q_{\text{пер}}(t)$ – відповідно витрата в гідросистемі, виконавчому механізмі, стиску РР і при перетіканні; Re – число Рейнольдса; A – площа щілини, отвору або каналу; ρ – густина РР; T_a – абсолютна температура.

Зазвичай температуру T_a приймали рівною її середньому значенню, а густину РР $\rho(t)$ визначають залежно від її газовмісту та зміни тиску в гальмівній системі літака за залежністю з статті [8].

Зазначимо, що розрахунок сил, які входять до рівняння (1), проводять у відповідності до конструктивної схеми елемента за відомими з літературних джерел аналітичними залежностями, наприклад роботи [9].

Математичну модель гідравлічної системи отримують поєднуючи математичні моделі окремих її елементів з математичними моделями трубопроводів та каналів. Для цього можна використовувати їх математичні моделі у зосереджених параметрах, за Т- чи Г-подібними схемами [10].

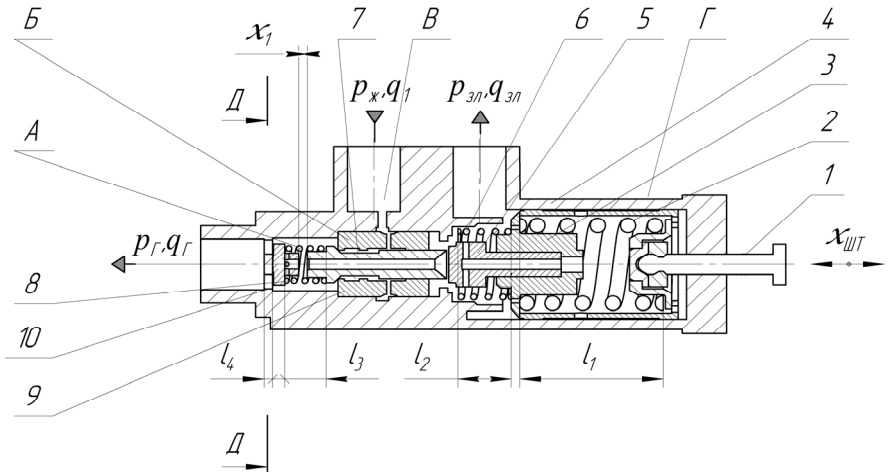


Рис. 1 – Розрахункова схема редукційного клапана:
1 – шток; 2, 6, 8 – пружини; 3 – поршень; 4 – корпус 5 – зливний клапан; 7 – ЗРЕ; 9 – втулка; 10 – вихідна шайба.

Розрахункові дослідження гальмівної системи літака. Розглядали режим гальмування, коли човник блоку захисту знаходиться в положенні,

при якому магістраль аварійного гальмування закрита; закриті також антиюзові автомати і через них не відбувається злив РР в бак. Тиск в гальмівну гідросистему надходить з лінії живлення $p_{ж}$. Основне гальмування коліс літака здійснюється натисканням на педаль керування редукційного клапана. При цьому шток 1 зміщується, згідно з рис. 1, вліво, стискає пружину 2, яка опирається на поршень 3, що разом з зливним клапаном 5, також зміщується вліво. Зливний клапан 5 закриває розвантажувальний канал, виконаний в ЗРЕ 7. Далі шток з поршнем та ЗРЕ зміщуються вліво. РР крізь щілину, утворену ЗРЕ та втулкою 9, починає надходити до гальмівної магістралі. З гальмівної магістралі коліс РР через антиюзові автомати надходить на вхід човникових клапанів і далі у гідроциліндри гальмування, як наслідок, відбувається гальмування коліс.

В міру надходження РР до гальмівної магістралі, тиск під ЗРЕ та клапаном 5 починає зростати. Пружина 8 починає стискатися. При досягненні заданого тиску в гальмівній магістралі, ЗРЕ під дією пружини 8 закриває щілину, утворену їм та втулкою. Цим зупиняється підвищення тиску в гальмівній магістралі та надходження РР до гідроциліндрів гальмування коліс. Колеса починають гальмуватися з постійним гальмівним моментом.

Зазначимо, що при розгальмовуванні коліс літака педалі керування займають вихідну позицію. Редукційні клапани через зворотні клапани з'єднані зі зливом. РР з циліндрів гальмування коліс через човникові клапани надходить у вихідні отвори антиюзових автоматів і далі через зворотний клапан та гідророзподільник зливається в бак.

При дослідженні робочих процесів використовували розроблену нами математичну модель гальмівної система літака та редукційного клапана [6, 7]. При цьому вважали, що використовуються трубопроводи великого діаметру, а процеси, що в них відбуваються, описуються без врахування розподілу параметрів РР по довжині. Це дозволило не розглядати хвильові процеси. Вважали, що виконавчим механізмом гідросистеми є одноштоковий гідроциліндр з внутрішнім діаметром 100 мм, діаметром штока 50 мм та ходом 250 мм. В якості РР використовували масло АМГ-10 при постійній температурі, рівній 60ºС, з газовмістом, рівним 0,8 %. Задавали геометричні розміри елементів системи, жорсткості пружин редукційного клапана: $c_{пр2} = 13,3$ Н/мм, $c_{пр6} = 1,33$ Н/м, $c_{пр8} = 2,66$ Н/м, навантаження на вихідній ланці – гідроциліндрі, $p_{ж} = 9,0$ МПа, $p_{зл} = 0,5$ МПа, характер зміни $x_{шт}(t)$. За початкові умови приймали:

$$x_{шт1}(0) = 0;\ x_{шт2}(0) = 0;\ x_{ЗРЕ}(0) = 0;\ \dot{x}_{шт1}(0) = 0;\ \dot{x}_{шт2}(0) = 0;\ \dot{x}_{ЗРЕ}(0) = 0.$$

Зазначимо, що величина тиску в гальмівній системі в усталеному режимі відповідає навантаженню на гальмах, що трансформується витратою навантаження, а витрата – обумовлена витоками.

Розрахункові дослідження гальмівної системи літака проводили за допомогою пакета прикладних програм Mathcad та розробленої програми. Досліджували вплив характеру зміни переміщення ЗРЕ, а також зазору між втулкою та ЗРЕ редукційного клапана на робочі характеристики гідросистеми в процесі гальмування. Приймали, що переміщення штока та ЗРЕ редукційного клапана відбувається ступінчасто або за лінійною залежністю чи за експонентою, а зазор між втулкою та ЗРЕ клапана відповідно становить: 0,7 мм; 0,2 мм; 1,2 мм. При заданих початкових умовах на комп'ютері за допомогою зазначеного пакета прикладних програм отримали графіки перехідних процесів у редукційному клапані та гальмівній системі літака, рис. 2 – 3.

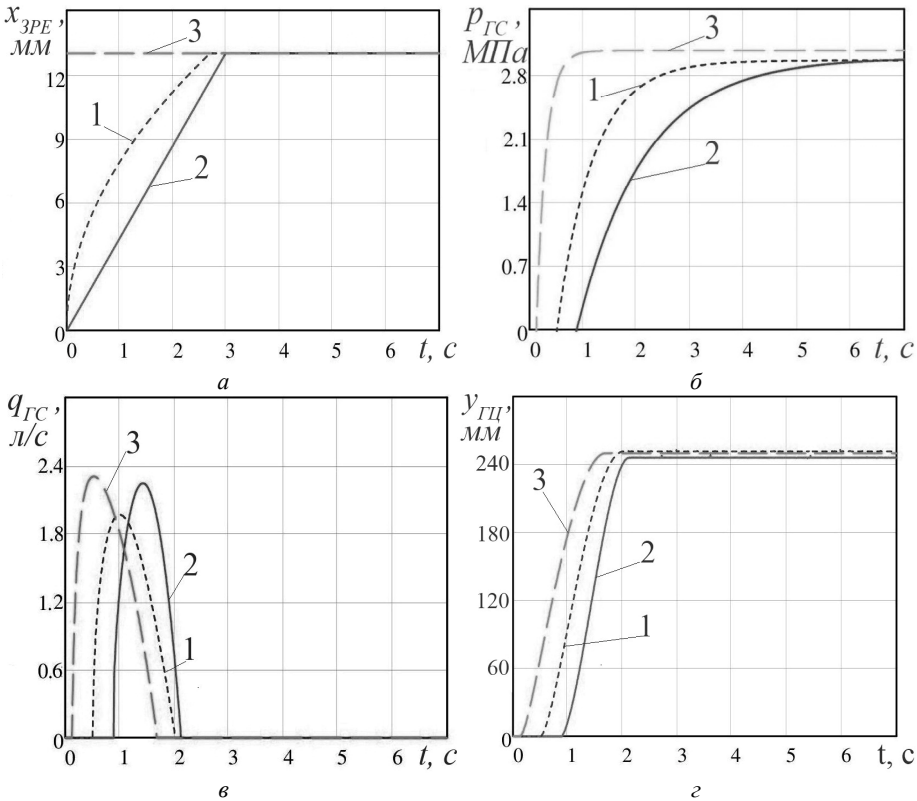
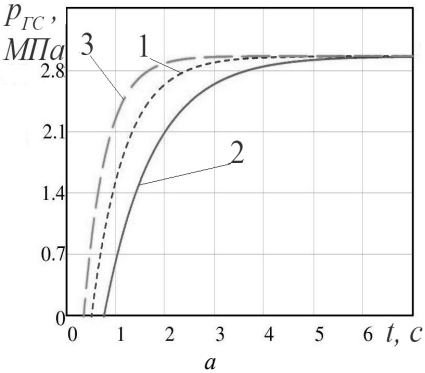
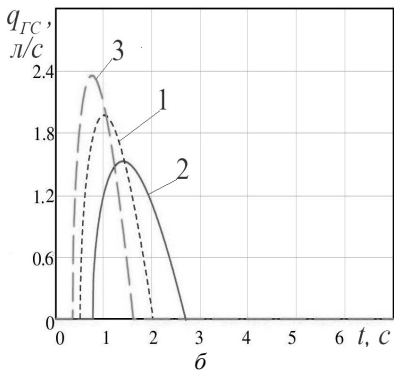


Рис. 2 – Графіки перехідних процесів у редукційному клапані та гальмівній системі літака: 1, 2 і 3 – відповідно при переміщені штока та ЗРЕ редукційного клапана за експонентою, лінійною залежністю і ступінчасто: *а* – переміщення штока та ЗРЕ редукційного клапана; *б* і *в* – тиску і витрати у гальмівній системі; *г* – переміщення штока гідроциліндра.





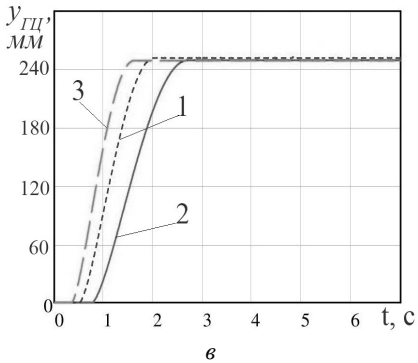


Рис. 3 – Графіки перехідних процесів у редукційному клапані та гальмівній системі літака при переміщені штока та ЗРЕ редукційного клапана за експонентою:

1, 2 і 3 – відповідно при зазорі між втулкою та ЗРЕ редукційного клапана рівним – 0,7 мм, 0,2мм і 1,2 мм:

а і *б* – графіки тиску і витрати у гальмівній системі; *в* – переміщення штока гідроциліндра.

У результаті проведених розрахункових досліджень робочого процесу гальмівної системи літака у режимі гальмування визначено, що найбільш раціональним є переміщення ЗРЕ редукційного клапана за експонентою. Воно забезпечує плавне переміщення виконавчого гідроциліндра та малий час спрацювання, при переміщені штока та ЗРЕ редукційного клапана за експонентою, лінійною залежністю і ступінчасто час спрацювання виконавчого гідроциліндра відповідно становить 2 с; 2,1 с 1,6 с. При збільшенні зазору між втулкою та ЗРЕ редукційного клапана час спрацювання виконавчого гідроциліндра зменшується на 16 %, а при зменшенні – збільшується на 24 %.

Стиском РР при проведенні розрахункових досліджень можна знехтувати, так як його значення виявилися на два порядки менше ніж величини витоків.

Висновки. Запропоновано узагальнену математичну модель гідравлічної системи, використання якої дозволить пришвидшити розробку математичних моделей робочого процесу таких систем.

У результаті проведених розрахункових досліджень робочого процесу гальмівної системи літака у режимі гальмування установлено, що найбільш

раціональним є переміщення штока та ЗРЕ редукційного клапана за експонентою. Воно забезпечує плавне переміщення виконавчого гідроциліндра та малий час спрацювання. При збільшенні зазору між втулкою та ЗРЕ редукційного клапана час спрацювання виконавчого гідроциліндра зменшується, а при зменшенні – збільшується.

Розроблена математична модель та програма дозволяють проаналізувати вплив геометричних параметрів редукційного клапана на робочі характеристики гальмівної системи літака, встановити їх раціональні значення.

Список літератури: **1.** *Башта Т.М.* Гидравлический привод летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1967. – 495 с. **2.** *Гамынин Н.С.* Гидравлический привод систем управления. – М.: Машиностроение, 1972. – 376 с. **3.** *Абрамов Е.І., Зайончковський Г.Й.* Проектування систем керування літальних апаратів. – К.: НАУ, 2005. – 188 с. **4.** *Лурье З.Я., И.А. Солдатенков И.А., Лищенко И.Г.* Динамические характеристики линеаризованной модели следящего рулевого привода // Промислова гідравліка і пневматика. – 2008. – № 3 (21). – С. 51 – 55. **5.** *Raymond E.T., Chenoweth C.C.* Aircraft Flight Control Actuation Sustem Design: Published Societu of Automotive Engineers Inc. – Warren dale, USA, 1993. – 242 p. **6.** *Андренко П.М., Свинаренко М.С., Блошенко Р.Ю.* Робочий процес редукційного клапана гальмівної системи літака // Вісник НТУ "ХПІ". – Х.: НТУ "ХПІ". – 2012. – № 27. – С. 11 – 17. **7.** *Андренко П.М., Клітной В.В., Блошенко Р.Ю.* Робочий процес гідравлічної гальмівної системи літака в режимі гальмування // Механіка та машинобудування. Науково-технічний журнал. – Х.: НТУ "ХПІ", 2012. – № 1. – С. 7 – 15. **8.** *Лурьє З., Федоренко И.* Исследование рабочего процесса мехатронного гидроагрегата системы смазки металургического оборудования с учетом характеристик двухфазной жидкости // MOTROL: Commission of motorization and energetics in agriculture: Polish Academy of sciences. – Lublin. – 2010. – Vol. 12. – С. 10 – 25. **9.** *Лурье З.Я., Андренко П.Н.* Метод расчета гидродинамической силы на осциллирующем запорно-регулирующем элементе гидроаппарата / Гидропневмосистемы мобильных и технологических машин: междунар. науч.-технич. конф., 17-19 ноябр. 2010 г.: сборник докладов. – Минск, БНТУ, 2010. С. 47 – 53. **10.** *Скляревский О.М.* Об'ємний гідропривід: [навч. посіб.] – Запоріжжя: ЗНТУ, 2001. – 212 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 621.226

Розрахункові дослідження робочого процесу в гідравлічній гальмівній системі літака у режимі гальмування / П. М. Андренко, Р. Ю. Блошенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 3 – 9. Бібліогр.: 10 назв.

На основе общих уравнений механики и гидромеханики предложена обобщенная математическая модель рабочего процесса гидравлической системы. Сформулированы допущения, принятые при ее разработке. Приведено описание работы и результаты расчетных исследований рабочего процесса тормозной системы самолета в режиме торможения. Установлен рациональный закон перемещения запорно-регулирующего элемента клапана.

Ключевые слова: математическая модель, гидравлическая система, рабочий процесс, клапан, запорно-регулирующий элемент.

On the basis of the general equations of mechanics and fluid mechanics proposed generalized mathematical model of the hydraulic system workflow. Formulated assumptions made in its development. The description of the work and the results of computational research workflow braking system of the aircraft during braking. Set a rational law of displacement shutoff valve member.

Key words: mathematical model, hydraulic system, workflow, valve, globe control element.

УДК 681.518

И.В. АНТОНОВА, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

НЕЧЕТКАЯ ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА ПРОГНОЗА РИСКА В СТРАХОВАНИИ ПРОФЗАБОЛЕВАНИЙ

Предложена экспертная система с нечеткими решающими правилами для прогноза индивидуального риска развития профессионально обусловленных аллергодерматозов на основе анализа факторов риска, оценки адаптационных возможностей и защитных свойств организма в условиях вредного производства. Определены функциональные характеристики ее модулей, проведено компьютерное моделирование и параметрическая оптимизация в среде MatLab.

Ключевые слова: экспертная система, нечеткие решающие правила, прогноз индивидуального риска, факторы риска, компьютерное моделирование, параметрическая оптимизация.

Постановка проблемы. Ухудшение социальной и производственной среды за последние 20-30 лет привело к увеличению риска развития профессиональных и профессионально обусловленных заболеваний (ПОЗ). Особенно это проявилось на предприятиях химической и химико-фармацевтической отрасли, где к профессиональным рискам относится воздействие активных химических веществ, вызывающих различные кожные заболевания. Наличие полиса медицинского страхования является одной из форм гарантий получения при заболевании качественной медицинской помощи. Поэтому актуальной является разработка автоматизированных информационных систем поддержки принятия решений в страховании профзаболеваний. Основой для принятия решений в медицинском страховании является максимально индивидуализированная количественная оценка риска развития заболеваний.

По результатам исследований, проводимых в рамках научно-исследовательских работ Харьковского НИИ Дерматологии и Венерологии совместно с НТУ «ХПИ» на предприятиях химико-фармацевтической промышленности, были выявлены групповые и внутренние факторы риска развития ПОЗ, проведена оценка адаптационно-компенсаторных возможностей в группах риска [1-4]. Наличие выявленных закономерностей развития ПОЗ дает возможность построить экспертную систему прогноза риска профзаболеваний.

Анализ литературы. Появление и совершенствование автоматизированных систем для обследований групп населения привело к трансформации экспертных систем для дифференциальной диагностики заболеваний с похожей симптоматикой, невероятно популярных еще 30-40 лет назад, в автоматизированные информационные системы поддержки принятия решений. Системы поддержки принятия решений осуществляют выбор наилучшего решения из

© И. В. Антонова, 2013

множества возможных либо упорядочение возможных решений по предпочтительности.

Построение моделей, использующих способность человека принимать решения в условиях неполной и неопределенной информации, и их реализация в компьютерных системах представляет собой одну из важнейших научно-технических проблем. Предложенный *Л. Заде* [5] математический аппарат нечеткой логики явился одним из самых мощных инструментов решения подобных проблем. Это стало толчком к созданию особого класса экспертных систем (ЭС) – *нечетких ЭС*.

Логико-лингвистические методы описания нечетких систем основаны на том, что входные и выходные параметры системы являются лингвистическими переменными, а качественное описание процесса задается совокупностью простейших правил следующего вида:

$$L_j : \text{ЕСЛИ } \tilde{A}_j \text{, ТО } \tilde{B}_j \text{, } (j = \overline{1, k_0}),$$

где $\tilde{A}_j$ и $\tilde{B}_j$ – нечеткие подмножества, заданные на декартовом произведении универсальных множеств входных и выходных лингвистических переменных соответственно. К достоинствам нечетких ЭС следует отнести тот факт, что в их основе лежит *композиционное правило Заде*, позволяющее вычислять суперпозиции влияний различных процессов на окончательный результат, что дает возможность учесть совместное влияния целого ряда факторов в решении задачи прогноза риска развития ПОЗ.

В качестве модели нечеткого логического вывода разработанной системы выбрана *модель Мамдани* (Mamdani). Нечеткий вывод типа Мамдани используется в том случае, когда необходимо извлечь знания из имеющихся данных либо при поиске закономерностей во множестве данных [6]. Легко интерпретируемые лингвистические решающие правила являются безусловным достоинством систем такого вида. К недостаткам моделей Мамдани следует отнести высокий уровень вычислительных затрат при получении правила нечеткого вывода.

Целью статьи является описание структуры нечеткой ЭС прогноза риска развития ПОЗ у рабочих предприятий химико-фармацевтической промышленности и ее возможных применений в страховании профзаболеваний.

Разработка модели экспертной системы. Структура рассматриваемой нечеткой ЭС проектировалась на основе выявленных в ходе предыдущих исследований факторов риска [1-3].

Пусть для описания множества Ω, состоящего из m объектов, используется n признаков: $\overline{X} = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$. Каждому объекту из множества Ω соответствует некоторое значение целевого признака X_0. Признаки X_i $(i = \overline{0, n})$

измерены в порядковой или номинальной шкале. Целевой признак X_0 имеет k_0 градаций, т. е. принимает k_0 различных значений.

Структурная схема нечеткой ЭС прогноза риска развития ПОЗ представлена на рис. 1.

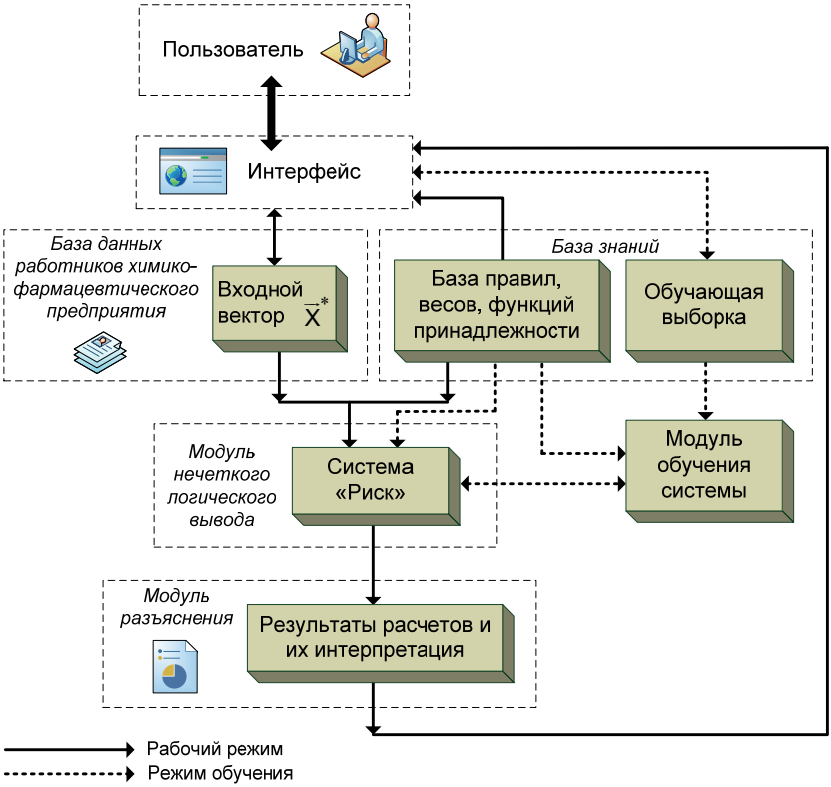


Рис. 1 – Структурная схема нечеткой ЭС прогноза риска развития ПОЗ.

В качестве переменных, описывающих состояние объекта исследования, выбраны выявленные индивидуальные [1] и групповые [2-4] факторы риска X_i $(i = \overline{0,n})$ развития ПОЗ. Внутренние факторы риска выявлены в ходе анализа анамнестических данных у рабочих с проявлениями ПОЗ. При построении групповых факторов риска применялся *метод корреляционной адаптометрии* [2], анализ кривых оценки резистентности гомеостаза [3] и *цепи Маркова* [4].

Применение метода корреляционной адаптометрии дало возможность выявить стажные группы рабочих с максимумом компенсаторной реакции организма (*эффект группового стресса*).

С помощью анализа кривых оценки резистентности гомеостаза решалась задача о влиянии на развитие профессионально обусловленных аллергодерматозов наличия в анамнезе обследованных рабочих различных соматических заболеваний и кожных заболеваний неаллергического генеза. Построение кривых проводилось по *методу Каплана-Мейера* [7].

В качестве формализованного метода прогноза риска заболевания ПОЗ применялся математический аппарат цепей Маркова. Представление процесса эволюции системы под действием внешних и внутренних факторов в виде последовательности переходов между состояниями $S_i(t_k)$ и $S_j(t_{k+1})$, относящимися к смежным моментам времени t_k и t_{k+1}, является эффективным способом исследования динамических систем с дискретным временем. Задача прогнозирования риска развития ПОЗ в момент времени t_{k+1} при фиксированных внешних условиях сводится к отысканию вероятности p_{ij} перехода системы из состояния $S_i(t_k)$ в состояние $S_j(t_{k+1})$ страхового случая.

Обоснованием для предоставления той или иной индивидуальной формы корпоративного страхового полиса станут *матрицы условных вероятностей* p_{ij}, учитывающие влияние индивидуальных и групповых факторов риска развития профессиональных заболеваний у рабочих предприятий данной промышленной отрасли.

Согласно [8] *лингвистическая переменная* описывается набором $\{X, T(X), U, G, M\}$, в котором X – название этой переменной; $T(X)$ – терм-множество X, т.е. совокупность ее лингвистических значений; U – универсальное множество; G – синтаксическое правило, порождающее термы множества $T(X)$; M – семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, порожденных синтаксическими правилами G.

В процессе структурной идентификации модели для каждой переменной X_i $(i = \overline{0,n})$ задавалось ее имя, терм-множества (градации) T_i, соответствующие им универсальные множества U_i.

Для всех градаций признаков X_i $(i = \overline{1,n})$ построены функции принадлежности $\mu^{jp}(X_i)$ входного признака X_i нечеткому терму X_i^{jp}.

Например, график функции принадлежности фактора риска $X_2 =$ «Стаж работы на предприятии» представлен на рис. 2.

На основе результатов предыдущих исследований [1-3] был синтезирован набор k_0 правил вида:

L_j : ЕСЛИ $(X_1 = X_1^{j1})$ И $(X_2 = X_2^{j1})$ И … И $(X_n = X_n^{j1})$ (с весом ω_{j1})

ИЛИ $(X_1 = X_1^{j2})$ И $(X_1 = X_1^{j2})$ И … И $(X_1 = X_1^{j2})$ (с весом ω_{j2})

……..……..

ИЛИ $(X_1 = X_1^{jq_j})$ И $(X_2 = X_2^{jq_j})$ И … И $(X_n = X_n^{jq_j})$ (с весом ω_{jq_j}),

ТО $X_0 = X_0^j$,

где L_j – решающее правило с номером j $(j = \overline{1,k_0})$; X_i^{jp} – градация входной переменной X_i в правиле с номером jp $(j = \overline{1,k_0},\ p = \overline{1,q_j})$; q_j – количество правил, в которых выходная переменная X_0 оценивается термом X_0^j. На основе базы нечетких правил L_j $(j = \overline{1,k_0})$ была получена модель Мамдани нечеткого логического вывода для прогноза риска развития ПОЗ.

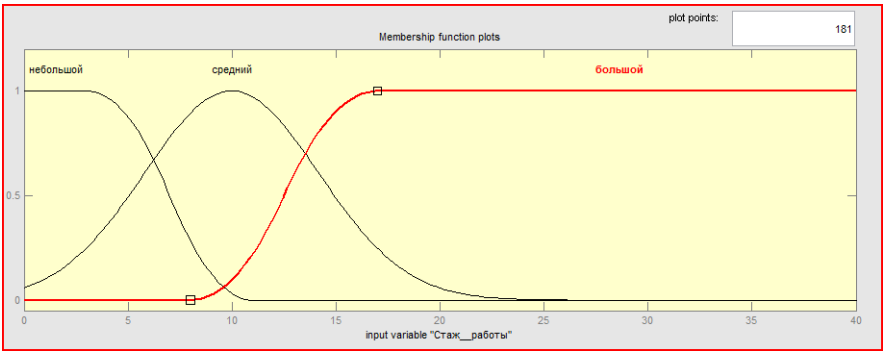


Рис. 2 – Функции принадлежности признака «Стаж работы на предприятии».

Согласно механизму Мамдани нечеткий вывод в ЭС осуществляется следующим образом:

1. На этапе фаззификации определяются *степени истинности*, т.е. значения функций принадлежности $\mu^{jp}(X_i)$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,k_0},\ p = \overline{1,q_j})$ для левой части правила L_j, состоящей из jp подправил.

2. Для текущих входных значений $\vec{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$ *минимаксным методом* определяется степень истинности целевого признака, т.е. значения

$$\mu_0^j(X_0) = \bigvee_{p=\overline{1,q_j}} (\omega_{jp} \bigwedge_{i=\overline{1,n}} \mu^{jp}(X_i^*)),\ j = \overline{1,k_0},$$

где $\vee(\wedge)$ – операция s-нормы (t-нормы).

3. На этапе дефаззификации четкое значение целевого признака X_0, соответствующее входному вектору $\vec{X}^* = (X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*)$, определяется *методом нахождения центра тяжести*.

Пример применения разработанной системы. Проверка адекватности и оптимизация модели нечеткой ЭС проводилась средствами пакета Fuzzy Logic среды MatLab на случайно сформированной выборке из имеющейся базы, со-

держащей информацию о 430 обследованных рабочих профильных предприятий.

На рис. 3 и 4 представлены примеры окон вывода модуля разъяснений нечеткой ЭС.

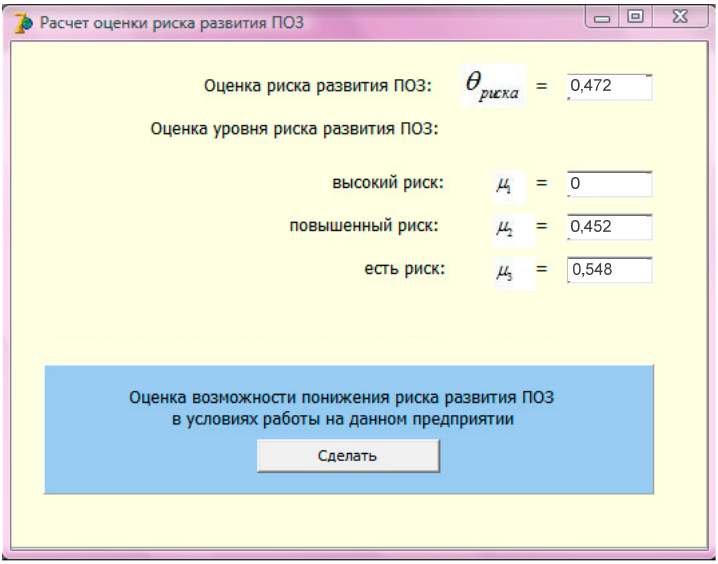


Рис. 3 – Окно вывода «Расчет оценки риска развития ПОЗ».

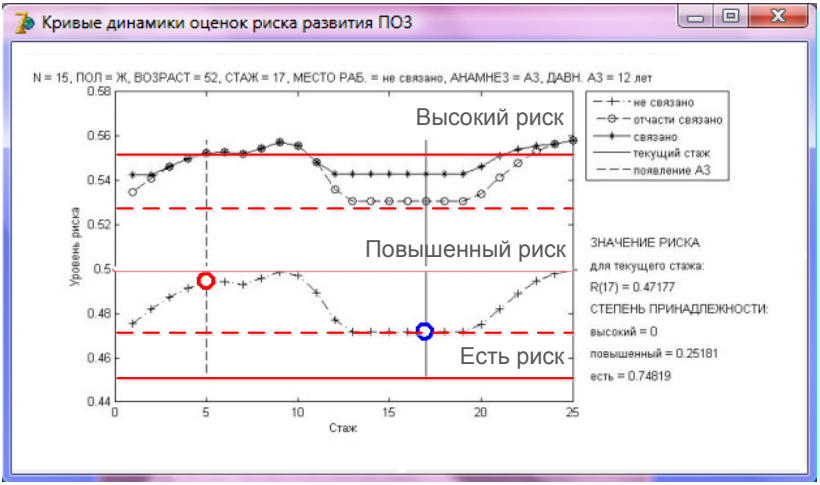


Рис. 4 – Окно вывода кривых динамики оценок риска развития ПОЗ при различных значениях признака «Место работы».

Выводы. В работе представлена нечеткая ЭС прогноза риска развития профессионально обусловленных аллергодерматозов и определены функциональные характеристики ее модулей. Оптимизация нечеткой ЭС осуществлялась путем ее параметрической идентификации по обучающей выборке. Прогнозное значение риска – $\theta_{риска}$ развития ПОЗ – является определяющим при выборе вида страхового полиса в системе корпоративного медицинского страхования. Результаты работы данной ЭС могут быть использованы на предприятии химико-фармацевтической промышленности при проведении профилактических медицинских осмотров в качестве рекомендаций по мерам профилактики профзаболевания.

Список литературы: **1.** *Чикина Н.А.* Изучение влияния внутренних факторов риска на развитие аллергодерматозов у рабочих химико-фармацевтических предприятий / *Н.А. Чикина, И.В. Антонова* // Международной науч.-техн. конф. «MicroCAD – 2007». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – Ч.8. – С. 195–200. **2.** *Чикина Н.А.* Математические модели адаптационных процессов у рабочих предприятий химико-фармацевтической промышленности / *Н.А. Чикина, И.В. Антонова* // Информационные технологии и компьютерная инженерия. – Винница: ВНТУ, 2009. – № 2 (15). – С. 45–50. **3.** *Антонова И.В.* Дифференциация уровней риска развития профессионально обусловленных заболеваний / *И.В. Антонова, Н.А. Чикина.* – Системи обробки інформації. Збірник наукових праць ХУПС. – Харків, 2013. – Випуск 5 (82). – С. 180–184. **4.** *Чикина Н.А.* Математическая модель прогнозирования риска в системе медицинского страхования профпатологий / *Н.А. Чикина, И.В. Антонова //* Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск: Информатика и моделирование. – Харьков, НТУ «ХПИ». – 2013. – № 40. – С. 196–201. **5.** *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control, 1965. – № 8 (3). – P. 338–353. **6.** *Штовба С.Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB – М.: Горячая линия-Телеком, 2007. – 288 с. **7.** *Гланц С.* Медико-биологическая статистика: [Пер. с англ.] / Стентон Гланц. – М.: Практика, 1999. – 459 с. **8.** *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений – М.: Мир, 1976. – 165 с.

Поступила в редколлегиюї 20.05.2013

УДК 681.518

Нечёткая экспертная система прогноза риска в страховании профзаболеваний / И. В. Антонова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 10 – 16. Бібліогр.: 8 назв.

Запропонована експертна система з нечіткими вирішальними правилами для прогнозу індивідуального ризику розвитку професійно обумовлених алергодерматозів на основі аналізу факторів ризику, оцінки адаптаційних можливостей та захисних властивостей організму в умовах шкідливого виробництва. Визначені функціональні характеристики її модулів, проведено комп'ютерне моделювання й параметрична оптимізація в середовищі MatLab.

Ключові слова: експертна система, нечіткі вирішальні правила, прогноз індивідуального ризику, комп'ютерне моделювання, параметрична оптимізація.

In the article the fuzzy expert system of risk prognosis of development of the professionally conditioned allergodermathoses is worked out on the basis of analysis of risk factors, estimation of adaptation possibilities and protective properties of organism in the conditions of harmful production. Functional descriptions of her modules are certain, a computer modeling and optimization of parameters are conducted in the environment of MatLab. Figs.: 4. Refs.: 8 titles.

Key words: expert system, fuzzy decision rules, prognosis of individual risk, risk factors, computer modeling, optimization of parameters.

УДК 621.968: 519.6

А.С. БОРИСЕНКО, аспирант, ХНУРЭ, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ АНТЕНН ДЛЯ ZIGBEE СЕТИ

Проведен обзор антенн (для *ZigBee сети*), моделирование и расчет работы спиральной антенны. Приведены результаты экспериментального исследования и сравнения показателей применения различных антенн в беспроводной сети ZigBee.

Ключевые слова: ZigBee, спиральная антенна, направленная антенна, штыревая антенна, зона покрытия, моделирование.

Введение. Беспроводные сети на базе стандарта IEEE 802.15.4 представляют собой альтернативу проводным соединениям в распределенных системах мониторинга и управления и отличаются гибкостью архитектуры, малыми затратами при их установке и эксплуатации.

Одним из способов увеличения зоны покрытия беспроводной сенсорной сети является использование направленных антенн, которые не меняют параметр *эквивалентной изотропной излучаемой мощности* (ЭИИМ), но изменяют диаграмму направленности, осуществляя таким образом «усиление» сигнала в определенном направлении.

Mesh сеть ZigBee (ячеистая) для передачи сообщения автоматически находит наиболее короткий маршрут с удовлетворительным качеством связи в обоих направлениях. Если с течением времени какой-либо из узлов выходит из строя, то сеть автоматически осуществляет поиск нового маршрута и на первом этапе задача поиска маршрута является первостепенной. Но если сеть длительное время не обслуживается и не заменяются ее структурные элементы и элементы питания, то поддержание надежной работы сети в целом при относительно неподвижном состоянии ее элементов, защите информации и увеличения дальности связи становится актуальным. Работа сети со временем приводит к задаче увеличения зоны покрытия с применением антенн.

На диаграмме направленности можно выделить так называемые направления преимущественного излучения (*лепестки*), главное направление (главный лепесток), боковые лепестки, задний лепесток диаграммы направленности (обратный главному направлению). Нули диаграммы направленности определяют направления, по которым антенна не принимает и не излучает.

Важной характеристикой направленной антенны является коэффициент усиления, который показывает, во сколько раз эффективность данной антенны выше по сравнению с изотропным излучателем, и измеряется в так называемых *изотропных децибелах* (дБ или англ. dBi).

© А. С. Борисенко, 2013

$$k(dBi) = 10\lg\frac{E}{E_i}, \qquad (1)$$

где k – коэффициент усиления антенны в заданном направлении; E – напряженность поля, создаваемого антенной в некоторой точке; E_i – напряженность поля, создаваемого изотропной антенной в той же точке.

Анализ последних достижений и литературы. В большинстве случаев приемопередатчики сети ZigBee комплектуются миниатюрными штыревыми антеннами, которые могут быть как съемными, так и несъемными. В горизонтальной плоскости такие антенны являются всенаправленными с коэффициентом усиления не более 5 dBi. Штыревые антенны могут быть прямыми/угловыми разной длины с различными вариантами разъемов (например, RPSMA и SMA-M).

Основные виды промышленных антенн (а всего их более ста) [1], применяемых в диапазоне 2400 МГц, приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Виды антенн и их параметры

Название (антенна на магнитном основании)	ANT 2.4 BY-2400-03 SMA-M 3M (BEYOND)	ANT 2.4 BY-2400-01-03 (BEYOND)	ANT 2.4 BY-2400-06-09 3M RPSMA (BEYOND)	ANT 2.4 BY-2400-02 RPSMA (BEYOND)	ANT 2.4 CW-RCS RPSMA (LINX)
1	2	3	4	5	6
Внешний вид антенны					
Параметры					
Способ монтажа	магнит	нет	магнит	крепление на разъём	крепление на разъём
Типовое применение	индустр.	индустр.	индустр.	индустр.	индустр.
Рабочие частоты	2,4 ГГц	2,4 ГГц	2,4 ГГц	2,4 ГГц	2,4 ГГц
Коэффициент усиления	5 dBi	3 dBi	9 dBi	3 dBi	1,2 dBi
Разъём для подключения	SMA-M	нет	RPSMA	RPSMA	RPSMA
Длина кабеля	3 м	нет	3 м	нет	нет

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6
Примечания	рабочая температура -45...70 С	антенна без внешней защитной части	увеличивает дальность действия ZigBee, Bluetooth и Wi-Fi-устройств	предназначена для ZigBee, Wi-Fi и Bluetooth модемов AnCom	малогабаритная
Размер	30 х 142 мм	4 х 52 мм	350	95	53 х 7 мм

Штыревые антенны часто называют *несимметричными вибраторами*. Диаграмма направленности такой антенны мало отличается от диаграммы направленности *диполя Герца*. В горизонтальной плоскости антенна излучает энергию во все стороны равномерно, поэтому в указанной плоскости такая антенна является всенаправленной. Диаграммы направленностей в вертикальной плоскости полуволнового штыря показывают, что чем выше поднимается антенна, тем положе угол излучения к горизонту, и это объясняется тем, что происходит сложение излученной штырем волны и волны, отраженной от земли.

Почва является диэлектриком с большой диэлектрической проницаемостью (равной почти 80), что приводит к изменению электрической длины мнимого диполя, а также длины пути токов смещения. Результат – полное искажение диаграммы направленности (поднятие лепестков вверх и исчезновение излучения под малыми углами к горизонту) и увеличение сопротивления штыря [2].

Короткие штыри имеют малое активное и большое реактивное сопротивление и будут согласованы весьма неоптимально (на самих согласующих устройствах может рассеяться до 90% энергии). Только идеальная штыревая антенна имеет КПД 47%, для реальной антенны эта величина оказывается гораздо меньше.

Необходимо также учитывать создаваемую *поляризацию* (то есть направленность вектора электрической составляющей электромагнитной волны в пространстве) для штыревых антенн. Вертикально расположенный несимметричный вибратор дает вертикальную поляризацию, а горизонтально расположенный – горизонтальную. Антенны горизонтальной поляризации дают больший эффект, поскольку природные и индустриальные помехи имеют в основном вертикальную поляризацию. Горизонтально поляризованные волны, отражаются от препятствий менее интенсивно, чем вертикально поляризованные.

При распространении вертикально поляризованных волн земная поверхность поглощает на 25% меньше их энергии.

Проблемы согласования штыревой антенны, малый коэффициент усиления, а также способы крепления и установки относительно земли привели

к созданию штыревых антенн не только с перпендикулярным, но и с параллельным рефлекторами.

Физический уровень в системе передачи-приема ZigBee PHY предоставляет два вида услуг: информационный сервис PHY и сервис управления, обеспечивающий взаимодействие с сервисом PLME (Physical Layer Management Entity) точки доступа SAP (известный под названием PLME-SAP). Информационный сервис PHY делает возможным передачу и прием через радиоканал протокольных блоков данных PPDU (Protocol Data Unit). На рис. 1 представлены радиоканалы в IEEE 803.15.4 (PHY 2400 МГц).

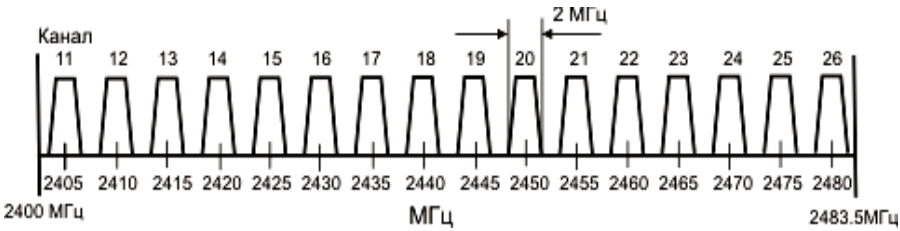


Рис. 1 – Выбор радиоканалов в IEEE 803.15.4 (PHY 2400 МГц).

Целью статьи является описание антенн для работы ZigBee сети, описание особенностей и методики расчета спиральных антенн, выполнение расчета, отображение результатов экспериментальных исследований действующих образцов антенн, сравнение параметров различных антенн по результатам исследований.

Постановка проблемы. Из всего сказанного выше следует учитывать необходимость применения в диапазоне 2400 МГц различных типов антенн.

Антенна должна обеспечивать прием во всех каналах системы с необходимым коэффициентом усиления, поэтому ее элементы нужно рассчитывать с учетом всего диапазона, но целесообразнее выбрать конструкцию «по нижней границе», учесть возможность простого изготовления и согласования. Поэтому применение различного типа антенн для узлов сенсорной сети ZigBee является актуальным и требует дополнительных исследований.

Одним из решений является применение спиральных антенн с рефлектором. Такие антенны были изобретены еще в 1947 году *Джоном Краусом*. Спиральные антенны относятся к классу *антенн бегущей волны*. Диапазон волн определяет вид спиральной антенны. При работе направленной антенны с односторонним излучением (приемом) используют спиральную антенну с рефлектором. Именно эти антенны следует рассматривать как перспективное направление развития сетей ZigBee с увеличением зоны покрытия или увеличения надежности приема за счет увеличения коэффициента усиления такой антенны.

Материалы исследований. Существуют цилиндрические, конические и плоские спиральные антенны. Чаще используют спиральную антенну с рефлектором (экраном), см рис. 2.

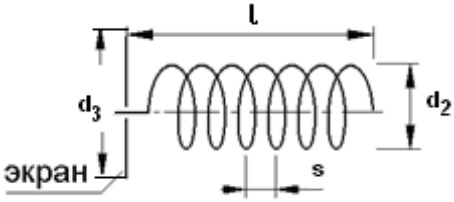


Рис. 2 – Цилиндрическая спиральная антенна: d_2 – диаметр спирали (витка); s – шаг спирали; l – длина намотки; d_3 – радиус рефлектора.

Если необходима узконаправленная антенна, то можно использовать цилиндрическую спиральную конструкцию; коническая спиральная антенна обеспечит более широкую диаграмму направленности (примерно в два раза). Плоские спиральные антенны являются широкополосными.

Применение спиральной антенны как дополнительного устройства приемопередатчиков в сети Zigbee позволяет решить несколько задач:

– улучшить надежность передачи;

– увеличить дальность передачи-приема при выходе из строя некоторых элементов сети;

– увеличить общее время работы сети.

Диаграмма направленности спиральной антенны состоит из двух лепестков, расположенных вдоль оси спирали по разные стороны от нее [3].

Спиральная антенна характеризуется количеством витков n, диаметром витков d_2 и шагом спирали s. Чем больше витков содержит такая антенна, тем выше коэффициент усиления. При этом радиус витка обычно выбирается исходя из условия, чтобы длина витка соответствовала длине волны излучения, диаметр витка для оптимальной конструкции равен

$$d_2 = \frac{\lambda}{\pi}, \tag{2}$$

а шаг спирали должен быть равен четверти длины волны излучения, если необходимо получить круговую поляризацию,

$$s = 0,25\lambda . \tag{3}$$

Угол спирали $\alpha = 12^\circ$.

Размер рефлектора, который устанавливается перпендикулярно оси спирали и может иметь форму диска или квадрата, должен быть не меньше длины волны излучения. Минимальные размеры рефлектора (экрана)

$$d_3 = 0,62\lambda . \tag{4}$$

Входное сопротивление антенн, Ом, при условии $12^\circ \le \alpha \le 15^\circ$ и длины периметра витка c в диапазоне $0,75\lambda \le c \le 1,33\lambda$ при количестве витков $n > 3$ связаны зависимостью:

$$R \approx 140\frac{c}{\lambda}. \quad (5)$$

Ширина основного лепестка диаграммы направленности, градусы, по уровню половинной мощности составляет:

$$\theta_{0,5} = 52\frac{\lambda}{c}\sqrt{\frac{ns}{\lambda}}. \quad (6)$$

Коэффициент усиления такой антенны может быть рассчитан по *формуле Крауса*

$$G = 11,8 + 10\lg\left(\left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 \cdot n \cdot d_2\right). \quad (7)$$

Конструкция спиральной антенны представляет собой металлическую спираль, питаемую коаксиальной линией, которая имеет в общем случае круговую поляризацию и большой коэффициент усиления. При работе на передачу спиральная антенна излучает поле с вращающейся поляризацией, право или лево поляризованное, в зависимости от направления намотки спирали. При работе на прием она принимает либо поле вращающейся поляризации с направлением вращения, как и при передаче, либо поле любой линейной поляризации. Сигнал с линейной поляризацией (вертикальной или горизонтальной) на такую антенну принимается с уменьшением коэффициента усиления на три децибела. Антенна вызывает круговую поляризацию, которая может быть как право-, так и левосторонней – в зависимости от того, как намотана спираль.

Такие антенны должны применяться только в паре, то есть если на приемопередающем узле сети используется спиральная антенна, то и на другом узле должна быть спиральная антенна с одинаковой намоткой спирали.

Согласование сопротивления с линией производится посредством четвертьволнового трансформатора. Самый изящный метод согласования – использование куска меди в форме прямоугольного треугольника, который является продолжением провода, намотанного вокруг трубы. Катеты треугольника для частоты 2437 МГц имеют размеры 71x17 мм. С одной стороны треугольник подпаивается к проводу, а с другой соединяется с центральным штырем разъема N-серии [4].

Параметры антенны могут значительно изменяться при небольшом изменении размеров элементов и их взаимного расположения. Поэтому очень важно выполнить полный расчет элементов такой антенны, их изготовление и провести проверку конструкции антенны в реальных условиях эксплуатации для сети Zigbee, так как при настройке можно скорректировать только шаг между витками («растянуть» спираль).

По сравнению с директорными антеннами у спиральных антенн точность изготовления и размеры ее элементов не являются столь критичными, она имеет меньшие размеры при таком же коэффициенте усиления. Расчет

такой спиральной антенны с использование программы [5] для системы ZigBee представлен в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты расчета спиральной антенны

	Частота 2350 МГц	Частота 2350 МГц	Частота 2400 МГц	Частота 2483,5 М Гц
Параметр, и/или формула для расчета параметра	Расчет по формулам, значение	Расчет с помощью программы	Расчет с помощью программы	Расчет с помощью программы
Длина волны, λ, мм	127,6	127,6	125	120,7
Число витков спирали, n	7	7	7	7
Шаг спирали между центрами, мм (выбран) $s = 0,2\lambda$	25,52	25,52	25	24,1
Длина спирали l_2, мм $l_2 = ns$	178,64	178,7	175	169,1
Общая длина провода, мм	953,58	974,4	954,1	922,1
Внутренний диаметр спирали d_2, мм $d_2 = \lambda / \pi$, $d_2 = 0,34\lambda$	40,63…43,38	43,5	42,6	41,2
Диаметр провода d, мм $(0,01...0,03)\lambda$	2,5	2,5	2,5	2,4
Минимальный диаметр рефлектора d_3, мм, формула (4)	79,11	79,1	77,5	74,8
Приблизительное усиление антенны G, dBi	6,34…7,19	11,96	11,96	11,96
Входное сопротивление антенны R, Ом, формула (5)	140…149,45	140	140	140
Полоса частот по уровню 1 дБ		1,06	1,06	1,06
$F_{\max}$, МГц		2426,57	2478,2	2564,42
$F_{\min}$, МГц		2275,84	2324,26	2405,12
Полоса частот по уровню 3 дБ		1,17	1,17	1,17
$F_{\max}$, МГц		2552,59	2606,9	2697,6
$F_{\min}$, МГц		2163,48	2209,51	2286,39
Ширина основного лепестка, градусы, формула (6), по уровню 3дБ	61,52…57,47	43,9	43,9	43,9

Была изготовлена спиральная антенна по расчетным данным, представленным в табл. 2, для всей полосы частот, см. рис. 3.

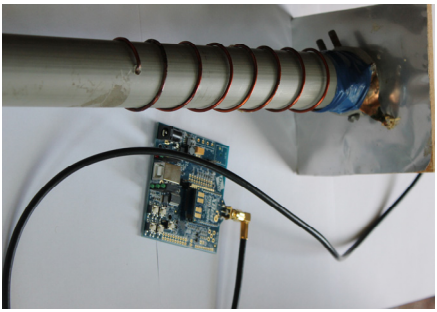


Рис. 3 – Внешний вид разработанной и изготовленной спиральной антенны.

Результаты исследований. Были проведены экспериментальные исследования по установлению зависимости между показателями передачи пакетов и расстояниями между модулями ZigBee. Эксперименты проводились для спиральной антенны, устанавливаемой на подвижный модуль, неподвижный модуль был подключен к персональному компьютеру, использовалась программа моделирования, настройки и отображения работы сети X-CTU. Аналогичные исследования проводились и для штыревых антенн разных типов. В табл. 3 – 5 представлены результаты экспериментальных исследований.

Таблица 3 – Экспериментальные результаты для условий прямой видимости с использованием штыревой антенны типа ANT 2.4 BY-2400-02 RPSMA

№ Эксперимента	Временной интервал между пакетами, мс	Пакеты, размер 32 байт			Уровень сигнала на входе приемника, дБ	Расстояние между модулями, м
		Принятые, кол.	Не принятые, кол.	Процент принятых пакетов, %		
1	6000	10	0	100	-40	0
2		10	0	100	-51	6
3		10	0	100	-63	12
4		9	1	90	-67	18
5		9	1	90	-70	24
6		8	2	80	-75	30
7		9	1	90	-76	36
8		8	2	80	-77	42
9		9	1	90	-81	48
10		9	1	90	-85	54

Таблица 4 – Экспериментальные результаты для условий прямой видимости с использованием штыревой антенны ANT 2.4 CW-RCS RPSMA

№ Эксперимента	Временной интервал между пакетами, мс	Пакеты, размер 32 байт			Уровень сигнала на входе приемника, дБ	Расстояние между модулями, м
		Принятые, кол.	Не принятые, кол.	Процент принятых пакетов, %		
1	6000	10	0	100	-40	0
2		10	0	100	-46	6
3		10	0	100	-50	12
4		10	0	100	-57	18
5		10	0	100	-63	24
6		9	1	90	-69	30
7		10	0	100	-75	36
8		10	0	100	-79	42
9		9	1	90	-83	48
10		8	2	80	-87	54

Таблица 5 – Экспериментальные результаты для условий прямой видимости с использованием разработанной спиральной антенны

№ Эксперимента	Временной интервал между пакетами, мс	Пакеты, размер 32 байт			Уровень сигнала на входе приемника, дБ	Расстояние между модулями, м
		Принятые, кол.	Не принятые, кол.	Процент принятых пакетов, %		
1	6000	10	0	100	-49	0
2		10	0	100	-53	6
3		10	0	100	-59	12
4		10	0	100	-61	18
5		10	0	100	-65	24
6		10	0	100	-70	30
7		10	0	100	-72	36
8		9	1	90	-74	42
9		10	0	100	-75	48
10		8	2	80	-76	54

Выводы. Сравнение результатов для трех типов антенн при одних и тех же условиях проведения эксперимента показывает весьма надежную связь при применении спиральных антенн на расстоянии, менее надежную связь при использовании антенн ANT 2.4 BY-2400-02 и ANT 2.4 CW-RCS (расстояние для надежно принятого сигнала до 20 м соответственно). Несмотря на указанный в паспорте антенны ANT 2.4 BY-2400-02 коэффициент усиле-

ния 3 dBi, антенна проявила себя с худшей стороны по сравнению с четвертьволновой.

Применение для модулей сети ZigBee спиральных антенн определяется условиями развертывания сети и гарантирует в течение всей ее работы надежную связь, повышая качество приема по сравнению с другими антеннами.

Список литературы: **1** Новые антенны диапазона 2,4 ГГц для Wi-Fi, ZigBee и Bluetooth [Электронный ресурс]. – Режим доступа:http://www.compel.ru/2010/06/24/novye-antenny-diapazona-24-ggc-dlya-wi-fi-zigbee-i-bluetooth/ –30.04.2013 г. – Загл. с экрана. **2** Штыревые антенны *И.Григоров* (UZ3ZK), 308015, Белгород-15, а/я 68 (РЛ 7/92) 18 июня 2010 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.shema.ru/articles/category/editorial/–30.04.2013 г. – Загл. с экрана. **3** Спиральные антенны EW8AU *Владимир Приходько* [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://ew8au.narod.ru/index.htm –30.04.2013 г. – Загл. с экрана. **4** Направленные антенны для беспроводных устройств стандарта 802.11b/g. *Сергей Пахомов* [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.compress.ru/Archive/CP/2006/4/49/# –8.05.2013 г. – Загл. с экрана. **5**. Расчет спиральной антенны [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://aerial.dxham.ru/onlajn-raschety/raschety-antenn/raschet-spiralnoj-antenny –10.04.2013 г. – Загл. с экрана.

Поступила в редколлегию 20.05.2013

УДК 621.968: 519.6

Моделирование и расчёт антенн для ZigBee сети / А. С. Борисенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 17 – 26. Бібліогр.: 5 назв.

Проведений огляд антен (для ZigBee мережі), моделювання і розрахунок роботи спіральної антени. Приведені результати експериментального дослідження і порівняння показників застосування різних антен в бездротовій мережі ZigBee.

Ключові слова: ZigBee, спіральна антена, спрямована антена, штирьова антена, зона покриття, моделювання.

In this article are conducted review of antennas, their simulation and calculation of spiral antenna for ZigBee network. There are given results of experimental measurements and comparison of application of antennas in the wireless network of ZigBee.

Key words: ZigBee, spiral aerial, directed aerial, pintle aerial, area of coverage, design.

УДК 621. 822

А.В. ГАЙДАМАКА, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ МЕЖДУ ТЕЛАМИ КАЧЕНИЯ ОДНОРЯДНОГО РАДИАЛЬНОГО ПОДШИПНИКА: УЧЁТ УГЛОВ КОНТАКТА

Уточнено распределение радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения с кольцами. Выявлены касатель-

© А. В. Гайдамака, 2013

ные силы на дорожках качения колец, которые затрудняют движение одних тел качения и ускоряют движение других в зоне радиального нагружения подшипника.
Ключевые слова: подшипник, тела качения, нагрузка, угол контакта.

Введение. Для расчета ресурса подшипников качения по критерию контактной выносливости поверхностей трения чрезвычайно важной является задача о распределении радиальной нагрузки между телами качения. Чем точнее найдено это распределение, особенно для нагрузки на центральное тело качения подшипника, тем ближе к истинному будет результат расчета ресурса. Не менее важно знать величины, а также направление действующих радиальных сил на тела качения в окрестности границ зоны радиального нагружения подшипника. Силы по краям зоны радиального нагружения подшипника могут существенно влиять на усталостную прочность и износостойкость сепаратора, однако их определению ранее уделялось недостаточное внимание.

Анализ известных исследований. Для идеальных однорядных радиальных подшипников качения задача о распределении радиальной нагрузки между телами качения впервые была решена *Р. Штрибеком* [1]. В этой работе геометрические уравнения − уравнения связи радиального сближения колец в окрестности центрального тела качения δ_0 и радиальных сближений колец в окрестности остальных тел качения $\delta_{i\gamma}$ зоны радиального нагружения подшипника – получены в предположении, во-первых, о справедливости оценки радиального сближения колец по контактной деформацией тел качения с внутренним кольцом, во-вторых, о равенстве вертикальных смещений точек контакта тел качения и, в-третьих, о совпадении центров внутреннего и наружного колец. На рис. 1 показано вертикальное смещение вниз внутреннего кольца на величину δ_0, в результате которого, согласно [1],

$$a_0c_0 = a_1c_1 = a_2c_2 = ... = \delta_0 .$$

Из треугольников $a_1c_1d_1$, $a_2c_2d_2$, … определяют $\delta_1 = a_1d_1$, $\delta_2 = a_2d_2$, … и связь радиальных сближений тел качения

$$\delta_{i\gamma} = \delta_0 \cdot \cos i\gamma. \quad (1)$$

Физические уравнения − уравнения связи для величин $\delta_{iш}$ радиальных сближений колец, например колец шарикоподшипников, с радиальными силами $F_{iш}$, действующими на тела качения, определяются в соответствии с известным решением контактной задачи [2]

$$\delta_{iш} = C_ш \cdot F_{iш}^{2/3}, \quad (2)$$

где $C_ш$ – постоянная величина, зависящая от физико-механических свойств и геометрических параметров контактирующих деталей шарикоподшипников,

$$C_ш = 0,5 \cdot \sqrt[3]{18((1-\mu^2)/E)^2 \cdot (R_1 + R_2)/R_1 \cdot R_2}\ ;$$

R_1, R_2 − радиусы шара и дорожки качения кольца соответственно; μ − коэффициент Пуассона; E − модуль упругости.

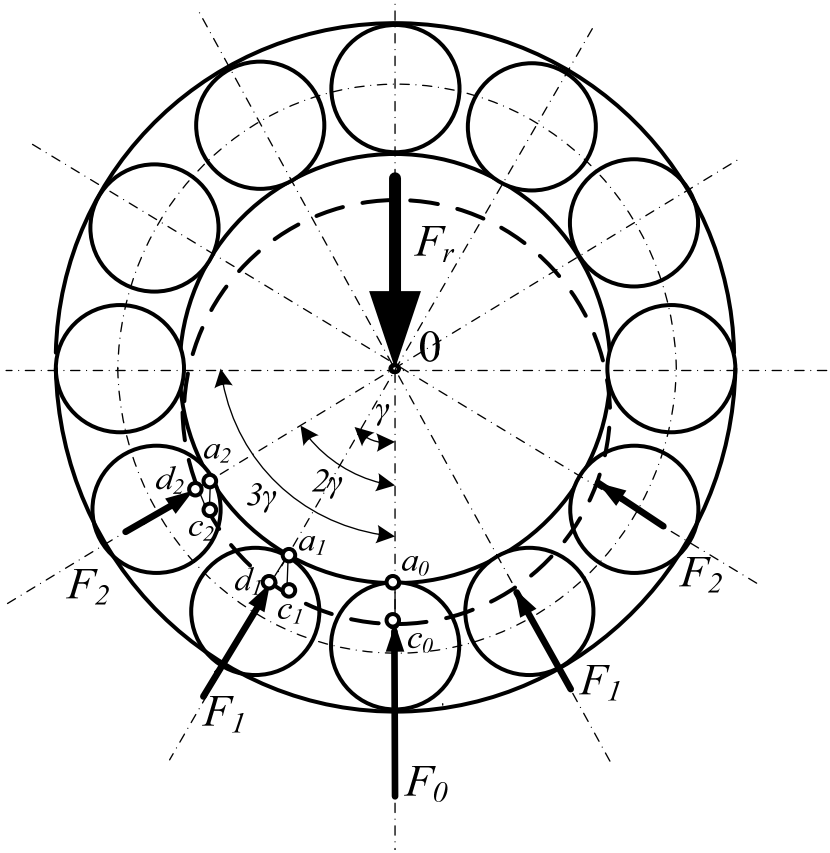


Рис. 1 − Деформации тел качения в контакте с внутренним кольцом (по работе [1]).

Из условия равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием нагрузки F_r и сил F_i, находим выражение силы на наиболее нагруженный шарик:

$$F_{0ш} = F_r / (1 + 2\sum_{i=1}^{n} \cos^{5/2} i\gamma). \qquad (3)$$

В последующих работах, например [2 – 7], где рассматривается решение задачи о распределении радиальной нагрузки между телами качения *идеального радиального подшипника*, также не учитывается различие в положениях геометрических центров внутреннего и наружного колец при определении зависимости (1), что не позволяет исследовать особенности взаимодействия деталей подшипника по краям его зоны радиального нагружения.

С учётом вышеизложенного, задача по уточнению распределения радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника является актуальной.

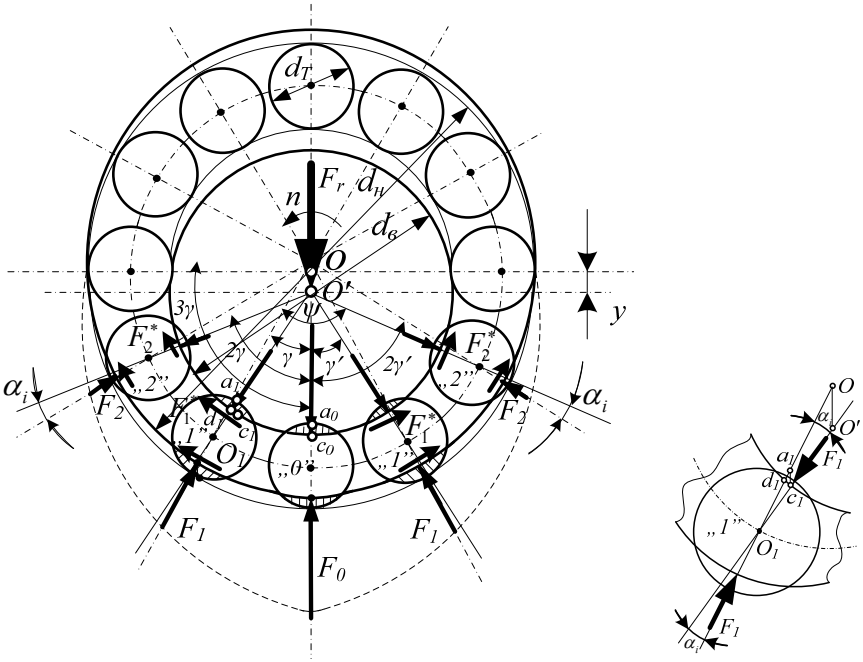


Рис. 2 − Деформации тел качения с кольцами с учётом углов контакта α_i и распределение радиальной нагрузки между телами качения.

Постановка задачи. Задача по уточнению распределения радиальной нагрузки F_r между телами качения идеального однорядного радиального подшипника состоит в построении геометрических уравнений − уравнений связи радиальных сближений δ_0 колец в окрестности центрального тела качения и радиальных сближений $\delta_{i\gamma}$ колец в окрестности остальных тел качения угловой зоны ψ радиального нагружения подшипника при упругом контактном деформировании с учётом различного положения центров колец O

и O', то есть на основе реальной картины взаимного расположения деталей (рис. 2).

Математическая модель. При решении задачи об уточнении распределения радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника качения приняты следующие допущения:

- детали подшипника имеют идеальную геометрическую форму;
- радиальный зазор в подшипнике отсутствует;
- перекосы колец и повороты роликов не учитываются;
- внутреннее и наружное кольца не изгибаются;
- радиальные сближения наружного и внутреннего колец с телами качения за счёт контактной деформации одинаковы на заданном радиальном направлении;
- динамические эффекты, обусловленные вращением внутреннего кольца при неподвижном наружном, не влияют на работу деталей.

Пусть в исходном состоянии центры наружного и внутреннего колец совпадают. При смещении внутреннего кольца вертикально вниз на величину $y = \delta_0$ между центрами колец образовалось расстояние OO' (рис 2). Тогда для $\Delta OO'O_1$ (O_1 – центр, например, первого тела качения) справедливы соотношения:

$$O_1O = \lfloor 0,5d_н - (0,5d_T - 0,5\delta_\gamma) \rfloor; \quad O_1O' = \lfloor 0,5d_в + (0,5d_T - 0,5\delta_\gamma) \rfloor;$$
$$OO' = \delta_0, \tag{4}$$

где $d_н$ – диаметр дорожки качения наружного кольца; $d_в$ – диаметр дорожки качения внутреннего кольца; d_T – диаметр тела качения; δ_γ – радиальная деформация в контакте тела качения с наружным и внутренним кольцами.

Между отрезками O_1O, O_1O' и OO' выполняется соотношение:

$$\left[0,5d_н - (0,5d_T - 0,5\delta_\gamma)\right]^2 = \left[0,5d_в + (0,5d_T - 0,5\delta_\gamma)\right]^2 + \delta_0^2 +$$
$$+2\delta_0\left[0,5d_в + (0,5d_T - 0,5\delta_\gamma)\right]\cos\gamma', \tag{5}$$

преобразовав которое, без учёта малых величин порядка выше второго, получим связь радиальных сближений колец в окрестности первого и центрального тел качения:

$$\delta_\gamma = \delta_0 \cdot \cos\gamma' \tag{6}$$

Связь радиальных сближений колец в окрестности любого тела качения и центрального тела качения с учётом (6) имеет вид:

$$\delta_{i\gamma} = \delta_0 \cdot \cos i\gamma' \tag{7}$$

Сопоставление радиальных контактных сближений деталей, определённых по предложенной методике (выражение (7)) и известной методике (вы-

ражение (1)), показывает их отличие в величинах углов между телами качения (вместо γ образуется γ', $i\gamma' - i\gamma = \alpha_i$).

Физические уравнения связи для величин сближений шариков с кольцами и сил, действующих на шарики, имеют вид:

$$\delta_0 = C_ш \cdot F_0^{2/3};$$

$$\delta_1 = \delta_0 \cos\gamma_1' = C_ш \cdot F_1^{2/3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_n = \delta_0 \cos\gamma_n' = C_ш \cdot F_n^{2/3}. \qquad (8)$$

Отношение левых и правых частей уравнений (8) даёт связь F_0 с F_i:

$$\delta_0 / \delta_1 = \delta_0 /(\delta_0 \cos\gamma_1') = (F_0 / F_1)^{2/3};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_0 / \delta_n = \delta_0 /(\delta_0 \cos\gamma_n') = (F_0 / F_n)^{2/3}, \qquad (9)$$

откуда:

$$F_1 = F_0 (\cos\gamma_1')^{3/2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_n = F_0 (\cos\gamma_n')^{3/2}. \qquad (10)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием радиальной нагрузки F_r и сил F_i, получим

$$F_r = F_0 + 2F_1 \cdot \cos\gamma_1' + \ldots + 2F_n \cdot \cos\gamma_n',$$

откуда можно определить силу на наиболее нагруженный шар,

$$F_0 = F_r /(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \cos^{5/2} \gamma_i'). \qquad (11)$$

Физические уравнения связи для величин сближений роликов с кольцами и сил, действующих на ролики, имеют вид:

$$\delta_0 = C_{p0} \cdot F_0;$$

$$\delta_1 = \delta_0 \cos\gamma_1' = C_{p1} \cdot F_1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_n = \delta_0 \cos\gamma_n' = C_{pn} \cdot F_n, \qquad (12)$$

где C_{pi} – функция от F_i [2], $C_{pi} = \dfrac{0,579}{l \cdot E}\left[\ln\dfrac{1,727 l \cdot E \cdot (R_1 + R_2)}{F_i} + 0,814\right]$.

Отношение левых и правых частей уравнений (12) даёт связь F_0 и F_i вида

$$\delta_0 / \delta_1 = \delta_0 /(\delta_0 \cos\gamma_1') = c_{p01}(F_0 / F_1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_0 / \delta_n = \delta_0 /(\delta_0 \cos\gamma_n') = c_{p0n}(F_0 / F_n), \quad (13)$$

где $C_{p01} = C_{p0} / C_{p1}, ..., C_{p0n} = C_{p0} / C_{pn}$; откуда:

$$F_1 = C_{p01} \cdot F_0(\cos\gamma_1');$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$F_n = C_{p0n} \cdot F_0(\cos\gamma_n'); \quad (14)$$

Используя условие равновесия внутреннего кольца, находящегося под действием радиальной нагрузки F_r и сил F_i, получим

$$F_r = F_0 + 2C_{p01} \cdot F_1 \cdot \cos\gamma_1' + ... + 2C_{p0n} \cdot F_n \cdot \cos\gamma_n',$$

откуда можно определить силу на наиболее нагруженный ролик,

$$F_0 = F_r /(1 + 2\sum_{i=1}^{n} C_{p0i} \cdot \cos^2\gamma_i'). \quad (15)$$

Отклонение радиальных сил F_i взаимодействия наружного кольца с телами качения от направлений радиальных сил F_i' ($F_i = F_i'$) взаимодействия тел качения с внутренним кольцом приводит к возникновению углов контакта α_i и обуславливает появление касательных сил F_i^*, действующих по дорожкам качения колец (рис. 2). При этом направление сил F_i^* таково, что с началом вращения внутреннего кольца эти силы затормаживают движение тел качения к центру зоны радиального нагружения подшипника, определяемую углом ψ, и ускоряют их выход из зоны нагружения. В *подшипниках типа 2726*, устанавливаемых в опорных узлах колёсных пар железнодорожных вагонов, силы F_i^* могут способствовать проскальзыванию роликов [8], а также изнашиванию и разрушению их сепараторов [9].

Таблица – Результаты расчёта сил F_i^*

Нагрузка, Н / Число роликов, z	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_1^*	F_2^*	F_3^*	F_4^*
14	15614	13354	7687	1641	0	1,4	1,5	0,4	0
15	14560	12713	7969	2501	0	1,2	1,6	0,6	0
16	13654	12125	8119	3232	0	1,0	1,4	0,7	0

Величины сил F_i^* с учётом рис. 2 определяются выражением:

$$F_i^* = F_i \sin\left\{\arccos\frac{0,25[d_н-(d_T-\delta_{i\gamma})]^2+0,25[d_в+(d_T-\delta_{i\gamma})]^2-\delta_0^2}{0,5[d_н-(d_T-d_{i\gamma})][d_в+(d_T-d_{i\gamma})]}\right\} \quad (16)$$

Результаты расчёта сил F_i^* для идеального роликоподшипника типа 2726, находящегося под радиальной нагрузкой $F_r = 50$ кН, приведены в таблице, а графики $F_i^*(z)$, где z – число роликов, показаны на рис. 3.

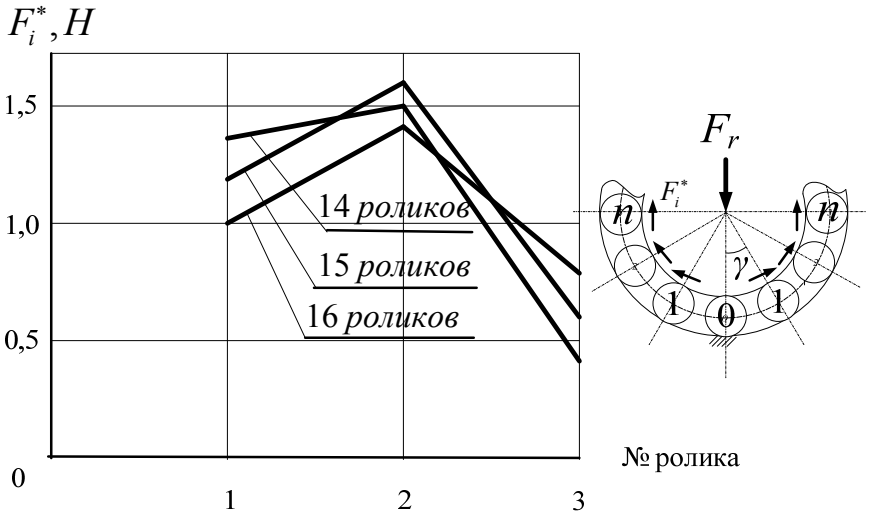


Рис. 3 − Зависимость касательной силы F_i^* в контакте роликов с дорожками качения колец от числа роликов и их положения в подшипнике.

Перспективы дальнейших исследований. Автор предполагает уточнить распределение радиальной нагрузки между телами качения идеального однорядного радиального подшипника с учётом углов контакта тел качения и радиального зазора.

Выводы.

- Геометрические уравнения сближений деталей подшипников качения (уравнения связи радиальных смещений тел качения в контакте с кольцами), определённые по известной методике, не учитывают различного положения центров наружного и внутреннего колец, что не соответствует реальной картине их взаимодействия.

- Учёт углов контакта тел качения с кольцами позволил выявить касательные силы по беговым дорожкам колец, которые во вращающемся подшипнике затормаживают движение тел качения, перемещающихся к центру зоны радиального нагружения, и ускоряют их выход из зоны нагружения.
- Расчёт касательных сил, действующих на дорожках качения колец на примере идеального роликоподшипника типа 2726, находящегося под радиальной нагрузкой, характерной для его условий эксплуатации, позволил установить, что, во-первых, наибольшие значения касательных сил отмечаются на некотором удалении от центрального ролика с последующим их уменьшением у границ зоны радиального нагружения, и, во-вторых, с увеличением числа роликов в подшипнике касательные сил в окрестности границ зоны радиального нагружения возрастают.

Список литературы: **1**.*Трейер В.Н.* Теория и расчёт подшипников качения. – Л., ОНТИ, 1936. – 175 с. **2**. *Макушин В.М.* Деформация и напряжённое состояние деталей в местах контакта. − М.: ГНТИ, 1952. − 62 с. **3**. Подшипники качения. Справочное пособие/Под ред. *Н.А. Спицына, А.И. Спришевского.* – М.: Машгиз, 1981. – 828 с. **4**. *Спришевский А.И.* Подшипники качения. – М.: Машиностроение, 1968. – 632 с. **5**. Опоры осей и валов машин и приборов/Под ред. *Н.А. Спицына, М.М.Машнева.* – Л.: Машиностроение, 1970. – 520 с. **6.** *Ковалёв М.П., Народецкий М.З.* Расчёт высокоточных шарикоподшипников. – М.: Машиностроение, 1975. – 280 с. **7.** Расчёты на прочность в машиностроении/Под ред. *С.Д.Пономарёва*. – М.: Машгиз, 1958. – Т. 2. – 752 с. **8**. *Проскурина Ю.М.* Проскальзывание тел качения в роликовом подшипнике. // Вестник ВНИИЖТ. − 1970. − №6. − с. 41 − 44. **9**. *Поляков А.И.* Анализ характера повреждений и износа беззаклёпочных сепараторов.// Труды ВНИИЖТ. − 1979. − Вып. 583.− С. 68 − 78.

Поступила в редколлегиюї 21.05.2013

УДК 621.822

Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта / А. В. Гайдамака // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 26 – 34. Бібліогр.: 9 назв.

Уточнено розподіл радіального навантаження між тілами кочення ідеального однорядного радіального підшипника з урахуванням кутів контакту тіл кочення з кільцями. Виявлені дотичні сили на доріжках кочення кілець, які утруднюють рух одних тіл кочення і прискорюють рух інших в зоні радіального навантаження підшипника.

