



ВІСНИК

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»**

54'2012

Харків

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

*Серія: Математичне моделювання
в техніці та технологіях*

№ 54 (960) 2012

Збірник наукових праць

Видання засноване у 1961 р.

Харків
НТУ «ХПІ», 2012

Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54 (960). – 218 с.

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України

КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

Збірник виходить українською та російською мовами.

Вісник Національного технічного університету «ХПІ» внесено до «Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук», затвердженого Постановою президії ВАК України від 26 травня 2010 р., № 1 – 05/4 (Бюлєтень ВАК України, № 6, 2010 р., с. 3, № 20).

Координаційна рада:

Л. Л. Товажнянський, д-р техн. наук, проф. (голова);
К. О. Горбунов, канд. техн. наук, доц. (секретар);
А. П. Марченко, д-р техн. наук, проф.; Є. І. Сокол, д-р техн. наук, чл.-кор. НАН України;
Є. Є. Александров, д-р техн. наук, проф.; А. В. Бойко, д-р техн. наук, проф.;
Ф. Ф. Гладкий, д-р техн. наук, проф.; М. Д. Годлевський, д-р техн. наук, проф.;
А. І. Грабченко, д-р техн. наук, проф.; В. Г. Данько, д-р техн. наук, проф.;
В. Д. Дмитрисенко, д-р техн. наук, проф.; І. Ф. Домнін, д-р техн. наук, проф.;
В. В. Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.; Ю. І. Зайцев, канд. техн. наук, проф.;
П. О. Качанов, д-р техн. наук, проф.; В. Б. Клепіков, д-р техн. наук, проф.;
С. І. Кондрашов, д-р техн. наук, проф.; В. М. Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
В. І. Кравченко, д-р техн. наук, проф.; Г. В. Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
В. С. Лупіков, д-р техн. наук, проф.; О. К. Мораковський, д-р техн. наук, проф.;
В. І. Ніколаєнко, канд. іст. наук, проф.; П. Г. Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В. А. Пуляєв, д-р техн. наук, проф.; М. І. Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
В. Б. Самородов, д-р техн. наук, проф.; Г. М. Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю. В. Тимофієв, д-р техн. наук, проф.; М. А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Редакційна колегія серії:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

Заст. відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Члени редколегії: Ю. В. Гандель, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Л. Геворкян, канд. фіз.-мат. наук, проф.; О. Л. Григор'єв, д-р техн. наук, проф.; В. К. Дубовий, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Курпа, д-р техн. наук, проф.; О. С. Куценко, д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. М. Любчик, д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. В. Новожилова, д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. П. Северин, д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий, д-р техн. наук, проф.; Є. Г. Янютін, д-р техн. наук, проф.

З номеру 42'2012 Вісник НТУ «ХПІ» має власну подвійну нумерацію: № 42 (948).

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 8 від 30 жовтня 2012 р.

O.O. АНДІЛАХАЙ, канд. техн. наук, доц., ДВНЗ «ПДТУ», Маріуполь;
I.B. ГЕРШИКОВ, інж., ЗАТ «Азовський машинобуд. завод», Бердянськ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИЗНАЧЕННЯ ЕНЕРГОЄМНОСТІ АБРАЗИВНОЇ ОБРОБКИ ТА УМОВ ЇЇ ЗМЕНШЕННЯ

Наведені аналітичні залежності для визначення енергоємності абразивної обробки її обґрунтовані умови її зменшення. Умови переходу від процесу пластичного деформування матеріалу до процесу різання описані аналітично. Надані практичні рекомендації з удосконалювання абразивної обробки.

Ключові слова: абразивна обробка, процес різання, енергоємність обробки, сила різання.

Вступ. Абразивна обробка є ефективним методом фінішної обробки деталей машин, однак, як відомо, характеризується високою енергоємністю, що не дозволяє в максимальній мірі використовувати її потенційні можливості. Тому визначення умов зменшення енергоємності абразивної обробки представляється важливим і актуальним завданням, спрямованим на підвищення якості та продуктивності обробки. Розв'язанню даного завдання присвячені роботи [1, 2]. Разом з тим, вони засновані на експериментальному дослідженні енергоємності для окремих умов обробки, що не дозволяє науково обґрунтовано пійти до вибору раціональних варіантів абразивної обробки за критерієм найменшої енергоємності.

Для вирішення даного завдання необхідні більш загальні теоретичні результати, засновані на математичному моделюванні закономірностей зміни енергоємності абразивної обробки. Науковими передумовами цього можуть бути опубліковані в останні роки роботи проф. Новікова Ф.В. [3, 4], подальший розвиток яких відкриває нові технологічні можливості визначення умов зменшення енергоємності абразивної обробки.

Ціль роботи – провести теоретичний аналіз енергоємності абразивної обробки та умов її зменшення.

Основні співвідношення моделі. Для вирішення поставленого завдання скористаємося підходом, запропонованим у роботі [3] стосовно до процесу різання зі змінною товщиною зрізу (рис. 1). Припустимо, що з боку абразивного зерна, що рухається зі швидкістю V_0 , на оброблюваний матеріал діють тангенціальна P_z й радіальна P_y складові сили різання, які викликають періодичне руйнування (зсув) матеріалу уздовж умовної площини зсуву, розташованої під кутом β до напрямку руху зерна. Для визначення положення умовної площини зсуву матеріалу встановимо дотичну напругу τ , яка виникає в

© О. О. Анділахай, І. В. Гершиков, 2012

даній площині:

$$\tau = (P_z \cdot \cos \beta - P_y \cdot \sin \beta) / (\varepsilon \cdot L), \quad (1)$$

де ε – ширина зрізу, м; $L = OA$ – довжина умовної площини зсуву матеріалу, м.

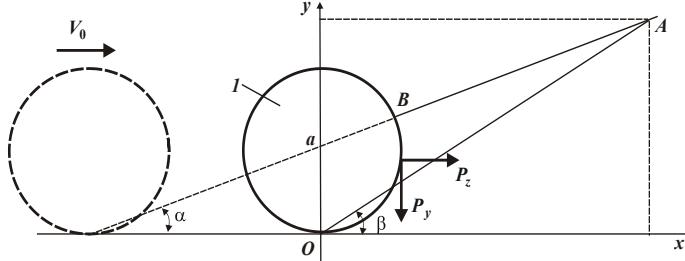


Рис. 1 – Розрахункова схема процесу стружкоутворення при різанні одиничним абразивним зерном 1.

Довжину L знайдемо на основі розв'язання двох тригонометричних рівнянь, які випливають із рис. 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = a + \tan \alpha \cdot x, \\ y = \tan \beta \cdot x, \end{array} \right. \quad (2)$$

де x , y – координати точки перетинання умовної площини зсуву OA з оброблюваною поверхнею BA ; a – товщина зрізу, м; α – кут входу абразивного зерна в оброблюваний матеріал.

Вирішуючи систему рівнянь (2), маємо

$$x = a / (\tan \beta - \tan \alpha), \quad (3)$$

$$L = \frac{x}{\cos \beta} = \frac{a}{\cos \beta \cdot (\tan \beta - \tan \alpha)}. \quad (4)$$

Після перетворення залежності (1), з урахуванням (4), одержуємо:

$$\tau = \frac{P_y \cdot \cos \beta \cdot (\tan \beta - \tan \alpha)}{\varepsilon \cdot a} \cdot (K_{uu} \cdot \cos \beta - \sin \beta), \quad (5)$$

де $K_{uu} = P_z / P_y = \operatorname{ctg}(\psi + \gamma)$ – коефіцієнт шліфування [4]; ψ – умовний кут тертя абразивного зерна з оброблюваним матеріалом; γ – негативний передній кут ріжучого абразивного зерна.

Позначаючи $\psi + \gamma = \psi_1$ й розглядаючи рівняння $K_{uu} = \operatorname{ctg} \psi_1$, маємо:

$$\tau = \frac{P_y}{2 \cdot \varepsilon \cdot a \cdot \sin \psi_1 \cdot \cos \alpha} \cdot [\sin(2\beta - \alpha + \psi_1) - \sin(\alpha + \psi_1)]. \quad (6)$$

Дотична напруга τ зі збільшенням кута β змінюється за законом синусоїди $\sin(2\beta - \alpha + \psi_1)$. За умови $\sin(2\beta - \alpha + \psi_1) = 1$ напруга τ приймає максимум.

мальне значення τ_{\max} . Кут β , що відповідає максимальній напрузі τ_{\max} , буде визначати положення умовної площини зсуву матеріалу:

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \psi_1}{2}. \quad (7)$$

Умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу β тим більше, чим більше кут входу зерна в оброблюваний матеріал α і менше кут $\psi_1 = \psi + \gamma$. Підставляючи залежність (7) в (6), визначимо максимальну дотичну напругу:

$$\tau_{\max} = \frac{P_y}{\sigma \cdot a \cdot \sin \psi_1 \cdot \cos \alpha} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\psi_1}{2} \right). \quad (8)$$

Зсув оброблюваного матеріалу в умовній площині OA відбудеться за умови досягнення максимальною напругою τ_{\max} межі міцності на зсув оброблюваного матеріалу $\tau_{\text{зсув}}$. Тоді, приймаючи $\tau_{\max} = \tau_{\text{зсув}}$, із залежності (8) можна визначити радіальну складову сили різання P_y :

$$P_y = 2 \cdot a \cdot \sigma \cdot \tau_{\text{зсув}} \cdot \sin \psi_1 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{[1 - \sin(\alpha + \psi_1)]}. \quad (9)$$

Відповідно, тангенціальна складова сили різання P_z дорівнює

$$P_z = P_y \cdot K_{uw} = P_y \cdot \operatorname{ctg} \psi_1 = 2 \cdot a \cdot \sigma \cdot \tau_{\text{зсув}} \cdot \cos \psi_1 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{[1 - \sin(\alpha + \psi_1)]}. \quad (10)$$

Представляючи тангенціальну складову сили різання в вигляді $P_z = a \cdot \sigma \cdot \sigma$, умовна напруга різання або енергоемність обробки σ виразить-ся так:

$$\sigma = \cos \psi_1 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{2 \cdot \tau_{\text{зсув}}}{[1 - \sin(\alpha + \psi_1)]}. \quad (11)$$

Аналіз результатів моделювання. Із залежностей (9), (10) і (11) випливає неоднозначний характер зміни радіальної P_y й тангенціальної P_z складових сили різання, а також умовної напруги різання σ , зі збільшенням кутів ψ_1 і α . Для визначення екстремуму функції P_z підкоримо залежність (10) необхідній умові екстремуму: $(P_z)'_\alpha = 0$. Після перетворень одержимо

$$\alpha = 90^\circ - \psi_1. \quad (12)$$

Підставляючи залежність (12) в (10), бачимо, що в точці екстремуму функція $P_z \rightarrow \infty$ (рис. 2). Це пов'язане з тим, що умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу β , який визначається залежністю (7), стає рівним куту α .

У результаті, виходячи з рис. 1, умовна площа зсуву OA не перетинається з оброблюваною поверхнею BA й процес стружкоутворення відсутній, має місце лише пластичне деформування оброблюваного матеріалу.

Даний висновок випливає з наступного. Якщо позначити кут $\psi_1 + \alpha = z$,

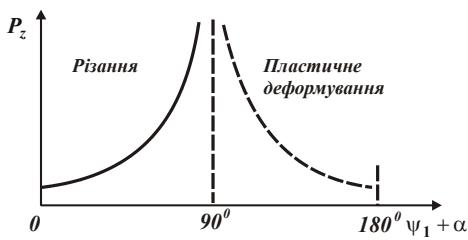


Рис. 2 – Загальний вигляд залежності P_z .

то $\alpha = z - \psi_1$. Підставляючи дане співвідношення в залежність (7), одержимо

$$\beta = \pi / 4 + z / 2 - \psi_1.$$

За умови $z = 90^0$ (рис. 2) кут $\beta = 90^0 - \psi_1$. Таке ж значення приймає й кут

$$\alpha = z - \psi_1 = 90^0 - \psi_1.$$

Отже, у точці екстремуму функції P_z умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу $\beta = \alpha$.

При куті $z > 90^0$, наприклад, коли $z = 110^0$, кут $\beta = 100^0 - \psi_1$, а кут

$$\alpha = z - \psi_1 = 110^0 - \psi_1,$$

тобто $\beta < \alpha$. У цьому випадку, очевидно, процес стружкоутворення (різання) буде відсутній, а буде мати місце лише пластичне деформування оброблюваного матеріалу (без утворення стружки).

В узагальненому вигляді характер зміни кутів β і α від кута z показаний у табл. 1, а також на рис. 3. Як видно, при зміні z в межах $0 < z < 90^0$ кут $\beta < \alpha$. При $z = 90^0$ відповідно $\beta = \alpha$, а при $z > 90^0$ справедлива умова $\beta < \alpha$.

Таблиця 1 – Розрахункові значення кутів β і α , град

z	0	30	45	60	90	110	160
β	$45^0 - \psi_1$	$60^0 - \psi_1$	$67,5^0 - \psi_1$	$75^0 - \psi_1$	$90^0 - \psi_1$	$100^0 - \psi_1$	$125^0 - \psi_1$
α	$-\psi_1$	$30^0 - \psi_1$	$45^0 - \psi_1$	$60^0 - \psi_1$	$90^0 - \psi_1$	$110^0 - \psi_1$	$160^0 - \psi_1$

З табл. 1 також випливає, що при відносно великому значенні кута $\psi_1 = \psi + \gamma$ (а саме, при $\psi_1 \rightarrow 90^0$) умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу β буде негативним фактично у всьому діапазоні зміни кута ψ_1 . У цьому випадку процес різання буде відсутній. Він можливий лише при великому значенні кута $z \rightarrow 90^0$, коли кути β й α позитивні (рис. 3 a).

Якщо ж кути β й α за умови $z = 90^0$ негативні (рис. 3 б), то процес різання буде відсутній. Таким чином доведено, що при зміні кута $z = \psi_1 + \alpha$ в

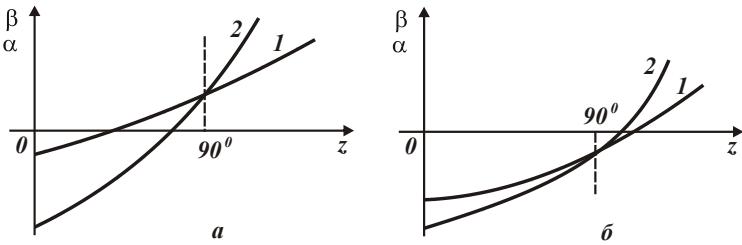


Рис. 3 – Характер зміни кутів β (1) і α (2) в залежності від кута z .
а – β і α позитивні, при $z \rightarrow 90^\circ$; б – β і α негативні, при $z \rightarrow 90^\circ$.

межах $0 < \psi_1 + \alpha < 90^\circ$ можливий процес різання, а при $90^\circ < \psi_1 + \alpha < 180^\circ$ відбувається процес пластичного деформування оброблюваного матеріалу. Із цього випливає, що істотно зменшити тангенціальну складову сили різання P_z можна при умові:

$$\psi_1 + \alpha < 90^\circ. \quad (13)$$

Для виконання умови (13) необхідно зменшувати як ψ_1 , так і α . Як відзначалося вище, кут $\psi_1 = \psi + \gamma$ за рахунок відносно великого негативного переднього кута ріжучого абразивного зерна $\gamma = 45\dots60^\circ$ може приймати значення, близькі до 90° . Тому реалізувати умову (13) можна лише при досить малих значеннях кута $\alpha \rightarrow 0$. Отже, процес стружкоутворення можливий фактично при різанні з постійною товщиною зрізу ($\alpha = 0$). У протилежному випадку буде здійснюватися процес пластичного деформування матеріалу з більш високою силовою напруженістю.

Виконати умову (13) можна також за рахунок різання зі зменшуваною товщиною зрізу ($\alpha < 0$). У цьому випадку кут $z = \psi_1 - \alpha$ можна зменшити фактично до нуля (за умови $\alpha = \psi_1$), і тим самим реалізувати найменше значення тангенціальної складової сили різання P_z (рис. 2).

Зауважимо, що це надзвичайно важливе рішення, тому що воно, по суті, визначає технологічні можливості *струменево - абразивної обробки* й зокрема методу абразивної обробки деталей затопленими струменями. Дане рішення вказує на можливість ефективного застосування прогресивного способу струменево - абразивної гідроротаційної обробки (зачищення) дрібних деталей масою до 3 грамів із складною просторовою формою [5].

Оскільки ріжуче зерно за формує наближається до форми кулі, то, як відзначалося вище, за умови $\alpha < 0$ кут $z = \psi_1 - \alpha < 90^\circ$, і фактично завжди буде здійснюватися процес стружкоутворення при взаємодії абразивного зерна з оброблюваним матеріалом. Це забезпечує менші енергетичні витрати на обробку, ніж при пластичному деформуванні металу без відділення стружки.

Таблиця 2 – Розрахункові значення відношення $\sigma / 2\tau_{зсув}$

$\psi_1^0 \backslash \alpha^0$	0	10	20	30	45	60
30	1,732	2,387	3,477	5,6	18	∞
45	2,357	3,844	7,144	17,95	∞	
60	3,73	8,21	30,91	∞		
70	5,43	22,45	∞			
90	∞					

Необхідно відзначити, що дана умова справедлива при використанні ріжучого елемента у формі кулі, яка має значний негативний передній кут різання. При позитивному передньому куті інструмента (при різанні лезовим інструментом) умовний кут ψ_1 буде приймати відносно невеликі значення, а позитивний кут α може змінюватися в більш широких межах, наприклад, $0 < \alpha < 45^\circ$ і більше.

Це випливає з наступного. Так, при $z = \psi_1 + \alpha = 60^\circ$ умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу $\beta = 75^\circ - \psi_1$, а кут $\alpha = 60^\circ - \psi_1$. Отже, $\beta > \alpha$ і можливий процес стружкоутворення. Цим показано, що різання лезовим інструментом з позитивним переднім кутом у порівнянні з мікрорізанням абразивним зерном характеризується більшими технологічними можливостями з точки зору здійснення процесу стружкоутворення й зниження силової напруженості процесу.

У табл. 2 наведені розрахункові значення відношення $\sigma / 2\tau_{зсув}$, отримані на основі залежності (11). Як видно, зі збільшенням кутів α і ψ_1 відношення $\sigma / 2\tau_{зсув}$ необмежено збільшується. Отже, домогтися найменшого значення енергоємності обробки σ можна за умови $\alpha = 0$, тобто при різанні з постійною товщиною зрізу.

Залежність енергоємності від параметрів процесу різання. Проведено більш повний аналіз енергоємності обробки при різанні. Для цього перетворимо залежність (11), виражаючи її через умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу β , що визначається залежністю (7):

$$\sigma = \frac{\tau_{зсув} \cdot \sin(2\beta - \alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin^2(\beta - \alpha)}. \quad (14)$$

Як показано вище, за умови $\beta < \alpha$ процес різання (стружкоутворення) відсутній, можливий лише процес пластичного деформування оброблюваного матеріалу. Процес різання (стружкоутворення) може протікати за умови $\beta > \alpha$. Тому, виходячи із залежності (14), зі збільшенням умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β , починаючи зі значення $\beta = \alpha$, енергоємність обро-

бки σ буде зменшуватися (рис. 4) у зв'язку зі збільшенням функції $\sin^2(\beta - \alpha)$.

Функція $\sin(2\beta - \alpha)$, що входить до залежності (14), зі збільшенням кута β збільшується, починаючи зі значення $\beta > \alpha/2$. При менших значеннях β , тобто при $\beta < \alpha/2$, функція $\sin(2\beta - \alpha)$ негативна, також як і функція

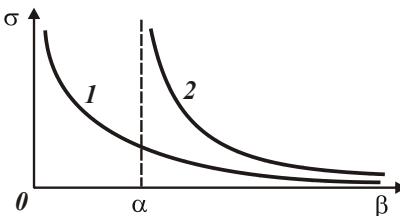


Рис. 4 – Залежність σ від кута
 $\beta : 1 - \alpha = 0; 2 - \alpha > 0$

$\sin(\beta - \alpha)$, що входить до залежності (14). Тому процес різання (стружкоутворення) відсутній.

На рис. 5 представлений узагальнений графік зміни σ від двох змінних величин: z і β . Як видно, процес різання (стружкоутворення) можливий у діапазонах $\beta > \alpha$ і $z < 90^\circ$.

Залежності (11) і (14) містять по три різні тригонометричні функції, що утрудняє аналіз енергоємності обробки σ . Тому важливо спростити дані залежності, виражаючи σ через одну або дві тригонометричні функції. Для цього перетворимо залежність (11) з урахуванням відомого співвідношення

$$\cos \psi_1 = \cos[(\alpha + \psi_1) - \alpha] = \cos(\alpha + \psi_1) \cdot \cos \alpha + \sin(\alpha + \psi_1) \cdot \sin \alpha.$$

Тоді

$$\sigma = 2\tau_{\text{зсув}} \cos \alpha \left\{ \cos \alpha \operatorname{tg} \left[45^\circ + \frac{\alpha + \psi_1}{2} \right] + \frac{\sin \alpha}{2} \left[\operatorname{tg}^2 \left[45^\circ + \frac{\alpha + \psi_1}{2} \right] - 1 \right] \right\}. \quad (15)$$

При умові $\alpha + \psi_1 < 90^\circ$ другий доданок залежності (15) буде менше первого доданка, тому їм у першому наближенні можна зневажити. Тоді залежність (15) спроститься й прийме вигляд:

$$\sigma = \frac{2 \cdot \tau_{\text{зсув}} \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \left[45^\circ - (\alpha + \psi_1)/2 \right]} = \frac{2 \cdot \tau_{\text{зсув}} \cdot \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}. \quad (16)$$

Виходячи із залежності (16), у випадку різання з товщиною зрізу, що збільшується в часі ($\alpha > 0$), процес стружкоутворення починається за умови $\beta = \alpha$.

Якщо $\beta < \alpha$, то має місце лише процес пластичного деформування оброблюваного матеріалу.

Як наслідок, за умови $\beta = \alpha$ енергоємність обробки $\sigma \rightarrow \infty$.

Отже, процес стружкоутворення починається не в початковий момент обробки, як у випадку $\alpha = 0$, а через певний час, коли умовний кут зсуву об-

роблюваного матеріалу β досягне значення кута α (рис. 4). Тому у випадку різання з постійною товщиною зрізу ($\alpha = 0$) процес менш енергоємний у порівнянні з різанням з товщиною зрізу, що збільшується в часі ($\alpha > 0$). При цьому, в останньому випадку складніше здійснити процес стружкоутворення й, відповідно, процес різання, оскільки треба реалізувати умову $\beta > \alpha$, яка виконується не в початковий момент обробки (як у випадку $\alpha = 0$), а при досягненні певної товщини зрізу.

Відповідно до залежності (7), збільшити кут β і зменшити енергоємність обробки σ (рис. 4) можна за рахунок зменшення негативного переднього кута γ ріжучого зерна.

При різанні одиничним абразивним зерном зі змінною товщиною зрізу кут γ буде змінним (рис. 6). Тому встановимо зв'язок між змінною товщиною зрізу a та переднім кутом γ , розглядаючи в розрахунковій схемі передній кут γ , що утворений дотичною до окружності радіусом R (у верхній точці контакту оброблюваного матеріалу з ріжучим зерном) і вертикальною віссю.

Виходячи з розрахункової схеми (рис. 6), складемо рівняння:

$$R = R \cdot \sin \gamma + a .$$

Звідки

$$\sin \gamma = 1 - a / R . \quad (17)$$

Із залежності (17) випливає, що зі збільшенням відношення a / R передній кут γ зменшується, а це приводить до збільшення умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β , відповідно до залежності (7), і зменшення енергоємності обробки σ .

За умови $\beta = \alpha$ починається процес стружкоутворення. Кут γ при цьому визнача-

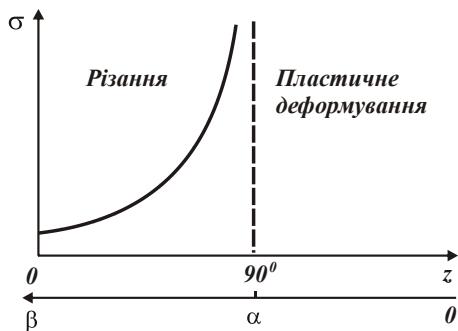


Рис. 5 – Залежність σ від кутів z та β .

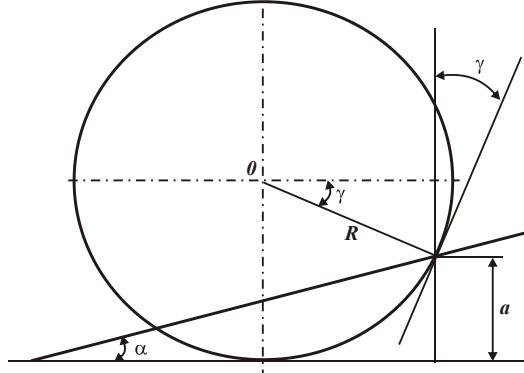


Рис. 6 – Розрахункова схема процесу мікрорізання одиничним зерном.

ється із залежності (7), розглядаючи в ній $\beta = \alpha$.

Тоді $\gamma = 90^\circ - \alpha - \psi$ і співвідношення (17) виражається так:

$$\frac{a}{R} = 1 - \cos(\alpha + \psi). \quad (18)$$

У результаті отримана аналітична залежність для визначення відношення a/R , при досягненні якого наступає процес стружкоутворення. Як видно, товщина зрізу a тим менше, чим менше умовний кут тертя ψ й кут α . Тому з погляду підвищення ефективності процесу різання доцільно зменшувати коефіцієнт тертя ріжучого зерна з оброблюваним матеріалом і кут α входу зерна в оброблюваний матеріал. У цьому випадку процес пластичного деформування матеріалу переходить у процес стружкоутворення (різання) при менший товщині зрізу a й меншій довжині l шляху різання абразивним зерном. Це випливає з аналітичної залежності, отриманої на основі розрахункової схеми, наведеної на рис. 6, з урахуванням залежності (18):

$$l = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{R \cdot [1 - \cos(\alpha + \psi)]}{\operatorname{tg}\alpha}. \quad (19)$$

Зі збільшенням кута α знаменник залежності (19) збільшується більш інтенсивно, ніж чисельник. Тому величина l буде зменшуватися зі збільшенням кута α . Зі збільшенням кута ψ , навпаки, величина l буде збільшуватися.

Отримані теоретичні рішення кореспонduються з відомими експериментальними даними [6], отриманими при шліфуванні, коли в початковий момент обробки процес стружкоутворення (різання) відсутній, а має місце інтенсивне тертя абразивного зерна з оброблюваним матеріалом і пластичне деформування матеріалу.

Так, установлено, що при глибинному шліфуванні, коли утворюються довгі стружки, а кут α входу зерна в оброблюваний матеріал невеликий, процес стружкоутворення утруднений. Спостерігається інтенсивне тертя абразивних зерен з оброблюваним матеріалом, що приводить до збільшення енергоємності обробки.

При багатопрохідному шліфуванні, навпаки, довжина зрізу менша, а кут α більше. У підсумку спостерігається інтенсивне стружкоутворення й процес шліфування протікає з меншою енергоємністю.

Використовуючи залежність (17), визначимо енергоємність обробки σ відповідно до залежності (16):

$$\sigma = \frac{2 \cdot \tau_{\text{зсув}} \cdot \cos^2 \alpha}{\sqrt{\frac{a}{2R} - \operatorname{tg} \frac{\alpha + \psi}{2}}}. \quad (20)$$

За умови

$$\sqrt{\frac{a}{2R}} - \operatorname{tg} \frac{\alpha + \psi}{2} = 0$$

енергоємність обробки σ приймає нескінченно велике значення ($\sigma \rightarrow \infty$), тому процес стружкоутворення відсутній, відбувається лише пластичне деформування оброблюваного матеріалу.

Граничне значення відношення a_1/R , при якому процес пластичного деформування оброблюваного матеріалу переходить у процес різання, визначається так:

$$\frac{a_1}{R} = 2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha + \psi}{2}. \quad (21)$$

Збільшення кута α припускає збільшення відношення a_1/R , що свідчить про погіршення умов стружкоутворення.

Як випливає із залежності (20), енергоємність обробки σ при різанні з товщиною зрізу, що збільшується в часі ($\alpha > 0$),вища, ніж при різанні з постійною товщиною ($\alpha = 0$). Це пов'язане з тим, що в початковий момент обробки у випадку $\alpha > 0$ умовний кут зсуву матеріалу $\beta \leq \alpha$. Тому довжина умовної площини зсуву матеріалу приймає досить велике значення, що вимагає значного зусилля для руйнування матеріалу уздовж умовної площини зсуву, розташованої під кутом β до напрямку руху зерна.

Іншими словами, збільшення енергоємності обробки σ при різанні з товщиною зрізу, що збільшується в часі ($\alpha > 0$), у порівнянні з різанням з постійною товщиною зрізу ($\alpha = 0$), пов'язане з гіршими умовами стружкоутворення, тому що в цьому випадку умовою переходу від пластичного деформування матеріалу до процесу стружкоутворення й різання є рівність кутів $\beta = \alpha$. Очевидно, реалізувати дану умову значно складніше, ніж при різанні з постійною товщиною зрізу ($\alpha = 0$), де перехід від пластичного деформування матеріалу до процесу стружкоутворення й різання відбувається за умови $\beta = 0$.

Висновки. Розроблена математична модель визначення енергоємності абразивної обробки. Проведено теоретичний аналіз умов стружкоутворення при різанні окремим абразивним зерном і визначені основні параметри силової напруженості процесу абразивної обробки, включаючи складові сили різання й умовну напругу різання (енергоємність обробки). Це дозволило теоретично з єдиних позицій обґрунтувати основні умови зменшення енергоємності абразивної обробки й відповідно підвищення її ефективності.

Отримано аналітичну залежність, що встановлює взаємозв'язок між ене-

ргоемністю обробки й товщиною зрізу. Доведено, що зі збільшенням товщини зрізу енергоємність обробки монотонно зменшується як у випадку різання з постійною товщиною, так і з товщиною зрізу, що збільшується в часі.

Установлено, що у випадку різання з постійною товщиною зрізу енергоємність обробки починає зменшуватися при нульовому значенні товщини зрізу. У випадку різання з товщиною зрізу, що збільшується в часі, енергоємність обробки починає зменшуватися при товщині зрізу, яка відповідає переходу від процесу пластичного деформування матеріалу до процесу стружкоутворення (різання).

Таким чином доведено, що енергоємність обробки при різанні з товщиною зрізу, що збільшується в часі, завжди більша, ніж при різанні з постійною товщиною зрізу.

Список літератури: 1. Семко М.Ф. Взаимосвязь условного напряжения резания и прочности микрокромок алмазных зерен с их работоспособностью / М.Ф. Семко, М.Д. Узунян, Ю.А. Сизый // Синтетические алмазы. – 1975. – Вып. 2. – С. 16-19. 2. Синтетические алмазы в машиностроении / Под ред. В.Н. Бакуля. – К.: Наук. думка, 1976. – 351 с. 3. Новиков Ф.В. Физические и кинематические основы высокопроизводительного алмазного шлифования: автореф. дис. на соискание научн. степени докт. техн. наук: спец. 05.03.01 "Процессы механической обработки, станки и инструменты" / Ф.В. Новиков. – Одесса, 1995. – 36 с. 4. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под общ. ред. Ф.В. Новикова и А.В. Якимова. В десяти томах. – Т. 1. "Механика резания материалов" – Одесса: ОНПУ, 2002. – 580 с. 5. Анділахай А.А. Абразивная обработка деталей затопленными струями / А.А. Анділахай. – Мариуполь: ПГТУ, 2006. – 190 с. 6. Глубинное шлифование деталей из труднообрабатываемых материалов / С.С. Силин, В.А. Хрульков, А.В. Лобанов, Н.С. Рыкунов. – М.: Машиностроение, 1984. – 62 с.

Надійшла до редакції 25.09.2012.

УДК 621.923

Математична модель визначення енергоємності абразивної обробки та умов її зменшення / О.О. Анділахай, І.В. Гершиков // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012. – №54 (960). – С.3-13. – Біблогр.: 6 назв.

Приведены аналитические зависимости для определения энергоемкости абразивной обработки и обоснованы условия ее уменьшения. Условия перехода от процесса пластического деформирования материала к процессу резания описаны аналитически. Даны практические рекомендации по совершенствованию абразивной обработки.

Ключевые слова: абразивная обработка, процесс резания, энергоемкость обработки, сила резания.

Analytical dependences to determine the energy consumption of abrasive processing and substantiates its reduction. Conditions for the transition from the process of plastic deformation of the material to the cutting process are described analytically. Practical recommendations for improving abrasion.

Keywords: abrasion, cutting process, energy processing, power of cutting.

M.B. АРТЮХ, аспірант, УПА, Харків;

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків

ТЕОРЕМИ ПРО ПРЕДСТАВЛЕННЯ ВИРОБНИЧИХ ФУНКІЙ ДЕЯКОГО КЛАСУ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРІВ НЕЛІНІЙНОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ТА ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ

Сформульовано та доведено теореми про умови, яким повинні задовольняти допоміжні функції у формулах нелінійної інтерлінації функцій двох змінних на системі взаємно перпендикулярних ліній. Ці формули інтерлінації точно представляють виробничі функції деяких класів, а їх узагальнення для випадку функцій трьох змінних використані в задачі нелінійної інтерфлетації на системі взаємно перпендикулярних площин.

Ключові слова: моделі економіки, виробничі функції, формули інтерлінації, нелінійна інтерфлетація.

Вступ. Серед математичних моделей, які використовуються в економіці, важливу роль відіграють лінійні моделі. Але на практиці існує ряд задач, в яких не можуть бути з достатньою точністю описані процеси в економіці за допомогою лінійних виробничих функцій. Серед них *нелінійні виробничі функції Солоу* ($Y(t) = A(t)K^\alpha(t)L^{1-\alpha}(t)$) [1], *Коба – Дугласа* ($Y = A \cdot L^\alpha \cdot K^\beta$) [2], та ін. без сумніву відіграють важливу роль в математичному моделюванні, але не вичерпують всіх можливих методів адекватного опису таких процесів. У зв'язку з цим, важливою є розробка та дослідження загальних методів побудови математичних моделей з використанням нових інформаційних операторів. Зокрема, до них відносяться методи побудови виробничих функцій двох змінних з використанням слідів цих функцій на системі взаємно перпендикулярних прямих та нелінійної інтерлінації функцій [3], а також методи побудови виробничих функцій від трьох змінних з використанням їх слідів на системі взаємно перпендикулярних площин.

Постановка задачі. В даній роботі ставиться і розв'язується наступна задача: сформулювати і довести теореми про загальний вигляд класів виробничих функцій, які точно відновлюються за допомогою методів нелінійної інтерлінації функцій та нелінійної інтерфлетації функцій.

Основні твердження. Спочатку розглянемо випадок виробничої функції двох змінних.

Теорема 1. Якщо $f(x, y) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2}$ – функція Коба-Дугласа, то опера-

тор

© М. В. Артюх, О. М. Литвин, 2012

$$O[f(x, y)] = \frac{\prod_{k=1}^M (f(x_k, y))^{h_k(x)} \cdot \prod_{l=1}^M (f(x, y_l))^{h_l(y)}}{\prod_{k=1}^M \prod_{l=1}^M (f(x_k, y_l))^{h_k(x) \cdot h_l(y)}}, \quad (1)$$

точно її відновлює, тобто

$$O[f(x, y)] = f(x, y),$$

за умов

$$h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_M(x) \equiv 1,$$

де допоміжні функції $h_k(x), h_l(y)$ є поліномами з властивостями

$$h_k(x_p) = \delta_{k,p}, \quad h_l(y_q) = \delta_{l,q}, \quad k, p, l, q = \overline{1, M}.$$

Доведення. Прологарифмуємо обидві частини формулі (1). В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} & \ln O[f(x_k, y_l)] = \\ & = \sum_{k=1}^M h_k(x) \ln f(x_k, y) + \sum_{l=1}^M h_l(y) \ln f(x, y_l) - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M h_k(x) h_l(y) \ln f(x_k, y_l) = \\ & = \sum_{k=1}^M \ln f(x_k, y)^{h_k(x)} + \sum_{l=1}^M \ln f(x, y_l)^{h_l(y)} - \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \ln f(x_k, y_l)^{h_k(x) h_l(y)} = \\ & = \ln \left[\prod_{k=1}^M f(x_k, y)^{h_k(x)} \prod_{l=1}^M f(x, y_l)^{h_l(y)} \div \prod_{k=1}^M \prod_{l=1}^M f(x_k, y_l)^{h_k(x) h_l(y)} \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи властивості $h_k(x_p) = \delta_{k,p}$, $h_l(y_q) = \delta_{l,q}$, можна довести, що оператор $\ln O[f(x_k, y_l)]$ є оператором інтерлінації функції $\ln f(x, y)$ на вказаній системі взаємно перпендикулярних прямих, тобто

$$\ln O[f(x_k, y)] = \ln f(x_k, y), \quad k = \overline{1, M}; \quad \ln O[f(x, y_l)] = \ln f(x, y_l), \quad l = \overline{1, M}.$$

Для таких операторів інтерлінації в роботі [3] (теорема 3.2.1) доведено, що вони є точними на всіх функціях, які задовольняють диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^{p_1+p_2} \ln O[f(x, y)]}{\partial x^{p_1} \partial y^{p_2}} = 0, \quad 1 \leq p_1, p_2 \leq M.$$

Тому, враховуючи, що для функції $f(x, y) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2}$ виконується рівність

$$\ln f(x, y) = \ln \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2} = \ln \alpha + b_1 \ln x + b_2 \ln y,$$

можемо написати, що

$$\partial^2 \ln O[f(x, y)] / \partial x \partial y = 0.$$

Тобто оператори $\ln O[f(x, y)]$ є точними на функціях $f(x, y) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2}$. А це означає, що і оператори $O[f(x, y)]$ теж є точними на таких функціях, що і треба було довести.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо нижче випадок виробничих функцій трьох змінних.

Теорема 2. Якщо $f(x, y, z) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2} \cdot z^{b_3}$, то оператор

$$O[f(x, y, z)] = \frac{\prod_{p=1}^M f(x_p, y, z)^{h_p(x)} \cdot \prod_{q=1}^M f(x, y_q, z)^{h_q(y)} \cdot \prod_{r=1}^M f(x, y, z_r)^{h_r(z)}}{\prod_{p=1}^M \prod_{q=1}^M f(x_p, y_q, z)^{h_p(x) h_q(y)} \cdot \prod_{p=1}^M \prod_{r=1}^M f(x_p, y, z_r)^{h_p(x) h_r(z)}} \times \\ \times \frac{\prod_{p=1}^M \prod_{q=1}^M \prod_{r=1}^M f(x_p, y_q, z_r)^{h_p(x) h_q(y) h_r(z)}}{\prod_{q=1}^M \prod_{r=1}^M f(x, y_q, z_r)^{h_q(y) h_r(z)}}, \quad (2)$$

є оператором нелінійної інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ з властивостями

$$O[f(x_p, y, z)] = f(x_p, y, z), \quad O[f(x, y_q, z)] = f(x, y_q, z),$$

$$O[f(x, y, z_r)] = f(x, y, z_r), \quad 1 \leq p, q, r \leq M,$$

та точно відновлює функцію $f(x, y, z)$ за умови, що

$$h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_M(t) = 1, \quad t \in \{x, y, z\},$$

де допоміжні функції $h_p(x), h_q(y), h_r(z)$ є поліномами мінімального степеня з властивостями

$$h_p(x_k) = \delta_{pk}, \quad ; \quad h_q(y_l) = \delta_{ql}, \quad ; \quad h_r(z_m) = \delta_{rm}, \quad p, q, k, l, r, m = \overline{1, M}.$$

Тобто

$$O[f(x, y, z)] \equiv f(x, y, z) \quad \forall f(x, y, z) = \alpha \cdot x^{b_1} \cdot y^{b_2} \cdot z^{b_3}, \quad \alpha, b_1, b_2, b_3 \in R.$$

Доведення. Логарифмуючи обидві частини рівності (2) з властивості логарифма $\ln a^b = b \ln a$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\ln O[f(x, y, z)] &= \sum_{p=1}^M \ln f(x_p, y, z) h_p(x) + \sum_{q=1}^M \ln f(x, y_q, z) h_q(y) + \\
&+ \sum_{r=1}^M \ln f(x, y, z_r) h_r(z) - \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \ln f(x_p, y_q, z) h_p(x) h_q(y) - \\
&- \sum_{p=1}^M \sum_{r=1}^M \ln f(x_p, y, z_r) h_p(x) h_r(z) - \sum_{q=1}^M \sum_{r=1}^M \ln f(x, y_q, z_r) h_q(y) h_r(z) + \\
&+ \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^M \sum_{r=1}^M \ln f(x_p, y_q, z_r) h_p(x) h_q(y) h_r(z).
\end{aligned}$$

Враховуючи вказані вище властивості допоміжних функцій можемо зробити висновок, що оператори $\ln O[f(x, y, z)]$ є операторами інтерфлетації функцій $\ln f(x, y, z)$ 3-х змінних [3] на системі взаємно перпендикулярних площин в R^3 з такими інтерфлетаційними властивостями:

$$\begin{aligned}
\ln O[f(x_p, y, z)] &= \ln f(x_p, y, z), \quad \ln O[f(x, y_q, z)] = \ln f(x, y_q, z) \\
\ln O[f(x, y, z_r)] &= \ln f(x, y, z_r), \quad 1 \leq p, q, r \leq M.
\end{aligned}$$

Тобто оператор $\ln O[f(x, y, z)]$ є оператором лінійної інтерфлетації функції $\ln f(x, y, z)$ на системі взаємно перпендикулярних площин

$$x = x_p, \quad y = y_q, \quad z = z_r.$$

Згідно з властивостями операторів лінійної інтерфлетації на системі взаємно перпендикулярних площин, ці оператори є точними на функціях трьох змінних, які задовольняють умову

$$\partial^3 \ln f(x, y, z) / \partial x \partial y \partial z = 0$$

в роботі [3] (теорема 7.2.2.).

Якщо $f(x, y, z) = \alpha x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$, то

$$\ln f(x, y, z) = \ln \alpha + b_1 \ln x + b_2 \ln y + b_3 \ln z,$$

тому $\partial^3 \ln f(x, y, z) / \partial x \partial y \partial z \equiv 0$, якщо $f(x, y, z) = \alpha x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

Таким чином, $\ln O[f(x, y, z)] \equiv \ln f(x, y, z)$, тобто

$$O[f(x, y, z)] \equiv f(x, y, z),$$

якщо $f(x, y, z) = \alpha x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

Що і треба було довести. Теорему 2 доведено.

Перспективи подальших досліджень. Планується дослідити можливості побудови вказаних слідів за допомогою їх значень в окремих точках вказаних ліній або площин.

Висновки. Таким чином, в даній роботі досліджено наближуючи можливості операторів нелінійної інтерлініації функцій двох змінних, які побудовані за допомогою слідів $f(x_k, y)$ та $f(x, y_l)$ функції $f(x, y)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих $x = x_k$, $y = y_l$. А також оператори інтерфлетації функцій трьох змінних $f(x, y, z)$, побудовані за допомогою їх слідів $f(x_p, y, z)$, $f(x, y_q, z)$, $f(x, y, z_r)$ на системі взаємно перпендикулярних площин $x = x_p$, $y = y_q$, $z = z_r$. При цьому вважається, що вказані сліди відомі нам з експерименту. Тобто оператори дослідження, розглянуті в даній роботі, використовують нові інформаційні оператори – сліди функцій на лініях або на площиніах.

Список літератури: 1. Акаев А.А. К вопросу о фундаментальных пределах экономического роста и потребления // Доклады Академии Наук, 2010. – Т.434 – № 6 – С. 749-755 2. Cobb C.W., Douglas P.H. A Theory of Production //American Economic Review. – 1928. – December. – Р. 139-165. 3. Литвин О.М.. Інтерлініація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. 4. О.О. Карагодова, В.Р. Кігель, В.Д. Рожок Дослідження операцій: навчальний посібник. – К.: Центр учебової літератури, 2007 – 256 с. 5. Шапкин А.С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 5-е изд. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2009. – 400 с.

Надійшла до редколегії 12.10.2012

УДК 519.6

Теореми про представлення виробничих функцій деякого класу за допомогою операторів нелінійної інтерлініації та інтерфлетації / М. В. Артюх, О. М. Литвин // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012.–№54 (960). – С.14–18.– Бібліог.: 5 назв.

Сформулированы и доказаны теоремы про условия, которым должны удовлетворять вспомогательные функции в формуле нелинейной интерлининации функций двух переменных на системе взаимно перпендикулярных линий. Эти формулы интерлининации точно представляют производственные функции некоторых классов, а их обобщения для случая функций трех переменных использованы в задаче нелинейной интерфлетации на системе взаимно перпендикулярных плоскостей.

Ключевые слова: экономические модели, производственные функции, формулы интерлининации, нелинейная интерфлетация.

The paper formulated and proved theorems about conditions to be met by auxiliary functions in formulas interlinination nonlinear function of two variables on a system of mutually perpendicular lines. These formulas interlinination accurately represent the production functions of certain classes, and their generalization for the case of functions of three variables used in the problem of nonlinear interflatation on mutually perpendicular planes.

Key words: economic models, production functions, formulas interlinination, nonlinear interflatation.

В.М. БУРЛАСНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

ЗАСТОСУВАННЯ КІНЕМАТИЧНОГО КОНТАКТНОГО АЛГОРИТМУ З ЯВНОЮ СХЕМОЮ ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ЧАСОМ У СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ТІЛ З ТРИЩИНОЮ

Розглянуто кінематичний контактний метод в рамках явної схеми інтегрування за часом у скінченоелементному моделюванні. Означеній алгоритм застосовується щодо розв'язання задач нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактиують між собою. Ефективність та стабільність алгоритму показано на прикладі розв'язання задачі щодо оцінки динамічної поведінки балки з композиційного тришарового матеріалу, в якому поміж верхнім та середнім шарами існує нещільність.

Ключові слова: динаміка тіла з тріщиною; контактний аналіз; метод скінчених елементів.

Вступ. Розробка методів розв'язання задачі динаміки тіла з тріщиною, береги якої взаємодіють між собою за рахунок контакту і/або тертя, є одною з важливих сучасних проблем механіки [1]. Узагалі підходи щодо рішення цієї задачі ґрунтуються на зв'язку методів теорії коливання тіла з контактними алгоритмами. При цьому, якщо коливання тіла, при деяких припущеннях, можуть бути змодельованими у лінійній постановці, то поведінка берегів тріщини у kontaktі описується тільки з позицій нелінійних моделей, оскільки одночасно заздалегідь невідоме ні поле переміщень, ні контактні сили, ні навіть контактні пари на взаємодіючих поверхнях. Тому основною характеристикою рішень подібних динамічних систем є їх значна нелінійність, негладкість та потенціальна погана обумовленість. В зв'язку з цим існують на сучасний момент значні труднощі в моделюванні динаміки тіла з тріщиною.

Метод скінчених елементів (МСЕ) один з найбільш поширеніх чисельних методів, що застосовуються у різних задачах механіки [2]. Скінченоелементний підхід також успішно використовується у рішенні контактних задач [3]. Але контактний аналіз за схемою МСЕ, у порівнянні з багатьма іншими лінійними та нелінійними структурними аналізами, на сьогоднішній день ще не має закінченості щодо точності і стабільності алгоритмів, які впроваджуються. Питання, які пов'язані з ефективним пошуком поверхонь, що мають бути у kontaktі, згладжуванням дискретизованих скінченими елементами kontaktуючих поверхонь, способом впровадження контактних умов на цих поверхнях та побудовою різних типів контактних моделей не вирішенні остаточно і є предметом подальших наукових досліджень [4]. Крім того вирішення цих питань вимагає їх узгодженості зі схемами інтегрування за часом.

Добре відомо, що система скінченоелементних рівнянь руху може бути розв'язана методами, які поділяються на дві категорії: неявні та явні [2]. Для перших повна система диференціальних рівнянь для кожного кроку у часі вирішується з застосуванням ітераційних схем та перевіркою критерію збіжності. Явні ж схеми переформульовують систему диференціальних рівнянь у форму, що дозволяє їх безпосереднє розв'язання наприкінці кожного кроку часу без ітерацій. Завдяки цьому останні більш ефективні у задачах динаміки. Треба зазначити, що при виконанні контактного аналізу комбінація його компонентів, таких як методи дискретизації, контактні алгоритми та схеми інтегрування за часом, є неоднозначною. Наприклад відомо, що *метод коефіцієнтів Лагранжа з неявною схемою Ньюмарка* призводять до неіснуючих осциляцій у контактних силах та невиконанню принципу зберігання енергії у випадку обчислень за *формулою трапеції*, а *метод штрафу з явною схемою* порушує стабільність процесу інтегрування [3].

Підсумовуючи вище сказане очевидно, що оптимальний вибір контактного алгоритму спільно з визначенням схеми інтегрування за часом у скінченоелементних постановках задач з урахуванням контакту і/або тертя є головною запорукою для отримання надійних результатів та ефективного моделювання. У статті описується *кінематичний контактний алгоритм* у рамках явної схеми інтегрування за часом щодо його застосування у дослідженнях динамічної поведінки тіла з тріщиною, границі якої контактують поміж собою. Точність і ефективність вживаних процедур у динамічному контактному аналізі показано на прикладі розрахунку динамічній поведінки балки з композиційного тришарового матеріалу, яка має нещільною зоною поміж верхнім та середнім шарами.

Скінченоелементні рівняння руху з урахуванням контакту. Скінченоелементна модель нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують, з припущеннями щодо лінійності матеріалу та малих деформацій, у подробицях розглянуто в роботі [5]. Тому у поточній статті ці основні положення наведено скорочено. Використовуючи скінченоелементну апроксимацію з урахуванням контактних сил, що передбачаються відомими у визначений момент часу, рух тіла визначаються наступною системою рівнянь:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{cont}(\mathbf{U}, t_N, \mathbf{t}_T), \quad (1)$$

де матриці **M**, **C** і **K** відповідають глобальним матрицям мас, демпфірування та жорсткості; $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$ і \mathbf{U} означають глобальні вектори невідомих прискорень, швидкостей та переміщень; \mathbf{F}^{ext} і \mathbf{F}^{cont} становлять глобальні вектори зовнішніх та контактних сил. Крім того рішення системи (1) узгоджене з заданими крайовими і початковими умовами та відповідає умовам контакту.

Рівняння стану, що визначають взаємодію берегів тріщини, взагалі, є функцією їх переміщень і контактних сил, діючих на них. Кінематика берегів

тріщини у нормальному напрямку описується за допомогою скалярної функції проникнення g_N , яка задана для пари точок на контактуючих поверхнях, таких що точка \mathbf{x}^+ є найближчою до точки \mathbf{x}^- :

$$g_N \equiv (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{n}^+ = g_0 + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n}^+, \quad (2)$$

де $g_0 = (\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{n}^+$ – початкове значення функції та \mathbf{n}^+ – одинична зовнішня нормаль до поверхні контакту, яка є відновлена з \mathbf{x}^+ .

Аналогічно, відносний рух контактуючих поверхонь у горизонтальному напрямку визначається вектор-функцією \mathbf{g}_T , тобто проекцією вектора $(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-)$ на одиничні вектори \mathbf{a}_α^+ , $\alpha = 1, 2$, які тангенціальні до поверхні контакту у точці контакту і такі, що визначають тангенціальний напрямок руху:

$$\mathbf{g}_T \equiv [(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+] \mathbf{a}_\alpha^+ = [(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+ + (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{a}_\alpha^+] \mathbf{a}_\alpha^+ \quad (3)$$

Для того, щоб знайти траєкторію руху поверхонь одній по другій в умовах тертя ковзання, швидкість тангенціальної функції \mathbf{g}_T визначається співвідношенням [4]:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{g}_T = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-) \cdot (\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha), \quad (5)$$

де \mathcal{L}_v позначає похідну Лі вектора-функції по напряму вектора швидкості тангенціального руху.

Контактний тиск \mathbf{t}_c поміж поверхнями в розглянутій точці контакту може бути розкладений на нормальну \mathbf{t}_N та тангенціальну \mathbf{t}_T складові, такі що

$$\mathbf{t}_N = t_N \mathbf{n}^+ \text{ і } \mathbf{t}_T = -(\mathbf{I} - \mathbf{n}^+ \otimes \mathbf{n}^+) \cdot \mathbf{t}_c, \quad (6)$$

де t_N визначає значення нормального контактного тиску.

Використовуючи введені позначення, умови непроникності берегів тріщини записуються у формі критерію Куна-Такера як наступні:

$$t_N \geq 0, \quad g_N \leq 0 \quad \text{та} \quad t_N g_N = 0 \quad (7)$$

У випадку тангенціального контакту функція \mathbf{g}_T ненульова лише в ситуації ковзання, яке асоціюється з явищем тертя. Уживаючи закон тертя Ку-Лона у формі аналогічній теорії пластичності [3], умови злипання і ковзання берегів тріщини набувають вигляду нерівностей:

$$\Phi(\mathbf{t}_T, t_N) = |\mathbf{t}_T| - \mu t_N \leq 0, \quad \mathcal{L}_v \mathbf{g}_T = \dot{\gamma} \mathbf{t}_T / |\mathbf{t}_T|, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (8)$$

Отже, стан інтерфейсу поміж берегами тріщини визначається нерівностями (7) і (8), які створюють додаткові умови щодо рішення системи (1).

Неявна схема інтегрування за часом. Матричне рівняння (1) є системою нелінійних диференціальних рівнянь, яка, в загальному випадку, для знаходження невідомих переміщень вимагає використання інкрементально-

ітераційних процедур рішення [2]. Таким чином система (1) на скінченому числі кроків у часі переписується у вигляді системи рівнянь

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1}^{ext} - \mathbf{F}_{i+1}^{cont}, \quad (9)$$

де прискорення $\ddot{\mathbf{U}}_{i+1}$, швидкості $\dot{\mathbf{U}}_{i+1}$ і переміщення \mathbf{U}_{i+1} , також як зовнішні та контактні сили, відповідають прирощенню часу $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$.

Слідуючи алгоритму явної схеми інтегрування за часом, що використовує скінчено-різницевий оператор, розв'язання системи (1) на початку кожного кроку Δt_{i+1} виконується за формулою обчислення прискорення:

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^{ext} - \mathbf{F}_i), \quad (10)$$

де $\tilde{\mathbf{M}}$ – діагональна матриця мас; \mathbf{F}_i^{ext} – вектор зовнішніх сил на момент часу t_i ; \mathbf{F}_i – сума сил в вузлах трьох типів: внутрішніх $\mathbf{F}_i^{int} = \mathbf{K}\mathbf{U}_i$, демпфірування $\mathbf{F}_i^{damp} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_i$ та контактних \mathbf{F}_i^{cont} . Ці сили є відомими з обчислень, виконаних раніше на кроці Δt_i . Далі скінчено-різницевий оператор просуває рішення щодо обчислення швидкостей на момент часу $t_i + 0.5\Delta t_{i+1}$ і переміщень на момент $t_i + \Delta t_{i+1}$ за формулами

$$\dot{\mathbf{U}}_{i+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{i+1} + \Delta t_i}{2} \ddot{\mathbf{U}}_i \text{ і } \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta t_{i+1} \dot{\mathbf{U}}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

де початкове запізнення у швидкості $\dot{\mathbf{U}}_{i-\frac{1}{2}}$ обчислюється в залежності від заданих початкових умов.

Зазначимо, що явна схема інтегрування за часом є умовно стабільною, тобто значення інкременту Δt_i у (9) повинно бути менше, чим границя стабільності скінчено-різницевого оператора [2]. Приближно оцінкою цієї границі може бути час, за який звукова хвиля проходить через найменший елемент скінченоелементної сітки.

Кінематичний контактний алгоритм. Як було зазначене вище, передбачається, що вектор контактних сил в системі (9) обчислюється за кінематичним контактним алгоритмом. Цей алгоритм відноситься до *методу предиктор-коректор*, який дозволяє точно накласти кінематичні обмеження (7) і (8), що обумовлені контактом. Основні кроки контактного алгоритму на інкременті інтегрування Δt_{i+1} явної схеми є наступними.

У фазі *предиктор* кінематичний стан моделі обчислюється за формулами (10) і (11), ігноруючи контактні умови (7) і (8). Таким чином, проникнення між контактуючими поверхнями може виникнути. Сила, що ставить опір проникненню (або нормальні складова контактного тиску) може бути знайденою за формулою:

$$f_N = m d_N^{pred} / (\Delta t_{i+1})^2, \quad (12)$$

де m – маса вузла \mathbf{x}^- , що проникнув у поверхню контакту та d_N^{pred} – глибина проникання.

Аналогічно, сила опору ковзанню вузла \mathbf{x}^- по контактній поверхні відносно вузла \mathbf{x}^+ в одному із напрямків (або тангенціальна складова контактного тиску) знаходиться

$$f_T = -m \dot{d}_T^{pred} / \Delta t_{i+1}, \quad (13)$$

де \dot{d}_N^{pred} – швидкість відносного тангенціального руху у напрямку α .

У фазі *коректор* прискорення вузлів, які мали проникнення і/або ковзання теряя корегуються за формулою:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}^-}^{cor} = \ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}^-}^{pred} + \ddot{\mathbf{U}}_N + \ddot{\mathbf{U}}_T, \quad (14)$$

де $\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}^-}^{pred}$ – прискорення у фазі предиктор, $\ddot{\mathbf{U}}_N$ та $\ddot{\mathbf{U}}_T$ – корекції до прискорення, що відображають вплив властивостей поверхні контакту на сили f_N і f_T , відповідно [7]. Далі, кореговані прискорення вживаються до обчислення швидкостей і переміщень за формулами (11), котрі будуть точно відповідати зазначенним контактним умовам. Оновлені швидкості використовуються щодо обчислення траєкторій ковзання. Таким чином, наприкінці поточного інкременту Δt_{i+1} вектори переміщень і контактних сил повністю визначені з урахуванням нерівностей (7) і (8).

Важливо зазначити, що кінематичний контактний алгоритм усуває існуючі проникнення і/або ковзання наприкінці інкременту, тобто алгоритм не впливає на граничне значення інкременту і, як наслідок, стабільність схеми інтегрування за часом на протягу контактного аналізу.

Скінченоелементне моделювання. Для оцінки точності та ефективності пропонованого вище підходу у рішенні задачі динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактирують між собою, виконано динамічний аналіз балки з тришарового композиційного матеріалу, що має дефект при зв'язку між окремими шарами. Експериментальні результати динамічних властивостей композиційної балки з нещільністю наведено у статті [8].

Балка була закріплена з одного кінця, та збуджена короткотерміновою силою на незакріпленному кінцю для отримання її коливань. У презентованій статті ця балка була змодельована за допомогою програмного комплексу ABAQUS/Explicit [9], реалізуючого явну схему інтегрування за часом спільно з кінематичним контактним алгоритмом. Рис. 1 показує деформовану форму балки у момент часу, коли нещільність найбільш розкрита. Крім того геометрія скінченоелементної моделі балки також ілюструється на цьому малюнку. Виконані чисельні розрахунки у формі історій прискорення та переміщення у

часі для точки вільного кінця балки були трансформовані у амплітудно-частотні криві процедурами пакету Matlab.

Порівняння обчисленої амплітудно-частотної кривої з експериментальними даними [8] представлено на рис. 2. Можна бачити добрий збіг між представленими результатами, що свідчить о високій точності та стабільності чисельного рішення. Ефективність моделювання за описаною у статті схемою визначалась порівнянням з чисельними результатами, отриманими у рамках неявної схеми інтегрування спільно з контактним алгоритмом коєфіцієнтів Лагранжа. Зазначимо, що ця чисельна схема не була в змозі виконати розрахунок в зв'язку з нестабільністю рішення в наслідок обробки контактних умов. Деякі штучні дії впроваджувались для отримання рішення, але вони значно змінили результати розрахунків (рис. 2).

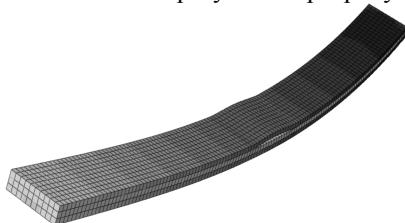


Рис. 1 – Тривимірна скінченоелементна модель балки.

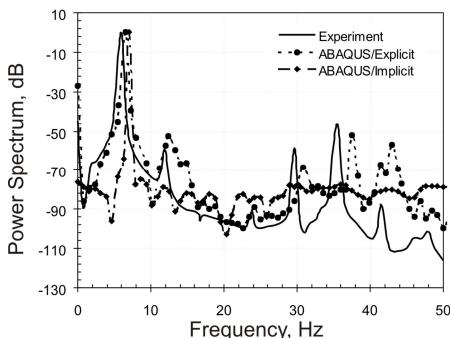


Рис. 2 – Порівняння амплітудно - частотних кривих.

Висновки. Представлено кінематичний контактний метод в рамках явної схеми інтегрування за часом у скінченоелементному моделюванні задачі нелінійної динаміки тіла з тріщиною. Точність, стабільність та ефективність алгоритму доказано на прикладі рішення задачі щодо оцінки динамічної поведінки балки з композиційного тришарового матеріалу, в якому поміж окремими шарами існувала нещільність.

Список літератури: 1. Babitsky V.I., Theory of vibro-impact systems and applications, Springer, Berlin, 1998. – 352 p. 2. Belytschko T., Liu W.K., Morgan B., Nonlinear finite elements for continua and structures. – John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2000. – 667 p. 3. Wriggers P., Computational contact mechanics. – John Wiley & Sons Ltd, England, 2002. – 441 p. 4. Meguid S.A., Czekanski A., Advances in computational contact mechanics// Int. J. Mech. Mater. Des. 4, 2008, p.p. 419-443. 5. Бурлансько В.М., Морачковський О.К., Скінченоелементна модель нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактиують// Вісник НТУ «ХПІ» –2012.– №2. – С. 44-51. 7. Taylor L.M., Flanagan D.P., PRONTO 3D a three-dimensional transient solid dynamics program// Sandia National Laboratory, Albuquerque, NM, 1989. 8. Prime M.B., Shevitz D.W., Linear and Nonlinear Methods for Detecting Cracks in Beams// Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference, 1995, p.p.1437-1443. 9. ABAQUS. User Manual, Dassault Systèmes Simulia Corp. – Providence, RI, USA, 2010.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 621.9

Застосування кінематичного контактного алгоритму з явною схемою інтегрування за часом у скінченоелементних задачах динаміки тіл з тріщиною / В.М. Бурласенко, О.К. Морачковський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання у техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.19–25. – Бібліогр.: 9 назв.

Рассмотрен кинематический контактный метод, используемый в рамках явной схемы интегрирования по времени в конечнозлементном моделировании. Этот алгоритм применяется здесь для решения задач нелинейной динамики тела с трещиной, границы которой могут находиться в контакте. Эффективность и устойчивость алгоритма показана на примере решения задачи о динамическом поведении балки из композиционного трехслойного материала, который частично расслоен в соединении между верхним и средним слоями.

Ключевые слова: динамика тел с трещиной; контактный анализ; метод конечных элементов.

A kinematical numerical contact method used with an explicit time integration scheme in finite element modelling is considered. The algorithm is applied to dynamical problems of a body with a crack whose edges are able to come into contact. Its effectiveness and robustness is demonstrated on predictions of dynamic response of a sandwich beam containing a detached region between the top and middle plies.

Key words: dynamics of body with crack; contact analysis; finite element method.

УДК 539.1

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНФАЗНЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ВОЛНОВОДАХ И СОНОТРОДАХ ВИНТОВОЙ ФОРМЫ

Разработаны математические модели волнового синфазного поля продольных и связанных колебаний винтового стержня. Установлен изоморфизм между двумя полями связанных колебаний – волновым и обычным, что позволило распространить на волновое поле методы расчёта стержня на прочность и теорию солитонов Рассела. Описаны примеры использования волновых полей для передачи энергии ультразвуковых колебаний.

Ключевые слова: винтовой стержень, упругие колебания, волновое поле, солитоны Рассела, ультразвуковой волновод, сонотрод.

Введение и постановка задачи. Синфазные колебания упругих континуумов (так называемые *стоячие волны*, амплитуда которых образует *волновое поле*) обычно возникают при изменении граничных условий по гармоническому закону с определённой (*синфазной*) частотой. Особенностью исследуемых в данной работе колебаний является то, что они возбуждаются в нелинейной системе, имеют одинаковую для всех её точек амплитуду изменения

© В. А. Ванин, А. А. Григорьев, 2012

плотности и сопровождаются моногармоническими пульсациями коэффициентов соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Для простейших моделей, описывающих периодические колебания механических систем, аналогичная особенность приводит к *дифференциальному уравнению Маттье* [1]. Но винтовой стержень описывается более сложной моделью – системой уравнений в частных производных [2], и при вибрации опор в нём возбуждаются две группы колебаний – продольные и поперечные, которые, как правило, внутри стержня слабо связаны между собой. Пульсация коэффициентов нарушает это правило и индуцирует в стержне волновое поле нового типа, которое ранее было описано в [3], где изучались аналогичные связанные колебания в трёхмерном упругом континууме.

Синфазные связанные колебания сплошной нелинейной среды, как указывалось в [4], способны создавать в этой среде фундаментальные силовые поля, подобные электромагнитному и гравитационному полю, и их теория ещё найдёт приложения в технике. Аналогичные колебания винтового стержня, как показано в [5], могут использоваться для передачи механической энергии ультразвуковых колебаний.

Современные технические приложения ультразвуковых колебаний в основном касаются двух направлений: дефектоскопия и обработка материалов. В обоих случаях, как правило, используются короткие волны, длина L которых связана с круговой частотой ω простой зависимостью

$$L = 2\pi a / \omega, \quad (1)$$

где a – скорость распространения соответствующих колебаний; она зависит от вида деформации и для стальных стержней составляет 3.4–5.9 м/с.

В дефектоскопии стремятся получить как можно меньшую величину L , поскольку она определяет разрешающую способность прибора. В результате рабочая частота дефектоскопов лежит в диапазоне 0.5–10 МГц, и использовать здесь для передачи сигнала синфазное поле винтового стержня, впервые описанное в наших работах [5,6], сложно. К тому же, при дефектоскопии рабочая частота прибора изменяется в широких пределах, что вступает в противоречие с принципами образования синфазного поля, указанными далее.

Другими являются условия применения ультразвука для обработки материалов. Устройства, как правило, работают в узком диапазоне частот, и их можно отнести к резонансной технике. Рабочая частота выбирается из диапазона 20–130 кГц и лежит в области низких ультразвуковых колебаний. Многие устройства работают на частоте 22 кГц, но наблюдается тенденция к её увеличению; чем выше рабочая частота, тем больше мощность передачи и выше производительность устройства. Однако простое увеличение частоты здесь выполнить невозможно, поскольку оно потребует изменения размеров волноводной системы и характеристик генератора колебаний.

Для возбуждения колебаний используют генераторы трёх типов: элек-

тромагнитные, магнитострикционные и пьезокварцевые; сравнивать их характеристики в работе, где обсуждаются общие принципы, мы не будем.

Типичные схемы устройств показаны на рис. 1. В волноводе возникает стоячая волна, длина которой вычисляется по формуле (1). Для передачи упругой энергии используют стержни и другие элементы, длина которых кратна длине полуволны возбуждаемых колебаний.

При частоте 22 кГц длина полуволны для прямых стальных стержней составляет 112 мм, титановых – в 1.2 раза больше.

По данным [7] логарифмический декремент затухания ультразвуковых колебаний в стальном волноводе зависит от частоты и среднего размера зерна в материале. Для диапазона

20–130 кГц он приблизительно составляет 0.059, то есть на длине полуволны амплитуда уменьшается на 3%.

Механическая энергия превращается в тепло, что приводит к нагреву волновода. Потерями на излучение, а также зависимостью декремента затухания от зернистости материала для этих частот допустимо пренебречать.

