



ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«XIII»

63'2011

Харків

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Збірник наукових праць
Тематичний випуск

63'2011

«ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН»

Видання засновано Національним технічним університетом
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання
Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

Голова: Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

Секретар: К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;	С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;	В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;	В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
Л.М.Бесов, д-р техн. наук, проф.;	Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;	В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;	О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;	В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;
А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;	П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;	В.А.Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;	М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;	В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;
В.В.Єсипанов, канд. техн. наук, проф.;	Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;	Ю.В.Тимофіїв, д-р техн. наук, проф.;
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;	М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.
В.Б.Клепіков, д-р техн. наук, проф.;	

Харків 2011

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 63. – 152 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Відповідальний редактор: О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний секретар: А.Г.Андрєєв, канд. техн. наук, доц.

К.В.Аврамов	д-р техн. наук, проф.
Є.Є.Александров	д-р техн. наук, проф.
Д.В.Бреславський	д-р техн. наук, проф.
Ю.С.Воробйов	д-р техн. наук, проф.
А.П.Зиньковський	д-р техн. наук, проф.
Л.В.Курпа	д-р техн. наук, проф.
Г.І.Львов	д-р техн. наук, проф.
Ю.В.Міхлін	д-р фіз.-мат. наук, проф.
М.А.Ткачук	д-р техн. наук, проф.
Ю.М.Шевченко	академік НАНУ, д-р техн. наук, проф.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».
Каф. ДММ, тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 10 від 1 листопада 2011 р.

ISSN 2078-9130

© Національний технічний університет «ХПІ»

Л.В.КУРПА, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, НТУ«ХПИ»

**ВЛАДИМИР ЛОГВИНОВИЧ РВАЧЕВ – ИЗВЕСТНЫЙ
УКРАИНСКИЙ УЧЕНЫЙ – МАТЕМАТИК-МЕХАНИК
(К 85-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)**

Стаття присвячена пам'яті видатного вченого в галузі математики, механіки і кібернетики, заслуженого діяча науки і техніки України, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, володаря орденів Ярослава Мудрого, Трудового Червоного Прапора, Дружби народів, професора, доктора фізико-математичних наук, почесного доктора НТУ«ХПІ», **ВОЛОДИМИРА ЛОГВИНОВИЧА РВАЧЕВА**.

The article is devoted to memory of outstanding scientist in the field of mathematics, mechanics, and cybernetics, Honored Scientist of Ukraine, laureate of State Prize of Ukraine in science and technology, the holder of the Order of Yaroslav Mudrey, the Labor Red Banner, Friendship of Nations, Professor, Doctor of Physic-Mathematical Sciences, honorary Doctor of NTU "KрPI", **VLADIMIR LOGVINOVICH RVACHEV**.

Статья посвящена памяти выдающегося ученого в отрасли математики, механики и кибернетики, заслуженного деятеля науки и техники Украины, лауреата Государственной премии Украины, в области науки и техники, обладателя орденов Ярослава Мудрого, Трудового Красного Знамени, Дружбы народов, профессора, доктора физико-математических наук, почетного доктора НТУ «ХПИ», **ВЛАДИМИРА ЛОГВИНОВИЧА РВАЧЕВА**.



21 октября 2011 г. исполнилось бы 85 лет со дня рождения **ВЛАДИМИРА ЛОГВИНОВИЧА РВАЧЕВА**, ушедшего из жизни 26 апреля 2005 года.

Владимир Логвинович Рвачев родился 21 октября 1926 г. в г. Чигирине Черкасской области, в семье учителей. Детство и юность его проходили в тяжелые годы культа личности Сталина и Великой Отечественной войны. В 1937 году его родители были репрессированы. Мать, Черномордик Ксения Алексеевна, была освобождена в 1940 году, а отец умер в заключении. В 1956 году родителей

В.Л.Рвачева реабилитировали. В тот тяжелейший для семьи период заботу о самом маленьком брате взяла на себя Екатерина Логвиновна Рвачева, которая после ареста родителей была исключена из Киевского государственного университета «как дочь врагов народа». Заметим, что впоследствии Екатерина Логвиновна Рвачева-Ющенко стала первой программисткой на Украине, всемирно известным ученым-математиком, специалистом в области про-

граммного обеспечения. Она была избрана членом-корреспондентом НАН Украины и действительным членом Международной академии компьютерных наук и систем.

Среднюю школу Владимир Логвинович закончил в Ташкенте, куда была эвакуирована семья с начала Великой Отечественной войны. В 1943 г. он поступил в Харьковский институт инженеров железнодорожного транспорта. Однако учеба в этом институте была прервана в связи с призывом на действительную службу в Военно-Морской Флот. После службы в 1947 г. В.Л. возвратился в г. Стрый Львовской области, где проживала его семья, возвратившаяся из эвакуации. Старшая сестра Людмила работала учителем в Стрыйской школе, брат Михаил преподавал во Львовском политехническом институте, сестра Екатерина преподавала математику в университете. Здесь под влиянием старшей сестры Он решил заново окончить среднюю школу, так как аттестат зрелости у него был очень неважным, поскольку учился Владимир Логвинович в школе плохо. С этой целью Он поступил в вечернюю школу и очень тщательно штудировал все предметы, чтобы получить новый аттестат зрелости, который позволил бы ему поступить в вуз. Через год Владимир Логвинович поступает во Львовский политехнический институт. Но учеба здесь его не привлекала. Опять были получены плохие оценки и в том числе по математике. Через год новая попытка поступить во Львовский университет на физико-математический факультет увенчалась успехом. Здесь он учился старательно и имел большие успехи. Активно занимаясь общественной работой, он был Сталинским стипендиатом, посещал научные семинары, на которых познакомился со многими учеными, ставшими впоследствии известными академиками, внесшими существенный вклад в развитие механики. Среди них академики М. Я. Леонов, Я. Б. Лопатинский, В. И. Моссаковский, В. В. Панасюк, Я. С. Подстригач и многие другие. В 1952 г. В. Л. Рвачев с отличием окончил Львовский университет и был направлен на преподавательскую работу в одно из воинских учебных заведений Военно-Морского Флота. В период с 1952 по 1955 гг. он активно работает над научными проблемами в области механики, предложил решения ряда задач о действии штампа на упругое полупространство. Эти решения легли в основу его кандидатской диссертации, которую он успешно защитил в Львовском университете.

В 1955 г. В. Л. Рвачев становится заведующим кафедрой высшей математики в Бердянском педагогическом институте, где ведет активную научную и педагогическую работу до 1963 г. В этот период он организует в периферийном институте работу вычислительного центра. Этот институт стал первым среди педагогических институтов на Украине, который приобрел ЭВМ для учебной и научной работы.

В 1960 г. В. Л. Рвачев блестяще защищает докторскую диссертацию в Институте проблем механики АН СССР. В своей докторской диссертации Он представил решения пространственных контактных задач теории упругости.

Эта работа признана классической в теории упругости и внесла существенный вклад в развитие механики. В 35 лет доктору физико-математических наук В. Л. Рвачеву присвоено ученое звание профессора.

К основному результату своего будущего математического открытия – теории R-функций, он подошел в период завершения своей докторской диссертации. Фактически тогда он нашел ключ к решению проблемы учета геометрической информации на аналитическом уровне.

В 1963 г. В.Л.Рвачев переехал в Харьков, где возглавил кафедру вычислительной математики Харьковского института горного машиностроения, автоматизации и вычислительной техники (ХИГМАВТ) а впоследствии после его преобразования стал первым ректором Харьковского института радиоэлектроники, именуемого сейчас как Харьковский Национальный Университет Радиоэлектроники.

В 1970 г. В. Л. Рвачев стал заведовать кафедрой теоретической и математической физики в Харьковском политехническом институте (с 1981 г. это кафедра прикладной математики). Параллельно с работой в ХПИ проф. Рвачев В.Л. руководил отделом прикладной математики и вычислительных методов в Институте проблем машиностроения АН Украины. С 1972 г. и до последних дней Институт проблем машиностроения НАН Украины был основным местом работы для В.Л. Рвачева. В 1972 г. В. Л. Рвачев был избран членом корреспондентом, а в 1978 г. – действительным членом НАН Украины.

Основы математической теории – «Теории R-функций», возникшей на стыке математической логики, классических методов прикладной математики и современных методов кибернетики были заложены в период с 1963 по 1982 гг. Одним из основных результатов этой теории является решение обратной задачи аналитической геометрии. Суть этой задачи состоит в построении уравнения геометрического объекта по его чертежу в виде единого аналитического выражения. Математики знают, что это была одна из нерешенных проблем, восходящих еще к Декарту. Вторая проблема, которую решил Владимир Логвинович и которая многим ученым казалась практически неразрешимой – это метод построения полных систем базисных функций. Предложенный им метод решения краевых задач в областях сложной формы – **метод R-функций, получивший международную аббревиатуру RFM**, сотни раз подтверждал свою универсальность и конкурентоспособность с общепризнанным методом конечных элементов и другими методами. Фундаментальной работой по теории R-функций является монография В.Л. Рвачева «Теория R-функций и некоторые ее приложения», вышедшая в 1982 г.

В 1989 г. В.Л. Рвачевым было предложено новое алгебраическое, изоморфное классическому, исчисление, названное им неархимедовым исчислением. Архимедово исчисление, которым пользуется весь классический математический аппарат, базируется на аксиоме, сформулированной Архимедом для отрезков. В новом исчислении эта аксиома заменена В.Л.Рвачевым на ак-

сиому о существовании наибольшего числа. В рамках приложений неархимедовых исчислений в физике дальнего космоса получены первые нетривиальные выводы о том, что смещения спектров неподвижных объектов в красную сторону не обязательно является следствием расширения Вселенной, так же как и рождению Вселенной в результате большого взрыва миллиарды лет назад. Новые идеи В.Л. Рвачева были подхвачены его учениками на Украине, Индии и учеными-физиками из Нижнего Новгорода. Так, в 2000 г. в американском журнале «Foundations of physics» вышла совместная статья В.Л.Рвачева и физика К.Авиноша (Индия), в которой неархимедовы исчисления нашли новые приложения, в том числе в теории гравитации.

В научной школе академика Рвачева В.Л. большое число ученых, многие из которых внесли существенный вклад в науку. Среди учеников Владимира Логвиновича 2 член-корр. НАН Украины, 18 докторов и более 60 кандидатов наук. Академик В.Л.Рвачев является автором более 500 научных работ и 17 монографий. Его вклад в математическую физику высоко отмечен Национальной Академией наук Украины присуждением ему престижной премии и медали академика Динника А.Н. За выдающийся вклад в науку ему присвоено звание Заслуженного деятеля науки, присуждена Государственная премия в области науки и техники Украины.

В 2001, юбилейном для Владимира Логвиновича году, он был удостоен Высокой награды – орден князя Ярослава Мудрого. Он был Почетным доктором Национального технического университета «ХПИ», Национального технического университета радиозлектроники (Харьков), Висконсинского университета США (Маддисон)».

Владимир Логвинович очень любил поэзию, огромное количество стихотворений знал наизусть. Часто приводил цитаты из произведений А.С.Пушкина, Т.Г.Шевченко, В.В.Маяковского и многих других поэтов. В его дневниках были выписаны стихотворения, которым Он следовал в своей жизни. Например, одно из них *Анатолія Калинина*:

Не отворачивай лица

*Ни от могилы затравевшей,
Ни от солдатки постаревшей,
Ни от сиротского крыльца,
Не отворачивай лица!*

*От свадьбы, похорон и драки,
От изувеченной собаки,
И от голодного птенца,
Не отворачивай лица !*

*От капли, брызнувшей из тучи,
От синих глаз невинной внучки,*

*И от угрозы наглеца,
Не отворачивай лица!*

*Ни от улитки первородной,
Ни от ветров войны холодной,
Ни от огня, ни от свинца,
Не отворачивай лица!*

*Живи по совести и чести,
Служи без подлости и лести,
И от Отчизны до конца,
Не отворачивай лица!*

26 апреля 2005 года жизнь великого Ученого оборвалась.

Мы приведем только несколько высказываний известных ученых о Владимире Логвиновиче, которые были сделаны еще когда Он был жив

**Я.М.Григоренко, академик НАН Украины,
зав.отделом Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины (2001 г.):**

«Рвачев Владимир Логвинович был одним из представителей когорты выдающихся ученых-механиков. Научные исследования, проводимые им и отраженные в многочисленных статьях и монографиях, внесли большой вклад в науку и получили признание широкого круга специалистов в странах СНГ и за рубежом.

Сотрудничая с ним на протяжении многих лет, мы всегда восхищались его глубиной понимания научных проблем, широким диапазоном знаний и неустанным генерированием новых идей. Он пользовался высочайшим авторитетом среди членов Академии Наук. Общение с ним всегда было приятно и радостно на профессиональном и человеческом уровне.»

Заметим, что Владимир Логвинович всегда был на передовых рубежах науки, легко осваивал новую вычислительную технику, блестяще работал на персональных компьютерах, что многим ученым его возраста было не под силу. Он показывал своим ученикам блестящий пример того, «что не святые горшки лепят», когда в 1997 году на 71-м году жизни по приглашению ученых из Висконсинского университета (США), он прибыл туда и прочел курс лекций по теории R-функций на английском языке. Здесь он общался со многими известными учеными. Ниже мы приведем высказывания американского профессора, бывшего украинского ученого, переехавшего на постоянное место жительства в США в 90-е годы.

**Eduard S.Ventsel, Professor Engineering Science & Mechanics Department
The Pennsylvania State University, USA (2001r):**

«Rvachev V.L. is well known as an outstanding scientist, teacher and excellent person among many generations of scientists in the former USSR, Ukraine, Russia and many other countries. He has made huge and revolutionary contributions in Applied Mathematics, Mathematical Physics, Solid Mechanics, etc. His R-Functions Method became a classical method for solving of many problems in various branches of science and engineering. His monographs, textbooks, and papers are worldwide known. I met references to his pioneer works in the USA, UK, etc. Our University's library has a collection of Rvachev books .

It is impossible to enumerate Rvachev V.L. contributions in various branches of science. But it is also important to mention about his contribution to a preparation of a new generation of scientists (Candidates and Doctors of Sciences).

Rvachev's pupils are successfully working in Universities, Institutes and industry in Ukraine, Russia, and other countries. Personal qualities, kindness, scientific adherence to principle, honesty and kindheartedness by Rvachev V.L. gained a deep respect to him among all the scientists and people who worked with him. I am proud that during a couple decades had been working in a contact with this scientist. It is a big privilege for me to be friend of such man.»

Теория R-функций, созданная В.Л.Рвачевым, является одним из великих открытий в области математики второй половины двадцатого века.

Идеи, заложенные академиком Владимиром Логвиновичем Рвачевым его известной теорией, продолжают развиваться сегодня и широко применяются в различных областях механики, физики, математического моделирования. Подтверждением тому является множество научных статей, монографий, защищенных кандидатских и докторских диссертаций.

Спасибо, Учитель, мы вместе всегда

Сегодня и завтра, и живы пока.

У всех нас одна лишь прямая дорога

И все мы R- рычим пред алтарем R – Бога.

(2.06.2005. В.Д.Кожухов, ученик В.Л.Рвачева)

Конечно, очень трудно поверить в то, что сегодня Владимира Логвиновича нет рядом с нами. И только память, и его огромное наследие в науке помогают переносить Нам столь тяжелую потерю.

Так будем хранить память об этом Великом Человеке!

Ученица В.Л.Рвачева.

Зав. каф. прикладной математики НТУ «ХПИ», д-р техн. наук, проф.

Курпа Л.В.

Поступила в редколлегию 17.10.2011.

Л. В. АВТОНОМОВА, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
С. В. БОНДАРЬ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
Б. Н. КИРКАЧ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
В. И. КОНОХОВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
А.В. СТЕПУК, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

У статті розглянуті проблеми та методологія МКЕ моделювання потоку в'язкої рідини. Наведено основні рівняння в моделі течії рідини вздовж лопатей турбіни, основні етапи розрахунку за допомогою кінцевих елементів. Постановка завдання ілюструється розрахунковим кроком стаціонарної моделі механічних навантажень на лопаті

Problems and FEM modeling methodology specific for viscous fluid flow are presented in the paper. The general model equations of fluid flow within turbine runner blades lead to step-by-step calculation procedure using FEM. The given problem terms are illustrated with stationary model calculations for blades mechanical stresses

В статье рассмотрены проблемы и методология МКЭ моделирования потока вязкой жидкости. Приведены основные уравнения в модели течения жидкости вдоль лопастей турбины, основные этапы расчета с помощью конечных элементов. Постановка задачи иллюстрируется расчетным шагом стационарной модели механических нагрузок на лопасти

1 Описание проблемы. Сложные гидродинамические эффекты, наблюдающиеся при обтекании, например, в турбинах, особенно при турбулентных нестационарных течениях вязкой жидкости, приводят к нарушениям в работе, механическим разрушениям и износу. Моделирования таких процессов представляет собой значительные трудности, но даже упрощенные расчеты позволяют улучшать рабочие параметры и предсказывать возможные места повреждений.

2 Постановка задачи и численная модель. Система уравнений, описывающая движение жидкости, включает в себя уравнения Навье-Стокса, уравнение моментов и сохранения энергии:

– уравнение моментов

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] +$$

$$S_{\omega} + S_{DR};$$

– уравнение непрерывности

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 ;$$

– сохранения энергии

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho C_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + q_v . \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения непрерывности, моментов и энергии включают в себя 5 уравнений с 5 неизвестными: u , v , w , p , T . Они описывают течение жидкости и передачу тепла в стационарных условиях в декартовой системе координат.

Анализ методом конечных элементов системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движения потока несжимаемой невязкого течения жидкости, выполнялся с применением пакета ANSYS. Трехмерная нестационарная модель, включающая уравнения Навье-Стокса, в общем случае описывает как ламинарные, так и турбулентные потоки. В последнем случае размерность и масштаб вихрей меняется в очень широком диапазоне значений, что представляет значительные трудности для вычислений.

Непосредственная прямая триангуляция даже простейших геометрий для получения результатов с приемлемой сходимостью требует разбивки областей на домены, содержащие не менее 10^6 - 10^8 элементов. С практической точки зрения – это нецелесообразно, и в расчетах применяются усредняющие модели турбулентности. При усреднении выделяется среднее значение расчетного параметра (скорости, давления жидкости) и флуктуирующая переменная величина его пульсаций.

Для турбулентного потока вязкой жидкости обыкновенно применяется стандартная k - ε модель, либо ее приближение для течений с низкими значениями числа Рейнольдса $Re = UL\rho/\mu$. В этом случае турбулентная вязкость жидкости μ_t выражается через k и ε следующим образом: $\mu_t = C_{\mu} \rho f_{\mu} \varepsilon k^2 / \varepsilon$, тогда уравнения для параметров k и ε примут следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho V k) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \mu_t G - \rho \varepsilon + \Phi_k ;$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho V \varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_z} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \mu_t G - C_2 f_1 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \Phi_z ,$$

где

$$G = D_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} ; \quad D_{ij} = S_{ij} - \frac{2}{3} \left(\nabla \cdot V + \frac{\rho k}{\mu_t} \right) \delta_{ij} ; \quad S_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}$$

с экспериментальными значениями параметров σ_k , σ_z , C_μ , C_1 и C_2 . Соотношение k - ε в данном случае характеризует соотношение между турбулентной кинетической энергией и диссипацией энергии вследствие турбулентности. Такая модель достаточно хорошо описывает движение вязкой жидкости при низких числах Маха ($M = v/c < 0,3$), то есть в несжимаемой жидкости, и произвольных числах Рейнольдса. Соответственно, уравнение Навье-Стокса примут следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla(V \otimes V) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \left((\mu + \mu_t) (\nabla V + (\nabla V)^T) \right) + S; \quad \nabla V = 0$$

с источниками $S = \left(1 - \frac{\rho_{hyd}}{\rho} \right) \mathbf{g} + \mathbf{B} + \frac{\mathbf{R}}{\rho}$, причем силы Кориолиса и центро-

бежные силы во вращающейся системе координат примут вид $\mathbf{B} = -2\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}$, а уравнение энергии –

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(Vh) = \frac{1}{\rho} \nabla \left(\left(\frac{\lambda}{C_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \nabla h \right) + \frac{Q}{\rho}.$$

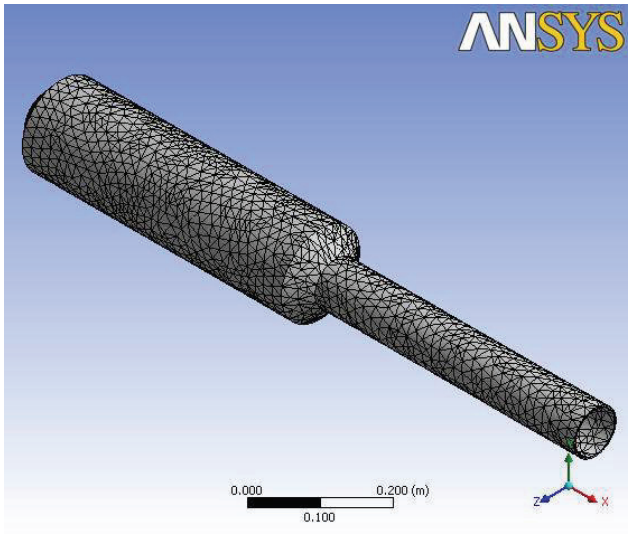


Рисунок 1 – Расчетная схема вала турбины

Еще одна трудность численного моделирования возникает в силу связности и нелинейности моментов, приложенных к лопастям и действующим в различных направлениях, например: составляющая момента вдоль оси x может зависеть от составляющей момента вдоль оси y и т.д.

3 Результаты моделирования. Граничные условия включают в себя условия течения жидкости вдоль стенок и лопастей, периодичность лопастей, симметрии и на входе и выходе потоков жидкости. На рис. 1 представлено «укрупненная разбивка» осесимметричной турбины измерителя потока вязкой жидкости, а на рис. 2 распределение напряжений Мизеса вдоль основания турбины и ее лопастей для стационарного, ламинарного потока жидкости.

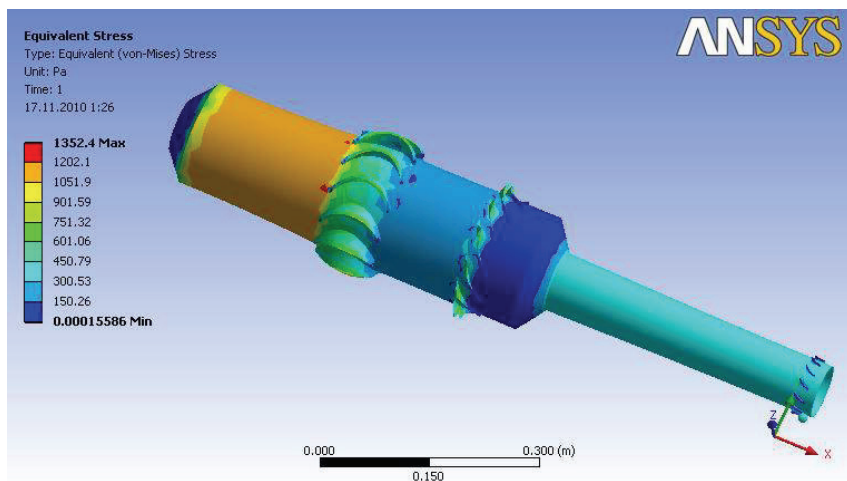


Рисунок 2 – Распределение интенсивности напряжений (по Мизесу)

Выводы. На основе полученных предварительных результатов расчета механических нагрузок в лопастях турбины при течении вязкой жидкости помощью метода конечных элементов установлено, что:

- анализ потока с использованием метода конечных элементов дает возможность получить необходимые начальные данные для последующего моделирования турбулентности и нелинейности течения вязкой жидкости;
- наибольшие нагрузки возникают на краях лопастей, с максимальной скоростью обтекания жидкостью; там же должны генерироваться и зоны турбулентности с наибольшей диссипацией энергии;
- в приведенном приближении скорость вращения турбины и нестационарность течения не были приняты во внимание. Дальнейший их учет, по всей видимости потребует увеличения толщины лопастей в критических зонах и увеличения угла их наклона по отношению к оси турбины.

Список литературы: 1. Зенкевич О.С., Тейлор Р.Л. Метод конечных элементов. – 4-е издание, 1994. 2. ANSYS Workbench. – FLUENT, ©ANSYS Inc., 2006. 3. MATLAB. Руководство пользователя. – 1998.

Поступила в редколлегию 10.10.2011.

И. А. БАГМУТ, ст. преп., НТУ «ХПИ»

НАСТРОЙКА ФИЛЬТРА КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ КОРРЕКЦИИ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В ИНТЕГРИРОВАННОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Виконано аналіз впливу налаштування фільтра Калмана на ефективність оцінювання інструментальних похибок інерціального блоку в інтегрованій навігаційній системі. На основі результатів даного аналізу сформульовані рекомендації з налаштування фільтра, що дозволяють підвищити точність і адекватність оцінювання інструментальних похибок у порівнянні з теоретичним налаштуванням. Представлені результати імітаційного моделювання, що свідчать про високу ефективність рекомендованого налаштування.

The analysis of the impact of adjustment Kalman filter for the effectiveness of estimating instrumental errors of the inertial unit in the integrated navigation system was made. The recommendations for setting up the filter, based on the results of this analysis, improving the accuracy and adequacy of the estimation of instrument errors, compared with a theoretical setting were formulated. The simulation results showing the high efficiency of the recommended settings were presented.

Выполнен анализ влияния настройки фильтра Калмана на эффективность оценивания инструментальных погрешностей инерциального блока в интегрированной навигационной системе. На основе результатов данного анализа сформулированы рекомендации по настройке фильтра, что позволяет повысить точность и адекватность оценивания инструментальных погрешностей в сравнении с теоретической настройкой. Представлены результаты имитационного моделирования, которые свидетельствуют о высокой эффективности рекомендованной настройки.

Введение. В настоящее время интегрированные инерциально-спутниковые навигационные системы (ИИСНС) являются наиболее перспективными системами, позволяющими определять навигационные и динамические параметры воздушных летательных аппаратов (ВЛА) [1]. Такие системы основаны на комплексировании информации инерциальных навигационных систем (ИНС) и измерений, поступающих от спутниковых навигационных систем (СНС). Основным математическим аппаратом, используемым для комплексирования и коррекции информации в ИИСНС, является фильтр Калмана (ФК) [2]. Составной частью метода коррекции инерциальных измерений является алгоритм оценивания инструментальных погрешностей (ИП) инерциального блока (ИБ) навигационной системы. К основным инструментальным погрешностям ИД относятся: дрейфы гироскопов (ГС), смещение нуля акселерометров (АК), погрешности масштабных коэффициентов и углы несоосности. На эффективность оценивания ИП влияет так называемая настройка ФК, которая состоит в выборе матриц интенсивностей входных и измерительных шумов системы, а также начального значения матрицы ковариаций ошибок оценивания.

В настоящее время проблема выбора рациональной настройки ФК в научной литературе практически не рассмотрена. Стоит отметить работу [3], в

которой представлены результаты исследования настройки фильтра Калмана на эффективность оценивания ИП инерциальных датчиков. Однако в этой работе использована упрощенная стационарная «одноканальная» модель ошибок инерциальной навигации, тогда как на практике, как правило, применяют более полные нестационарные модели [4].

Цель и постановка задачи. Целью данной работы является проведение анализа влияния различных вариантов настройки фильтра Калмана на эффективность оценивания инструментальных погрешностей инерциального блока ИИСНС и разработка рекомендаций по настройке фильтра.

Изложение материала. Для определенности примем, что в инерциальном блоке ИИСНС находится тройка ортогонально расположенных гироскопов и тройка ортогонально расположенных акселерометров. Оси чувствительности датчиков совпадают с осями жестко связанной с ВЛА ортогональной системой координат, в дальнейшем называемой базовой системой координат (БСК).

Модели ошибок измерений гироскопов зададим следующим образом:

$$\delta\omega_X(t) = \Delta\omega_X + \xi_X(t); \quad \delta\omega_Y(t) = \Delta\omega_Y + \xi_Y(t); \quad \delta\omega_Z(t) = \Delta\omega_Z + \xi_Z(t); \quad (1)$$

$$\Delta\omega_i = 0, \quad i \in \{X, Y, Z\},$$

где $\delta\omega_X, \delta\omega_Y, \delta\omega_Z$ – проекции ошибки измерения вектора абсолютной угловой скорости вращения ВЛА на оси БСК; $\Delta\omega_X, \Delta\omega_Y, \Delta\omega_Z$ – систематические дрейфы ГС; $\xi_X(t), \xi_Y(t), \xi_Z(t)$ – случайные составляющие ошибок измерений ГС.

Аналогичным образом зададим модели ошибок измерений акселерометров:

$$\delta a_X(t) = \Delta a_X + \zeta_X(t); \quad \delta a_Y(t) = \Delta a_Y + \zeta_Y(t); \quad \delta a_Z(t) = \Delta a_Z + \zeta_Z(t); \quad (2)$$

$$\Delta a_i = 0, \quad i \in \{X, Y, Z\},$$

где $\delta a_X, \delta a_Y, \delta a_Z$ – проекции ошибки измерения вектора кажущегося ускорения ВЛА на оси БСК; $\Delta a_X, \Delta a_Y, \Delta a_Z$ – систематические смещения нулей АК; $\zeta_X(t), \zeta_Y(t), \zeta_Z(t)$ – случайные составляющие ошибок измерений АК.

Дрейф ГС $\Delta\omega_X, \Delta\omega_Y, \Delta\omega_Z$ и смещение нуля АК $\Delta a_X, \Delta a_Y, \Delta a_Z$ считаются константами, реализуемые случайным образом из известного диапазона в каждом запуске навигационной системы.

Случайные составляющие ошибок измерений гироскопов $\bar{\xi}(t)$ и акселерометров $\bar{\zeta}(t)$ представляют собой гауссовы стационарные случайные процессы с нулевым средним и диагональной матрицей интенсивности $Q^{\xi}_{(3 \times 3)}$ для гироскопов и $Q^{\zeta}_{(3 \times 3)}$ для акселерометров.

Рассмотрим математическую модель динамического процесса функционирования системы.

Вектор состояния системы \bar{x} включает ошибки определения навигационных параметров ВЛА, вычисленные инерциальной системой, а также инструментальные погрешности инерциальных датчиков:

$$\bar{x} = (\delta\lambda \ \delta\varphi \ \delta h \ \delta v_N \ \delta v_H \ \delta v_E \ \delta\psi \ \delta\theta \ \delta\gamma \ \Delta\omega_X \ \Delta\omega_Y \ \Delta\omega_Z \ \Delta a_X \ \Delta a_Y \ \Delta a_Z)^T, \quad (3)$$

где $\delta\lambda$, $\delta\varphi$, δh – ошибки определения географической долготы λ , широты φ и высоты h ВЛА над поверхностью земного эллипсоида; δv_N , δv_H , δv_E – ошибки определения вектора относительной скорости ВЛА в проекциях на оси местной географической системы координат; $\delta\psi$, $\delta\theta$, $\delta\gamma$ – ошибки определения курса ψ , тангажа θ и крена γ ВЛА.