Ключові слова: підшипник, тіла кочення, навантаження, кут контакту.

Clarified the distribution of the radial load between the rolling elements of the ideal single-row radial bearing with account for the contact angle contact between the rolling elements with rings. Found shear forces on the raceways rings, which hinder the movement of some of the rolling elements and speed up the movement left in the area of radial bearing load.

Key words: bearing rolling elements, load, contact angle.

УДК 539.1

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Ю.Л. ГЕВОРКЯН, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

БЛОЧНАЯ МАТРИЧНАЯ СТРУКТУРА И СИММЕТРИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Рассмотрены примеры линейных и линеаризованных математических моделей, описывающих динамику гидромеханических систем с сосредоточенными параметрами. Показано, что матрицы этих моделей имеют блочную структуру, обладающую специальными свойствами симметрии.

Ключевые слова: дискретная модель, гидромеханический узел, механические колебания, матрица колебаний, блочная матрица, симметрия матрицы.

Введение и постановка задачи. В прикладных задачах современной гидромеханики используют дискретные математические модели, учитывающие изменения десятков параметров [1, 2], и здесь целесообразно переходить от скалярной формы записи уравнений к матричной. В [3 – 5] отмечена особая роль линейных и линеаризованных матричных моделей, которую они играют при анализе динамики и проверке устойчивости механических или гидромеханических узлов. На многочисленных примерах, отвечающих конкретным техническим приложениям, показано, что матрицы этих моделей целесообразно приводить к специальному блочному виду, который подчёркнёт, использует и сохранит при преобразованиях симметрию их уравнений. В новой публикации мы рассмотрим ещё несколько примеров на ту же тему, после чего перейдём на более высокий уровень обобщения и сформулируем общие правила, которым обязаны удовлетворять линеаризованные модели гидромеханических систем с сосредоточенными параметрами.

Но прежде нужно напомнить или уточнить некоторые известные определения алгебры блочных матриц, а также формулировки известных теорем (доказательства которых можно, например, найти в [6]).

Классические определения и теоремы. Симметричная матрица A называется *положительной (неотрицательной)*, если при любом ненулевом столбце X выполняется условие

$$X^T \cdot A \cdot X > 0 \qquad (X^T \cdot A \cdot X \geq 0);$$

при этом матрица $B = -A$ является *отрицательной* (*неположительной*). Для обозначения таких матриц используются стандартные знаки отношения –

$$A > 0,\ A \geq 0,\ B < 0 \text{ и } B \leq 0, \text{ соответственно.}$$

Сумма неотрицательных матриц является неотрицательной, сумма положительной и неотрицательной матриц является положительной матрицей.

© А. Л. Григорьев, Ю. Л. Геворкян, 2013

Неположительная или неотрицательная матрица называется *определённой*. Симметричная матрица, не являющаяся определённой, называется *неопределённой*. Симметричные матрицы A и B являются *симметрично эквивалентными*, если удовлетворяют условию

$$B = Э \cdot A \cdot Э^T \text{, где } Э^{-1} = Э^T .$$

Любая симметричная матрица симметрично эквивалентна некоторой диагональной матрице. Матрица $D = diag(d_1, ..., d_n)$ является неопределённой, если она имеет и положительные, и отрицательные диагональные элементы d_k; в противном случае она является определённой.

Положительная (отрицательная) матрица является невырожденной. Неотрицательная (неположительная) невырожденная матрица является положительной (отрицательной). Положительная (неотрицательная) матрица A может быть представлена в виде $A = B \cdot B^T$.

Теорема 1. *У положительной (неотрицательной) матрицы A все главные миноры положительны (неотрицательны).*

Следствия. У отрицательной (неположительной) матрицы все главные миноры чётного порядка положительные (неотрицательные), а все главные миноры нечётного порядка – отрицательные (неположительные). Симметричная матрица, имеющая отрицательный главный минор чётного порядка, является неопределённой. У положительной (неотрицательной) матрицы все элементы главной диагонали – положительные (неотрицательные) числа. Если матрица является определённой, то элементы удовлетворяют неравенству

$$a_{ij}^2 \le a_{ii} \cdot a_{jj} , \qquad (1)$$

причём для положительной (отрицательной) матрицы все такие неравенства являются строгими. В положительной (неотрицательной) блочной матрице

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix}$$

угловые блоки B_{11} и B_{22} являются положительными (неотрицательными) матрицами. У положительной (неотрицательной) матрицы любая её *симметричная подматрица* положительна (неотрицательна).

Хотим обратить особое внимание на неравенство (1), которое называют *условием преобладания диагональных элементов над недиагональными элементами матрицы*. В теореме 1 и её следствиях приведены необходимые условия положительности (неотрицательности) симметричной матрицы. Сформулируем достаточные условия.

Теорема 2 (критерий Сильвестра для положительной матрицы). *Симметричная матрица n-го порядка является положительной, если все её угловые миноры $M_k, k = 1, 2, ..., n$ положительны.*

Следствие. Симметричная матрица является отрицательной, если угло-

вой минор первого порядка отрицателен, а знаки остальных угловых миноров строго чередуются, то есть

$$M_1 < 0,\ M_2 > 0,\ M_3 < 0,\ M_4 > 0 \quad \text{и так далее.}$$

Теорема 3 (критерий Сильвестра для неотрицательной матрицы). *Симметричная матрица является неотрицательной, если все её главные миноры неотрицательны.*

Следствие. Симметричная матрица является неположительной, если все её главные миноры чётного порядка не отрицательны, а нечётного порядка – не положительны.

Тонкая гауссова механика. Перепишем условия теоремы 2 так:

$$\text{если } M_1 > 0,\ M_2 > 0, \ldots, M_n > 0, \quad \text{то} \quad A > 0.$$

В математике многие теоремы позволяют выполнять одновременный переход в левой и правой части подобных утверждений от строгих неравенств к нестрогим, то есть сразу же получить следующее утверждение:

$$\text{если} \quad M_1 \geq 0,\ M_2 \geq 0, \ldots, M_n \geq 0, \quad \text{то} \quad A \geq 0.$$

Но тонкая механика *алгоритма Гаусса*, на которой держится доказательство критерия Сильвестра (см. [6, с.153]), не допускает таких грубых предельных переходов. На самом деле, правильный переход выглядит так:

$$\text{если } M_1 > 0,\ M_2 > 0, \ldots, M_{n-1} > 0,\ M_n = 0, \text{ то } A \geq 0,$$

и для вырожденной матрицы ориентироваться на угловые миноры нельзя.

Сравнивая формулировки теорем 2 и 3, замечаем, что условие не отрицательности (не положительности) всех главных миноров неотрицательной (неположительной) матрицы является не только достаточным, но и необходимым, так что это действительно *критерий*. Однако для матриц высокого порядка проверка выполнения этого критерия оказывается достаточно трудоёмкой, и поэтому на практике он используется редко.

Часто оказывается проще выполнить симметричное преобразование матрицы и получить диагональную матрицу, эквивалентную исходной. Правда, если эти вычисления поручить ЭВМ, то под влиянием погрешности округления вместо нулевого диагонального элемента мы можем получить отрицательный элемент, что приведёт к неправильным выводам. Вырожденная неотрицательная матрица находится на грани неопределённости, и, если не предпринимать специальных мер, то при незначительном изменении её элементов можно легко перейти эту грань.

Этой опасности можно избежать, если исходная матрица будет представлена в виде суммы неотрицательных матриц некоторого простого вида. На материале следующих примеров мы покажем, что часто такое разложение матрицы имеет не формальный смысл, и что такой путь образования неотрицательных (или неположительных) матриц, используемых в практике инженерных расчётов, является естественным.

Матрица массообмена. Составим уравнения, описывающие процесс выравнивания давления в полостях простейшей гидромеханической системы, показанной на рис. 1. Полости 1–3 заполнены вязкой сжимаемой жидкостью, которая имеет возможность перетекать через соединяющие их каналы. Будем считать, что объёмная скорость q_{ij} (расход) жидкости через канал пропорционален перепаду давлений между полостями i и j, то есть

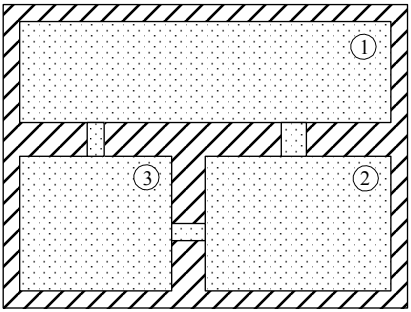


Рис. 1 – Схема простейшего гидромеханического узла.

$$q_{ij} = k_{ij} \cdot (p_i - p_j), \qquad (2)$$

где p_i – давление жидкости в i-той полости; k_{ij} – коэффициенты пропорциональности, зависящие, в частности, от геометрических размеров канала, а также, возможно, от направления течения и некоторых других факторов. Заметим, что соотношение вида (2) характерно для ламинарного течения (возникающего, например, при перетекании через плотные или прецизионные зазоры), но используется и для анализа турбулентных течений в рамках их линеаризованных моделей.

Суммарное поступление или убыль массы жидкости в первую полость приводит к изменению давления в ней, что описывается так называемым *уравнением баланса масс для сжимаемой жидкости*:

$$\alpha w_1 \dot{p}_1 = q_{21} + q_{31} = k_{21}(p_2 - p_1) + k_{31}(p_3 - p_1) = (-k_{21} - k_{31})p_1 + k_{21}p_2 + k_{31}p_3,$$

где α – коэффициент сжимаемости жидкости; w_1 – объём полости.

Аналогичные уравнения мы можем записать для второй и третьей полости:

$$\alpha w_2 \dot{p}_2 = q_{12} + q_{32} = k_{12}(p_1 - p_2) + k_{32}(p_3 - p_2) = k_{12}p_1 + (-k_{12} - k_{32})p_2 + k_{32}p_3;$$

$$\alpha w_3 \dot{p}_3 = q_{13} + q_{23} = k_{13}(p_1 - p_3) + k_{23}(p_2 - p_3) = k_{13}p_1 + k_{23}p_2 + (-k_{13} - k_{23})p_3.$$

Для объединения этих трёх уравнений составим следующие матрицы:

$$W = diag(\alpha w_1, \alpha w_2, \alpha w_3); Q = \begin{pmatrix} -k_{21} - k_{31} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & -k_{12} - k_{32} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & -k_{13} - k_{23} \end{pmatrix}; \; P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений можно записать в виде одного уравнения

$$W \cdot \dot{P} = Q \cdot P. \qquad (3)$$

Матрица Q называется *матрицей массообмена*. Изучим её свойства.

Величины объёмных скоростей q_{ij} связаны соотношением $q_{ij} = -q_{ji}$, которые являются математическим выражением *закона сохранения массы*

при обмене. Используя формулу (2), получаем

$$k_{ij}\cdot(p_i-p_j)=-k_{ji}\cdot(p_j-p_i)\text{, то есть}\quad k_{ij}=k_{ji}.$$

Следовательно, матрица Q является симметричной.

Сумма столбцов этой матрицы равна нулю. Следовательно, матрица Q является вырожденной. Направление течения совпадает с направлением отрицательного перепада давлений, поэтому коэффициенты k_{ij} – положительные, а элементы главной диагонали матрицы Q – отрицательные числа.

Докажем, что эта матрица является неположительной. Для этого представим её в следующем виде:

$$Q=\begin{pmatrix}-k_{21}-k_{31} & k_{21} & k_{31}\\ k_{21} & -k_{21}-k_{32} & k_{32}\\ k_{31} & k_{32} & -k_{31}-k_{32}\end{pmatrix}=-k_{21}\cdot Q_{2\to1}-k_{31}\cdot Q_{3\to1}-k_{32}\cdot Q_{3\to2},$$

где $Q_{2\to1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $Q_{3\to1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $Q_{3\to2}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

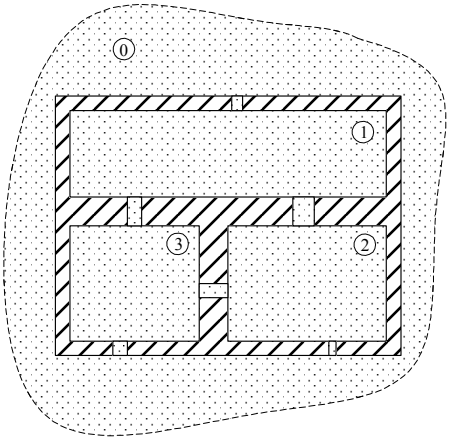


Рис. 2 – Массобмен в незамкнутом узле.

$Q_{i\to j}$ – это *матрицы элементарного обмена*.

У каждой такой матрицы среди главных миноров имеется только два ненулевых, которые равны 1. Следовательно, эти матрицы являются неотрицательными, а матрица Q – неположительной.

Анализируя полученный результат, не сложно понять, что его можно распространить на узлы с любым числом полостей (большим двух).

Утечка массы. Изменим гидромеханическое устройство, рассмотренное в предыдущем примере, таким образом, как показано на рис. 2. Теперь каждая из полостей может обмениваться массой не только с другой полостью, но и с резервуаром, в который они все погружены. Присвоим резервуару номер 0, и будем считать, что расход q_{i0} описывается формулой, аналогичной (2):

$$q_{i0}=k_{i0}\cdot(p_i-p_0),\qquad\text{где } k_{i0}\ge0.$$

Давление жидкости в резервуаре p_0 остаётся постоянным, поэтому мы вправе считать этот уровень давления нулевым. В результате аналогичных преобразований мы опять придём к уравнению вида (3), но новая матрица массообмена $Q^{'}$ будет иметь изменённую главную диагональ:

$$Q^{'} = \begin{pmatrix} -k_{21} - k_{31} - k_{10} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & -k_{12} - k_{32} - k_{20} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & -k_{13} - k_{23} - k_{30} \end{pmatrix} = Q - diag\,(k_{10}, k_{20}, k_{30})\,.$$

Если все коэффициенты k_{i0} положительны (утечка массы в резервуар происходит из всех полостей сразу), то $Q^{'}$ становится отрицательной как сумма неположительной Q и отрицательной $\Delta Q = -diag\,(k_{10}, k_{20}, k_{30})$ матриц. Но в практических задачах так бывает редко, чаще внешний массообмен осуществляется только через одно отверстие. Несложно показать, что и в этом случае матрица $Q^{'}$ оказывается отрицательной (если анализируемая гидромеханическая система не имеет изолированных полостей). Для этого можно воспользоваться критерием Сильвестра. Этот вывод распространяется на системы, имеющие произвольное число полостей.

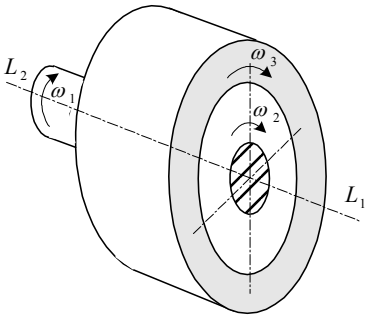


Рис. 3 – Схема роликового толкателя.

Матрица трения. Составим уравнения, описывающих процесс выравнивания угловых скоростей в механической системе "ось – втулка – ролик", показанной на рис. 3. Предполагается, что указанные цилиндрические тела совершают вращение вокруг общей геометрической оси $L_1 L_2$, при этом в зазорах между ними возникают моменты сил трения, пропорциональные разности угловых скоростей.

Процесс описывается следующей системой уравнений:

$$j_1\dot{\omega}_1 = k_{21}(\omega_1 - \omega_2)\,;\; j_2\dot{\omega}_2 = -k_{21}(\omega_1 - \omega_2) + k_{32}(\omega_3 - \omega_2)\,;\; j_3\dot{\omega}_3 = -k_{32}(\omega_3 - \omega_2)\,,$$

где j_i, ω_i – момент инерции и угловая скорость i-го тела; k_{ij} – коэффициент пропорциональности в формуле для момента сил трения.

Обращаем ваше внимание на то обстоятельство, что эта система уравнений с точки зрения математики оказалась аналогичной системе, рассмотренной выше. Если игнорировать различие в обозначениях, то можно увидеть только одно отличие – в новой системе объекты с номерами 1 и 3 непосредственно не связаны между собой, и поэтому коэффициент $k_{31} = 0$.

В итоге, мы снова приходим к уравнению вида (3)

$$J \cdot \dot{\Omega} = B \cdot \Omega \ ,$$

где

$$J = diag\,(j_1, j_2, j_3)\,; \quad B = \begin{pmatrix} -k_{21} & k_{21} & 0 \\ k_{21} & -k_{21} - k_{32} & k_{32} \\ 0 & k_{32} & -k_{23} \end{pmatrix}; \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

причём *матрица коэффициентов трения* B является вырожденной, неположительной, и может быть представлена в виде суммы матриц обмена $Q_{i \to j}$. Но в этом случае в обмене будут участвовать не массы, а моменты импульса.

Если учесть трение между осью и её неподвижной опорой, то начнётся утечка момента импульса за пределы рассматриваемой системы, и матрица B трансформируется в отрицательную матрицу

$$B' = \begin{pmatrix} -k_{21} - k_{10} & k_{21} & 0 \\ k_{21} & -k_{21} - k_{32} & k_{32} \\ 0 & k_{32} & -k_{23} \end{pmatrix}.$$

Во всём виновата энтропия. Попытаемся найти причину того, что в разных процессах, описываемых уравнением вида (3), матрица коэффициентов оказывается отрицательной или, по крайней мере, неположительной.

Для этого мы, прежде всего, вернёмся к самому уравнению (3) и умножим обе его части слева на вектор-строку P^T:

$$P^T \cdot W \cdot \dot{P} = P^T \cdot Q \cdot P \, .$$

Выполним преобразование правой части полученного равенства:

$$P^T \cdot W \cdot \dot{P} = \sum_{i=1}^{3} \alpha \cdot w_i \cdot p_i \cdot \dot{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha \cdot w_i \cdot p_i^2}{2} = \dot{E}_{пот} \, ,$$

где $E_{пот}$ обозначает потенциальную энергию жидкости, сжатой в полостях системы. В описываемом процессе механическая энергия системы является только потенциальной, и если система не имеет источника возмущения, то эта энергия не может возрастать. Следовательно, мы пришли к неравенству

$$P^T \cdot Q \cdot P \le 0 \, . \qquad (4)$$

Матрица Q является симметричной, а вектор-столбец P может быть составлен из любого набора давлений p_j. Но это и означает, что матрица Q – неположительная.

Если система замкнута, то суммарная масса жидкости остаётся постоянной. Это означает, что не изменяется среднее давление $p_{ср}$, определяемое из уравнения

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha\cdot w_i\cdot p_i=\alpha\cdot\sum_{i=1}^{3}\alpha\cdot w_i\cdot p_{cp} \text{ формулой } p_{cp}=\sum_{i=1}^{3}w_i\cdot p_i/\sum_{i=1}^{3}w_i\ .$$

После того, как все давления p_j станут равными p_{cp}, обмены завершатся. Действительно, если вы умножите матрицу Q на вектор-столбец P, имеющий одинаковые элементы, то получите нулевой столбец. При этом потенциальная энергия $E_{пот}$ достигнет своего минимума.

Аналогичная картина наблюдается и в механическом устройстве, изученном в последнем примере. Но здесь роль давлений p_j играют угловые скорости ω_j, а роль объёмов w_i – моменты инерции j_i. Место закона сохранения массы занимает закон сохранения момента импульса, а потенциальная энергия $E_{пот}$ заменяется кинетической энергией $E_{кин}$.

Воспользовавшись этой аналогией, мы сразу же запишем равенства

$$\dot{E}_{кин}=\Omega^T\cdot B\cdot\Omega \quad \text{или} \quad \dot{E}_{кин}=\Omega^T\cdot B'\cdot\Omega\ ,$$

из которых следует, что матрицы B и B' являются неположительной и отрицательной.

В первом случае, когда мы не учитываем трение в опорах оси, при обменах моментами импульсов сохраняется средняя скорость вращения деталей

$$\omega_{cp}=\sum_{i=1}^{3}j_i\cdot\omega_i/\sum_{i=1}^{3}j_i\ .$$

По завершению обменов все угловые скорости становятся равными этой средней величине, а кинетическая энергия достигает своего минимума.

Во втором случае система открытая, и обмены прекратятся только после того, когда вращение всех деталей остановится.

Подводя общие итоги по этому пункту, отметим, что отвечает за полученный результат. Симметрия матриц является следствием физических законов сохранения массы и импульса (для вращения – момента импульса). Вырожденность или невырожденность матрицы является следствием замкнутости или открытости системы. Выполнение условий вида (4) является следствием закона сохранения энергии, а точнее – закона убывания механической энергии, который иначе называется *законом возрастания энтропии*.

Напомним, что энтропия – это физическая величина, при помощи которой определяется близость механической или термодинамической системы к состоянию равновесия. Чем выше энтропия, тем меньше разница между плотностью энергии в отдельных частях системы, которые могут взаимодействовать между собой. Мерой такой плотности выступает скорость (линейная или угловая) для кинетической энергии, давление (или механическое напряжение) – для потенциальной энергии и температура – для внутренней энер-

гии. После достижения равновесия система попадает в так называемую *энергетическую яму*, выбраться из которой она, без посторонней помощи, не сможет.

Матрица колебаний – это единство противоположностей. Считаем не лишним напомнить, что обмены масс или импульсов – это ещё не колебания, поскольку в этих процессах не происходит обменов между потенциальной и кинетической формой энергии. Анализируя предыдущие примеры, мы обнаружили много общего между давлениями, создающими потенциальную энергию, и скоростями, несущими кинетическую энергию. Теперь пора сказать и о главном различии между ними.

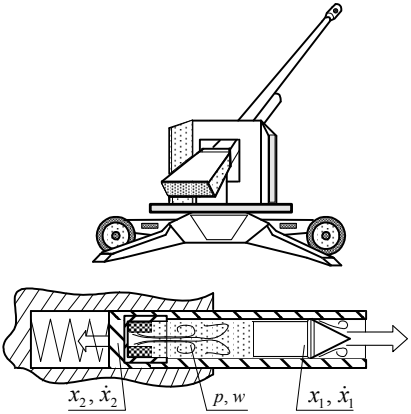


Рис. 4 – Модель тепловой импульсной машины.

Давление – это скалярная величина, а скорость – это вектор. Если мы изменим направление осей координат на противоположное, то это никак не скажется на величине давления, но перед проекциями скорости на эти оси придётся поменять знаки. Поэтому, при составлении уравнений, описывающих механические колебания, давления и скорости нужно выделять в отдельные блоки.

Составим матричное уравнение для простейшей динамической модели *тепловой импульсной машины* (рис. 4). Модель учитывает изменение давления и объёма пороховых газов, а также силы, оказывающие сопротивление движению снаряда, откат ствола и ряд других влияющих факторов.

Математическая модель включает уравнения движения снаряда и ствола:

$$m_1\ddot{x}_1 = f \cdot p - k_{ств}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{воз}\dot{x}_1 ;\; m_2\ddot{x}_2 = f \cdot p - k_{ств}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_{ам}\,\dot{x}_2 ,$$

и уравнение сжимаемости пороховых газов в затворной камере

$$\alpha w\,\dot{p} = q_{газ}(t) - f\,(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - k_{ут}\,p ,$$

где m_1, m_2 – массы снаряда и ствола; $\dot{x}_1, \ddot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_2$ – скорости и ускорения снаряда и ствола; f – площадь поперечного сечения снаряда; $k_{ств}$ – коэффициент в формуле для силы трения между запорным пояском снаряда и стволом; $k_{воз}$ – коэффициент, учитывающий сопротивление выталкиваемого воздуха; $k_{ам}$ – коэффициент в формуле для силы сопротивления амортизаторов отката ствола; $k_{ут}$ – коэффициент, учитывающий прорыв части порохо-

вых газов в обгон снаряда; p, w – давление пороховых газов и занимаемый ими объём; α – коэффициент сжимаемости газов; $q_{газ}$ – объёмная скорость выделения газов при горении порохового заряда; t – время.

Уравнения математической модели запишем в матричной форме. Для этого образуем диагональную матрицу D из коэффициентов при производных, вектор-столбец X, составленный из динамических параметров системы, и вектор-столбец Q, учитывающий влияние внешних факторов:

$$D = diag\,(m_1, m_2, \alpha \cdot w)\,; \quad X = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ p \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{газ}(t) \end{pmatrix};$$

при этом полная механическая энергия E_M системы будет определяться равенством

$$E_M = 0.5 \cdot m_1 \cdot \dot{x}_1^{\,2} + 0.5 \cdot m_2 \cdot \dot{x}_2^{\,2} + 0.5 \cdot \alpha \cdot w \cdot p^2 = 0.5 \cdot (D \cdot X, X)\,.$$

Тогда систему уравнений можно заменить одним уравнением следующего вида:

$$D \cdot \dot{X} = A \cdot X + Q(t)\,, \text{ где } \quad A = \begin{pmatrix} -(k_{ств} + k_{воз}) & k_{ств} & f \\ k_{ств} & -(k_{ств} + k_{ам}) & f \\ -f & -f & -k_{ут} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A можно представить в виде блочной матрицы формата 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ -F^T & Z \end{pmatrix}, \text{ где } \quad B = \begin{pmatrix} -(k_{ств} + k_{воз}) & k_{ств} \\ k_{ств} & -(k_{ств} + k_{ам}) \end{pmatrix}; \; Z = \left(-k_{ут}\right); F = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}.$$

Матрицы B и Z являются симметричными и неположительными матрицами, но сама матрица A симметричной не является, так как блоки, расположенные на побочной диагонали, удовлетворяют условию косой симметрии. Матрица A не является и кососимметричной, если диагональные блоки B и Z ненулевые (то есть, когда система теряет часть механической энергии на преодоление сил трения и при утечках массы).

Проявившаяся здесь особая форма симметрии матрицы называется *симметрией механических систем*.

Блочная структура матрицы колебаний. В рассмотренном примере мы уже составляли уравнения свободных колебаний для задачи внутренней баллистики, и пришли к матричному уравнению вида

$$\begin{pmatrix} W & \Theta \\ \Theta & M \end{pmatrix} \cdot \dot{\begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} Q & F \\ -F^T & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где W, M – положительные диагональные матрицы; Q, B – неотрицатель-

ные матрицы; P, V – векторы-столбцы, составленные из давлений p_j и скоростей v_j.

Назовём квадратную матрицу из правой части уравнения (5) *матрицей колебаний* S и покажем, что она удовлетворяет условию вида (4), то есть

$$X^T \cdot S \cdot X \le 0 \quad \text{для произвольного вектора } X = \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}.$$

Действительно,

$$\begin{pmatrix} P^T & V^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & F \\ -F^T & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix} = P^T \cdot Q \cdot P + P^T \cdot F \cdot V - V^T \cdot F^T \cdot P + V^T \cdot B \cdot V,$$

но

$$V^T \cdot F^T \cdot P = (V^T \cdot F^T \cdot P)^T = P^T \cdot F \cdot V,$$

и после сокращения одинаковых слагаемых получаем:

$$\begin{pmatrix} P^T & V^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & F \\ -F^T & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix} = P^T \cdot Q \cdot P + V^T \cdot B \cdot V \le 0.$$

Оказалось, что условию (4) может удовлетворять и не симметричная матрица S. Но так ли важно это условие? Для ответа на вопрос умножим левую часть уравнения (4) на вектор-строку X^T:

$$\begin{pmatrix} P^T & Q^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W & \Theta \\ \Theta & M \end{pmatrix} \cdot \dot{\begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix}} = P^T \cdot W \cdot \dot{P} + V^T \cdot B \cdot \dot{V} = \dot{E}_{пот} + \dot{E}_{кин} = \dot{E}_{мех},$$

где $E_{пот} = \sum_j w_{jj} \cdot p_j^2 / 2$, $E_{кин} = \sum_j m_{jj} \cdot v_j^2 / 2$, $E_{мех} = E_{пот} + E_{кин}$

– потенциальная, кинетическая и полная механическая энергия системы.

Следовательно, и в этом случае условие (4) является математическим эквивалентом законов сохранения энергии и возрастания энтропии.

Отметим любопытное обстоятельство: при обменах между потенциальной и кинетической формами энергии никаких потерь не происходит; все потери локализованы в диагональных блоках. Это – следствие *третьего закона Ньютона* (действие равняется противодействию), и тут нечего рассуждать – так устроен этот мир! Но, интересно выяснить, – а не могло ли быть иначе?

Предположим, что матрица S составлена из блоков A_{ij}, которые имеют те же размеры, что и выше, но могут не обладать указанными свойствами симметрии:

$$S = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\dot{E}_{мех} = \begin{pmatrix} P^T & V^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ V \end{pmatrix} = P^T A_{11} P + P^T A_{12} V + V^T A_{21} P + V^T A_{22} V \ .$$

Но

$$V^T \cdot A_{21} \cdot P = (V^T \cdot A_{21} \cdot P)^T = P^T \cdot A_{21}^T \cdot V \ ,$$

следовательно,

$$\dot{E}_{мех} = P^T \cdot A_{11} \cdot P + V^T \cdot A_{22} \cdot V + P^T \cdot (A_{12} + A_{21}^T) \cdot V \ .$$

Изменим направление осей координат на противоположное. Тогда столбец скоростей V преобразуется в $(-V)$, а давлений P – не изменится, и мы получим:

$$\dot{E}_{мех} = P^T \cdot A_{11} \cdot P + V^T \cdot A_{22} \cdot V - P^T \cdot (A_{12} + A_{21}^T) \cdot V \ .$$

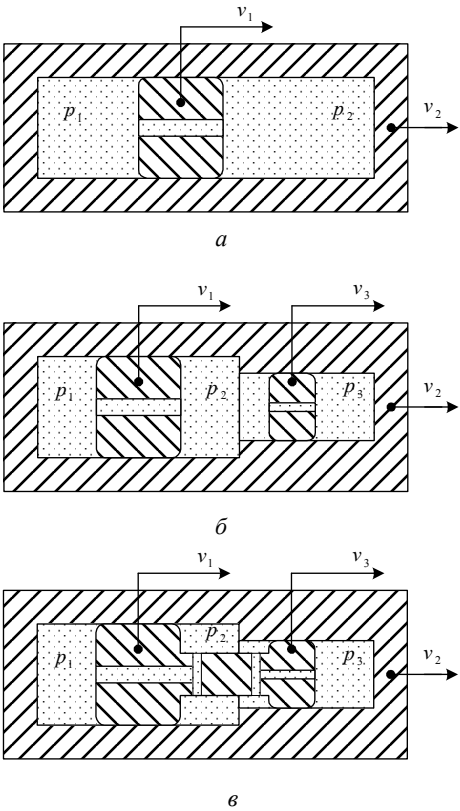


Рис. 5 – Структурные схемы гидромеханических узлов.

Но энергия – это величина скалярная и от выбора направления осей не зависит. Следовательно,

$$P^T \cdot (A_{12} + A_{21}^T) \cdot V = 0 \ ,$$

и, поскольку "окаймляющие векторы" P^T и V могут быть выбраны произвольно, то

$$A_{12} + A_{21}^T = \Theta \quad \text{и} \quad A_{21} = -A_{12}^T \ .$$

Получается так, что та *форма симметрии* блоков, которая была использована в матрице колебаний S, *является для нашего мира единственно возможной!*

Симметризация матрицы колебаний. Но и сам блок F должен обладать определёнными свойствами симметрии. Так, если в процессе колебаний системы её общая масса не изменяется, то сумма всех строк матрицы F оказывается нулевой. Если не изменяется суммарный импульс и/или момент импульса, то сумма всех столбцов этой матрицы оказывается нулевой. В полностью изолированной системе имеют

место оба таких свойства.

Для примера, покажем, как выглядит матрица F и матрица колебаний S у гидромеханической системы, изображённой на рис. 5 *а*:

$$F = \begin{pmatrix} -f & f \\ f & -f \end{pmatrix} = f \cdot Q_{1\to 2}, \qquad S = \begin{pmatrix} \mu \cdot Q_{1\to 2} & f \cdot Q_{1\to 2} \\ -f \cdot Q_{1\to 2} & z \cdot Q_{1\to 2} \end{pmatrix},$$

где f, μ, z – некоторые положительные коэффициенты, используемые в формулах для обмена энергией, массой и импульсом.

Можно воспользоваться легко проверяемым равенством

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и симметризовать матрицу колебаний S:

$$S = \begin{pmatrix} L & \Theta \\ \Theta & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mu & -f \\ f & -z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L & \Theta \\ \Theta & L \end{pmatrix}^T, \text{ где } L = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

В этом представлении окаймляющие матрицы не являются квадратными, поэтому оно не является симметричным **эквивалентным** преобразованием. Тем не, этого результата достаточно, чтобы выполнялось неравенство (4).

А теперь усложним это устройство, как показано на рис. 5 *б*. Оказывается, что и здесь матрице S можно придать симметричный похожий вид:

$$S = \begin{pmatrix} N & \Theta \\ \Theta & N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_\mu & D_f \\ -D_f & D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N & \Theta \\ \Theta & N \end{pmatrix}^T, \quad \text{где } N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

а диагональные матрицы третьего порядка D_f, D_μ, D_z – неположительные.

В этом случае все блоки имеют одинаковый размер, но окаймляющие матрицы вырожденные, поэтому эта симметризация также не эквивалентная.

Это устройство можно упростить, если поршни скрепить между собой (рис. 5 *в*). Останутся две движущихся детали и три полости, а матрица S примет такой вид:

$$S = \begin{pmatrix} N & \Theta \\ \Theta & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_\mu & D_f \\ -D_f & D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N & \Theta \\ \Theta & L \end{pmatrix}^T, \tag{6}$$

причём первая строка матрицы L будет представлять собой сумму первой и третьей строк матрицы N, что соответствует номерам соединяемых деталей:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а блок F станет прямоугольным (и, значит, несимметричным).

Все приведенные выше факты вы сможете без труда проверить. А теперь, опираясь на них, мы идём на обобщение и утверждаем, что *матрица*

колебаний любой замкнутой механической системы может быть представлена в форме (6)

$$S = \begin{pmatrix} \widehat{N} & \Theta \\ \Theta & \breve{N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_\mu & D_f \\ -D_f & D_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{N} & \Theta \\ \Theta & \breve{N} \end{pmatrix}^T ,$$

где строки матрицы $\widehat{N}$ и $\breve{N}$ представляют собой суммы строк так называемой *матрицы связей* N, имеющей размер $n \times m$, $m = n \cdot (n-1)/2$.

В каждом столбце матрицы N имеется только два ненулевых элемента – числа 1 и -1, то есть

$$N = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ и так далее.}$$

Симметричная форма (6) матрицы колебаний S, как магический кристалл, аккумулировала в себе все законы классической механики.

Матрица колебаний для клапанных гидромеханических узлов. В таких узлах действуют два фактора, не учтённых выше: усилия пружин клапанов и зависимость их проходного сечения от величины перемещения. Второй фактор подробно изучался в работе [4], где было показано, что он играет роль регулятора и, в отдельных случаях, может привести к потере устойчивости системы. Такие колебательные системы имеют внутренние источники возмущения (а также энергии) и в данной публикации не рассматриваются.

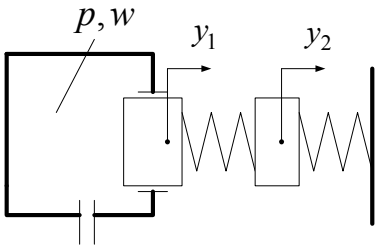


Рис. 6 – Динамическая схема узла.

При анализе гидромеханических узлов с подпружиненными клапанами используются два типа моделей пружины – динамическая и квазистатическая. В тех узлах, где период свободных колебаний витков пружины больше продолжительности моделируемого переходного процесса, используется *динамическая модель пружины* [7]. Здесь усилие пружины пропорционально скорости её деформации, то есть этот фактор влияет таким же образом, как и вязкое трение между движущимися деталями. Поэтому структура матрицы колебаний остаётся такой же, как указано выше и проиллюстрировано на примерах в [4].

Если указанный период колебаний оказывается меньшим продолжительности переходного процесса, используется *квазистатическая модель пружины*, и здесь усилие пружины пропорционально её деформации. Для примера запишем уравнения свободных колебаний устройства, схема которого приведена на рис. 6:

$$\alpha w\,\dot{p} + d_0 p + f_n \dot{y}_1 = 0\,;\; m_1 \ddot{y}_1 + z_1(y_1 - y_2) = f_n p\,;\; m_2 \ddot{y}_2 - z_1(y_1 - y_2) + z_2 y_2 = 0\,, \quad (7)$$

где α, w, p – коэффициент сжимаемости, объём и избыточное давление жидкости в полости; d_0 – расходный коэффициент для стравливающего жиклёра,

$$d_0 = \mu f / \sqrt{2 \cdot \rho \cdot \Delta p}\,;$$

μf – эффективное проходное сечение жиклёра; ρ – плотность жидкости; Δp – средний (за время моделирования) перепад давления на жиклёре; f_n – площадь плунжера; y_1, y_2 – перемещения плунжера и толкателя; m_1, m_2 – их массы; z_1, z_2 – коэффициенты жёсткости пружин.

Подобные узлы встречаются, например, в гидравлических регуляторах дизельных двигателей [8]. Уравнения (7) описывают его малые колебания и получаются как результат линеаризации исходной нелинейной модели.

Обозначим усилия пружин и скорости деталей следующим образом:

$$F_1 = z_1(y_1 - y_2)\,,\; F_2 = z_2 y_2 \text{ и } v_1 = \dot{y}_1\,,\; v_2 = \dot{y}_2\,.$$

Тогда систему (7) можно переписать в таком виде:

$$\alpha w\,\dot{p} = -d_0 p - f_n v_1\,;\; z_1^{-1} F_1 = v_1 - v_2\,;\; z_2^{-1} F_2 = v_2\,;\; m_1 \dot{v}_1 = f_n p - F_1\,;\; m_2 \dot{v}_2 = F_1 - F_2\,,$$

или в матричной форме

$$D \cdot \dot{X} = S \cdot X\,;\; D = diag(\alpha w, z_1^{-1}, z_2^{-1}, m_1, m_2)\,;\; X = \begin{pmatrix} p & F_1 & F_2 & v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T;$$

$$S = \begin{bmatrix} -d_0 & 0 & 0 & -f_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_n & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь квадратичная форма

$$E(X) = 0.5 \cdot (D \cdot X, X) = 0.5 \cdot X^T \cdot D \cdot X$$

описывает полную энергию анализируемого узла, а матрица колебаний S обладает той же блочной симметрией, что и выше.

Усилия пружин играют в моделях исследуемых клапанных узлов ту же роль, что и сжимаемость жидкости в полостях.

Заключение. Суммируя полученные результаты, приходим к следующему выводу. Если уравнения динамики гидромеханической системы записаны в форме матричного уравнения

$$D \cdot \dot{X} = S \cdot X + Q(t)$$

и квадратичная форма $E(X) = 0.5 \cdot (D \cdot X, X)$ диагональной матрицы D определяет полную механическую энергию системы, то матрица S может быть представлена в виде

$$S = \begin{pmatrix} B & F \\ -F^T & Z \end{pmatrix},$$

причём блоки B и Z являются симметричными неположительными матрицами с преобладанием диагональных элементов ($B \le 0$, $Z \le 0$), а блок $F \ne \Theta$ (последнее условие необходимо для возникновения колебаний).

Данное утверждение является математическим эквивалентом основных законов механики и следствием их симметрии**.**

Список литературы: **1.***Гречка І.П., Клітной В.В., Свинаренко М.С.*Математична модель гідравлічного стенду для випробування домкратів //Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2013. – №5(979). – С.14-26. **2.***Андренко П.М., Гречка І.П., Лебедєв А.Ю.* Математична модель розподільника потоку // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2012. – №2. – С.3-9. **3.***Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л.* Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків,2012.–№ 2. – С.74-87. **4.***Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л.* Абсолютная и относительная динамическая устойчивость гидромеханических узлов.// там же – С.88 – 106. **5.***Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л.* Алгоритмы интегрирования жёстких уравнений клапанных гидромеханических узлов // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2012. – №54(960). – С.39-55. **6.**Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике: учебник.– Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – 534 с. **7.***Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л.* О связи силы пружины с законом её деформирования // Теория механизмов и машин.– Харьков: Вища школа,1985.–Вып.39. – С.7 – 22. **8.***Грицюк А.В., Григорьев А.Л., Врублевский А.Н., Овчинников А.А.* Расчётный метод исследования пульсаций давления в сервоприводе регулятора дизеля // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, 2013. – №5(979). – С.27 – 53.

Поступила в редколлегию 27.05.2013

УДК 539.1

Блочная матричная структура и симметрия дискретных динамических моделей гидромеханических узлов / А.Л. Григорьев, Ю.Л. Геворкян // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 35 – 50. Бібліогр.: 8 назв.

Проаналізовано приклади лінійних ті лінеарізованих математичних моделей, які описують динаміку гідромеханічних систем із зосередженими параметрами. Показано, що матриці цих моделей мають блокову структуру, якій притаманні спеціальні властивості симетрії.

Ключові слова: дискретна модель, гідромеханічний вузол, механічні коливання, матриця коливань, блокова матриця, симетрія матриці.

The examples of linear and linearized mathematical models describing the dynamics of hydromechanical systems with lumped parameters. It is shown that the matrix of these models have a block structure with special symmetry properties.

Key words: discrete model, hydro-mechanical assembly, mechanical vibrations, oscillations of the matrix, block matrix, the symmetry of the matrix.

УДК 517.968: 519.6

В.Д. ДУШКИН, канд. физ.-мат. наук, доц., проф. АВВ МВД Украины, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ЛЕНТ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ДВУХ СТОРОНАХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Построена математическая модель дифракции Е-поляризованных волн на периодических системах импедансных лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя. Система граничных интегральных уравнений задачи состоит из интегральных уравнений Фредгольма второго рода и сингулярных интегральных уравнений первого рода. При построении модели был применен метод параметрических представлений интегральных операторов.

Ключевые слова: импедансные ленты, сингулярные интегральные уравнения, метод параметрических представлений интегральных операторов.

Введение. В современных технических и электродинамических устройствах применяются многослойные пластинчатые платы, состоящие из слоёв диэлектрика и нанесённых на них металлических элементов [1 – 3]. Выбор нужных электродинамических характеристик таких устройств при их проектировании осуществляется с помощью подбора физических свойств материалов, соотношений размеров и взаимного расположения элементов структур. Поэтому построение математических моделей процессов взаимодействия электромагнитных волн со структурами, состоящими из слоёв диэлектрика и нанесённых на них металлических элементов, является актуальной задачей для исследователей.

Анализ последних исследований. Предложенный в работах *Ю.В. Ганделя метод параметрических представлений интегральных преобразований* [4] является одним из эффективных способов построения математических моделей взаимодействия электромагнитных волн с различными электродинамическими структурами [5]. В результате применения данного метода, исходные краевые задачи для *уравнений Максвелла* сводятся к эквивалентным системам граничных интегральных уравнений. Через решения этих интегральных уравнений выражаются основные электродинамические характеристики полей. В частности, в работе [6] были получены граничные интегральные уравнения задачи дифракции на непериодической импедансной системе лент, расположенных на экранированном диэлектрическом слое. В статье рассматривается пример дифракции волн на полупрозрачной структуре, состоящей из периодических систем импедансных лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя. Изложение алгоритма построения этой модели является целью данной работы.

© В. Д. Душкин, 2013

Постановка задачи. Рассматривается дифракционная структура, изображённая на рис. 1. Слой $|z'| \le d'$ заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. В плоскостях $z = d'$ и $z = -d'$ расположены 2l- периодические системы импедансных лент. Декартова система координат введена таким образом, что координатная плоскость $X'OY'$ параллельна плоскостям лент, а ось OX' – рёбрам лент. Рассматриваются структуры, расположенные так, что плоскость $X'OZ'$ не пересекает ленты.

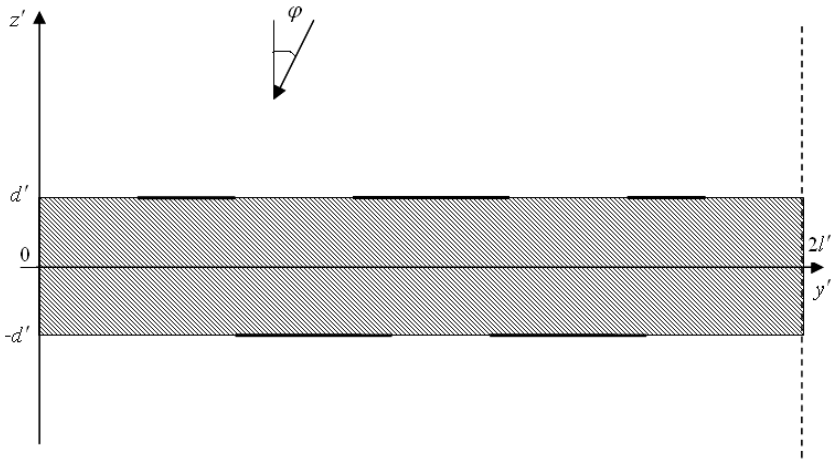


Рис. 1 – Сечение дифракционной структуры плоскостью $Y'OZ'$.

Пусть α'_{1q} и β'_{1q} – координаты проекций на ось OY' рёбер лент, лежащих в плоскости $z = d'$, а α'_{2q} и β'_{2q} – координаты проекций рёбер лент, лежащих в плоскости $z = -d'$. Введём следующие обозначения:

$$L'_i = \bigcup_{q=1}^{M_i} (\alpha'_{i,q}, \beta'_{i,q}), \quad i = 1, 2. \tag{1}$$

Зависимость поля от времени даётся множителем $e^{-i\omega t}$. Пусть из бесконечности сверху на дифракционную структуру, описанную выше, наклонно падает E-поляризованная плоская электромагнитная волна единичной амплитуды, иксовая координата электрического поля которой имеет вид:

$$U(y', z') = E_x(y', z') = \exp\left(ik\left(y' \cdot \sin\varphi - z' \cdot \cos\varphi\right)\right). \tag{2}$$

В задаче необходимо найти полное поле $u(y', z')$, возникшее в результате дифракции волны на электродинамической структуре. Полное поле $u(y', z')$ является решением *уравнения Гельмгольца*. Оно удовлетворяет импедансным граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z'}-h_0'\right)u(y',d'+0)=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial z'}+h_1'\right)u(y',d'-0)=0,\quad y'\in L_1';\qquad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z'}-h_1'\right)u(y',-d'+0)=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial z'}+h_0'\right)u(y',-d'-0)=0,\quad y\in L_2',\qquad (4)$$

которые являются следствием *граничных условий Щукина-Леонтовича* $[7]$, а также условию конечности энергии в любой ограниченной области плоскости $Y'OZ'$, *условию излучения Зоммерфельда* и *условию квазипериодичности Флоке*.

Математическая модель. Пусть функция $u^{ini}(y',z')$ описывает поле, которое существовало в пространстве в отсутствии лент. Полное поле $u(y',z')$, возникшее в результате дифракции волны на решётке, будем искать в виде:

$$u(y',z')=\begin{cases} u^{ini}(y',z')+u_0(y',z'), & z'>d';\\ u^{ini}(y',z')+u_1(y',z'), & |z'|\le d';\\ u^{ini}(y',z')+u_2(y',z'), & z'<-d';\end{cases}\qquad (5)$$

где

$$u_0(y',z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{0,n}\cdot e^{-\gamma_{0,n}'(z'-d')}\cdot e^{i\cdot p_n'y'},\qquad (6)$$

$$u_1(y',z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(C_n^{+}\cdot\frac{sh\left(\gamma_{1,n}'\left(z'+d'\right)\right)}{sh\left(2\gamma_{1,n}'d'\right)}+C_n^{-}\cdot\frac{sh\left(\gamma_{1,n}'\left(z'-d'\right)\right)}{sh\left(2\gamma_{1,n}'d'\right)}\right)\cdot e^{i\cdot p_n'y'},\qquad (7)$$

$$u_2(y',z')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{2,n}\cdot e^{\gamma_{0,n}'(z'+d')}\cdot e^{i\cdot p_n'y'},\qquad (8)$$

$$p_n'=k\cdot\sin\varphi+\frac{\pi n}{l'},\quad \gamma_{0,n}'=\sqrt{\left(p_n'\right)^2-k^2},\quad \gamma_{1,n}'=\sqrt{\left(p_n'\right)^2-k^2\cdot\varepsilon},\quad n\in Z.\qquad (9)$$

Условия излучения Зоммерфельда будут выполнены, если

$$\mathrm{Re}\left(\gamma_{0,n}'\right)\ge 0,\quad \mathrm{Im}\left(\gamma_{0,n}'\right)\le 0,\quad n\in Z\ .$$

Введём безразмерные координаты, параметры и обозначения:

$$\partial\ell=\frac{l'k}{\pi}=\frac{2l'}{\lambda},\ h_i=\frac{l'}{\pi}\cdot h_i',\left(i=0,1\right)\quad y=\frac{\pi}{l'}y',\quad z=\frac{\pi}{l'}z',\quad d=\frac{\pi}{l'}d';\qquad (10)$$

$$\alpha_{i,q}=\frac{\pi}{l'}a_{i,q}',\quad \beta_{i,q}=\frac{\pi}{l'}b_{i,q}',\quad q=1,\dots,M_i;\quad i=1,2;\qquad (11)$$

$$\gamma_{0,n}=\sqrt{\left(p_n\right)^2-\partial\ell^2},\quad p_n=\frac{l\cdot p_n'}{\pi}=\partial\ell\cdot\sin\varphi+n,\quad n\in Z;\qquad (12)$$

$$\gamma_{1,n} = \sqrt{(p_n)^2 - \partial\ell^2 \cdot \varepsilon}, \quad n \in Z; \quad L_i = \bigcup_{q=1}^{M_i} (\alpha_{i,q}, \beta_{i,q}), \quad i = 1,2. \tag{13}$$

Определим функции

$$F_1(y) = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)(y,d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(C_{0,n} - C_{1,n}^{+}\right) \cdot ip_n \cdot e^{i \cdot p_n y}, \quad y \in [0, 2\pi]; \tag{14}$$

$$F_2(y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)(y,-d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-C_{1,n}^{-} - C_{2,n}\right) \cdot ip_n \cdot e^{i \cdot p_n y}, \quad y \in [0, 2\pi]; \tag{15}$$

$$F_3(y) = \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)(y,d) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{0,n}^{+} \gamma_{0,n} \cdot e^{i \cdot p_n y} -$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{1,n} \left(C_{1,n}^{+} \cdot cth\left(2\gamma_{1,n} d\right) + C_{1,n}^{-} \cdot sh^{-1}\left(2\gamma_{1,n} d\right)\right) \cdot e^{i \cdot p_n y}, \tag{16}$$

$$F_4(y) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)(y,-d) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2,n} \gamma_{0,n} \cdot e^{i \cdot p_n y} +$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_{1,n} \left(C_{1,n}^{-} \cdot cth\left(2\gamma_{1,n} d\right) + C_{1,n}^{+} \cdot \frac{1}{sh\left(2\gamma_{1,n} d\right)}\right) \cdot e^{i \cdot p_n y}. \tag{17}$$

В силу непрерывности полного поля и его производных на границе раздела сред «вакуум-диэлектрик» функции $F_i(y)$ обладают свойствами:

$$F_i(y) = 0, \quad y \notin L_i, \quad i = 1, \ldots, 4; \tag{18}$$

$$\int_{\alpha_{i,q}}^{\beta_{i,q}} F_i(t)\, dt = 0, \quad (q = 1, \ldots, M_i, \quad i = 1,2); \tag{19}$$

$$\int_{\alpha_{1,1}}^{y} F_1(t)\, dt = (u_0 - u_1)(y,d), \quad y \in [0, 2\pi]; \tag{20}$$

$$\int_{\alpha_{2,1}}^{y} F_2(t)\, dt = (u_1 - u_2)(y,-d), \quad y \in [0, 2\pi]; \tag{21}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip_o \cdot (y-t)} \cdot ctg\left(\frac{t-y}{2}\right) F_1(t)\, dt = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(C_{0,n} - C_{1,n}^{+}\right) \cdot \Psi_n\, e^{ip_n y}; \tag{22}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ip_o \cdot (y-t)} \cdot ctg\left(\frac{t-y}{2}\right) F_2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(C_{2,n} + C_{1,n}^{-}\right) \cdot \Psi_n\, e^{ip_n y}; \tag{23}$$

где

$$\Psi_n = \begin{cases} |n| + \partial\ell |n| \cdot n^{-1} \cdot \sin\varphi, & n \in Z \setminus \{0\} \\ 0, & n = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Введём обозначения: $L_3 = L_1$, $L_4 = L_2$ и

$$a_{i,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{L_i} F_i(t)\frac{\exp(-ip_n t)-\delta_{0,n}}{ip_n}dt, \quad n \in Z, \quad i = 1,2; \tag{25}$$

$$a_{i,n} = \frac{1}{2\pi\cdot\gamma_{1,n}}\int_{L_i} F_i(t)\exp(-ip_n t)dt, \quad n \in Z, \quad i = 3,4. \tag{26}$$

Из определений и свойств функций $F_i(y)$ следует, что

$$C_{1,n}^{\pm} = \sum_{j=1}^{4}\sigma_{j,n}^{\pm}\cdot a_{j,n}, \quad C_{0,n} = \sum_{j=1}^{4}\left(\sigma_{j,n}^{+}+\delta_{1,j}\right)\cdot a_{j,n}, \quad n \in Z, \tag{27}$$

$$C_{2,n} = -\sum_{j=1}^{4}\left(\sigma_{j,n}^{-}+\delta_{2,j}\right)\cdot a_{j,n}, \quad n \in Z; \tag{28}$$

где

$$\sigma_{1,n}^{-} = \sigma_{2,n}^{+} = -\eta_n\frac{sh^{-2}\left(\gamma_{1,n}d\right)}{\Delta_n}, \quad \sigma_{3,n}^{-} = -\sigma_{4,n}^{+} = -\frac{sh^{-2}\left(\gamma_{1,n}d\right)}{\Delta_n}, \tag{29}$$

$$\sigma_{2,n}^{-} = \sigma_{1,n}^{+} = \eta_n\cdot\frac{\nu_n}{\Delta_n}, \quad \sigma_{4,n}^{-} = -\sigma_{3,n}^{+} = -\frac{\nu_n}{\Delta_n}; \quad \eta_n = \frac{\gamma_{0,n}}{\gamma_{1,n}}\cdot, \quad n \in Z. \tag{30}$$

Из граничных условий Щукина–Леонтовича на поверхности лент следуют такие соотношения:

$$F_3(y) - h_0\int_{\alpha_{1,1}}^{y} F_1(t)dt - \left(h_0+h_1\right)u_1(y,d) = f_1^{+}\left(y\right),\ y \in L_1; \tag{31}$$

$$F_4(y) + h_0\int_{\alpha_{2,1}}^{y} F_2(t)dt - \left(h_0+h_1\right)u_1(y,-d) = f_1^{-}\left(y\right),\ y \in L_2; \tag{32}$$

$$\frac{\partial\left(u_0+u_1\right)}{\partial z}(y,d) - h_0\int_{\alpha_{1,1}}^{y} F_1(t)dt + \left(h_1-h_0\right)u_1(y,d) = f_2^{+}\left(y\right),\ y \in L_1; \tag{33}$$

$$\frac{\partial\left(u_1+u_2\right)}{\partial z}(y,-d) - h_0\int_{\alpha_{2,1}}^{y} F_2(t)dt - \left(h_1-h_0\right)u_1(y,-d) = f_2^{-}\left(y\right),\ y \in L_2; \tag{34}$$

где

$$f_1^{\pm}\left(y\right) = \left(h_0+h_1\right)u^{ini}(y,\pm d),\ f_2^{\pm}\left(y\right) = \left(-2\frac{\partial}{\partial z}u^{ini} \mp \left(h_1-h_0\right)u^{ini}\right)(y,\pm d). \tag{35}$$

Введём обозначения:

$$\Theta_{1,n} = \frac{\gamma_{1,n}}{sh\left(2\gamma_{1,n}d\right)}, \quad \Theta_{2,n} = \gamma_{1,n}cth\left(2\gamma_{1,n}d\right) - \gamma_{0,n}, \quad n \in Z; \tag{36}$$

$$\omega_{1,n}^{+}=\frac{\sigma_{1,n}^{+}}{2ip_n}+\frac{1}{4ni},\quad \omega_{3,n}^{+}=\frac{\sigma_{3,n}^{+}}{2\gamma_{1,n}}+\frac{1}{4|n|},\quad n\in Z\setminus\{0\};\tag{37}$$

$$\omega_{j,n}^{+}=\frac{\sigma_{j,n}^{+}}{\rho_{j,n}},\quad j=2,4,\quad n\in Z\setminus\{0\};\quad \omega_{j,0}^{+}=\frac{\sigma_{j,0}^{+}}{\rho_{j,0}},\quad j=1,\ldots,4;\tag{38}$$

$$\omega_{2,n}^{-}=\frac{\sigma_{2,n}^{-}}{2ip_n}+\frac{1}{4ni},\quad \omega_{4,n}^{-}=\frac{\sigma_{3,n}^{-}}{2\gamma_{1,n}}+\frac{1}{4|n|},\quad n\in Z\setminus\{0\};\tag{39}$$

$$\omega_{j,n}^{-}=\frac{\sigma_{j,n}^{-}}{\rho_{j,n}},\quad j=1,3,\quad n\in Z\setminus\{0\};\quad \omega_{j,0}^{-}=\frac{\sigma_{j,0}^{-}}{\rho_{j,0}},\quad j=1,\ldots,4;\tag{40}$$

$$M_j^{+}(t)=-(h_0+h_1)\left(\frac{t}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_{j,n}^{+}\cdot\exp(ip_nt)\right);\tag{41}$$

$$M_j^{-}(t)=(h_0+h_1)\left(\frac{t}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_{j,n}^{-}\cdot\exp(ip_nt)\right);\tag{42}$$

$$K_j^{+}(t)=\delta_{1,j}\left(\frac{\exp(ip_{\text{o}}t)}{2}\cdot ctg\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{t}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma_{0,n}-\Psi_n)\exp(ip_nt)}{2ip_n}\right)+\frac{h_1-h_0}{2}\cdot t+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Theta_{2,n}\cdot\sigma_{j,n}^{+}+\Theta_{1,n}\cdot\sigma_{j,n}^{-}}{\rho_{j,n}}+(h_1-h_0)\cdot\omega_{j,n}^{+}\right)\cdot\exp(ip_nt);\tag{43}$$

$$K_j^{-}(t)=\delta_{2,j}\cdot\left(\frac{\exp(ip_{\text{o}}t)}{2}\cdot ctg\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{t}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma_{0,n}-\Psi_n)\exp(ip_nt)}{2ip_n}\right)+\frac{h_1-h_0}{2}\cdot t+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Theta_{1,n}\cdot\sigma_{j,n}^{+}+\Theta_{2,n}\cdot\sigma_{j,n}^{-}}{\rho_{j,n}}+(h_1-h_0)\cdot\omega_{j,n}^{-}\right)\cdot\exp(ip_nt).\tag{44}$$

В результате применения метода параметрических интегральных преобразований были получены интегральные представления функций $u_i(y,z)$, $(i=0,1,2)$, и их производных. После подстановки этих интегральных представлений в граничные условия (31) – (34) была получена система интегральных уравнений рассматриваемой задачи:

$$F_3(y)-h_0\int_{\alpha_{1,1}}^{y}F_1(t)dt+\frac{h_0+h_1}{4}\int_{L_1}sign(y-t)F_1(t)dt-\frac{h_0+h_1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F_3(t)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\pi}\int_{Lj}M_j^{+}(y-t)F_j(t)dt=f_1^{+}(y),\ y\in L_1;\tag{45}$$

$$F_4(y)+h_0\int\limits_{\alpha_{2,1}}^{y}F_2(t)dt-\frac{h_0+h_1}{4}\int\limits_{L_2}sign\left(y-t\right)F_2(t)dt-\frac{h_0+h_1}{2}\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F_4(t)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\pi}\int\limits_{Lj}M_j^-\left(y-t\right)F_j(t)dt=f_1^-\left(y\right),\quad y\in L_2; \tag{46}$$

$$\int\limits_{L}\frac{F_1\left(t\right)dt}{t-y}-h_0\int\limits_{\alpha_{1,1}}^{y}F_1(t)dt-\frac{h_1-h_0}{4}\int\limits_{L_1}sign\left(y-t\right)F_1(t)dt+$$

$$+\frac{h_1-h_0}{2\pi}\int\limits_{L_1}\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F_3(t)dt+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\pi}\int\limits_{Lj}K_j^+\left(y-t\right)F_j(t)dt=f_2^+\left(y\right),\ y\in L_1; \tag{47}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_2}\frac{F_2\left(t\right)dt}{t-y}-h_0\int\limits_{\alpha_{2,1}}^{y}F_2(t)dt-\frac{h_1-h_0}{4}\int\limits_{L_2}sign\left(y-t\right)F_2(t)dt-$$

$$-\frac{h_1-h_0}{2\pi}\int\limits_{L_2}\ln\left|2\cdot\sin\frac{y-t}{2}\right|F_4(t)dt+\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\pi}\int\limits_{Lj}K_j^-\left(t\right)F_j(t)dt=f_2^-\left(y\right),\ y\in L_2; \tag{48}$$

$$\int\limits_{\alpha_{i,q}}^{\beta_{i,q}}F_i(t)\,dt=0,\quad \left(q=1,\ldots,M_i,\quad i=1,2\right). \tag{49}$$

Выводы. В работе построена математическая модель дифракции волн на периодической системе импедансных лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя, на основе системы граничных сингулярных интегральных уравнений (45) – (49), состоящей из *интегральных уравнений Фредгольма* второго рода и *сингулярных интегральных уравнений* первого рода. Эта система отличается от системы интегральных уравнений аналогичной непериодической задачи видом гладких частей ядер интегральных операторов. Для численного решения этой системы интегральных уравнений применим метод дискретных особенностей [5, 8].

Список литературы: **1.** *Панченко Б. А., Нефёдов Е. И.* Микрополосковые антенны. М.: Радио и связь, 1986. – 145 с. **2.** *James J.R., Hall P.S.* Handbook of Microstrip Antennas IEE Electromagnetic Waves Series 28, London: Peter Peregrinus Ltd. 1989, — 1312 p. **3.** *D.G. Fang.* Antenna theory and microstrip antennas. CRC Press, 2010. – 296 p. **4.** *Гандель Ю.В.* Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения, Киев: Институт математики НАН Украины, 1995, – С. 65–66. **5.** *Гандель Ю. В., Душкин В. Д.* Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: монография / Ю. В. Гандель, В. Д. Душкин. – Х. Акад. ВВ МВД Украины, 2012. – 544с. **6.** Ю. В. Гандель Математическая модель рассеяния Н-поляризованной волны на импедансных лентах, расположенных на экранированном диэлектрическом слое/ Ю. В. Гандель., В.Д. Душкин // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. –Кременчук, 2012. – №2(78). – С. 60-63. **7.** *Кравченко В.Ф.* Электродинамика сверхпроводящих

структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 280 с.
8. *Lifanov I.K.* Singular Integral Equations and Discrete Vortices. – Utrecht, the Netherlands; Tokyo, Japan: VSP, 1996, – 475 p.

Поступила в редколлегию 20.05.2013

УДК 517.968: 519.6

Моделирование дифракции волн на периодических системах лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя / В. Д. Душкин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 51 – 58. Бібліогр.: 8 назв.

Побудовано математичну модель дифракції Е-поляризованих хвиль на періодичних системах імпедансних стрічок, розташованих на двох сторонах діелектричного шару. Система граничних інтегральних рівнянь задачі складається з інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та сингулярних інтегральних рівнянь першого роду. При побудові моделі було застосовано метод параметричних уявлень інтегральних операторів.

Ключові слова: імпедансні стрічки, сингулярні інтегральні рівняння, метод параметричних уявлень інтегральних операторів.

The mathematical model of E-polarized waves diffraction on periodic systems of impedance tapes, located on two sides of the dielectric layer had been built. The boundary integral equations system of the problem consists of Fredholm integral equations of the second kind and singular integral equations of the first kind. The method of integral operator's parametric representations had been used.

Key words: impedance tapes, singular integral equations, the method of parametric representations of integral operators.

УДК 519.688

І.В. КАЧАНЕНКО, магістрант КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ;
А.В. НЕТРЕБА, канд. фіз.-мат. наук, доц., КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ

РЕКОНСТРУКЦІЯ РЕНТГЕНІВСЬКИХ ТОМОГРАМ ДЛЯ НЕПОВНОГО НАБОРУ ПРОЕКЦІЙ

Розглядається проблема визначення залежності зміни якості реконструкції рентгенівських томограм від зменшення кута повороту скануючої системи. Проведено реконструкцію рентгенівських томограм з кутом повороту скануючої системи від 90 до 180 градусів, для чого використано декілька методів. Виконано оцінку якості отриманих томограм в порівнянні з початковим об'єктом; визначено критичний кут повороту скануючої системи.

Ключові слова: реконструкція, алгоритм, сінограма, рентгенівська томографія, перетворення Фур'є, дискретні дані, переріз.

Вступ та аналіз останніх досліджень. Рентгенівська *комп'ютерна томографія* (КТ) – це методика пошарового рентгенологічного дослідження органів і тканин із застосуванням комп'ютерної обробки множинних рентгенів-

© І. В. Качаненко, А. В. Нетреба, 2013

ських зображень, виконаних під різними кутами, з подальшою реконструкцією зображення і визначенням щільності будь-якої ділянки цих тканин.

Усі технології і методики візуалізації з використанням рентгенівських променів ґрунтуються на тому, що різні тканини ослаблюють інтенсивність рентгенівських променів при проходженні крізь них в неоднаковому ступені [1].

Але в КТ присутні певні математичні та фізичні проблеми *реконструктивної томографії*.

Як описано в джерелі [2] для отримання томографічних зображень, по яким ставиться медичний діагноз, необхідно обробити дані безпосередніх вимірів, що виконуються в межах методу реконструктивної обчислювальної томографії (РОТ). Наприклад, дані про поглинання рентгенівського випромінювання у випадку РОТ або дані про резонансні явища у випадку РОТ на ядерному магнітному резонансі. Процес такої обробки заснований на вирішенні наступної математичної проблеми: дані проведених вимірів пов’язані з шуканими розподілами, і цей зв'язок можна описати за допомогою відповідного інтегрального перетворення. Таким чином, для отримання реконструктивного зображення необхідна операція звернення інтегрального перетворення.

З математичної точки зору в проблемі відновлення функції можна виділити три основні аспекти. По-перше, необхідно знати, в якій мірі досліджуваний об’єкт описується наявними даними. По-друге, бажано знати, наскільки процес відновлення стійкий відносно похибок у вихідних даних. І нарешті, необхідно розробити сам алгоритм відновлення.

Зображення поперечних перерізів об’єкта можна точно реконструювати, якщо відомі його проекції (лінійні інтеграли) при усіх кутах. Ця фундаментальна властивість знайшла своє застосування в цілому ряді галузей, головним чином в медицині. Але в багатьох випадках результати реальних вимірів не дозволяють точно визначити повний набір лінійних інтегралів, що приводить до похибок і викривлень реконструктивного зображення [3, 4].

Результати вимірів можуть виявитися неточними по багатьом різним причинам, в тому числі і через наявність дії *шуму* і неповного набору даних [5, 6]. Наявність шуму призводить до неоднозначності результатів вимірів або ж проявляється у виді завади корисному сигналу. Зареєстрованих даних може виявитися недостатньо по цілому ряду причин, включаючи процес дискретизації і наявність областей, по яким дані не отримані.

Вирішення математичних задач томографії зводиться до вирішення операторних рівнянь 1-го роду. Відомо, що задачі обчислення таких рівнянь є некоректно поставленими. При знаходженні їх наближених відповідей необхідно використовувати *методи регуляризації*, які дозволяють враховувати додаткову інформацію про поставлену задачу. Різноманіття такої інформації породжує численні алгоритми розв’язання основних математичних задач обчислювальної діагностики [7, 8].

Постановка задачі. Однією із найважливіших проблем, які виникають на даному етапі розвитку комп'ютерної томографії, це є вибір оптимального алгоритму, критерієм підбору якого може слугувати, наприклад, якість зображення та машинний час обрахунку алгоритму [9].

Як описано у джерелі [10], важливою задачею розрахункової томографії є зменшення часу реконструкції структури об'єкту. В цій статті для отримання реконструкції пропонується використати перетворення Фур'є замість затратного по часу *методу оберненого проеціювання*.

Тому в даній статті була розглянута задача визначення залежності зміни якості реконструкції рентгенівських томограм від зменшення кута повороту скануючої системи декількома методами.

Для розв'язку задачі ми скористалися методами інтегральних перетворень, а саме алгоритмом реконструкції по дискретним даним та алгоритм з використанням перетворень Фур'є. Ці методи були застосовані тому, що вони призначені саме для реконструкції зображень по проекціям для паралельних променів.

Математична модель. Алгоритм реконструкції томографічних зображень по дискретним даним заснований на принципі використання формули згортки, що дозволяє реконструювати зображення по лінійним інтегралам. Показано, що в результаті дискретизації цей спосіб приводить до алгоритму реконструкції по дискретним даним [10].

Для апроксимації функції $f_B(k\Delta x, l\Delta y)$, по проекціям $\tilde{p}(m\Delta s, \theta_n)$, потрібен алгоритм, зручний для реалізації на ЕОМ. Простіше вирахувати інтеграл від оберненої проекції за допомогою наступної формули трапеції:

$$f_B(k\Delta x, l\Delta y) \cong \Delta\theta \sum_{n=1}^{N} \tilde{p} \cdot (k\Delta \cos\theta_n + l\Delta \sin\theta_n, \theta_n) \qquad (1)$$

Для кожного значення кута θ_n необхідно знайти значення проекції згортки $\tilde{p}(s', \theta_n)$. Для знаходження цих значень спочатку потрібно оцінити $\tilde{p}(m\Delta s, \theta_n)$ при $M^- \le m \le M^+$, а тільки потім методом інтерполяції по цим оцінкам знайти потрібне M значення функції $\tilde{p}$. Таким чином, апроксимація згортки здійснюється за допомогою двох операцій над дискретними даними: дискретної згортки, результат якої позначимо через $\tilde{p}_c$, і наступної інтерполяції, результат якої позначимо через $\tilde{p}_I$. Ці операції можна записати у наступному вигляді:

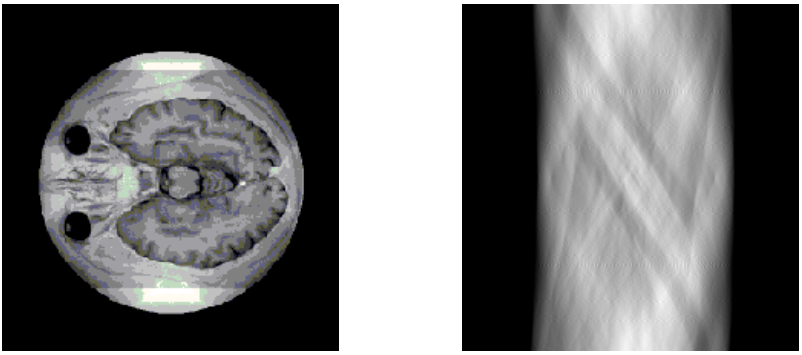
$$\tilde{p}_c(m'\Delta's, \theta_n) = \Delta s \sum_{m=M^-}^{M^+} p(m\Delta s, \theta_n) q((m'-m)\Delta s),$$

$$M^- \le m \le M^+, \qquad (2)$$

$$\tilde{p}_I(s', \theta_n) = \Delta s \sum_{m'} \tilde{p}_c(m'\Delta's, \theta_n) I(s' - m'\Delta s). \qquad (3)$$

Де $I(s)$ – інтерполюється, а число складових залежить від ширини інтервалу, на якому $I(s)$ відмінна від нуля.

Оскільки, проводиться комп’ютерне моделювання конкретного випадку, то для алгоритму реконструкції по дискретним даним ми використовуємо вже відоме зображення, яке було отримане реальною томографічною установкою (рис.1, *а*).



а *б*

Рис. 1 – Томографічне зображення при куті повороту скануючої системи на 180 градусів: *а* – переіз головного мозку; *б* – сінограма перерізу головного мозку.

На рис. 1 зображено переріз головного мозку та побудована для нього сінограма з кутом повороту скануючої системи 180 градусів.

Як описано у науковому виданні [11], рішення математичних задач томографії зводиться до вирішення операторних рівнянь 1-го роду. Різноманітність такої інформації породжує численні алгоритми рішення основних математичних задач обчислювальної діагностики. І основною проблемою в такому випадку є вибір оптимального алгоритму. Тому, було розглянуто алгоритм з використанням перетворення Фур’є.

У томографії ставиться математична задача пошуку невідомої функції $f(x, y)$, якщо відома функція $R(s, \varphi)$, що є її образом в *просторі Радона*. Рішення поставленої задачі зводиться до пошуку прямого та зворотного перетворення Радона.

Існує співвідношення, що визначає зв'язок між перетворенням Фур'є цих функцій. Це так звана *теорема про центральний переріз*.

Нехай $R(\omega, \varphi)$ – це одномірне перетворення Фур'є функції $R(s, \varphi)$ по змінній s, а $F(u, v)$ – це двовимірне перетворення Фур'є функції $f(x, y)$ по змінним x і y.

З урахуванням введених позначень математична формулювання теореми про центральному перерізі має вигляд:

$$S(\omega, \varphi) = F(u, v) . \tag{4}$$

Завдання відновлення зображення базується на теоремі про центральний переріз. Функцію $f(x, y)$ можна знайти за двовимірним перетворенням Фур'є:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx\, dy\,. \qquad (5)$$

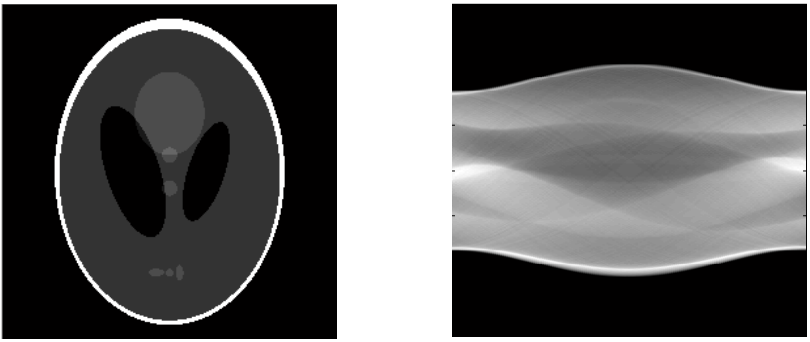
Перейдемо в площині (u, v) до полярних координат ω, φ: $u = \omega\cos\varphi$, $v = \omega\sin\varphi$. Тоді рівняння (5) буде мати вигляд:

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega F(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) e^{i2\pi(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega\, d\varphi, \qquad (6)$$

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \omega R(\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi) e^{i2\pi(x\cos\varphi + y\sin\varphi)} d\omega\, d\varphi. \qquad (7)$$

Рівність (4) є шуканої формулою звернення, що дозволяє знайти функцію $f(x, y)$. Однак дана форма запису рівності внаслідок використовуваної в ньому області інтегрування виявляється не дуже зручною для обробки томограм. Зручніше розбити інтеграл на дві частини, вважаючи, що φ змінюється від 0 до π і від π до 2π, оскільки тоді можна використовувати таку властивість:

$$F(\omega, \varphi + \pi) = F(\omega, \varphi)\,. \qquad (8)$$



а *б*

Рис. 2 – Фантом томографічного зображення при куті повороту скануючої системи 180 градусів: *а* – фантом; *б* – сінограма фантому.

Алгоритм фонової проекції відносно простий для паралельної схеми сканування, тому ми обрали саме його для проведення дослідження.

Оскільки ми проводимо комп'ютерне моделювання конкретного випадку, то для алгоритму реконструкції за допомогою перетворень Фур'є ми використовуємо фантом томографічного зображення (рис. 2, *а*) [12].

Ми обрали фантом тому що:

1) фантом містить типові елементи, які по різному реконструюються, оскільки не всі готові перерізи мають всі особливості, що можуть існувати у такого типу зображень;

2) готові перерізи – це реконструйовані дані, і це означає, що в них вже є похибка, внесена деяким алгоритмом;

3) даний фантом – стандартний для тестувань алгоритмів реконструкції, його часто можна зустріти в літературі, присвяченій таким алгоритмам.

На рис. 2 зображено фантом перерізу головного мозку і побудована для нього сінограма.