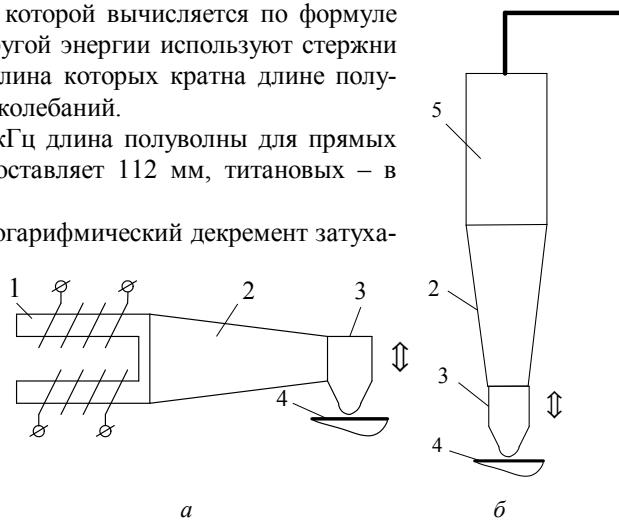


Рис. 1 – Принципиальные схемы устройств для ультразвуковой обработки: а – используются поперечные; б – продольные колебания; 1 – электромагнитный генератор; 2 – волновод; 3 – индентор; 4 – обрабатываемая поверхность; 5 – пьезокварцевый или магнитострикционный элемент.

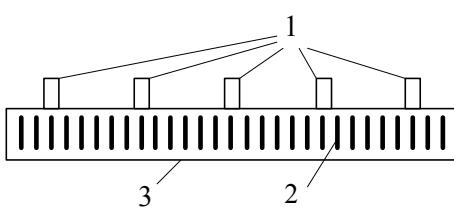


Рис. 2 – Пластинчатый сонотрод для ультразвуковой сварки пластмасс; 1 – стержни для подключения генераторов; 2 – прорези; 3 – рабочая поверхность.

К известным недостаткам устройств для ультразвуковой обработки материалов (быстрое затухание колебаний, высокую жесткость передающих звеньев, неоднородность амплитуды) можно преодолеть,

Для сваривания мягких пластмасс (рис. 2) применяют излучатель тепловой энергии (сонотрод), длина которого превышает длину полуволны в 16 раз. Чтобы выровнять амплитуду колебаний к нему подключают 5 генераторов, работающих синхронно [8].

Известные недостатки устройств для ультразвуковой обработки материалов (быстрое затухание колебаний, высокую жесткость передающих звеньев, неоднородность амплитуды) можно преодолеть,

если перейти от коротких волн к длинным. Для осуществления такого перехода волновод должен иметь соответствующую кривизну, а его ось – форму винтовой спирали. Задачей данной публикации является более подробное, чем было дано в [5,6], описание методов математического моделирования винтовых волноводов и основных принципов передачи энергии ультразвуковых колебаний посредством упругих элементов винтовой формы.

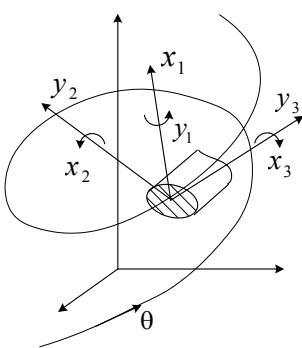


Рис. 3 – Координаты групп колебаний.

Модель связанных колебаний винтового стержня. В [9] было показано, что в длинной цилиндрической пружине растяжения можно возбудить бегущую волну продольной деформации, имеющую форму классического или модифицированного солитона Рассела. При этом использовалась нелинейная модель связанных колебаний пружины, полученная ранее в [3]; матричная форма уравнений модели имела следующий вид:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \beginbmatrix Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \beginbmatrix Qx \\ Qy \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \beginbmatrix Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \beginbmatrix Vx \\ Vy \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Vx, Vy – векторы, составленные из скоростей изменения координат x_j или y_j (рис. 2); Qx, Qy – отвечающие им упругие силы и моменты сил q_j или f_j ; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения,

$$\begin{aligned} mx_1, my_2, my_3 &= \Delta, \quad mx_2 = \Delta^3 / (4z^2), \quad my_1 = \Delta / (4z^2), \quad mx_3 = \Delta(1 + \Delta^2) / (4z^2), \\ cx_1, cy_2 &= (1 + \mu) / (2z^2 \Delta), \quad cy_3 = (4z^2 \Delta)^{-1}, \quad cx_2, cy_1 = 1 / \Delta, \\ cx_3 &= 0.5(1 + \mu)(1 + \Delta^2) / \Delta^3, \end{aligned}$$

μ – коэффициент Пуассона; Δ – коэффициент овализации сечения (рис. 3); I, Θ – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка; B, Ω – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -(tg \delta_0 - cx_3 \cdot q_3) & 0 \\ tg \delta_0 - cx_3 \cdot q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

δ_0 – начальное изменение угла подъёма винтовой оси вследствие предварительной деформации; $z = D/d$ – индекс пружины; D – диаметр навивки.

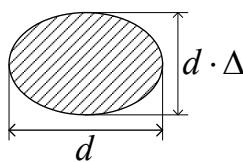


Рис. 4 – Форма сечения.

Модель (2), (3) оперирует с безразмерными величинами; порядок нормировки дан в [2]. В статье [10] указывалось на существования у пружины так называемых *частот синфазных колебаний* (на рис. 5 это выделенные точки пересечения графиков с осью), причём на одной из этих частот происходит пульсирующее продольное сжатие винтовой оси, что изменяет её погонную плотность. В статье [4], где анализировались связанные колебания трёхмерного упругого континуума, было показано, что наличие синфазных колебаний объёмной плотности (которые происходили там за счёт соответствующего деформирования частиц примеси, имеющих меньший модуль сжимаемости) приводит к возникновению волнового поля попреречных синфазных колебаний сплошной среды. Далее мы покажем, что такой же механизм образования волнового поля работает и в случае одномерного упругого континуума (цилиндрической пружины). После чего будут указаны предпосылки для получения солитонов нового волнового поля.

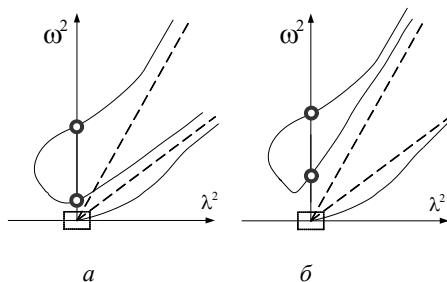


Рис. 5 – Зависимости волнового числа λ от частоты ω для продольных (а) и поперечных (б) колебаний стержня.

Волновое поле синфазных продольных колебаний пружины. Пусть длинная пружина растяжения – сжатия имеет индекс $z \gg 3$ и угол $\delta_0 \approx 0$. Возбудим в пружине синфазные колебания, имеющие форму

$$(vy, qy) = Ay \cdot ((0 \ 1 \ 0)^T \cos(\omega y \cdot t); (0 \ 0 \ -2z)^T \sin(\omega y \cdot t)),$$

что по принятой в работе [2] терминологии отвечает *нижней поперечной синфазной частоте* $\omega_y = 2z$; Ay – это амплитуда колебаний.

В результате гармонического колебания осевой силы

$$qy_3 = -2 \cdot z \cdot Ay \cdot \sin(\omega y \cdot t))$$

произойдёт изменение характеристик поперечного сечения – инерционных коэффициентов mx_1, mx_2, mx_3 и коэффициентов податливости cx_1, cx_2, cx_3 .

Будем считать, что изменение диагональных матриц Mx, Cx^{-1} также происходит по гармоническому закону, то есть

$$Mx = Mx0 + \delta M \cdot \sin(\omega y \cdot t), \quad Cx^{-1} = Cx0^{-1} + \delta C^{-1} \cdot \sin(\omega y \cdot t).$$

Тогда уравнения системы (2), описывающие при условии $\Omega = \Theta$ продольные колебания пружины, будут иметь следующий вид:

$$\partial(Mx(t) \cdot \partial \vec{x} / \partial t) / \partial t = \partial \vec{q} / \partial \theta + B \cdot \vec{q}; \quad \vec{q} = Cx^{-1}(t) \cdot (\partial \vec{x} / \partial \theta - B^T \cdot \vec{x}),$$

или

$$\partial(Mx(t) \cdot \partial \vec{x} / \partial t) / \partial t = -(B + I \times \partial / \partial \theta) \cdot Cx^{-1}(t) \cdot (B^T - I \times \partial / \partial \theta) \cdot \vec{x},$$

Далее естественно и решение этого операторного уравнения искать в виде

$$\vec{x} = \overrightarrow{\delta x} \cdot \sin(\omega y \cdot t),$$

где вектор $\overrightarrow{\delta x}$ по сравнению с синфазной частотой ωy медленно изменяется во времени либо является константой.

Используем ту же процедуру усреднения, что в [3, 4], и придём к новому операторному уравнению

$$\delta M \cdot \partial^2 \vec{x} / \partial t^2 = -(B + I \times \partial / \partial \theta) \cdot \delta C^{-1} \cdot (B^T - I \times \partial / \partial \theta) \cdot \vec{x},$$

имеющему факторизацию

$$\delta M \cdot \partial^2 \overrightarrow{\delta x} / \partial t^2 = \partial \overrightarrow{\delta q} / \partial \theta + B \cdot \overrightarrow{\delta q}; \quad \delta C \cdot \overrightarrow{\delta q} = \partial \overrightarrow{\delta x} / \partial \theta - B^T \overrightarrow{\delta x}.$$

Учтём, что амплитуды изменения инерционных коэффициентов и коэффициентов жёсткости сечения пропорциональны амплитуде изменения погонной плотности, то есть

$$\delta M = \delta \rho \cdot M, \quad \delta C^{-1} = \delta \rho \cdot C^{-1}.$$

откуда

$$\left\{ \begin{array}{l} M \cdot \partial^2 \overrightarrow{\delta x} / \partial t^2 = \partial \overrightarrow{\delta q} / \partial \theta + B \cdot \overrightarrow{\delta q}; \\ C \cdot \overrightarrow{\delta q} = \partial \overrightarrow{\delta x} / \partial \theta - B^T \overrightarrow{\delta x}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Мы получили искомые уравнения волнового поля синфазных колебаний.

Система (4) имеет то же самое дисперсионное уравнение, что и группа продольных колебаний пружины, описываемая уравнениями модели (2). Как показывают данные рис. 6,

$$\omega^2 \ll \omega y^2 = 4z^2.$$

Следовательно, этой моделью можно, например, пользоваться для частот нижней ветви дисперсионного уравнения, и такое волновое поле будет несложно создать, наблюдать в эксперименте и использовать для передачи колебательной энергии в ультразвуковом диапазоне частот.

Волновое поле синфазных связанных колебаний пружины. Необходимо отметить, что описанные в преды-

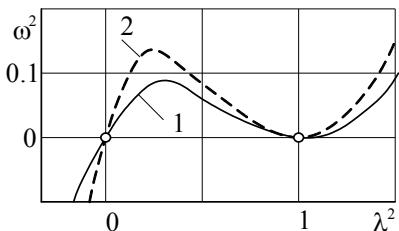


Рис. 6 – Нижние ветви дисперсионного уравнения;
1 – продольные, 2 – поперечные колебания.

дущем пункте колебания на самом деле также являлись связанными, но эта связь осуществлялась только через диагональные коэффициенты системы уравнений и была односторонней (от группы поперечных колебаний к группе продольных колебаний). Если изменением угла подъёма винтовой линии и относительной кривизной пружины $z^{-1} = d/D$ пренебречь нельзя, то нелинейная связь (3) будет влиять и на волновое поле синфазных колебаний, что необходимо учесть.

Перепишем систему (2) в операторной форме:

$$\begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \\ = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \left[Cx^{-1} \quad \Theta \atop \Theta \quad Cy^{-1} \right] \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix},$$

а в матрице (2) учтём пульсацию момента кручения $q_3 = \delta q_3 \cdot \sin(\omega y \cdot t)$ и получим:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -tg\delta_0 + cx_3\delta q_3 \sin(\omega y \cdot t) & 0 \\ tg\delta_0 - cx_3\delta q_3 \sin(\omega y \cdot t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Процедура усреднения приводит к операторному уравнению

$$\begin{bmatrix} \delta Mx & \Theta \\ \Theta & \delta My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} \bar{\delta x} \\ \bar{\delta y} \end{bmatrix} = \\ \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \hat{\Omega} \\ \hat{\Omega} & -B^T \end{bmatrix} \right) \left[\delta Cx^{-1} \quad \Theta \atop \Theta \quad \delta Cy^{-1} \right] \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\hat{\Omega} \\ -\hat{\Omega} & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{\delta x} \\ \bar{\delta y} \end{bmatrix},$$

имеющему такую факторизацию:

$$\begin{bmatrix} \delta Mx & \Theta \\ \Theta & \delta My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \hat{\Omega} \\ \hat{\Omega} & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \delta Cx & \Theta \\ \Theta & \delta Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\hat{\Omega} \\ -\hat{\Omega} & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix},$$

где

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{tg^2\delta_0 + (3/4)(cx_3\delta q_3)^2} & 0 \\ \sqrt{tg^2\delta_0 + (3/4)(cx_3\delta q_3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Учтём равенства

$\delta Mx = \delta\rho \cdot Mx$, $\delta My = \delta\rho \cdot My$, $\delta Cx^{-1} = \delta\rho \cdot Cx^{-1}$, $\delta Cy^{-1} = \delta\rho \cdot Cy^{-1}$,
и получим искомую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \bar{\Omega} \\ \bar{\Omega} & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} \delta Qx \\ \delta Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\bar{\Omega} \\ -\bar{\Omega} & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta Vx \\ \delta Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где обозначено $\delta Vx = \partial \overrightarrow{\delta x} / \partial \tau$, $\delta Vy = \partial \overrightarrow{\delta y} / \partial \tau$.

Длинные бегущие волны, описываемые системой (5), (6), имеют слабое затухание и способны переносить в ультразвуковом диапазоне частот значительную энергию, что важно для решения многих практических задач.

Солитоны волнового поля. Дисперсионные уравнения моделей (5), (6) и (2), (3) отличаются только формой матрицы связи. Это означает, что для волнового поля можно повторить выкладки статьи [9] и получить *модифицированное КДФ – уравнение* и устойчивую нелинейную уединённую волну – *модифицированный волновой солитон Рассела*. У таких солитонов заштрихованная на рис.7 площадь и максимальная амплитуда колебаний квантованы, скорости движения незначительно превышают скорости распространения длинной низкочастотной волны, а максимальная абсолютная скорость перемещения витков близка к скорости звука в материале пружины.

Порядок возбуждения синфазного поля. В принципе, для получения однородных колебаний винтового стержня можно использовать любую синфазную частоту из четырёх, отмеченных на рис. 5.

Например, если использовать нижнюю синфазную частоту продольных колебаний, то можно получить однородное поле кручения стержня, что вызовет колебательное вращение рабочего инструмента (индентора). В некоторых современных устройствах подобного типа, если судить по их рекламным проспектам, используется дополнительное вращение индентора, и такое их качество преподносится как эксклюзивное и полезное. Возбуждая в опорном витке винтового стержня колебания двух синфазных частот одновременно, можно получить тот же эффект.

Но для образования синфазного поля необходимо использовать ту часто-

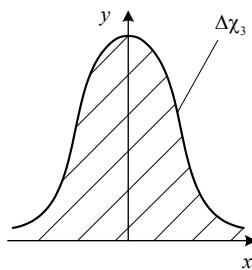


Рис. 7 – Изменение волновой функции кручения стержня внутри модифицированного солитона.

ту, на которой изменяется погонная плотность. Она отмечена точкой на диаграмме 5 б. Для соответствующей круговой частоты будем использовать обозначение ω_* .

Что касается верхних синфазных частот, то сам факт их существования и величина ещё подлежат проверке и уточнению. Для чего вместо трёхмерной модели деформаций прямого стержня [11] планируется использовать математическую модель кольца торoidalной формы. Пока указанная проверка не выполнена, полагаться на эти частоты и анализировать получаемые результаты мы не будем.

Был разработан порядок возбуждения синфазного поля и изучены факторы, определяющие синфазную частоту $v_* = \omega_*/(2\pi)$ и влияющие на её изменения при работе стержня. Оказалось, что она определяется формулой

$$v_* = \sqrt{E/\rho} \sqrt{1 + 0.5 \chi_3^2 (1 + 0.5/(1 + \mu))} / (2\pi R_{kp} [1 + 1/(4z_n^2)]),$$

где R_{kp} – радиус кривизны стержня, $R_{kp} = R_b / \cos^2 \delta$; R_b, δ – радиус навив-

ки и угол подъёма спирали; $\chi_3 = \operatorname{tg} \delta_0$ – изменение кручения при начальном сжатии.

Фактически, эта частота определяется скоростью распространения волны продольной деформации по витку пружины, не зависит от формы сечения и является стабильной величиной. Для тонкого стального стержня (при индексе $z_n > 5$) и температуре $t_n < 120$ С имеем простую зависимость

$$R_{kp} = 0.77 / (v_* / 10^3).$$

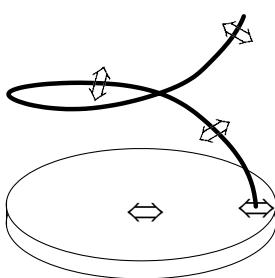
В частности, при рабочей частоте $v_* = 22$ кГц получаем радиус кривизны $R_{kp} \approx 36$ мм, а диаметр стержня $d = 8\dots10$ мм.

Пружина из такой проволоки выдерживает сжимающую и сдвигающую нагрузку $F_d = 6\dots10$ кН.

В устройствах, где рабочая частота увеличена до значения 130 кГц, получаем радиус кривизны $R_{kp} \approx 6$ мм и диаметр проволоки $d = 1.5\dots2$ мм. При этом сила F_d уменьшается пропорционально d^2 до уровня $F_d = 200\dots300$ Н, который для осуществления обработки поверхности является достаточным.

Чтобы возбудить волновое поле нужно обеспечить поперечное радиальное колебание опоры в точке закрепления стержня (как показано на рис. 8). При синфазной частоте v_* колебания координаты y_2 и силы f_3 одинаковы

Рис. 8. – Схема возбуждения радиальных синфазных колебаний.



для всех сечений стержня, а амплитуды продольных и других форм колебаний будут описываться вышеуказанными выше уравнениями волнового поля.

Анализ дисперсионных диаграмм (рис. 9) показал, что если относительное отклонение частоты v_* не превосходит величины

$$\Delta v_* = 0.2 / i_b,$$

где i_b – число витков пружины, то искажениями в работе волнового синфазного поля можно пренебречь. В частности, амплитуда указанного колебания будет образовывать однородное поле, а соответствующую жёсткость при расчёте устройства допустимо считать бесконечной. В тоже время коэффициенты жёсткости пружины при продольном сжатии и сдвиге, а также аналогичные коэффициенты для волнового поля синфазных колебаний, будут на один – два порядка ниже, чем у других элементов волноводной системы.

Последнее замечание необходимо обсудить. Если на противоположном (по отношению к генератору) конце пружины или винтового стержня имеется жёсткое ограничение для продольного перемещения, то амплитуда соответствующего колебания будет малой (рис. 10), и энергия продольных колебаний передаваться не

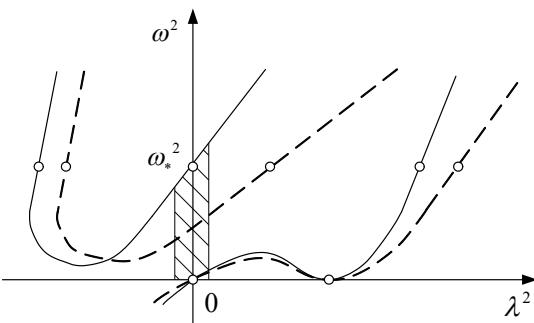


Рис. 9 – Совмещённая дисперсионная диаграмма (сплошные линии отвечают поперечным колебаниям, пунктирные – продольным; штриховкой выделен интервал волновых чисел при синфазных колебаниях).

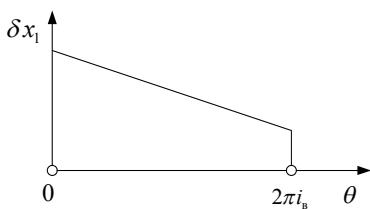


Рис. 10 – Изменение амплитуды продольных синфазных колебаний на стационарном режиме работы устройства.

будет. Это же замечание относится и к амплитуде для тангенциального сдвига выходного конца стержня, а также к амплитудам его кручения и изгиба в двух плоскостях.

Но амплитуда радиального смещения на выходном конце будет такой же, как и на входном. То есть, в отношении этого фактора стержень на резонансной синфазной частоте ведёт себя как твёрдое тело. В частности, если по данной координате действует значительная сила сопротивления, то она будет непосредст-

венно прикладываться к генератору колебаний, и он будет её преодолевать. При этом если стержень не имеет целого числа витков, то эта сила сохранит свою величину, но изменит направление действия. И поскольку эта сила является пульсирующей, то возникающий момент также будет пульсировать и не приведёт к заметным перемещениям волновода.

Прочность и жёсткость стержня при синфазных колебаниях. Изучены факторы, влияющие на прочность винтового волновода при его колебаниях на режимах волнового поля. Оказалось, что они аналогичны требованиям, которые предъявляют к интенсивности динамической деформации стержня на низких частотах, но вместо скорости смещения опоры здесь ограничивается скорость изменения амплитуды её колебаний. В частности, для обеспечения усталостной прочности материала достаточно, чтобы максимальная скорость изменения амплитуды не превосходила величины $\Delta v = 5 \text{ мкм / мкс}$; для устройств резонансной техники это условие выполняется с запасом.

Такой результат объясняется тем, что на прочность влияет не абсолютное перемещение сечения стержня, а относительное смещение соседних сечений. Что касается известного отрицательного влияния температуры на упругие свойства материала, то его необходимо учитывать, но по сравнению с имеющимися аналогами оно ослабляется в силу снижения потерь энергии в передаче.

Коэффициент жёсткости $\delta Z_{\text{пп}}$ изменения амплитуды δq_1 перерезывающей силы при синфазных колебаниях определяется по тем же формулам из справочника [12], что и коэффициент $Z_{\text{пп}}$ жёсткости этой пружины при её продольной деформации. Для тангенциальных (по отношению к точке закрепления пружины) синфазных колебаний коэффициент жёсткости $\delta Z_{\text{тан}}$ определяется равенством

$$\delta Z_{\text{тан}} = \delta Z_{\text{пп}} / [2(1 + \mu)],$$

и он совпадает с коэффициентом жёсткости $\delta Z_{\text{пп}}$, который возникает при поперечном смещении одной из опор, когда вторая опора неподвижна. Последний результат был, например, приведен в [13], где для анализа всех форм деформаций пружины использовалась модель эквивалентного стержня.

Если винтовой стержень имеет угол навивки $\delta < 10^0$ и число витков $i_{\text{в}} > 4$, то коэффициенты жёсткости $\delta Z_{\text{пп}}, \delta Z_{\text{пп}}$ оказываются меньшими аналогичных коэффициентов для прямого стержня на один-два порядка, что существенно понижает известные требования к точности позиционирования генератора колебаний относительно обрабатываемой поверхности.

Винтовой волновод для ультразвуковой финишной обработки,

сварки и резки. В современной технологии безабразивной ультразвуковой финишной обработки поверхности металла пружину предлагается использовать как элемент волноводной системы (рис. 11). Она устанавливается между магнитострикционным элементом, генерирующим поперечные колебания с частотой $v_* = 22$ кГц (или 50 кГц, 80 кГц) и амплитудой $\Delta h = 5...25$ мкм,

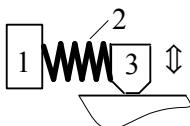


Рис.11 – Схема устройства:

- 1 – генератор;
- 2 – винтовой волновод;
- 3 – индентор.

и индентором, что существенно повышает функциональные качества системы. Жёсткость пружины достаточна, чтобы обеспечить необходимое усилие прижатия $F_t = 100...300$ Н.

Аналогичную схему можно применять и при ультразвуковой сварке металлов, а также при резке и сваривании мягких пластмасс. Соответствующие методы ультразвуковой обработки пластмасс осуществляются на резонансной частоте 18...50 кГц при амплитуде продольной деформации 30...70 мкм и усилии прижатия $F_t = 50...150$ Н.

Винтовой сонотрод для сваривания жёстких пластмасс. При сваривании жёстких пластиков необходимо обеспечить поперечные колебания излучателя тепловой энергии – сонотрода, работающего с амплитудой 40 мкм и частотой 22 кГц, причём эта амплитуда должна быть выровненной на участке, длина которого превышает длину возбуждающей волны на порядок. Известное решение использует пластину специальной формы, к которой подключают 5 генераторов колебаний (рис. 2). Более эффективное решение даёт пружина с практически сомкнутыми витками и проволокой прямоугольного сечения (рис. 12), в которой возбуждаются синфазные поперечные радиальные колебания. Тогда можно использовать один генератор, а частоту колебаний повысить до уровня 130...150 кГц.

Заметим, что если воспользоваться эквивалентной моделью (см. [10]), то пружину для этого устройства, в принципе, можно заменить отрезком пустотелого цилиндрического стержня (рис. 13). Ясно, что такое решение обеспечит более равномерный подвод тепла в зону сваривания и может показаться идеальным. Но тогда генератор обязан возбуждать не поперечные, а радиальные колебания опоры, и это будет связано с известными техническими сложностями. Кроме того, жёсткость стержня будет значительно выше жёсткости пружины, и мы потеряем важное преимущество нового

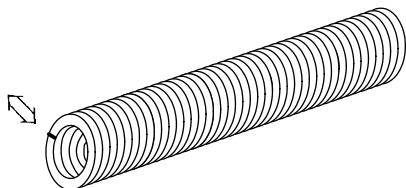


Рис. 12 – Винтовой сонотрод для сваривания жёстких пластмасс.

способа передачи энергии.

Винтовой упругий трансформатор. В волноводных системах резонансной ультразвуковой техники для увеличения амплитуды колебаний используют трансформаторы упругих колебаний; их часто изготавливают в виде прямого стержня переменного сечения, площадь которого изменяют по ступенчатому или непрерывному закону. Такое же усиление для амплитуды продольных колебаний обеспечит винтовой стержень переменного сечения, если при его навивке обеспечить постоянный радиус кривизны нейтрального волокна (как это сделано в конструкции штопора), или плавно изменять угол δ подъёма спирали.

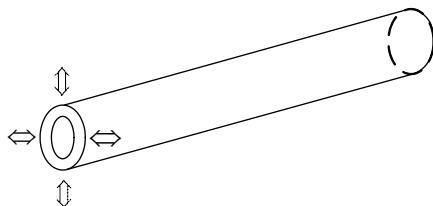


Рис. 13 – Синфазный цилиндрический сонотрод.

это сделано в конструкции штопора), или плавно изменять угол δ подъёма спирали.

Заметим, что сказанное не относится к поперечным радиальным синфазным колебаниям, которые и для винтового стержня переменного сечения будут иметь квазиоднородное поле амплитуд.

Винтовой сонотрод для гомогенизатора. В ультразвуковых гомогенизаторах различного назначения (например, используемых в биотехнологиях) обычно в качестве сонотрода используются титановые стержни. Известно, что титановые сплавы почти в 2 раза легче стали, но зависимость упругих свойств от температуры у титановых сплавов существенно выше. Однако в гомогенизаторе, как правило, происходит эффективное охлаждение сонотрода, и для этих условий работы титан имеет больше преимуществ, чем сталь.

Заметим, что радиус кривизны винтовой линии зависит не только от радиуса R направляющего цилиндра, но и от угла её подъёма $R_{kp} = R / \cos \delta$.

Винтовой стержень (рис. 14), навитый из титановой проволоки при угле подъёма спирали $\delta \approx 75\ldots80^\circ$, рекомендуется использовать как сонотрод для ультразвуковых гомогенизаторов. При резонансной частоте 22 кГц и диаметре проволоки $d=6\ldots8$ мм это обеспечит такой же поперечный размер сонотрода, как у его аналогов, но продольный размер можно увеличить на порядок (он ограничен

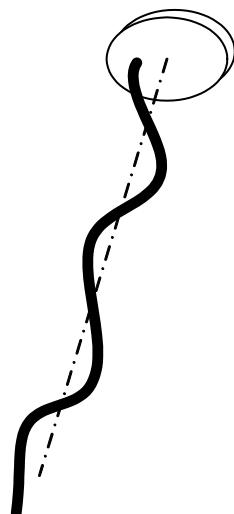


Рис. 14 – Винтовой титановый сонотрод для гомогенизатора.

только величиной отклонения частоты $\Delta\nu_*$), что позволит применять гомогенизатор в узких длинных каналах. Поперечные однородные колебания сонотрода можно совместить с его продольными синфазными колебаниями, что повысит кавитацию и улучшит перемешивание.

Выводы. Показано, что волновые поля синфазных продольных и связанных нелинейных колебаний пружины описываются уравнениями того же типа, что и низкочастотные колебания самой пружины. Пружину можно использовать в ультразвуковой технике как волновод.

Список литературы: 1. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965.– 423 с. 2. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 4. Ванин В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 5. Ванин В.А., Григорьев А.А. Результаты математического моделирования винтовых волн трансляции в нелинейных упругих континуумах, выбирирующих синфазно // Вестник НТУ «ХПИ». – 2012. – № 27. – С.57-73. 6. Ванин В.А., Григорьев А.А. Волновое поле синфазных связанных колебаний цилиндрической пружины и его солитоны // Математические методы в технике и технологиях // Сб. трудов XXV междунар. науч. конф. – Саратов, 2012. – Т.3. – С.19-22. 7. Зори А.А., Соломичев Р.И., Тарасюк В.П. Исследование затухания ультразвука в воздухе и структуре металла валков горячей прокатки из стали 150 ХМ // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков, 2010. – № 12. – С.51-56. 8. Сенченков И.К. Модальная классификация и проектирование сонотротов для ультразвуковой сварки пласти масс // Акустичний вісник. – 1998.– 1, №4.–С.55-64. 9. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С.20-30. 10. Ванин В.А., Григорьев А.А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С.23-37. 11. Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериценко А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 12. Справочник машиностроителя. В трех томах. / Под ред. Е.А. Чудакова. – М: Гос. науч.-техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. – 1098 с. 13. Хвингия М.В. Вибрация пружин. – М.: Машиностроение, 1969.

Поступила в редакцию 07.10.2012

УДК 539.1

Моделювання синфазних упругих колебань в волноводах і сонотродах винтової форми / В.А. Ванин, А.А. Григорьев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання у техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.25–38. – Бібліogr.: 13 назв.

Розроблені математичні моделі хвильового синфазного поля поздовжніх та зв'язаних коливань гвинтового стрижня. Встановлено ізоморфізм між двома полями зв'язаних коливань – хвильовим та звичайним, що дозволило розповсюдити на хвильове поле теорію солітонів Рассела. Описано приклади використання хвильових полів в гвинтовому стрижні для передачі енергії ультразвукових коливань.

Ключові слова: гвинтовий стрижень, пружні коливання, хвильове поле, солітони Рассела, ультразвуковий хвилевід, сонотрод.

The mathematical model of wave-phase field of longitudinal vibrations and related helical rod. Set isomorphism between the two fields related fluctuations - and the ordinary wave, which allowed to extend to the wave field methods for calculating the strength of the rod and the theory of solitons Russell. Describes examples of wave fields to transfer energy ultrasonic vibrations.

Key words: screw rod, elastic vibrations, the wave field solitons Russell ultrasound waveguide sonotrode.

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Ю.Л. ГЕВОРКЯН, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

АЛГОРИТМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЁСТКИХ УРАВНЕНИЙ КЛАПАННЫХ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Описан универсальный метод динамического расчёта гидромеханического узла, оснащенного автоматическими клапанами разных типов. Особенностью метода является использование матричных обозначений для записи жесткой системы дифференциальных уравнений гидромеханики и неявной консервативной схемы для её интегрирования.

Ключевые слова: гидромеханический узел, гидродинамический расчёт, жёсткие уравнения, схема Адамса, автоматический клапан.

Общая характеристика метода и основные определения. Статья продолжает цикл публикаций [1,2], в котором излагаются теоретические основы нового метода динамического анализа и расчёта сложных гидромеханических устройств. Апробация метода выполнялась на примерах гидродинамических расчётов дизельной топливной аппаратуры различных типов.

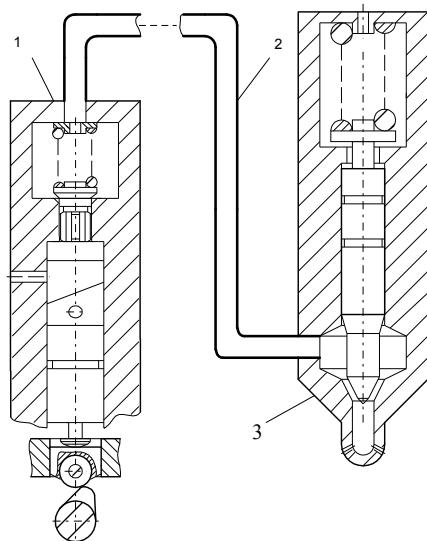


Рис.1 – Линия высокого давления: 1 – насос; 2 – трубопровод; 3 – форсунка.

как правило, топливо давления не имеет, но при организации гидравлического

© А. Л. Григорьев, Ю.Л. Геворкян, 2012

запирания иглы эта полость также заполнена топливом, сжатым под высоким давлением.

В некоторых конструкциях топливной аппаратуры используются дополнительные узлы [3], в других – существенно возрастает сложность гидравлической схемы насоса [4] или форсунки [5]. В этих конструкциях применяются сложные клапана ещё двух видов – дифференциальный проточный клапан (рис.2 а) и клапан – золотник (рис.2 б), причём между некоторыми полостями устанавливается по два клапана – *прямой* и *обратный*.

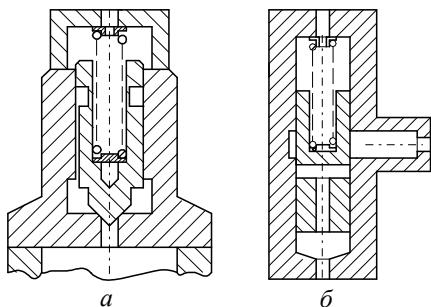


Рис.2 – Схемы сложных клапанов: а – дифференциального; б – золотникового.

нений узла в пользу *неявной схемы Адамса* дано в [2,6], там же исследована взаимосвязь между сходимостью метода и устойчивостью моделируемой системы.

Модификация этого метода, позволяющая с большей эффективностью проводить расчёт *проточных узлов*, описана в завершающей части публикации.

Уточним некоторые определения. Часть гидромеханической системы, состоящую из полостей, связанных между собой дроссельными отверстиями или клапанами, будем называть *узлом*. Данный узел связан с другими узлами системы при помощи *трубопроводов*. Так, топливная система классического типа (рис.3 а) состоит из двух узлов (насос и форсунка), связанных одним нагнетательным трубопроводом. В системе, оснащенной *модуляторами импульсов давления* [3], последовательно установлены три узла и два трубопровода (рис.3 б). У топ-

ливательного насоса (рис.3 в) имеется дополнительный выход для подачи топлива в форсунку. Разработка метода динамического расчёта таких систем актуальна не только для топливной аппаратуры дизелей. Описанный здесь метод пригоден для расчёта разветвлённых гидравлических систем любой сложности. Отличительные особенности метода указаны в аннотации. Использование матрично-векторных обозначений позволило придать ему универсальную форму. Обоснование сделанного в методе выбора расчётной схемы для интегрирования жёсткой системы уравнений

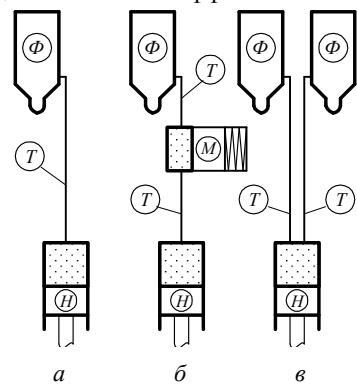


Рис.3 – Структурные схемы:
Н – насос; Ф – форсунка; Т – трубопровод; М – модулятор.

ливной аппаратуры [4] согласно принятому определению также три узла и два трубопровода, но здесь трубопроводы установлены параллельно и соединяют один насос с двумя форсунками (рис.3 в). Волны давления и скорости распространяются по трубопроводам с конечной скоростью (скоростью звука a), поэтому при динамическом расчёте системы изменение параметров любого её узла в пределах данного шага по времени не успевает оказать влияние на изменение параметров других узлов, и уравнения этих узлов могут интегрироваться независимо друг от друга.

Составим уравнения гидромеханического узла. Рассмотрим узел, состоящий из n полостей и m клапанов. Объём i -ой полости будем обозначать v_i , давление жидкости в ней – p_i , скорость и перемещение s -го клапана обозначим c_s и h_s , соответственно.

Площадь эффективного сечения канала, связывающего i -ую и j -ую полости, обозначим μf_{ij} ; часть площади поперечного сечения s -того клапана, на которую действует перепад давлений в полостях i и j , – $f_{ij}^{(s)}$.

Некоторые полости узла соединены с трубопроводами; площади поперечного сечения трубопроводов, связанных с i -ой полостью, будем обозначать f_{ik}^{mp} , где k – номер трубопровода. Если объём этой полости изменяется не только при перемещениях клапанов, но и за счёт движения плунжеров (рис.1), то соответствующую объёмную скорость движения обозначим q_i .

С учётом принятых обозначений уравнение объёмного баланса для i -той полости и уравнения движения s -того клапана примут вид:

$$\alpha v_i \frac{dp_i}{dt} = -\sum_j [\mu f_{ij} \cdot s(p_i - p_j) + \sum_s f_{ij}^{(s)} c_s] + \sum_k (f_{ik}^{mp} / (a\rho))(p_i - 2w_{ik}) + q_i(t), \quad (1)$$

$$m_s \frac{dc_s}{dt} = \sum_{i,j} f_{ij}^{(s)} (p_i - p_j) - k_s [c_s(t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} c_s(t - lT_s)] - F_{np.o}^{(s)}; \quad \frac{dh_s}{dt} = c_s(t), \quad (2)$$

где t – время; $s(\Delta p)$ – линейная скорость течения жидкости между полостями при перепаде давления между ними Δp ,

$$s(\Delta p) = \sqrt{(2/\rho) \cdot |\Delta p|} \cdot sign(\Delta p);$$

α, ρ – коэффициент сжимаемости и плотность жидкости; w_{ik} – величина отражённой волны давления [7], приходящей по k -тому трубопроводу в момент времени t ; m_s – масса клапана; k_s – коэффициент пропорциональности в формуле из [8] для определения силы пружины с учётом продольных колебаний её витков,

$$k_s = 0.5 \cdot z_s \cdot T_s;$$

z_s , $F_{np,o}^{(s)}$ – коэффициент жёсткости и усилие предварительной затяжки пружины клапана; T_s – период свободных колебаний этой пружины,

$$T_s = 2 \cdot \sqrt{m_{np}^{(s)} / z_s};$$

$m_{np}^{(s)}$ – масса движущихся витков пружины.

Некоторые из давлений p_j , используемые в правой части уравнений (1), (2), могут быть известными функциями времени либо константами и не относятся к динамическим параметрам узла.

Уравнения (1) становятся замкнутыми после добавления к ним известных формул [9], определяющих параметры жидкости a, α, ρ в зависимости от значения давления p_i , а также площади μf_{ij} и объёмы v_i в зависимости от перемещения клапанов и плунжеров.

Объединим динамические параметры p_i, c_i, h_i в векторы-столбцы $\vec{p}, \vec{c}, \vec{h}$ и перепишем систему уравнений (1), $i = 1, \dots, n$ и (2), $s = 1, \dots, m$ в матричной форме:

$$[V] \times d\vec{p} / dt = -\vec{Q}(\vec{h}, \vec{p}, t) - [FK] \times \vec{c} - [FT] \times \vec{p} + \vec{Q}_0(t); \quad (3)$$

$$[M] \times d\vec{c} / dt = [FK]^T \times \vec{p} - [Z] \times \vec{c} - \vec{F}_0(t); \quad d\vec{h} / dt = \vec{c}(t), \quad (4)$$

где $[V], [FT], [M], [Z]$ – диагональные матрицы размеров $[n \times n]$ и $[m \times m]$,

$$V_{ii} = \alpha(p_i) \cdot v_i; FT_{ii} = \sum_k f_{ik}^{mp} / (a\rho); M_{ss} = m_s; Z_{ss} = k_s \quad i = 1, \dots, n; s = 1, \dots, m;$$

$[FK]$ – прямоугольная матрица размера $[n \times m]$, составленная из площадей

$f_{ij}^{(s)}$ поперечного сечения клапанов; компоненты вектора \vec{Q} имеют вид

$$Q_i = \sum_j \mu f_{ij}(\vec{h}, t) \cdot s(p_i - p_j).$$

Перейдём к уравнениям в конечных разностях. Параметры жидкости a, α, ρ и объёмы полостей v_i за время одного шага интегрирования Δt изменяются незначительно и этим изменением можно пренебречь. Поэтому, считая все матричные коэффициенты системы (3), (4) постоянными, проинтегрируем её на промежутке времени $t \in [t_o, t_o + \Delta t]$, используя неявную консервативную схему, именуемую *интерполяционной формулой Адамса* [10].

Значения динамических параметров $\vec{p}(t), \vec{c}(t), \vec{h}(t)$, отвечающие началу и концу промежутка, будем обозначать соответственно строчными ($\vec{p}, \vec{c}, \vec{h}$) и прописными ($\vec{P}, \vec{C}, \vec{H}$) буквами. Тогда соотношения между известными и неизвестными величинами примут следующий вид:

$$[V] \times (\vec{P} - \vec{p}) = -\Delta t / 2 \cdot (\vec{Q}(\vec{h}, \vec{p}, t_0) + \vec{Q}(\vec{H}, \vec{P}, t_0 + \Delta t) + [FK] \times (\vec{C} + \vec{c}) + [FT] \times (\vec{P} + \vec{p}) - \vec{Q}(t_0) - \vec{Q}_0(t_0 + \Delta t)), \quad (5)$$

$$[M] \times (\vec{C} - \vec{c}) = \Delta t / 2 \cdot ([FK]^T \times (\vec{P} + \vec{p}) - [Z] \times (\vec{C} + \vec{c}) - \vec{F}_0(t_0) - F_0(t_0 + \Delta t)); \quad (6)$$

$$\vec{H} - \vec{h} = \Delta t / 2 \cdot (\vec{C} + \vec{c}).$$

Перепишем эти равенства так:

$$\vec{C} = \Phi_c(\vec{P}) = [[M] + \Delta t / 2 \cdot [Z]]^{-1} \times (([M] - \Delta t / 2 \cdot [Z]) \times \vec{c} + \Delta t / 2 \cdot ([FK]^T \times (\vec{P} + \vec{p}) + \vec{F}_0(t_0) + F_0(t_0 + \Delta t)));$$

$$\vec{H} = \Phi_h(\vec{C}) = \vec{h} + \Delta t / 2 \cdot (\vec{C} + \vec{c}); \vec{P} = \Phi_p(\vec{P}, \vec{C}, \vec{H}) = \vec{p} - \Delta t / 2 \cdot ([V] + \Delta t / 2 \cdot [FT])^{-1} \times (\vec{Q}(\vec{H}, \vec{P}, t_0 + \Delta t) + \vec{Q}(\vec{h}, \vec{p}, t_0) + [FK] \times (\vec{C} + \vec{c}) + [FT] \times \vec{p}).$$

Полученная система эквивалентна нелинейному векторному уравнению вида

$$\vec{P} = \Phi(\vec{P}) = \{\phi_1(P_1, \dots, P_n), \dots, \phi_n(P_1, \dots, P_n)\}, \quad (7)$$

где

$$\Phi(\vec{P}) = \Phi_p(\vec{P}, \Phi_c(\vec{P}), \Phi_h(\Phi_c(\vec{P}))).$$

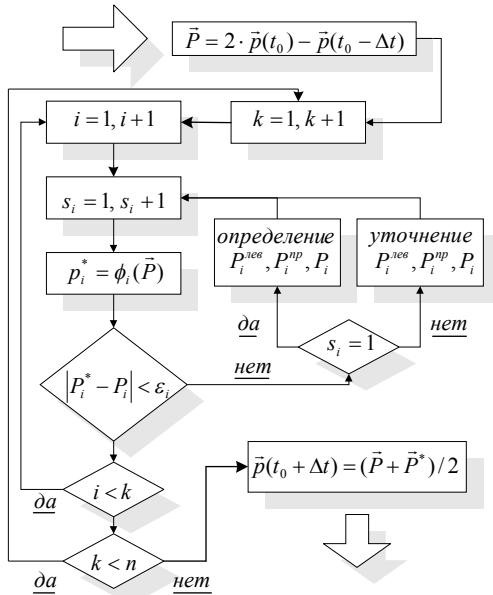


Рис.4 – Алгоритм метода интегрирования уравнений гидромеханического узла.

метод простой итерации или метод Ньютона [10]. Ниже будет показано, как

Функцию $\Phi(\vec{P})$ можно трактовать как *нелинейный оператор*, действующий в n -мерном линейном пространстве векторов \vec{P} . Тогда решение уравнения (7) является *неподвижной точкой* оператора.

Укажем метод решения конечно – разностных уравнений. Для выбора метода решения уравнения (7) нужно знать свойства функции $\Phi(\vec{P})$. К сожалению, поскольку

$$s(\Delta p) \sim \sqrt{|\Delta p|},$$

то частные производные этой функции неограниченны, и мы не можем использовать такие эффективные методы, как *метод Ньютона* [10]. Ниже будет показано, как

за счёт правильного выбора шага интегрирования Δt можно добиться того, что при увеличении компоненты P_k вектора давлений компонента ϕ_k этой функции будет уменьшаться, если при этом величины $P_i, i > k$ сохраняют постоянные значения P_i^0 , а остальные компоненты вектора \vec{P} удовлетворяют усечённому уравнению (7) такого вида:

$$\{P_1, \dots, P_{k-1}\} = \{\phi_1(P_1, \dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}^0, \dots, P_n^0), \dots, \phi_{k-1}(P_1, \dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}^0, \dots, P_n^0)\}. \quad (8)$$

Указанное свойство монотонности позволяет использовать для решения задачи пусть и менее эффективный, но абсолютно надёжный метод последовательного исключения неизвестных (рис.4). Ключевое положение в представленном алгоритме занимают блоки, в которых производится определение, а затем уточнение левой $P_i^{\text{лев}}$ и правой $P_i^{\text{прав}}$ границ интервала локализации искомого значения давления P_i .

При первичном определении интервала локализации используется свойство монотонного убывания функции $P_i^* = \phi_i(P_i)$ (рис.5).

Сокращение интервала локализации производится при использовании метода секущих (первые шесть итераций), а затем, если необходимой точности не достигнуто, применяется метод дихотомии.

Для устранения влияния погрешности округления чисел в ЭВМ величины ε_i , которыми задаётся точность определения давлений P_i , рекомендуется выбирать различающимися на порядок (в соответствии с формулой $\varepsilon_i = \varepsilon_1 / 10^{i-1}$, где $\varepsilon_1 = 10 \text{ Па}$).

Определим шаг интегрирования, обеспечивающий монотонность. Ясно, что в рассматриваемой задаче величины P_{k+1}, \dots, P_n , а значит и ϕ_k , являются функциями одного переменного P_k . Поэтому сформулированное выше свойство эквивалентно условию

$$d\phi_k / dP_k < 0. \quad (9)$$

Формулу для полной производной

$$d\phi_k / dP_k = \partial\phi_k / \partial P_k + \sum_{i=1}^{k-1} \partial\phi_k / \partial P_i \cdot dP_i / dP_k$$

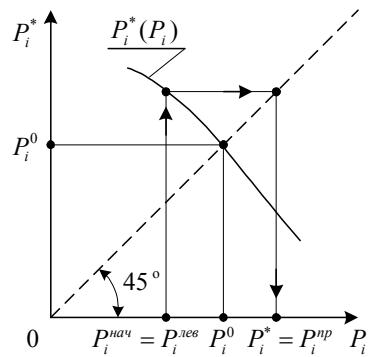


Рис.5 – Порядок определения интервала локализации корня (корень попадает в вилку).

с учётом векторного равенства (8) можно преобразовать к такому виду:

$$d\phi_k / dP_k = \partial\phi_k / \partial P_k + [\partial\phi_k / \partial P_1 \dots \partial\phi_{k-1} / \partial P_n] \times \\ \times [[E_{k-1}] - [J_{k-1}]]^{-1} \times [\partial\phi_1 / \partial P_k \dots \partial\phi_{k-1} / \partial P_k]^*,$$

где $[J_{k-1}]$ – матрица $\|\partial\phi_i / \partial P_j\|$ размера $[(k-1) \times (k-1)]$, которая является якобианом для преобразования усечённого набора координат $\{P_1, \dots, P_{k-1}\}$ по формулам (8); $[E_{k-1}]$ – единичная матрица того же размера.

Если в этом выражении использовать формулу для элементов обратной матрицы $[A]^{-1} = [A]^s / \det[A]$, где $[A]^s$ – союзная матрица, то условие (9) удаётся записать в виде следующего соотношения для определителей:

$$0 < \det[[E_{k-1}] - [J_{k-1}]] < \det[[E_k] - [J_k]], \quad (10)$$

то есть

- все такие определители должны быть положительны,
- с ростом k их величина должна возрастать.

Эти условия будут заведомо выполнены, если все главные миноры матрицы $[-J_n]$ неотрицательны, то есть

$$[-J_n]_{i_1, \dots, i_l}^{i_1, \dots, i_l} \geq 0 \quad \text{для всех наборов } \{i_1, \dots, i_l\}. \quad (11)$$

Заметим, что определитель матрицы $[J_n]$ является якобианом для преобразования координат вектора \vec{P} по формуле (7). Каждому главному минору этой матрицы соответствует некоторый главный минор матрицы

$$\tilde{S} = - \begin{bmatrix} ([V] + \Delta t / 2 \cdot [FT])^{-1} & 0 \\ 0 & ([M] + \Delta t / 2 \cdot [Z])^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [Q] & [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH] \\ [-FK]^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

получающейся в результате линеаризации системы уравнений (5),(6).

Матрицы $[Q]$ и $[FH]$ составляются из частных производных вектор - функции $\tilde{Q}(\vec{H}, \vec{P})$:

$$Q_{ij} = \partial Q_i / \partial P_j = \mu f_{ij}(\vec{H}) / \sqrt{(2 \cdot \rho \cdot |P_i - P_j|)}; \\ FH_{ik} = \partial Q_i / \partial h_k = \sum_j \partial \mu f(h_1, \dots, h_m) / \partial h_k \cdot s(P_i - P_j),$$

причём матрица $[Q]$ является положительно определённой. Таким же свойством обладают диагональные матрицы $[FT]$ и $[Z]$.

Первый сомножитель в формуле (12) представляет собой диагональную положительно определенную матрицу и на знак миноров не влияет. Поэтому условие (11) оказывается эквивалентным требованию *неотрицательности*

всех главных миноров матрицы

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} [Q] & [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH] \\ -[FK]^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{то есть} \quad [\bar{S}]_{i_1 \dots i_l}^{i_1 \dots i_l} \geq 0. \quad (13)$$

Если блок $[FH] = 0$, то любой главный минор матрицы \bar{S} представляет собой определитель вида

$$\begin{vmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ -[A_{12}]^T & [A_{22}] \end{vmatrix}$$

и он неотрицателен, поскольку его диагональные блоки $[A_{11}], [A_{22}]$ являются положительно определёнными матрицами. Рассматриваемый здесь частный случай имеет место, если площади μf_{ij} всех эффективных проходных сечений не зависят от перемещений клапанов. Такой случай на практике встречается редко. Однако этим результатом всё-таки можно воспользоваться и предложить другой, отличный от представленного на рис.4 алгоритм, при котором параметры движения клапанов определяются во внешнем блоке, для чего, как это сделано в [9] для расчёта форсунки, применяется метод простой итерации:

$$\bar{H}_{i+1} = \Phi(\bar{H}_i).$$

При таком решении условие монотонности соблюдается автоматически, но шаг интегрирования должен быть достаточно мелким для ограничения производных функции Φ . Указанная модернизация алгоритма актуальна при расчёте узла, содержащего параллельно работающие сложные клапана.

В общем случае блок $[FH] \neq 0$, и для выполнения условия (13) матрица \bar{S} должна удовлетворять дополнительным требованиям. Детальное изучение структуры диагональных блоков этой матрицы показало, что если обнулить эти блоки и потребовать выполнения аналогичных условий

$$[\bar{S}]_{i_1 \dots i_l}^{i_1 \dots i_l} \geq 0 \quad (14)$$

для получаемой при этом матрицы

$$\breve{S} = \begin{bmatrix} 0 & [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH] \\ -[FK]^T & 0 \end{bmatrix},$$

то таким же условиям будет удовлетворять и матрица \bar{S} .

Теорема (достаточное условие монотонности алгоритма). Условия (14) будут выполнены, если все одинаковые миноры матриц

$$[FK] \quad u \quad [FKH] = [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH]$$

принимают значения одинаковых знаков, то есть

$$[FK]_{i_1, \dots, i_l}^{j_1, \dots, j_l} \cdot [FKH]_{i_1, \dots, i_l}^{j_1, \dots, j_l} \geq 0 \quad \text{для всех наборов } \{i_1, \dots, i_l\}, \{j_1, \dots, j_l\}. \quad (15)$$

Доказательство теоремы использует формулы Бине – Коши и методы сворачивания определителя блочной матрицы, приведенные, напр., в [11].

Вернёмся от математики к гидромеханике. Если система содержит только простые клапана, то матрицы $[FK]$ и $[FH]$ (а также матрицы $[FK]$, $[FKH]$) имеют пропорциональные столбцы, а условия (15) оказываются эквивалентны системе неравенств

$$f_{ij}^{(k)} \cdot (f_{ij}^{(k)} + \partial \mu f_{ij} / \partial h_k \cdot s(P_i - P_j) \cdot (\Delta t / 2)) \geq 0 \quad \text{для всех } k \text{ и всех } i \neq j. \quad (16)$$

Так для насоса (рис.1) имеем:

$$[FK] = f_{kl} \cdot [1 \ -1]^T; \quad [FH] = d \mu f_{kl} / dh_{kl} \cdot s(\Delta P) \cdot [1 \ -1]^T,$$

где h_{kl} , f_{kl} , μf_{kl} – подъём и площади поперечного, проходного сечений нагнетательного клапана; $\Delta P = P_u - P_w$ – перепад давлений между полостями топливного насоса.

Для простых клапанов производные $\partial \mu f_{ij} / \partial h_k$, как правило, неотрицательные. Поэтому неравенства (16) ограничивают выбор шага интегрирования Δt только на тех интервалах времени, когда имеют место отрицательный перепад давлений и обратное течение жидкости через клапан. При этом предельно допустимый шаг интегрирования находится по формуле

$$\Delta t_m = 2 \cdot \min_k \left\{ -f_{ij}^{(k)} / (\partial \mu f_{ij} / \partial h_k \cdot s(P_i - P_j)) \right\}. \quad (17)$$

На других промежутках времени условие монотонности соблюдается при любом шаге интегрирования, и здесь величина шага определяется только требованиями точности расчёта.

Для насоса при малых проходных сечениях клапана выполнено соотношение

$$d \mu f_{kl} / dh_{kl} \approx \mu f_{kl} / (h_{kl} - h_{pas}),$$

где h_{pas} – его разгружающий ход, и условие (17) получает интересную геометрическую интерпретацию. Обозначим:

$$Q_{kl} = f_{kl} \cdot (h_{kl} - h_{pas}); \quad Q_T = \mu f_{kl} \cdot s(-\Delta P) \cdot \Delta t,$$

тогда условие (17) эквивалентно неравенству $Q_{kl} \geq Q_T / 2$, то есть *объём топлива, вытесненный клапаном с момента его открытия, обязан, по крайней мере, в два раза превосходить объём топлива, проходящий через этот клапан*.

пан в направлении, противоположном подъёму, за промежуток времени Δt .

Такой же порядок выбора шага сохраняется для узлов, содержащих не более одного сложного клапана (например, для форсунки, рис.1). В том случае, когда узел содержит два или более сложных клапана, условие (16) остаётся необходимым, но может оказаться недостаточным. Теперь кроме миноров первого порядка, используемых в условиях (16), приходится анализировать миноры второго или более старшего порядка (пример см. ниже); соответствующий анализ нами был выполнен, но результаты здесь приводить не имеет смысла, поскольку такие узлы, как правило, не применяются. Исключение из этого правила составляют узлы, содержащие параллельно работающие сложные клапана с близкими параметрами (например, насос с двумя одинаковыми дифференциальными клапанами). При расчёте таких узлов эти клапаны обычно заменяют одним клапаном суммарного проходного сечения. Однако если анализируется влияние технологических погрешностей, такая замена становится невозможной. В этом случае неравенства (16) приходится дополнять условиями вида:

$$\begin{aligned} \left| f_{ij}^{(1)} f_{ij}^{(2)} \right| \cdot \left| f_{ij}^{(1)} + \partial \mu f_{ij} / \partial h_1 s(P_i - P_j) \cdot \Delta t / 2 \right. & f_{ij}^{(2)} + \partial \mu f_{ij} / \partial h_2 s(P_i - P_j) \cdot \Delta t / 2 \left. \right| \geq 0, \\ \left| f_{ik}^{(1)} f_{ik}^{(2)} \right| \cdot \left| f_{ik}^{(1)} + \partial \mu f_{ik} / \partial h_1 s(P_i - P_k) \cdot \Delta t / 2 \right. & f_{ik}^{(2)} + \partial \mu f_{ik} / \partial h_2 s(P_i - P_k) \cdot \Delta t / 2 \left. \right| \end{aligned}$$

где h_1, h_2 – перемещения сложных клапанов; i, j, k – номера полостей, между которыми они установлены.

К сожалению, в этом неравенстве первый определитель близок к нулю, а второй может изменить свой знак при очень малом значении шага Δt , что делает метод расчёта малоэффективным. Поэтому при расчёте таких систем определение кинематических параметров одного из клапанов рекомендуется, как указывалось выше, проводить во внешнем блоке при использовании метода простой итерации.

Особенности работы метода проиллюстрируем на

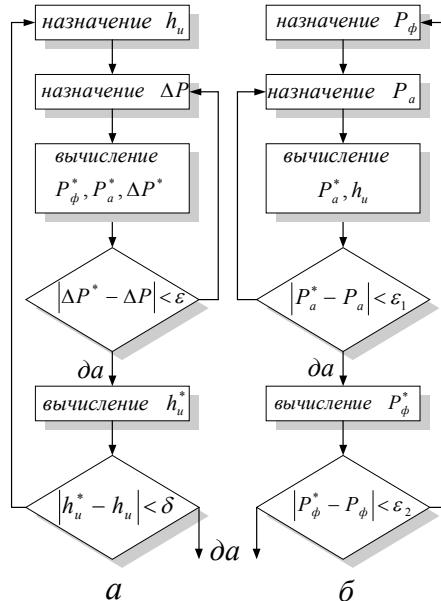


Рис.6 – Расчёт форсунки по разностному (а) и универсальному (б) алгоритму.

примере расчёта форсунки дизеля (рис.1). Состояние узла описывается 4-мя динамическими параметрами: давлениями P_ϕ и P_a в кармане и колодце распылителя, а также перемещением h_u и скоростью c_u иглы.

При расчёте форсунки по разностному методу [9] организуется два вложенных один в другой итерационных цикла (рис.6 *a*): внешний по h_u и внутренний по перепаду давления $\Delta P = P_\phi - P_a$, причём подъём иглы определяется методом простой итерации. При использовании нового метода (рис.6 *б*) оба цикла подбирают значения давлений, для чего применяется более эффективный расчётный метод – метод секущих.

Игла является сложным клапаном, и здесь столбцы матриц $[FK]$ и $[FH]$ не пропорциональные:

$$[FK] = [(-f_u + f_3) \quad (-f_3)]^T; \quad [FH] = d\mu f_3 / dh_u \cdot s(\Delta P) \cdot [1 \quad -1]^T,$$

где f_u, f_3 – площади поперечного сечения иглы и её запорного конуса; μf_3 – эффективная площадь проходного сечения по запорному конусу иглы,

$$\mu f_3 \approx (\pi/3) \cdot d_3 \cdot h_u; \quad (18)$$

d_3 – диаметр запорного конуса.

Величина максимально допустимого шага, гарантирующего сходимость итераций, определяется с учётом равенств (17), (18) приближённой формулой

$$\Delta t_m \approx 1.5 \cdot d_3 / \sqrt{(2/\rho) \cdot P_{\phi,o}},$$

где $P_{\phi,o}$ – давление начала подъёма иглы форсунки. Значения этого шага составляют обычно $0.02 \dots 0.03 \text{ мс}$ и превышают используемый при расчёте форсунки шаг Δt в два и более раз.

Модели проточных узлов. Насос (рис.1) моделируется уравнениями

$$\alpha V_H \frac{dp_H}{dt} = f_\Pi c_\Pi(t) - \mu f_{o,e}(t) s(p_H - p_{o,e}) - f_k c_k - \mu f_k(h_k) s(p_H - p_{III});$$

$$\alpha V_{III} \frac{dp_{III}}{dt} = f_k c_k + \mu f_k(h_k) s(p_H - p_{III}) - (f_T / (a\rho)) (p_{III} - p_{ocm} - 2 \cdot w(t));$$

$$m_k \frac{dc_k}{dt} = f_k (p_H - p_{III} - p_{k,o}) - z_k T_{np,k} [c_k(t)/2 + \sum_{k=1,2,\dots} c_k (t - k T_{np,k})]; \quad \frac{dh_k}{dt} = c_k,$$

где p_H, p_{III} – давления в плунжерной и штуцерной полостях; V_H, V_{III} – объёмы полостей; f_Π, c_Π – площадь и скорость плунжера; $f_T, f_k, \mu f_k$ – площади поперечного сечения трубопровода и клапана, проходного сечения клапана; c_k, h_k – скорость и перемещение клапана; $m_k, p_{k,o}, z_k, T_{np,k}$ – масса кла-

пана, давление начала его подъёма, коэффициент жёсткости и период свободных колебаний пружины; $\mu f_{o.e}$ – эффективная проходная площадь дозирующих окон; $p_{o.e}, p_{osm}$ – давление за дозирующими окнами и начальное давление в трубопроводе; w – волна давления, отраженная от форсунки.

Если на шаге интегрирования задать величину среднего перепада давлений

$$\Delta P = 0.5(p_H + P_H) - 0.5(p_{\text{ш}} + P_{\text{ш}}),$$

то остальные неизвестные величины определяются при решении линейных или квадратных уравнений. Тем самым получим новое значение перепада ΔP^* , которое, вообще говоря, не совпадет с перепадом ΔP , а будет связано с ним непрерывной зависимостью вида

$$\Delta P^* = \psi(\Delta P),$$

причём функция $\psi(\Delta P)$, что очевидно, является монотонно убывающей.

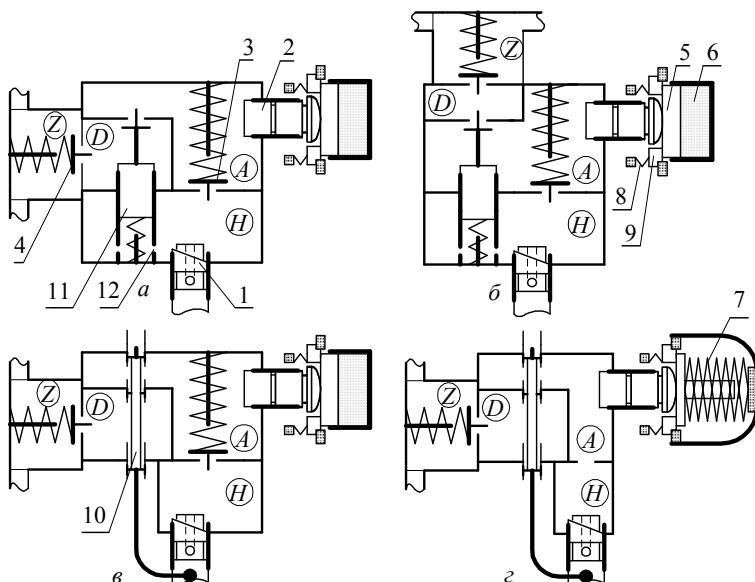


Рис. 7 – Схемы насосов с выпуском через дифференциальный клапан (a, б) или золотник (в, г) : H, Z – плунжерная и штуцерная полости; A, D – полости аккумулятора и дифференциального клапана; 1,2 – дозирующий и нагнетающий плунжера; 3,4 – разделительный и нагнетательный клапана; 5 – газовый поршень; 6 – сжатый воздух; 7 – тарельчатая пружина; 8 – амортизирующие пластины; 9 – шайба амортизатора; 10 – золотник; 11 – сложный клапан; 12 – его дроссель.

Указанное свойство монотонности положено в основу алгоритма *разностного метода*, описанного в [9].

В свободнопоршневом дизельном двигателе (СПД), как правило, используется топливная аппаратура аккумулирующего типа (рис.7). В топливном насосе устанавливается два плунжера – дозирующий, приводимый в движение от шестерни синхронизации поршней, и нагнетающий, имеющий автономный привод от тарельчатой пружины или газового поршня. В работах [4,12] описаны методы гидродинамического расчёта для двух насосов такого типа. К сожалению, указанные методы пригодны только для этих насосов и не могут использоваться для анализа вновь проектируемых образцов, имеющих усложнённую гидравлическую схему.

Универсальная схема насоса приведена на рис.8. Математическая модель, составленная по этой схеме, включает несколько групп уравнений.

Уравнения неразрывности для полостей H , A , D и Z , соответственно:

$$\alpha V_h dp_h / dt = f_n c_n - f_p c_p + (f_{ad} + f_{dd}) c_d - \mu f_{o.b} s(p_h - p_e) - \mu f_p s(p_h - p_{ak}) - Q_{HD} (Q_{HA});$$

$$\alpha V_{ak} dp_{ak} / dt = f_p c_p - f_{ak} c_{ak} - f_{ad} c_d - \mu f_{a.d} s(p_{ak} - p_d) + \mu f_p s(p_h - p_{ak}) + Q_{HA} - Q_{AB};$$

$$\alpha V_d dp_d / dt = -f_{dd} c_d - f_k c_k + \mu f_{ad} s(p_{ak} - p_d) - \mu f_k s(p_d - p_z) + Q_{HD} - Q_{DB};$$

$$\alpha V_z dp_z / dt = f_k c_k + \mu f_k s(p_d - p_z) - i_\phi \cdot f_m / (a\rho) \cdot (p_z - p_{ocm} - 2 \cdot w(t)),$$

где $p_i, V_i, i \in \{h, ak, d, z\}$ – давления и объёмы в полостях; $f_m, f_n, f_{ak}, f_p, f_k, f_{ad}, f_{dd}$ – площади поперечного сечения трубопровода, дозирующего и

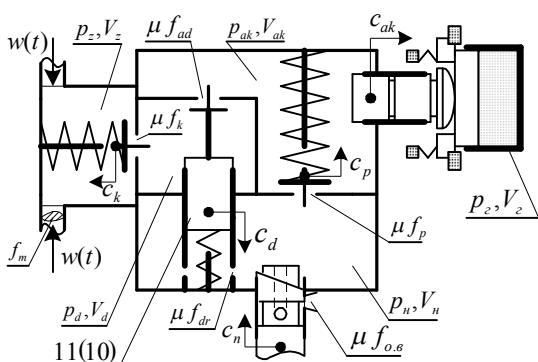


Рис.8 – Универсальная расчётная схема.

нагнетающего плунжеров, перепускного и нагнетательного клапанов, сложного клапана по запорному конусу и его дифференциальной площадке (для рис.7 б – наоборот); μf_p , μf_k , μf_{ad} – эффективные проходные площади для перепускного, нагнетательного и сложного клапанов; Q_{HD} , Q_{HA} , Q_{DB} , Q_{AB} – объёмные скорости перетекания

через прецизионные зазоры; i_ϕ – число трубопроводов (здесь $i_\phi = 2$, см. рис.2 в).