Измерениями системы являются ошибки определения координат и скоростей ВЛА, полученные как разность между значениями, вычисленными на основе данных СНС и данных ИНС:

$$\bar{z} = (\delta\lambda \ \delta\varphi \ \delta h \ \delta v_N \ \delta v_H \ \delta v_E)^T. \quad (4)$$

Математическая модель динамического процесса функционирования системы в дискретной форме, с учетом соотношений (1)–(4) имеет вид:

$$\bar{x}_{k+1} = \Phi_{k+1,k} \cdot \bar{x}_k + W_{k+1,k} \cdot \bar{w}_k; \quad (5)$$

$$\bar{z}_k = H \cdot \bar{x}_k + \bar{\gamma}_k, \quad (6)$$

где $\Phi_{(15 \times 15)}$ – переходная матрица системы; $W_{(15 \times 6)}$ – матрица чувствительности системы к внешним случайным воздействиям; $\bar{w}_{(6)} = (\xi_X \ \xi_Y \ \xi_Z \ \zeta_X \ \zeta_Y \ \zeta_Z)^T$ – вектор случайных воздействий с диагональной матрицей интенсивностей $Q_{(6 \times 6)} = \text{diag}(Q^{\xi}, Q^{\zeta})$; $H_{(6 \times 15)} = \begin{bmatrix} I_{(6 \times 6)} & 0_{(6 \times 9)} \end{bmatrix}$ – матрица связи, I – единичная матрица; $\bar{\gamma}_{(6)}$ – вектор случайных шумов измерений системы, представляющий собой гауссов случайный процесс с нулевым средним и диагональной матрицей интенсивностей $R_{(6 \times 6)}$.

Переходная матрица системы Φ вычисляется на основе соотношения

$$\Phi_{k+1,k} = I + \Delta t \cdot A_{k+1}, \quad (7)$$

где Δt – период обновления выходных данных инерциальных датчиков (в качестве базового принят равный 0,01 сек); $A_{(15 \times 15)}$ – матрица задающая динамику системы.

Первые девять строк матрицы A представляют собой соответствующие коэффициенты при компонентах вектора \bar{x} , взятых из правых частей уравнений полной нестационарной модели ошибок инерциальной навигации [4]. Остальные 6 строк данной матрицы нулевые, так как инструментальные погрешности инерциальных датчиков считаются константами.

Комплексирование и коррекция информации в системе реализуется по следующему алгоритму:

- 1) Вычисление переходной матрицы Φ .
- 2) Вычисление матрицы чувствительности системы по внешним случайным воздействиям W :

$$W_{k+1,k} = \Delta t \cdot \left. \frac{df}{d\bar{w}} \right|_{t=t_{k+1}},$$

где f – функциональная зависимость, представляющая алгоритм «идеальной работы» ИНС [4];

3) Вычисление априорного значения вектора состояния \hat{x}_{k+1}^- :

$$\hat{x}_{k+1}^- = \Phi_{k+1,k} \cdot \hat{x}_k^+,$$

где \hat{x}_k^+ – апостериорное значение вектора состояния.

4) Вычисление априорной ковариационной матрицы ошибок оценивания P_{k+1}^- :

$$P_{k+1}^- = \Phi_{k+1,k} \cdot P_k^+ \cdot \Phi_{k+1,k}^T + W_{k+1,k} \cdot Q \cdot W_{k+1,k}^T,$$

5) При наличии обновленных данных от приемника СНС (в качестве базового принят интервал обновления равный 1 сек), вычисляются апостериорные значения вектора состояния и ковариационной матрицы ошибок:

$$K = P_{k+1}^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_{k+1}^- \cdot H^T + R)^{-1};$$

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^- + K \cdot (\bar{z}_{k+1} - H \cdot \hat{x}_{k+1}^-);$$

$$P_{k+1}^+ = (I - K \cdot H) \cdot P_{k+1}^-,$$

иначе апостериорные значения вектора состояния и ковариационной матрицы ошибок принимаются равными априорным:

$$\hat{x}_{k+1}^+ = \hat{x}_{k+1}^-, \quad P_{k+1}^+ = P_{k+1}^-.$$

Следует отметить, что фильтр Калмана является оптимальным в смысле минимума суммы квадратов математических ожиданий ошибок оценки вектора состояния системы при условии, что вектор случайных воздействий w и помехи измерений \bar{v} являются некоррелированными и представляют собой гауссовский белый шум [5]. Однако на практике, случайные шумы присутствующие в измерениях инерциальных датчиков и приемника СНС не являются белыми, что является особенностью применения фильтра Калмана в задаче коррекции инерциальных измерений в ИИСНС.

Для исследования влияния настройки фильтра Калмана на эффективность оценивания ИП введем критерии эффективности.

Под эффективностью оценивания будем понимать сходимость ошибок вырабатываемых фильтром оценок значений ИП к нулю. Данный критерий будем называть прямым. Однако таким критерием можно пользоваться только в условиях моделирования, когда известны истинные значения инструментальных погрешностей. Поскольку алгоритмы оценивания являются неотъемлемой частью программно-математического обеспечения ИИСНС, необходимо также сформулировать критерии эффективности, построенные на основе имеющейся в системе информации. Такие критерии будем называть косвенными. Основным косвенным критерием можно считать сходимость оценок среднего квадратичного отклонения (СКО), полученного в ковариационном блоке ФК, к некоторым значениям. Для того, чтобы пользоваться

таким критерием, необходимо показать его адекватность, под которой понимается соответствие оценочного СКО фактической ошибке оценивания. Для оценки адекватности воспользуемся характеристикой адекватности $K_{2\sigma}$ [3], суть которой – доля фактических ошибок оценивания вектора состояния, не превысивших удвоенное оценочное СКО на всем промежутке времени функционирования системы. Очевидно, что адекватность такого критерия зависит от настройки фильтра.

Для анализа влияния настройки фильтра Калмана на адекватность и эффективность оценивания инструментальных погрешностей инерциального блока навигационной системы выполнен численный эксперимент. Стратегия проведения эксперимента заключается в проведении компьютерного моделирования функционирования ИИСНС при использовании различных вариантов настройки ФК отличных от «теоретической», то есть соответствующей характеристикам фактически действующих шумов в системе, а также фактическим интервалам неопределенности исходных значений оцениваемых параметров. В процессе моделирования вычисляется значение характеристики адекватности $K_{2\sigma}$ и усредненное значение СКО оценки компоненты вектора состояния $\bar{\sigma}$. Очевидно, чем меньше значение данной величины при высоком значении характеристики $K_{2\sigma}$, тем выше эффективность оценивания.

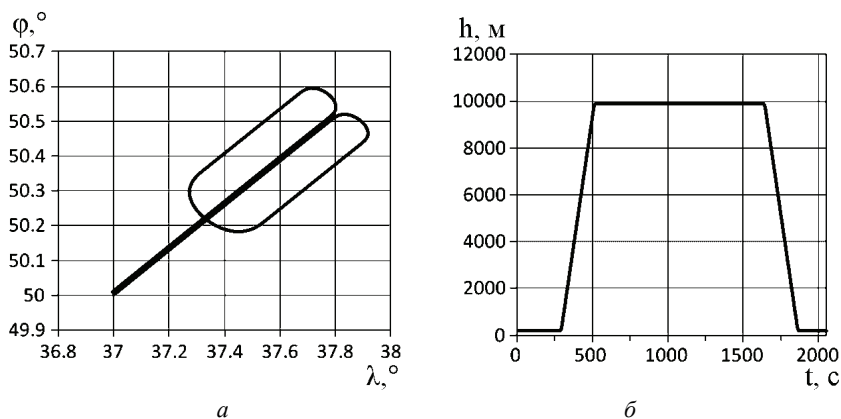


Рисунок 1 – Горизонтальная траектория (а) и высотный профиль (б) движения ВЛА

Эксперимент проведен в три этапа. На каждом этапе значение одной из матриц P , Q и R менялось в диапазоне от 5 % до 200 % от теоретического, а значения остальных двух матриц соответствовали их теоретическим значениям. Так на первом этапе в каждом запуске значения матриц Q и R соответствовали фактически действующим шумам, а начальное значение матрицы P менялось в указанном диапазоне. На втором этапе изменялось значение матрицы Q , а на третьем этапе – значение матрицы R . Моделирование проводилось для программы полета, синтезированной с помощью имитационной мо-

дели движения [6]. Длительность полета – 2050 с. Горизонтальная траектория и высотный профиль движения ВЛА представлены на рис. 1.

При моделировании истинные значения дрейфа гироскопов задавались на уровне 1 град/час, смещения акселерометров $0,001 \text{ м/с}^2$, интенсивности шумов гироскопов на уровне 1 (град/час)², интенсивности шумов акселерометров на уровне $10^{-6} (\text{м/с}^2)^2$.

Результаты моделирования представлены на рис. 2-4.

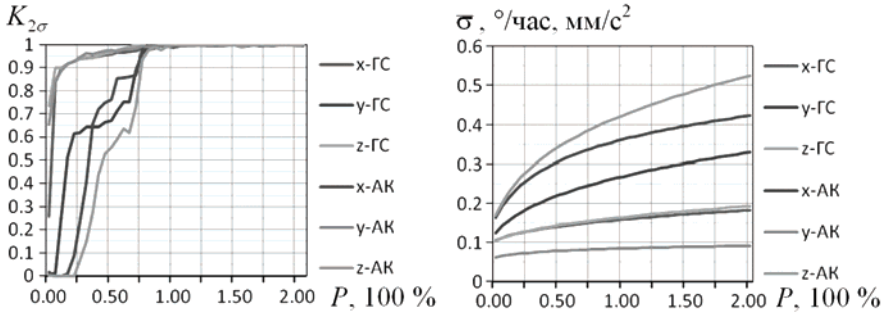


Рисунок 2 – Зависимость характеристики адекватности $K_{2\sigma}$ и усредненного оценочного СКО ИП $\bar{\sigma}$ от матрицы P

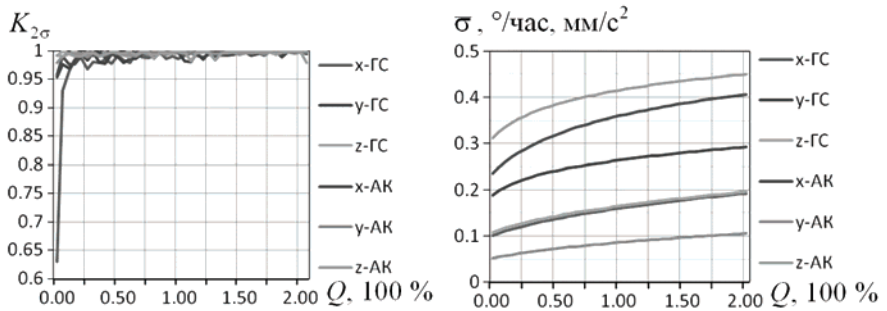


Рисунок 3 – Зависимость характеристики адекватности $K_{2\sigma}$ и усредненного оценочного СКО ИП $\bar{\sigma}$ от матрицы Q

Как видно из графиков, с увеличением значения матриц P , Q и R растет значение характеристики $K_{2\sigma}$, то есть повышается адекватность критерия. При значении матриц P , Q и R , равным «теоретическим» и более, значение данной характеристики превышает 0,95. Таким образом, выбранный критерий эффективности оценивания – сходимость СКО, является адекватным, и доступным для практического использования. С увеличением значения указанных матриц практически неограниченно растут значения усредненных СКО ошибок оценивания, что, является негативным фактором, так как в этом случае снижается точность вырабатываемых фильтром оценок.

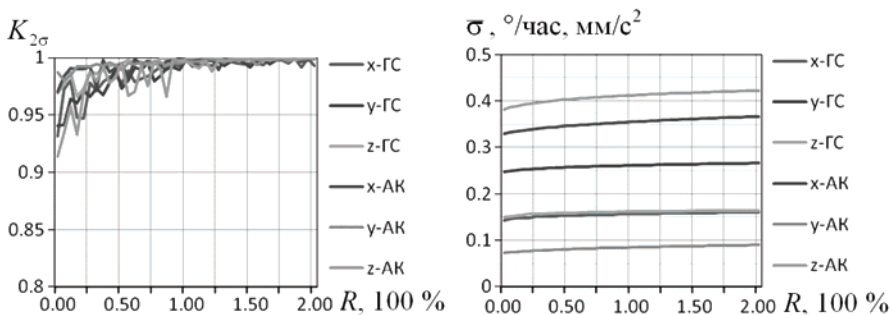


Рисунок 4 – Зависимость характеристики адекватности $K_{2\sigma}$ и усредненного оценочного СКО ИП $\bar{\sigma}$ от матрицы R

На основе приведенных результатов, а также результатов, полученных при дальнейшем исследовании рассматриваемой проблемы, можно сделать следующие рекомендации по настройке фильтра Калмана:

- 1) Оптимальным является выбор «теоретического» начального значения матрицы P . В этом случае обеспечивается высокая адекватность оценивания.
- 2) Значение матрицы Q целесообразно занизить в 8 раз. При этом уменьшатся ошибки оценивания без снижения адекватности оценок.
- 3) Значение матрицы R целесообразно завысить в 10 раз. Точность оценивания уменьшится незначительно, тогда, как адекватность повысится.

В дальнейшем такая настройка фильтра называется «рекомендуемой».

Следует отметить, что приведенные рекомендации справедливы и для результатов моделирования, полученных на основе моделирования других программ полета, и согласуются с результатами работы [3].

Представляет практический интерес сравнить точность функционирования ИИСНС в автономном режиме (при отсутствии коррекции ИНС по данным СНС) при использовании теоретической и рекомендуемой настройки фильтра Калмана. В качестве интегральной ошибки функционирования воспользуемся координатной радиальной ошибкой:

$$\delta r = \sqrt{(r_{x2} - r_{x1})^2 + (r_{y2} - r_{y1})^2 + (r_{z2} - r_{z1})^2},$$

где r_{x1} , r_{y1} , r_{z1} – проекции истинного радиус-вектора ВЛА на оси геоцентрической неподвижной декартовой СК, вычисленные в имитационной модели движения; r_{x2} , r_{y2} , r_{z2} – проекции радиус-вектора ВЛА, вычисленные по алгоритмам инерциальной навигации с коррекцией по высоте.

На рис. 5 представлена горизонтальная траектория полета ВЛА, на основе которой было выполнено имитационное моделирование работы ИИСНС в интегрированном режиме с временным отсутствием спутниковых сигналов с использованием теоретической и рекомендуемой настройки ФК. Результаты моделирования представлены на рис. 6-8.

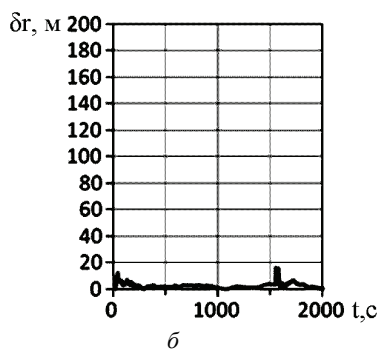
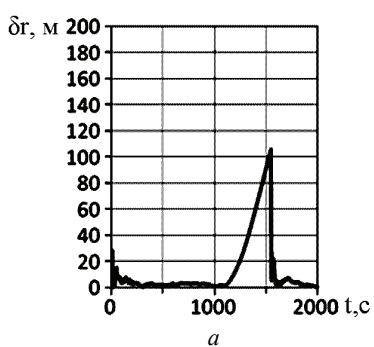
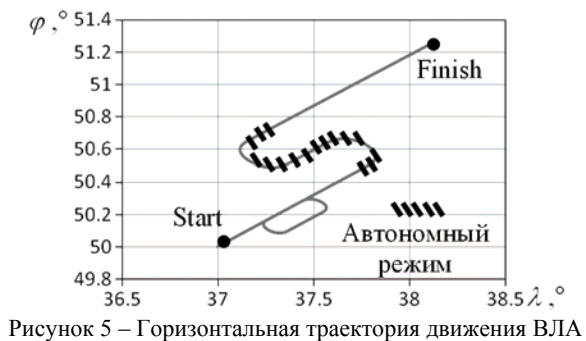


Рисунок 6 – Координатная радиальная ошибка при теоретической (а) и рекомендуемой (б) настройках фильтра Калмана

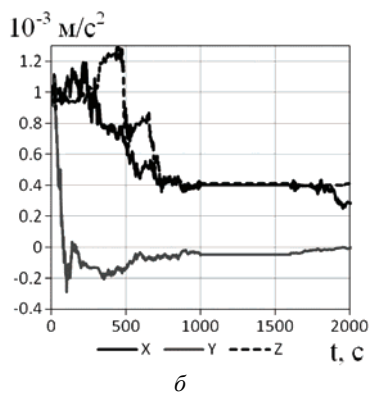
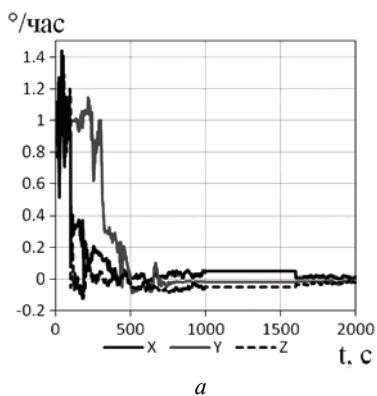


Рисунок 7 – Ошибки оценивания дрейфа ГС (а) и смещения нуля АК (б), при использовании теоретической настройки ФК

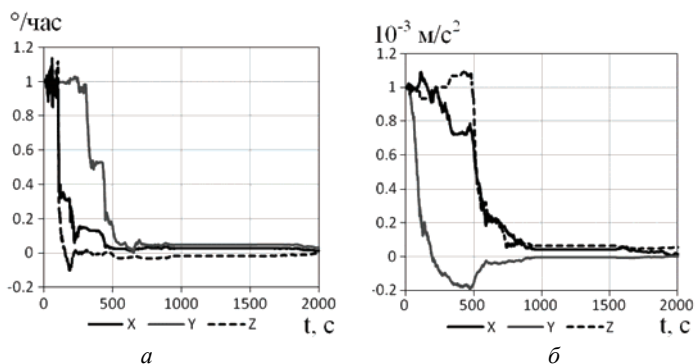


Рисунок 8 – Ошибки оценивания дрейфа ГС (а) и смещения нуля АК (б), при использовании рекомендуемой настройки ФК

Как видно (см. рис. 6), использование рекомендуемой настройки фильтра Калмана по сравнению с теоретической позволяет снизить ошибку навигации практически на 80 %. Снижение координатной ошибки в автономном режиме обусловлено более эффективным оцениванием и коррекцией инструментальных погрешностей в интегрированном режиме (см. рис. 7, 8).

Выводы. Установлено, что рекомендуемая в работе настройка фильтра Калмана по сравнению с теоретической повышает эффективность коррекции инерциальных измерений в ИИСНС. Полученные результаты можно использовать при разработке и усовершенствовании программно-математического обеспечения интегрированных инерциально-спутниковых навигационных систем.

Список литературы: 1. Кушельман В. Я. Будущее точной навигации – за интегрированными системами / В. Я. Кушельман, А. А. Фомичев // АвиаСоюз. – 2005. – Июнь-июль, №3(5).– С. 50-53. 2. Степанов О. А. Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации / О.А. Степанов // Гирскопия и навигация. – 2002. – № 1 (36). – С. 23-45. 3. Успенский В. Б. Настройка фильтра Калмана в задаче комплексирования информации в интегрированной навигационной системе / В. Б. Успенский, А. Д. Асютин // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – № 67. – С. 51-57. 4. Багмут И. А. Наблюдаемость инструментальных погрешностей инерциального блока в интегрированной навигационной системе / И. А. Багмут // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – № 23. – С. 3-14. 5. Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства / Кузовков Н. Т. – М., «Машиностроение», 1976. – 184 с. 6. Брославец Ю. Ю. Имитационная модель движения летательного аппарата / Ю. Ю. Брославец, А. А. Фомичев, А. Б. Колчев [и др.] // Материалы IX Санкт-Петербургской между. конф. по интегрированным навигационным системам. – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электронприбор», 2002. – С. 107-109.

Поступила в редколлегию 10.06.2011

Д.В.ДАНИЛОВ, студент, НТУ «ХПИ»;

А.Г.АНДРЕЕВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОФИЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАГРУЗОК ПРИ ВРАЩЕНИИ

Предметом дослідження в даній роботі є порівняльний аналіз різноманітних варіантів реалізації з'єднань з натягом, що знаходяться під дією відцентрових зусиль при обертанні. Метою роботи є виявлення критичних швидкостей обертання деталей, сполучених між собою та, на основі цих даних, визначення оптимального варіанту з'єднання.

In the given work the object of research is a comparative analysis of various variants of implementation pressure coupling which are under the influence of centrifugal forces during rotation. The work purpose is revealing of breakdown rotational velocity of the details connected among themselves and, on the basis of these data, determination of optimal variant of connection.

Предметом исследования в данной работе является сравнительный анализ различных вариантов реализации соединений с натягом, которые находятся под действием центробежных усилий при вращении. Целью работы является выявление критических скоростей вращения деталей, соединенных между собой и, на основе этих данных, определения оптимального варианта соединения.

Вступлення. Соединение с натягом является одним из наиболее распространенных в строительстве и машиностроении напряженных соединений, в ряде случаев замещающих болтовые и заклепочные соединения, частично шпоночные и шлицевые. Основной целью данного исследования является сравнительный анализ разнообразных, наиболее распространенных в инженерной практике вариантов реализации профильных соединений с натягом, которые находятся под действием центробежных нагрузок при вращении.

Постановка задачі. В данной работе проводится исследование 15 вариантов профильных соединений с натягом, цель которого – нахождение критических скоростей вращения деталей, соединенных между собой. Критическими скоростями вращения считаются такие, которые приводят к исчезновению контактного давления между соединенными деталями или вызывают пластические деформации в зоне контакта. Оба последствия являются опасными с точки зрения надежности соединения деталей, поэтому изучение этой проблемы является актуальным. Варианты профильных соединений изображены на рис. 1-15. Геометрические размеры приведены в табл. 1, характеристики материала – в табл. 2.

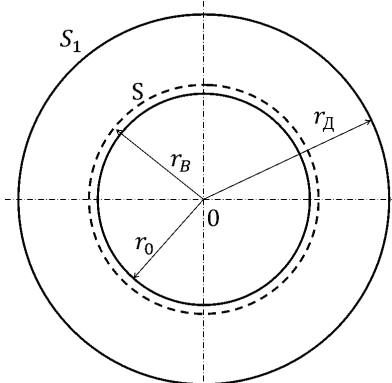


Рисунок 1 – Первый вариант

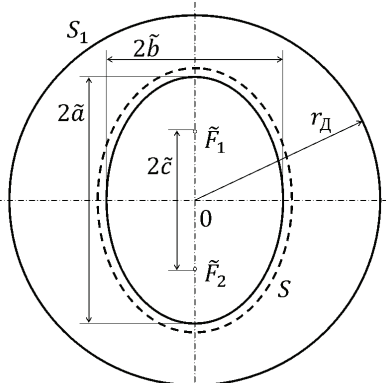


Рисунок 2 – Второй вариант

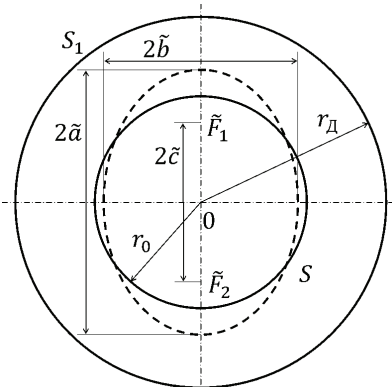


Рисунок 3 – Третий вариант

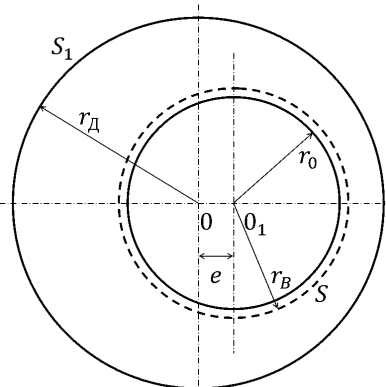


Рисунок 4 – Четвертый вариант

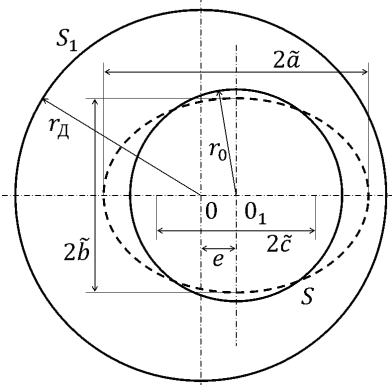


Рисунок 5 – Пятый вариант

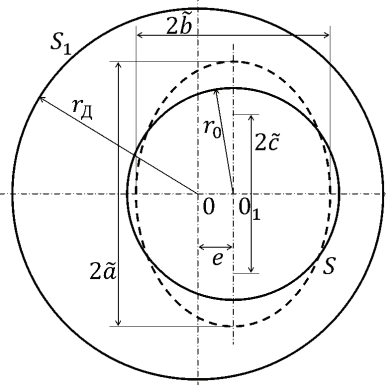


Рисунок 6 – Шестой вариант

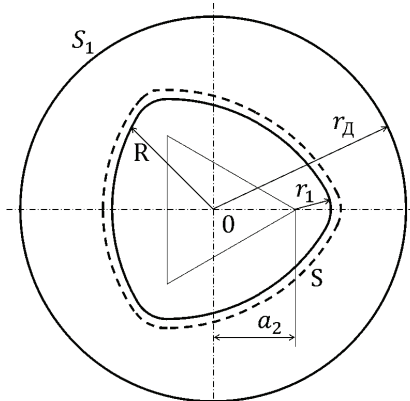


Рисунок 7 – Седьмой вариант

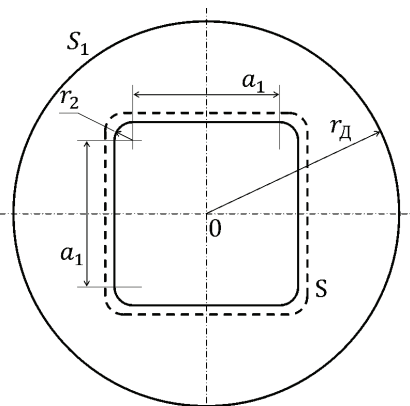


Рисунок 8 – Восьмой вариант

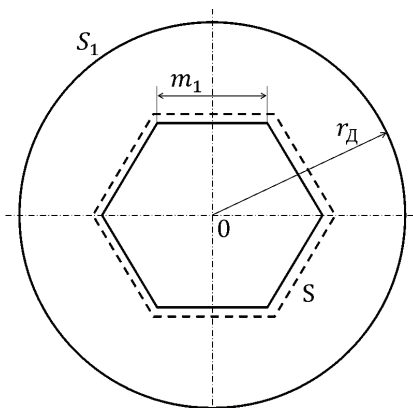


Рисунок 9 – Девятый вариант

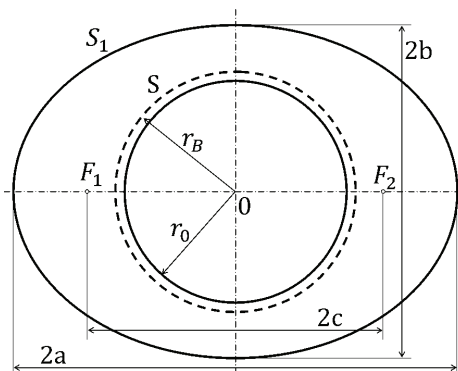


Рисунок 10 – Десятый вариант

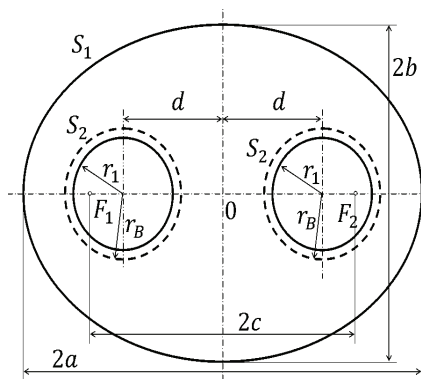


Рисунок 11 – Одиннадцатый вариант

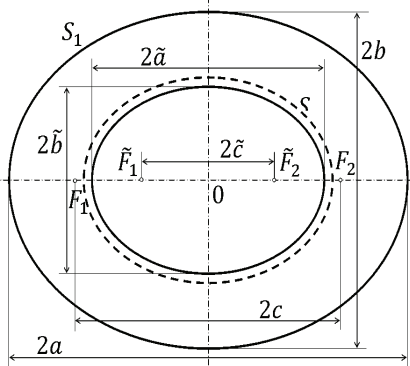


Рисунок 12 – Двенадцатый вариант

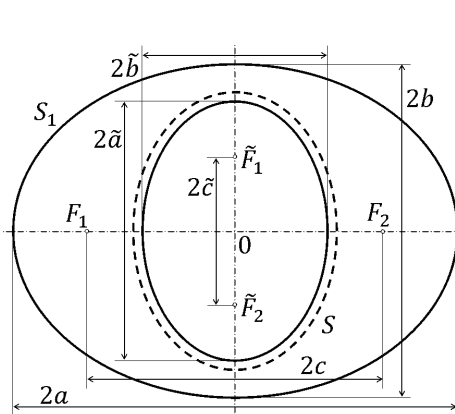


Рисунок 13 – Тринадцатый вариант

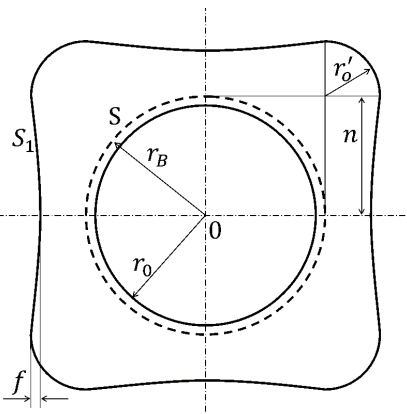


Рисунок 14 – Четырнадцатый вариант

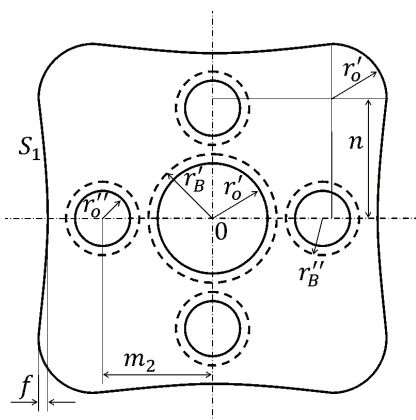


Рисунок 15 – Пятнадцатый вариант

Для сравнительного анализа профильных соединений придерживались следующих условий: во всех видах соединений предполагалось равенство внешних периметров втулок S_1 , равенство периметров посадочных поверхностей $2S_2$ и S , равенство усредненных значений величин натяга $\delta = 0,12$ мм.

Профильные соединения характеризуются достаточно равномерным распределением напряжений по периметру зоны сопряжения вала и втулки, что позволяет рассматривать НДС такого соединения как плоское напряженное состояние.

В ходе работы с целью минимизации времени проведения одного расчета по возможности рассматривалась наименьшая представительская часть симметричной конструкции с применением граничных условий симметричного закрепления.