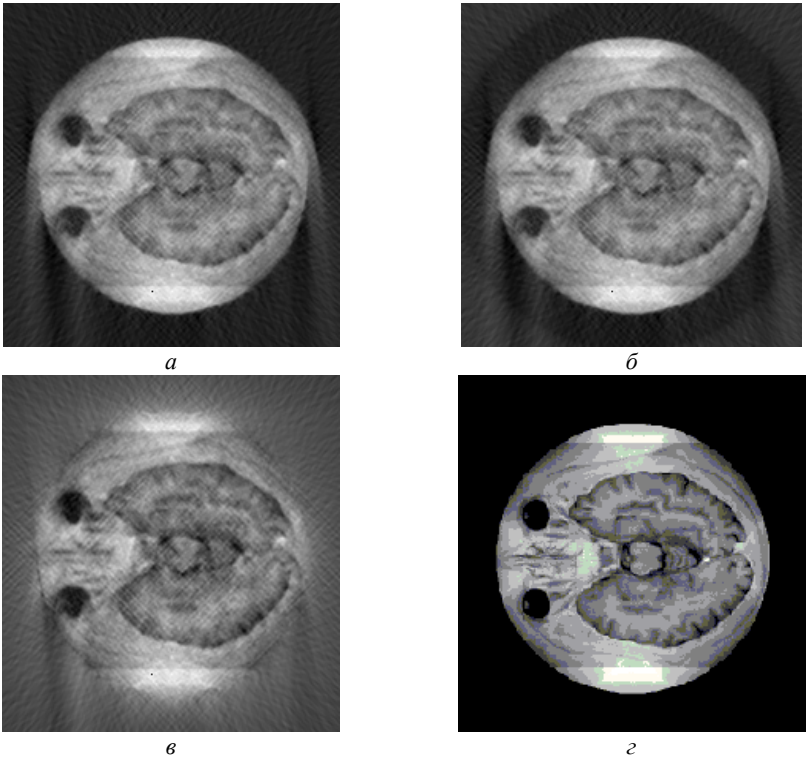


Рис. 3 – Зображення реконструкції перерізу головного мозку, отримані за допомогою алгоритму реконструкції по дискретним даним: *а* – кут повтору скануючої системи на 180 градусів; *б* – на 130 градусів; *в* – на 100 градусів; *г* – оригінал.

Результати моделювання. В ході моделювання було досліджено залежність зміни якості томографічного зображення від зменшенням кута повороту скануючої системи починаючи від 180 градусів до 90 (отримані томографічні зображення з кутами повороту скануючої системи, меншими за 90, градусів були неінформативними, тому не були включені в подальший хід дослідження).

На рис. 3 наведені результати реконструкції томографічного зображення, які були отримані за допомогою програмного інтерфейсу, використовуючи алгоритм реконструкції за дискретними даними. Кут повороту скануючої системи зменшували від 180 до 90 градусів. Для прикладу наведені результати зображень з іншим кутом, а також зображення-оригінал.

Порівнявши отримані результати з оригіналом, навіть візуально, ми бачимо, що на зображеннях з’являються шуми, причому зі зменшенням кута

повороту шумів стає все більше та зображення втрачає інформативність.

Таблиця 1 – Значення коефіцієнта кореляції для реконструкції томографічних зображень перерізу головного мозку

Кут	Коефіцієнт	Кут	Коефіцієнт
180	0,85698	120	0,84592
170	0,85696	110	0,83242
160	0,85676	108	0,82768
150	0,85624	106	0,81997
140	0,85506	104	0,78869
130	0,85247	100	0,73904

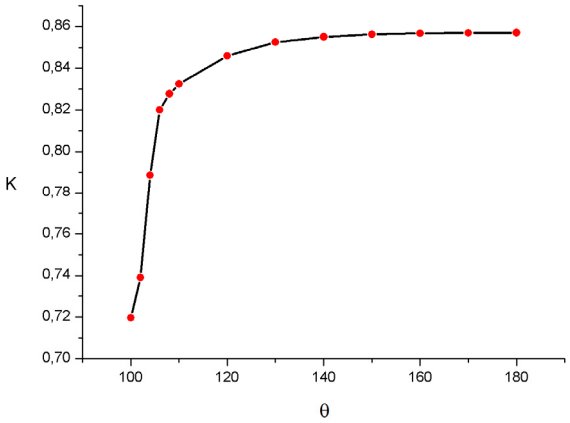


Рис. 4 – Залежність коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи для результатів реконструкції за дискретними даними.

Для визначення якості зображення за допомогою програмного інтерфейсу [13], було пораховано значення коефіцієнта кореляції томограм та початкового об’єкту, тобто оригіналу.

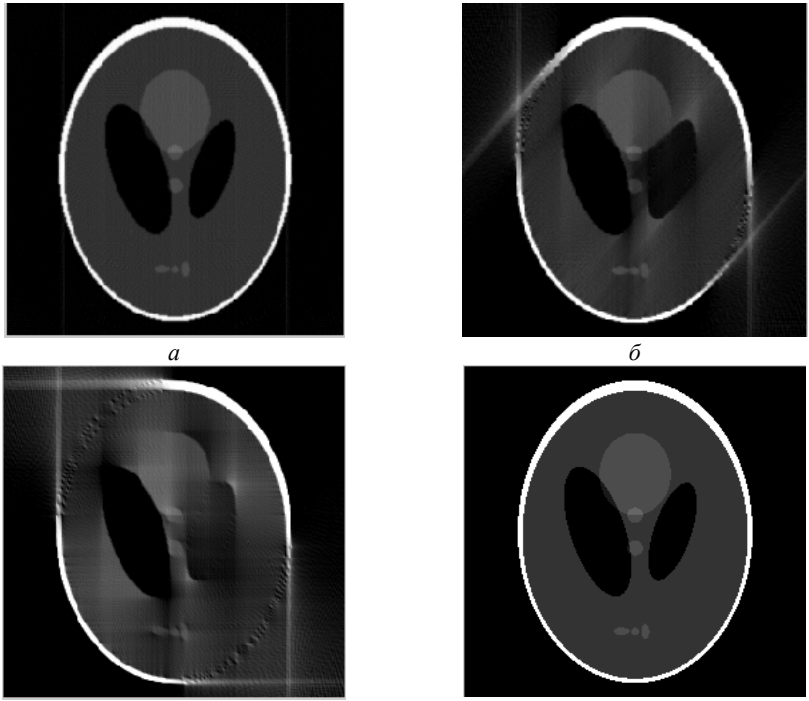
Порахувавши значення коефіцієнтів кореляції (табл. 1) для результатів, які були отримані з використанням алгоритму реконструкції за дискретними даними, було побудовано графіки залежності зміни коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи (рис. 4).

На рис. 5 наведені результати реконструкції фантому томографічного зображення, які були отримані за допомогою програмного інтерфейсу, що використовує алгоритм з перетвореннями Фур’є. Кут повороту скануючої системи, як і в попередньому алгоритмі, зменшували від 180 до 90 градусів.

Наведені результати зображень з різним кутом повороту скануючої системи та оригінал.

Візуально видно, що при застосуванні даного алгоритму якість отриманого зображення значно краща. Шумів на зображенні набагато менше

та при малих кутах зображення залишається інформативним, якщо порівнювати зображення при відповідних кутах з попереднього випадку, тобто при застосуванні алгоритму за дискретними даними.



а *б* *в* *г*

Рис. 5 – Зображення реконструкції фантому перерізу головного мозку, отримані за допомогою алгоритму з використанням перетворень Фур'є: *а* – кут повтору скануючої системи на 180 градусів; *б* – на 130 градусів; *в* – на 100 градусів; *г* – оригінал.

Аналогічним способом було пораховано коефіцієнт кореляції для отриманих результатів (табл. 2) та побудовано графік залженості зміни коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи (рис. 6).

Таблиця 2 – Значення коефіцієнта кореляції для реконструкції фантому то графічного зображення перерізу головного мозку

Кут	Коефіцієнт	Кут	Коефіцієнт
180	0,89773	120	0,88692
170	0,89767	110	0,87542
160	0,89754	108	0,86865
150	0,89744	106	0,85282
140	0,89646	104	0,84889
130	0,89567	100	0,83724

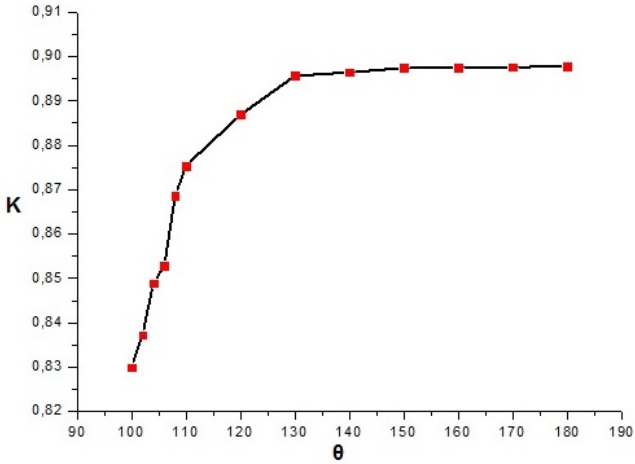


Рис. 6 – Залежність коефіцієнта кореляції від зміни кута повороту скануючої системи для результатів реконструкції з використанням перетворень Фур'є.

З наведених графіків ми бачимо, що в межах кута 130 – 180 градусів коефіцієнт кореляції майже не змінюється. Вже від 100 до 130 градусів крива починає різко спадати, що показує зменшення коефіцієнта кореляції. Для зображень реконструкції томографічного зображення перерізу головного мозку коефіцієнт кореляції має дещо менше значення ніж значення коефіцієнта для зображення реконструкцій фантому. Це свідчить про те, що алгоритм реконструкції з використанням перетворень Фур'є дає кращі результати в порівнянні з алгоритмом реконструкції по дискретним даним. В обох випадках коефіцієнт кореляції суттєво менший з кутом повороту скануючої системи на 100 градусів в порівняні зі значенням на 180 градусів. Такий результат вказує на те, що якість картинки значно погіршується зі зменшенням кута повороту. Як бачимо, з кутом повороту скануючої системи на 130 градусів, зображення ще залишається інформативним, але зі зменшенням цього кута якість зображення різко зменшується. Тому кут повороту скануючої системи, що становить 130 градусів, є критичним.

Висновки. При виконанні роботи були досліджені характеристики реконструкції томографічних зображень за умов використання двох різних методів.

Показано, що для обох методів реконструкція томографічних зображень задовільної якості можлива при проведені вимірів в межах кута від 130 до 180 градусів.

Якість томографічного зображення була оцінена чисельно за допомогою обрахунку коефіцієнта кореляції томограм та початкового значення.

Порівнявши обидва методи, видно, що якість реконструйованого зображення значно краща при використанні алгоритму з перетвореннями Фур'є. Також час обрахунку, тобто витрата машинного часу, значно різняться. Роз-

рахунок часу отримання однієї реконструкції за допомогою алгоритму з використанням інтегральних перетворень займає близько 3 хвилин. За тих самих умов розрахунок часу за допомогою алгоритму з використанням перетворень Фур'є – декілька секунд. Таким чином другий метод є економнішим та ефективнішим.

Список літератури: **1.** *Steve Webb* The Physics of Medical Imaging/Joint Department of Physics, Institute of Cancer Research and Royal Marsden Hospital, Sutton, Surrey, 1991. **2.** *Alfred K. Louis and Frank Natterer* Mathematical Problems of Computerized Tomography / t.71, №3, march 1983. **3.** *Jing Wang; Tianfang Li; Hongbing Lu; Zhengrong Liang*; Dept. of Radiol. & Dept. of Phys. & Astron., State Univ. of New York, Stony Brook, NY Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography / Medical Imaging, IEEE Transactions on ,Oct. 2006. **4.** *Albert Macovski, member IEEE* Physical Problems of Computerized Tomography / t.71, №3, march 1983. **5.** *Jing Wang; Tianfang Li; Hongbing Lu; Zhengrong Liang*; Dept. of Radiol. & Dept. of Phys. & Astron., State Univ. of New York, Stony Brook, NY Penalized weighted least-squares approach to sinogram noise reduction and image reconstruction for low-dose X-ray computed tomography / Medical Imaging, IEEE Transactions on ,Oct. 2006. **6.** *Adam Wang* Localized Noise Power Spectrum Analysis / PSYCH 221: Applied Vision and Image Engineering class project , March 2008. **7.** *Yair Censor* Finite Series-Expansion Reconstruction Methods / ТИИЭР, t.71, №3, матр 1983 . **8.** *Robert M. Lewitt*, member IEEE Reconstruction Algorithms: Transform Methods/ t.71, №3, march 1983. **9.** *Samuel G. Armato, III, Michael B. Altman, and Patrick J. La Riviure* Automated detection of lung nodules in CT scans: Effect of image reconstruction algorithm / Department of Radiology, The University of Chicago, South Maryland Avenue, Chicago, February 2003. **10.** *Э.Е. Либин, С. В. Чахлов* «Преобразование синограмм» научная редакция «Математика» май 2005 УДК 519.67; 620.179.15.05. **11.** *М.Я. Марусина, А.О. Казначеева* «Современные виды томографии» Санкт-Петербург 2006 ст. 8-38. **12.** *M. Guerquin-Kern, F. I. Karahanoğlu, D. Van De Ville, K. P. Pruessmann and M. Unser* Analytical form of Sepp-Logan phantom for parallel MRI 978-1-4244-4126-6/10/2010 IEEE. **13.** *Xiaolong Ouyang; Wong, W.H.; Johnson, V.E.; Xiaoping Hu; Chin-Tu Chen*; Dept. of Radiol., California Univ., San Francisco, CA Incorporation of correlated structural images in image reconstruction / Medical Imaging, IEEE Transactions on, Dec 1994

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 519.688

Реконструкція рентгенівських томограм для неповного набору проекцій / І. В. Качаненко, А. В. Нетреба // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 58 – 67. Бібліогр.: 13 назв.

Рассматривается проблема определения зависимости изменения качества реконструкции рентгеновских томограмм от изменения угла поворота сканирующей системы. Проведена реконструкция рентгеновских томограмм с углом поворота сканирующей системы от 90 до 180 градусов, для чего используется несколько методов. Проведена оценка качества полученных томограмм в сравнении с начальным объектом; определён критический угол поворота сканирующей системы.

Ключевые слова: реконструкция, алгоритм, синограмма, рентгеновская томография, преобразования Фурье, дискретные данные, сечение.

The article deals with the determination of the quality change of the reconstruction of x-ray tomograms depending on reduction angle scanning system. X-ray tomograms were reconstructed with angle scanning system from 90 to 180 degrees. Reconstruction was carried out by several methods. It were evaluated the quality received tomograms and the initial object. According to the results identified critical angle scanning system.

Key words: reconstruction, algorithm, sinogram, x-ray tomography, Fourier transform, discrete data, cross-section.

УДК 621.43.068.4

А.Н. КОНДРАТЕНКО, вед. инж. отд., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
А.П. СТРОКОВ, д-р. техн. наук, проф., ИПМаш НАН Украины, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ В ФИЛЬТРЕ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ДИЗЕЛЯ. ЧАСТЬ 5: РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ФИЛЬТРА С ЦЕОЛИТОВОЙ НАСЫПКОЙ

Описаны результаты расчетного исследования гидравлического сопротивления модуля фильтрующего элемента фильтра твердых частиц дизеля с цеолитовой насыпкой сетчатых кассет. Также приводятся данные по идентификации параметров математической модели процесса движения отработавших газов дизеля в модуле фильтрующего элемента.

Ключевые слова: дизель, отработавшие газы, твердые частицы, сажа, фильтр твердых частиц, гидравлическое сопротивление.

Введение. Создание эффективного, технологичного и надежного фильтра твердых частиц (ФТЧ) отработавших газов (ОГ) дизельных двигателей является актуальной задачей, стоящей перед специалистами в области двигателей внутреннего сгорания. Повышение точности математического моделирования тепло- и массообменных процессов в фильтрах твердых частиц (ФТЧ) дизеля позволяет более эффективно осуществлять оптимизацию их конструкции.

Анализ литературных источников. В предыдущих частях исследования были описаны действующие макетированные образцы фильтрующего элемента (ФЭ) ФТЧ – с пустыми сетчатыми кассетами (ДМ ФЭ) и с сетчатыми кассетами, заполненными насыпкой из *среднедисперсного природного цеолита* (ДМЦ ФЭ) [1 – 4]. Экспериментальные исследования их рабочих характеристик на моторном испытательном стенде (МИС) показали, что при определенных условиях ДМЦ ФЭ обладает существенно большей эффективностью очистки ОГ дизеля от ТЧ, чем ДМ ФЭ. Проведено расчетное исследование рабочих характеристик ДМ ФЭ в программной среде COSMOSFlo Works [4]. В данной части исследования будет проведено расчетное исследование рабочих характеристик ДМЦ ФЭ.

Цель и постановка задачи исследования. Целью данного исследования является математическое моделирование тепло- и массообменных процессов в полостях ФЭ фильтра твердых частиц дизеля. Задачи данного исследования аналогичны задачам расчетного исследования ДМ ФЭ, представленного в предыдущей части исследования [4].

© А. Н. Кондратенко, А. П. Строков, 2013

Математическая модель процесса движения потока ОГ в модуле ФЭ. Она имеет вид *уравнений Навье – Стокса* в нестационарной постановке с учетом наличия в конструкции объекта исследования пористых тел (ПТ), аналогична модели движения потока ОГ в модуле ДМ ФЭ и описана в [4, 5].

Дополнение математической модели необходимыми данными осуществлено в предыдущих частях исследования [1 – 4]. Помимо этих данных, Инженерная база данных (НБ1) программного комплекса COSMOSFlo Works дополнена свойствами природного цеолита, полученными из литературных источников, а также экспериментально [3]. Они представлены на рис. 1.

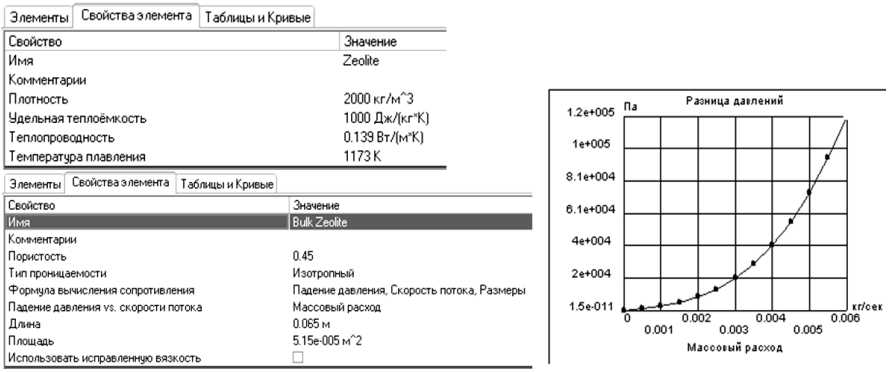


Рис. 1 – Свойства насыпного среднедисперсного природного цеолита.

Объект исследования. В конфигурацию 3D модели геометрии ДМ ФЭ, описанной в [4], введены элементы, представляющие собой пористые тела со свойствами природного насыпного цеолита. Таким образом, расчетная схема ДМЦ ФЭ приняла вид, представленный на рис. 2.

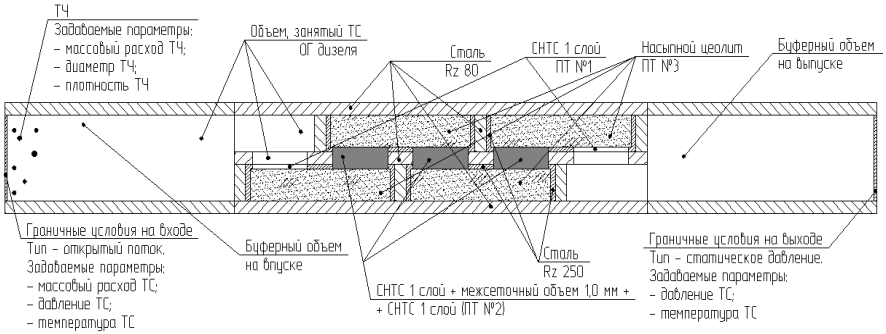


Рис. 2 – Расчетная схема ДМЦ ФЭ.

Сам ДМЦ ФЭ, изготовленный и исследованный на МИС, содержал 20 модулей и две уплотняющие шторки. Он описан в [3]. Место установки ДМЦ ФЭ то же, что и для ДМ ФЭ, его гидравлическое сопротивление оценивалось расчетным путем аналогично местам установки ДМ ФЭ и ПММ ФЭ (см. предыдущую часть данного исследования). Как и в случае ДМ ФЭ, расчеты велись для одного модуля ДМЦ ФЭ, в котором также использовано свойство симметрии потока относительно плоскости симметрии конфигурации, что существенно уменьшило процессорное время расчета.

В качестве текучей жидкости приняты ОГ, зависимость их плотности, удельной теплоемкости и вязкости от температуры занесены в ИБД. Перечень и значения граничных условий для расчета приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Граничные условия

Режим			Параметры ОС		Параметры ОГ					Параметры ТЧ	
№	n	$M_{кр}$	B_0	T_0	$G_{m\,ОГ}$	$P_{ОГ\,вх}$	$P_{ОГ\,вых}$	$T_{ОГ\,вх}$	$T_{ОГ\,вых}$	$G_{m\,ТЧ}$	$d_{ср\,ТЧ}$
Ед. изм.	мин$^{-1}$	Н·м	кПа	К	x 10^{-2} кг/с	кПа	кПа	К	К	x 10^{-2} кг/с	x 10^{-6} м
Внешняя скоростная характеристика											
1	1000	108	100,5	293	1,780	103,253	101,875	257	210	1,894	1,5
2	1200	110	100,5	293	2,113	103,934	102,313	315	278	2,316	1,5
3	1400	109	100,5	293	2,443	105,838	103,609	350	318	2,640	1,5
4	1600	102	100,5	293	2,779	107,275	104,520	365	335	2,056	1,5

Для уменьшения трудоёмкости моделирования расчет гидравлического сопротивления ДМ ФЭ выполнялся в пять этапов: 1) расчет со всеми «погашенными» (исключенными из расчета) ПТ, $\Delta P_{ДМЦФЭбПТ}$; 2) расчет со всеми «погашенными» ПТ, кроме ПТ типа 1 в количестве 1 шт., $\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ1}$; 3) расчет со всеми «погашенными» ПТ, кроме ПТ типа 2 в количестве 1 шт., $\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ2}$; 4) расчет со всеми «погашенными» ПТ, кроме ПТ типа 3 в количестве 1 шт., $\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ3}$; 5) расчет со всеми «не погашенными» ПТ (для одного из режимов работы дизеля).

Таким образом, значение гидравлического сопротивления ДМ ФЭ с «непогашенными» ПТ носит аддитивный характер и рассчитывается по формуле:

$$\Delta P_{ДМЦФЭ} = \Delta P_{ДМЦФЭбПТ} + 2 \cdot \left(\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ1} - \Delta P_{ДМЦФЭбПТ} \right) +$$

$$+3\cdot\left(\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ2}-\Delta P_{ДМЦФЭбПТ}\right)+4\cdot\left(\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ3}-\Delta P_{ДМЦФЭбПТ}\right).\ \text{Па} \quad (1)$$

Расчетная сетка представлена на рис. 3. Параметры, характеризующие расчет приведены в табл. 2. В качестве условия завершения расчета использовался критерий сходимости цели (в качестве которой выступал массовый расход текучей среды через ДМЦ ФЭ), равный точности косвенного измерения этого параметра на МИС. Расчеты велись на максимально мелкой базовой расчетной сетке, параметры которой задавались автоматически. Теплообмен в неподвижном теле, а также радиационный теплообмен, не учитывались. Траектории потока ОГ в варианте со всеми «непогашенными» ПТ для режима номинальной мощности дизеля 2Ч10,5/12 представлен на рис. 4.

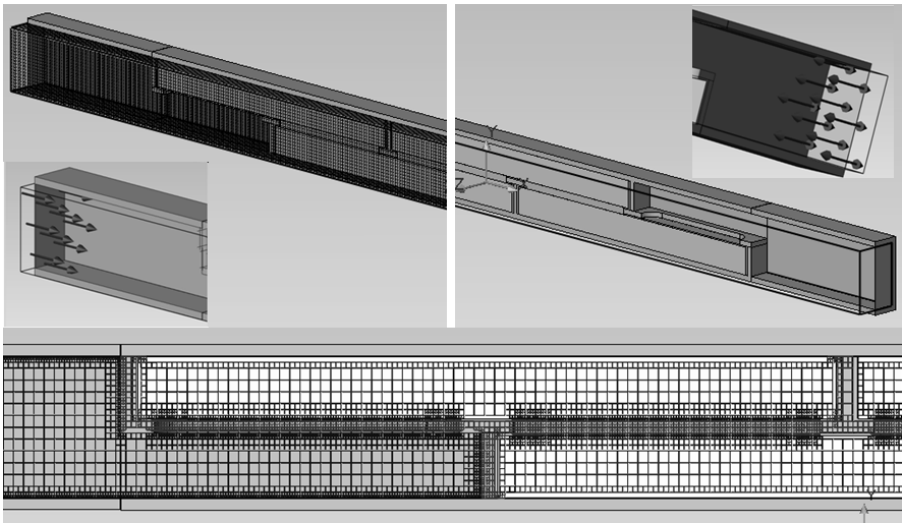


Рис. 3 – Конфигурация 3D модели геометрии модуля ДМ ФЭ.

Таблица 2 – Параметры вариантов расчета

Вариант	Количество ячеек			Количество итераций	Длит. итераций	Процессорное время расчёта		
	Тв. тела	ТС	Част.		с	ч	мин	с
Без ПТ	4132	123480	38468	756	12	2	31	12
С 1 ПТ №1	65340	266828	162893	906	62	15	36	12
С 1 ПТ №2	29632	178468	61500	865	17	4	5	5
С 1 ПТ №3	36412	237356	98898	810	24	5	24	0
Со всеми ПТ	65523	266888	163007	918	106	27	09	36

Результаты расчета. Расчет выполнен для нескольких режимов работы дизеля 2Ч10,5/12. Результаты расчета варианта представлены на рис. 5. На нем также представлены результаты экспериментального исследования ДМ

ФЭ на МИС и ПММ ФЭ на безмоторной исследовательской установке (БИУ). Как можно видеть, результаты этих исследований хорошо согласуются между собой.

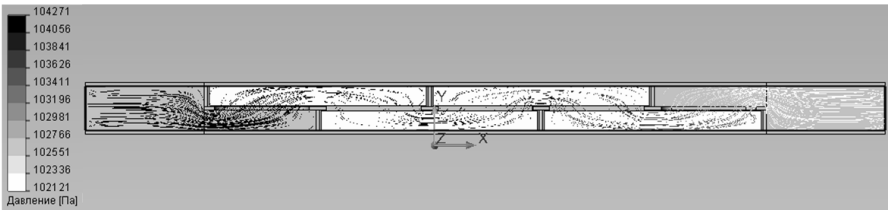


Рис. 4 – Результат расчета гидравлического сопротивления ДМ ФЭ.

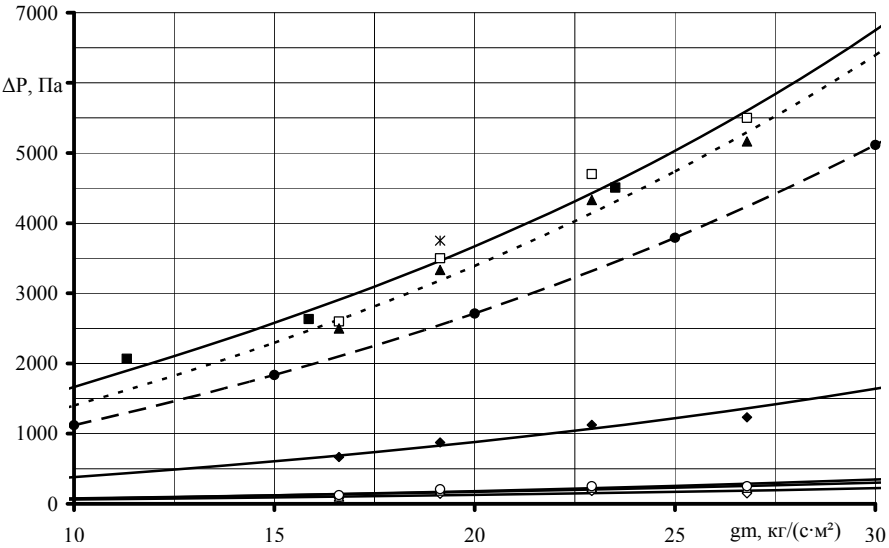


Рис. 5 – Результаты исследования.

■ – данные, экспериментально полученные на БИУ для ПММ ФЭ;
□ – данные, экспериментально полученные на МИС для ДМЦ ФЭ;
▲ – данные, полученные расчетом по формуле 1 для результатов расчетного исследования;
● – данные, полученные расчетом по формуле 1 для результатов экспериментального исследования ПММ ФЭ на БИУ;
◊, Δ, ○, ♦ – данные, полученные при расчетном исследовании ДМЦ ФЭ: величины $\Delta P_{ДМЦФЭбПТ}$, $\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ1}$, $\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ2}$; $\Delta P_{ДМЦФЭ+ПТ3}$ соответственно;
∗ – данные, полученные при расчетном исследовании ДМЦ ФЭ со всеми «непогашенными» ПТ.

Особенностью расчета является то, что параметры пористых тел, присутствующих в конфигурации ДМЦ ФЭ, отличаются от таковых, определенных при физическом их моделировании на БИУ (представлены на рисунке 6), а именно:

– удельный массовый расход текучей среды для пористых тел, образованных стальной тканой сеткой и межсеточным объемом, в 2,5 раза меньше, чем для сечения на входе в модуль ДМЦ ФЭ, поскольку потоку ОГ предоставляется всё проходное сечение таких ПТ, равное площади сечения отверстия в соединительной пластине модуля;

– гидравлическое сопротивление пористого тела, образованного насыпкой сетчатых кассет из природного цеолита, составляет 17,5 % от гидравлического сопротивления цеолитовой ячейки, полученное на БИУ, поскольку проходное сечение, предоставляемое потоку ОГ в таком пористом теле, поворачивается на 180º, причем сначала при повороте на 90º его величина уменьшается в 2,5 раза, и далее при повороте еще на 90º его величина увеличивается до прежних размеров, описывая эллипс. Соответственно, по траектории потока изменяются площадь проходного сечения и длина пути потока в ПТ. Это проиллюстрировано на рис. 7.

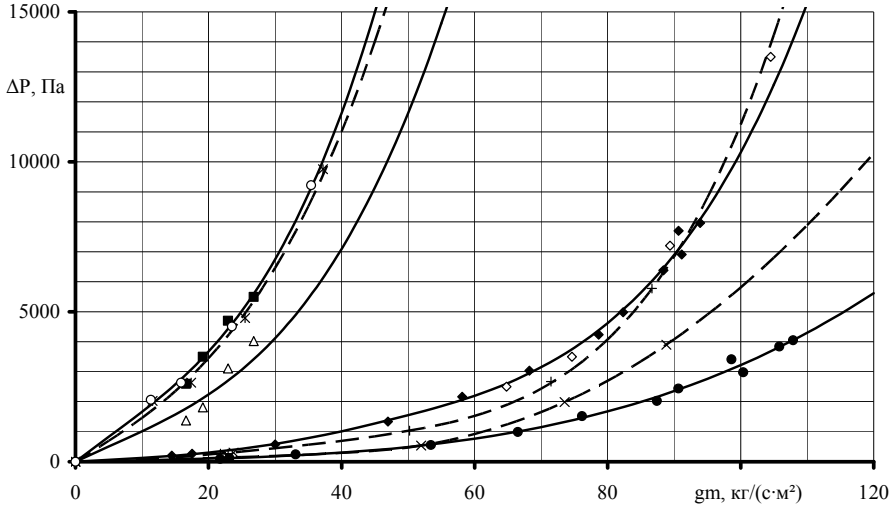


Рис. 6 – Результаты физического моделирования процесса движения ОГ для ПММ ФЭ на БИУ

■ – ДМЦ ФЭ на МИС, установленный за выпускным коллектором дизеля 2Ч10,5/12; ○ – ПММ ФЭ с цеолитовой насыпкой в сетчатых кассетах; ● – ПММ ФЭ без ПТ; ♦ – ПММ ФЭ без цеолитовой насыпки в сетчатых кассетах; ◊ – ДМ ФЭ на МИС; Δ – ДМЦ ФЭ на МИС, установленный в 5 м за выпускным коллектором дизеля; × – ПТ №1; ∗ – ПТ №2; + – ПТ № 3.

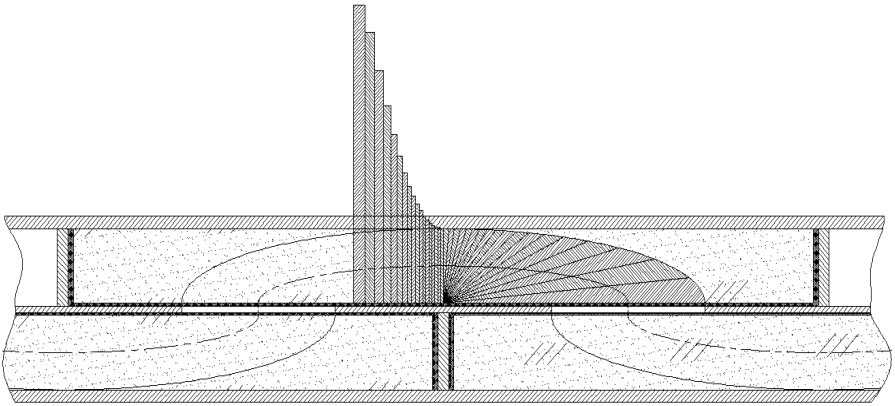


Рис. 7 – Изменение геометрических параметров ПТ по траектории движения потока ОГ в нем.

Перспективы дальнейших исследований состоят в поиске способов брикетирования сыпучих термостойких сорбентов, а также в поиске сыпучих сорбентов, альтернативных природному цеолиту.

Выводы. В данной части исследования процессы, происходящие в фильтрующем элементе ФТЧ дизеля с насыпкой из природного цеолита в сетчатых кассетах, исследовались методами математического моделирования. Основными результатами проведенных исследований стали следующие:

– основную часть гидравлического сопротивления ДМЦ ФЭ составляют насыпка из природного цеолита (около 71,5 %);

– влиянием на величину гидравлического сопротивления ДМЦ ФЭ самого модуля (около 3 %), кассет из стальной сетки и межсеточного объема (в сумме не превышает 4,5 %), возможно пренебречь в дальнейших расчетных исследованиях;

– данные, полученные расчетом гидравлического сопротивления как аддитивной величины для результатов расчета отличаются от данных, полученных экспериментально для ДМЦ ФЭ на МИС в среднем на 15,5 %, что обусловлено тем, что в расчете учитывался теплообмен только в текучей среде, шероховатость поверхностей деталей ДМЦ ФЭ отличалась от заданной при расчете, в выпускном тракте МИС возможны утечки ОГ, а также тем, что при работе фильтра неизбежно его засорение;

– данные, полученные расчетом гидравлического сопротивления как аддитивной величины для результатов физического моделирования процессов в ПММ ФЭ на БИУ отличаются в среднем на 32,3 % от данных, полученных экспериментально для ДМЦ ФЭ на МИС, что обусловлено эффектом взаимного влияния всех ПТ на параметры потока ОГ и наличием вихревого

движения ОГ в областях модуля, не стоящих на пути основного потока.

– данные, полученные расчетом конфигурации со всеми «непогашенными» ПТ для режима максимального крутящего момента дизеля на 2,5 % превышают данные, полученных экспериментально для ДМЦ ФЭ на МИС, что обусловлено погрешностями измерений параметров ОГ в выпускном тракте МИС и погрешностями расчета.

Приведенные данные позволяют сделать вывод о корректности выполненного исследования.

Список литературы: 1. *Кондратенко А.Н.* Моделирование тепло- и массообменных процессов в фильтре твердых частиц дизеля. Часть 1: модернизация конструкции фильтра и дополнение базы данных по свойствам пористого тела / *А.Н. Кондратенко, А.П. Строков, А.Н. Авраменко* // Двигатели внутреннего сгорания. – 2012. – № 1. – С. 82-88. **2.** *Кондратенко А.Н.* Моделирование тепло- и массообменных процессов в фильтре твердых частиц дизеля. Часть 2: дополнение баз данных по свойствам материалов фильтра и рабочего тела, определение значений краевых условий / *А.Н. Кондратенко, А.П. Строков, В.М. Семикин* // Двигатели внутреннего сгорания. – 2012. – № 2. – С. 87-92. **3.** *Кондратенко А.Н.* Моделирование тепло- и массообменных процессов в фильтре твердых частиц дизеля. Часть 3: вопросы использования цеолита в конструкции фильтрующего элемента / *А.Н. Кондратенко* // Вестник Национального технического университета "ХПИ". Сборник научных трудов. Тематический сборник: Автомобиле- и тракторостроение. Харьков: НТУ "ХПИ". – 2012. – № 60 (966) – С 83-89. **4.** *Кондратенко О.М.* Моделювання тепло- та масообмінних процесів у фільтрі твердих частинок дизеля. Частина 4: розрахункове дослідження робочих характеристик фільтра / О.М. Кондратенко, О.П. Строков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – №5 (979). – С. 100-109. **5.** *Алямовский А.А.* Компьютерное моделирование в инженерной практике. / *А.А. Алямовский, А.А. Собачкин, Е.В. Одинцов та ін.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 800 с.

Поступила в редколлегию 30.04.2013

УДК 621.43.068.4

Моделирование тепло- и массообменных процессов в фильтре твердых частиц дизеля. Часть 5: расчетное исследование гидравлического сопротивления фильтра с цеолитовой насыпкой / А.Н. Кондратенко, А.П. Строков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 68 – 75. Бібліогр.: 5 назв.

Описуються результати розрахункового дослідження гідравлічного опору модуля фільтруючого елементу фільтра твердих частинок дизеля із цеолітовою насипкою сітчастих касет. Також наводяться дані щодо ідентифікації параметрів математичної моделі процесу руху відпрацьованих газів дизеля у модулі фільтруючого елементу.

Ключові слова: дизель, відпрацьовані гази, тверді частинки, сажа, фільтр твердих частинок, гідравлічний опір.

The present paper describes the results of calculation research of the hydraulic resistance of the filter element of diesel particulate filter with the bulk zeolite in mash cartridge. Also this article present data on the identification of parameters of the mathematical model of the process of movement of diesel exhaust gases in the module of filter element.

Key words: diesel exhaust gases, particulate matter, soot, particulate matter filter, hydraulic resistance.

УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УІПА, Харків;
О.М. ПРОХОРОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц. НТУ «ХПІ»

ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНОЇ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ДВОВИМІРНОГО ТІЛА ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗРИВНОГО ІНТЕРЛІНАЦІЙНОГО СПЛАЙНУ, ВИКОРИСТОВУЮЧИ КРИВОЛІНІЙНІ ТРИКУТНИКИ ТА ТРАПЕЦІЇ

Будується та досліджується розривний інтерлінаційний сплайн першого порядку, який використовує прямокутні елементи з однією криволінійною стороною та трикутні елементи з криволінійною гіпотенузою. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні властивості та похибку побудованих розривних конструкцій.

Ключові слова: розривна функція, розривна інтерлінація, криволінійні елементи.

Вступ. Класична теорія наближення диференційованих функцій багатьох змінних використовує оцінки похибок, які істотно основані на припущенні, що наближувана функція має обмежені похідні достатньо високого порядку. Наприклад, в роботі [1] оцінка наближення поліномами Лагранжа степеня n вимагає неперервності похідної порядку $n+1$, в роботах [2]–[4] похибка наближення сплайнами вимагає неперервності r-ої ($1 \le r \le n+1$) похідної, де n – степінь сплайна. Для наближення неперервних функцій замість похідних використовуються *модулі неперервності*.

В той же час практика показує, що необхідно вміти з достатньою точністю наближувати розривні функції, зокрема, функції, які мають в області задання розриви першого роду в окремих точках або на окремих лініях тощо. Наприклад, дослідження внутрішньої структури тіла людини за допомогою методів комп’ютерної томографії в заданій площині повинно враховувати, що різні частини тіла мають свою форму і свою щільність. Тобто щільність внутрішньої структури всього тіла описується розривною функцією від трьох змінних, яка має розриви першого роду на поверхнях між різними частинами тіла (серце, шлунок, печінка тощо). В деяких випадках досліднику відома форма цих поверхонь (як правило, наближено).

Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання *плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії.* Для цього доцільніше використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх *слідами* на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що інтерлінація є

© О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. М. Прохорова, 2013

математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями.

Тому актуальною є задача наближення такого роду функцій за допомогою конструкцій, які на вказаних лініях зберігають властивості наближуваної функції, тобто мають розриви першого роду (взагалі кажучи, з невідомими значеннями розривів).

Аналіз останніх досліджень. В роботах [5] – [6] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних *розривними інтерполяційними білінійними сплайнами*, а в роботі [7] – *інтерлінаційними розривними сплайнами* на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерполяційні [8] та інтерлінаційні [9] сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники . В роботі [10] досліджувався неперервний оператор інтерлінації для наближення неперервних функцій на лініях тріангуляції.

Оскільки областю визначення розривної функції може бути довільної складності область, то виникає потреба у використанні розривних сплайнів, побудованих на елементах більш складної форми, наприклад, з криволінійними сторонами. В роботах [11] – [12] досліджувалися розривні інтерполяційні та апроксимаційні сплайни, побудовані на криволінійних трикутниках та трапеціях.

В даній роботі будується та досліджується розривний інтерлінаційний сплайн першого порядку, який використовує прямокутні елементи з однією криволінійною стороною та трикутні елементи з криволінійною гіпотенузою

Побудова розривного інтерлінаційного сплайна з використанням трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області D. Будемо вважати, що область D розбивається прямими

$$x = x_k, \quad x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m,$$

$$y = y_k, \quad y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n$$

на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою цього пункту є побудова та дослідження таких операторів розривної кусково-поліноміальної інтерлінації, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерлінації функції $f(x,y)$.

Розглянемо трикутний елемент T_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$ (рис.1), в якому катети задаються рівняннями

$$AB : x = x_i, \qquad AC : y = y_j,$$

а гіпотенуза BC, взагалі кажучи, є криволінійною і може задаватися рівнянням

$$h(x)+g(y)=1 \text{ , тобто } y=g^{-1}(1-h(x)) \text{ або } x=h^{-1}(1-g(y)) .$$

Причому виконуються наступні співвідношення: $g(y_j)=0,\ h(x_i)=0$.

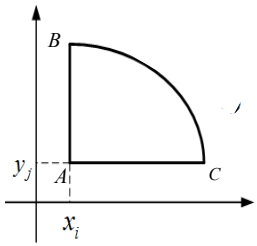


Рис. 1 – Один з можливих трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою та з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Нехай на цьому трикутнику задана функція $f(x,y)$, яка на лініях заданого трикутного елемента може мати розриви першого роду.

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x=x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y)=\lim_{x\to x_i+0} f(x,y)=f(x_i+0,y) ;$$

$$\varphi m_i(y)=\lim_{x\to x_i-0} f(x,y)=f(x_i-0,y) ;$$

$$\varphi pp_{ij}=\varphi p_i(y_j)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=$$

$$=f(x_i+0,y_j+0);$$

$$\varphi mp_{ij}=\varphi m_i(y_j)=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=f(x_i+0,y_j+0) .$$

2. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $y=y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x)=\lim_{y\to y_j+0} f(x,y)=f(x,y_j+0) ;$$

$$\psi m_j(x)=\lim_{y\to y_j-0} f(x,y)=f(x,y_j-0) ;$$

$$\psi pp_{ij}=\psi p_j(x_i)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y)=f(x_i+0,y_j+0) ;$$

$$\psi pm_{ij}=\psi m_j(x_i)=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y)=f(x_i-0,y_j-0) .$$

3. Сліди функції $f(x,y)$ на криволінійній гіпотенузі (під та над прямою відповідно):

$$\eta m_{ij}(x)=f\left(x,g^{-1}(1-h(x))-0\right),\quad \eta p_{ij}(x)=f\left(x,g^{-1}(1-h(x))+0\right);$$

$$\eta pm_{ij}=\eta m_{ij}(x_i)=f\left(x_i+0,g^{-1}(1-h(x_i))-0\right),$$

$$\eta pp_{ij}=\eta p_{ij}(x_i)=f\left(x_i+0,g^{-1}(1-h(x_i))+0\right)$$

або

$$\eta m_{ij}(y)=f\left(h^{-1}(1-g(y))+0,y\right),\qquad \eta p_{ij}(y)=f\left(h^{-1}(1-g(y))-0,y\right);$$

$$\eta pm_{ij} = \eta m_{ij}(y_j) = f\left(h^{-1}(1-g(y_j))+0, y_j - 0\right),$$

$$\eta mp_{ij} = \eta p_{ij}(y_j) = f\left(h^{-1}(1-g(y_j))-0, y_j + 0\right).$$

Введемо позначення:

$$\mu m_i(x) = f\left(x_i + 0, g^{-1}(1-h(x))-0\right),$$

$$\mu p_i(x) = f\left(x_i + 0, g^{-1}(1-h(x))+0\right),$$

або

$$\mu p_j(y) = f\left(h^{-1}(1-g(y))+0, y_j - 0\right),$$

$$\mu m_j(y) = f\left(h^{-1}(1-g(y))-0, y_j + 0\right).$$

Легко перевірити, що виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} &\mu m_i(x_i) = \eta m_{ij}(x_i), \qquad \mu p_i(x_i) = \eta p_{ij}(y_j), \\ &\mu p_j(y_j) = \eta m_{ij}(y_j), \quad \mu m_j(y_j) = \eta p_{ij}(y_j). \end{aligned} \tag{1}$$

Для побудови оператора інтерлінації скористаємося результатами роботи *Литвина О.М.* [10].

Теорема1. *Якщо сліди функції* $f(x,y)$ *задовольняють умовам*

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \eta m_{ij}(x_i) = \varphi p_i\left(g^{-1}(1-h(x_i))\right),$$

$$\eta m_{ij}\left(h^{-1}(1-g(y_j))\right) = \psi p_j\left(h^{-1}(1-g(y_j))\right),$$

то оператор

$$Lf(x,y) = L_1 f(x,y) + L_2(x,y) - L_{12}(x,y), \tag{2}$$

де

$$L_1 f(x,y) = h(x)\cdot \eta m_{ij}(y) + g(y)\cdot \eta m_{ij}(x),$$

$$L_2 f(x,y) = \psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j),$$

$$L_1 L_2 f(x,y) = h(x)\left(\varphi p_i(y) + \mu p_j(y) - \varphi p_i(y_j)\right) +$$

$$+ g(y)\left(\eta m_{ij}(x_i) + \mu m_i(x) - \psi p_j(x)\right)$$

інтерлінує функцію $f(x,y)$ *на трьох сторонах трикутника*

T_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, *тобто*

$$L f(x,y)\big|_{y=y_j} = \psi p_j(x), \; Lf(x,y)\big|_{x=x_i} = \varphi p_i(y), \tag{3}$$

$$Lf(x,y) = f(x,y), \text{ якщо } h(x)+g(y)=1. \tag{4}$$

Доведення. Перепишемо формулу (2) у вигляді

$$Lf(x,y) = (1-h(x)-g(y))(\psi p_j(x) + \varphi p_i(y) - \varphi p_i(y_j)) + +h(x)(\eta m_{ij}(y) -$$

$$-\mu p_j(y) + \psi p_j(x)) + g(y)\left(\eta m_{ij}(x) - \mu m_i(x) + \varphi p_i(y)\right). \tag{5}$$

Візьмемо у формулі (5) $y = y_j$, в результаті отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j} = (1-h(x)-g(y_j))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(y_j)-\varphi p_i(y_j)) + +h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-$$

$$-\mu p_j(y_j)+\psi p_j(x)) + g(y_j)\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(y_j)\right).$$

Оскільки $g(y_j)=0$, то

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j} = (1-h(x))\cdot\psi p_j(x)+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\mu p_j(y_j)+\psi p_j(x)).$$

Згідно формули (1), маємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=y_j} = (1-h(x))\cdot\psi p_j(x)+h(x)(\eta m_{ij}(y_j)-\eta m_{ij}(y_j)+\psi p_j(x)) = \psi p_j(x).$$

Аналогічно, підставивши формулі (5) $x = x_i$, отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{x=x_i} = (1-h(x_i)-g(y))(\psi p_j(x_i)+\varphi p_i(y)-\varphi p_i(y_j)) +$$

$$+h(x_i)(\eta m_{ij}(y)-\mu p_j(y)+\psi p_j(x_i)) +$$

$$+g(y)\left(\eta m_{ij}(x_i)-\mu m_i(x_i)+\varphi p_i(y)\right) = \begin{vmatrix} h(x_i)=0 \\ \varphi p_i(y_j)=\psi p_j(x_i) \\ \mu m_i(x_i)=\eta m_{ij}(x_i) \end{vmatrix} =$$

$$= (1-g(y))\cdot\varphi p_i(y)+g(y)\cdot\varphi p_i(y) = \varphi p_i(y).$$

Таким чином, умови (3) перевірені.

Підставивши $y = g^{-1}(1-h(x))$ у формулу (5), отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=g^{-1}(1-h(x)))} =$$

$$= (1-h(x)-g(g^{-1}(1-h(x))))(\psi p_j(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))-\varphi p_i(y_j)) +$$

$$+h(x)(\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x)))-\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)))+\psi p_j(x)) +$$

$$+g(g^{-1}(1-h(x)))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))\right) =$$

$$= h(x)(\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x)))-\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)))+\psi p_j(x)) +$$

$$+g(g^{-1}(1-h(x)))\left(\eta m_{ij}(x)-\mu m_i(x)+\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x)))\right).$$

Згідно з введеними позначеннями, маємо:

$$\eta m_{ij}(g^{-1}(1-h(x))) = f\left(h^{-1}(1-g(g^{-1}(1-h(x))))+0, g^{-1}(1-h(x))\right) =$$

$$= \left(h^{-1}(h(x))+0, g^{-1}(1-h(x))\right) = \left(x, g^{-1}(1-h(x))-0\right) = \eta m_{ij}(x);$$

$$\mu p_j(g^{-1}(1-h(x)) = f\left(h^{-1}(1-g(g^{-1}(1-h(x)))+0, y_j-0\right) =$$

$$= f\left(x, y_j+0\right) = \psi p_j(x);$$

$$\varphi p_i(g^{-1}(1-h(x))) = f(x_i+0, g^{-1}(1-h(x))) = \mu m_i(x).$$

Тоді отримаємо:

$$Lf(x,y)\big|_{y=g^{-1}(1-h(x))} = h(x)(\eta m_{ij}(x) - \psi p_j(x) + \psi p_j(x)) +$$

$$+(1-h(x))\Big(\eta m_{ij}(x) - \mu m_i(x) + \mu m_i(x)\Big) =$$

$$= h(x)\cdot \eta m_{ij}(x) + (1-h(x))\cdot \eta m_{ij}(x) = \eta m_{ij}(x)$$

Аналогічно доводиться, що $Lf(x,y)\big|_{x=h^{-1}(1-g(x))} = \eta m_{ij}(y)$.

І умова (4) доведена.

Теорема доведена.

Теорема 2. *Якщо* $f(x,y) \in C^{(1,1)}(\mathrm{T}_{ij})$, *то для залишку* $Rf(x,y) = (I-L)f(x,y)$ *виконуються співвідношення*

$$Rf(x,y) = (1-h(x)-g(y))\int_0^x\int_0^y f^{(1,1)}(u,v)dudv +$$

$$+f(x)\int_x^{h^{-1}(1-g(y))}\int_0^y f^{(1,1)}(u,v)dudv + g(y)\int_0^x\int_y^{g^{-1}(1-h(x))} f^{(1,1)}(u,v)dudv.$$

Доведення. Запишемо тотожності

$$f(x,y) = \psi p_j(x) + \varphi p_i(y) + \int_{x_i}^x\int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u,v)dudv,$$

$$f(x,y) = \eta m_{ij}(x) - \mu p_j(y) + f(x,y_j) + \int_x^{h^{-1}(1-g(y))}\int_{y_j}^y f^{(1,1)}(u,v)dudv,$$

$$f(x,y) = \eta m_{ij}(x) - \mu p_i(x) + \varphi p_i(y) + \int_{x_i}^x\int_{y_j}^{g^{-1}(1-h(x))} f^{(1,1)}(u,v)dudv.$$

За їх допомогою отримаємо тотожність

$$f(x,y) \equiv (1-h(x)-g(y))f(x,y) + h(x)f(x,y) + g(y)f(x,y) \equiv$$

$$\equiv Lf(x,y) + Rf(x,y).$$

Теорему 2 доведено.

Наслідок. *Для довільних функцій* $f(x,y) = u(x) + v(y)$, *де* $u(x), v(y)$ – *довільні функції однієї змінної справедлива рівність*

$$Lf(x,y) = f(x,y).$$

Доведення випливає з того, що $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(u(x)+v(y)) = 0$.

Зауваження. Якщо $\varphi p_i(y) = \varphi m_i(y)$, $\psi p_j(x) = \psi m_j(x)$, $\eta p_{ij}(x) = \eta m_{ij}(x)$, то побудований розривний сплайн вигляду (2) є неперервним

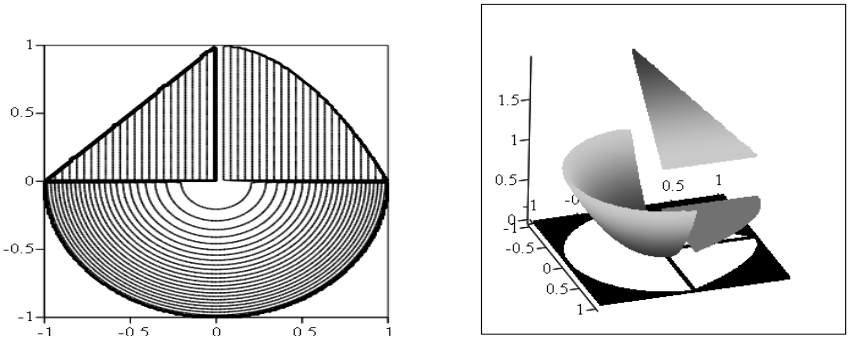
інтерлінаційним сплайном на границях трикутного елементу T_{ij}.

Приклад. Нехай функція $f(x,y)$ визначена в області $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \mathrm{T}_3 \cup \mathrm{T}_4$, представленій на рис. 2*а*. Катети цих трикутних елементів утворені прямими $x = 0,\ y = 0$, а гіпотенузи задані рівнянням вигляду $h(x) + g(y) = 1$, де $h(x),\ g(y)$ задовольняють умовам $h(0) = 0,\ g(0) = 0$ та в кожному трикутному елементі задаються наступним чином:

$$\mathrm{T}_1:\ h(x) = x^2,\ g(y) = y, \qquad \mathrm{T}_2: h(x) = -x,\ g(y) = y,$$

$$\mathrm{T}_3:\ h(x) = x^2,\ g(y) = y^2, \qquad \mathrm{T}_4:\ h(x) = x^2,\ g(y) = y^2.$$

Нехай у визначеній області задана функція $f(x,y)$ (рис. 2*б*).



а *б*

Рис. 2 – Графічне представлення: *а* області визначення функції $f(x,y)$ та *б* самої функції $f(x,y)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.5, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x^2, \\ -x + 1, & -1 < x < 0,\ 0 < y < 1 + x, \\ x^2 + y^2, & -\sqrt{1 - y^2} < x < \sqrt{1 - y^2},\ -1 < y < 0. \end{cases}$$

Тобто функція $f(x,y)$ на лініях тріангуляції має розриви першого роду, але не на всіх лініях.

У якості вихідних даних будемо використовувати сліди заданої функції на лініях трикутних елементів:

$$\mathrm{T}_1: \varphi p(y) = f(+0, y) = 0.5, \quad \psi p(x) = f(y, +0) = 0.5,$$

$$\eta m(x) = f(x, 1 - x^2 - 0) = 0.5;$$

$$\mathrm{T}_2: \varphi m(y) = f(-0, y) = 1, \quad \psi p(x) = f(x, +0) = -x + 1,$$

$$\eta p(y) = f(x, 1 + x + 0) = -x + 1;$$

$$\mathrm{T}_3 : \varphi m(y) = f(-0, y) = y^2, \quad \psi m(x) = f(x, -0) = x^2,$$

$$\eta p(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2} + 0) = 1.$$

Ці сліди задовольняють умовам теореми 1 в кожному з чотирьох трикутників, тому за формулою (2) будуємо розривний інтерлінаційний сплайн, який в точності співпадає із заданою функцією (рис. 2*б*).

Побудова розривного інтерлінаційного сплайна з використанням трикутних елементів з криволінійною гіпотенузою. Нехай $f(x, y)$ задана розривна функція двох змінних в області D. Будемо вважати, що область D розбивається прямими

$$x = x_k, \quad x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m,$$

$$y = y_k, \quad y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$$

на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається два прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою цього пункту є побудова та дослідження таких операторів розривної кусково-поліноміальної інтерлінації, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерлінації функції $f(x, y)$.

Якщо (x_i, y_j) – це вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутника, то може зустрітися чотири типи трапецій (рис.3):

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(2)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \left\{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \left\{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\right\};$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(4)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\right\}; \ \mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \left\{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(y), y_{j-1} < y < y_j\right\}.$$

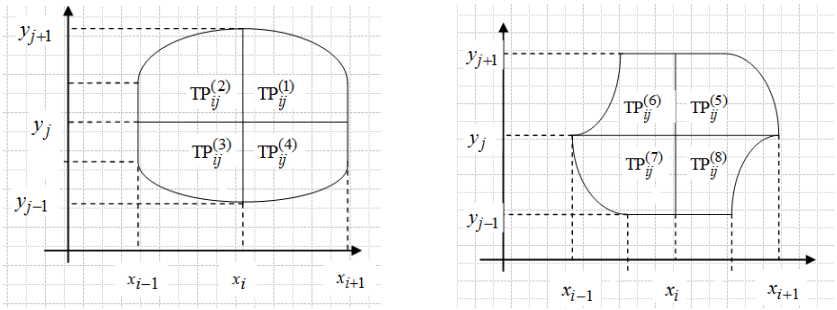


Рис. 3 – Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j).

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція $f(x,y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду. Розглянемо трапецію типу $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$.

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \to x_i + 0} f(x,y) = f(x_i + 0, y), \quad \varphi m_i(y) = \lim_{x \to x_i - 0} f(x,y) = f(x_i - 0, y);$$

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi pm_{ij+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0).$$

2. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $x = x_{i+1}$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x \to x_{i+1} + 0} f(x,y) = f(x_{i+1} + 0, y), \quad \varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x \to x_{i+1} - 0} f(x,y) = f(x_{i+1} - 0, y);$$

$$\varphi mp_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = \lim_{\substack{x \to x_{i+1} - 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

3. Сліди функції $f(x,y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \to y_j + 0} f(x,y) = f(x, y_j + 0), \quad \psi m_j(x) = \lim_{y \to y_j - 0} f(x,y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\psi pp_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \to x_i + 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi mp_{i+1,j} = \psi m_j(x_{i+1}) = \lim_{\substack{x \to x_{i+1} - 0 \\ y \to y_j + 0}} f(x,y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

4. Сліди функції $f(x,y)$ на лінії $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$ (під та над лінією відповідно):

$$\psi m_{j+1}(x) = f\left(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0\right), \quad \psi p_{j+1}(x) = f\left(x, g_{j+1}^{(1)}(x) + 0\right);$$

$$\psi pm_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f\left(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0\right),$$

$$\psi mm_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f\left(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0\right)$$

Означення. Будемо називати *розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в трапецевидному елементі* $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ наступну функцію:

$$Lf(x,y) = \left(L_1 + L_2 - L_2 L_1\right) f(x,y), \tag{6}$$

де

$$L_1 f(x,y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \varphi m_{i+1}(y);$$

$$L_2 f(x,y) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \psi p_j(x).$$

Для оператора інтерлінації, побудованого з використанням криволінійних трапецій, справедливі такі ж теореми про інтерлінаційні властивості та про похибку наближення, що і для оператора інтерлінації, побудованого в роботі [13] на основі трапецевидних елементів. Нижче наведемо ці теореми без доведень.

***Теорема 3* [13].** *Якщо сліди функції* $f(x,y)$ *задовольняють співвідношенням:*

$$\psi p_j(x_i) = \varphi p_i(y_j), \quad \psi p_j(x_{i+1}) = \varphi m_{i+1}(y_j),$$

$$\varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = \psi m_{j+1}(x_i), \quad \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = \psi m_{j+1}(x_{i+1}),$$

то оператор (1) інтерлінує $f(x,y)$ *на* $\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)} : Lf(x,y)\big|_{\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}} = f(x,y)\big|_{\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}}$, *тобто*

$$Lf(x_i, y) = \varphi p_i(x), \qquad Lf(x_{i+1}, y) = \varphi p_{i+1}(x),$$

$$Lf(x, y_j) = \psi p_j(x), \quad Lf(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) = \psi m_{j+1}(x).$$

Теорема 4 [13]. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді для залишкового члена* $Rf(x,y) = (I - L) f(x,y)$ *виконується рівність*

$$Rf(x,y) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} P_{1,k}(x) P_{2,m}(x,y) \int_{x_k}^{x} \int_{y_m(x)}^{y} f^{(p,q)}(\xi,\eta) \frac{(x_k - \xi)^{p-1} (y_\ell - \eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!} d\xi d\eta,$$

$$1 \le p, q \le 2, \; y_1(x) = y_j, \; y_2(x) = g_{j+1}^{(1)}(x),$$

а поліноми $P_{1,k}(x), P_{2,m}(x,y)$ *мають вигляд*

$$P_{1,1}(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad P_{1,2}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i},$$

$$P_{2,1}(x) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}, \quad P_{2,2}(x) = \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}.$$

Оцінимо похибку наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованим розривним інтерлінантом $Lf(x,y)$, визначеним формулою (6) в трапецевидному елементі $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$.

***Теорема 5* [13].** *Нехай* $f(x,y) \in C^{p,q}(\mathrm{TP}_{ij}^{(1)})$, $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$, *тоді для за-*

лишкового члена $Rf(x,y)$ *має місце оцінка*

$$\left\|Rf(x,y)\right\|_{C\left(\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}\right)} \le M \cdot \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} \left|G_1(x,\xi)\cdot G_2(x,y,\eta)\right| d\xi d\eta ,$$

де

$$M = \max_{(x,y)\in \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}} \left|f^{(p,q)}(x,y)\right|,\ G_1(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\dfrac{(x_i-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i \le \xi < x, \\ -\dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\cdot\dfrac{(x_{i+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x \le \xi \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$$G_2(x,y,\eta) = \begin{cases} \dfrac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}\cdot\dfrac{(y_j-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j \le \eta < y, \\ -\dfrac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}\cdot\dfrac{(g_{j+1}^{(1)}(x)-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y \le \eta < g_{j+1}^{(1)}(x). \end{cases}$$

Зауваження. Якщо односторонні сліди функції на відповідних лініях, що утворюють границі трапецевидних елементів, збігаються, то розривна функція перетворюється в неперервну.

Приклад. Нехай функція $f(x,y)$ задана в одиничному квадраті $[0,1]^2$ таким чином (рис. 4):

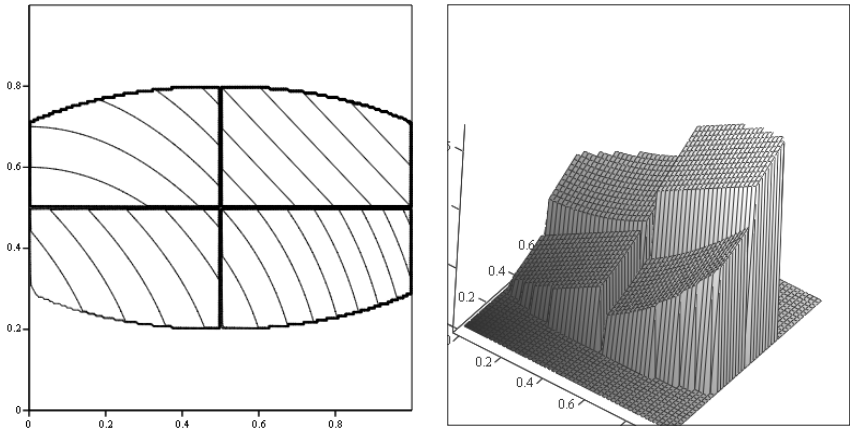
$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0.5 < x < 1,\ 0.5 < y < 0.5+\sqrt{0.09\left[1-\dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}; \\ x^2+y, & 0 < x < 0.5,\ 0.5 < y < 0.5+\sqrt{0.09\left[1-\dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}; \\ x+y^2, & 0 < x < 0.5,\ 0.5-\sqrt{0.09\left[1-\dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]} < y < 0.5; \\ x^2+y^2, & 0.5 < x < 1,\ 0.5-\sqrt{0.09\left[1-\dfrac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]} < y < 0.5. \end{cases}$$

Тобто на лініях фігури функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії:

$$x = x_1 = 0,\ x = x_2 = 0.5,\ x = x_3 = 1,$$

$$y = y_1 = 0.5-\sqrt{0.09\left[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]},\ y = y_2 = 0.5,$$

$$y = y_3 = 0.5 + \sqrt{0.09\left[1 - \frac{(x-0.5)^2}{0.49}\right]}.$$



а *б*

Рис. 4 – Графічні зображення: *а* – області визначення функції $f(x,y)$; *б* – функції $f(x,y)$.

Вони розбивають область визначення функції $f(x,y)$ на вісім трапецевидних елементів з однією криволінійною стороною в кожному елементі.

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $\text{TP}_{ij}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x,y) = L_1 L_2 f(x,y) = \varphi pp_{ij} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + \varphi mp_{i+1,j} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$

$$+ \varphi pm_{i,j+1} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + \varphi mm_{i+1,j+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j},$$

при умові, що виконуються рівності

$$\varphi pm_{i,j+1} = \psi pm_{i,j+1}, \quad \varphi pp_{i,j} = \psi pp_{i,j},$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \psi mm_{i+1,j+1}, \quad \varphi mp_{i+1,j} = \psi pm_{i+1,j}.$$

Графічний вигляд такого інтерполяційного сплайна наведений на рис. 5.

Знайдемо оцінку похибки наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованою розривною конструкцією $S(x,y)$

$$\max\left|f(x,y) - S(x,y)\right| \approx 0.025.$$

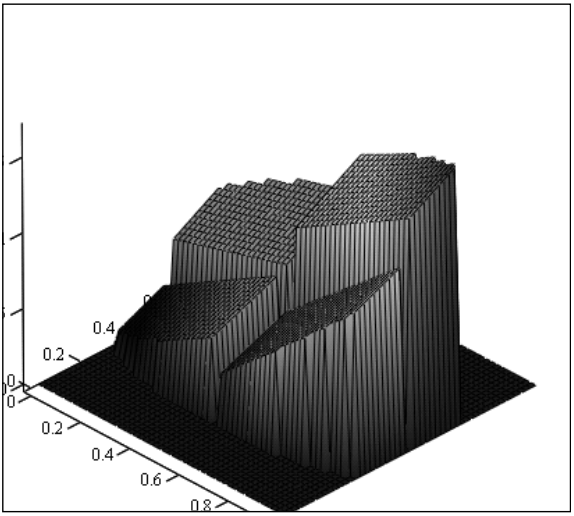


Рис. 5 – Графічний вигляд розривного сплайн-інтерполянта для функції $f(x,y)$.

Тепер побудуємо на заданій сітці розривний інтерлінаційний сплайн $L(x,y)$ за формулою (6). Після перетворень, можна побачити, що аналітично цей сплайн повністю збігається із заданою функцією $f(x,y)$, тобто $L(x,y)=f(x,y)$.

Можемо зробити висновок, що інтерлінаційний розривний сплайн точно відновлює задану розривну функцію на заданих криволінійних елементах.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей двовимірних тіл, внутрішня структура яких є неоднорідною.

В методах, розроблених авторами, вважається, що розриви функцій відомі. Наступним кроком автори планують застосувати розроблену теорію наближення розривних функцій розривними сплайн-інтерлінантами до розв’язання двовимірної задачі комп’ютерної томографії.

Висновки. Таким чином, в даній статті запропоновано метод побудови розривних сплайн-інтерлінантів, які включають в себе розривні сплайни, для випадку, коли область визначення досліджуваної функції розбивається на прямокутні трикутники з криволінійною гіпотенузою та на криволінійні і трапеції. Сформульована і доведена теореми про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій. Визначений загальний вигляд похибки наближення побудованими сплайн-інтерлінантами. Визначені умови, при яких по-

будована розривна конструкція перетворюється в неперервний інтерлінаційний сплайн.

Список літератури: **1.** *Гаврилюк І.П., Макаров В.Л.* Методи обчислень: Підручник: У 2ч. – К.: Вища школа, 1995. **2.** *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с. **3.** *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976; **4.** *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1976; **5.** *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи) // «Теорія прийняття рішень»: праці V міжнародної школи-семінару, 27 вересня-1 жовтня 2010р., Ужгород. – 2010 – С.141-142. **6**. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврічний вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72. **7**. *Литвин О.Н., Першина Ю.И* Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. –С.96 – 105. **8**. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій кусково-лінійними інтерполяційними розривними сплайнами на трикутній сітці вузлів // Доповіді НАНУ. –2012. – №1. – С. 38 – 43. **9**. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины.–Киев, 2011, №5. – С.34 – 47. **10**. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. К.: Наукова думка, 2005.– 333с. **11.** *Першина Ю.І.* Наближення розривних функцій розривними сплайнами з використанням трикутників з однією криволінійною стороною // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець – Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2012. – Вип.7. – С. 213 – 221. **12.** *Литвин О.М.* Відновлення об'єктів, що описуються розривними функціями, з використанням криволінійних трапецій [Текст] / *О.М. Литвин, Ю.І. Першина* // Бионика интелекта. – Харьков: ХНУРЭ, 2012. – №1(78). – С. 37 – 44. **13.** *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Побудова інтерполяційних, апроксимаційних та інтерлінаційних сплайнів з використанням трапецевидних елементів // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 2 – С. 141 - 152.

Надійшла до редколегії 18.02.2013

УДК 519.6

Відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла за допомогою розривного інтерлінаційного сплайну, використовуючи криволінійні трикутники та трапеції / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, О. М. Прохорова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 76 – 89. Бібліогр.: 13 назв.

Строится и исследуется разрывный интерлинационный сплайн первого порядка, который использует прямоугольные элементы с одной криволинейной стороной и треугольные элементы с криволинейной гипотенузой. Сформулированы и доказаны теоремы об интерлинационных свойствах и о погрешности построенный разрывных конструкций.

Ключевые слова: разрывная функция, разрывная интерлинация, криволинейные элементы.

It is under construction and investigated discontinuous interlination spline of the first order which uses rectangular elements with one curvilinear party and triangular elements with a curvilinear hypotenuse. Theorems about interlinational properties and about an error constructed discontinuous designs are formulated and proved.

Key words: discontinuous function, breaking interlinatsiya, curvilinear elements.

УДК 519.7

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ СЛАБО ФОРМАЛІЗОВАНИХ ПРОЦЕСІВ З ЕФЕКТОМ ЗАПІЗНЕННЯ В n-ВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Розглядається проблема моделювання та прогнозування стаціонарних часових рядів, що описують слабо формалізовані процеси. Пропонується алгоритм параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі в n-вимірному фазовому просторі.

Ключові слова: фазовий простір, керування, ідентифікація, ефект запізнення.

Вступ. Проблема моделювання динамічних систем – одна з найважливіших і актуальніших в економіці та техніці. Більшість об'єктів, що зустрічаються в практичних дослідженнях, відносять до класу слабо формалізованих систем, в яких виникають і діють неформалізовані та невизначені фактори. Тому встановити всілякі зв'язки між елементами слабо формалізованої системи практично неможливо. Як наслідок, не вирішеною залишається проблема вибору фазових координат $\mathbf{x}$, які б однозначно і повністю визначали поведінку чи еволюцію даної системи. Однак економічні, технічні, як і багато інших слабо формалізованих систем, є керованими. Керування будь-якою динамічною системою може відбуватися на різних рівнях системної ієрархії в залежності від кінцевої мети і ступеня агрегації параметрів керування [1, 2]. Вектор керувань $\mathbf{u}$ подається на вхід динамічної системи і за його допомогою можна вирішувати проблему специфікації фазових координат та здійснювати керування їх рухом.

Особливістю багатьох фізико-технічних систем є визначеність рівнянь руху, які подаються системою нелінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t) \middle| \boldsymbol{\theta}_1\right), \ \mathbf{x}\left(t_*\right) = \mathbf{x}_*, \tag{1}$$

апріорна специфікація яких часто веде до ускладненої процедури ідентифікації невідомих параметрів $\boldsymbol{\theta}_1$. Класичні методи статистичної ідентифікації моделей у просторі станів описані в [3]. В огляді [4] розглядаються сучасні методи, покликані подолати труднощі чисельної реалізації нелінійних алгоритмів параметричної ідентифікації, характерних для класичних методів.

Часто у випадку слабо формалізованих динамічних систем задача побудови *дескриптивних моделей* може бути менш визначеною через відсутність сталого виду еволюції. Специфікацію моделей таких систем обирають в зручній для дослідження формі – лінійній, лінійно – квадратичній [5, 6], градієнтного типу [7, 8].

У даній роботі пропонується моделювати розв'язки задачі Коші (1), а

© О. М. Назаренко, 2013

конструювання закону керування здійснювати за допомогою регулюючого пристрою і таким чином переводити досліджуваний об'єкт із деякого початкового стану $\mathbf{x}_0$ в момент часу t_0 в кінцевий бажаний стан $\mathbf{x}_*$ в момент часу t_*. Регулятор повинен реалізувати найважливішу ідею теорії керування – *принцип оберненого зв'язку* [9], який вказує на те, щоб вектор керувань $\mathbf{u}$ в кожний момент часу був функцією фазових координат та їх похідних, тобто

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \,\middle|\, \boldsymbol{\theta}_2\right). \tag{2}$$

Тут припускається, що між векторами невідомих параметрів $\boldsymbol{\theta}_1$ в (1) і $\boldsymbol{\theta}_2$ в (2) існує взаємно-однозначний зв'язок. При практичному моделюванні динамічних систем часто доцільно вважати, що реакція керувань на зміну фазових координат відбувається не відразу, а з деяким запізненням τ. Тоді закон керування (2) необхідно задавати у вигляді

$$\mathbf{u}(t+\tau) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \,\middle|\, \boldsymbol{\theta}_2(\tau)\right). \tag{3}$$

У якості регулятора використовують допоміжну інформацію відносно величин, які не присутні в рівнянні руху, але є невід'ємною частиною даної динамічної системи [6]. Додатковими величинами системи повинні бути обрані такі її характеристики, що акумулюють якомога більше інформації про досліджувану систему в цілому і відносно яких є доступні статистичні дані. У цій роботі регулятор буде складатись з двох пристроїв, які у будь-який момент часу t формують сумарні значення фазових координат і керувань

$$x(t) = \sum_{m=1}^{n} x_m(t), \; u(t) = \sum_{m=1}^{n} u_m(t). \tag{4}$$

Тоді, якщо модельні траєкторії $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))'$ і $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))'$ налаштовані на високі імітаційні та прогнозні властивості, то, вочевидь, і сумарні траєкторії (4) повинні мати такі ж властивості.

Особливістю моделювання багатьох слабо формалізованих систем є те, що в рівнянні руху (1) невідомими є не лише коефіцієнти $\boldsymbol{\theta}_1$, а й розмірність n фазового простору. Крім того, не специфікованими залишаються компоненти фазового вектора $\mathbf{x}$ і керування $\mathbf{u}$. В [10] моделювання фазових траєкторій і керувань приводилось у тривимірному просторі $(n = 3)$. Дане дослідження стосується n-вимірного фазового простору і, як і в [10], здійснюється в рамках лінійної стаціонарної моделі.

Постановка задачі. Нехай в $N_1 > N$ цілочисельних точках проміжку $[t_0, t_1)$ з відрізка $[t_0, t_k]$ відома статистична інформація $\{x_t\}$ і $\{u_t\}$ про еволюцію показників x і u даної динамічної системи. Множини x і u необхідно розкласти на підмножини $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $u_1, u_2, \ldots, u_n$, для яких у вказа-

них N_1 точках відомі статистичні дані $\{x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{tn}\}$ і $\{u_{t1}, u_{t2}, ..., u_{tn}\}$, причому у всіх цих точках виконуються рівності

$$\sum_{m=1}^{n} x_{tm} = x_t \ , \ \sum_{m=1}^{n} u_{tm} = u_t \ .$$

Стан системи у будь-який момент неперервного часу $t \in [t_0, t_k]$ будемо характеризувати фазовим вектором $\mathbf{x}(t)$, а вхід системи – вектор-стовпцем керувань $\mathbf{u}(t)$ із n-вимірного простору E^n (значення n заздалегідь невідоме). Фазова траєкторія $\{\mathbf{x}(t)\}$ і траєкторія керувань $\{\mathbf{u}(t)\}$ вважаються неперервними вектор-функціями часу і задовольняють задачу Коші

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = P(\tau)\mathbf{x}(t) + Q(\tau)\mathbf{u}(t+\tau) \ , \ \mathbf{x}(t_*) = \mathbf{x}_* \ , \tag{5}$$

де $P(\tau)$ і $Q(\tau)$ – квадратні матриці (Q – невироджена матриця), які разом з граничним значенням $\mathbf{x}_*$ і величиною лага τ заздалегідь невідомі.