Уравнения движения нагнетательного, перепускного и дифференциального клапана, соответственно:

$$m_k \frac{dc_k}{dt} = f_k(p_d - p_z) - F_{np,k}; \quad dh_k / dt = c_k; \quad 0 \leq h_k \leq h_{k,\max};$$

$$m_p \frac{dc_p}{dt} = f_p(p_h - p_{ak}) - F_{np,p}; \quad dh_p / dt = c_p; \quad 0 \leq h_p \leq h_{p,\max};$$

$$m_d \frac{dc_d}{dt} = f_{ad}(p_{ak} - p_h) + f_{dd}(p_d - p_h) - k_d |c_d| c_d - F_{np,d}; \quad \frac{dh_d}{dt} = c_d; \quad 0 \leq h_d \leq h_{d,\max},$$

где m_k, m_p, m_d – массы клапанов; $h_k, h_{k,\max}, h_p, h_{p,\max}, h_d, h_{d,\max}$ – их текущие и максимальные перемещения (до упоров); $F_{np,k}, F_{np,p}, F_{np,d}$ – усилия их пружин; k_d – коэффициент гидравлического сопротивления дросселя,

$$k_d = (\rho/2) \cdot (f_{ad} + f_{dd})^2 / \mu f_{dr},$$

μf_{dr} – эффективная площадь дросселя дифференциального клапана.

Уравнения движения нагнетающего плунжера:

$$\text{при } h_{ak} \geq 0 - (m_{ak} + m_{nop}) \frac{dc_{ak}}{dt} = f_{ak} p_{ak} - F_{ak}; \quad dh_{ak} / dt = c_{ak};$$

$$\text{при } h_{ak} < 0 - (m_{ak} + m_{nop} + m_w) \frac{dc_{ak}}{dt} = f_{ak} p_{ak} - F_{ak} + F_{np,am}; \quad dh_{ak} / dt = c_{ak},$$

где h_{ak} – перемещение плунжера; m_{ak}, m_{nop} – массы плунжера и газового поршня (или подвижной опоры для привода от тарельчатой пружины); m_w – масса шайбы амортизатора; F_{ak} – сила реакции аккумулятора, для привода от газового поршня,

$$F_{ak} = f_{nop} \cdot p_e \cdot (V_e / (V_e - f_{nop} \cdot h_{ak}))^k,$$

f_{nop} – площадь поршня; p_e, V_e – начальные значения давления и объёма газа;

$k = 1.4$ – показатель адиабаты; $F_{np,am}$ – сила реакции амортизатора.

При составлении уравнений использована модель неупругого удара поршня (или подвижной опоры пружины) по шайбе амортизатора. Анализ условий движения плунжера показал, что его отрыв от деталей привода, возникающий в момент удара, ликвидируется практически мгновенно, и поэтому им допустимо пренебречь. Следовательно, скорость движения плунжера изменяется в момент такого удара скачкообразно в соответствии с законом сохранения импульса, то есть, если $h_{ak}(t_o) = 0; c_{ak}(t_o) < 0$, то

$$c_{ak}(t_o + 0) = c_{ak}(t_o) \cdot (m_{ak} + m_{nop}) / (m_{ak} + m_{nop} + m_w).$$

При отрыве поршня от амортизатора скорость плунжера остаётся непрерывной. Механическая энергия, накопленная в пластинах амортизатора, к моменту очередного удара поршня успевает рассеяться. Для моделирования изменения реакции амортизатора используется квазистатическая формула

$$F_{np.am} = z_{am} \cdot (h_{am.o} - h_{ak}),$$

где z_{am} , $h_{am.o}$ – его коэффициент жёсткости и предварительная деформация.

Модернизированный разностный алгоритм для насоса СПД. Если 12-ть динамических параметров узла считать компонентами некоторого вектора $\vec{X}(t)$, то эти уравнения можно записать в следующем компактном виде:

$$d\vec{X}/dt = \Phi(\vec{X}, t). \quad (19)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (19) является жёсткой (то есть соответствующая ей линеаризованная система имеет очень большие, по модулю, характеристические числа [1,2]). Поэтому для интегрирования этих уравнений была использована неявная расчётная схема, имеющая *интерполяционной формулой Адамса*:

$$\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t) = (\Delta t / 2) \cdot [\Phi(\vec{X}(t), t) + \Phi(\vec{X}(t + \Delta t), t + \Delta t)], \quad (20)$$

где Δt – шаг по времени; $t, t + \Delta t$ – начало и конец расчётного промежутка.

Вектор-функция $\Phi(\vec{X})$ содержит нелинейные компоненты, поэтому для нахождения из системы (20) искомого вектора $\vec{X}(t + \Delta t)$ пришлось разрабатывать специальный метод последовательного исключения неизвестных.

Из анализа приведенных уравнений следует, что если задать величины ΔP_p , ΔP_k и ΔP_d перепадов давлений на клапанах, то можно определить скорости и перемещения этих клапанов, а затем скорость и перемещение нагнетающего плунжера и давления во всех полостях насоса.

В результате получаем новые величины перепадов давлений ΔP_p^* , ΔP_k^* и ΔP_d^* , которые, вообще говоря, будут отличаться от заданных первоначально, образуя некоторые функции от них, например,

$$\Delta P_p^* = \Phi_1(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d), \quad \Delta P_k^* = \Phi_2(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d), \text{ и т.д.}$$

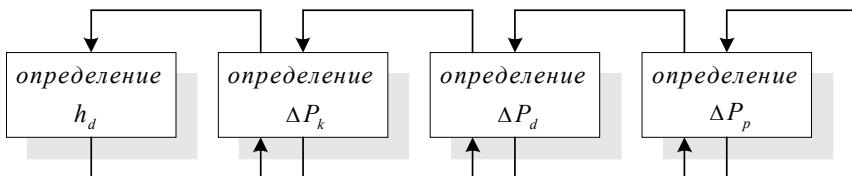


Рис. 9 – Принципиальная схема алгоритма расчёта насоса СПД.

Ясно, что искомому решению отвечает совпадение этих величин. Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$\Delta P_p = \Phi_1(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d); \Delta P_k = \Phi_2(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d); \Delta P_d = \Phi_3(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d).$$

Анализ уравнений этой системы показал, что в данном случае для обеспечения условия монотонности к этим трём неизвестным необходимо добавить четвёртое – перемещение дифференциального клапана h_d . Алгоритм решения полученной системы уравнений

$$\{ h_d = \Phi_0(h_d, \Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d); \dots; \Delta P_d = \Phi_3(h_d, \Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d) \}$$

содержит четыре вложенных цикла (рис. 9), а не один, как для расчёта насоса стандартного типа. Если учесть, что на каждом цикле для достижения требуемой точности используется в среднем 6 итераций, то такое увеличение числа циклов должно негативно сказаться на эффективности предлагаемого метода.

Действительно, при таких условиях продолжительность одного расчёта должна была увеличиваться в 200 раз, однако, как показала практика, столь большого увеличения продолжительности расчёта не происходит. Поскольку на большей части работы насоса отдельные полости (группы полостей) разобщены, а дифференциальный клапан – неподвижен. Поэтому итерации в основном проводятся по одному или двум, реже – по трём циклам, и совсем редко приходится использовать все четыре цикла.

Основные практические результаты работы. Алгоритм модернизированного разностного метода был впервые использован в ходе выполнения опытно – конструкторских работ по созданию и доводке топливной аппаратуры СПД; подробный отчёт дан в [13]. Алгоритмы универсального и разностного методов гидродинамического расчёта клапанных узлов после некоторых изменений, описанных в [14], применены при разработке дизельной топливной аппаратуры с электронным управлением впрыскивания (рис. 10).

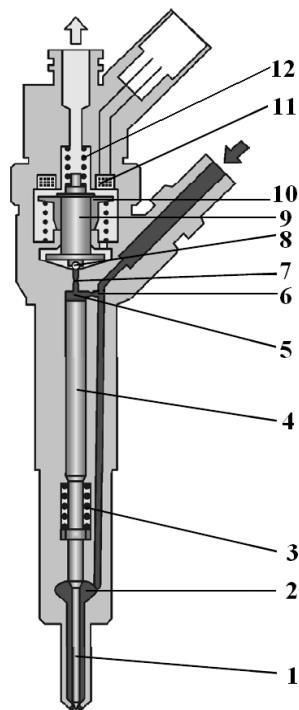


Рис.10 – Электрогидравлическая форсунка: 1 – игла, 2 – карман распылителя, 3 – пружина иглы, 4 – мультиплликатор, 5 – камера управления, 6,7 – впускной и выпускной жиклеры, 8 – шариковый клапан, 9 – стойка клапана, 10 – якорь, 11 – электромагнит, 12 – пружина клапана.

Список литературы: 1. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов // Вестник НТУ «ХПИ» – Харьков, 2012.– Вып.2. – С.74-87. 2. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Абсолютная и относительная динамическая устойчивость гидромеханических узлов // там же – С.88-106. 3. Григорьев А.Л., Врублевский А.Н., Литвин С.Н. и др. Использование модулятора импульсов давления для интенсификации вспышки запальной порции дизельного топлива в цилиндры газодизеля // Вестник ХГПУ – Вып.85, 1999.– С.3-12. 4. Карась М.Л. Разработка и исследование топливоподающей аппаратуры для высокочастотного свободнопоршневого двигателя. - Автореферат дис ... канд. техн. наук – Харьков, 1992. – 19 с. 5. Розенблит Г.Б., Григорьев А.Л., Зонов В.Д. Анализ причин и определение условий, обеспечивающих герметичность плоского дифференциального клапана форсунки // Двигатели внутреннего сгорания: Вестник ХГПУ – Вып.58, 1999. – С.82-91. 6. Григорьев А.Л. Выбор метода интегрирования уравнений гидромеханического узла дизельной топливной аппаратуры // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ "ХПИ",2001. – Вып.2. - С.73-87. 7. Григорьев А.Л. Уточнённый метод учёта гидравлического сопротивления трубопровода при гидродинамических расчётах топливной аппаратуры дизелей // Двигатели внутреннего сгорания: Вестник ХГПУ. – Вып.58, 1999. – С. 58-68. 8. Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л. О связи силы пружины с законом её деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа. – Вып. 39, 1985. – С.7-22. 9. Фомин Ю.Я. Гидродинамический расчёт топливных систем дизелей с использованием ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1973. – 144 с. 10. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1973. – 631 с. 11. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Учебник. – Харьков: НТУ"ХПИ", 2002.–542 с. 12. Григорьев А.Л. Особенности гидродинамического расчёта топливного насоса высокого давления с подпружиненным аккумулирующим плунжером // Вестник ХГПУ. – Харьков. – Вып. 68, 1999 – С. 3-10. 13. Григорьев А.Л., Хесин А.Я. Оптимизация параметров аккумулирующей топливной аппаратуры с пружинным приводом плунжера // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 2000. – Вып.89. – С.97-104. 14. Врублевский А.Н., Григорьев А.Л., Грицок А.В., и др. Особенности математического моделирования гидромеханических процессов электрогидравлической форсунки // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков, 2007.– №1. – С.44-52.

Поступила в редколлегию 25.10.2012

УДК 539.1

Алгоритмы интегрирования жестких уравнений клапанных гидромеханических узлов / А.Л. Григорьев, Ю.Л. Геворкян // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в технології та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.39–55. – Бібліогр.: 14 назв.

Описаний універсальний метод динамічного розрахунку гідромеханічного вузла, оснащено-го автоматичними клапанами різних типів. Особливостями методу є використання матричних по-значень для запису жорсткої системи диференційних рівнянь гідромеханіки та неявної консерва-тивної схеми для її інтегрування.

Ключові слова: гідромеханічний вузол, гідродинамічний розрахунок, жорсткі рівняння, схема Адамса, автоматичний клапан.

Described a generic method of dynamic analysis of hydromechanical unit, equipped with automatic valves of different types. Features of the method are to use a matrix notation for writing a rigid system of differential equations of hydrodynamics and implicit conservative scheme for its integration.

Key words: hydromechanical unit, hydrodynamic calculation, hard equation scheme Adams, automatic valve.

В.О. ДУБІНІН, асп., НТУ «ХПІ»;
О.М. ДУБІНІНА, канд. техн. наук, НТУ «ХПІ»

АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ПРОГНОЗУВАННЯ ПОПИТУ НА ТОВАРИ МАСОВОГО СПОЖИВАННЯ В ЛОГІСТИЧНІЙ СИСТЕМІ ТОРГОВОГО ПІДПРИЄМСТВА

Проаналізовано проблеми прогнозування попиту. Проведено розрахунки точності прогнозування на різних моделях. Зроблені висновки про багатофакторність впливу на процес отримання задовільних прогнозів в логістичній системі торгового підприємства.

Ключові слова: моделі прогнозування, ефективність, оперативність, оцінка засобів.

Вступ. Прогноз є джерелом інформаційних потоків, що живлять систему планування і координації в логістиці.

Розглянемо прогноз, як передбачення вартісного об'єму або кількості одиниць продукту, який буде відвантажено або реалізовано. Прогнозувати можна в натуральних або грошових одиницях вимірювання, а об'єктом прогнозу може бути конкретний продукт або споживач, або деяка група продуктів і/або споживачів [2]. **Проблема** наукового дослідження полягає в якості прогнозу, яка задовільняє суб'єкт ринкових відносин.

Актуальність є у тому, що у сучасному світі споживання треба якість прогнозу розглядати через призму розуміння процесу споживання в конкретній предметній області.

Обґрунтування необхідності прогнозування. Для ефективного планування і координації виробничих процесів потрібні точні прогнози. Прогнозування підвищує ефективність логістики, оскільки створює можливості для обміну інформацією, а не запасами. Прогноз логістичних потреб диктує структуру розподілу продукції між розподільними центрами, базами оптової торгівлі і, в ще більшому ступені, роздрібними магазинами. Для інтеграції логістичного ланцюга потрібно, щоб планування і координація всіх видів діяльності здійснювалися на основі єдиного прогнозу [2, 9].

Оскільки завдання прогнозування – передбачити просторові, асортиментні і часові параметри попиту для планування на їх основі логістичної діяльності, то при складанні такого інтегрованого прогнозу слід враховувати всі можливі джерела і вірогідних користувачів прогнозної інформації [2].

При вивчені прийомів прогнозування [1, 3, 5, 6, 8, 10] на підставі досвіду діяльності великого числа компаній, найбільш часто згадуваними причинами, що обґрунтують необхідність прогнозування в логістиці, називають

наступні:

- підвищення ступеня задоволення споживачів;
- скорочення випадків виникнення дефіциту;
- ефективніша диспетчеризація; зниження розміру страхового запасу;
- зниження витрат, що винikли в результаті застарілості продукції; досконаліше управління відвантаженням;
- досконаліше ціноутворення і управління просуванням продукції;
- в ході переговорів з постачальниками отримання кращих часових параметрів постачань;
- ухвалення рішень по ціноутворенню на основі повнішої інформації.

Важливість прогнозування попиту. Прогнозування попиту відноситься до ключових видів логістичної діяльності, що здійснюються в ході переміщення продукції від місця її виготовлення до місця її споживання, і відповідно впливає на загальний логістичний процес.

Загалом кажучи, для всіх основних напрямів діяльності компанії (маркетингу, виробництва і логістики) необхідно точно знати скільки буде потрібно продукції. Прогнози майбутнього попиту розглядаються як стратегії просування продукції, ціноутворення, а також розподілення працівників, зайнятих у продажах. Саме на основі прогнозу продажів складаються графіки виробництва продукції, вибираються стратегії закупівель і поглинань інших структур, а також ухваляються рішення відносно запасів на підприємствах.

Прогнози попиту стосовно логістичного менеджменту не тільки дозволяють встановити, скільки кожного продукту, що випускається компанією, потрібно буде доставити на обслуговувані нею різні ринки, але також вимагають від логістичних менеджерів знань про те, де виникає попит, щоб доставляти або зберігати потрібну кількість продукту для кожного ринку. Точні оцінки майбутнього попиту дозволяють менеджерам краще розподіляти ресурси (складати бюджети) по видах діяльності, пов'язаних з обслуговуванням цього попиту.

Оскільки розподіляти ресурси між видами логістичної діяльності, не знаючи потреб в товарах і послугах, дуже важко, рішення, що приймаються в умовах невизначеності, ніяк не можуть бути оптимальними. Тому організації неминуче займаються прогнозуванням попиту і доводять отримані результати до маркетингових, виробничих і логістичних підрозділів.

На сьогоднішній день завдання прогнозування попиту стоїть на стільки гостро, що для компаній питання полягає не в тому, потрібно або не потрібно займатися прогнозуванням попиту, а в тому, як правильно організувати цей процес і отримати на виході такі прогнози, що задовольняють їх потреби [2, 7].

Проблеми прогнозування попиту. Можна виділити наступні проблеми

в прогнозуванні попиту. Це неправильний підхід до організації прогнозування попиту, відсутність інформаційної прозорості і неузгодженість дій різних відділів. Також проблемою є доступність інформації про зміни попиту для постачальників і виробників товарів.

Під *неправильним підходом* розуміється ситуація, коли в компанії прогнозують можливість постачання товарів або послуг, а не реальний попит. На початку прогнозного циклу важливо створити прогнози, які не обмежені спроможністю постачань. Прогнозування, що базується на історії постачань, веде до того, що компанії відтворюють свої помилки, і не задовольняють купівельний попит. Прогнозування реального попиту дозволяє знайти вузькі місця і оптимізувати процеси.

Проблема *відсутності інформаційної прозорості* обумовлена розрізненістю інформаційних ресурсів підприємства. Громіздкі неавтоматизовані процеси і таблиці призводять до величезного обсягу негнучких, фрагментарних систем планування. Системи із незв'язаною інформацією, що погано інтегруються між собою, ведуть до розбіжностей, через що неможливе створення зв'язаних єдиних планів.

Ще одна проблема в прогнозуванні попиту випливає з того, що з одного боку, всі торгівельні підприємства стикаються із однаковими задачами: потрібно відстежити історію продажів товару, а потім, на її основі, за допомогою методів статистичного аналізу і експертних коректувань, побудувати прогноз продажів. Проте, з іншого боку компанії різних секторів стикаються зі своїми, досить специфічними проблемами. Адже при прогнозуванні попиту враховуються: життєвий цикл продукту, тип оборотності товару, історія продажів, стратегія дистрибуції, прогноз окремого товару або товарної групи. І, відповідно, прогнозування попиту на різні категорії товарів носить достатньо специфічний характер [7].

Наведені вище аспекти призводять до однієї з найважливіших проблем – необхідності чіткої, цілеспрямованої та адекватної бізнес процесам постановки задачі прогнозування попиту, з визначенням пріоритетів в показниках ефективності процесу прогнозування.

Правильна постановка задачі буде впливати на вибір техніки прогнозування, тобто того математичного апарату, за допомогою якого вихідні кількісні параметри перетворяться в прогнозні оцінки. Що відповідно впливає на потреби в часі вирішення задачі, ресурсах (технічних, програмних) що потребуються, кваліфікації особи, яка задіяна в процесі.

Далі ми проілюструємо суть і важливість даної проблеми на 2-х показових прикладах, що стосуються діяльності дрібного підприємства та мережі постачання електричної енергії.

Постановка задачі. При вирішенні задачі прогнозування попиту на одному з м'ясопереробних підприємств Харківської області (м. Лозова), за умови наявності великої кількості асортиментних позицій, по яких необхідні прогнози попиту, було прийнято рішення розглянути далі різноманітні формалізовані моделі прогнозування, як альтернативу до *наївної моделі* з тижневою сезонністю, що використовувалася на підприємстві.

Формалізовані математичні моделі, що використовувалися.

Наївна модель описується рівнянням

$$Y(t) = Y(t-n),$$

де n – параметр запізнення, який показує те, значення якого минулого періоду брати за прогноз на даний момент.

Модель *ковзна середня* використовує таку суму:

$$\bar{y}_t = \frac{\sum_{i=t-l+1}^t y_i}{l},$$

де \bar{y}_t – фактичне значення i -го рівня; \bar{y}_t – значення ковзної середньої в момент t ; l – довжина інтервалу згладжування.

Модель Хольта – Вінтерса має наступний аналітичний вигляд:

$$\begin{aligned} y(t+\tau) &= (a_1(t) + a_2(t)\tau)f(t-l+\tau), \\ a_1(t) &= \alpha_1 \frac{y(t)}{f(t-l)} + (1-\alpha_1)(a_1(t-1) + a_2(t-1)), \\ f(t) &= \alpha_2 \frac{y(t)}{a_1(t)} + (1-\alpha_2)f(t-l), \\ a_2(t) &= \alpha_3(a_1(t) - a_1(t-1)) + (1-\alpha_3)a_2(t-1). \end{aligned}$$

У якій $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – параметри адаптації; $0 < \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 < 1$; τ – горизонт прогнозування; l – довжина ряду.

Модель *ARIMA* описується рекурентним рівнянням

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} - \omega_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \omega_q \varepsilon_{t-q},$$

та використовує наступні величини: Y_t – залежна змінна у момент часу t ; $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ – оцінювані коефіцієнти; ε_t – помилка, що описує впливи змінних, які в момент t включені у відгук Y_t .

Аналіз результатів моделювання За результатами дослідження були зроблені висновки на предмет того, на скільки відсотків в середньому по товарним позиціям може покращитися точність прогнозування при використанні альтернативних моделей замість тієї, що використовувалася на підприємстві.

Із діаграми, наведеної на рис.1, на перший погляд, перспектива покращення результатів прогнозування доволі суттєва. Але, за експертною думкою керівництва, доцільність використання більш складних, з точки зору методологічної складової, моделей викликає питання. Адже те, що проста модель показує гірші результатати не впливає на бізнес процеси, якщо задоволення реального попиту все одно відбувається в повному обсязі, а відхилення від прогнозу нівелюється адміністративними реакціями і регламентом виробництва. Негативний вплив на задоволення попиту з точки зору наявності сировини при простій моделі прогнозування попиту, що використовувалася, знову ж таки відсутній внаслідок наявного регламенту закупівель, що продиктований реаліями економічних відносин між суб'єктами виробничого ланцюга в українській економіці.

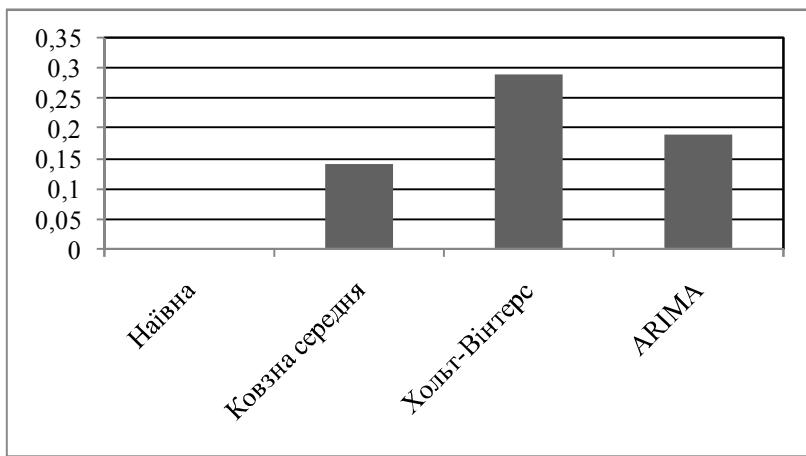


Рис.1 – Покращення прогнозів відповідно наївної моделі.

В даному прикладі точність прогнозу не є найбільшим пріоритетом. підприємство потребує лише доволі простих прогнозів, для отримання яких не знадобиться ані складних програмних рішень, ані дорогих апаратних засобів, ані спеціальної кваліфікації користувача.

Варто також зауважити, що при використанні ще більш складних моделей, таких, наприклад, як моделі, що побудовані на базі *механізму штучних нейронних мереж*, потреба в ресурсах, що потребуються, різко посилюється.

При цьому якоїсь значимої користі для процесу прогнозування не виникає. І чим більші затрати на процес прогнозування з використанням все складніших і складніших моделей, тим гостріше відчувається цей процес невідповідності.

Найважливіший висновок полягає в тому, що в даному випадку, можливості з покращення результатах прогнозування попиту за відсутності їх інтеграції в бізнес – процеси підприємства не несуть своїм наслідком покращення економічних результатів його діяльності.

Математичні моделі для точних прогнозів. З іншого боку, є сфери господарства, де подібні адміністративні впливи неможливі, а точність прогнозу виходить на перший план, і для досягнення її високих показників високі затрати на процес прогнозування є прийнятними.

Наприклад, такою сферою господарства є виробництво електроенергії. Особливість електроенергії у тому, що вона, як продукт виробництва, володіє однією принциповою властивістю – процес споживання цього продукту не може бути відділений від процесу власне виробництва, створений товар повинен бути негайно доставлений до споживача й витрачений.

При оперативному прогнозуванні споживання електроенергії граничними прийнятними величинами середньоквадратичної помилки добового прогнозу є величини в межах до декількох відсотків. Збільшення помилки прогнозування навіть на долі відсотків спричиняє значну перевитрату палива і відповідні фінансові втрати.

Шляхом до системного пом'якшення гостроти ризиків, пов'язаних з нерівномірністю споживання електроенергії протягом доби, є збільшення частки енергогенеруючих станцій, що використовують відновлювані ресурси.

Особливо – гідроакумулюючих електростанцій. Але на сьогоднішній день вони виробляють близько 2% електроенергії, що споживається в енергосистемі України докорінно не можуть зняти усіх питань, які виникають при плануванні ресурсних витрат енергокомпаніями.

Вирішення реальної задачі по прогнозуванню попиту можна проілюструвати схемою, наведеною на рис.2.

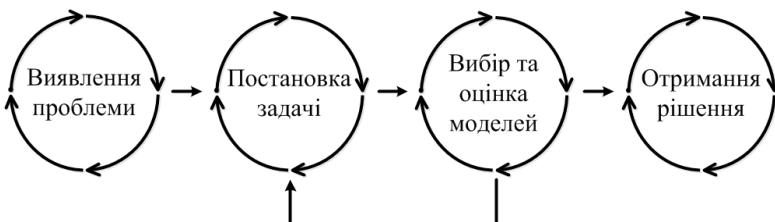


Рис.2 – Ітеративні етапи процесу прогнозування.

Висновки. Прогнозування попиту дійсно має відношення до усіх основних процесів діяльності сучасного підприємства. Сам процес має проблеми, як технічного, так і теоретичного та економічного характеру.

При прогнозуванні попиту повинні бути обов'язково визначені цілі процесу прогнозування, треба визначитися, що саме прогнозується, і що дуже важливо – які вигоди планується отримати від результатів процесу прогнозування. Останнє з визначених питань комплексне. Для того, щоб відповісти на нього, треба визначити, як саме прогнози попиту інтегруються в бізнес – процеси підприємства, на які питання стосовно майбутнього попиту потребуються відповіді.

Було показано, що на задоволеність якістю отриманих прогнозів впливає багато факторів, тому з великою відповідальністю треба ставитися до процесу постановки задачі та до компетенції особи, що займається отриманням прогнозів майбутнього попиту та їх інтерпретацією стосовно бізнес –процесів на підприємстві.

Список літератури: 1. Араб – Оглы Э. А. Рабочая книга по прогнозированию / Э. А. Араб-Оглы, И. В. Бестужев-Лада, Н. Ф. Гаврилов [и др.]. – М.:Мысль, 1982. –430 с. 2. Бауэрсокс Д. Логистика: интегрированная цепь поставок / Д. Бауэрсокс, Д. Клосс; пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2005. – 640 с. 3. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – 403 с. 4. Дмитриев В. И. Прикладная теория информации / В. И. Дмитриев. – М.: Наука, 1989. – 320 с. 5. Дуброва Т. А. Статистические методы прогнозирования: Учеб. Пособие для вузов / Т. А. Дуброва. – М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2003. – 206 с. 6. Колемаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев. – М.: Статистика, 1991. – 400 с. 7. Сергеев В. И. Корпоративная логистика. 300 ответов на вопросы профессионалов / В. И. Сергеев. – М.: ИНФРА – М, 2005. – 976 с. 8. Лукашин Ю. П. Адаптивные методы прогнозирования / Ю. П. Лукашин. – М.: Наука, 2005. – 416 с. 9. Тридей А. Н. Логистика: для самостоятельного изучения дисциплины / А. Н. Тридей, К. Н. Таньков. – Х.: ИД “ИНЖЕК”, 2006. – 120 с. 10. Янч Э. Прогнозирование научно – технического прогресса / Э. Янч. – М.: Прогресс, 1974. – 592 с.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 004.9

Аналіз проблеми прогнозування попиту на товари масового споживання в логістичній системі торгового підприємства / В. О. Дубінін, О. М. Дубініна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012.–№54 (960). – С.56–62. – Бібліогр.: 10 назв.

Проанализированы проблемы прогнозирования спроса. Проведены расчёты точности прогнозирования на различных моделях. Сделаны выводы о многофакторности влияния на процесс получения удовлетворительных прогнозов в логистической системе торгового предприятия.

Ключевые слова: модели прогнозирования, эффективность, оперативность, оценка средств.

The problems of forecasting of demand were analyzed. The calculations for the prediction precision of various models were carried out. The conclusions about the comprehensiveness of influence on the process of obtaining satisfactory predictions in the logistic system of commercial enterprise were made.

Key words: forecasting models, efficiency, operativeness, tools assessment.

В.С. ЗАХАРЯН, д-р физ.-мат. наук, акад. НАН Армении, Ереван;
Р.В. ДАЛЛАКЯН, канд. физ.-мат. наук, ГИУА, Ереван

О РОСТЕ α – ХАРАКТЕРИСТИК И ПРОИЗВОДНОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЙ М. М. ДЖРБАШЯНА

Для случая $-1 < \alpha \leq 0$ доказывается существование функций, имеющих еще больший рост α – характеристики, чем у ядер М. М. Джрабашяна. Доказывается, что рост производной произведений М. М. Джрабашяна на некоторой последовательности может быть бесконечным, и показан порядок роста. В частном случае $\alpha = 0$ α -характеристика совпадает с неванлинновской, а произведения М. М. Джрабашяна переходят в обычные произведения Бляшке. Для этого случая вышеуказанные задачи были решены А. Г. Нафтальевичем.

Ключевые слова: дробное интегродифференцирование, оператор Римана – Лиувилля, ядра и произведения М.М. Джрабашяна, мероморфная функция, α - характеристика.

Введение. В [1] *М.М. Джрабашян с применением оператора дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля построил теорию факторизации классов N_α , $-1 < \alpha < +\infty$, неванлинновского типа.*

Класс N_0 совпадает с классом N *P. Неванлинны* [2].

При $-1 < \alpha < 0$ классы N_α вложены в неванлинновский класс N , а при $\alpha > 0$ содержат неванлинновский класс.

Функции классов N_α обладают тонкими граничными свойствами. Этой теории посвящена монография М. М. Джрабашяна и В. С. Захаряна [3].

По аналогии с классом N мероморфных в круге $|z| < 1$ функций с ограниченной неванлинновской характеристикой $T(\rho; F)$, классы N_α обладают ограниченностью α – характеристикой $T_\alpha(\rho; F)$ М. М. Джрабашяна, исследованием которой занимали многие специалисты. В работе [4] *А. М. Джрабашяном* для случая $\alpha > 0$ найдена естественная связь между характеристиками $T(\rho; F)$ и $T_\alpha(\rho; F)$, что связана с затруднениями для случая $-1 < \alpha < 0$.

В [1] также были введены произведения $B_\alpha(z; \{z_n\})$, которые в случае $\alpha = 0$ превращаются в обычные *произведения Бляшке*.

В работе [5] обнаружена связь между произведениями Бляшке и произведениями $B_\alpha(z; \{z_n\})$, когда $-1 < \alpha < 0$.

Данная работа устанавливает две теоремы о росте α - характеристики и о росте производной произведения $B_\alpha(z; \{z_n\})$ на некоторой последовательности.

Теорема 1. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$, $f(z)$ – аналитическая в единичном круге функция, нули $\{a_\mu\}$ которой удовлетворяют условию

$$\sum_{\mu} (1 - |a_\mu|)^{1+\alpha} < +\infty,$$

и пусть $\{\alpha_i\}$ – последовательность неубывающих положительных чисел, таких, что $\alpha_i \rightarrow 1$ при $i \rightarrow +\infty$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha_i)^{1+\alpha} < +\infty.$$

Тогда существует комплексная последовательность $\{\lambda_i\}$, $|\lambda_i| = \alpha_i$ такая, что

$$\varlimsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{T_\alpha(r; f)}{(1+\alpha) \ln \frac{1}{1-r}} \geq \nu - 1 + \beta,$$

если

$$(i) \quad \varliminf_{i \rightarrow \infty} (1 - \alpha_i)^{\nu(1+\alpha)} D_{(+)}^{-\alpha} \left\{ \ln |f(\lambda_i)| \right\} = H > 0$$

$$(ii) \quad \varlimsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{\ln n(r; \alpha)}{(1+\alpha) \ln \frac{1}{1-r}} = \beta; \quad \beta \leq 1,$$

где $n(r; \alpha)$ – количество точек α_i в круге $|z| < r$.

Теорема 2. Пусть $-1 < \alpha \leq 0$ и пусть $\{\alpha_i\}$ – последовательность неубывающих положительных чисел, таких, что $\alpha_i \rightarrow 1$ при $i \rightarrow +\infty$ и

$$\sum (1 - \alpha_i)^{1+\alpha} < +\infty.$$

Тогда существует комплексная последовательность $\lambda = \{\lambda_i\}$, $|\lambda_i| = \alpha_i$, такая, что

$$\left| B_{(\alpha)}^{(k)}(\lambda_k; \lambda) \right| = |\lambda_k| \left| B'_{\alpha}(\lambda_k; \lambda) \right| \cdot e^{\operatorname{Re} W_{\alpha}(\lambda_k; \lambda_k)} > C > 0,$$

где C – некоторая постоянная; $B_{\alpha}^{(k)}(z; \lambda)$ – произведение М. М. Джербашяна без k -ого множителя.

Замечание. При значении $\alpha = 0$ утверждения обоих теорем было доказано А. Г. Нафталевичем [6].

Обозначения, определения и доказательства. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из класса $L(0, l)$, $0 < l < +\infty$. Интегралом от $f(x)$ порядка α ($0 < \alpha < +\infty$) с началом в точке $x = 0$ принято называть функцию

$$D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in (0, l).$$

Определим

$$D^0 f(x) = f(x).$$

Теперь пусть α ($0 < \alpha < +\infty$) задано, и целое число $p \geq 1$ определяется из условия $p-1 < \alpha \leq p$. Пусть, далее, $f(x) \in L(0; l)$ и функция

$$\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \}$$

почти всюду на $(0; l)$ имеет производную.

Тогда функция

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^p}{dx^p} \{ D^{-(p-\alpha)} f(x) \}$$

называется производной порядка α от функции $f(x)$ с началом в точке $x = 0$.

Отметим, что при целом α функция $D^\alpha f(x)$ совпадает с обычной производной $f^{(n)}(x)$.

Для любого значения параметра α ($-1 < \alpha < +\infty$) введем в рассмотрение следующие функции:

$$C_\alpha(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}, \quad (|z| < 1),$$

$$S_\alpha(z) = 2C_\alpha(z) - C_\alpha(0) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (|z| < 1),$$

$$p_\alpha(\varphi; r) = \operatorname{Re} S_\alpha(re^{i\varphi}) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{(1-re^{i\varphi})^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (0 < r < 1).$$

Эти ядра будем называть ядрами М.М. Джрбашяна. При $\alpha = 0$ ядра М.М. Джрбашяна переходят, соответственно, в ядра Коши, Шварца и Пуасона.

Пусть функция $F(z)$ мероморфная в единичном круге $|z| < 1$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ – это, соответственно, последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z = 0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей, причем каждый нуль или полюс записан столько раз, какова его кратность. Пусть, далее, в окрестности точки $z = 0$ функция $F(z)$ имеет разложение в ряд Лорана вида

$$F(z) = C_\lambda z^\lambda + C_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \dots \quad (C_\lambda \neq 0),$$

и, таким образом, при $\lambda \neq 0$ число $|\lambda|$ равно кратности нуля (при $\lambda \geq 1$) или полюса (при $\lambda \leq -1$) в точке $z = 0$.

Для любого α ($-1 < \alpha < +\infty$) и ξ ($0 < |\xi| < 1$) введем в рассмотрение следующую функцию:

$$A_\alpha(z; \xi) = \left(1 - \frac{z}{\xi}\right) \exp\{-W_\alpha(z; \xi)\}, \quad |z| < 1,$$

где

$$W_\alpha(z; \xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \times \\ \left\{ \xi^{-k} \int_0^{|\xi|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \xi^{-k} \int_{|\xi|}^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \right\} z^k.$$

Если

$$\sum (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < +\infty,$$

то произведение

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z; z_k)$$

является аналитической функцией в единичном круге $|z| < 1$, обращающейся в нуль только на последовательности $\{z_k\}$.

Введем еще несколько важных обозначений.

Для любого t ($0 < t < 1$) выражениями $n(t; 0)$ и $n(t; \infty)$ обозначим, соответственно, число нулей a_μ и полюсов b_ν , лежащих в круге $|z| \leq t$, а $n(0; 0)$ и $n(0; \infty)$ – кратности нуля и полюса функции $F(z)$ в точке $z = 0$.

Далее, пусть $-1 < \alpha < +\infty$,

$$k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad D_{(+)}^{-\alpha} \varphi(r) = \begin{cases} D^{-\alpha} \varphi(r), & \text{при } D^{-\alpha} \varphi(r) \geq 0, \\ 0, & \text{при } D^{-\alpha} \varphi(r) \leq 0, \end{cases}$$

$$N_\alpha(\rho; F) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{0 < b_\nu \leq \rho} W_\alpha \left(0; \frac{b_\nu}{\rho} \right) + \frac{n(0; \infty)}{\Gamma(1+\alpha)} [\ln \rho - k_\alpha] =$$

$$= \frac{\rho^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\rho \frac{(\rho-t)^\alpha}{t} [n(t; \infty) - n(0; \infty)] dt + \frac{n(0; \infty)}{\Gamma(1+\alpha)} [\ln \rho - k_\alpha],$$

$$m_\alpha(\rho; F) = \frac{\rho^{-\alpha}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \left\{ \ln \left| F \left(\rho e^{i\Theta} \right) \right| \right\} d\Theta.$$

После чего естественно ввести в рассмотрение также функцию

$$T_\alpha(\rho; F) = m_\alpha(\rho; F) + N_\alpha(\rho; F).$$

Эта функция называется α -характеристической функцией функции $F(z)$ или просто α -характеристикой. Легко видеть что, при

$$T_\alpha(\rho; F)|_{\alpha=0} = T(\rho; F), \text{ то есть при } \alpha = 0,$$

введенная α -характеристика функции F совпадает с обычной неванлиновской характеристикой.

Доказательство теоремы 1. Из условия (ii) следует, что существует последовательность $\{r_n\} \uparrow 1$, для которой

$$n(r_n; \{\alpha_i\}) \cdot (1-r_n)^{\beta(1+\alpha)} \rightarrow 1 \quad \text{когда } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $N = n(r_n; \{\alpha_i\})$, тогда

$$N(1-\alpha_N)^{\beta(1+\alpha)} \geq n(r_n; \{\alpha_i\}) \cdot (1-r_n)^{\beta(1+\alpha)}.$$

Это означает, что для любого числа ε , $\varepsilon > 0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i(1-\alpha_i)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon} = +\infty.$$

Следовательно, можно указать такие числа $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$, что для $j < i_n$ будет выполнено неравенство

$$j(1-\alpha_j)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon} \leq i_n(1-\alpha_{i_n})^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon}.$$

В силу последнего неравенства для $r < \alpha_{i_n}$ имеем

$$n(r; \{\alpha_i\}) \cdot (1-r)^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon} \leq i_n(1-\alpha_{i_n})^{\beta(1+\alpha)+\varepsilon} = t_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Пусть

$$(1-r)^{1+\alpha} = 2(1-\alpha_{i_n})^{1+\alpha} = 4(1-R_n)^{1+\alpha}, \quad (2)$$

тогда из (1) получаем:

$$i_n = t_n(1-\alpha_{i_n})^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon} = 2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \cdot t_n(1-R_n)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}$$

$$n(r; \{\alpha_i\}) \leq 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \cdot t_n(1-R_n)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}$$

Пусть L_n – количество точек α_i , лежащих в промежутке $[r, \alpha_{i_n}]$, тогда

$$L_n = i_n - n(r; \{\alpha_i\}) \geq \left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} - 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \right) \cdot t_n(1-R_n)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon}. \quad (3)$$

Пусть $\{\lambda_i\}$ – последовательность комплексных чисел, построенная в работе [7], т. е. $\{\lambda_i\}$ такая, что $|\lambda_i| = \alpha_i$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \{ \ln |f(\lambda_i)| \} = +\infty.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i_n} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \{ \ln |f(\lambda_i)| \} &\geq \sum_{r \leq \alpha_i \leq \alpha_{i_n}} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \{ \ln |f(\lambda_i)| \} = \\ &= \sum_{r \leq \alpha_i \leq \alpha_{i_n}} (1-\alpha_i)^{\nu(1+\alpha)} D_{(+)}^{-\alpha} \{ \ln |f(\lambda_i)| \} \cdot (1-\alpha_i)^{(1-\nu)(1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда в случае, когда $\nu \geq 1$, пользуясь условием (i) теоремы, а также соотношениями (2) и (3) для любого δ ; $0 < \delta < H$, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i_n} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \{ \ln |f(\lambda_i)| \} &\geq (1-r)^{(1-\nu)(1+\alpha)} (H-\delta) \left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} - 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \right) \times \\ t_n(1-R_n)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon} &= 4^{1-\nu} \cdot \left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} - 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \right) \cdot (H-\delta) \times \\ t_n \cdot (1-R_n)^{(1-\nu)(1+\alpha)-\beta(1+\alpha)-\varepsilon} &= C_n \cdot (1-R_n)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $C_n \rightarrow \infty$.

Таким образом, при $\nu \geq 1$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{i_n} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \{ \ln |f(\lambda_i)| \} \geq C_n \cdot (1-R_n)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon}, \quad (5)$$

где $C_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь пусть $0 < \nu < 1$. Тогда из (4), пользуясь (2) и (3), получаем:

$$\sum_{i=1}^{i_n} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \left\{ \ln |f(\lambda_i)| \right\} \geq (1-\alpha_{i_n})^{(1-\nu)(1+\alpha)} (H-\delta) \left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} - 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \right) \times \\ t_n \cdot (1-R_n)^{-\beta(1+\alpha)-\varepsilon} = 2^{1-\nu} \cdot (H-\delta) \cdot \left(2^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} - 4^{-\beta-\frac{\varepsilon}{1+\alpha}} \right) \times \\ (1-R_n)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon} = C_n \cdot (1-R_n)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon},$$

где $C_n \rightarrow \infty$. Из (5) и последнего неравенства следует, что для любого $\nu; \nu > 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{i_n} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \left\{ \ln |f(\lambda_i)| \right\} \geq C_n \cdot (1-R_n)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)-\varepsilon},$$

где $C_n \rightarrow \infty$. Но это неравенство верно для любого положительного числа ε , значит

$$\sum_{i=1}^{i_n} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \left\{ \ln |f(\lambda_i)| \right\} \geq C_n \cdot (1-R_n)^{(1-\nu-\beta)(1+\alpha)}. \quad (6)$$

В работе [7] доказано, что при таком выборе последовательности $\{\lambda_i\}$ справедливо такое неравенство:

$$T_\alpha(R_n; f) \geq \text{const} \cdot \sum_{1-\alpha_i \geq 2(1-R_i)} (1-\alpha_i)^{1+\alpha} D_{(+)}^{-\alpha} \left\{ \ln |f(\lambda_i)| \right\} \quad (7)$$

Из (6) и (7) и следует справедливость утверждения теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ – построенная А.Г. Нафталевичем последовательность (см. [6], стр. 17), то есть $\lambda = \{\lambda_n\}$ – это такая последовательность, что $|\lambda_i| = \alpha_i, i = 1, 2, \dots$ и

$$|B'(\lambda_k; \lambda)| \cdot (1 - |\lambda_k|) \geq C_1 > 0.$$

Пусть далее

$$B_\alpha(z; \lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} A_\alpha(z; \lambda_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right) \cdot e^{-W_\alpha(z; \lambda_n)},$$

тогда, что очевидно,

$$B'_\alpha(z; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_\alpha(z; \lambda_n) \cdot \prod_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^{\infty} A_\alpha(z; \lambda_m).$$

Следовательно, для любого натурального числа k имеем:

$$B'_\alpha(\lambda_k; \lambda) = A'_\alpha(\lambda_k; \lambda_k) \cdot \prod_{\substack{m \neq k \\ m=1}}^{\infty} A_\alpha(z; \lambda_m). \quad (8)$$

Теперь пусть

$$B_\alpha^{(k)}(z; \lambda) = \prod_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^{\infty} A_\alpha(z; \lambda_m). \quad (9)$$

Ясно, что

$$A'_\alpha(z; \lambda_k) = -\frac{1}{\lambda_k} e^{-W_\alpha(z; \lambda_k)} - \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{-W_\alpha(z; \lambda_k)} \cdot W'_\alpha(z).$$

Значит

$$A'_\alpha(\lambda_k; \lambda_k) = -\frac{1}{\lambda_k} e^{-W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k)} \quad (10)$$

Из (8), (9) и (10) несложно увидеть, что

$$B_\alpha^{(k)}(\lambda_k; \lambda) = \lambda_k B'_\alpha(\lambda_k; \lambda) e^{W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k)},$$

откуда

$$\left| B_\alpha^{(k)}(\lambda_k; \lambda) \right| = |\lambda_k| \cdot |B'_\alpha(\lambda_k; \lambda)| \cdot e^{\operatorname{Re} W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k)} \quad (11)$$

Известно, что когда $-1 < \alpha < 0$, то (см. [5])

$$B_\alpha(z; \lambda) = B(z; \lambda) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\Theta} z) d\omega(\Theta) \right\},$$

где $B(z; \lambda)$ – произведение Бляшке с нулями на последовательности λ , $\omega(\Theta)$ – некоторая невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0; 2\pi]$. Следовательно

$$\begin{aligned} B'_\alpha(z; \lambda) &= B(z; \lambda) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\Theta} z) d\omega(\Theta) \right\} + \\ &+ e^{-i\Theta} B(z; \lambda) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\Theta} z) d\omega(\Theta) \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\Theta} z) d\omega. \end{aligned}$$

Значит

$$B'_\alpha(\lambda_k; \lambda) = B'(\lambda_k; \lambda) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\Theta} \lambda_k) d\omega(\Theta) \right\}.$$

Пользуясь этим равенством из (11) получаем:

$$\left|B_{\alpha}^{(k)}(\lambda_k; \lambda)\right| = |\lambda_k| |B'(\lambda_k; \lambda)| \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_{\alpha}(e^{-i\Theta} \lambda_k) d\omega(\Theta) + \operatorname{Re} W_{\alpha}(\lambda_k; \lambda_k) \right\} =$$

$$= \frac{|\lambda_k|}{1 - |\lambda_k|} \cdot |B'(\lambda_k; \lambda)| \cdot (1 - |\lambda_k|) \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_{\alpha}(e^{-i\Theta} \lambda_k) d\omega(\Theta) + \operatorname{Re} W_{\alpha}(\lambda_k; \lambda_k) \right\}.$$

Но последовательность λ такова, что

$$|B'(\lambda_k; \lambda)| \cdot (1 - |\lambda_k|) \geq C_1 > 0,$$

где C_1 – некоторая постоянная (см.[6], стр. 17), следовательно

$$\left|B_{\alpha}^{(k)}(\lambda_k; \lambda)\right| \geq \frac{C_2}{1 - |\lambda_k|} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_{\alpha}(e^{-i\Theta} \lambda_k) d\omega(\Theta) + \operatorname{Re} W_{\alpha}(\lambda_k; \lambda_k) \right\}. \quad (12)$$

Не трудно увидеть, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S_{\alpha}(e^{-i\Theta} \lambda_k) &= \operatorname{Re} S_{\alpha}(\alpha_k e^{i(\varphi_k - \Theta)}) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{[1 - \alpha_k e^{i(\varphi_k - \Theta)}]^{1+\alpha}} - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \frac{2 \cos \gamma_k}{\left[1 - 2\alpha_k \cos(\varphi_k - \Theta) + \alpha_k^2\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} - 1 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_k = \gamma(\varphi_k; \Theta) = \arg \left[1 - 2\alpha_k \cos(\varphi_k - \Theta) + \alpha_k^2 \right]^{1+\alpha}.$$

Поскольку $\omega(\Theta)$ – невозрастающая функция, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} S_{\alpha}(e^{-i\Theta} \lambda_k) d\omega(\Theta) &\geq \frac{1}{2\pi \cdot \Gamma(1+\alpha)} \times \\ &\times \left\{ 2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[(1 - \alpha_k)^2 + 4\alpha_k \cdot \sin^2[(\Theta - \varphi_k)/2] \right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} - \int_0^{2\pi} d\omega(\Theta) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Обозначим $\Theta - \varphi_k = \gamma$. Если $|\gamma| > \gamma_0 > 0$, где γ_0 – некоторое наперед заданное число, то очевидно

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[(1 - \alpha_k)^2 + 4\alpha_k \cdot \sin^2[(\Theta - \varphi_k)/2] \right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_3. \quad (14)$$

Если величина γ достаточно маленькая и $\gamma \geq 0$, то

$$\begin{aligned}
& \int_{\varphi_k}^{\gamma_0} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[\left(1-\alpha_k\right)^2 + 4\alpha_k \cdot \sin^2 \frac{\Theta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq \int_0^{\gamma_0-\varphi_k} \frac{d\omega(\gamma+\varphi_k)}{\left(1-\alpha_k+\gamma\right)^{1+\alpha}} = \\
& = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\gamma_0-\varphi_k} \omega'(\gamma+\varphi_k) d(1-\alpha_k+\gamma)^{-\alpha} = \\
& = -\frac{1}{\alpha} (1-\alpha_k+\gamma)^{-\alpha} \cdot \omega'(\gamma+\varphi_k) \Big|_0^{\gamma_0-\varphi_k} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\gamma_0-\varphi_k} (1-\alpha_k+\gamma)^{-\alpha} d\omega'(\gamma+\varphi_k).
\end{aligned}$$

Но ω – убывающая функция; значит, *почти всюду* существует конечная производная ω' , откуда следует, что

$$\int_{\varphi_k}^{\gamma_0} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[\left(1-\alpha_k\right)^2 + 4\alpha_k \cdot \sin^2 \frac{\Theta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_4. \quad (15)$$

Аналогичным образом, обозначив $\varphi_k - \Theta = \gamma$, легко увидеть, что

$$\int_{-\gamma_0}^{\varphi_k} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[\left(1-\alpha_k\right)^2 + 4\alpha_k \cdot \sin^2 \frac{\Theta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_5. \quad (16)$$

Из (13) пользуясь (14), (15) и (16) получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\omega(\Theta)}{\left[\left(1-\alpha_k\right)^2 + 4\alpha_k \cdot \sin^2 [(\Theta-\varphi_k)/2]\right]^{\frac{1+\alpha}{2}}} \geq C_6. \quad (17)$$

Теперь выполним оценку снизу:

$$\begin{aligned}
W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k) &= \int_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)} \times \\
&\quad \left\{ \int_0^{\alpha_k} (1-x)^\alpha x^{n-1} dx - \alpha_k^{2n} \int_{\alpha_k}^1 (1-x)^\alpha x^{-n-1} dx \right\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, поскольку $W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k) = W_\alpha(\alpha_k; \alpha_k)$, то по лемме 1 из работы [8] имеем:

$$W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k) = \ln(1-\alpha_k) + \int_0^{\alpha_k} \frac{(1-x)^\alpha - 1}{x} dx + \int_{\alpha_k}^1 \frac{1-x}{x(1-r^2/x)^{1+\alpha}} dx.$$

Не трудно убедится, что в последнем равенстве оба подынтегральные выражения положительные, значит

$$W_\alpha(\lambda_k; \lambda_k) \geq \ln(1 - \alpha_k). \quad (14)$$

Из (12) пользуясь (13) и (14) получаем неравенство

$$\left| B_\alpha^{(k)}(\lambda_k; \lambda) \right| \geq C_4,$$

причем, что очевидно $C_4 > 0$.

Список литературы: 1. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области – М.: Наука, 1966. 2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. – Гостехиздат.– М.-Л., 1941. 3. Джрбашян М. М., Захарян В. С. Классы и граничные свойства функций, мероморфных в круге. – М.: «Физико-математическая литература». – ВО «Наука», 1993. 4. Джрбашян А. М. О расширении теории факторизации М.М. Джрбашяна и прилежащих задачах анализа // Известия НАН Армении, Математика – 2009. – Т. 44. – № 6 – С. 5 – 62. 5. Джрбашян М. М., Захарян В. С. О факторизации функций B_α // Математические заметки, Т. 4. – № 1 (1968). – С. 3 – 10. 6. Нафтальевич А. Г. Об интерполяции функций ограниченного вида // Ученые записки Вильнюсского университета. – 1956. – № 5. – С. 5 – 27. 7. Апресян С. А., Даллакян Р. В. Одно замечание о α -характеристике регулярных в единичном круге функций // Математика в высшей школе. – 2010, Ереван. – Т. IV. – № 3. – С. 13 – 20. 8. Захарян В. С., Оганисян И. В. О коэффициентах Тейлора произведений М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z; z_k)$ // Известия Академии Наук Арм. ССР. – Математика, 1998. – XXIII. – № 6. – С. 588 – 593.

Поступила в редакцию 10.10.2012

УДК 17.27

Оросте α – характеристик и производній произведений М. М. Джрбашяна / В. С. Захарян, Р. В. Далякян // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.63–73. – Бібліогр.: 8 назв.

Для випадку $-1 < \alpha \leq 0$ доводиться існування функцій, які мають ще більше зростання α – характеристики, ніж ядра М. М. Джрбашяна. Доводиться, що зростання похідної добутків М. М. Джрбашяна на деякій послідовності може бути нескінченим, і вказаний порядок зростання. В частинному випадку $\alpha = 0$ α – характеристика співпадає із неванлиновською, а добутки М. М. Джрбашяна переходятя у звичайні добутки Бляшке. Для цього випадку вищевказані задачі були розв'язані А. Г. Нафтальевичем.

Ключові слова: дробове інтегродиференціювання, оператор Рімана – Ліувіля, ядра й добутки М. М. Джрбашяна, мероморфна функція, α - характеристика.

The existence of functions that have more growth α - characteristics than nuclear Dzhrbashyan for the case $-1 < \alpha \leq 0$ is proved. Proved, that the growth of the derivative of Dzhrbashyan's products on a sequence can be endless, and shows how growth. In the particular case $\alpha = 0$ the characteristic coincides with Nevanlinna's characteristic, and Dzhrbashyan's products skip on Blaschke's products. For this case, the above-mentioned problems were solved by A. Naftalevich.

Key words: fractional integraldifference, operation Riemann – Liouville, kernel and multipliation Dzhrashyan, meromorphic function, α - characteristics.

C.H. ИЕВЛЕВА, канд. техн. наук, доц., ХНУРЭ, Харьков

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ РАБОТЫ ГАЗОТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ УКРАИНЫ

Рассмотрены некоторые из алгоритмических методов повышения надежности функционирования ГТС, а именно: методы оценивания и мониторинга технического состояния технологического оборудования газотранспортной системы; методы прогнозирования изменения оценок параметров, определяющих техническое состояние технологического оборудования; методы обнаружения нарушений изоляционных покрытий подземных трубопроводов.

Ключевые слова: надежность ГТС, алгоритмические методы, мониторинг, технологическое оборудование, техническое состояние.

Введение. Основным назначением газотранспортной системы (ГТС) любой страны является надежное, безопасное, бесперебойное и экономически эффективное обеспечение всех категорий потребителей природным газом. Учитывая, что Украина находится между основными газодобывающими регионами и основными потребителями природного газа в Европе, соединяя, тем самым, магистральные газопроводы всех соседних стран, то вопрос развития ГТС Украины становится очень актуальным. По данным Национальной акционерной компании «Нефтегаз Украины» в период с 1991 года по 2009 год объем транзита природного газа в страны СНГ и Европы возрос с 113,9 млрд. м. куб. до 120,083 млрд. м. куб, делая тем самым Украину одним из крупнейших транзитеров природного газа в мире. Однако 60% ГТС Украины требует срочной реконструкции и модернизации, которая бы предусматривала замену морально устаревшего и физически изношенного технологического оборудования, диагностику и восстановление линейной части газопроводов и строительство новых магистралей. В связи с этим правительством Украины разработана и одобрена Энергетическая стратегия Украины до 2030 года (Стратегия), которая определяет цели и основные направления развития газовой промышленности в среднесрочной и долгосрочной перспективе, в которой выделяются следующие основные аспекты развития:

- повышение надежности, безопасности, стабильности и экономической эффективности обеспечения транзитных поставок природного газа, а также поставок газа внутренним потребителям Украины всех категорий;
- увеличение объемов собственной добычи газа и уменьшение зависимости от внешних поставок энергоресурсов;
- эффективное использование geopolитического потенциала Украины, как одного из крупнейших государств – транзитеров углеводородного сырья;
- интеграция украинской ГТС в европейскую сеть.

© С.Н. Иевлева, 2012

Для достижения поставленных целей необходимо совместное применение структурных, параметрических и алгоритмических методов повышения надежности работы ГТС Украины. Основное внимание в данной статье уделено алгоритмическим методам, которые условно можно разделить на следующие классы:

- методы оценивания и мониторинга технического состояния технологического оборудования ГТС;
- методы прогнозирования изменения оценок параметров, определяющих техническое состояние технологического оборудования;
- методы поддержки принятия решений о выводе технологического оборудования из эксплуатации и перевода его в ремонт на основании результатов анализа оценок его технического состояния;
- методы оптимизации плановых режимов работы ГТС с учетом технического состояния технологического оборудования [1];
- методы обнаружения утечек и несанкционированных отборов природного газа, обнаружения предаварийных и аварийных ситуаций в ГТС (на линейных участках, компрессорных станциях, газораспределительных станциях (проч.) [2];
- методы локализации аварий и предотвращения их каскадного развития;
- методы оптимального управления в аварийных ситуациях (восстановление газоснабжения потребителей ГТС в случае его нарушения; восстановление пропускной способности ГТС, включая изменение режимов работы подземных хранилищ газа).

Рассмотрим более подробно некоторые из перечисленных методов.

Методы оценивания и мониторинга технического состояния технологического оборудования газотранспортной системы. Техническая диагностика – отрасль научно-технических знаний, сущность которой составляют теория, методы и средства определения технического состояния объектов. Основное назначение технической диагностики состоит в повышении надежности объектов на этапе их эксплуатации. Методами технической диагностики можно выявить возникновение дефекта и прогнозировать его развитие, что позволяет не только сократить количество отказов, но и устранять имеющиеся дефекты во время плановых обслуживаний и ремонтов, сократить объемы и сроки ремонтных работ за счет правильного планирования и организации.

Отметим, что задачи диагностики обращены не на предотвращение гипотетической аварии, даже аварии с тяжелыми последствиями, а на организацию эксплуатации и ремонта таким образом, чтобы не допустить развития дефектов до опасных пределов, в том числе и дефектов, могущих привести к отказам и авариям с тяжелыми последствиями.

Основным управляемым элементом в комплексе технологических объектов магистрального газопровода является компрессорный цех как часть ком-

прессорной станции, выполняющий основные технологические функции (очистку газа – пылеуловители, компримирование – газоперекачивающие агрегаты (ГПА), а охлаждение газа – аппараты воздушного охлаждения).

В эксплуатационных условиях применяют следующие виды диагностики: параметрическую, вибрационную и трибодиагностику [3].

Если оценить вклад каждого из методов в изучение текущего состояния ГПА, то большая часть дефектов и неисправностей может быть установлена методами вибродиагностики, пригодными для обнаружения дефектов практически всех элементов агрегата. Около 30% всех неисправностей ГПА обнаруживается анализом термогазодинамических параметров (параметрическая диагностика) и около 20% неисправностей регистрируются по результатам трибодиагностики. Причем достоверность диагноза, полученного путем вибродиагностики, может быть подтверждена (или опровергнута) только использованием параметрической диагностики.

Параметрическая диагностика основана на том факте, что определенные неисправности ГПА приводят к изменению его функциональных параметров. Например, неисправности проточных частей при снижении коэффициента полезного действия проявляются также падением давления за компрессором, повышением температуры перед турбиной, снижением частоты вращения ротора высокого давления, снижением расхода воздуха через компрессор и т.д. Логическая модель ГПА, позволяющая качественно выделить характерные неисправности, представлена на рис. 1 ([4]).

Результаты определения технического состояния ГПА рассмотрим на примере комплексного технического диагностирования ГПА, тип ГТК10I (наработка после капитального ремонта 667 часов).

При диагностировании были получены следующие результаты. Зависимость *политропного КПД* нагнетателя $\eta_{nol}(-)$ от приведенного объемного расхода нагнетателя Q_{np} ($\text{м}^3/\text{мин}$) изображена на рис. 2.

Зависимости приведенного расхода топливного газа $Q_{n2\ np}$ ($\text{нм}^3/\text{час}$), удельного приведенного расхода топливного газа $q_{n2\ np}$ ($\text{нм}^3/\text{кВт}\cdot\text{час}$), степени сжатия в осевом компрессоре π_k (-) как функции от приведенной эффективной мощности $N_{e\ np}$ (кВт) приведены на рис. 3.

После диагностирования был сделан вывод об удовлетворительном состоянии данного ГПА.

Основным элементом в системе трубопроводов, являются непосредственно трубы. Для обнаружения дефектов труб используется метод обнаружения дефектов потери металла путем внутритрубного обследования (интеллектуальный поршень). Положение дефекта указывается по расстоянию до точки *S* (по распечатке) и положению этой точки по циферблату (см. рис. 4).

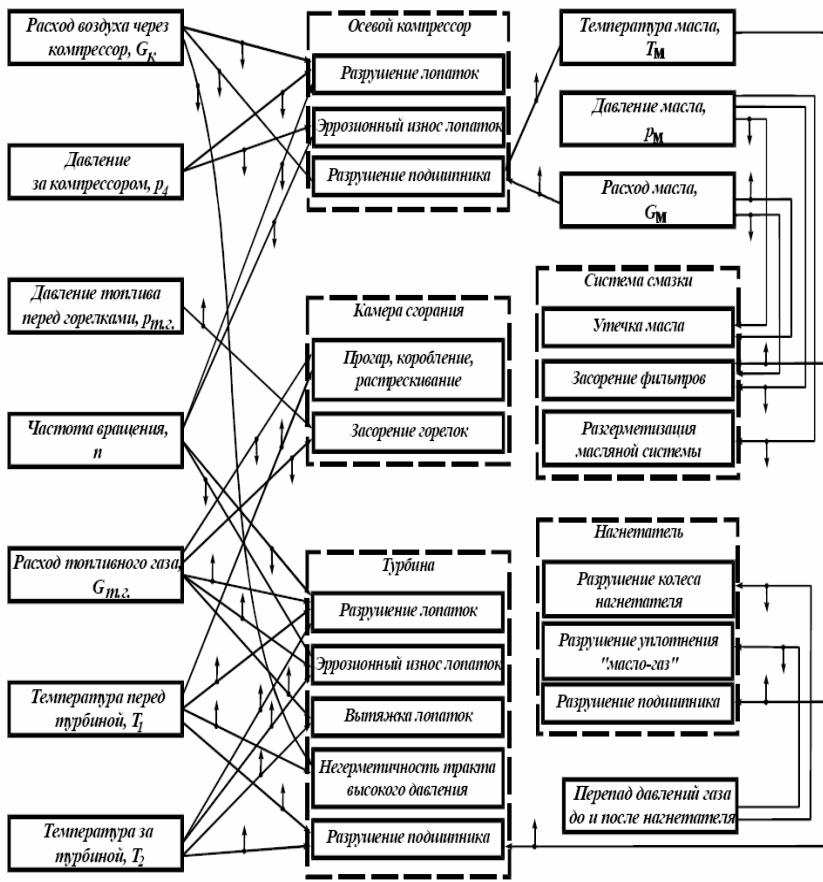


Рис. 1 – Логическая модель связей функциональных параметров с характерными неисправностями ГПА.

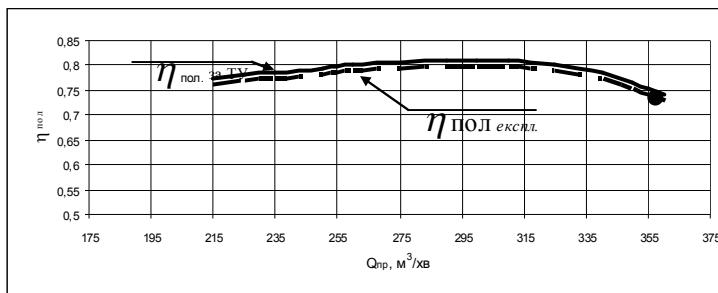


Рис. 2 – Зависимость $\eta_{пол.}$ от Q_{np} .

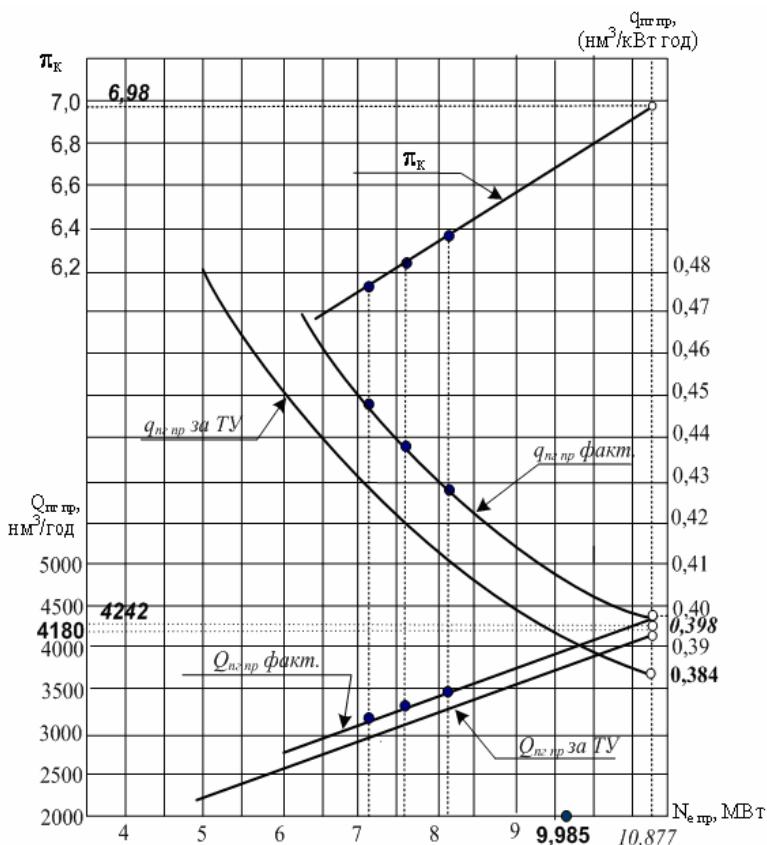


Рис. 3 – Зависимости $Q_{n\tau np}$, $q_{n\tau np}$, $\pi_k = f(N_{e np})$.

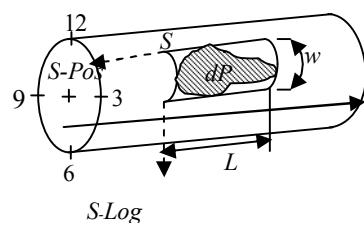


Рис. 4 – Метод обнаружения дефектов потери металла путем внутритрубного обследования.