Таблица 1 – Геометрические размеры профильных соединений с натягом

Название геометрического параметра, мм	Значение
Радиус большого круглого отверстия r_0	62
Внешний радиус круглой втулки r_d	110
Периметр зоны контакта $S = 2S_2$	390
Внешний периметр втулки S_1	691
Большая полуось большого эллипса (втулки) a	122
Малая полуось большого эллипса (втулки) b	97
Расстояние от центра большого эллипса (втулки) до фокуса c	74
Большая полуось малого эллипса (вала) \tilde{a}	69
Малая полуось малого эллипса (вала) \tilde{b}	55
Расстояние от центра малого эллипса (вала) до фокуса \tilde{c}	42
Величина эксцентриситета e	20
Расстояние от центра до вершин вспомогательного треугольника a_2	48
Большой радиус криволинейного треугольника R	102
Малый радиус криволинейного треугольника r_1	18
Малый радиус криволинейного квадрата (вала) r_2	14
Длина прямой стороны криволинейного квадрата (вала) a_1	75
Длина стороны шестиугольника m_1	65
Радиус среднего круглого отверстия $r_1 = r'_1$	30
Расстояние от центра большого эллипса (втулки) до центра среднего отверстия d	60
Большой радиус криволинейного квадрата (втулки) r'_0	30
Величина прогиба криволинейного квадрата (втулки) f	5
Длина изогнутой стороны криволинейного квадрата (втулки) n	63
Радиус малого круглого отверстия r''_0	20
Расстояние от центра криволинейного квадрата (втулки) до центра малого отверстия m_2	60

Таблица 2 – Характеристики материала

Название физического параметра	Значение для стали 40Х
Модуль Юнга E , МПа	$2,1 \cdot 10^5$
Коэффициент Пуассона ν	0,3
Плотность ρ , кг/м ³	7800
Коэффициент теплового расширения α , К ⁻¹	$11,7 \cdot 10^{-6}$
Предел текучести σ_T , МПа	785
Предел прочности σ_B , МПа	980
Коэффициент трения μ	0,15

1. Теоретические основы МКЭ для расчета НДС профильных соединений с натягом, реализованных в ПК ANSYS. Поставленная задача моделировалась с помощью МКЭ в ПК ANSYS. Для решения проблемы использовался стандартный конечный элемент программного пакета – плоский восьмиузловой прямоугольный элемент, PLANE 82, который имеет две степени свободы в каждом узле. Реализация контактной деформируемой поверхности (для двумерной постановки задачи) требует создания на этой поверхности контактных элементов CONTA172 и целевых элементов TARGE 169, отвечающих первым. Решение задачи МКЭ приводит к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (1)$$

где $[\mathbf{K}]$ – матрица жесткости тела, состоящая из матриц жесткости конечных элементов, $\{\mathbf{U}\}$ – вектор-столбец узловых перемещений, $\{\mathbf{F}\}$ – вектор приведенной внешней нагрузки.

2. Полученные результаты и их анализ. В результате исследования были получены значения критических скоростей вращения 15-ти вариантов соединений, находящихся под действием центробежных нагрузок. Ниже представлены полученные результаты в виде табл. 3 и групп рисунков, расшифровка нумерации которых приведена в этой же таблице.

Таблица 3 – Основные результаты исследования

№ Варианта профильного соединения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Значение критической скорости вращения ω , [рад/с]	1613	2336	730	584	554	556	2075	1870	1827	2342	2495	1994	1999	1610	2005
Характеристики НДС	№ рисунков														
Суммарные перемещения	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	49	46	52	55	58
Эквивалентные напряжения	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56	59
Контактное давление	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60

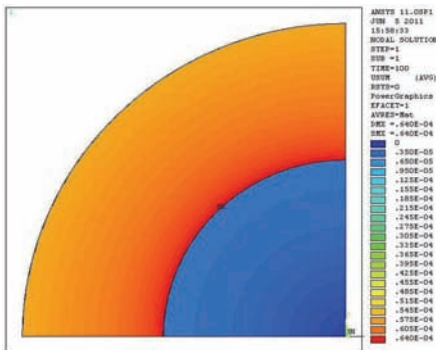


Рисунок 16

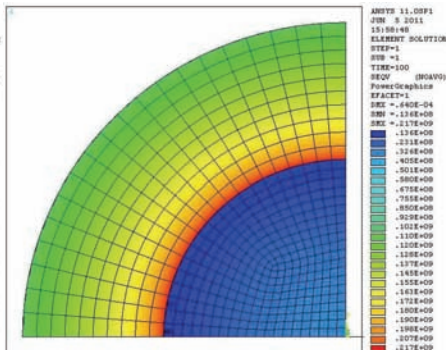


Рисунок 17

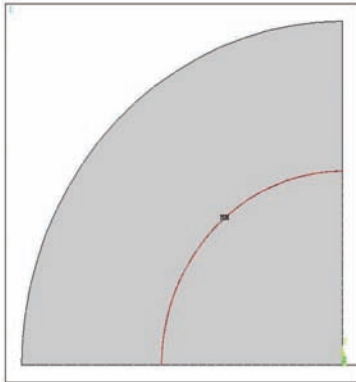


Рисунок 18

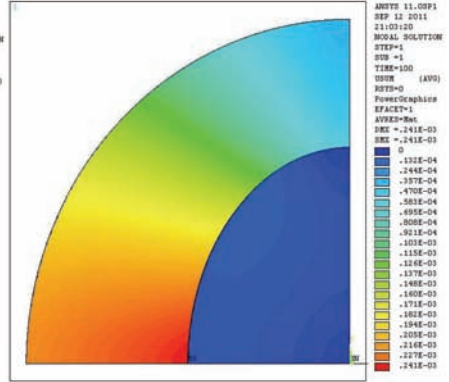


Рисунок 19

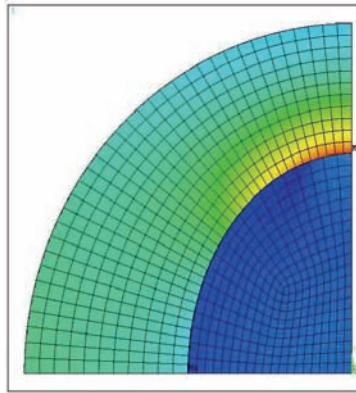


Рисунок 20

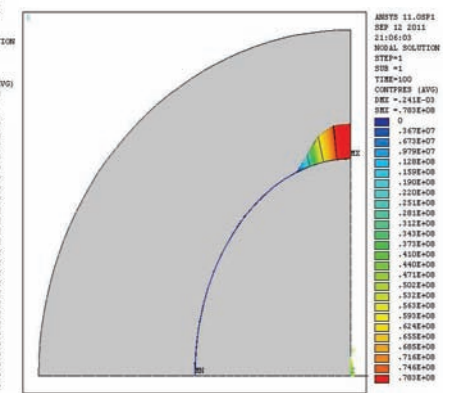


Рисунок 21

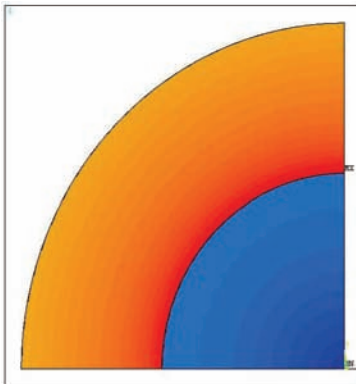


Рисунок 22

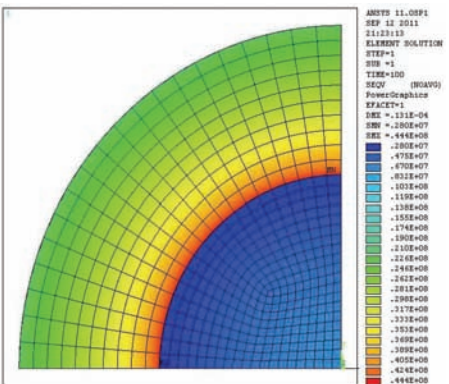


Рисунок 23

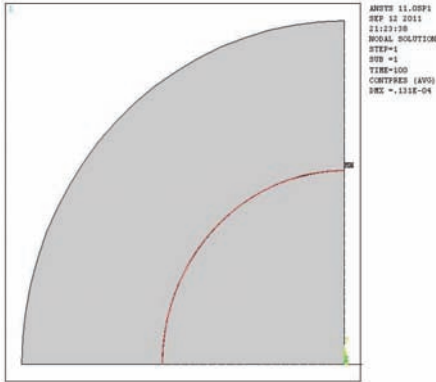


Рисунок 24

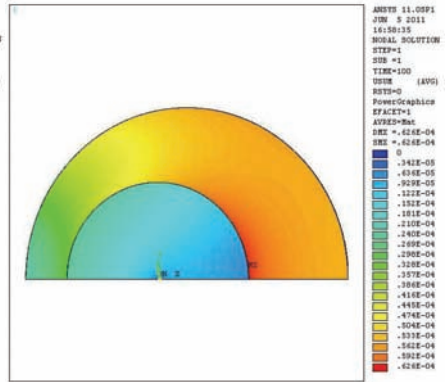


Рисунок 25

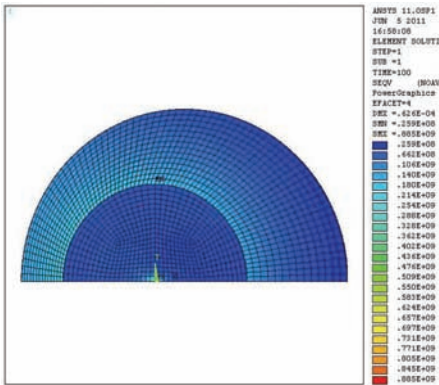


Рисунок 26

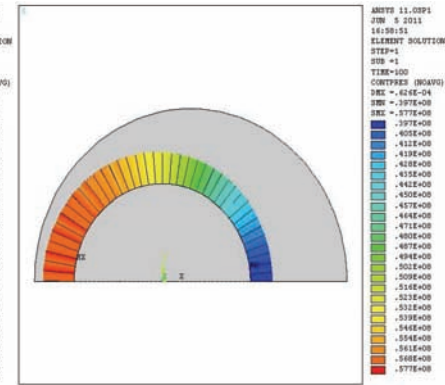


Рисунок 27

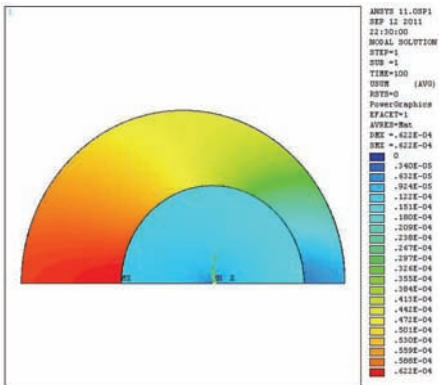


Рисунок 28

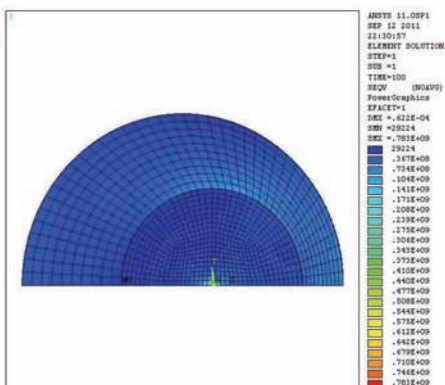


Рисунок 29

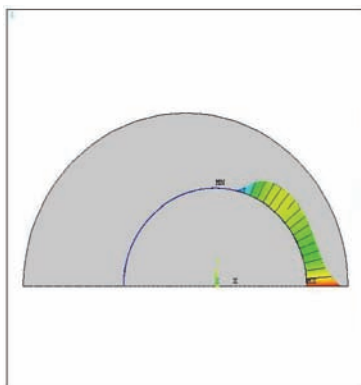


Рисунок 30

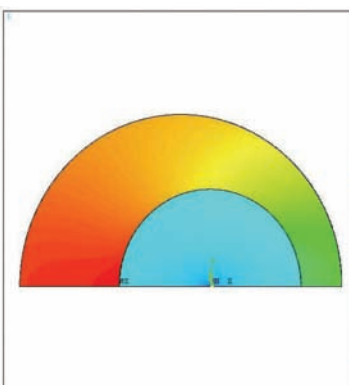


Рисунок 31

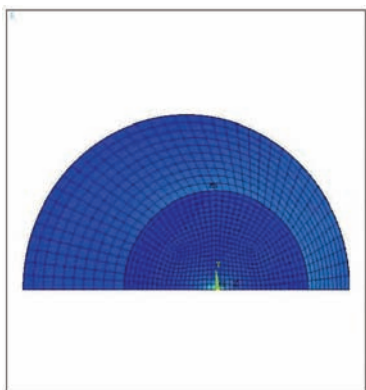


Рисунок 32

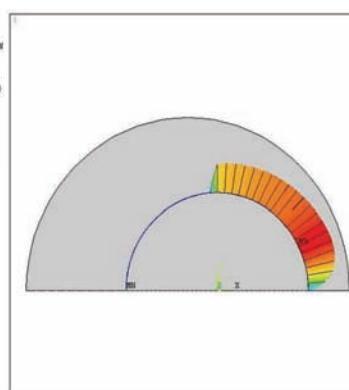


Рисунок 33

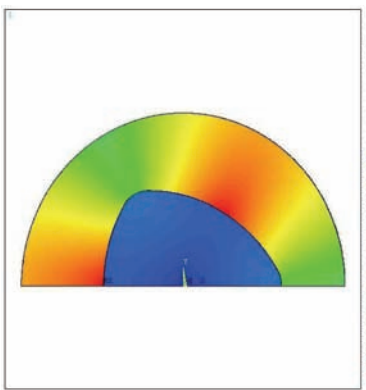


Рисунок 34

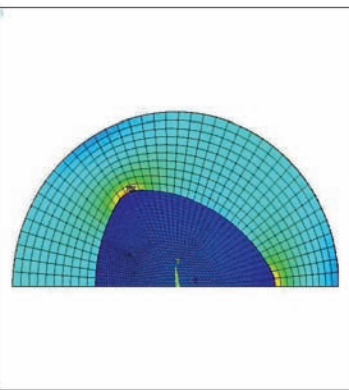


Рисунок 35

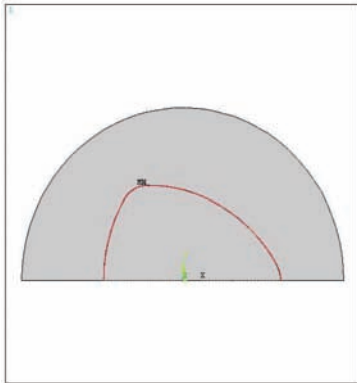


Рисунок 36

```

ANSYS 11.0PP1
JUN  5 2011
17:04:13
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=100
CONTINUED (NOAVG)
DEK = -1.05E-03
  
```

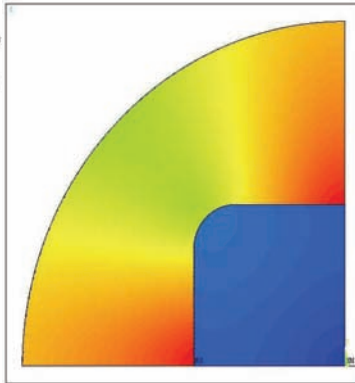


Рисунок 37

```

ANSYS 11.0PP1
SEP 12 2011
22:45:03
MOGAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=100
USDR (AVG)
POST=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Max
DEK = -1.05E-03
DEK = -1.05E-03
  
```

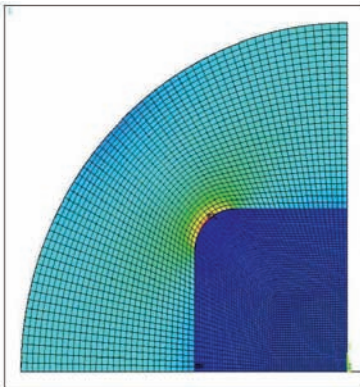


Рисунок 38

```

ANSYS 11.0PP1
SEP 12 2011
22:46:01
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=100
SEQV (NOAVG)
PowerGraphics
EFACET=1
DEK = -1.05E-03
  
```

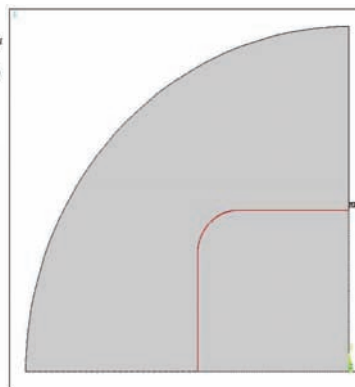


Рисунок 39

```

ANSYS 11.0PP1
SEP 12 2011
22:46:15
MOGAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=100
CONTINUED (AVG)
DEK = -1.05E-03
  
```

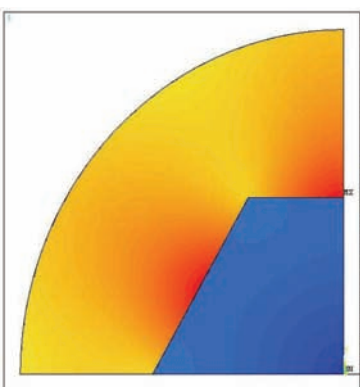


Рисунок 40

```

ANSYS 11.0PP1
SEP 12 2011
22:50:40
MOGAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=100
USDR (AVG)
POST=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Max
DEK = -0.67E-04
  
```

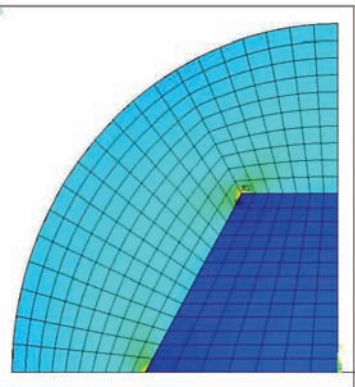


Рисунок 41

```

ANSYS 11.0PP1
SEP 12 2011
22:50:17
ELEMENT SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=100
SEQV (NOAVG)
PowerGraphics
EFACET=1
DEK = -1.00E+07
DEK = -1.00E+07
DEK = -7.09E+09
  
```

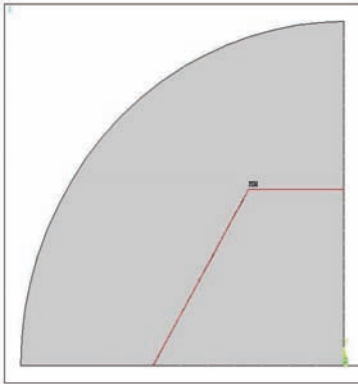



Рисунок 42

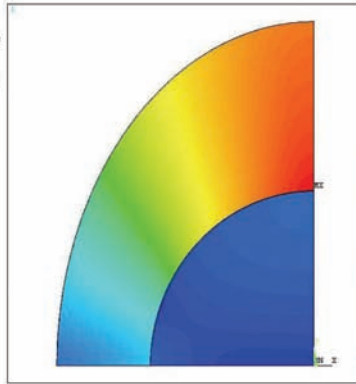


Рисунок 43

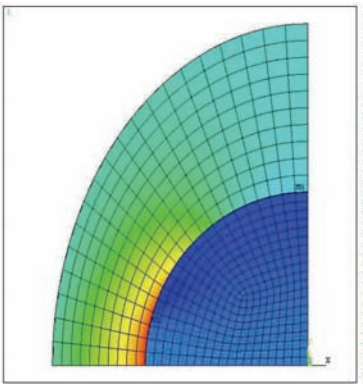


Рисунок 44

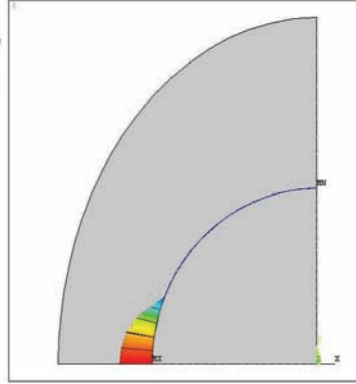


Рисунок 45

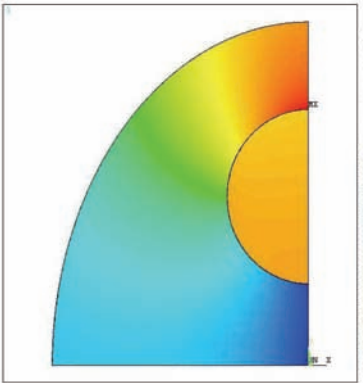


Рисунок 46

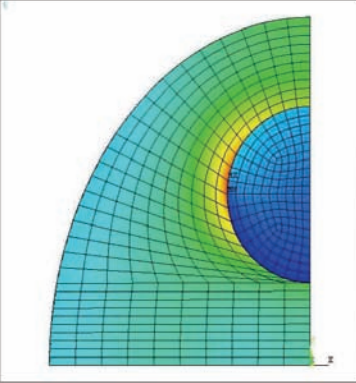


Рисунок 47

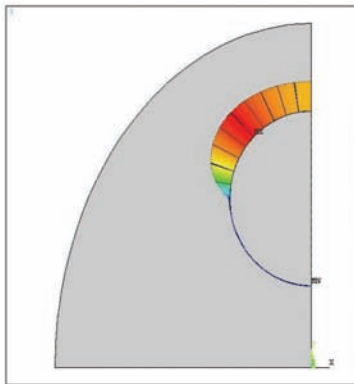


Рисунок 48

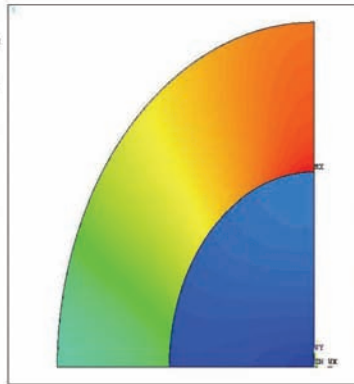


Рисунок 49

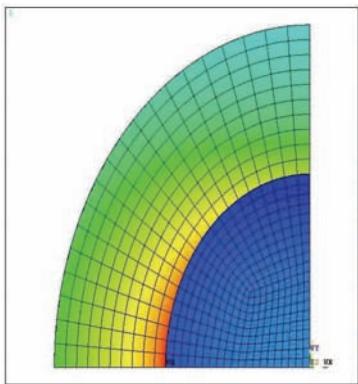


Рисунок 50

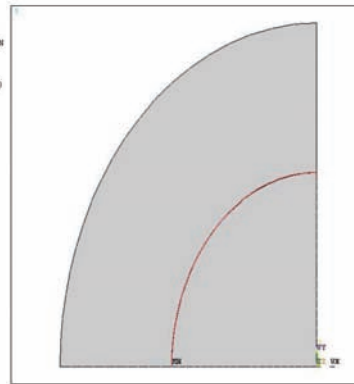


Рисунок 51

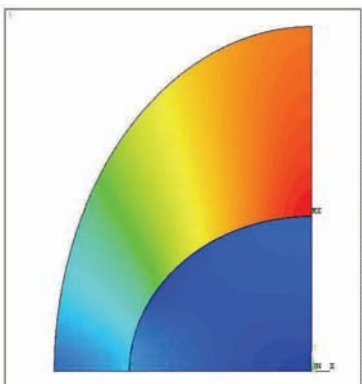


Рисунок 52

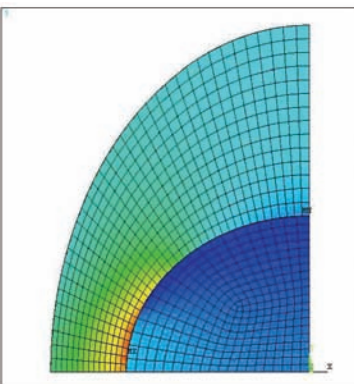


Рисунок 53

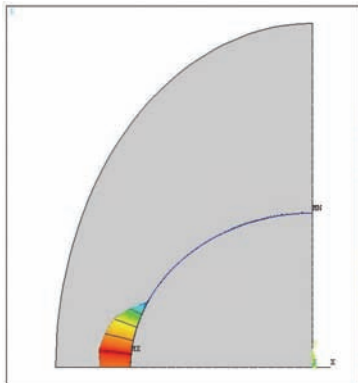


Рисунок 54

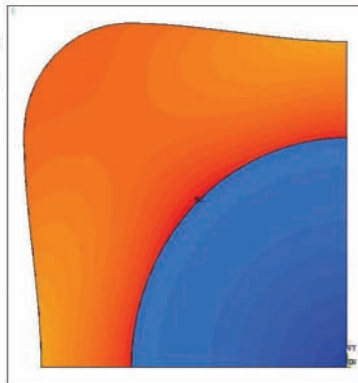


Рисунок 55

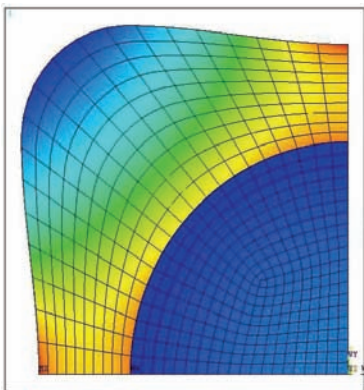


Рисунок 56

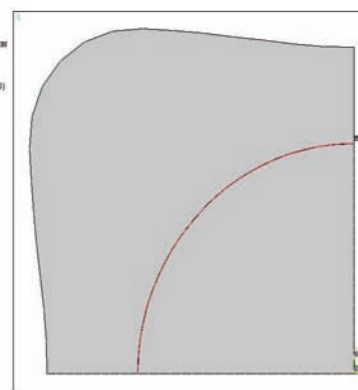


Рисунок 57

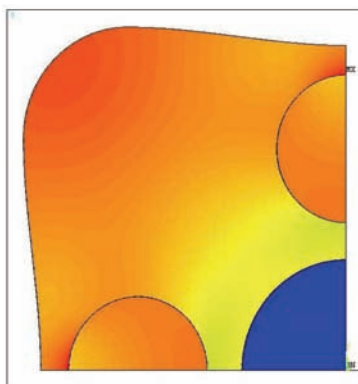


Рисунок 58

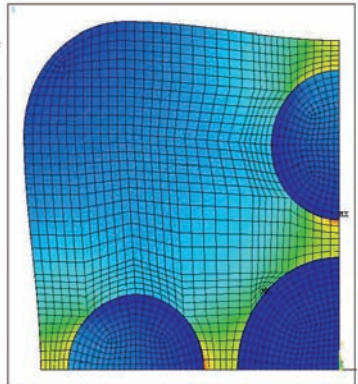


Рисунок 59

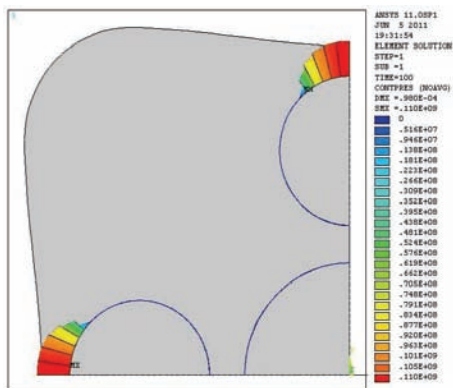


Рисунок 60

Выводы. В результате исследования были найдены значения критических скоростей вращения 15-ти вариантов профильных соединений с натягом. На основе этих данных проведен сравнительный анализ, который показал, что критические скорости вращения располагались двумя группами, первая из которых в интервале 554 – 730 рад./с. (варианты 3, 4, 5, 6) включает соединения с переменной величиной натяга по линии контакта и эксцентричное соединение. Вторая группа в интервале 1613 – 2495 рад./с. (варианты 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) включает соединения с постоянной величиной натяга по линии контакта. Максимально полученная критическая скорость вращения 2495 рад./с. (вариант 11), соответственно, соединение вала с втулкой в этом случае является наиболее надежным с точки зрения влияния центробежных нагрузок.

Список литературы: 1. Тарабасов Н. Д. Расчет напряженных посадок в машиностроении. – М.: Машгиз, 1961. – 264 с. 2. Берникер Е. И. Посадка с натягом в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1968. – 168 с. 3. Басов К. А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.

Поступила в редколлегию 27.10.2011

В.А. ЖОВДАК, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;
Л.Ф. ТАРАСОВА, науч. сотр., НТУ «ХПИ»

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Запропоновано методику прогнозування надійності елементів конструкцій на основі використання кінетичних рівнянь для опису міри пошкодження і математичного апарату теорії марковських процесів. У результаті визначаються найбільш інформаційні показники залишкового ресурсу – ймовірність безвідмовної роботи й щільність імовірності відмовлень.

The approach of the construction element's reliability prediction, based on the use of kinetic equations for description of the measure of damage and the mathematical tool for Markoff's process theory is proposed. As the result, the most informative reliability characteristics, such as no-failure operation probability and probability density of failures, are determined.

В данной работе предлагается подход к прогнозированию надежности элементов конструкций при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Рассмотрены примеры решения задачи для линейной и автомодельной моделей накопления повреждений.

Постановка задачи. Предполагается, что процесс нагружения $y(t)$ является узкополосным случайным процессом с огибающей $\lambda(t)$ и несущей частотой ω .

Введем меру накопления повреждений $z(t)$ в элементах конструкций при случайном воздействии и постепенных отказах, происходящих в результате накопления различного рода повреждений. Для нахождения текущего значения $z(t)$ используется кинетическое уравнение повреждаемости (КУП) в виде [1, 2]

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z(t), \lambda(t), y_m, R(t)], \quad (1)$$

здесь $z(t)$ – мера повреждений, $F[\dots]$ – детерминированная функция, $\lambda(t)$ – амплитудное значение параметров напряженно-деформированного состояния при гармоническом нагружении, y_m – среднее значение, $R(t)$ – вектор характеристик конструкционной прочности.

Для элементов машиностроительных конструкций, в которых имеет место случайное нагружение и постепенные отказы различной физической природы, можно записать кинетические уравнения соответственно для меры повреждений $z(t)$ и уравнения фильтра для определяющего эти уравнения параметра $\lambda(t)$

$$\begin{cases} dz(t)/dt = F[z(t), \lambda(t), R(t)]; \\ d\lambda(t)/dt = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)n(t), \end{cases} \quad (2)$$

здесь где $n(t)$ – нормальный белый шум, $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ – детерминированные функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Рассматривая совместно уравнения (2), можно утверждать, что $[z(t), \lambda(t)]$ будет представлять двумерный марковский процесс, одномерная плотность вероятности которого $f(z, \lambda, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [7].

$$\frac{\partial f(\lambda, z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda}[A_1(\lambda)f(\lambda, z, t)] - \frac{\partial}{\partial z}[A_2(\lambda, z)f(\lambda, z, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}[B(\lambda)f(\lambda, z, t)]. \quad (3)$$

Граничные и начальные условия для уравнения (3) формулируются исходя из физической сущности задачи и общих свойств плотности вероятности [8]:

– граничные условия:

$$\lim_{z, \lambda \rightarrow 0, \infty} f(z, \lambda, t) = 0; \quad (4)$$

– начальные условия:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(z, \lambda, t) = f_0(z)f_0(\lambda), \quad (5)$$

здесь $f_0(z), f_0(\lambda)$ – соответственно начальное значение плотности меры повреждений и плотность вероятности огибающей.

В соответствии с общей теорией марковских процессов существует взаимнооднозначное соответствие между коэффициентами уравнения (3) и коэффициентами стохастических дифференциальных уравнений (2) [5, 7]

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= \Phi_1(\lambda) + \frac{N_0}{4} \Phi_2(\lambda) \cdot d\Phi_2(\lambda) / d\lambda; \\ A_2(\lambda, z) &= F[\lambda, z, y_m, R]; \\ B(\lambda) &= \frac{N_0}{2} \Phi^2(\lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

Для конкретизации соотношений (6) синтезируется стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение фильтра) первого порядка для огибающей, описывающее одномерный марковский процесс. Синтез формирующих фильтров осуществляется на основе системы распределений Пирсона. [3], В результате проведенных исследований имеем по классификации Пирсона 1-ый тип распределения или β -распределение [7] и уравнения соответствия для коэффициентов $A_1(\lambda)$ и $B(\lambda)$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= -\frac{\beta}{2(p-1)} [q - (p+1)\lambda]; \\ B(\lambda) &= \beta(\lambda^2 - \lambda) / (p-1). \end{aligned} \quad (7)$$

где β, q, p – параметры β – распределения.