Метою даної роботи є прогнозування майбутніх станів системи, тому граничні значення диференціальних рівнянь (5) зручно задовольняти в момент часу, що слідує за періодом ідентифікації. Покладемо $t_* = t_1 = N+1$, тоді відрізок $[1, N]$ будемо називати періодом ідентифікації, а відрізок $[t_*, t_k]$ – періодом прогнозування. Статистичну інформацію в цілочисельних точках відрізка $[N+1-N_1, 0]$ будемо використовувати для визначення оптимального значення N. При ідентифікованих значеннях параметрів P, Q, $\mathbf{x}_*$ і τ розв'язок задачі Коші (5) на відрізку $[1, t_*]$ дозволяє перевіряти імітаційні властивості, а розв'язок задачі Коші (5) на відрізку $[t_*, t_k]$ дозволяє встановлювати прогнозні властивості лінійної моделі (5).

Зазначимо, що при моделюванні лінійних стаціонарних моделей з метою прогнозування довжина N періоду ідентифікації повинна бути достатньо великою, щоб на ньому стабілізувались взаємозв'язки між елементами системи. Стаціонарність моделі характеризується високою якістю апроксимації, прогнозування та робастністю [11]. Якщо виконані умови стаціонарності, то оцінену на періоді ідентифікації $[1, N]$ лінійну модель (5) можна переносити на період прогнозування $[t_*, t_k]$ за умови $t_k - t_* << N$ в силу інерційності динамічної системи [12].

Розв'язок задачі Коші (5) можна шукати за допомогою декомпозиції траєкторій руху фазових координат на складові [6]. Якщо ці траєкторії ідентифіковані за даними спостережень, то вектор керувань $\mathbf{u}$ може бути знайдений за допомогою оберненого зв'язку:

$$\mathbf{u}(t+\tau)=R(\tau)\mathbf{x}(t)+S(\tau)\dot{\mathbf{x}}(t),\ R=-Q^{-1}P,\ S=Q^{-1}. \qquad (6)$$

Основна проблема, яка тут виникає, полягає у знаходженні оптимальних значень розмірності n фазового простору і величини лага τ та специфікації компонент фазового вектора $\mathbf{x}$ і вектора керувань $\mathbf{u}$. Велику роль при вирішенні цієї проблеми відіграє регулятор, який повинен за допомогою балансових рівностей (4) забезпечити високі імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій $x(t)$ і $u(t)$.

Як відомо, в нелінійних динамічних системах можуть виникати незатухаючі коливання. Втрати енергії, визвані присутністю опорів, тут можуть автоматично компенсуватись притоком її із деякого джерела енергії, що входить до складу системи. Це має місце в так званих *автоколивальних системах* [9], в яких можливі строго періодичні стійкі коливання навколо рівноважного стану. У даній роботі буде показано, що незатухаючі стійкі коливання можна отримати і в рамках лінійної стаціонарної моделі (6). Метою нашого дослідження є налаштування фазових координат і керувань на періодичні коливання навколо відповідних лінійних трендів.

Метод розв'язання задачі. За аналогією з відомими методами аналізу часових рядів [12] будемо припускати, що траєкторія руху динамічної системи подається адитивною комбінацією її складових. Тенденцію розвитку будемо характеризувати лінійним трендом, а коливальний процес описувати лінійною комбінацією гармонік з деякими частотами. Як показують практичні дослідження макроекономічних систем [6, 10], перевірка статистичних тестів [11] вказує на те, що трендова та періодична складові корелюють між собою. Це означає, що траєкторії фазових координат можуть бути знайдені після оцінювання регресійної моделі

$$\mathbf{x}_t-\overline{\mathbf{x}}=\mathbf{b}\left(t-\overline{t}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\mathbf{c}_k\sin(\omega_k t+\varphi_k)+\mathbf{v}_t,\ t=\overline{1,N}, \qquad (7)$$

де ω_k – частота, φ_k – вектор фаз, $\mathbf{c}_k$ – вектор амплітуд k - ї гармоніки, $\mathbf{v}_t$ – вектор випадкових збурень.

В [6] показано, що вектор середніх значень залишків дорівнює нулю $(\overline{v}=0)$, якщо частоти коливань належать спектру

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k,\ k=1,2,\ldots. \qquad (8)$$

У випадку (8) вдається обчислити у явному вигляді наступні суми:

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\cos\omega_k t=0,\ \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\sin\omega_k t=0, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}t\cos\omega_k t=\frac{1}{2},\ \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}t\sin\omega_k t=-\frac{1}{2}ctg\frac{\omega_k}{2}.$$

Етап 1. Визначення періоду T коливань даної системи і встановлення частот із спектра (8), на які налаштовані гармонічні хвилі, можна здійснювати за допомогою першого пристрою регулятора, що обчислює суму значень фазових координат. Для цього розглянемо регресійну модель

$$x_t - \overline{x} = b\left(t - \overline{t}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \sin\left(\omega_k t + \varphi_k\right) + \nu_t \,,\ t = \overline{1, N} \,. \tag{10}$$

Модель (10) нелінійна за параметрами b, c_k, φ_k $(k = 1,\ 2,\ ...)$. Але використання рівностей (9) при мінімізації суми квадратів залишків

$$S = \sum_{t=1}^{N} \nu_t^2 = \sum_{t=1}^{N} \left(x_t - \overline{x} - b\left(t - \overline{t}\right) - \sum_k c_k \sin\left(\omega_k t + \varphi_k\right) \right)^2 \tag{11}$$

дозволяє розв'язати нелінійну систему алгебраїчних рівнянь, що виникає в результаті прирівняння нулю часткових похідних функції S за параметрами b, c_k, φ_k $\left(k = 1, 2, ...\right)$, і отримати наступні *МНК- оцінки*:

$$\hat{b} = \frac{\dfrac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \left\{ \left(x_t - \overline{x}\right) \left(t + \sum_k \left(ctg \dfrac{\omega_k}{2} \sin \omega_k t - \cos \omega_k t \right) \right) \right\}}{\dfrac{N^2 - 1}{6} - \sum_k 1 / \sin^2 \dfrac{\omega_k}{2}} \,, \tag{12}$$

$$tg\, \hat{\varphi}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t \cos \omega_k t}{\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t \sin \omega_k t} \,,\ \hat{c}_k = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t \sin\left(\omega_k t + \hat{\varphi}_k\right),\ \varepsilon_t = x_t - \overline{x} - \hat{b}\left(t - \overline{t}\right).$$

Оскільки у реальних динамічних системах присутня тенденція розвитку, то параметр $b \neq 0$ і, отже, можна припустити, що МНК- оцінка $\hat{b}$ є значущою. З (12) видно, що тренд корелює з гармоніками і, навпаки, гармонічні хвилі залежать від тренду, навколо якого вони коливаються. При встановленому тренді можна розглянути також регресійну модель коливань

$$\varepsilon_t = \sum_k c_k \sin\left(\omega_k t + \varphi_k\right) + \nu_t \,,\ t = \overline{1, N} \,. \tag{13}$$

У випадку спектра (8) гармоніки моделі (13) не корелюють між собою. За допомогою рівностей (9) переконуємось, що МНК-оцінки $\hat{c}_k$ і $\hat{\varphi}_k$ $\left(k = 1,\ 2,\ ...\right)$ моделі (13) збігаються з відповідними МНК- оцінками моделі (10) і обчислюється за формулами (12). Враховуючи цей факт, для аналізу гармонічних коливань можна замість моделі (10) досліджувати модель (13).

1. Оскільки гармоніки з різними частотами не корелюють між собою, то коваріаційна матриця гармонічних коливань моделі (13) є діагональною, причому діагональні елементи цієї матриці дорівнюють дисперсіям оцінок амп-

літуд $\sigma^2_{\hat{c}_k}$ [13]. Незсунені оцінки цих дисперсій дорівнюють:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{c}_k} = \frac{2}{N}\hat{\sigma}^2_{\nu}, \;\; \hat{\sigma}^2_{\nu} = \frac{1}{N-2n}\sum_{t=1}^{N}\hat{\nu}^2_t \;. \tag{14}$$

Тут, якщо оцінки $\hat{c}_k$, $\hat{\varphi}_k$ $(k = 1, 2, ...)$ приймають оптимальні значення (12), мінімальна сума квадратів відхилень дорівнює такому:

$$\min S = \sum_{t=1}^{N}\nu^2_t = \sum_{t=1}^{N}\varepsilon^2_t - \frac{N}{2}\sum_k \hat{c}^2_k \;. \tag{15}$$

2. Припустимо, що на кожному рівні $(t = 1, 2, ..., N)$ випадкові відхилення ν_t регресійної моделі (13) мають нормальний розподіл з нульовим математичним сподіванням і сталою дисперсією σ^2_{ν} :

$$\nu_t \sim N(0,\; \sigma^2_{\nu}),\;\; t = \overline{1, N}. \tag{16}$$

Перевірка цієї гіпотези на практиці здійснюється за допомогою спеціальних тестів (*Пірсона*, у випадку $N > 100$; *Фішера* при невеликих об'ємах вибірки) [13]. Можна показати, що за умови (16) МНК- оцінки $\hat{c}_k$ (12) будуть також розподілені за нормальним законом:

$$\hat{c}_k \sim N(c_k,\; \sigma^2_{\hat{c}_k}),\; k = 1, 2, ... \;. \tag{17}$$

У подібних ситуаціях для перевірки значущості МНК-оцінок $\hat{c}_k$ $(k = 1, 2, ...,)$ можна використовувати *критерій Ст'юдента*: k -а гармоніка вважається значущою, якщо виконується нерівність

$$\frac{|\hat{c}_k|}{\hat{\sigma}_{\hat{c}_k}} > t_{кр}\;,\;\; k = 1,\; 2,\; ...\,, \tag{18}$$

де $t_{кр}$ – критичне значення розподілу Ст'юдента, обчислене при рівні значущості α і $r = N - 2n$ ступенях вільності [13]. Якщо умова (18) не виконується, то k -у гармоніку необхідно вилучити з моделі (10).

3. Процес виділення значущих гармонічних хвиль, характерних для даної динамічної системи, необхідно проводити сумісно з визначенням періоду коливань T. Якщо частоти коливань належать спектру (8), то очевидно, $T = N$. Для встановлення оптимального значення N необхідно враховувати поведінку досліджуваної системи поза періодом ідентифікації $[1, N]$. Оскільки статистичні дані на періоді прогнозування $[N+1, t_k]$ нам невідомі, то можна використати відому статистичну інформацію з відрізка $[N+1-N_1, 0]$. Якщо N вибране таким, що модельна траєкторія коливань

$$\varepsilon(t) = \sum_k \hat{c}_k \sin(\omega_k t + \hat{\varphi}_k) \tag{19}$$

при $t \le 0$ змінюється в напрямку статистичних даних $\varepsilon_t (t = 0,\; -1, ...)$, то гі-

потеза $T = N$ підтверджується.

Нехай за допомогою екстраполяції назад, ми ідентифікували період коливань і, отже, встановили оптимальний період ідентифікації $[1, N]$. При цьому нами виділені n-1 значущих гармонік, що розповсюджуються у даній системі і, отже, визначена оптимальна розмірність n фазового простору.

Етап 2. Специфікація компонент $\mathbf{x}$ проводиться при заданому значенні n. При поділі множини x на підмножини $x_1, ..., x_n$ необхідно враховувати фізичну сутність цих підмножин та їх значущість у загальній масі. Якщо фазові координати вибрані, то припускаємо, що властиві їм гармонічні коливання налаштовуються на частоти (8), ідентифіковані нами на етапі 1.

Аналогічно (12) отримуємо наступні МНК-оцінки невідомих векторів:

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N}\{(\mathbf{x}_t - \overline{\mathbf{x}})(t + \sum_k (ctg(\frac{\omega_k}{2}\sin\omega_k t - \cos\omega_k t))\}}{\frac{N^2-1}{6} - \sum_k 1/\sin^2\frac{\omega_k}{2}}, \quad (20)$$

$$tg\hat{\varphi}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t \cos\omega_k t}{\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t \sin\omega_k t}, \ \hat{\mathbf{c}}_k = \frac{2}{N}\sum_{t=1}^{N}\varepsilon_t \sin(\omega_k t + \hat{\varphi}_k), \ \varepsilon_t = \mathbf{x}_t - \overline{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{b}}(t - \overline{t}).$$

Вочевидь, кожна підмножина множини x має свою специфіку функціонування. Тому кількості значущих гармонік у розкладі різних фазових координат можуть різнитись. Якщо фазова координата швидко реагує на якісні зміни у даній динамічній системі, то цій координаті відповідатиме максимальна кількість, тобто n-1 гармонік. Мінімальна кількість гармонік буде у розкладі тих фазових координат, які слабко реагують на зміни в інших підмножинах системи. Якщо ідентифіковані тренди фазових координат, то перевірку значущості гармонік, що розповсюджуються у кожній підмножині даної системи, можна проводити в рамках регресійної моделі коливань

$$\varepsilon_t = \sum_k \mathbf{c}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) + \nu_t. \quad (21)$$

МНК- оцінки цієї моделі також обчислюються за формулами (20) і, отже, збігаються з відповідними МНК- оцінками моделі (7). *Рафінування* (відкидання незначущих МНК- оцінок амплітуд гармонік) моделі (21), як і у випадку моделі (13), здійснюється за допомогою критерію Ст'юдента (18).

Рафіновану модель коливань фазових координат навколо відповідних трендів

$$\varepsilon_t = \sum_k \mathbf{c}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (22)$$

екстраполюємо назад на проміжок $t \le 0$ і перевіряємо відповідність статис-

тичним точкам ε_t $(t = 0, -1, ...)$ з відрізка $[N + 1 - N_1,\ 0]$. Якщо перевірка нас задовольняє, то можуть бути прийнятними і модельні траєкторії руху фазових координат

$$\mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \overline{t}) + \sum_k \hat{\mathbf{c}}_k \sin(\omega_k t + \hat{\varphi}_k)\,. \tag{23}$$

Апроксимаційні властивості отриманих модельних кривих будемо описувати за допомогою *коефіцієнтів детермінації* R^2. Коефіцієнти детермінації лінійних трендів фазових координат обчислюються за формулою

$$\mathbf{R}^2_{\text{тр}} = \frac{[(N^2 - 1) \cdot N / 12]\hat{\mathbf{b}}^2}{\sum_{t=1}^{N} (\mathbf{x}_t - \overline{\mathbf{x}})^2}\,. \tag{24}$$

Врахування періодичної складової у модельних траєкторіях руху (23) дає

$$\mathbf{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{N} \nu_t^2}{\sum_{t=1}^{N} (\mathbf{x}_t - \overline{\mathbf{x}})^2}\,,\ \nu_t^2 = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^2 - \frac{N}{2} \sum_k \mathbf{c}_k^2\,. \tag{25}$$

Для моделі коливань (22) отримуємо

$$\mathbf{R}^2_{кол} = \frac{\frac{N}{2} \sum_k \hat{\mathbf{c}}_k^2}{\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^2}\,, \tag{26}$$

а частка дисперсії k-ї гармоніки у загальній дисперсії коливань фазових координат становить

$$\mathbf{R}_k^2 = \frac{\frac{N}{2} \sum_k \hat{\mathbf{c}}_k^2}{\sum_{t=1}^{N} \varepsilon_t^2} = \frac{\hat{\mathbf{c}}_k^2}{\sum_k \hat{\mathbf{c}}_k^2} \mathbf{R}^2_{кол}\,. \tag{27}$$

Якщо нас не влаштовують імітаційні властивості модельних кривих (22) і (23), то необхідно провести іншу специфікацію фазових координат і переоцінювання відповідних регресійних моделей. Результатом рафінування регресійної моделі (21) повинна бути також якісна апроксимація статистичних даних $\{x_t\}$ і $\{\varepsilon_t\}$ сумарними траєкторіями $\{x(t)\}$ і $\{\varepsilon(t)\}$, які моделює перший пристрій регулятора згідно першого балансового співвідношення (4).

Етап 3. Специфікація вектора керувань $\mathbf{u}$ здійснюється при заданому фазовому векторі $\mathbf{x}$. Враховуючи фізичну сутність задачі, кожній компоненті

x_m ставимо у відповідність керування u_m ($m = 1, 2, ..., n$). Розкладання траєкторій руху керувань $\mathbf{u}(t)$ на трендову і періодичну складові буде проведене після ідентифікації регресійної моделі, аналогічної (7):

$$\mathbf{u}_t - \overline{\mathbf{u}} = \beta(t - \overline{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \sin(\omega_k t + \psi_k) + \mathbf{w}_t, \quad t = \overline{1, N}. \tag{28}$$

МНК-оцінки моделі (28) обчислюються згідно формул (20), що встановлюють відповідні МНК-оцінки регресійної моделі (7). Виділення значущих гармонік і аналіз траєкторій керувань $\mathbf{u}(t)$ відбувається за схемою, описаною на попередньому етапі при ідентифікації траєкторій фазових координат. У результаті отримуємо наступні модельні траєкторії керувань:

$$\mathbf{u}(t) = \overline{\mathbf{u}} + \hat{\beta}(t - \overline{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \hat{\gamma}_k \sin(\omega_k t + \hat{\psi}_k). \tag{29}$$

Адекватність кривих (29) статистичним даним перевіряємо за допомогою коефіцієнтів детермінації, а також другого пристрою регулятора, який моделює сумарну траєкторію $\{u(t)\}$ згідно другої балансової рівності (4).

Етап 4. Ідентифікація оберненого зв'язку (6) проводиться, якщо побудовані модельні траєкторії фазових траєкторій (23) і керувань (29). Запишемо (23) у вигляді

$$\mathbf{x}(t) = \overline{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{b}}(t - \overline{t}) + \sum_k (\mathbf{a}_k \cos \omega_k t + \mathbf{b}_k \sin \omega_k t), \tag{30}$$

$\mathbf{a}_k = \hat{\mathbf{c}}_k \sin \hat{\varphi}_k$, $\mathbf{b}_k = \hat{\mathbf{c}}_k \cos \hat{\varphi}_k$,

а (29) у вигляді

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{v}(\tau) + \hat{\beta}(t - \overline{t}) + \sum_k (\alpha_k(\tau) \cos \omega_k t + \beta_k(\tau) \sin \omega_k t), \tag{31}$$

$\mathbf{v}(\tau) = \overline{\mathbf{u}} + \tau \hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\alpha_k(\tau) = \hat{\gamma}_k \sin(\omega_k \tau + \hat{\psi}_k)$, $\beta_k(\tau) = \hat{\gamma}_k \cos(\omega_k \tau + \hat{\psi}_k)$.

Позначимо

$\mathbf{g}(t) = (1,\ t - \overline{t}, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, ..., \cos \omega_{n-1} t, \sin \omega_{n-1} t)'$,

$\dot{\mathbf{g}}(t) = (0,\ 1, -\omega_1 \sin \omega_1 t, \omega_1 \cos \omega_1 t, ..., -\omega_{n-1} \sin \omega_{n-1} t, \omega_{n-1} \cos \omega_{n-1} t)'$

і введемо у розгляд матриці

$$L = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \hat{b}_1 & a_{11} & b_{11} & . & . & a_{1n-1} & b_{1n-1} \\ \overline{x}_2 & \hat{b}_2 & a_{21} & b_{21} & . & . & a_{2n-1} & b_{2n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ \overline{x}_n & \hat{b}_n & a_{n1} & b_{n1} & . & . & a_{nn-1} & b_{nn-1} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} v_1 & \hat{\beta}_1 & \alpha_{11} & \beta_{11} & . & . & \alpha_{1n-1} & \beta_{1n-1} \\ v_2 & \hat{\beta}_2 & \alpha_{21} & \beta_{21} & . & . & \alpha_{2n-1} & \beta_{2n-1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ v_n & \hat{\beta}_n & \alpha_{n1} & \beta_{n1} & . & . & \alpha_{nn-1} & \beta_{nn-1} \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -\omega_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & \omega_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тепер (6) можна записати так:

$$M(\tau)\mathbf{g}(t) = R(\tau)L\mathbf{g}(t) + S(\tau)LJ\mathbf{g}(t),$$

звідки знаходимо

$$M(\tau) = [R(\tau) \quad S(\tau)]\begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix}.$$

У якості матриць $R(\tau)$ і $S(\tau)$, що фігурують в рівнянні оберненого зв'язку (6), можна обрати

$$[R(\tau) \quad S(\tau)] = M(\tau)\begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix}'\left(\begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L \\ LJ \end{bmatrix}'\right)^{-1}. \qquad (32)$$

Очевидно, модельні траєкторії фазових координат повинні бути ідентифіковані так, щоб існувала обернена матриця, яка фігурує в (32). Матриця, яка обертається в (32), є симетричною, причому всі її власні числа дійсні і невід'ємні. У подібних ситуаціях показником нечутливості отриманих результатів до незначних змін вхідної інформації є індекс обумовленості $CI = \sqrt{\lambda_{\max} / \lambda_{\min}}$ вказаної матриці ($\lambda_{\max}$ і $\lambda_{\min}$ – найбільше і найменше власні числа відповідно). При практичних дослідженнях вважається, що обернена матриця існує, якщо виконується наступний критерій: $CI < 20$ [11].

Практична реалізація алгоритму. Як приклад слабо формалізованої

динамічної системи розглянемо макроекономіку Франції, яку будемо поділяти на n секторів. У якості координат фазового вектора $\mathbf{x}$ виберемо валові випуски секторів, а керувань $\mathbf{u}$ – кінцеві споживчі витрати на продукцію відповідної галузі. Чисельний експеримент з використанням екстраполяції назад за статистичними даними 1957 – 1959 рр. дозволив встановити оптимальне значення об'єму вибірки $N = 50$, при цьому 1960 – 2009 рр. – це період ідентифікації, 2010 – 2011 рр. – період прогнозування. Аналіз залежності розмірності n фазового простору від рівня значущості α показує, що при $\alpha = 0,05$ економіку Франції необхідно поділяти на 17 секторів, а при $\alpha = 0,01$ – на 10 секторів. У випадку $\alpha = 0,01$ будемо моделювати наступну десятисекторну економіку Франції [14]: 1 – сільське господарство, 2 – промисловість, 3 – будівництво, 4 – транспорт, 5 – комунікації, 6 – фінанси, 7 – нерухомість, 8 – наука, 9 – сфера послуг (освіта, медицина), 10 – інше.

Розкладання часових рядів $\{x_t\}$ і $\{u_t\}$ на період ідентифікації ($t = 1,2,...,50$) на трендову і періодичну складові, підтверджує наявність у дев'яти значущих гармонік ($k = 1,2,...,9$). Параметрична ідентифікація регресивних моделей випусків (7) і невиробничого споживання (28) дала наступні значення $\mathbf{R}^2_{\text{тр}}$ трендів, навколо яких відбуваються коливання в секторах (табл.. 1).

Таблиця 1 – Коефіцієнти детермінації трендів

	№ сектора										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∑
Вип.	0,71	0,76	0,78	0,82	0,88	0,85	0,86	0,83	0,89	0,86	0,83
Нев. сп.	0,74	0,75	0,73	0,82	0,83	0,76	0,84	0,77	0,77	0,82	0,81

Гармонічні хвилі в різних секторах проявляють себе по різному. В табл. 2 наведені значення коефіцієнтів детермінації R^2_{mk}, які характеризують вклад k-ї гармоніки в дисперсію коливань m-го сектора (верхні значення відповідають коливанням випусків, нижні значення – коливанням невиробничого споживання). Аналіз таблиці показує, що сумарний вклад гармонік в дисперсію коливань становить від 91% (4-й сектор) до 97% (5-й сектор). Тому регресійні моделі коливань мають якісні апроксимаційні властивості, і можна очікувати значущого вкладу в дисперсії випусків і невиробничого споживання.

Значення коефіцієнтів детермінації модельних траєкторій випусків (верхні значення) і невиробничого споживання (нижні значення) приводяться в табл. 3. Дані, що наведені в табл. 1 і табл. 3, показують, що сумарній вклад

гармонік в дисперсію випусків секторів становить від 10% (9-й сектор) до 28% (1-й сектор), а в дисперсію невиробничого споживання секторів – від 15% (7-й сектор) до 25% (3-й сектор).

Аналіз отриманих результатів свідчить про високу якість апроксимації модельних кривих випусків і невиробничого споживання секторів та відповідних моделей коливань в цих секторах, тому можна очікувати і якісних прогнозних властивостей.

Таблиця 2 – Вклад гармонік в дисперсію коливань секторів

№ сек.	№ гармоніки									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	∑
1	0,885	–	0,048	–	–	–	–	–	–	0,934
	0,669	0,069	0,091	0,038	–	–	0,035	–	–	0,933
2	0,548	0,175	0,122	–	–	0,035	0,032	–	0,019	0,945
	0,396	0,334	0,159	–	–	0,015	–	0,004	0,019	0,923
3	0,723	–	0,135	0,039	–	0,035	0,009	0,009	0,008	0,957
	0,693	0,063	0,097	0,035	0,012	0,012	–	0,009	0,005	0,921
4	0,416	0,169	0,158	0,062	–	0,062	0,019	–	0,019	0,905
	0,696	0,145	0,035	–	–	0,014	0,014	–	–	0,914
5	0,843	0,078	0,022	0,006	0,009	0,003	0,002	0,001	0,001	0,967
	0,321	0,269	0,128	0,138	0,027	0,036	0,036	–	0,018	0,979
6	0,654	0,134	0,078	0,014	–	0,027	–	0,006	0,012	0,925
	0,756	0,145	0,032	0,014	–	–	–	0,002	–	0,958
7	0,754	0,063	0,089	0,022	–	0,016	–	0,009	0,012	0,965
	0,882	0,019	0,005	0,004	–	–	–	–	–	0,911
8	0,614	0,096	0,133	0,026	0,016	0,031	0,012	0,013	0,015	0,955
	0,561	0,078	0,095	0,071	0,045	0,032	0,032	0,024	–	0,942
9	0,878	–	0,044	0,009	–	–	–	–	–	0,931
	0,842	–	0,056	0,014	0,005	–	–	–	–	0,916
10	0,860	0,016	0,013	–	0,012	–	0,002	0,001	–	0,912
	0,886	0,021	–	–	0,006	–	0,002	–	–	0,921

Таблиця 3 – Коефіцієнти детермінації модельних траєкторій

№ сектора										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∑
0,99	0,98	0,98	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99
0,98	0,99	0,98	0,99	0,99	0,98	0,99	0,98	0,98	0,99	0,99

На рис. 1 приведені графіки модельних траєкторій випуску $x(t)$ і невиробничого споживання $u(t)$ макроекономічної системи Франції, які виробляє регулятор згідно балансових рівностей (4), а також відповідних траєкторій

коливань $\varepsilon_x(t)$ і $\varepsilon_u(t)$. Тут точками зображена статистична інформація, а суцільною лінією – траєкторії руху (всі дані обезрозмірені діленням розрахункових значень на відповідні значення у початковому році періоду ідентифікації). Порівняння прогнозних значень на періоді прогнозування з реальними даними ($t = 51, 52$) свідчить про високоточні прогнозні властивості отриманих модельних траєкторій.

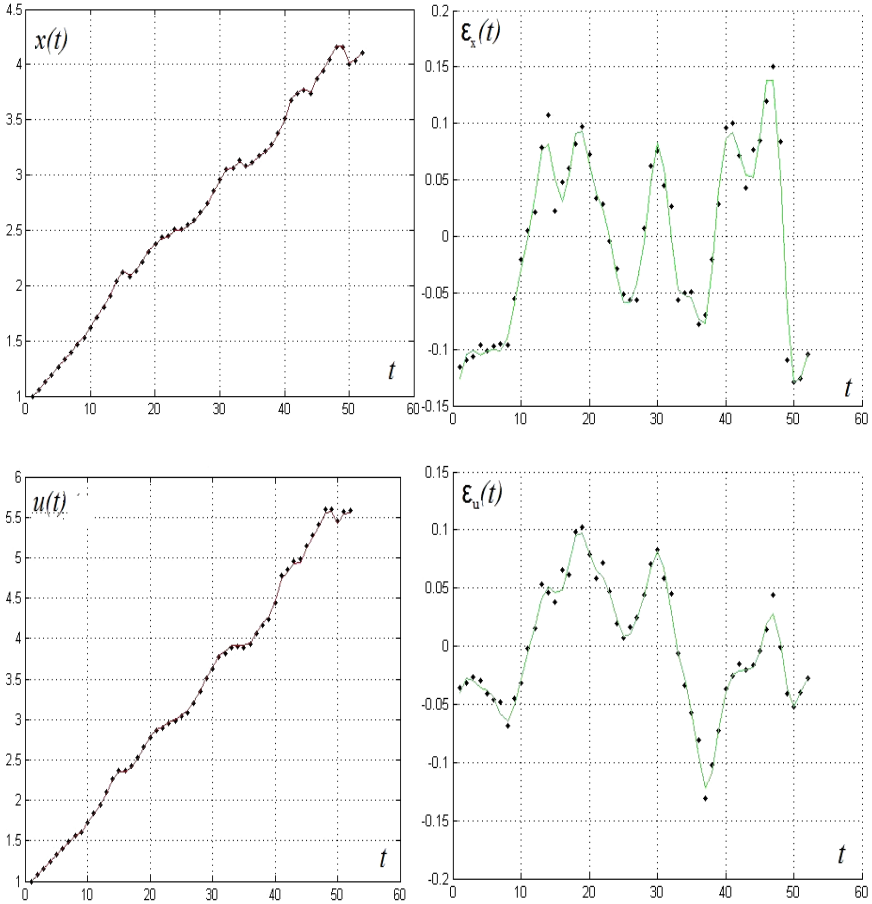


Рис. 1 – Модельні траєкторії випуску і невиробничого споживання та відповідних коливань.

Якщо отримані якісні імітаційні та прогнозні властивості модельних траєкторій фазових координат і керувань, то можна моделювати обернений

зв'язок (6). Величину лага τ розглядаємо як параметр керування. Перебором значень τ і, обчислюючи на кожному кроці індекс обумовленості CI матриці, що обертається в (32), встановлюємо, що оптимальне значення τ дорівнює 1/6. У випадку $\tau = 1/6$ значення елементів матриць R і Q (32) стають нечутливими до незначних змін вхідної інформації [10], $CI = 17,55$. Це означає, що ефект запізнення невиробничого споживання Франції відносно випуску продукції становить в середньому 2 місяці по кожному сектору. Матриці R і Q при цьому наступні елементи:

$$R = \begin{bmatrix} 0,072 & -0,062 & -0,091 & 0,135 & -0,356 & -0,015 & 0,134 & 0,147 & -0,174 & 0,186 \\ 0,345 & -0,007 & 0,028 & -0,011 & -0,065 & -0,034 & 0,198 & 0,011 & -0,155 & 0,058 \\ 0,112 & -0,014 & 0,009 & 0,013 & -0,005 & -0,092 & 0,175 & 0,034 & -0,065 & 0,028 \\ 0,058 & 0,005 & 0,036 & -0,067 & -0,037 & -0,055 & 0,119 & 0,054 & -0,039 & 0,030 \\ -0,167 & 0,067 & 0,139 & -0,107 & 0,523 & 0,169 & -0,084 & -0,352 & 0,395 & -0,256 \\ -0,339 & 0,153 & 0,299 & -0,355 & 1,166 & -0,022 & -0,123 & -0,417 & 0,678 & -0,517 \\ 0,619 & -0,108 & -0,220 & 0,072 & -0,906 & -0,159 & 0,885 & 0,614 & -0,663 & 0,546 \\ -0,040 & -0,049 & -0,094 & 0,149 & -0,308 & 0,054 & -0,112 & 0,093 & -0,062 & 0,141 \\ 0,232 & -0,094 & -0,237 & 0,245 & -0,667 & -0,006 & 0,099 & 0,344 & -0,283 & 0,354 \\ -0,264 & 0,117 & 0,258 & -0,313 & 0,791 & 0,054 & 0,045 & -0,380 & 0,518 & -0,364 \end{bmatrix}$$

і

$$Q = \begin{bmatrix} -0,027 & -0,123 & 0,237 & 0,029 & -0,439 & -0,088 & 0,81 & 0,546 & -0,642 & -0,155 \\ 0,690 & 0,002 & -0,035 & -0,013 & -0,211 & -0,114 & 0,008 & 0,152 & -0,183 & 0,013 \\ 1,113 & -0,058 & -0,020 & 0,154 & -0,214 & -0,022 & -0,102 & 0,077 & -0,030 & 0,108 \\ -0,063 & 0,014 & -0,035 & -0,005 & -0,159 & -0,207 & -0,200 & 0,186 & -0,188 & -0,049 \\ 1,792 & 0,010 & 0,435 & 0,213 & 1,030 & 0,617 & 0,408 & -1,174 & 1,723 & 0,425 \\ 0,579 & -0,032 & 0,373 & 0,471 & 1,027 & 0,777 & 0,069 & -1,274 & 0,837 & 0,433 \\ -0,787 & 0,048 & -0,705 & -0,395 & -1,058 & -1,683 & -0,766 & 2,285 & -1,935 & -0,598 \\ -0,474 & -0,030 & -0,063 & -0,029 & -0,028 & -0,030 & -0,030 & 0,224 & -0,520 & 0,011 \\ 0,393 & -0,037 & -0,375 & -0,164 & -1,142 & -0,797 & -0,315 & 1,122 & 0,003 & -0,342 \\ 0,672 & 0,004 & 0,388 & 0,256 & 1,117 & 0,633 & 0,284 & -1,160 & 1,080 & 0,331 \end{bmatrix}$$

Висновки. У даній роботі запропонований алгоритм параметричної ідентифікації лінійної стаціонарної моделі слабо формалізованої динамічної системи з ефектом запізнення, який дозволяє отримати незатухаючі стійкі коливання у випадку макроекономічних систем. На прикладі макроекономіки Франції показано, що фазові координати і керування можна налаштувати на нечутливі до незначних змін вхідної інформації періодичні коливання навколо відповідних прямолінійних трендів. Отримані траєкторії фазових координат і відповідних керувань мають високоякісні імітаційні та прогнозні властивості.

Список літератури: **1.** Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем\ Под ред. Цыпкина Я. – М. УРСС, 2004. – 400с. **2.** Nazarenko O. M. Filchenko D. V. Parametric Identification of State-Space Dynamic Systems: A Time-Domain Perspective // Int. J. of Innovating Computing, Information and Control. – 2008. – Vol. 4, No. 7. – P. 1553 – 1566. **3.** Bates D. M. Watts D. B. Nonlinear Regression Analysis and Its Applications. – N. Y.: Wiley, 1988. – 365 p. **4.** Ramsay J. O. Parameter Estimation for Differential Equations: A Generalized Smoothing Approach / J. O. Ramsay, G. Hooker, D. Campbell // J. of the Royal Stat. Society. Series B. – 2007. – Part 5, No. 69. – P. 741 – 796. **5.** Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.: Юнити, 2005.-295с. **6.** Назаренко О. М. Побудова ті ідентифікація лінійно-квадратичних моделей слабо формалізованих динамічних систем // Вісник Харк. нац. ун-ту., 2008. – № 833 Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", вип. 10. – С. 185-192. **7.** Альбрехт Э. Г. Методика построения и идентификации математических моделей макроэкономических процессов// Электронный журнал "Исследовано в России". – 2002. – Т.5. – С.54-86. **8.** Назаренко А. М., Васильев А. А., Моделирование макроэкономических систем эконометрико-игровым методом // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2008. – Вип. 4. – С.158-168. **9.** Бабаков И. М. Теория колебаний. Изд. 4-е, исправл. – М.: Наука, 2004. – 591с. **10.** Назаренко А. М., Фильченко Д. В. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процесов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника. – Киев, 2009. – Вып. 158.– С.42-61. **11.** Greene W. H. Econometric Analysis / W. H. Greene. – 5th ed. – N.Y.: Pearson Educ. Int., 2003. – 1056 p. **12.** Айвазян С. А., Мхитарян В. С. Прикладная статистика и основы экономометрики. – М.: Юнити, 1998. – 1056с. **13.** Назаренко О. М. Основи економетрики, Вид. 2-е, перероб.: Підручник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 392с. **14**. INSEE [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 519.7

Ідентифікація та прогнозування стаціонарних слабо формалізованих процесів з ефектом запізнення в *n* -вимірному просторі / О. М. Назаренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 90 – 104. Бібліогр.: 14 назв.

Рассматривается проблема моделирования и прогнозирования стационарных временных рядов, которые описывают слабо формализированные процессы. Предлагается алгоритм параметрической идентификации линейной стационарной модели в *n*-мерном фазовом пространстве.

Ключевые слова: фазовое пространство, управление, идентификация, эффект запаздывания.

The paper is devoted to the problem of modeling and prediction of stationary time series describing the weakly formalized processes. An algorithm of parametric identification of linear stationary model in *n*-dimensional phase space has been proposed.

Key words: phase space, control, identification, effect of delay.

УДК 17.27

Т.А. НЕМЧЕНКО, асист., НТУ «ХПІ»

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ГОЛОМОРФНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ $Aw' = w$

Запропоновано елементарне доведення теореми І.В. Тихонова про єдиність голоморфного розв'язку рівняння $Aw' = w$. Наведений приклад, який показує, що умова І.В. Тихонова не є необхідною для єдиності голоморфного розв'язку рівняння, але є істотною. Вивчені деякі загальні властивості голоморфних розв'язків рівняння $Aw' = w$.

Ключові слова: голоморфний розв'язок, лінійний оператор, квазінільпотентний оператор, оборотний оператор, степеневий ряд, банахів простір, резольвента, спектральний радіус, експоненціальний тип.

Вступ. Нехай A – лінійний оператор у банаховому просторі. Задача Коші на півосі

$$\left\{\dot{x}(t) = Ax(t),\ t > 0,\ x(0) = x_0\right.$$

відіграє важливу роль і докладно вивчалась у теорії диференціальних рівнянь, у теорії операторів і в математичній фізиці (див., наприклад, [1] і [2]).

У роботі *А. Г. Руткаса* була досліджена задача Коші на півосі для лінійного рівняння з операторним коефіцієнтом при похідній

$$A\dot{x}(t) + Bx(t) = f(t), \tag{1}$$

(див. [3]).

У 2004 році *І.В. Тихонов* знайшов просту достатню умову єдиності розв'язку рівняння (1) і деяких більш загальних рівнянь (див. [4, теорема 5]). Доведення в роботі І. В. Тихонова базуються на достатньо тонкій *теоремі Поліа* про цілі функції мінімального типу.

Ми вивчимо наступний окремий випадок рівняння (1):

$$Aw' = w, \tag{2}$$

де A – обмежений оператор у банаховому просторі й це рівняння розглядається в комплексній області. Під розв'язком рівняння будемо розуміти вектор-функцію комплексної змінної $w = w(z)$, яка є голоморфною в околі нуля й задовольняє в цьому околі рівнянню (2).

Випадок оборотного оператора. Нехай E – банахів простір і $A : E \to E$ – обмежений лінійний оператор. Будемо розглядати диференціальне рівняння $Aw' = w$. При цьому під *розв'язком рівняння* ми розуміємо E-значну вектор-функцію комплексної змінної $w = w(z)$, яка задовольняє умовам, що вказані вище.

© Т. А. Немченко, 2013

Нехай тепер оператор A – *оборотний* і $w_0 \in E$. Відзначимо, що оборотність оператора A еквівалентна тому, що $0 \notin \sigma(A)$. Розглянемо задачу Коші

$$\{Aw' = w,\ w(0) = w_0\ . \tag{3}$$

Аналітичні властивості розв'язку цієї задачі описує наступна теорема.

Теорема 1.1. *Для будь-якого вектору* $w_0 \in E$ *задача Коші* (3) *має єдиний розв'язок, причому цей розв'язок є цілою функцією експоненціального типу* $\rho_{w_0}(A^{-1})$, *де* $\rho_{w_0}(A^{-1})$ *– локальний спектральний радіус оператора* A^{-1}, *що відповідає вектору* w_0.

Доведення. Розглянемо оператор $B = A^{-1}$. Тоді рівняння $Aw' = w$ можна записати у вигляді $w' = Bw$. Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді суми степеневого ряду

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \text{ де } w_n \in E.$$

Відзначимо, що початкова умова виконана, тому що $w(0) = w_0$. Тоді

$$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{n+1} z^n \text{ і } Bw(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B w_n z^n.$$

Підставляючи ці рівності в рівняння $w' = Bw$, одержуємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) w_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} B w_n z^n.$$

Звідси $(n+1) w_{n+1} = B w_n$, тобто $w_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} B w_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отже, $w_n = \dfrac{1}{n!} B^n w_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ і розв'язок задачі Коші (3) має вигляд

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n w_0 z^n, \text{ тобто } w(z) = e^{zB} w_0,$$

причому отриманий ряд є збіжним для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ і $w(z)$ – ціла функція. Дійсно,

$$\left\| \frac{1}{n!} B^n w_0 z^n \right\| = \frac{1}{n!} \left| z^n \right| \cdot \left\| B^n w_0 \right\| \le \frac{1}{n!} \left| z^n \right| \cdot \left\| B^n \right\| \cdot \left\| w_0 \right\| \le \frac{1}{n!} \left| z^n \right| \cdot \left\| B \right\|^n \cdot \left\| w_0 \right\|$$

і ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| z^n \right| \cdot \left\| B \right\|^n \cdot \left\| w_0 \right\|$ збігається. Тому ряд $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n w_0 z^n$ є абсолютно збіжним для будь-якого $z \in \mathbb{C}$.

Тоді одержуємо:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n!\left\|\frac{B^n w_0}{n!}\right\|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left\|B^n w_0\right\|}=\rho_{w_0}\left(B\right)\ \text{(див. [5, с. 95])},$$

тобто $w(z)$ – ціла функція експоненціального типу $\rho_{w_0}(A^{-1})$.

Цікаво відзначити наступний факт, який ми наводимо разом з його доведенням.

Теорема 1.2. *Нехай* $A:E\to E$ *– довільний лінійний обмежений оператор. Тоді рівняння* $Aw'=w$ *не має ненульових цілих розв'язків нульового експоненціального типу.*

Доведення. Покладемо $w_0=w(0)$. Нехай $w_0\neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_n z^n$, де $w_n\in E$. Тоді

$$w'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nw_n z^{n-1}\ \text{ і }\ Aw'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}Anw_n z^{n-1}.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння $Aw'=w$, одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}Anw_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}w_n z^n=\sum_{n=1}^{\infty}w_{n-1}z^{n-1}.$$

Звідси

$$Aw_1=w_0,\ 2Aw_2=w_1,\ \ldots,\ nAw_n=w_{n-1},\ \text{отже},\ Aw_1=w_0,$$
$$2A^2w_2=w_0,\ldots,n!A^n w_n=w_0.$$

Розглянемо тотожність $n!\left\|A^n w_n\right\|=\left\|w_0\right\|$. Оскільки $\left\|A^n w_n\right\|\le\left\|A^n\right\|\cdot\left\|w_n\right\|$, то одержуємо нерівність $\left\|w_0\right\|\le n!\left\|A^n\right\|\cdot\left\|w_n\right\|$. Візьмемо корінь n-того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$\sqrt[n]{\left\|w_0\right\|}\le\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}\cdot\sqrt[n]{n!\left\|w_n\right\|}. \tag{4}$$

У свою чергу $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|w_0\right\|}=1$, а з іншого боку послідовність $\left\{\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}\right\}$ обмежена (див. [6, теорема 10.13]). Виходячи з нерівності (4), одержуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|w_n\right\|}\neq 0$. Отже, $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_n z^n$, де $w_n\in E$, не є цілою функцією нульового експоненціального типу (див. [5, с. 95]).

Тепер розглянемо випадок, коли $w_0=0$. Нехай $w_0=w_1=\ldots=w_{m-1}=0$, $w_m\neq 0, m\ge 1$. Підставимо розклад $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_n z^n=\sum\limits_{n=m}^{\infty}w_n z^n$ в рівняння $Aw'=w$ та одержимо:

$$A\left(\sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n\right)' = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n, \text{ тобто } \sum_{n=m}^{\infty}\left(Anw_n - w_{n-1}\right)z^{n-1} = 0.$$

Звідси

$$mAw_m = w_{m-1} = 0,\ nAw_n = w_{n-1} = 0, \text{ тоді } \frac{1}{\mathrm{m}!}n!A^{n-m}w_n = w_m.$$

Далі ми будемо вважати, що $n > m.$ Розглянемо тотожність

$$\frac{1}{\mathrm{m}!}n!\left\|A^{n-m}w_n\right\| = \left\|w_m\right\| \text{ або } \frac{1}{\mathrm{m}!}(n-m)!\left\|A^{n-m}w_n\right\| = \frac{\left\|w_m\right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}.$$

Оскільки $\frac{1}{\mathrm{m}!}(n-m)!\left\|A^{n-m}w_n\right\| \le (n-m)!\left\|A^{n-m}\right\|\cdot\left\|w_n\right\|,$ то приходимо до нерівності:

$$\frac{\left\|w_m\right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)} \le (n-m)!\left\|A^{n-m}\right\|\cdot\left\|w_n\right\|.$$

Візьмемо корінь $(n-m)$-того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$\sqrt[n-m]{\frac{\left\|w_m\right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}} \le \sqrt[n-m]{\left\|A^{n-m}\right\|}\sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|w_n\right\|}. \qquad (5)$$

З одного боку,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-m]{\frac{\left\|w_m\right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}} = 1,$$

а з іншого послідовність $\left\{\sqrt[n-m]{\left\|A^{n-m}\right\|}\right\}$ – обмежена (див. [6, теорема 10.13]). Враховуючи (5), одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|w_n\right\|} \ne 0.$$

Оскільки

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m\sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m},$$

то ряди

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і } w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однакові характеристики. Згідно із цим одержуємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|w_n\right\|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|w_{n+m}\right\|} \ne 0.$$

Отже, функція $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ не є цілою функцією нульового

експоненціального типу (див. [5, с.95]).

З теорем 1.1 і 1.2 одержуємо наступний

Наслідок 1.3. *Нехай* B *– обмежений оборотний оператор і* $w_0 \in E$, $w_0 \neq 0$. *Тоді* $\rho_{w_0}(B) > 0$.

Випадок квазінільпотентного оператора. У цьому пункті ми вивчимо рівняння $Aw' = w$ у випадку, що є діаметрально протилежним розглянутому. А саме, коли оператор A є *квазінільпотентним*, тобто спектр $\sigma(A) = \{0\}$. При цьому виходить результат, протилежний твердженню теореми 1.1 (див. зауваження 2.4 і теорему 2.5).

Теорема 2.1. *Нехай* $A : E \to E$ *– обмежений квазінільпотентний оператор. Тоді рівняння* $Aw' = w$ *не має ненульових цілих розв'язків експоненціального типу.*

Доведення. Покладемо $w_0 = w(0)$. Розглянемо випадок, коли $w_0 \neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$, де $w_n \in E$. Підставимо ці вирази в рівняння $Aw' = w$, одержимо:

$$A\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n.$$

Виконавши формальне диференціювання й зібравши відповідні коефіцієнти при z^n, одержуємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(Anw_n - w_{n-1}\right) z^{n-1} = 0.$$

Звідси $Aw_1 = w_0, 2Aw_2 = w_1, \ldots, nAw_n = w_{n-1}$, тому

$$Aw_1 = w_0, 2A^2 w_2 = w_0, \ldots, n!A^n w_n = w_0.$$

Розглянемо тотожність $n!\left\|A^n w_n\right\| = \left\|w_0\right\|$. Оскільки $\left\|A^n w_n\right\| \leq \left\|A^n\right\| \cdot \left\|w_n\right\|$, то одержуємо нерівність $\left\|w_0\right\| \leq n!\left\|A^n\right\| \cdot \left\|w_n\right\|$. Візьмемо корінь n-того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$\sqrt[n]{\left\|w_0\right\|} \leq \sqrt[n]{\left\|A^n\right\|} \cdot \sqrt[n]{n!\left\|w_n\right\|}. \tag{6}$$

У свою чергу $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|w_0\right\|} = 1$. Відзначимо, що $\sigma(A) = \{0\}$ тоді й тільки тоді, якщо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|A^n\right\|} = 0$, оскільки $\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}$ за *формулою Гельфанда* (див. [6, теорема 10.13]).

Нехай тепер $w_0 = 0$ і $w_0 = w_1 = \ldots = w_{m-1} = 0, w_m \neq 0, m \geq 1$. Підставимо ряд $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ в рівняння $Aw' = w$, одержимо:

$$A\left(\sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n\right)' = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n, \text{ тобто } \sum_{n=m}^{\infty} \left(Anw_n - w_{n-1}\right) z^{n-1} = 0.$$

Звідси $mAw_m = w_{m-1} = 0, (m+1)Aw_{m+1} = w_m, \ldots, nAw_n = w_{n-1}$, тоді $\frac{1}{\mathrm{m}!} n! A^{n-m} w_n = w_m$. Надалі будемо вважати, що $n > m$.

Розглянемо тотожність

$$\frac{1}{\mathrm{m}!} n! \left\| A^{n-m} w_n \right\| = \left\| w_m \right\| \text{ або } \frac{1}{\mathrm{m}!} (n-m)! \left\| A^{n-m} w_n \right\| = \frac{\left\| w_m \right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}.$$

Оскільки $\frac{1}{\mathrm{m}!}(n-m)!\left\|A^{n-m} w_n\right\| \leq (n-m)!\left\|A^{n-m}\right\| \cdot \left\|w_n\right\|$, то маємо нерівність:

$$\frac{\left\| w_m \right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)} \leq (n-m)! \left\| A^{n-m} \right\| \cdot \left\| w_n \right\|.$$

Візьмемо корінь $(n-m)$-того ступеня від лівої і правої частини цієї нерівності:

$$\sqrt[n-m]{\frac{\left\| w_m \right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}} \leq \sqrt[n-m]{\left\| A^{n-m} \right\|} \sqrt[n-m]{(n-m)! \left\| w_n \right\|}. \qquad (7)$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\frac{\left\| w_m \right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}} = 1$ і $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\left\| A^{n-m} \right\|} = 0$, то згідно (7) одержуємо, що $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{(n-m)! \left\| w_n \right\|} = +\infty$.

Враховуємо рівність $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m}$, тоді ряди

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і } w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однакові характеристики. Значить,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{(n-m)! \left\| w_n \right\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \left\| w_{n+m} \right\|} = +\infty.$$

Отже, функція $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ і в цьому випадку не є цілою функцією експоненціального типу (див. [5, с. 95]).

Наслідок 2.2. *Нехай E – скінченновимірний простір і спектр*

$\sigma(A)=\{0\}$. *Тоді рівняння* $Aw'=w$ *не має ненульових голоморфних розв'язків.*

Доведення. Оскільки простір E – скінченновимірний, то оператор A є нільпотентним, тобто $A^k=0$ для деякого $k\in\mathbb{N}$.

Нехай $w(z)=\sum_{m=0}^{\infty} w_m z^m$, де $w_m\in E$ – розв'язок рівняння $Aw'=w$. Для $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ покладемо $n=m+k$. Тоді $A^{n-m}=A^k=0$ і з нерівності (7) ми одержуємо, що $w_m=0$.

Відзначимо, що в нескінченновимірному просторі рівняння $Aw'=w$, де $\sigma(A)=\{0\}$, може мати ненульовий розв'язок.

Приклад 2.3. Нехай H – гільбертів простір з ортонормованим базисом $\{e_k : \mathrm{k}=0,1,2,\ldots\}$. Задамо оператор A на базисних векторах наступними рівностями:

$$Ae_0=0,\ \ Ae_k=\frac{1}{k}e_{k-1},\ \ k\geq 1.$$

Неважко перевірити, що A продовжується до обмеженого оператора в просторі H,

$$A^n e_k=\begin{cases}\dfrac{(k-n)!}{\mathrm{k}!}e_{k-n}, & k\geq n,\\ 0, & 0\leq k<n,\end{cases}\ \text{ і }\ \left\|A^n\right\|=\frac{1}{n!}.$$

З формули Гельфанда

$$\rho(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0,\ \text{тобто}\ \sigma(A)=\{0\}.$$

Покажемо тепер, що функція $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n, |z|<1$ є розв'язком рівняння $Aw'=w$ при початковій умові $w(0)=e_0$:

$$Aw'(z)=A\sum_{n=0}^{\infty} ne_n z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} nAe_n z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n}e_{n-1}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty} e_{n-1}z^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n=w(z).$$

Зауваження 2.4. На відміну від випадку оборотного оператора, розв'язок $w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e_n z^n$ із прикладу 2.3 не є єдиним.

Дійсно, покажемо, що для оператора із прикладу 2.3 задача Коші $\{Aw'=w,\ w(0)=0$ має ненульовий розв'язок. Покладемо $w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e_{n-1}z^n$.

Тоді

$$w(0)=0 \text{ і } Aw'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}nAe_{n-1}z^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}e_{n-2}z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e_{n-1}z^{n}= =w(z),$$

що й треба було показати.

Відзначимо, що в прикладі 2.3 розв'язок $w(z)$ мав скінченний радіус збіжності, причому оператор A мав властивість $\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}=1$.

Наступна загальна теорема пояснює явище, що виникає в цьому прикладі.

Теорема 2.5. *Нехай A – такий лінійний обмежений оператор, що послідовність $\left\{\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}\right\}$ обмежена. Тоді рівняння $Aw'=w$ не має ненульових цілих розв'язків.*

Доведення. Оскільки послідовність $\left\{\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}\right\}$ обмежена і $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}\left(n\to\infty\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}=0$, тобто $\sigma(A)=\{0\}$. Покладемо $w(0)=w_0$.

Розглянемо випадок, коли $w_0\neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_nz^n$, де $w_n\in E$. Проводячи міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1, одержимо нерівність

$$\sqrt[n]{\left\|w_0\right\|}\le\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}\cdot\sqrt[n]{\left\|w_n\right\|}. \tag{8}$$

З одного боку, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|w_0\right\|}=1$, а з іншого послідовність $\left\{\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}\right\}$ обмежена за умовою теореми. Тоді згідно з нерівністю (8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left\|w_n\right\|}\neq 0$. Отже, $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}w_nz^n$ не є цілою функцією.

У випадку, коли $w_0=0$, також проводимо міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1. Таким чином, одержуємо нерівність:

$$\sqrt[n-m]{\frac{\left\|w_m\right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}}\le\sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|A^{n-m}\right\|}\sqrt[n-m]{\left\|w_n\right\|}. \tag{9}$$

У свою чергу,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n-m]{\frac{\left\|w_m\right\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}}=1 \text{ і } \left\{\sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|A^{n-m}\right\|}\right\}$$

обмежена за умовою теореми. Беручи до уваги (9), одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} \neq 0.$$

Оскільки

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m},$$ то ряди $w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ і

$$w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однаковий радіус збіжності. Згідно із цим одержуємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|w_{n+m}\|} \neq 0.$$

Отже, $w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ не є цілою функцією.

Зауваження 2.6. Умова обмеженості послідовності $\left\{\sqrt[n]{n!\|A^n\|}\right\}$ еквівалентна тому твердженню, що *резольвента Фредгольма* оператора A є цілою функцією експоненціального типу.

Випадок, коли $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} = 0$**.** У попередньому пункті було показано, що в нескінченновимірному просторі рівняння $Aw' = w$, де A – квазінільпотентний оператор, може мати ненульовий розв'язок (див. приклад 2.3). Наступна теорема містить достатню умову того, що рівняння $Aw' = w$ має тільки нульовий голоморфний розв'язок.

Теорема 3.1. *Нехай* A *– такий обмежений лінійний оператор, що* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} = 0$. *Тоді рівняння* $Aw' = w$ *має тільки тривіальний голоморфний розв'язок.*

Доведення. Покладемо $w(0) = w_0$. Розглянемо спочатку випадок, коли $w_0 \neq 0$. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді степеневого ряду

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \text{ де } w_n \in E.$$

Проводячи міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1, одержимо нерівність

$$\sqrt[n]{\|w_0\|} \leq \sqrt[n]{n!\|A^n\|} \cdot \sqrt[n]{\|w_n\|}. \tag{10}$$

З одного боку, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|w_0\|} = 1$, а з іншого $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} = 0$ за умовою теореми. Тоді згідно з нерівністю (10) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|w_n\|} = \infty$.

Отже, за *формулою Коші-Адамара* радіус збіжності ряду $w = w(z)$ дорівнює $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|w_n\|}} = 0.$ Звідси ми одержуємо, що ряд $w(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n,$ де $w_n \in E,$ є збіжним лише при $z = 0.$ Таким чином, у припущенні $w_0 \neq 0$ ми одержуємо, що рівняння $Aw' = w$ не має розв'язків.

У випадку, коли $w_0 = 0,$ також проводимо міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 2.1. Таким чином, одержуємо нерівність:

$$\sqrt[n-m]{\frac{\|w_m\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}} \leq \sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|A^{n-m}\right\|}\sqrt[n-m]{\|w_n\|}. \qquad (11)$$

У свою чергу,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\frac{\|w_m\|}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}} = 1,$$

а з іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{(n-m)!\left\|A^{n-m}\right\|} = 0$$

за умовою теореми. Беручи до уваги (11), одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} = \infty.$$

Оскільки

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n = z^m \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m},$$

то ряди

$$w(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^n \text{ і } w_m(z) = \sum_{n=m}^{\infty} w_n z^{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$$

мають однаковий радіус збіжності. Згідно з формулою Коші-Адамара радіус збіжності ряду $w_m(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_{n+m} z^n$ дорівнює

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|w_{n+m}\|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-m]{\|w_n\|}} = 0,$$

оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n-m]{\|w_n\|} = \infty.$

Звідси ми одержуємо, що ряд $w(z) = \sum\limits_{n=m}^{\infty} w_n z^n$ є збіжним лише при $z = 0.$ Отже, рівняння $Aw' = w$ при $w_0 = 0$ має лише нульовий розв'язок.

Зауваження 3.2. Умова $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}=0$ еквівалентна тому, що резольвента Фредгольма оператора A є цілою функцією нульового експоненціального типу.

Наведемо приклад оператора, що задовольняє умові теореми 3.1.

Приклад 3.3. Нехай $E=L^2(0,1)$. Для функції $\xi\in L^2(0,1)$ покладемо

$$\left(B\xi\right)\left(x\right)=\int\limits_0^x\xi\left(y\right)dy,$$

де B – оператор інтегрування. Розглянемо оператор $A=B^2$. Покажемо, що оператор A обмежений і задовольняє умові теореми 3.1.

Лема 3.4. Має місце оцінка $\left\|B^n\right\|\le\dfrac{1}{n!},\ \forall n\ge 1.$

Доведення. Неважко перевірити, що

$$\left(B^n\xi\right)\left(x\right)=\frac{1}{\left(n-1\right)!}\int\limits_0^x\left(x-y\right)^{n-1}\xi\left(y\right)dy.$$

Зокрема, $\left(A\xi\right)\left(x\right)=\int\limits_0^x\left(x-y\right)\xi\left(y\right)dy.$

Отже, маємо

$$\left\|B^n\xi\right\|^2=\int\limits_0^1\left|\left(B^n\xi\right)\left(x\right)\right|^2dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\left(n-1\right)!^2}\left|\int\limits_0^x\left(x-y\right)^{n-1}\xi\left(y\right)dy\right|^2dx.$$

За *нерівністю Коші-Буняковського*:

$$\left|\int\limits_0^x\left(x-y\right)^{n-1}\xi\left(y\right)dy\right|\le\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)^{1/2}\left\|\xi\right\|.$$

Тоді

$$\left\|B^n\xi\right\|^2\le\int\limits_0^1\frac{1}{\left(n-1\right)!^2}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\left\|\xi\right\|^2dx=\frac{\left\|\xi\right\|^2}{2n\left(2n-1\right)\left(n-1\right)!^2}\le\frac{\left\|\xi\right\|^2}{\mathrm{n}!^2}.$$

Виходить, $\left\|B^n\xi\right\|\le\dfrac{\left\|\xi\right\|}{\mathrm{n}!}$, тобто $\left\|B^n\right\|\le\dfrac{1}{\mathrm{n}!}$. Зокрема, $\left\|A\right\|\le\dfrac{1}{2!}$.

Покажемо тепер, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}=0.$

Згідно з лемою 3.4 $\left\|A^n\right\|=\left\|B^{2n}\right\|\le\dfrac{1}{\left(2\mathrm{n}\right)!}$. Тому $\sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|}\le\sqrt[n]{\dfrac{n!}{\left(2n\right)!}}$.

За *формулою Стерлінга*

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \ \ (n \to \infty); \ \ (2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} = \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} n^{2n} \sqrt{4\pi n} \ \ (n \to \infty).$$

Отже,

$$\frac{n!}{(2n)!} \sim \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n 2^{2n}\sqrt{2}} \ \ (n \to \infty) \text{ і } \sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \sim \frac{1}{\frac{n}{e} 2^{2\,2n}\sqrt{2}} \sim \frac{c}{n}, \quad c \neq 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким чином, $\sqrt[n]{\frac{n!}{(2n)!}} \sim \frac{c}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} = 0$, що й треба було показати.

Цікаво відзначити, що умова $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} = 0$ не є необхідною для того, щоб рівняння $Aw' = w$ мало тільки нульовий голоморфний розв'язок.

Приклад 3.5. Нехай $E = C[0,1]$ і A – оператор інтегрування, тобто $(A\xi)(x) = \int\limits_0^x \xi(y)\,dy$. Тоді A – обмежений лінійний оператор у просторі E і

$$\left(A^n\xi\right)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-y)^{n-1}\,\xi(y)\,dy, \ \ \xi \in C[0,1].$$

Отже,

$$\left|\left(A^n\xi\right)(x)\right| \le \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-y)^{n-1}\left|\xi(y)\right|dy \le \frac{1}{(n-1)!}\max_{y\in[0,1]}\left|\xi(y)\right|\int\limits_0^x (x-y)^{n-1}\,dy = \frac{\|\xi\|\,x^n}{n!}.$$

Звідси $\left\|A^n\xi\right\| \le \frac{\|\xi\|}{\mathrm{n}!}$, тобто $\left\|A^n\right\| \le \frac{1}{\mathrm{n}!}$.

З іншого боку, якщо $\xi_0(x) = 1$, то

$$\|\xi_0\| = 1, \ \left(A^n\xi_0\right)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-y)^{n-1}\,dy = \frac{x^n}{n!}$$

і $\left\|A^n\xi_0\right\| = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|\left(A^n\xi_0\right)(x)\right| = \frac{1}{n!}$. Тому $\left\|A^n\right\| \ge \frac{1}{n!}$.

Таким чином, ми одержуємо, що $\left\|A^n\right\| = \frac{1}{n!}$, тобто оператор A не задовольняє умові $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\left\|A^n\right\|} = 0$.

Покажемо тепер, що рівняння $Aw' = w$ має тільки нульовий голоморфний розв'язок. Будемо шукати розв'язок $w(z)$ у вигляді $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{n-1}$. Тоді

$$Aw'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nAw_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) Aw_{n+1} z^n.$$

Тому $(n+1) Aw_{n+1} = w_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

тобто

$$w_0(x) = \int_0^x w_1(y)\,dy, \;\; w_1(x) = 2\int_0^x w_2(y)\,dy,$$

$$w_2(x) = 3\int_0^x w_3(y)\,dy, \ldots, \;\; w_n(x) = (n+1)\int_0^x w_{n+1}(y)\,dy, \;\; \mathrm{x} \in [0,1], \;\; n \ge 0.$$

Звідси ми одержуємо, що

$$w_n(0) = 0 \;\text{ і }\; w_n'(x) = (n+1) w_{n+1}(x), \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Отже, всі функції $w_n(x)$ нескінченно диференційовані і $w_n^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Покажемо, що всі ці функції тотожно дорівнюють нулю на $[0,1]$. Для цього відзначимо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ є збіжним у деякому околі нуля. Тому існують числа $z_0 \ne 0$ і $M > 0$ такі, що $\left\| w_n z_0^n \right\| \le M$, тобто

$$\max_{x \in [0,1]} \left| w_n(x) \right| \le \frac{M}{|z_0|^n}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Відмітимо, що $w_0^{(n)}(x) = n!\, w_n(x)$, $x \in [0, 1]$.

Таким чином, ми одержуємо, що

$$\max_{x \in [0,1]} \left| w_0^{(n)}(x) \right| \le M \frac{n!}{|z_0|^n}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

тобто для функції $w_0(x)$ виконана достатня умова дійсної аналітичності на $[0, 1]$.

Оскільки $w_0^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то функція $w_0(x)$ дорівнює нулю в деякому правосторонньому околі точки 0. Розглянемо тепер множину

$$D = \{ x \in [0,1] : w_0(t) = 0, t \in [0, x] \}.$$

Використовуючи дійсну аналітичність функції $w_0(x)$, неважко переві-

рити, що $D=[0,1]$, $w_0(x)=0, x\in[0,1]$. Звідси одержуємо, що $w_n(x)=0$, $x\in[0,1]$, $n=0,1,2,\ldots$, тобто $w(z)=0$.

Висновки. Основним результатом цієї роботи є елементарне доведення теореми І.В. Тихонова про єдиність голоморфного розв'язку рівняння (2) (див. теорему 3.1). Крім того, наведений приклад, який показує, що умова І.В. Тихонова не є необхідною для єдиності голоморфного розв'язку цього рівняння, але є істотною (див. приклади 2.3, 3.3 і зауваження 2.4). У випадках оборотного та квазінільпотентного операторів вивчені деякі загальні властивості голоморфних розв'язків рівняння (2) (див. теореми 1.2, 2.1, 2.5).

Список літератури: **1.** *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1977, – Т. 1. 357 с. **2.** *Хилле Э, Филлипс Р.*Функциональный анализ и полугруппы. – М.:Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с. **3.** *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$. // Дифференциальные уравнения, 1975. – Т. 11, – № 11, – С. 1996 – 2010. **4.** *Тихонов И. В.* Абстрактные дифференциальные нуль-уравнения. Функциональный анализ и его приложения, 2004, т.38, вып. 2, с. 65 – 70. **5.** *Далецкий Ю. А., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с. **6.** *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.:Мир, – 1975. – 443 с.

Надійшла до редколегії 24.05.2013

УДК 17.27

Деякі властивості голоморфних розв'язків рівняння $Aw'=w$ **/ Т. А. Немченко** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 105 – 118. Бібліогр.: 6 назв.

Предложено элементарное доказательство теоремы И.В. Тихонова о единственности голоморфного решения уравнения $Aw'=w$. Приведен пример, показывающий, что условие И.В. Тихонова не является необходимым для единственности голоморфного решения уравнения, но является существенным. Изучены некоторые общие свойства голоморфных решений уравнения $Aw'=w$.

Ключевые слова: голоморфное решение, линейный оператор, квазинильпотентный оператор, обратимый оператор, степенной ряд, банахово пространство, резольвента, спектральный радиус, экспоненциальный тип.

Proposed elementary proof of the theorem I.V. Tikhonov of the uniqueness of holomorphic solutions of the equation $Aw'=w$. In addition, an example to show that the condition I.V. Tikhonov is not necessary for the uniqueness of holomorphic solutions of the equation, but it is essential. In this work the study of some general properties of holomorphic solutions of the equation $Aw'=w$.

Key words: holomorphic solution, the linear operator, quasinilpotent operator, invertible operator, power series, Banach space, resolvent, spectral radius, the exponential type.

УДК 621.923

Ф.В. НОВИКОВ, д-р техн. наук, проф., ХНЭУ, Харьков;
И.В. ГЕРШИКОВ, директор ЗАО «Азовский машиностроительный завод», Бердянск

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРЫ ШЛИФОВАНИЯ

Предложено упрощенное решение уравнения теплопроводности применительно к расчету температуры шлифования. Показано, что данное решение позволяет получить температуры, незначительно отличающиеся от значений, полученных на основе классического решения (расхождение в пределах 11%). Теоретически установлено, что основными путями уменьшения температуры шлифования являются снижение условного напряжения резания за счет повышения режущей способности круга и снижения интенсивности трения в зоне шлифования, а также применение многопроходного шлифования.

Ключевые слова: шлифовальный круг, обрабатываемая деталь, адиабатический стержень, температура шлифования, скорость детали.

Введение и постановка задачи. Повышение качества обработки деталей машин является важнейшим условием создания конкурентоспособной машиностроительной продукции. Поэтому актуальной проблемой для технологии машиностроения является снижение тепловой напряженности процесса шлифования, как одного из основных методов финишной обработки, ответственных за формирование параметров качества обрабатываемых поверхностей. Несмотря на большое количество работ в этом направлении [1 – 3], проблема бездефектной обработки при шлифовании в полной мере не решена: на обрабатываемых поверхностях образуются прижоги, микротрещины и другие температурные дефекты, снижающие качество обработки. Это требует научно обоснованного выбора оптимальных режимов шлифования, характеристик шлифовальных кругов и других условий обработки, обеспечивающих снижение температуры шлифования. Иными словами, требуется изыскание новых технологических возможностей снижения температуры шлифования. В связи с этим, в работе решается задача аналитического определения температуры шлифования и обоснования наиболее перспективных направлений ее уменьшения.

Цель работы – разработка теоретического подхода к определению температуры шлифования и условий ее уменьшения для обеспечения бездефектной обработки деталей машин.

Математическая модель исследуемого процесса. Для решения поставленной задачи рассмотрим расчетную схему процесса плоского шлифо-

©Ф. В. Новиков, И. В. Гершиков, 2013

вания, в которой снимаемый припуск представлен пакетом элементарных адиабатических стержней, которые в процессе обработки перерезаются шлифовальным кругом (рис. 1 [4]). Температура шлифования, исходя из такого представления процесса шлифования, определяется температурой, возникающей в момент выхода шлифовального круга из контакта с адиабатическим стержнем, т.е. в точке А. Время нагрева адиабатического стержня определяется временем его контакта с кругом. Следовательно, тепловая модель процесса шлифования может быть представлена так. На торец адиабатического стержня (в точке A) в течение времени τ действует тепловой поток плотностью q_0. В результате теплопроводности материала адиабатического стержня теплота распространится за это время на некоторую глубину, которую также как и температуру в точке A адиабатического стержня необходимо определить.

В работе [5] приведено аналитическое решение данной задачи (распределения температуры θ вдоль полубесконечного адиабатического стержня), рассматривая уравнение теплопроводности в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}; \tag{1}$$

$$\theta = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot a^2 \cdot \tau}} - \frac{q_0}{\lambda} \cdot x \cdot \left[1 - erf\left(\frac{x}{2 \cdot a \cdot \sqrt{\tau}} \right) \right], \tag{2}$$

где $a^2 = \lambda / c \cdot \rho$ − коэффициент температуропроводности обрабатываемого материала, м^2/с; c − удельная теплоемкость обрабатываемого материала, Дж/(кг·К); λ − коэффициент теплопроводности обрабатываемого материала, Вт/м·К; ρ − плотность материала, кг/м^3; τ − время обработки, с; x − координата.

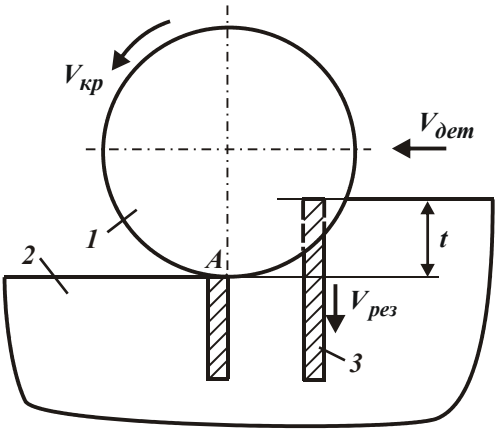


Рис. 1 – Расчетная схема параметров плоского шлифования: 1 – шлифовальный круг; 2 – обрабатываемая деталь; 3 – адиабатический стержень.

Недостатком данного решения является то, что на его основе нельзя установить конечное значение глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали Δx (теоретически она равняется беско-

нечности). В связи с этим, получим упрощенное решение, рассматривая уравнение (1) в виде:

$$\theta = a^2 \cdot \tau \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} . \tag{3}$$

Такое упрощение возможно, поскольку при выводе дифференциального уравнения (1) первоначально было получено уравнение (3), а затем, принимая $\tau \to 0$ получено уравнение (1).

Решение дифференциального уравнения (3) общеизвестно:

$$\theta = C_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\alpha \cdot x} , \tag{4}$$

где $\alpha = 1/(a \cdot \sqrt{\tau})$.

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий:

$$\begin{cases} \theta\left(x = \Delta x\right) = 0; \\ q\left(x = 0\right) = q_0. \end{cases} \tag{5}$$

Подчиняя зависимость (4) граничным условиям (5), с учетом равенства $q = -\lambda \cdot d\theta / dx$ получены выражения для определения постоянных интегрирования C_1 , C_2 и, соответственно, температуры шлифования:

$$C_1 = -\frac{q_0}{\lambda \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{\left(1 + e^{2\alpha \cdot \Delta x}\right)}; \; C_2 = \frac{q_0}{\lambda \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{\left(1 + e^{-2\alpha \cdot \Delta x}\right)};$$

$$\theta = \frac{q_0}{\lambda \cdot \alpha} \cdot \left[\frac{e^{-\alpha \cdot x}}{\left(1 + e^{-2\alpha \cdot \Delta x}\right)} - \frac{e^{\alpha \cdot x}}{\left(1 + e^{2\alpha \cdot \Delta x}\right)} \right]. \tag{6}$$

Неизвестную величину Δx определим, подчиняя уравнение (6) граничному условию $q\left(x = \Delta x\right) = 0$. В результате получено следующее уравнение

$$\frac{1}{e^{\alpha \cdot \Delta x} \cdot \left(1 + e^{-2\alpha \cdot \Delta x}\right)} = 0 . \tag{7}$$

Очевидно, решением (7) является $\Delta x = \infty$. Следовательно, как и в решении (2), в данном случае нельзя определить конечное значение глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали Δx . С учетом условия $\Delta x \to \infty$ зависимость (6) окончательно выразится так:

$$\theta = a \cdot \sqrt{\tau} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{a \cdot \sqrt{\tau}}} . \tag{8}$$

Графически зависимости (2) и (8), преобразованные с учетом безразмерной величины $z = x/(2 \cdot a \cdot \sqrt{\tau})$ к виду

$$\theta = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\tau} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z^2} - z \cdot \left(1 - erfz\right) \right]; \quad (9)$$

$$\theta = a \cdot \sqrt{\tau} \cdot \frac{q_0}{\lambda} \cdot e^{-2z}, \quad (10)$$

показаны на рис. 2 (при условии $a \cdot \sqrt{\tau} \cdot q_0 / \lambda = 1$). Как видно, максимальные значения температуры шлифования $\theta_{\max}$, рассчитанные по зависимостям (9) и (10) при условии $z = 0$ и соответственно $x = 0$, отличаются незначительно (в пределах 11%). Это указывает на то, что с достаточной для практики точностью расчеты $\theta_{\max}$ можно производить как по зависимости (2), так и по зависимости (8), которая при условии $x = 0$ выражается следующей формулой:

$$\theta_{\max} = a \cdot \sqrt{\tau} \cdot \frac{q_0}{\lambda}. \quad (11)$$

Анализ результатов моделирования. Из зависимости (11) вытекает, что основными путями уменьшения максимальной температуры шлифования $\theta_{\max}$ является уменьшение параметров q_0 и τ. Очевидно, плотность теплового потока q_0 в большей степени влияет на $\theta_{\max}$, чем время контакта круга с обрабатываемой деталью τ. Поэтому уменьшить $\theta_{\max}$ можно, прежде всего, за счет уменьшения плотности теплового потока q_0, которая зависит от параметров режима шлифования. Если рассматривать параметры q_0 и τ невзаимосвязанными, что имеет место, например, при шлифовании кругами с прерывистой рабочей поверхностью, то, уменьшая $\tau \to 0$, можно добиться существенного снижения максимальной температуры шлифования $\theta_{\max}$. Это подтверждается экспериментальными данными, приведенными в работе [1], согласно которым применение прерывистого шлифования позволяет до 2-х раз уменьшить температуру шлифования и, тем самым, повысить качество обработки без снижения производительности.

Рассмотрим случай шлифования, когда параметры q_0 и τ взаимосвязаны условиями режима резания. С учетом известных соотношений [6]: $q_0 = \sigma \cdot V_{рез}$ и $\tau = t / V_{рез}$ зависимость (11) представим в виде:

$$\theta_{\max} = \frac{a \cdot \sigma}{\lambda} \cdot \sqrt{t \cdot V_{рез}}, \quad (12)$$

где σ – условное напряжение резания, Н/м^2 (энергоемкость обработки, Дж/м^3); $V_{рез}$ – скорость перерезания адиабатического стержня (рис. 1), м/с; t – глубина шлифования, м.