Длина дефекта потери металла определяется при помощи проецирования этой длины на продольную ось трубы. Ширина дефекта – путем проецирования ее размера на окружность трубы. Глубина дефекта – по максимальной потере толщины стенки (dP). Результатами обработки экспериментальных данных являются:

$S - Log$ – расстояние по распечатке, м;

$S - Pos$ – положение по циферблату, час;

L, w – длина и ширина дефекта, мм;

dP – нижняя точка дефекта потери металла;

Для дефектов потери металла, вызванного коррозией, согласно ERF – определение дефекта и интерактивные правила (ANSI\ASME), применяются следующие формулы:

если $G \leq 4.0$ –

$$DFP = P_{des} \times 1.1 \left(\frac{1 - 0.67 \times C/t_n}{1 - 0.67 \times (C/t_n)/\sqrt{G^2 + 1}} \right),$$

если $G > 4.0$ –

$$DFP = P_{des} \times 1.1 \left(1 - \frac{C}{t_n} \right), \quad ERF = \frac{MAOP}{DFP},$$

где DFP – предельное давление в месте дефекта, МПа; P_{des} – проектное давление, МПа (запас прочности 0.72); $MAOP$ – максимально допустимое рабочее давление; C – макс. – глубина пораженного участка, мм; t_n – исходная толщина стенки, мм;

$$G = 0.893 \times L / \sqrt{D t_n};$$

D – номинальный наружный диаметр трубы, мм.

Еще одним немаловажным фактором, влияющим на техническое состояние технологического оборудования, является напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов ГТС. Сила и напряжение, которые определяют изменение НДС, как правило, являются неизвестными по абсолютной величине и месту воздействия на исследуемый объект. Кроме того, часто является неизвестной сама физическая природа этих сил. Одной из основных характеристик исследуемых элементов является их реальная пространственная конфигурация, которая изменяется во времени.

На данный момент для изучения НДС перспективным является использование математических методов оценки НДС [5]. Фактически возникает следующая задача – по измеренным перемещениям на определенном множестве точек исследуемого объекта необходимо оценить его НДС или изменение НДС и на основе полученных результатов принять решение о возможности дальнейшего безопасного использования рассматриваемого объекта.

Рассмотренные методы – это только некоторая часть известных и используемых на практике методов оценивания и мониторинга технического состояния технологических объектов ГТС, позволяющих не только повышать показатели надежности объектов на этапе их эксплуатации, но и накапливать информацию, позволяющую применять стохастические методы прогнозирования изменения оценок параметров, определяющих техническое состояние технологического оборудования.

Методы прогнозирования изменения оценок параметров, определяющих техническое состояние технологического оборудования. При прогнозировании изменения этих оценок параметров, определяющих техническое состояние технологического оборудования, одним из важнейших требований, предъявляемых к моделям, является минимизация затрат на моделирование при сохранении адекватности модели. Поэтому моделирование, как правило, связано с оптимальным упрощением образа оригинала, поэтому синтез и анализ стохастических моделей работы технологического оборудования удобно производить в классе полиномиальных математических моделей вида (1), который для произвольного случая имеет r входов, m выходов:

$$F(L) \times Y'(k) = (B(L)/A(L)) \times \Theta \times X'(k) + (C'(L)/D'(L)) \times W(k)$$

или

$$Y(k) = G(L) \times X(k) + C_2(L)W(k), \quad (1)$$

где L – оператор сдвига по времени на одну единицу назад, такой что

$$L^i X(k) = X(k-i); \quad G(L) = (B(L)/(F(L) \times A(L))) \times \Theta$$

– модель передаточной функции; $C_2(L) \times W(k)$ – аддитивная модель шумов в виде скользящего среднего, $C_2(L) = C'(L)/(F(L) \cdot D'(L))$;

$$Y'(k) = C_{s_1^1, s_2^1, \dots, s_m^1}^{d_1^1, d_2^1, \dots, d_m^1} C_{s_1^2, s_2^2, \dots, s_m^2}^{d_1^2, d_2^2, \dots, d_m^2} \dots C_{s_1^{ny}, s_2^{ny}, \dots, s_m^{ny}}^{d_1^{ny}, d_2^{ny}, \dots, d_m^{ny}} \tilde{Y}(k),$$

$Y'(k)$ – приведенный к стационарному виду многомерный временной ряд выходов системы; $\tilde{Y}(k)$ – центрированный многомерный временной ряд выходов системы; ny – количество периодов временного ряда выходов системы;

$$X'(k) = C_{s_1^1, s_2^1, \dots, s_m^1}^{d_1^1, d_2^1, \dots, d_m^1} C_{s_1^2, s_2^2, \dots, s_m^2}^{d_1^2, d_2^2, \dots, d_m^2} \dots C_{s_1^{nx}, s_2^{nx}, \dots, s_m^{nx}}^{d_1^{nx}, d_2^{nx}, \dots, d_m^{nx}} \tilde{X}(k),$$

$X'(k)$ – приведенный к стационарному виду многомерный временной ряд выходов системы, умноженный слева на Θ ; $\tilde{X}(k)$ – многомерный временной ряд входов системы с вычтеным математическим ожиданием, nx – количество периодов временного ряда входов системы;

$$\tilde{N}_{s_1^k, s_2^k, \dots, s_m^k}^{d_1^k, d_2^k, \dots, d_m^k} = I \times \begin{bmatrix} \tilde{N}_{s_1^k}^{d_1^k} & \tilde{N}_{s_2^k}^{d_2^k} & \dots & \tilde{N}_{s_m^k}^{d_m^k} \end{bmatrix}^T,$$

$\tilde{N}_{s_i^k}^{d_i^k} = \left(1 - L^{s_i^k}\right)^{d_i^k}$ – оператор взятия s_i^k -ых разностей порядка d_i^k ,

$\tilde{N}_{s_1^k, s_2^k, \dots, s_m^k}^{d_1^k, d_2^k, \dots, d_m^k}$ – оператор взятия разностей соответствующих порядков много- мерного временного ряда;

$$C'(L) = C_{q_1}^1(L^{s_1}) \times C_{q_2}^2(L^{s_2}) \times \dots \times C_{q_n}^1(L^{s_n}) = \prod_{i=1}^n C_{q_i}^i(L^{s_i}),$$

$C'(L)$ – обобщенный оператор скользящего среднего;

$$D'(L) = D_{p_1}^1(L^{s_1}) \times D_{p_2}^2(L^{s_2}) \times \dots \times D_{p_n}^1(L^{s_n}) = \prod_{i=1}^n D_{p_i}^i(L^{s_i}),$$

$D'(L)$ – обобщенный оператор авторегрессии; $A(L)$, $B(L)$ – матричные полиномы

$$A(L) = I + \sum_{j=1}^{n_a} A_j L^j, \quad B(L) = \sum_{j=0}^{n_b} B_j L^j,$$

степеней n_a и n_b , соответственно;

$$C_{q_k}^k(L^{s_k}) = I + \sum_{j=1}^{q_k} C_j^k L^{j \times s_k}$$

– матричный полином от L^{s_k} степени q_k , определяющий составляющую скользящего среднего периодической компоненты с периодом s_k ;

$$D_{p_k}^k(L^{s_k}) = I + \sum_{j=1}^{p_k} D_j^k L^{j \times s_k}$$

– матричный полином от L^{s_k} степени p_k , определяющий составляющую авторегрессии периодической компоненты с периодом s_k ; $A(L)$, $B(L)$, $C(L)$, $D(L)$, $F(L)$ – матричные полиномы

$$A(L) = I + \sum_{j=1}^{n_a} A_j L^j, \quad B(L) = \sum_{j=0}^{n_b} B_j L^j, \quad C(L) = I + \sum_{j=1}^{n_c} C_j L^j,$$

$$D(L) = I + \sum_{j=1}^{n_d} D_j L^j, \quad F(L) = I + \sum_{j=1}^{n_f} F_j L^j$$

степеней n_a , n_b , n_c , n_d и n_f , соответственно; Θ – матрица задержек j -го

входа системы относительно i -го выхода, которая имеет вид

$$Q = \begin{bmatrix} L^{c_{11}} & L^{c_{12}} & M & L^{c_{1r}} \\ L^{c_{21}} & L^{c_{22}} & M & L^{c_{2r}} \\ L & L & O & L \\ L^{c_{m1}} & L^{c_{m2}} & M & L^{c_{mr}} \end{bmatrix};$$

c_{ij} – величина задержки j -го входа относительно i -го выхода;

$$X(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_r(k)]^T, \quad Y(k) = [y_1(k) \ y_2(k) \ \dots \ y_m(k)]^T,$$

$$W(k) = [w_1(k) \ w_2(k) \ \dots \ w_m(k)]^T$$

– векторы входов, выходов и шумов соответственно для k -го шага [6].

Проблема обнаружения внезапного изменения дисперсии одномерных временных рядов хорошо изучена, однако многомерный случай более сложный, поскольку надо рассматривать разладки как в дисперсии отдельных временных рядов, так и в их ковариационной структуре.

Далее рассматриваются два подхода обнаружения разладок в дисперсиях и ковариационной структуре векторных временных рядов шумов W . Предположим, что мы идентифицировали некоторую математическую модель технологического оборудования и из разностных уравнений получили векторы шумов $W(k)$. Пусть необходимо проверить гипотезу о нормальном распределении данных векторов и об их *гомоскедастичности* против альтернативной гипотезы о том, что они являются *гетероскедастичными* из-за изменения *ковариационной матрицы* в известной точке $k=h$. Наиболее часто используемым методом проверки отсутствия разладок ковариационной матрицы двух *гауссовых процессов* является *статистика отношения правдоподобия*, которая для проверки разладки ковариационной структуры многомерного процесса в момент $k=h+1$ определяется как

$$LR_h = n \times \log \frac{|S|}{|S_1|^v \times |S_2|^{1-v}}, \quad (2)$$

где

$$v = \frac{h}{N}, \quad S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N W(k) \times [W(k)]^T, \quad S_1 = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h W(k) \times [W(k)]^T, \\ S_2 = \frac{1}{N-h} \sum_{k=h+1}^N W(k) \times [W(k)]^T.$$

Эта статистика позволяет проверить нуль-гипотезу о неизменности ковариационной структуры для фиксированного времени h и асимптотически стремится к распределению χ^2 с $k \times (k+1)/2$ степенями свободы.

Альтернативной статистикой является *статистика кумулятивных сумм*, которая определяется следующим способом:

$$C_h = \frac{h}{\sqrt{2kN}} \left(\frac{A_h}{h} - \frac{A_N}{N} \right), \quad (3)$$

где $A_h = \sum_{k=1}^h [W(k)]^T \times \Sigma^{-1} \times W(k)$ – многомерная кумулятивная сумма квадратов последовательности $\{W(1), \dots, W(h)\}$.

Таким образом, можно проверить присутствие разладки в ковариационной структуре в момент времени $l = h+1$ в шумах, получив значение статистики C_h и сравнив ее с процентилями распределения броуновского моста в момент времени $v = h/N$, которое является нормально распределенным с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $v \times (1-v)$.

Для проверки наличия разладок в дисперсиях шумов $W(k)$ в момент времени $l = h+1$ статистика отношения правдоподобия принимает вид [6]:

$$LR_h = N \times \log \frac{s^2(1) \times \dots \times s^2(k)}{\left[s_1^2(1) \times \dots \times s_1^2(k) \right]^v \times \left[s_2^2(1) \times \dots \times s_2^2(k) \right]^{1-v}}, \quad (4)$$

где дисперсии

$$s^2(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [W_i(k)]^2, \quad s_1^2(i) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h [W_i(k)]^2, \quad s_2^2(i) = \frac{1}{N-h} \sum_{k=h+1}^N [W_i(k)]^2,$$

$$i = \overline{1, k}, \quad v = h/N.$$

Эта статистика позволяет проверить нуль-гипотезу об отсутствии разладок в дисперсиях для фиксированного времени h и асимптотическое стремление к распределению χ^2 с k степенями свободы.

Статистика кумулятивных сумм для проверки отсутствия разладок в дисперсиях шумов $W(k)$ в момент времени ($l = h+1$) принимает вид:

$$C_h = \frac{h}{\sqrt{2 \times \text{tr}(\Lambda^2) \times N}} \left(\frac{A_h}{h} - \frac{A_N}{N} \right), \quad (5)$$

где A_h – многомерная кумулятивная сумма квадратов последовательности $\{c(1), \dots, c(h)\}$ для фиксированного h , $1 \leq h \leq N$, $c(k) = U_\Sigma \times b(k)$, U_Σ – матрица из собственных векторов ковариационной матрицы $R_\Sigma = \text{cov}[b(k)]$ главных компонент $b(k)$ шумов $W(k)$, то есть $b(k) = D_\Sigma^{-1} W(k)$, D_Σ – диагональная матрица, элементами которой являются среднеквадратичные от-

клонения шумов $W(k)$.

Таким образом, для того, чтобы проверить наличие разладок в дисперсиях шумов $W(k)$ в момент времени ($l = h + 1$), получаем значение статистики C_h и сравниваем ее с процентилями распределения $N(0, v \times (1 - v))$, то есть *распределением броуновского моста* в момент времени $v = h / N$.

Методы обнаружения нарушений изоляционных покрытий подземных трубопроводов. Период эксплуатации подземных газопроводов главным образом зависит от эффективной работы средств электрохимической защиты, коррозионной стойкости основного металла и сварочного соединения труб, а также характера разрушения поверхности металла в местах с нарушенным изоляционным покрытием.

Важнейшим вопросом в обеспечении бесперебойной работы трубопроводных систем является своевременное выявление нарушений повреждений изоляционных покрытий трубопроводов. Одним из методов таких исследований является метод обнаружения нарушений изоляционного покрытия подземных трубопроводов по данным измерений потенциала «труба-земля» станций катодной защиты.

Для системы электрохимической защиты трубопровода, состоящей из n станций, значение общего потенциала «труба-земля» $U_{T-3}(x_j)$ в j -ой точке дискретизации будет определяться следующими соотношениями [7]:

$$U_{T-3}(x_j) = \sum_{i=1}^n \phi_{Ti}(x_j) - \sum_{i=1}^n \phi_{ei}(x_j),$$
$$\phi_{ei}(x_j) = \frac{I_i \times \rho_{gr}}{2 \times \pi \times La^k} \times \ln \left[\frac{(x_j - Xa_i) + \sqrt{(x_j - Xa_i)^2 + Ya_i^2}}{(x_j - (Xa_i + La_i)) + \sqrt{(x_j - (Xa_i + La_i))^2 + Ya^2}} \right],$$
$$\phi_{Ti}(x_{j-1}) = \phi_o(x_{j-1}) - I_{ym_{j-1}} \times R_{np} \times (x_{j-1} - x_{j+2}),$$

где Xa_i , Ya_i , La_i – параметры расположения анодного заземления i -й станции; ρ_{ep} – среднее значение удельного электрического сопротивление грунта на участке $[x_i^{CK3}, x_j]$ [$\Omega \cdot \text{м}$]; R_{np} – продольное сопротивление трубопровода [$\Omega/\text{м}$]; I_i – ток i -й станции, $I_{ym_{j-1}}$ – ток утечки через участок трубопровода $[x_{j-1}, x_j]$.

Выводы. В статье рассмотрены некоторые из алгоритмических методов повышения надежности функционирования ГТС. Учитывая сроки эксплуатации газопроводов и их техническое состояние, в настоящее время необходима

модернизация и техническое переоснащение всей системы с использованием наиболее современных технологий. Также необходима разработка информационно-аналитической системы оперативно-диспетчерского управления, предназначеннной для практической реализации новых информационных, ресурсосберегающих и экологически безопасных технологий транспорта и распределения природного газа. Таким образом, только комплексное использование трех основных способов – структурного, параметрического и алгоритмического – дает возможность повысить надежность поставок природного газа потребителям.

Список литературы: 1. Экономическая безопасность государства и интеграционные формы ее обеспечения / [Тевяшев А.Д., Набатова С.Н. и др.]. под ред. Г.К. Вороновского, И.В. Недина – К.: Знання України, 2007. – 392 с. 2. Тевяшев А.Д. Интеллектуальная система обнаружения утечек и несанкционированных отборов из конденсатопровода / А.Д. Тевяшев, К.В. Кобылинский, А.В. Комелевцев // Проблеми нафтогазової промисловості. – 2007. – № 5 – С. 392–398. 3. Микаэлян Э.А. Техническое обслуживание энерготехнологического оборудования, газотурбинных газоперекачивающих агрегатов системы сбора и транспорта газа / Э.А. Микаэлян. – М.: Наука, 2000. – 304 с. 4. Семенов А.С. Идентификация неисправностей газоперекачивающих агрегатов по функциональным признакам / А.С. Семенов, В.А. Иванов, С.В. Кузьмин, А.Р. Гимадутдинов // Сб. науч. тр. «Нефть и газ. Новые технологии в системах транспорта». – Тюмень: ТюмГНГУ, 2004. – С. 69-74. 5. Олейник А.П. Математические модели процесса квазистационарного деформирования трубопроводных и промышленных систем при изменении их пространственной конфигурации / А.П. Олейник. – Ивано-Франковск : ИФНТУНГ, 2010. – 320 с. 6. Бокс Дженкинс. Анализ временных рядов / Бокс Дженкинс. – 1974. – 288 с. 7. Тевяшев А.Д. Стохастический поход к постановке и решению задачи оперативного планирования режима работы системы ЭХЗ трубопровода / А.Д. Тевяшев, В.Ф. Ткаченко, А.В. Попов, Л.В. Стрижак // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2005. – №15 – С. 94-98.

Поступила в редакцию 25.10.2012

УДК 621.643:62-192

Алгоритмічні методи підвищення надійності роботи газотранспортної системи України / С. М. Іслевська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012. – № 54(960). – С. 74 – 85. – Бібліogr.: 7 назв.

Розглянуто деякі з алгоритмічних методів підвищення надійності функціонування ГТС, а саме: метод оцінювання і моніторингу технічного стану технологічного обладнання ГТС; методи прогнозування зміни оцінки параметрів, які визначають технічний стан технологічного обладнання; методи виявлення порушень ізоляційних покріттів підземних трубопроводів.

Ключові слова: надійність ГТС, алгоритмічні методи, моніторинг, технологічне обладнання, технічний стан.

Address some of the algorithmic methods to improve reliability of the CTA, namely estimation and monitoring of the technical state of technological equipment transportation system, methods of forecasting changes in estimates of the parameters that determine the technical condition of process equipment, and methods of detecting violations of insulating coatings for underground pipelines.

Key words: reliability CTA, algorithmic methods, monitoring, processing equipment, technical condition.

A.B. КИПЕНСКИЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
P.C. ТОМАШЕВСКИЙ, ассист., НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ТУРБИННОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ ПОТОКА ПОРТАТИВНОГО СПИРОМЕТРА

Выполнен детальный анализ процесса движения ротора измерительной спирометрической турбины под действием воздушного потока. В результате исследований получена передаточная функция измерительной турбины. Проведены экспериментальные исследования такой турбины на виртуальной модели. Эти исследования подтверждают возможность использования полученной передаточной функции для восстановления сигнала, соответствующего входному расходу.

Ключевые слова: измерительная турбина, момент движения ротора, передаточная функция, спирометр, турбинный преобразователь потока.

Введение. Наиболее простым и информативным методом оценки функции дыхания является *спирометрия*. Для скрининговых исследований в мировой практике чаще всего используются портативные или, так называемые, (hand-held) приборы [1]. Применение таких приборов целесообразно при проведении спирометрических обследований на предприятиях, в больничных палатах, на дому у пациента.

Анализ современных средств технического обеспечения спирометрии показывает, что в подавляющем большинстве портативных спирометров в качестве первичного измерителя используется турбинный преобразователь потока (ТПП). Это объясняется хорошими массогабаритными показателями преобразователя, достаточно высокой чувствительностью и помехоустойчивостью, низким пневматическим сопротивлением измерительных турбин (ИТ) (порядка 25-50 Па·с/л при расходе 10 л/с), а их постоянная времени не превышает 1 мс [2].

В общем случае ТПП представляет собой устройство, которое преобразует поток воздуха во вращение ротора, а затем, в электрический выходной сигнал. Структурная схема измерительного канала современного спирометра, реализованного на турбинном преобразователе потока, приведена на рис. 1.

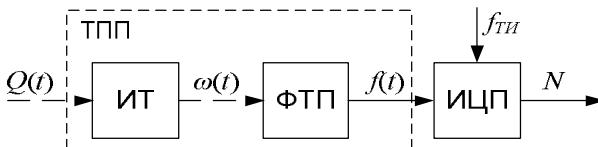


Рис. 1 – Структурная схема измерительного канала спирометра, реализованного на турбинном преобразователе потока.

Измерительная турбина конструкция, которой показана на рис. 2, в данной системе используется в качестве первичного преобразователя воздушного потока и преобразует объемную скорость воздуха $Q(t)$ в угловую скорость ротора $\omega(t)$. Вторичный измеритель представляет собой фотоэлектрический тахометрический преобразователь, который преобразует вращение пластины в электрический сигнал с частотой $f(t)$, пропорциональной $\omega(t)$.

Преобразование частоты $f(t)$ в цифровой код N осуществляется с помощью импульсного - цифрового преобразователя с частотно-импульсным законом преобразования классическим методом последовательного счета [3]. Данный метод позволяет осуществлять преобразование в цифровой код текущего значения частоты при достаточно низкой погрешности преобразования.

Однако, обычно класс турбинных преобразователей характеризуется низкой точностью измерений, что обусловлено представлением их передаточной функции линейной зависимостью во всем диапазоне измерения скорости воздушного потока [1]:

$$Q = a + \frac{\omega}{\varphi}, \quad (1)$$

где Q – расход воздуха через турбину; ω – угловая скорость ротора; φ – передаточный коэффициент турбинного преобразователя; a – постоянная смещения.

Кроме того, динамические свойства турбины, как правило, не учитываются, что дополнительно снижает точность измерения и, следовательно, затрудняет постановку верного диагноза.

ТПП современного спирометра представляет собой устройство, которое преобразует входной расход воздуха $Q(t)$ в последовательность импульсов, частота следования которых зависит от расхода, а количество – от объема воздуха, прошедшего через преобразователь [4]. При этом точное измерение сигнала, соответствующего входному воздушному потоку по полученным данным, возможно только в случае адекватного математического описания статических и динамических свойств ИТ. Кроме того, такое описание позволяет разработать методику определения передаточных коэффициентов индивидуально для каждой измерительной турбины.

Цель данной статьи состоит в разработке математической модели процессов в турбинном преобразователе потока, учитывающей их нелинейность, инерционность и позволяющей определить передаточную функцию во всем диапазоне измерения скорости воздушного потока.

Анализ влияния моментов движения и сопротивления ротора турбины на процессы преобразований. Для построения адекватной математической модели ТПП необходимо определить и оценить моменты сил, действующих

вующие на ротор ИТ в процессе преобразований.

С целью получения аналитической зависимости расхода воздуха Q_{CT} в статическом режиме от частоты f вращения ротора ИТ, первоначально было проанализировано уравнение движения ротора турбины при постоянном расходе, которое может быть записано в следующем виде:

$$M_d + \sum M_C = 0, \quad (2)$$

где M_d – момент, движущий (вращающий) ротор; $\sum M_C$ – сумма моментов сопротивления (моментов, препятствующих вращению ротора).

Согласно *теореме моментов количества движения* [2] движущий момент на роторе измерительной турбины определяется соотношением, которое называется *уравнение Эйлера*:

$$M_d = m_\Gamma (r_{1CP}v_1 - r_{2CP}v_2), \quad (3)$$

где m_Γ – секундный массовый расход газа, отнесенный к цилиндрическому слою круговой решетки единичной высоты; r_{1CP} и r_{2CP} – средние радиусы цилиндрического слоя, на входе и выходе из него; v_1 и v_2 – окружная составляющая абсолютной скорости газа, перед и за турбиной.

При подстановке в выражение (3) значений скоростей, с учетом их распределения по сечению лопатки, замене линейных показателей на объемные и равнозначности входного и выходного радиуса ИТ ($r_{1CP} = r_{2CP} = r_{CP}$), выражение для момента движения будет иметь вид:

$$M_d = \frac{2\pi}{PF} k_V k_\Delta \frac{\rho r_{CP}^2 Q_{CT}^2}{\eta} - \omega \frac{\rho r_{CP}^2 Q_{CT}}{\eta}, \quad (4)$$

где P – осевая сила от воздействия потока на ротор; F – эффективная площадь турбины; k_V – коэффициент учета неравномерности потока воздуха в нормальном сечении турбины; k_Δ – коэффициент учета прохода воздуха через радиальный зазор; ρ – плотность воздуха; ω – угловая скорость ротора; η – коэффициент структуры потока.

При введении коэффициентов K_1 и K_2 выражение (4) может быть переписано в виде

$$M_d = K_1 Q_{CT}^2 + K_2 \omega Q_{CT}. \quad (5)$$

Кроме того, из (4) можно определить значение коэффициента φ передачи ИТ, выразив его через величину ω :

$$\varphi = \frac{k_V k_\Delta}{PF} - \frac{\eta M_d}{2\pi \rho r_{CP}^2 Q_{CT}^2}, \quad (6)$$

где $\varphi = \omega / 2\pi Q_{CT}$.

Детальный анализ результатов экспериментальных исследований процесса движения ротора ИТ, приведенный в работе [5], позволил выделить основные составляющие суммарного момента сопротивления движению ΣM_C ,

$$\Sigma M_C = M_{\Pi} + M_3 + M_K + M_{CH}, \quad (7)$$

где M_{Π} – момент сил трения в опорах ИТ; M_3 – момент сопротивления, возникающий в зазоре между поверхностью ИТ и ротором; M_K – момент сил трения воздуха о поверхность крыльчатки; M_{CH} – момент сопротивления системы съема информации.

Эти моменты также являются функциями кинематических свойств потока газа, геометрии турбины, частоты вращения ротора и объемной скорости воздушного потока.

Так как в качестве опор ротора в турбине используются втулки без подшипников, то для описания момента M_{Π} в первом приближении может быть использована модель сухого трения скольжения для прямолинейного движения

$$\vec{M}_{\Pi} = K [\vec{R} \times \vec{N}], \quad (8)$$

где K – коэффициент трения; \vec{R} – вектор, направление которого совпадает с осью ротора, а его значение равно длине ротора, \vec{N} – вектор силы реакции опоры.

В силу перпендикулярности векторов выражение (8) может быть переписано в скалярном виде

$$M_{\Pi} = KRN. \quad (9)$$

Сила реакции опоры N при постоянной скорости вращения будет пропорциональна моменту импульса L ,

$$L = J_a \omega, \quad (10)$$

где J_a – момент инерции ротора.

Таким образом, момент сил трения в опорах измерительной турбины с учетом (10) будет линейно зависеть от угловой скорости ротора

$$M_{\Pi} = k_1 \omega, \quad (11)$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности, соответствующий массе и размерам ротора и коэффициента трения между ротором и опорами.

Момент M_3 сопротивления, возникающий в зазоре между внутренней поверхностью турбины и ротором, равен произведению касательного напряжения и площади поверхности. В свою очередь касательное напряжение, в нашем конкретном случае, будет одинаково в любой точке поверхности цилиндра постоянного радиуса и целиком зависит от объемной скорости воздушного потока

$$M_3 = k_2 Q_{CT}, \quad (12)$$

где k_2 – коэффициент пропорциональности, определяемый геометрическими размерами измерительной турбины.

Момент M_K сил трения воздуха о поверхность крыльчатки существенно зависит от режима прохождения воздушного потока через турбину и трудно поддается аналитическому описанию. В работе [5] приведена такая зависимость, полученная экспериментальным путем, которая может быть представлена в виде

$$M_K = k_C k_K Q_{CT}^2, \quad (13)$$

где k_C – коэффициент сопротивления, k_K – коэффициент, зависящий от конфигурации крыльчатки и густоты ее решетки.

Момент M_{CI} сопротивления системы съема информации можно считать близким к нулю и не учитывать при расчетах, так как фотоэлектрический тахометрический преобразователь не вносит дополнительного сопротивления в измерительную часть спирометра.

С учетом приведенных выражений (5), (7), (11)-(13), уравнение (2) может быть записано в виде

$$k_{A1} Q_{CT}^2 + k_{B1} Q_{CT} + k_{C1} Q_{CT} f + k_{D1} f = 0, \quad (14)$$

где $f = \omega / 2\pi$ – частота вращения ротора; k_{A1} , k_{B1} , k_{C1} , k_{D1} – коэффициенты, зависящие от геометрии турбины и свойств потока.

Данное выражение позволяет оценить влияние на процесс преобразования основных составляющих сил движения и сопротивления, однако не учитывает динамических свойств ИТ.

Влияние инерционности ротора измерительной турбины на результат преобразований. Динамическая составляющая передаточной функции ТПП обычно условно рассматривается в виде суммы реакции ротора с присоединенным потоком и реакции тахометрического устройства [2, 5]. В силу использования фотоэлектрического метода преобразования вторая составляющая при дальнейшем анализе учитываться не будет.

В первом приближении ротор ИТ с присоединенным воздушным потоком может быть представлен как апериодическое инерционное звено первого порядка и описан уравнением

$$\tau \frac{df}{dt} + f = Q\varphi, \quad (15)$$

где τ – постоянная времени.

Здесь следует отметить, что данное выражение предполагает линейную зависимость между входным расходом и частотой вращения ротора при постоянных расходах, то есть наличие постоянного коэффициента передачи φ для турбины.

При изменении значения расхода воздуха в процессе вдоха/выдоха пациента передаточная функция преобразователя становится нелинейной, а текущая *постоянная времени* τ уравнения (15) будет зависеть от входного сигнала (в определенном диапазоне). Выразив из (15) входной расход, получим

$$Q = \frac{f}{\varphi} \left(\frac{\tau}{f} \cdot \frac{df}{dt} + 1 \right), \quad (16)$$

где первый сомножитель – это статическая составляющая передаточной функции с линейным характером, а второй сомножитель (в скобках) – динамическая составляющая.

Окончательно передаточная функция может быть представлена в виде

$$Q = Q_{CT}(f) \left(\frac{\tau}{f} \cdot \frac{df}{dt} + 1 \right), \quad (17)$$

где $Q_{CT}(f)$ – статическая составляющая передаточной функции ТПП с некоторой нелинейной зависимостью между входной и выходной величинами, которая может быть получена путем решения уравнения (14).

Определение передаточной функции турбинного преобразователя потока. Для практического использования в цифровом портативном спирометре передаточная функция должна быть представлена в дискретном виде $Q_i = f(T_i)$ и учитывать влияние статических и динамических свойств преобразователя.

Решим уравнение (14) относительно Q_{CT} и объединим коэффициенты при f с равными степенями. Получим выражение для определения статической составляющей расхода

$$Q_{CT} = k_{A2} + k_{B2}f + \sqrt{k_{C2} + k_{D2}f + k_{E2}f^2}, \quad (18)$$

где k_{A2} , k_{B2} , k_{C2} , k_{D2} , k_{E2} – коэффициенты полученного уравнения

Для упрощения полученного выражения уточним пределы изменения входного сигнала. Согласно объединенных требований международных профильных организаций *Американского торакального сообщества (ATS)* и *Европейского респираторного общества (ERS)* измеряемые расходы при исследовании функции внешнего дыхания (ФВД) находятся в диапазоне (0,1 – 14 л/с.) Исследования, проведенные в пакете MathCad с использованием экспериментальных результатов, позволили преобразовать выражение (18) без существенной потери точности к виду

$$Q_{CT} = k_{A3} + k_{B3}f + \sqrt{k_{C3}f}, \quad (19)$$

где k_{A3} , k_{B3} , k_{C3} – коэффициенты упрощенного уравнения.

Сравнение выражений (18) и (19), описывающих процессы в ТПП при

постоянном расходе, показало, что в заданном диапазоне изменения расходов различия между ними в определении Q_{CT} не превышают 1 %.

Для получения передаточной функции в дискретном виде необходимо в уравнении (19) непрерывную величину f заменить ее дискретными значениями f_i и выразить последние через период T_i (то есть $f_i = 1/T_i$) при дискретных значениях расхода Q_{CTi} . Тогда

$$Q_{CTi} = a_1 + \frac{a_2}{T_i} + \frac{a_3}{\sqrt{T_i}}, \quad (20)$$

где $a_1 = k_{A3}$, $a_2 = k_{B3}$, $a_3 = \sqrt{k_{C3}}$ – расчетные коэффициенты.

Учесть влияние динамической составляющей передаточной функции возможно при подстановке выражения (20) в (17):

$$Q = \left(a_1 + \frac{a_2}{T_i} + \frac{a_3}{\sqrt{T_i}} \right) \cdot \left(\frac{\tau}{f} \cdot \frac{df}{dt} + 1 \right). \quad (21)$$

После некоторых замен, выражение (21) может быть приведено к виду

$$Q_i = \left(a_1 + \frac{a_2}{T_i} + \frac{a_3}{\sqrt{T_i}} \right) \cdot \left(\tau T_i \cdot \frac{1/T_i - 1/T_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + 1 \right). \quad (22)$$

Введем обозначение $\tau = a_4$, и окончательно получим:

$$Q_i = \left(a_1 + \frac{a_2}{T_i} + \frac{a_3}{\sqrt{T_i}} \right) \cdot \left(a_4 \cdot \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i \cdot T_{i-1}} + 1 \right). \quad (23)$$

Последнее выражение позволяет получить представление о поведении ТПП при переменных расходах и дает возможность скорректировать результаты измерений.

Экспериментальные исследования ТПП. Для проведения исследований в CAD-пакете SolidWorks 2010 было выполнено проектирование турбины, аналогом для которой послужила спирометрическая измерительная турбина фирмы *Medial international Research* (MIR). Измерительная турбина MIR состоит из двух основных частей: тела турбины и ротора. Тело турбины представляет собой полый цилиндр из пластика с диаметром равным 32 мм и высотой 41 мм. Внутри цилиндра размещены две неподвижные крыльчатки, расположенные на расстоянии 10 мм друг от друга и противоположно направленные. Они в ИТ выполняют роль направляющего аппарата. Каждая крыльчатка содержит по 8 лопаток (густота решетки равна 1,5). Внешний вид и основные геометрические размеры модели тела турбины приведены на рис. 2.

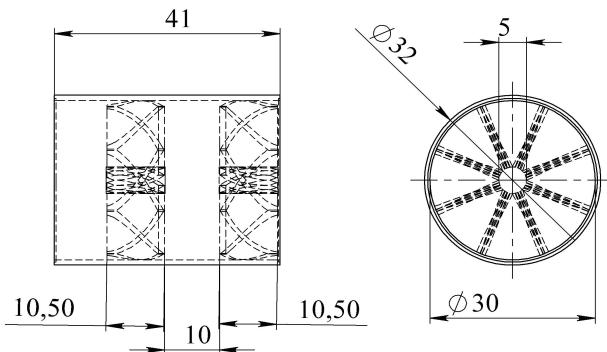


Рис. 2 – Основные размеры модели тела измерительной турбины.

Ротор ИТ представляет собой пластину толщиной 0,8 мм, по центру которой проходит ось с диаметром, равным толщине пластины. Материал оси – нержавеющая сталь, пластины ротора – полистилен. В качестве узлов соединения ротора и тела турбины использованы фторопластовые втулки (коэффициент трения фторопласт - нержавеющая сталь принят равным 0,04).

На основе полученной математической модели (см. выражение (23)) была разработана методика определения коэффициентов a_i передаточной функции ТПП и проведены исследования ИТ на виртуальной модели. Определение значений коэффициентов проводилось в два этапа, где условно разделялись статическая и динамическая составляющие передаточной функции.

Первый этап определения проводился путем подачи на вход виртуальной модели постоянных расходов, во всем диапазоне их измерения (0 – 14 л/с). При этом производился расчет периодов вращения ротора T_i . Таким образом задача первого этапа состояла в определении коэффициентов статической составляющей функции преобразования ТПП (см. выражение (19)). Вычисление значений коэффициентов a_1 , a_2 , a_3 производились путем решения системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 / T_1 + a_3 / \sqrt{T_1} = Q_1; \\ a_1 + a_2 / T_2 + a_3 / \sqrt{T_2} = Q_2; \\ \dots \\ a_1 + a_2 / T_m + a_3 / \sqrt{T_m} = Q_m, \end{array} \right. \quad (24)$$

где Q_i – значение постоянного расхода, m – количество численных экспериментов.

Полученные при этом значения коэффициентов для рассмотренной модели составили: $a_1 = 0,02932$; $a_2 = 0,0844$; $a_3 = 0,0306$.

Второй этап определения значений коэффициентов передаточной функции заключался в нахождении коэффициента a_4 ее динамической составляющей. На практике этот коэффициент равен текущей *постоянной времени* τ (см. выражение (23)). В процессе экспериментальных исследований входной сигнал ТПП формировали путем подачи воздуха объемом 1 л/секунду различными законами изменения скорости $Q(t)$ потока, что имеет место в реальных условиях при выполнении дыхательных тестов. Всего было проанализировано десять таких вариантов. Некоторые из них приведены на рис. 3.

Калибровочное уравнение для каждой модели можно составить путем интегрирования зависимости $Q(t)$ расхода воздуха от времени. Результатом интегрирования этой зависимости за время теста будет объем равный 1 л. Полученные в результате моделирования значения периодов T_i используются для определения коэффициента a_4 передаточной функции преобразователя путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \left(a_1 + \frac{a_2}{T_{1,i}} + \frac{a_3}{\sqrt{T_{1,i}}} \left(a_4 \cdot \frac{T_{1,i} - T_{1,i-1}}{T_{1,i} \cdot T_{1,i-1}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{T_{1,i}} \right) = 1; \\ \sum_{i=1}^m \left(a_1 + \frac{a_2}{T_{2,i}} + \frac{a_3}{\sqrt{T_{2,i}}} \left(a_4 \cdot \frac{T_{2,i} - T_{2,i-1}}{T_{2,i} \cdot T_{2,i-1}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{T_{2,i}} \right) = 1; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m \left(a_1 + \frac{a_2}{T_{10,i}} + \frac{a_3}{\sqrt{T_{10,i}}} \left(a_4 \cdot \frac{T_{10,i} - T_{10,i-1}}{T_{10,i} \cdot T_{10,i-1}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{T_{10,i}} \right) = 1. \end{cases} \quad (25)$$

Значение коэффициента a_4 передаточной функции (23) ТПП оказалось равным 0,3542.

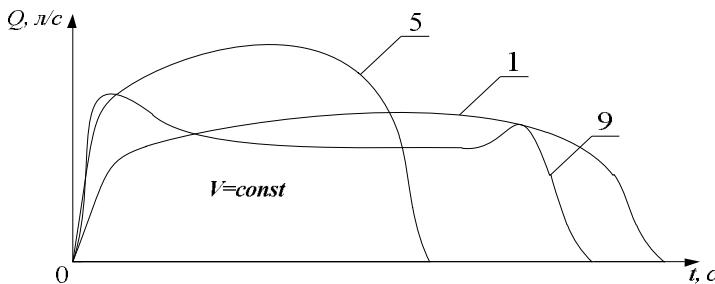


Рис. 3 – К пояснению второго этапа определения коэффициентов.

Для проверки адекватности полученной передаточной функции ТПП на

вход модели подавали стандартные формы (всего 26) входного потока, используемые для оценки динамической погрешности спирометра ATS WAVE26 [6]. В результате этого были получены значения угловой скорости ротора ω_i с присоединенным потоком воздуха, а затем и значения периодов $T_i = 2\pi / \omega_i$.

Стандартные потоки WAVE26 представляют собой серию наиболее типичных выдохов при спирометрических исследованиях, представленных в табличном виде $Q_i = f(t_i)$ с шагом t_i , равным 0,002 с. Адекватное измерение спирометром данной серии сигналов достаточно для определения основной погрешности прибора при измерении спирометрических сигналов.

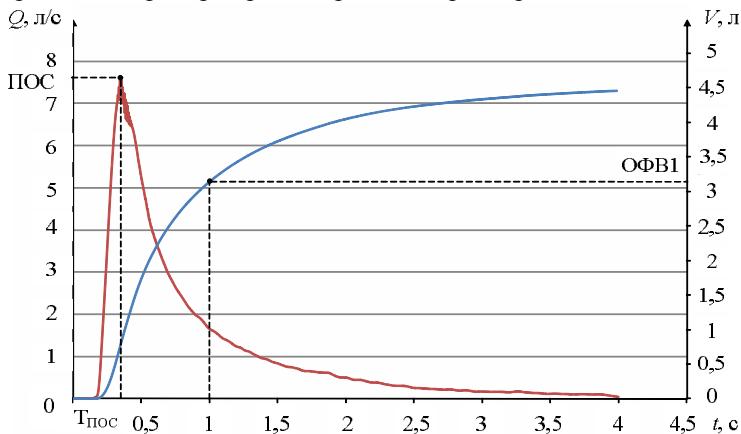


Рис. 4 – Восстановленные зависимости $Q(t)$ и $V(t)$.

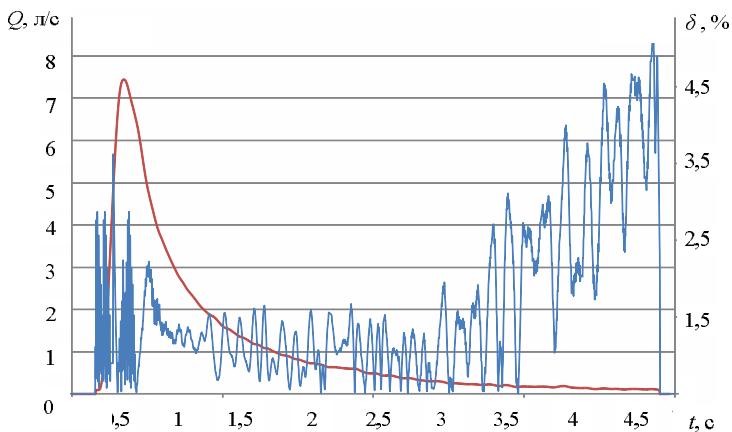


Рис. 5 – Относительная погрешность измерения расхода.

В качестве критерия оценки в данном случае, принимали показатели ФВД рекомендованные Европейским и Американским респираторными со-обществами – пиковая объемная скорость (ПОС), время $T_{\text{ПОС}}$ ее достижения и объем форсированного выдоха за первую секунду (ОФВ1).

По полученным значениям периодов T_i с использованием полученной передаточной функции ТПП (23) была восстановлена входная функция $Q_i = f(t_i)$ и определены значения указанных выше показателей ФВД для каждого из 26 потоков. Определение значения объема воздуха, прошедшего через ТПП, выполнялось по выражению

$$V = \sum_{i=0}^n Q_i \cdot T_i, \quad (26)$$

где n – количество отсчетов; i – номер отсчета.

На рис. 4 показан восстановленный входной поток № 1 и изображены необходимые показатели ФВД.

Для оценки точности восстановления входного сигнала предложенным методом были вычислены погрешности преобразования входного сигнала для каждого из отсчетов входной функции. Проведенный анализ позволил определить, что наибольшие значения погрешности (до 0,05) преобразования входного сигнала появляются при значениях входного расхода менее 0,3 л/с (рис. 5).

По результатам исследования были вычислены относительные погрешности определения контрольных показателей ФВД. Анализ результатов исследования показал, что при определении объемного показателя ОФВ1 погрешность достигала почти 3 % (см. рис. 6).

При определении временного показателя $T_{\text{ПОС}}$ погрешность не превышала 1,5 % (рис. 7).

При определении скоростных показателей наибольшая погрешность (до 2,7 %, см. рис. 8) наблюдается в выдохах с большими значениями dQ/dt . К таким входным расходам могут быть отнесены сигналы с ПОС более 10 л/с. В WAVE26 это сигналы с номерами 2, 12, 15, 25, 26.

Результаты исследований. На основании исследований процессов в турбинном преобразователе потока, проведенных с помощью разработанной математической модели, были получены следующие результаты.

Анализ моментов сил, действующих на ротор измерительной турбины, позволил получить статическую составляющую передаточной функции ТПП в виде аппроксимирующего выражения с тремя коэффициентами (выражения (19), (20)).

Исследования динамических свойств ротора ИТ позволили установить, что он является апериодическим звеном первого порядка с соответствующей динамической характеристикой, значение постоянной времени которой, зави-

сит от входного расхода.

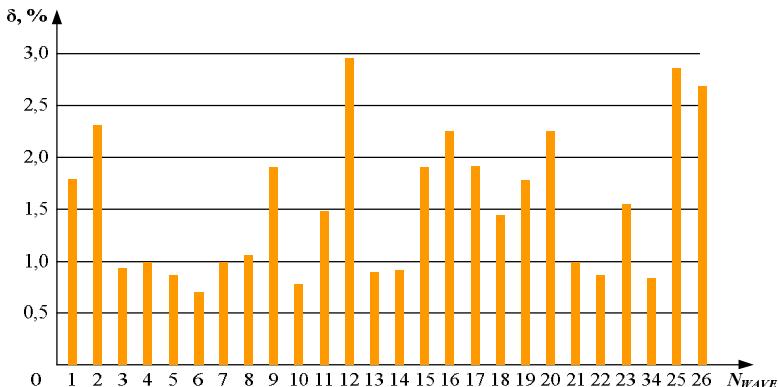


Рис. 6 – Относительная погрешность измерения ОФВ1.

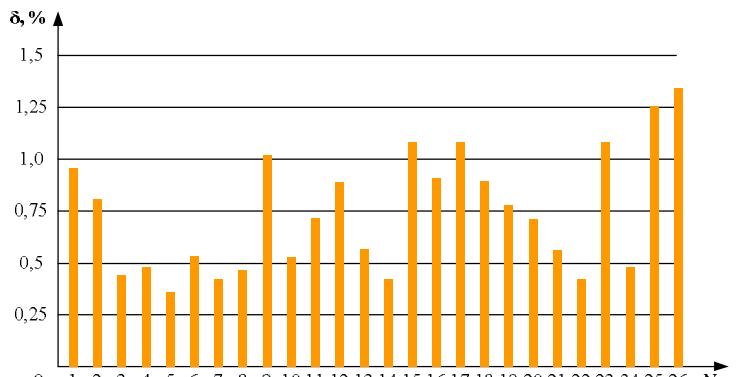


Рис. 7 – Относительная погрешность измерения T_{POS} .

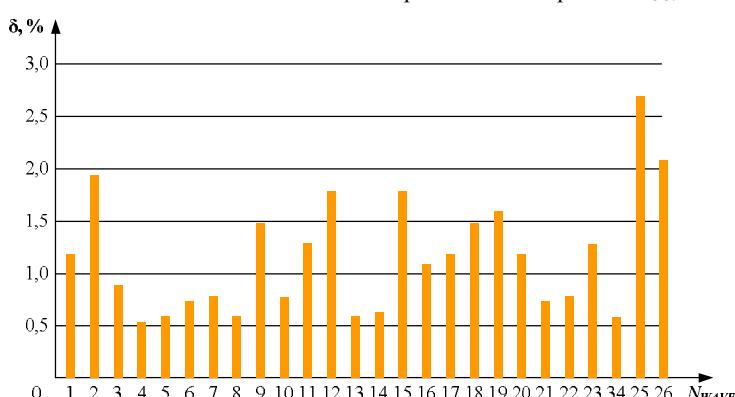


Рис. 8 – Относительная погрешность измерения ПОС.

Была предложена и обоснована передаточная функция турбины вида $Q_i = f(T_i)$ (выражение (23)), для определения коэффициентов которой была разработана оригинальная методика.

Исследования, проведенные при использовании специализированного инженерного пакета Flow Simulation, подтвердили работоспособность методики и возможность определения показателей ФВД с погрешностями, не превышающими допустимых значений.

Список литературы: 1. Сахно Ю. Ф. Исследование вентиляционной функции легких: учебно-методическое пособие – М.: Издательство РУДН, 2005. – 83 с. 2. Бошняк Л. Л. Тахометрические расходомеры – Л.: Машиностроение, 1968. – 212 с. 3. Кипенский А. В. Импульсно-цифровые и цифро-импульсные преобразователи: Учеб. пособие. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2000. – 132 с. 4. Измерительная система современного спирометра и пути ее усовершенствования / Е.И.Сокол, А.В. Кипенский, Р.С. Томашевский, Е.И. Король // Вестник НТУ ХПИ «Новые решения в современных технологиях». – Харьков, 2009. – № 37. – С. 22-25. 5. Бобровников Г. Н. Теория и расчет турбинных расходомеров. – М.: Издательство стандартов, 1978. – 128с. 6. <http://www.thoracic.org/education/pulmonary-function-testing/spiroometry-wave-forms/wave26/W500.TXT>

Поступила в редакцию 25.10.2012

УДК 615.47

Математическое моделирование процессов в турбинном преобразователе потока портативного спирометра / А.В. Кипенский, Р.С. Томашевский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54(960). – С. 86–98. – Бібліogr.: 6 назв.

Проведено детальний аналіз процесу руху ротора вимірювальної спірометрічної турбіни під дією повітряного потоку. В результаті досліджень отримана передатна функція вимірювальної турбіни. Проведено експериментальні дослідження на віртуальній моделі, які підтверджують можливість використання отриманої характеристики для відновлення функції вхідного витрати.

Ключові слова: вимірювальна турбіна, момент руху ротора, передавальна функція, спірометр, турбінний перетворювач потоку.

The article provides a detailed analysis of the motion of the rotor measuring spirometric turbines under the influence of air flow. The studies obtained transfer function measuring turbine. Experimental studies on the virtual model, which confirm the possibility of using the resulting data to restore function of the input flow.

Key words: measuring turbine, moment of rotor motion, transfer function, spirometry, turbine flow converter.

B.A. КОВАЛЕВ, д-р техн. наук, доц., НТУУ «КПИ», Киев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В РЕЗЕРВУАРАХ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Представлены результаты численного моделирования инерционных течений вязкой несжимаемой жидкости в цистернах и танках нефтеналивных судов. Приведены расчетные гидродинамические поля циркуляционных течений в целиком заполненных резервуарах, проведен анализ распределения компонент вектора скорости, давлений и структуры циркуляционных течений в меридиональных плоскостях. Оценивается силовое влияние течений жидкости на стенки резервуаров и устойчивость подвижных объектов с жидкостью.

Ключевые слова: вязкая жидкость, циркуляционное течение, гидродинамическое поле, уравнения Навье – Стокса, кориолисово ускорение, устойчивость подвижных резервуаров.

Введение. Возрастание в последние десятилетия интенсивности и масштабов грузовых перевозок предъявляет более высокие требования к безопасности транспортирования грузов и надежности управления подвижными объектами. С этой точки зрения особое внимание уделяется перевозкам больших объемов жидких грузов, например, нефтепродуктов, сжиженных газов или других жидкостей, среди которых могут быть вредные для окружающей среды вещества.

Например, во избежание резонансного пlesкания жидкости в танках нефтеналивного судна в штормовых условиях при подготовке к транспортировке производится их заполнение жидким продуктом до полного объема и затем «задраивание» танков. Таким образом, удается избежать существенного проявления возмущений со стороны жидкости и их влияния на устойчивость судна [1]. При транспортировке жидкостей автомобильными и железнодорожными цистернами на криволинейных участках траектории движения также могут возникать неустойчивости из-за инерционных возмущений со стороны

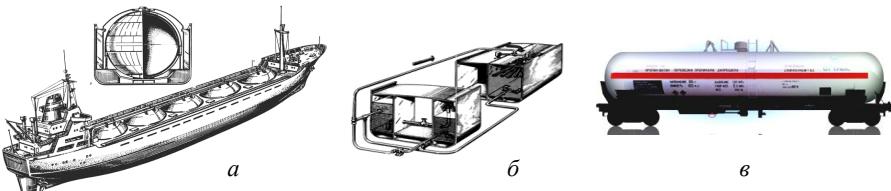


Рис.1 – Внешний вид резервуаров объектов с жидкостью [1, 2]:
а – сфера; *б* – параллелепипед; *в* – цилиндр.

жидкости, что может привести к аварийным ситуациям (рис.1). Поэтому

© В.А. Ковалев, 2012

научные изыскания в этой области, основанные на теоретических и экспериментальных исследованиях, представляются весьма актуальными.

Экспериментальные исследования течений в ограниченных объемах связаны с разработкой и созданием специальных гидродинамических стендов, позволяющих моделировать в лабораторных условиях те или иные виды течений, а также созданием соответствующей измерительной и регистрирующей аппаратуры для фиксации параметров течений. Кроме того, при физическом моделировании течений с помощью стендов необходимо строгое соответствие основным критериям подобия, позволяющим распространить результаты моделирования на реальные условия и габариты подвижных объектов.

В последние десятилетия, в связи существенным возрастанием вычислительных возможностей компьютерной техники и многочисленными теоретическими исследованиями течений в ограниченных объемах стали популярными и эффективными методы численного моделирования на основе уравнений движения жидкости с соответствующими граничными и начальными условиями. Численное интегрирование уравнений с помощью методов конечных разностей, объемов и конечных элементов позволяет получить приближенные решения полных уравнений движения жидкости с достаточно высокой точностью, сопоставить результаты расчетов с существующими экспериментальными данными и сделать вывод о корректности той или иной математической модели течений.

Постановка задачи численного моделирования течений в резервуарах. В лаборатории гидродинамики Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт» проводился комплекс экспериментальных исследований поведения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченных объемах с помощью специально разработанных экспериментальных стендов, измерительной и регистрирующей аппаратуры [3, 4]. Полученные экспериментальные результаты послужили основой для разработки математических моделей течений и позволили достаточно корректно сформулировать задачи, установить граничные и начальные условия.

В качестве базовых были приняты *полные уравнения Навье-Стокса* течения вязкой несжимаемой жидкости, выражающих воздействие основных гидродинамических факторов – конвективных ускорений, сил Кориолиса, центрробежных сил инерции и градиентов давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

а также уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где u , v и w – соответственно окружная, радиальная и меридиональная компоненты вектора скорости; p – давление в течении; Re – центробежное число Рейнольдса, $\text{Re} = \Omega \cdot r^2 / v$, Ω – угловая скорость сосуда; r – расстояние до оси вращения; v – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Для решения уравнений (1) и (2) в терминах компонент вектора скорости и давления широко применяется *метод переменных направлений*, а для уравнений в терминах функции тока и завихренности – *метод последовательной релаксации*. В указанном методе градиенты течения в вертикальном направлении аппроксимируются и корректируются итерациями по времени.

Итерационная процедура по времени позволяет избежать взаимного влияния узлов расчетной сетки в поперечном направлении, уменьшающих в свою очередь область вычислений, и снизить время вычислений. Для всех пространственных переменных во внутренней области можно применить центральные разности, а производные по времени можно аппроксимировать односторонними разностями второго порядка на трех уровнях.

Согласно условиям имитационного моделирования с помощью метода конечных элементов производилось построение области моделирования, которая разбивалась на сетку с соответствующим количеством узлов [3]. Уравнения движения жидкости дополнялись соответствующими начальными и граничными условиями, известными гипотезами и допущениями

Например, пусть круглый цилиндрический сосуд, целиком заполненный несжимаемой жидкостью, вплоть до момента времени $t \leq 0$ вращается как сплошное твердое тело вокруг своей вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω . При рассмотрении течения в системе координат, жестко связанной с оболочкой, все компоненты вектора скорости u , v и w , а также градиент давления равны нулю. То есть, начальные условия задачи представляются в виде:

$$\text{при } t \leq 0, \quad v = w = 0, \quad u = \Omega_0 \cdot R. \quad (3)$$

При $t > 0$ оболочка внезапно останавливается, тогда как жидкость в резервуаре продолжает двигаться под действием сил инерции. В результате возникает инерционное азимутальное течение относительно стенок сосуда, которое сопровождается образованием меридиональных циркуляций. При этом из условий прилипания жидкости к стенкам сосуда все составляющие скорости на стенах равны нулю:

$$\text{при } R = R_0, \quad u = v = w = 0, \quad (4)$$

а в предположении об осевой симметрии течения все скорости на оси сосуда также равны нулю:

$$\text{при } R = 0, \quad u = v = w = 0.$$

Для численного решения уравнений движения использовались стандартные пакеты прикладных программ [3, 4], позволяющие моделировать основные нелинейные особенности распределения гидродинамических параметров в широком диапазоне чисел Рейнольдса $Re=700\ldots12500$.

Анализ результатов численного моделирования течений в резервуарах подвижных объектов. Одной из важных особенностей численного моделирования с помощью прикладных программ является достаточно широкий круг задач, неограниченные размеры области компьютерных вычислений и широкий диапазон изменения критериальных параметров. Это позволяет получить результаты для натурных объектов с жидкостью и исключить многие критериальные оценки гидродинамических особенностей замкнутых течений.

На рис.2 приведены результаты расчета поля давлений в танках с прямоугольным меридиональным сечением при бортовой качке нефтеналивного судна для различных чисел Рейнольдса.

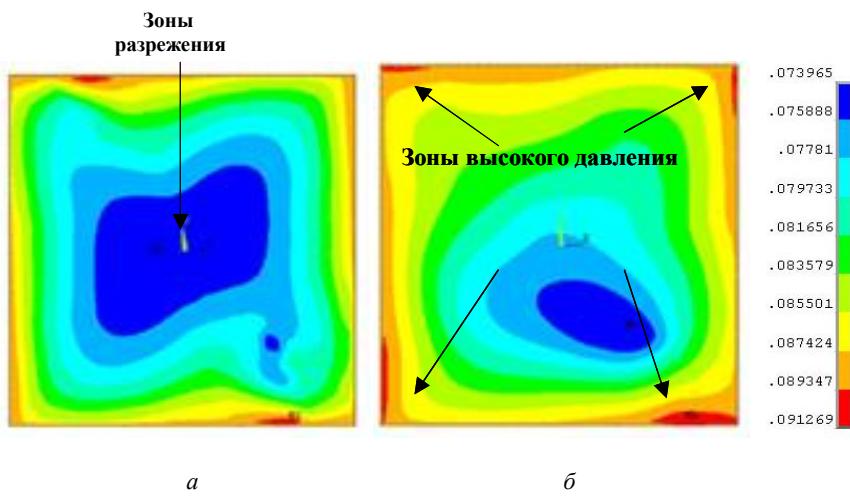


Рис.2 – Контурные распределения давления в меридиональной плоскости в танках при бортовой качке судна-танкера:
а – $Re=1250$; б – $Re=1520$.

При малых числах Рейнольдса $Re=1100$, что соответствует угловым скоростям $\Omega=0,09$ 1/с, характерным для подобных ситуаций, имеет место почти симметричное распределение давления, однако, уже при $Re=1520$ наблюдается смещение центра циркуляции к стенкам судна.

Для количественного определения круговых возмущающих моментов целесообразно построение поля меридиональной скорости и установление структуры циркуляций, примеры которых приведены на рис.3.

Как видно из рисунка, в меридиональном сечении возникает устойчивая одно - циркуляционная структура, являющаяся базовой для формирования кругового возмущающего момента. При этом около вершин квадрата возникают устойчивые циркуляционные области, направление течения в которых противоположно течению в центре сосуда.

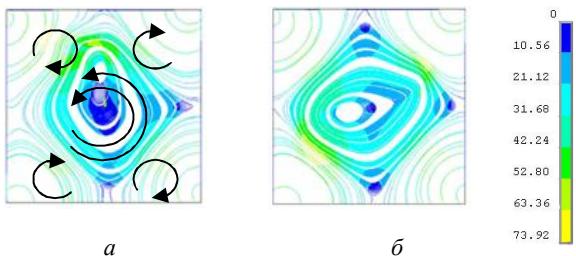


Рис. 3 – Траектории жидких частиц и контурное изображение поля скорости в меридиональном сечении танка:
а - $Re=1100$; б - $Re=1250$.

Поскольку указанные циркуляции имеют преобладающую площадь контакта со стенками сосуда (до 90%) по сравнению с базовой циркуляцией в центре резервуара, именно они характеризуют величину возмущающего кругового момента и зависимость ее от времени течения. При возрастании безразмерного времени инерционного течения $T=\Omega \cdot t=5,67\dots 11,2$ влияние приостановленных областей распространяется на базовую циркуляцию, уменьшая соответственно занимаемое ею пространство и увеличивая суммарное возмущающее влияние на стенки резервуара. Как и в сосудах цилиндрической и сферической конфигурации, эволюция циркуляций в пространстве танка хорошо прогнозируется и представляет собой экспоненциальное уменьшение скорости, и, следовательно, возмущающих круговых моментов воздействия жидкости на стенки.

При рассмотрении задачи об инерционном круговом течении жидкости в автомобильной цистерне, пример которой приведен на рис. 4, имеют место следующие граничные и начальные условия. Ось вращения находится за пределами сосуда, имитируя радиус кривизны траектории движения автомобиля, например, при повороте дороги. Учитывая среднюю скорость движения автомобиля (50...80 км/час) и диапазон радиусов кривизны дороги ($R=300\dots 800$ м), можно составить критериальные зависимости, позволяющие определить условия имитационного моделирования движения.

Как видно из рисунка, около стенок, расположенных ближе к оси вращения,

Области разрежения

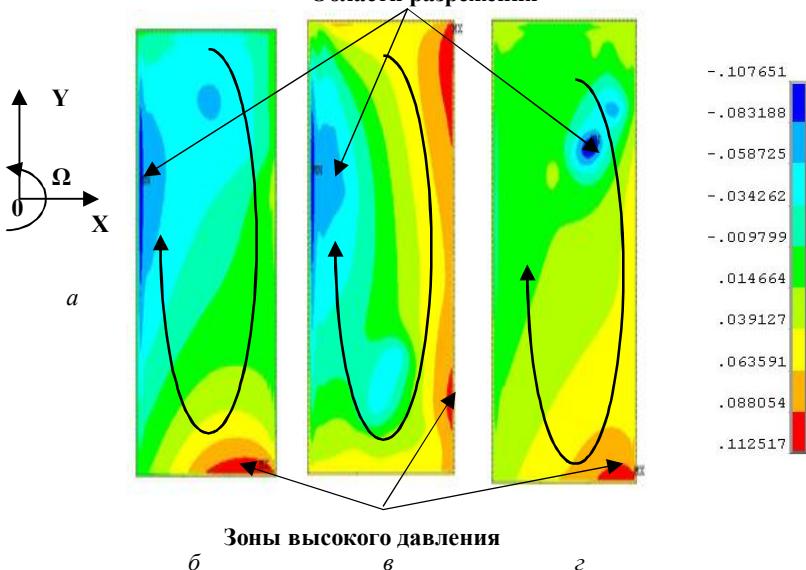


Рис.4 – Система координат и контурное изображение поля давления

при круговом течении жидкости в автомобильной цистерне:

a – система координат; *б* – $Re=950$; *в* - $Re=1120$; *г* – $Re=1230$.

наблюдаются области разрежения, свидетельствующие о влиянии центробежных сил инерции, пропорциональных радиусу кривизны траектории и продольной компоненте вектора скорости. В задней (на рисунке – нижней) торцевой области сосуда возникают зоны повышенного давления типа приливных течений, инициирующие появление продольной циркуляции (рис.4 *в*) в горизонтальной плоскости сосуда. Однако, на устойчивость объекта эта структура заметного влияния не оказывает, тогда как циркуляции в меридиональном сечении сосуда могут существенно влиять на устойчивость движения цистерны.

В периферийной области сосуда наблюдается увеличение давления (правая область на рис.4 *б*) и меньшие по величине меридиональные скорости w . Однако, круговые моменты вязкого трения жидкости о стенки сосуда представляются весьма малыми и их влиянием на характер движения подвижного объекта можно пренебречь. Учитывая то обстоятельство, что максимальная скорость движения автомобиля-цистерны ограничивается диапазоном 50...60 км/час, возмущающие круговые моменты составляют не более

$$M_{kp} = 2 \dots 4,5 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

и могут компенсироваться упругими опорами в виде усиленной ходовой части автомобиля.

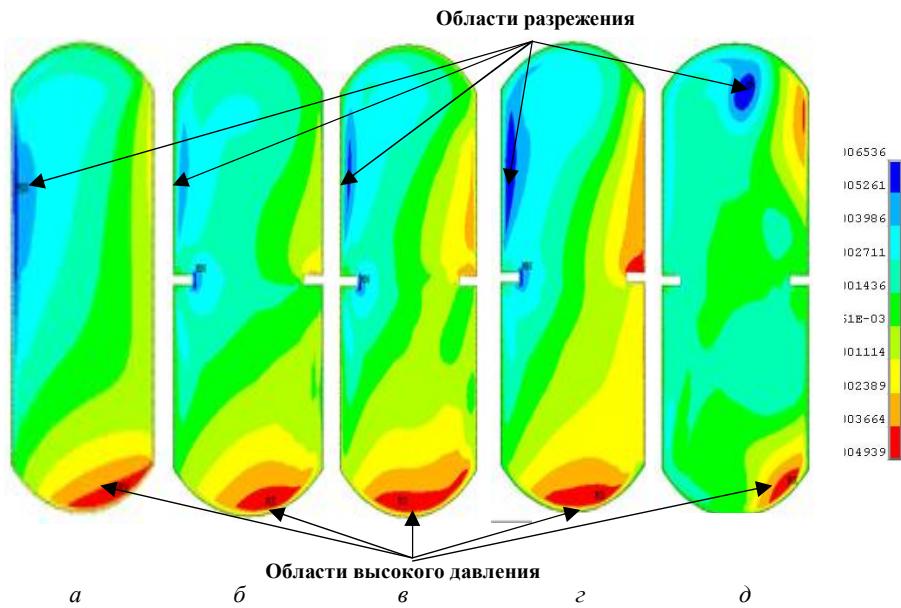


Рис.5. Поля давления в железнодорожной цистерне при движении по криволинейной траектории при $Re_0 = 2580$ при различных T : a – без перегородок; a, b – $T=0,42$; b – $2,73$; c – $7,12$; d – $17,6$.

Для задачи о круговом течении жидкости в полости железнодорожной цистерны, объем которой может составлять до 50 м^3 , и скорости движения состава до 120 км/час, величины возмущающих круговых моментов существенно возрастают и могут составлять до 500 Н·м. Поскольку при движении железнодорожной цистерны в составе поезда радиус кривизны траектории достаточно велик (порядка 1...3 км), то при моделировании возмущающих воздействий со стороны жидкости угловые скорости объекта на криволинейной траектории представляются весьма малыми ($\Omega_0 = 0,001 \dots 0,01 \text{ 1/c}$). При этом диапазон чисел Рейнольдса составляет $Re = 2500 \dots 15000$, который можно промоделировать с помощью уравнений движения с соответствующими граничными и начальными условиями, выраженным равенствами (1) – (4).

Результаты расчета течений при движении железнодорожной цистерны по криволинейной траектории приведены на рис.5. Как видно из рисунка, области разрежения в графических зависимостях давления позволяют установить координаты центров циркуляций и способствуют прогнозированию развития вторичного течения и его влияние на поле скоростей во всем пространстве резервуара. Кроме того, эти области существенно влияют на особенности построения поля скоростей основного потока и вторичных течений: радиальной v и меридиональной w компонент вектора скорости жидкости.

Выводы. Результаты имитационного моделирования течений в подвижных объектах, содержащих емкости с жидкостью, позволяют сделать вывод о геометрическом их подобии и возможности применения *критериальных зависимостей Рейнольдса, Россби, Струхала, Эйлера и Ньютона*. Это позволяет использовать для расчетов гидродинамических полей течений и определения основных силовых воздействий жидкости на стенки резервуаров математические модели с учетом начальных и граничных условий, специальных гипотез и допущений.

Представленные численные результаты являются одним из примеров количественного определения возмущений со стороны жидкости, что позволяет организовать компенсационные мероприятия в виде внутренних перегородок или демпфирующих элементов для обеспечения устойчивости и надежности движения объекта с жидкостью. Указанные результаты можно распространить на другие диапазоны скоростей движения, геометрические параметры объекта и объемы жидкости.

Список литературы: 1. Сайт о морских судах. Как устроены морские суда. Наливные суда (танкеры) / [Электр. ресурс] / Режим доступа к журналу: <http://www.seaships.ru/>. 2. Богомаз Г.И. Динамика железнодорожных вагонов-цистерн. – К.: Наукова Думка. – 2004. – 224 с. 3. Ковалев В.А., Крищук Н.Г. Структура циркуляционных течений в ограниченных объемах при инерционном вращении жидкости // Гідрравліка і гідротехніка. – 2010. – Вип. 64. – С. 29-36. 4. Ковалев В.А., Крищук Н.Г., Конюхов А.С. Численное моделирование течений жидкости в емкостях с перегородками // Вестник НТУУ «Киевский политехнический институт», Машиностроение.– 2010. – Вып.59. – С.51 – 55. 5. Xinjun C. A Numerical Study of the Recirculation Zones During Spin-Up and Spin-Down for Confined Rotating Flows // Journal of Theoretical and Computation in Fluid Dynamics. – 2003. – vol.1. – P.31-49.