Коэффициент $A_2(\lambda, z)$ в зависимости от принятой гипотезы накопления повреждений, может иметь следующий вид [1]:

– для линейной гипотезы накопления повреждений

$$A_2 = C\lambda^r ; \quad (8)$$

– для автомодельной гипотезы накопления повреждений

$$A_2(z) = Cz\lambda^r . \quad (9)$$

Таким образом, решая уравнения (3) получаем одномерную плотность вероятности меры повреждений, по которой определяются все основные показатели надежности: вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказов, среднее и дисперсия времени до разрушения.

Метод решения. Решение уравнения (3) представляется в виде [6], позволяющем добиться совпадения одномерных плотностей $\lambda(t)$ и $z(t)$, корреляционного момента, а также математических ожиданий и дисперсий

$$f(\lambda, z, t) = f(\lambda)f(z, t)[1 + R(t)(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)] , \quad (10)$$

здесь $f(\lambda)$, $f(z, t)$ – одномерные плотности вероятности соответственно λ , z ; $R(t) = \mu_{\lambda z} / \sigma_\lambda \sigma_z$ – коэффициент корреляции, $\mu_{\lambda z}$ – смешанный момент; m_z , σ_z^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия меры повреждений; m_λ , σ_λ^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия огибающей.

Получим уравнение для одномерной плотности вероятности меры повреждений $f(z, t)$. Для этого проинтегрируем уравнение (3) по λ в пределах $[0, \infty]$. При удовлетворении граничных условий (4) первое и третье слагаемые полученного соотношения обращаются в нуль, в результате получим

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) d\lambda \right] . \quad (11)$$

Подставляя решение (10) в соотношение (11), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)] d\lambda = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(z, t) [\alpha_1(z) + R(t)(z - m_z)(\alpha_2(z) - m_\lambda \alpha_1(z))] \right\} , \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\alpha_1(z) = \int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda) d\lambda ; \quad (13)$$

$$\alpha_2(z) = \int_0^\infty \lambda A_2(\lambda, z) f(\lambda) d\lambda . \quad (14)$$

Вводя обозначение

$$a^*(z, t) = \alpha_1(z) + R(t)(z - m_z)(\alpha_2(z) - m_\lambda \alpha_1(z)) , \quad (15)$$

уравнение (11) можно представить

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ a^*(z, t) f(z, t) \right\} . \quad (16)$$

Для решения уравнения (16) применяется метод характеристических функций [8]. В соответствии с используемым методом умножим соотношение (16) на $e^{i\omega z}$ и проинтегрируем по z в пределах $[0, \infty)$. Произведя интегрирование по частям в правой части полученного соотношения с учетом определения характеристической функции $\Theta(\omega, t)$, получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = -e^{i\omega z} f(z, t) a^*(z, t) \Big|_0^\infty + i\omega \int_0^\infty f(z, t) a^*(z, t) e^{i\omega z} dz. \quad (17)$$

При удовлетворении граничных условий (4) первое слагаемое соотношения (17) обращается в нуль. Учитывая, что плотность вероятности отлична от 0 на конечном интервале $[0, \Delta]$, в уравнении (17) верхний предел можно заменить на Δ и воспользоваться представлением плотности вероятности через значения характеристической функции в дискретных точках для конечно-го интервала Δ [4]

$$f(z, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-N}^N \Theta(\omega_n, t) \exp(iz\omega_n); \quad \omega_n = 2\pi n / \Delta. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = i\omega \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-N}^N d_n(\omega, t) \Theta(\omega_n, t), \quad (19)$$

где

$$d_n(\omega, t) = \int_0^\infty a^*(z, t) e^{iz(\omega - \omega_n)} dz. \quad (20)$$

Для любого значения ω_k $k = \overline{-N, N}$ можно записать уравнение (19), то есть

$$\frac{\partial \Theta(\omega_k, t)}{\partial t} = i\omega_k \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-N}^N d_n(\omega_k, t) \Theta(\omega_n, t). \quad (21)$$

При варьировании $k = \overline{-N, N}$, получим $2N + 1$ дифференциальных уравнений с $2N + 1 + 3$ неизвестными.

Помимо $2N + 1$ неизвестных значений характеристической функции $\Theta(\omega_n, t)$ в дискретных точках ω_n , ($n = \overline{-N, N}$), неизвестными также являются: смешанный момент $\mu_{\lambda z}$, математическое ожидание меры повреждений m_z и дисперсия меры повреждений σ_z^2 . Для полноты системы уравнений получим дополнительно три уравнения для указанных моментов.

Для получения уравнения для смешанного момента умножим исходное уравнение (3) на $(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)$ и проинтегрируем по λ и по z в пределах $[0, \infty)$. В левой части имеем производную от смешанного момента. Третье слагаемое правой части после интегрирования по частям с учетом граничных условий (4) и общих свойств плотности вероятности обращается в ноль. Первое и второе слагаемые в правой части уравнения преобразуются после интег-

рирования по частям и учете граничных условий (4). В результате имеем следующее дифференциальное уравнение для смешанного момента $\mu_{\lambda z}$ [6]

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (z - m_z) A_1(\lambda) f(\lambda, z, t) dz d\lambda + \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) \int_0^{\infty} A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda. \quad (22)$$

Аналогичные выкладки можно проделать для получения дифференциальных уравнений для математического ожидания меры повреждений m_z и дисперсии меры повреждений σ_z^2 . Однако в рамках метода характеристических функций можно воспользоваться соотношениями, для определения первых двух начальных моментов через значения характеристической функции в дискретном ряде точек [4]. Используя вышеупомянутые соотношения, запишем

$$m_z(t) = \Delta \left[\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^N \frac{1}{\alpha_k} \Theta(\omega_k, t) \right]; \quad (23)$$

$$\sigma_z^2(t) = \Delta^2 \left[\frac{1}{3} + \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^N \frac{\alpha_k - 2}{\alpha_k^2} \Theta(\omega_k, t) \right] - m_z^2(t). \quad (24)$$

здесь $\alpha_k = -i\Delta\omega_k = -i2\pi k$.

Таким образом, получена система уравнений (21) – (24) для получения характеристической функции в дискретном ряде точек, по которой определяется плотность вероятности меры повреждений и соответственно основные показатели надежности.

Коэффициенты разрешающей системы дифференциальных уравнения для различных моделей накопления повреждений. Рассмотрим линейную модель накопления повреждений. Соответственно в этом случае A_2 определяется соотношением (8), подставляя которое в (13), (14), получим коэффициенты a_1, a_2 не зависящие от z

$$a_1 = \int_0^{\infty} C \lambda^r f(\lambda) d\lambda = C m_{\lambda}^r; \quad a_2 = \int_0^{\infty} C \lambda^{r+1} f(\lambda) d\lambda = C m_{\lambda}^{r+1}, \quad (25)$$

здесь $m_{\lambda}^r, m_{\lambda}^{r+1}$ – начальные моменты λ r -го и $(r+1)$ -го порядков соответственно. И тогда соотношения (20) примут следующий вид

$$d_n(\omega, t) = \int_0^{\infty} \left[C m_{\lambda}^r + R(z - m_z)(C m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r C m_{\lambda}^r) \right] e^{iz(\omega - \omega_n)} dz. \quad (26)$$

Произведя интегрирование по частям, имеем уравнения для определения коэффициентов $d_n(\omega, t)$ разрешающей системы дифференциальных уравнений (21) в случае линейной модели накопления повреждений

$$d_n(\omega, t) = \frac{e^{iz(\omega - \omega_n)}}{i(\omega - \omega_n)} \left[Cm_\lambda^r + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_z m_\lambda^r) \left(z - \frac{1}{i(\omega - \omega_n)} - m_z \right) \right] \Big|_0^\Delta, \quad \omega \neq \omega_n; \quad (27)$$

$$d_n(\omega, t) = \Delta \left[Cm_\lambda^r + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_z m_\lambda^r) (\Delta/2 - m_z) \right], \quad \omega = \omega_n. \quad (28)$$

Рассмотрим автомодельную гипотезу накопления повреждений. Для данной гипотезы коэффициент A_2 определяется выражением (9), соответственно имеем

$$a_1(z) = \int_0^\infty Cz \lambda^r f(\lambda) d\lambda = Cm_\lambda^r z; \quad a_2(z) = \int_0^\infty Cz \lambda^{r+1} f(\lambda) d\lambda = Cm_\lambda^{r+1} z, \quad (29)$$

где m_λ^r , m_λ^{r+1} – начальные моменты λ r -го и $(r+1)$ -го порядков соответственно.

Выражения для коэффициентов (20) с учетом (29) примут следующий вид

$$d_n(\omega, t) = \int_0^\infty \left[Cm_\lambda^r z + Rz(z - m_z)(Cm_\lambda^{r+1} - m_\lambda^r Cm_\lambda^r) \right] e^{iz(\omega - \omega_n)} dz. \quad (30)$$

Произведя интегрирование по частям, имеем уравнения для определения коэффициентов $d_n(\omega, t)$ разрешающей системы дифференциальных уравнений (21) в случае автомодельной гипотезы накопления повреждений

$$d_n(\omega, t) = \frac{e^{iz(\omega - \omega_n)}}{i(\omega - \omega_n)} \left\{ Cm_\lambda^r \left(z - \frac{1}{i(\omega - \omega_n)} \right) + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_\lambda^r m_z) \times \right. \\ \left. \times \left[\left(z^2 - \frac{2z}{i(\omega - \omega_n)} - \frac{2}{(\omega - \omega_n)^2} \right) - m_z \left(z - \frac{1}{i(\omega - \omega_n)} \right) \right] \right\} \Big|_0^\Delta, \quad \omega \neq \omega_n; \quad (31)$$

$$d_n(\omega, t) = \Delta^2 \left[Cm_\lambda^r / 2 + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_z m_\lambda^r) (\Delta/3 - m_z/2) \right], \quad \omega = \omega_n. \quad (32)$$

Уравнение для смешанного момента. Преобразуем первое слагаемое правой части уравнения (22), используя соотношения (7), (10). Учитывая определение для центральных моментов, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (z - m_z) A_1(\lambda) f(\lambda, z, t) dz d\lambda = -\frac{\beta}{2(p-1)} \int_0^\infty \int_0^\infty (z - m_z) [q - (p+1)\lambda] \times \\ \times f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)] dz d\lambda = \\ = -\frac{\beta}{2(p-1)} \int_0^\infty [q - (p+1)\lambda] R(t)(\lambda - m_\lambda) \sigma_z^2 f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_\lambda^2 \sigma_z^2. \quad (33)$$

С учетом (33) соотношение (22) примет следующий вид

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_\lambda^2 \sigma_z^2 + \int_0^\infty \int_0^\infty (\lambda - m_\lambda) A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda. \quad (34)$$

Преобразуем второе слагаемое правой части уравнения (34) для случая

линейной гипотезы накопления повреждений. Подстановка соотношений (8), (10), позволяет разделить переменные интегрирования. Учитывая определение для моментов, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) C \lambda^r f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} C \lambda^r (\lambda - m_{\lambda}) f(\lambda) \int_0^{\infty} [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] f(z, t) dz d\lambda = C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r).
 \end{aligned} \tag{35}$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение для смешанного момента для случая линейной гипотезы накопления повреждений

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_{\lambda}^2 \sigma_z^2 + C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r). \tag{36}$$

Преобразуем второе слагаемое уравнения (34) для случая **автомодельной** гипотезы накопления повреждений. Подставляя (9), (10) в (34) и производя аналогичные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) C z \lambda^r f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} C \lambda^r (\lambda - m_{\lambda}) f(\lambda) \int_0^{\infty} z [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] f(z, t) dz d\lambda = \\
 & = m_z C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r) + R(t) \sigma_z^2 C(m_{\lambda}^{r+2} - 2m_{\lambda}^{r+1} m_{\lambda} + m_{\lambda}^r m_{\lambda}^2).
 \end{aligned} \tag{37}$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение для смешанного момента в случае автомодельной гипотезы накопления повреждений

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = & \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_{\lambda}^2 \sigma_z^2 + m_z C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r) + \\
 & + R(t) \sigma_z^2 C(m_{\lambda}^{r+2} - 2m_{\lambda}^{r+1} m_{\lambda} + m_{\lambda}^r m_{\lambda}^2).
 \end{aligned} \tag{38}$$

Численные исследования. Описанный выше алгоритм реализован для случая автомодельной гипотезы накопления повреждений. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге-Кутты. Расчеты производились в системе MATLAB 5.2 при следующих исходных данных: начальные условия заданы нормальным законом со следующими значениями параметров – $m_{z_0} = 0,08$; $\sigma_{z_0}^2 = 0,0002$; $\mu_{\lambda z} = 0,01$; $m_{\lambda} = 0,333$; $m_{\lambda}^2 = 0,1515$; $m_{\lambda}^r = 0,049$; $m_{\lambda}^{r+1} = 0,032$; $m_{\lambda}^{r+2} = 0,032$; $\beta = 2$.

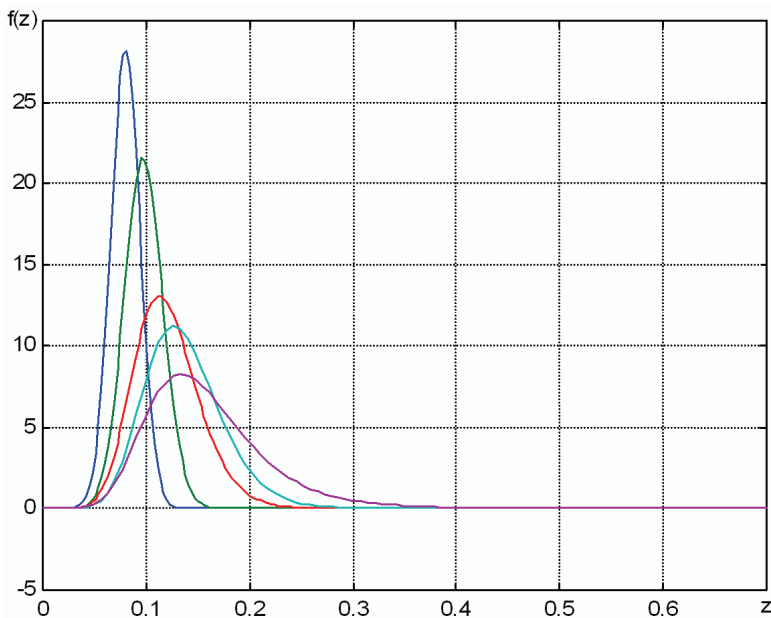


Рисунок 1 – Плотности вероятности меры повреждений в различные моменты времени

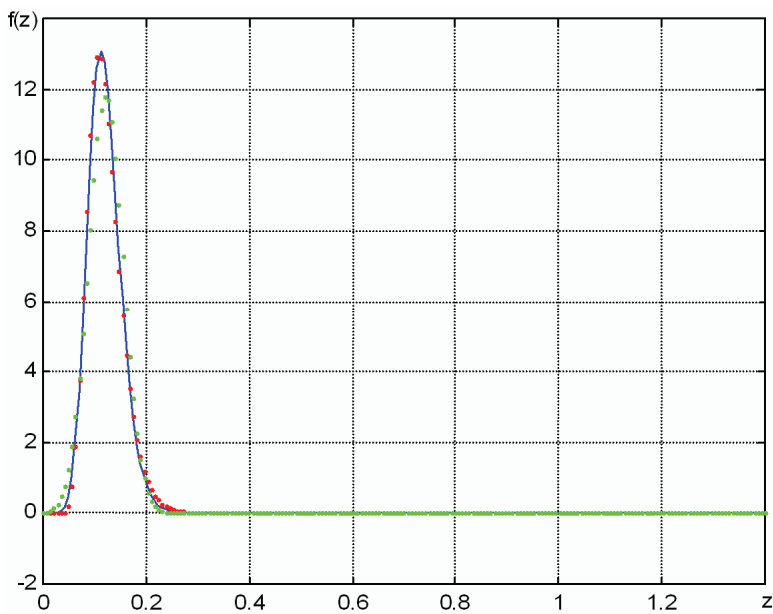


Рисунок 2 – Плотность вероятности меры повреждений

В результате получены плотности вероятности меры повреждений при различных значениях времени, вероятность безотказной работы. На рис. 1 приведены плотности вероятности меры повреждений в различные моменты времени.

На рис. 2 приведены плотности вероятности меры повреждений, полученные методом характеристических функций (сплошная линия) и точное решение (точки) представляющее логнормальный закон. Вероятность безотказной работы, построенная по полученным значениям плотности вероятности меры повреждений, приведена на рис. 3.

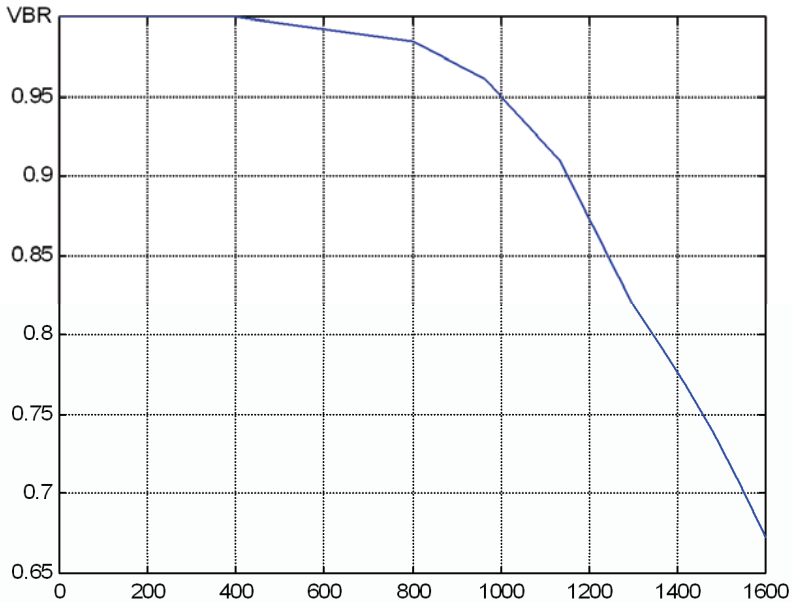


Рисунок 3 – Вероятность безотказной работы

Выводы. Решена задача прогнозирования остаточного ресурса при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Предложенная методика позволяет получить наиболее информативные показатели остаточного ресурса – вероятность безотказной работы и плотность вероятности отказов.

Список литературы: 1. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с. 2. *Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с. 3. *Жовдак В.А., Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкции с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Х.: ХГПУ, 1999. – 120 с. 4. *Жовдак В.А., Тарасова Л.Ф.* Прогнозирование ресурса элементов конструкций при широкополосном случайном воздействии // Динамика

и прочность машин. – Вып. 50. – Х.: 1989. – С. 118-124. **5. Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиоэлектроники. – М., Радио и связь, 1989. – 656 с. **6. Павлов П.А.** Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. – Л.: Машиностроение, 1988. – 252 с. **7. Писаренко Г.С., Лебедев А.А.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Наукова думка, 1976. – 415 с. **8. Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. **9. Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

Поступила в редколлегию 17.02.2011

УДК 539.4:691.175.3

А.Б.КИРКАЧ, науч. сотр., НТУ «ХПИ»

ПРОБЛЕМА ПРОЧНОСТИ БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ НА ОСНОВЕ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ПЛАСТИКОВ

Стаття знайомить з проблематикою міцності болтових з'єднань в перспективних конструкційних матеріалах – шаруватих композиційних пластиках або ламінатах. На основі даних опублікованих праць аналізуються експериментально-встановлені ефекти та обговорюються основні фактори, що впливають на міцність таких з'єднань та становлять інтерес для теоретичного дослідження. Наводиться спеціальна термінологія, що склалася в англійській літературі в цій галузі.

Present paper gives an insight into the problematic of strength analysis of mechanically fastened joints in modern structural materials – FRP laminates. A review of published work is carried out to outline the experimentally-observed effects and main factors influencing the complex strength behaviour of such joints which are an important subject for theoretical investigation. Special terminology established in this field is introduced in the context of discussion.

Статья знакомит с проблематикой прочности болтовых соединений в перспективных композиционных материалах – слоистых композиционных пластиках или ламинатах. На основе данных опубликованных трудов анализируются экспериментально установленные эффекты и обсуждаются основные факторы, которые влияют на прочность таких соединений и представляют интерес для теоретического исследования. Приводится специальная терминология, которая сложилась в англоязычной литературе в этой отрасли.

Технология композиционных материалов (композитов) – одна из стремительно развивающихся областей современной техники. Создание новых материалов с улучшенными свойствами сегодня получает дополнительное значение в виду постоянно растущих требований к экономичности и экологичности продукции и производства. Классификация современных композитов очень широка как по составляющим, так и по назначению. Изложение в данной статье ведется применительно к отдельному классу композиционных материалов на основе полимерных матриц (в частности, эпоксидных), упрочненных длинными высокопрочными высокомодульными неограниченными волокнами (в частности, углеродными или стеклянными). Благодаря отлич-

ным прочностным и жесткостным свойствам при малом весе, эти материалы сегодня интенсивно внедряются в ответственных несущих элементах космических и авиационных конструкций, в судостроении и на транспорте, постепенно вытесняя традиционные металлические сплавы.

Существуют два основных вида соединений композитных элементов конструкций между собой и с другими материалами: адгезионные или клеевые (англ. ¹ adhesive bonding) и болтовые (англ. mechanical fastening) соединения, причем в последнем случае одним термином обозначены как, собственно, болтовые, так и заклепочные соединения. Преимущества болтовых соединений в их технологичности и дешевизне, слабой чувствительности к температурным и атмосферным воздействиям, возможности неразрушающей разборки и т.д. Одним из основных недостатков этих соединений в хрупких анизотропных композитах является существенная сложность их прочностного поведения, что влечет за собой трудности проектирования соединений с требуемой степенью надежности, необходимость использования больших коэффициентов запаса прочности и, как следствие, снижает выгоды от использования композитов в конструкции.

1 Материал. Высоконагруженные конструкционные композиты (англ. high-performance structural composites), как правило, имеют сложную структуру, состоящую из большого числа тонких однонаправлено-упрочненных слоев, соответственным образом ориентированных (повернутых) по отношению друг к другу и к основным направлениям внешней нагрузки (см. рис. 1), за счет чего достигается требуемая степень анизотропии жесткостных и прочностных свойств материала. Слоистые композиты называют ламинатами (англ. laminate, UD(unidirectional)-laminate).

На практике обычно используют ортотропные ламинаты, структура (последовательность укладки и ориентация слоев) которых симметрична относительно срединной плоскости композитной панели. Строение ламината указывают с помощью структурной формулы следующего общего вида:

$$((\alpha_m/\alpha_{m-1}/\dots/\alpha_2/\alpha_1)_n)_s, \quad (1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m$ – углы ориентации (направления упрочнения) слоев ламината с 1 до m в порядке снизу вверх в градусах, n – число повторений последовательности слоев $(\alpha_m/\alpha_{m-1}/\dots/\alpha_2/\alpha_1)$ в ламинате, а индекс s означает, что данная последовательность соответствует 1/2 структуры симметричного ламината. На рис. 2 в качестве примера показано строение $((90^\circ/+45^\circ/-45^\circ/0^\circ)_2)_s$ -ламината, состоящего из 16 слоев. Для сбалансированных симмет-

¹ Некоторые термины, сложившиеся в англоязычной литературе по данной теме, пока не имеют устойчивого русского аналога, что в таких случаях заставляет трактовать их в авторском переводе. Поэтому, для определенности, здесь и далее в тексте статьи при первом упоминании специальных терминов и аббревиатур в скобках приводятся их общепринятые англоязычные эквиваленты.

ричных ламинатов на основе 0° -, 90° - и $\pm 45^\circ$ -направлений в литературе иногда можно встретить сокращенное обозначение вида:

$$(a_0/a_{\pm 45}/a_{90}), \quad (2)$$

где a_0 , $a_{\pm 45}$, a_{90} – процентные доли слоев соотв. (базовых) направлений в ламинате. Например, всем квазиизотропным ламинатам, один из которых показан на рис. 2, в такой нотации соответствует обозначение $(25/50/25)$.

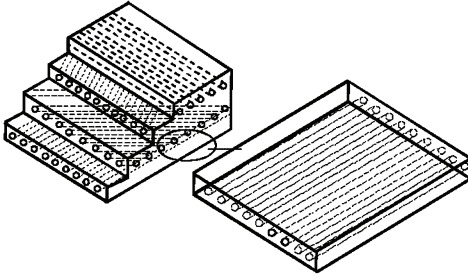


Рисунок 1 – Строение ламината с однонаправленными слоями

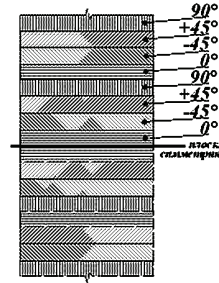


Рисунок 2 – Схематичное представление $((90^\circ/+45^\circ/-45^\circ/0^\circ)_2)_s$ -ламината

Высокопрочные ламинаты производят на основе препрегов (англ. prepregs) – тонких слоев полутвержденной матрицы с погруженными в нее волокнами, с высокой точностью ориентированными в одном направлении. Их вручную выкладывают, строго соблюдая ориентацию (этот этап называется ламинированием), подрезают по форме детали, а затем помещают в автоклав, где при высокой температуре и давлении происходит окончательная полимеризация матрицы и отверждение композита. В последнее время интенсивно развиваются новые технологии производства конструктивных композитов, такие как RTM и RI (англ. resin transfer moulding, resin infusion), позволяющие существенно ускорить и автоматизировать процесс производства, тем самым снизив стоимость материала. Однако они пока не позволяют достичь значений прочности и жесткости, сравнимых с получаемыми по препрег-технологии [1]. Поэтому ламинаты на основе эпоксидных матриц, упрочненные непрерывными углеродными или стеклянными волокнами – CFRP и GFRP (англ. carbon/glass fibre reinforced plastic), – широко представлены в сегменте высококачественных композиционных материалов для ответственных элементов конструкций, в частности, авиационной техники.

2 Нагружение и типы разрушения. Реальные болтовые соединения обычно содержат от нескольких до десятков болтов, размещенных в один или несколько рядов. В предположении достаточной удаленности болтов друг от друга максимальная нагрузка такого соединения с удовлетворительной точностью определяется величиной прочности единичного (изолированного) отверстия, испытывающего контактное нагружение через болт. Поэто-

му испытание на растяжение образцов с одним отверстием является базовым для оценки прочности ламината в соединении [2], при этом болт часто имитируется стержнем из легированной стали или титана (англ. pinned joint, pin-loaded hole). Модель опытного нагружения ламината, соответствующая двухсрезному болтовому соединению, показана на рис. 3.

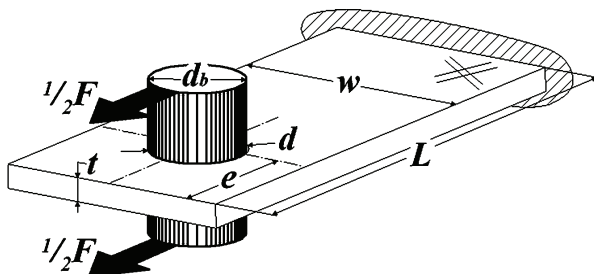


Рисунок 3 – Ламинатный образец с отверстием, нагруженным через стержень

Основные размеры, определяющие геометрию композитного образца – ширину w (аналог межосевого расстояния в рядном соединении), краевое расстояние e и толщину ламината t , – обычно задают в отношении к диаметру отверстия как безразмерные параметры: w/d , e/d , t/d ; зазор в соединении определяется параметром d_b/d .

Прочность отверстия (соединения) $\sigma_{B\text{ult}}$ (англ. bearing strength) определяется как отношение предельной нагрузки F_{ult} , передаваемой через отверстие, к площади его диаметрального сечения; аналогично вводится понятие нагрузки отверстия σ_B (англ. bearing load) при некотором текущем значении внешней силы F :

$$\sigma_{B\text{ult}} = \frac{F_{\text{ult}}}{dt}; \quad (3)$$

$$\sigma_B = \frac{F}{dt}. \quad (4)$$

В отличие от металлов, болтовые соединения в ламинатах демонстрируют большое разнообразие типов (макро-)разрушения (англ. failure modes). Основные типы разрушения, относящиеся к ламинату, схематично представлены на рис. 4.

Разрушение разрывом, сдвигом и раскалыванием относят к так называемым катастрофическим типам разрушения (англ. catastrophic failure modes). Их возникновение крайне нежелательно, поскольку происходит внезапно, без предварительных проявлений в виде заметных деформаций или повреждений материала и влечет за собой полную потерю несущей способности соединения [3]. Считается, что правильно выполненное соединение в эксперименте разрушается по некатастрофическому (англ. non-catastrophic failure) контактному типу, для которого свойственны заметные проявления в

виде остаточных деформаций отверстия, а также оптически и акустически детектируемых повреждений материала, позволяющие осуществлять контроль таких соединений на практике.

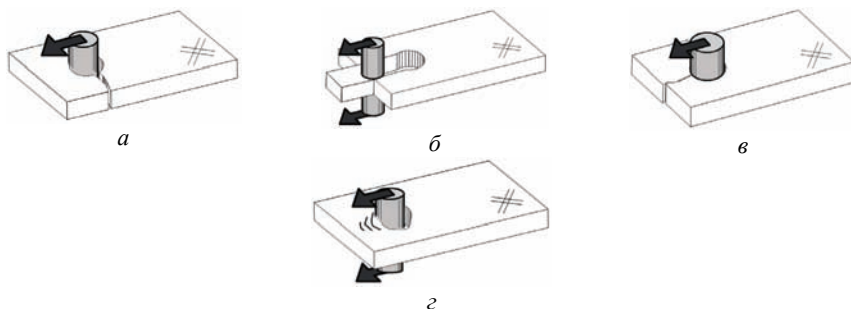


Рисунок 4 – Типы разрушения ламинатов с нагруженным отверстием:
а – разрывный (англ. net-tension); б – сдвиговый (англ. shear-out);
в – раскалыванием (англ. cleavage); г – контактный (англ. bearing)

3 Параметры, влияющие на прочность. Опытные исследования, особенно активно проводившиеся на начальном этапе исследований в области прочности болтовых соединений на основе ламинатов, позволили идентифицировать основные факторы и особенности прочностного поведения соединений. Их разнообразные результаты во многом определили направление и стали эмпирической базой для дальнейших как экспериментальных, так и теоретических работ. Основные результаты ряда исследований [4-24] в краткой форме обсуждаются ниже.