Согласно зависимости (12), уменьшить $\theta_{\max}$ можно уменьшением параметров σ, $V_{рез}$ и t. Поскольку с уменьшением $V_{рез}$ и t уменьшается производительность обработки (что неэффективно), то основным путем уменьшения $\theta_{\max}$ является снижение условного напряжения резания σ за счет повышения режущей способности круга и снижения интенсивности трения в зоне шлифования.

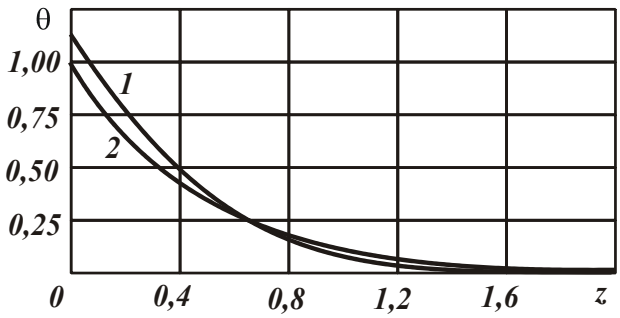


Рис. 2 – Зависимость θ от z : 1 – расчет по зависимости (9); 2 – расчет по зависимости (10).

В работе [6] установлено соотношение: $V_{рез} = V_{дет} \cdot \sqrt{t / D_{кр}}$, где $V_{дет}$ – скорость детали, м/с; $D_{кр}$ – диаметр круга, м. Тогда с учетом удельной производительности обработки $Q_{уд} = t \cdot V_{дет}$ зависимость (12) выразится так:

$$\theta_{\max} = \frac{a \cdot \sigma}{\lambda} \cdot \sqrt{Q_{уд} \cdot \sqrt{t / D_{кр}}} \ . \qquad (13)$$

Из зависимости (13) следует, что уменьшить температуру $\theta_{\max}$ при обеспечении заданной удельной производительности обработки $Q_{уд}$ можно уменьшением глубины шлифования и соответственно увеличением скорости детали, т.е. применением многопроходного шлифования.

Выводы. Предложено упрощенное решение уравнения теплопроводности применительно к расчету температуры шлифования. Показано, что данное решение позволяет получить значения температуры, незначительно отличающиеся от значений, полученных на основе классического решения (расхождение в пределах 11%). Это открывает новые возможности расчета и анализа по упрощенным зависимостям температуры шлифования, а также определения условий ее уменьшения.

Теоретически установлено, что основными путями уменьшения температуры шлифования являются снижение условного напряжения резания за счет повышения режущей способности круга и снижения интенсивности тре-

ния в зоне шлифования, а также применение многопроходного шлифования.

Показано, что основным недостатком полученного упрощенного решения, также как и классического решения, является невозможность определения конечной глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали. Это предполагает необходимость дальнейшего поиска новых решений в этом направлении.

Список литературы: **1.** *Якимов А.В.* Абразивно-алмазная обработка фасонных поверхностей – М.: Машиностроение, 1984. – 212 с. **2.** *Евсеев Д.Г.* Формирование свойств поверхностных слоев при абразивной обработке – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. –127 с. **3.** *Резников А.Н.* Теплофизика процессов механической обработки материалов – М.: Машиностроение, 1981. – 279 с. **4**. Теоретические основы резания и шлифования материалов: учеб. пособие / *А.В. Якимов, Ф.В. Новиков, Г.В. Новиков* и др. – Одесса: ОГПУ, 1999. – 450 с. **5.** *Чупров И.Ф.* Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа: Учебн. пособие / *И.Ф. Чупров, Е.А. Канева, А.А. Мордвинов*. – Ухта: УГТУ, 2004. – 128 с. **6.** *Новиков Ф.В.* Повышение эффективности технологии финишной обработки деталей пар трения поршневых насосов / *Ф.В. Новиков, С.М. Яценко* // Труды 13-й Междунар. научн.-техн. конф. Физические и компьютерные технологии. – Х.: ХНПК “ФЭД”, 2007. − С. 8-20.

Поступила в редколлегию 26.05.2013

УДК 621.923

Теоретический анализ температуры шлифования / Ф. В. Новиков, И. В. Гершиков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 119 – 124. Бібліогр.: 6 назв.

Запропоновано спрощене рішення рівняння теплопровідності стосовно до розрахунку температури шліфування. Показано, що дане рішення дозволяє отримати температури, які незначно відрізняються від значень, отриманих на основі класичного рішення (розбіжність у межах 11%). Теоретично встановлено, що основними шляхами зменшення температури шліфування є зниження умовної напруги різання за рахунок підвищення ріжучої здатності круга й зниження інтенсивності тертя в зоні шліфування, а також застосування багатопрохідного шліфування.

Ключові слова: шліфувальний круг, оброблювана деталь, адіабатичний стержень, температура шліфування, швидкість деталі.

The paper proposed a simplified solution of the heat equation with respect to the calculation of the temperature of grinding. It is shown that this solution allows to obtain the values of temperature, slightly different from the values obtained on the basis of the classical solution (the difference between 11%). In theory, found that the main ways to reduce the temperature of grinding is to reduce the conditional-voltage cut by increasing the cutting capacity of the circle and reduce the intensity of the friction in the grinding zone, and the use of multi-pass grinding.

Key words: grinding wheel, the work piece, the adiabatic core, the temperature of grinding, the rate details.

УДК 534.1

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р. физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассмотрено движение осциллятора линейно-переменной массы при нагружении его кратковременным импульсом постоянной силы. С помощью цилиндрических функций построено замкнутое решение задачи и проанализированы результаты расчётов.

Ключевые слова: осциллятор, линейно-переменная масса, кратковременный импульс, цилиндрические функции.

Введение. Нестационарные колебания механических систем с переменными во времени параметрами относятся к мало изученным разделам теории колебаний. В литературе в основном описаны лишь свободные колебания простейших моделей переменной массы с одной степенью свободы. Одним из первых, кто начал изучать такое движение, был *И.В. Мещерский* [1]. В указанной публикации он построил замкнутое решение уравнения малых свободных колебаний математического маятника линейно-переменной массы в *функциях Бесселя* положительного и отрицательного индексов. Свободные колебания линейного осциллятора линейно-переменной массы рассматривались в [2], где построено решение уравнения движения. Но автор этой публикации не проводила расчётов и не анализировала особенностей колебаний, вызванных переменностью массы. Две задачи о свободных колебаниях системы линейно-переменной жёсткости во времени решено в [3]. Речь идёт о колебаниях тяжёлого груза при равномерном вертикальном опускании или подъёме его на невесомом тросе, намотанном на равномерно вращающийся барабан. В отличие от указанных публикаций, где решали однородное дифференциальное уравнение движения, здесь мы построим замкнутое решение неоднородного уравнения.

Целью работы является изучение движения осциллятора линейно-переменной массы, вызванного действием непродолжительного импульса силы, типа ударного воздействия [4].

Постановка задачи Коши и построение её решения. Предполагаем, что масса осциллятора M изменяется во времени t по закону

$$M = m_0\left(1+\gamma t\right),$$

где m_0 – начальное значение массы; γm_0 – скорость изменения массы во времени.

© В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский, 2013

Вертикальное перемещение осциллятора определяем координатой $x(t)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m_0(1+\gamma t)\frac{d^2x}{dt^2}+cx=m_0 g\gamma t+Q\left[H(t)-H(t-\tau)\right]. \quad (1)$$

В нём c – коэффициент жёсткости пружины; g – ускорение свободного падения; $H(t)$ – *функция Хевисайда*; $Q\cdot\tau$ – величина импульса продолжительности τ.

Начало вертикальной оси Ox опущено от точки подвеса пружины A вниз на расстояние $X_0=l+c(m_0 g)^{-1}$, где l – длина недеформированной пружины (см. рис. 1).

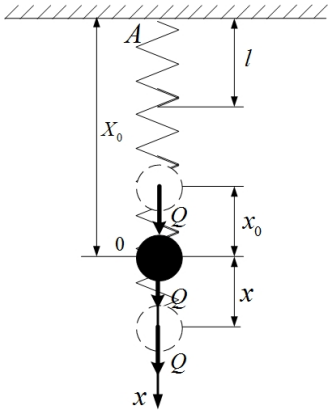


Рис. 1 – Расчётная схема вертикальных колебаний осциллятора.

Считаем, что при $t=0$ координата $x=0$ и осциллятор находится в состоянии покоя.

Введением вспомогательной переменной $\xi=1+\gamma t$ уравнение (1) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{c}{\gamma^2 m_0\xi}x=\frac{g}{\gamma^2}\frac{(\xi-1)}{\xi}+$$

$$+\frac{Q}{m_0\gamma^2\xi}\left[H(\xi-\xi_0)-H(\xi-\xi_1)\right], \quad (2)$$

где $\xi_0=1;\ \xi_1=1+\gamma\tau.$

Ему соответствуют однородное уравнение:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{c}{\gamma^2 m_0\xi}x=0. \quad (3)$$

Фундаментальными решениями (3) являются:

$$x_1(\eta)=\eta J_1(\eta);\quad x_2(\eta)=\eta Y_1(\eta). \quad (4)$$

Здесь $\eta=\eta_0\sqrt{\xi};\ \eta_0=\frac{2}{|\gamma|}\sqrt{\frac{c}{m}};\ J_1(\eta),Y_1(\eta)$ – *функции Бесселя* и *Неймана* индекса единица.

При дифференцировании фундаментальных решений по ξ учтём, что [5]:

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta J_1(\eta)\right]=\eta J_0(\eta);\quad \frac{d}{d\eta}\left[\eta Y_1(\eta)\right]=\eta Y_0(\eta);$$

$$\frac{d}{d\xi}=\frac{d}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta_0^2}{2\eta}\frac{d}{d\eta};$$

$J_0(\eta);Y_0(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

Тогда:

$$\frac{dx_1}{d\eta}=\frac{\eta_0^2}{2}J_0(\eta);\quad \frac{dx_2}{d\eta}=\frac{\eta_0^2}{2}Y_0(\eta).$$

Согласно *методу Лагранжа*, частное решение неоднородного уравнения (2) ищем в виде

$$x=c_1(\eta)x_1(\eta)+c_2(\eta)x_2(\eta). \tag{5}$$

Для определения неизвестных функций $c_1(\eta)$ и $c_2(\eta)$ получаем интегралы:

$$c_1(\eta)=-\frac{2}{\eta_0^2}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\eta f(\eta)x_2(\eta)}{\Delta(\eta)}d\eta;\quad c_2(\eta)=\frac{2}{\eta_0^2}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{\eta f(\eta)x_1(\eta)}{\Delta(\eta)}d\eta,$$

в которых

$$\Delta(\eta)=x_1\frac{dx_2}{d\eta}-x_2\frac{dx_1}{d\eta}=\frac{\eta_0^2\eta}{2}\left[J_1(\eta)Y_0(\eta)-J_0(\eta)Y_1(\eta)\right]=\frac{\eta_0^2\eta}{2}\frac{2}{\pi\eta}=\frac{\eta_0}{\pi};$$

$$f(\eta)=\frac{g}{\gamma^2}\frac{\eta^2-\eta_0^2}{\eta^2}+\frac{Q\eta_0^2}{m_0\gamma^2\eta^2}\left[H(\eta-\eta_0)-H(\eta-\eta_1)\right];\quad \eta_1=\eta_0\sqrt{1+\gamma\tau}.$$

Учитывая эти выражения и (4), находим:

$$c_1(\eta)=-\frac{2\pi}{\eta_0^4\gamma^2}\int_{\eta_0}^{\eta}\left\{g\left(\eta^2-\eta_0^2\right)+\frac{Q\eta_0^2}{m_0}\left[H(\eta-\eta_0)-H(\eta-\eta_1)\right]\right\}Y_1(\eta)d\eta;$$

$$c_2(\eta)=\frac{2\pi}{\eta_0^4\gamma^2}\int_{\eta_0}^{\eta}\left\{g\left(\eta^2-\eta_0^2\right)+\frac{Q\eta_0^2}{m_0}\left[H(\eta-\eta_0)-H(\eta-\eta_1)\right]\right\}J_1(\eta)d\eta. \tag{6}$$

Интегралы (6) выражаются через цилиндрические функции, поскольку [5]:

$$\int\eta^2J_1(\eta)d\eta=\eta^2J_2(\eta);\quad \int\eta^2Y_1(\eta)d\eta=\eta^2Y_2(\eta);$$

$$\int J_1(\eta)d\eta=-J_0(\eta);\quad \int Y_1(\eta)d\eta=-Y_0(\eta).$$

Следовательно,

$$c_1(\eta)=-\frac{2\pi}{\eta_0^4\gamma^2}\left\{g\left[\eta^2Y_2(\eta)-\eta_0^2Y_2(\eta_0)\right]+\right.$$

$$+g\eta_0^2\left[Y_0(\eta)-Y_0(\eta_0)\right]-\frac{Q\eta_0^2}{m_0}\left[Y_0(\eta_*)-Y_0(\eta_0)\right]\Bigg\};$$

$$c_2(\eta)=\frac{2\pi}{\eta_0^4\gamma^2}\Big\{g\left[\eta^2 J_2(\eta)-\eta_0^2 J_2(\eta_0)\right]+$$

$$+g\eta_0^2\left[J_0(\eta)-J_0(\eta_0)\right]-\frac{Q\eta_0^2}{m_0}\left[J_0(\eta_*)-J_0(\eta_0)\right]\Bigg\}. \qquad (7)$$

Здесь $\eta_*=\begin{bmatrix}\eta & \text{при} & \eta\le\eta_1\\ \eta_1 & & \eta>\eta_1\end{bmatrix}$; $J_2(\eta), Y_2(\eta)$ – функция Бесселя и Неймана индекса два.

Учитывая, что [5]:

$$Y_2(\eta_0)+Y_0(\eta_0)=\frac{2}{\eta_0}Y_1(\eta_0); \qquad J_2(\eta_0)+J_0(\eta_0)=\frac{2}{\eta_0}J_1(\eta_0),$$

$$J_2(\eta)Y_1(\eta)-Y_2(\eta)J_1(\eta)=\frac{2}{\eta\pi}; \qquad J_0(\eta)Y_1(\eta)-Y_0(\eta)J_1(\eta)=-\frac{2}{\eta\pi},$$

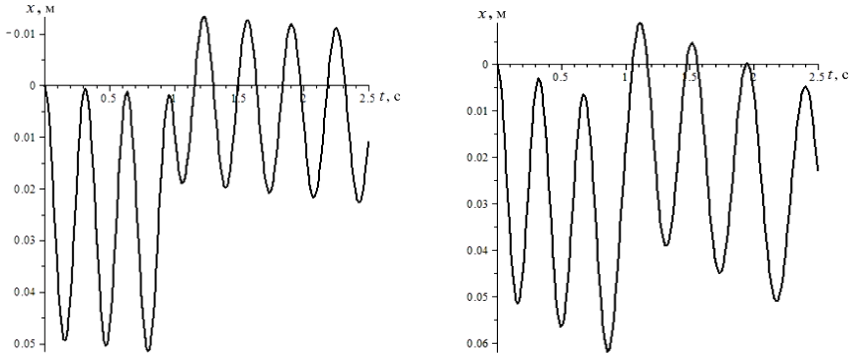
после подстановки выражений (7) в (5) получаем замкнутое решение поставленной *задачи Коши*:

$$x=\frac{2\pi}{\eta_0^4\gamma^2}\Big\{\frac{2}{\pi}g\left(\eta^2-\eta_0^2\right)+2g\eta_0\eta\left[Y_1(\eta_0)J_1(\eta)-J_1(\eta_0)Y_1(\eta)\right]+$$

$$+\frac{Q\eta_0^2\eta}{m_0}\left[\left(J_0(\eta_0)-J_0(\eta_*)\right)Y_1(\eta)-\left(Y_0(\eta_0)-Y_0(\eta_*)\right)J_1(\eta)\right]\Bigg\}.$$

Результаты моделирования. Рассмотрим модельную задачу, когда масса осциллятора возрастает. Для этого примем следующие исходные данные: $m_0=100$ кг; $c=4\cdot10^4$ Н/м; $Q=981$ Н; $\tau=1$ с и разные значения γ. На рис.2 *а* и *б* представлены перемещения осциллятора, полученные при $\gamma=0{,}1$ с$^{-1}$ и $\gamma=0{,}5$ с$^{-1}$ соответственно.

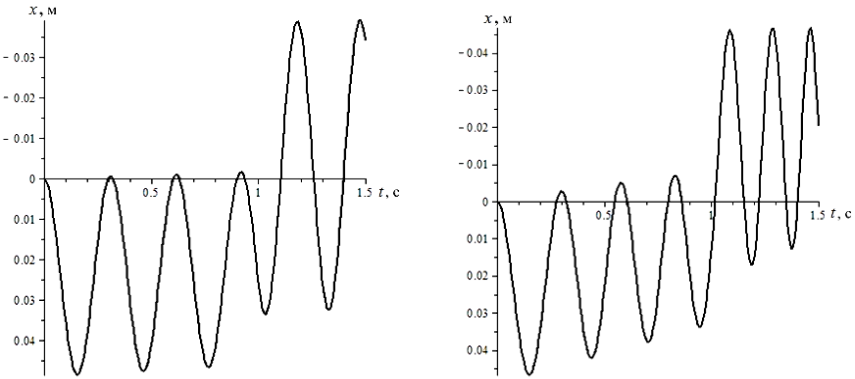
Вследствие возрастания массы, во время действия импульса ($t\le1$ с) максимум $x(t)$ более чем в два раза превышает статическое перемещение $x_{CT}=Q/c$. После прекращения действия импульса ($t>1$ с) осциллятор совершает свободные колебания относительно подвижного уровня отсчёта или центра колебаний, который опускается вниз. С увеличением параметра γ возрастают амплитуды свободных колебаний.



а *б*

Рис. 2 – Зависимость перемещения x от времени t при разных $\gamma > 0$:
а – $\gamma = 0{,}1\ \text{с}^{-1}$; *б* – $\gamma = 0{,}5\ \text{с}^{-1}$.

Проведём числовой расчёт колебаний осциллятора с убывающей массой. Для этого примем прежние исходные данные и поменяем знак у параметра γ. Результаты таких расчётов представлены на рис. 3.



а *б*

Рис. 3 – Зависимость перемещения x от времени t при разных $\gamma < 0$:
а – $\gamma = -0{,}1\ \text{с}^{-1}$; *б* – $\gamma = -0{,}5\ \text{с}^{-1}$.

При уменьшении массы осциллятора коэффициент динамичности перемещений оказывается меньшим двух. Центр колебаний поднимается вверх. Уменьшение массы осциллятора частично «гасит» действие импульса.

Выводы. При действии импульса постоянной силы на коротком промежутке времени задача моделирования нестационарных колебаний осциллято-

ра линейно-переменной массы допускает замкнутое решение в цилиндрических функциях. Решение позволяет проводить расчёт динамических перемещений осциллятора без учёта их затухания во времени.

Список литературы: 1. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы / И.В. Мещерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. **2.** *Cveticanin L.* Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p. **3.** *Светлицкий В.А.* Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с. **4.** *Ольшанский В.П.* Колебания стержней и пластин при механическом ударе // В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Х.: "Міськдрук", 2012. – 320 с. **5.** *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 09.04.2013

УДК 534.1

Моделювання коливань осцилятора лінійно-змінної маси за імпульсного навантаження / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 125 – 130. Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто рух осцилятора лінійно-змінної маси при навантаженні його короткочасним імпульсом сталої сили. За допомогою циліндричних функцій побудовано замкнутий розв'язок задачі та проаналізовано результати розрахунків.

Ключові слова: осцилятор, лінійно-змінна маса, короткочасний імпульс, циліндричні функції.

The motion of the oscillator linearly variable mass when loaded his short pulses of constant force is considered. With cylindrical functions to construct a closed solution and analyzed the results.

Key words: an oscillator, linearly variable mass, short impulse, cylindrical functions.

УДК 629.7.05

Ю.А.ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕВЕРСИВНИХ СХЕМ АЛГОРИТМІВ ВИЗНАЧЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ ОРІЄНТАЦІЇ

Для реверсивних схем визначення кватерніонів орієнтації отримані оцінки точності на еталонній моделі регулярної прецесії. Запропоновано покращення схем на основі фінітного нормування кватерніона і застосування більш точної апроксимації для уявних поворотів на такті.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, реверсивна схема, дрейф, еталонна модель.

Вступ і постановка задачі. При розв'язанні задачі визначення орієнтації в *безплатформених інерціальних навігаційних системах* (БІНС) в умовах

© Ю. А. Плаксій, 2013

постійного такту роботи бортового обчислювача Δt до відповідних розрахункових алгоритмів інтегрування кінематичних рівнянь пред'являються жорсткі вимоги щодо мінімальної загрузки обчислювача на такті при точності визначення параметрів орієнтації, достатній для виконання основної технічної задачі, яка покладена на рухомий об'єкт. Відомо, що для простих в обчислювальному плані алгоритмів низького порядку підвищення точності визначення орієнтації може бути досягнуто за рахунок спеціальної організації обчислень, наприклад, за рахунок застосування *реверсивної схеми* [1, 2].

Для первинної інформації про обертання твердого тіла, що поступає з гіроскопів на такті $[t_{n-1}, t_n]$ у вигляді *квазікоординат* [3] (тобто компонентів першої різниці вектору уявного повороту [4])

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1,2,3\,, \tag{1}$$

де ω_i – проекції вектора абсолютної кутової швидкості тіла на зв'язані осі, реверсивна схема алгоритму визначення кватерніона орієнтації наведена в [1].

За цією схемою на непарних тактах компоненти кватерніона орієнтації Λ_n^* обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n0}^* &= \lambda_{n-1,0}^* - \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,1}^*\theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^*\theta_{n2}^* + \lambda_{n-1,3}^*\theta_{n3}^*);\\
\lambda_{n1}^* &= \lambda_{n-1,1}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^*\theta_{n1}^* + \lambda_{n-1,2}^*\theta_{n3}^* - \lambda_{n-1,3}^*\theta_{n2}^*);\\
\lambda_{n2}^* &= \lambda_{n-1,2}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^*\theta_{n2}^* + \lambda_{n-1,3}^*\theta_{n1}^* - \lambda_{n1}^*\theta_{n3}^*);\\
\lambda_{n3}^* &= \lambda_{n-1,3}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^*\theta_{n3}^* + \lambda_{n1}^*\theta_{n2}^* - \lambda_{n2}^*\theta_{n1}^*).
\end{aligned} \tag{2}$$

На парних тактах послідовність обчислень параметрів поточної орієнтації протилежна:

$$\begin{aligned}
\lambda_{n3}^* &= \lambda_{n-1,3}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^*\ \theta_{n3}^* + \lambda_{n-1,1}^*\theta_{n2}^* - \lambda_{n-1,2}^*\theta_{n1}^*);\\
\lambda_{n2}^* &= \lambda_{n-1,2}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^*\theta_{n2}^* + \lambda_{n3}^*\theta_{n1}^* - \lambda_{n-1,1}^*\theta_{n3}^*);\\
\lambda_{n1}^* &= \lambda_{n-1,1}^* + \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^*\theta_{n1}^* + \lambda_{n2}^*\theta_{n3}^* - \lambda_{n3}^*\theta_{n2}^*);\\
\lambda_{n0}^* &= \lambda_{n-1,0}^* - \frac{1}{2}(\lambda_{n1}^*\theta_{n1}^* + \lambda_{n2}^*\theta_{n2}^* + \lambda_{n3}^*\theta_{n3}^*).
\end{aligned} \tag{3}$$

При цьому в основу схеми (2), (3) покладений алгоритм першого поряд-

ку:

$$\lambda_{n0}^{*} = \lambda_{n-1,0}^{*} - \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,1}^{*}\theta_{n1}^{*} + \lambda_{n-1,2}^{*}\theta_{n2}^{*} + \lambda_{n-1,3}^{*}\theta_{n3}^{*});$$

$$\lambda_{n1}^{*} = \lambda_{n-1,1}^{*} + \frac{1}{2}(\lambda_{n0}^{*}\theta_{n1}^{*} + \lambda_{n-1,2}^{*}\theta_{n3}^{*} - \lambda_{n-1,3}^{*}\theta_{n2}^{*}); \quad (1,2,3), \tag{4}$$

де $(1,2,3)$ – символ кругової перестановки індексів.

Як зазначено в [1], застосування реверсивної схеми до алгоритму (4) забезпечує зменшення методичної похибки обчислення кватерніона орієнтації на порядок у порівнянні з методичною похибкою алгоритму (4).

Інша схема реверсивного алгоритму у випадку первинної інформації про обертання твердого тіла на такті у вигляді проекцій ω_{ni} $(i = 1,2,3)$ вектора абсолютної кутової швидкості тіла $\vec{\omega}_n = \vec{\omega}(t_n)$ на зв'язані осі наведена в [5]. За цією схемою на кожному такті обчислень визначається величина нормуючого множника $s_n = 1 - \Lambda_{n-1}^2$, де $\Lambda_{n-1}^2 = \lambda_{n-1,0}^{*2} + \lambda_{n-1,1}^{*2} + \lambda_{n-1,2}^{*2} + \lambda_{n-1,3}^{*2}$. Компоненти поточного кватерніона Λ_n^* обчислюються так:

– на непарних тактах

$$\lambda_{n0}^{*} = \lambda_{n-1,0}^{*} - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,1}^{*}\omega_{n1} + \lambda_{n-1,2}^{*}\omega_{n2} + \lambda_{n-1,3}^{*}\omega_{n3}) + 0,5\lambda_{n-1,0}^{*}s_n;$$

$$\lambda_{n1}^{*} = \lambda_{n-1,1}^{*} + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^{*}\omega_{n1} + \lambda_{n-1,2}^{*}\omega_{n3} - \lambda_{n-1,3}^{*}\omega_{n2}) + 0,5\lambda_{n-1,1}^{*}s_n;$$

$$\lambda_{n2}^{*} = \lambda_{n-1,2}^{*} + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^{*}\omega_{n2} + \lambda_{n-1,3}^{*}\omega_{n1} - \lambda_{n1}^{*}\omega_{n3}) + 0,5\lambda_{n-1,2}^{*}s_n;$$

$$\lambda_{n3}^{*} = \lambda_{n-1,3}^{*} + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^{*}\omega_{n3} + \lambda_{n1}^{*}\omega_{n2} - \lambda_{n2}^{*}\omega_{n1}) + 0,5\lambda_{n-1,3}^{*}s_n; \tag{5}$$

– на парних тактах

$$\lambda_{n3}^{*} = \lambda_{n-1,3}^{*} + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^{*}\omega_{n3} + \lambda_{n-1,1}^{*}\omega_{n2} - \lambda_{n-1,2}^{*}\omega_{n1}) + 0,5\lambda_{n-1,3}^{*}s_n;$$

$$\lambda_{n2}^{*} = \lambda_{n-1,2}^{*} + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^{*}\omega_{n2} + \lambda_{n3}^{*}\omega_{n1} - \lambda_{n-1,1}^{*}\omega_{n3}) + 0,5\lambda_{n-1,2}^{*}s_n;$$

$$\lambda_{n1}^{*} = \lambda_{n-1,1}^{*} + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^{*}\omega_{n1} + \lambda_{n2}^{*}\omega_{n3} - \lambda_{n3}^{*}\omega_{n2}) + 0,5\lambda_{n-1,1}^{*}s_n;$$

$$\lambda_{n0}^{*} = \lambda_{n-1,0}^{*} - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n1}^{*}\omega_{n1} + \lambda_{n2}^{*}\omega_{n2} + \lambda_{n3}^{*}\omega_{n3}) + 0,5\lambda_{n-1,0}^{*}s_n. \tag{6}$$

Схема (5), (6) побудована за принципом методів першого порядку; додатково в ній застосовано послідовне поточне нормування кватерніона. Порівняння цієї схеми зі схемою (2), (3) дозволяє зробити висновок, що тут використано представлення уявних поворотів (1) у вигляді $\theta_{ni}^{*} = \omega_{ni} \cdot \Delta t$.

Необхідно отримати дійсні оцінки точності визначення орієнтації реверсивних схем (2),(3) та (5), (6) на еталонній моделі регулярної прецесії твердого тіла і запропонувати шляхи підвищення точності цих схем.

Дослідження реверсивних алгоритмів на моделі регулярної прецесії. Для отримання оцінок методичних похибок реверсивних схем (2), (3) та (5), (6) застосуємо *еталонну модель регулярної прецесії* у вигляді аналітичних виразів для квазікоординат (уявних поворотів) [6]:

$$\theta_{ni}^{*} = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1}),\ i = 1,2,3, \tag{7}$$

де $\theta_1(t) = 2a\sin\alpha_1\cos(\alpha_1+\psi)/k,$ $\theta_2(t) = -2a\sin\alpha_1\sin(\alpha_1+\psi)/k,$ $\theta_3(t) = \omega_3(0)\cdot t$,

і аналітичних виразів для компонент кватерніона орієнтації $\Lambda(t)$:

$$\lambda_0(t) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - r\sin\alpha_1\sin\alpha_2;$$
$$\lambda_1(t) = a\sin\alpha_2\cos(\alpha_1+\psi)/\nu;$$
$$\lambda_2(t) = -a\sin\alpha_2\sin(\alpha_1+\psi)/\nu;$$
$$\lambda_3(t) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + r\cos\alpha_1\sin\alpha_2, \tag{8}$$

де $a = (\omega_1^2(0)+\omega_2^2(0))^{1/2}$, $k = (1-\xi_2)\omega_3(0)$, $\xi_2 = I_3/I_1$, I_1, I_3 – моменти інерції тіла відносно першої і третьої осі, $\cos\psi = \omega_1(0)/a$, $\sin\psi = -\omega_2(0)/a$, $\alpha_1 = 0,5kt$, $\alpha_2 = 0,5\nu t$, $\nu = (a^2+\xi_2^2\omega_3^2(0))^{1/2}$, $r = \xi_2\omega_3(0)/\nu$.

В якості похибок алгоритмів будемо розглядати *похибку дрейфу* [4]:

$$\delta\theta_n = 2arctg(|vect(\delta\Lambda_n|)/sqal(\delta\Lambda_n)), \tag{9}$$

де $\delta\Lambda_n$ – кватерніон накопиченої похибки орієнтації, $\delta\Lambda_n = \Lambda_n^{*}\circ\tilde{\Lambda}_n$, Λ_n^{*} – обчислений кватерніон, $\tilde{\Lambda}_n$ – кватерніон, спряжений до кватерніону орієнтації (8) еталонної моделі: $\tilde{\Lambda}_n = sqal(\Lambda_n) - vect(\Lambda_n)$; а також *похибку норми обчисленого кватерніона орієнтації*:

$$\chi_n = 1 - \Lambda_n^2, \tag{10}$$

де $\Lambda_n^2 = \lambda_{n0}^{*2} + \lambda_{n1}^{*2} + \lambda_{n2}^{*2} + \lambda_{n3}^{*2}$.

На рис.1 показана залежність від часу оцінки похибки дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3), що отримана на еталонній моделі (7), (8) при початкових умовах $\vec{\omega}(0) = (-0,0212;\cdot 0,012;\cdot 0,015)$ [рад/с], $\Lambda(0) = (1;0;0;0)^T$, $\xi_2 = 0,45$ на інтервалі часу $t\in[0;2000]$с, $\Delta t = 0,1$с.

Для порівняння на рис.2 представлені також оцінки похибки дрейфу для алгоритму першого порядку (4) і алгоритму другого порядку [3]:

$$\lambda_{n0}^{*} = \lambda_{n-1,0}^{*}(1-\frac{1}{8}\Lambda_n^2) - \frac{1}{2}(\lambda_{n-1,1}^{*}\theta_{n1}^{*} + \lambda_{n-1,2}^{*}\theta_{n2}^{*} + \lambda_{n-1,3}^{*}\theta_{n3}^{*});$$

$$\lambda_{n1}^{*} = \lambda_{n-1,1}^{*}(1-\frac{1}{8}\Lambda_n^2)+\frac{1}{2}(\lambda_{n-1,0}^{*}\theta_{n1}^{*}+\lambda_{n-1,2}^{*}\theta_{n3}^{*}-\lambda_{n-1,3}^{*}\theta_{n2}^{*}); \ (1,2,3). \qquad (11)$$

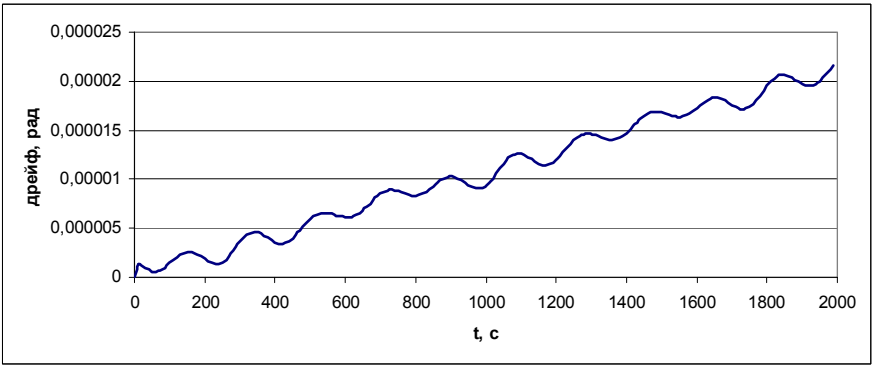


Рис. 1– Оцінки похибки дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3).

Як видно з графіків рис.2, оцінка похибки дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3) приблизно в 2 рази краща, ніж для алгоритму першого порядку, але на 25% гірша, ніж для алгоритму другого порядку.

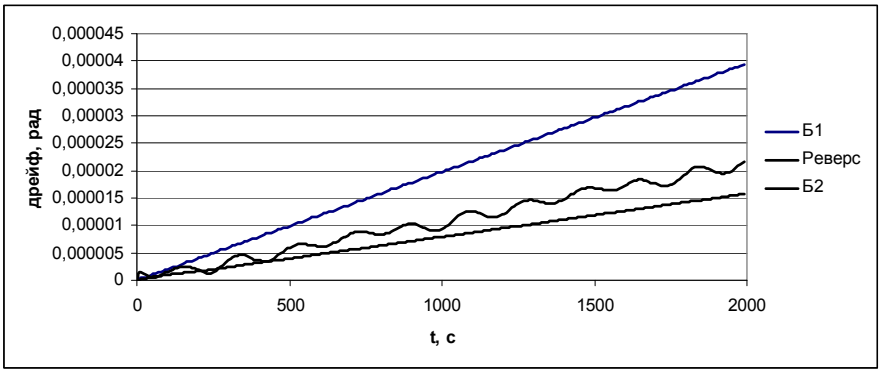


Рис. 2– Оцінки похибки дрейфу для алгоритму першого порядку (4) (верхня лінія), другого порядку (11) (нижня лінія) та реверсивного алгоритму (2), (3).

Залежність від часу оцінки похибки норми χ_n для реверсивного алгоритму (2), (3) показана на рис.3. Хоча в цьому алгоритмі не передбачене нормування кватерніона, завдяки реверсивній схемі оцінка похибки норми з часом не зростає і лежить в межах $-2{,}1\cdot 10^{-6} < \chi_n < -1{,}1\cdot 10^{-7}$.

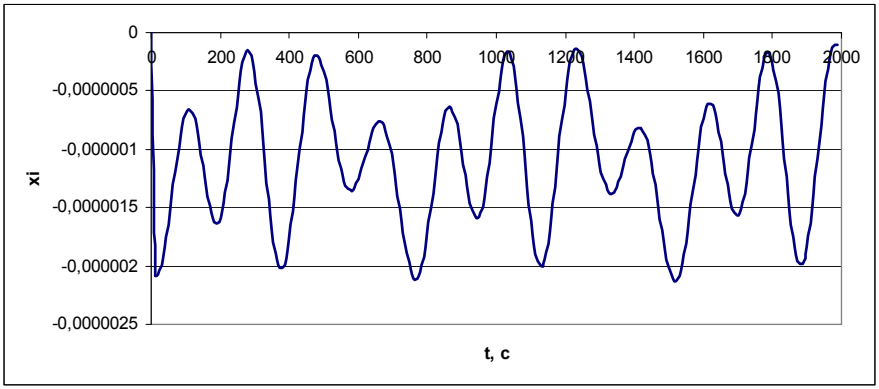


Рис. 3 – Оцінка похибки норми χ_n для алгоритму (2), (3).

Застосування реверсивної схеми до алгоритму (11) характеризується оцінками дрейфу і похибки норми, що наведені на рис.4 і рис.5. Ці оцінки навіть гірші, ніж для алгоритму першого порядку (4). Таким чином, реверсивна схема обчислень забезпечує підвищення точності визначення орієнтації тільки для алгоритму першого порядку.

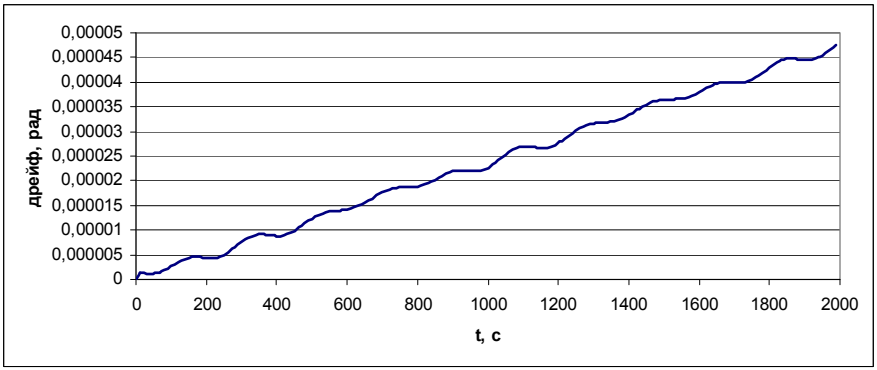


Рис. 4 – Оцінка похибки дрейфу для реверсивної схеми другого порядку.

Фінітне нормування кватерніона орієнтації в реверсивних схемах. Вдосконалення реверсивної схеми (2), (3) можливе за рахунок включення в цю схему процедури нормування кватерніона орієнтації. Таке нормування може бути попереднім (на початку обчислень на такті), послідовним поточним (як у наведеній схемі (5), (6)) і фінітним (після всіх обчислень на такті). Проведене дослідження показує, що саме фінітне нормування кватерніона орієнтації є найбільш доцільним.

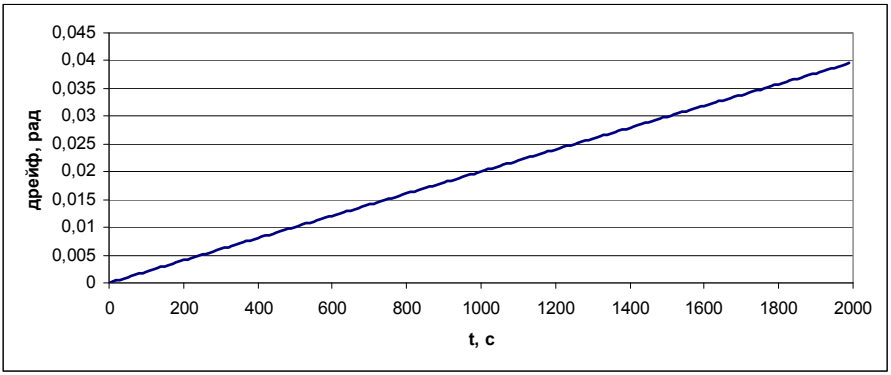


Рис. 5 – Оцінка похибки норми χ_n для реверсивної схеми другого порядку.

Для нормування кватерніона орієнтації Λ_n^* застосуємо формулу:

$$\Lambda_n^{**} = \frac{\Lambda_n^*}{1+\alpha}, \tag{12}$$

де $\left\|\Lambda_n^{**}\right\| = 1$, $|\alpha| < 1$. Покомпонентно з (12) маємо:

$$\lambda_{ni}^{**} = \frac{\lambda_{ni}^*}{1+\alpha}, \; i = \overline{0,3}. \tag{13}$$

Возведемо (13) в квадрат і складемо суму по i, в результаті отримаємо вираз

$$\Lambda_n^2 = (1+\alpha)^2,$$

з якого з урахуванням малості величини α знайдемо її значення:

$$\alpha = 0,5(\Lambda_n^2 - 1).$$

Оскільки $|\alpha| < 1$, то, помноживши чисельник і знаменник правої частини (12) на $(1-\alpha)$ і нехтуючи величиною α^2 в знаменнику, можна замінити (12) наближеною формулою:

$$\Lambda_n^{**} = \Lambda_n^*(1-\alpha),$$

яка з урахуванням виразу для α набуває остаточного вигляду:

$$\Lambda_n^{**} = \Lambda_n^*(1,5 - 0,5\Lambda_n^2). \tag{14}$$

Таке нормування не використовує операцію ділення, на відміну від звичайного нормування кватерніона і не впливає на похибку дрейфу, при цьому забезпечується асимптотична стійкість процесу нормування: $\left\|\Lambda_n^{**}\right\| \to 1$.

Застосуємо фінітне нормування в складі реверсивної схеми (2), (3). Отримана оцінка похибки дрейфу наведена на рис.6. Очевидно, має місце

значне покращення оцінки похибки норми в порівнянні з ненормованою схемою.

Розглянемо тепер реверсивну схему (5), (6). Залежності від часу оцінок похибки дрейфу і похибки норми для цієї схеми представлені на рис.7 і рис.8.

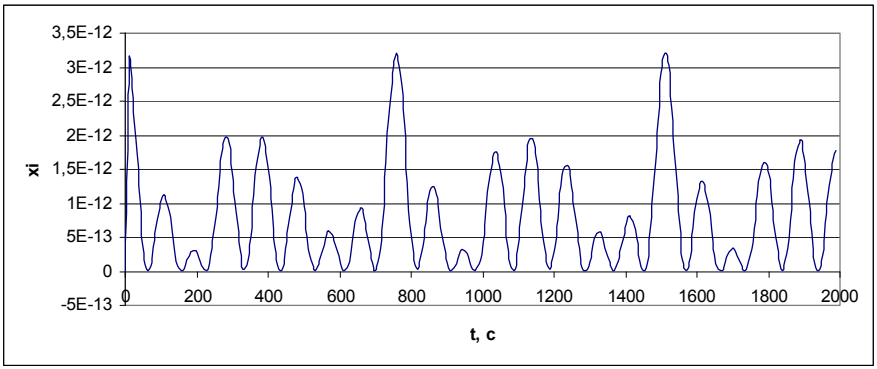


Рис. 6 – Оцінка похибки норми χ_n для реверсивної схеми (2), (3) з фінітним нормуванням кватерніона.

Для цього алгоритму оцінка похибки дрейфу має пилкоподібний характер і на порядок гірша за оцінку дрейфу для реверсивного алгоритму (2), (3). Поточне нормування кватерніона орієнтації забезпечує оцінку похибки норми приблизно у межах $-2\cdot 10^{-6} < \chi_n < 1,6\cdot 10^{-6}$, при цьому зростання похибки не відбувається.

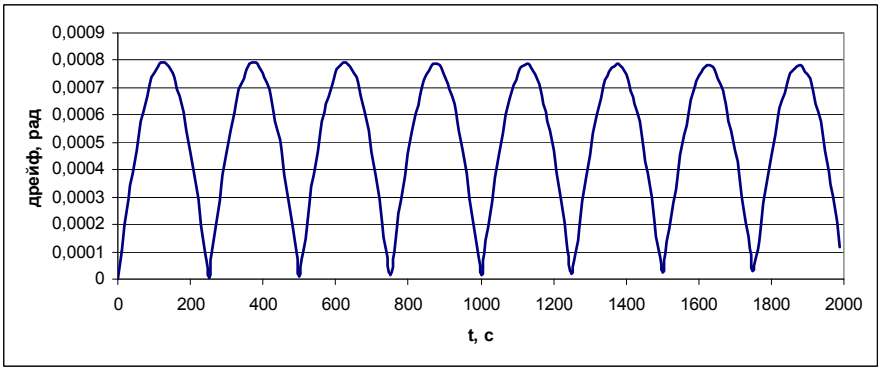


Рис. 7 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму (5), (6).

Вдосконалимо схему (5), (6) за рахунок використання первинної інформації з попереднього такту $[t_{n-2}, t_{n-1}]$ і фінітного нормування кватерніона

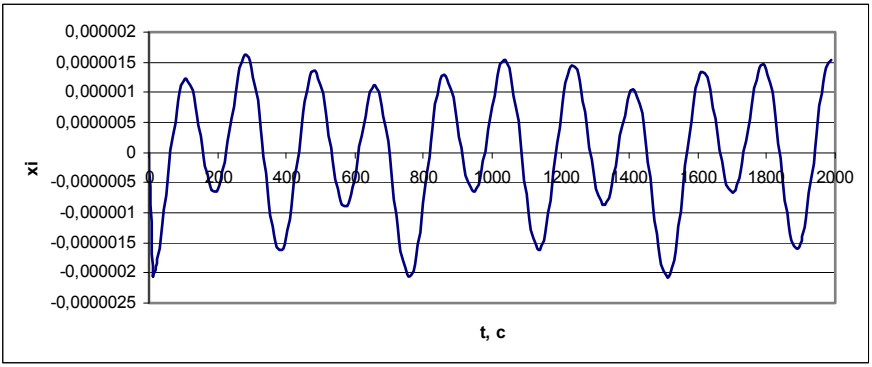


Рис. 8 – Оцінка похибки норми χ_n для алгоритму (5), (6).

орієнтації. При цьому замість представлення позірних поворотів у вигляді $\theta_{ni}^* = \omega_{ni} \cdot \Delta t$ застосуємо більш точну апроксимацію:

$$\theta_{ni}^* = 0,5(\omega_{n-1,i} + \omega_{ni})\Delta t \ . \qquad (15)$$

Тоді кватерніон орієнтації обчислюється на непарних тактах за формулами:

$$\lambda_{n0}^* = \lambda_{n-1,0}^* - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,1}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n-1,2}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n-1,3}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}));$$

$$\lambda_{n1}^* = \lambda_{n-1,1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n-1,2}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) - \lambda_{n-1,3}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}));$$

$$\lambda_{n2}^* = \lambda_{n-1,2}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^*(\omega_{n-12} + \omega_{n2}) + \lambda_{n-1,3}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) - \lambda_{n1}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}));$$

$$\lambda_{n3}^* = \lambda_{n-1,3}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n0}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) + \lambda_{n1}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) - \lambda_{n2}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1})). \quad (16)$$

На парних тактах компоненти кватерніона орієнтації обчислюються за формулами:

$$\lambda_{n3}^* = \lambda_{n-1,3}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) + \lambda_{n-1,1}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) - \lambda_{n-1,2}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}));$$

$$\lambda_{n2}^* = \lambda_{n-1,2}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n3}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) - \lambda_{n-1,1}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}));$$

$$\lambda_{n1}^* = \lambda_{n-1,1}^* + \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n-1,0}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n2}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3}) - \lambda_{n3}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}));$$

$$\lambda_{n0}^* = \lambda_{n-1,0}^* - \frac{\Delta t}{2}(\lambda_{n1}^*(\omega_{n-1,1} + \omega_{n1}) + \lambda_{n2}^*(\omega_{n-1,2} + \omega_{n2}) + \lambda_{n3}^*(\omega_{n-1,3} + \omega_{n3})). \quad (17)$$

Додатково в кінці кожного такту обчислень до отриманого кватерніона орієнтації застосовується фінітне нормування за формулою (14).

Результати оцінювання похибки дрейфу і похибки норми для цієї схеми наведені на рис.9 і рис.10 і мало відрізняються від результатів, отриманих для схеми (2), (3) з додатковим фінітним нормуванням (див. рис.1 і рис.6).

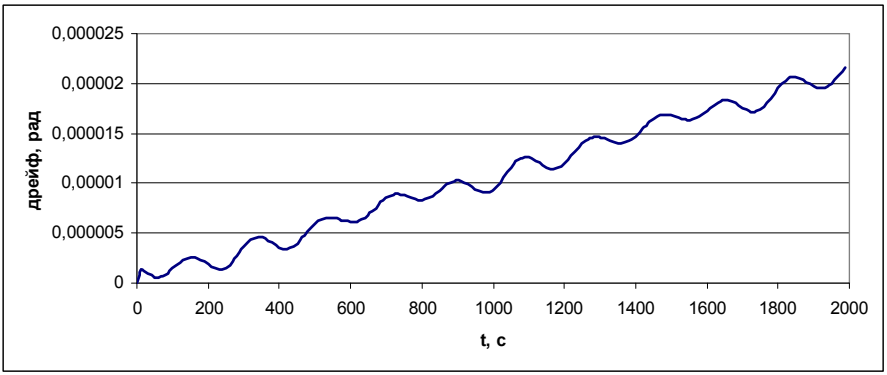


Рис. 9 – Оцінка похибки дрейфу для алгоритму (16), (17) з фінітним нормуванням.

Порівняння отриманих результатів оцінювання точності для запропонованого алгоритму (16), (17), що використовує фінітне нормуванням з відповідними оцінками точності для відомої схеми (5), (6),де відбувається послідовне поточне нормування кватерніона, показує суттєве підвищення точності визначення орієнтації як за оцінкою похибки дрейфу, так і за оцінкою похибки норми.

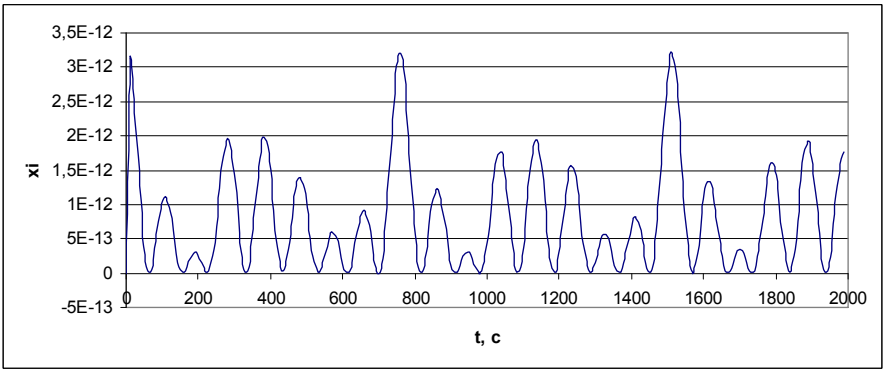


Рис. 10 – Оцінка похибки норми χ_n для алгоритму (16), (17) з фінітним нормуванням.

Висновки. Розглянуті реверсивні схеми визначення кватерніона орієнтації в БІНС для різних випадків первинної інформації про обертання твердо-

го тіла. На основі еталонної моделі регулярної прецесії отримані оцінки точності реверсивних схем у вигляді похибки дрейфу і похибки норми. Отримано, що для алгоритму першого порядку реверсивна схема має меншу похибку дрейфу, ніж для алгоритму без цієї ж схеми, але гіршу, ніж для алгоритму другого порядку без вказаної схеми. Показано, що ефективне застосування реверсивної схеми обмежено алгоритмами першого порядку.

Для покращення точності реверсивних схем запропонована процедура фінітного нормування кватерніона орієнтації, яка не впливає на похибку дрейфу і не використовує операцію ділення. Також відома реверсивна схема вдосконалена шляхом застосування більш точної апроксимації позірних поворотів на такті обчислень.

Список літератури: **1.** *Ткаченко А.И.* Повышение точности вычисления кинематических параметров // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1973.– вып. 19.– С. 117–121. **2.** *Ткаченко А.И.* Повышение точности интегрирования одной системы дифференциальных уравнений. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1975. – т. XV, №2. –С. 509–512. **3.** *Бранец В.Н., Шмыглевский И П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем – М.: Наука, 1992. – 280 с. **4.** *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с. **5.** *Беляев С.Н., Истомин А.Е.* Моделирование двухплоскостного бесплатформенного стабилизатора вооружения легкобронированной боевой машины // Механіка та машинобудування. – 2011, №2.–С.87–94. **6.** *Плаксий Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2,.–1992, вып. 11.–С.79–83.

Надійшла до редколегії 07.05.2013

УДК 629.7.05

Підвищення точності реверсивних схем алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації / Ю. А. Плаксій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 130 – 140. Бібліогр.: 6 назв.

Для реверсивных схем определения кватернионов ориентации получены оценки точности на эталонной модели регулярной прецессии. Предложено улучшение схем на основе финитного нормирования кватерниона и применения более точной аппроксимации для кажущихся поворотов на такте.

Ключевые слова: кватернион, ориентация, реверсивная схема, дрейф, эталонная модель.

Accuracy estimates for reverse schemes of definition of orientation quaternions on wobbling reference model are received. Improvement of schemes based on the finite rationing of a quaternion and application of more exact approximation for seeming turns on a step is offered.

Key words: quaternion, orientation, reverse scheme, drift, reference model.

УДК 629.7.05

Ю.А. ПЛАКСІЙ, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПІ»

ЕТАЛОННА ТРИГОНОМЕТРИЧНА КВАТЕРНІОННА МОДЕЛЬ ПРЕЦЕСІЙНОГО ТИПУ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА

Запропонована нова еталонна тригонометрична модель обертання твердого тіла, що узагальнює випадок регулярної прецесії. Показано, що регулярна прецесія не є найгіршим рухом при оптимізації алгоритмів визначення орієнтації.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, еталонна модель, дрейф.

Вступ і постановка задачі. Для побудови цифрового образу інерціальної системи координат у бортовому обчислювачі в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) застосовують спеціальні алгоритми обчислення кватерніону орієнтації на такті Δt, які орієнтовані на первинну інформацію про обертання об'єкта, що поступає з гіроскопів у вигляді *квазікоординат* [1]

$$\theta_{ni}^{*} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

де ω_i, $i = 1,2,3$ – проекції вектора абсолютної кутової швидкості об'єкта $\vec{\omega}$ на зв'язані осі. Оскільки алгоритми визначення орієнтації в БІНС відіграють роль «аналітичної платформи» [2], до них пред'являються жорсткі вимоги щодо мінімальної загрузки обчислювача на такті при точності визначення параметрів, достатній для виконання технічної задачі, яка покладена на рухомий об'єкт. Для оцінювання точності і відпрацювання алгоритмів визначення орієнтації необхідно мати деякі еталонні моделі обертання, які можуть бути дискретними або неперервними.

Дискретні еталонні моделі основані на результатах чисельного інтегрування рівнянь математичної моделі обертання об'єкту. Переваги дискретних моделей полягають в тому, що їх можна реалізувати для достатньо складних об'єктів, а недоліки пов'язані з тим, що в отриманих на їх основі оцінках похибок алгоритмів невід'ємно присутні похибки від застосованого методу чисельного інтегрування. При цьому порядки точності методу чисельного інтегрування і алгоритму визначення орієнтації повинні бути погоджені, бо неможливо отримати коректні оцінки, якщо ці порядки є однаковими.

Неперервні еталонні моделі обертання звичайно обмежені випадками існуючих точних розв'язків сукупності динамічних та кінематичних рівнянь твердого тіла (*моделі конічного руху* [3,4] та *регулярної прецесії* [5,6]). В цих моделях кінематичні параметри і інформація про динаміку обертання твердо-

© Ю. А. Плаксій, 2013

го тіла – так звані квазікоординати (тобто прирости уявних поворотів на такті Δt) – представляються неперервними явними функціями часу. Оскільки реальний рух об'єкта не завжди відповідає конічному руху або регулярній прецесії, необхідно мати інші моделі для аналізу похибок алгоритмів визначення орієнтації, тому отримання нових еталонних моделей, що описують більш складний рух об'єкта, є достатньо актуальною задачею.

Найбільш просто можна побудувати еталонну модель обертання, якщо належним чином задати аналітичне представлення для кінематичних параметрів. Маючи аналітику для кінематики, нескладно отримати відповідні аналітичні залежності для динамічної частини моделі у вигляді проекцій вектора абсолютної кутової швидкості ω_i і квазікоординат (1). Наприклад, в [7] для аналізу точності алгоритмів визначення орієнтації застосована *трьохчастотна еталонна модель*, в основі якої лежить тригонометричне представлення для компонент кватерніона орієнтації у вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\,;\ \lambda_1(t) = \sin(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t)\,;$$
$$\lambda_2(t) = \sin(k_2 t)\cdot\cos(k_3 t)\,;\ \lambda_3(t) = \sin(k_2 t)\cdot\sin(k_3 t)\,. \qquad (2)$$

Розширення класу неперервних еталонних моделей можливе за рахунок нових представлень для кватерніона орієнтації моделі. В нашій роботі пропонується нове представлення для кватерніона орієнтації моделі, що узагальнює представлення (2).

Еталонна тригонометрична кватерніона модель обертання твердого тіла прецесійного типу. Задамо компоненти кватерніона орієнтації моделі у вигляді:

$$\lambda_0(t) = \cos(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t) - \xi\sin(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t)\,;\ \lambda_1(t) = \eta\cdot\sin(k_1 t)\cdot\cos(k_3 t)\,;$$
$$\lambda_2(t) = \eta\cdot\sin(k_1 t)\cdot\sin(k_3 t)\,;\ \lambda_3(t) = \cos(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t) + \xi\sin(k_1 t)\cdot\cos k_2 t)\,, \qquad (3)$$

де $\xi^2 + \eta^2 = 1$, що є умовою нормування кватерніона $\|\Lambda(t)\| = 1$.

Продиференцюємо (3) по t, отримаємо наступні вирази:

$$\dot\lambda_0(t) = -k_1\sin(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t) - k_2\cos(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t) - \xi\cdot k_1\cos(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t) -$$
$$-\xi\cdot k_2\sin(k_1 t)\cos(k_2 t)\,;$$
$$\dot\lambda_1(t) = \eta\cdot k_1\cos(k_1 t)\cdot\cos(k_3 t) - \eta\cdot k_3\sin(k_1 t)\cdot\sin(k_3 t)\,;$$
$$\dot\lambda_2(t) = -\eta\cdot k_1\cos(k_1 t)\cdot\sin(k_3 t) + \eta\cdot k_3\sin(k_1 t)\cdot\cos(k_3 t)\,;$$
$$\dot\lambda_0(t) = -k_1\sin(k_1 t)\cdot\sin(k_2 t) + k_2\cos(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t) + \xi\cdot k_1\cos(k_1 t)\cdot\cos(k_2 t) -$$
$$-\xi\cdot k_2\sin(k_1 t)\sin(k_2 t)\,. \qquad (4)$$

Щоб отримати формули для компонент кутової швидкості ω_i, скористаємося оберненим кінематичним рівнянням у формі [1]:

$$\vec\omega(t) = 2\cdot\tilde\Lambda(t)\circ\dot\Lambda(t)\,, \qquad (5)$$

де $\tilde\Lambda(t)$ – кватерніон, спряжений кватерніону (3). Підстановка виразів для

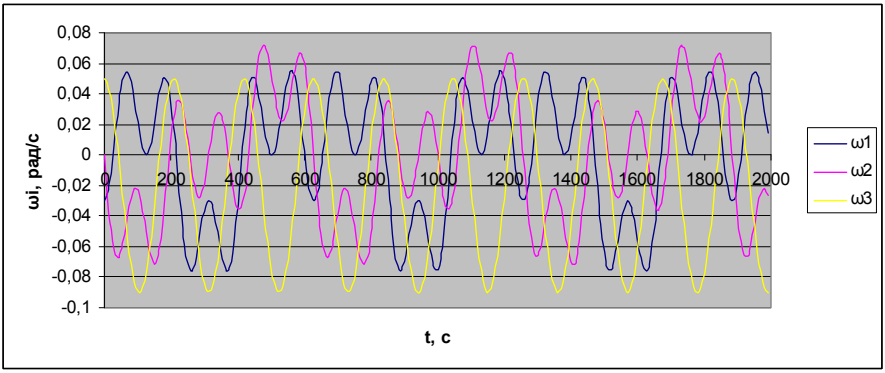


Рис. 1 – Проекції вектора кутової швидкості моделі $(\xi = 0; \eta = 1)$.

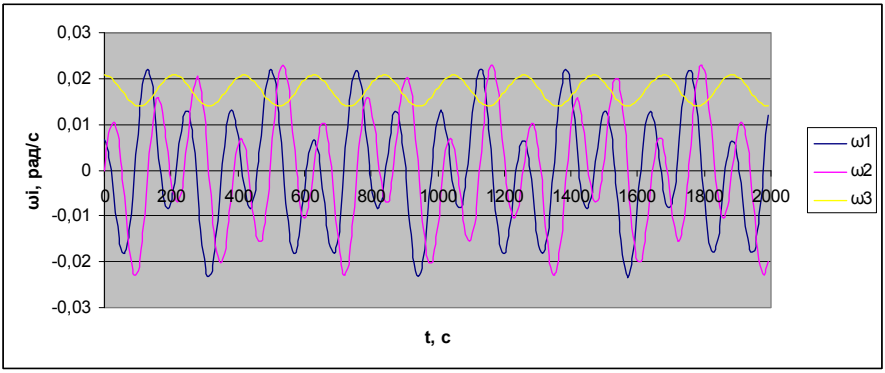


Рис. 2 – Проекції вектора кутової швидкості моделі $(\xi = 40/41; \eta = -9/41)$.

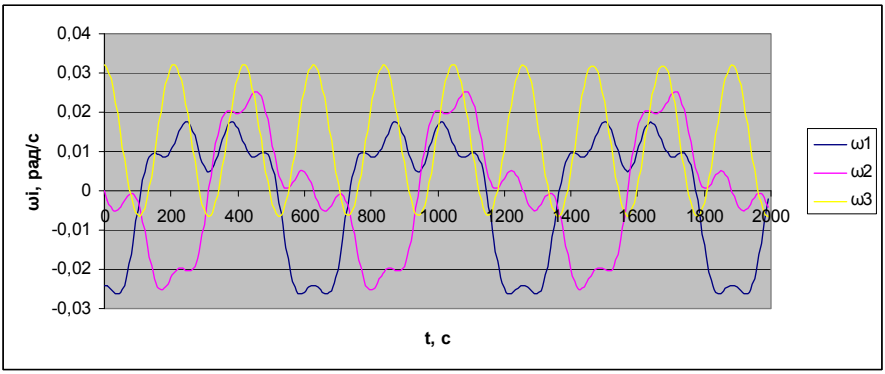


Рис. 3 – Проекції вектора кутової швидкості моделі $(\xi = 0,6; \eta = 0,8; k_3 = 0,005)$.

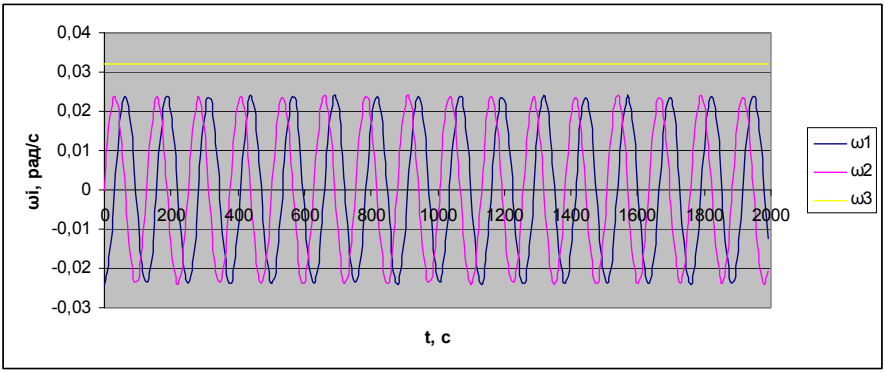


Рис. 4 – Проекції вектора кутової швидкості моделі
$(\xi = 0,6;\ \eta = 0,8;\ k_1 = -0,015;\ k_2 = 0,025;\ k_3 = -0,025)$.

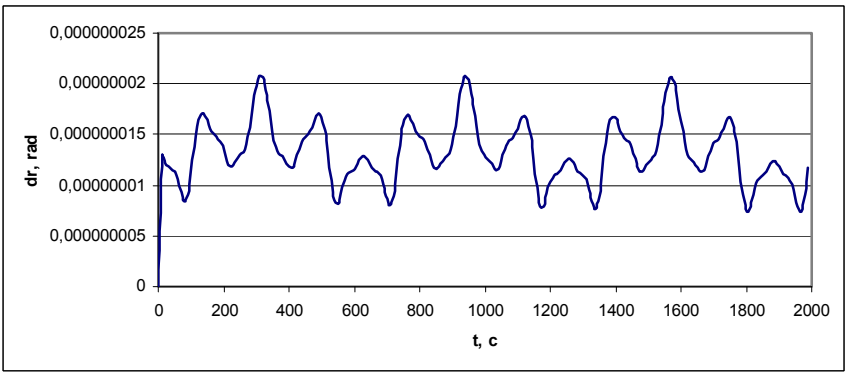


Рис. 5 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі $(\xi = 0; \eta = 1)$.

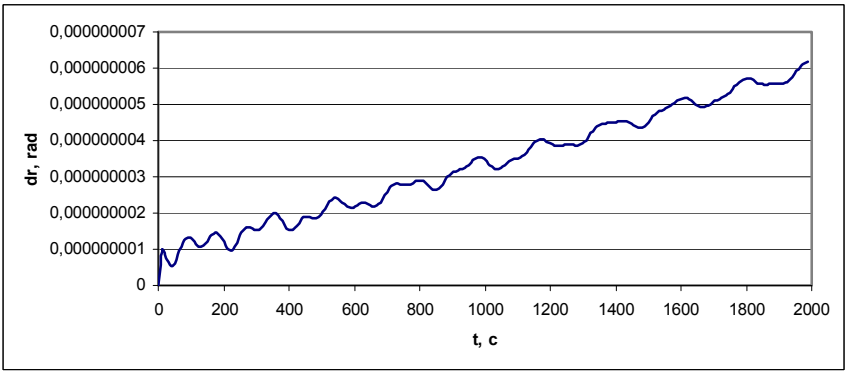


Рис. 6 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі $(\xi = 40/41; \eta = -9/41)$.

компонент кватерніона (3) і похідних (4) від цих компонент в (5) дає:

$$\omega_1(t) = \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3)\cos((k_2 - k_3)t) + 0,5\eta(k_2 + k_3)(1-\xi)\times$$
$$\times\cos((2k_1 - k_2 + k_3)t) - 0,5\eta(k_2 + k_3)(1+\xi)\cos((2k_1 + k_2 - k_3)t)\,;$$
$$\omega_2(t) = \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3)\sin((k_3 - k_2)t) + 0,5\eta(k_2 + k_3)(1-\xi)\times$$
$$\times\sin((2k_1 - k_2 + k_3)t) + 0,5\eta(k_2 + k_3)(1+\xi)\sin((2k_1 + k_2 - k_3)t)\,;$$
$$\omega_3(t) = (2\xi k_1 + k_2 + \xi^2 k_2 - \eta^2 k_3) + (k_2 - \xi^2 k_2 + \eta^2 k_3)\cos(2k_1 t)\,. \qquad (6)$$

Інтегруючи (6) за часом від 0 до t, отримаємо уявні повороти у вигляді:

$$\theta_1(t) = \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3)\sin((k_2 - k_3)t)/(k_2 - k_3) +$$
$$+0,5\eta(k_2 + k_3)(1-\xi)\sin((2k_1 - k_2 + k_3)t)/(2k_1 - k_2 + k_3) -$$
$$-0,5\eta(k_2 + k_3)(1+\xi)\sin((2k_1 + k_2 - k_3)t)/(2k_1 + k_2 - k_3)\,;$$
$$\theta_2(t) = \eta(2k_1 + \xi k_2 + \xi k_3)(\cos((k_3 - k_2)t) - 1)/(k_2 - k_3) +$$
$$+0,5\eta(k_2 + k_3)(1-\xi)(\cos((2k_1 - k_2 + k_3)t) - 1)/(k_2 - k_3 - 2k_1) +$$
$$+0,5\eta(k_2 + k_3)(1+\xi)(\cos((2k_1 + k_2 - k_3)t) - 1)/(k_3 - k_2 - 2k_1)\,;$$
$$\theta_3(t) = (2\xi k_1 + k_2 + \xi^2 k_2 - \eta^2 k_3)t + (k_2 - \xi^2 k_2 + \eta^2 k_3)\sin(2k_1 t)/(2k_1)\,. \qquad (7)$$

Модельні значення квазікоординат (1) знаходяться з формули

$$\theta_{ni}^* = \theta_i(t_n) - \theta_i(t_{n-1})\,,\ i = 1,2,3\,, \qquad (8)$$

Таким чином еталонна модель обертання повністю визначається формулами (6), (7), (3), якщо задати частоти k_1, k_2, k_3 та параметри ξ, η, що задовольняють умовам $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Запропонована модель при $\xi = 0$, $\eta = 1$ і круговій перестановці $(3,1,2)$ компонент векторної частини кватерніона моделі перетворюється в модель (2), представлену в [7].

Чисельна реалізація моделі. Розглянемо модель обертання (6), (7), (3) при декількох наборах частот k_1, k_2, k_3 і параметрів ξ, η.

На рис.1 і рис.2 наведені залежності проекцій вектора модельної кутової швидкості від часу при $k_1 = -0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,045$ і різних наборах параметрів ξ, η. Відповідні залежності проекцій вектора модельної кутової швидкості від часу при $k_1 = -0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = 0,005$, $\xi = 0,6$, $\eta = 0,8$ приведені на рис.3. При значеннях параметрів $k_1 = -0,015$, $k_2 = 0,025$, $k_3 = -0,025$, $\xi = 0,6$, $\eta = 0,8$ модельний рух цілком відповідає випадку регулярної прецесії (рис. 4).

Очевидно, що запропонована тут модель обертання охоплює достатньо широкий спектр рухів об’єкта як твердого тіла.

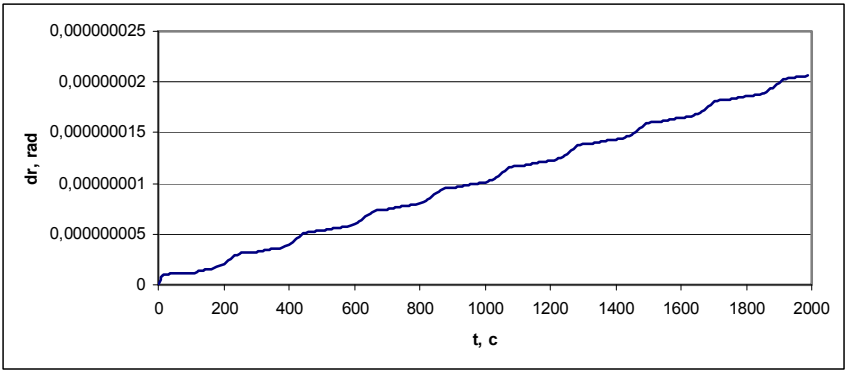


Рис. 7 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі $(\xi = 0,6; \eta = 0,8; k_3 = 0,005)$.

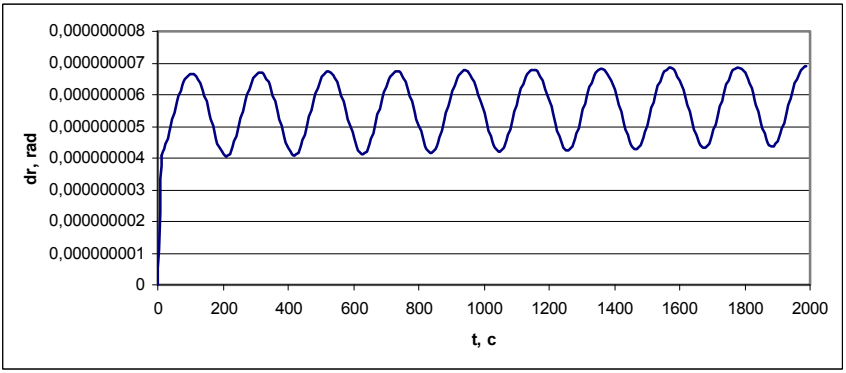


Рис. 8 – Похибка дрейфу алгоритму (9), (10) на моделі
$(\xi = 0,6; \eta = 0,8; k_1 = -0,015; k_2 = 0,025; k_3 = -0,025)$.

Оцінювання алгоритмів на еталонній моделі. Проведемо оцінювання похибки дрейфу для алгоритму визначення орієнтації третього порядку, наведеного в [1], для якого кватерніон повороту на такті задається формулами:

$$\Delta\lambda_{n0}^{*} = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}, \tag{9}$$

$$\Delta\vec{\lambda}_n^{*} = \frac{1}{2}\vec{\theta}_n^{*}(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}) + \frac{1}{24}(\vec{\theta}_{n-1}^{*} \times \vec{\theta}_n^{*}). \tag{10}$$

На рис. 5 – 8 представлені залежності похибки дрейфу від часу для еталонної моделі (6), (7), (3) при різних значеннях частот k_1, k_2, k_3 і параметрів ξ, η . Аналіз приведених залежностей дозволяє зробити висновок, що оцінювання алгоритму визначення орієнтації на моделі регулярної прецесії (рис.8) не можна вважати достатнім, бо в цьому випадку похибка дрейфу має гармо-

нічний характер при практично нульовій середній швидкості дрейфу, в той час як похибки дрейфу на рис.6 і рис.7 мають виражений зростаючий характер.

Висновки. Запропонована нова трьохчастотна тригонометрична еталонна модель обертання об'єкту, яка є узагальненням тригонометричної моделі, представленої в [7]. Показано, що за допомогою цієї моделі можна отримати достатньо широкий набір рухів об'єкта як твердого тіла. При відповідних значеннях параметрів представлена модель перетворюється на модель регулярної прецесії. Для алгоритму третього порядку на запропонованій еталонній моделі при різних значеннях параметрів отримані оцінки похибки дрейфу. Аналіз результатів дозволяє зробити висновок, що регулярна прецесія не є найгіршим рухом, на якому треба оцінювати точність алгоритмів визначення орієнтації, як це вважалося раніше [5]. Отже і оптимізація алгоритмів на регулярній прецесії не може вважатися доцільною.

Список літератури:1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М.: Наука, 1992. – 280 с. **2.** Mortensen R.E. Strapdown Guidance Error Analysis. – IEEE Trans. Aerospace and Electr. Syst., 1974, vol.10, No 4, pp.451–458. **3.** *Ткаченко А.И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1970.– Вып. 5.– С. 20–22. **4.** *Панов А.П.* Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела// Механика гироскоп. систем. – К., 1984. – Вып. 3.– С. 105–112. **5.** *Панов А.П.* Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987.– Вып. 73.– С. 3–9. **6.** *Плаксий Ю.А.* Аналитические оценки точности алгоритмов определения ориентации в кватернионах для случая регулярной прецессии объекта // Вестник Харьк. политехн. ин-та, №2.–1992, вып. 11.– С.79–83. **7.** *Кузнецов Ю.А, Олейник С.В., Деменков В.А., Плаксий Ю.А.* Применение моделей вращения для анализа погрешностей алгоритмов бесплатформенных инерциальных систем ориентации подвижных объектов // Труды XII Санкт-Петербургской Международной конференции по интегрированным навигационным системам. – С.-Петербург: ЦНИИ "Электроприбор", – 2010. – С. 114–116.

Надійшла до редколегії 23.05.2013

УДК 629.7.05

Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла / Ю. А. Плаксій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 141 – 147. Бібліогр.: 7 назв.

Предложена новая эталонная тригонометрическая модель вращения твердого тела, которая обобщает случай регулярной прецессии. Показано, что регулярная прецессия не является наихудшим движением при оптимизации алгоритмов определения ориентации.

Ключевые слова: кватернион, ориентация, эталонная модель, дрейф.

The new reference trigonometric model of a rigid body rotation that covers a case of a regular precession is offered. It is shown that the regular precession isn't the worst movement for optimization of orientation algorithms.

Key words: quaternion, orientation, reference model, drift.

УДК 628.336

Л.Д. ПЛЯЦУК, д-р техн. наук, проф., зав. кафедры «Прикладная экология», СумГУ, Сумы;
Е.Ю. ЧЕРНЫШ, аспирантка СумГУ, Сумы

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБЕЗВРЕЖИВАНИЯ ОСАДКОВ СТОЧНЫХ ВОД В БИОСУЛЬФИДОГЕННЫХ УСЛОВИЯХ

Предложена математическая модель обезвреживания осадков сточных вод в условиях биосульфидогенеза при диссимиляционном восстановлении малорастворимых сульфатов. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными, соответствующими динамике выходящего из биореактора биогенного газа. По характеру изменения кинетики выхода биогенного сероводорода, изменения концентрации ацетата и скорости потребления сульфатов можно осуществлять прогноз процесса биосульфидогенеза и находить наиболее оптимальные параметры системы.

Ключевые слова: сульфатвосстанавливающие бактерии, биогенный сероводород, осадки сточных вод, тяжелые металлы, математическая модель.