Поступила в редакцию 15.10.2012

УДК 532.53

Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в резервуарах подвижных объектов / А. В. Ковалёв // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях».–Харків: НТУ «ХПІ».– 2012.– №54(960).–С.99-106. – Бібліогр.: 5 назв.

Представлено результати чисельного моделювання інерційних течій в'язкої нестисливої рідини в цистернах і танках нафтоналивних суден. Наведено розрахункові гідродинамічні поля циркуляційних течій у цілком заповнених посудинах, проведено аналіз розподілу компонент вектора швидкості, тиску і структури циркуляційних течій у меридіональних площинах. Оцінюються сили-ві впливі течій рідини на стінки резервуарів та стійкість рухомих об'єктів з рідиною.

Ключові слова: в'язка рідина, циркуляційна течія, гідродинамічне поле, рівняння Нав'є – Стокса, кориолисово прискорення, стійкість рухомих резервуарів.

The numerical simulations results of inertial viscous incompressible fluid flows in tank cars and tanks of oil tankers. The calculated hydrodynamic fields OF the flow circulations in a fully filled vessels, the analysis of the velocity vector components distributions, pressure and structure of the circulations in the meridional planes of the tanks. We estimate the impact force of fluid flows in the tank wall and the stability of moving objects with fluid.

Key words: viscous liquid, circulating flow, hydrodynamic field, Navies – Stokes Carioles acceleration, stability moving tanks.

Г.В. КРИВЯКИН, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Е.С. РЕДЧЕНКО, ассист., НТУ «ХПИ»

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ ЛИНЕЙНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА ТЯГОВУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ ПРИВОДА НАКЛОНА КУЗОВОВ СКОРОСТНЫХ ПОЕЗДОВ

Рассмотрено влияние конструктивных параметров коаксиального линейного двигателя на форму его тяговой характеристики и значение тягового усилия.

Ключевые слова: линейный двигатель, нагрузочная характеристика, тяговая характеристика.

Введение. Как показывают результаты исследований [1,2,3], применение линейного двигателя в качестве силового привода системы наклона кузова позволяет ликвидировать ряд недостатков, присущих большинству силовых приводов, используемых в настоящее время [4].

Постановка задачи. Исходным моментом к выбору привода механизма наклона кузова являются величина и характер изменения силы, которую необходимо преодолеть для обеспечения наклона кузова на требуемый угол – так называемая *нагрузочная характеристика*.

Как показано в [3] для поезда с типичными геометрическими и массогабаритными показателями нагрузочная характеристика представляет собой практически линейную зависимость естественной возвращающей силы от угла наклона кузова. Для компенсации этой силы необходим *линейный двигатель с тяговой характеристикой*, соответствующей нагрузочной характеристике механизма наклона.

Тяговая характеристика определяет зависимость силы $f_{\text{ЭМ}}$, действующей на перемещающийся якорь двигателя, от величины этого перемещения. Для её расчета используется энергетический подход, в соответствии с которым

$$f_{\text{ЭМ}} = -dW_m/dx , \quad (1)$$

где W_m – полная энергия электромагнитного поля; x – перемещение якоря.

Сила $f_{\text{ЭМ}}$ зависит от многих факторов, таких как геометрические параметры магнитопровода, величина и распределение магнитодвижущей силы, насыщение элементов магнитной цепи, которые сложным образом влияют на величину и форму тяговой характеристики.

В настоящей статье приведены результаты исследований по оценке влияния основных конструктивных параметров линейного двигателя на форму его тяговой характеристики и величину реализуемой силы.

© Г.В. Кривякин, Е.С. Редченко, 2012

Математическая модель и метод расчета. Процессы электромеханического преобразования энергии, происходящие в линейном двигателе, описываются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} U = -e + i \cdot R; \\ -e = d\Psi/dt = \partial\Psi/\partial i \Big|_{x=const} \cdot di/dt + \partial\Psi/\partial x \Big|_{i=const} \cdot dx/dt; \\ L = \partial\Psi/\partial i \Big|_{x=const}; \\ K_3 = \partial\Psi/\partial x \Big|_{i=const}, \end{cases} \quad (2)$$

где U – напряжение на электромагнитном двигателе; e – электродвижущая сила; i – ток линейного двигателя; R – сопротивление обмотки электромагнитного двигателя; определяемое числом ее витков w ; L – индуктивность электромагнитного двигателя; Ψ – потокосцепление.

В данном случае коэффициент K_3 представляет собой *противо-ЭДС*, обусловленную изменением координаты x якоря при постоянстве тока – то есть электродвижущую силу,

$$U = L \cdot di/dt + K_3 \cdot V_T + i \cdot R, \quad (3)$$

где $V_T = dx/dt$ – скорость перемещения якоря.

После приведения уравнения (3) к нормальной форме, общая система дифференциальных уравнений линейного двигателя электромагнитного типа примет вид:

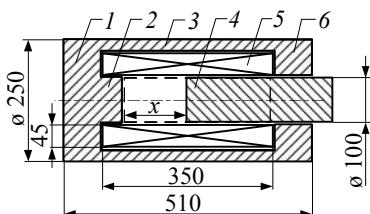
$$\begin{cases} di/dt = (U - i \cdot R - K_3 \cdot V_T)/L; \\ dx/dt = V_T(t); \\ m \cdot dV_T/dt = f_{\mathcal{E}M} - f_H, \end{cases} \quad (4)$$

где $L = f_{\mathcal{E}M}(i, x, V_T)$; $K_3 = f_{\mathcal{E}M}(i, x, V_T)$; m – масса элементов привода и кузова вагона, приведенная к якорю двигателя; f_H – суммарная нагрузка, приведенная к якорю двигателя.

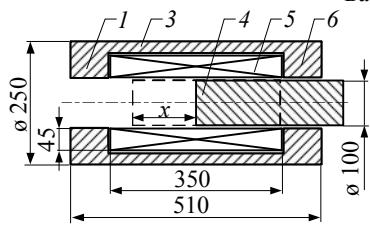
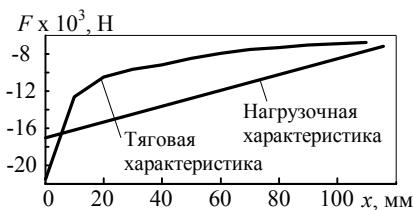
Энергетические и силовые показатели линейного двигателя определяются с помощью программного комплекса *FEMM* [5], предназначенного для расчета двухмерных магнитных полей методом конечных элементов [6].

Анализ полученных результатов. В качестве базовой модели линейного двигателя нами был рассмотрен коаксиальный линейный двигатель [1]. Перемещение его якоря из начального положения, которое отсчитывается от торцевого упора корпуса двигателя, составляет 110 мм (см. рис.1).

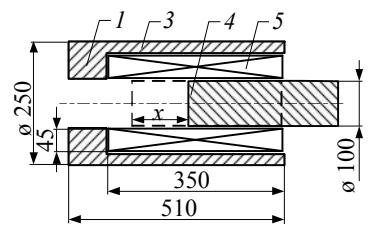
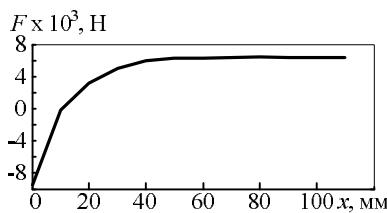
Плотность тока в обмотке принята 7 A/mm^2 . При расчетах были приняты следующие основные допущения: магнитная система является аксиально-симметричной; материал корпуса и якоря линейного двигателя – сталь Ст 3, обмотка – электротехническая медь; вихревые токи и гистерезис в магните-



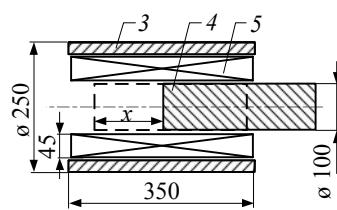
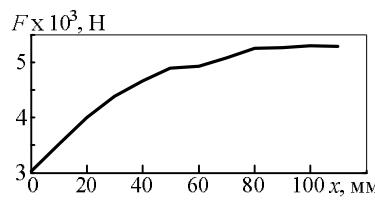
Базовая модель



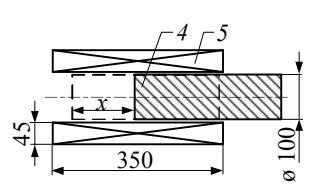
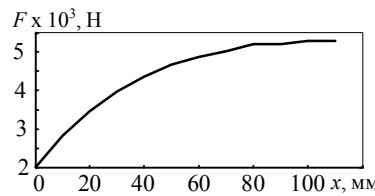
Модель 1



Модель 2



Модель 3



Модель 4

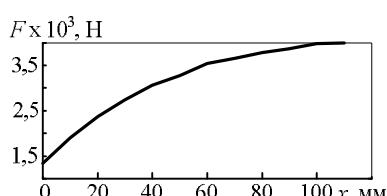


Рис.1 – Схемы моделей линейного двигателя и их тяговые характеристики:
1 – нижнее ярмо; 2 – торцевой упор; 3 – корпус; 4 – якорь;
5 – катушка; 6 – верхнее ярмо.

проводе не учитываются; источник питания обладает свойствами идеального источника напряжения.

Тяговая характеристика, рассчитанная для базовой модели двигателя, и *нагрузочная характеристика* механизма наклона приведены на рис.1. Как показано на графике, тяговая характеристика имеет гиперболическую форму, что плохо согласуется с формой нагрузочной характеристики.

На данном этапе исследований мы задались целью определить влияние каждого из составляющих частей магнитопровода на характер изменения силы в процессе перемещения якоря в пределах его рабочего хода.

Исходя из этого, нами было рассмотрено четыре модели линейного двигателя, отличающихся конструкцией магнитопровода.

Модель 1 представляет собой двигатель, состоящий из якоря и катушки, установленной в корпусе с двухсторонним ярмом; модель 2 – двигатель, состоящий из якоря и катушки, установленной в корпусе с односторонним ярмом; модель 3 – двигатель, состоящий из якоря и катушки в корпусе; модель 4 – двигатель, состоящий из якоря и катушки без корпуса.

Схемы конструкций и расчетные тяговые характеристики для исследуемых моделей линейного двигателя показаны на рис. 1.

Анализируя эти зависимости, приходим к следующему заключению. Тяговая характеристика первой модели имеет форму, аналогичную базовой модели двигателя. Величина тягового усилия изменяется от -9524 Н до 6354 Н в конце хода. Это обусловлено притяжением якоря к верхнему ярму и соответственно большими силами, действующими на боковой поверхности и верхнем торце якоря. Переход тягового усилия в процессе движения якоря в положительную область связан с уменьшением силы притяжения верхнего торца якоря к верхнему ярму и изменением направления действия силы на боковой поверхности якоря.

Форма характеристики для второй модели двигателя существенно спрятывается. При этом направление тягового усилия на протяжении хода якоря остается неизменным. Это обусловлено, по-видимому, отсутствием верхнего ярма. Величина тягового усилия изменяется от 3027 Н до 5291 Н, что связано с уменьшением силы, действующей на верхнем торце якоря и ее увеличением на боковой поверхности якоря.

Форма характеристик для третьей и четвертой моделей аналогичны форме характеристики второй модели.

Для третьей модели величина тягового усилия изменяется от 2001 Н до 5287 Н, а для четвертой модели – от 1327 Н до 3986 Н. Такой характер изменения тягового усилия, по-видимому, определен факторами, которые оказывают влияние и на форму тяговой характеристики для второй модели.

Как видно на графиках тяговых усилий (рис.1), для рассмотренных моделей имеет место их снижение, что, по-видимому, связано с уменьшением проводимости магнитной цепи.

Выводы. Рассмотренные модели двигателя имеют разные формы тяговых характеристик и отличаются уровнем развиваемых усилий. Это определяется наличием или отсутствием определенных элементов его конструкции.

Основной вклад в формирование тяговой характеристики в форме гиперболы и создание максимального значения тягового усилия вносит торцевой упор корпуса двигателя, что и приводит к несоответствию форм тяговой и нагрузочной характеристик.

Устранение торцевого упора приводит к формированию тяговой характеристики, аналогичной базовой модели, но с меньшим тяговым усилием.

Спрямление тяговой характеристики и ее приближение по форме к нагрузочной имеет место при отсутствии в моделях элементов ярма и корпуса. Однако, уровень развиваемого усилия при наличии только одного корпуса выше, чем при полном отсутствии всех элементов магнитопровода, кроме якоря.

Таким образом, решение задачи по созданию конструкции линейного двигателя, которая удовлетворяла бы условиям соответствия форм тяговой и нагрузочной характеристик, а также обладала бы требуемыми значениями тягового усилия, следует искать в направлении определения рационального соотношения геометрии магнитопровода, конфигурации распределения МДС обмотки и уровня электромагнитных нагрузок.

Список литературы: 1. Омельяненко В.И., Якунин Д.И., Редченко Е.С. Привод наклона кузовов на базе линейного двигателя // Залізничний транспорт України. – 2010.–№6.–С.23-25. 2. Омельяненко В.И., Кривякин Г.В., Редченко Е.С. Нагрузочные характеристики механизма имитации центробежной силы инерции на катковых стендах для испытаний вагонов с наклоняемыми кузовами // Залізничний транспорт України. – 2012. – №1. – С.42-46. 3. Якунин Д.И. Электромеханическая система привода с линейным двигателем для наклона кузовов скоростного подвижного состава: Дисс. ... канд. техн. наук. – Харків. – 2010. – 200 с. 4. Омельяненко В.И., Кривякин Г.В., Якунин Д.И., Редченко Е.С. Поезда с наклоняемыми кузовами для скоростного пассажирского движения // Локомотив - інформ. –2008.–№5.– С.12-17. 5. <http://www.femn.info/wiki/HomePage>. 6. Овер'янова Л.В. Магнітна система індуктора електромеханічного преобразувача інерційного накопичувача енергії. – См. статью в настоящем сборнике.

Поступила в редакцию 25.10.2012

УДК 621.924

Влияние элементов конструкции линейного двигателя на тяговую характеристику привода наклона кузовов скоростных поездов / Г.В. Кривякин, Е.С. Редченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С. 107-111. – Бібліогр.: 6 назв.

Розглянуто вплив конструктивних параметрів коаксіального лінійного двигуна на форму його тягової характеристики та значення тягового зусилля.

Ключові слова: лінійний двигун, навантажувальна характеристика, тягова характеристика.

The influence of the coaxial linear motor design factor on its traction performance and towing force value is examined.

Key words: linear motor, load characteristics, traction characteristics.

C. C. КУРЕННОВ, канд. техн. наук, доц., НАУ им. Н.Е. Жуковского
«ХАИ», Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛЕЕВОГО СЛОЯ В СОЕДИНЕНИИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Предложена аналитическая модель расчета напряженно-деформированного состояния трехслойной балки с податливым соединительным слоем, который моделируется двухпараметрическим упругим основанием. Несущие слои рассматриваются как балки Тимошенко.

Ключевые слова: kleевое соединение, касательные напряжения, нормальные напряжения, многослойная модель.

Введение. Существует несколько математических моделей односрезного kleевого соединения, позволяющих получить аналитическое решение.

Исторически первой и наиболее простой является модель Фолькерсена. Более строгий подход предложен в классической работе Голанда и Рейсснера [1]. Харт-Смит обобщил этот подход на вязкоупругое и нелинейно-упругое поведение kleевой прослойки [2]. Модель Голанда и Рейсснера использована для расчета соединений с трещинами в клее и слоями разной длины [3, 4]. Одномерные модели соединений развиты на произвольное число слоев [5] и для учета температурных деформаций [6].

В моделях Фолькерсена, Голанда и Рейсснера касательные напряжения в клее достигают максимума на краях, что физически невозможно, поскольку внешний край соединительного слоя имеет свободную границу. Чтобы исключить данный недостаток, в работе [7] предложено считать нормальные напряжения в клеевой линейно изменяющимися по толщине шва, чтобы удовлетворить уравнениям равновесия kleевой прослойки. В настоящей работе соединительный (kleевой) слой рассматривается как двухпараметрическое упругое основание, которое способное перераспределять нагрузку, согласно модели В.З. Власова, П.Л. Пастернака, М.М. Филоненко - Бородича [8]. При таком подходе линейное изменение нормальных напряжений по толщине шва [7] заменяется ступенчатым, однако при этом более точно учитывается влияние поперечных перемещений на напряжения.

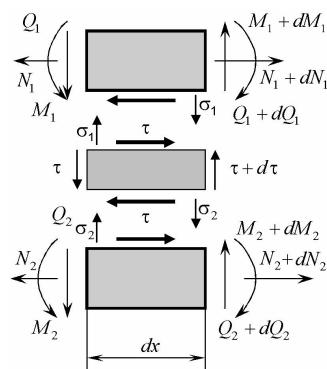


Рис. 1 – Напряжения и усилия в слоях.

© С.С. Куреннов, 2012

Построение решения. На рис. 1. показаны силовые факторы, действующие на элементы соединения.

Уравнения равновесия слоев имеют вид:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\tau; \quad \frac{dQ_1}{dx} = \sigma_1; \quad \frac{dM_1}{dx} = Q_1 - \frac{\delta_1}{2}\tau; \quad (1)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \tau; \quad \frac{dQ_2}{dx} = -\sigma_2; \quad \frac{dM_2}{dx} = Q_2 - \frac{\delta_2}{2}\tau; \quad (2)$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}, \quad (3)$$

где N_i, Q_i, M_i – соответственно продольные, поперечные усилия и погонный изгибающий момент в i -ом несущем слое; τ, σ_i – касательные и нормальные напряжения в kleевом слое; δ_1, δ_2 – толщина 1-го и 2-го несущего слоя; δ_0 – толщина kleевого слоя.

Запишем соотношения теории упругости:

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{N_i}{B_i} + \alpha_i \Delta T; \quad D_i \frac{d\varphi_i}{dx} = M_i; \quad \frac{dw_i}{dx} + \varphi_i = \frac{Q_i}{H_i}, \quad (4)$$

где u_i, w_i, φ_i – соответственно продольные, поперечные перемещения и угол поворота сечения i -го несущего слоя; B_i, D_i, H_i – соответственно жесткости на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг, которые для однородных слоев имеют вид

$$B_i = E_i \delta_i, \quad D_i = \frac{\delta_i^3}{12} E_i, \quad H_i = \frac{5}{6} G_i \delta_i,$$

E_i – модули упругости, G_i – модули сдвига слоев; α_i – коэффициенты линейного температурного расширения; ΔT_i – разность температуры формирования и эксплуатации.

Kleевой слой моделируется упругими элементами, изображенными на рис. 2 в виде пружинок, и мембраной, поперечные перемещения которой w_0 .

Данная модель упругого основания предложена в 50-х годах М.М. Филоненко - Бородичем и эквивалентна моделям упругих оснований с двумя коэффициентами постели В.З. Власова и П.Л. Пастернака [8]. Температурными деформациями kleя пренебрегаем ввиду его относительно малой толщины. Нормальные напряжения в kleе согласно данной модели имеют вид:

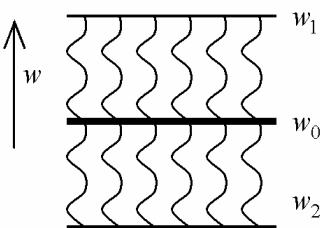


Рис. 2 – Модель kleевого слоя.

ISSN 2222-0631. Вісник НТУ «ХПІ». 2012. №54 (960).

$$\sigma_i = (-1)^i k_1 (w_0 - w_i) - (-1)^i k_2 \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right), \quad (5)$$

где $i = 1, 2$; k_1, k_2 – два коэффициента постели, которые могут быть вычислены следующим образом [8]:

$$k_1 = 2E_0 \left[\delta_0 (1 - \mu_0^2) \right]^{-1}, \quad k_2 = \frac{E_0 \delta_0}{12(1 + \mu_0)}.$$

Здесь E_0 и μ_0 – модуль Юнга и коэффициент Пуассона клеевого слоя.

Касательные напряжения в клеевом слое обусловлены продольным смещением внутренних сторон несущих слоев и его относительным сдвигом:

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} \left(u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2} \varphi_1 - \frac{\delta_2}{2} \varphi_2 \right) + G_0 \frac{dw_0}{dx}, \quad (6)$$

где G_0 – модуль сдвига соединительного слоя.

Число дифференциальных уравнений (1) – (6) можно уменьшить, если принять

$$N_1(x) + N_2(x) = F,$$

где $F = \text{const}$.

Исключим из (3) напряжения и, используя формулы (1), (2), (4), получаем:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} + \left(\frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_2}{2} + \delta_0 \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя (6), и используя (1)-(4), получаем:

$$\delta_0 \frac{d^2 w_0}{dx^2} + N_1 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{B_i} - \sum_{i=1}^2 \frac{\delta_i}{2} \frac{M_i}{D_i} - \frac{\delta_0}{G_0} \frac{d^2 N_1}{dx^2} = \frac{F}{B_2} - \alpha_1 \Delta T_1 + \alpha_2 \Delta T_2. \quad (8)$$

Далее, уравнение (3), используя (5), (1) и исключая производные от перемещений при помощи (4), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{k_2}{k_1} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - 2 \frac{d^2 w_0}{dx^2} - \frac{k_2}{k_1 H_1} \frac{d^4 M_1}{dx^4} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_1} + \frac{1}{H_1} \right) \frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{M_1}{D_1} - \\ & - \frac{k_2}{k_1 H_2} \frac{d^4 M_2}{dx^4} + \left(\frac{k_2}{k_1 D_2} + \frac{1}{H_2} \right) \frac{d^2 M_2}{dx^2} - \frac{M_2}{D_2} + \\ & + \left(\frac{\delta_0}{k_1} - \frac{k_2}{2k_1} \left(\frac{\delta_1}{H_1} + \frac{\delta_2}{H_2} \right) \right) \frac{d^4 N_1}{dx^4} + \left(\frac{\delta_1}{2H_1} + \frac{\delta_2}{2H_2} \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Сложим уравнения (5) и, исключив производные от поперечных перемещений слоев при использовании (4), получаем четвертое уравнение:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{k_2}{H_1}\right) \frac{d^4 M_1}{dx^4} - \left(\frac{k_1}{H_1} + \frac{k_2}{D_1}\right) \frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{k_1}{D_1} M_1 - \left(1 + \frac{k_2}{H_2}\right) \frac{d^4 M_2}{dx^4} + \\
& + \left(\frac{k_1}{H_2} + \frac{k_2}{D_2}\right) \frac{d^2 M_2}{dx^2} - \frac{k_1}{D_2} M_2 + \\
& + \frac{1}{2} \left(\delta_1 + \frac{k_2 \delta_1}{2H_1} - \delta_2 - \frac{k_2 \delta_2}{2H_2} \right) \frac{d^4 N_1}{dx^4} - \frac{k_1}{2} \left(\frac{\delta_1}{H_1} - \frac{\delta_2}{H_2} \right) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из уравнения (8) выразим $d^2 w_0 / dx^2$ и, исключая вторую и четвертую производную w_0 в уравнении (9), получаем систему трех дифференциальных уравнений относительно M_1 , M_2 и N_1 .

Введем вектор

$$\vec{\mathbf{X}} = (M_1 \quad M_2 \quad N_1)^T$$

и запишем полученную систему в матричном виде:

$$\mathbf{A}_4 \frac{d^4 \vec{\mathbf{X}}}{dx^4} + \mathbf{A}_2 \frac{d^2 \vec{\mathbf{X}}}{dx^2} + \mathbf{A}_0 \vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{R}}, \tag{11}$$

где коэффициенты матриц \mathbf{A}_i ($i = 4, 2, 0$) могут быть получены из уравнений (7) – (10). Коэффициенты этих матриц не приводим в связи с их громоздким видом и легкостью нахождения.

В правой части системы (11) используется вектор

$$\vec{\mathbf{R}} = \left(0; \quad \frac{2}{\delta_0} \left(\frac{F}{B_2} - \alpha_1 \Delta T_1 + \alpha_2 \Delta T_2 \right); \quad 0 \right)^T.$$

Общее решение системы однородных уравнений (11) ищем в виде суммы базисных решений:

$$\vec{\mathbf{X}}_0 = C e^{\lambda x} \vec{\mathbf{h}},$$

где λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\det(\mathbf{A}_4 \lambda^4 + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \mathbf{A}_0) = 0. \tag{12}$$

Равенство (12) является алгебраическим уравнением 10 степени с четными степенями до 2 включительно. Следовательно, общее решение системы (11) имеет вид:

$$\vec{\mathbf{X}}_0 = \sum_{i=1}^8 C_i e^{\lambda_i x} \vec{\mathbf{h}}_i + C_9 \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + C_{10} x \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$a_1 = \frac{D_2}{D_1}, \quad a_2 = \frac{B_1 B_2 (2\delta_0 + \delta_1 + \delta_2)}{2D_1(B_1 + B_2)} \text{ и } b = \frac{B_1}{B_1 + B_2} (F + \alpha_2 \Delta T_2 - \alpha_1 \Delta T_1).$$

Векторы $\vec{\mathbf{h}}_i$, соответствующие корням λ_i уравнения (12), находятся из уравнения

$$(\mathbf{A}_4 \lambda_i^4 + \mathbf{A}_2 \lambda_i^2 + \mathbf{A}_0) \vec{\mathbf{h}}_i = 0;$$

они определяются с точностью до константы и представляют собой нетривиальное решение данной системы однородных линейных уравнений.

Таким образом, получив M_1, M_2, N_1 , используя (13), из формул (1) и (2) находим τ, Q_i, σ_i . Интегрируя выражения (4) и вводя соответствующие константы интегрирования, находим перемещения несущих слоев u_i, w_i, φ_i . Перемещения w_0 находим, интегрируя уравнение (6).

Модельная задача. В качестве примера расчета рассмотрим соединение, изображенное на рис. 3. У первого слоя скользящая заделка справа, у второго слоя жесткая заделка слева. Конструкция статически не определена. Первый слой нагружен усилием F .

Краевые условия имеют вид:

$$N_1(-L) = Q_1(-L) = M_1(-L) = 0; \quad N_1(L) = F; \quad w_1(L) = M_1(L) = 0;$$

$$Q_2(L) = M_2(L) = 0; \quad u_2(-L) = w_2(-L) = \varphi_2(-L) = 0, \quad \tau(-L) = \tau(L) = 0.$$

В итоге получаем 13 краевых условий.

Недостающие 4 условия находим из уравнений (5), которые, очевидно, должны обращаться в тождества при подстановке решений. Для этого приравниваются коэффициенты при x и свободные члены слева и справа равенства (остальные слагаемые тождественно обращаются в ноль).

Рассмотрим соединение, имеющее следующие параметры:

$$E_1 = 70 \text{ ГПа}, \quad G_1 = 25,9 \text{ ГПа}, \quad \delta_1 = 2 \text{ мм}, \quad E_2 = 210 \text{ ГПа}, \quad G_2 = 5,4 \text{ ГПа}, \\ \delta_2 = 1,5 \text{ мм}, \quad \alpha_1 = 22,2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad L = 20 \text{ мм}, \quad G_0 = 0,9 \text{ ГПа}, \\ E_0 = 2,7 \text{ ГПа}, \quad \delta_0 = 0,3 \text{ мм}.$$

На рис. 4 показано распределение касательных напряжений в клеевом шве, при $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0$ и $F = 1$, вычисленное по предложенной модели (график a) и по модели Фолькерсена (график b).

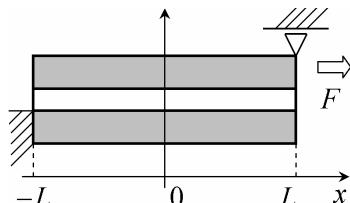


Рис. 3 – Схема закрепления.

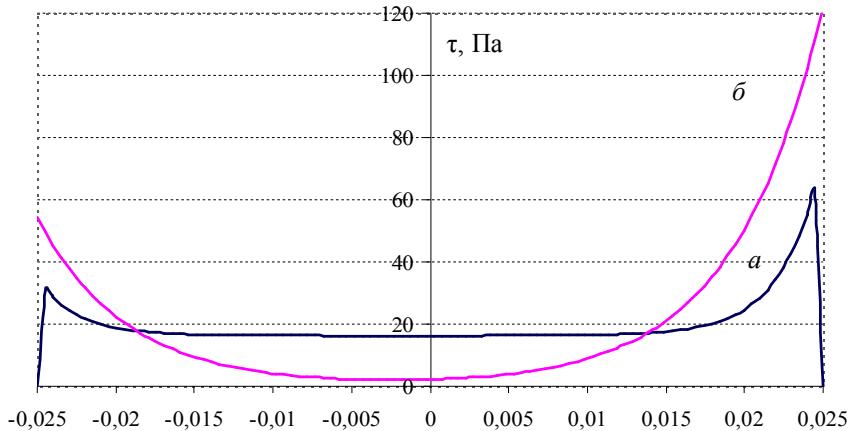


Рис. 4 – Касательные напряжения в клее по предложенной модели (а) и модели Фолькерсена (б).

Рассмотрим касательные и нормальные температурные напряжения в клее при $F = 0$, $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 1$ К.

Графики напряжений показаны на рис. 5.

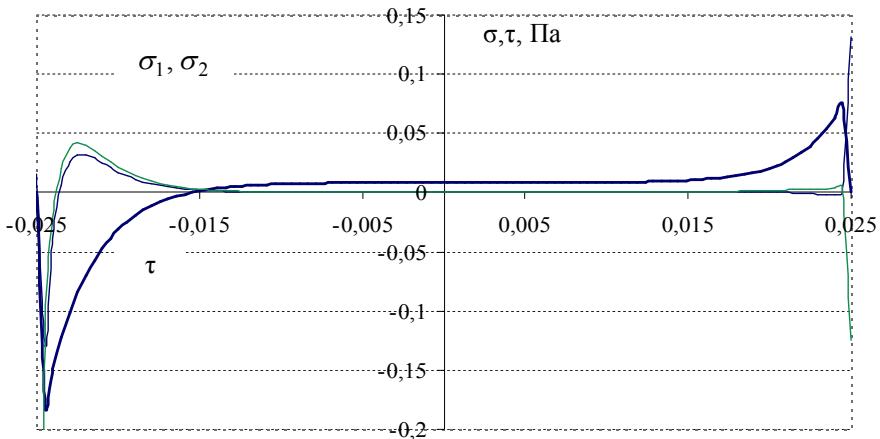


Рис. 5 – Температурные напряжения в клее.

Выводы. Расчеты показывают, что касательные напряжения, вычисляемые по предложенной модели, близки к напряжениям, даваемым теорией Го-

ланда и Рейсснера, и отличаются лишь в малой зоне около края соединения на расстояниях от него порядка толщины клеевой прослойки.

Нормальные напряжения на концах соединения значительно отличаются от напряжений, находимых по классической теории Голанда и Рейсснера. Эти напряжения могут даже отличаться знаком на разных сторонах клеевой прослойки. Внутри же области склейки σ_1 и σ_2 практически совпадают.

Для тонких клеевых прослоек влияние второй производной от упругой линии и второго коэффициента постели также незначительно, однако оно может оказаться существенным при расчете сэндвич-панелей с относительно большой толщиной соединительного слоя, особенно при дискретном нагружении одного из несущих слоев.

Список литературы: 1. Goland M., Reissner E. The stresses in Cemented Joints // J. App. Mech. – Vol. 11. – 1944, A11-A27. 2. Hart-Smith, L.J. Adhesive-Bonded. Single-Lap Joints / Douglas Aircraft Co., NASA Langley Report CR 112236, 1973. 3. Luo Q., Tong L. Fully-coupled nonlinear analysis of single lap adhesive joints // International Journal of Solids and Structures. – Vol. 44. – 2007. – pp. 2349-2370. 4. L.F.M. Da Silva (Ed). Modeling of Adhesively Bonded Joints / Springer, 2008. – 335 p. 5. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластины. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с. 6. Chen W.T., Nelson C.W. Thermal stress in bonded joints. IBM Journal of Research and Development, 23 (2), 1979. – p. 179-188. 7. Артиохин Ю. П. Модифицированная теория Голанда–Рейсснера склеенных пластин // Исслед. по теор. пластин и оболочек, 11, Изд-во Казанского ун-та, – Казань, 1975, С. 136–148. 8. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели – М.: Госстройиздат, 1954.

Поступила в редакцию 14.06.12

УДК 624.072.45

Моделювання клеєвого слоя в соєдненні двохпараметрическим упругим основанием / С. С. Куренінов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012.– №54(960). – С.112-118. – Бібліогр.: 8 назв.

Запропоновано аналітичну модель розрахунку напруженого-деформованого стану тришарової балки з податливим пружним з'єднувальним шаром, який моделюється як двохпараметрична пружна основа. Зовнішні шари розглядаються як балки Тимошенко.

Ключові слова: клеєве з'єднання, дотичні напруги, нормальні напруги, багатошарова модель.

Here is considered an analytical model for calculating of the the stress-strained state of the three layer beam with compliant bonding layer, which is modeled by a two-parameter elastic base. The bearing layers are considered as beams of Tymoshenko.

Key words: adhesive bonding, shear stress, normal stress, multi-model.

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УППА, Харків;
Л.С. ЛОБАНОВА, канд. фіз.-мат. наук, доц., УППА, Харків;
Г.А. МІРОШНИЧЕНКО, асистент, УППА, Харків

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ШЛЯХОМ МІНІМІЗАЦІЇ ПОХІДКИ ПРАВИХ ЧАСТИН В НОРМІ $L_2[0,1]$

Запропоновано новий метод знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок подається у вигляді лінійної комбінації елементів деякої системи лінійно-незалежних функцій. Невідомі стали розкладу знаходяться з умови найкращого наближення правих частин диференціальних рівнянь системи і (можливо) їх похідних за допомогою вказаної системи лінійно – незалежних функцій. Наведено приклади.

Ключові слова: диференціальне рівняння, задача Коші, наближений розв'язок, мінімізація похибки.

Вступ. Аналіз відомих методів розв'язання задачі Коші та початково – крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними дозволяє виділити наступні методи:

– класичні методи [1], де наближений розв'язок задачі отримується у вигляді скінчених або нескінчених сум відомих функцій (ортогональних поліномів, тригонометричних функцій, спеціальних функцій тощо), або у вигляді сингулярних інтегралів тощо;

– метод скінчених різниць [2], де наближений розв'язок задачі отримується у вигляді таблиці значень у заданій системі точок області інтегрування;

– оптимальний метод скінчених елементів (OMCE) [3-8], у якому координатні функції не задаються заздалегідь, а знаходяться як невідомі стали в МСЕ – методом мінімізації функціоналу енергії, що відповідає поставленій крайовій задачі.

Вказані методи дозволяють знайти наближені розв'язки, що у все більшій мірі залежні від оператора крайової задачі і правої частини, причому метод ДР або метод інтегральних співвідношень *A.O. Дородніцина* можуть бути отримані як частинні випадки методу ЛІДР, метод ОМСЕ може розглядатися, як частинний випадок методу НІДР.

В роботі [9] запропоновано метод наближеного розв'язання двоточкової крайової задачі для лінійного звичайного диференціального рівняння, згідно з яким наближений розв'язок шукається у вигляді лінійної комбінації системи лінійно – незалежних функцій, а невідомі стали знаходяться з умови найкращого наближення правої частини рівняння лінійною комбінацією функцій, що

отримуються застосуванням диференціального оператора крайової задачі до наближеного розв'язку.

Згідно з відомим правилом обчислювальної математики, *наближуючий оператор, що враховує більше властивостей наближуваної функції, може мати краї апроксимативні характеристики*. Це правило використовується, зокрема, при побудові алгоритмів без насичення [10,11], при інтегруванні функцій з особливостями [12], у адаптивних системах методу скінченних елементів [13,14] (дивись також у роботі [15]), де базисні функції задаються, а вузли елементів згущуються навколо точок з особливостями за деяким законом тощо.

Постановка задачі. Задача полягає у розробці та дослідженні методу знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + f(x), \quad (1)$$

$$\vec{y}(0) = 0, \quad (2)$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

у вигляді точного розв'язку задачі Коші (1)-(2) для правих частин, які є наближенням до правої частини системи (1) і залежать від довільних сталих. Пропонується метод знаходження вказаних довільних сталих.

Основні твердження роботи. Пропонується метод розв'язання задачі Коші для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь (1)-(2), який складається з наступних кроків:

– вибір системи лінійно-незалежних функцій $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, N$, які задовольняють умову

$$\psi_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (3)$$

– знаходження невідомого розв'язку задачі (1)-(2) у вигляді

$$y_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \psi_\ell(x), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

де невідомі стали

$$C_{i,\ell}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \ell = \overline{1, N}$$

знаходимо з умови найкращого наближення правих частин $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ ди-

диференціальних рівнянь системи (1) виразами

$$\sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right)$$

в нормі простору $L_2[0,1]$:

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \|u\|_2 = \left(\int_0^1 u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

або простору $W_2^1[0,1]$:

$$W_2^1[0,1] = \left\{ u(x) : \sum_{s=0}^1 \|u^{(s)}\|_2^2 < \infty \right\}.$$

У випадку системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь вказана умова набуває вигляду

$$J_r(C) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \left(f_i^{(s)}(x) - \sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell}{dx} - \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right)^{(s)} \right)^2 dx \rightarrow \min_C, \quad (5)$$

$$r = 0, 1.$$

При $r = 0$ – отримуємо умову у просторі $L_2[0,1]$, а при $r = 1$ умова формулюється у просторі $W_2^1[0,1]$.

Використовуючи необхідну умову екстремуму функції багатьох змінних, для визначення коефіцієнтів $C_{k,\ell}$ ($k = \overline{1, n}$; $\ell = \overline{1, N}$) розкладу наближеного розв’язку по системі функцій $\psi_\ell(x)$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(C)}{\partial C_{j,p}} &= 2 \int_0^1 \left\{ \sum_{i=0}^n \sum_{s=0}^r \left(f_i^{(s)}(x) - \sum_{l=1}^N \left(C_{i,l} \frac{d\psi_l}{dx} - \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l} \right)^{(s)} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left(-\psi_p^{(s+1)}(x) \cdot \delta_{i,j} + a_{ij} \psi_p^{(s)}(x) \right) dx = 0, \quad j = \overline{1, n}, p = \overline{1, N}, \right. \\ \delta_{i,j} &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r \sum_{l=1}^N \left(C_{i,l} \psi_l^{(s+1)}(x) - \psi_l^{(s)} \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l} \right) \cdot \left(-\psi_p^{(s+1)}(x) \delta_{i,j} + a_{ij} \psi_p^{(s)}(x) \right) dx = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^r f_i^{(s)} \left(-\psi_p^{(s+1)}(x) \delta_{i,j} + a_{ij} \psi_p^{(s)}(x) \right) dx, \quad j = \overline{1, n}; p = \overline{1, N}; r = 0, 1. \quad (6) \end{aligned}$$

Так, наприклад, для випадку системи, що складається з одного, двох або трьох диференціальних рівнянь, система (6) набуває наступного вигляду, якщо розглядати задачу у просторі $L_2[0,1]$:

- при $n=1$ (одне диференціальне рівняння) –

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left(\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right) \left(\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right) dx = \\ = \int_0^1 f_1(x) \left(\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right) dx, \quad p = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

- при $n=2$ (система двох диференціальних рівнянь) –

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - a_{21}^2 \psi_l(x) \psi_p(x) \right\} dx + \\ + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ a_{12}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right] + a_{21} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_l(x) \right] \psi_p(x) \right\} dx = \\ = \int_0^1 f_1(x) \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] + a_{21} f_2(x) \psi_p(x) dx, \quad p = \overline{1, N}; \\ \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ a_{12} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \psi_q(x) + a_{21} \psi_l(x) \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx + \\ + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}^2 \psi_l(x) \psi_q(x) + \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_l(x) \right] \left[-\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx = \\ = \int_0^1 \left\{ a_{12} f_1(x) \psi_q(x) + f_2(x) \left[-\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] \right\} dx, \quad q = \overline{1, N}; \end{aligned}$$

- при $n=3$ (система трьох диференціальних рівнянь) –

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\ \left. - a_{21}^2 \psi_l(x) \psi_p(x) - a_{31}^2 \psi_l(x) \psi_p(x) \right\} dx + \\ + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ a_{12}\psi_l(x) \left[\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{21} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_\ell(x) \right] \psi_p(x) - a_{31} \cdot a_{32} \psi_l(x) \psi_p(x) \Big\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ a_{13} \psi_l(x) \left[\frac{d\psi_p(x)}{dx} - a_{11}\psi_p(x) \right] - \right. \\
& \left. - a_{21} a_{23} \psi_l(x) \psi_p(x) + a_{31} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{33}\psi_\ell(x) \right] \psi_p(x) \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ f_1(x) \left[-\frac{d\psi_p(x)}{dx} + a_{11}\psi_p(x) \right] + a_{21} f_2(x) \psi_p(x) + a_{31} f_3(x) \psi_p(x) \right\} dx, \\
& p = \overline{1, N}; \\
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ a_{12} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \psi_q(x) + a_{21} \psi_l(x) \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] - \right. \\
& \left. - a_{31} a_{32} \psi_l(x) \psi_q(x) \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12}^2 \psi_l(x) \psi_q(x) - \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{22}\psi_l(x) \right] \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] - \right. \\
& \left. - a_{32}^2 \psi_l(x) \psi_q(x) \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12} a_{13} \psi_l(x) \psi_q(x) + a_{23} \psi_l(x) \left[\frac{d\psi_q(x)}{dx} - a_{22}\psi_q(x) \right] + \right. \\
& \left. + a_{32} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{33}\psi_l(x) \right] \psi_q(x) \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ a_{12} f_1(x) \psi_q(x) + f_2(x) \left[-\frac{d\psi_q(x)}{dx} + a_{22}\psi_q(x) \right] + a_{32} f_3(x) \psi_q(x) \right\} dx, \\
& q = \overline{1, N}; \\
& \sum_{l=1}^N C_{1,l} \int_0^1 \left\{ a_{13} \left[\frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - a_{11}\psi_l(x) \right] \psi_r(x) - a_{21} a_{23} \psi_l(x) \psi_r(x) + \right. \\
& \left. + a_{31} \psi_l(x) \left[\frac{d\psi_r(x)}{dx} - a_{33}\psi_r(x) \right] \right\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{2,l} \int_0^1 \left\{ -a_{12} a_{13} \psi_l(x) \psi_r(x) + a_{23} \left[\frac{d\psi_l(x)}{dt} - a_{22}\psi_l(x) \right] \psi_r(x) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{32} \psi_l(x) \left[\frac{d\psi_r(x)}{dx} - a_{33} \psi_r(x) \right] \Bigg\} dx + \\
& + \sum_{l=1}^N C_{3,l} \int_0^1 \left\{ -a_{13}^2 \psi_l(x) \psi_r(x) - a_{23}^2 \psi_l(x) \psi_r(x) - \right. \\
& \left. - \left[\frac{d\psi_l(x)}{dx} - a_{33} \psi_l(x) \right] \left[\frac{d\psi_r(x)}{dx} - a_{33} \psi_r(x) \right] \right\} dx = \\
& = \int_0^1 \left\{ a_{13} f_1(x) \psi_r(x) + a_{23} f_2(x) \psi_r(x) + f_3(x) \left[-\frac{d\psi_r(x)}{dx} + a_{33} \psi_r(x) \right] \right\} dx, \\
r & = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

Теорема. Наближений розв'язок $y_{i,N}(x)$, $i = \overline{1, n}$ має наступні властивості:

- a) точно задоволяє початковій умові (2) задачі Коши;
- б) точно задоволяє системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_{i,N}(x)}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} y_{k,N}(x) + f_{i,N}(x), i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де

$$f_{i,N}(x) = \sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell}{dx} - \psi_\ell \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right), i = \overline{1, n} \quad (8)$$

i стали $C_{k,\ell}$ ($k = \overline{1, n}$, $\ell = \overline{1, N}$) знаходяться з умови (5) при $r = 0$ або $r = 1$.

Доведення. Кожний доданок у формулі (4) задоволяє умові (2), тому всі функції, що визначаються рівностю (4), теж задовольняють умові (2), тобто твердження а) теореми справджується.

Справедливість твердження б) перевіряється безпосередньою підстановкою виразів (4) для функцій $y_{i,N}(x)$ ($i = \overline{1, n}$) у рівність (7) і врахуванням рівностей (8):

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} & = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \sum_{l=1}^N C_{i,\ell} \psi_l(x) + \sum_{l=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l} \right); \\
\sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} & = \sum_{\ell=1}^N \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{i,\ell} + \sum_{l=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \sum_{l=1}^N \psi_\ell(x) \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,l}; \\
\sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} & = \sum_{\ell=1}^N C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx}.
\end{aligned}$$

Теорема доведена.

Наведена теорема свідчить, що пропонується точний розв'язок задачі (1) – (2) наблизити точними розв'язками системи (7) при нульовій початковій умові.

Отже, розв'язання початкової задачі (1) – (2) в пропонованому методі зведено до мінімізації похибки наближення правих частин $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ або правих частин та їх похідних за допомогою функцій

$$f_{i,N} = \sum_{\ell=1}^N \left(C_{i,\ell} \frac{d\psi_\ell(x)}{dx} - \psi_\ell \sum_{k=1}^n a_{i,k} C_{k,\ell} \right), \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином, похибка наближення $|y_i(x) - y_{i,N}|$ ($i = \overline{1, n}$) повністю визначається похибкою наближення $|f_i(x) - f_{i,N}|$ ($i = \overline{1, n}$) або похибками наближень

$$\left| f_i(x) - f_{i,N} \right|, \quad \left| \frac{df_i(x)}{dx} - \frac{df_{i,N}(x)}{dx} \right| \quad (i = \overline{1, n}).$$

Аналіз прикладів. Наведемо чисельні приклади, які ілюструють застосування викладеного методу до розв'язання задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь, в тому числі і одного диференціального рівняння. Зазначимо, що в усіх наведених прикладах невідомі сталі знаходилися з умовою найкращого наближення правих частин диференціальних рівнянь системи в нормі простору $L_2[0, 1]$.

Наближений розв'язок знаходився на відрізку $[0, 1]$.

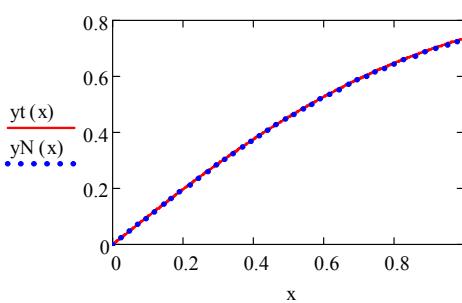


Рис. 1 – Графічні зображення точно-го $y_t(x)$ і наблизеного $y_N(x)$ розв'язків.

Приклад 1. Знайдемо наближений розв'язок запропонованим методом задачі

$$y' + y = e^{-x} (2x + 1), \quad (9)$$

$$y(0) = 1, \quad (10)$$

точний розв'язок якої має вигляд

$$y(x) = (x^2 + x)e^{-x},$$

використовуючи систему функцій

$$\psi_k(x) = x^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Наближений розв'язок знаходили у вигляді

$$y_N(x) = \sum_{\ell=1}^N C_\ell \psi_\ell(x).$$

Сталі розкладу C_ℓ , $\ell = \overline{1, N}$ визначались з умови найкращого наближення правої частини рівняння (9):

$$J(C) = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{\ell=1}^N C_\ell \left(\frac{d\psi_\ell}{dx} + \psi_\ell(x) \right) \right)^2 dx \rightarrow \min_C .$$

Чисельні розрахунки показали, що при $N = 8$ похибка наближення розв'язку задачі (9) – (10) склала $\varepsilon = 1,560 \cdot 10^{-8}$.

Порівняння точного і наближеного розв'язків задачі (9)-(10) подано на рис.1.

Приклад 2. Запропонованим методом знаходився наближений розв'язок задачі

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 3y_2 + 6 \cos 2x - 6 \sin 2x + 6 \sin 3x, \\ y'_2 = 3y_1 + 2y_2 + 4 \sin 3x - 9 \sin 2x - 6 \cos 3x, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 .$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$y_1(x) = 3 \sin 2x, \quad y_2(x) = -2 \sin 3x .$$

Для побудови наближеного розв'язку використовувалась система функцій $\psi_k(x) = \sin kx$, $k = 1, 2, \dots, N$.

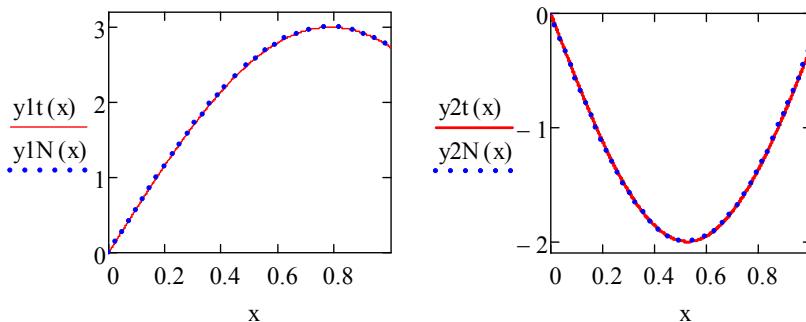


Рис. 2 – Графічний вигляд точного $y_1t(x), y_2t(x)$ і наближеного

$y_1N(x), y_2N(x)$ розв'язків.

З точністю до 10^{-12} розв'язок, отриманий запропонованим методом при $N = 3$, співпадає з точним розв'язком.

Для порівняння відмітимо, що максимальне відхилення наближеного розв'язку, отриманого за методом Рунге – Кутта четвертого порядку з кро- ком $h = 0,01$, від точного розв'язку склало відповідно

$$\varepsilon_1 = 4,238 \cdot 10^{-7} \text{ для } y_1(x) \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 = 4,239 \cdot 10^{-7} \text{ для } y_2(x) .$$

Рис.2 ілюструє якість наближення розв'язку розглядуваної задачі; точні

значення шуканих функцій і їх наближені значення, знайдені запропонованим методом, в масштабі цього рисунку співпали.

Приклад 3. В цьому прикладі запропонованим методом розв'язувалась задача

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + 3y_2 + \sqrt{1+x^2}, & y_1(0) = 0, \\ y'_2 = 3y_1 + 2y_2 - \sqrt{1+x^2}, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

Використовувалась система функцій $\psi_k(x) = x^k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Похибка наближення при $N = 8$ правої частини першого рівняння системи склала $\varepsilon_1 = 1,434 \cdot 10^{-4}$; для другого рівняння вона склала $\varepsilon_2 = 7,056 \cdot 10^{-6}$.

Максимальне відхилення наближеного розв'язку ($N = 8$) від розв'язку, отриманого за методом Рунге – Кутта з кроком $h = 0,01$, склало відповідно

$$2,229 \cdot 10^{-6} \text{ для } y_1(x) \text{ i } 2,377 \cdot 10^{-8} \text{ для } y_2(x).$$

Рис.3 ілюструє якість наближення правих частин диференціальних рівнянь розглядуваної системи.

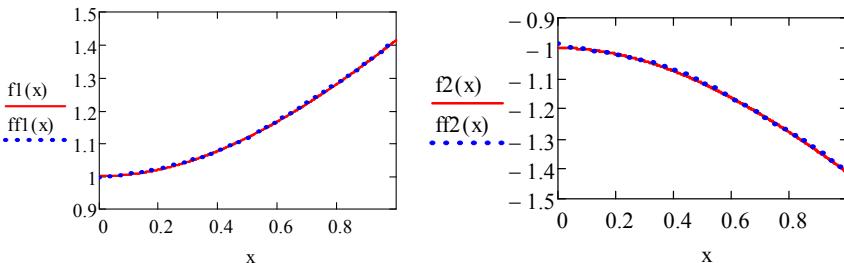


Рис. 3 – Графічне зображення правих частин ($f_1(x)$, $f_2(x)$) рівнянь системи і їх наближення ($ff_1(x)$, $ff_2(x)$).

Перспективи подальших досліджень. В подальшому автори планують узагальнити запропонований метод на випадок розв'язання системи диференціальних рівнянь з управлінням.

Висновки. Запропоновано метод побудови наближених розв'язків задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$d\vec{y}/dx = A\vec{y} + \vec{f}(x), \quad 0 < x < 1,$$

згідно з яким компоненти розв'язку $y_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ подаються у вигляді лінійної комбінації елементів деякої системи лінійно – незалежних функцій $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, N$, які задовольняють початковій умові задачі Коші. Коефіцієнти розкладу знаходяться з умови найкращого наближення (в нормі

$L_2[0,1]$ або $W_2^1[0,1]$) правих частин $f_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ розглядуваної системи.

Приклади демонструють високу точність методу.

Список літератури: 1. Тихонов А.Н., Самарський А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, – 1966. – 724с. 2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, - 1971. - 552с. 3. Литвин О.М. Оптимальні схеми методу скінчених елементів , точні на класі задач // Доповіді академії наук України. – Київ: Наукова думка, 1992. – С. 31-36. 4. Литвин О.Н., Оптимальные схемы МКЭ. Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 160–165. 5. Литвин О.Н. К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ. 2-я Респ. конф. "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе": Тез. докл. – Киев : КГУ, 1978. – С. 21-22. 6. Литвин О.Н. О построении оптимальных схем МКЭ. Динамика и устойчивость сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 116–128. 7. Литвин О.М. Побудова оптимальних схем методу скінчених елементів. Доп. АН УРСР. Сер. А. –1982. –№6. – С. 14-18. 8. Литвин О.Н. Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов. Дифференц. уравнения. –1984. –20, №4. –С. 677-683. 9. Литвин О.М. Новий метод розв'язання двочкових крайових задач для звичайних лінійних диференціальних рівнянь // Вісник НТУ ХПІ. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. –Харків: НТУ "ХПІ". –2012, №27. –С. 114-117. 10. Гаврилок И.П., Макаров Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – К: Ин-т матем. НАНУ, 2004. – 499 с. 11. Бабенко К.И. Основы численного анализа. – М.: Наука: Гл. ред. Физ. мат. лит., – 1986. – 744с. 12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.1 Минск. – Вышшая школа, 1972. – 584 с. 13. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. – К: Наук. думка, 2005. – 333 с. 14. Литвин О.М. Интерполяция функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544с. 15. Diaz A.R., Kikuchi N., Taylor J.E. A method of grid optimization for finite element method// Comp. methods in applied mechanics and engineering. – V.41. – 1983. –P. 29-45.

Надійшла до редколегії 20.10.2012

УДК 519.6

Розв'язання задачі Коши для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом мінімізації похибки правих частин в нормі $L_2[0,1]$ / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, Г.А. Мірошниченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012.– №54(960). – С.119-128. – Бібліогр.: 15 назв.

Предложен новый метод нахождения приближенного решения задачи Коши для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение представляется в виде линейной комбинации элементов некоторой системы линейно-независимых функций. Неизвестные постоянные разложения находятся из условия наилучшего приближения правых частей дифференциальных уравнений системы и (возможно) их производных с помощью указанной системы линейно – независимых функций. Приведены примеры.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, задача Коши, приближённое решение, минимизация погрешности.

A new method for finding approximate solutions of the Cauchy problem for systems of linear ordinary differential equations is offered. The approximate solution is represented as a linear combination of the elements of a linearly independent functions system. Unknown constants expansions are found from condition of the best approximation of the right sides of the differential equations system and (possible) their derivatives with these systems of linear - independent functions. Examples are given.

Key words: differential equation, Cauchy problem, an approximate solution, minimizing errors.

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УППА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УППА, Харків;
В.О. ПАСІЧНИК, канд. техн. наук, доц., ХДАДМ, Харків

ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ЛІНІЙНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКІЙ, ЩО МАЮТЬ РОЗРИВИ НА ЛІНІЯХ ТРИАНГУЛЯЦІЇ

Робота виконана при підтримці ДФФД України (грант).

Пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функцій з можливими розривами першого роду, область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Причому побудовані розривні сплайні включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайні першого степеня на триангульованій сітці вузлів..

Ключові слова: розривна інтерполяція, розривна функція, томографія.

Вступ. Задача наближення розривних функцій є однією з найскладніших задач обчислювальної математики. Спеціалістам з обчислювальної математики добре відомі оператори наближення неперервних та диференційованих функцій за допомогою поліномів та сплайнів [1] – [3]. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [4]–[5], в яких неперервні та диференційовані функції наближаються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення розривних функцій, то авторам невідомі загальні методи сплайн-апроксимації розривних функцій за допомогою розривних сплайнів. Але розв'язання такої задачі є актуальною, оскільки серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується розривними функціями.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [6] була розглянута апроксимація розривних розв'язків (функцій однієї змінної) диференціальних рівнянь за допомогою *розривного метода Гальоркіна*. А в роботі [7] розглядався розривний метод Гальоркіна для еліптичної крайової задачі з використанням двовимірних неузгоджених сіток. Цей метод дозволяє враховувати неконформність елементів. Причому він забезпечує неперервність розв'язку, хоча від базисних функцій узгодженості не вимагає.

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалось наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів.

В роботі [8] авторами був розроблений метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, використовуючи *метод мініма-каса*. В роботі [9] був запропонований метод наближення розривних функцій двох

змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [10] – інтерполяційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення.

В даній статті пропонується метод побудови розривних сплайн-інтерполянтів для наближення розривних функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області D . Будемо вважати, що область D розбивається прямими

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1, \quad y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$$

на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в один, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудова та дослідження таких операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Метод побудови наближуючого розривного сплайн-інтерполянта. Якщо (x_i, y_j) – вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутного трикутника, то може зустрітися чотири типи трикутників (рис.1):

$$T_{ij}^{(1)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}} \right\};$$

$$T_{ij}^{(2)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}} \right\};$$

$$T_{ij}^{(3)} = \left\{ x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < y < y_j \right\};$$

$$T_{ij}^{(4)} = \left\{ x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i} < y < y_j \right\}.$$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому в вершинах трикутника функція набуває таких значень:

$$C_1^{(1)} = C_{i,j}^{++} = f(x_i + 0, y_j + 0), \quad C_1^{(2)} = C_{i,j}^{(2)-+} = f(x_i - 0, y_j + 0),$$

$$C_2^{(1)} = C_{i,j+1}^{(1)+-} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), \quad C_2^{(2)} = C_{i,j+1}^{(2)--} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0),$$

$$C_3^{(1)} = C_{i+1,j}^{(1)-+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), \quad C_3^{(2)} = C_{i-1,j}^{(2)-+} = f(x_{i-1} - 0, y_j + 0),$$

$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} &= C_{i,j}^{(3)++} = f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= C_{i,j}^{(4)+-} = f(x_i + 0, y_j - 0), \\
C_2^{(3)} &= C_{i-1,j}^{(3)++} = f(x_{i-1} - 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= C_{i+1,j}^{(4)++} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0), \\
C_3^{(3)} &= C_{i,j-1}^{(3)++} = f(x_i - 0, y_{j-1} - 0), & C_3^{(4)} &= C_{i,j-1}^{(4)++} = f(x_i + 0, y_{j-1} - 0).
\end{aligned}$$

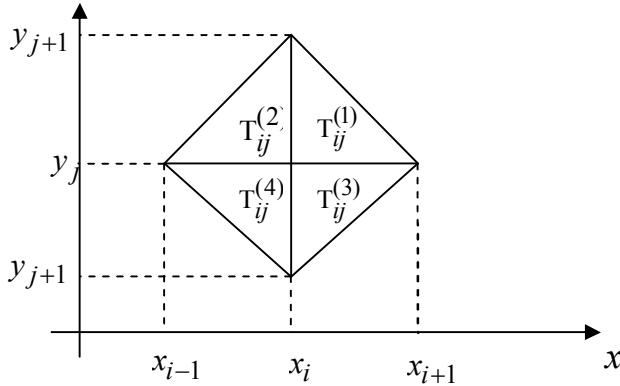


Рис. 1 – Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Визначення. Будемо називати *розв'язним інтерполяційним лінійним по-ліноміальним сплайном в області* $T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = \{1, 2, 3, 4\}$) наступну функцію:

$$\begin{aligned}
S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) &= C_1^{(k)} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(k)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\
&+ C_3^{(k)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})}, (x, y) \in T_{ij}^{(k)}, \\
\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) &= x - x_i, \quad \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) = y - y_j,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y) = \begin{cases} -y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}, & k = 1, \\ -y + y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}}, & k = 2, \\ -y + y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}}, & k = 3, \\ -y + y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i}, & k = 4, \end{cases}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, y_{j-1} - 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, y_{j-1} - 0), & k = 4, \end{cases} A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4. \end{cases}$$

Теорема 1. Функція $S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y)$, $(x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D$ ($k = 1, 2, 3, 4$) задовольняє наступним властивостям:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_j + 0) &= C_1^{(1)}, & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_j + 0) &= C_1^{(2)}, \\ s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(1)}, & s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_{j+1} - 0) &= C_2^{(2)}, \\ s_{ij}^{(1)}(x_{i+1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(1)}, & s_{ij}^{(2)}(x_{i-1} - 0, y_j + 0) &= C_3^{(2)}, \\ s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_j - 0) &= C_1^{(3)}, & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_j - 0) &= C_1^{(4)}, \\ s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(3)}, & s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_{j-1} - 0) &= C_2^{(4)}, \\ s_{ij}^{(3)}(x_{i-1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(3)}, & s_{ij}^{(4)}(x_{i+1} - 0, y_j - 0) &= C_3^{(4)}. \end{aligned}$$

Доведення проводиться безпосередньою підстановкою відповідних значень аргументів у визначений розривний сплайн (1).

Теорема 2. Нехай функція $f(x, y)$ наближується оператором

$$S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y), \quad (x, y) \in T_{ij}^{(k)} \subset D \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

та $|f'_x(x, y)| \leq M$, $|f'_y(x, y)| \leq N$, тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність

$$|f(x, y) - S(x, y)| \leq \frac{M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y}{2}, \quad \Delta_x = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta_y = y_{j+1} - y_j.$$

Доведення. Проведемо доведення для трикутного елементу типу $T_{ij}^{(1)}$.

Очевидно, що

$$\frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \equiv 1, \quad \forall (x, y) \in T_{ij}^{(1)},$$

тому, ми можемо наблизити функцію $f(x, y)$ функцією

$$S(x, y) = \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} f(A_1^{(1)}) + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} f(A_2^{(1)}) + \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} f(A_3^{(1)}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \left[f(A_1^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(1)}} + \theta(x - x_{A_1^{(1)}}), y_{A_1^{(1)}} + \theta(y - y_{A_1^{(1)}}) \right) (y - y_{A_1^{(1)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} \left[f(A_2^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (x - x_{A_2^{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(1)}} + \theta(x - x_{A_2^{(1)}}), y_{A_2^{(1)}} + \theta(y - y_{A_2^{(1)}}) \right) (y - y_{A_2^{(1)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 1_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(1)}(A_3^{(1)})} \left[f(A_3^{(1)}) + f'_x \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (x - x_{A_3^{(1)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(1)}} + \theta(x - x_{A_3^{(1)}}), y_{A_3^{(1)}} + \theta(y - y_{A_3^{(1)}}) \right) (y - y_{A_3^{(1)}}) \right] = \\
&= S(x, y) + RS(x, y), \quad 0 < \theta < 1,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
RS(x, y) &= \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_j) \right) (x - x_{A_1^{(k)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_1^{(k)}} + \theta(x - x_{A_1^{(k)}}), y_{A_1^{(k)}} + \theta(y - y_{A_1^{(k)}}) \right) (y - y_{A_1^{(k)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (x - x_{A_2^{(k)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_2^{(k)}} + \theta(x - x_{A_2^{(k)}}), y_{A_2^{(k)}} + \theta(y - y_{A_2^{(k)}}) \right) (y - y_{A_2^{(k)}}) \right] + \\
&+ \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} \left[f'_x \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (x - x_{A_3^{(k)}}) + \right. \\
&\quad \left. + f'_y \left(x_{A_3^{(k)}} + \theta(x - x_{A_3^{(k)}}), y_{A_3^{(k)}} + \theta(y - y_{A_3^{(k)}}) \right) (y - y_{A_3^{(k)}}) \right].
\end{aligned}$$

Тепер оцінимо похибку наближення $|RS(x, y)| = |f(x, y) - S(x, y)|$:

$$|RS(x, y)| \leq \frac{\omega 3_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 3_{ij}^{(1)}(A_1^{(1)})} \cdot \left[M(x - x_{A_1^{(1)}}) + N(y - y_{A_1^{(1)}}) \right] + \frac{\omega 2_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(1)}(A_2^{(1)})} \left[M(x - x_{A_2^{(1)}}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + N(y_{A_2^{(1)}} - y) \Big] + \frac{\omega l_{ij}^{(1)}(x, y)}{\omega l_j^{(1)}(A_3^{(1)})} \Big[M(x_{A_3^{(1)}} - x) + N(y - y_{A_3^{(1)}}) \Big] = \\
= & M \left(\frac{-y + y_j + (x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)/(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (x - x_i) + \right. \\
& \left. + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i-1} - x) \right) + N \left(\frac{-y + y_j + (x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)/(x_i - x_{i+1})}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y - y_j) + \right. \\
& \left. + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \cdot (y_{j+1} - y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (y - y_j) \right) = M \cdot u(x, y) + N \cdot v(x, y).
\end{aligned}$$

Далі, після знаходження максимальних значень функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$, отримаємо, що максимальне значення функції $u(x, y)$ досягається в точці $0.5(x_i + x_{i+1})$ та дорівнює

$$0.5(x_{i+1} - x_i) = 0.5 \cdot \Delta_x,$$

а максимальне значення $v(x, y)$ досягається в точці $0.5(y_j + y_{j+1})$ та дорівнює

$$0.5(y_{j+1} - y_j) = 0.5 \cdot \Delta_y.$$

Тобто отримаємо наступну оцінку похибки: $|RS(x, y)| \leq (M \cdot \Delta_x + N \cdot \Delta_y) / 2$.

Теорема 3. Якщо $C_\mu^{(k)} = f(A_\mu^{(k)})$, $k = \overline{1, 4}$, $\mu = \overline{1, 3}$, то в кожному трикутнику $T_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ оператор (1) точно відновлює всі лінійні функції.

Доведення теореми витікає з того, що через три точки можна провести тільки одну площину.