В работе [4] делается вывод, что недостаточная величина краевого расстояния и ширины ламината приводит к возникновению нежелательных типов разрушения – соотв. сдвигового и разрывного. Разрушение раскалыванием является следствием малого краевого расстояния и недостаточной доли поперечного упрочнения в ламинате. В [5] на примере GFRP и CFRP было показано, что по мере того, как ширина ламинатной пластинки увеличивается, наблюдается переход от разрывного типа разрушения к контактному. Для квазиизотропного и ($\pm 45^\circ$)-CFRP-ламината в [6] рекомендуются минимальные значения w/d соответственно 5 и 8. В работе [7] для ($0^\circ/\pm 45^\circ$)-углепластиков предлагается $w/d > 4$, хотя в то же время отмечается, что рекомендованное значение зависит от соотношения 0° - и $\pm 45^\circ$ -слоев в ламинате. Аналогично, по мере возрастания краевого расстояния происходит смена сдвигового типа разрушения на контактный с соответствующим увеличением прочности соединения. В работе [6] для ($\pm 45^\circ$)-углепластиков рекомендуется $e/d > 5$, а в случае квазиизотропной структуры – $e/d > 3$. Такое же значение было получено в [7] для ($0^\circ/\pm 45^\circ$)- и ($90^\circ/\pm 45^\circ$)-CFRP-ламинатов, причем авторы отмечают его тенденцию к убыванию с ростом диаметра отверстия, а также в работе [8] для GFRP аналогичного строения. Качественно точно так

же ведут себя в соединениях ламинаты, упрочненные кевларом (KFRP) [9]. При этом все авторы заключают, что минимальные значения параметров w/d и e/d , необходимые для реализации контактного режима работы соединения, сильно зависят от структуры ламината. Как правило, выбор значений этих параметров ≥ 5 оказывается достаточным для большинства ламинатов при нагружении стержнем, в то время как для заклепочных соединений и болтовых соединений без затяжки достаточным будет значение 3. Влияние толщины ламината является особенно существенным в соединениях без затяжки и нагруженным через стержень, при этом наибольшая прочность соединения достигается при значениях t/d не ниже 1 [10, 11] и резко убывает при дальнейшем уменьшении этого параметра [12]. Прочность болтовых соединений с затяжкой слабо чувствительна к изменению толщины композита.

В большинстве исследований наблюдается существенное влияние строения ламината как на величину прочности соединения, так и на тип разрушения. В [13] указывается, что оптимальная контактная прочность отверстия в CFRP достигается у симметричных ламинатов, в которых доля 0° -слоев (армированных в направлении внешней нагрузки) составляет от 55 до 80%, а остальная часть состоит из $\pm 45^\circ$ -слоев. О преимуществах ($0^\circ/\pm 45^\circ$)-укладки по сравнению с ($90^\circ/\pm 45^\circ$)-строением говорится и в работе [7] на примере заклепочных соединений в CFRP. Экспериментально доказано, что добавление $\pm 45^\circ$ -слоев снижает коэффициенты концентрации напряжений у нагруженного отверстия в композите [6, 13, 14]. В [6] также отмечается, что прочность соединения оказывается тем выше, чем однороднее структура ламината, что по всей видимости связано с величиной межслойных напряжений в композите. Определяющее влияние межслойных напряжений на прочность предполагается и в [15] на основе зависимости прочности соединения от структуры GFRP-композита, чем объясняется упрочняющий эффект от расположения 90° -слоев на внешних поверхностях ламината. В работах [4, 16] делается вывод, что сдвиговый тип разрушения присущ структурам с большой долей 0° -слоев и недостаточным упрочнением в 90° -направлении. Основан данный вывод на экспериментальном факте: образцы с $e/d = 2$ и $e/d = 22$, состоящие из 50% 0° -слоев и 50% $\pm 45^\circ$ -слоев, показали сопоставимые прочности и одинаковый тип разрушения. Автор заключает, что прочность соединения будет максимальной для квазиизотропного ламината, а для прочих укладок доля слоев каждого из базовых направлений 0° , 90° и $\pm 45^\circ$ должна находиться в пределах от 1/8 до 3/8.

Самая низкая несущая способность была получена в соединениях на основе шурупов и саморезов [17], что объясняется большим количеством повреждений, вносимых в материал при монтаже, а также низкой прочностью резьбы, выполненной в хрупком композите. Заклепочные соединения показывают существенно большую прочность и поэтому могут быть использованы в нагруженных ламинатах при толщине панели до 3 мм [7], при этом использование шайб способно дополнительно увеличить прочность [18]. Самая высокая прочность достигается в болтовых соединениях. Практически все

авторы обращают внимание, с одной стороны, на целесообразность минимизации зазора между болтом и отверстием, а с другой стороны – на сильное влияние затяжки болта на прочность соединения [6, 14, 19]. В работе [6] наблюдался монотонный рост прочности соединения на основе ($0^\circ/\pm 45^\circ$)-CFRP-ламината на 60–170% при увеличении давления от затяжки вплоть до значения 22 МПа, после чего эффект уже не был так выражен. Похожее поведение было замечено также и в GFRP [5]. В общем случае, болтовое соединение с затяжкой показывает наибольшую прочность, без затяжки – наименьшую, а прочность заклепочного соединения оказывается где-то между этими значениями [20]. В работах [4, 16] авторы также отмечают особую роль затяжки в соединениях, разрушающихся по контактному типу, для которого характерно возникновение значительных напряжений по толщине ламината и его расслаивание (деламинация).

Экспериментальное значение прочности соединения будет различным в зависимости от способа определения предельной нагрузки F_{ult} в формуле (3). В качестве предельной может рассматриваться не только максимальная нагрузка в соединении [14], но и, например, нагрузка, соответствующая первому пику на диаграмме сила-удлинение [15] или вызывающая заданную остаточную деформацию отверстия.

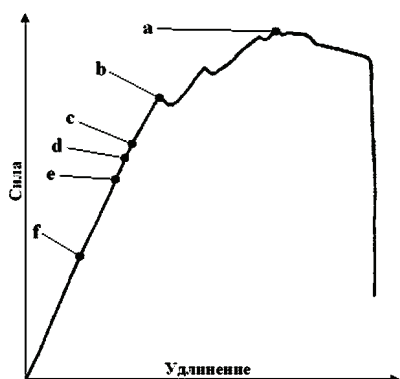


Рисунок 5 – Общий вид диаграммы растяжения болтовых соединений в GFRP [21]

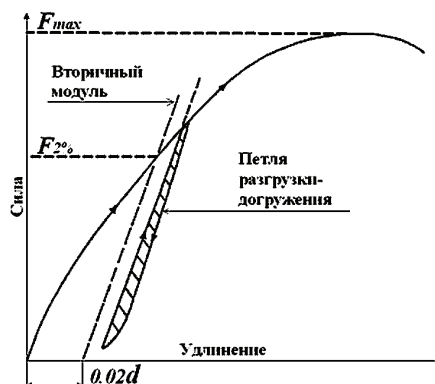


Рисунок 6 – Определение экспериментальных значений нагрузки соединения по стандарту [2]

На рис. 5 показан общий вид диаграммы сила-удлинение, полученный в работе [21] на основе испытаний болтовых соединений из стеклопластиков (GFRP) с эпоксидной и полиэфирной матрицей. Точками на диаграмме отмечены следующие характерные состояния соединения (материала):

f – образование первых повреждений в образце. Поскольку первые повреждения возникают в ламинате уже при малых нагрузках, этот момент довольно сложно определить без специальной техники;

- e* – появление слышимого треска в ламинате. Визуальное обследование выявило заметные повреждения у отверстия в образцах, нагруженных до этого значения внешней силы;
- d* – уровень нагрузки, при котором повреждения в ламинате достигают внешнего края шайбы. Это состояние, как правило, не просто определить без дополнительного оборудования;
- c* – первое заметное отклонение от линейно-упругого поведения на диаграмме;
- b* – первый пик на диаграмме, к этому моменту повреждения материала уже распространились за внешний край шайбы и хорошо видны на внешних поверхностях ламината;
- a* – максимальная нагрузка, выдерживаемая соединением. Как правило, в этом состоянии ламинат уже сильно поврежден.



Рисунок 7 – Основные параметры прочности болтовых соединений в ламинатах

Авторы подтверждают общепринятое мнение, что, поскольку в общем случае как вид диаграммы, так и степень разброса экспериментальных данных могут быть различными, определение предельной нагрузки по остаточной деформации отверстия является наиболее надежным и однозначным способом. Поскольку единого значения предельной деформации отверстия не существует, его необходимо определять для каждого (вида) материала и условий работы соединения. В [10, 11, 22] для стеклопластиков используется значение 4% диаметра отверстия, в работе [23] – 1 % для болтовых и 2 % для заклепочных соединений в CFRP, в работе [24] – 0,5 % для CFRP, в [21] – 0,4% для GFRP. Промышленный стандарт [2] предписывает опытное измерение прочности соединения как по максимальной нагрузке, так и при 2%-ной остаточной деформации отверстия, для чего в процессе нагружения предусмотрена частичная разгрузка образца как показано на рис. 6.

Выводы. Неоднородность и анизотропия материала, обуславливающие сложность его деформированного и прочностного поведения, а также целый ряд факторов, совместно влияющих на прочность и тип разрушения соединения, образуют достаточно сложную картину прочности болтовых соединений в ламинатах. На рис. 7 сделана попытка классификации основных параметров прочности на основе результатов экспериментальных работ.

Так как чисто экспериментальный подход к определению прочности болтовых соединений в слоистых композитах ввиду огромного количества вариантов материала, геометрии и нагружения крайне затруднителен, большее значение приобретает создание эффективных аналитических и численных моделей болтовых соединений, теоретически объясняющих и адекватно учитывающих особенности прочностного поведения ламинатов и пригодных для использования в инженерной практике.

Список литературы: 1. *Räckers B.* Faserverbundwerkstoffe, Entwicklungstrends am Beispiel des Airbus / *B. Räckers* // Proceedings of the Conference «Verbundwerkstoffe und Werkstoffverbunde», 1997. – P. 3-14. 2. Airbus Industrie Test Method 1.0009: Fiber Reinforced Plastics. Determination of bearing strength // Airbus Industrie, 1994. 3. *Schürmann H.* Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden / *H. Schürmann*. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2. Ausgabe, 2007. 4. *Hart-Smith L.J.* Mechanically-fastened joints for advanced composites - phenomenological considerations and simple analysis / *L.J. Hart-Smith* // Douglas Paper 6748. – 1978. – P. 1-32. 5. *Kretsis G.* The strength of bolted joints in glass-fibre/epoxy laminates / *G. Kretsis, F.L. Matthews* // Composites. – 1985. – Vol. 16. – P. 92-105. 6. *Collings T.A.* The strength of bolted joints in multi-directional CFRP laminates / *T.A. Collings* // Composites. – 1977. – Vol. 8. – P. 43-54. 7. *Matthews F.L.* Bolting and riveting in fibre reinforced plastics / *F.L. Matthews, A. Nixon, G.R. Want* // Proceeding of the Fibre Reinforced Plastics Congress, 1976. 8. *Porter R.M.* Bolted joints in fibre reinforced plastics / *R.M. Porter*. – MSc Project report, Aeronautics Department, Imperial College, 1976. 9. *Hodgkinson J.M.* The strength of bolted joints in Kevlar RP / *J.M. Hodgkinson, D.L. de Beer, F.L. Matthews* // ESA Scientific Paper. – 1986. – No. 243. – P. 53-61. 10. *Dastin S.* Joining and machining techniques. Handbook of fibreglass and advanced plastics composites / *S. Dastin*. – Van Nostrand Reinhold, 1969. 11. *Oleesky S.S.* SPI Handbook of reinforced plastics / *S.S. Oleesky, J.G. Mohr*. – Reinhold, 1964. 12. *Saddler C.J.* The strength of bolted/riveted joints in CFRP laminates / *C.J. Saddler, A.J. Barnard* // Westland Helicopters Ltd. Structures Research Note. – 1977. – No. 16. 13. *Collings T.A.* The use of bolted connections as a means of joining carbon fibre reinforced plastics / *T.A. Collings* // Proceedings of the Conference on Designing with Fibre Reinforced Materials 1977, Paper C229/77. 14. *Collings T.A.* The strength of bolted joints in multi-directional CFRP laminates / *T.A. Collings*. — RAE Technical Report 75127, 1975. 15. *Quinn W.J.* The effect of stacking sequence on the pin-bearing strength in glass fibre reinforced plastic / *W.J. Quinn, F.L. Matthews* // J. Comp. Mat. – 1977. – Vol. 11(2). – P. 139-145. 16. *Hart-Smith L.J.* Design and analysis of bolted and riveted joints in fibrous composite structures / *L.J. Hart-Smith* // Douglas Paper 7739. – 1986. – P. 1-15. 17. *Kingston-Lee D.M.* A preliminary investigation of proprietary self-tapping screws as fasteners for carbon fibre laminates / *D.M. Kingston-Lee, K.F. Rogers*. – RAE Technical Memorandum Materials 200, 1974. 18. *Kingston-Lee D.M.* A preliminary evaluation of proprietary rivets as fasteners for carbon fibre laminates / *D.M. Kingston-Lee, K.F. Rogers*. – RAE Technical Memorandum Materials 243, 1976. 19. *Stockdale J.H.* The effect of clamping pressure on bolt bearing loads in glass fibre reinforced plastics / *J.H. Stockdale, F.L. Matthews* // Composites. – 1976. – Vol. 7(1). – p. 34-38. 20. *Matthews F.L.* Load-carrying joints in fibre reinforced plastics / *F.L. Matthews, P.F. Kilty, E.W. Godwin* // Plastics and Rubber Process and Applications. – 1982. – Vol. 2. – P. 19-25. 21. *Johnson M.* Determination of safety factors for use when designing bolted joints in GRP / *M. Johnson, F.L. Matthews* // Composites. – 1979. – Vol. 10(2). – p. 73-76. 22. *Strauss E.L.* Mechanical joints in reinforced plastics structures / *E.L. Strauss* // Machine Design. – 1960. – Vol. 32. 23.

Webb A.L. Riveting and bolting in carbon fibre composite / *A.L. Webb* // Proceedings of the Symposium Jointing in Fibre Reinforced Plastics, IPC Press. – 1978. **24.** *Althof W.* Investigations on bonded and demountable joints made from fibre reinforced plastics / *W. Althof, J. Mueller* // Sulzer Technical Review, Switzerland. – 1975.

Поступила в редколлегию 27.10.2011

УДК 519:539:534

С.В. КРАЩИКОВ, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХП»

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ФУНДАМЕНТУ ТУРБОАГРЕГАТУ 200 МВТ

Наведено опис дослідження напружено-деформованого стану фундаменту турбоагрегату середньої потужності. Зроблено висновок щодо оцінки можливості подальшої експлуатації фундаменту. Визначено та наведено найбільш напружені місця фундаменту, що потребують детального огляду на станціях.

The description of research of the is intense-deformed condition of the base of a turbine unit of average capacity is resulted. The conclusion concerning possibility of the further operation of the base is drawn. It is defined and resulted the most intense places of the base which require the detailed review at stations.

Приведено описание исследования напряженно-деформированного состояния фундамента турбоагрегата средней мощности. Сделан вывод относительно оценки возможности последующей эксплуатации фундамента. Определенно и приведены наиболее напряженные места фундамента, которые нуждаются в подробном осмотре на станциях.

Вступ. Сучасний стан енергетичного комплексу України є близьким до критичного. Більшість обладнання електростанцій вже використала свій розрахунковий ресурс. С кожним роком кількість працюючих енергоблоків нестримно скорочується, все більша частка електроенергії припадає на атомні електростанції. Це зумовлено меншим строком експлуатації їх обладнання в порівнянні з аналогічним на ТЕС та ГЕС. Обладнання найстаріших електростанцій кожен рік демонтують. Серед цього обладнання найбільш довговічною конструкцією є фундамент. Важливим є питання – доцільність подальшої експлуатації фундаменту. Тому має сенс дослідження напружено-деформованого стану фундаментів турбоагрегатів з отпрацьованим розрахунковим ресурсом.

Мета роботи. Дослідження напружено-деформованого стану фундаменту турбоагрегату 200 МВТ, оцінка коефіцієнту запасу та рекомендації щодо його подальшої експлуатації.

Розрахункова модель. Моделювання та розрахунки виконано за допомогою методу скінчених елементів та раніше розроблених методик [1, 2]. Рішення задач статичного аналізу зводиться до наступного рівняння:

$$K\{q(t)\} = \{F\}. \quad (1)$$

Скінчено-елементна модель показана на рис. 1. Конструкція фундаменту майже симетрична відносно вертикальної площини (А), що проходить вздовж системи роторів. Параметри моделі: 76387 вузлів, 45933 скінчених елементів. Перевірка на математичну сходимість показала, що погрішність обчислення деформацій 0,2 %, для напруг – 1,5 %. Граничні умови – щільне закріплення нижньої частини. Навантаження від ваг устаткування та фундаменту.

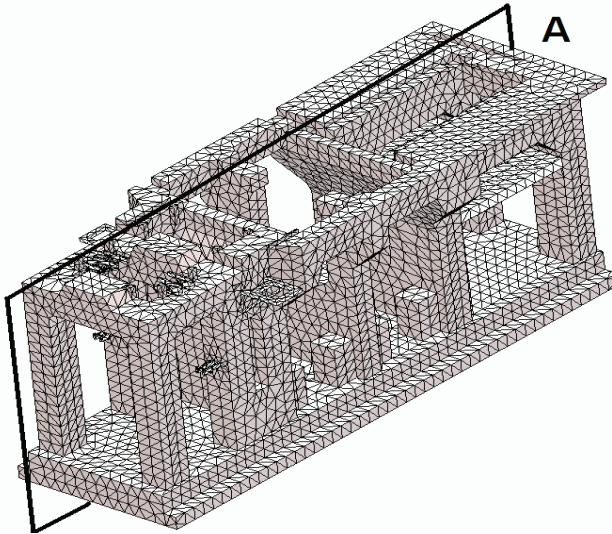


Рисунок 1 – Скінчено-елементна модель фундаменту

Аналіз напружено-деформованого стану. Результати розрахунків показано на рис. 2-7.

Найбільше значення деформації – 0,00005 (рис. 2), що відповідає 2 мм переміщень (рис. 3). Величини максимальних деформацій та переміщень мають металеві елементи у місці 1 (рис. 4).

Шкала напруг обмежена значенням 1,5 МПа, що зумовлено значною різницею значень напруг в порівнянні з місцем 1.

На рис. 4 показано загальну картину розподілу напруг. Найбільше значення напруг мають металеві частини у місці 1. Величина напруги майже 90 МПа.

На рис. 5 показано розподіл напруг відносно вертикальної площини А. Найбільше значення мають колони 5 пари. Величина 0,8 МПа.

На рис. 6-7 показано розподіл напруг на колонах з боку вертикальної

площини А (рис. 6) та з зовнішньої сторони (рис. 7). відносно вертикальної площини А. Величина напруг: місце 3 – 2,7 МПа, місце 4 – 9,9 МПа, місце 5 – 3 МПа.

З вищенаведеного видно, що найбільші значення мають елементи фундаменту у місцях 1, 4, 5. Ці елементи виготовлені з сталюого металопрокату. Найбільше значення 90 МПа значно нижче середньої межі міцності 300 МПа. Коефіцієнт запасу є декілька більший за 3.

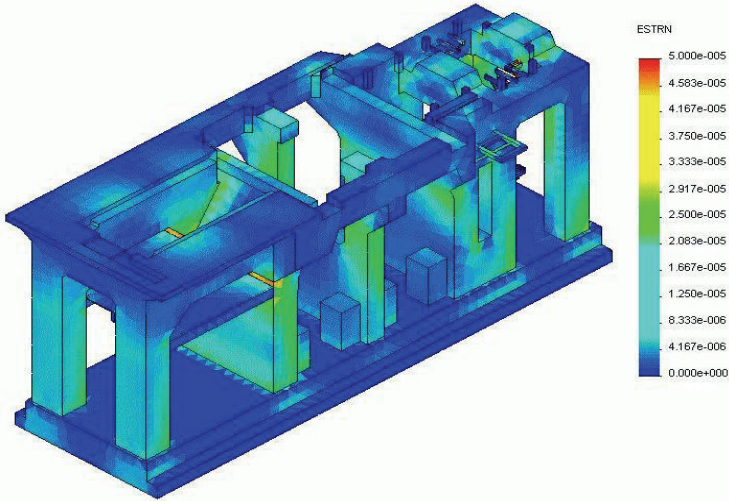


Рисунок 2 – Розподіл деформацій

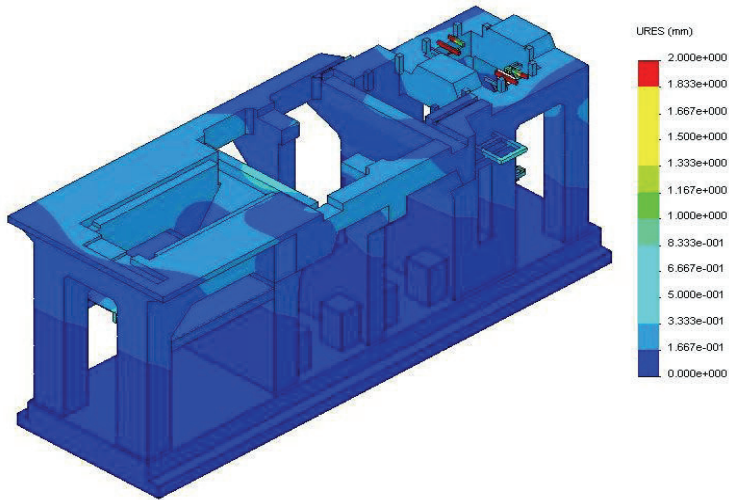


Рисунок 3 – Розподіл переміщень

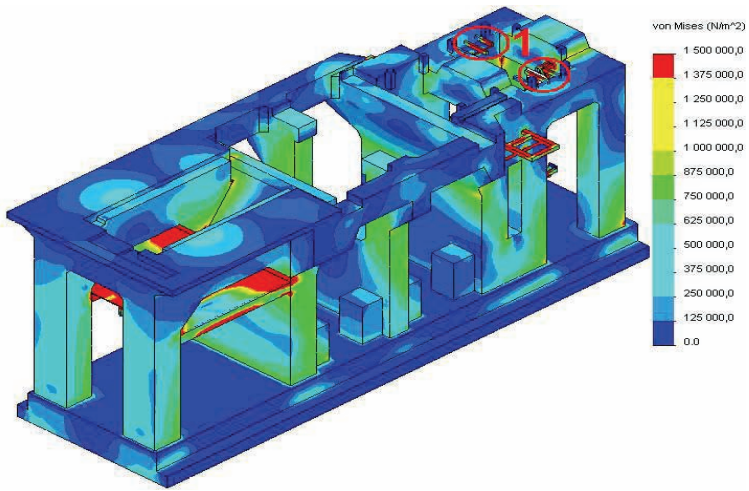


Рисунок 4 – Розподіл напруг

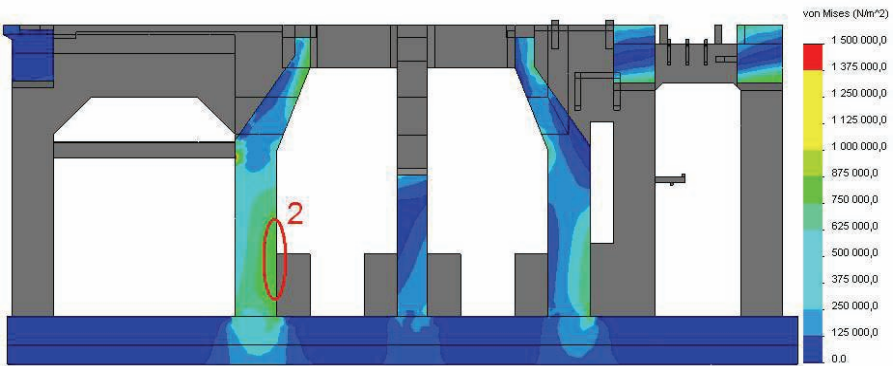


Рисунок 5 – Розподіл напруг відносно вертикальної площини А

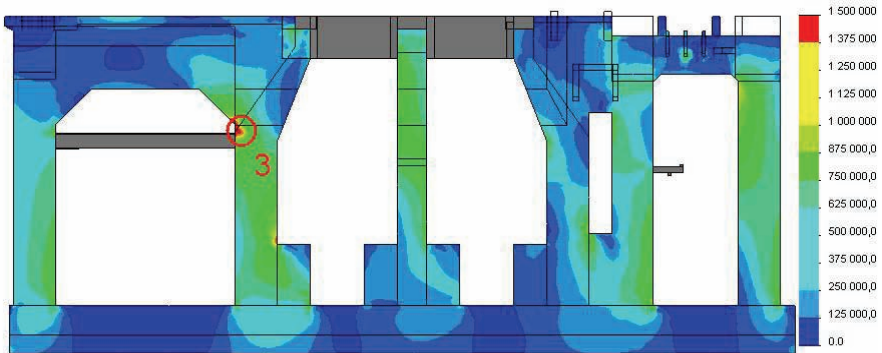


Рисунок 6 – Розподіл напруг на колонах, вид з вертикальної площини А

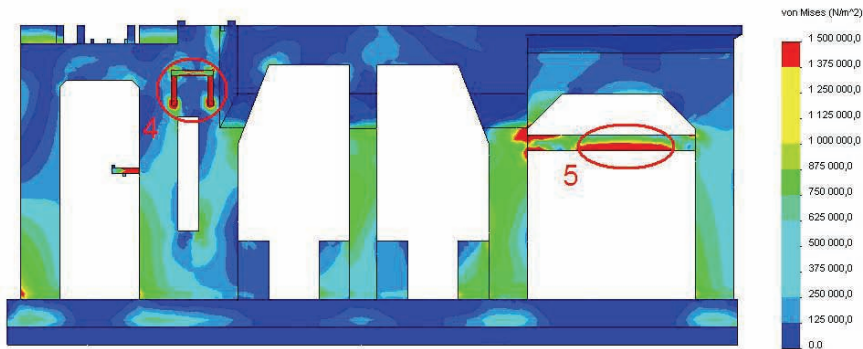


Рисунок 7 – Розподіл напруг на колонах, вид зовні

Серед залізобетонних елементів (місця 2 та 3) найбільші напруги є за місцес 2. Їхня величина – 2,7 МПа, що значно нижче межі міцності 11,5 МПа. Коефіцієнт запасу є більшим за 4.

Загалом конструкція фундаменту має коефіцієнт запасу більший за 3. Але розрахункових даних недостатньо для оцінки можливості подальшої експлуатації фундаменту. Потрібні експериментальні дослідження з тріщиностійкості та поточних значень міцності залізобетону.

Висновки. Зроблено аналіз напружено-деформованого стану фундаменту від статичного навантаження вагами устаткування та самого фундаменту. Виявлено найбільш навантажені місця серед металевих та залізобетонних елементів. Визначено розрахунковий коефіцієнт запасу. Для остаточного висновку щодо можливості подальшої експлуатації фундаменту потрібні експериментальні дослідження поточного стану окремої конструкції.

Список літератури: 1. *Красніков С.В., Степченко О.С., Торянік А.В.* Комп'ютерне моделювання багатокорпусного турбоагрегату та аналіз його вібраційних характеристик // *Машинознавство*. – Львів: Кінпатрі, 2009. – № 2. – С. 27-33. 2. *Шульженко Н.Г., Воробьев Ю.С.* Численный анализ колебаний систем турбоагрегат-фундамент. – К.: Наукова думка, 1991. – 232 с. 3. *Красніков С.В.* Розробка інтегрованих програмних засобів з автоматизації розрахунків динамічних характеристик конструкцій // *Вісник НТУ «ХПІ»*. – Х.: НТУ «ХПІ», 2009. – № 30. – С. 68-72. 4. *Жовдак В.О., Красніков С.В., Степченко О.С.* Решение задачи статической динамики машиностроительных конструкций с учетом случайного изменения параметров // *Проблемы машиностроения*. – Х.: «Контраст», 2004. – Т. 7, № 3. – С. 39-47.

Надійшла до редколегії 12.10.2011

Д.В.ЛАВИНСКИЙ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОПЕРАЦИИ «ЗАПОЛНЕНИЯ УГЛОВ». ЧАСТЬ 2

У роботі запропоновано математичну постановку задачі пружного-пластичного деформування системи контактної взаємодіючих тіл при магнітно-імпульсному навантаженні. Рівняння стану визначено за законами пластичної течії. Розв'язано, як приклад, задачу пружно-пластичного деформування кутової заготовки при дії плоскої системи сил імпульсного магнітного поля. Одержані величини зовнішнього тиску та зроблені загальні рекомендації для проведення подібних технологічних операцій.

Mathematical problem statement of system elastic-plastic deformation of interacting solids involving pulse-magnetic loading has proposed in this article. State equations accepted correspondingly plastic yielding theory. The problem of elastic-plastic deformation of corner preform by plane force system of pulse magnetic field has solved. The technological operations for curve correction were investigated. The general recommendations for carrying out of similar technological operations have made and data of external pressure by which conditions of the technological operation achieved have obtained.

В работе предложена математическая постановка задачи упруго-пластического деформирования системы контактно взаимодействующих тел при магнитно-импульсной нагрузке. Уравнение состояния определено по законам пластического течения. В качестве примера решена задача упруго-пластического деформирования угловой заготовки при действии плоской системы сил импульсного магнитного поля. Получены величины внешнего давления и сделаны общие рекомендации для проведения подобных технологических операций.

Актуальность проблемы. В настоящее время процессы обработки, основанные на способности материалов пластически деформироваться находят все более широкое применение. Помимо традиционных методов обработки металлов давлением (ОМД) развивается магнитно-импульсная обработка металлов (МИОМ) [1]. При разработке операции МИОМ приходится решать задачи магнито-упруго-пластичности. Следует отметить, что многие отечественные и иностранные ученые в разное время уделяли внимание проблемам анализа термомеханики при наличии электромагнитного поля. Существенный вклад сделан С.А. Амбрацумяном, Я.И. Бураком, А.С. Вольмиром, О.М. Гузем и другими. Но преимущественно подобные исследования направлены на анализ упругого поведения материала, а решения, обычно, приводятся для тел канонической формы. Таким образом, проблема создания эффективных методов расчета магнитно-упруго-пластичности для тел произвольной формы в настоящее время является достаточно актуальной.

Постановка задачи. Процессы, протекающие при упруго-пластическом деформировании составных тел при наличии электромагнитного поля могут быть описаны следующей системой уравнений:

– фундаментальные уравнения Максвелла [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}; & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_c \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0; & \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{j} , \vec{E} , \vec{H} – плотность тока, напряженности электрического и магнитного полей; μ_c , ε_c – магнитная и электрическая проницаемость.

– физические соотношения :

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_c \vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma_c \vec{E} + \gamma_c \left[\dot{\vec{u}} \times \vec{B} \right], \quad (2)$$

где \vec{D} , \vec{B} – векторы индукции электрического магнитного полей; γ_c – удельная электропроводность материала.

– уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0; \quad x_1, x_2, x_3 \in V, \quad (3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, f_i – компоненты вектора объемных пондеромоторных сил Лоренца, вектор которых подсчитывается по формуле:

$$\vec{F}_b(x_i) = \mu_c \left[\vec{j} \times \vec{H} \right].$$

– геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (4)$$

– условия на поверхности:

$$\sigma_{ij} n_j = p_m; \quad \forall x \in S_p, \quad (5)$$

– условия механического контактного взаимодействия:

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m \leq 0, \quad \sigma_{nn}^m \leq 0, \quad (6)$$

– условия фрикционного взаимодействия:

$$|\sigma_{nt}| = f_{mn} \sigma_{nn}, \quad (7)$$

где f_{mn} – коэффициент трения скольжения, зависящий от материалов взаимодействующих тел.