Введение. На сегодняшний день актуальным остается поиск путей снижения техногенного воздействия на окружающую среду органических и минеральных отходов, а также использование их как ценных вторичных материальных ресурсов. В этой связи перспективным является разработка экологически безопасной биотехнологии обезвреживания осадков сточных вод (ОСВ) с последующей утилизацией их в сельскохозяйственном производстве с использованием сульфурсодержащих добавок, являющихся гипсовыми отходами, таких как фосфогипс. Фосфогипс, как известно, нашел применение в сельском хозяйстве, в качестве мелиоранта. Это указывает на возможность его использования в биотехнологии обезвреживания ОСВ с получением комплексного органоминерального удобрения.

Обзор литературы. При исследовании кинетики процесса анаэробного сбраживания его традиционно разделяют на несколько стадий [1 – 6]: гидролиз и разложение органических макромолекул внеклеточными ферментами; кислотообразующая стадия; стадия производства биогаза. Анаэробное брожение состоит из множества биохимических реакций, которые происходят сериями и протекают одновременно [5, 7]. В связи со сложностью биохимических реакций и присутствием ингибиторов или трудноразлагаемых соединений в отходах, необходимо детальное изучение кинетики для понимания и оптимизации процесса. *Вавилов* [5, 6], *Калюжный* и др. [8], *Mosey* [9] разработали математические модели, описывающие кинетику ацидогенеза, этаноразлагающего ацетогенеза, бутиратразлагающего ацетогенеза, ацетокласти-

© Л. Д. Пляцук, Е. Ю. Черныш, 2013

ческого метаногенеза, гидрогенотрофного метаногенеза, бактериального распада. *Mosche* и *Jordening* [10] исследовали ацетат-, пропионат- деградацию и факторы торможения процесса. *Garcia* и др. [11] использовали указанные модели для описания анаэробного сбраживания отходов животноводства. *Munch* и др. [12] получили математическую модель, описывающую динамику образования летучих жирных кислот (ЛЖК). Модель была проверена путем сравнения полученных результатов с экспериментальными данными из литературных источников. Прогнозируемые и измеренные значения состояния стока ЛЖК, химического потребления кислорода (ХПК) и аммиак-*N* концентрации сравнивались при различном гидравлическом времени удержания сточных вод в анаэробном биореакторе. *Valentini* и др. [13] провели сравнение уравнений ферментации *Михаэлиса-Ментен* и кинетики разложения субстрата первого и второго порядков при анаэробной деструкции целлюлозных частиц известных размеров. Они представили общее кинетическое уравнение, которое включает в себя все четыре рассматриваемых уравнения, для уточнения математической формализации процесса гидролиза (первого этапа анаэробного брожения). В [14 – 16] рассмотрен процесс анаэробного биологического удаления сульфатов в форме сульфидов. Во время этого процесса сульфатвосстанавливающие бактерии (СВБ) используют сульфат в качестве акцептора электронов, метаболизируя сероводород. Одновременно с понижением концентрации сульфатов генерируется щелочность, в результате чего увеличивается водородный показатель pH и происходит осаждение тяжелых металлов (ТМ) в форме нерастворимых сульфидов. Отметим, что указанные исследования направлены на изучение процесса биологического восстановления растворимых сульфатов из промышленных стоков.

Цель исследования. Остается открытым вопрос о биохимических механизмах роста СВБ на малорастворимом минеральном субстрате, например, гипсовых отходах, которые могут использоваться в качестве источника акцепторов электронов - сульфатов. В Сумском государственном университете была разработана биосульфидная технология обезвреживания ОСВ совместно с фосфогипсом [17 – 19]. Целью данной работы является изучение кинетики процесса обезвреживания ОСВ в условиях диссимиляционного восстановления малорастворимых сульфатов и математическая формализация процесса.

Биохимическая модель процесса обезвреживания осадков сточных вод. Обезвреживание ОСВ в процессе диссимиляционного восстановления малорастворимых сульфатов, как в целом процесс анаэробного сбраживания, проходит в несколько этапов, при этом имеет ряд специфических особенностей, характеризующих протекание биосульфидогенеза на терминальном этапе разложения органического вещества ОСВ. Группы анаэробных гидролитиков и диссипотрофов осуществляют кислотогенную и водородную фазу

процесса. Продукты первичных анаэробов не могут быть разложены далее с выигрышем энергии, без удаления H_2 и ацетата из системы. Эту задачу выполняют вторичные анаэробы – СВБ, метаногены, ацетатогены – участвующие на терминальных этапах разложения органического вещества. Следовательно, вторичные анаэробы в качестве субстратов-доноров электронов получают ограниченный набор соединений, преимущественно водород и ацетат, и конкурируют за них.

Культивирование сульфидогенной ассоциации микроорганизмов проводилась с учетом специфики акцепторно-донорных взаимодействий внутри ассоциации. Были использованы среды следующего состава:

Среда-1 – анаэробный кровяной агар, который готовили на основе эритрит-агара с добавлением растворимых форм сульфата – $MgSO_4 \cdot 4H_2O$ (0,1 г/дм^3) и Na_2SO_4 (3,5 г/дм^3);

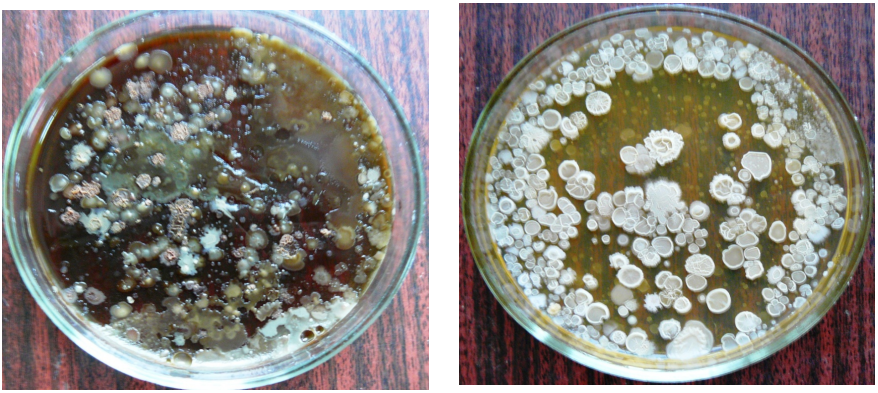
Среда-2 была специально разработана авторами из смеси фосфогипса и осадка с иловых карт городских очистных сооружений, отношение фосфогипс: ОСВ: дистиллированная вода — 1:1:5, агар-агар — 2%. В эту среду были добавлены ионы Zn^{2+} (500 мг/дм^3).

Приготовленные растворы, имеющие pH 8.00, заливали в чашки Петри. Внесение фосфогипса в Среду-2 обусловлено тем, что он служит источником сульфата в малорастворимой форме, а также ряда макро- и микроэлементов необходимых для жизнедеятельности СВБ. На поверхность готовых сред в чашки Петри добавляли в качестве источника биологического агента сброженные ОСВ после биосульфидного обезвреживания.

В Среде-1 явным признаком развития анаэробов было образование зон гемолиза, при этом кровь превращалась в прозрачную красную жидкость (рис.1, *а*).

В условиях Среды-2, наиболее приближенных к условиям проведения биосульфидного обезвреживания, бактерии образовывали колонии как на поверхности среды, так и внутри ее, вплоть до дна чашки. При этом примерно одна третья объема среды, имеющего белый цвет, приобрела светлую окраску и сильный запах H_2S. Светлая окраска обусловлена отложением сульфидов цинка, образующихся в результате взаимодействия сероводорода с ионами Zn^{2+}, что является качественной реакцией на присутствие в среде СВБ. Гладкая поверхность среды стала шероховатой со складчатой поверхностью и ворсинчатым краем (R-форма) (рис.1, *б*). Бактериальные клетки были сцеплены между собой и с субстратом, имели развитый матрикс.

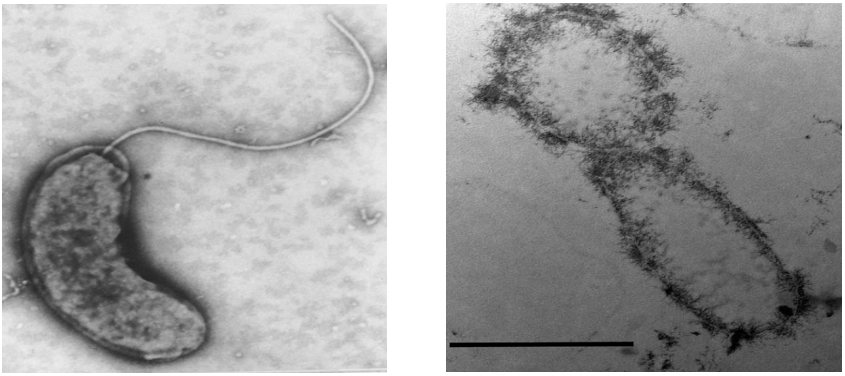
Таким образом, при наличии малорастворимых сульфатов в условиях анаэробиоза распад органического вещества идет при участии СВБ с образованием H_2S при ингибировании метаболизма других групп микроорганизмов, в частности метаногенов.



а *б*

Рис. 1 – Накопительная культура СВБ в чашке Петри:
а – Среда-1; *б* – Среда-2.

Результаты первичной идентификации на основании данных по морфологии, физиологии и по биохимическим свойствам показали присутствие в ассоциации видов микроорганизмов, относящихся к *Desulfovibrio sp., Desulfomicrobium sp.*(рис. 2, *а* и *б*).



а б

Рис. 2 – Электронная микрофотография: *а* – клетка *Desulfovibrio sp.*;
б – полутонкий (250-300 нм) срез клетки *Desulfomicrobium sp.* Ув. $x1\mu м$.

В процессе биосульфидного обезвреживания ОСВ в анаэробной ассоциации доминируют ацетатотрофные микроорганизмы, что связано с неполным окислением органического вещества до ацетатов. Следовательно, первостепенное значение для стабильной работы системы имеет удаление ЛЖК, в первую очередь ацетатов. В ином случае происходит закисание среды, снижение *pH* Н до 5,0.

Обезвреживание ОСВ на терминальном этапе разложения органического вещества в биосульфидогенных условиях, мы можем описать следующей системой реакций:

$$CH_3COOH + Y_{X_1/S}Y_{X_1/SO}SO_4^{2-} + Y_{X_1/S}Y_{X_1/NH_3}NH_3 \rightarrow Y_{X_1/S}Y_{X_2/S}C_5H_7O_2N +$$

$$+Y_{X_1/SO}Y_{H_2S/X_1}H_2S + Y_{X_1/S}Y_{CO_2/(X_1+X_2)}CO_2 + Y_{X_2/S}Y_{CH_4/X_2}CH_4 + a1_H H_2O; \quad (1)$$

$$C_5H_7O_2N + Y_{X_1/SO}SO_4^{2-} + a2_H H_2O \rightarrow Y_{H_2S/X_1}H_2S + Y_{CO_2/X_1}CO_2 + Y_{NH_3/X_1}NH_3; \quad (2)$$

$$CH_3COO^- + \frac{3}{2}H^+ + SO_4^{2-} \rightarrow \frac{1}{2}H_2S + \frac{1}{2}HS^- + 2CO_2 + HCO_3^- + H_2O; \quad (3)$$

$$nMeS + mS^{2-} \rightarrow (Me_nS_{n+m})^{2m-} \downarrow; \quad (4)$$

$$8HS^- + 9Me^{n+} + SO_4^{2-} \rightarrow 9MeS \downarrow + 4H_2O. \quad (5)$$

Здесь $Y_{X_1/S}$ и $Y_{X_2/S}$ – экономический коэффициент выхода биомасс СВБ и метаногенов по субстрату соответственно; $Y_{X_1/SO}$ – экономический коэффициент расхода сульфатов по биомассе СВБ; Y_{X_1/NH_3} – экономический коэффициент расхода аммиака по биомассе СВБ; Y_{H_2S/X_1} – экономический коэффициент выхода сероводорода по биомассе СВБ; $Y_{CO_2/(X_1+X_2)}$ – экономический коэффициент выхода углекислого газа по биомассе СВБ и метаногенов; $Y_{CH_4/S}$ – экономический коэффициент выхода метана по биомассе метаногенов; Y_{CO_2/X_1} – экономический коэффициент выхода углекислого газа по биомассе СВБ; $Y_{NH_3/X}$ – экономический коэффициент выхода аммиака при разложении микробной биомассы; Y_{NH_3/X_1} – экономический коэффициент выхода аммиака при разложении биомассы СВБ; $a1_H$, $a2_H$ – стехиометрические коэффициенты; Me – ионы ТМ, таких как Cd^{2+}, Cu^{2+}, Fe^{2+}, Fe^{3+}, Zn^{2+}, Cr^{3+}, Ni^{2+}.

Процесс разложения ацетатов до сероводорода, метана и углекислого газа с синтезом микробной биомассы ($C_2H_7O_2N$) и распадом этой биомассы представлены соответственно в уравнениях (1) и (2), при условии доминирования ацетатотрофных СВБ в пространстве биореактора (конкурентное ингибирование процесса метаногенеза). Поскольку обезвреживание проводится в условиях стимулирования сульфидогенеза, то в уравнении (3) показан процесс диссимиляционного восстановления сульфатов при разложении ацетатов без учета метаногенеза. В уравнениях (4) и (5) представлены химические реакции осаждения ионов ТМ биогенным сероводородом.

Схема и описание математической модели. Были выдвинуты следующие гипотезы: при непрерывном перемешивании весь объем биореактора однородно

заполнен; концентрации субстрата (S и $\left[SO_4^{2-}\right]$) и микробной биомассы (X) в каждой точке биореактора равны; с учетом равномерного распределения основного продукта метаболизма (H_2S) поведение этих концентраций во времени описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_{СВБ}}{d\tau} = \mu_{СВБ} \times X_{СВБ} - \mu_{отм} \times X_{СВБ}; \tag{6}$$

$$\frac{dS}{d\tau} = -\left(\frac{\mu_{СВБ} \times X_{СВБ}}{Y_{X_1/S}} + \frac{\mu_м \times C_M}{Y_{X_2/S}}\right); \tag{7}$$

$$\frac{d\left[SO_4^{2-}\right]}{d\tau} = r_{SO} \times \left(\left[SO_4^{2-}\right]_0 - \left[SO_4^{2-}\right]\right) - \frac{\mu_{СВБ} \times X_{СВБ}}{Y_{X_1/SO}}; \tag{8}$$

$$\frac{d(H_2S)}{d\tau} = \left[r_{SO} \times Y_{H_2S/X_1} \times X_{СВБ} \times \frac{\left[SO_4^{2-}\right]}{K_н + \left[SO_4^{2-}\right]} \times \frac{S}{K_S^1 + S}\right] \times b. \tag{9}$$

Здесь $X_{СВБ}$ – концентрация биомассы (белка) СВБ в биореакторе, г/дм^3; C_M – постоянная величина, характеризующая наличие биомассы метаногенов в биореакторе, г/дм^3; $\mu_{СВБ}$ и $\mu_м$ – удельные скорости роста СВБ и метаногенов соответственно, сут$^{-1}$; $\mu_{отм}$ – предельная максимальная удельная скорость отмирания клеток СВБ, сут$^{-1}$; S_0 – входная концентрация субстрата (ацетата), г/дм^3; S – концентрация субстрата в сбраживаемом ОСВ в пространстве биореактора, г/дм^3; $\left[SO_4^{2-}\right]_0$ и $\left[SO_4^{2-}\right]$ – концентрации общего сульфата в начальный и определенный момент времени τ , г/дм^3; r_{SO} – скорость биохимической конверсии малорастворимых сульфатов, сут$^{-1}$; b – поправочный коэффициент.

В уравнении (6) рост биомассы СВБ со временем ограничивается процессом ее отмирания (распадом) и концентрацией субстрата.

В уравнении (7) сумма

$$\frac{\mu_{СВБ} \times X_{СВБ}}{Y_{X_1/S}} + \frac{\mu_м \times C_M}{Y_{X_2/S}}$$

описывает процесс потребления органического субстрата двумя конкурирующими видами микроорганизмов – СВБ и метаногенами. Отрицательный знак определяет направленность процесса, т.е. убывание концентрации органического субстрата (ацетата) со временем.

Для расчета скорости роста СВБ использовали *уравнение Моно* [20], уточняли, что в процессе сульфатредукции в качестве экзогенного акцептора электронов выступает сульфат:

$$\mu_{СВБ} = \mu_{\max_1} \times \frac{S}{K_S^1 + S} \times \frac{\left[SO_4^{2-}\right]}{K_н + \left[SO_4^{2-}\right]},$$

где $\mu_{\max_1}$ – максимальная удельная скорость роста СВБ, сут$^{-1}$; K_S^1 – константа полунасыщения по субстрату (ацетат) для СВБ; $K_н$ – константа полунасыщения сульфатом.

Развитие популяции метаногенов ингибируется накоплением продукта жизнедеятельности СВБ – сероводородом. Поэтому уравнение для скорости процесса описывали по конкурентному механизму следующим образом:

$$\mu_м = \mu_{\max_2} \times \frac{S}{K_S^2 + S} \times \frac{K_{i(H_2S)}}{K_{i(H_2S)} + \left[H_2S\right]},$$

где $\mu_{\max_2}$ – максимальная удельная скорость роста метаногенов, сут$^{-1}$; K_S^2 – константа полунасыщения по субстрату (ацетату) для метаногенов; $K_{i(H_2S)}$ – константа ингибирования сероводородом метаболизма метаногенов, г/дм^3.

Величина C_M была определена исходя из следующих допущений: при наличии в системе сульфат-ионов СВБ развиваются раньше метаногенов вследствие более близкого родства к органическому субстрату; метаногенез ингибируется наличием в системе сероводорода. Тогда минимальную концентрацию биомассы метаногенов, при которой возможна активация процесса метаногенеза, мы определяли как постоянную величину C_M.

В уравнении (8) нами была учтена специфика процесса диссимиляционного восстановления малорастворимых сульфатов. Так, при открытии скобок в данном уравнении получим:

$$r_{SO} \times \left[SO_4^{2-}\right]_0 - r_{SO} \times \left[SO_4^{2-}\right].$$

Первое слагаемое характеризует скорость ввода в систему первой партии сульфат-ионов при растворении минерального субстрата (фосфогипса), второе – скорость потребления сульфат-ионов в системе при растворении первоначально непрореагированного минерального субстрата (фосфогипса). Эти два слагаемых отвечают за характер протекания процесса диссимиляционного восстановления малорастворимых сульфатов. Третье слагаемое $\mu_{СВБ} \times X_{СВБ} / Y_{X_1/SO}$ – расход сульфат-ионов в процессе наращивания биомассы СВБ.

Коэффициент r_{SO} вычисляли по формуле:

$$r_{SO} = \mu_{\max_1} \times \alpha_{SO\min} \times 1/Y_{X_1/SO}, \text{ (сут}^{-1}\text{)},$$

где $\alpha_{SO\min}$ – минимальная степень первоначальной конверсии малорастворимых сульфатов.

Транспорт сульфат-ионов внутрь клетки СВБ снижает их концентрацию

снаружи, что вызывает сдвиг равновесия и его выравнивание за счет выделения в среду новой партии ионов SO_4^{2-}. Следовательно, можно теоретически рассчитать минимальную степень первоначальной конверсии малорастворимых сульфатов, которую мы вычисляли по формуле:

$$\alpha_{SO\min} = \frac{\left[SO_4^{2-}\right]_P}{\left[SO_4^{2-}\right]_0 - \left[SO_4^{2-}\right]_P},$$

где $\left[SO_4^{2-}\right]_P$ – концентрация сульфат-ионов в жидкой фазе, т.е. первая партия сульфат-ионов доступная для использования СВБ, в начальный момент времени, г/дм^3; разница $\left[SO_4^{2-}\right]_0 - \left[SO_4^{2-}\right]_P$ в знаменателе – это содержание сульфатов, находящихся в нерастворенном состоянии в пространстве биореактора в начальный момент времени, г/дм^3.

Соответственно концентрация продукта метаболизма СВБ – биогенного сероводорода (H_2S) также зависит от скорости роста СВБ и скорости конверсии малорастворимых сульфатов. Эти закономерности описаны нами в уравнении (9). В процессе обезвреживания ОСВ часть сероводорода идет на осаждение ионов ТМ в форме нерастворимых сульфидов. Следовательно, для наилучшего совпадения экспериментальных и расчетных данных проводилась адаптация математической модели к реальным условиям работы биореактора за счет введения поправочного коэффициента b. При этом долю сероводорода N, которая пошла на осаждение ионов ТМ, вычисляли по формуле:

$$N = \sum_{i=1}^{m} n_i \times \frac{1}{m},$$

где m – время удержания ОСВ в процессе биосульфидной обработки, $m = 10$ сут.; n_i – доля биогенного сероводорода, пошедшего на осаждение ионов ТМ на *i*-сутки, рассчитывалась по формуле:

$$n_i = \frac{(H_2S)_{общ_i} - (H_2S)_{эксп_i}}{(H_2S)_{общ_i}},$$

где $(H_2S)_{общ_i}$ – общая концентрация сероводорода продуцированного СВБ на *i*-сутки, которая была первоначально определена в процессе математического моделирования, г/дм^3; $(H_2S)_{эксп_i}$ – концентрация сероводорода, выходящего из пространства биореактора на *i*-сутки, которая была определена по экспериментальным данным, г/дм^3.

Тогда $b = 1 - N$.

Составленная программа предусматривает интегрирование системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта 4-го порядка с получением

решений в графическом виде. В качестве среды разработки программы выбран MatLab (version 3.0).

При реализации математической модели использовали значения констант, которые представлены в табл. 1. Исходные данные определяли в соответсвии с биохимическими условиями проведения процесса обезвреживания ОСВ (табл. 2).

Таблица 1 – Константы, необходимые для реализации математической модели

Константа	Значение	Единицы измерения	Источник
$\mu_{\max_1}$	0,612	сут$^{-1}$	van Wageningen et al, 2006 [14]
$\mu_{отм}$	0,016	сут$^{-1}$	G.Kiely, 1997[3]
$\mu_{\max_2}$	0,370	сут$^{-1}$	H. Siegrist et al, 2002[21]
b	0,88	-	Экспертная оценка
K_S^1	0,024	г/дм^3	van Wageningen et al, 2006[14]
K_S^2	0,040	г/дм^3	H. Siegrist et al, 2002[21]
$K_{i(H_2S)}$	0,068	г/дм^3	Заварзин Г.А., 2002 [7]
$K_н$	0,0192	г/дм^3	van Wageningen et al, 2006[14]
Y_{H_2S/X_1}	1,580	-	Экспертная оценка
$Y_{X_1/S}$	0,033	-	van Wageningen et al, 2006[14]
$Y_{X_2/S}$	0,041	-	H. Siegrist et al, 2002[21]
$Y_{X_1/SO}$	0,018	-	Alper Bayrakdar et al, 2009[22]
C_M	0,08	г/дм^3	Экспертная оценка
$\alpha_{SO\min}$	0,177	-	Экспертная оценка

Таблица 2 – Исходные данные для проведения математического моделирования

Начальные условия	Значения	Единицы измерений
$X_{СВБ}^0$	0,0001	г/дм^3
S_0	0,126	г/дм^3
$\left[SO_4^{2-}\right]_0$	5,450	г/дм^3
$(H_2S)_0$	0,0001	г/дм^3

Обсуждение результатов. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что рост биомассы СВБ происходит в соответствии с типичной S-образной кинетической кривой роста микроорганизмов (рис. 3).

На начальном этапе развития процесса происходит накопление биомассы СВБ и глубина накопления составляет 30% от предельного значения (1 – 2 сут.). В этих условиях рост СВБ осуществляется по экспоненциальному закону. Однако невозможно определить, имеет ли место на кинетической кривой период индукции, поскольку он «маскируется» экспоненциальной фазой. Отчетливо представлена фаза линейного роста биомассы и стационарная фаза. Концентрация лимитирующего органического субстрата (ацетата) на терминальном этапе разложения ОСВ падает до нулевого уровня (рис. 4).

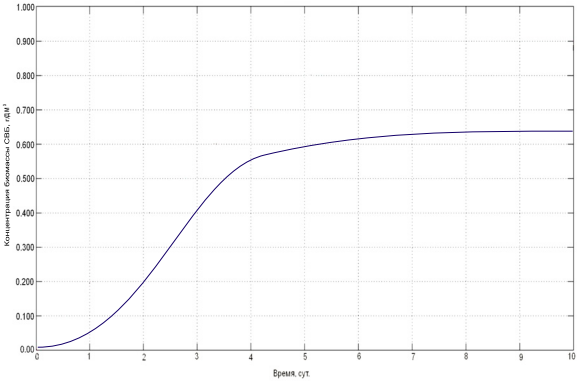


Рис. 3 – Изменение концентрации биомассы СВБ во времени.

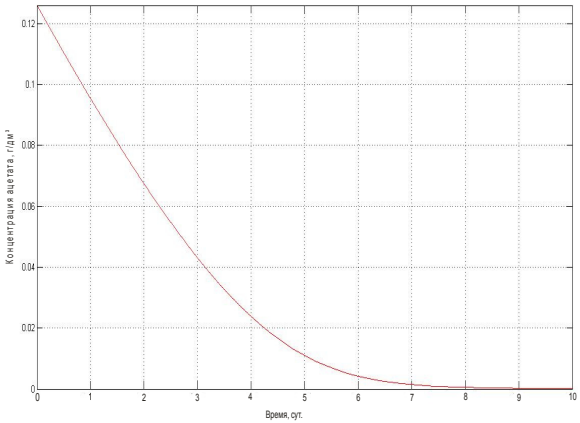


Рис. 4 – Изменение концентрации ацетатов во времени.

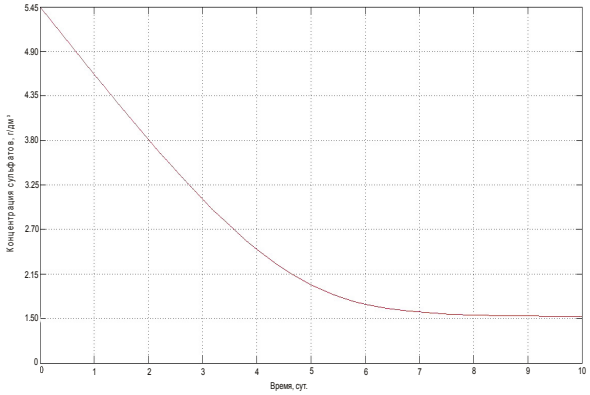


Рис. 5 – Изменение концентрации сульфатов во времени.

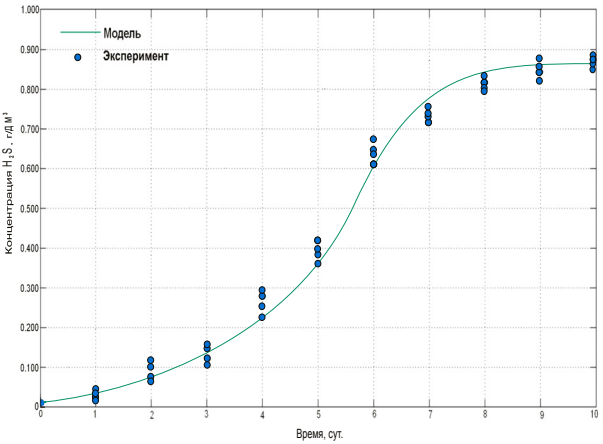


Рис. 6 – Изменение концентрации биогенного сероводорода во времени: сравнительный анализ теоретических и экспериментальных данных.

Удельную скорость роста культуры СВБ можно повысить и интенсифицировать процесс биосульфидогенеза увеличением начальной концентрации легкорастворимого органического субстрата. Динамика потребления сульфатов СВБ (рис. 5) свидетельствует об эффективности использования микроорганизмами малорастворимого минерального субстрата. В процессе биосульфидогенеза происходит восстановление данного субстрата (фосфогипса), что соответствует падению концентрации ионов сульфата до определенного уровня, который совпадает с периодом стабилизации выхода

биогенного газа. Следовательно, процесс образования сероводорода из сульфатов происходит интенсивно. Сульфат падает до уровня 1,5 г/дм^3 на 8 – 10 сутки. Полученная в результате математического моделирования кривая, соответствующая динамике выхода биогенного сероводорода по биомассе СВБ, имеет хорошую сходимость с опытными данными (рис. 6). Наибольший прирост концентрации сероводорода приходится на 4 – 7 сутки. Выход сероводорода стабилизируется на 8 – 10 сутки, что свидетельствует об эффективной работе микробиологической системы. При этом ЛЖК (преимущественно ацетаты) полностью используются сульфидогенной ассоциацией микроорганизмов (рис. 4).

Выводы. Результаты, полученные при математическом моделировании процесса обезвреживания ОСВ, согласуются с экспериментальными данными, соответствующими динамике биогенного газа, выходящего из биореактора. Характер изменения кинетики выхода биогенного сероводорода, концентрации ацетата и скорости потребления сульфатов позволяет осуществлять прогноз процесса биосульфидогенеза и определять наиболее оптимальные параметры системы. Кроме того, данная модель может служить в дальнейшем для автоматизации процесса обезвреживания ОСВ в промышленных масштабах и позволит прогнозировать динамику выхода биогенного сероводорода при условии мобилизации сульфидогенной ассоциации микроорганизмов на рабочих поверхностях – инертных носителях.

Список литературы: **1.** *Lyberatos G.* Modelling of anaerobic digestion – a review / G. Lyberatos, I. V. Skiadas // Global Nest: the Int. J.Vol 1. - 1999. - № 2. - Pp. 63 - 76. **2.** *Tomei M.C.* Anaerobic degradation kinetics of particulate organic matter in untreated and sonicated sewage sludge: Role of the inoculum / M.C. Tomei, C.M. Braguglia, G. Mininni. // Bioresource Technology. - 2008. - № 99. - Pp. 6119–6126. **3.** *Kiely G.* Physical and mathematical modelling of anaerobic digestion of organic waster/ G. Kiely, G. Tayfur, C. Dolan, K. Taunjf // War. Res. 1997. - Vol. 31, № 3. - Pp. 534-540. **4.** *Appels L.* Principles and potential of the anaerobic digestion of waste-activated sludge / Lise Appels, Jan Baeyens, Jan Degre` ve, Raf Dewil // Progress in Energy and Combustion Science. - 2008. - № 34.- Pp. 755–781. **5.** *Вавилин В.А.* Автокатализ и флуктуации в природе / В.А. Вавилин // Природа. - 2005. - №6. - С. 52 – 59.; Электронная версия- http://www.ibmh.msk.su/vivovoco. **6.** *Vavilin V. A.* The <Methane> simulation model as the first generic user-friend model of anaerobic digestion / V. A. Vavilin, L. Ya. Lokshina, S. V. Rytov// Vestnic Moskovskogo Universiteta. KHIMIYA. 2000. Vol. 41, No. 6. Supplement. Pp. 22-26. **7.** *Заварзин Г. А.* Введение в природоведческую микробиологию: Учебное пособие / Г. А.Заварзин, Н. Н. Колотилова. - М.: Книжный дом «Университет», 2001. — 256 с. **8.** *Kalyuzhnyi S.V.* Batch anaerobic digestion of glucose and its mathematical modeling. I. Kinetic investigations / S.V. Kalyuzhnyi, M.A. Davlyatshina //Bioresour. Technol. – 1997. - № 59 (1). – Pp. 73–80. **9.** *Mosey F.E.* Mathematical modelling of the anaerobic digestion process: regulatory mechanisms for the formation of short-chain volatile acids from glucose/ F.E. Mosey //Water Sci. Technol. – 1983. - №15. – Pp. 209–232. **10.** *Mosche M.* Comparison of different models of substrate and product inhibition in anaerobic digestion / M. Mosche, H.J. Jordening //Water Res. - 1999. - № 33(11) – Pp. 2545–2554. **11.** *Garcıa F.* Kinetic model for anaerobic digestion of livestock manure/ F.Garcıa, V.E.Santos, L.Naval, E. Guardiola, B.Lopez. // Enzyme Microbiol. Technol. - 1999. - № 25(1–2), 55–60. **12.** *Munch V.E.* Mathematical model of prefermenters-I. Model development and verification / V.E. Munch, J.Keller, P. Lant, R. Newell //Water Res. – 1999. - № 33(12). – Pp. 2757–2768. **13.** *Valentini A.* Anaerobic degrada-

tion kinetics of particulate organic matter: a new approach / A. Valentini, G. Garuti, A. Rozzi, A. Tilche // Water Sci. Technol. – 1997. - № 36(6–7). – Pp. 239–246. **14.** *Van Wageningen H.S.* Development of a kinetic model for biological sulphate reduction with primary sewage sludge as substrate / H.S. van Wageningen, S.W. Sötemann, N.E. Ristow, M.C. Wentzel, G.A. Ekama. // Water SA. – 2006. - Vol. 32, № 5. – Pp. 619-626. **15.** *Poinapen J.* Biological sulphate reduction with primary sewage sludge in an upflow anaerobic sludge bed (UASB) reactor –Part 4: Bed settling characteristics / J. Poinapen, G.A. Ekama, M.C. Wentzel. // Water SA (Online). – 2009. - Vol. 35, № 5. Электронная версия - http://www.scielo.org.za. **16.** *Poinapen J.* Biological sulphate reduction with primary sewage sludge in an upflow anaerobic sludge bed reactor – Part 6: Development of a kinetic model for BSR / J. Poinapen, G.A. Ekama. // Water SA (Online). – 2012. - Vol.36, №.3. Электронная версия - http://www.docstoc.com/docs/74282080 . **17.** *Черниш Є.Ю.* Теоретичне обґрунтування технології комплексної переробки осадів міських стічних вод / Є.Ю.Черниш, Л.Д. Пляцук // Екологічна безпека № 2/2011 (12). – С. 98-100. **18.** *Пляцук Л.Д.* Анализ производительности биореактора в процессе биосульфидной обработки осадков сточных вод / Л.Д. Пляцук, Е.Ю. Черныш // Наука и образование Южного Казахстана.- 2012.–№ 3/4 (94/95).- С.198-204. **19.** *Черниш Є.Ю.* Екологічні аспекти використання осадів стічних вод: механізми фіксації важких металів та їх видалення з осадів / Є.Ю.Черниш, Л.Д. Пляцук // Екологія та промисловість. - 2012. - № 3. - С. 82-87. **20.** *Варфоломеев С.Д.* Биотехнология: Кинетические основы микробиологических процессов / С.Д. Варфоломеев, С.В. Калюжный. М. Высш. шк., 1990.- 296 с. **21.** *Siegrist H.* Mathematical Model for Meso- and Thermophilic Anaerobic Sewage Sludge Digestion / Hansruedi Siegrist, Dea Vogt, Jaime L.Garcia-Heras, Willi Gujer. // Environ. Sci. Technol. 2002. - № 36. - Pp.1113-1123. **22.** *Bayrakdar A.* Performance of sulfidogenic anaerobic baffled reactor (ABR) treating acidic and zinc-containing wastewater / Alper Bayrakdar, Erkan Sahinkaya, Murat Gungor, Sinan Uyanik, A. Dilek Atasoy. // Bioresource Technology. – 2009. - № 100. –Pp. 4354–4360.

Поступила в редколлегию 29.04.2013

УДК 628.336

Математическое моделирование процесса обезвреживания осадков сточных вод в биосульфидогенных условиях / Л. Д. Пляцук, Е. Ю. Черныш // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 148 – 160. Бібліогр.: 22 назви.

Запропоновано математичну модель знешкодження осадів стічних вод в умовах біосульфідогенезу при дисиміляційному відновленні малорозчинних сульфатів. Отримані результати узгоджуються з експериментальними даними, які відповідають динаміці біогенного газу, що виходить із біореактора. За характером зміни кінетики виходу біогенного сірководню, зміни концентрації ацетату і швидкості споживання сульфатів, можна здійснювати прогноз процесу біосульфідогенеза та знаходити найбільш оптимальні параметри системи.

Ключові слова: сульфатвідновлюючі бактерії, біогенний сірководень, осади стічних вод, важкі метали, математична модель.

The mathematical model of sewage sludge detoxification under biosulfidogenic condition during insoluble sulfates dissimilation recovery was formed. The results are similar to the experimental data of the biogenic gas dynamics. By the nature of change in the kinetics of biogenic hydrogen sulfide release, concentrations of acetate and sulfate consumption rate can be use for forecast of biosulfidogenic process and determine the optimal parameters of the system.

Key words: sulfate-reducing bacteria, biogenic hydrogen sulfide, sewage sludge, heavy metals, mathematical model.

УДК 621.224

Ю.А. ПОДВОЙСЬКИЙ, наук. співр., НТУ «ХПІ»;
П.С. ЗАВ'ЯЛОВ, канд. техн. наук, проф. НТУ «ХПІ»;
Ю.М. КУХТЕНКОВ, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХПІ»

УТОЧНЕННЯ АЛГОРИТМУ І ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПУЛЬСАЦІЙ ТИСКУ ВІД ВИХРОВИХ ДЖГУТІВ У ВІДСМОКТУЮЧІЙ ТРУБІ ГІДРОТУРБІНИ

Надано короткий опис математичної моделі, алгоритм і особливості розрахунків низькочастотних пульсацій тиску вихрових джгутів у відсмоктуючій трубі для прогнозування характеристик на основі даних експериментальних досліджень і зондування потоку в трубі за допомогою датчиків-зондів тиску для гідротурбін на напори 100-300 метрів.

Ключові слова: модель пульсації тиску, вихрові джгути, гідротурбіна, відсмоктуюча труба, гармоніки коливань швидкості.

Актуальність теми. Вібраційний стан у гідротурбінах у значному ступені залежить від пульсацій тиску (ПТ), які обумовлені рухом вихрових джгутів (ВД) за робочими колесами у відсмоктуючій трубі (ВТ). Силова взаємодія вихорів з елементами проточного тракту може призвести до серйозних аварій. У більшості ці вихрові джгути мають складну просторову гвинтову форму, тому для розрахунку пульсацій треба використовувати просторові математичні моделі. Математичні моделі для розрахунків низькочастотних пульсацій повинні бути досить простими і у той же час, достатньо повно відображати закономірності робочого процесу, забезпечуючи необхідну точність розрахунків амплітуд та частот пульсацій у ВТ гідротурбін з використанням геометричних параметрів джгута – ексцентриситету, діаметру й кута нахилу вихрової лінії. Метою даної роботи є уточнення прогнозування пульсаційних характеристик гідротурбін на основі просторової математичної моделі руху ВД у відсмоктуючій трубі і визначення її особливостей.

Просторова математична модель розрахунку пульсацій тиску у відсмоктуючій трубі. На основі узагальнення існуючих підходів і проведених експериментальних досліджень ставилася та була вирішена завдання розробки просторової математичної моделі розрахунку ПТ від довільного числа фізичних ВД рівної інтенсивності з рівним кроком у циліндричній ВТ [1 – 4].

Стінка відсмоктуючої труби моделюється вихровою поверхнею, яка складається з нескінченно великого числа тонких вихрових шнурів змінної інтенсивності з кроком, що дорівнює кроку фізичних вихрових джгутів, які мають форму гвинтової спіралі, або поверхнею джерел. Завдання розгляда-

© Ю. А. Подвойський, П. С. Зав'ялов, Ю. М. Кухтенков, 2013

ється у квазістаціонарній постановці, рідина вважається нев'язкою. Потік поза вихором при визначенні індукованих швидкостей приймається потенціальним. Ураховано також додатковий осесиметричний потік, обумовлений проходженням рідини через робоче колесо. Завдання зводиться до пошуку швидкостей у будь-якій точці відсмоктуючої труби.

Важливим моментом для розрахунку ПТ була підготовка вказаних вище геометричних параметрів вихрових джгутів. Вона здійснювалася на основі апроксимації даних, що були одержані з візуальних експериментів з фотографуванням вихрових джгутів і з використанням датчика-зонда тиску.

Для вихрових джгутів гідротурбін на основі експериментів були одержані наступні поліноміальні залежності відносного ексцентриситету $\overline{e}$, відносного діаметра $\overline{d}_{ж}$, а також кута нахилення вихрової лінії $\beta_{ж}$ у полі універсальної пульсаційної характеристики у вигляді:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{e}(n_1', Q_1') = A_0 + A_1 Q_1' + A_2 Q_1'^2 \\ &\overline{d}_{ж}(n_1', Q_1') = B_0 + B_1 Q_1' + B_2 Q_1'^2 \\ &\beta_{ж}(n_1', Q_1') = 90°(1 - C_1 Q_1' + C_2 Q_2'^2 + C_3 Q_3'^3) \end{aligned}\right\}$$

де $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3$ – змінні коефіцієнти, що є поліномами від n_1'; параметри $\overline{e}, \overline{d}_{ж}, \beta_{ж}$ визначалися з фізичних експериментів або за допомогою приблизних емпіричних залежностей типу

$$\overline{e} = (4\left|(\overline{Q}_1' - \overline{n}_1')\right|\overline{Q}_1' + 1)/(4 + \left|(\overline{Q}_1' - \overline{n}_1')\right|\overline{Q}_1'),\ \beta_{ж} = 90(1 - k\sqrt{\overline{e}}),\ k = 0,7 - 0,9,$$

які теж були одержані на основі модельних експериментів для гідротурбін РО115–170.

Визначення циркуляції за робочим колесом здійснювалося на основі спрощеної осередненої осесиметричної задачі з урахуванням робіт *Етінберга І.Е.* і *Гольдіна Б.* [5].

Особливості використання математичної моделі для розрахунку пульсацій тиску від вихрових джгутів. Для знаходження інтенсивності вихрової поверхні відсмоктуючої труби $\gamma(\alpha_2)$ у розрахунковому перетині пропонується її модель у вигляді усіченого ряду Фур'є. Ступінь усікання полягає в обмеженому числі членів цього ряду до $n = 10$ гармонік. Із граничних умов *непротікання*, записаних для ряду точок поперечного перерізу ВТ у розрахунковому перетині, складена перепевна система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) в матричному вигляді. Вона записується як

$A\vec{x} = \vec{b}$, де $\vec{x}$ – вектор невідомих коефіцієнтів Фур'є.

Метод найменших квадратів (МНК) приводить до узагальненої системи

$$\tilde{A}Ax = \tilde{A}b,$$

де $\tilde{A}$ – транспонована матриця, а $\tilde{A}A$ – квадратна матриця розміру $2n \times 2n$,

незалежно від того, як сильно була перевизначена система.

Зазначимо,що знайдений із цієї системи узагальнений розв'язок не обов'язково повинен задовольняти першій системі через неточність вихідних даних, а саме коефіцієнтів матриці A і вільних доданків b. Крім того, при введенні інформації в ЕОМ, виникають похибки перекладу з однієї системи вирахування в іншу, обчислення елементарних функцій, використання обчислювальних алгоритмів, оскільки всі обчислення проводяться з округленням. Тому завжди виходить наближений розв'язок x, точність якого нас може не влаштовувати.

Тоді $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{z}$, де $\vec{z}$ – є уточнення розв'язку, а $\vec{x}_1$ – перше наближення до розв'язку. Маємо

$$A(\vec{x}_1 + \vec{z}) = \vec{b} \text{ і при цьому } A\vec{x}_1 + A\vec{z} = \vec{b}\text{, звідки } A\vec{z} = \vec{b} - A\vec{x}_1,$$

де розбіжність між правою частиною $\vec{b}$ і наближеною лівою частиною $A\vec{x}_1$ назвемо *нев'язкою* наближеного розв'язку $\vec{x}$, точніше *вектор-нев'язкою*, і позначимо цей вектор $\vec{r}_1$. Тоді замість вихідного рівняння будемо мати рівняння $A\vec{z} = \vec{r}_1$ для уточнення до наближеного розв'язку.

Оскільки звичайно модуль $\vec{r}_1$ набагато менше модуля правої частини $\vec{b}$, то отримане нове рівняння вдається розв'язати вже з більш високою абсолютною точністю, тому відносна точність наближеного розв'язку $\vec{x}_1$ повинна підвищуватися [6].

Апроксимація розв'язку системи лінійних рівнянь виконується за методом найменших квадратів з вагами [7]. При уточненні розв'язку системи $A\vec{x} = \vec{b}$ не всі нев'язки однаково рівнозначні. Щоб зрівняти вагомість нев'язок для методу найменших квадратів, необхідно користуватися цим методом з урахуванням ваги точок даних. Замість того щоб вирішувати завдання $\min\limits_{x} \sum\limits_{i=1}^{p} (\vec{b} - A\vec{x})_i^2$, щодо параметрів x, ми будемо вирішувати завдання $\min\limits_{x} \sum\limits_{i=1}^{p} w_i (\vec{b} - A\vec{x})_i^2$, де w_i – вага, що відбиває важливість точок даних, тобто кожній нев'язці можна приписати її вагу. Якщо помилка і-го рівняння e_i, то вибираємо $w_i = 1/e_i^2$. Усі програми, використовувані для розв'язку незваженої задачі МНК, можна використовувати для розв'язку зважених завдань. Для цієї мети необхідно зробити масштабування правої частини системи $\vec{b}$-та матриці коефіцієнтів A, тобто потрібно кожний рядок матриці A і рядок вектора $\vec{b}$ помножити на вагу w_i, а потім розв'язати наступне завдання мінімізації:

$$\min_x \sum_{i=1}^{p} (\vec{b}_w - A_w\vec{x})_i^{\,2} = \min_x (\vec{b} - A\vec{x})^T \vec{w}(\vec{b} - A\vec{x}) \ .$$

Так вага w_i була взята зворотною величиною до квадрата нев'язки для кожного $i-$го рядка системи, $w_i = 1/(b_i - \sum_{j=1}^{2n} A_{i,j}x_j)^{\,2}$, де i – фіксується й змінюється від 1 до p, а j – від 1 до $2n$, де n – число гармонік, p – число рівнянь.

Тоді коефіцієнти в новій системі будуть визначатися з вагами $w_i = 1/e_i^2$,

$$(b_w)_i = b_i/(b_i - \sum_{j=1}^{2n} A_{i,j}x_j)^{\,2} \text{ , а } (A_w)_i = A_{i,j}/(b_i - \sum_{j=1}^{2n} A_{i,j}x_j)^{\,2} \ .$$

Замість вихідної системи $A\vec{x} = \vec{b}$ необхідно вирішувати систему $A_w\vec{x} = \vec{b}_w$ зі зваженими на нев'язки коефіцієнтами. МНК із вагами був реалізований програмно мовою Фортрана і отримана пульсаційна характеристика для модельної турбіни РО230, рис. 1.

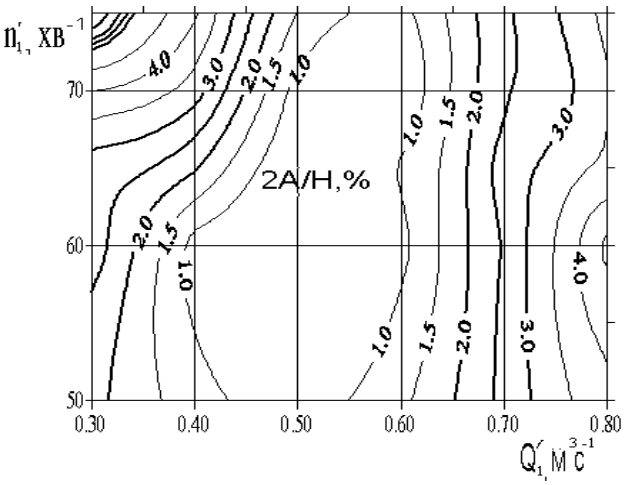


Рис. 1 – Пульсації тиску в трубі турбіни РО230 з рівняння Бернуллі по МНК з вагами.

Розв'язок системи $A\vec{x} = \vec{b}$ рівносильний відшуканню мінімуму квадрата нев'язки $\left|A\vec{x} - \vec{b}\right|$, тобто мінімуму функції

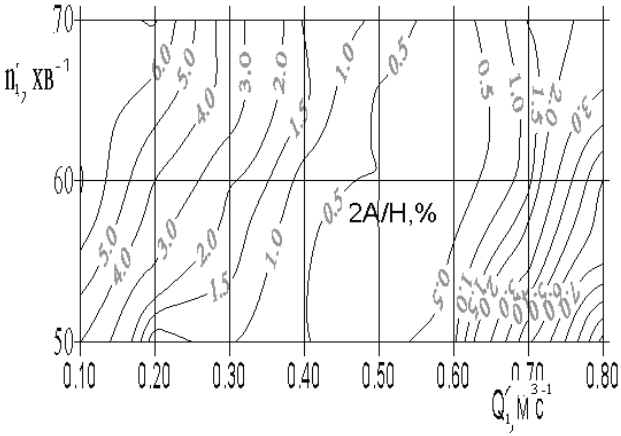
$$F(x_1, x_2, ..., x_N) = \left|A\vec{x} - \vec{b}\right|^2 \text{, або } F(\vec{x}) = \left|A\vec{x} - \vec{b}\right|^2 ,$$

де $\vec{x}$ (коефіцієнти Фур'є) – це вектор (x_1, x_2, ..., x_N). Для знаходження міні-

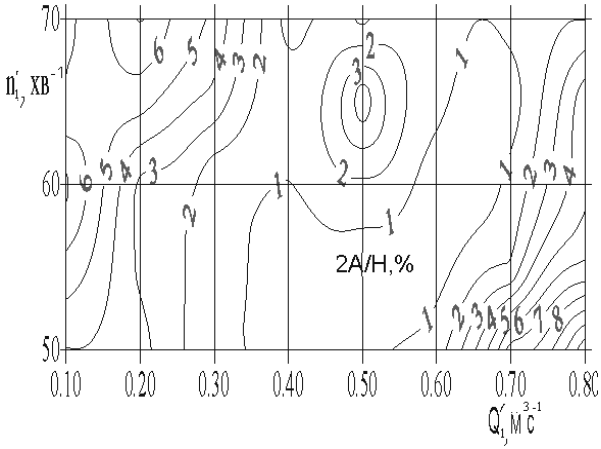
муму функції $n-$змінних, у нашому випадку $N = 20$, оскільки ми беремо $N = 2n$, $n = 10$ гармонік, застосовувався *метод покоординатного спуску* [8].

Для порівняння з отриманими результатами оптимізації використовується другий метод*: метод прямого пошуку*. Програма прямого пошуку є перекладом на мову Фортран Алгол-програми (178b) із [9].

Розрахунки проводилися для моделі гідротурбіни РО230 рис.2.



а



б

Рис. 2 – Пульсації тиску в трубі турбіни РО230 з рівняння Бернуллі:
а – отримано методом прямого пошуку; *б* – методом покоординатного спуску.

Порівняння методів пошуку оптимальних значень коефіцієнтів усіченого ряду Фур'є [10]. Метод покоординатного спуску не завжди дозволяє

знайти оптимальний розв'язок. Він добре працює у випадку нескладних цільових функцій, коли лінії рівня близькі за формою до окружностей або еліпсів. Якщо в цільову функцію входять члени, що містять добутки змінних $(x_1 x_2)$, то цей алгоритм працює погано. Якщо осі еліпсів нахилені до осей координат вихідної системи координат, то обчислювальна ефективність методу знижується через збільшення числа кроків пошуку й росту числа обчислень. Цей метод годиться для використання на перших стадіях розв'язку завдання, потім потрібно використовувати більш складні методи. До позитивних якостей методу покоординатного спуска відноситься можливість використання одномірних методів пошуку, таких як, наприклад, *метод золотого перетину*.

Цей метод не пристосований до пошуку глобального оптимуму, у той час як оптимізація нев'язки при розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь є багатоекстремальним завданням. Перш ніж користуватися цим методом, бажане переконатися, що лінії рівня цільової функції не мають точок зламу, що характерно для типу рельєфу цільової функції, який називають *яружним*.

Метод прямого пошуку Хука-Дживса більше використовує апріорні відомості про завдання й мають пам'ять, тобто зсуви в області змінних, які виявилися вдалими, фіксуються й потім використовуються у пошуку надалі, чого немає в методі покоординатного спуска. Метод прямого пошуку має велику тактичну гнучкість, оскільки, якщо він заходить у глухий кут, то повертається до найбільш удалої з колишніх базових спроб і змінює крок і напрямок пошуку. Тому він більш пристосований до пошуку глобального оптимуму. На практиці метод спуска є більш повільним, ніж метод прямого пошуку. Обидва методи не вимагають знаходження частинних похідних в аналітичному вигляді, оскільки диференціювання може збільшити складність завдання і ймовірність помилок при його реалізації.

Уточнення коефіцієнтів Фур'є було зроблено по методу прямого пошуку й методу покоординатного спуску. З'явилася можливість порівняти результати обох методів при розрахунках пульсацій тисків по *рівнянню Бернуллі* з експериментальними значеннями у полі універсальної характеристики.

На режимі $Q_1' = 0,3\ \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ і $n_1' = 60\ \text{хв}^{-1}$ прямий пошук дає пульсації тисків 2,25%, експеримент – 2,55%, покоординатный спуск – 1,8%. При $Q_1' = 0,3\ \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ і $n_1' = 65\ \text{хв}^{-1}$, маємо відповідно, – 3,65%, 3,5% і 3,35%. При $Q_1' = 0,4\ \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ і обертах $n_1' = 60\ \text{хв}^{-1}$ маємо – 0,8%, 1,3% і 1%. При $Q_1' = 0,4\ \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$ і $n_1' = 65\ \text{хв}^{-1}$ – 1,6%, 1,4% і 1,5%.

З порівняння цих результатів вбачаємо, що найбільше близькі до експерименту результати дає метод прямого пошуку. Щоб зменшити рівень осциляції графіку $\gamma(\alpha_2)$ напруженості вихрової поверхні відсмоктуючої труби в розрахунковому перетині застосовуємо $\sigma -$ *метод Ланцоша усікання ряду*

Фур'є [11].

Припускаємо, що напруженість вихрової поверхні відсмоктуючої труби в розрахунковому перетині $\gamma(\alpha_2)$ є функцією безперервною й періодичною, тому можливо її розкладання в ряд Фур'є:

$$\gamma(\alpha_2) = -\frac{\Gamma}{R\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos k\alpha_2 + \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+n} \sin k\alpha_2 \text{, де } \omega = 2\pi / T$$

– це основна частота розкладання, а T – період. Попереднє розкладання – окремий випадок цього розкладання, коли $\omega = 1$, тобто $T = 2\pi$. Тоді $\omega_k = k\omega = 2\pi k / T = 2\pi / (T / k)$ – це набір частот гармонійних коливань, що становлять $\gamma(\alpha_2)$ із періодами $T,\ T/2,\ T/3,\ \cdots T/N$, і частотами $2\pi / T,\ 2\pi / (T/2),\ 2\pi / (T/N)$. Оскільки $T = 2\pi$, маємо періоди $2\pi,\ 2\pi/2,\ \cdots\ 2\pi/N$ й частоти $1,\ 2,\ 3,\ \cdots N$. У залишку ряду Фур'є головної є гармоніка з періодом $T/(N+1)$ і частотою

$$\omega_{N+1} = (N+1)\omega = 2\pi(N+1)/T = 2\pi/(T/(N+1))$$

або періодом $T/(N)$ і частотою

$$\omega_N = (N)\omega = 2\pi(N)/T = 2\pi/(T/(N)) \text{ при } T = 2\pi .$$

Тому, якщо ми з розкладання заберемо останню $N-$ту гармоніку, ми перейдемо від повного ряду Фур'є до усіченого, що складається з ($N-1$) гармоніки. Щоб забрати із суми гармонік яку-небудь гармоніку, необхідно проінтегрувати цю суму по інтервалу, рівному періодові цієї гармоніки. Тоді інтеграл, як площа під цією гармонікою дорівнює нулю через її періодичність. Оскільки інтенсивність вихрової поверхні не може бути сильно осциляційною, необхідно зменшити ефект цих пульсацій. Зниження пульсацій $\gamma(\alpha_2)$ досягається за рахунок згладжування її усіченого ряду по періоду $T/(N)$ його останнього N-го залишеного доданку. Це згладжування являє собою інтегрування (усереднення) по періоду $T/(N)$ ряду Фур'є. Як наслідок, одержимо:

$$\gamma(\alpha_2) = -\frac{\Gamma}{R\pi} + \sum_{k=1}^{N} \sigma(N,k)(x_k \cos k\omega\alpha_2 + \sum_{k=1}^{N} \sigma(N,k) x_{k+n} \sin k\omega\alpha_2) ,$$

де $\sigma(N,k) = \sin(\pi k / N)/(\pi k / N)$ – це сігма-множники для ряду Фур'є.

Якщо $k = N$, то $\sigma(N,N) = \sin(\pi N / N)/(\pi N / N) = 0$.

Таким чином, вибирається з ряду остання N-а гармоніка, залишок ряду втрачає свою провідну гармоніку й повний ряд Фур'є зближається зі своїм усіченим, і при цьому зменшуються пульсації інтенсивності $\gamma(\alpha_2)$. У силу такого підходу ми всю інформацію про залишок ряду переносимо на перші його $N-1$ гармоніки.

У теорії спектрального аналізу сигналів цей підхід трактується як спо-

стереження сигналу через вузьке просвітчасте прямокутне вікно завширшки $T/(N)$, так зване *спектральне вікно*. Через це вікно проглядається весь ряд Фур'є у вигляді свого усередненого відрізку. Тоді згладжений усічений ряд Фур'є і похідні ряду Фур'є будуть помножені на відповідні сигма множники. Цей підхід реалізований у вигляді окремої програми мовою Fortran.

Алгоритм розрахунків пульсацій тиску у відсмоктуючій трубі турбіни. Цей алгоритм зводиться до наступних кроків:

– підготовка даних для розрахунку режимних і геометричних параметрів – Q'_{10}, n'_{10}, $\Delta Q'_1$, $\Delta n'_1$, R, $R_{2\text{вт}}$, $\overline{e}$, $\beta_{\text{ж}}$, $\overline{d}_{\text{ж}}$, кроку, числа витків вихрових джгутів та інших;

– визначення інтенсивності фізичних вихорів Γ_{2BT} з розв'язку осесиметричної задачі на вихідній кромці лопаті; обчислення компонент швидкостей фізичних вихорів;

– формування елементів матриці перевизначеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів x_k і x_{k+n}, які використовуються у функції напруженості вихрового кулі $\gamma(\alpha_2)$; формування нормальної системи рівнянь $\tilde{A}Ax = \tilde{A}b$; обчислення коефіцієнтів x_k і x_{k+n} з рішення перевизначеної системи методом Гауса; обчислення функції $\gamma(\alpha_2)$;

– розрахунок компонент швидкостей рідини від вихрової поверхні, або поверхні джерел, які моделюють стінку відсмоктуючої труби; обчислення сумарних швидкостей від фізичних вихорів, вихрової поверхні й складових швидкості додаткового осесиметричного потоку через турбіну; вибір екстремальних значень $V_{\max}$ і $V_{\min}$;

– розрахунок амплітуд пульсацій тиску з інтегралу Бернуллі; обчислення частот обертання вихрових джгутів і частот пульсацій тиску; побудова сумарної пульсаційної характеристики.

Програми для визначення пульсацій тиску складені на мові Фортран і в середовищі Mathcad. Одержані прогнозні пульсаційні характеристики для турбін РО115, РО230, РО310 розробки ВАТ «Турбоатом». Отриманий рівень пульсацій тиску є допустимим і гарантує надійну роботу гідротурбін.

Висновки. Робота спрямована на створення обґрунтованої методики чисельного прогнозування джгутових пульсацій тиску у відсмоктуючій трубі гідротурбіни на основі просторової математичної моделі, проведення комплексу експериментів по визначенню геометричних параметрів вихрових джгутів, що дозволило знайти для них аналітичні вирази.

Застосування спрощеної осесиметричної задачі дає можливість розраховувати інтенсивність вихрових джгутів з урахуванням геометрії вихідної кромки лопаті через циркуляцію у втулкових перетинах робочого колеса. Прове-

дене порівняння циркуляції, що була отримана на основі розрахунків, з циркуляцією, що була здобута із зондових випробувань, свідчить про задовільне їх узгодження.

Методи поліпшення нев'язки при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь – метод найменших квадратів з вагами, методи покоординатного спуску і прямого пошуку при знаходженні інтенсивності вихрової поверхні $\gamma(\alpha_2)$, що моделює стінку відсмоктуючої труби, дають приблизно однакову розбіжність розрахованої пульсаційної характеристики з експериментальною становить 0,3%, що і є допустимим.

Список літератури: **1.** *Григорьев В.Н.* Определение пульсаций давления в отсасівающей трубе под действием вихря за робочим колесом гидротурбины //Енергомашиностроение. – М., 1968.– №9. – с.42-44. **2.** *Зав'я-лов П.С.* Математичне моделювання низькочастотних пульсацій тисків від декількох вихрових джгутів за робочими колесоми гідротурбін і оборотних гідромашін // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.: – 1997. – С. 448-453. **3.** *Зав'ялов П.С., Кухтенков Ю.М., Подвойський Ю.А.* Прогнозування пульсацій тисків від декількох вихрових джгутів за робочим колесом РО гідротурбіни // Вісник НТУ «ХПІ». – Х.., 2001. – Вип. 129. – Ч.1. – С. 95-104. **4.** *Зав'ялов П.С., Кухтенков Ю.М., Подвойський Ю.А.,* К методу расчета пульсационных характеристик от вихревых жгутов за рабочим к.олесом гидротур-бины // Проблемы машиностроенияя, №2. –Х., 2003. – С. 84-92. **5.** *Єтінберг І.Є., Раухман Б.С.* Гидродинамика гидравлических турбин. – Машиностроение.– Л.,1978.– 279 с. **6.** Мышкис А.Д. Математика для втузов. «Наука».– М., 1971. – 632 с. **7.** *Каханер Д., Моулер К., Неш С.* Чисельні методи й програмне забезпечення. – М.: Мир. – 2001. – 256 с. **8.** *Мудров А.Е.* Чисельні методи для ПЕВМ на мовах Бейсик, Фортран, Паскаль. – М, 1985. - 335 с. **9.** Бібліотека алгоритмів. Довідковий посібник. – М.: Радіо й зв'язок, 1981. – Вып.4. – 158 с. **10.** *Банди Б.* Методи оптимізації. – М.: Радіо й зв'язок,.1988. – 127 с. **11.** *Ланцош К.* Практичні методи прикладного аналізу. Держвидавництво фізмат літератури. – М. 1961. – 267 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 621.224

Уточнення алгоритму і особливості розрахунку математичної моделі пульсацій тиску від вихрових джгутів у відсмоктуючій трубі гідротурбіни / Ю. А. Подвойський, П. С. Зав'ялов, Ю. М. Кухтенков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 161 – 169. Бібліогр.: 11 назв.

Даны краткое описание математической модели, алгоритм и особенности расчётов низкочастотных пульсаций давления вихревых жгутов в отсасывающей трубе для прогнозирования характеристик на основе данных экспериментальных исследований и зондирования потока в трубе с помощью датчиков-зондов давления гидротурбин на напоры 100-300 метров.

Ключевые слова: модель пульсации давления, вихревые жгуты, гидротурбина, отсасывающая труба, гармоники колебаний скорости.

Provided a brief description of the mathematical model, algorithm and calculation features low-pressure fluctuations in the vortex suction tube bundles for predicting performance based on experimental studies and probing flow in a pipe using pressure sensors, probes for the hydraulic pressure to 100-300 meters.

Key words: model pulsation pressure vortex bundles, hydraulic, suction pipe, harmonic oscillation speed.

УДК 330.322

О.В. ПРОХОРЕНКО, ст. викл., НТУ «ХПІ»,
А.О. ПРОХОРЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ЧИСЛОВІ ТА АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ВНУТРІШНЬОЇ НОРМИ ПРИБУТКОВОСТІ ІНВЕСТИЦІЙНИХ ПРОЕКТІВ

Описані математичні методи розв'язання задачі визначення внутрішньої норми прибутковості інвестиційного проекту. Запропоновано використовувати для визначення IRR в практиці розрахунків фінансового менеджменту числовий метод Ньютона.

Ключові слова: інвестиційний проект, норма прибутковості, формула приведеної вартості, ставка дисконтування.

Вступ та постановка задачі. Одним з методів оцінки інвестиційного проекту є визначення його *внутрішньої норми прибутковості IRR* (*Internal Rate of Return*). Проект вважається вигідним, якщо *IRR* вище ставки альтернативної прибутковості [1]. *IRR* є зручним критерієм і широко використовується у фінансах. Тому задача визначення його величини (або, більш розгорнуто, норми прибутковості дисконтованого грошового потоку) є актуальною й дуже важливою.

Внутрішня норма прибутковості (*IRR*) визначається як ставка дисконтування, при якій чиста приведена вартість проекту дорівнює нулю з формули для визначення чистої приведеної вартості (*NPV*) [1]:

$$NPV = \sum_{n=0}^{N} \frac{CF_{in_n}}{(1+r)^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{CF_{out_n}}{(1+r)^n} = 0 . \qquad (1)$$

В рівняння (1) входять такі величини: CF_{in} – вхідний грошовий потік (дохід); CF_{out} – вихідний грошовий потік (інвестиції); r – норма прибутковості; N – кількість інвестиційних періодів.

У результаті одержуємо рівняння зі степеневого кінцевого ряду великого порядку, до складу якого, до того ж, входять таблично задані функції $CF_{in}(n)$ і $CF_{out}(n)$. Аналітичний розв'язок такого рівняння викликає деякі труднощі. Тому на практиці прийнято визначати значення *IRR* числовими методами добору, лінійної інтерполяції або графічно [1].

Наприклад, при застосуванні *методу лінійної інтерполяції (екстраполяції)* обчислюють значення *NPV* при двох довільно обраних значеннях норми прибутковості r_1 і r_2, а потім знаходять наближене значення внутрішньої норми прибутковості IRR_{app} за формулою:

© О. В. Прохоренко, А. О. Прохоренко, 2013

$$IRR_{app} \approx \frac{NPV_1 \cdot r_2 - NPV_2 \cdot r_1}{NPV_1 - NPV_2}. \quad (2)$$

Результат такого рішення проілюстрований на рис. 1. Однак, як видно з рисунка, дійсна крива $NPV(r)$, що побудована за залежністю (1), має більш складний характер, близький до гіперболи, і це призводить до виникнення похибки обчислення

$$\Delta IRR = IRR_{app} - IRR_{acc}. \quad (3)$$

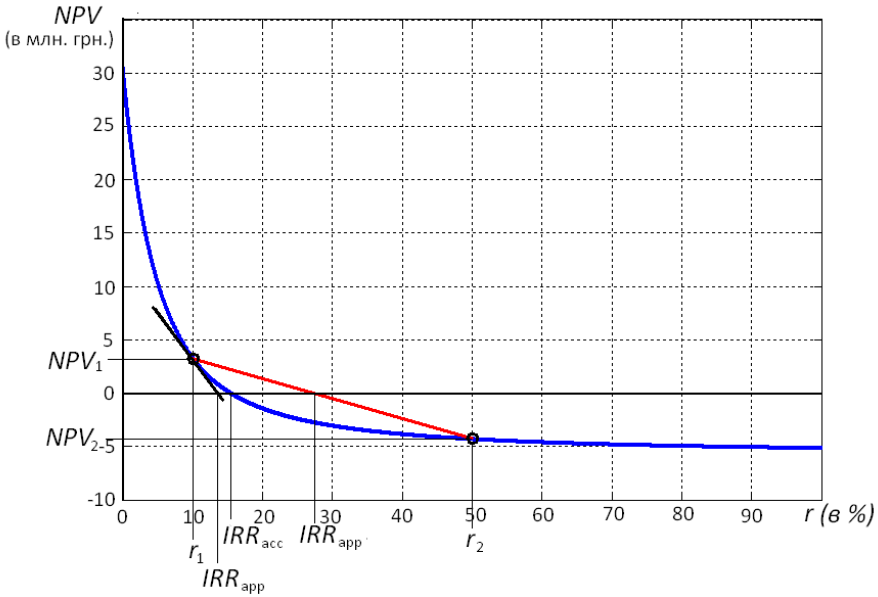


Рисунок – Залежність чистої приведеної вартості проекту NPV від норми прибутковості r.

Дана похибка може досягати значних величин, погіршувати якість результатів й, найчастіше, призводити до неправильних висновків.

Для вирішення викладеної проблеми можна запропонувати кілька методів обчислення більш точного значення величини *IRR*, опис реалізації яких і є **метою даної статті**.

Метод дотичних. Так саме, як і описаний на початку статті метод лінійної інтерполяції, метод дотичної належить до числових методів рішення й також дає наближений результат. Однак його перевага полягає в тому, що для визначення *IRR* потрібне попереднє знаходження значення NPV_1 тільки при одному довільно обраному значенні норми прибутковості r_1.

Далі слід скористатися формулою:

$$IRR_{app} \approx r_1 - \frac{NPV_1}{NPV_1'}, \tag{3}$$

де NPV_1' – значення похідної функції $NPV(r)$ у точці з абсцисою r_1. Формулу для визначення NPV' можна одержати, продиференціювавши рівняння (1) по r:

$$NPV' = \frac{dNPV}{dr} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{nCF_{in_n}}{(1+r)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{N} \frac{nCF_{out_n}}{(1+r)^{n+1}}. \tag{4}$$

Результат, обчислений цим методом, буде більш близький до істинного, що видно з рисунка.

Ітераційні методи. До ітераційних належать числові методи: *поділу відрізка навпіл (бісекції або дихотомії), хорд (січних), Ньютона* й інші, досить повно описані в [2, 3]. Суть цих методів полягає у виконанні повторюваних обчислень з метою наближення до точного результату. Так, при використанні для організації повторюваних обчислень описаного вище методу лінійної інтерполяції отримаємо реалізацію методу хорд, а при використанні методу дотичних – метод Ньютона. При цьому в якості початкових умов наступного ітераційного розрахунку приймається результат попереднього обчислення з повторенням до досягнення необхідної точності.

Найбільш швидку збіжність із перелічених методів має метод Ньютона. Для розв'язання завдання відшукання *IRR* з точністю до третьої значущої цифри, як показала практика, достатньо 4 – 6 ітерацій.

Поліноміальний метод. Цей метод є аналітичним методом рішення, а тому приводить до визначення точного значення шуканої величини.

Введемо такі позначення: $A_n = CF_{in_n} - CF_{out_n}$, $x = 1/(1+r)$. Тоді рівняння (1) можна привести до вигляду суми степеневого ряду:

$$NPV = \sum_{n=0}^{N} A_n x^n = 0, \tag{5}$$

У свою чергу, вираз (5) може бути записаний у вигляді полінома:

$$NPV = A_N x^N + A_{N-1} x^{N-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0. \tag{6}$$

Таким чином отримаємо рівняння *N*-го порядку, яке, відповідно, має N коренів, але тільки один з них є дійсним і позитивним (позначимо його X). Саме цей корінь і слід використовувати для визначення *IRR* за формулою:

$$IRR_{acc} = \frac{1}{X} - 1. \tag{7}$$

Матричний метод. Для застосування цього аналітичного методу вирі-

шення необхідно скласти супровідну матрицю полінома (6). Відомо, що *супровідною матрицею* називається квадратна матриця, характеристичним багаточленом якої є заданий поліном. Для рівняння (6) вона має вигляд:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\dfrac{A_{N-1}}{A_N} & -\dfrac{A_{N-2}}{A_N} & \cdots & -\dfrac{A_1}{A_N} & -\dfrac{A_0}{A_N} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тобто, власні значення матриці $\boldsymbol{A}$ є коренями рівняння (6), з описаною вище умовою одиничності шуканого кореня. Отже, при застосуванні даного методу знаходження значення *IRR*, задача зводиться до проблеми власних значень матриці $\boldsymbol{A}$.

Слід погодитися, що описані аналітичні методи хоча й дають абсолютно точний результат, але можуть виявитися складними й громіздкими в алгоритмізації. А враховуючи *предикативність* і *гіпотетичність* фінансового проектування, особлива точність обчислення такого показника, як *IRR*, може не знадобитися.

На закінчення зауважимо, що до складу математичного пакета MATLAB входить стандартна функція irr, яка призначена для розрахунків внутрішньої норми прибутковості ряду періодичних грошових потоків, тобто вирішує поставлену вище задачу безпосередньо в одну дію [4]. Алгоритм реалізації цієї функції базується на одному з аналітичних методів рішення та дає точний результат. Формат запису функції $\mathrm{IRR}=\mathrm{irr}(\mathrm{CF})$, де CF – вектор або матриця руху результуючого грошового потоку по періодах.

Висновки. З**а** результатами представленого в статті матеріалу можна стверджувати наступне.

Застосування аналітичних методів обчислення значення внутрішньої норми прибутковості інвестиційного проекту дозволяє одержати точне рішення задачі.

Достатня точність обчислень значення внутрішньої норми прибутковості інвестиційного проекту досягається при застосуванні відносно простого для розуміння й алгоритмізації методу Ньютона (методу дотичних в 4 – 6 ітераціях). Саме цей метод можна рекомендувати для впровадження в практику розрахунків фінансового менеджменту, що має підвищити якість аналітичних і проектних робіт без додаткових витрат часу й ресурсів.

Список літератури: 1. *Брейли Р., Майерс С.* Принципы корпоративных финансов 2-е рус. изд. (*пер. Н. Барышниковой* с 7-го междунар. изд.). – М.: ЗАО "Олимп-Бизнес", 2008. – 1008 с. **2.** *Дьяконов В.П.* Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука, 1989. – 240 с. **3.** *Бахвалов Н.В., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Чи-

сленные методы: учеб. пособие для вузов. – М: Лаборатория Базовых Знаний, 2000. – 622 с. **4.** *Лавров К.Н., Цыплакова Т.П.* Финансовая аналитика. MATLAB 6. – М.: Диалог-МИФИ, 2001. – 368 с.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 330.322

Числові та аналітичні методи розрахунку внутрішньої норми прибутковості інвестиційних проектів / О. В. Прохоренко, А. О. Прохоренко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 170 – 174. Бібліогр.: 4 назви.

Описаны математические методы решения задачи определения внутренней нормы доходности инвестиционного проекта. Предложено использовать для определения IRR в практике расчетов финансового менеджмента численный метод Ньютона.

Ключевые слова: инвестиционный проект, норма доходности, формула приведенной стоимости, ставка дисконтирования.

The paper describes the mathematical methods for solving the problem of determining Internal Rate of Return on the investment project. Proposed to use to determine the IRR calculation in the practice of financial management numerical method of Newton.

Key words: investment project, the rate of return, present value formula, the discount rate.

УДК 519.63:621.165

А.В. РУСАНОВ, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ОБОБЩЕНИЕ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрена неявная безытерационная конечно-объёмная схема расщепления высокого порядка точности по пространственным координатам для численного интегрирования уравнений газодинамики на неструктурированных сетках. Представлены результаты численного моделирования дозвуковых и сверхзвуковых невязких течений сжимаемого газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента. Проведено сравнение полученных результатов с данными численного моделирования в программном комплексе вычислительной газогидродинамики FlowER-U.

Ключевые слова: неявная схема, высокая точность, расщепление, неструктурированная сетка, невязкое течение.

Введение. Интенсивное развитие энергомашиностроения, авиационной и многих других отраслей техники неразрывно связано с решением задач газодинамики для широкого диапазона режимных параметров и конфигураций обтекаемых тел. При использовании сеточных численных методов дискретизацию расчётных областей сложной формы удобно выполнять с помощью

© А. В. Русанов, 2013

гибридных неструктурированных сеток [1].

При моделировании газодинамических процессов, особенно стационарных, широко применяются неявные разностные схемы. Они обладают большей устойчивостью, чем явные, и позволяют увеличить скорость сходимости численного решения при использовании *метода установления по маршевой координате* [2]. В работах [3, 4] представлена новая неявная конечно-объёмная схема с расщеплением по пространственным и характеристическим направлениям, ориентированная на использование неструктурированных сеток с произвольной формой ячеек. Решение сформированной системы уравнений выполняется безытерационно. В настоящей работе приведено обобщение данного метода для численного решения системы уравнений Эйлера при моделировании до- и сверхзвуковых течений газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента. Выполнено сравнение полученных результатов с результатами численного моделирования в программном комплексе вычислительной газогидродинамики FlowER-U.

Математическая модель. Рассматривается численное решение *системы уравнений Эйлера*, записанной в интегральной форме. В двумерном случае в декартовой системе координат она имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega} Q(x,y,t)\,dxdy + \oint_{\partial\Omega}\left(E(Q)n_x + F(Q)n_y\right)dL = 0\,,\ t>0\,, \qquad (1)$$

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \dfrac{p}{\gamma-1}+\rho\dfrac{u^2+v^2}{2}\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \dfrac{\gamma pu}{\gamma-1}+\rho u\dfrac{u^2+v^2}{2}\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ \dfrac{\gamma pv}{\gamma-1}+\rho v\dfrac{u^2+v^2}{2}\end{pmatrix},$$

где $(x,y)\in\Omega$ – декартовы координаты точки в расчётной области Ω с границей $\partial\Omega$; t – координата времени; Q, E, F – вектор консервативных переменных и векторы потоков; ρ, u, v, p – плотность, компоненты вектора скорости и статическое давление газа (компоненты вектора *примитивных переменных* q); γ – показатель адиабаты газа.