Зауваження. Якщо значення функції у вузлах трикутної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_p^{(k)}$, $p = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, 3, 4$ в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J^{(k)}(C) = \sum_{T_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{T_{ij}^{(k)}} \left[f(x, y) - s_{ij}^{(k)}(x, y, C) \right]^2 dx dy \rightarrow \min_C.$$

І тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

Чисельний експеримент. Приклад 1. Нехай задані вузли трикутної сітки

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1, y_1 = 0, y_2 = 0.5, y_3 = 1$$

та функція $f(x, y)$ визначена в області $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, представлений на рис.2.

$$T_1 = \{x - 0.5 > 0, y - 0.5 > 0, 1.5 - x - y > 0\},$$

$$T_2 = \{-(x - 0.5) > 0, y - 0.5 > 0, 0.5 + x - y > 0\},$$

$$T_3 = \{-(x - 0.5) > 0, -(y - 0.5) > 0, -0.5 + x + y > 0\},$$

$$T_4 = \{x - 0.5 > 0, -(y - 0.5) > 0, 0.5 - x + y > 0\}.$$

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої трикутної сітки (рис.3),

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in T_1, \\ x - y, & (x, y) \in T_2, \\ y - x, & (x, y) \in T_3, \\ -x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

Функція має у вузлах сітки такі значення:

$$f^{++}(0.5, 0.5) = 1, f^{-+}(0.5, 0.5) = 0,$$

$$f^{--}(0.5, 0.5) = 0, f^{+-}(0.5, 0.5) = -1,$$

$$f^{-+}(1, 0.5) = 1.5, f^{--}(1, 0.5) = -1.5,$$

$$f^{+-}(0.5, 1) = 1.5, f^{--}(0.5, 1) = -0.5,$$

$$f^{++}(0, 0.5) = -0.5, f^{+-}(0, 0.5) = 0.5,$$

$$f^{-+}(0.5, 0) = -0.5, f^{++}(0.5, 0) = -0.5.$$

Розривний сплайн-інтерполянт будуємо у вигляді:

$$S(x, y) = \begin{cases} S_1 f(x, y, C), & (x, y) \in T_1, \\ S_2 f(x, y, C), & (x, y) \in T_2, \\ S_3 f(x, y, C), & (x, y) \in T_3, \\ S_4 f(x, y, C), & (x, y) \in T_4, \end{cases} \quad (2)$$

$$S_1(x, y, C) = 2C_1^{(1)}(1.5 - x - y) + 2C_2^{(1)}(y - 0.5) + 2C_3^{(1)}(x - 0.5),$$

$$S_2(x, y) = 2C_1^{(2)}(0.5 + x - y) + 2C_2^{(2)}(y - 0.5) + 2C_3^{(2)}(x - 0.5),$$

$$S_3(x, y) = 2C_1^{(3)}(x + y - 0.5) + 2C_2^{(3)}(y - 0.5) + 2C_3^{(3)}(x - 0.5),$$

$$S_4(x, y, C) = 2C_1^{(4)}(0.5 - x + y) + 2C_2^{(4)}(y - 0.5) + 2C_3^{(4)}(x - 0.5),$$

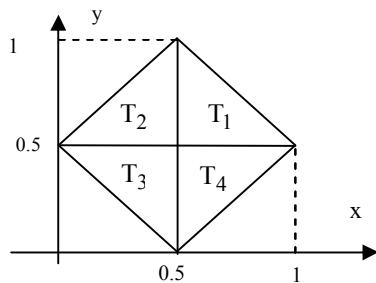


Рис. 2 – Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$.

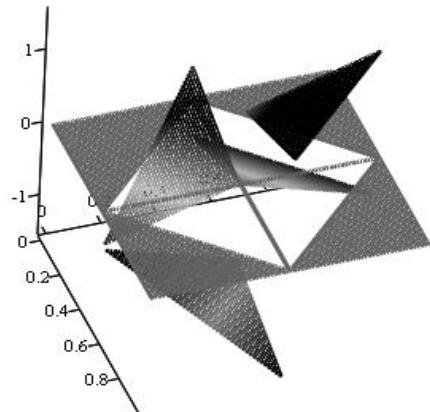


Рис.3 – Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$.

де C – матриця невідомих коефіцієнтів,

$$C = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Далі за методом найменших квадратів розглянемо вираз

$$\begin{aligned} F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy &= \iint_{T_1} (f(x, y) - S_1(x, y, C))^2 dx dy + \\ &+ \iint_{T_2} (f(x, y) - S_2(x, y, C))^2 dx dy + \iint_{T_3} (f(x, y) - S_3(x, y, C))^2 dx dy + \\ &+ \iint_{T_4} (f(x, y) - S_4(x, y, C))^2 dx dy. \end{aligned}$$

Треба знайти такі елементи матриці C , щоб вираз $F(C)$ набував мінімального значення, тобто треба розв'язати мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy \rightarrow \min$$

Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad, та була отримана наступна матриця коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки значень невідомих коефіцієнтів у вираз (2), ми отримаємо наблизувану функцію $f(x, y)$. Тобто побудований розривний інтерполяційний сплайн співпадає з апроксимаційним та точно відновлює задану розривну функцію, що і підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 2. Нехай на області, визначеній в прикладі 1, задана функція $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої сітки,

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^2 - x + 1.5, & (x, y) \in T_1, \\ (y-1)^2 + (x-1)^2 + 0.5, & (x, y) \in T_2, \\ 0.5, & (x, y) \in T_3, \\ x - y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x, y, C)$ у вигляді формули (2); в якості коефіцієнтів матриці C

беремо значення функції (лівосторонні та правосторонні) у вузлах сітки. Отримаємо наступний інтерполяційний сплайн:

$$S(x, y) = \begin{cases} -x - 1.4y + 1.975, & (x, y) \in T_1, \\ -1.4x - 0.6y + 1.95, & (x, y) \in T_2, \\ 0.5, & (x, y) \in T_3, \\ 2x - 2y, & (x, y) \in T_4. \end{cases}$$

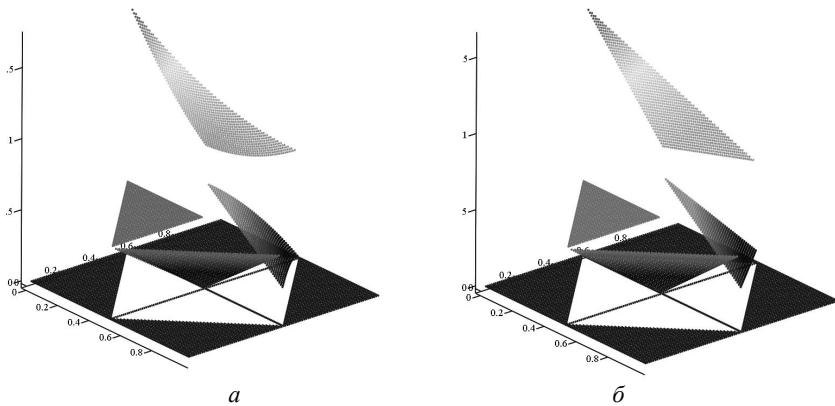


Рис. 4 – Графічний вигляд: *a*– наближуваної функції $f(x, y)$;
б – наближуючого апроксимаційного сплайну $S(x, y)$.

Знайдемо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого інтерполяційного сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.12 .$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формулі (1). Коефіцієнти матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів, тобто розв'язуємо мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy \rightarrow \min$$

Були отримані наступні результати (див. рис. 4).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого апроксимаційного сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.07 .$$

Розроблену теорію планується використовувати для розв'язання 2D задачі комп'ютерної томографії. І перш за все, ми будемо її використовувати для відновлення відомого фантома Шеппа – Логана (рис.5), який складається

ся з декількох еліпсів. Тобто задача полягає в тому, щоб відновити щільність внутрішньої структури даного тіла.

І спочатку розглянемо задачу відновлення щільності тіла, що складається з одного еліпсу.

Приклад 3. Нехай функція $f(x, y)$ задана в одиничному квадраті $[0,1]^2$ таким чином (рис. 6):

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & \frac{(x-0.5)^2}{0.16} + \frac{(y-0.5)^2}{0.04} \leq 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тобто на лінії еліпса функція має розриви першого роду. Нехай задані вузли

$$x_1 = 0, x_2 = 0.1, x_3 = 0.5, x_4 = 0.9, x_5 = 1,$$

$$y_1 = 0, y_2 = 0.3, y_3 = 0.5, y_4 = 0.7, y_5 = 1.$$

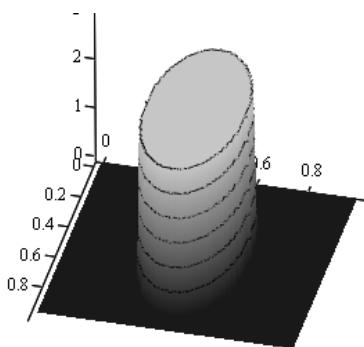


Рис. 6 – Графічний вигляд наближуваної функції

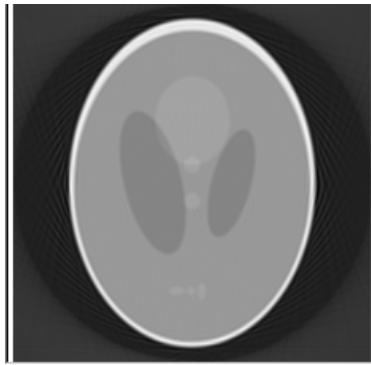


Рис. 5 – Фантом Шеппа – Логана.

Вони розбивають одиничний квадрат на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники.

Трикутники не вкладаються один в одний, а сторони не перетинаються. Наближуючий сплайн на такій трикутній сітці будемо будувати за формулою (2), його графічний вигляд зображеній на рис. 7 а.

Тепер розіб'ємо одиничний квадрат на прямокутники та прямокутні трикутники. На трикутниках розривний наближуючий сплайн будемо будувати за формулою (2), а для побудови розривного сплайну на прямокутниках скористаємося результатами роботи [10]. Графічний вигляд такого узагальненого сплайну представлений на рис 7 б.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

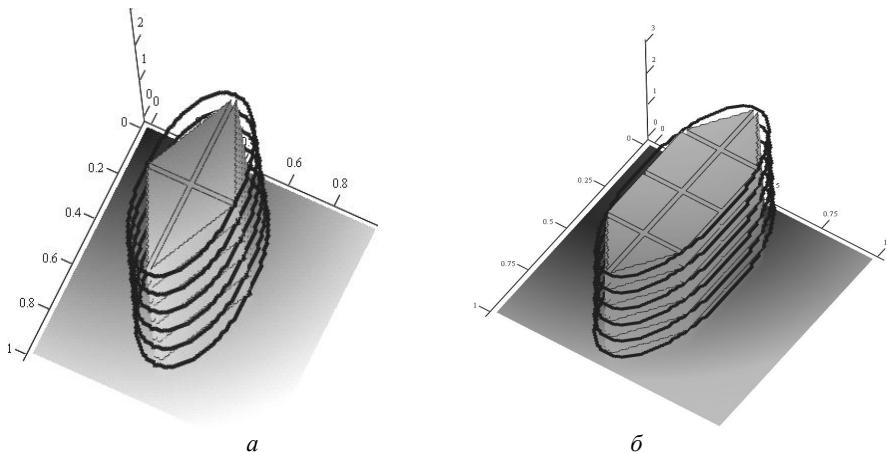


Рис. 7 – Зображення наближуної функції $f(x, y)$ (контури чорного кольору) та наближуючого сплайну (сірий колір) з використанням:
а – тільки трикутних елементів; б – трикутних та прямокутних елементів.

В методах, розроблених авторами, вважається, що місця розривів функції відомі. В подальшому авторами планується розробити теорію наближення розривних функцій розривними функціями у випадку, коли невідомі вузли, в яких знаходиться розрив, та застосувати цю теорію до розв’язання двовимірної задачі комп’ютерної томографії.

Висновки. В роботі пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду, та область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня на триангульованій сітці вузлів. Розглянуто кілька прикладів, що підтверджують гіпотезу авторів: *розривні функції слід наближувати також розривними функціями.*

Список літератури: 1. Корнєйчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с. 2. Стечкін С.Б., Субботін Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. 3. Зав'ялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1976. 4. De Vore R.A. A method of grid optimization for finite element methods // Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – Vol.41. – P.29-45. 5. Литвин О.М. Інтерполяція функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с. 6. Н.Б. Петровская. Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка [Текст / Н.Б. Петровская // Математическое моделирование.– Москва.– 2005.– Т. 17, №1.– С.79–92. 7. Arnold D.N. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems [Text] / Arnold D.N. // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol.39. – №5.– P. 1749-1779. 8. Литвин О.М., Першина Ю.І. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131. 9. Литвин О.М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангулізації.

ляції двовимірної області [Текст] / О.М. Литвин, Ю.І. Першина// Таврічний вісник інформатики та математики. – Сімферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72. **10. Литвин О.Н.** Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) [Текст] / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Компьютерная математика. – Киев.– 2011. – №1. – С.96 – 105.

Надійшла до редколегії 12.10.12

УДК 519.6

Побудова розривних лінійних інтерполяційних сплайнів для наближення функцій, що мають розриви на лініях триангуляції / О. М. Литвин, Ю. І. Першина, В. О. Пасічиник // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2012. – № 54(960) – С.129-140. – Біблогр.: 10 назв.

Предлагается метод построения разрывного интерполяционного линейного сплайна для приближения функции с возможными разрывами первого рода, область определения которых разбита на прямоугольные треугольники. Причем, построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны первой степени на триангулированной сетке узлов.

Ключевые слова: разрывная интерполяция, разрывная функция, томография.

The method of construction explosive interpolational linear spline for approach of function with possible ruptures of the first sort which range of definition is broken into rectangular triangles is offered. And, the constructed explosive splines include, as a special case, classical continuous splines of the first degree on triangulation to a grid of knots

Key words: discontinuous interpolation, discontinuous function, tomography.

УДК 519.87

О.М. НАЗАРЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц., СумДУ, Суми;

М.В. КАРПУША, аспірант, СумДУ, Суми

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ СЛАБОФОРМАЛІЗОВАНИХ СИСТЕМ

Запропоновано метод ідентифікації слабоформалізованих систем з метою подальшої оптимізації. Розглянуто задачу статичної оптимізації, в якій для специфікації цільової функції використана транслогарифмічна функція, а для побудови системи обмежень - лінійні функціональні форми. Апробація побудованих алгоритмів проведена на даних часових рядів реальних макроекономічних систем.

Ключові слова: моделі економіки, слабоформалізована система, ідентифікація параметрів, оптимізація макроекономіки.

Вступ. Побудова математичних моделей слабоформалізованих систем

© О.М. Назаренко, М.В. Карпуша, 2012

(технічних, економічних, соціальних тощо) є актуальною проблемою, для вирішення якої необхідно подолати ряд труднощів технічного характеру, пов'язаних з можливістю застосування математичних методів [1, 2]. Складність, велика різноманітність та швидка мінливість реальних процесів – основні причини, що заважають побудові математичної моделі, яка б адекватно описувала еволюцію системи. На відміну від фізичних та механічних систем для слабоформалізованих систем не можна однозначно встановити фундаментальні та кількісні закономірності, які пов'язували б між собою різні складові таких систем. Швидка мінливість процесів тут приводить до того, що знайдені при розрахунках кількісні закономірності через деякий проміжок часу стають невірними. У більшості випадків класичні методи моделювання потребують адаптації до таких систем.

Головною перепоною на етапі побудови моделей слабоформалізованих систем є оцінювання невідомих параметрів, або *параметрична ідентифікація*. Існують два типи підходів до проблеми ідентифікації [3]. Перший передбачає повну або часткову специфікацію взаємозв'язку між входами, станами і виходами, в той час як невідомі параметри підлягають оцінюванню. Такий підхід називається *побудовою моделі «сірого ящика»* і використовує параметричні методи ідентифікації (*метод найменших квадратів*, *загальний метод моментів*) [4]. Другий підхід – *побудова моделі «чорного ящика»*. Він не передбачає апріорної специфікації і використовує методи як параметричної так і непараметричної ідентифікації [5, 6]. Дано робота стосується ідентифікації у часовій області в рамках моделі «сірого ящика».

Специфікація та ідентифікація слабоформалізованих систем не можуть бути однозначними і залежать від мети дослідження. У даному випадку вони спрямовані на імітацію і прогнозування. Саме через призму імітаційних та прогнозних властивостей слід розглядати і оптимізаційні моделі.

Математична постановка задачі. Нехай деяка слабоформалізована система характеризується вектором-стовпцем фазових координат

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \text{ з евклідового простору } E^n.$$

Вибір компонент та їх кількість n залежать від конкретної задачі та можуть бути визначені інтуїтивно або за допомогою кореляційного аналізу [7]. Введемо у розгляд також функцію якості $f(x)$, що є характеристикою стану даної системи та суттєво залежить від фазових координат. Припускаємо, що існує часовий ряд спостережень кожної фазової координати $\{x_t, t = 0, \dots, N\}$ та цільової функції $\{f_t, t = 0, \dots, N\}$. На проміжку $t \in [0, N]$ (період ідентифікації) будемо відтворювати імітаційні властивості моделі, а період, наступний за базовим ($t = N + 1$), будемо вважати періодом оптимізації.

Ідентифікація невідомих параметрів та специфікація функції цілі моделі повинні проводитись так, щоб при переведені системи із початкового стану в момент часу $t = 0$ в кінцеву бажану точку $(\mathbf{x}_{N+1}, f_{N+1})$ фазові координати x та функція цілі f мали ряд властивостей:

- співвідношення $\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_t$ і $f(t) \approx f_t$ виконуються з високою точністю;
- функція якості відображає специфічні властивості досліджуваної системи;
- оцінки невідомих коефіцієнтів як можна менш чутливі до незначних змін вхідної інформації.

Якщо модель ідентифікована, то наступним кроком повинна бути статична задача математичного програмування. У загальному випадку така задача має вигляд:

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \max, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1)$$

Тут Ω – допустима множина, яка входить в область визначення $D(f) \subset R^n$ цільової функції $f(x)$. Її будемо задавати у вигляді [8]:

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \in R^n : g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m} \}. \quad (2)$$

У даній роботі функція $f(x)$ шукається у класі *транслогарифмічних функцій* [9], а необхідні обмеження (2) задаються у класі лінійних обмежень.

Специфікація та ідентифікація цільової функції. В якості функції цілі оберемо *транслогарифмічну форму*, яка має вигляд:

$$\ln f(\mathbf{x}) = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \ln x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \ln x_i \ln x_j. \quad (3)$$

Перевагою таких форм є не лише підвищення точності (у порівнянні з лінійною, логарифмічною та деякими іншими), а й те, що їх друга похідна є змінною величиною. Саме тому вони можуть адекватно описувати різні властивості систем, які характеризуються ефектами другого порядку [10].

Зробимо заміну

$$\mathbf{z} = \ln \mathbf{x}, \quad y(\mathbf{z}) = \ln f(\mathbf{x}) \quad (4)$$

і запишемо функцію цілі (3) у вигляді квадратичної форми

$$y = c_0 + \mathbf{c}' \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}' \mathbf{D} \mathbf{z}. \quad (5)$$

На практиці при застосуванні моделі (5) для побудови оптимізаційної моделі (1) виникають труднощі з ідентифікацією невідомих параметрів $c_0, \mathbf{c}, \mathbf{D}$. У даному випадку оптимізаційна задача формулюється для деякого моменту часу $t_* = N + 1$, для якого значення фазових координат і цільової функції невідомі. Але, використовуючи статистичну інформацію на базовому

періоді, за допомогою методу найменших квадратів [7] можна оцінити значення елементів c_0 , \mathbf{c} , \mathbf{D} . Тоді, вважаючи, що закон розвитку системи не змінюється в наступний за базовим періодом момент часу t_* , можна використовувати знайдені МНК - оцінки \hat{c}_0 , $\hat{\mathbf{c}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ і для моменту оптимізації t_* .

Спеціфікація та ідентифікація системи обмежень. Як уже відзначалося, систему обмежень (2) будемо задавати у вигляді

$$\mathbf{a}'_i \mathbf{z} \leq \mathbf{b}_i, i = \overline{1, l}.$$

Тут невідомими є вектори \mathbf{a}_i та \mathbf{b}_i .

Для ідентифікації вказаної системи обмежень введемо у розгляд l допоміжних показників v_i , $i = \overline{1, l}$, які характеризують дану систему, суттєво залежать від x і для яких існує часовий ряд спостережень $\{\mathbf{v}_t, t = 0, \dots, N\}$.

Позначимо $\mathbf{w} = \ln \mathbf{v}$ і знайдемо функції регресії

$$\widehat{w}_i = \widehat{a}_{i0} + \widehat{\mathbf{a}}'_i \mathbf{z}, i = \overline{1, l}, t \in [0, N]. \quad (6)$$

Введемо у розгляд матрицю $\mathbf{A} = [\widehat{\mathbf{a}}'_1, \widehat{\mathbf{a}}'_2, \dots, \widehat{\mathbf{a}}'_l]$.

Побудуємо довірчий інтервал для вектора $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_l)'$ в прогнозний момент часу $t_* = N+1$. При рівні значущості α і числу ступенів вільності $k = N - n - 1$ він має вигляд

$$\widehat{\mathbf{w}}(t_*) - \Delta \leq \mathbf{w} \leq \widehat{\mathbf{w}}(t_*) + \Delta, \quad \Delta = \boldsymbol{\delta} \cdot t_{kp}. \quad (7)$$

Тут $\widehat{\mathbf{w}}(t_*) = (\widehat{w}_1(t_*), \widehat{w}_2(t_*), \dots, \widehat{w}_l(t_*))'$, $\boldsymbol{\delta}$ – вектор середньоквадратичних похибок прогнозу; t_{kp} – відповідний квантиль Ст'юдента [7].

Невідомі прогнозні значення $\widehat{\mathbf{w}}(t_*)$, згідно (6), можна обчислювати за формулою

$$\widehat{\mathbf{w}}(t_*) = \widehat{\mathbf{a}}_0 + \mathbf{A} \bar{\mathbf{z}}(t_*), \quad (8)$$

де у якості $\bar{\mathbf{z}}(t)$ будемо вибирати поліноміальні вектор-функції регресії, які отримуються в результаті оцінювання регресійних рівнянь

$$z_i = p_{i0} + p_{i1}t + p_{i2}t^2 + \dots + p_{ik_i}t^{k_i} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Для знаходження оптимального степеня k_i i -ї регресії в (9) використовуємо такий підхід: якщо при послідовному збільшенні степеня поліному дві наступні МНК - оцінки коефіцієнтів розкладу після деякого степеня k_i виявляються статистично незначущими (наприклад, за критерієм Ст'юдента), то степінь k_i вважається оптимальним для заданого рівняння регресії [7].

Нерівність (7) з урахуванням (8) приймає вигляд

$$\hat{\mathbf{w}}(t_*) - \Delta \leq \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t_*) + \hat{\mathbf{a}}_0 \leq \hat{\mathbf{w}}(t_*) + \Delta. \quad (10)$$

Розв'язання задачі оптимізації. Тепер задачу оптимізації (1), (2) можна записати у стандартній формі [11]:

$$\begin{cases} y = c_0 + \mathbf{c}'\mathbf{z} + 0,5\mathbf{z}'\mathbf{D}\mathbf{z} \rightarrow \max, \\ \mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_1 \leq 0, \quad \mathbf{b}_1 = -\hat{\mathbf{a}}_0 + (\hat{\mathbf{w}}(t_*) + \Delta), \\ -\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_2 \leq 0, \quad \mathbf{b}_2 = \hat{\mathbf{a}}_0 - (\hat{\mathbf{w}}(t_*) - \Delta). \end{cases} \quad (11)$$

Порівнюючи систему обмежень (2) з (11), встановлюємо, що $m = 2l$.

В (11) припускається увігнутість квадратичної форми $0,5\mathbf{z}'\mathbf{D}\mathbf{z}$. Відмова від цього припущення у загальному випадку приводить до *багатоекстремальності задачі* [12]. Увігнутість вказаної квадратичної форми буде забезпечена виконанням умови $D < 0$.

Для розв'язання поставленої задачі оптимізації існує багато аналітичних і чисельних методів. Скористаємося *теоремою Куна-Такера* [11]. Для цього введемо у розгляд функцію Лагранжа

$$L(\mathbf{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = c_0 + \mathbf{c}'\mathbf{z} + \frac{1}{2}\mathbf{z}'\mathbf{D}\mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_1) + \boldsymbol{\mu}(-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_2), \quad (12)$$

де $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)'$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)'$ – вектори-множники Лагранжа.

Згідно *теореми Куна-Такера* необхідно виконати умову екстремуму

$$\text{grad } L = 0 \quad (13)$$

і, крім того, задовольнити умови *доповнюючої нежорсткості*

$$\lambda_i(\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)_i = 0, \quad \mu_j(-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)_j = 0, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \mu_j \geq 0, \quad i, j = \overline{1, l}. \quad (14)$$

Якщо \mathbf{z}^* – точка локального мінімуму функції $y(\mathbf{z})$, то кожне із вказаних в (11) обмежень виконується або у вигляді рівності

$$(\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)_i = 0, \quad (-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)_j = 0,$$

або у вигляді строгої нерівності

$$(\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_1)_i < 0, \quad (-\mathbf{A}\mathbf{z} - \mathbf{b}_2)_j < 0.$$

Обмеження першого типу називають *активними обмеженнями*, а другого типу – *неактивними обмеженнями*.

Для активних обмежень відповідна умова доповнюючої нежорсткості виконана.

Неактивні обмеження за рахунок неперервності всіх функцій, що фігурують у даній задачі, виконуються у вигляді строгої нерівності не лише в точці \mathbf{z}^* , але й у деякому околі цієї точки. Тому після усунення із задачі цих обмежень точка \mathbf{z}^* залишиться точкою локального мінімуму.

Поклавши для таких обмежень

$$\lambda_i = 0, \quad \mu_j = 0, \quad i, j = \overline{1, l},$$

ми, з однієї сторони, забезпечуємо виконання умови доповнюючої нежорсткості (14), а з іншої – відкидаємо відповідний доданок із функції Лагранжа (12).

Чисельні результати. На практиці для отримання властивостей реальних систем розмірність фазового простору вибирають із умови $n \geq 3$ [13]. У якості слабоформалізованих систем у роботі розглядаються макроекономічні системи Франції та Великобританії. Як показують практичні дослідження, трьох факторів достатньо, щоб адекватно описати поведінку макроекономічної системи [14]. Тому будемо вважати, що $n = 3$.

Ідентифікація невідомих параметрів моделі здійснювалась на базовому періоді 1978-2007 р. ($N = 30$) у випадку Франції та 1971-2006 р. ($N = 36$) у випадку Великобританії [15], а оптимізація проводилась у наступний за базовим періодом момент часу $t_* = 31$ (2008 р.) та $t_* = 37$ (2007 р.) відповідно. Всі дані нормовані діленням поточних значень на значення відповідної величини у початковому моменті часу (1978 р. та 1971 р.).

Фазовими координатами системи, що обчислюються у євро на одного мешканця країни, обиралися приріст основних фондів x_1 ($z_1 = \ln x_1$), фонд заробітної платні x_2 ($z_2 = \ln x_2$) та експорт товарів та послуг x_3 ($z_3 = \ln x_3$), а у якості функції цілі – чистий національний прибуток f (також у євро на одного мешканця країни, $y = \ln f$).

Для визначення системи обмежень використовувалися v_1 – валовий випуск реального сектору економіки (або $w_1 = \ln v_1$), v_2 – споживчі витрати домугospодарств ($w_2 = \ln v_2$).

На особливу увагу заслуговує питання оцінювання матриці \mathbf{D} цільової функції при виконанні умови від'ємної визначеності. З точки зору економетрики це призводить до необхідності розв'язувати задачу мінімізації функції помилок S методу найменших квадратів з обмеженнями-нерівностями на параметри. Так, наприклад, для матриці $\mathbf{D} = \{d_{ij}\}_{i=1,3}^{j=1,3}$ за критерієm Сильвестра, повинні виконуватися умови

$$\left\{ d_{11} < 0, \quad d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0, \quad \det(D) < 0 \right.$$

для задачі на максимум. На практиці виконати ці умови в рамках чистої економетрики дуже важко. Тому пропонується наступний підхід. Відомо, що матриця будь-якої квадратичної форми є симетричною. Тому алгоритм пошуку матриці \mathbf{D} зводиться до перебору різних класів симетричної матриці (діагональної з одинаковими елементами, діагональної з різними елементами, недіагональної різних модифікацій). Чисельний експеримент показав, що матрицю \mathbf{D} слід шукати у класі симетричних матриць з різними діагональними і одна-

ковими недіагональними елементами.

Ідентифікація функції якості \hat{y} дала наступні результати:

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 0,0215 - 0,5425 z_1 - 0,5495 z_3 + \\&\quad (c.n.) \quad (0,0128) \quad (0,1450) \quad (0,1491) \\+1,8097(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) - 3,7038z_1^2 - 2,8268z_2^2 - 4,4915z_3^2, \\&\quad (0,7397) \quad (1,7031) \quad (1,1506) \quad (1,7445) \\R^2 &= 0,9938, \quad CI = 46,21\end{aligned}$$

у випадку Франції (базовий період 1978 – 2007 р.);

$$\begin{aligned}\hat{y} &= -0,0218 - 0,6212 z_1 + 0,4889 z_2 + 0,9911 z_3 + \\&\quad (c.n.) \quad (0,0115) \quad (0,1603) \quad (0,0949) \quad (0,1774) \\+0,4480(z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3) - 1,3525z_1^2 - 2,1848z_2^2 - 1,6441z_3^2, \\&\quad (0,2144) \quad (0,6611) \quad (0,5633) \quad (0,6833) \\R^2 &= 0,9901, \quad CI = 60,26\end{aligned}$$

у випадку Великобританії (базовий період 1971 – 2007 р.).

Тут під значеннями МНК - оцінок вказані відповідні значення стандартних помилок цих оцінок. Перевірка значущості оцінок за критерієм Ст'юдента при рівні значущості $\alpha = 0,05$ і відповідному числу ступенів вільності k показує, що даному критерію задовольняють всі оцінки, крім, може бути, оцінок вільних членів. Однак незначуще значення оцінки вільного члена ми не відкидаємо для виконання *першої умови Гауса-Маркова* [7].

Великі значення коефіцієнтів детермінації побудованих регресійних моделей ($R^2 > 0,99$) вказують на високі їх імітаційні властивості, що повинно забезпечувати якісні прогнозні характеристики. Розрахунки приводять до таких довірчих інтервалів для w_1 і w_2 у прогнозний момент часу $t_* = 31$ для Франції: $w_1 \in [1,4369; 1,4463]$ і $w_2 \in [1,4533; 1,4555]$; зазначимо, що реальні значення за 2008 рік складають 1,4392 і 1,4535, і вони попадають у вказані інтервали. У випадку Великобританії обчислення дають $w_1 \in [2,5308; 2,5411]$ і $w_2 \in [2,4331; 2,4453]$, при цьому реальні значення складають 2,5389 та 2,4401 відповідно. Стійкість регресійних моделей (нечутливість значень МНК-оцінок до незначних змін вхідної інформації) забезпечується невеликими значеннями *індексів обумовленості* ($CI < 70$).

На рис. 1 і рис. 2 наведені результати апроксимації транслогарифмічної форми. Тут крапками зображені реальні статистичні дані, суцільними кривими – регресійні траекторії. Аналіз функцій регресії показує, що вони з високою точністю апроксимують чистий національний прибуток на одного мешканця Франції та Великобританії за досліджувані проміжки часу. Як наслідок, їх можна використовувати при постановці та розв’язанні задачі статичної оптимізації макроекономічного розвитку.

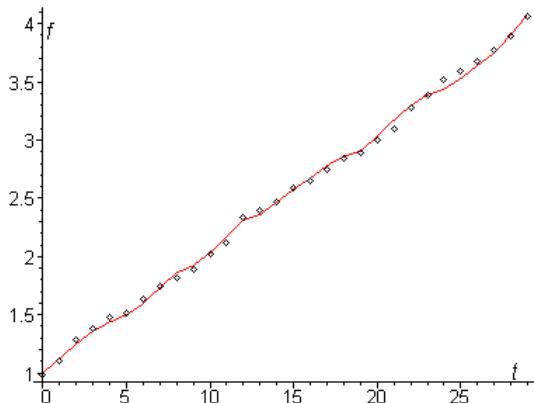


Рис. 1 – Результати апроксимації функції якості у випадку Франції.

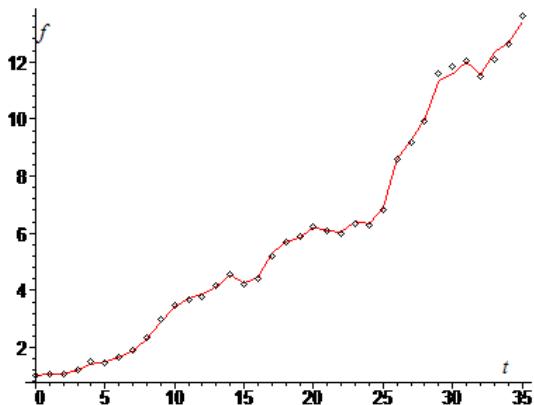


Рис. 2 – Результати апроксимації у випадку Великобританії.

Задача статичної оптимізації набуває вигляду:

$$\begin{cases} \hat{y} = 0,0215 - 0,5425 z_1 - 0,5495 z_3 + \\ + 1,8097(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - 3,7038 z_1^2 - 2,8268 z_2^2 - 4,4915 z_3^2 \rightarrow \max, \\ 0,0723 z_1 - 0,0933 z_2 + 1,1104 z_3 \geq 1,4392, \\ 0,0723 z_1 - 0,0933 z_2 + 1,1104 z_3 \leq 1,4486, \\ 0,0387 z_1 - 0,2102 z_2 + 1,2679 z_3 \geq 1,4421, \\ 0,0387 z_1 - 0,2102 z_2 + 1,2679 z_3 \leq 1,4399 \end{cases}$$

у випадку Франції;

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{y} = -0,0218 - 0,6212 z_1 + 0,4889 z_2 + 0,9911 z_3 + \\ + 0,4480(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) - 1,3525 z_1^2 - 2,1848 z_2^2 - 1,6441 z_3^2 \rightarrow \max, \\ 0,2338 z_1 + 0,8399 z_3 \geq 2,5571, \\ 0,2338 z_1 + 0,8399 z_3 \leq 2,5674, \\ 0,1523 z_1 - 0,0949 z_2 + 0,7687 z_3 \geq 2,4737, \\ 0,1523 z_1 - 0,0949 z_2 + 0,7687 z_3 \leq 2,4859 \end{array} \right.$$

у випадку Великобританії.

Для Франції оптимальні значення фазових координат дорівнюють

$$z_1^* = 1,4567, z_2^* = 1,7139, z_3^* = 1,3873,$$

а для Великобританії

$$z_1^* = 2,4849, z_2^* = 2,8991, z_3^* = 2,5708.$$

Оскільки розрахунки проводились для обезрозмірених даних, отриманих діленням статистичних даних на відповідне значення x_0 у початковому 1978 році або 1971 році, фактичні дані \mathbf{x} знаходилися за формулою

$$x_i = e^{z_i} \cdot x_{f0}, i = \overline{1, 3}.$$

Таблиця – Макроекономічні показники Франції та Великобританії

Макроекономічні показники	Оптимальні значення, € на одного м.	Реальні значення, € на одного м.	Відносний приріст, %		
Франція					
	2008р.	2007р.	2008р.	2007р.	2008р.
Приріст основних фондів	6866,83	6400	6700	6,80	2,43
Фонд заробітної платні	8325,85	7900	8000	5,11	3,91
Експорт	16016,10	15300	15700	4,47	1,97
Валовий випуск	17263,18	16400	16900	5,00	2,10
Споживчі витрати домогосподарств	28623,20	26600	27300	7,07	4,62
Чистий національний прибуток	27957,38	25700	26400	8,07	5,57
Великобританія					
	2007р.	2006р.	2007р.	2006р.	2007р.
Приріст основних фондів	6182,68	5500	6000	11,04	2,95
Фонд заробітної платні	9170,14	9100	8900	0,76	2,95
Експорт	18307,34	17200	17900	6,05	2,23
Валовий випуск	35000,28	33100	34600	5,43	1,14
Споживчі витрати домогосподарств	30400,25	28600	29900	5,92	1,65
Чистий національний прибуток	34840,09	32100	33500	7,86	3,85

Оптимальний розв'язок задачі оптимізації у випадку Франції та Велико- британії приведений у таблиці (дані подані у євро на мешканця). Тут подані оптимальні та реальні значення економічних показників, що характеризують макроекономічний розвиток Франції та Великобританії; в останніх двох столицях приводяться відносні приrostи оптимальних розв'язків у порівнянні з реальними даними.

Як бачимо, для досягнення максимального приросту чистого національного прибутку у Франції у 2008 році (у порівнянні з 2007 роком він складає 8,07%) необхідно дотримуватися наступних рекомендацій: приріст основних фондів повинен становити 6,80%, приріст фонду заробітної платні – 5,11%, приріст експорту – 4,47%. При цьому валовий випуск реального сектору економіки збільшується на 5,00%, а споживчі витрати домогосподарств – на 7,07% (всі дані подані у розрахунку на одного мешканця країни).

У випадку Великобританії можна дати наступні рекомендації: приріст основних фондів повинен становити 11,04%, приріст фонду заробітної платні – 0,76%, приріст експорту – 6,05%. При цьому валовий випуск реального сектору економіки збільшується на 5,43%, а споживчі витрати домогосподарств – на 5,92%.

Висновки. Розглянуто ідентифікацію та статичну оптимізацію макроекономічних процесів за допомогою економетричного моделювання. Адекватність побудованих алгоритмів перевірена на реальних прикладах макроекономічної динаміки. Високі імітаційні та прогнозні властивості моделі вказують на можливість використання отриманих результатів при моделюванні реальних макроекономічних систем.

Список літератури: 1. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.:Юнити-Дана, 2005.– 295 с. 2. Гук А. К. и др. Социальные системы. Формализация и компьютерное моделирование: Учебное пособие. Омск: Омск. гос. ун-т, 2000. – 326 с. 3. Ljung L. System Identification. Theory for the user. 2nd ed. N. Y.: PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, 1991. – 432 p. 4. Greene W. H. Econometric analysis, Fifth Editorial. – N. J.: Prentice Hall Upper Saddle River, 2003. – 1056 с. 5. Moonen M., Moor B., Vandenberghe L., Vandewalle J. On- and off-line identification of linear state-space models // International Journal of Control. 1989. – Vol. 49. – №.1. – P. 219-232. 6. Wang F., Li H., Zhang Y., Li R. Novel ICA algorithm with nonparametric estimation based on GGD kernel // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2006. – Vol. 2. – №. 2. – P. 427-440. 7. Назаренко О.М. Основи економетрики: Вид. 2-ге, перероб.: Підручник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 392 с. 8. Аттетков А. В., Галкін С. В., Зарубін В. С. Методы оптимізації. – М.: Іздательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 439 с. 9. Назаренко О.М., Карпуша М.В. Моделювання ефектів другого порядку і статистична інференція в класі гнучких функціональних форм // Вісник Запорізького національного університету. Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. 2008. – №1. – С. 146-153. 10. Intriligator M.D. Mathematical optimization and economic theory. – PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. 11. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2000.– 208 с. 12. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с. 13. Анищенко В. С. Детерменированный хаос // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – №6. – С. 70-76. 14. Nazarenko O.M., Filchenko D. V. Parametric Identification of State-

Надійшла до редакції 23.10.2012

УДК 519.87

Ідентифікація параметрів задач оптимізації слабоформалізованих систем / О. М. Назаренко, М. В. Карпуша // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». –Харків: НТУ «ХПІ»,–2012.– №54(960). – С.140-150.– Бібліогр.: 15 назв.

Предложен метод идентификации слабоформализованных систем с целью дальнейшей оптимизации. Рассмотрена задача статической оптимизации, в которой для спецификации целевой функции использована транслогарифмическая функция, а для построения системы ограничений - линейные функциональные формы. Апробация построенных алгоритмов проведена на данных временных рядов реальных макроэкономических систем.

Ключевыe слова: модели экономики, слабоформализованная система, идентификация параметров, оптимизация макроэкономики.

In the paper we suggested a method of identification weakly-formalized systems in the problem of static optimization. For the specification of the objective function used translog function, and for building a system of constraints used linear functional forms. The approbation of the developed algorithm has been performed using real statistical data of real macroeconomic systems.

Key words: economic model, weakly formalization system, parameter identification, optimization of macroeconomics.

УДК 519.21

**З.Ф. НАЗИРОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна;
Н.В. ЧЕРЕМСЬКА, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХПІ»**

ПРО ОДИН КЛАС НЕСТАЦІОНАРНИХ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ВИПАДКОВИХ ФУНКІЙ

Введено клас векторнозначних випадкових функцій, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі скалярних випадкових процесів UBLS. Реалізовано гіЛЬбертів підхід до вивчення одного класу векторнозначних випадкових функцій. Розробка кореляційної теорії такого класу випадкових функцій може бути перспективною для розв'язання багатовимірних прикладних задач.

Ключові слова: випадкові функції, кореляційна теорія, статистична не стаціонарність.

Вступ. Існує великий клас прикладних задач, для яких є характерною статистична нестаціонарність. Наприклад, поширення хвиль у турбулентній атмосфері, при дослідженні електромагнітних хвиль, які поширяються поблизу земної кулі або в іоносфері, аналіз задачі загасання або зростання по

© З.Ф. Назиров, Н.В. Черемська, 2012

верхневих хвиль сильною турбулентністю, що створюється об'єктом, який рухається, та інші. При розв'язанні таких задач використання моделей стаціонарних випадкових процесів або однорідних випадкових полів призводить до певних похибок. Тому виникає необхідність у розробці кореляційної теорії широкого класу нестаціонарних векторнозначних випадкових функцій, що була б перспективною для розв'язання прикладних задач, для яких статистична нестаціональність або неоднорідність відповідних статистичних даних є істотною [1,2,3,4].

Аналіз останніх досліджень. Випадкові процеси і послідовності, для яких виконується умова

$$M \left| \sum_{k=1}^N a_k \xi(t_k + \tau) \right|^2 \leq CM \left| \sum_{k=1}^N a_k \xi(t_k) \right|^2$$

або в термінах кореляційних функцій

$$\sum_{j,l=1}^N K(t_j + \tau, t_l + \tau) a_j \bar{a}_l \leq C \sum_{j,l=1}^N K(t_j, t_l) a_j \bar{a}_l$$

(для послідовностей t_j, t_l, τ – це невід'ємні цілі) розглядалися в роботі [5].

Клас таких процесів в [5] названо UBLs (uniformly bounded linearly stationary: однорідно обмежені лінійно стаціонарні). Дослідження цих процесів тісно пов'язано з лінійними оберненими перетвореннями у відповідному гільбертовому просторі H_ξ , в який занурюється випадковий процес. При цьому випадковій функції відповідає крива або послідовність (дискретний час) в гільбертовому просторі.

В роботі [6,7,8] розповсюждено результати роботи [5] на деякі класи неоднорідних випадкових полів та лінійні перетворення випадкових функцій. Щодо векторного аналога UBLs процесів, то він не досліджувався.

Постановка задачі. Викликає зацікавленість розповсюдження результатів роботи [5] на деякі класи векторнозначних випадкових процесів і послідовностей. Введення класу векторнозначних випадкових процесів і послідовностей, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLs, може привести до результативної кореляційної теорії векторнозначних нестаціонарних випадкових функцій.

Розв'язання. Нехай

$$\xi(t, \omega) = (\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_m(t, \omega)) \in \mathbb{R}_m \quad \omega \in \Omega,$$

де Ω – імовірнісний простір – векторнозначних випадковий процес з математичним сподіванням $M \xi(t, \omega) = 0$ і кореляційною матрицею з елементами

$$K_{\alpha\beta}(\xi_\alpha(t, \omega), \xi_\beta(t, \omega)) = M \xi_\alpha(t, \omega) \overline{\xi_\beta(t, \omega)}.$$

Надалі індекс ω у позначенні векторнозначного випадкового процесу $\xi(t, \omega)$ не писатимемо. Якщо у випадку

$$(\xi_1(t, \omega), \dots, \xi_m(t, \omega)) \in \mathbb{R}_m$$

кореляційна матриця неперервна, то $\xi(t)$ можна занурити в гільбертів простір

$$H_\xi = \overline{V C_\alpha \xi(t_k)}.$$

Тоді елементи кореляційної матриці можна зобразити як скалярний додаток у гільбертовому просторі

$$K_{\alpha\beta}(t, s) = \langle x_\alpha(t), x_\beta(s) \rangle_{H_\xi},$$

де $x(t)$ – векторнозначна функція у гільбертовому просторі H_ξ , що відповідає початковому процесу $\xi(t, \omega)$ [9].

Векторнозначний випадковий процес $\xi(t)$ називатимемо *квазіоднорідним*, якщо

$$M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k(t_j + \tau) \right|^2 \leq \chi M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k(t_j) \right|^2, \quad (1)$$

де $0 < \chi < \infty$. Для стаціонарних випадкових процесів нерівність (1) переходить в рівність та $\chi = 1$.

В термінах кореляційних матриць (1) переходить в нерівність

$$\sum_{j,l=1}^N \sum_{p,q=1}^m K_{pq}(t_j + \tau, t_l + \tau) a_{pj} \overline{a_{ql}} \leq \chi \sum_{j,l=1}^N \sum_{p,q=1}^m K_{pq}(t_j, t_l) a_{pj} \overline{a_{ql}}$$

або термінах відповідної векторної кривої:

$$\sum_{j,l=1}^N \sum_{p,q=1}^m \langle x_p(t_j + \tau), x_q(t_l + \tau) \rangle_{H_\xi} a_{pj} \overline{a_{ql}} \leq \chi \sum_{j,l=1}^N \sum_{p,q=1}^m \langle x_p(t_j), x_q(t_l) \rangle_{H_\xi} a_{pj} \overline{a_{ql}} \quad (2)$$

Клас таких процесів або відповідних їм кривих у гільбертовому просторі H_ξ позначатимемо G_{qs} .

Теорема 1. Нехай $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) \in \mathbb{R}_m$ і належить класу G_{qs} .

Тоді

$$y(t) = Bx(t) = (Bx_1(t), \dots, Bx_m(t)) \text{ належить класу } G_{qs},$$

де $x(t)$ – векторна крива в гільбертовому просторі H_ξ , що відповідає початковому процесу $\xi(t)$, а B – лінійний оборотний обмежений оператор.

Доведення. Нехай $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) \in G_{qs}$. З (1) витікає, що існує стала $\chi > 0$ така, що

$$M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k(t_j + \tau) \right|^2 \leq \chi M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k(t_j) \right|^2.$$

Вкладемо $\xi(t)$ у гільбертів простір H_ξ . Отримаємо векторну криву $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$. Розглянемо лінійні перетворення в

$$H_\xi : y(t) = Bx(t) = (Bx_1(t), \dots, Bx_m(t)).$$

З того що B є обмеженим і лінійним витікає, що

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} y_k(t_j + \tau) \right\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} Bx_k(t_j + \tau) \right\|^2 \leq \|B\|^2 \left\| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} x_k(t_j + \tau) \right\|^2 \leq \\ &\leq \|B\|^2 \chi \left\| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} x_k(t_j) \right\|^2 = \|B\|^2 \chi M \left\| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k(t_j) \right\|^2. \end{aligned}$$

Але, $x_l(t) = B^{-1}\eta_l(t)$ і, отже,

$$M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} x_k(t_j) \right| \leq \|B^{-1}\|^2 M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \eta_k(t_j) \right|^2.$$

Тобто $y(t)$ належить класу G_{qs} . Теорема доведена.

Теорема 2. Нехай $y(t)$ – векторна крива у гільбертовому просторі H_ξ , яка належить класу G_{qs} , та

$$y(t) = (T_t^{(1)}y_1(0), \dots, T_t^{(m)}y_m(0)), \quad t \in \mathbb{R}_1, \text{ де } T_t^{(i)} \quad (i = 1, \dots, m)$$

– відповідні однопараметричні групи операторів.

Тоді існує стаціонарна векторна крива $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ в H_ξ , така що

$$y(t) = Bx(t) = (Bx_1(t), \dots, Bx_m(t)).$$

Доведення. За узагальненою теоремою Надя [10] якщо $T_t^{(i)}$ ($i = 1, \dots, m$) обмежені в сукупності на всій дійсній осі, то існує обмежений разом з оберотним оператором B такий, що $B^{-1}T_t^{(i)}B = U_t$, де U_t – унітарний оператор.

Розглянемо векторну стаціонарну криву

$$x(t) = (U_t B^{-1}y_1(0), \dots, U_t B^{-1}y_m(0)) \text{ в } H_\xi.$$

Тоді $y(t) = Bx(t) = (Bx_1(t), \dots, Bx_m(t))$. Теорема доведена.

Теорема 3. Нехай

$$\xi_\alpha(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta}(n-k) g(k) Z_\beta(k), \quad (\alpha = 1, \dots, m), \quad (4)$$

де

$$MZ_\beta(k) = 0, \quad MZ_\alpha(k) \overline{Z_\beta(k)} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{kj}, \quad \text{тобто } (Z_1(n), \dots, Z_m(n))$$

— векторний дискретний білій шум, а для скалярної функції $g(k)$ існують дві константи C_1 і C_2 такі, що

$$C_1 \leq |g(k)|^2 \leq C_2.$$

Тоді $x_\alpha(n)$ належить класу G_{qs} , де $x_\alpha(n)$ — векторна послідовність в гільбертовому просторі H_ξ , що відповідає початковій послідовності $\xi_\alpha(n)$, та

$$x_\alpha(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=1}^m h_{\alpha\beta}(n-k) g(k) u_\beta(k), \quad \text{де } \langle u_\alpha(k), u_\beta(j) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{kj}.$$

Доведення. За означенням $x_\alpha(n)$ маємо:

$$\begin{aligned} M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_\alpha(n_j + \tau) \right|^2 &= \sum_{j,l=1}^N \sum_{p,q=1}^m \langle x_p(n_j + \tau), x_q(n_l + \tau), \rangle a_{pj} \overline{b_{ql}} = \\ &= \sum_{j,q=1}^N \sum_{k,p=1}^m a_{kj} \overline{b_{pq}} M \xi_\alpha(n_j + \tau) \overline{\xi_\gamma(n_q + \tau)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k + \tau)|^2 \sum_{j,q=1}^N \sum_{k,p=1}^m a_{kj} \overline{b_{pq}} h_{\alpha\beta}(n_j - k) \overline{h_{\gamma\beta}(n_q - k)}. \end{aligned}$$

Через те, що

$$\sum_{j,q=1}^N \sum_{k,p=1}^m a_{kj} \overline{b_{pq}} h_{\alpha\beta}(n_j - k) \overline{h_{\gamma\beta}(n_q - k)} = \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} h_{\alpha\beta}(n_j - k) \right|^2 \geq 0$$

та

$$|g(k + \tau)|^2 = \frac{|g(k + \tau)|^2 |g(k)|^2}{|g(k)|^2} \leq C_2 C_1^{-1} |g(k)|^2,$$

маємо:

$$\begin{aligned} M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_\alpha(n_j + \tau) \right|^2 &\leq C_2 C_1^{-1} |g(k)|^2 \sum_{j,q=1}^N \sum_{k,p=1}^m a_{kj} \overline{b_{pq}} h_{\alpha\beta}(n_j - k) \overline{h_{\gamma\rho}(n_q - k)} = \\ &= M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_\alpha(n_j) \right|^2. \end{aligned}$$

Отже, $x_\alpha(n)$ належить класу G_{qs} . Теорема доведена.

Теорема 4. Нехай векторнозначний випадковий процес $\xi(t)$ має вигляд

$$\xi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\alpha\beta}(t-s) g(s) d_p Z_p(s),$$

де $Z_p(s)$ – поле з ортогональними приrostами та

$$M(\Delta_1 Z_p \overline{\Delta_2 Z_p}) = \begin{cases} 0, p \neq q \\ d_p s, p = q \end{cases}, \text{ де } \Delta_k Z_p = Z_p(s_k + \Delta s_k) - Z_p(s_k), \quad k = 1, 2,$$

а для скалярної функції $g(s)$ існують дві константи C_1 і C_2 такі, що

$$C_1 \leq |g(s)|^2 \leq C_2.$$

Тоді $x(t) \in G_{qs}$ де $x(t)$ – векторнозначний процес в гільбертовому просторі H_ξ , що відповідає початковому процесу $\xi_\alpha(t)$.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_\alpha(t_j + \tau) \right|^2 &= \sum_{j,q=1}^N \sum_{k,p=1}^m a_{kj} \overline{b_{pq}} M \xi_\alpha(t_j + \tau) \overline{\xi_\gamma(t_q + \tau)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(s + \tau)|^2 \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} h_\alpha(t_j - s) \right|^2 d_p s. \end{aligned}$$

Через те, що

$$\sum_{j,q=1}^N \sum_{k,p=1}^m a_{kj} \overline{b_{pq}} h_{\alpha\beta}(t_j - s) \overline{h_{\gamma\rho}(t_q - s)} = \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} h_{\alpha\beta}(t_j - s) \right|^2 \geq 0$$

та

$$|g(s + \tau)|^2 = \frac{|g(s + \tau)|^2 |g(s)|^2}{|g(s)|^2} \leq C_2 C_1^{-1} |g(s)|^2,$$

отримуємо:

$$M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_\alpha(t_j + \tau) \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} C_2 C_1^{-1} |g(s)|^2 \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} h_\alpha(t_j - s) \right|^2 d_p s = \\ = M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_\alpha(s_j) \right|^2$$

Отже, відповідна векторна крива $x(t)$ належить класу G_{qs} . Теорема доведена.

Нехай $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) \in G_{qs}$ – стаціонарний векторнозначний процес в гільбертовому просторі. Тоді $\xi_k(t)$ ($k = \overline{1, n}$) мають вигляд

$$\xi_k(t) = e^{itA} \xi_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\eta_k(\lambda),$$

де

$$A = A^*; \Delta \eta_k(\lambda) = \Delta E_\lambda \xi_{0k}; \Delta F_{kl}(\lambda) = M \Delta \eta_k(\lambda) \overline{\Delta \eta_l(\lambda)} = \langle \Delta F_\lambda \xi_{0k}, \Delta F_\lambda \xi_{0l} \rangle_{H_\xi}.$$

Кореляційна функція залежить від різниці аргументів,

$$K_{\alpha\beta}(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF_{kl}(\lambda).$$

У випадку скінченноимірного гільбертового простору H_ξ , E_λ – функція скінченої кількості стрібків, а відповідна стаціонарна крива в гільбертовому просторі має вигляд $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$, де

$$\xi_k(t) = \sum_{l=1}^n e^{it\lambda_l} \xi_{kl}, \quad \langle \xi_{\alpha l}, \xi_{\beta m} \rangle_{H_\xi} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, l \neq m.$$

Тобто стаціонарна векторна випадкова крива має вигляд (спектральний розклад)

$$\xi_k(t, \omega) = \sum_{l=1}^n e^{it\lambda_l} \xi_{kl}(\omega), \text{ а } M \xi_{kl}(\omega) \overline{\xi_{mp}(\omega)} = 0, \quad k \neq m, l \neq p.$$

Теорема 5. Нехай $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ – векторна крива у гільбертовому просторі H_ξ , $\dim H_\xi = n < \infty$. Крива $y(t)$ належить класу G_{qs} тоді тільки тоді, якщо

$$y_k(t) = \sum_{l=1}^n e^{it\lambda_k} h_{kl}, \quad (5)$$

де $\{h_{kl}\}_{k=\overline{1, m}, l=\overline{1, n}}$ – некорельовані випадкові величини.

Доведення. Якщо $y_k(t)$ мають вигляд (5), то користуючись процесом ортогоналізації Грама-Шмідта, отримаємо, що

$$h_{kl} = \sum_{\alpha, \beta=1}^{n,m} B_{kl} e_{\alpha\beta}, \text{ де } e_{\alpha\beta} \text{ – ортогональний базис.}$$

Тоді $y(t) = Bx(t)$, де

$$x_k(t) = \sum_{l=1}^n e^{it\lambda_k} e_{kl}. \quad (6)$$

Зауважимо що $\langle e_{\alpha\beta}, e_{kj} \rangle = \delta_{\alpha k} \delta_{\beta j}$ – некорельовані випадкові величини.

Рівність (6) показує, що $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ – це стаціонарна крива в гільбертовому просторі H_ξ , $\dim H_\xi = n < \infty$.

Обернене твердження витікає з теореми 2. Теорема 5 доведена.

Теорема 6. Нехай некорельовані векторні випадкові процеси $\xi^{(1)}(t)$ і $\xi^{(2)}(t)$ належать класу G_{qs} . Тоді

$$\eta(t) = \xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$$

також належить класу G_{qs} .

Доведення. Нехай випадкові процеси $\xi^{(1)}(t)$ і $\xi^{(2)}(t)$ належать класу G_{qs} , тоді існують дві константи $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$ такі, що

$$M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k^{(n)}(t_j + \tau) \right|^2 \leq C_n M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k^{(n)}(t_j) \right|^2, \quad n = 1, 2.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \eta_k(t_j + \tau) \right|^2 &\leq C_1 M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k^{(1)}(t_j) \right|^2 + C_2 M \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \xi_k^{(2)}(t_j) \right|^2 \leq \\ &\leq CM \left| \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m a_{kj} \eta_k(t_j) \right|^2, \end{aligned}$$

де $C = \max(C_1, C_2)$. Отже, $\eta(t)$ належить класу G_{qs} . Теорема доведена.

Висновки. Таким чином, підхід, запропонований в [6] та розвинутий в [6,7], можна використати при дослідженні деяких класів векторнозначних випадкових процесів і послідовностей. Відзначимо, що лінійні перетворення векторної кривої у відповідному гільбертовому просторі приводять до деяких

нових класів нестационарних векторних випадкових процесів і послідовностей та дозволяють моделювати кореляційні матриці-функції таких випадкових процесів і послідовностей.

Список літератури: 1. Алексеев Г.Л., Белоброва М.В. Восстановление профиля характеристики коэффициента преломления тропосферы по корреляционным функциям поля // Радиофизика и электроника: Сб. научн. тр. НАН Украины, ин-т им. А.Я. Усикова. – Харьков, 2005. – Т. 10. – №1. – С.70-75. 2. Боеv A.G. О гашении поверхностных волн сильной турбулентностью // Физика атмосферы и океана. – 1971. – Т.VII. – №1. – С. 50-59. 3. Бурмака В.П., Костров Л.С., Черногор Л.Ф. Статистические характеристики сигналов доплеровского ВЧ радара при зондировании средней атмосферы возмущенной стартами ракет и солнечным терминатором // Радиофизика и радиоастрономия. – 2003. – Т.8. – №2. – С.143-162. 4. Лысенко В.Н. Измерение параметров ионосферы средством корреляционной обработки некогерентного рассеянного сигнала // Радиофизика и электроника. Сб. научн. тр. НАН Украины, ин-т им. А.Я. Усикова. – Харьков, 2002. – Т. 7.–№1.–С.82-88. 5. Dag Tjostheim and Jonh B.Thomas Some Properties and Examples of Random Processes that Are Almost Wide Sense Stationary // IEEE Trans. on Information Theory, v.21. – №3, 1975. – P.257-262. 6. Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А. Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Математичне моделювання в техніці та технологіях».–Харків: НТУ «ХПІ».–2011.–№13.–С.146-153. 7. Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А. Лінійні перетворення дискретних випадкових полів // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Математичне моделювання в техніці та технологіях».–Харків: НТУ «ХПІ».–2012.–№2.–С.172-179. 8. Назиров З.Ф., Черемська Н.В. Дилатациі випадкових полів // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Математичне моделювання в техніці та технологіях».–Харків: НТУ «ХПІ».–2011.–№13.–С.146-153. 9. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы // М.: Физмат. гиз, 1963. – 284 с. 10. Аббайи Л. Об одном классе неоднородных случайных полей // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. Механика, теория управления и математическая физика. – Харьков, 1984. – № 254. – С.49-53.

Надійшла до редколегії 22.10.2012

УДК 519.21

Про один клас нестационарних векторнозначних випадкових функцій / З. Ф. Назиров, Н. В. Черемська // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54(960). – С.150-158. – Бібліогр.: 10 назв.

Вводится класс векторнозначных случайных функций, являющихся аналогом почти стационарных в широком смысле случайных скалярных процессов UBLs. Реализован гильбертов подход к изучению одного класса векторнозначных случайных функций. Разработка корреляционной теории такого класса случайных функций может быть перспективной для решения многомерных задач.

Ключевые слова: случайные функции, корреляционная теория, статистическая нестационарность.

In this paper we introduce a class of vector-valued scalar random functions that are analogous to almost wide-sense stationary random processes UBLs. In work carried Hilbert approach to the study of a class of vector-valued random functions. Development of the correlation theory of random functions of this class may be promising for the solution of problems.

Key words: random functions, correlation theory, statistical nonstationary.

Ф.В. НОВІКОВ, д-р техн. наук, проф., ХНЕУ, Харків;
I.Є. ІВАНОВ, канд. техн. наук, ДВНЗ «ПДТУ», Маріуполь.

АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПИТОМОГО ЗНОШУВАННЯ КРУГА ПРИ ШЛІФУВАННІ

Отримана аналітична залежність для визначення питомого зношування круга й на її основі по-новому розкрита фізична сутність процесу шліфування й сформульовані основні умови підвищення його ефективності.

Ключові слова: шліфування, абразивний круг, зношування зерна, продуктивність обробки.

Вступ. Як установлено практикою, при шліфуванні важкооброблюваних матеріалів однією з основних умов підвищення продуктивності обробки є реалізація режиму інтенсивного самозагострювання абразивного круга, що забезпечує його високу ріжучу здатність і високопродуктивне знімання припуску. Разом з тим, режим самозагострювання абразивного круга супроводжується його інтенсивним зношуванням, що не завжди економічно обґрунтовано. У зв'язку із цим важливо теоретично обґрунтувати закономірності зміни такого комплексного показника, як питоме зношування круга, що визначає умови функціонування процесу шліфування. У науково-технічній літературі [1,2,3] наведені в основному результати експериментальних досліджень даного показника, теоретичні рішення відсутні, що не дозволяє повною мірою обґрунтувати можливості його регулювання. Необхідно відзначити, що питання математичного моделювання зношування абразивного круга при шліфуванні досить складні й мало вивчені. Тому аналітичний опис питомого зношування круга при шліфуванні є актуальним завданням, що має велике практичне значення.

Ціль роботи – провести теоретичне обґрунтування умов зменшення питомого зношування круга при шліфуванні.

Математична модель зношування круга при шліфуванні. У роботі [4] запропонований підхід до розрахунку питомого зношування круга при шліфуванні з урахуванням лінійного зношування максимально виступаючого зі зв'язки круга зерна до моменту його об'ємного руйнування або випадання зі зв'язки без руйнування. Для цього розглянута розрахункова схема, наведена на рис.1. Прийнято, що величина лінійного зношування найбільш виступаючого зерна в момент його об'ємного руйнування дорівнює x_1 , а другого зерна

© Ф.В. Новіков, І.Є. Іванов, 2012

— нижче розташованого, у той же момент — дорівнює x_2 , де $x_2 < x_1$. Для того, щоб відбулося об'ємне руйнування другого зерна, воно повинне перетерпіти додаткове лінійне зношування на величину

$$\Delta_0 = x_1 - x_2. \quad (1)$$

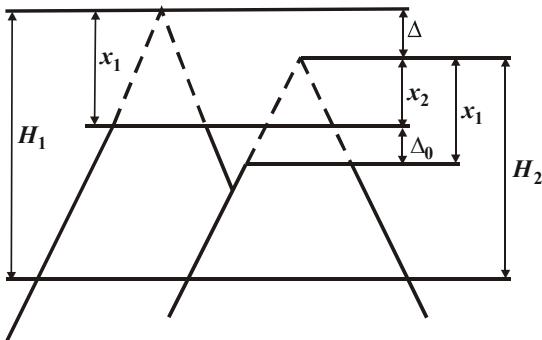


Рис. 1 – Розрахункова схема зношування зерен круга.

Очевидно, чим більше Δ_0 , тим більше ресурс роботи зерна й менше інтенсивність зношування круга. Параметри x_1 й x_2 виражаються залежностями

$$x_1 = \eta \cdot H_1, \quad x_2 = \eta \cdot H_2,$$

де η — безрозмірний параметр, що визначає ступінь лінійного зношування зерна до моменту його об'ємного руйнування або випадання зі зв'язки без руйнування (змінюється в межах 0...1, для гострого зерна $\eta \rightarrow 0$, для затупленого зерна $\eta \rightarrow 1$); H_1 — максимальна глибина впровадження оброблюваного матеріалу в робочу поверхню круга, відраховуючи її від вершини вихідного (незношеного) максимально виступаючого над рівнем зв'язки зерна; $H_2 = H_1 - \Delta$; Δ — відстань між вершинами двох найбільш виступаючих зі зв'язки зерен. З урахуванням співвідношень

$$\eta = \frac{x_1}{H_1} = \frac{x_2}{H_2} = \frac{x_1 - \Delta_0}{H_1 - \Delta}, \quad (2)$$

отримано

$$\Delta_0 = \eta \cdot \Delta. \quad (3)$$

Із залежності (3) випливає пропорційний зв'язок величини η й параметра Δ_0 , що визначає період часу між об'ємним руйнуванням двох найбільш виступаючих зерен. Дано залежність відповідає практиці шліфування. Так відомо, що процес шліфування кругом з гострим ріжучим рельєфом супрово-

джується підвищеним його зношуванням. Аналогічна закономірність випливає з залежності (3), тому що зі зменшенням величини η , що відповідає утворенню більш гострого рельєфу на крузі, параметр Δ_0 знижується й підвищує зношування круга. При $\eta=0$ лінійне зношування зерна до моменту його об'ємного руйнування відсутнє, і круг працює в режимі катастрофічного зношування.

Використовуючи залежність (3), аналітично опишемо питоме зношування круга q . Для цього припустимо, що за час τ у процесі шліфування відбулося об'ємне руйнування двох найбільш виступаючих над зв'язкою зерен, що відповідає лінійному зношуванню круга на величину Δ . Обсяг зношеної частини абразивного круга складає

$$\vartheta_a = 2\pi \cdot R_{kp} \cdot B \cdot \Delta, \quad (4)$$

де B , R_{kp} – ширина й радіус круга, м.

За цей же час обсяг знятого матеріалу складає

$$\vartheta_m = B \cdot V_{dem} \cdot t \cdot \tau, \quad (5)$$

де V_{dem} – швидкість деталі, м/с; t – глибина шліфування, м; $\tau_0 = 2\pi \cdot R_{kp} / V_{kp}$ – час одного обертання круга, с; V_{kp} – швидкість круга, м/с; $i_0 = \Delta_0 / \Delta_i$ – число обертань круга за час між об'ємним руйнуванням двох найбільш виступаючих зерен, що відповідає лінійному зношуванню зерен на величину Δ ; Δ_i – лінійне зношування зерна за один контакт з матеріалом.

Питоме зношування круга q одержимо зі співвідношення ϑ_a й ϑ_m :

$$q = \frac{\Delta_i \cdot V_{kp}}{V_{dem} \cdot t \cdot \eta}. \quad (6)$$

По фізичній суті відношення $V_{dem} \cdot t / V_{kp}$ дорівнює товщині шару знятого матеріалу (у вигляді стружок) Δ_m , рівномірно розподіленого на робочій поверхні круга. Даний висновок випливає з відомої залежності для визначення миттєвої сумарної площині поперечного перерізу всіма одночасно працюючими зернами круга $S_{sum} = Q / V_{kp}$, де $Q = B \cdot V_{dem} \cdot t$ – продуктивність обробки, м³/с. Представляючи $S_{sum} = B \cdot \Delta_m$, маємо

$$\Delta_m = \frac{V_{dem} \cdot t}{V_{kp}}. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень $\Delta_i = x_1 / n$, $H_1 = x_1 / \eta$ і рівності (7), залежність (6) прийме вигляд

$$q = \frac{H_1}{n \cdot \Delta_m}, \quad (8)$$

де n – кількість контактів оброблюваного матеріалу з ріжучим зерном до моменту його об'ємного руйнування або випадання зі зв'язки без руйнування.

У роботі [4] показано, що величина H_1 мало змінюється (збільшується) по мірі зношування зерна (збільшення безрозмірного параметра η):

$$H_1 = \bar{X} \cdot \sqrt[3]{\frac{450\pi \cdot V_{dem} \cdot \sqrt{2 \cdot t \cdot \rho}}{\operatorname{tg}\gamma \cdot m \cdot V_{kp} \cdot (1 - \eta^2)}}, \quad (9)$$

де \bar{X} – зернистість круга, м; m – об'ємна концентрація зерен у крузі; $\rho = 1/R_{kp} + 1/R_{dem}$; R_{dem} – радіус деталі, м; γ – половина кута при вершині конусоподібного ріжучого зерна.

Отже, величину H_1 в першому наближенні можна розглядати постійною, також як і величину Δ_m . Виходячи із цього, змінною величиною в залежності (8) залишається лише n , зі збільшенням якої питоме зношування круга q зменшується. Тому зі збільшенням лінійного зношування зерна й утворенням на його вершині площинки, інтенсивність зношування зерна зменшується, що веде до зменшення q . Збільшення міцності й зносостійкості абразивного зерна також сприяє збільшенню n й зменшенню q .