– уравнения состояния в форме пластического течения Прандтля-Рейса [2] для приращений пластических деформаций:

$$d(\varepsilon_{ij})_p = \frac{1}{2G} \left[d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_0 \right] + \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{3}{2} d(\varepsilon_{ij})_p d(\varepsilon_{ij})_p} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (8)$$

где $\sigma_0 = 1/3 \sigma_{kl} \delta_{kl}$; $\varepsilon_0 = 1/3 \varepsilon_{kl} \delta_{kl}$ – средние напряжения и деформации.

– условие пластичности:

$$\frac{3}{2} \left[s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] \times \left[s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] - \sigma_T^2 = 0, \quad (9)$$

где s_{ij} – девиатор напряжений; E_T – модуль упрочнения.

Для тел сложной геометрии при разнообразных способах нагружения и закрепления наиболее эффективным является использование численных ме-

тодов. Одним из наиболее работоспособных является метод конечных элементов (МКЭ).

Пример расчета. Отдельный класс технологических операций направлен на получение изделий из тонких листовых заготовок путем сгибания. Практика показывает, что в результате сгибания в зонах углов появляются скругления, размеры которых являются недопустимыми с точки зрения технологии. Задача исправления подобных скруглений в практике обработки материалов известна как задача «заполнения углов» [3]. Ключевым моментом при создании технологической операции является разработка схемы приложения давления непосредственно в угловой зоне. В работе [4] обсуждался вопрос использования магнитно-импульсного воздействия на заготовку с целью «заполнения угла». Было показано, что возможно получить давление, равнодействующая которого направлена по биссектрисе угла, причем воздействие происходит только в угловой зоне. Также было выяснено, что проведение такой технологической операции невозможно без использования матрицы, которая помогает сохранить прямолинейные стороны угла. Кроме того, использование матрицы позволяет не закреплять заготовку, так как в зонах закрепления возникают уровни интенсивности напряжений сопоставимые с уровнями, которые наблюдаются в зоне скругления.

Для того, чтобы исключить влияние матрицы на электромагнитное состояние заготовки, она должна выполняться из непроводящих материалов (например из стеклотекстолита). Жесткость матрицы должна быть значительно выше, чем у заготовки. В данном случае это может быть достигнуто, если выполнять матрицу значительно массивнее по сравнению с заготовкой. Исследования показали, что при толщине стеклотекстолитовой матрицы в 50 раз большей чем толщина стальной заготовки, матрица практически не деформируется. Теперь рассмотрим процесс деформирования с целью определения величины внешнего давления, при котором в заготовке будут наблюдаться пластические деформации.

Пусть необходимо исправить скругление, возникшее в результате изгиба на угол $\pi/2$ тонкой листовой заготовки. Будем считать, что заготовка является достаточно протяженной вдоль ребра угла по сравнению со сторонами угла. В силу того, что давление прикладывается в плоскости, которая перпендикулярна к ребру угла, и что вдоль этого ребра давление постоянно, задача может рассматриваться в рамках плоской деформации. Для построения конечно-элементной модели использовался плоский восьми узловой конечный элемент с квадратичной аппроксимацией перемещений. Материал заготовки: сталь Ст10 (модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,27$, предел текучести $\sigma_T = 220$ МПа, касательный модуль $E_K = 20$ ГПа, предел прочности $\sigma_B = 520$ МПа). Матрица принималась выполненной из условного материала (модуль упругости $E = 400$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,1$). Такие механические характеристики обеспечили поведение заготовки как недеформируемого тела. Геометрические размеры заготовки были

приняты следующими: радиус первоначального скругления 4 мм, толщина 2 мм, длина стороны угла 10 мм. Для матрицы были приняты следующие размеры: толщина 20 мм, длина стороны угла 10 мм. Внешние стороны матрицы рассматривались жестко закрепленными: $u_x = u_y = 0$. Заготовка рассматривалась незакрепленной, свободно лежащей на матрице в условиях одностороннего контакта. Для адекватного отражения процессов контактного деформирования использовался метод введения слоя контактных конечных элементов (ККЭ) [5]. В данном случае ККЭ с точки зрения геометрического представления выбирались такими же как и базовые КЭ, но свойства материала задавались так, чтобы ККЭ «сопротивлялись» сжатию и «не сопротивлялись» растяжению. Кроме этого, сдвиговая жесткость материала ККЭ задавалась в соответствии с законом (7) для коэффициента трения 0,2. Вначале был произведен расчет, когда внешнее давление прикладывалось непосредственно в области скругления. Оказалось, что в этом случае стороны заготовки отходят от соответствующих поверхностей матрицы. Данное обстоятельство может привести к искажению формы обрабатываемой заготовки. Далее рассмотрим результаты деформирования с целью определения величины давления в угловой зоне. Оказалось, что явление возникновения пластических деформаций в материале заготовки наблюдаются при величине давления более 30 МПа. На рис. 1 приведено распределение интенсивности напряжений в заготовке, когда величина давления в угловой области составляет 100 МПа.

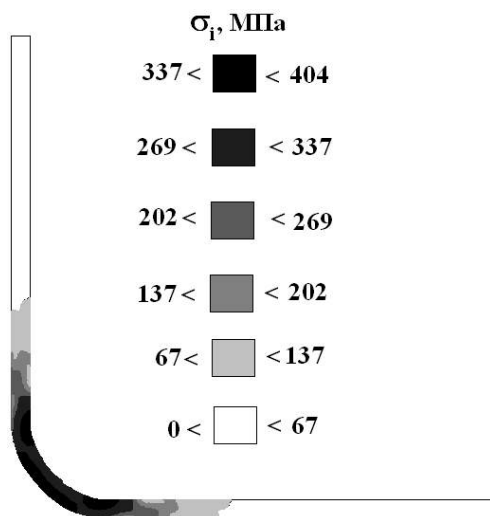


Рисунок 1

Как видно из рисунка вся область скругления находится в пластическом состоянии, максимальные значения интенсивности составляют около 400 МПа, Для данного материала подобное значение является близким к пределу

прочности, то есть прикладываемая внешняя нагрузка близка к критической, дальнейшее увеличение внешнего давления может привести к разрушению материала. На рис. 2 приведена картина распределения результирующих перемещений заготовки. Как видно из рисунка перемещения отличны от нулевых непосредственно в области скругления, а их величины достаточно значительны. Следует отметить, что для подобных технологических операций довольно проблематично сформулировать общие требования и условия, которые бы однозначно определяли количественную картину деформирования, так как многое зависит от характеристик материала и размеров заготовки.

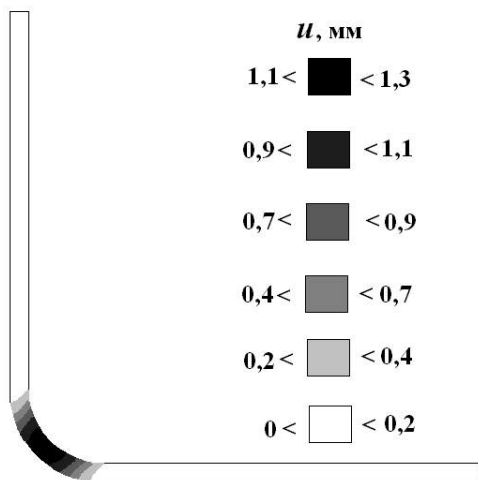


Рисунок 2

Выводы. Представлена общая постановка задачи упруго-пластического деформирования при наличии электромагнитного поля. Уравнения состояния при пластическом деформировании материала приняты в соответствии с теорией пластического течения. Для одного случая магнитно-импульсной обработки металлов проведен анализ упруго-пластического деформирования заготовки. Задача решалась по схеме метода конечных элементов. Сформулированы общие рекомендации к разработке подобных технологических операций.

Список литературы: 1. *Maxwell J.C.* A Treatise on Electricity and Magnetism / In 2 vol.: Vol. II. / *Maxwell J.C.* – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV. – 445 p. 2. *Зубчанинов В.Г.* Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для машиностроит. спец. вузов / *Зубчанинов В.Г.* – М.: Высшая школа, 1990. – 368 с. 3. *Белый И.В.* Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов / *Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т.* – Х.: Вища школа, 1977. – 189 с. 4. *Бондарь С.В.* Определение магнитного давления в углах при деформировании листовых заготовок / *Бондарь С.В., Лавинской Д.В.* // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП», 2009. – № 42 – С. 11-14. 5. *Лавинский Д.В.* Анализ упруго-пластического деформирования при моделировании операции «заполнения углов». Часть 1 / *Лавинский Д.В.* // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП». – 2010. – № 37. – С. 100-104.

Поступила в редколлегию 20.10.2011

А.А.ЛАРИН, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
И.М.БАРАННИК, ассистент, ХНАДУ, Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИН В ПРОЦЕССЕ СТАЦИОНАРНОГО КАЧЕНИЯ

У роботі запропоновано алгоритм для визначення процесу встановлення теплового стану в пневматичних шинах. Алгоритмом є розрахунково-експериментальний підхід, який заснований на чисельному розв'язанні задачі нестационарної теплопровідності в рамках методу скінченних елементів і використовує для визначення величини теплоутворення за один оборот колеса експериментальні дані про час і величину нагріву повітря усередині шини. Представлено результати чисельних і експериментальних досліджень з формування теплового стану в пневматичній шині для легкового автомобіля моделі 175/70R13.

The paper deals with the development of an algorithm of the determination of the process of thermal state stabilization in the pneumatic tires. The algorithm is a computationally-experimental. It is realized on the base of numerical solution of transient thermal analysis within the finite element method and uses an experimental data about the time and magnitude of inside the tire air heating for the determination of the rate of heat generation over one cycle of wheel rotation. The results of numerical and experimental investigations has been carried out about the formation of the thermal state of the pneumatic tire model 175/70R13 for passenger car.

В работе предложено алгоритм для определения процесса установления теплового состояния в пневматических шинах. Алгоритм представляет собой расчетно-экспериментальный подход, который основан на численном решении задачи нестационарной теплопроводности в рамках метода конечных элементов и использует для определения величины теплообразования за один оборот колеса экспериментальные данные о времени и величине нагрева воздуха внутри шины. Представлено результаты численных и экспериментальных исследований по формированию теплового состояния в пневматической шине для легкового автомобиля модели 175/70R13.

Введение. Важной характеристикой пневматических шин в эксплуатации является их температура. Тепловое состояние шины в эксплуатации оказывает существенное влияние на ее работоспособность, так как влияет на механические свойства резиноподобных материалов, их прочностные характеристики, создает дополнительное термонапряженно-деформированное состояние, приводит к изменению внутреннего давления, формирует процессы деградации материала (старение). Так, при увеличении температуры шины до 100 °С прочность капронового корда снижается на 20 %, а прочность резины и связь ее с кордом уменьшается в 2 раза [3].

Нагрев автомобильной шины формируется в результате преобразования в тепло части механической энергии при переменном деформировании полимерных материалов конструкции, и трении о дорожное полотно. Исследования температурного состояния шин изучают экспериментально и теоретически. Экспериментально определяют температуру воздуха (газа) внутри шины и температуру на поверхности шины, или измеряют ее внутри слоев и

между слоями.

Следует отметить, что измерение температуры воздуха внутри шины является наиболее легко реализуемым измерением, допускающим проведение не только лабораторных испытаний, но и дорожных, которые максимально приближены к условиям реальной эксплуатации. Однако, температура воздуха внутри шины является производным эффектом и лишь интегрально позволяет судить о температурном поле в самом теле. Изменение температуры воздуха внутри шины, определяет изменение давления, уровень теплообразования и общее тепловое состояние, что может служить только, как интегральная оценка ее технического состояния.

Исследование поверхностной температуры представляет большой интерес, так как, может применяться с целью дефектоскопии [1-3]. Действительно наличие внутренних скрытых дефектов приводят локальному всплеску температуры [3]. Вместе с тем, измерение поверхностного температурного поля на вращающейся шине крайне затруднено, а при дорожных испытаниях практически не реализуемо.

Измерение температуры внутри слоев и между слоями шины, является сложным экспериментальным исследованием, для реализации которого необходимо впаивать датчики температуры в шину еще на этапе ее производства и проводить исследования на соответствующих лабораторных образцах. При этом удастся определить температуру только в некоторых дискретных точках, а полученные значения являются несколько искаженными, так как в конструкцию лабораторного образца вносятся дополнительные элементы (датчики), которые локально, вносят структурные изменения.

Таким образом, экспериментальные методы дают или очень локальную информацию или очень интегральную оценку, а поэтому не позволяют построить полноценной картины по формированию температурного поля в шине, которое позволило бы доопределить упругие и диссипативные свойства материалов применяемых в шине, установить ее прочностные характеристики.

В данной работе предлагается теоретический подход, в рамках которого строится семейство возможных решений по установлению теплового состояния в шине. Затем в качестве истинного выбирается, то состояние, теплогенерация в котором обеспечивает необходимый уровень и скорость установления температуры воздуха в пневматической шине, предварительно полученные из эксперимента.

Экспериментальное исследование теплообразанию воздуха в пневматической шины. Натурные измерения проводились в дорожных условиях. В качестве измеряемого параметра выступала температура воздуха в камере шины. Соответствующие измерения проводились с помощью датчиков температуры и давления закрепленных на диске колеса рис. 1. Использовались датчики промышленного производства TPMS OE Sensor (Tire Pressure Monitoring System be the Orange Electronics Sensor) модель P409S [4]. Информация с датчика передается в режиме реального времени по средствам бес-

проводной связи рис. 2. Датчик обладает малой массой, что позволяет провести классическую процедуру балансировки колес автомобиля после установки измерительной системы.



Рисунок 1 – Установка датчика для мониторинга температуры в шинах



Рисунок 2 – Тестовый замер температуры в собранных шинах

Характеристики измерительной системы:

- вес датчика 35 г;
- рабочий диапазон давлений от 0 до 531 кПа (до 5,3 атм.);
- рабочий диапазон температур от -40°C до 120 °С;
- погрешность измерения давления: $\pm 6,9$ кПа ($\pm 0,07$ атм.);
- погрешность измерения температуры: ± 4 °С.

Данная измерительная система не обладает высокой точностью, так как является фактически «бытовой» системой контроля давления и температуры в шинах легкового автомобиля, вместе с тем позволяет получить важные ка-

чественные закономерности, а результаты по серии замеров рассматривать как усредненные.

Экспериментальные исследования установления температурного режима в воздухе внутри шины проводились на современных бескамерных шинах модели 175/70R13, которые были установлены на легковом автомобиле АвтоЗА3 Sens в технически исправном состоянии. Измерение проводилось сразу в 4 шинах, в которых давление было установлено на рекомендуемом для эксплуатации уровне 2 атм. В момент проведения дорожных испытаний температура окружающей среды составляла 9 °С, влажность была повышенной – 85 %, скорость ветра до 3 м/с.

Заезд осуществлялся на трассе общего назначения, имеющей две полосы движения в каждом из направлений разграниченных островком безопасности. Таким образом, испытания проводились, не создавая помех движению другому транспорту, но при этом в естественных условиях и с возможностью поддержки стабильной скоростного режима.

Измерение начиналось после длительной остановки автомобиля на обочине дороги с целью установки в шинах температуры соответствующей температуре окружающей среды. Затем автомобиль в течение минуты был выведен на скорость 60 км/час и данная скорость (± 3 км/час) поддерживалась водителем до установления стабильного температурного режима воздуха в шинах.

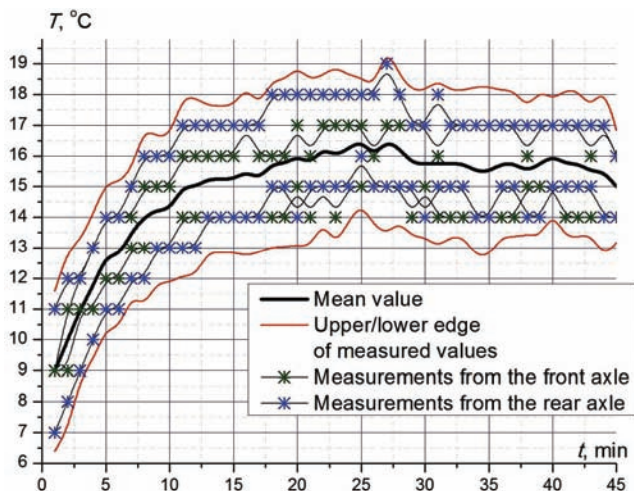


Рисунок 3 – Результаты измерения температуры воздуха внутри пневматической шины модели 175/70R13 при дорожных испытаниях с постоянной скоростью движения автомобиля 60 ± 3 км/час

На рис. 3 приведены результаты данных испытаний и их статистическая обработка (жирная линия является средним значением по четырем измерениям). Анализ приведенных данных показывает, что стабилизация температур-

ного состояния воздуха в пневматических шинах данной модели наступает через 25-27 минут от начала движения, и прирост температуры в среднем составляет +6 °С. Доверительный интервал с вероятностью 95 % составляет ±2 °С. Важно отметить, что прирост температуры в +6 °С был получен по замерам на каждом из колес, и практически не имел вариации. Те есть разница между замерами на соседних колесах в ±2 °С наблюдалась с начала испытаний и фактически поддерживалась в течении всего времени. Следует также отметить, что нет существенной разницы между установлением температурного баланса для колес ведущих (передний мост) или колес ведомых (задний мост).

Проведенные экспериментальные измерения позволяют оценить величину прироста внутреннего давления в шинах, которое устанавливается в процессе эксплуатации. Кроме того, используя полученные результаты в данной работе предлагается построить алгоритм по определению процесса установления теплового состояния в шине.

Построение алгоритма вычисления формирования установившегося температурного поля в пневматической шине. Нагрев шины во время работы (качении) происходит в результате диссипации энергии в материалах испытывающих переменное деформирование, а также за счет трения в пятне контакта. При стационарном качении колеса (на постоянной скорости) выделения тепла при трении много меньше, чем теплообразование, возникающие в процессе деформирования вязкоупругих компонент шины, так как при этом виде движения проскальзывание в контакте с дорогой очень малы, и поэтому их влиянием в данной работе пренебрегается. Накапливаемое в шине тепло идет на нагрев шины и воздуха внутри шины, а также на рассеивание в окружающую среду и дорогу. В нормальных условиях работы колеса основная часть тепла отводится от шины конвекцией в воздух и лишь около 10 % в дорожное покрытие [5,6].

Для анализа процесса теплообразования рассмотрим профильное сечение. В процессе движения такое сечение при входе в контакт получает деформацию сжатия, которая снимается после выхода из контакта – на этом промежутке времени происходит импульс теплообразования для данного сечения, которое затем имеет время свободного теплового состояния до следующего момента времени входа в контакт. Каждое соседнее сечение испытывает аналогичный нестационарный тепловой процесс при стационарном качении колеса, поэтому в данной работе рассматривается модель шины, представляющая собой профильное сечение. Моделирование деформации шины и решение задачи теплопроводности проводилось в рамках метода конечных элементов (КЭ). Соответствующая модель приведена на рис. 4.

В данной работе предлагается следующий алгоритм для определения процесса формирования теплового состояния в пневматической шине:

- определить поле амплитуд деформаций пневматической шине, совершающей стационарное качение;

- поставить амплитуде деформации в соответствие величину теплообразования за один цикл перемены деформации;
- задать цикл по теплообразованию за один оборот колеса: за время одного оборота происходит импульс теплообразования, а затем существует некоторое время свободного теплообмена и теплораспределения по слоям шины и с внешним и внутренним воздухом;
- задать граничные условия конвективного теплообмена с воздухом окружающей среды;
- задать граничные условия конвективного теплообмена внутри шины (воздух внутри шины имеет ограниченную связь с окружающей средой (только через диск) и поэтому нагревается следом за нагревом шины, таким образом, данные граничные условия следует обновлять в процессе расчета);
- произвести расчет задачи нестационарной теплопроводности на промежутке времени характерном для изменения температуры воздуха внутри шины;
- определить количество тепла выделившегося с внутренней поверхности шины и направленного на нагрев воздуха внутри шины;
- определит температуру воздуха в шине;
- повторять пункты 4-8 до тех пор, пока не произойдет стабилизация теплового состояния (или до заданного момента времени).

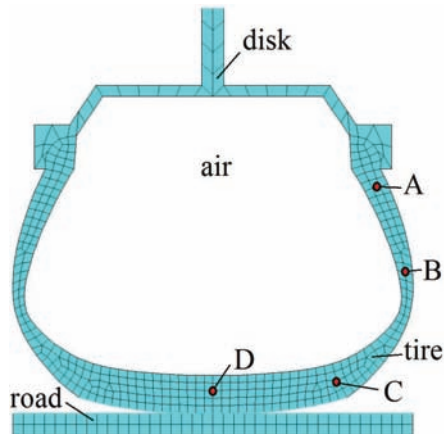


Рисунок 4 – КЭ модель профильного сечения пневматической шины

На рис. 5 данный алгоритм приведен в виде диаграммы потоков данных в нотации Гейна-Сарсона (особенности нотации см. в [7]).

В соответствии с предложенным алгоритмом на первом этапе следует определить амплитуду деформации шины при ее стационарном качении. В данной работе предполагается, что она будет близкой к деформации, которая

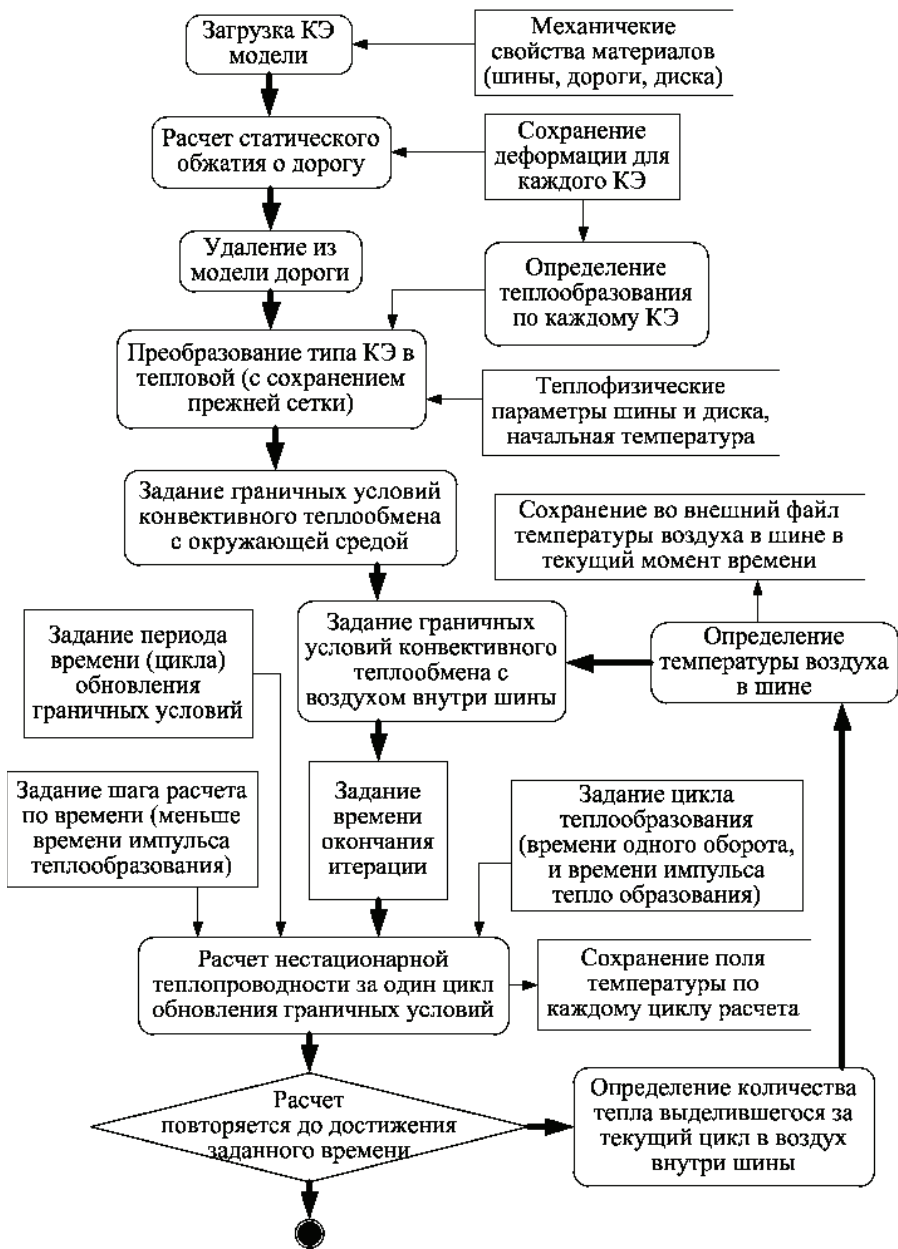


Рисунок 5 – Алгоритм определение теплового состояния в шине

реализуется при статическом обжатии шины о дорожное полотно. Соответствующая задача упругого контакта была решена в рамках метода КЭ – результаты расчета приведены на рис. 6. В расчетах шина, диск и дорога рассматривались как разные тела со своими механическими свойствами, при этом шина считалась состоящей из однородного изотропного материала с усредненными свойствами.

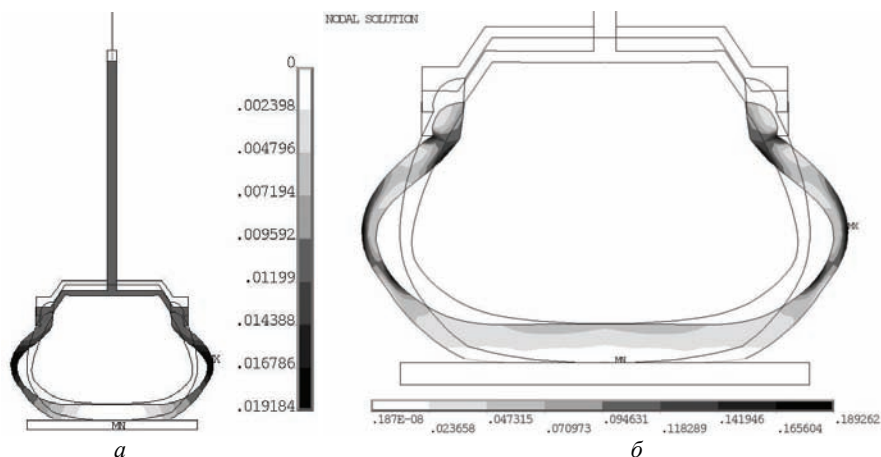


Рисунок 6 – Поля перемещений (а) и интенсивности деформаций (б) в шине, находящейся в контакте с дорогой

Далее по алгоритму, амплитуде деформации ставится в соответствие величина теплообразования за один цикл (оборот колеса). Физически при переменной деформации выделяется тепло за счет диссипации энергии деформирования в материале. Такая диссипация представляет собой гистерезисные потери. Наиболее простой, но широко используемой моделью петли гистерезиса является модель Сорокина [8]. Выделенное тепло при одном цикле деформации равно площади петли гистерезиса, которая в соответствии с моделью Сорокина является эллипсом и пропорциональна квадрату амплитуды деформации:

$$Q \sim \varepsilon^2 \Rightarrow Q = Q_0 \cdot \varepsilon^2, \quad (1)$$

где ε – амплитуда переменной деформации (в данной работе в качестве этой величины использовалось эквивалентная по теории Мизеса деформация, полученная при решении статической задачи контакта шины с дорогой); Q_0 – коэффициент пропорциональности. Величина Q_0 имеет сложную природу и априорно не может быть определена в рамках данного подхода к рассмотрению задачи. Действительно теплогенерация осуществляется в результате потерь на рассеивание энергии в резиноподобных материалах, однако в равной степени и за счет внутреннего трения между различными компонентами сложной композитной структуры шины (микро-трение между разнородными

слоями, между матрицей и волокнами армированных частей композита). В данной работе материал шины считается однородным с усредненными свойствами и под величиной Q_0 также понимается некоторое усредненное значение, определение которой позволит интегрально охарактеризовать диссипативные свойства шины. Выявление величины Q_0 осуществляется путем вариативных расчетов: т.е. проводится серия расчетов с разными значениями Q_0 , а затем выбирается, то решение, в котором обеспечивает необходимый уровень и скорость установления температуры воздуха в пневматической шине, предварительно полученные из эксперимента (рис. 3).

Приведенные результаты на рис. 6 показывают наличие неоднородности распределения деформации. В области бортовой зоны и боковины наблюдаются наибольшие значения, таким образом, в этих местах будет наблюдаться наибольшее теплообразование.

Как уже отмечалось ранее, сечение шины в процессе стационарного качения находится под действием циклического теплового нагружения. Данный цикл состоит из импульса теплообразования, который возникает, когда сечение проходит зону контакта, и промежуток свободного теплового состояния до следующего момента времени входа в контакт (рис. 7).

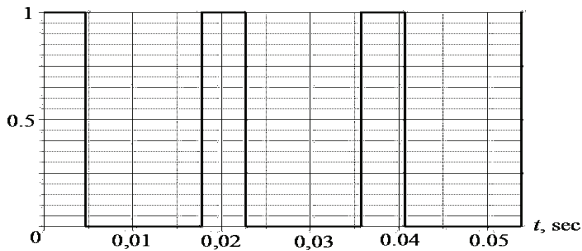


Рисунок 7 – Циклы теплообразования

Время одного цикла определяется в соответствии со скоростью качения колеса – время одного оборота, а время импульса, определяется временем прохождения зоны контакта, то есть также зависит от скорости и длины пятна контакта. В данной работе рассматривалось движение со скоростью 60 км/час – 0,018 с время одного цикла. Длина контакта была выбрана равной примерно $\frac{1}{4}$ длины дуги окружности колеса, в соответствии с результатами, полученными ранее при решении задачи контакта шины с дорогой в трехмерной постановке [9]. Таким образом, длительность импульса теплообразования задавалась равной 0,0045 с.

Следующим этапом алгоритма является задание условий конвективного теплообмена колеса с воздухом. При этом целесообразно отдельно рассматривать теплоотдачу внутри шины и снаружи. Условия конвективного теплообмена задаются коэффициентом конвекции α (теплоотдачи) и температурой воздуха T_{air}

$$q_n = \alpha \cdot (T - T_{air}), \quad (2)$$

где q_n – плотность теплового потока на нормали к поверхности конвекции, T – температура на поверхности колеса. Коэффициент конвекции определяется теплофизическими свойствами (теплопроводностью, плотностью и вязкостью) и выражается через число Нуссельта, Nu [10-11]

$$\alpha = \frac{Nu \cdot \lambda}{d_e}, \quad (3)$$

где d_e – характерный (эквивалентный) размер тела, которое обтекается потоком; λ – теплопроводность воздуха. Число Нуссельта зависит также и от параметров потока обдуваемого воздуха. Данная зависимость определяется числом Рейнольдса, Re [11-12]

$$Nu = \xi \cdot 0,018 \cdot Re^{0,8}, \quad (4)$$

где ξ – поправка на кривизну канала, для течений в криволинейных трубах или каналах [12-13], определяется соотношением радиусов канала и его внешней кривизны

$$\xi = 1 + 1,8 \cdot \left(\frac{2d_c}{d_{sk}} \right), \quad (5)$$

где d_c – диаметр канала (трубы), d_{sk} – диаметр кривизны (гиба). Число Рейнольдса есть отношение сил инерции к силам вязкости в потоке

$$Re = \frac{v \cdot d_e}{\mu}, \quad (6)$$

где v – скорость потока, d_e – характерный (эквивалентный) размер тела, которое обтекается потоком, μ – кинематическая вязкость воздуха.