К неизвестным применяется обезразмеривание следующего вида:

$$\tilde{p}=\frac{p}{\rho_* a_*^2}\,,\ \tilde{u}=\frac{u}{a_*}\,,\ \tilde{v}=\frac{v}{a_*}\,,\ \tilde{\rho}=\frac{\rho}{\rho_*}\,,\ \tilde{t}=a_* t\,,$$

где ρ_*, a_* – характерная плотность и скорость потока.

После обезразмеривания вид уравнений не меняется, поэтому для дальнейшего описания знак « ~ » над безразмерными переменными опускается. В момент времени $t=0$ задано начальное распределение вектора перемен-

ных. При моделировании стационарных физических полей часто прослеживается независимость решения задачи от начальных данных, поэтому они могут задаваться постоянными во всей расчётной области. Для постановки граничных условий выделяются участки втекания и вытекания газа (границы «входа» и «выхода»), поверхности обтекаемых тел («стенка») и другие. Подробное описание разновидностей граничных условий и способов их реализации для каждого из таких участков представлено в работах [2, 5, 6].

Пространственно-временная дискретизация. Особенности реализации неявной схемы. Дискретизация расчётной области Ω выполняется с помощью неструктурированной сетки

$$G = \{P_i\}_{i=1}^{N_G},\ \mathrm{int}(P_i) \neq \varnothing,\ \mathrm{int}(P_i) \cap \mathrm{int}(P_j) = \varnothing,$$

где P_i – ячейка сетки; N_G – общее количество ячеек. В работе применяются ячейки с кусочно-линейной границей

$$L_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \Gamma_j^i,\ \left|\Gamma_j^i\right| \neq 0\ \forall\, j,$$

где $\Gamma_j^i, \left|\Gamma_j^i\right|$ – j ребро ячейки P_i и его длина, а N_i – общее количество рёбер ячейки.

Система уравнений (1), записанная для ячейки $P_i \in G$ неструктурированной сетки, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\overline{Q}_i(t) = R_i(Q),\ t > 0, \tag{2}$$

$$\overline{Q}_i(t) = \frac{1}{S_i}\iint_{P_i} Q(x,y,t)\,dxdy,\ R_i(Q) = -\frac{1}{S_i}\oint_{L_i}\left(E(Q)n_x + F(Q)n_y\right)dL,\ i = \overline{1, N_G},$$

где S_i – площадь ячейки P_i; $\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j}$ – вектор внешней единичной нормали к рёбру контрольного объёма.

На временной оси задаётся разбиение вида

$$t_n = \Delta t \cdot n,\ \Delta t > 0,\ n \in N \cup \{0\},$$

где $\Delta t = \dfrac{\nu \cdot d}{a_*}$ – шаг временной сетки; n – номер временного слоя; d – характерный линейный размер разностной сетки; ν – *число Куранта*, варьируемое с целью удовлетворения требованиям устойчивости разностной схемы.

В системе уравнений (2), записанной в момент времени $t = t_{n+1}$, выполняется аппроксимация производной по времени с помощью трёхслойного разностного выражения вида

$$\left.\frac{d\overline{Q}}{dt}\right|_i^{n+1} \approx \frac{(1+\chi)\delta\overline{Q}_i^{n+1} - \chi\delta\overline{Q}_i^{n}}{\Delta t},\ \delta\overline{Q}_i^{n+1} = \overline{Q}_i^{n+1} - \overline{Q}_i^{n},$$

а также линеаризация векторов потоков:

$$E^{n+1} \approx E^n + \vartheta \cdot A\big|_{t=t_n} \delta Q^{n+1},\ E^{n+1} = E\big(Q(x,y,t_{n+1})\big),$$

$$F^{n+1} \approx F^n + \vartheta \cdot B\big|_{t=t_n} \delta Q^{n+1},\ F^{n+1} = F\big(Q(x,y,t_{n+1})\big),$$

$$\delta Q^{n+1} = Q(x,y,t_{n+1}) - Q(x,y,t_n) = Q^{n+1} - Q^n.$$

В работе используются значения $\chi = 0.5$ и $\vartheta = 1$. *Матрицы Якоби* $A = \partial E / \partial Q$ и $B = \partial F / \partial Q$ приводятся к диагональному виду:

$$\Lambda_x = L_x^{-1} A L_x = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(x)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^{(x)} \end{pmatrix},\ \Lambda_y = L_y^{-1} B L_y = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(y)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^{(y)} \end{pmatrix},$$

где Λ_x, Λ_y – диагональные матрицы, составленные из вещественных собственных значений A и B; L_x^{-1}, L_y^{-1} – матрицы, составленные из собственных векторов A и B.

Для учёта характеристических направлений матрицы Якоби представляются в виде суммы матриц с неотрицательными и неположительными собственными значениями:

$$A = A^+ + A^-,\ A^\pm = L_x \Lambda_x^\pm L_x^{-1},\ \Lambda_x^\pm = \frac{\Lambda_x \pm |\Lambda_x|}{2},$$

$$B = B^+ + B^-,\ B^\pm = L_y \Lambda_y^\pm L_y^{-1},\ \Lambda_y^\pm = \frac{\Lambda_y \pm |\Lambda_y|}{2},$$

где $|\Lambda|$ – это диагональная матрица, составленная из модулей элементов Λ.

Для учёта пространственных направлений аналогичным образом выполняется разложение компонент вектора нормали к j ребру:

$$n_\psi = n_\psi^+ + n_\psi^-,\ n_\psi^\pm = \frac{n_\psi \pm |n_\psi|}{2},\ \psi = [x, y],$$

где ψ принимает значение x или y.

Интеграл по границе ячейки P_i, полученный после подстановки линеаризованных векторов потоков и содержащий δQ^{n+1}, вычисляется приближенно с помощью *формулы прямоугольников*. В результате описанных действий система уравнений (2) преобразуется к виду

$$\delta\overline{Q}_i^{n+1} + \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\sum_{\psi=x,y}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|\left\langle\left(n_\psi^+ C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} + \left(n_\psi^- C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i}\right\rangle + \tag{3}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\sum_{\psi=x,y}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|\left\langle\left(n_\psi^- C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} + \left(n_\psi^+ C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i}\right\rangle = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^n + \frac{2}{3}\Delta t\, R_i\left(Q^n\right).$$

Приближенные значения потоков $(n_\psi^\sigma C_\psi^\zeta \delta Q^{n+1})_{\Gamma_j^i}$, где $\sigma = \pm$ и $\zeta = \pm$, с учётом взаимного расположения смежных ячеек и проекций характеристических направлений на координатное направление ψ определяются с ошибкой $O(d)$ следующим образом:

$$n_{\psi,\Gamma_j^i}^+\left(C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} \approx n_{\psi,\Gamma_j^i}^+ C_{\psi,i}^+ \delta\overline{Q}_i^{n+1},\ n_{\psi,\Gamma_j^i}^+\left(C_\psi^+ \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} = n_{\psi,\Gamma_j^i}^+ C_{\psi,i}^+ \delta\overline{Q}_i^{n+1},$$

$$n_{\psi,\Gamma_j^i}^-\left(C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} \approx n_{\psi,\Gamma_j^i}^- C_{\psi,i}^- \cdot \delta\overline{Q}_i^{n+1},\ n_{\psi,\Gamma_j^i}^+\left(C_\psi^- \delta Q^{n+1}\right)_{\Gamma_j^i} \approx n_{\psi,\Gamma_j^i}^+ C_{\psi,i_j}^- \delta\overline{Q}_{i_j}^{n+1},$$

где i_j – номер смежной по j ребру ячейки P_{i_j}; $C_{\psi=x} = A$; $C_{\psi=y} = B$.

После подстановки данных приближений вид (3) полностью определён для любой внутренней ячейки неструктурированной сетки. Для граничных рёбер требуется постановка дополнительных условий на неявном слое. При моделировании стационарных физических полей для всех типов физических границ часто применяют соотношение $\delta\overline{Q}_{i_j}^{n+1} = 0, i_j > N_G$ [2].

Введём матричные операторы, связанные с координатными и характеристическими направлениями, и систему (3) представим в виде

$$\left(I + \tilde{C}_x^+ + \tilde{C}_x^- + \tilde{C}_y^+ + \tilde{C}_y^-\right)\delta\overline{Q}^{n+1} = R^n, \tag{4}$$

где

$$\left(\tilde{C}_\psi^\pm \delta\overline{Q}^{n+1}\right)_i = \frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\left(\left(\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right| n_{\psi,\Gamma_j^i}^\pm\right) C_{\psi,i}^\pm \delta\overline{Q}_i^{n+1} + \left(\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right| n_{\psi,\Gamma_j^i}^\mp C_{i_j}^\pm \delta\overline{Q}_{i_j}^{n+1}\right)\right),$$

$$\psi = x, y,$$

$$\left(I \cdot \delta\overline{Q}^{n+1}\right)_i = \delta\overline{Q}_i^{n+1},\ R_i^n = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^n + \frac{2}{3}\Delta t\, R_i\left(Q^n\right),\ i = \overline{1, N_G}.$$

Решение системы (4) выполняется с использованием приближенной факторизации, что приводит к разностной схеме в дробных шагах следующего вида:

- определение правой части системы (4) –

$$\text{шаг 0: } R_i^n = \frac{1}{3}\delta\overline{Q}_i^n + \frac{2}{3}\Delta t\, R_i\left(Q^n\right);$$

- приближенное обращение матричного оператора в (4) –

$$\text{шаг 1а: } \left(I+\tilde{C}_x^{+}\right)\delta\overline{Q}^{n+1/4}=R^n\,;$$

$$\text{шаг 1б: } \left(I+\tilde{C}_x^{-}\right)\delta\overline{Q}^{n+2/4}=\delta\overline{Q}^{n+1/4}\,;$$

$$\text{шаг 2а: } \left(I+\tilde{C}_y^{+}\right)\delta\overline{Q}^{n+3/4}=\delta\overline{Q}^{n+2/4}\,;$$

$$\text{шаг 2б: } \left(I+\tilde{C}_y^{-}\right)\delta\overline{Q}^{n+1}=\delta\overline{Q}^{n+3/4}\,;$$

- определение переменных на неявном временном слое –

$$\overline{Q}^{n+1}=\overline{Q}^{n}+\delta\overline{Q}^{n+1}\,.$$

Выражение $R_i(Q^n)$ на шаге 0 аппроксимируется с заданным высоким порядком точности (вторым, третьим и т.д.) по пространственным координатам, для чего выполняется построение кусочно-полиномиальной реконструкции вектора переменных с многочленом соответствующей степени (второй, третьей и т.д.) [7].

Уравнения для шагов 1а, 1б, 2а, 2б могут быть записаны в общей форме:

$$\left(I+\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\left(\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|n^{\pm}_{\psi,\Gamma_j^i}\right)C^{\pm}_{\psi,i}\right)\delta\phi_i^{*}+\frac{2}{3}\frac{\Delta t}{S_i}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Gamma_j^i\right|n^{\mp}_{\psi,\Gamma_j^i}C^{\pm}_{i_j}\delta\phi^{*}_{i_j}=\mathrm{f}_i\,, \qquad (5)$$

где $\delta\phi^{*}$ – искомый вектор; f – правая часть уравнения.

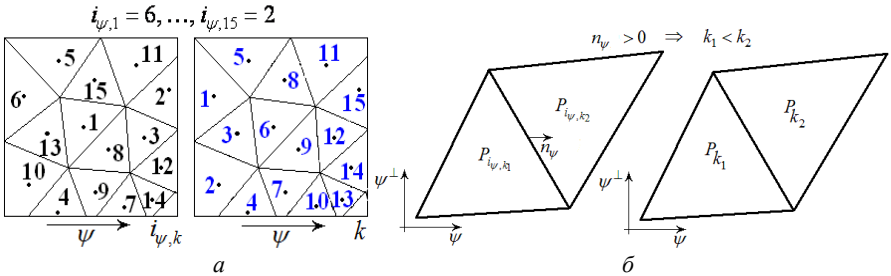


Рис 1 – Критерий перенумерации и пример его использования.

Матрица системы (5) для исходной нумерации ячеек сетки является разреженной и содержит не нулевые элементы, расположенные над и под главной диагональю. Увеличение эффективности процедуры решения системы выполняется благодаря перенумерации ячеек исходной сетки для координатных направлений x и y. Каждой ячейке соответствует локальный номер $1\le k\le N_G$, а её номер для исходной сетки обозначается $i_{\psi,k}$ (рис. 1, *а*). При сортировке используется критерий: из двух смежных ячеек i_{ψ,k_1} и i_{ψ,k_2} (рис. 1, *б*) меньший локальный номер имеет та, у которой проекция вектора

внешней нормали к общему ребру на координатное направление ψ является положительной.

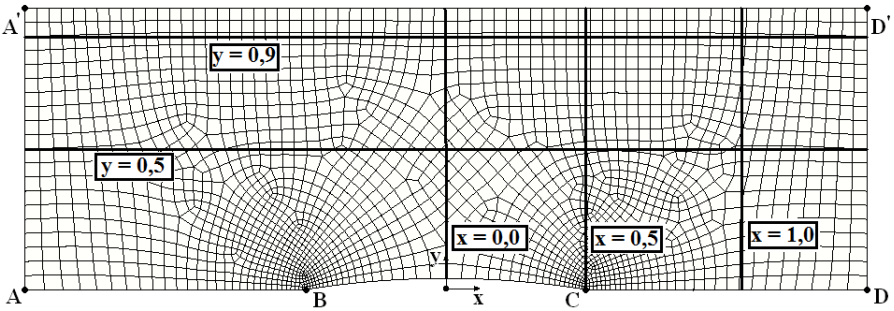


Рис. 2 – Вид и дискретизация расчётной области.

После сортировки матрица системы (5) принимает блочно-треугольный вид, в результате чего компоненты искомого вектора определяются с использованием явных формул. На дробных шагах 1а и 2а порядок определения соответствует увеличению номера k от 1 до N_G (проход вперёд вдоль координатного направления ψ), а на дробных шагах 1б и 2б – уменьшению номера k от N_G до 1 (проход назад вдоль координатного направления ψ) по указанной формуле.

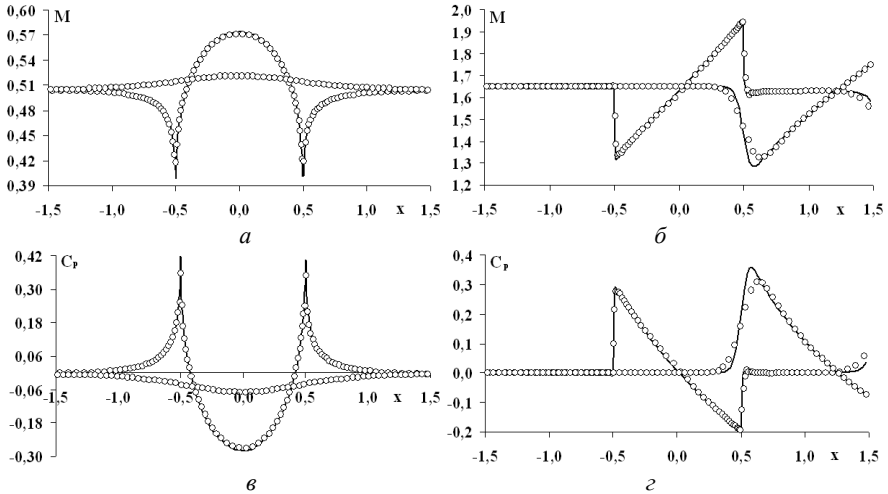
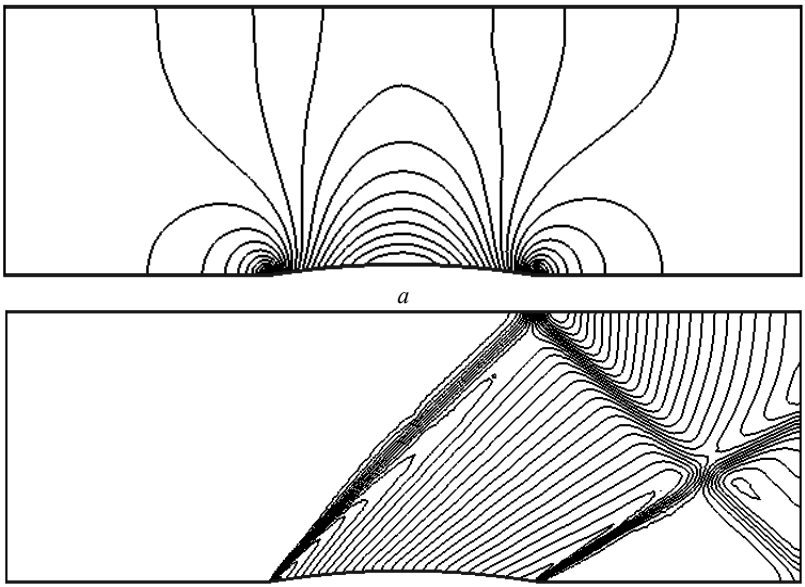


Рис. 3 – Распределение параметров течения вдоль стенок канала:
а, *б* – число Маха для задач №1 и №2;
в, *г* – коэффициент давления для задач №1 и №2.

Численные результаты. Рассмотрена задача моделирования дозвуковых и сверхзвуковых течений невязкого сжимаемого газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента. Разновидности задачи с относительной толщиной препятствия $4\,\%$ и $10\,\%$ решались в работах *В.И. Гнесина*, *С.В. Ершова*, *И. Горжейши* [8], *S.P. Spekreijse* [9], *D. Sharov* [10], *J. Rokicki* и *R. Wieteska* [11] и других авторов. В настоящей работе рассмотрен случай препятствия с $4\,\%$ относительной толщиной. Дискретизация расчётной области Ω выполнена с помощью грубой (рис. 2) и подробной неструктурированных сеток, состоящих из 2062 и 8212 четырёхугольных ячеек соответственно.



а

б

Рис. 4 – Изолинии коэффициента давления в канале:
а – задача №1; *б* – задача №2.

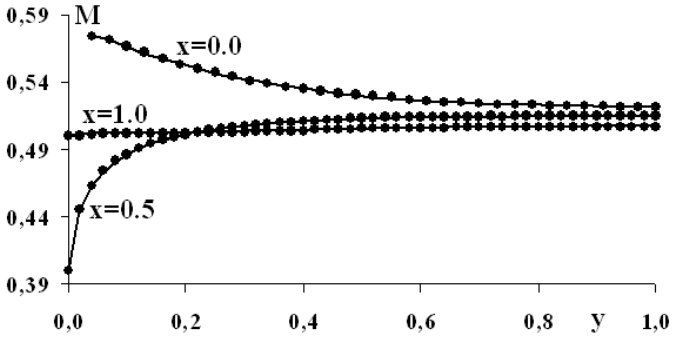
Линейные размеры подробной сетки вдвое меньше, чем для грубой сетки. Длина отрезков AA', DD', AB, BC и CD равна 1. Рассмотрены две задачи:

Задача №1 – дозвуковое течение в канале при $M_{AA'} = 0.5$;

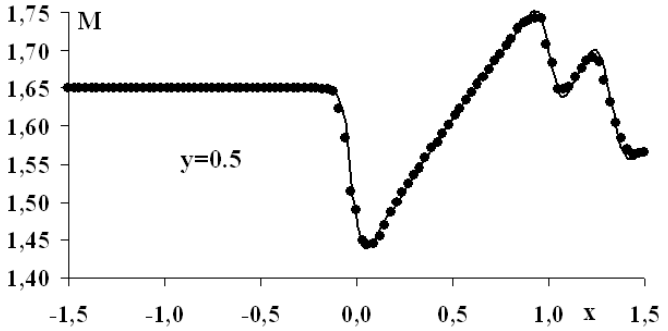
Задача №2 – сверхзвуковое течение в канале при $M_{AA'} = 1.65$.

На участках границы $A'D'$, AB, BC и CD задавалось граничное условие вида «стенка». В задаче №1 на границе выхода DD' задано постоянное распределение статического давления. Все результаты получены с использо-

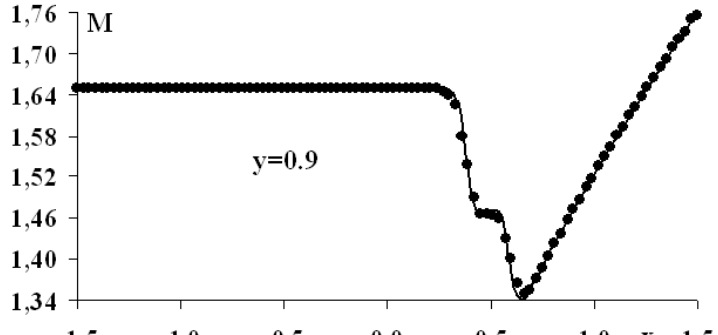
ванием кусочно-полиномиальной реконструкции с многочленом 2-й степени. Во всех расчётах шаг интегрирования по времени выбирался постоянным, а соответствующее число Куранта ν равно 5.



а



б



в

Рис. 5 – Сравнение распределений числа Маха:
а – задача №1; *б*, *в* – задача №2

На рис. 3 представлено распределение параметров течения вдоль нижней и верхней стенок канала. Прозрачными маркерами показаны результаты расчётов на грубой сетке, а сплошной линией − на подробной. На рис. 4 изображены изолинии коэффициента давления, построенные по результатам расчётов на подробной сетке.

Видно, что основное уточнение решения для задачи № 1 при переходе с грубой на подробную сетку наблюдается возле входной и выходной частей препятствия. Распределение параметров течения обладает высокой степенью симметрии относительно середины канала, где координата $x = 0$.

В задаче №2 отчётливо видно формирование *косых скачков уплотнения* в сверхзвуковом потоке у входной и выходной части препятствия. Наибольшее уточнение при использовании подробной сетки наблюдается как в области формирования отраженного от верхней стенки скачка, так и в области взаимодействия (пересечения) скачков уплотнения.

На рис. 5 закрашенными маркерами представлено распределение числа Маха для задач №1 и №2 вдоль различных поперечных ($x = const$) и продольных ($y = const$) сечений канала (схематическое расположение линий изображено на рис. 2). Сплошной линией отмечены результаты расчёта с по помощью программного комплекса FlowER-U [2], ориентированного на использование неструктурированных сеток с шестигранными ячейками. Численное интегрирование уравнений в FlowER-U проводится с помощью *неявной квазимонотонной схемы Годунова* второго порядка аппроксимации по пространству и времени, в основу которой положен *ENO принцип Хартена* и *неявный оператор Бима-Уорминга-Стегера*. На рис. 5 приведены результаты, полученные на подробной сетке.

Видно хорошее согласование численных результатов, полученных с помощью упомянутых методов. Существенных осцилляций в распределениях коэффициента давления и *числа Маха* как на поверхности профиля, так и внутри канала, не наблюдается.

Выводы. В работе представлена неявная конечно-объёмная схема высокого порядка точности по пространственным переменным для численного интегрирования системы уравнений Эйлера на неструктурированных сетках при моделировании невязких течений сжимаемого газа. Показана высокая точность метода при решении задач численного моделирования дозвуковых и сверхзвуковых невязких течений сжимаемого газа в канале с препятствием в виде кругового сегмента относительной толщины 0.04. Дальнейшим направлением развития разностной схемы является её применение для решения задач моделирования трёхмерных вязких течений сжимаемого газа и несжимаемой жидкости в расчётных областях сложной формы.

Список літератури: **1.** *Venkatakrishnan V.* A perspective on unstructured grid flow solvers // AIAA, Aerospace Sci. Meeting № 33 − 1996. − v. 34. − P. 533 − 547. **2.** *Русанов А. В.* Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / *А.В. Русанов, С.В. Ершов*: [Монография]. − Х.: ИПМаш НАН Украины, 2008. − 275 с. **3.** *Русанов А.В., Косьянов Д.Ю.* Неявная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках // Пробл. машиностроения. − 2010. − 13; 3. − С. 30-37. **4.** *Русанов А.В.*, *Косьянов Д.Ю., Косьянова А.И.,* Использование неявной схемы расщепления для численного моделирования трансзвуковых течений идеального газа // Вестник двигатестроения. − 2011. − 25; 2. − С. 20-24. **5.** *Соколовский Г. А.*, *Гнесин В. И.* Нестационарные трансзвуковые и вязкие течения в турбомашинах – К.: Наук. думка, 1986. – 264 с. **6.** Численное решение многомерных задач газовой динамики / *Годунов С. К. Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н.* и др.. – М.: Наука, 1976. – 400 с. **7.** *Русанов А. В.* Явная схема для численного интегрирования уравнений гиперболического типа на неструктурированных сетках / *А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов* // Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина. Серия МИА, Харьков. − 2010. − № 926. − С. 123 − 138. **8.** *Гнесин В. И.* Расчёт двухмерных трансзвуковых течений в решетках с использованием разностных схем С. К. Годунова и А. Джеймсона / *В. И. Гнесин, С. В. Ершов, И. Горжейши* // Пробл. машиностроения. – 1990. – вып.33. – С. 82 – 89. **9.** *Spekreijse S. P.* Multigrid solution of the steady Euler equations / S.P. Spekreijse// Thesis.Centrum voor Wiskunde en Informatica. Amsterdam. − 1987. − 166 p. **10.** Implementation of unstructured grid GMRES+LU-SGS method on shared-memory, cache-based parallel computers / D. Sharov, H. Luo, J. D. Baum, R. Löhner // AIAA Pap. −2000. − № 0927. – P. 1−17. **11.** *Rokicki J.* High-Order WENO schemes on unstructured tetrahedral meshes / J. Rokicki, R. Wieteska // European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD. – 2006. – P. 1–12.

Поступила в редколлегию 27.05.2013

УДК 519.63: 621.165

Обобщение неявной схемы расщепления для моделирования стационарных и нестационарных газодинамических процессов / А. В. Русанов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 174 – 184. Бібліогр.: 11 назв.

Розглянуто неявну безітераційну скінченно-об’ємну схему розщеплення високого порядку точності за просторовими координатами для чисельного інтегрування рівнянь газодинаміки на неструктурованих сітках. Наведено результати чисельного моделювання дозвукових та понадзвукових нев’язких течій стисливого газу в каналі з перешкодою у вигляді кругового сегмента. Виконано порівняння результатів з даними чисельного моделювання в комплексі програм обчислювальної газогідродинаміки FlowER-U.

Ключові слова: неявна схема, висока точність, розщеплення, неструктурована сітка, нев’язка течія.

The article suggests generalization of implicit non-iterative high-order finite volume method with splitting for numerical integration of gas-dynamic equations on unstructured grids. The results of subsonic and supersonic inviscid compressible gas flows numerical simulation in the rectangular domain with circle sector are presented. The ones comparison with numerical data from FlowER-U CFD software is realized.

Key words: implicit scheme, high-order, splitting, unstructured grid, inviscid flow.

УДК 629.027, 621.313, 629.069, 629.3.014

А.Н. СЕРГИЕНКО, аспирант, НТУ «ХПИ»;
Н.Г. МЕДВЕДЕВ, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Б.Г. ЛЮБАРСКИЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;
С.Н. БЕЛЯЕВ, ст. преп., НТУ «ХПИ»;
С.В. ШУШЛЯПИН, канд. техн. наук, доц., ХНТУСХ им. П. Василенко, Харьков

МЕТОДИКА ОПИСАНИЯ НЕРОВНОСТЕЙ ПРОФИЛЯ ДОРОГИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ С РЕКУПЕРАТОРОМ ЭНЕРГИИ КОЛЕБАНИЙ

Предложена методика и математическая реализация формирования внешних воздействий на подвеску автомобиля с рекуператором энергии колебаний при моделировании движения по неровностям с заданными законами изменения профиля дороги.

Ключевые слова: методика, неровность, профиль, подвеска, автомобиль, рекуператор, синусоидальный закон, случайный микропрофиль, единичная неровность.

Анализ последних достижений и публикаций. Повышение КПД автомобиля, снижение расхода топлива – весьма актуальная проблема при современном уровне автомобилизации и требований к охране окружающей среды. Одним из направлений решения этой задачи является разработка и совершенствование гибридных схем моторно-трансмиссионных систем автомобилей, а также различных устройств рекуперирования энергии. К таким устройствам относится линейный электромеханический преобразователь (ЭМП), используемый в качестве амортизатора в системе подрессоривания. Для рационального выбора его параметров, определения вибрационных характеристик машины, оценки эффективности демпфирования и преобразования энергии колебаний в электроэнергию приходится решать задачу о вынужденных колебаниях системы с несколькими степенями свободы.

Колебания автомобиля возникают при движении по неровностям в результате кинематического возбуждения. Параметры этого воздействия определяются характеристиками профиля опорной поверхности (высота неровностей, их знакопеременность относительно некоторого среднего уровня и пр.) можно задавать различными законами, используя детерминированное представление или случайную функцию. Второй подход дает описание неровностей опорной поверхности, более близкое к реальным условиям. Первый вариант позволяет использовать сложные нелинейные модели ходовой системы автомобиля. Кроме этого, известны трассы без твердого покрытия, которые хорошо описываются, например, синусоидальным законом.

Преимущества обоих вариантов можно использовать, построив детер-

© А. Н. Сергиенко, Н. Г. Медведев, Б. Г. Любарский, С. Н. Беляев, С. В. Шушляпин, 2013

минированный профиль как результат статистической обработки измерений различных поверхностей одного типа (асфальтобетон, мостовая, грунтовая дорога, пахота и пр.).

Вопросами математической реализации случайного профиля дороги занимались многие ученые. В частности методики описания случайного профиля дороги и их практические реализации разрабатывали *Хачатуров А.А.* [1], *Ротенберг Р.В.* [2], *Светлицкий В.А.* [3] и др. В указанных статьях авторов подробным образом рассмотрена методика описания случайного микропрофиля дороги, которая сводится к определению *корреляционной функции* и задания *белого шума*. Такой подход значительно сложнее, чем детерминированный. Однако он позволяет моделировать практически любые дорожные условия, необходимые для анализа работы ЭМП-амортизатора.

В работе [4] представлена математическая модель ЭМП-амортизатора, позволяющая с учетом его конструктивных параметров исследовать динамические процессы и рабочие свойства при различных воздействиях неровностей дороги. Математическую модель амортизатора необходимо интегрировать в модель колебательной системы автомобиля. Показатели работы ЭМП-амортизатора определяются характеристиками профиля дороги. Таким образом, задав внешнее возмущение от неровностей дороги, можно оценить работу демпфирования ЭМП-амортизатора и степень преобразования механической энергии колебаний в электрическую энергию.

Выбирая рациональные значения ЭМП-амортизатора, приходится решать противоречивые задачи по обеспечению необходимой плавности хода при высокой степени рекуперации энергии. Важнейшими факторами, определяющими режимы работы ЭМП-амортизатора, являются профиль дороги и скорость движения автомобиля.

Целью работы является определение законов изменения параметров профиля дороги и учет особенностей задания возмущения при оценке эффективности работы ЭМП-амортизатора.

В работе рассматриваются три варианта задания профиля опорной поверхности: синусоидальный закон, случайный профиль и единичная неровность.

Задание синусоидального закона изменения неровностей. Закон описывается формулой (рис. 1)

$$q(t) = A \sin \omega \cdot t \ ,$$

где $q(t)$ – текущее значение высоты неровности; A – амплитуда неровности, м; $\omega = 2\pi V / a$ – круговая частота кинематического возмущения, с$^{-1}$; V – скорость движения автомобиля, м/с; a – период неровности, м; t – время.

Задание случайного микропрофиля неровности дороги. Во время

движения автомобиля изменение неровностей дороги носит случайный характер.

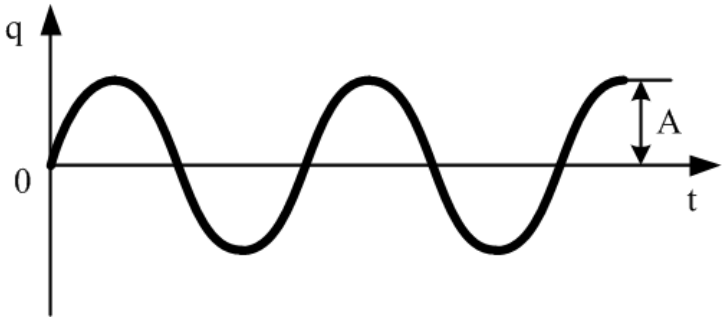


Рис. 1 – Графическое представление изменения неровности дороги по синусоидальному закону.

Случайная функция, описывающая микропрофиль дорожного покрытия, характеризуется корреляционной функцией и *спектральной плотностью*.

Корреляционная функция неровностей дороги описывается аппроксимирующей зависимостью [5]:

$$R(\tau) = De^{-\alpha Vt}\cos(\beta Vt)\,, \tag{1}$$

где D – дисперсия высот неровностей дороги; a, b – коэффициенты корреляции.

Связь между спектральной плотностью случайного процесса и его корреляционной функцией определяется *преобразованием Фурье*:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{j\omega t}dt\,. \tag{2}$$

Значения коэффициентов корреляции приведены в табл. 1 [6].

Таблица 1. Значения коэффициентов корреляции

Коэффициент	Вид дороги		
	Асфальтобетон	Мостовая	Грунтовая
a	0,22	0,32	0,47
b	0,44	0,64	0,94

Подставляя (1) в (2), получаем:

$$S(\omega) = D\cdot\left[\frac{2\alpha V\left(\alpha^2V^2+\beta^2V^2+\omega^2\right)}{\omega^4+2\omega^2V^2\left(\alpha^2-\beta^2\right)+V^4\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}\right].$$

Движение автомобиля целесообразно рассматривать для 3-х дорог: грунтовой, мощенной булыжником и асфальтобетонной. На рис. 2 приведены

графики корреляционных функций и спектральных плотностей для этих типов дорог при следующих значениях скорости движения автомобиля: $V_1 = 3\,\text{мс}^{-1}$, $V_2 = 6\,\text{мс}^{-1}$, $V_3 = 9\,\text{мс}^{-1}$, $V_4 = 14\,\text{мс}^{-1}$, $V_5 = 17\,\text{мс}^{-1}$. Дисперсия высот неровностей $D = 0{,}1\,\text{м}^2$.

Далее путём генерации белого шума $\xi(t)$ строится случайная функция $q(t)$, описывающая высоты неровностей, как решение по методу *Рунге-Кутта* обыкновенного дифференциального уравнения [5]:

$$T_1^2 \ddot{q}(t) + T_2 \dot{q}(t) + q(t) = K_\xi\, \xi(t)\ , \tag{3}$$

где T_1 и T_2 – постоянные времени передаточной функции динамического звена, формирующего функцию $q(t)$ при подаче на его вход белого шума $\xi(t)$; K_ξ – коэффициент усиления [6],

$$K_\xi = \sqrt{S(0)}\,, \tag{4}$$

$S(0)$ – спектральная плотность в нулевой точке, определяемая равенством:

$$S(0) = D\frac{2\alpha}{V\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}\,. \tag{5}$$

Постоянные времени для передаточной функции динамического звена определяются соотношениями:

$$T_1^2 = \frac{1}{\omega_p^2}\sqrt{1 - \frac{S(0)}{S(\omega_\text{р})}}\,;\ T_2^{\,2} = \frac{2}{\omega_p^{\,2}}\sqrt{1 - \frac{S(0)}{S(\omega_\text{р})}}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{S(0)}{S(\omega_\text{р})}}\right], \tag{6}$$

где $\omega_\text{р}$ – резонансная частота, определяемая по графикам рис. 2; $S(\omega_\text{р})$ – спектральная плотность при резонансе.

Значения постоянных времени и коэффициентов усиления для различных скоростей и типов дорог приведены в табл. 2.

По результатам решения уравнения (3) построена кривая микропрофиля асфальтобетонной дороги (рис. 3).

Построение этой кривой для отрезка $t = 100\,\text{с}$ потребовало работы достаточно мощного компьютера (Intel Core 2 DUO, 2,2 ГГц, 4Gb ОЗУ) в течение 5 часов 42 минут. Введение модели неровности (3) в математическую модель вынужденных колебаний автомобиля вызывает существенный рост времени расчета и снижение его точности, при этом изменение производной профиля приводит к неопределенности решения системы уравнений из-за малого шага и смены ее знака на каждом шаге.

Поэтому для определения параметров движения колебательных масс и показателей работы ЭМП-амортизатора предлагается использовать результаты решения уравнения (3), вводя изменение высоты неровности с дискретностью, близкой по значению шагу интегрирования системы уравнений общей модели.

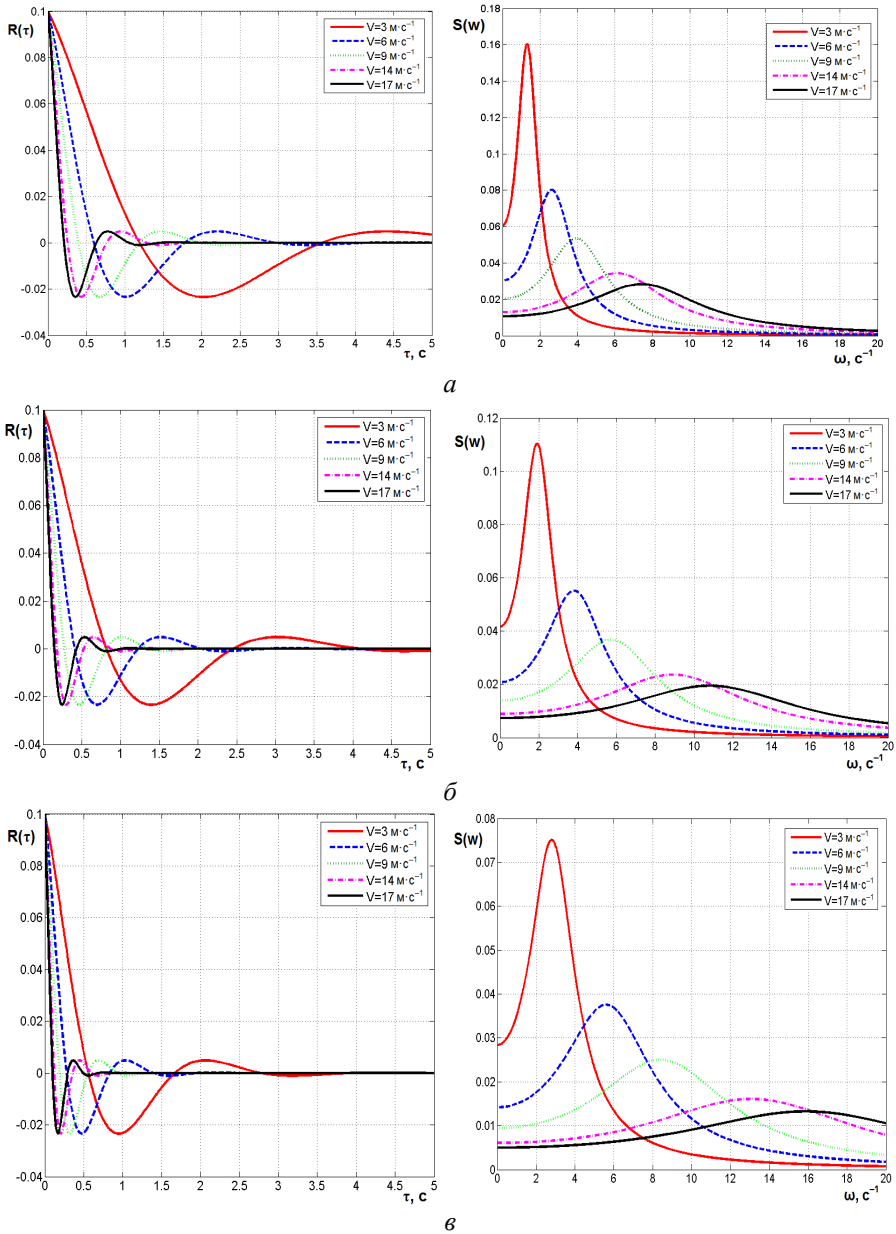


Рис. 2 – Корреляционные функции и спектральные плотности высот неровностей дорожного покрытия:
а – асфальтобетон; *б* – мостовая; *в* – грунтовая дорога.

Таблица 2. Значения постоянных времени T_1, T_2 и коэффициента усиления K_ξ формирующего динамического звена

Скорость	Вид дороги		
	асфальтобетон	мостовая	грунтовая
$3\,\text{мс}^{-1}$	$T_1 = 0,776\,\text{с}$ $T_2 = 0,441\,\text{с}$ $K_\xi = 0,246$	$T_1 = 0,641\,\text{с}$ $T_2 = 0,301\,\text{с}$ $K_\xi = 0,204$	$T_1 = 0,531\,\text{с}$ $T_2 = 0,206\,\text{с}$ $K_\xi = 0,169$
$6\,\text{мс}^{-1}$	$T_1 = 0,548\,\text{с}$ $T_2 = 0,219\,\text{с}$ $K_\xi = 0,174$	$T_1 = 0,455\,\text{с}$ $T_2 = 0,151\,\text{с}$ $K_\xi = 0,144$	$T_1 = 0,375\,\text{с}$ $T_2 = 0,103\,\text{с}$ $K_\xi = 0,119$
$9\,\text{мс}^{-1}$	$T_1 = 0,448\,\text{с}$ $T_2 = 0,147\,\text{с}$ $K_\xi = 0,142$	$T_1 = 0,371\,\text{с}$ $T_2 = 0,101\,\text{с}$ $K_\xi = 0,118$	$T_1 = 0,306\,\text{с}$ $T_2 = 0,069\,\text{с}$ $K_\xi = 0,097$
$14\,\text{мс}^{-1}$	$T_1 = 0,359\,\text{с}$ $T_2 = 0,094\,\text{с}$ $K_\xi = 0,114$	$T_1 = 0,298\,\text{с}$ $T_2 = 0,065\,\text{с}$ $K_\xi = 0,0945$	$T_1 = 0,246\,\text{с}$ $T_2 = 0,044\,\text{с}$ $K_\xi = 0,078$
$17\,\text{мс}^{-1}$	$T_1 = 0,326\,\text{с}$ $T_2 = 0,078\,\text{с}$ $K_\xi = 0,1034$	$T_1 = 0,27\,\text{с}$ $T_2 = 0,054\,\text{с}$ $K_\xi = 0,0857$	$T_1 = 0,223\,\text{с}$ $T_2 = 0,036\,\text{с}$ $K_\xi = 0,0708$

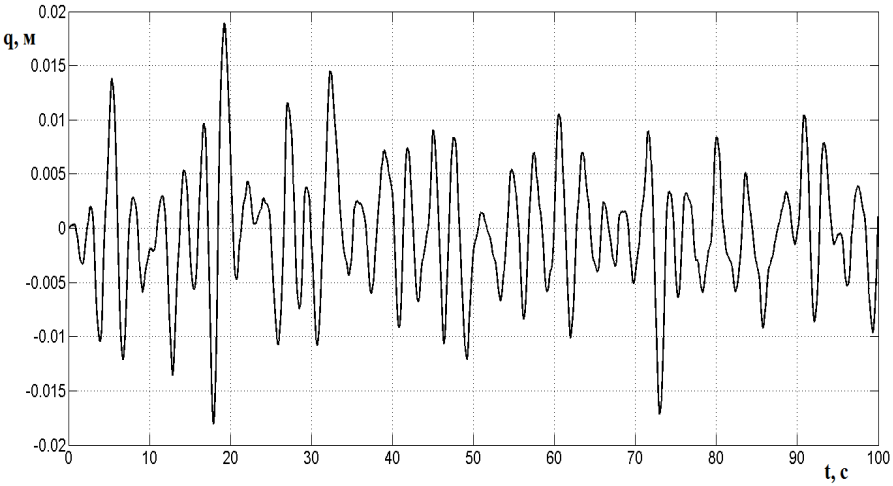


Рис. 3 – Реализация случайного микропрофиля асфальтобетонной дороги.

Задание единичного закона изменения неровности дороги. Единич-

ную неровность (рис. 4) зададим зависимостями

$$\begin{cases} q = 0, \text{ при } t < t_1,\ t > t_2; \\ q = A, \text{ при } t_1 \le t \le t_2, \end{cases} \tag{7}$$

где A – высота неровности, м; $t_2 - t_1$ – время прохождения неровности, с.

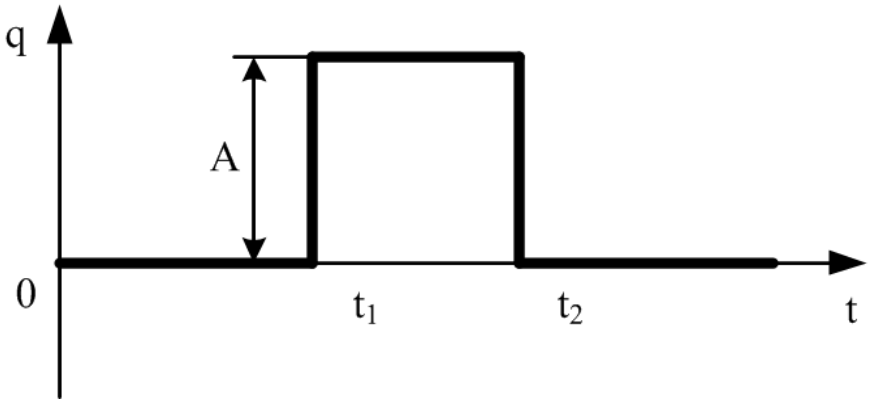


Рис. 4 – Графическое представление единичной неровности дороги.

В процессе решения выбираются следующие параметры неровностей:

1. Для синусоидальной неровности дороги:

– период повторения неровности $a = (0,5...4)L$ ($L = 2,2$ м – база машины, $a = (1,1...8,8)$ м);

– амплитуда неровности $A = (0,05...0,15)$ м;

– скорость движения $V = 3, 6, 9, 14, 17$ м/с;

2. Для случайного микропрофиля неровности дороги:

– скорость движения $V = 3, 6, 9, 14, 17$ м/с;

– дисперсия высот неровностей $D = 0,1\text{м}^2$;

3. Для единичной неровности дороги:

– период повторения неровности $a = (0,5...4)L$, $L = 2,2$ м;

– амплитуда неровности $A = 0,05 - 0,15$ м;

– скорость движения V задавалась равной 3, 6, 9, 14, 17 м/с;

– время начального отрезка $t_{START} = 1$ с;

– время конечного отрезка t_{END} определялось по формуле

$$t_{END} = t_{START} + \frac{0,5}{V}.$$

– продольный размер неровности определялся, исходя из реальных дорожных условий движения автомобилей и скорости движения.

Выводы. Рассмотренные варианты задания неровностей охватывают широкий спектр реальных опорных поверхностей. Представленные математические реализации законов изменения неровностей целесообразно использовать при моделировании вынужденных колебаний автомобиля, оснащенного ЭМП-амортизатором, а также для оценки показателей работы этого амортизатора как устройства демпфирования колебаний и преобразования механической энергии в электрическую.

Список литературы: 1. *Хачатуров А.А., Афанасьев В.Л., Васильев В.С. и др*. Динамика системы дорога – шина – автомобиль – водитель. *Под ред. А.А. Хачатурова.* – М.: Машиностроение, 1976. – 536 с. **2.** *Ротенберг Р.В.* Подвеска автомобиля. Изд. 3-е, переработ. и доп. – М.: Машиностроение, 1972. – 392 с. **3.** *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1991. – 320 с. **4.** *Сергиенко А.Н.* Математическая модель электромеханического преобразователя для электроамортизатора транспортного средства / *А.Н. Сергиенко, Б.Г. Любарский, Н.Е. Сергиенко* // Електротехніка і електромеханіка. Науково-практичний журнал. – 2012. – №6. – С. 61-65. **5.** *Мазманишвили А.С.* Построение случайных поверхностей движения объектов бронетанковой техники. / *А.С. Мазманишвили, Т.Е. Александрова.* Системы вооружения и военная техника. – Харьков: ХУПС, 2012. – № 1(29). – С. 68-71. **6.** *Александрова Т.Е.* Имитационное моделирование внешних возмущений, действующих на танковую пушку / *Т.Е. Александрова, И.Е. Александрова, С.Н. Беляев* // Механіка та машинобудування. – 2011. – № 1. – С. 43-50.

Поступила в редколлегию 08.05.2013

УДК 629.027, 621.313, 629.069, 629.3.014

Методика задания неровностей профиля дороги при моделировании подвески автомобиля с рекуператором энергии колебаний / **А.Н. Сергиенко, Н.Г. Медведев, Б.Г. Любарский, С.Н. Беляев, С.В. Шушляпин** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 185 – 192. Бібліогр.: 6 назв.

Запропоновано методику і математична реалізація формування зовнішніх впливів на підвіску автомобіля з рекуператором енергії коливань при моделюванні руху по нерівностях із заданими законами зміни профілю дороги.

Ключові слова: методика, нерівність, профіль, підвіска, автомобіль, рекуператор, синусоїдальний закон, випадковий мікропрофіль, одинична нерівність.

The technique and mathematical implementation of external influences on the formation of car suspension with heat recovery energy vibrations in the simulation on roughness's with specified laws change the profile of the road.

Key words: methods, roughness, profile, suspension, car, heat exchanger, the sine law, random microprofile, single roughness.

УДК 539.1

А.В.СТЕПУК, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»;
Л.В. АВТОНОМОВА, канд. техн. наук, вед. наук. співр., НТУ «ХПІ»;
С.В. БОНДАР, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»

ОСОБЛИВОСТІ ДЕФОРМУВАННЯ П-ПОДІБНОЇ ТОНКОСТІННОЇ КОНСТРУКЦІЇ ПРИ УДАРІ

Виконано скінченно-елементний аналіз напружено-деформованого стану П- подібної тонкостінної конструкції при центральному і відцентровому ударі жорсткою кулею, що вільно падає. Розглянуто особливості постановки динамічної контактної задачі та її реалізації за допомогою пакета AVTODYN. Наведено аналіз результатів чисельного моделювання в зоні ударного навантаження.

Ключові слова: математичне моделювання, удар, пластичні деформації, кінцевий елемент, П- подібна тонкостінна конструкція.

Опис проблеми. В процесі експлуатації силові корпуси пристроїв і приладів повинні витримувати інтенсивне динамічне навантаження, яке може мати також і імпульсний (ударний) характер, тому необхідно проводити розрахунок їх на міцність при ударних навантаженнях. При розв'язанні цієї задачі треба враховувати форму взаємодіючих об'єктів, характер і локалізацію навантажування, поширення пружних і пластичних хвиль, стан матеріалу, контактну взаємодію, тертя, тепло, що виділяється при ударі. Експериментальне дослідження сукупності всіх складних фізичних явищ таких швидко плинних процесів представляє певні труднощі через великі матеріальні витрати, а аналітичні методи дозволяють розглядати взаємодію простих за формою об'єктів. Використання сучасних програмних комплексів дає можливість дослідити і розв’язати задачі удару, що супроводжуються високими швидкостями деформацій, для довільної форми взаємодіючих об'єктів.

Рішення задач динамічного пружно-пластичного деформування сталевих тонкостінних коробчастих конструкцій при ударі тілом, що вільно падає, дозволяє дати реальні значення прогину в зоні контакту, та аналіз напружено-деформованого стану в цілому, і становить певний інтерес.

Метою дослідження є чисельне моделювання процесу динамічного деформування сталевої тонкостінної коробчастої конструкції П- образного профілю при ударі тілом кулеподібної форми, що вільно падає, з врахуванням контактної взаємодії за допомогою МСЕ.

Постановка завдання. Процес взаємодії падаючого об'єкта з перешкодою описується чотирма групами рівнянь: *кінематики* (рух тіл, закон збере-

© А. В. Степук, Л. В. Автономова, С. В. Бондар, 2013

ження імпульсу), *хвильової механіки* (поширення пружних / ударних хвиль стиснення-розширення), *механіки пластичного деформування*, *механіки контакту* (рух об'єкта з урахуванням тертя).

При побудові математичної моделі прийнято наступні припущення:

– тонкостінна конструкція П- образного профілю є закріпленою;

– куля падає як по центру верхньої пластини, так і зі зміщенням;

– куля не деформується і переміщується за законом руху твердого тіла.

Відповідно до прийнятих припущень математична модель, що описує великі нелінійні пластичні деформації, включають в себе наступні рівняння:

– закон збереження імпульсу;

– рівняння балансу енергії;

– квазістаціонарні умови деформування (хвильовими процесами нехтується через невелику швидкість при ударі);

– система нелінійних рівнянь пластичного деформування;

– умова ковзання / тертя на рухомій межі тіл;

– рівняння стану матеріалу.

Для вирішення задачі моделювання процесу швидкісного деформування при впливі локального імпульсного (ударного) навантаження можна використовувати наступні рівняння та підходи.

В роботі [1] для подібної задачі рівняння удару твердого тіла (сфери) по пластині або оболонці (по *С.П. Тимошенко*) представлено у вигляді:

$$v_0 t - (1/m)\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} P(t_1)dt_1 = \varpi + \alpha, \qquad (1)$$

де $v_0 t$ – переміщення центру ваги, v_0 – швидкість і m – маса кулі, $P(t)$ – зусилля в зоні контакту, ϖ – переміщення і α – стиснення контактної зони, причому $\alpha = kP^{2/3}$, $k = [2r^{1/2}E/3(1-v^2)]^{2/3}$, r – радіус кулі.

При переході в область пластичності використовується співвідношення для *білінійного зміцнення*:

$$\sigma_i > \sigma_t * \left\{1 - \varpi(\varepsilon_i) * [1 + (\partial\varepsilon/\partial t)/D]^{1/n}\right\}, \qquad (2)$$

де $\varpi(\varepsilon_i) = 1 - cN\sigma_i/(\alpha E\varepsilon_i)$, а зв'язок між напруженнями і деформаціями враховується у формі *узагальненого рівняння Гука*:

$$\sigma_{ij} = E*(\varepsilon_i + v*\varepsilon_j)/(1-v^2); \;\; \tau_{ij} = G*\gamma_{ij}, \qquad (3)$$

де

$$E* = (\sigma_i/\varepsilon_i)/(1 + m\sigma_i/\varepsilon_i); \;\; v* = (1/2 - m\sigma_i/\varepsilon_i)/(1 + m\sigma_i/\varepsilon_i); \;\; G* = \sigma_i/3\varepsilon_i;$$

$$m = (1-2v)/3E,$$

дає значення прогину в локальній зоні контакту та аналіз напружено-деформованого стану в цілому. Використати цій підхід складно, тому що

тонкостінна конструкція П- образного профілю має більш складну геометрію, ніж пластина, і рішення задачі динамічного удару буде наближеним.

При стандартному підході [2] рівняння руху в переміщеннях має вигляд:

$$(\lambda+\mu)\partial(divu)/\partial x_i+\mu\Delta u-3\alpha K\partial T/\partial x_i=\rho\partial^2 u/\partial t^2, \qquad (4)$$

де u – вектор переміщень; T – температура; λ і μ – *коефіцієнти Ляме*; ρ – щільність матеріалу; α – коефіцієнт теплового розширення; K – модуль стиску.

Початкові умови: $u=0$, $\partial u/\partial t=v_0$, $T(x_i,t)\big|_{t=0}=T_0$;

Граничні умови: $u\big|_x=f_1[p(x_i,t)]$, $\partial u/\partial x_i\big|_x=f_2[p(x_i,t)]$, $T(x_i,t)\big|_x=T_0$.

У результаті рішення системи рівнянь для переміщень можна знайти нелінійний тензор деформацій

$$\varepsilon ij=\partial u_i/\partial x_j+(\partial u_i/\partial x_j)*(\partial uj/\partial x_j)$$

і відповідні інтенсивності і швидкості деформацій $\partial\varepsilon_i/\partial t$.

У такій системі припущень імпульсне навантаження загасає експоненціально і може бути представлено у вигляді

$$p(x_i,t)=p_{\max}\exp(-t/\gamma).$$

Рівняння стану, що визначає залежність інтенсивності напружень від температури, інтенсивності та швидкості деформацій – $\sigma_i(\varepsilon_i;\partial\varepsilon_i/\partial t;T)$, можна представити в наступному вигляді:

$$\sigma_i=\sigma_s\{[1+(\varepsilon_i/a)]^{1/n}+$$
$$+\varepsilon_i/\varepsilon_s-[1+(\partial\varepsilon_i/\partial t)/b]^{1/n}\}^m*[1-(T-T_0)/(Ts-T_0)]^k; \qquad (5)$$

де a,b,m,n,k – експериментальні коефіцієнти, а T_0 – початкова температура і Ts – температура плавлення. Тоді компоненти тензорів напружень можна визначити з рівнянь динамічної теорії деформацій:

$$\sigma ij=\sigma_0+2\sigma_i(\varepsilon_i;\partial\varepsilon_i/\partial t;T)*(\varepsilon ij-\varepsilon_0)/3\varepsilon_i,$$
$$\tau ij=\sigma_i(\varepsilon_i;\partial\varepsilon_i/\partial t;T)*\gamma ij/3\varepsilon_i, \qquad (6)$$

де середнє значення кульових напружень становить $\sigma_0=\sigma ij/3$ і деформацій – $\varepsilon_0=K\sigma_0+\alpha T$.

Чисельне моделювання. Чисельна реалізація задачі виконувалась на програмному комплексі AVTODYN , що дозволяє застосовувати явні методи чисельного інтегрування системи рівнянь механіки суцільних середовищ. Для нелінійних задач динамічного навантаження конструкцій найбільш точним і ефективним методом розрахунку є *Лагранжевий підхід*. У роботі представлені результати розрахунку напружено-деформованого стану П- подібної тонкостінної конструкції при центральному і відцентровому ударі кулею, що

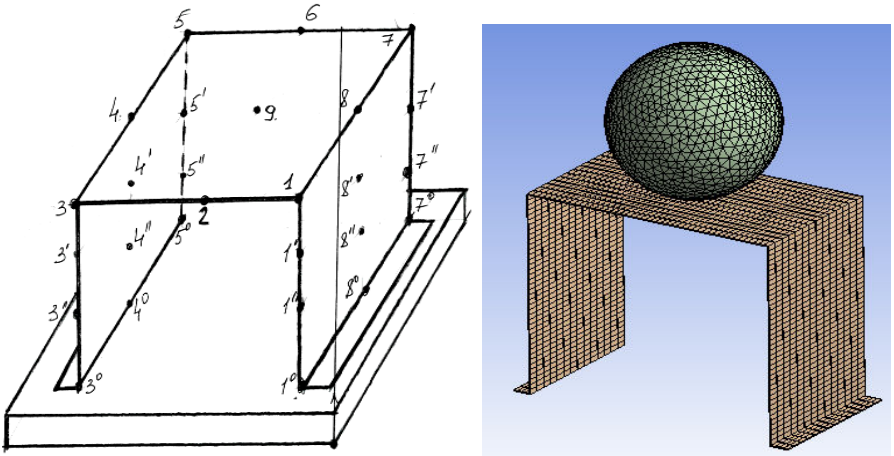
падає.

Схема П- подібної конструкції, яка деформується, наведена на рис. 1, *а*.

При позацентровому ударі контактування двох тіл відбувається не по лінії, що з'єднує їх центри тяжіння. При такому ударі в момент максимального зближення сфери і П- подібної конструкції швидкість початкової точки контакту можна розкласти на дві компоненти: швидкість центра ваги верхньої поверхні у вигляді прямокутної пластини і компоненти у вигляді результату перемноження кутової швидкості на відстань зміщення центральної точки удару. У даному випадку центр удару є миттєвим центром обертання протягом дії імпульсу.

Розрахунок напружено-деформованого стану проводиться для сталевої П-подібної тонкостінної (товщина стінки 1мм) конструкції (габаритні розміри 120х150х200 мм) при ударі сталевою кулею (діаметр 125 мм) і масою 7,1 кг, яка падає з висоти 5800 мм.

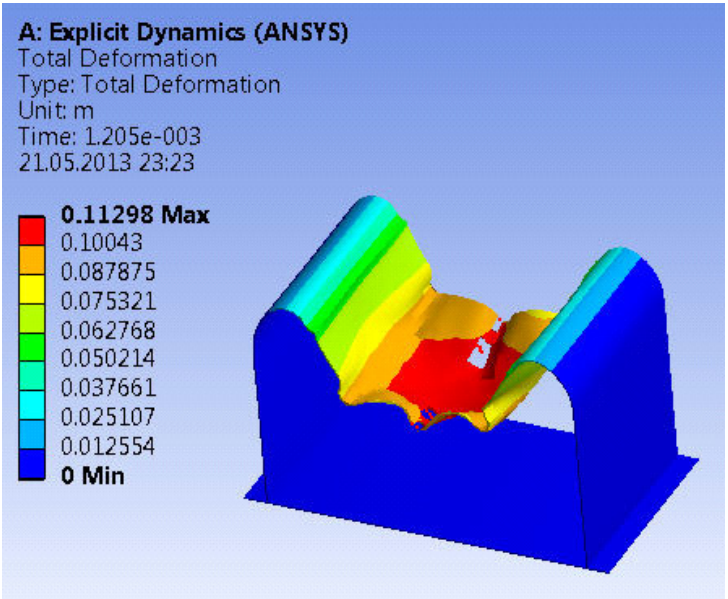
Контактна задача при центральному та позацентровому ударі розв’язувалась з урахуванням тертя. При позацентровому ударі точка початкового контакту зміщена відносно точки 9 на 32 мм у напрямку до точки 2 (дивись рис.1).



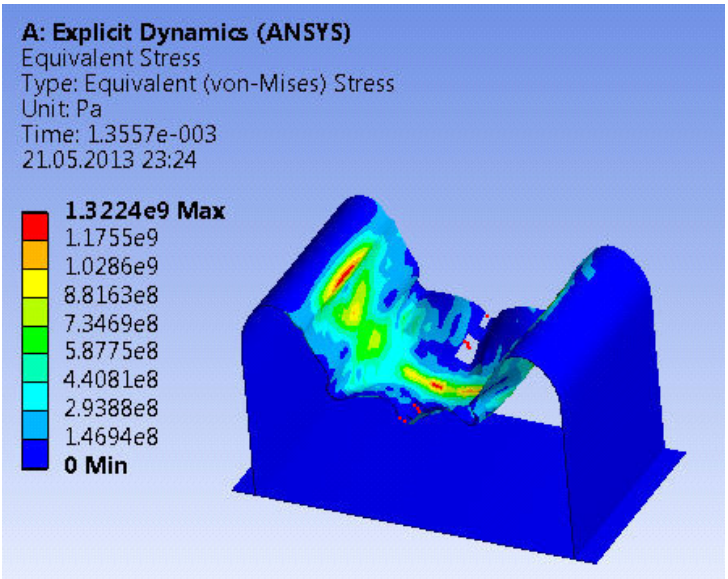
а *б*

Рис. 1 – П- подібна тонкостінна конструкція: *а* – розрахункова схема; б – скінченно-елементна модель.

Механічні характеристики матеріалу стальної коробчастої конструкції були визначені експериментально шляхом випробування на розтягання зразків із того ж матеріалу. Початкова швидкість у момент контакту дорівнює 10 м/с. Задача розв'язана для абсолютно жорсткої сфери. На рис.1, *б* приведена скінченноелементна модель системи, яка має 8584 вузлів та 17394 елементів.

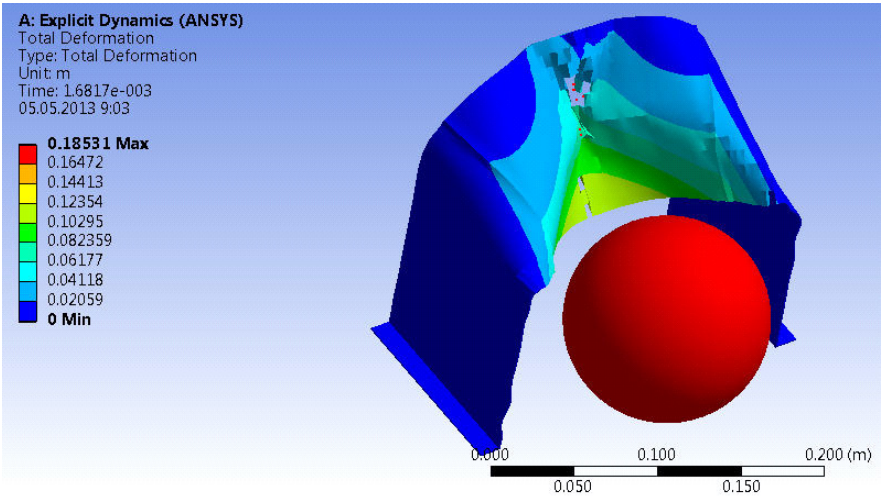


а

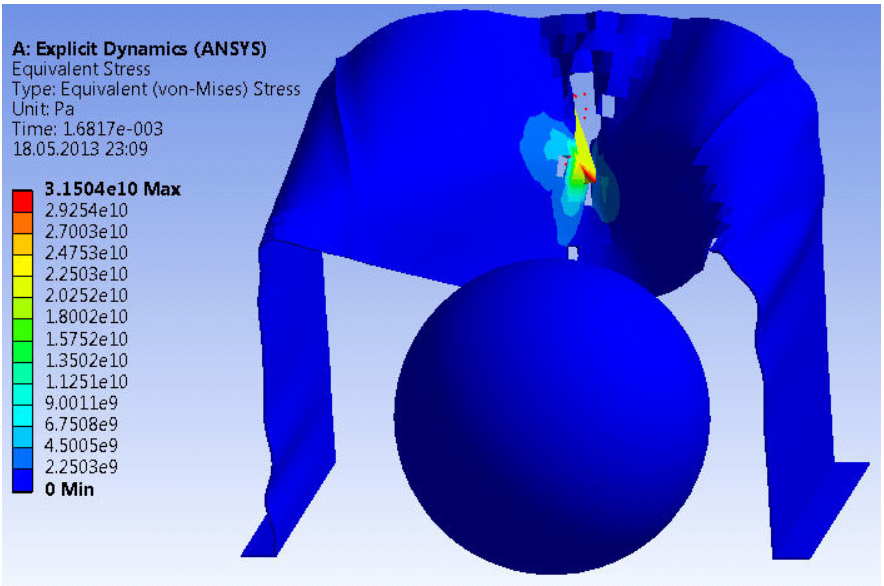


б

Рис. 2 – Деформування П- подібної тонкостінної конструкції після центрального удару по ній жорсткою кулею: *а* – розподіл переміщень; *б* – розподіл еквівалентних напружень.



а



б

Рис. 3 – Деформування П- подібної тонкостінної конструкції після позацентрового удару по нійжорсткою кулею: *а* – розподіл переміщень; *б* – розподіл еквівалентних напружень.

На рис.2 і рис.3 представлено розподіл еквівалентних напружень і переміщень П- подібної тонкостінної конструкції після центрального *а* і позацентрового *б* удару по ній жорсткою кулею.

Висновки. Розрахунок напружено-деформованого стану показав вплив локалізації удару на зміну форми П- подібної тонкостінної конструкції. При зсуві точки зіткнення від центру верхньої пластини на 32 мм до вільного краю має місце збільшення максимальних переміщень на 80%, що свідчить про необхідність ретельного аналізу поведінки такого роду систем з урахуванням можливої зміни координат точок контакту. Порівняння значень напружень і переміщень дає можливість припустити, що при позацентровому ударі показники деформації матеріалу виходять швидше за рамки безпечних рівнів. Чисельний розрахунок міцності на основі МСЕ дозволяє передбачати поведінку конструкції силових корпусів при значних імпульсних навантаженнях, для різних матеріалів, розмірів і геометрії, з метою моделювання умов для їх можливого руйнування при експлуатації, і виробляти шляхи поліпшення захисних характеристик силових корпусів.

Список літератури: **1.** *Ю.С. Воробьев, М. В. Чернобрывко*, Скоростное деформирование элементов конструкций в упругопластической стадии // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій – 2010. – Вип.14, – С. 87 – 92 **2.** *А.В. Бизюк, В.В, Бизюк, А.В, Колодяжный* Скоростной удар по тонкостенным конструкциям // Вестник ХНУ. – №775, – 2007, – с.29 – 35.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 539.1

Особливості деформування П- подібної тонкостінної конструкції при ударі / О. В. Степук, Л. В. Автономова, С. В. Бондар // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 193 – 199. Бібліогр.: 2 назви.

Выполнен конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния П-образной тонкостенной конструкции при центральном и внецентренном ударе падающим жестким шаром. Рассмотрены особенности постановки динамической контактной задачи и ее реализации при использовании пакета AVTO DYN . Приведен анализ результатов численного моделирования в зоне ударного нагружения.

Ключевые слова: математическое моделирование, удар, пластические деформации, конечный элемент, П-образная тонкостенная конструкция.

The FEM analysis for the П-formed thin-walled construction, its strain-stress deformations under center and off-center impact with a solid sphere is presented. Specific details of the dynamic contact problem and their implementation with CAD-FEM software AVTO DYN are defined. The analysis of numerical modeling results in the area of impact is discussed.

Keywords: mathematical modeling, impact, plastic strain, finite element, П-formed thin-walled construction.

УДК 621.225

Н.Н. ФАТЕЕВА, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БАЙЕСА В ДИАГНОСТИКЕ ГИДРОПНЕВМОАГРЕГАТОВ

Применение в диагностике гидропневмоагрегатов статистических методов распознавания позволяет одновременно учитывать признаки различной физической природы, так как они характеризуются безразмерными величинами – вероятностями их появления при различных состояниях системы. Рассмотрено применение метода Байеса на конкретном примере (выбор основного диагностического параметра аксиально-поршневого насоса) с использованием программных средств, что помогает существенно упростить порядок расчета и сократить время на его выполнение.

Ключевые слова: техническая диагностика, метод Байеса, диагностическая матрица, комплекс признаков, гидропневмоагрегат.

Введение. Гидропневмоагрегаты становятся неотъемлемой частью современной подъемно-транспортной, строительной, сельскохозяйственной и другой техники. Применение гидропневмоагрегатов (ГПА) упрощает процессы автоматизации, унификации, облегчает труд оператора, раскрывает широкие возможности для повышения надежности машин. Средством повышения качества и эффективности технического обслуживания, ремонта и эксплуатации ГПА является техническая диагностика. Она повышает культуру технической эксплуатации ГПА, его надежность, обеспечивает достоверное прогнозирование остаточного ресурса, что важно для нормальной эксплуатации машин и планирования их работ [1]. Среди методов технической диагностики ГПА метод, основанный на *обобщенной формуле Байеса*, занимает особое место благодаря простоте и эффективности. Байесовский подход открывает новые, довольно широкие возможности применения методов математического моделирования, а разработанные алгоритмы оценивания на основе генерирования случайных чисел способствуют решению поставленных задач с помощью современных вычислительных процедур [2].

Анализ последних исследований. В настоящий момент актуальной задачей оценивания математических и статистических моделей является применение байесовской методологии к процессам различной природы. Байесовская методология исследовалась во многих роботах и использовалась в разных областях науки и техники. В частности, *А. Зельнер* исследовал использование таких методов в эконометрике [3]; *В. П. Савчук* анализировал надежность технических объектов [4]; *Г. И. Зайончковский* исследовал диагностику гидравлических систем воздушных судов [5]; известно также много других направлений применения этих методов. Использование байесовской

© Н. Н. Фатеева, 2013

методологии зачастую сводилось к большим аналитическим исследованиям, которые иногда требовали основательных знаний математики и статистики [6]. Благодаря развитию компьютерной техники и применению программных средств появилась возможность существенно упростить порядок расчета и сократить время на его выполнение.

Учитывая изложенное выше, применение метода Байеса в диагностике ГПА является актуальной и интересной научной задачей.

Постановка задачи. Задача ставится следующим образом. Известна система, которая находится в одном из N случайных состояний. Известна совокупность признаков, каждый из которых с определенной вероятностью характеризует состояние системы. Требуется построить решающее правило, с помощью которого предъявленная совокупность признаков $K(K_1, K_2, ..., \quad K_m)$ может быть отнесена к одному из возможных состояний (диагнозов) D_i. Кроме этого, необходимо определить достоверность принятого решения. Так как поставленная задача является вероятностной, то применяется метод Байеса [7].

Математическая модель. Выбирают основные параметры состояния узла и параметры их проявления (выходные), которые могут использоваться в качестве диагностических. Параметрами состояния могут быть показатели износа, потеря упругих свойств (пружины), обрыв или потеря эластичности (резиновые уплотнения) и т. д.

По данным статистики отказов определяют *вероятностные веса* признаков при различных состояниях, затем определяют вероятности состояний объектов при различных комбинациях признаков.

Вероятности состояний определяют по формуле Байеса

$$P(D_i / K) = \frac{P(D_i) \cdot P(K_1 / D_i) \cdot \ldots \cdot P(K_m / D_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(D_i) \cdot P(K_1 / D_i) \cdot \ldots \cdot P(K_m / D_i)}, \ (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (1)$$

где $P(D_i)$ – априорная вероятность состояния объекта; $D_1, \ldots, D_n$ – состояния объекта; $K_1, \ldots, K_m$ – признаки (параметры) состояний объекта; $P(K_1 / D_i)$, $\ldots, \quad P(K_m / D_i)$ – вероятности проявления признаков $K_1, \ldots, K_m$ при состоянии D_i.

Априорную вероятность состояний в простейшем случае, когда состояния $D_1, D_2, \ldots, D_n$ образуют полную группу несовместимых событий, определяют как отношение числа объектов N_i, в которых обнаружены неисправности D_i, к общему числу исследуемых объектов N:

$$P(D_i) = \frac{N_i}{N}. \qquad (2)$$

В знаменателе формулы (1) представлена вероятность $P(K)$ того, что в исследуемом ГПА должен обнаруживаться комплекс признаков K. Так как комплекс признаков K всегда проявляется как минимум с одним из состояний D_i, то полная вероятность

$$P(K) = \sum_{1}^{n} P(D_i) \cdot P(K / D_i) . \qquad (3)$$

Представленное в формуле (1) произведение $P(K_1 / D_i), \ldots, P(K_m / D_i)$ представляет собой $P(K / D_i)$ при условии, что сумма вероятностей

$$\sum_{i=1}^{n} P(D_i / K) = 1$$

и признаки K_j являются независимыми для каждого из состояний D_i.

В случае отсутствия признака K_j

$$P(\bar{K}_j / D_i) = 1 - P(K_j / D_i) . \qquad (4)$$

Решение о диагнозе, то есть отнесение состояния ГПА к одному из D_i, может быть принято, если

$$P(D_i / K) \geq P_\partial ,$$

где P_∂ – заранее выбранный уровень диагноза (заданная надежность диагностирования). Для современных систем диагностирования ГПА $P_\partial = 0,8 \div 0,9$. При $P(D_i / K) < P_\partial$ решение о диагнозе не принимается, и требуются дополнительные исследования.

Метод расчета. Для определения вероятности диагнозов по методу Байеса необходимо составить *диагностическую матрицу*, которая формируется на основе предварительного статистического материала. В этой таблице содержатся вероятности разрядов признаков при различных диагнозах. Размер исследуемых значений определяется количеством вероятных (возможных) проявлений признаков отказов и неисправных состояний [8].

Рассмотрим в качестве примера выбор основного диагностического параметра аксиально-поршневого насоса НПА-64.

Выбираются девять основных состояний насоса D_i и четыре основных диагностических признака (параметра) K_j проявления различных неисправностей, которые сводятся к повышенным параметрам вибрации корпуса насоса K_1, повышенным пульсациям давления в напорной гидролинии K_2, снижению объемного КПД K_3 и течи рабочей жидкости из штуцера дренажной линии K_4.

Диагностическая матрица Байеса об отказах и неисправностях аксиально-поршневого насоса приведена ниже в табл. 1.

Таблица 1. Диагностическая матрица Байеса

Состояние насосов D_i	**Признаки** K_i				
	$P(K_1/D_i)$	$P(K_2/D_i)$	$P(K_3/D_i)$	$P(K_4/D_i)$	$P(D_i)$
Суммарный износ торцового гидрораспределителя и торцовой поверхности блока цилиндра – D_1	0,79	0,82	0,99	0,8	0,7
Суммарный осевой люфт в сочленении поршень-шатун-вал – D_2	0,75	0,98	0,08	0,02	0,65
Радиальный зазор поршень-отверстие блока цилиндров – D_3	0,56	0,6	0,93	1	0,4
Износ подшипников – D_4	0,99	0,1	0,2	0,12	0,18
Износ шеек кардана – D_5	0,9	0,15	0	0	0,01
Износ подпятника кардана – D_6	0,84	0	0	0	0,03
Износ или разрушение деталей уплотнения приводного вала – D_7	0	0	0,01	0	0,05
Потеря упругих свойств (поломка) пружины – D_8	0	0	0,1	0	0,002
Исправное состояние насоса – D_9	0,03	0,02	0	0	0,3

При работе диагностируемого объекта возможны следующие сочетания проявления признаков K_j: K_1, K_2, K_3 и K_4; только K_1; только K_2; только K_3; только K_4; K_1 и K_2; K_3 и K_4; K_2 и K_3; K_2 и K_4; K_1 и K_3; K_1 и K_4; K_1, K_2 и K_3; K_1, K_2 и K_4; K_1, K_3 и K_4; K_2, K_3 и K_4.