Результати моделювання. Залежність (8) містить три невідомі величини: q , H_1 , n . Очевидно, судити про характер зношування круга можна, знаючи значення питомого зношування круга q , тому що встановити кількісно значення величин H_1 і n значно складніше. У зв'язку із цим, проведемо кількісний аналіз відношення H_1/n , для чого представимо залежність (8) у вигляді

$$\frac{H_1}{n} = \Delta_m \cdot q. \quad (10)$$

Визначимо відношення H_1/n для умов круглого зовнішнього шліфування твердого сплаву. Вихідні розрахункові дані: $V_{dem} = 150$ м/хв.; $V_{kp} = 50$ м/с; $t = 0,02$ мм. Тоді, відповідно до залежності (7): $\Delta_m = 1$ мкм. Як установлено експериментально, для цих умов обробки $q = 1$. Тоді, відповідно до залежності (10):

$$\frac{H_1}{n} = 1 \text{ мкм.} \quad (11)$$

Параметр H_1 по фізичній суті фактично дорівнює максимальній висоті мікронерівностей обробленої поверхні R_{max} . Експериментально встановлено, що для даних умов шліфування *параметр шорсткості поверхні* $R_a = 0,8$

мкм. Зважаючи на те, що між параметрами шорсткості поверхні R_{\max} та R_a існує зв'язок $R_{\max} / R_a \approx 5$, маємо $R_{\max} \approx 4$ мкм. Отже, $H_1 \approx R_{\max} \approx 4$ мкм, тобто умова (9) виконується при значенні $n = 4$.

Із цього випливає, що при значенні $q = 1$ ріжуче зерно випадає зі зв'язки круга всього за кілька контактів із оброблюваним матеріалом, фактично не перетерпівши при цьому лінійного зношування.

Зі зменшенням питомого зношування круга q , у зв'язку із застосуванням більш міцних і зносостійких абразивних зерен, очевидно, величина n буде збільшуватися. Наприклад, експериментально встановлено, що при шліфуванні алмазним кругом твердосплавних виробів питоме зношування круга менше одиниці й може приймати значення $q = 0,001 \dots 0,01$. У цьому випадку величина n може зменшитися в 100...1000 разів, тобто перш ніж алмазне зерно об'ємно зруйнується або випаде зі зв'язки круга без руйнування, воно пе-ретерплює значне лінійне зношування x_l . Безрозмірний параметр $\eta = x_l / H_1$ при цьому істотно збільшується ($\eta \rightarrow 1$), а різниця параметрів $H_1 - x_l$, що визначає шорсткість поверхні R_{\max} , – зменшиться, тому що величина H_1 за-лишається незмінною для заданого режиму шліфування. Таким чином, отри-мана аналітична залежність для визначення питомого зношування круга q дозволяє по-новому розкрити фізичну сутність процесу шліфування щодо кі-лькості контактів зерна з оброблюваним матеріалом до моменту його об'єм-ного руйнування.

При алмазному шліфуванні використовують такий показник, як *питома витрата алмаза* q . Методика його визначення відповідає методиці визна-чення *питомого зношування круга* q . Припускаючи, що за час τ при шліфуванні відбувається об'ємне руйнування двох найбільш виступаючих зерен (а це відповідає лінійному зношуванню круга Δ), втрата алмазних зерен по вазі дорівнює:

$$P_a = \rho_a \cdot 2\pi \cdot R_{kp} \cdot B \cdot \Delta \cdot \alpha, \quad (12)$$

де ρ_a – щільність абразиву, $\text{кг}/\text{м}^3$; α – коефіцієнт, що враховує щільність зв'язки залежно від концентрації абразивних зерен у крузі [5].

За цей же час вага знятого матеріалу дорівнює:

$$P_m = \rho_m \cdot B \cdot V_{dem} \cdot t \cdot \tau, \quad (13)$$

де ρ_m – щільність оброблюваного матеріалу, $\text{кг}/\text{м}^3$.

Питома витрата алмаза q (мг/г) визначається зі співвідношення P_a й P_m :

$$q = \frac{10^{-3} \cdot \rho_a \cdot \alpha \cdot \Delta_i \cdot V_{kp}}{\rho_m \cdot V_{dem} \cdot t \cdot \eta}. \quad (14)$$

З урахуванням вище наведених співвідношень, аналогічно методиці визначення питомого зношування круга, залежність (14) остаточно прийме вид

$$q = \frac{\rho_a \cdot \alpha \cdot H_1}{\rho_m \cdot n \cdot \Delta_m}. \quad (15)$$

Залежність (15) відрізняється від аналогічної залежності (8) наявністю додаткових параметрів ρ_a , ρ_m і α .

Висновки. Розроблено математичну модель визначення найважливішого параметра процесу шліфування - питомого зношування круга, що дозволило провести теоретичний аналіз і встановити умови його зменшення з метою підвищення ефективності обробки. Доведено, що даний параметр визначається головним чином величиною лінійного зношування максимально виступаючого зі зв'язки круга зерна до моменту його об'ємного руйнування. Теоретично встановлено, що із часом обробки питоме зношування круга зменшується внаслідок зниження інтенсивності зношування максимально виступаючого зі зв'язки круга зерна до моменту його об'ємного руйнування. Розроблено методику визначення кількості контактів зерна з оброблюваним матеріалом до моменту його об'ємного руйнування, що дозволило по-новому розкрити фізичну суть процесу шліфування й сформулювати умови його вдосконалювання.

Список літератури: 1. Филимонов Л.Н. Высокоскоростное шлифование. – Л.: Машиностроение, 1979. – 245 с. 2. Маслов Е.Н. Теория шлифования металлов. – М.: Машиностроение, 1974. – 319 с. 3. Корчак С.Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей. – М.: Машиностроение, 1974. – 280 с. 4. Новиков Ф.В. Физические и кинематические основы высокопроизводительного алмазного шлифования: автореф. дис. ... докт. техн. наук: спец. 05.03.01 «Процессы механической обработки, станки и инструменты». – Одесса, 1995. – 36 с. 5. Кацуц В.А., Мелехин А.Д., Бармин Б.П. Справочник заточника. – М.: Машиностроение, 1982. – 232 с.

Надійшла до редколегії 25.09.2012р.

УДК 621.923

Аналітичне визначення питомого зношування круга при шліфуванні / Ф. В. Новіков, І. Є. Іванов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54 (960). – С.159-164. – Бібліогр.: 5 назв.

Получена аналитическая зависимость для определения удельного износа круга и на ее основе по-новому раскрыта физическая сущность процесса шлифования и сформулированы основные условия повышения его эффективности.

Ключевые слова: шлифование, абразивный круг, износ зерна, производительность обработки.

The analytical dependence for the determination of the specific wheel wear, and used it in a new way revealed the physical nature of the grinding process and formulated the basic conditions make it more effective.

Key words: grinding, grinding wheel, worn grain processing performance.

Л.В. ОВЕРЬЯНОВА, ассист., НТУ «ХПИ»

МАГНИТНАЯ СИСТЕМА ИНДУКТОРА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ИНЕРЦИОННОГО НАКОПИТЕЛЯ ЭНЕРГИИ

Выполняется расчет магнитного поля для ряда индукторов электромеханического преобразователя энергии инерционного накопителя. Производится выбор магнитной системы, удовлетворяющей указанным критериям.

Ключевые слова: электромеханический преобразователь, инерционный накопитель энергии, магнитная система, квадрупольное поле.

Введение. С целью экономии энергоресурсов при эксплуатации электрифицированных железных дорог предлагается применять инерционный накопитель энергии на электроподвижном составе пригородного сообщения.

Как отмечалось в работе [1], электромеханический преобразователь энергии представляет собой обращенную электрическую машину с возбуждением от постоянных магнитов, отличительной особенностью которой является минимальное наличие ферромагнетика в магнитной цепи. Это вызвано необходимостью, по возможности, исключить эффект одностороннего магнитного притяжения со стороны статора на ротор, что особенно важно для бесконтактного подвеса вращающегося ротора. Однако, отсутствие ферромагнетика существенным образом сказывается на величине и форме кривой электродвигущей силы обмотки якоря, а, следовательно, и развиваемой в процессе работы мощности накопителя.

Поэтому в статье уделяется существенное внимание обеспечению высокой интенсивности и правильному распределению картины магнитного поля, создаваемого системой постоянных магнитов.

Постановка задачи. На примере четырехполюсной электрической машины тестового накопителя необходимо рассчитать картину распределения мгновенных значений магнитного поля, создаваемую вращающимся индуктором, а также его среднее значение для ряда характерных магнитных систем. На основании полученных результатов произвести выбор магнитной системы, которая должна обеспечить установленный уровень мощности накопителя.

Исходя из уровня энергии обмена накопителя 63,2 МДж и монтажного объема, отводимого под накопительную систему, принимаем следующие геометрические размеры маховика: внешний радиус ротора – 0,225 м, внутренний радиус – 0,11 м, высота – 0,335 м. Усредненная удельная масса материала ротора 2700 кг/м³. Частота вращения ротора – 18260 об/мин.

© Л.В. Оверьянова, 2012

Для указанных геометрических размеров маховика и его скорости вращения могут быть предложены такие геометрические размеры и параметры электрической машины: диаметр статора – 0,214 м, число пар полюсов индуктора – 2, полюсное деление – 0,168 м, активная длина якоря – 0,253 м, толщина магнита в радиальном направлении – 15 мм, воздушный зазор – 0,003 м. Постоянные магниты – Nb-Fe-B с коэрцитивной силой по индукции 979 кА/м.

Метод расчета магнитного поля индуктора. Поставленная задача решена методом конечных элементов, который реализован в программной среде FEMM [2]. При расчете были приняты следующие допущения: магнитное поле стационарное плоскопараллельное; магнитный поток вне расчетной области равен нулю; изменение температуры не оказывает воздействие на свойства постоянных магнитов; действие вихревых токов не учитывается.

Для стационарного магнитного поля метод конечных элементов в двухмерной расчетной модели и прямоугольной системе координат заключается в минимизации *нелинейного энергетического функционала* [3, 4]:

$$F = \int \int_{S_0}^{B_x} \frac{1}{\mu} B_x dB_x dS + \int \int_{S_0}^{B_y} \frac{1}{\mu} B_y dB_y dS - \int_S A dS, \quad (1)$$

где S – область расчета магнитного поля; B_x, B_y – составляющие вектора магнитной индукции; μ – магнитная проницаемость в треугольном элементе; \vec{A} – векторный магнитный потенциал, определяемый соотношением:

$$\vec{B} = \text{rot} \{0; 0; A\}. \quad (2)$$

Ввиду того, что переменные в функционале являются значениями в вершинах треугольников, минимум функционала можно найти, решая систему уравнений:

$$\partial F^m / \partial A_p = 0, \quad (3)$$

где $p = 1, 2 \dots n$; $m = 1, 2 \dots r$.

Векторный магнитный потенциал внутри треугольника – линейная функция, значения которой в пределах треугольного элемента определяется согласно выражению:

$$A = \frac{1}{S_m} \left[(a_i + b_i x + c_i y) A_i + (a_j + b_j x + c_j y) A_j + (a_k + b_k x + c_k y) A_k \right].$$

Тогда магнитная индукция в пределах конечного элемента (треугольника) является постоянной величиной и ее можно вычислить по формуле:

$$B = \frac{1}{2 S_m} \sqrt{(c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k)^2 + (b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k)^2}. \quad (4)$$

Из уравнений (3), (4) следует, что система уравнений для поиска мини-

мума аппроксимирующего функционала (1) имеет столько же уравнений, сколько выбрано расчетных точек, а каждое уравнение содержит столько членов, сколько треугольных элементов имеют общую вершину в расчетной точке. Решение системы сводится к решению системы линейных уравнений с нелинейными коэффициентами вида

$$T \times A = \Delta,$$

где T – матрица коэффициентов, составляющаяся из матриц коэффициентов треугольников G поэлементным суммированием коэффициентов с одинаковыми индексами и расстановкой их в матрице T на соответствующие, согласно этим индексам, положения.

Матрица G описывается выражением:

$$G = \frac{1}{4\mu} \begin{matrix} i & j & k \\ \hline i & \left| \begin{array}{ccc} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{array} \right| \\ j & & \\ k & & \end{matrix},$$

где i, j, k – номера рядов матрицы G ; b, c – коэффициенты, определяющиеся по координатам вершин треугольника.

Магнитная проницаемость для треугольных элементов, находящихся в нелинейных средах, является величиной переменной и зависит от величин векторных магнитных потенциалов. Поэтому решение такой системы нелинейных уравнений должно производиться итерационными методами.

Вектор столбец Δ составляется из векторов столбцов треугольных элементов δ таким же методом, как и матрица коэффициентов T . Вектор столбец δ определяется по формуле:

$$\delta = (J S_m / 3) \cdot [1 \ 1 \ 1]^T,$$

где J – плотность тока в треугольнике.

После составления матрицы T и Δ производится задание граничных условий, для чего приравниваются нулю все элементы строки и столбца матрицы T , в которых номер диагонального элемента соответствует номеру точки с заданным векторным потенциалом. Диагональный элемент с этим номером приравнивается к единице, а элемент вектора столбца Δ – к величине векторного магнитного потенциала в данной точке. Поскольку *граничные условия второго и третьего рода* в данной методике не используются, то порядок их учета не рассматривается.

Анализ интенсивности и распределения магнитного поля. В качестве расчетной области было принято поперечное сечение магнитной системы ряда индукторов:

- секторного типа без ферромагнетика;
- с одним ферромагнитным экраном;

- с двумя ферромагнитными экранами;
- составного секторного типа с элементарными ориентировано намагниченными секторами;
- составного пластинчатого типа с элементарными ориентировано намагниченными пластинаами.

При выборе магнитной системы для электрической машины накопителя следует руководствоваться более высоким значением индукции и низким *коэффициентом пульсации*, который равен отношению ее максимального значения к среднему.

Сравнительный анализ представлен в таблице. Порядковый номер варианта магнитной системы соответствует последовательности ее упоминания в тексте. Систему № 2, как более подходящую по критериям, но сложно реализуемую с точки зрения сохранения равновесия ротора относительно его оси вращения, не принимаем во внимание.

Таблица – Сравнительный анализ магнитных систем

Номер варианта	1	2	3	4	5
Среднее значение индукции, Тл	0,002	0,270	0,147	0,196	0,152
Коэффициент пульсации индукции, отн. ед.	2,37	1,10	1,22	1,15	1,21

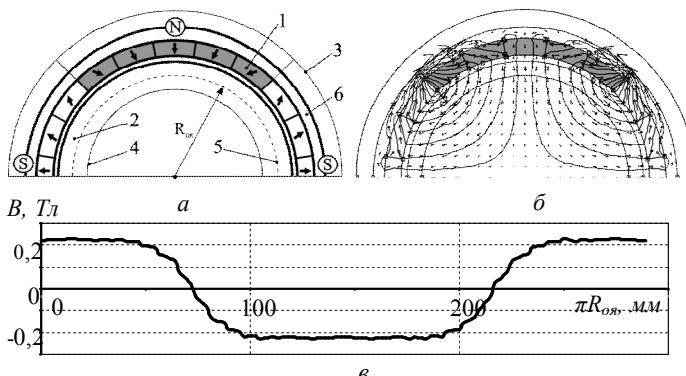


Рис. – Магнитная система составного секторного типа: *а* – конструкция индуктора, *б* – распределение магнитных силовых линий, *в* – кривая распределения индукции на уровне средней линии якорной обмотки;

1 – индуктор; 2 – якорь; 3 – внешняя граница расчетной области; 4 – внутренняя граница якорной обмотки; 5 – средняя линия зоны якорной обмотки; 6 – внешний ферромагнитный экран; R_{ox} – радиус обмотки якоря на уровне ее средней линии.

Для дальнейших исследований выбираем магнитную систему составного секторного типа с ферромагнитным экраном. Для четырехполюсной магнитной системы, которая создает *квадрупольное магнитное поле* (рис.), на один полюс приходится пять элементарных ориентировано намагниченных секторных магнитов, имеющих внешний радиус 0,125 мм, внутренний – 0,11 мм. Для такой системы среднее значение индукции составляет 0,196 Тл, а коэффициент пульсации – 1,15. Кривая распределения индукции имеет трапециевидный характер, что приемлемо для проектируемой системы.

Это вызвано разделением полюса индуктора на элементарные магниты, намагниченные таким образом, чтобы силовые линии стремились к центральному радиально-намагниченному сектору, что способствует «выталкиванию» последних во внутреннюю область системы и равномерному их распределению.

Выводы. Для возбуждения электромеханического преобразователя накопителя энергии целесообразно принять магнитную систему секторного типа с ориентировано намагниченными элементарными магнитами, которая обеспечивает рациональное распределение индукции в области якорной обмотки со средним значением 0,196 Тл и коэффициентом пульсации 1,15. Применение такой магнитной системы даст возможность производить обмен энергией на уровне 63,2 МДж между накопителем и системой тягового привода электроподвижного состава при мощности 240 кВт.

Список литературы. 1. Оверьянова Л.В. Электромеханический преобразователь инерционного накопителя энергии для электроподвижного состава пригородного сообщения // Вестник НТУ «ХПИ» – Харьков, 2012. – Вып.20. – С.84-90. 2. <http://femm.berlios.de>. 3. Сильвестр П., Ferraro Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров - электриков. – М.: Мир, 1986. – 232 с. 4. Chari M.V.K, Laskaris E.T., Angelo J.D. Finite element analysis of magnetic fluid seal for large-diameter high-speed rotating [Text] / M.V.K. Chari, // Transactions of IEEE on magnetic, vol. MAG-17. – 1981. – № 6. – Р. 3000-3001.

Поступила в редакцию 25.10.2012

УДК 621.924

Магнитная система индуктора электромеханического преобразователя инерционного накопителя энергии / Л.В Оверьянова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012. – №54(960). – С.165-169. – Бібліогр.: 4 назви.

Виконується розрахунок магнітного поля ряду індукторів для електромеханічного перетворювача енергії інерційного накопичувача. Проводиться вибір магнітної системи, яка задоволяє зазначенним критеріям.

Ключові слова: електромеханічний перетворювач, інерційний накопичувач енергії, магнітна система, квадрупольне поле.

The magnetic field range of inductors for electromechanical energy conversion inertial drive are calculated. The magnetic system which satisfy the criteria is selects.

Key words: electromechanical transducer, the inertial energy storage, magnetic system, the quadrupole field.

T.B. ПОТАНІНА, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ОПТИМІЗАЦІЯ ТРИВАЛОСТІ МІЖРЕМОНТНИХ ПЕРІОДІВ В ЕКСПЛУАТАЦІЇ ЕНЕРГООБ'ЄКТІВ З ВРАХУВАННЯМ РИЗИКУ

Метою проведення робіт по технічному обслуговуванню та ремонту є зберігання або повернення припустимого рівня ефективності та безпеки експлуатації даного об'єкту. Оптимізація робіт по відновленню дозволяє отримати такий результат при найбільш низьких витратах. Обрано критерій для встановлення діапазону ремонтних робіт – рівень техногенного ризику нижче прийнятого припустимого рівня. В статті представлена математичну модель оптимізації тривалості міжремонтних періодів з врахуванням ризику. Неповне відновлення елементів описано за допомогою моделі Кіджіми.

Ключові слова: енергетичне обладнання, експлуатація, міжремонтні періоди, відновлення, ризик.

Вступ. Досвід експлуатації потужних енергетичних комплексів в міжнародній практиці доводить, що існує можливість експлуатації енергоблоків протягом значного часу після регламентованого проектом строку за рахунок планування організаційно-технічних заходів, спрямованих на збереження цілісності об'єкту і його функціональних властивостей – перехід на технічне обслуговування та ремонти за фактичним станом обладнання. Розробка, економічне обґрунтування та впровадження таких заходів дозволить оптимально продовжити можливий строк експлуатації енергоблоків ТЕС і АЕС. Запобігання можливих суттєвих пошкоджень і відмов обладнання систем, важливих для безпеки, при експлуатації енергоблоку на потужності в номінальному режимі, забезпечують системи оперативної діагностики, що дозволяє об'єктивно оцінити технічний стан обладнання, якість ремонту і модернізації [1-3].

Модель оптимізації тривалості міжремонтних періодів та ремонтних робіт. Критерій, за яким проводиться планування тривалості міжремонтних періодів, а також і самих ремонтних робіт – економічні показники у вигляді сумарних коштів (збитків) електростанції $K_{n,p}$, пов'язаних з ремонтами енергоблоків. В роботах [4-5] сумарні кошти запропоновано обчислювати за формулою

$$K_{\Sigma} = K_{n,p} = K_e + K_n + K_m + K_p , \quad (1)$$

де K_e – витрати (збитки), зумовлені недовиробітком електроенергії через простій енергоблоків під час ремонтів і залежні від цілої низки техніко-економічних факторів (рівня енергоспоживання в енергосистемі під час ремонтів, можливих штрафних санкцій за перевищення строків ремонтів та ін.);

© Т.В. Потаніна, 2012

K_n – витрати на підготовчі роботи, що передують ремонту; K_m – витрати на ремонтні матеріали й запасні частини; K_p – витрати на безпосереднє проведення ремонтних робіт. Тривалість міжремонтного періоду обчислюється з умови досягнення мінімуму експлуатаційних коштів.

Регламентне обслуговування обладнання та систем, яке базується на проектному аналізі середньостатистичних даних про час *наробітку на відмову*, не можна вважати оптимальним розв'язанням проблеми в умовах експлуатації енергоблоків ТЕС і АЕС, через невелику серійність таких об'єктів енергетики, специфічність умов експлуатації навіть однотипних елементів конкретного енергоблоку, і відзначається достатнім розсіянням значень при оцінці темпів наробітку на відмову і залишкового ресурсу.

При аналізі економічної ефективності проведення планових ремонтних робіт в умовах невизначеності повстає проблема оцінки ризику. В випадку ігнорування рівня техногенного ризику кількість помилок при прийнятті рішення, щодо стратегії планових ремонтних робіт, зростає [6-9].

Ризико-орієнтований підхід при розв'язанні задачі оптимізації триває сті ремонтних та профілактичних робіт та діапазонів між ними є визначенням та моніторингом рівня ризику, прийнятного для безпечної експлуатації енергоблоків електростанцій. Розглянемо загальну схему керування техногеним ризиком, зв'язаним з експлуатацією енергетичного обладнання [10]. Перший крок визначає декомпозицію системи, якою є енергоблок електростанції (рис. 1). Процедура декомпозиції враховує структурні та функціональні зв'язки між окремими елементами системи. Методи переходу до стратегії ремонту обладнання в залежності від технічного стану і оцінки ризику відмови базується на підході *забезпечення гарантії якості*, який включає застосування роздільних стратегій ремонтів та технічного обслуговування обладнання в залежності від впливу останнього на безпеку експлуатації [7]. Такий метод включає застосування як кількісних результатів аналізу безпеки (*ймовірнісний аналіз безпеки* для енергоблоків АЕС) [11], так і класифікацію обладнання на якісному рівні. Такий аналіз здійснює врахування усіх факторів, які визначають значущість обладнання з точки зору ризику (безпеки).

Прикладом такої класифікації може бути ранжування за впливом обладнання на безпеку експлуатації та рівнем ризику:

обладнання, що зв'язане з безпекою та має високий рівень ризико-значущості;

обладнання, що зв'язане з безпекою та має низький рівень ризико-значущості;

обладнання, що не пов'язане з безпекою та має високий рівень ризико-значущості;

обладнання, що не пов'язане з безпекою та має низький рівень ризико-значущості.

Для кожної конкретної категорії визначаються вимоги щодо періодичності та об'єму обслуговування. Це ранжування відбувається на наступних двох кроках процедур. Оцінка ризику – визначення сценаріїв небезпеки, усіх потенційних подій, які призведуть до ушкодження елементів та підсистем даної системи. Ймовірність цих подій має бути своєчасно визначена і, тим самим, обчислюється техногенний ризик окремих елементів, а згодом і усієї системи. Наступна процедура – оцінка наслідків відмов окремих елементів, які виражаються в грошових одиницях.

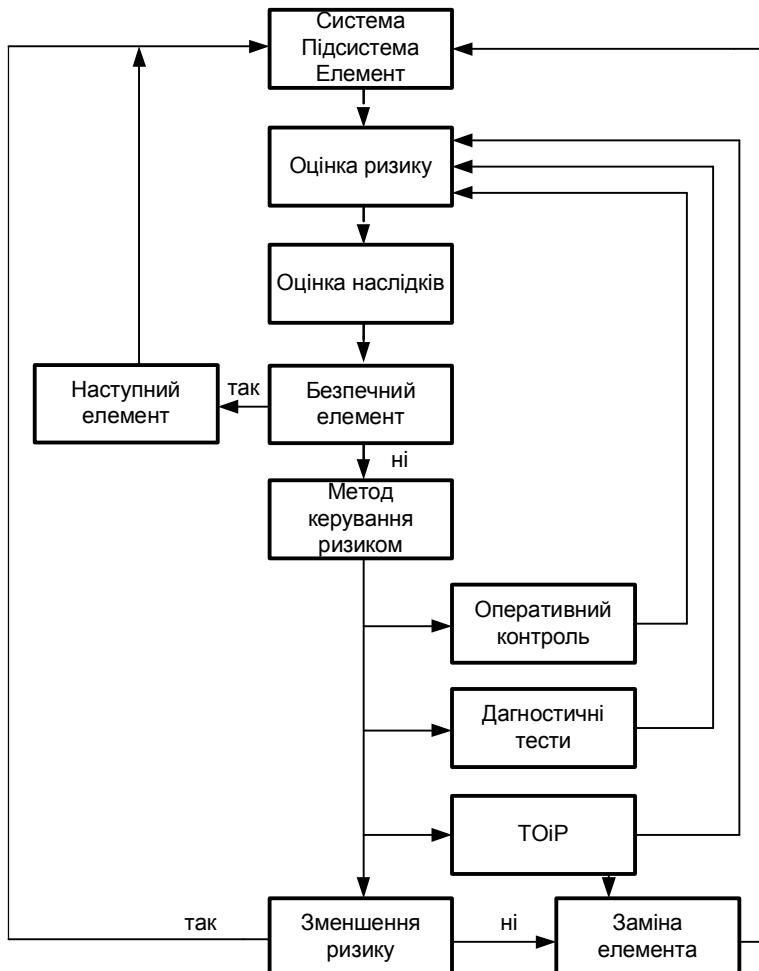


Рис. 1 – Загальні процедури оцінювання ризику та керування ризиком.

Порівняння обчисленого ризику з припустимим рівнем ризику дозволяє зробити висновок щодо безпеки системи.

Якщо рівень ризику визначено як високий, то такий ризик слід ідентифікувати і розглянути різні варіанти зменшення рівня ризику. Серед методів керування ризиком потенційними є оперативний контроль, оптимізація діагностичних процедур або вибір діапазону і періоду проведення технічного обслуговування і ремонту (TOiP).

В теорії прийняття рішень *ризик – це плата за прийняття рішення, що не є оптимальним*, і він записується, зазвичай, як *математичне сподівання* [3]:

$$R = \sum_{i=1}^n p_i \cdot C_i, \quad (2)$$

де p_i – ймовірність відбууття події i ; C_i – наслідки настання події i ; n – кількість подій, небезпечних для функціонування даного об'єкту.

Наслідки аварій чи пошкоджень найчастіше виражаються у грошових одиницях, тому і ризик в (2) також буде мати такий вимір. Тому вираз (1) слід доповнити ще однією складовою:

$$K_{\Sigma} = K_{n,p} + R, \quad (3)$$

де $R = \sum_i R_i$ – повний ризик.

Можна цей вираз розглядати у одиницях, відносних до часу експлуатації. Тоді

$$\overline{K}_{\Sigma} = \frac{K_{n,p} + R}{t} = \overline{K}_{n,p} + \overline{R}. \quad (4)$$

Виходячи з цього оптимальне значення тривалості міжремонтного періоду відповідає мінімуму цільової функції \overline{K}_{Σ} (рис. 2 а):

$$\overline{K}_{\Sigma}(t_0) = \overline{K}_{\Sigma \min}. \quad (5)$$

Можливим є підхід, який враховує прибуток від експлуатації енергоблоку П. Тоді цільовою функцією даної задачі можна вважати різницю між прибутком та сумарними витратами з врахуванням ризику, тобто

$$\Delta \overline{K} = \overline{\Pi} - \overline{K}_{\Sigma}. \quad (6)$$

Відповідно задача формулюється як задача оптимізації:

$$\Delta \overline{K}(t_0) \Rightarrow \Delta \overline{K}_{\max}. \quad (7)$$

В випадку, якщо прибуток від експлуатації є величиною сталою, то точки оптимуму задач (5) і (7) співпадають. Але, очевидно, що зі спливанням часу в конструкціях, елементах систем і устаткування відбуваються процеси старіння. Таким чином, наступає зменшення ефективності роботи енергетич-

ного об'єкту і $\bar{\Pi}$ спадає з часом. Врахування процесів старіння впливає на значення оптимальної точки задачі (7) і збіжність, яка була можлива в ситуації сталого прибутку, вже не спостерігається: $t_0 \neq t'_0$ (рис. 2 б).

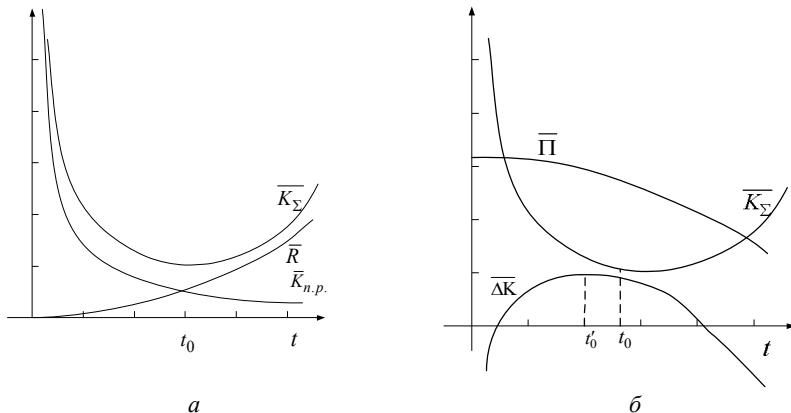


Рис. 2 – Вибір оптимального часу проведення ремонтних та профілактичних робіт:
а – з врахуванням ризику; б – з врахуванням зміни прибутку.

Метою проведення профілактичних робіт є відновлення експлуатаційних властивостей об'єкту. Тому можна виділити наступні стани [12]:

- повне відновлення, яке повертає повністю початкові властивості об'єкту,
- об'єкт можна вважати новим;
- мінімальне відновлення, яке не змінює властивостей об'єкту, – інтенсивність пошкоджень не змінюється;
- неповне відновлення, в результаті якого експлуатаційні властивості об'єкту покращуються, але не до такого рівня, який був у нового об'єкту.

Для систем, в яких відбувається ремонт таких елементів, що відмовили, а не їх заміна новими, слід розглядати ситуацію неповного відновлення елемента. В багатьох дослідженнях припускають або повне відновлення, або мінімальне відновлення компонентів [13], які є граничними станами неповного відновлення. Однією з можливостей описання неповного відновлення є модель Кіджіми [14], яка дозволяє описати проміжні випадки, коли відновлення вже не повне, але ще не мінімальне – метод віртуального віку об'єкту. Нехай $\varphi_i, i = 1, 2, \dots$ – послідовність випадкових нарібків системи до відмови. Якщо віртуальний вік системи після i -го відновлення $t_i = y$, то умовний розподіл $(i+1)$ -го нарібку системи до відмови φ_{i+1} описується рівнянням

$$P(\varphi_{i+1} \leq x | t_i = y) = \frac{F_{\varphi_1}(x+y) - F_{\varphi_1}(y)}{1 - F_{\varphi_1}(y)} = P(\varphi_1 \leq x+y | \varphi_1 > y), \quad (8)$$

де $F_{\varphi_i}(x)$ – функція розподілу наробітку до відмови нової системи.

Віртуальний вік системи після $(i+1)$ -го відновлення обчислюється за формулою $t_{i+1} = t_i + \alpha \cdot \varphi_{i+1}$, причому $t_0 = 0$, α – ступінь відновлення і $\alpha \in [0, 1]$; повному відновленню відповідає значення параметра $\alpha = 0$, мінімальному відновленню – значення $\alpha = 1$.

Якщо проведені ремонтні або профілактичні роботи усувають негативні наслідки експлуатації, то величина коефіцієнта α приймає значення, близькі до одиниці. В протилежному випадку, коли стан об'єкта практично не змінився, α прямує до нуля. Безумовно ефект відновлення, що виражається коефіцієнтом α , залежить від коштів, витрачених на проведення цього відновлення. Оцінка параметрів такої моделі може виконуватися, наприклад, за допомогою методу максимальної правдоподібності.

Висновок. Представлена модель вибору тривалості міжремонтних періодів експлуатації енергетичного обладнання враховує економічний ефект і рівень ризику, зв'язаного з експлуатацією даного об'єкту. При розв'язанні задач оптимізації з різним формульованим цільової функції, запропонованими у даній роботі, можна обчислювати термін проведення першого і наступних ремонтів обладнання енергоблоків також з врахуванням ефекту старіння.

Список літератури: 1. Кострикін В.А., Шелепов И.Г. Моніторинг, діагностика, техніческое обслуговування и ремонт как этапы реалізації управління ресурсом обладнання енергоблоків АЕС <http://tyrbin.ru/blog/2008-12-30-67> 2. Оптимізація планових ремонтів енергоблоків атомних електростанцій з ВВЭР / под ред. В.И. Скалозубова. – Чернобиль: Ин-т проблем безопасности АЭС, 2008. – 496 с. 3. Малкін В.С. Надежность технических систем и техногенный риск. – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 432 с. 4. Ефимов А.В., Потанина Т.В., Каверцев В.Л. и др. Методы анализа диагностических параметров состояния оборудования энергоблоков ТЭС и АЭС и определение критериев оптимизации продолжительности их плановых ремонтов // Енергетика та електрифікація. –2011. – № 7. – С. 17-21. 5. Яиура А.И. Система технического обслуживания и ремонта энергетического оборудования. – М.: изд-во НЦ ЭНАС, 2006. – 504 с. 6. Scott F. Risk Assessment with Uncertain Numbers. – Lewis Publishers, 2002.–214 р. 7. Адаменков А.К., Рясный С.И. Применение риск-ориентированного подхода при переходе к стратегии ремонта арматуры АЭС по фактическому состоянию / Вопросы атомной науки и техники. Серия: «Обеспечение безопасности АЭС», Вып.23. Реакторные установки с ВВЭР. Подольск, 2008. – С. 85-88. 8. Carazas F. G., Souza G.F.M. Risk-based decision making method for maintenance policy selection of thermal power plant equipment // Energy. – 2010. – 35(2). – pp. 964-975. 9. Krishnasamy L., Khan F., Haddara M. Development of a risk-based maintenance (RBM) strategy for power-generating plant // Journal of Loss Prevention in the Process Industries. – 2005. – 18. – pp. 69-81. 10. Rusin A., Wojaczek A. Election of maintenance range for power machines and equipment in consideration of risk // Eksplotacija i Niezwodnosc // Maintenance and Reliability. – 2007. – Vol.3. – pp. 40-43. 11. КНД 95.1.0801.55-2004. Руководящий нормативный документ «Организация технического обслуживания и ремонта систем и оборудования атомных электростанций. Основные положения». – К., 2004. 12. Rusin A., Wojaczek A. Optymalizacja okresów międzyremontowych maszyn energetycznych z uwzględnieniem ryzyka // Eksplotacija i Niezwodnosc – Maintenance and Reliability. –2012. –Vol.14, No.1.–pp.72-76. 13. Перехода А.И., Тимашов Д.А. Оценка показателей надежности автоматизированного технологического комплекса «Объект защиты – система безопасности» с нечеткими пара-

метрами методом Монте-Карло // Научная сессия МИФИ – 2010. Сборник научных трудов. – 2010. – Т.5. – С. 144-147. 14. Kijima M. Some results for repairable systems with general repair // J. Appl. Prob. – 1989. – V.8. – pp. 89-102.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 519.87

Оптимізація тривалості міжремонтних періодів в експлуатації енергооб'єктів з врахуванням ризику / Т.В. Потапіна // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012. – № 54(960). – С.170-176. – Бібліогр.: 14 назв.

Цель работ по техническому обслуживанию и ремонту – сохранение либо возвращение допустимого уровня эффективности и безопасности эксплуатации данного объекта. Оптимизация восстановительных процессов позволяет добиться такого результата при наименее низких затратах. Принят критерий для выбора диапазона ремонтных работ – уровень техногенного риска ниже принятого допустимого уровня. В статье представлена математическая модель оптимизации межремонтных периодов с учетом риска. Неполное восстановление описано на основе модели Киджи-мы.

Ключевые слова: энергетическое оборудование, эксплуатация, межремонтный период, восстановление, риск.

The goal of preventive as well as corrective maintenances is to keep or to restore acceptable level of efficiency and safety of operation of given object. Optimization of maintenance processes allows obtaining these effects at possibly lowest costs. The assumed criterion for the selection of the range of repair works is the level of technical risk posed by a given facility below the accepted allowable level. Mathematic model of optimization of maintenance intervals having regard to the risk are presented in the paper. Incomplete restoration is described on the basis of Kijima model.

Key words: power equipment, operation, maintenance, repair, risk.

УДК 621.224

О.В. ПОТЕТЕНКО, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;

Н.Г. ШЕВЧЕНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

Е.С. КОВАЛЬ, инженер, НТУ «ХПІ»;

И.И. ТЫНЬЯНОВА, канд. техн. наук, ст. препод., НТУ «ХПІ»

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО УСИЛИЯ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО НА КОЛЬЦЕВОЙ ЗАТВОР В ПРОЦЕССЕ ЕГО ОПУСКАНИЯ В ПРОТОЧНУЮ ЧАСТЬ РАДИАЛЬНО-ОСЕВОЙ ГИДРОТУРБИНЫ

Исследуется кольцевой затвор радиально-осевой гидротурбины, выполняющий аварийные функции перекрытия потока. Рассматривается математическая модель неравномерного движения затвора в неподвижной жидкости с заданными граничными условиями. Представлены результаты расчета гидродинамической силы, действующей на кольцевой затвор гидротурбины для различных положений затвора в проточной части и при различных законах его движения.

Ключевые слова: радиально-осевая гидротурбина, кольцевой затвор, гидродинамическая сила.

© О.В. Потетенко, Н.Г. Шевченко, Е.С. Коваль, И.И. Тыньянова, 2012

Введение. Надежность работы гидроагрегатов ГЭС в большой степени зависит от правильного функционирования быстродействующих запорных (аварийных) устройств. Для некоторых мощных гидротурбин аварийное устройство перехвата потока устанавливают между статорным кольцом и направляющими лопатками. Устройство представляет собой кольцевой затвор (КЗ), поднимающийся и опускающийся посредством масляных сервоприводов, действующих в вертикальном направлении. В открытом положении КЗ практически не вносит в проточную часть дополнительного сопротивления. Такой затвор может выполнять как ремонтные, так и аварийные функции.

Также применение кольцевого затвора вместо дискового или шарового снижает стоимость гидроузла.

В 90-е годы разрабатывался технический проект для *Рогунской ГЭС* (Таджикистан). Авторами данной статьи совместно с *ПОАТ «ХТЗ»* были проведены ряд работ по исследованию условий работы гидротурбины с кольцевым затвором [1]. Восстановление проекта строительства Рогунской ГЭС [2], а также заказы на *ОАО «Турбоатом»* по изготовлению двух гидравлических турбин со встроенным кольцевым затвором для *ГЭС Ла Йеска* (Мексика) [3], внедрение такой конструкции на турбине *Днестровской ГАЭС* (2009 г.) показывают, что дальнейшие работы по исследованию динамических процессов при аварийном закрытии КЗ являются актуальными.

Цель работы. При проектировании гидропривода аварийного запорного органа необходимо знать максимальную величину и характер изменения гидро-динамической нагрузки, действующей на КЗ, в процессе его опускания в проточную часть гидротурбины под нагрузкой. В данной работе описывается методика и представлены результаты численного расчета гидродинамической силы, действующей на затвор, при его аварийном закрытии.

Общая постановка задачи. Согласно *принципу суперпозиции потоков* общий случай движения кольцевого затвора в текущей воде представлен в виде двух более простых случаев движения: 1) внешнее квазистационарное обтекание затвора набегающим на него потоком идеальной (вязкой) жидкости; 2) движение (опускание) затвора по заданному закону во времени в неподвижную несжимаемую жидкость с заданными граничными условиями.

Расчетная область зоны с кольцевым затвором представляет собой осесимметричный канал с большой степенью конфузорности (радиальное течение потока к оси турбины). Канал ограничен двумя плоскостями верхнего и нижнего колец направляющего аппарата, а также отрывной зоной за затвором. В аварийных случаях затвор опускается в текущую воду при открытом положении лопаток направляющего аппарата.

Первая задача – внешнее обтекание твердого тела набегающим на него однородным и стационарным потоком. Математическая модель потока и чис-

ленная реализация этой задачи для различных положений КЗ в проточной части была реализована авторами ранее в работах [1, 4]. В результате решения были определены поля скоростей и давлений в расчетной области, а также гидростатическое усилие $R_{\text{ct}}(\bar{h})$, действующее на затвор для последовательных его положений в проточной части гидротурбины.

Вторая задача. Согласно [5, 6], при движении твердого тела с переменной скоростью $V^*(t)$ вызванное им течение идеальной жидкости \vec{V} будет *неустановившимся и безвихревым*. Потенциал скоростей φ в этом случае является функцией пространственных координат и времени.

Из равенства $\vec{V} = \text{grad} \varphi$ и условия *несжимаемости жидкости* $\text{div} \vec{V} = 0$ следует, что искомый потенциал $\varphi(x, y, z, t)$ должен удовлетворять в каждый данный момент времени *уравнению Лапласа*:

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1)$$

Потенциал скорости можно представить как сумму трех слагаемых:

$$\varphi = \varphi_1 V_x^* + \varphi_2 V_y^* + \varphi_3 V_z^*, \quad (2)$$

где φ_i – единичный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа (1) и условиям на бесконечности $\text{grad} \varphi_i \rightarrow 0$.

На поверхности движущегося твердого тела, имеющей нормаль \vec{n} , скалярный потенциал φ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\partial \varphi / \partial \vec{n} = V_n^* = V_x^* n_x + V_y^* n_y + V_z^* n_z.$$

Подчеркнем, что для определения нестационарного поля потенциала скорости $\varphi(x, y, z, t)$ начальные условия не требуются, так как уравнение (1) не содержит частной производной по времени.

Определение инерционной составляющей гидродинамической силы. При неравномерном движении твердого тела со скоростью $V^*(t)$ в неодвижном потоке жидкости, согласно *второму закону Ньютона*, на тело действует инерционная сила, имеющая величину

$$R_{\text{ин}} = -\frac{1}{V^*(t)} \cdot \frac{dT}{dt}. \quad (3)$$

Выражение для кинетической энергии T жидкости в односвязном объеме W имеет вид:

$$T = \rho \int_W \frac{V^2}{2} dW, \quad (4)$$

где – V скорость возмущения жидкости от движения твердого тела.

Запишем выражение кинетической энергии жидкости для частного случая движения кольцевого затвора, ограниченного поверхностью S_3 , в пропорциональной части радиально-осевой турбины (рис. 1).

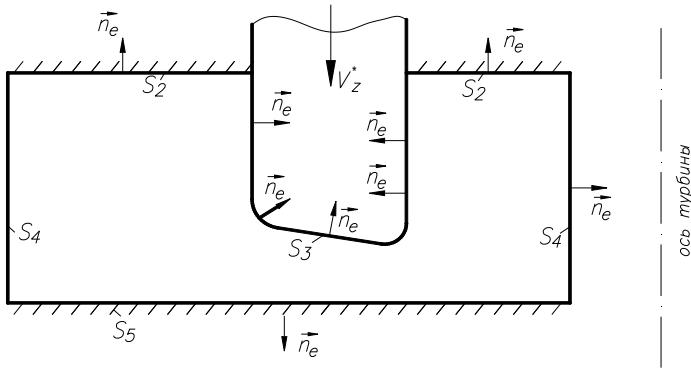


Рис. 1 – Расчетная схема.

Предполагая, что вызванное движение жидкости осесимметричное, с однозначным потенциалом скорости φ , согласно (1), выражение для кинетической энергии T в цилиндрической системе координат (r, φ) представлено в виде:

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_W \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dW. \quad (5)$$

После преобразований получим:

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_W \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] dW.$$

Применим формулу Гаусса – Остроградского, переводящую объемный интеграл в поверхностный, обозначив при этом \vec{n}_e – внешнюю единичную нормаль к поверхностям S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 :

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_{S_1, S_4} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_e} dS + \frac{\rho}{2} \iint_{S_2, S'_2, S_5} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_e} dS + \frac{\rho}{2} \iint_{S_3} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_e} dS, \quad (6)$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}_e} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \cos(\vec{n}_e, r) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \cos(\vec{n}_e, z).$$

Чтобы оценить интеграл по цилиндрической поверхности S_1 , имеющей высоту z_1 , на радиусе $r_1 = R_{\text{вх}} \rightarrow \infty$, и по цилиндрической поверхности S_4 ,

имеющей радиус $r_4 = R_{\text{вых}} \rightarrow 0$, представим потенциал φ , определяющий скорости вдали от тела, в виде ряда по степеням r^{-n} , r^n для поверхностей S_1, S_4 соответственно:

$$S_1 : \quad \varphi_1 = \frac{A_1^{(1)}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n^{(1)}}{r^n}; \quad S_4 : \quad \varphi_4 = A_1^{(4)} \cdot r + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(4)} \cdot r^n, \quad (7)$$

где A_1, A_n – коэффициенты, не зависящие от радиуса r .

Учитывая, что движение тела происходит с изменением его объема W_3 , то есть с изменением объема вытесняемой жидкости Q_A и Q_B , то такое тело эквивалентно некомпенсированному источнику с расходом $Q = dW_3/dt$, и коэффициенты A_1 , в разложении потенциалов (7) равны:

$$A_1^{(1)} = \frac{Q_A \cdot r_1}{2\pi \cdot z_1}, \quad A_1^{(4)} = \frac{Q_B}{2\pi \cdot z_4 \cdot r_4}$$

Определим значения $\varphi, \partial\varphi/\partial\vec{n}_e$, подставим их в первый интеграл выражения (6) по поверхностям S_1, S_4 и, расширяя расчетную область согласно условиям $r_1 = R_{\text{вх}} \rightarrow \infty, r_4 = R_{\text{вых}} \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{r=R_{\text{вх}} \rightarrow \infty} \frac{\rho}{2} \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_e} dS = \frac{\rho \cdot Q_A^2}{4\pi z_1}; \quad \lim_{r=R_{\text{вых}} \rightarrow 0} \frac{\rho}{2} \iint_{S_4} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_e} dS = \frac{\rho \cdot Q_B^2}{4\pi z_4}.$$

Интеграл по неподвижным непроницаемым поверхностям S_2, S_2', S_5 , вследствие граничных условий $\partial\varphi/\partial\vec{n}_e = 0$, равен нулю. Поэтому выражение для кинетической энергии жидкости при осесимметричном безвихревом течении в расчетной области можно представить в виде:

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_{S_3} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}_e} dS + \text{const}.$$

В задачах, связанных с движением тела, в интегралах обычно используют внешнюю к нему нормаль \vec{n} , то есть выбирают $\vec{n} = -\vec{n}_e$.

Окончательно имеем:

$$T = -\frac{\rho}{2} \iint_{S_3} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS + \text{const}.$$

Введем обозначение:

$$\lambda_{ik} = -\rho \iint_S \varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} dS \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Величину λ_{ik} обычно называют *присоединенной массой жидкости* [6].

В дальнейшем для цилиндрической системы координат (r, z) приняты

следующие обозначения элементов матрицы

$$\|\lambda_{ik}\| : \lambda_{11} = \lambda_r; \quad \lambda_{22} = \lambda_z; \quad \lambda_{21} = \lambda_{rz}.$$

В данной работе рассматривается вертикальное движение затвора – $\varphi = \varphi_3 \cdot V_z^*$, поэтому выражение для кинетической энергии получит вид:

$$T = \frac{1}{2} \left(V_z^* \right)^2 \cdot \lambda_z, \quad (9)$$

где $\lambda_z = -\rho \iint_S \varphi_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS$ – присоединенная масса затвора.

Выражение для определения инерционной гидродинамической реакции жидкости на движущийся кольцевой затвор, согласно (3), запишем в следующем виде:

$$R_{\text{ин}} = -\lambda_z \cdot \frac{dV_z^*}{dt}. \quad (10)$$

Определение присоединенной массы λ_z . В литературе широко представлены теоретические методы определения присоединенных масс различных тел для случая безграничной жидкости. Наличие дополнительных неподвижных границ жидкости накладывает дополнительные усилия на движение жидкости, что приводит к увеличению присоединенных масс [7, 8].

Численная реализация. В данной работе для определения присоединенной массы кольцевого затвора λ_z , опускающегося в неподвижный поток, предварительно решается кинематическая задача определения единичного потенциала скорости – φ в расчетной области. Исходя из вышеуказанных особенностей течения жидкости в кольцевом канале, граничные условия для потенциала φ и функции тока ψ имеют следующий вид:

- на цилиндрических поверхностях, ограничивающих расчетную область:

$$S_1 : r_1 = R_{\text{input}} \rightarrow \infty \quad \varphi = -\frac{Q_A}{2\pi z_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \text{const}; \quad (11)$$

$$S_4 : r_4 = R_{\text{out}} \rightarrow 0 \quad \varphi = -\frac{Q_B}{2\pi z_4}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \text{const};$$

- на твердых границах $S_2, S_5 : \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \quad \psi = \text{const}$;

- на поверхности кольцевого затвора $S_3 : \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = -V_z^*; \quad \psi = f(r)$.

Решение уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ для потенциала скорости φ при соответствующих граничных условиях (11) сводится к задаче Неймана; а для

функции тока ψ – к задаче Дирихле. В данной работе уравнение Лапласа численно решается для функции тока и имеет вид

$$\Delta\psi = 0.$$

Для разветвляющихся течений характерно существование нулевой линии тока, разделяющей область течения на две части: Q_A, Q_B . В качестве положительного принимается расход, при котором жидкость движется в направлении к оси турбины. Точка разветвления потока называется *критической*. Для обеспечения однозначности решения задачи гидродинамики, в которой происходит разветвление течения, поставим условие на соотношение расходов:

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{\Delta r_{AO_2}}{\Delta r_{BO_2}} \cdot \frac{r_{cp.A}}{r_{cp.B}}.$$

Потенциал скорости φ в любой точке M можно определить по заданному полю скоростей через потенциал в начальной точке M_0 .

Или учитывая, что

$$V_r = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad V_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

получим линейный интеграл

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} dr + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} dz \right).$$

Определив распределение потенциала скорости φ вдоль поверхности кольцевого затвора, по выражениям (10) и (11) определим значение присоединенной массы затвора λ_z и инерционную составляющую осевой гидродинамической силы $\bar{R}_{\text{ин}}$.

Апробация метода. Для оценки правильности численного алгоритма решения был проведен расчет тестовой задачи – определение присоединенной массы движущегося цилиндра в неподвижном потоке при наличии неподвижной стенки S_p . На рис.2 показано распределение величин φ, ψ в расчетной области цилиндра и дано сравнение расчетной зависимости

$$\mu_y = f(h/b_0),$$

где

$$\mu_y = \lambda_y / \pi \rho a^2,$$

с решением, опубликованным в работе [7].

Расхождение величин μ_y , определенных двумя способами, составляет около 3 %.

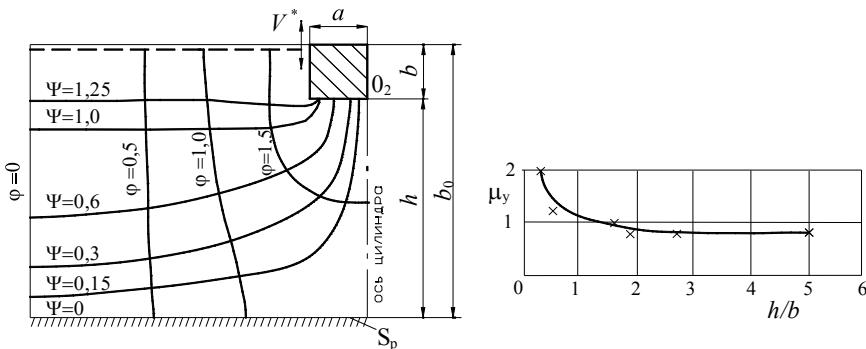


Рис. 2 – Решение тестовой задачи.

Результаты расчета. В результате численного моделирования течения жидкости, вызванного опусканием затвора, получены и представлены на рис.3 изолинии тока $\psi = \text{const}$ в момент времени t_i . Моменту t_i отвечает положение затвора h_i .

На рис.4 проиллюстрирована зависимость присоединенной массы затвора $\lambda'_z = f(\bar{h}_3)$ для различных его положений в расчетном канале. Численные значения λ'_z соответствуют геометрии кольцевого затвора, спроектированного для гидротурбины РО-310 Рогунской ГЭС, и они приведены к размерам диаметра рабочего колеса $D_1 = 1\text{ м}$.

Величина \bar{h}_3 характеризует относительное закрытие потока $\bar{h}_3 = h_3 / b_0$, где b_0 – высота направляющего аппарата турбины.

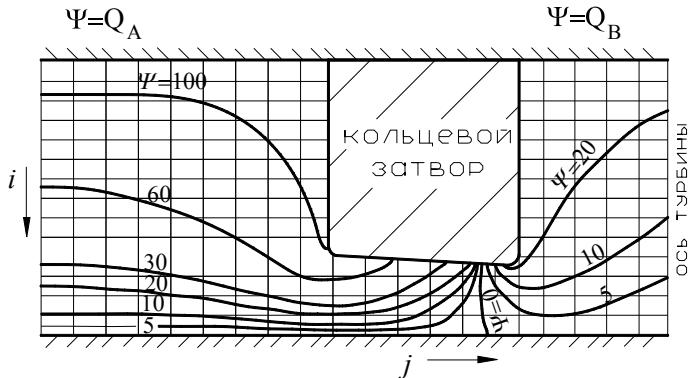


Рис. 3 – Изолинии $\psi = \text{const}$ в расчетной области с затвором.

В работе для сравнения рассмотрены три принципиально разных закона движения (опускания) затвора (рис. 5): 1 – равномерное, $V_z^* = \text{const}$; 2 – с

увеличением скорости; 3 – с уменьшением скорости в процессе закрытия. Скорость движения определяется по формуле $V_z^* = dh_3 / dt$.

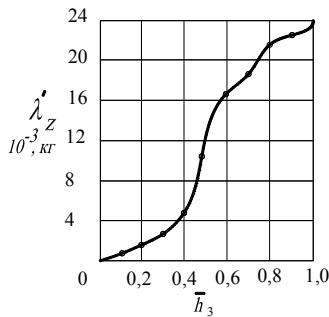


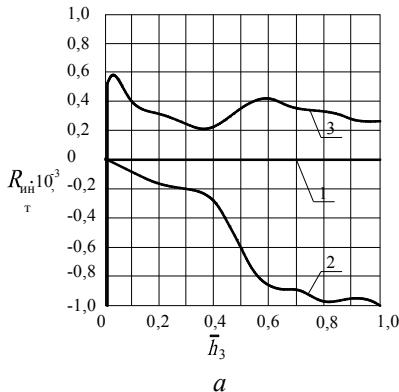
Рис. 4 – Распределение приведенной величины присоединенной массы затвора $\lambda'_z(\bar{h}_3)$.

На рис. 6 представлены следующие результаты расчета: a – инерционная составляющая силы $\vec{R}_{\text{ин}}$; b – суммарная гидродинамическая сила

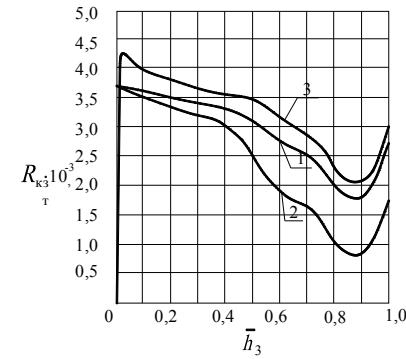
$$\vec{R}_{\text{кз}} = \vec{R}_{\text{ст}} + \vec{R}_{\text{ин}},$$

действующие на КЗ при его опускании в текущую воду, для трех законов движения.

Результаты приведены к натурным значениям ГЭС ($H=310$ м и $D_1 = 6$ м).



a



b

Рис. 6 – Гидродинамические силы, действующие на затвор для натурных условий ГЭС 1 – $\bar{h}_3 = \bar{t}$; 2 – $\bar{h}_3 = (\bar{t})^{1.5}$; 3 – $\bar{h}_3 = \sqrt[4]{\bar{t}}$:

a – инерционная составляющая силы $\vec{R}_{\text{ин}}$;

b – суммарная гидродинамическая сила $\vec{R}_{\text{кз}} = \vec{R}_{\text{ст}} + \vec{R}_{\text{ин}}$.

Выводы. Суммарная гидродинамическая сила, действующая на затвор при его аварийном закрытии, состоит из стационарной составляющей гидродинамической силы $\bar{R}_{\text{ст}} = f(\bar{h}_3)$ и инерционной составляющей $\bar{R}_{\text{ин}} = f(\bar{h}_3, \bar{t})$, зависящей от положения затвора в проточной части и от его закона движения.

Величина присоединенной массы затвора зависит только от геометрии движущегося тела и его ориентации в расчетном канале. Поэтому, при исследовании влияния скорости опускания затвора на изменение инерционной силы $\bar{R}_{\text{ин}}$, погрешность определения присоединённой массы для всех рассматриваемых вариантов закона движения будет одинакова.

Роль инерционной составляющей в общем балансе сил, действующих на затвор гидротурбины, зависит не только от линейных размеров тела, и статического напора установки, а также от закона его движения. Например, для равномерного движения (закон 1, рис.5) $\bar{R}_{\text{ин}} = 0$; при уменьшении скорости (закон 3, рис. 5) доля инерционной силы $\bar{R}_{\text{ин}}$ достигает 10-20% от величины $\bar{R}_{\text{ст}}$; при положительном ускорении (по закону 2, рис.5) она может достигать 50% и более. Поэтому при расчете гидродинамических усилий, действующих на кольцевой затвор гидротурбины большой мощности и напора, необходимо учитывать инерционную составляющую.

Увеличение времени закрытия затвора T_0 значительно уменьшает инерционную составляющую гидродинамической силы; размерность этой силы имеет следующий вид: $[R_{\text{ин}}] = M \cdot L \cdot T^{-2}$. При весе затвора гидротурбины Рогунской ГЭС около 160 тонн максимальная величина реакции жидкости на движущееся тело для времени закрытия $T_0 = 2$ с составляет приблизительно 100% от веса. При увеличении времени закрытия до 1 мин – около 0,2% веса и уже не имеет существенного значения.

Список литературы: 1. Исследование осевой силы на встроенным кольцевом затворе гидротурбины Рогунской ГЭС. Отчет о НИР ГТО-355, ПОАТ «ХТЗ». – Харьков, 1989. – 150 с. 2. Отчет ТЭО проекта строительства Рогунской ГЭС. – Р.002378 RP 02. – М., 2011. – 7 с. http://siteresources.worldbank.org/.../2_TEAS_Inception_report_Rus.pdf 3. Линник А.В., Хаитов В.Д. Современный уровень и основные направления развития гидротурбостроения в Украине // Пробл. Машиностроения. – 2010.– Т. 13. – №1, – Харьков. – С.11-18. 4. Потеменко О. В., Шевченко Н. Г. Численная реализация на ЭВМ решения задачи движения жидкости в зоне кольцевого затвора высоконапорной гидротурбины // Гидравлические машины. – 1986. – Вып. 20. – Харьков. – С.65-70. 5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 904 с. 6. Федяевский К. К. Гидромеханика. – Л.: Судостроение, 1982. – 345с. 7. Шебалов А. К. К вопросу об определении коэффициентов присоединенных масс // Тр. ЛКИ, 1954. – №12. 8. Холявко В. И. Присоединенная масса тела в области течения с прямолинейными границами // Самолетостроение. Техника воздушного флота. – Респ. межвед. науч.-техн. сб. Харьк. авиац. ин-т. – 1981. – Вып. 48.– С. 4–11.

Поступила в редакцию 06.10.2012

Численное моделирование гидродинамического усилия, действующего на кольцевой затвор в процессе его опускания в проточную часть радиально-осевой гидротурбины / О. В. Потетенко, Н. Г. Шевченко, Е. С. Коваль, И. И. Тыньянова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54(960). – С.176-186. – Бібліогр.: 8 назв.

Досліджується кільцевий затвор радіально-осьової гідротурбіни, який виконує аварійні функції перекриття потоку. Розглядається математична модель нерівномірного руху затвора в нерухливій рідині із заданими граничними умовами. Представлені результати розрахунків гідродинамічної сили, що діє на кільцевий затвор гідротурбіни.

Ключові слова: радіально-осьова гідротурбіна, кільцевий затвор, гідродинамічна сила.

Circular valve of Francis turbine that executes the emergency functions of stream ceiling is considered. Resulting hydrodynamic force operating on a valve is presented as a sum of hydrostatical force and inertia making one. The mathematical model of valve unsteady motion is considered in the stationary liquid with the boundary conditions set. The calculations results of hydrodynamic force operating on the circular valve of hydro-turbine for different positions of valve in flow channel and its different motion laws are presented.

Key words: Francis turbine, circular valve, hydrodynamic force.

A. Н. СЕМКО, д-р техн. наук, проф., ДонНУ, Донецк;
Ю.В. ЛОКТЮШИНА, аспирант, ДонНУ, Донецк

О ВЛИЯНИИ СЖИМАЕМОСТИ РАБОЧЕЙ ЖИДКОСТИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГИДРОПУШКИ

Оценивается влияние сжимаемости жидкости на параметры гидропушки. Исследование выполнено в рамках модели идеальной сжимаемой жидкости для квазидимерного приближения. Получены распределения скорости и давления жидкости на разных стадиях процесса. Проведена комплексная оценка эффективности гидропушки для жидкостей с разной сжимаемостью.

Ключевые слова: гидроимпульсная установка, сжимаемость жидкости, модели идеальной жидкости, комплексная оценка эффективности.

Введение. Во многих технических задачах гидродинамики рассматриваются случаи нестационарного движения жидкости. К ним относятся физические процессы, связанные с кратковременным и интенсивным воздействием на жидкость (удар, взрыв, электрический разряд). Существенной особенностью таких движений жидкости является то, что они, с одной стороны, носят ярко выраженный волновой характер, который проявляется во взаимодействии волн с границами раздела сред и между собой, а с другой – сопровождаются высокими давлениями.

Влияние сжимаемости, как физического свойства жидкости, на параметры гидроимпульсных установок (гидропушки и импульсного водомета) исследовалось многими авторами [1, 2]. В этих работах сравнивались результаты расчетов, полученные в рамках двух моделей жидкости – идеальной несжимаемой и идеальной сжимаемой. Сравнение показало, что пренебрежение сжимаемостью жидкости в этих случаях может привести к заметным количественным искажениям результатов, которые связаны с конечной скоростью протекания процессов и распространения волн. Поскольку выстрел кратко-временен (заряд жидкости достигает среза сопла установки за несколько миллисекунд), то можно пренебречь вязкостью и теплопроводностью жидкости, процесс считать адиабатическим, а жидкость – идеальной. Оценка влияния рабочей жидкости с разными упругими свойствами на параметры гидроимпульсных установок не проводилась.

В настоящей работе, в рамках модели идеальной сжимаемой жидкости для квазиодномерного приближения проведена оценка влияния сжимаемости рабочей жидкости на эффективность гидропушки (ГП). Оценены упругие свойства исследуемых жидкостей. Получены распределения скорости и давления жидкости по длине ГП в разные моменты времени. Рассчитаны параметры, характеризующие эффективность ГП (максимальная скорость струи, максимальное давление в сопле, давление торможения, импульс высокоскоростного участка струи, коэффициент превышения давления, коэффициент преобразования энергии), которые сравниваются с соответствующими значениями для водяного заряда. Проведена комплексная оценка эффективности ГП в зависимости от сжимаемости рабочей жидкости.

Упругость жидкости. Количество сжимаемость жидкостей характеризуется коэффициентом объемного сжатия, который в изотермическом процессе определяется по формуле:

$$k = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T, \quad (1)$$

где $v = 1/\rho$ – удельный объем жидкости, $\text{м}^3/\text{кг}$; P – давление, Па; ρ – плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$, T – температура, К.

На практике об упругих свойствах жидкости часто судят по скорости распространения слабых упругих (звуковых) волн в жидкости, которая определяется по формуле:

$$c = \sqrt{(dP/d\rho)_S} = \sqrt{(\rho k)^{-1}}. \quad (2)$$

Методика оценки упругих свойств с помощью скорости звука в жидкости хорошо отработана. В различных справочниках приведены значения скорости во многих жидкостях при разных температурах и давлениях.

В акустике применяется *акустический импеданс*, как расчетный пара-

метр, характеризующий сжимаемость жидкости

$$\alpha = \rho \cdot c . \quad (3)$$

Физические свойства жидкости (плотность, скорость звука, вязкость и другие) зависят от температуры и давления. Теоретически эти величины можно определить из *уравнения состояния*. Однако в настоящее время нет теоретически обоснованного уравнения состояния для жидкости, как это сделано для газа. Поэтому многие исследователи создают и используют эмпирические и полуэмпирические уравнения, которые в большинстве случаев дают вполне приемлемые результаты.

Одним из наиболее распространенных эмпирических уравнений состояния, хорошо согласующимся с экспериментальными данными при высоких давлениях, является *уравнение Тейта* [3, 4]:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - A \cdot \ln \left(\frac{p + \pi}{p_0 + \pi} \right) \right)^{-1}, \quad (4)$$

где ρ_0 – плотность при стандартных условиях; A , π – эмпирические константы.

Другими авторами [5, 6] используется *уравнение Тейта в модифицированном виде*:

$$p = B \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^n, \quad (5)$$

где $B = B(S)$ – функция, зависящая от энтропии; n – показатель адиабаты.

Из уравнения (5) можно получить зависимость плотности жидкости от давления:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{B} + 1 \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (6)$$

Для многих жидкостей коэффициенты Тейта для уравнения (4) определены и приведены в справочниках [7, 8].

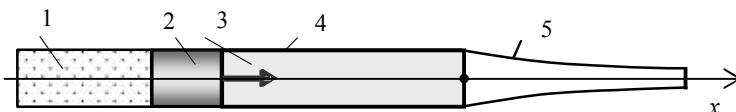


Рис. 1 – Гидропушка:

1 – сжатый газ; 2 – поршень; 3 – вода; 4 – ствол; 5 – сопло.

Математическая модель ГП. На рис. 1 приведена схема поршневой ГП безударного действия [9]. В этой схеме поршень 2 вместе с зарядом жидкости 3 предварительно разгоняется сжатым газом 1 в цилиндрическом ство-

ле 4 до некоторой скорости, с которой жидкость начинает втекать в сужающееся сопло 5, когда ее передний фронт достигает входа в сопло. При этом происходит ускорение жидкости в окрестности переднего фронта и торможение остальной массы жидкости вместе поршнем. Энергия поршня и прилегающей к нему жидкости передается частицам вблизи переднего фронта жидкости, скорость которых существенно возрастает.

Движение жидкости в ГП рассматривается в квазидномерной постановке, не учитываются вязкость жидкости, деформации корпуса, давление воздуха в сопле, передний фронт жидкости считается плоским,

В принятой постановке *уравнения нестационарного движения идеальной сжимаемой жидкости* в ГП можно записать в виде [9]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = -\frac{\rho u}{S} \frac{dS}{dx}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = -\frac{\rho u^2}{S} \frac{dS}{dx}; \quad (8)$$

$$p = B \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right). \quad (9)$$

Здесь u , p и ρ – скорость, давление и плотность; x и t – координата и время; $S = S(x)$ – площадь поперечного сечения сопла, которая является заданной функцией координаты x .