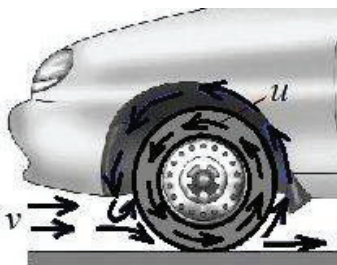


Рисунок 8 – Схема потока воздуха вокруг и внутри колеса

Внешнее обтекание колеса происходит потоком, захватываемым движущимся автомобилем в просвет между автомобилем и дорожным покрытием (клиренс), и, закручиваемым вокруг колеса в колесной арке (рис. 8). В первом приближении можно считать, что скорость этого потока v совпадает с линейной скоростью движения автомобиля, а поток движется в торе. В этом случае в качестве эквивалентного диаметра выступает гидродинамический

диаметр кругового канала. Гидродинамический диаметр определяется диаметром описанной окружности аппроксимирующим колесную арку и периметром контура шины, соприкасающегося с потоком,

$$d_e^{inside} = \frac{4A}{P}, \quad (7)$$

где A – площадь сечения канала, P – контур шины обтекаемый воздухом.

Для легкового автомобиля (Авто3А3 Sens) с установленными шинами модели 175/70R13 обтекаемых воздухом и накаченных воздухом были проведены расчеты коэффициентов конвективной теплопроводности по формулам (3)-(7). Результаты вычислений сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Параметры определяющие конвективный теплообмен шины с воздухом

d_e , м	μ , Па·с	Re	ξ	Nu	λ , Вт/(м·К)	α , Вт/(м ² ·К)
Внешний поток, обдувающий шину						
0,2	13,12 10 ⁻⁶	3,1 10 ⁵	1,75	778	0,0278	110
Поток внутри шины						
0,25	13,12 10 ⁻⁶	6,3 10 ⁴	2,54	315	0,0278	35,5

При вычислении величин помещенных в таблицу предполагалось, что поток воздуха вокруг шины является потоком в тороидальном канале, который моделирует колесную арку. Диаметр этого канала (зазор между колесом и колесной аркой) составляет порядка 150 мм, длина контура шины модели 175/70R13, соприкасающейся с этим потоком, составляет 358 мм.

Конвективный теплообмен шины во внутрь также носит принудительный характер, так как воздух внутри шины совершает движение. Поток создается благодаря инерционным и вязкостным характеристикам воздуха – пристеночный слой увлекается в движение вслед за стенками шины и диска, а в последствии, поток распределяется на весь объем воздуха (рис. 8). Следует отметить, что для увеличения скорости движения воздуха внутри шины в современных моделях используется специальное конструктивное оребрение по внутренней поверхности. При вычислении параметров конвективного теплообмена внутри шины учитывались данные полученные в работе [14]: скорость потока воздуха внутри шины в 5 раз меньше чем линейная скорость движения самого колеса ($u = 0,2v$).

Очевидно, что полученные значения по параметрам конвекции является оценочным (приближенным), так как рассматриваемые потоки являются существенно более сложными и неоднородными, по сравнению с тем как это представляется в данной работе.

Важной особенностью данного алгоритма, является учет нагрева воздуха внутри шины. Так как он имеет ограниченную связь с окружающей средой (только через диск), то тепло снятое с внутренней поверхности шины в результате конвекции рассеивается в окружающую среду не так интенсивно и

происходит нагрев этого воздуха. На первой итерации алгоритма данная особенность не реализуется, так как температура воздуха внутри шины равна температуре окружающей среды. На следующих шагах расчета следует обновлять граничное условие (2) на внутреннем контуре. С этой целью необходимо вычислять приращение температуры воздуха внутри шины.

Рассмотрим соответствующую процедуру более детально. В результате решения задачи теплопроводности шины на заданном шаге на ее внутренней поверхности устанавливается определенная температура отличная от температуры воздуха внутри шины. По средствам конвективного теплообмена между более нагретой поверхностью и воздухом устанавливается тепловой поток, то есть отводится тепло Q_{in}

$$Q_{in} = \alpha_{inside} \cdot L \cdot (T_c - T_{inside}^{air}), \quad (8)$$

где α_{inside} – коэффициент теплоотдачи к потоку внутри шины (см. табл. 1); L – длина внутреннего контура (эквивалентно площади внутренней поверхности для изучаемой плоской модели); T_c – усредненная температура на контуре (на поверхности) полученная на данном шаге расчета; T_{inside}^{air} – температура воздуха внутри шины установленная на данном шаге расчета.

Снятое тепло с внутреннего контура преобразуется в нагрев воздуха

$$\Delta T_{inside}^{air} = \frac{Q_{in}}{c \cdot m}, \quad (9)$$

где ΔT_{inside}^{air} – приращение температуры воздуха внутри шины; c – удельная теплоемкость воздуха (1006 Дж/(кг·град)); m – масса воздуха внутри шины. Тогда на следующем шаге расчета следует увеличить температуру воздуха внутри шины при задании граничного условия (2) на величину определенную из соотношения (9).

Следует отметить, что имеющиеся экспериментальные данные (рис. 3) показывают, что процесс нагрева воздуха в шине проходит заметно медленнее, чем импульс генерации тепла (рис. 7). В этой связи обновление граничных условий на внутреннем контуре можно проводить не на каждом цикле. В данной работе обновление проводилось каждые 20 с.

Расчетные исследование по формированию установившегося температурного поля в пневматической шине. В соответствии с предложенным алгоритмом было проведено серию исследований с варьированием величиной Q_0 . Анализ полученных результатов позволил определить значение выделяемого в шине тепла за один цикл деформации из критерия совпадения расчетных кривых нагрева воздуха в шине и экспериментальных данных (рис. 3) полученных на шине данной модели.

Результаты этих расчетов приведены на рис. 9 - 11. На рис. 9 – соответствие кривой нагрева полученной расчетным путем и экспериментально. Результаты показывают хорошее совпадение, как качественное, так и количественное.

На рис. 10 приведены кривые нагрева снятые в разных частях шины. На

рисунке 10,а график нагрева в плечевой зоне шины (точка С, см. рис. 4). На рисунке в увеличенном временном масштабе показана пульсация температуры, наблюдаемая в результате действия импульсов теплогенерации на 1-й и 40-й минутах движения. На начальном этапе, когда температура шины равна температуре окружающей среды, теплоотдача является малой и все теплообразование идет на нагрев шины. С увеличением температуры шины усиливается теплоотдача в окружающую среду и со временем наступает тепловой баланс: увеличенная за счет импульса теплогенерации температура в течении цикла практически полностью спадает до предыдущего значения.

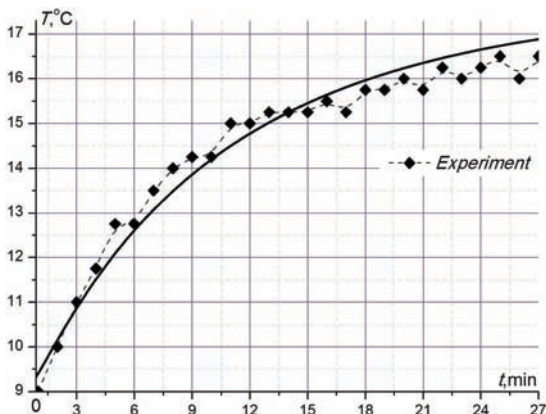


Рисунок 9 – Верификация теоретической модели

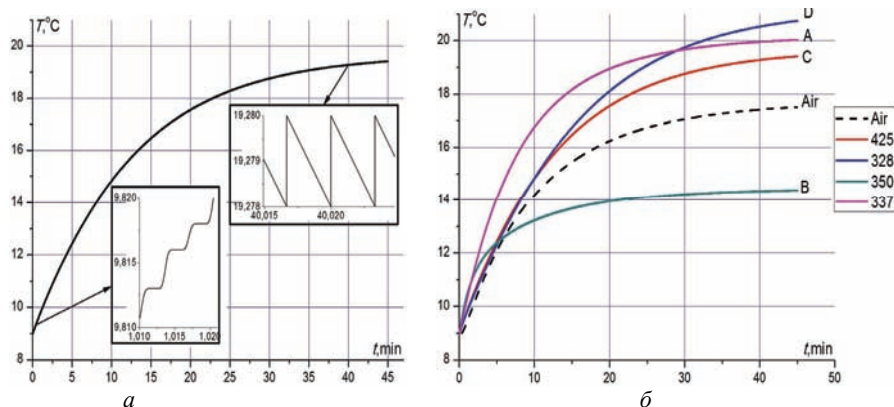


Рис. 10 – Графики нагрева в разных областях шины

На рис. 10, б представлены зависимости температуры от времени в разных точках шины: в бортовой зоне (точка А), в боковине (точка В), в плечевой зоне (точка С), в центре беговой зоны (точка D) и в воздухе внутри шины

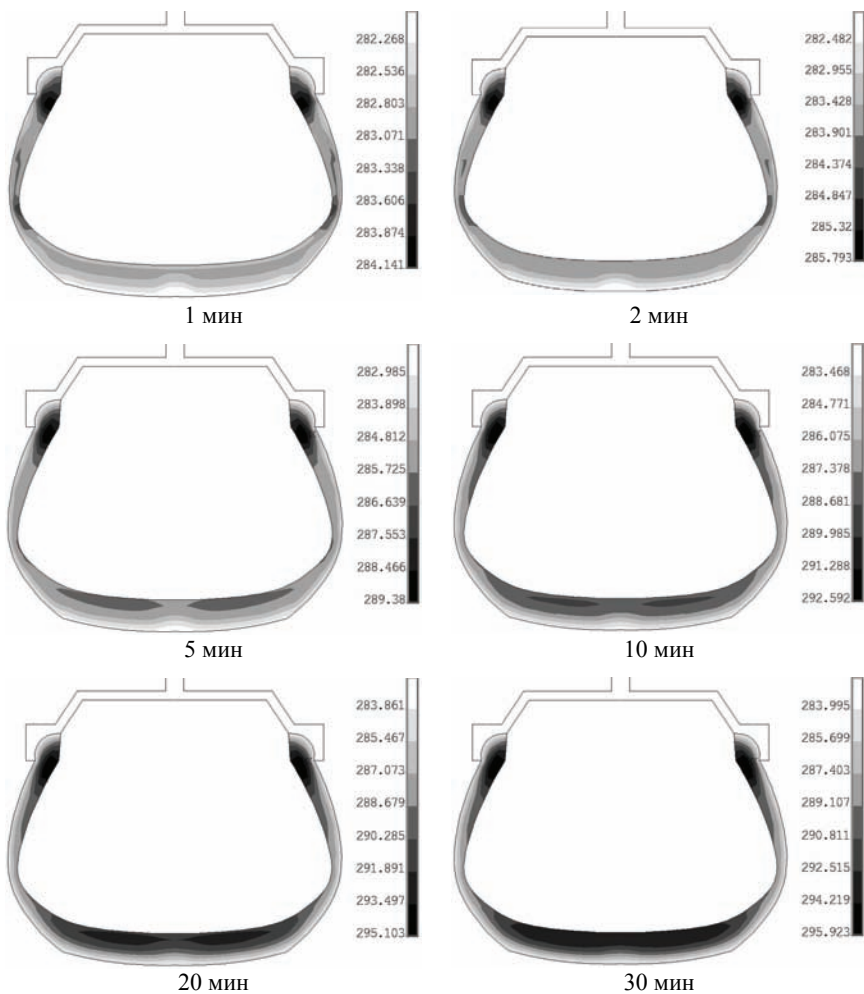


Рисунок 11 – Поля температуры в шине в разные моменты времени

(обозначено Air). Из приведенных результатов видно, что в процессе установления температуры происходит изменение поля температуры: так на начальном этапе (первые 5 минут) наиболее интенсивный нагрев и наибольшая температура наблюдаются в бортовой зоне и на боковине (точки В и А), так как в этих зонах наблюдается наибольшая теплогенерация, так как здесь максимальные амплитуды деформации (рис. 6). Однако из-за того, что зона боковины имеет наименьшую толщину, в ней стремительно устанавливается тепловой баланс, а температура имеет наименьшее значение. На 30 минуте аналогичная ситуация наблюдается в бортовой зоне, где соприкосновение с

металлическим диском, который обладает высокой теплопроводностью, обеспечивает также более интенсивное охлаждение чем в остальных элементах шины. На рис. 11 представлены поля температур в шине в разные моменты времени.

Выводы. Таким образом, в данной работе предложено алгоритм для определения процесса установления теплового состояния в пневматических шинах. Алгоритм основан на численных процедурах реализованных в рамках метода конечных элементов и использует для определения величины теплообразования за один оборот колеса экспериментальные данные. Представлено результаты численных и экспериментальных исследований по формированию теплового состояния в пневматической шине для легкового автомобиля модели 1757013. Результаты показали, что процесс температурной стабилизации наступает через 30 мин. Температура воздуха внутри шины увеличилась на $+6^{\circ}\text{C}$. Температурное поле в самой шине существенно неоднородно и претерпевает перераспределения в процессе нагрева. Максимальная температура на которую выходит шина составила 25°C , что соответствует увеличению на $+16^{\circ}\text{C}$ от исходной температуры окружающей среды в 9°C .

Список литературы: 1. *Ларін О.М.* Теоретичні основи оцінки працездатності шин легкового автомобіля в експлуатації: Дис... докт. техн. наук: 05.22.20. – Харків, 2001. – 312 с. 2. *Коханенко В.Б.* Розробка методів діагностики внутрішніх руйнувань автомобільних шин в умовах експлуатації. Дис... канд. техн. наук. – Харків, 2005. – 216 с. 3. *Дмитриченко М.Ф.* Неруйнівний тепловий контроль автомобільних шин / *М.Ф. Дмитриченко, М.М. Дмитрієв, О.Б. Деркачов, Є.Б. Долгов.* – К.: Знання України, Нац. Транспортний університет, 2007. – 151с. 4. Orange electronic TPMS // <http://www.orangetpmsusa.com/> / 20.12.2011. 5. *S.K. Clark* (Chairman of Editorial Board) et al The pneumatic tire // National Highway Traffic Safety Administration. USA Dep. Of Transportation, 2006. – PP. 707. 6. *Кнороз В.И.* Работа автомобильной шины / *В.И. Кнороз.* – М.: Транспорт, 1978. – 238 с. 7. *Иванова Г.С.* Технология программирования / *Г.С. Иванова.* – М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2002. – 241 с. 8. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / *Я. Г. Пановко.* – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с. 9. *Ларін О.О.* Розробка багатозарової 3D комп'ютерної моделі пневматичної шини з урахуванням ортотропії її механічних властивостей / *Ю.В. Арефін, О.О. Ларін, О.М. Ларін, О.І. Субочев* // Вісник Севастопольського національного технічного університету, Серія: Машиноприладобудування та транспорт. – Севастополь: СевНТУ, 2011. – № 121. – С. 102-105. 10. *М.А. Михеев* Основы теплопередачи / *Михеев М.А., Михеева И.М.* – М.: Энергия, 1977. – 344 с. 11. *Уонг Х.* Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров / *Х. Уонг.* – М.: Атомиздат, 1979. – 89 с. 12. *Юдаев Б.Н.* Теплопередача / *Б.Н. Юдаев.* – М.: Высшая школа, 1973. – 208 с. 13. *Исаченко В.П.* Теплопередача / *Исаченко В.П., В.А. Осипова, А.С. Сукомел.* – М.: Энергия, 1975. – 219 с. 14. *Качугин В.Е.* Расчет скорости воздуха и конвективной теплоотдачи в камере шины / *В.Е. Качугин* // Каучук и резина. – № 3.– 1982. – С. 32-34.

Поступила в редколлегию 25.10.2011

Г.Ю. МАРТЫНЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАДИАЛЬНЫХ ПАССИВНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКОВ ДЛЯ РОТОРА ДЕТАНДЕР-КОМПРЕССОРНОГО АГРЕГАТА

Розглянуто ротор детандер-компресорного агрегату, що входить до складу повнорозмірної стендової установки зріджування природного газу. Представлено результати розрахункових досліджень з визначення оптимальних параметрів радіальних магнітних підшипників на постійних кільцевих магнітах для цього ротору.

The expander-compressor aggregate rotor is considered. It is the part of the full-size test bench for natural gas liquefaction. Results of computational studies of optimal parameters determining for radial magnetic bearings with permanent ring magnets are presented.

Рассмотрен ротор детандер-компресорного агрегата, входящий в состав полноразмерной стендовой установки сжижения природного газа. Представлены результаты расчетных исследований по определению оптимальных параметров радиальных магнитных подшипников на постоянных кольцевых магнитах для этого ротору.

Введение. В настоящее время конкуренцию традиционно используемым для опирания роторов турбодетандеров подшипникам скольжения составляют магнитные подшипники (МП). Они обладают рядом преимуществ, к которым относятся отсутствие маслосистем и потерь на трение, меньший вес и занимаемая площадь, сравнительно небольшой объем обслуживания.

Первые реализации роторов турбодетандерных агрегатов на магнитных подшипниках известны с конца 80-х годов. Так, в 1989 году фирмой Mafitrench corporation (США) был изготовлен турбодетандер, использовавшийся в переработке углеводородного газа, в котором впервые были применены активные магнитные подшипники (АМП) [1]. А уже с 1996 года высокоскоростной турбодетандерный агрегат GE Rotoflow (США) с единым валом и двумя консольно-расположенными рабочими колесами, оснащенный двумя радиальными и одним осевым АМП фирмы S2M, эксплуатировался на площадке плавучей системы нефтедобычи Total N^oKossa site (Конго) [2].

Схема полного активного магнитного подвеса ротора, традиционно применяемая фирмой S2M, изображена на рис. 1.

Принцип действия АМП заключается в том, что ротор удерживается в определенной позиции в радиальном или осевом направлениях магнитными полями, создаваемыми электромагнитами [1, 3]. Эти электромагниты располагаются на статоре, а токи, подаваемые на их обмотки, изменяются в зависимости от положения ротора в пространстве согласно заданному закону управления с помощью системы автоматического регулирования.

Кроме АМП применяются также пассивные МП, то есть магнитные подшипники на постоянных магнитах (МППМ). Наиболее часто используемые на практике схемы включают в себя два и более кольцевых постоянных

магнита с осевой или радиальной намагниченностью [4]. Самоцентрирование может обеспечиваться за счет сил притяжения или отталкивания.

Каждый из этих двух типов МП обладает своими достоинствами и недостатками. Например, для АМП необходима система управления, которая может обеспечить практически любые силовые характеристики. Она не нужна МППМ, но только в них организовать полный магнитный подвес невозможно.

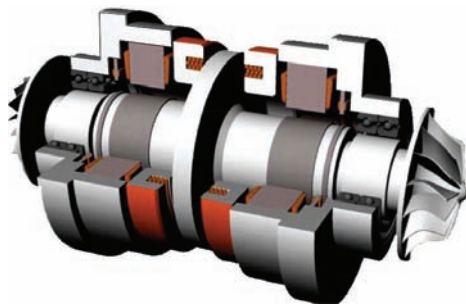


Рисунок 1 – Схема полного магнитного подвеса роторов турбодетандеров фирмы S2M [2]

1. Объект исследований и постановка задачи. В работе [5] предложено для полного магнитного подвеса роторов турбодетандеров использовать схему с двумя радиальными МППМ и одним осевым АМП двустороннего действия, расположенным посередине. Такой тип подвеса является наиболее перспективным в легких высокооборотных роторных машинах, в том числе в турбодетандерах. Его отличительной особенностью является высокая надежность и относительно низкая стоимость по сравнению с подвесом, в котором АМП используются для стабилизации по пяти степеням свободы.

Объектом исследований является ротор детандер-компрессорного агрегата (ДКА), входящего в состав установки сжижения природного газа, разработанной специалистами ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе» [6]. В основу этой установки положен стенд, реализующий технологический процесс реконденсации паров метана при перевозке сжиженного газа на судах-танкерах [7]. Геометрическая модель ротора ДКА представлена на рис. 2. На едином валу расположены два рабочих колеса (детандерное и компрессорное), цапфы радиальных и диск осевого подшипников. Общая масса ротора ~55 кг, требуемая жесткость радиальных опор – от 1 МН/м.

Цель исследований – во-первых, выбор конструкций радиальных магнитных подшипников на постоянных магнитах для ротора ДКА (см. рис. 2), во-вторых, нахождение параметров этих подшипников, обеспечивающих необходимые для подвешивания ротора ДКА силовые и жесткостные характеристики, то есть характеристики, приемлемые с точки зрения практического использования, а также сравнительный анализ различных конструктивных вариантов МППМ по результатам расчетных исследований.

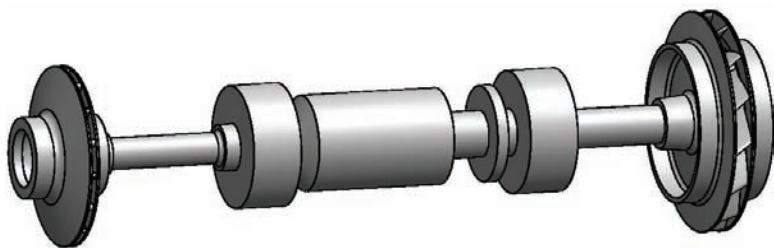


Рисунок 2 – Геометрическая модель ротора ДКА

2. Схема радиального МППМ из двух моноколец и методика расчета магнитных сил. Первый предлагаемый к применению конструктивный вариант радиального МППМ представлен на рис. 3. Кольца МППМ, изготовленные из сплава NdFeB, имеют осевую намагниченность и обеспечивают самоцентрирование в радиальном направлении за счет сил отталкивания.

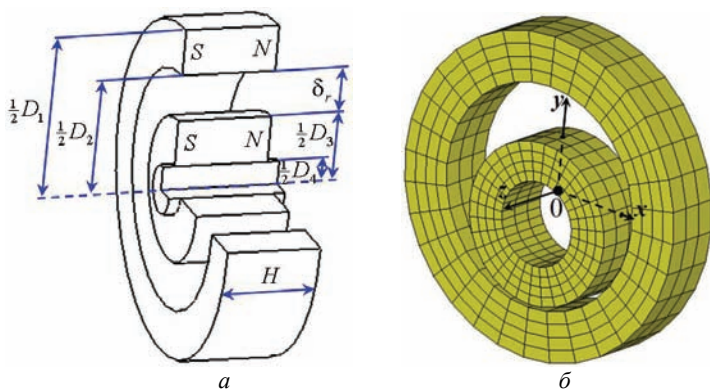


Рисунок 3 – Радиальный МП на постоянных кольцевых магнитах:
a – схема подшипника, *б* – конечноэлементная модель магнитов

На рис. 3, *a* указаны параметры, описывающие геометрию подшипника. В дополнение к ним введен срединный диаметр зазора:

$$D_{23} = \frac{1}{2}(D_2 + D_3); \quad D_2 = D_{23} + \delta_r; \quad D_3 = D_{23} - \delta_r. \quad (1)$$

В работе применена экспериментально подтвержденная и изложенная в [4] методика расчета магнитных сил, возникающих в МППМ и действующих в направлении, противоположном радиальному смещению внутреннего (роторного) магнита. Расчеты зависимостей магнитных сил основаны на решении серии задач магнитостатики в конечноэлементной постановке для заданного числа положений роторного магнита, соответствующих некоторым дискретным значениям его радиального смещения. Конечноэлементная модель при смещенном роторном магните показана на рис. 3, *б*.

Методика расчета магнитных усилий в радиальных МППМ при смеще-

нии роторного магнита только в радиальном направлении заключается в том, что полный номинальный радиальный зазор $2\delta_r$ равномерно разбивается на $(2n+1)$ -ин уровень так, чтобы $(n+1)$ -ый уровень совпадал с центральным положением подвижного кольца, когда координаты его центра масс $x = y = z = 0$ (рис. 3, а) [4]. Далее подвижный магнит смещается по оси y (рис. 3, б) так, чтобы его центр масс совпадал с одним из уровней, и при этом взаимном положении проводится магнитостатический анализ методом конечных элементов.

В результате каждого расчета устанавливались распределение магнитной индукции, напряженности магнитного поля, и вычислялись суммарные магнитные силы в направлениях осей системы координат по тензору натяжений Максвелла. При этом расчетная погрешность не превышала 1 %.

Определено, что при всех положениях роторного магнита суммарные магнитные силы в направлениях x и z равны нулю. Графики зависимости магнитной силы от координаты y центра масс роторного магнита строились в диапазоне $y = [-\delta_r, \delta_r]$, а сама зависимость силы с помощью аппроксимации по расчетным значениям представлялась полиномом третьей или пятой степени.

3. Вариантные расчеты магнитных сил в радиальных МППМ из двух моноколец с осевой намагниченностью. Серия предварительных единичных расчетов со случайными параметрами МППМ позволила обнаружить наличие множества их различных комбинаций, обеспечивающих примерно одинаковые значения магнитной силы. Отсюда следует вывод о большом количестве экстремумов функции магнитной силы F_M , зависящей от этих параметров. Поэтому поиск набора параметров, доставляющих максимум функции F_M , далее выполнялся с использованием процедуры оптимизации.

Применялись два метода оптимального проектирования [8]. Первый из них – метод нулевого порядка, использующий линейные комбинации зависимых параметров и не использующий их производные. Он предполагает построение аппроксимирующей функции, а по ней – гиперповерхности, которая и подвергается максимизации вместо фактической целевой функции. Для уточнения результатов применялся второй метод, а именно – первого порядка, использующий градиенты зависимых переменных относительно варьируемых параметров, которые вычисляются методом наискорейшего спуска.

При поиске оптимальных проектов варьируемыми параметрами являлись срединный диаметр зазора D_{23} и ширина магнитов H (см. рис. 3, а). Исходя из технически обоснованных предположений о допустимости величины зазора в подшипниках, для всех проектов значение зазора принималось равным 1 мм. Внутренний диаметр подвижного кольцевого магнита принимался равным диаметру посадки на вал $D_4 = 60$ мм, а для внешнего диаметра D_1 неподвижного магнита было выбрано несколько дискретных значений исходя из конструктивных особенностей ДКА и экономических обоснований. На варьируемые параметры накладывались ограничения, описывающие гео-

метрически возможные конструктивные варианты, а в качестве целевой функции было выбрано значение магнитной силы F_M при смещении внутреннего магнита на $0,9\delta_r$. Результаты для наиболее приемлемых проектов сведены в табл. 1.

Таблица 1 – Результаты оптимизации МППМ по магнитной силе при фиксированном зазоре

№ проекта	D_1 , мм	D_{23} , мм	D_4 , мм	H , мм	δ_r , мм	$F_{M(0,9\delta)}$, Н
1	100	84,6	60	9,7	1	70,3
2	150	128,1	60	17,7	1	136,7
3	200	161,2	60	46,6	1	201,2
4	200	169,2	40	24,4	1	213,5

Анализ результатов показал, что при заданных значениях параметров не удастся получить приемлемых значений восстанавливающей силы, особенно с учетом того, что эти значения были определены при смещении, близком к полному зазору, а при вдвое меньшем смещении их величина также уменьшится примерно в два раза. Объяснением этому может служить малый зазор. Так, на рис. 4 представлены результаты расчетов магнитостатики для конструкций с одинаковыми параметрами D_1 , D_{23} , D_4 и H , но с разным значением зазора δ_r . Видно, что при зазоре 1 мм большинство эквипотенциальных линий магнитного поля замыкается вне зазора. Это и ограничивает возможность роста подъемной силы. Ситуация меняется при увеличении зазора, что приводит и к увеличению силы.

Исходя из этих предположений в дальнейших исследованиях в качестве третьего варьируемого параметра в дополнение к D_{23} и H был выбран зазор δ_r . Результаты для наиболее приемлемых проектов сведены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты оптимизации МППМ по магнитной силе при варьируемом зазоре

№ проекта	D_1 , мм	D_{23} , мм	D_4 , мм	H , мм	δ_r , мм	$F_{M(0,9\delta)}$, Н
1	150	114	60	50	10,0	343,5
2	175	131,5	60	50	12,5	500,3
3	200	147,5	60	68	16,5	696,7
4	220	159,5	60	93	18,5	884,5

Такой подход позволил добиться более чем трехкратного повышения силы. Если учесть, что для радиального подвешивания ротора применяются два МППМ, то практически все представленные в табл. 2 проекты являются приемлемыми по величине подъемной силы и при смещении на $0,9\delta_r$, и при смещении на $0,5\delta_r$.

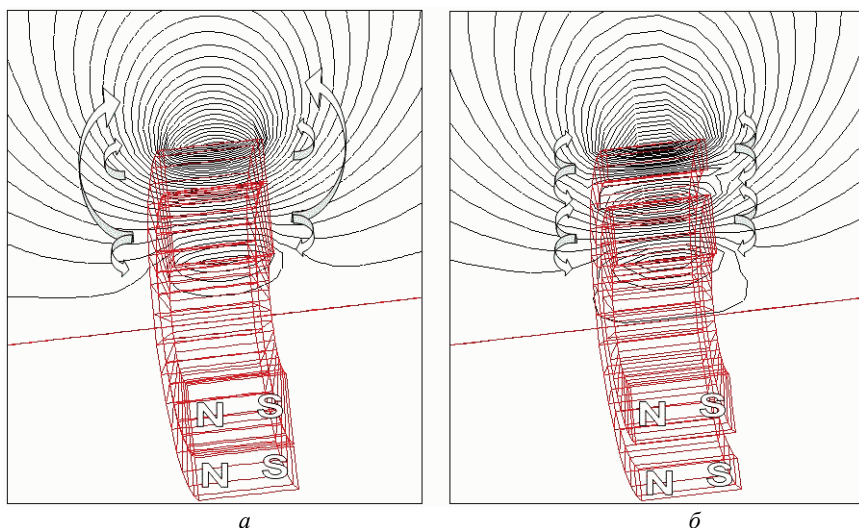


Рисунок 4 – Эквипотенциальные линии магнитного поля в радиальном МППМ при различном зазоре: $a - \delta_r = 1$ мм, $b - \delta_r = 12,5$ мм

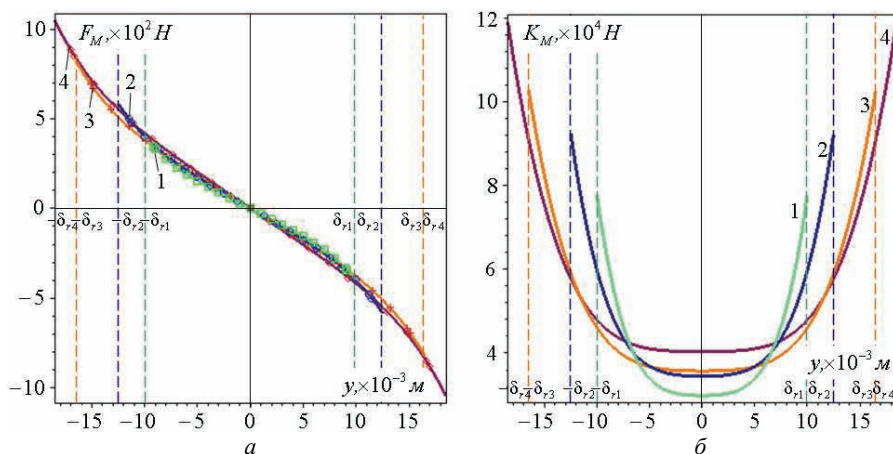


Рисунок 5 – Зависимости характеристик МППМ от радиального смещения подвижного магнита при различных параметрах: a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

На рис. 5 приведены характеристики МППМ для всех четырех проектов. Расчетные значения отмечены маркерами, а графики – номером проекта. Границы возможных смещений ротора обозначены соответствующими величинами зазоров $\delta_{r,i}$.