Определим вероятность нахождения насоса в исправном состоянии, если имеет место одно из возможных проявлений признаков K_1, K_2, K_3 и K_4. По формуле (1) получим вероятность

$$P(D_9/K_1K_2K_3K_4)=\frac{P(D_9)\cdot P(K_1/D_9)\cdot P(K_2/D_9)\cdot P(K_3/D_9)\cdot P(K_4/D_9)}{\sum_{i=1}^{9}P(D_i)\cdot P(K_1/D_i)\cdot\ldots\cdot P(K_m/D_i)}=0,$$

поскольку $P(K_3/D_9)$ и $P(K_4/D_9)$ равны 0.

Из вышеприведенного ясно, что метод Байеса сложен для выполнения расчетов, поскольку использует много переменных, учитывающих различные факторы. Поэтому его избегают, редко применяют в практической деятель-

ности.

Применение программных средств помогает существенно упростить порядок расчета и сократить время на его выполнение.

Расчет на основе метода Байеса вероятностей состояний исследуемых объектов (любых объектов) при разных комбинациях признаков K_j может быть с успехом выполнен как в среде программного обеспечения MathCad, так и в среде программного обеспечения Microsoft Excel.

Анализ полученных результатов. Результаты расчетов вероятностей различных состояний насосов при проявлении выбранных диагностических признаков получены в среде программного обеспечения Microsoft Excel и приведены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты расчетов

Реализация признаков	**Вероятность классификации состояний**								
	$P(D_1/K_j)$	$P(D_2/K_j)$	$P(D_3/K_j)$	$P(D_4/K_j)$	$P(D_5/K_j)$	$P(D_6/K_j)$	$P(D_7/K_j)$	$P(D_8/K_j)$	$P(D_9/K_j)$
K_1, K_2, K_3, K_4	0,74	0,0016	0,258	0,0009	0	0	0	0	0
только K_1	0,0012	0,054	0	0,69	0,047	0,154	0	0	0,054
только K_2	0,0016	0,958	0	0,0008	0,001	0	0	0	0,039
только K_3	0,809	0,039	0	0,044	0	0	0,077	0,0309	0
только K_4	0,0395	0,0112	0,92	0,029	0	0	0	0	0
K_1 и K_2	0,002	0,966	0	0,028	0,003	0	0	0	0,0004
K_3 и K_4	0,242	$6\cdot10^{-5}$	0,757	0,0004	0	0	0	0	0
K_2 и K_3	0,656	0,343	0	0,0009	0	0	0	0	0
K_2 и K_4	0,0853	0,259	0,654	0,0015	0	0	0	0	0
K_1 и K_3	0,405	0,0157	0	0,5796	0	0	0	0	0
K_1 и K_4	0,035	0,0079	0,277	0,68	0	0	0	0	0
K_1, K_2 и K_3	0,689	0,287	0	0,024	0	0	0	0	0
K_1, K_2 и K_4	0,154	0,373	0,399	0,073	0	0	0	0	0
K_1, K_3 и K_4	0,475	0,0001	0,502	0,023	0	0	0	0	0
K_2, K_3 и K_4	0,492	0,0013	0,506	$2\cdot10^{-5}$	0	0	0	0	0

Если задать уровень (достоверность) диагноза $P_д = 0,8 \div 0,9$, то анализ полученных данных показывает, что когда появляется признак K_2 или два при-

знака K_1 и K_2, то в насосе имеет место состояние D_2 – суммарный осевой люфт в сочленении поршень-шатун-вал, а если появляется признак K_3, то в насосе имеет место состояние D_1 – суммарный износ торцового гидрораспределителя и торцовой поверхности блока цилиндра.

Из приведенных расчетов следует, что диагностирование аксиально-поршневых насосов НПА-64 можно проводить по величине изменения трех основных признаков (параметров): объемному КПД, пульсациям давления в напорной гидролинии, вибрациям корпуса насоса. В связи с тем, что более 98% насосов выбраковываются и поступают в ремонт по причине снижения объемного КПД и в значительной меньшей степени по причине повышенных пульсаций давления и вибраций корпуса насоса, показатель объемного КПД принимается за основной.

Перспективы дальнейших исследований. Автор считает перспективным направление исследования вопросов технической диагностики ГПА, так как диагностирование создает условия для значительного повышения коэффициента использования машин благодаря сокращению времени на их техническое обслуживание и ремонт, уменьшения затрат на эксплуатацию и исключения аварийных ситуаций.

Выводы. Благодаря применению статистических методов распознавания можно одновременно учитывать признаки различной физической природы, так как они характеризуются безразмерными величинами – вероятностями их появления при различных состояниях системы. Использование метода Байеса при оценке технического состояния ГПА дает возможность с достаточной точностью судить о текущем состоянии оборудования и прогнозировать ремонтные мероприятия. Разумеется, метод Байеса имеет недостатки: большой объем предварительной информации, «угнетение» редко встречающихся диагнозов и др. Однако в случаях, когда объем статистических данных позволяет применить метод Байеса, его целесообразно использовать как один из наиболее надежных и эффективных методов.

Список литературы: **1.** *Харазов А.М.* Техническая диагностика гидроприводов машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 112 с. **2**. *Бидюк П.И., Павлов В.В., Борисевич А.С., Гасанова Л.Т.* Оценивание регрессионных моделей с помощью метода Монте-Карло для марковских цепей // Кибернетика и вычислительная техника. – 2009. – №156. – С. 40 – 57. **3**. *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрии. – М.: Статистика, 1980. – 434 с. **4**. *Савчук В.П.* Байесовские методы статистического оценивания: Надежность технических объектов. – М: Наука, 1989. – 328 с. **5**. Надежность гидравлических систем воздушных судов / Под ред. Т.М. Башты – М.: Транспорт, 1986. – 279 с. **6**. Справочник по прикладной статистике / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана – М.: Финансы и статистика, 1989. – 525 с. **7**. *Сырицын Т.А.* Эксплуатация и надежность гидро- и пневмоприводов. – М.: Машиностроение, 1990. – 248 с. **8**. *Биргер И.А.* Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 240 с.

Надійшла до редколегії 20.02.2013

УДК 621.225

Применение метода Байеса в диагностике гидропневмоагрегатов / Н. Н. Фатеева // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 200 – 206. Бібліогр.: 8 назв.

Використання в діагностиці гідропневмоагрегатів статистичних методів розпізнавання дозволяє одночасно враховувати ознаки різної фізичної природи, оскільки вони характеризуються безрозмірними величинами – вірогідністю їх появи при різних станах системи. Розглянуто вживання методу Байєса на конкретному прикладі (вибір основного діагностичного параметра аксіально-поршневого насоса) з використанням програмних засобів, що допомагає істотно спростити порядок розрахунку і скоротити час на його виконання.

Ключові слова: технічна діагностика, метод Байєса, діагностична матриця, комплекс ознак, гідропневмоагрегат.

Application in diagnostics of hydropneumounits of statistical methods of recognition allows simultaneously to take into account the signs of different physical nature, because they are characterized dimensionless sizes – probabilities of their appearance at the different states of the system. Application of method of Bayes is considered on a concrete example (choice of basic diagnostic parameter of axial-plunger pump) with the use of programmatic facilities, that helps substantially to simplify the order of calculation and shorten time on his implementation.

Key words: technical diagnostics, method of Bayes, diagnostic matrix, complex of signs, hydropneumounit.

УДК 621.224

О.Н. ХОРЕВ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА В ПРОТОЧНОЙ ЧАСТИ РАДИАЛЬНО-ОСЕВОЙ НАСОС-ТУРБИНЫ

Представлены результаты численного исследования течения вязкой жидкости в проточной части радиально-осевой насос-турбины Днестровской ГАЭС при напоре 150 м. Расчеты проведены с помощью программного комплекса FlowER-U. Показана структура потока, выполнен анализ особенностей физических процессов и определены потери энергии в элементах проточной части в турбинном и насосном режимах. Проведено сравнение полученных результатов с данными экспериментальных исследований на гидродинамическом стенде.

Ключевые слова: проточная часть, насос-турбина, рабочее колесо, вязкое течение, численное моделирование.

Введение. В энергетических системах развитых стран доля мощностей ГЭС и ГАЭС составляет минимум 15 % от суммарной мощности генерирующих источников энергии. В балансе энергосистемы Украины доля гидроэлектростанций по состоянию на начало 2012 г. не превышала 10,2 %. Сложившаяся ситуация характеризуется крайне неоптимальной структурой гене-

© О. Н. Хорев, 2013

рирующих мощностей и обуславливает дефицит как маневренных, так и регулирующих энергоисточников.

В Украине не предусматривается в ближайшее время строительства новых крупных гидроузлов. Одним из наиболее реальных путей ввода новых мощностей является завершение строительства гидроэнергетических объектов, заложенных еще в 20-ом веке, и в которые вложены значительные средства. Первым по значимости таким объектом в Украине является Днестровская ГАЭС. Она должна стать важным звеном отечественной энергосистемы, поскольку будет нести до 30 % циклической нагрузки и существенно уменьшит ее колебания, повысит качество электроэнергии, вырабатываемой энергосистемой Украины [1].

Основные параметры агрегата насос-турбины Днестровской ГАЭС: максимальный напор $H_{\text{макс}} = 165\,5$ м, расход в турбинном режиме $Q = 273,2$ м^3/с, диаметр рабочего колеса (РК) $D_1 = 7,3$ м, максимальная мощность натурного агрегата в турбинном режиме $N_T = 390$ МВт, в насосном $N_н = 420$ МВт.

Насос-турбины, установленные на Днестровской ГАЭС, созданы в Украине и представляют собой уникальную конструкцию, как по единичной мощности, так и по принятым конструктивным и технологическим решениям, а их показатели соответствуют уровню лучших зарубежных аналогов. Поэтому моделирования течения в проточной части (ПЧ) этой насос-турбины представляет научный и практический интерес, поскольку позволяет изучить особенности течения в высокоэффективной ПЧ, провести верификацию разработанных моделей и программных комплексов и использовать полученные данные для совершенствования существующих и создания новых проточных частей.

Объект исследования. Проточная часть насос-турбин, установленных на первой очереди Днестровской ГАЭС, была разработана в Лаборатории обратимых гидромашин ИПМаш НАН Украины по заказу ОАО «Турбоатом» [2]. Ее создание потребовало проведения комплекса расчетных и экспериментальных работ на энергокавитационном стенде. После проведения контрольных испытаний на стенде ОАО «Турбоатом» наиболее эффективного варианта ПЧ модели с диаметром РК $D_1 = 0,35$ м совместно с Заказчиком была спроектирована и изготовлена модель ПЧ с РК ОРО 170/5217 диаметром $D_1 = 0,5$ м. В результате исследований двух вариантов ПЧ с различной конструкций статора для натурной насос-турбины был принят вариант с коническими статорными кольцами. Это позволило впервые применить в натурной гидромашине встроенный кольцевой затвор, выполняющий функцию запорного органа.

В качестве объекта исследования в данной работе выбрана проточная часть ОРО 170/5217-В-50, для которой известны геометрические данные ПЧ и характеристики модели гидромашины в турбинном и насосном режимах, полученные по результатам испытаний на гидродинамическом стенде ЭКС-150 ОАО «Тур-

боатом». Параметры стенда соответствуют требованиям МЭК 60193 и обеспечивают точность определения КПД в пределах $\pm 0,25$ % [3].

Расчетные исследования выполнялись для модели с диаметром РК $D_1 = 0,5$ м при напоре и расходе, соответствующих измеренным на стенде. Расчетная область состояла из решетки статора, имеющей конические кольца с числом колонн $z_0 = 20$, направляющего аппарата (НА) с числом лопаток $z_1 = 20$ асимметричного профиля высотой $b_0 = 0,14D_1$ и диаметром расположения осей поворота лопаток $D_0 = 1,2D_1$, РК с числом лопастей $z_2 = 7$ и конуса отсасывающей трубы.

Расчеты проведены для ряда режимных точек универсальной характеристики на линии оптимального открытия НА $a_0 = 30$ мм в турбинном режиме (при напоре $H = 17,45$ м) и $a_0 = 35$ мм в насосном.

Математическая модель. Численный метод. Моделирование течения вязкой несжимаемой жидкости в проточной части радиально-осевой насос-турбины выполнено на основе численного интегрирования *уравнений Рейнольдса* с дополнительным членом, содержащим *искусственную сжимаемость* [4].

Для учета турбулентных эффектов применена *дифференциальная двухпараметрическая модель Ментера* (SST) [5].

Численное интегрирование уравнений проводится с помощью *неявной квазимонотонной схемы Годунова* второго порядка аппроксимации по пространству и времени. Подробное описание математической модели и численного метода представлено в работах [4, 6].

В качестве граничных условий при расчетных исследованиях заданы:

• на входе в статор – составляющие вектора скорости потока;

• на стенке – условие прилипания (скорость равна нулю);

• на выходе из конуса отсасывающей трубы – статическое давление.

Исследуемая проточная часть насос-турбины отображается на расчётную область с помощью сетки с общим числом ячеек около 1,6 млн.

Результаты расчетного исследования течения. В результате проведения расчетов получены кинематические характеристики пространственного потока и значения потерь энергии в проточной части насос-турбины на линии оптимального открытия НА в турбинном и насосном режимах работы.

На рис. 1 представлено распределение вдоль относительной высоты канала $\overline{b}$ осредненных в окружном направлении значений меридиональной (расходной) скорости V_m и момента окружной скорости VuR в сечениях на входе в расчетную область (перед статором) $R = 0,450$ м, перед НА $R = 0,3425$ м, перед РК

$R = 0,2658$ м и на выходе из РК на расстоянии 20 % длины хорды при оптимальном турбинном режиме (расход $Q = 348,8$ л/с, частота вращения $n = 660$ мин$^{-1}$, напор $H = 17,45$ м). При радиальном течении потока наблюдается равномерное распределение момента скорости по высоте канала. Достаточно равномерно распределение и меридиональной скорости. Меньшее ее значение в середине канала перед НА объясняется влиянием принятых в конструкции ПЧ конических статорных колец. Уменьшение меридиональной скорости у втулки перед РК связано с поворотом потока в РК. За РК большее значение меридиональной скорости наблюдается в середине канала – ее величина почти в 2 раза выше, чем у втулки и обода. Момент скорости за РК имеет положительный знак и достаточно плавно убывает от 0,45 м^2/с на периферии до 0,05 м^2/с на втулке.

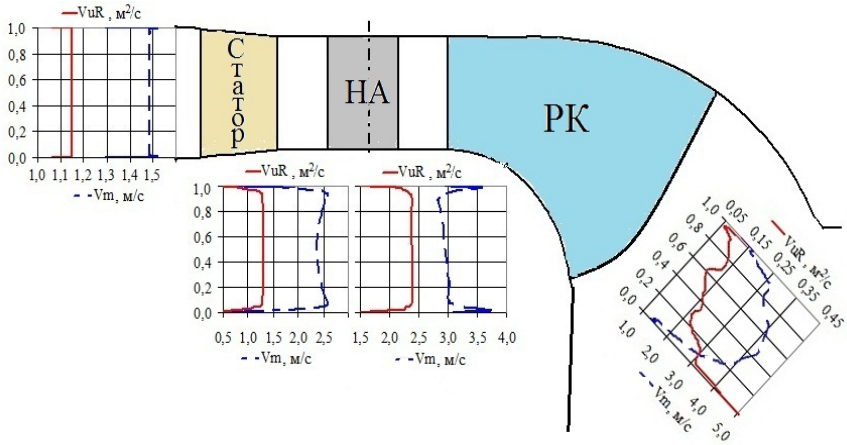


Рис. 1 – Распределение меридиональной скорости и момента скорости в проточной части.

Распределение изолиний давления (измеренного в Паскалях) и векторов скорости при оптимальном турбинном режиме в канале гидромашины в среднем меридиональном сечении приведено на рис. 2, а в среднем тангенциальном сечении на рис. 3. В меридиональном сечении распределение давления и векторов скорости достаточно благоприятны. В тангенциальном сечении на стороне давления лопасти имеет место область с вторичными течениями. Наличие таких зон снижает эффективность работы РК. Размер области с вторичными течениями и их интенсивность в тангенциальном сечении возрастает с приближением к периферийной части лопасти, на втулочном участке такие зоны практически отсутствуют.

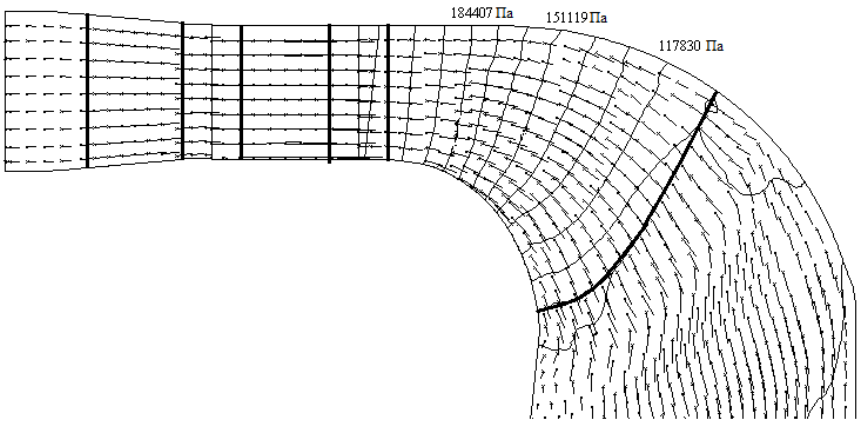


Рис. 2 – Распределение изолиний давления и векторов скорости в проекции среднего сеточного слоя на меридиональное сечение при оптимальном турбинном режиме.

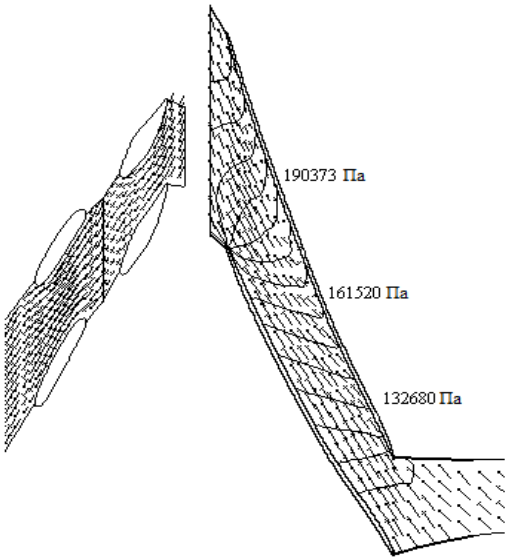


Рис. 3 – Распределение давления и векторов скорости в среднем тангенциальном сечении проточной части.

На рис. 4 приведены эпюры распределения давления на поверхностях трех характерных сечений лопасти РК – периферийного (10 % высоты канала), среднего (50 %) и втулочного (90 %) при оптимальном турбинном режиме. Из представленного графика видно, что во втулочном и среднем сечениях распределение давления достаточно плавное. В периферийном сечении имеет место значительная неравномерность, как на стороне давления, так и на стороне разрежения, особенно в выходной части лопасти. В случае модернизации РК следует спрофилировать периферийную часть лопасти РК с более плавным обтеканием и, по возможности, с отсутствием зон с вторичными течениями, что, как ожидается, позволит повысить эффективность РК и всей ПЧ в целом.

Проведенные расчеты позволили определить КПД исследуемой проточной части, а также выделить потери энергии в каждом из ее элементов. В таблице приведены потери энергии в элементах ПЧ при оптимальном турбинном режиме. Потери определялись как разности полных энергий потока на входе в решетку лопастей и выходе из нее, отнесенные к напору. Наибольшие потери получены в РК, наименьшие в решетке статора. В отводящем конусе потери составили 0,74 %. Различие значений расчетного и экспериментального КПД объясняется тем, что при расчете не учтены потери в спиральной камере и отсасывающей трубе, а также дисковые и объемные потери.

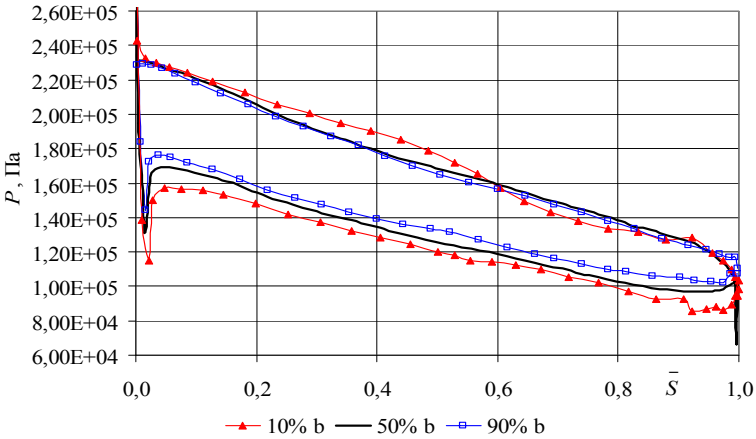


Рис. 4 – Распределение давления вдоль сечений лопасти рабочего колеса.

Таблица. Потери энергии в элементах модели проточной части Днестровской ГАЭС при оптимальном турбинном режиме

Режимные параметры			Результаты расчета				Эксперимент
Расход Q, л/с	Частота вращения n, мин$^{-1}$	Напор H, м	Потери в элементах проточной части			КПД η, %	КПД η, %
			Статор, $h_{ст}$, %	НА, $h_{НА}$, %	РК, $h_{РК}$, %		
348,8	660,0	17,45	0,48	1,56	1,98	95,24	90,67

На рис. 5 представлена зависимость значений расчетного и экспериментального КПД от приведенной частоты вращения в турбинном режиме при оптимальном открытии НА. Сравнение приведенных результатов показывает, что положения максимумов КПД по частоте вращения практически совпадают, а характер изменения кривых идентичен.

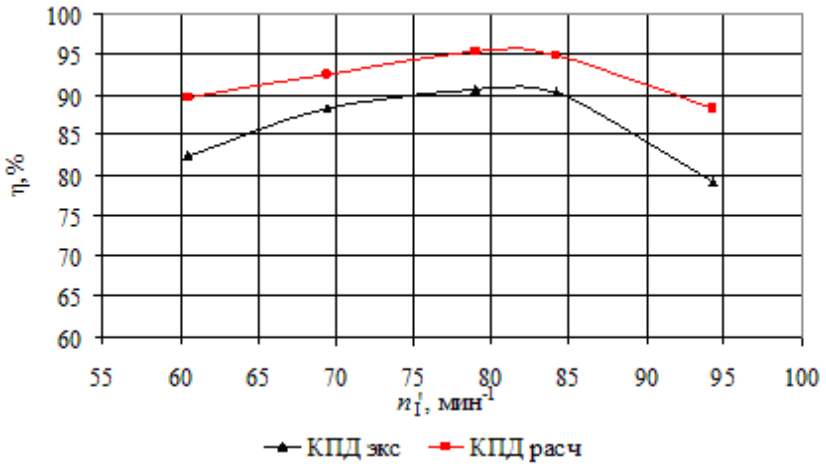


Рис. 5 – Зависимости расчетного и экспериментального КПД от приведенной частоты вращения при оптимальном открытии НА в турбинном режиме.

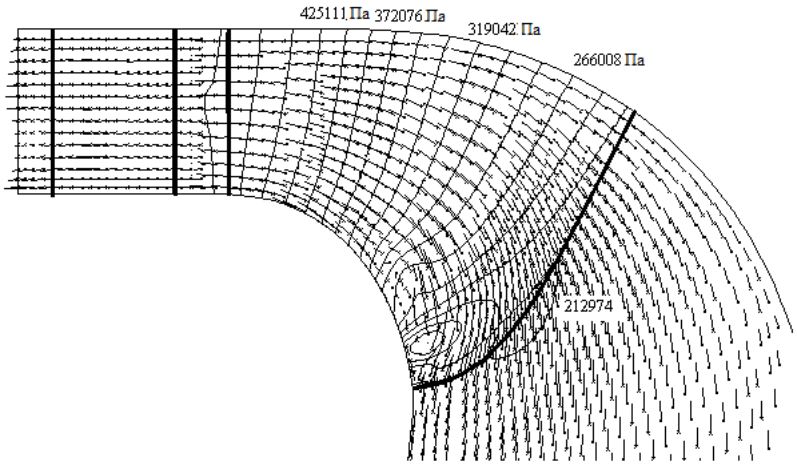


Рис. 6 – Распределение изолиний давления и векторов скорости в проекции среднего сеточного слоя на меридиональное сечение при насосном режиме.

На рис. 6 приведено распределение изолиний статического давления и векторов скорости при оптимальном насосном режиме (подача $Q = 472,2$ л/с, частота вращения $n = 1000$ мин$^{-1}$, открытие НА $a_0 = 35$ мм) в канале насос-турбины в среднем меридиональном сечении.

Как видно из рисунка, на периферийном участке лопасти в районе всасывающей кромки даже на оптимальном режиме имеется значительная область с вторичными течениями. При увеличении подачи размеры этой области уменьшаются, и интенсивность вторичных течений падает. При подаче свыше $Q = 620$ л/с вторичные течения в этой зоне лопасти практически отсутствуют. Таким образом, при модернизации ПЧ ОРО 170/5217 следует изменить форму лопасти и, возможно, обода на этом участке с целью снижения вторичных течений при оптимальном режиме, что должно привести к повышению КПД в насосном режиме и эффективности работы насос-турбины в целом.

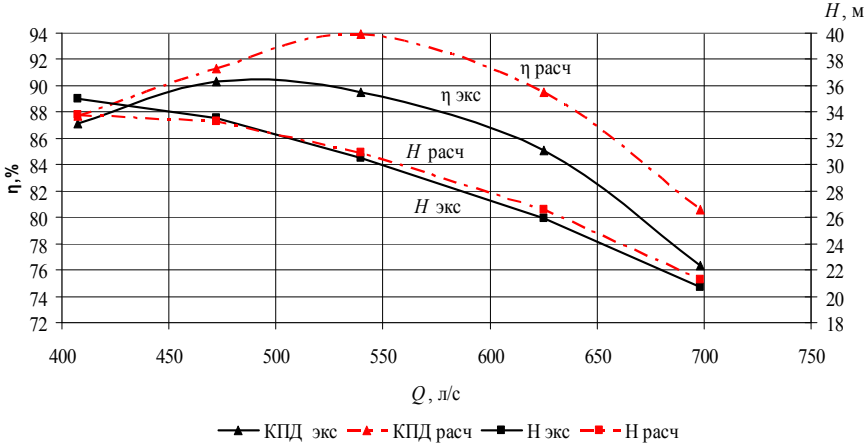


Рис. 7 – Зависимость расчетных и экспериментальных значений КПД и напора от подачи при оптимальном открытии НА в насосном режиме.

На рис. 7 приведены зависимости расчетных и экспериментальных значений создаваемого напора и КПД от подачи в насосном режиме при открытии НА $a_0 = 35$ мм и постоянной частоте вращения $n = 1000$ мин$^{-1}$. При определении расчетного значения КПД, как и в турбинном режиме, не учитывались потери в отсасывающей трубе и спиральной камере, а также дисковые и объемные потери. Сравниваемые на рис. 7 расчетные и экспериментальные характеристики хорошо согласуются между собой. Различия в области малых подач объясняется тем, что в этой зоне работы насос-турбины имеют место значительные отрывные течения, которые не учитываются в полной мере в предложенной математической модели течения жидкости.

Выводы. В результате численного моделирования трехмерного вязкого течения несжимаемой жидкости в проточной части радиально-осевой насос-турбины получены новые данные о структуре пространственного потока, осредненных параметрах и потерях энергии, определены особенности течения

в каждом из элементов.

Полученные результаты позволили составить баланс энергии в исследуемой проточной части и провести сравнение с данными экспериментальных исследований на гидродинамическом стенде в турбинном и насосном режиме.

Выполненный анализ рабочего процесса в проточной части насос-турбины показал хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных, что свидетельствует о возможности использования программного комплекса FlowER-U для разработки новых и совершенствования модернизируемых проточных частей гидромашин

Список литературы: 1. *Линник А.В.* Современный уровень и основные направления развития гидротурбостроения в Украине / А.В. Линник, В.Д. Хаитов // Пробл. машиностроения. –2010. – Т. 13, № 1. – С. 11-18. **2**. *Федулов Ю.И.* Разработка проточной части и исследование моделей обратимых гидромашин быстроходностью 190 для условий Днестровской ГАЭС/ Ю.И. Федулов, Е.С. Агибалов, В.Н. Дедков, П.Н. Сухоребрый, И.С Веремеенко, Н.С. Панченко, Б.К. Вапник, И.Д. Кузьмин// Тезисы Республиканской научно-технической конференции «Математическое моделирование процессов и конструкций энергетических и транспортных установок в системах их автоматизированного проектирования», Ч. 3.– Х. –1988. – С. 32-33. **3**. МЭК 60193. Модельные приемо-сдаточные испытания гидравлических турбин, насосов, гидроаккумулирующих станций и насос-турбин. – 576 с. **4**. *Русанов А.В.* Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием неявной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности / А.В. Русанов, Д.Ю. Косьянов // Восточ.-Европ. журн. передовых технологий. − 2009. − №5. − С. 4−7. **5**. *Menter F.R.* Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA J. − 1994. − 32, №8. − P. 1598 − 1605. **6**. *Русанов А.В.* Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин / А.В. Русанов, С.В. Ершов. − Харьков: Ин-т пробл. машиностроения НАН Украины, 2008. − 275 с.

Поступила в редколлегию 23.04.2013

УДК 621.224

Моделирование рабочего процесса в проточной части радиально-осевой насос-турбины / О.М. Хорев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 206 – 214. Бібліогр.: 6 назв.

Наведено результати чисельного дослідження течії в'язкої рідини в проточній частині радіально-осьової насос-турбіни Дністровської ГАЕС на напір 150 м. Розрахунки проведено за допомогою програмного комплексу FlowER-U. Показано структуру потоку, виконано аналіз особливостей фізичних процесів та визначено втрати енергії в елементах проточної частини в турбінному та насосному режимах. Проведено порівняння отриманих результатів з даними експериментальних досліджень на гідродинамічному стенді.

Ключові слова: проточна частина, насос-турбіна, робоче колесо, в'язка течія, чисельне моделювання.

Presents the results of numerical simulation of viscous fluid in the flow part of the radial-axial pump-turbine Dniester PSP on the head 150 m. The calculations were performed using the software package FlowER-U. Shows the structure of the flow, the analysis of the features of the physical processes and identifies the energy loss in the elements of the flow part in the turbine and pump modes. The results are compared with those of experimental studies on hydrodynamic bench.

Key words: flow part, pump-turbine, runner, the viscous flow, numerical simulations.

УДК 628.355:356

О.О. ШЕВЧЕНКО, аспірант, ЧДІЕУ, Чернігів;
І.М. ІВАНОВА, д-р техн. наук, ст. наук. співр., ЧДІЕУ, Чернігів

ЗАСТОСУВАННЯ БІОТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ НАДІЙНОСТІ ОЧИСТКИ СТІЧНИХ ВОД ВІД БІОГЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Розглянуто напрями робіт з удосконалення очищення стічних вод за допомогою біотехнології нітри-денітрифікації і біологічної дефосфатизації із застосуванням ступінчастої схеми очистки стічних вод в коридорних аеротенках з метою створенням в аеротенку трьох типів зон: аеробної, аноксидної і анаеробної для ефективного видалення сполук азоту і фосфору.

Ключові слова: нітри-денітрифікація, біогенні елементи, аеробні умови, анаеробні умови, аноксидні умови, біологічна дефосфатизація.

Вступ. Проблема забруднення біогенними елементами водних об’єктів та їх охорона є одним з першочергових завдань з екологічної безпеки не тільки в Україні, але й в багатьох інших країнах світу. Основним джерелом забруднення водойм, що призводить до погіршення якості води і порушення нормальних умов життєдіяльності гідробіонтів, є скиди недостатньо очищених стічних вод.

Міські очисні споруди, в яких біологічне очищення стічних вод здійснюється за традиційною схемою *аеротенк-вторинний відстійник* (що має місце на переважній більшості очисних споруд України), не забезпечують доведення якості очистки стічних вод до вимог їх скиду у водойми рибогосподарського призначення за концентраціями різних форм азоту і фосфору [1]. Причини низької ефективності роботи очисних споруд можуть бути різні: помилки при проектуванні, використання застарілих неефективних технологій, порушення регламенту експлуатації споруд та зміна (у порівнянні з проектними) складу та кількості стічних вод у зв’язку з розвитком промисловості та комунального господарства [2].

Аналіз останніх досліджень. Вирішення проблеми забруднення водних об’єктів недостатньо очищеними стічними водами можливе шляхом реконструкції переважної більшості каналізаційних очисних споруд з використанням передових технологій та нових розробок в галузі очищення стічних вод [3]. Основна увага в даний час приділяється процесам, які здатні одночасно видаляти із стічних вод і фосфор, і азот [4]. З урахуванням екологічних факторів таким методом є біологічний метод видалення азоту і фосфору із застосуванням біотехнології нітри-денітрифікації та біологічної дефосфотизації.

В практиці видалення біогенних речовин зі стічних вод є кілька випро-

© О. О. Шевченко, І. М. Іванова, 2013

буваних схем: A/O, AAO, Bardenpho, Phoredox, UCT, EASC, JHB і безліч їх модифікацій [5]. Всі вони умовно розділені на кілька зон: анаеробну, аноксидну і аеробну.

Принцип біовидалення фосфору, заснований на життєдіяльності мікроорганізмів Acinebacter, розроблений інститутом МосводоканалНИИпроект. Процес біофільтрації у висхідному потоці «Біофора», розроблений фірмою «ДЕГРЕМОНТ» (Франція), впроваджений на станції «амбре» в Парижі [4].

Реалізація біотехнологій нітри-денітрифікації і біологічної дефосфатизації пов'язана зі створенням в аеротенку трьох типів зон [6]:

– аеробної зони (висока концентрація розчиненого кисню), де протікають процеси аеробної очистки від органічних речовин, нітрифікація (біоокислення амонійного азоту до нітратного) і дефосфотизація (швидке споживання фосфатів фосфорними бактеріями);

– аноксидної зони (розчинений кисень практично відсутній, але є нітрати, а також органічні речовини), де відбувається процес денітріфікації;

– анаеробної зони (немає розчиненого кисню, немає нітратів і нітритів, але є органічні речовини) де відбувається зброджения органічних речовин до ацетату, який споживається фосфорними бактеріями з виділенням в середовище фосфатів.

Аноксидні і анаеробні умови створюються заміною аерації на механічне перемішування, хоча для діючих очисних споруд така реконструкція має достатньо високу вартість. Але існує і альтернативний підхід, який полягає у створенні аноксидних умов в аеротенку за рахунок низької (мінімально допустимої для запобігання осадженню активного мулу) інтенсивності аерації.

Для діючих аеротенків, які працюють в традиційному аеробному режимі, впровадження біотехнології нітри-денітрифікації та біологічної дефосфатизації при збереженні продуктивності за стоками потребує інтенсифікації очистки. Підвищення швидкості аеробних процесів, включаючи нітрифікацію і біоокислення органічних речовин, дозволяє зменшити об’єм аеробної зони з виділенням в аеротенку аноксидних і анаеробних зон.

Постановка задачі. Актуальною на сьогоднішній день є розробка та наукове обґрунтування методу нітри-денітрифікації міських стічних вод в коридорних аеротенках, а також створення технологічної схеми роботи коридорного аеротенка, яка б забезпечила комплексність очищення стічних вод від біогенних елементів та органічних речовин, була б надійною в експлуатації, простою в обслуговуванні та мала б мінімальні експлуатаційні витрати.

Модель запропонованої біотехнології. Концентрація забруднюючих речовин, що скидаються разом зі стічними водами, після очищення на очисних спорудах КП «Чернігівводоканал» в *р. Білоус*, правобережну притоку *р. Десна*, перевищувала встановлені нормативи гранично допустимого скиду для водойм рибогосподарського призначення у 2011 році за фосфат-іонамами

– у 8,1 рази (0,93–1,89 мг/дм^3), амоній-іонами – у 2,3 рази (0,64–1,79 мг/дм^3), нітрит-іонам – у 3,9 рази (0,19–0,45 мг/дм^3). Останнім часом очисні споруди м. Чернігова працюють з перевантаженням [7]. За даними досліджень КП «Чернігівводоканал» [8] відомо, що вхідні фактичні концентрації азоту амонійного в декілька разів перевищують гранично допустимі нормативи регламентовані на очисних спорудах (рис. 1), а найбільша концентрація розчинних азотовмісних речовин надходить саме з господарсько-побутовими водами (рис. 2).

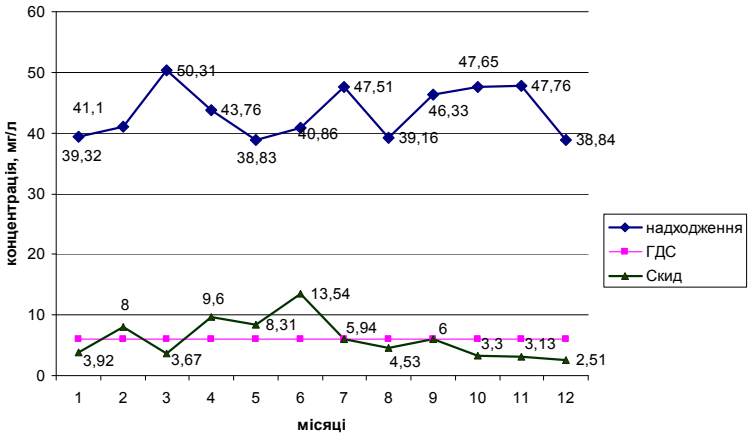


Рис. 1 − Концентрація азоту амонійного у стічних водах на вході та виході з КОС.

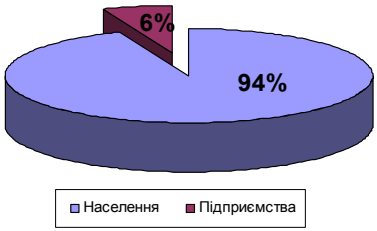


Рис. 2 − Баланс азоту амонійного у стічних водах, що надходять на очисні споруди.

Дисбаланс співвідношення органічних компонентів і азоту призводить до низької ефективності очистки стоків. Для вирішення проблеми, яка склалася навколо очистки стічних вод на каналізаційних очисних спорудах м. Чернігова, необхідно розглянути можливі способи вдосконалення технологічної схеми очистки стічних вод в коридорних аеротенках з метою досягнення регламентованих показників за вищевказаними забрудниками.

Для ефективного видалення біогенних елементів зі стічних вод в коридорних аеротенках із застосуванням біотехнології нітри-денітрифікації є просторове розділення процесів очистки шляхом послідовно розташованих зон для здійснення процесів денітрифікації, окислення органічних речовин і нітрифікації в одну або декілька стадій [3].

Видалення зі стічних вод амонійного азоту обумовлено двома біологічними процесами: споживанням азоту на синтез біомаси і біоокисленням при нітрифікації. Але крім того відбувається суттєве вторинне забруднення води амонійним азотом як в аеротенку, так і у вторинному відстійнику. Органічний азот, який міститься у зважених речовинах стічної води і біомасі активного мулу, в процесі їх біодеструкції виділяється в розчин у вигляді амонійного азоту.

Швидкість біоокислення амонійного азоту визначається першою стадією нітрифікації і може бути виражена через питому швидкість росту бактерій нітрифікаторів роду *Nitrosomonas* [6]:

$$V_N = -\frac{dC_N}{dt} = \frac{\mu_{mN} 1,07^{T-20} C_N C_O}{\left(k_N + C_N\right)\left(k_O + C_O\right)} \cdot \frac{X \Delta N_n}{\Delta X}, \quad (1)$$

де μ_{mN} − максимальна питома швидкість росту нітрифікаторів при 20 °С; $C_N C_O$ − концентрації амонійного азоту і розчинного кисню; k_N, k_O − константи напівнасичення для процесу нітрифікації; X, ΔX − концентрація активного мулу в аеротенку і його приріст на 1 л стічної води; ΔN_n − кількість нітрифікованого азоту на 1 л стічної води; T − температура мулової суміші в аеротенку (°С).

Швидкість V_{Nox} вторинного забруднення води амонійним азотом в аеротенку, пов'язана зі швидкістю V_{ox} біорозпаду (самоокислення) активного мулу, котру можна представити через його вік і визначити так:

$$V_{Nox} = \alpha_N V_{ox}, \quad (2)$$

де α_N − масова частка азоту в біоокислених органічних речовинах активного мулу (залежить від частки біомаси в активному мулі і в середньому $\alpha_N = 0,08$);

На виході всієї системи біологічної очистки, яка включає аеротенк і вторинний відстійник, концентрація амонійного азоту може бути в декілька разів вище, ніж на виході з аеротенка, що спричиняє вторинне забруднення стічної води амонійним азотом, який виділяється з активного мулу в процесі біорозпаду в зоні осаду вторинного відстійника. Щоб запобігти цьому можна підвищити концентрацію кисню в муловій суміші, яка надходить у вторинний відстійник, і зменшити в ньому рівень осаду. Підвищення концентрації кисню на виході з аеротенка вирішує також задачу глибокої очистки від нітратного азоту. При нітрифікації амонійний азот в аеробних умовах перетворюється на нітритний. При цьому не відбувається видалення азоту загального. Якщо в схему біологічної очистки включити додаткову аноксидну зону, то паралельно з процесом нітрифікації буде відбуватись процес денітрифікації − біовідновлення нітратного азоту в азот молекулярний, який видаляється в атмосферу при аерації. На стадії аерації біовідновлення органічних речовин здійснюється не киснем, а нітратами, що дозволяє скоротити витрату повітря

на аерацію. За окислювальною здатністю 1 г нітратного азоту відповідає 2,86 г молекулярного кисню. Аноксидні зони [9] послуговують не тільки для біовідновлення нітратів, але й для часткової очистки від органічних речовин. Витрата зовнішнього окислювача органічних речовин в аноксидних зонах, в котрі, як правило, надходить стічна вода, складає 0,6 – 0,8 г молекулярного кисню на 1 г видалених органічних речовин за БСК, що відповідає витраті азоту нітратів в кількості 0,2 – 0,3 г на 1 г за БСК, тобто для видалення 1 г нітратного азоту необхідно 3 – 5 г БСК.

Біологічне видалення фосфору [10] пов'язане з трьома процесами: включенням в клітинний матеріал (в основному в нуклеїнові кислоти); включенням до запасних речовин конструктивного обміну (поліфосфати) для синтезу нуклеїнових кислот; включенням до запасних речовин для енергетичного обміну (поліфосфати). У двох останніх процесах фосфор накопичується у вигляді поліфосфатів. Однак поліфосфати, які використовуються для конструктивного обміну, в анаеробних умовах не виділяються із клітин, а поліфосфати, які використовуються для енергетичного обміну, в анаеробних умовах слугують для синтезу АТФ і в кінцевому результаті у вигляді ортофосфатів надходять у навколишнє середовище.

В традиційних схемах біологічної очистки видалений із стічної води фосфор йде на будівництво клітинної речовини активного мулу, фосфати використовуються для забезпечення енергетичних потреб клітин. Тому збільшення споживання фосфору може бути досягнуто в процесі біологічної очистки стічних вод з підвищеним приростом мулу. Але можливість збільшення приросту мулу обмежена. Підвищення приросту мулу в системі аеротенк-вторинний відстійник можна досягти за рахунок зниження концентрації активного мулу і його віку.

Існує думка [11], що зі зменшенням віку мулу ефективність біологічної дефосфатизації зростає відповідно до збільшення приросту мулу. Оскільки технологія нітри-денітрифікації при низькому віці не працює, то важливим завданням є виявлення значень віку активного мулу, при якому спільне застосування технологій нітри-денітрифікації та біологічної дефосфатизації дає найкращий результат.

Закономірність зниження ефективності біологічної дефосфатизації із збільшенням віку може бути описана на основі концепції самоокислення біомаси (*ендогенного дихання*) або концепції енергії підтримки в модифікації, що враховує склад активного мулу [12, 13]. Відповідно до механізму біологічної дефосфотизації видалення фосфору зі стічної води пропорційне приросту фосфорних бактерій, які у свою чергу пропорційні кількості ацетату утвореного в анаеробній зоні.

Принцип біовидалення фосфору заснований на життєдіяльності мікроорганізмів *Acinebacter* [4], які здатні акумулювати більше фосфору, ніж потрібно на приріст. Acinebacter зазвичай присутні в активному мулі, але в незначних кількостях через низьку швидкість приросту. Щоб цей мікроорга-

нізм почав грати свою корисну роль, необхідно забезпечити його низькомолекулярними *летючими жирними кислотами* (ЛЖК), які служать субстратом для нього, і створити умови, при яких він здатний використовувати ЛЖК ефективніше інших мікроорганізмів, що знаходяться в біоценозі.

Для оптимального споживання фосфору в аеробній зоні повинно бути достатньо кисню, що перевіряється повнотою нітрифікації. Нітрати уповільнюють процес видалення фосфору, опиняючись в анаеробній зоні, так як при проходженні процесу денітрифікації у цій зоні споживаються ЛЖК для перетворення нітратів у вільний азот, окис азоту. Фосфати в анаеробній зоні починають виділятися тільки після видалення нітратів, отже, якщо концентрація ЛЖК була досить висока, то денітрифікація і вивільнення фосфору можуть відбуватися в одній і тій же споруді.

На основі викладеного вище представлений один із способів застосування технології нітри-денітрифікації [5], який полягає в створенні ступінчатої схеми очистки стоків, без внутрішньої рециркуляції. Згідно цієї схеми стічні води подаються в два або більше реакторів, кожний з яких має зону перемішування і зону аерації. Перемішування активного мулу і стічної рідини можна здійснювати механічними мішалками або повітрям. Пневматичне перемішування призводить до додаткового розчинення кисню і зниження ефективності денітрифікації та селекції бактерій, що акумулюють фосфор.

Реалізація ступінчастої схеми нітри-денітрифікації залежить як від конструкції самого аеротенка, так і від технологічних параметрів.

Технологія ступінчатої денітрифікації працює наступним чином (рис. 3) [14]: стічні води та активний мул подаються в початок аеротенка, де організована зона денітрифікації (анаеробна). У цій зоні відбувається відновлення денітрифікуючими бактеріями нітратів і нітритів, які прийшли зі стічними водами і активним мулом, до молекулярного азоту. Цей процес відновлення нітратів і нітритів, протікає при нестачі кисню і наявності органічних речовин, які не містять азоту, що приходить зі стічними водами. На окислення цих органічних речовин і витрачається кисень нітратів і нітритів. При цьому азот виділяється в атмосферу у вільному вигляді.

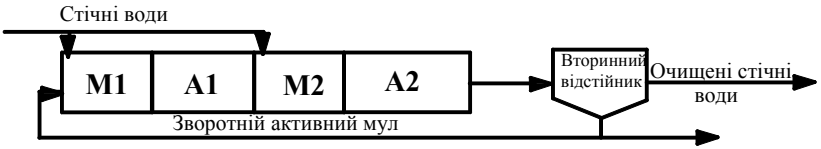


Рис. 3 – Схема ступінчатої денітрифікації:
M1, M2 − зони перемішування; A1, A2 − зони аерації.

Пройшовши зону денітрифікації, мулова суміш потрапляє в зону нітрифікації (аеробну), де відбувається перетворення нітрифікуючими бактеріями

амонійних солей у нітрити та нітрати, які засвоюються бактеріями.

Далі мулова суміш, насичена нітритами і нітратами, знову потрапляє в зону денітрифікації. Сюди ж подається частина стічних вод, що дозволяє денітрифікуючим бактеріям відновити нітрити та нітрати до молекулярного азоту.

Після цього мулова суміш знову потрапляє в аеробну зону, де відбувається окислення залишкових органічних домішок і сполук азоту (рис. 4).

Рис. 4 – Реалізація схеми ступінчатої денітрифікації одномулової системи в трикоридорному аеротенку.

При проходженні муловою сумішшю кисневих та безкисневих зон відбувається використання фосфору для приросту біомаси активного мулу і накопичення фосфору в біомасі фосфоракумулюючих організмів при чергуванні аеробних та анаеробних умов. Для глибокого видалення фосфору за технологією біологічної дефосфотизації процес модифікують шляхом включення анаеробної обробки активного мулу, тобто забезпечуються умови почергового проходження активним мулом аеробних та анаеробних зон, що стимулює розвиток в ньому фосфорних бактерій. Для позитивного застосування цієї біотехнології недопустиме тривале перебування активного мулу в безкисневих умовах на стадіях його обробки, щоб не допустити вихід фосфору із клітин в розчин і його повернення на вхід очисних споруд.

Висновки. У світовій практиці перевага надається різним методам очистки стоків, але на нашу думку заслуговує на увагу біотехнологія нітриденітрифікації та дефосфатизації у коридорних аеротенках. Представлена технологічна схема очистки є актуальною для реконструкції трихкоридорних аеротенків, і дозволяє використовувати вже побудовані споруди. Для застосування представленої схеми на каналізаційних очисних спорудах м. Чернігів необхідно виконати моделювання процесів очистки, враховуючи конструктивні особливості діючих споруд та концентрації забруднюючих речовин стічних вод, які надходять на очистку. Реалізацію цієї технології необхідно забезпечити створенням аеробних, анаеробних та аноксидних зон для збалансованої очистки стоків за конкуруючими сполуками азоту і фосфору, а також досягненням оптимального приросту мулу та його віку для досконалого проходження процесів окислення біогенів. Конкретний вибір технології очистки

стічних вод повинен проводитись з урахуванням конструкції діючих споруд біологічної очистки.

Список літератури: **1.** *Поліщук О.В.* Денітрифікація міських стічних вод в коридорних аеротенках: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. канд. техн. наук: спец. 05.23.04 «Водопостачання, каналізація» − Київ, 2007. **2.** *Зейфман Е.А., Лебедева Е.А., Тихановская Г.А.* Интенсификация процессов очистки сточных вод от биогенных элементов: Учебное пособие, − Вологда: ВоГТУ, 2003. − 121 с. **3.** *Грицина О.О.* Підвищення ефективності очищення стічних вод від сполук азоту в аеротенках // Водопостачання та водовідведення, 2012. − № 1. − С. 49-53. **4.** *Шевченко Т.А.* Повышение надежности очистки сточных вод от биогенных элементов. nuwm.rv.ua›metods/asp/vd/v40288.doc. **5.** *Василенко О.А., Грабовський П.О., Ларкіна Г.М.* та ін. Реконструкція і інтенсифікація споруд водопостачання та водовідведення. – Київ-Одеса: КНУБА, ОДАБА, 2007. – 299 с. **6.** *Маскалева С.Е., Большаков Н.Ю.* Математическое моделирование и внедрение эффективных биотехнологий очистки от азота и фосфора на действующих очистных сооружениях кнализации // Экология, 2012. − №4. − С. 56-59. **7.** Доповідь про стан навколишнього природного середовища Чернігівської області за 2011 рік.– Чернігів, 2012. – 360 с. **8.** *Шкінь О.М.* Технічні проблеми при дотриманні законодавчих вимог. Екологічні аспекти водовідведення // IWAS-Міжнар. конф. «Українсько-Німецьке партнерство у галузі водного господарства − завдання для науки і практики». 15-16.12.2008 р. − Івано-Франківськ. − 35 с. **9.** *Долина Л.Ф.* Очистка сточных вод от биогенные элементов: Монография. − Днепропетровск: Континент, 2011. − 198 с. **10.** *Janssen P.L.J., Meinema K., van der Roest H.F.* Biological Phosporus Removal. − STOWA Report, 2002. − 209 p. **11.** *Мишуков Б.Г.* Расчет сооружений биологической очистки городских сточных вод. − СПб.: Инж.-строит. инст., 1993 г. **12.** *Большаков Н.Ю.* Очистка от биогенных элементов на городских очистных сооружениях. − СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010 г. **13.** *Николаев А.Н., Большаков Н.Ю.* Биологическая очистка сточных вод: математическая модель // «Экология и промышленность России», ноябрь, 2001 г. **14.** *Щетинин А.И., Мешенгиссер, М.А. Есин, Б.Ю.* и др. Опыт реконструкции очистных сооружений с применением технологии нитри-денитрификации // Водопостачання і водовідведення, 2011. − № 3. − С. 41-49.

Надійшла до редколегії 20.05.2013

УДК 628.355:356

Застосування біотехнологій для підвищення надійності очистки стічних вод від біогенних елементів / О. О. Шевченко, І. М. Іванова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 215 – 222. Бібліогр.: 14 назв.

Рассмотрены направления работ по совершенствованию очистки сточных вод с помощью биотехнологии нитри-денитрификации и биологической дефосфатизации с применением ступенчатой схемы очистки сточных вод в коридорных аэротенках с целью создания в аэротенке трех типов зон: аэробной, аноксидной и анаэробной для эффективного удаления соединений азота и фосфора.

Ключевые слова: нитри-денитрификация, биогенные элементы, аэробные условия, анаэробные условия, аноксидные условия, биологическая дефосфатизация.

The article describes the direction of works to improve wastewater treatment using biotechnology nitrification-denitrification and biological defosfatization with using stepwise scheme of sewage treatment in the corridor aeration with the creation of three types zon aeration basin aerobic, anoxic and anaerobic to effectively remove nitrogzoneen and phosphorus.

Key words: nitrification, denitrification, nutrients, aerobic conditions, anaerobic conditions, anoxic conditions, biological dephosphatization.

УДК 539.3

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;
П.А. ЕГОРОВ, аспирант, ХНАДУ, Харьков

КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ, ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Механическая система состоит из прямоугольной мембраны и присоединенных масс. Мембрана лежит на упругом основании и закреплена по контуру. Решение прямой задачи (поиск перемещений точек мембраны) осуществляется с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье. Решение обратной задачи (определение неизвестной нагрузки, которая вызвала колебания системы) производится путем численного решения системы интегральных уравнений с использованием метода регуляризации.

Ключевые слова: мембрана, упругое основание, масса, нагрузка, контактная сила, перемещение, интегральное уравнение, идентификация, метод регуляризации.

Введение. Развитие современного машиностроения вызывает необходимость анализа напряженно-деформированного состояния создаваемых конструкций на этапах проектирования, экспериментальных исследований и доводки. Указанная проблема может быть решена с помощью построения математических моделей исследуемых систем различной степени сложности. Изучая сложные динамические системы, удобно выделять основной объект и исследовать его на основе некоторой теории, а инерционное воздействие контактирующих с ним объектов моделировать с помощью присоединенных распределенных или сосредоточенных масс, а также, например, упругих оснований.

Большинство задач по исследованию напряженно-деформированного состояния мембран и тонких пластин уже решены. В [1] были получены решения задач о нестационарных колебаниях круглой и прямоугольной мембран и задач идентификации неизвестных составляющих нагрузок, воздействующих на мембраны. В [2] было рассмотрено воздействие сосредоточенной нестационарной нагрузки на мембрану-полосу. В работе [3] было получено решение прямой и обратной задач для мембраны, несущей сосредоточенные массы. Более сложный случай нагружения, когда мембрана располагается на упругом основании, в рамках решения обратных задач никем не рассматривался. Настоящая работа развивает основные аспекты статьи [3].

Постановка задачи. Исследуемая система состоит из расположенной на упругом основании, закрепленной по контуру прямоугольной мембраны, которая несет на своей поверхности некоторые массы. В данной статье изучаются колебания мембраны с двумя присоединенными массами, причём одна

© Е. Г. Янютин, П. А. Егоров, 2013

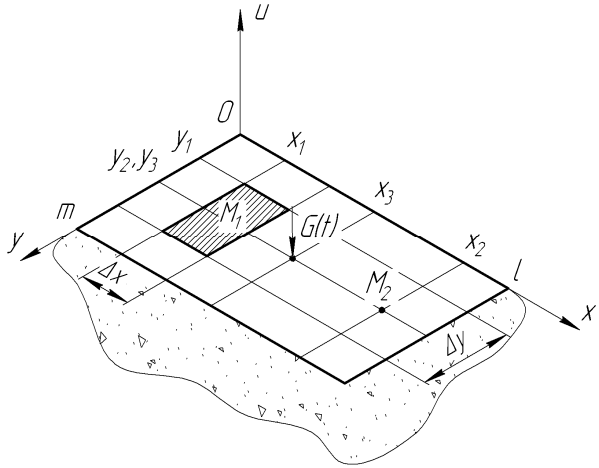


Рис. 1 – Схема нагружения мембраны.

из масс является распределенной (площадь распределения массы малая по сравнению с площадью мембраны), другая – сосредоточенной. Колебания изучаемой системы вызывает поперечная сосредоточенная импульсная нагрузка. Целью исследования является решение прямой и обратной задач, характерных для математической физики.

Решение прямой задачи. В качестве исходного уравнения для изучения колебаний точек мембраны примем известное двумерное волновое уравнение свободных колебаний [4]. Для полного описания исследуемой системы необходимо исходное уравнение дополнять некоторыми членами.

Воздействие присоединенных масс можно учесть при условном отсоединении масс от поверхности мембраны, если ввести эквивалентные контактные силы

$$R_1(x,y,t) = (H(x-x_1) - H(x-x_1-\Delta x))H((y-y_1) - H(y-y_1-\Delta y))R_1(t)\,,$$
$$R_2(x,y,t) = \delta(x-x_2)\delta(y-y_2)R_2(t)\,, \qquad (1)$$

при этом перемещения масс равны перемещениям соответствующих точек мембраны

$$u_{M1}(t) = u(x_1,y_1,t)\,,$$
$$u_{M2}(t) = u(x_2,y_2,t)\,, \qquad (2)$$

Предполагается, что величины Δx и Δy малы по сравнению с l и m.

Рассмотрим влияние упругого основания на основе трехпараметрической *модели Власова-Леонтьева* [5]:

$$R_0(x,y,t) = 2t_f \cdot \nabla^2 u(x,y,t) + k_f \cdot u(x,y,t) + m_f \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2}\,, \qquad (3)$$

где

$$t_f = \frac{E_0}{1-\upsilon_0^2}\int_0^H (\psi')^2(z)dz\,,\ k_f = \frac{E_0}{4(1+\upsilon_0)}\int_0^H \psi^2(z)dz$$

– коэффициенты, характеризующие работу упругого основания на сжатие и

сдвиг; $m_f = \rho_0 \int_0^H \psi^2(z)dz$ – приведенная масса упругого основания. Здесь E_0, υ_0, ρ_0 – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала основания.

Примем, что затухание осадок по глубине основания происходит по следующему закону:

$$\psi(z) = \frac{\sinh(\gamma(H-z))}{\sinh(\gamma H)}, \tag{4}$$

где γ – коэффициент, характеризующий быстроту затухания осадок по глубине основания; H – толщина основания.

Таким образом, дифференциальное *уравнение колебаний* исследуемой системы «мембрана-основание-массы» может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} R_0(x,y,t) + \frac{1}{\rho} R_1(x,y,t) + \frac{1}{\rho} R_2(x,y,t) - G(x,y,t) = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение в частных производных естественно представить в виде следующего *двойного ряда Фурье*:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{k,n}(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}. \tag{6}$$

После подстановки разложения (6) в уравнение (5) будем иметь:

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_2(\tau) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \cdot \sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right) dt \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m} \right), \tag{7}$$

где

$$C_{1k,n} = \frac{4}{(\rho + m_f) kn\pi^2} \left(\cos \frac{k\pi x_1}{l} - \cos \frac{k\pi (x_1 + \Delta x)}{l} \right) \left(\cos \frac{k\pi y_1}{m} - \cos \frac{k\pi (y_1 + \Delta y)}{m} \right),$$

$$C_{2k,n} = \frac{4}{\left(\rho + m_f\right) lm} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m}, \; C_{3k,n} = -\frac{4}{\left(\rho + m_f\right) lm} \sin \frac{k\pi x_3}{l} \sin \frac{n\pi y_3}{m},$$

$$\lambda_{k,n} = \sqrt{\left(\pi^2 \cdot \left(2t_f + a^2 \rho\right) \cdot \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right) + k_f \right) / (\rho + m_f)}.$$

В формуле (7) учтены начальные и граничные условия для мембраны. Перемещения массы, условно отсоединенной от мембраны, выражаются следующей формулой (см. статью [3]):

$$u_M(t) = -\frac{1}{M} \cdot \int_0^t (t-\tau) R(\tau) d\tau \,. \tag{8}$$

Укажем, что, как и в [3], получаем некоторую систему интегральных соотношений для неизвестных функций $R_1(\mathrm{t})$ и $R_2(\mathrm{t})$:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{M_1}\displaystyle\int_0^t R_1(\tau)(t-\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R_1(\tau)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R_2(\tau)\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t G(\tau)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)dt\right)\sin\frac{k\pi x_1}{l}\sin\frac{n\pi y_1}{m}\right); \\ -\dfrac{1}{M_2}\displaystyle\int_0^t R_2(\tau)(t-\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R_1(\tau)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t R_2(\tau)\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}}\int_0^t G(\tau)\cdot\sin\left(\lambda_{k,n}(t-\tau)\right)dt\right)\sin\frac{k\pi x_2}{l}\sin\frac{n\pi y_2}{m}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Воспользуемся одним из приближенных методов решения *уравнений Вольтерра* (9), основанным на замене интегралов конечными суммами. Полученную систему алгебраических уравнений представим в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R_1}\cdot\mathbf{A_{11}} + \mathbf{R_2}\cdot\mathbf{A_{12}} = \mathbf{f_1}, \\ \mathbf{R_1}\cdot\mathbf{A_{21}} + \mathbf{R_2}\cdot\mathbf{A_{22}} = \mathbf{f_2}. \end{cases} \tag{10}$$

Решение системы алгебраических уравнений будем искать с помощью *метода Крамера*:

$$\mathbf{R_1} = \frac{\Delta}{\Delta_1}, \quad \mathbf{R_2} = \frac{\Delta}{\Delta_2}, \tag{11}$$

где $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}_1$, $\mathbf{\Delta}_2$ – матрицы, найденные по правилам нахождения определителя соответствующих блочных матриц $\begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{f_1} & \mathbf{A_{12}} \\ \mathbf{f_2} & \mathbf{A_{22}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{f_1} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{f_2} \end{pmatrix}$.

Определив неизвестные функции $R_1(\mathrm{t})$ и $R_2(\mathrm{t})$, входящие в уравнение (5), можно рассчитать значения прогибов в любой точке мембраны с течением времени.

При численных расчетах использовались следующие исходные данные:

– поверхностная плотность материала мембраны $\rho = 11.775$ кг/м^2;

– скорость распространения волн деформации в мембране $a = 35$ м/с;

– габариты мембраны $l = 0.6$ м, $m = 0.4$ м;

– величины присоединенных масс и координаты их расположения

$M_1 = 1$ кг ($x_1 = 0.1$ м, $y_1 = 0.1$ м, $\Delta x = 0.01$ м, $\Delta y = 0.02$ м), $M_2 = 2$ кг ($x_2 = 0.5$ м, $y_2 = 0.2$ м).

Характеристики возмущающей нагрузки: интенсивность $q = 100$ Н, изменение во времени по закону «синуса» с циклической частотой колебаний $\omega_0 = 100\ \text{с}^{-1}$ в течение одного полупериода, координаты приложения $x_3 = 0.3$ м, $y_3 = 0.2$ м.

На рис. 2 представлены графики изменения во времени прогибов мембраны для случаев расположения мембраны на основании и без основания.

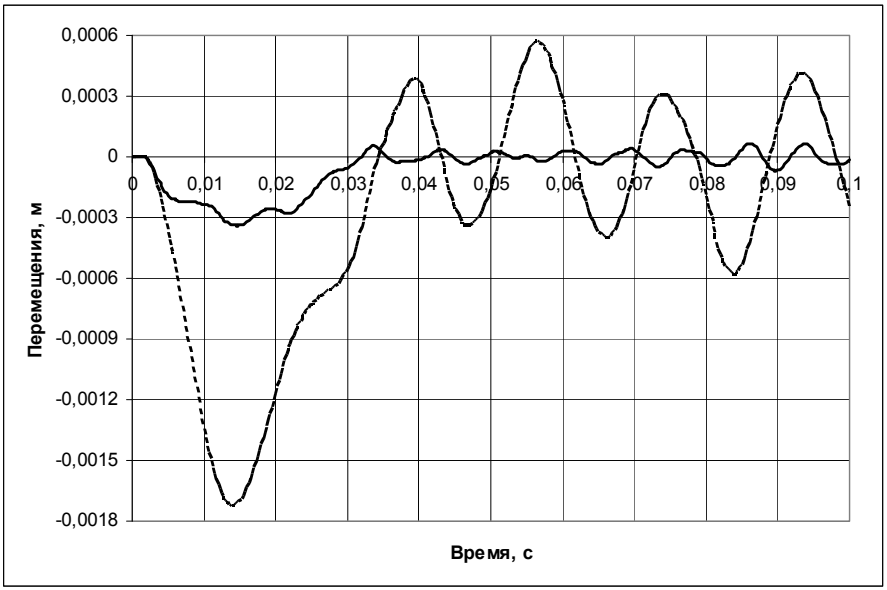


Рис. 2 – Графики колебаний точки мембраны.

Прогибы исследуются в точке, расположенной вблизи приложения нагрузки. Пунктирной кривой соответствуют перемещения точки мембраны без учета влияния основания, сплошной кривой – перемещения точки мембраны при наличии упругого основания. Полученные кривые свидетельствуют о снижении амплитуды колебаний точек мембраны при наличии упругого основания.

Решение обратной задачи. Рассмотрим решение задачи по идентификации закона изменения нагрузки, воздействующей на мембрану. При решении обратной задачи перемещения одной из точек мембраны являются заданными. Информацию о перемещениях точки мембраны можно получить, например, экспериментально или при решении соответствующей прямой задачи. Для решения поставленной задачи необходимо решить систему интегральных уравнений вида, подобного (9). Система интегральных уравнений будет включать уравнение для перемещений точки мембраны, положения ко-

торой являются заданными, и уравнения, составленные на основе равенства перемещений масс перемещениям точек мембраны, соответствующих расположению этих масс.

Систему интегральных уравнений Вольтера решим численно. При решении используем один из численных способов решения уравнений Вольтерра [6]. В матричном виде система может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{A_{11}} \cdot \mathbf{R_1} + \mathbf{A_{12}} \cdot \mathbf{R_2} + \mathbf{A_{13}} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{u_e}, \\ \mathbf{A_{21}} \cdot \mathbf{R_1} + \mathbf{A_{22}} \cdot \mathbf{R_2} + \mathbf{A_{23}} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A_{31}} \cdot \mathbf{R_1} + \mathbf{A_{32}} \cdot \mathbf{R_2} + \mathbf{A_{33}} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{12}$$

Решение системы уравнений (12) будем искать методом, подобным использованному при решении прямой задачи. В силу некорректности поставленной задачи необходимо применять специальные сглаживающие алгоритмы. Для построения устойчивого решения воспользуемся методом регуляризации А.Н.Тихонова [6]. Упомянутое решение запишем в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\mathbf{\Delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Delta} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{\Delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Delta_1}, \\ \mathbf{R}_2 = (\mathbf{\Delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Delta} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{\Delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Delta_2}, \\ \mathbf{G} = (\mathbf{\Delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Delta} + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \mathbf{\Delta}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Delta_3}. \end{cases} \tag{13}$$

где $\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Delta}_1$, $\mathbf{\Delta}_2$, $\mathbf{\Delta}_3$ – матрицы, найденные по правилам нахождения определителя соответствующих блочных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} & \mathbf{A_{13}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{A_{23}} \\ \mathbf{A_{31}} & \mathbf{A_{32}} & \mathbf{A_{33}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_e & \mathbf{A_{12}} & \mathbf{A_{13}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{A_{23}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_{32}} & \mathbf{A_{33}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{u}_e & \mathbf{A_{13}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{23}} \\ \mathbf{A_{31}} & \mathbf{0} & \mathbf{A_{33}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} & \mathbf{u}_e \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A_{31}} & \mathbf{A_{32}} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

α – *параметр регуляризации*; $\mathbf{C}$ – трехдиагональная матрица следующего вида:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta t^2} & 1+\frac{2}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta t^2} & 1+\frac{2}{\Delta t^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\frac{2}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta t^2} & 1+\frac{1}{\Delta t^2} \end{bmatrix}.$$

Для отыскания неизвестной возмущающей нагрузки воспользуемся ра-

нее принятыми исходными данными и вычисленными при решении прямой задачи перемещениями точки мембраны (рис. 2).

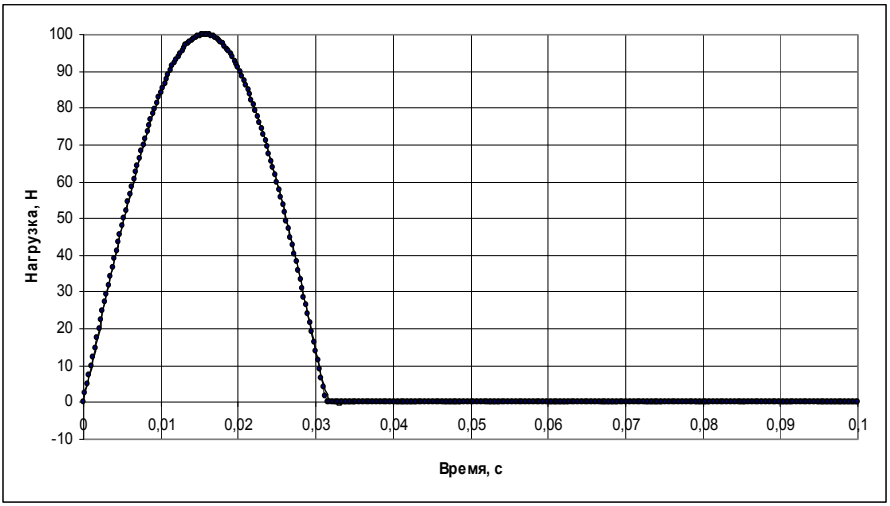


Рис. 3 – Графики приложенной и идентифицированной нагрузок.

Кривой, состоящей из точек, на рис. 3 обозначены значения возмущающей нагрузки, которая принималась в качестве известной при решении прямой задачи, тонкой сплошной кривой – значения нагрузки, идентифицированной с использованием метода регуляризации.

Выводы. В данной статье рассмотрены нестационарные колебания мембраны на упругом основании с несколькими (двумя) массами, причем геометрические размеры одной из масс не являются бесконечно малыми. В процессе построения решения обратной задачи идентифицирована нагрузка, вызвавшая нестационарные колебания мембраны, лежащей на упругом основании.

Расположение мембраны на упругом основании, как и присоединение масс, снижает амплитуду колебаний ее точек, что может быть использовано при проектировании конструкций, на которые воздействуют импульсные нагрузки.

Список литературы: **1.** *Янютин Е.Г.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / *Е.Г. Янютин., И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата* // Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с. **2.** *Янютин Е.Г.* Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу / *Е. Г. Янютин, Н. И. Кучерова* // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2006. – № 32. – С. 80-83. **3.** *Янютин Е. Г.* Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс / *Е. Г. Янютин, П. А. Егоров* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54. – С. 209-216. **4.** *Араманович И.Г.* Уравнения

математической физики / *И. Г. Араманович, В.И. Левин.* – М. : Наука, 1969. – 288 с. **5.** *Власов В. З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / *В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев.* – М. : Физматгиз, 1960. – 491 с. **6.** *Верлань А.Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / *А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков.* – Киев : Наук. думка, 1986. – 544 с.

Поступила в редколлегию 13.05.2013

УДК 539.3

Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – №37 (1010). – С. 223 – 230. Бібліогр.: 6 назв.

Механічна система складається із прямокутної мембрани та приєднаних до неї мас. Мембрана лежить на пружній основі і є закріпленою вздовж контуру. Розв'язання прямої задачі (пошук переміщень точок мембрани) здійснюється з використанням розкладення шуканих функцій в ряди Фур'є. Розв'язання оберненої задачі (визначення невідомого навантаження, яке викликало коливання системи) відбувається шляхом чисельного розв'язання системи інтегральних рівнянь з використанням метода регуляризації.

Ключевые слова: мембрана, пружна основа, маса, навантаження, контактна сила, переміщення, інтегральне рівняння, ідентифікація, метод регуляризації.

Mechanical system consists of the rectangular membrane and connected to it masses. The membrane lies on the elastic foundation and is fixed over the contour. The solving of the direct problem (the search of displacements of membrane points) is made with using Fourier series expansion of the desired function. The solving of the inverse problem (the identification of the unknown load, which caused mechanical system vibrations) is made by numerical solution of the integral equations set with using regularization method.

Key words: membrane, elastic foundation, the weight of the load, the contact force, displacement, integral equation, identification, regularization method.

З М І С Т

Андренко П. М., Блошенко Р. Ю. Розрахункові дослідження робочого процесу в гідравлічній гальмівній системі літака у режимі гальмування.....3

Антонова И. В. Нечёткая экспертная система прогноза риска в страховании профзаболеваний 10

Борисенко А. С. Моделирование и расчёт антенн для ZigBee сети 17

Гайдамака А. В. Распределение радиальной нагрузки между телами качения однорядного радиального подшипника: учёт углов контакта 26

Григорьев А. Л., Геворкян Ю. Л. Блочная матричная структура и симметрия дискретных динамических моделей гидромеханических узлов 35

Душкин В. Д. Моделирование дифракции волн на периодических системах лент, расположенных на двух сторонах диэлектрического слоя.....51

Качаненко І. В., Нетреба А. В. Реконструкція рентгенівських томограм для неповного набору проекцій 58

Кондратенко А. Н., Строков А. П. Моделирование тепло- и массообменных процессов в фильтре твёрдых частиц дизеля. Часть5: расчётное исследование гидравлического сопротивления фильтра с цеолитовой насыпкой 68

Литвин О. М., Першина Ю. І., Прохорова О. М. Відновлення розривної внутрішньої структури двовимірного тіла за допомогою розривного інтерлінаційного сплайну, використовуючи криволінійні трикутники та трапеції 76

Назаренко О. М. Ідентифікація та прогнозування стаціонарних слабо формалізованих процесів з ефектом запізнення в n – вимірному просторі 90

Немченко Т. А. Деякі властивості голоморфних розв'язків рівняння $Aw' = w$ 105

Новиков Ф. В., Гершиков И. В. Теоретический анализ температуры шлифования 119

Ольшанский В. П., Ольшанский С. В. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении.....125

Плаксій Ю. А. Підвищення точності реверсивних схем алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації 130

Плаксій Ю. А. Еталонна тригонометрична кватерніонна модель прецесійного типу обертання твердого тіла 141

Пляцук Л. Д., Черныш Е. Ю. Математическое моделирование процесса обезвреживания осадков сточных вод в биосульфидогенных условиях 148

Подвойський Ю. А., Зав'ялов П. С., Кухтенков Ю. М. Уточнення алгоритму і особливості розрахунку математичної моделі пульсацій тиску від вихрових джгутів у відсмоктуючій трубі гідротурбіни 161

Прохоренко О. В., Прохоренко А. О. Числові та аналітичні методи розрахунку внутрішньої норми прибутковості інвестиційних проектів 170

Русанов А. В. Обобщение неявной схемы расщепления для моделирования стационарных и нестационарных газодинамических процессов.....174

Сергиенко А. Н., Медведев Н. Г., Любарский Б. Г., Беляев С. Н., Шушляпин С. В. Методика описания неровностей профиля дороги при моделировании подвески автомобиля с рекуператором энергии колебаний 185

Степук А. В., Автономова Л. В., Бондар С. В. Особливості деформування П-подібної тонкостінної конструкції при ударі.....193

Фатеева Н. Н. Применение метода Байеса в диагностике гидропневмоагрегатов 200

Хорев О. Н. Моделирование рабочего процесса в проточной части радиально-осевой насос-турбины.....206

Шевченко О. О., Іванова І. М. Застосування біотехнологій для підвищення очистки стічних вод від біогенних елементів.....215

Янютин Е. Г., Егоров П. А. Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении.....223

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»

Збірник наукових праць

Серія:
Математичне моделювання
в техніці та технологіях

№ 37 (1010)

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
Технічний редактор С. Д. Нижник

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».
Кафедра вищої математики.
Тел.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;
e-mail: kpi_mmtt@mail.ru

Обл.-вид. № 32–13.

Підп. до друку 10.07.2013 р. Формат 60×84 1/16. Папір офісний.
Друк цифровий. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 10,0. Облік.-вид. арк. 10,0.
Тираж 300 пр.(1-й завод 1-100) Зам. № ZB 0839. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта
видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, віл Фрунзе, 21

Цифрова друкарня ТОВ «Цифрова друкарня №1»
Ідент. код юридичної особи: 37190180 від 27.07.2010.
61001, Харків, пл. Повстання, 7/8, тел. (057) 754-49-40, (057) 754-49-42.