Начальные и граничные условия для системы (7) – (9) следующие:

$$u(0, x) = U_0, \quad p(0, x) = 0, \quad \rho(0, x) = \rho_0; \quad -L \leq x \leq 0; \\ u(t, x_p) = U_0, \quad p(t, x_F) = 0. \quad (10)$$

Уравнения движения поршня с начальными условиями имеют вид:

$$\frac{du_p}{dt} = -\frac{p(t, x_p)}{m_p} S_0, \quad \frac{dx_p}{dt} = u_p, \quad u_p(0) = U_0, \quad x_p(0) = -L, \quad (11)$$

где u_p и x_p – скорость и координата поршня; L – начальная длина заряда жидкости; m_p – масса поршня; S_0 – площадь поперечного сечения ствола; U_0 – начальная скорость поршня и заряда жидкости.

Численное решение уравнений движения жидкости (7) – (9) выполнялись методом Родионова [10]. Расчеты проводились на регулярной подвижной сетке, границы которой опирались на свободную поверхность и поршень. Законы движения границ сетки (свободной поверхности и поршня) определялись в ходе решения гидродинамической задачи.

Анализ результатов расчетов. Расчеты проводились для лабораторной

ГП, размеры и параметры которой взяты из работы [11]. Начало координат совмещено с входом в сопло. Радиус ствола и входа в сопло $R_c = 33$ мм, радиус выхода из сопла $R_s = 5$ мм, длина сопла $L_s = 253$ мм, начальная скорость поршня и заряда жидкости $u_0 = 76,2$ м/с, масса поршня $m_p = 2,25$ кг, масса жидкости $m = 0,85$ кг. Профиль сопла экспоненциальный, который описывается уравнением $R(x) = R_c e^{-kx}$ [12], где $k = L_s^l \ln(R_c/R_s)$.

Экспоненциальный профиль сопла гидропушки был получен Б. В. Войцеховским для течения идеальной несжимаемой жидкости при условии, что поршень тормозится с постоянным ускорением, и в этом случае наиболее эффективно передает свою энергию жидкости. Сопло Б. В. Войцеховского запатентовано и получило широкое распространение для гидропушек.

Выстрел из ГП сопровождается высоким давлением внутри установки, которое может достигать 1,5 ГПа. Поэтому при расчете параметров необходимо учитывать сжимаемость жидкости. В расчетах сжимаемость учитывалась при помощи уравнения Тейта в виде (9). В справочниках [7, 8] часто приводятся данные для уравнения Тейта в форме (4). Поэтому коэффициенты уравнения (9) рассчитывались по справочным данным для другого уравнения состояния при помощи соответствующей аппроксимации.

В табл. 1 приведены значения плотности (при нормальных условиях) и коэффициенты A , π уравнения (4) для исследуемых жидкостей [7, 8]. По этим данным были определены коэффициенты n и B для уравнения (6).

Ошибка расчета коэффициентов уравнения (6), полученных с помощью уравнения (4) для исследуемых жидкостей нигде не превышает 0,1% в исследуемом диапазоне давлений.

Таблица 1 – Значения ρ_0 , A , π , n , B при температуре $T = 293$ К

№ п/п	жидкость	ρ_0	$A A$	π , МПа	n	B , МПа	Максимальное давление, ГПа
1	н-гептан	683,6	0,1020	82,7	7,356	120,0	1,1
2	метиловый спирт	791,8	0,1018	93,7	7,348	138,0	1,2
3	вода	998,2	0,1050	210,5	7,15	298,4	3,0
4	анилин	1021,7	0,0938	206,8	8,773	289,7	1,0
5	глицерин	1261,0	0,0790	244,4	10,88	300,0	1,0

Оценка упругих свойств жидкостей проводилась по коэффициенту объёмного сжатия при атмосферном давлении, скорости звука в покоящейся жидкости и акустическому импедансу. Коэффициент объёмного сжатия k рассчитывался по формуле:

$$k = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{n(P+B)},$$

скорость звука в покоящейся жидкости и акустический импеданс – по формулам (2) и (3) соответственно.

В табл. 2 приведены справочные данные среднего значения коэффициента сжимаемости [13], скорости звука [14] и расчетные значения этих параметров для исследуемых жидкостей.

Таблица 2 – Справочные и расчетные значения k, c, α

Жидкость	$k \cdot 10^{-11}$, Па ⁻¹	$k_{pac} \cdot 10^{-11}$, Па ⁻¹	c , м/с	c_{pac} , м/с	$\alpha \cdot 10^6$, кг/м ² ·с	$\alpha_{pac} \cdot 10^6$, кг/м ² ·с
н-гептан	132	113	1100	1136	0,768	0,752
метиловый спирт	103	99	1123	1132	0,896	0,899
вода	48	46	1497	1462	1,459	1,494
анилин	43	39	1656	1577	1,611	1,692
глицерин	25	31	1923	1609	2,029	2,425

Для оценки влияния сжимаемости жидкости на эффективность ГП были использованы следующие критерии: максимальная скорость струи u_{max} , максимальное давление в установке p_{max} , динамическое давление струи

$$p_b = \rho u_{max}^2 / 2 ,$$

импульс высокоскоростного участка струи

$$I = \int_{t_0}^{t_{v_{max}}/\sqrt{2}} \rho u^2 F_s dt ,$$

коэффициент превышения давления $k_p = \rho u^2 / 2 p_{max}$, коэффициент преобразования энергии

$$k_e = 0,5 E_0^{-1} \int_{t_0}^{t_{v_{max}}/\sqrt{2}} \rho u^3 F_s dt [10].$$

Численные значения этих критериев для воды, которая являлась эталонной жидкостью, приведены в табл. 3:

Таблица 3 – Значения главных параметров ГП для водяного заряда

жидкость	$k \cdot 10^{-11}$, Па ⁻¹	u_{max} , м/с	p_{max} , МПа	p_b , МПа	I , кг·м/с	k_p	k_e
вода	47	1055	163	556	3,73	3,41	0,20

В табл. 4 приведены относительные критерии эффективности ГП для исследуемых жидкостей (критерии исследуемых жидкостей отнесены к соответствующим критериям эталонной жидкости).

Таблица 4 – Значения главных параметров ГП для исследуемых жидкостей

№ п/п	Вид вещества	u_{\max}	p_{\max}	p_b	I	k_p	k_e
1	н-гептан	0,91	0,55	0,56	0,68	1,01	0,65
2	метиловый спирт	0,91	0,65	0,66	0,86	1,01	0,80
3	вода	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
4	анилин	1,03	1,10	1,08	1,09	0,99	1,15
5	глицерин	1,04	1,40	1,37	1,36	0,98	1,45

На рис. 2 *a*, *b* приведено распределение скорости и давления в стволе ГП в момент начала истечения для исследуемых жидкостей. Величины на графиках представлены в безразмерном виде; в качестве масштабов выбраны максимальная скорость воды u_{\max} , максимальное давление воды p_{\max} в стволе ГП, длина сопла L_s .

Максимальная скорость струи для разных жидкостей отличается незначительно. При уменьшении сжимаемости жидкости на 35% (глицерин) максимальная скорость струи увеличивается на 4%. При увеличении сжимаемости на 140% (гептан) скорость струи уменьшается на 9%.

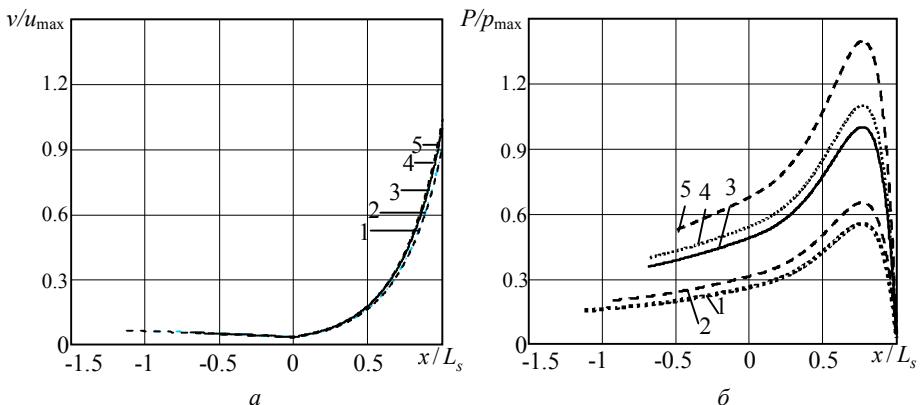


Рис. 2 – распределение скорости *a* и давления *b* в стволе ГП
в момент начала истечения.

1 – гептан, 2 – метиловый спирт, 3 – вода, 4 – анилин, 5 – глицерин.

Максимальное давление внутри гидропушки определяется прочностными свойствами корпуса установки и накладывает ограничение на размеры и массу установки. Отличие максимального давления в ГП для исследуемых жидкостей от водяного заряда составляет 40-45%. Локальные значения давления внутри установки для разных жидкостей также существенно различаются.

Например, на поршне давление для самой слабосжимаемой жидкости (глицерин) в 1,36 раза больше, чем для самой легкосжимаемой жидкости (гептан) (кривые 5 и 1 на рис. 2 б). Чем меньше сжимаемость жидкости, тем больше давление на поршне.

Максимальное значение давления внутри установки для всех исследуемых жидкостей наблюдается на расстоянии 0,23 от среза сопла. Профиль давления хорошо согласуется с теорией о перераспределении энергии между частицами жидкости, нестационарно движущейся в гидропушке. Участок кривой, где давление меняется от максимального до нуля, соответствует ускорению частиц переднего фронта жидкости. Здесь производная $dP/dx > 0$. Осальная масса жидкости вместе с поршнем тормозится, о чем свидетельствует профиль изменения давления на участке от конца ствола до расстояния равного 0,23 от среза сопла. Здесь производная $dP/dx < 0$.

Динамическое давление струи характеризует эффективность воздействия струи на объект и сильно зависит от максимальной скорости струи

$$p_b = \rho u_{\max}^2 / 2 .$$

Если p_b меньше предела прочности образца на сжатие σ_{np} , то образец не разрушается. Отличие давления торможения в ГП для исследуемых жидкостей от водяного заряда составляет 40%.

Коэффициент превышения давления характеризует, во сколько максимальное давление струи на жесткую преграду превышает максимальное давление внутри установки. Этот коэффициент максимальен для легкосжимаемой жидкости. Тем не менее, k_p для разных жидкостей отличается незначительно, всего лишь на 2%.

Эффективность воздействия струи на преграду сильно зависит от скорости струи. Поэтому в струе определяющую роль играет высокоскоростной участок, скорость которого лежит в интервале [10]

$$u_{\max} \leq u \leq u_{\min} .$$

Минимальная скорость высокоскоростного участка выбирается такой, чтобы удельная энергия и динамическое давление струи при этой скорости было в два раза меньше максимальных значений, то есть минимальная скорость высокоскоростного участка струи равна

$$u_{\min} = u_{\max} / \sqrt{2} .$$

Импульс высокоскоростного участка максимальный в случае слабосжимаемой жидкости. Его изменение по отношению к водяному заряду составляет 30-32%.

Коэффициент преобразования энергии k_E характеризует кинетическую энергию высокоскоростного участка струи. Он определяется как отношение

кинетической энергии высокоскоростного участка струи E_{\max} к начальной энергии установки E_0 (поршня и водяного заряда). Зависимость этого коэффициента от сжимаемости жидкости аналогична соответствующей зависимости давления торможения p_b – чем меньше сжимаемость, тем больше коэффициент преобразования энергии. При увеличении сжимаемости на 140% (гептан) k_E изменяется на 44%. При уменьшении сжимаемости на 35% (глицерин) k_E уменьшается на 37%.

В табл. 5 представлены результаты комплексной оценки эффективности ГП в зависимости от сжимаемости рабочих жидкостей. Оценка проводилась по 100-балльной шкале согласно методике [10] для следующих критериев:

$$\tilde{u}_{\max}, \tilde{p}_{\max}^{-1}, \tilde{p}_b, \tilde{I}, \tilde{k}_p, \tilde{k}_E.$$

Обратная величина для максимального давления взята потому, что меньшему давлению соответствует большая надежность сопла. Значения критериев в каждой категории отнесены к максимальному значению той категории, которое принято за 100 баллов, например,

$$\tilde{u}_{\max} = 100u_{\max} / \max(u_{\max}).$$

Наиболее эффективной считалась ГП с наибольшей суммой баллов.

Таблица 5 – Комплексная оценка эффективности ГП для рабочих жидкостей

№ п/п	Вид вещества	Критерий						Σ
		\tilde{u}_{\max}	\tilde{p}_{\max}^{-1}	\tilde{p}_b	\tilde{I}	\tilde{k}_p	\tilde{k}_E	
1	н-гептан	87	39	41	50	100	45	362
2	метиловый спирт	88	46	48	64	100	55	401
3	вода	96	71	73	74	99	69	482
4	анилин	99	79	79	81	97	79	514
5	глицерин	100	100	100	100	96	100	596

По результатам расчетов видно, что из рассмотренных жидкостей, наилучшие показатели имеет глицерин, у которого максимальны значения всех главных параметров ГП, за исключением коэффициента превышения давления (рейтинг 596).

Хорошие показатели у анилина, где высокие значения по всем критериям, кроме k_p (рейтинг 514).

У метилового спирта и нормального гептана наблюдается максимальный коэффициент превышения давления.

Худшие показатели у н-гептана (рейтинг 362).

Выводы. Из проведенных исследований следует, что сжимаемость жидкости оказывает наибольшее влияние на максимальное давление внутри установки и параметры гидропушки, характеризующие силовое воздействие на преграду. Зависимость максимальной скорости от сжимаемости жидкости не значительна. Комплексная оценка эффективности применения различных веществ в качестве рабочей жидкости в ГП показала, что наиболее эффективной является слабосжимаемая жидкость.

Список литературы: 1. Атанов Г. А. Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К.: Вища школа, 1987. – 155 с. 2. Семко А. Н. О влиянии сжимаемости жидкости на параметры гидропушки // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 1. – С. 1-5. 3. Физические величины: Справочник / А. П. Бабичев, Н. А. Бабушкина, А. М. Братковский и др.; Под. ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мелихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с. 4. Вервейко В. Н. Анализ применимости уравнений Тэйта к различным классам веществ в конденсированном состоянии / В. Н. Вервейко, М. В. Вервейко, Ю. Ф. Мелихов // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. – Курск, 2006. – №1. <http://scientific-notes.ru> 5. Коул Р. Подводные взрывы. – М.: ИЛ, 1950. – 495 с. 6. Яковлев Ю. С. Гидродинамика взрыва. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 313 с. 7. Исследование в области высоких давлений / Под ред. Е. В. Золотых. – М.: Изво стандартов, 1987. – 304 с. 8. Атанов Ю. А. Сжимаемость некоторых жидкостей при высоких давлениях / Ю. А. Атанов, В. А. Борзунов, В. Н. Разумихин // Труды метрологических институтов СССР. – 1969. – Вып. 104 (164). – С. 99-102. 9. Семко А. Н. Импульсные струи жидкости высокого давления. Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2007. – 149 с. 10. Решетняк В. В. Оптимизация параметров гидропушки: Дис. ... канд.т.н.: 01.02.05. Донецк: ДонНУ, 2010. – 167 с. 11. Атанов Г. А. Исследование внутренней баллистики гидропушки / Г. А. Атанов, А. Н. Семко, Ю. Д. Украинский // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1983. – № 4. – С. 168-170. 12. Войцеховский Б. В. Кавитационный эффект в экспоненциальном струйном насадке / Б. В. Войцеховский, Ю. А. Дудин, Ю. А. Николаев, В. П. Николаев, В. В. Никитин // Динамика сплошной среды. – Новосибирск: ИГД СО АН СССР. – 1971. – Вып. 9. – С. 7-11. 13. Кикоин И. К. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с. 14. Еногович А. С. Краткий справочник по физике. – М.: Высшая школа, 1976. – 288 с.

Поступила в редакцию 22.10.12

УДК 532.522: 518.5

О влияниї сжимаемості рабочої рідини на ефективність гідропушки / А. Н. Семко, Ю. В. Локтюшина // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012. – № 54(960). – С. 186-195. – Бібліogr.: 14 назв.

Оцінюється вплив стисливості рідини на параметри гідрографмати. Дослідження виконано в рамках моделі ідеальної стисливої рідини для квазіодномірного наближення. Отримані розподіли швидкості та тиску рідини на різних стадіях процесу. Проведена комплексна оцінка ефективності гідрографмати для рідин з різним коефіцієнтом стисливості.

Ключові слова: гідроімпульсна установка, стисливість рідини, моделі ідеальної рідини, комплексна оцінка ефективності.

In this article evaluated the effect of liquid compressibility on the parameters hydrogun. The study was conducted in the model of ideal compressible fluid to quasi approximation. The dependence of the velocity distribution and pressure at different stages of process was received. Integrated assessment of the effectiveness of GG for liquids with different compressibility was performed.

Key words: hydroimpulsive installation, compressibility of the liquid, ideal fluid model, a comprehensive performance evaluation.

O.B. СТЕПУК, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»;
Л.В. АВТОНОМОВА, канд. техн. наук, пров. наук. співр., НТУ «ХПІ»;
С.В. БОНДАР, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»;
С.І. МАРУСЕНКО, наук. співр., НТУ «ХПІ»

ОСОБЛИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВИДАВЛЮВАННЯ ДЕТАЛІ ТИПУ ГІЛЬЗА

Розглянуто математичне моделювання процесу спільної деформації технологічної системи матриця - заготовка - пuhanсон з урахуванням пластичної деформації матеріалу заготівки. При використанні пакету DEFORM виконано чисельний аналіз процесу одноконтурного зворотного витискування деталі типу гільза.

Ключові слова: математичне моделювання, процес формоутворення, пластичні деформації, закони тертя, кінцевий елемент, деталь типу гільза.

Опис проблеми. Для визначення оптимальної технології видавлювання з урахуванням прогнозування можливого руйнування деталі при штамповці на стадії проектування необхідно застосовувати метод математичного моделювання процесу формоутворення, заснованого на пластичному деформуванні матеріалу, який дозволяє провести аналіз напруженого-деформованого стану матриці складної конструкції з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності. Для цього необхідна побудова математичної моделі, що враховує взаємно зв'язаний вплив заготовки та інструменту один на одного, як єдиної системи. Облік контактної взаємодії елементів цієї системи обумовлений змінністю зон контакту між складовими елементами технологічного оснащення та змінним характером фрикційної взаємодії. Розглядаючи нелінійний характер деформування матеріалу заготовки, можливо більш точне визначення зусиль, діючих на інструмент, і взаємних переміщень, які безпосередньо впливають на конструктивну міцність і жорсткість матриці і якість заготовки.

Постановка задачі. При математичному моделюванні процесу сумісного деформування матриці, заготовки та пuhanсона [1], необхідно враховувати, що великі деформації, які виникають в заготовці, залежать не тільки від поточного силового впливу, а й від передісторії навантаження. Вважається, що в звітний момент часу t заготовка знаходиться в стані статичної рівноваги, причому напружений стан заготівки σ_{ij} та його передісторія вважаються відомими.

Рівняння рівноваги в прирошеннях для матеріалу, що пластично деформується, мають вигляд:

$$d\sigma_{ij,j} = 0. \quad (1)$$

© О.В. Степук, Л.В. Автономова, С.В. Бондар, С.І. Марусенко, 2012

Граничні умови записуються так:

$$d\sigma_{ij}n_j = d\bar{F}_i \text{ на } S_F, \quad du_i = d\bar{u}_i \text{ на } S_U.$$

Для зв'язку прирошення напруги і деформацій для матеріалу, що зміцнюється, справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^e &= \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G}, \\ d\varepsilon_{ij}^p &= \alpha^{**} h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} df, \end{aligned} \quad (2)$$

де $d\sigma$ і ds_{ij} – прирошення шарової і девіаторної частини напружень.

Функція h – це позитивно визначена форма компонента.

Функція $f(\sigma_{ij})$ – умова міцності.

Поверхня текучості описується рівнянням, де параметр може бути заданий як функція повної пластичної роботи:

$$c = F \left[\int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \right], \quad (3)$$

де F – монотонно зростаюча позитивна функція, а інтеграл обчислюється за *шляхом нагруження*.

З урахуванням рівності

$$c = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (4)$$

і перетворення

$$c = H \left(\int d\bar{\varepsilon}^p \right),$$

де $d\varepsilon_i^p$ – інтенсивність приросту пластичних деформацій, отримуємо:

$$d\varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{3}{2} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}. \quad (5)$$

Тоді рівняння (2) отримають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ij} + \frac{ds_{ij}}{2G} + \alpha^{**} h \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} s_{ij}, \\ d\sigma_{ij} &= \frac{E}{1-2\nu} d\varepsilon_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij}' - \alpha^{**} \frac{3G(s_{kl} d\varepsilon_{kl})}{\sigma_i^2 (H'/(3G)+1)} s_{ij}. \end{aligned} \quad (6)$$

В залежності від значень контактних тисків вибирається відповідна *модель тертя* [2]:

$$\tau_f = kP_n \quad \text{або} \quad \tau_f = m(x)\tau_y, \quad (7)$$

де $m(x)$ – змінний фрикційний параметр, який визначається з експерименту; τ_y – максимальні зсувні напруження на поверхні контакту (тобто *межа тертя*).

кучості на зсув).

Використовуються також моделі зі змінним коефіцієнтом тертя в законі Кулона:

$$\tau_f = \mu(x)\sigma_n, \quad (8)$$

де $\mu(x)$ – змінний коефіцієнт тертя, який розраховується як $\mu = \tau / \sigma_n$ із залежності $\tau = f(\sigma_n)$, що визначається розподілом напруження, а σ_n – рівень контактного тиску.

Універсальна формула, яка була запропонована Левановим і Колмогоровим в [3], є узагальненням закона Амонта і Зібеля (7) при сухому терти та має вигляд :

$$\tau = k_s(1 - \exp(-1,25P_n / \sigma_L))\tau_L, \quad (9)$$

де k_s – константа поверхні; σ_L – опір деформації прикордонного шару,

$$\tau_L = 0,58\sigma_L.$$

Залежність сили тертя від швидкості проковзування при рідинному характері тертя виражається законом тертя Ньютона:

$$\tau = \eta V_{SL} / h, \quad (10)$$

де η – динамічна в'язкість мастила; h – товщина плівки мастила; V_{SL} – швидкість проковзування поверхонь відносно один одного.

Комбінований закон граничного тертя має вигляд [4, 5, 6]:

$$\tau = \tau(P_n, \tau_L, V_{SL}),$$

$$\tau = (1 - k_L)k_s(1 - \exp(-1,25P_n / \sigma_L))\tau_L + k_L V_{SL} \eta / h, \quad (11)$$

де $k_L(x)$ – коефіцієнт безперервності мастильного шару.

Визначення напружено деформованого стану системи матриця - заготовка – пуансон на кожному кроці навантаження дозволяє знайти зони проковзування, коли дотичні напруження перевищують напруження тертя спокою. При дотичних напруженнях, які дорівнюються нулю, знаходяться зони контакту. Тобто, за допомогою ітерацій на кожному кроці необхідно визначати граничні умови для крайової задачі визначення напружень та деформацій.

Результати чисельного моделювання. Для демонстрації розглядалась задача математичного моделювання процесу одноконтурного зворотного вивалювання деталі типу гільза (рис.1).

Чисельно дана постановка задачі пружньо-пластичного деформування складених конструкцій була реалізована за допомогою методу кінцевих елементів та розрахункового комплексу *DEFORM* [7], який дозволяє розв'язувати задачі, що пов'язані з холодним, напівгарячим і гарячим штампуванням матеріалів з урахуванням їх нелінійного поводження при великих пластичних деформаціях.

При розбитті на кінцеві елементи використовувалися тетраедричні 4-х вузлові елементи з 9-ма ступенями свободи. Матеріал зразка – алюмінієвий сплав АД1Н ГОСТ 4784-74, $\sigma_T = 150$ МПа. Рішення проводилося при постійній швидкості руху пуансона $v=5$ мм/сек, яка вибиралася виходячи з технологічних рекомендацій. Крок інтегрування вибиралася виходячи з розмірів кінцевого елементу і приймався рівним $\Delta x = 0,1$ мм.

Задача розглядалася і розв'язувалася у квазістатичній постановці.

Отримані розподілення зон контакту, контактних тисків та вибір адекватного тертя дозволили провести в подальшому і аналіз спільного деформування зв'язаної технологічної системи матриця - заготовка - пуансон (рис. 2).

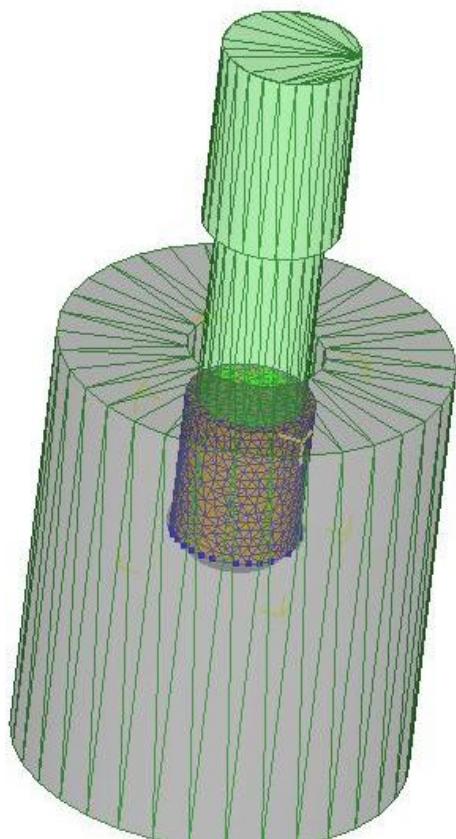


Рис. 1 – Розрахункова схема системи матриця - заготовка - пуансон.

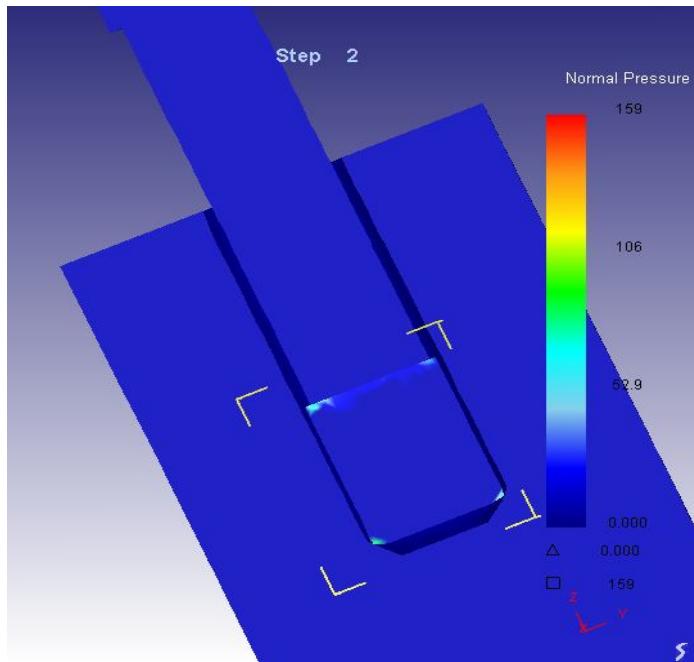


Рис. 2 – Спільне деформування системи матриця - заготовка - пuhanсон.

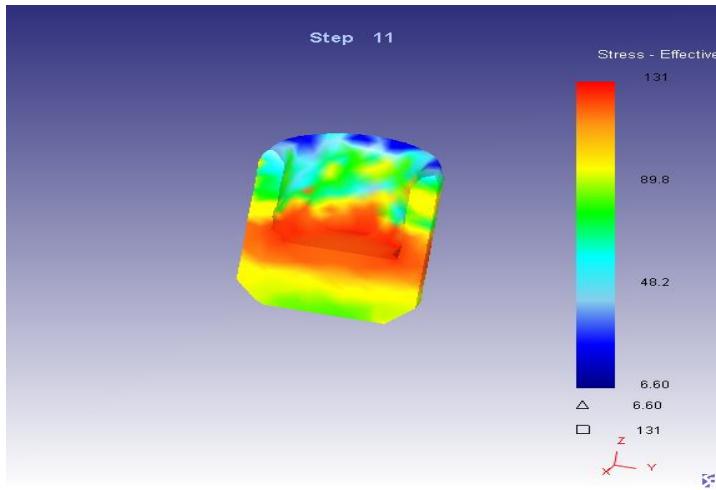


Рис. 3 – Розподіл напружень в заготовці.

Висновки. На основі запропонованої математичної моделі за допомогою розрахункового комплексу *DEFORM* стало можливим визначити компоненти напружено-деформованого стану як всієї структурно зв'язаної технологічної системи пuhanсон - заготовка - матриця, так і її окремих елементів (заготовки або матриці) в процесі видавлювання з урахуванням контактної взаємодії матриця - заготовка при пластичному деформуванні заготовки (рис.3). Що необхідно для обґрунтування вибору технологічних параметрів процесу, наприклад, мінімальної товщини стінки, яка може бути отримана на пресі, що розвиває зусилля не вище заданих за умови не руйнування деталі.

Список літератури: 1. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – К.: Наукова думка, 1981. – 496 с. 2. Diriceln M.H., Childs T.H.C., Maekawa K. Finite element simulation of chip flow in metal machining // International Journal of Mechanical Sciences, – 2001, 43(11), – Р. 2699-2713. 3. Леванов А.Н. Контактное трение в процессах обработки давлением / А.Н. Леванов, А.Л. Колмогоров, С.П. Буркин [и др.]. – М.: Металлургия, 1976. – 416 с. 4. Исаченков Е.И. Контактное трение и смазки при ОМД. – М.: Машиностроение, 1978. – 208 с. 5. Чумаченко Е.Н. Математическое моделирование и оптимизация процессов деформирования материалов при обработке давлением / Е.Н. Чумаченко, И.В. Логашина. – М.: ЭКОМЕТ, 2008.–400 с. 6. Чумаченко Е.Н. Реализация контактного взаимодействия в процессах обработки материалов давлением / Е.Н. Чумаченко, С.А. Аксенов, С.А. Бобер // Методи розв'язування прикладних задач механіки де формівного твердого тіла. – 2010, Вип.11. – С. 299-305. 7. DEFORM 3D User's manual, Scientific Forming Technologies Corporation, 2001. – 286 p.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 539.1

Особливості математичного моделювання процесу видавлювання деталі типу гильза / О.В. Степук, Л. В. Автономова, С.В. Бондар, С.І. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.196-201. – Бібліogr.: 7 назв.

Рассмотрено математическое моделирование процесса совместного деформирования технологической системы матрица - заготовка - пuhanсон с учетом пластического деформирования материала заготовки. При использовании пакета DEFORM выполнен численный анализ процесса одноконтурного обратного выдавливания детали типа гильзы.

Ключевые слова: математическое моделирование, процесс формообразования, пластическая деформация, законы трения, конечный элемент, деталь типа гильза

In the paper it is considered mathematical modeling of the combined strain for technological system sucha as matrix-billet-die, when the billet's materila is plastically deformed. The numerical analysis of the inverse single loop gouge for details like a shell is performed with the FEM-software Deform.

Keywords: mathematical modeling, forming, plastic strain, friction laws, finite element, shell component

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;
Д.И. БОГДАН, канд. техн. наук, ХНАДУ, Харьков

НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассматривается колебание упругого полупространства в случае заданного на его поверхности кинематического воздействия. Используется осесимметричная постановка второй краевой задачи теории упругости. Решение строится в виде разложения в ряд по функциям Бесселя от радиальной координаты. Рассмотрен численный пример нахождения начальных перемещений на глубине полупространства при известном кинематическом воздействии на поверхности.

Ключевые слова: полупространство, кинематическое воздействие, система интегральных уравнений, вторая краевая задача.

Введение. В настоящее время необходимо совершенствовать методики расчета деформированных систем под действием нестационарных нагрузений. Совершенствование методов расчета такого рода механических систем состоит, в частности, в развитии способов решения для различных нестационарных задач теории упругости. В этой статье рассмотрено решение *прямой задачи теории упругости* для полупространства, в случае задания на его поверхности перемещений. Решение обуславливает рассмотрение начального этапа деформирования.

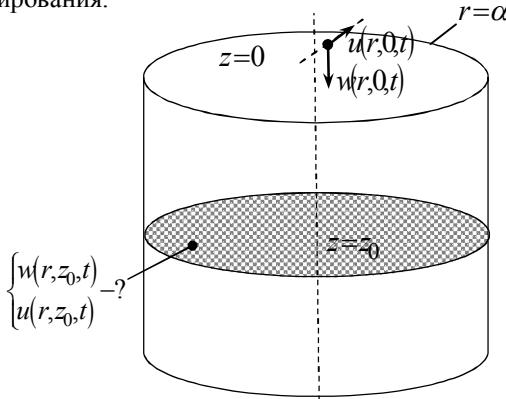


Рис. 1.– Полубесконечный цилиндр.

Постановка задачи. Рассматривается упругое полупространство, часть которого представляет полубесконечный цилиндр (рис.1). На границе полупространства задан вектор перемещения \mathbf{W} . Найти будем зависимости

© Е.Г. Янютин, Д.И. Богдан, 2012

перемещений от времени на некоторой глубине полупространства [4].

Рассмотрим осесимметричную постановку задачи в предположении осевой симметрии граничных условий.

Для решения примем следующие *уравнения движения* точек упругого полупространства, форма записи которых была использована В.М. Сеймовым [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ -\frac{u}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где $r = \bar{r}/\alpha$, $z = \bar{z}/\alpha$ – безразмерные переменные; \bar{r} и \bar{z} – действительные переменные; α – параметр, имеющий размерность длины; t – безразмерное время; w – функция изменения нормальных перемещений во времени; u – закон изменения касательных перемещений во времени;

$$\beta = \sqrt{(1-2\nu_0)/(2(1-\nu_0))}.$$

Будем предполагать, что на границе полупространства задаваемые перемещения могут быть отличными от нуля только при $0 \leq r \leq \Delta$, где $\Delta < 1$.

Порядок решения. Введем потенциалы $\varphi(r, z, t)$ и $\psi(r, z, t)$, определяемые следующими выражениями [4]:

$$w(r, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad u(r, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \quad (2)$$

Подставим выражения для перемещений (2) в уравнения (1), которые после применения к ним преобразования Лапласа по времени будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 s^2 \varphi = 0; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - s^2 \psi = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решать систему дифференциальных уравнений в частных производных (3) будем с использованием разложений в ряды по *функциям Бесселя* [1]. Поэтому представим решение в виде

$$\varphi(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z, s) J_0(\lambda_n r), \quad \psi(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z, s) J_0(\lambda_n r), \quad (4)$$

где λ_n – корни уравнения $J_0(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания; $A_n(z, s)$ и $B_n(z, s)$ – неизвестные коэффициенты разложения.

После подстановки $\varphi(r, z, s), \psi(r, z, s)$ в систему (3) получим выражения

для коэффициентов разложения в виде:

$$A_k(z, s) = C_k(s) \frac{e^{-z\sqrt{\lambda_k^2 + \beta^2 s^2}}}{\sqrt{\lambda_k^2 + \beta^2 s^2}}, B_k(z, s) = D_k(s) \frac{e^{-z\sqrt{\lambda_k^2 + s^2}}}{\sqrt{\lambda_k^2 + s^2}}, \quad (5)$$

где $C_k(s)$ и $D_k(s)$ – неизвестные функции параметра s .

Коэффициенты $C_k(t)$ и $D_k(t)$ будем находить из заданных граничных условий на границе полупространства, а именно

$$w(r, 0, t) = w_0(r, t) \text{ и } u(r, 0, t) = u_0(r, t).$$

Здесь $w_0(r, t)$ и $u_0(r, t)$ являются заданными функциями. Для этого запишем выражения для потенциалов в пространстве оригиналов, выполняя обратное преобразование Лапласа для формул (5) [3]. В результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} H(t-z\beta) \int_0^{t-z\beta} C_k(\tau) \frac{1}{\beta} J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2 \beta^2}\right) d\tau J_0(\lambda_k r), \\ \psi(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} H(t-z) \int_0^{t-z} D_k(\tau) J_0\left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}\right) d\tau J_0(\lambda_k r). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее запишем выражения для нормальных и касательных перемещений на границе полупространства, учтя упоминаемые ранее граничные условия:

$$\begin{aligned} w_0(r, t) &= \frac{-1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) J_0(\lambda_k r) - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t D_k(\tau) J_0(\lambda_k(t-\tau)) d\tau J_0(\lambda_k r), \\ u_0(r, t) &= \frac{-1}{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\lambda_k} C_k(\tau) J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t-\tau)\right) d\tau J_1(\lambda_k r) + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \lambda_k (-J_1(\lambda_k r)). \end{aligned} \quad (7)$$

Представим заданные граничные условия $w_0(r, t)$ и $u_0(r, t)$, входящие в соотношения (7), на поверхности полупространства также в виде разложений по функциям Бесселя. Отметим, что в выражении для касательных перемещений составляющие правой части раскладываются в ряды Дини [1]. После выполнения указанных операций соотношения (7) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} w_{0k}(t) J_0(\lambda_k r) &= -\alpha^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) J_0(\lambda_k r) - \\ &\quad - \alpha^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t D_k(\tau) J_0(\lambda_k(t-\tau)) d\tau J_0(\lambda_k r), \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}(t) J_1(\lambda_k r) &= -(\alpha\beta)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\lambda_k} C_k(\tau) J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t-\tau)\right) d\tau J_1(\lambda_k r) + \\ &\quad + \alpha^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \lambda_k (-J_1(\lambda_k r)). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая свойство ортогональности рядов Фурье-Бесселя и Дини, запишем систему уравнений для коэффициентов $C_n(t)$ и $D_n(t)$, которые являются функциями времени и определение которых по существу является основой решения прямой задачи

$$\begin{cases} -\frac{1}{\alpha} C_k(t) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^t D_k(\tau) J_0(\lambda_k(t-\tau)) d\tau = w_{0n}(t), \\ -\frac{1}{\alpha \beta \lambda_k} \int_0^t C_k(\tau) J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t-\tau)\right) d\tau - \frac{\lambda_k}{\alpha^2} D_k(t) = u_{0k}(t); \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) представляет собой связанный систему интегральных уравнений для функций $C_k(t)$ и $D_k(t)$, которую будем решать численным способом. Перейдем к дискретному времени [5], введение которого целесообразно для дальнейшего численного решения уравнений (9):

$$\begin{cases} -\frac{1}{\alpha} C_k^m - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^m D_k^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0(\lambda_k(t_m - \tau)) d\tau = w_k^m, \\ -\frac{1}{\alpha \beta \lambda_k} \sum_{i=1}^m C_k^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t_m - \tau)\right) d\tau - \frac{\lambda_k}{\alpha^2} D_k^m = u_k^m. \end{cases} \quad (10)$$

Матричная форма записи уравнений (10) следующая:

$$\begin{cases} CM_1 - DM_2 = W, \\ CM_3 - DM_4 = U. \end{cases} \quad (11)$$

Входящие в выражения (11) матрицы являются аналогами величин, которые содержатся в уравнениях (10).

Решая систему (11) методом Крамера, находим неизвестные коэффициенты $C_n(t)$ и $D_n(t)$, в интересующий исследователя момент времени, зная которые можно рассчитать закон изменения нормальных и касательных перемещений в произвольной точке полупространства. Для этого приведем формулы, которые вытекают из соотношений (2):

$$\begin{aligned} w(r, z, t) = & -\frac{H(t-z\beta)}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k r) ((-\beta C_k(t-z\beta)) + \\ & + \int_0^{t-z\beta} C_k(\tau) \left(\frac{z\beta \lambda_k J_1(\lambda_k \beta^{-1} \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2 \beta^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2 \beta^2}} \right) d\tau) - \\ & - \frac{H(t-z)}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (-J_0(\lambda_k r)) \int_0^{t-z} D_k(\tau) J_0\left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u(r, z, t) = -\frac{H(t-z\beta)}{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\lambda_k r) \int_0^{t-\beta} \frac{C_k(\tau)}{\lambda_k} J_0\left(\lambda_k \beta^{-1} \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2 \beta^2}\right) d\tau + \\ + \frac{H(t-z)}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_k J_1(\lambda_k r)) \left(D_k(t-z) + \int_0^{t-z} D_k(\tau) \frac{z \lambda_k J_1\left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}} d\tau \right). \quad (13)$$

Укажем характерную особенность полученного решения, состоящую в том, что оно определяет только начальную реакцию упругого полупространства на кинематическое воздействие, приложенное на его поверхности при $0 \leq r < 1$. Построенное решение в рядах Фурье-Бесселя таково, что при $r = 1$ нормальные перемещения равны нулю для всех значений z и t , поскольку входящие в решение величины λ_k являются корнями уравнения

$$J_0(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Это является некорректным допущением с точки зрения физического содержания распределения перемещений в упругом полупространстве. Данное обстоятельство существенно сужает область применимости решения.

Учитывая, что рассматриваются сугубо нестационарные деформационные процессы, укажем, что решение будет применимым в полубесконечном цилиндре

$$0 < r < 1, 0 < z < +\infty \quad \text{для времени } t < T,$$

где T – момент времени достижения продольной волны деформации цилиндрической поверхности $r = 1$.

Можно расширить область применимости решения, отметив, что в точке с координатами (r, z) оно будет еще физически верным до момента времени

$$T \leq T_0,$$

где T_0 – момент прихода «отраженной» продольной волны деформации от стенки упомянутого цилиндра $r = 1$.

Здесь под словами «приход отраженной продольной волны деформации» понимается условный физический процесс, который может иметь место в рассматриваемой механической системе. Геометрическое описание области, в которой справедливо построенное решение, может быть представлено более подробно для конкретных вариантов геометрического распределения, задаваемых граничных кинематических воздействий.

Результаты моделирования. Используя найденные зависимости (11) и (12), в качестве примера выполним анализ закона изменения перемещений во времени для упругого полупространства при значениях $z \neq 0$. Границных условия заданы на поверхности в форме функций безразмерных нормальных перемещений от времени и радиальной координаты (они представлены на рис. 2).

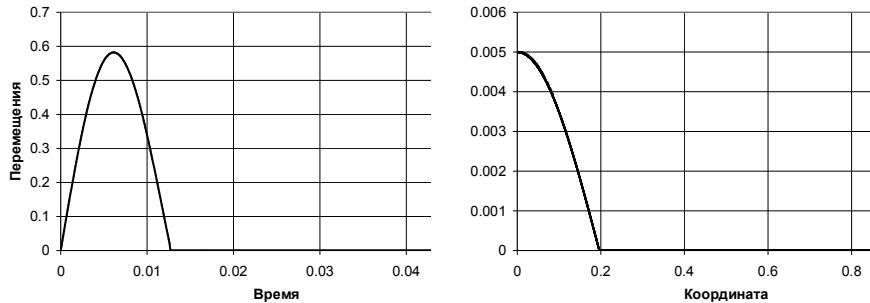


Рис. 2 – Временное (*а*) и пространственное (*б*) распределения нормального граничного перемещения $w_0(r,t)$.

На рис. 2, *а* изображено изменение перемещений во времени, а на рис. 2, *б* – распределения перемещений по поверхности полупространства вдоль координаты r . Для выявления влияния нормальной составляющей граничного вектора перемещения на компоненты вектора перемещения при $z \neq 0$ касательные перемещения на поверхности полупространства принимаются равными нулю. В результате численных расчетов получаем набор кривых, описывающих поведение различных точек полупространства.

Приведем результаты для сечения $z = 0,04$. На рис. 3 они представлены в виде набора кривых, причем вдоль одной из осей откладывается время, а вдоль другой – радиус точки, в которой эти функции вычисляются.

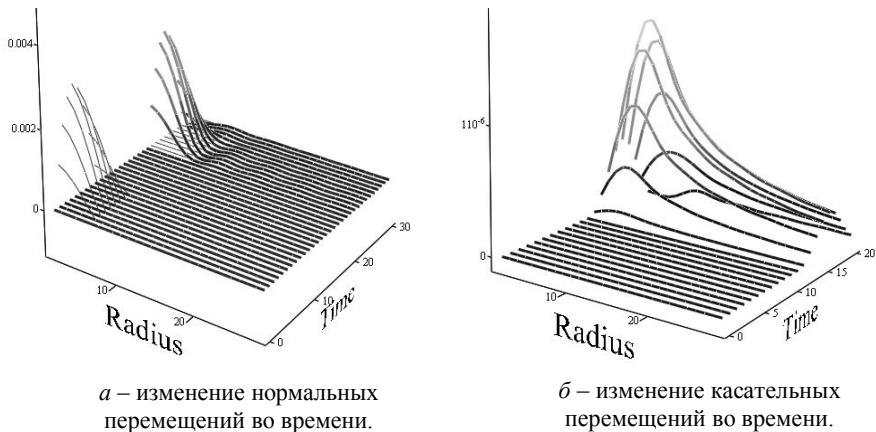


Рис.3 – Изменение перемещений на глубине полупространства при $z = 0,04$.

На рис.3, а приводятся нормальные перемещения w , а на рис.3, б – касательные u .

Перемещения на границе показаны тонкими линиями, а при $z = 0,04$ – более толстыми.

На графиках отчетливо просматривается сдвигка во времени, которая характеризует волны деформации, развивающиеся в глубине упругого полупространства.

Как следует из графиков рис.3, б, наличие нормальных перемещений на поверхности полупространства (где $z = 0$) вызывает возникновение при $z \neq 0$ касательных перемещений даже в случае их отсутствия на границе, хотя их значения значительно меньшие, чем значения нормальных перемещений.

Список литературы: 1. Ватсон Г.Н. Теория Бесселевых функций // М.: Изд. иностр. лит. – 1949. – 799 с. 2. Власов В. З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н.И.Леонтьев. // М.: Физматгиз, 1960. – 492 с. 3. Дидкин В. А. Операционное исчисление / В. А. Дидкин, А. П. Прудников // М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 4. Сеймов В.М. Динамические контактные задачи. – К.: Наук. думка, 1976. – 224 с. 5. Янютин Е. Г. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский. – Харьков: Изд-во ХАДИ, 2001. – 184 с.

Поступила в редколлегию 16.10.12

УДК 539.3

Начальний етап деформування упруго полупространства при кінематичному відействії / Е.Г. Янютин, Д.І. Богдан // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в технології та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – 54(960). – С.202-208.– Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто коливання пружного півпростору у випадку, коли на його поверхні задано зміну переміщень у часі. Використано віссиметричну постановку другої крайової задачі. Розв'язок знаходить у вигляді розкладання в ряд за функціями Бесселя від радіальні координати. Розглянуто чисельний приклад знаходження переміщень на глибині півпростору у випадку відомих переміщень на поверхні.

Ключові слова: півпростір, кінематичне збурення, система інтегральних рівнянь, друга крайова задача.

The elastic oscillations of a half-space in case of the kinematics influence set on its surface are described in article. Axisymmetric statement of the second boundary value problem is considered. The problem is solved by using of an expansion in a series on cylindrical functions. The numerical example on finding of moving on depth of a half-space is considered at known kinematics impact on surfaces.

Key words: half, the kinematics effects, the system of integral equations of the second boundary value problem.

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;
П.А. ЕГОРОВ, аспирант, ХНАДУ, Харьков

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, НЕСУЩЕЙ НЕСКОЛЬКО СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС

Механическая система состоит из закрепленной по контуру прямоугольной мембранны и присоединенных масс. При решении прямой задачи исследуются нестационарные колебания мембранны под действием известной импульсной распределенной нагрузки. При решении обратной задачи по известным перемещениям некоторой точки мембранны идентифицируется неизвестная нагрузка, которая вызвала колебания системы. Решение задач сводится к анализу систем интегральных уравнений, которые решаются численно. В случае построения решения обратной задачи используется метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Ключевые слова: мембрана, сосредоточенная масса, распределенная нагрузка, контактная сила, перемещение, интегральное уравнение, идентификация, метод регуляризации.

Введение. В настоящее время существует необходимость построения математических моделей динамических систем, которые состоят из большого количества элементов. Часто учет всех этих элементов не представляется возможным. В случае, когда размерами элементов можно пренебречь, удобно выделять основной объект и исследовать его на основе некоторой теории, а инерционное воздействие контактирующих с ним объектов моделировать при помощи присоединенных масс. Рассматривая такую систему, воспользуемся упомянутым подходом и представим ее в виде мембранны с присоединенными массами.

Свободные колебания мембранны рассмотрены в [1]. Опираясь на [1], в [2] были получены решения задач о нестационарных колебаниях круглой и прямоугольной мембранны, не несущих массы. Причем в [2] были рассмотрены постановки и решения как прямых, так и обратных задач. К настоящему же времени способы определения колебаний мембранны и способы идентификации неизвестной возмущающей нагрузки, действующей на мембранны, на которой находятся несколько сосредоточенных масс, развиты недостаточно хорошо.

Постановка задачи. Исследуемая система состоит из прямоугольной закрепленной по контуру мембранны, несущей на своей поверхности сосредоточенные массы. В данной статье для простоты описания решения рассмотрим мембранны с двумя присоединенными массами. На мембранны воздействует поперечная распределенная нагрузка, вызывающая колебания системы. В рамках решения *прямой задачи* необходимо определить перемещения точек

исследуемой системы с течением времени.

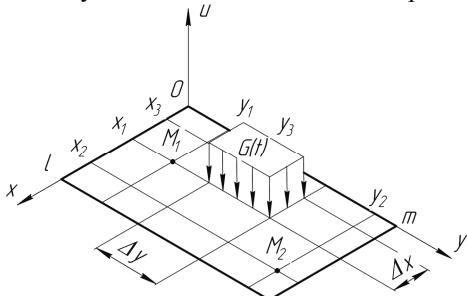


Рис. 1 – Схема нагружения мембрани.

известного двумерного волнового уравнения [1]. Запишем упомянутое уравнение с учетом воздействия возмущающей нагрузки и присоединения к поверхности мембрани сосредоточенных масс:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + R_1(x, y, t) + R_2(x, y, t) + G(x, y, t), \quad (1)$$

где a – скорость распространения волн деформации,

$$R_1(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) R_1(t), \quad R_2(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) R_2(t)$$

– контактные силы, возникающие от действия масс, сосредоточенных в точках с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 соответственно,

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\rho} (H(x - x_3) - H(x - x_3 - \Delta x)) H((y - y_3) - H(y - y_3 - \Delta y)) G(t)$$

– внешняя возмущающая нагрузка, распределенная по поверхности площадью $\Delta x \cdot \Delta y$, где ρ – поверхностная плотность материала, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Воздействие присоединенных масс было заменено эквивалентными контактными силами при условном отсоединении масс от поверхности мембрани в предположении равенства перемещений масс перемещениям точек мембрани, соответствующих расположениям этих масс, то есть

$$\begin{aligned} u_{M1}(t) &= u(x_1, y_1, t); \\ u_{M2}(t) &= u(x_2, y_2, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Задачу математической физики, включающую дифференциальное уравнение (1), решаем с учетом нулевых краевых условий (отвечающих закреплению границы мембрани) посредством разложения искомой функции $u(x, y, t)$ в двойные ряды Фурье по тригонометрическим функциям [2,3], то есть

В рамках решения *обратной задачи* необходимо определить неизвестное возмущающее воздействие, вызвавшее колебания системы, по известным перемещениям заданной точки мембрани.

Решение прямой задачи.

Поведение закрепленной по контуру прямоугольной мембрани будем рассматривать на основе свободных колебаний мембрани

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{k,n}(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (3)$$

Решение двумерного волнового уравнения (1), учитывающее нулевые начальные условия, получим в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m} \right), \quad (4)$$

где

$$C_{1k,n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{m}, \quad C_{2k,n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y_2}{m}, \\ C_{3k,n} = \frac{1}{\rho} \frac{4}{k \cdot n \cdot \pi^2} \left(\cos \frac{k\pi x_3}{l} - \cos \frac{k\pi(x_3 + \Delta x)}{l} \right) \cdot \left(\cos \frac{n\pi y_3}{m} - \cos \frac{n\pi(y_3 + \Delta y)}{m} \right), \\ \lambda_{k,n} = a \cdot \pi \sqrt{k^2 / l^2 + n^2 / m^2}.$$

Перемещения, условно отсекающие от мембранны, массы определяются из дифференциального уравнения, составленного на основе *второго закона Ньютона*:

$$M \cdot u_M''(t) = -R(t). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) запишем в виде:

$$u_M(t) = -\frac{1}{M} \cdot \int_0^t (t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (6)$$

На основе равенств (2) получаем систему интегральных соотношений для функций $R_1(t)$ и $R_2(t)$ следующего вида:

$$\begin{cases} -\frac{1}{M_1} \int_0^t R_1(\tau)(t-\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right); \\ -\frac{1}{M_2} \int_0^t R_2(\tau)(t-\tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Уравнения Вольтерра, входящие в систему (7), будем решать числен-

ным методом, который основан на замене интегралов конечными суммами, то есть применим один из вариантов квадратурных формул. В результате получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{p=1}^j (R_{1,p} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\frac{t_j - \tau}{M_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) d\tau) + \\ & + \sum_{p=1}^j (R_{2,p} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) \right) d\tau) = \\ & = - \sum_{p=1}^j (G_p \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) \right) d\tau); \\ & \sum_{p=1}^j (R_{1,p} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau)) \right) \right) d\tau) + \\ & + \sum_{p=1}^j (R_{2,p} \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\frac{t - \tau}{M_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \frac{C_{2k,n} \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau))}{\lambda_{k,n}} \right) d\tau) = \\ & = - \sum_{p=1}^j (G_p \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) \right) d\tau). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Представим систему уравнений (8) в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_{11} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{12} = \mathbf{f}_1; \\ \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_{21} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{22} = \mathbf{f}_2. \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы интегральных уравнений будем искать при помощи *метода Крамера*:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{f}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}}, \quad \mathbf{R}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{f}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

При известных величинах, входящих в уравнение (4), можно рассчитать значения прогибов в любой точке мембранны с течением времени.

В качестве примера рассмотрим такие исходные данные:

поверхностная плотность материала мембранны $\rho = 3.6 \text{ кг/м}^2$;

скорость распространения волн деформации $a = 30 \text{ м/с}$;

габариты мембранны $l = 0.6 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$;

величины присоединенных масс

$M_1 = 1 \text{ кг}$ ($x_1 = 0.1 \text{ м}$, $y_1 = 0.1 \text{ м}$), $M_2 = 5 \text{ кг}$ ($x_2 = 0.2 \text{ м}$, $y_2 = 0.2 \text{ м}$);

интенсивность возмущающей нагрузки

$$q = 100 \text{ H/m}^2 (x_3 = 0.3 \text{ м}, y_3 = 0.2 \text{ м}, \Delta x = 0.1 \text{ м}, \Delta y = 0.1 \text{ м}).$$

Нагрузка во времени действует по закону «синуса» с циклической частотой колебаний $\omega_0 = 100 \text{ c}^{-1}$ в течение одного полупериода. Необходимое число членов ряда в рядах Фурье определялось на основе численного эксперимента по анализу сходимости соответствующих рядов.

На рис.2 представлено изменение во времени прогиба в 3 точках мембранны.

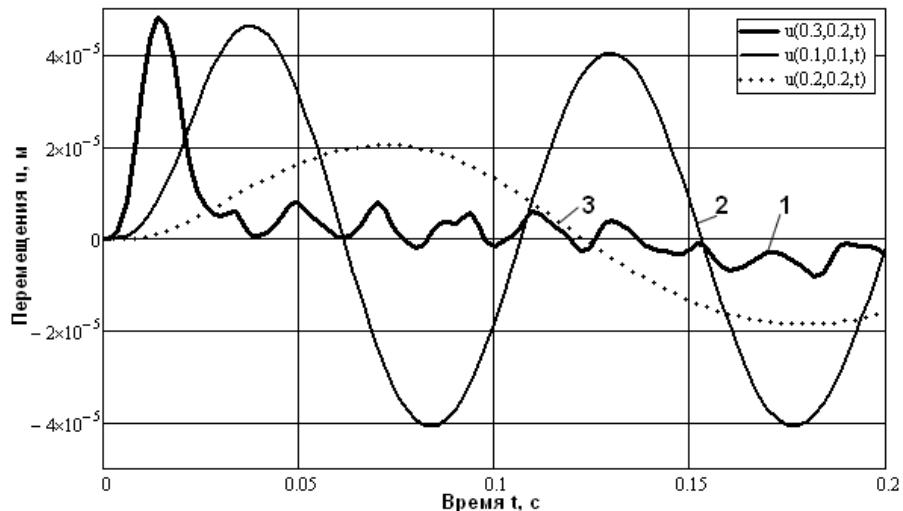


Рис.2 – Графики колебаний точек мембранны при наличии двух сосредоточенных масс.

Кривая 1 соответствует точке, принадлежащей области приложения нагрузки, эта же точка является геометрическим центром мембранны,
координаты $x_3 = 0.3 \text{ м}, y_3 = 0.2 \text{ м}$.

Кривая 2 отвечает точке расположения сосредоточенной массы $M_1 = 1 \text{ кг}$,

координаты $x_1 = 0.1 \text{ м}, y_1 = 0.1 \text{ м}$,

а кривая 3 – точке расположения сосредоточенной массы $M_2 = 5 \text{ кг}$,

координаты $x_2 = 0.2 \text{ м}, y_2 = 0.2 \text{ м}$.

Решение обратной задачи. Обратная задача состоит в определении неизвестной возмущающей нагрузки по известным перемещениям некоторой точки мембранны, которые можно определить на основе физического или численного эксперимента. Для решения задачи необходимо решить систему ин-

тегральных уравнений следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_2(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) d\tau \right) \sin \frac{k\pi x_e}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y_e}{m} \right) = u_e(t); \\ \int_0^t R_1(\tau) \left(\frac{t-\tau}{M_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) = 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) + \\ + \int_0^t R_2(\tau) \left(\frac{t-\tau}{M_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) определяет перемещение $u_e(t)$ некоторой точки мембраны, которое при решении обратной задачи принимается, как известное. Второе и третье уравнения составлены на основе равенства перемещений массы перемещениям точки мембраны, соответствующей расположению этой массы.

Полученную систему будем решать численно, для чего используем замену интегралов конечными суммами [3]. Представляя систему уравнений (11) в матричном виде с квадратными матрицами \mathbf{A}_{ij} порядка m , получим:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{13} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{u}_e; \\ \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{23} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{A}_{31} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{32} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{33} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

Решение системы уравнений (12) будем искать при помощи *метода Крамера* с применением *метода регуляризации А.Н.Тихонова* [4]. Упомяну-

тое решение запишем в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_1; \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_2; \\ \mathbf{G} = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_3. \end{cases} \quad (13)$$

где $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – квадратные блочные определители матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_e & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{u}_e & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{u}_e \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

α – параметр регуляризации; C – трехдиагональная матрица, вид которой представлен в [2].

В качестве примера исходных данных для проведения вычислительного эксперимента примем такие же данные, как и в случае решения прямой задачи, за исключением возмущающей нагрузке. График изменения перемещений, по которым идентифицировалась возмущающая нагрузка, приведен на рис.3. Кривая рис.3 получена при решении соответствующей прямой задачи.

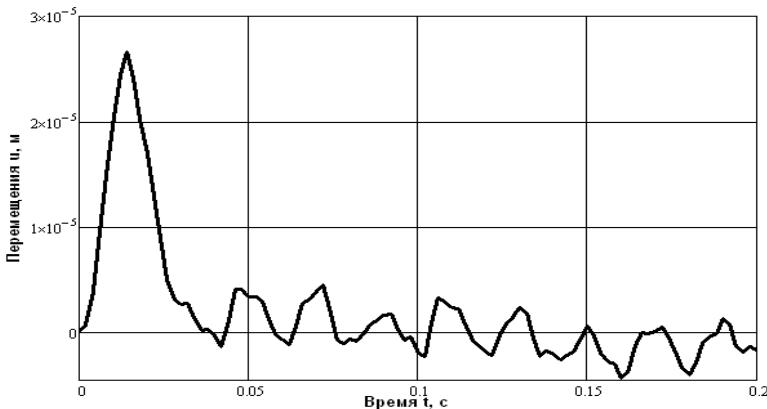


Рис.3– График перемещений точки мембранны с координатами
 $x_e = 0.3\text{м}, y_e = 0.35\text{м}.$

Кривой, состоящей из точек, на рис.4 обозначены значения возмущающей нагрузки действующей по закону «синуса» в течение одного полупериода, тонкой сплошной кривой – значения идентифицированной нагрузки при параметре регуляризации $\alpha = 10^{-40}$. Кривые практически совпадают, что свидетельствует об эффективности метода регуляризации при решении такого рода задач.

Выводы. В статье исследованы нестационарные колебания мембранны с несколькими (двумя) сосредоточенными массами, идентифицирована нестационарная нагрузка, действующая на мембрану, несущую сосредото-

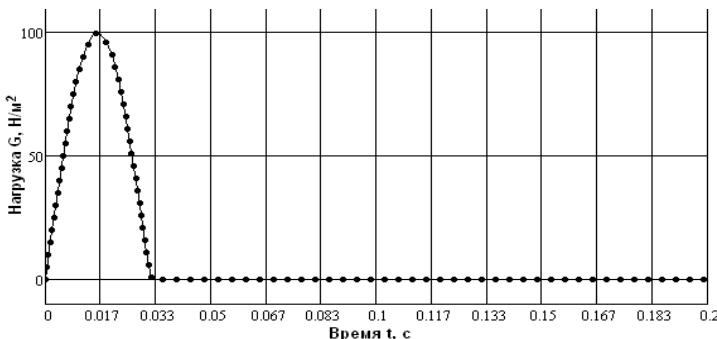


Рис. 4 – Графики приложенной и идентифицированной нагрузок.

ченные массы. Описанный подход является эффективным и может быть использован для построения математических моделей систем, содержащих большее количество присоединенных элементов.

Список литературы: 1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с. 2. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с. 3. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Боропай А.В., Шарапата А.С. // Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 4. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / Верлань А.Ф., Сизиков В.С. // К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Поступила в редакцию 28.09.2012

УДК 539.3

Нестационарные колебания мембранны, несущей несколько сосредоточенных масс / Е.Г. Янютин, П.А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ», – 2012. – № 54(960). – С.209-216. – Бібліogr.: 4 назв.

Механічна система складається із закріпленої вздовж контуру прямокутної мембрани та приєднаних до неї мас. При розв'язанні прямої задачі досліджуються нестационарні коливання мембрани під дією відомого імпульсного розподіленого навантаження. При розв'язанні оберненої задачі за відомими переміщеннями діякої точки мембрани ідентифікується невідоме навантаження, яке викликало коливання системи. Вирішення задач зводиться до аналізу систем інтегральних рівнянь, які розв'язуються чисельно. У випадку побудови рішення оберненої задачі використовується метод регуляризації А.М. Тихонова.

Ключові слова: мембра, зосереджена маса, розподілене навантаження, контактна сила, переміщення, інтегральне рівняння, ідентифікація, метод регуляризації.

Mechanical system consists of the rectangular membrane, which is fixed over the contour, and connected to it masses. The transient vibrations of the membrane under the known impulse distributed load are studied at solving the direct problem. The unknown load, which caused mechanical system vibrations, is identified over the known displacements of certain point at solving the inverse problem. Solving the problems resolves into analysis of Volterra integral equation sets, which are solved numerically. In case of solving the inverse problem the Tikhonov regularization method is used.

Key words: membrane, a concentrated mass, load distribution, contact force, displacement, integral equation, identification, regularization method.

З М И С Т

<i>Анділахай О. О., Гершиков І. В.</i> Математична модель визначення енергоефективності абразивної обробки та умов її зменшення.....	3
<i>Артиюх М. В., Литвин О. М.</i> Теореми про представлення виробничих функцій деякого класу за допомогою операторів нелінійної інтерполяції та інтерплетації.....	14
<i>Бурлаєнко В. М., Морачковський О. К.</i> Застосування кінематичного контактного алгоритму з явною схемою інтегрування за часом у скінченне-елементних задачах динаміки тіл з тріщиною	19
<i>Ванин В. А., Григорьев А. А.</i> Моделирование синфазных упругих колебаний в волноводах и сонотродах винтовой формы	25
<i>Григорьев А. Л., Геворкян Ю. Л.</i> Алгоритмы интегрирования жестких уравнений клапанных гидромеханических узлов	39
<i>Дубінін В. О. , Дубініна О. М.</i> Аналіз проблеми прогнозування попиту на товари масового споживання в логістичній системі торгового підприємства	56
<i>Захарян В. С., Даллакян Р. В.</i> О росте α – характеристик и производной произведений М. М. Джрабашяна	63
<i>Ієвлєва С. М.</i> Алгоритмічні методи підвищення надійності роботи газотранспортної системи України	74
<i>Кипенский А. В., Томашевский Р. С.</i> Математическое моделирование процессов в турбинном преобразователе потока портативного спирометра ...	86
<i>Ковалёв А. В.</i> Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в резервуарах подвижных объектов.....	99
<i>Кривякин Г. В., Редченко Е. С.</i> Влияние элементов конструкции линейного двигателя на тяговую характеристику привода наклона кузовов скоростных поездов	107
<i>Куреннов С. С.</i> Моделирование клеевого слоя в соединении двухпарметрическим упругим основанием	112
<i>Литвин О. М., Лобанова Л. С., Мірошниченко Г. А.</i> Розв'язання задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь шляхом мінімізації похибки правих частин в нормі $L_2[0;1]$	119

Литвин О. М. , Першина Ю. І. , Пасічник В. О. Побудова розривних лінійних інтерполяційних сплайнів для наближення функцій, що мають розриви на лініях триангуляції.....	129
Назаренко О. М. , Карпуша М. В. Ідентифікація параметрів задач оптимізації слабоформалізованих систем	140
Назиров З. Ф. , Черемська Н. В. Про один клас нестационарних вектор-нозначних випадкових функцій.....	150
Новіков Ф. В. , Іванов І. Є. Аналітичне визначення питомого зношування круга при шліфуванні	159
Овер'янова Л. В. Магнитная система индуктора электромеханического преобразователя инерционного накопителя энергии	165
Потаніна Т. В. Оптимізація тривалості міжремонтних періодів в експлуатації енергооб'єктів з врахуванням ризику	170
Потетенко О. В. , Шевченко Н. Г. , Коваль Е. С. , Тыньянова И. И. Численное моделирование гидродинамического усилия, действующего на кольцевой затвор в процессе его опускания в проточную часть радиально-осевой гидротурбины.....	176
Семко А. Н., Локтюшина Ю. В. О влиянии сжимаемости рабочей жидкости на эффективность гидропушки.....	186
Степук О. В., Автономова Л. В., Бондар С. В., Марусенко С. І. Особливости математичного моделювання процесу видавлювання деталі типу гільза.....	196
Янютин Е. Г., Богдан Д. И. Начальный этап деформирования упругого полупространства при кинематическом воздействии.....	202
Янютин Е. Г., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембранны, несущий несколько сосредоточенных масс	209

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Збірник наукових праць

Серія:
Математичне моделювання
в техніці та технологіях

№ 54 (960)

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
Технічний редактор С. Д. Нижник

Відповідальний за випуск канд. техн. наук Г. Б. Обухова

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЙ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».

Кафедра вищої математики.

Tel.: (057) 707-60-35, (057) 707-60-87;

e-mail: kpi_mmtt@mail.ru

Обл.-вид. № 173–12.

Підп. до друку 27.11.2012 р. Формат 60×84 1/16. Папір офісний.

Друк цифровий. Гарнітура Таймс. Умов. друк. арк. 9,8. Облік.-вид. арк. 10,0.

Наклад 300 пр.(1-й завод 1-100) Зам. № ZA 2945 Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ». Свідоцтво про державну реєстрацію суб'єкта видавничої справи ДК № 3657 від 24.12.2009 р.

61002, Харків, віл Фрунзе, 21

Цифрова друкарня ТОВ «Цифрова друкарня №1»

Ідент. код юридичної особи: 37190180 від 27.07.2010.

61001, Харків, пл. Повстання, 7/8, тел.: (057) 754-49-40, (057) 754-49-42