Характерно, что только применение полного полинома пятой степени

позволило с достаточной точностью аппроксимировать расчетные данные.

Коэффициенты жесткости (квазиупругие коэффициенты) в нелинейных системах, каковой в данном случае является МППМ, зависят от обобщенных координат и вычислялись как производные по координате [9]:

$$K_M(y) = -\frac{\partial F_M(y)}{\partial y}. \quad (2)$$

Таким образом, на рис. 5, а и рис. 5, б представлены соответственно зависимости магнитных сил и коэффициентов жесткости от смещений роторного кольцевого магнита. Из этих рисунков видно, что для всех оптимальных конструктивных вариантов МППМ силовые характеристики более близки друг к другу, чем жесткостные. Общим является то, что характеристики являются симметричными и жесткими во всем диапазоне.

4. Влияние направления намагниченности колец на величину силы.

С целью обеспечения большего значения подъемной силы при приблизительно тех же материалозатратах редкоземельных металлов был проанализирован конструктивный вариант МППМ, в котором применены кольцевые магниты с радиальной намагниченностью. На рис. 6 представлены результаты расчетов магнитостатики для конструкций с одинаковыми параметрами D_1 , D_{23} , D_4 и H , но с разным значением зазора δ_r .

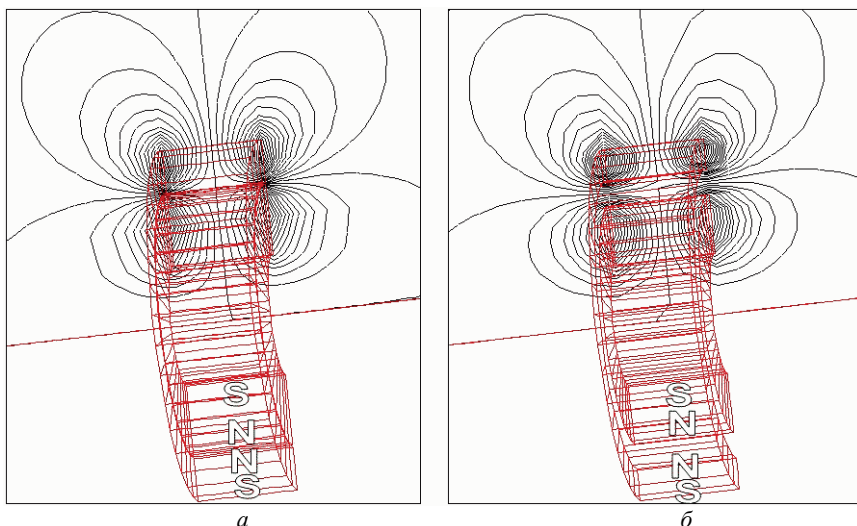


Рисунок 6 – Эквипотенциальные линии магнитного поля в радиальном МППМ с радиальной намагниченностью колец: а – $\delta_r = 1$ мм, б – $\delta_r = 12,5$ мм

Видно, что, как и в предыдущем случае, сравнительно большее количество эквипотенциальных линий магнитного поля замыкается в зазоре при

большем значении последнего. Следовательно, как и прежде, увеличение зазора (до некоторого уровня), а не его уменьшение приводит к увеличению силы. Поэтому варьируемыми параметрами при решении задачи оптимизации также были δ_r , D_{23} и H . Результаты для лучших проектов сведены в табл. 3.

Таблица 3 – Результаты оптимизации по магнитной силе МППМ с радиальной намагниченностью колец

№ проекта	D_1 , мм	D_{23} , мм	D_4 , мм	H , мм	δ_r , мм	$F_{M(0,9\delta)}$, Н
1	150	118,4	60	40,8	11,1	138,8
2	175	136,2	60	61,7	13,1	203,5
3	200	154,2	60	56,6	16,8	276,6
4	220	165,4	60	57,1	18,8	342,5

На рис. 7 представлены зависимости магнитных сил и коэффициентов жесткости от смещений роторного кольцевого магнита для оптимальных проектов МППМ с геометрическими параметрами, приведенными в табл. 3.

Анализ результатов показывает, что предложенный подход не позволяет добиться повышения силы, а, напротив, приводит к ее уменьшению более чем в два раза. То же самое касается и коэффициента жесткости.

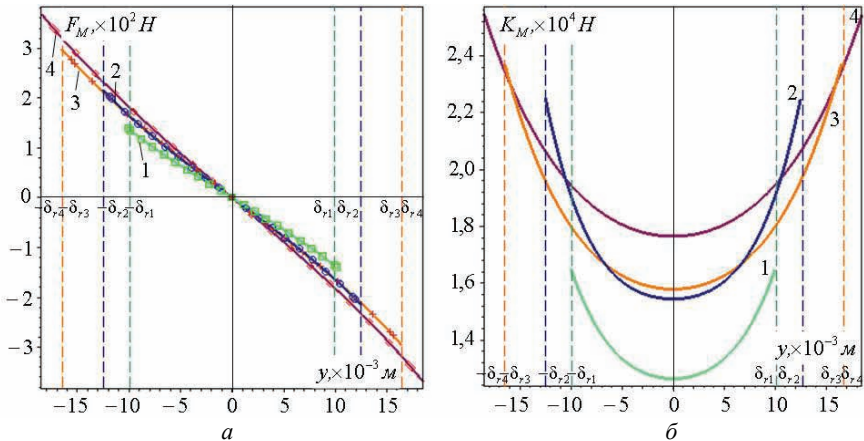


Рисунок 7 – Зависимости характеристик МППМ с радиальной намагниченностью колец от радиального смещения подвижного магнита при различных параметрах:

a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

5. Магнитные силы в радиальных МППМ из двух поликолец с осевой намагниченностью. Еще одним из возможных вариантов радиальных МППМ является конструкция, в которой используются два поликольца – ста-

торное и роторное. Под поликольцом понимается пакет колец с одинаковым типом намагниченности (осевой или радиальной), но разным направлением. Радиальный подвес реализуется за счет сил отталкивания.

Схема и расчетная модель радиального МППМ из двух поликолец с осевой намагниченностью каждого кольца, входящего в поликольцо, приведены на рис. 8. Для того чтобы представить и проанализировать принцип работы и взаимодействия магнитных элементов в этом случае, равно как в предыдущих и последующих, можно воспользоваться эквивалентной механической моделью, применяемой при расчете сил по тензору натяжений Максвелла, которая представлена на рис. 9 [10]. Анализ магнитного взаимодействия тел производится исходя из тезиса, что линии поля стремятся сократится в продольном направлении и расширится в поперечном [10].

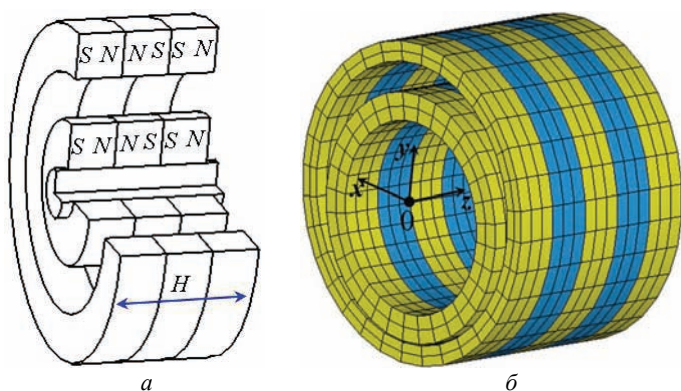


Рисунок 8 – Радиальный МП из поликолец с осевой намагниченностью колец:
a – схема подшипника, *б* – конечноэлементная модель магнитов

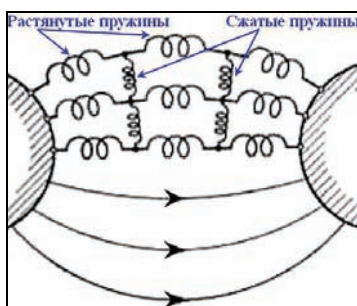


Рисунок 9 – Механическая модель упругих взаимодействий между линиями электромагнитного поля для расчета сил по тензору натяжений Максвелла

Предварительный анализ данного типа МППМ с помощью этой механической модели и пробных расчетов магнитостатики показал, что в отличие от подшипника, в котором использовались два монокольца (см. рис. 3-4), мак-

симальное значение силы достигается при меньшем значении радиального зазора. Этот вывод подтверждают представленные на рис. 10 результаты расчетов для конструкций со всеми одинаковыми параметрами кроме зазора. Очевидно, что при меньшем зазоре в нем достигается большая концентрация силовых линий. Это и обеспечивает большее значение силы.

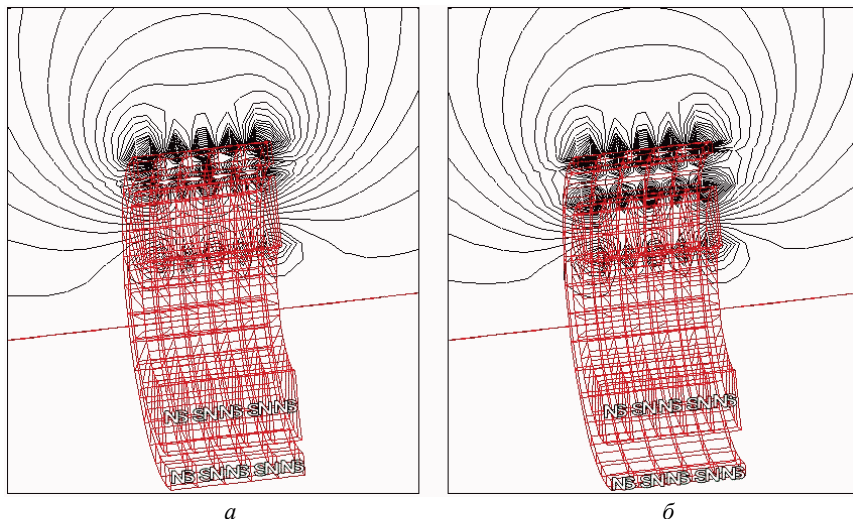


Рисунок 10 – Эквипотенциальные линии магнитного поля в радиальном МППМ из поликолец с осевой намагниченностью колец: $a - \delta_r = 6$ мм, $b - \delta_r = 16$ мм

Результаты для оптимальных проектов, выполненных с габаритными размерами пакетов колец, равными размерам колец (табл. 2), и с фиксированной толщиной пакета H , равной оптимальному значению в проектах с монокольцами (табл. 2), сведены в табл. 4. При оптимизации к варьируемым параметрам δ_r , D_{23} добавлено количество колец N_{mag} и исключена толщина H .

На рис. 11 представлены зависимости магнитных сил и коэффициентов жесткости от смещений пакета роторных магнитов для оптимальных проектов МППМ, параметры которых приведены в табл. 4.

Таблица 4 – Результаты оптимизации по магнитной силе МППМ с осевой намагниченностью колец в пакете

№ проекта	D_1 , мм	D_{23} , мм	D_4 , мм	H , мм	N_{mag}	δ_r , мм	$F_M(0,9\delta)$, Н
1	150	128,5	60	50	5	3,5	1319,0
2	175	149,0	60	50	4	4,0	1535,4
3	200	147,0	60	68	6	4,0	2159,2
4	220	177,5	60	93	7	4,5	3308,7

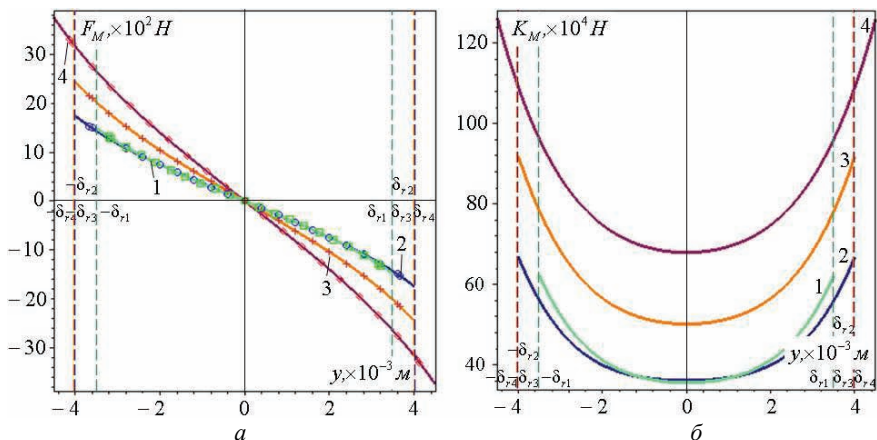


Рисунок 11 – Зависимости характеристик МП из пакетов колец с осевой намагниченностью от радиального смещения подвижных магнитов при различных параметрах: a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

Сравнение с результатами, приведенными на рис. 5 и полученными при оптимизации конструкций, состоящих из моноколец, показывает, что при тех же массогабаритных размерах кольцевых постоянных магнитов с осевой намагниченностью применение пакетирования позволяет увеличить значение восстанавливающей силы в 3-4 раза, а коэффициента жесткости вблизи положения равновесия – в 4-5 раз.

6. Оптимальный выбор параметров радиальных МППМ из поликолец с осевой намагниченностью для ротора ДКА. Следующие оптимальные проекты выполнены для конструкции МППМ с осевой намагниченностью поликолец, но с габаритными размерами, близкими к размерам существующих подшипников ротора ДКА и их посадочных мест (рис. 2). Результаты оптимального проектирования при варьируемых δ_r , D_{23} , N_{mag} сведены в табл. 5.

Таблица 5 – Результаты оптимизации МППМ с рациональными габаритными размерами поликолец

№ проекта	D_1 , мм	D_{23} , мм	D_4 , мм	H , мм	N_{mag}	δ_r , мм	$F_M^{(0,9\delta)}$, Н
1	100	82,0	60	65	6	4,0	1003,7
2	120	96,5	60	65	5	5,5	1247,9
3	140	114,0	60	65	5	6,0	1537,4
4	160	133,0	60	65	5	6,0	1803,6

Зависимости магнитных сил и коэффициентов жесткости от смещений

пакета роторных магнитов для оптимальных проектов МППМ, представленных в табл. 5, приведены на рис. 12. Анализ показывает, что уменьшение внешнего диаметра в $\sim 1,5-2$ раза все равно позволяет сохранить приемлемое для подвешивания ротора ДКА значение подъемной силы, но значение коэффициента жесткости не достигает требуемой величины.

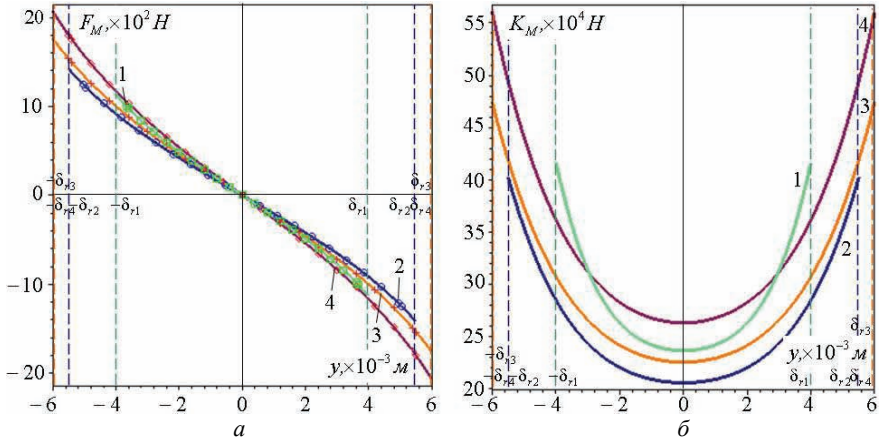


Рисунок 12 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящих из пакетов колец: a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

7. Зависимость магнитных сил в радиальных МППМ из поликолец от направления намагниченности. Другим вариантом радиального МППМ является подшипник из поликолец с радиальной намагниченностью колец, входящих в пакет. Его схема и расчетная модель показаны на рис. 13.

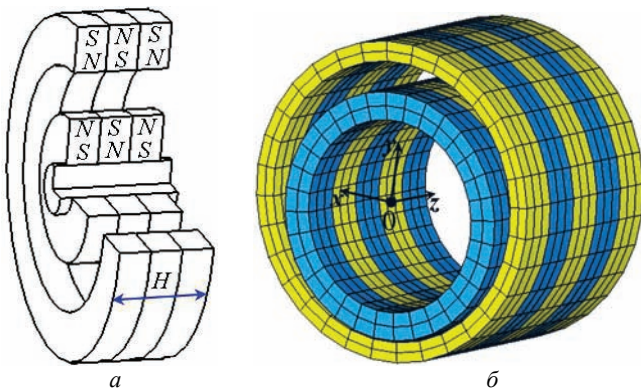


Рисунок 13 – Радиальный МП из поликолец с радиальной намагниченностью колец: a – схема подшипника, b – конечноэлементная модель магнитов

Параметры, соответствующие оптимальным проектам этого типа подшипника с габаритными размерами, близкими к размерам посадочных мест подшипников скольжения ротора ДКА, то есть такими же, как и были приняты при исследовании конструкции «поликольцо с осевой намагниченностью колец», приведены в табл. 6. При оптимизации варьируемыми параметрами, как и в предыдущем случае, являлись δ_r , D_{23} , $N_{\text{маг}}$, а толщина определялась размерами посадочных мест элементов подшипников ($H = 65$ мм), так как предварительными расчетами было показано, что для таких конструкций МП (см. рис. 8, 13) толщина стремиться к верхней границе, а значит, ее нужно фиксировать исходя из конструктивных и экономических соображений.

Таблица 6 – Результаты оптимизации по магнитной силе МППМ с радиальной намагниченностью колец в пакете

№ проекта	D_1 , мм	D_{23} , мм	D_4 , мм	H , мм	$N_{\text{маг}}$	δ_r , мм	$F_M(0,9\delta)$, Н
1	100	83,5	60	65	6	3,5	1102,4
2	120	99,0	60	65	6	4,0	1580,4
3	140	117,0	60	65	6	4,0	2041,7
4	160	138,0	60	65	7	4,0	2812,6

Картини поля, полученные при расчетах магнитостатики и представленные на рис. 14, позволяют сделать несколько выводов.

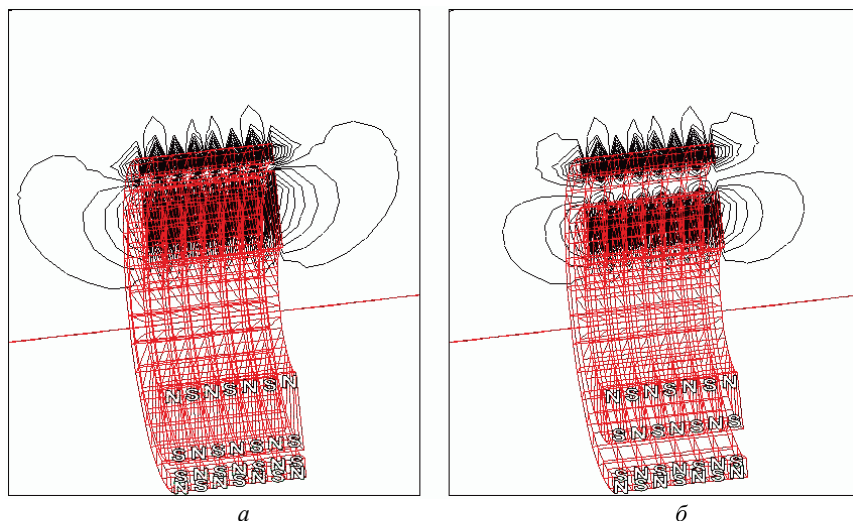


Рисунок 14 – Эквипотенциальные линии магнитного поля в радиальном МППМ из поликолец с радиальной намагниченностью колец: а – $\delta_r = 4$ мм, б – $\delta_r = 14$ мм

Во-первых, большее значение магнитной силы достигается при относительно меньшем зазоре, а во-вторых, при использовании колец с радиальной намагниченностью, в отличие от предыдущего случая (см. рис 10), удается добиться концентрации большинства силовых линий в зазоре, что подтверждается и сравнением увеличенного представления полей на рис. 15.

Зависимости магнитных сил и коэффициентов жесткости от смещений пакета роторных магнитов для оптимальных проектов МППМ с радиальной намагниченностью колец в пакете (см. табл. 6) приведены на рис. 16.

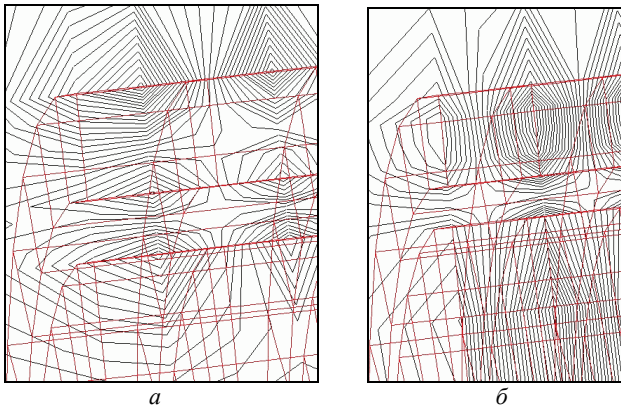


Рисунок 15 – Отличие в распределении эквипотенциальных линий магнитного поля в зазоре радиального МППМ из поликолец с разной намагниченностью колец: *а* – с осевой, *б* – с радиальной

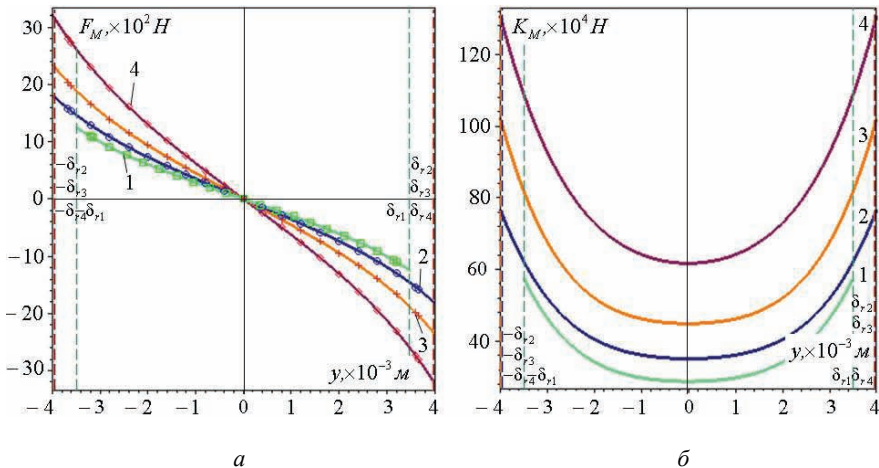


Рисунок 16 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящих из пакетов колец с радиальной намагниченностью: *а* – магнитной силы, *б* – квазиупругого коэффициента

Сравнительный анализ результатов (рис. 12 и 16) показывает, что при тех же массогабаритных размерах сила в 1,5-2 раза, а коэффициент жесткости вблизи положения равновесия в 4-5 раз больше, чем при использовании пакетов с осевой намагниченностью колец. Это объясняется тем, что силовые линии магнитного поля не являются противоположно направленными в местах сопряжения магнитов в пакете, а наоборот сливаются, чем усиливают интенсивность магнитного поля в зазоре (см. рис. 15).

8. Магнитные силы в радиальном МППМ из набора колец с осевой намагниченностью. Все рассмотренные выше МППМ обеспечивают самоцентрирование в радиальном направлении за счет сил отталкивания. На практике кроме таких вариантов применяются также радиальные МППМ, самоцентрирующиеся за счет притяжения. Конструкция такого МППМ приведена на рис. 17. Она предполагает поочередное расположение на статоре и роторе набора одинаковых колец с осевой намагниченностью в одном направлении.

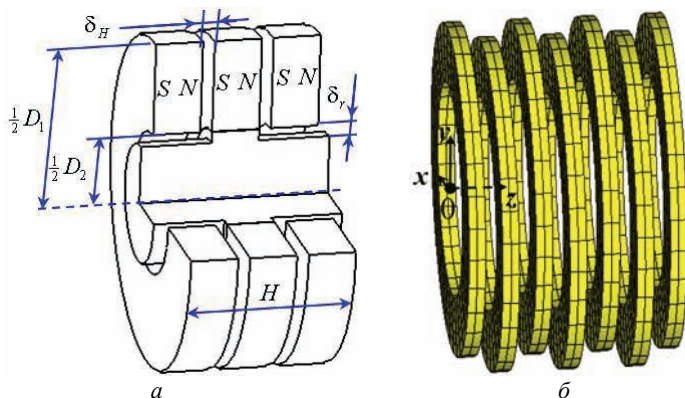


Рисунок 17 – Радиальный МП из набора колец с осевой намагниченностью:
 а – схема подшипника, б – конечноэлементная модель магнитов

Процесс самоцентрирования такого МППМ может быть проиллюстрирован с помощью результатов расчетов магнитостатики, представленных на рис. 18 и выполненных при смещенном и центральном положениях ротора. Для пояснения процесса самоцентрирования можно воспользоваться приведенной схемой взаимодействия магнитных колец в наборе, изображенной на рис. 19 и построенной с учетом механической модели (см. рис. 9). Так, приложение в схеме к нерастяжимой нити продольной силы P (соответствует сжатию линий, растянутых в продольном направлении радиальным смещением роторных магнитов) приводит к возникновению силы F_M (аналог магнитной силы), действующей радиально на подвижные магниты, расположенные на роторе, и вызывающей центрирующее смещение.

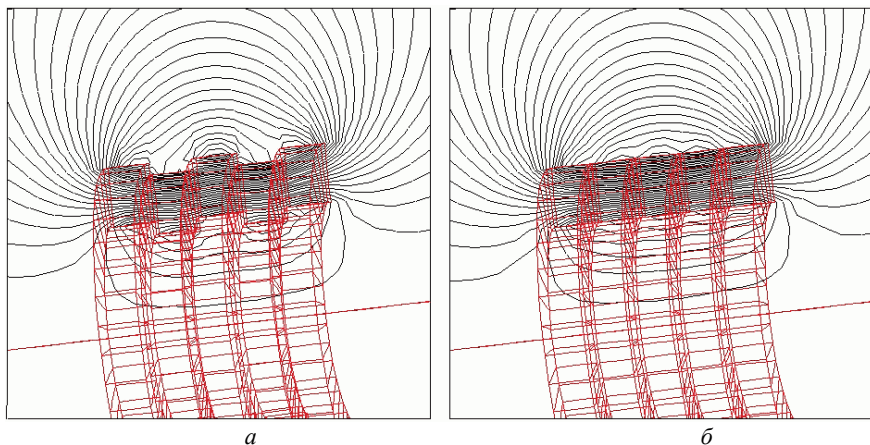


Рисунок 18 – Эквипотенциальные линии магнитного поля в радиальном МППМ из набора колец с осевой намагнитченностью: $a - y = \delta_r$, $b - y = 0$

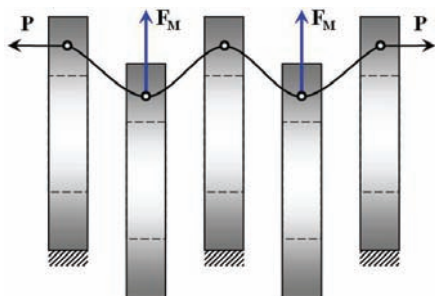


Рисунок 19 – Схема упругих взаимодействий в радиальном МППМ из набора колец с осевой намагнитченностью

В отличие от предыдущих вариантов для данной схемы МППМ (см. рис. 17, *a*) первоначально были выбраны следующие варьируемые параметры: D_1 , D_2 , δ_H и $N_{\text{маг}}$, где δ_H – расстояние между соседними подвижными и неподвижными кольцами, то есть осевой зазор в радиальном подшипнике. Радиальный зазор δ_r не является определяющим в данной конструкции, а задается как известный параметр исходя из конструктивных особенностей посадки магнитных колец или как максимально допустимое радиальное смещение.

Предварительные расчетные исследования по поиску оптимальных решений показали, что значение параметра D_1 всегда стремится к верхнему пределу, равно как и толщина всего набора H и количество магнитов $N_{\text{маг}}$. Напротив оптимальное значение параметра δ_H стремится к нижнему пределу. Поэтому в дальнейших исследованиях был оставлен только один варьи-

руемый параметр D_2 , а значения параметра D_1 выбирались равными значениям оптимальных проектов предыдущих двух конструкций (см. табл. 5, 6), то есть близкими к размерам существующих подшипников ротора ДКА и их посадочных мест. Осевой зазор был выбран исходя из заданных допустимых значений осевого смещения ротора, определяемых осевым подшипником, а также конструктивных соображений, с одной стороны, и возможности обеспечения максимума силы, с другой. Количество магнитов такой конструкции может быть только нечетным, причем статорных магнитов на один больше чем роторных. Совокупность параметров δ_H и N_{mag} при общей ширине набора колец в подшипнике, близкой к заданным размерам посадочных мест роторных элементов предыдущих двух типов подшипников, позволила определить пять вариантов геометрии исходя из возможностей их технической реализации. Значения параметров для них сведены в табл. 7. Здесь $\sum\delta_H$ и $\sum H_{mag}$ – соответственно общая ширина воздуха и всех магнитов в пределах ширины подшипника.

Таблица 7 – Варианты геометрии подшипника

№ варианта	N_{mag}	H , мм	δ_H , мм	$\sum\delta_H$, мм	H_{mag} , мм	$\sum H_{mag}$, мм
1	3	62	1	2	20	60
2	5	64	1	4	12	60
3	7	69	1	6	9	63
4	9	71	1	8	7	63
5	9	62	1	8	6	54

При оптимизации для каждого из вариантов было выполнено по четыре проекта со значениями D_1 и δ_r такими же, как и оптимальные значения, полученные для конструкции «поликольцо с радиальной намагниченностью колец» как варианта подшипника, обеспечивающего максимальную подъемную силу (см. табл. 6). Результаты оптимизации приведены в табл. 8.

Таблица 8 – Результаты оптимизации по магнитной силе МППМ из набора колец с осевой намагниченностью

№ проекта	D_1 , мм	δ_r , мм	№ варианта									
			1		2		3		4		5	
			D_2 , мм	$F_{M(\delta)}$, Н	D_2 , мм	$F_{M(\delta)}$, Н	D_2 , мм	$F_{M(\delta)}$, Н	D_2 , мм	$F_{M(\delta)}$, Н	D_2 , мм	$F_{M(\delta)}$, Н
1	100	3,5	76	825,2	80	1392,9	81	1945,8	83	2274,4	83	2044,2
2	120	4,0	94	1169,0	98	1953,5	101	2702,3	102	3137,8	102	2802,1
3	140	4,0	115	1456,6	120	2425,5	120	3343,4	122	3877,5	122	3455,6
4	160	4,0	134	1757,4	139	2918,8	141	4008,6	141	4639,7	142	4124,7

Зависимости магнитных сил и коэффициентов жесткости от смещений роторных магнитов для оптимальных проектов МППМ из набора колец с осевой намагниченностью (см. табл. 8) приведены на рис. 20-24. Следует отметить, что для корректной аппроксимации силовой характеристики в данном случае потребовалось использование полинома седьмой степени, в отличие от предыдущих случаев, когда было достаточно пятой.

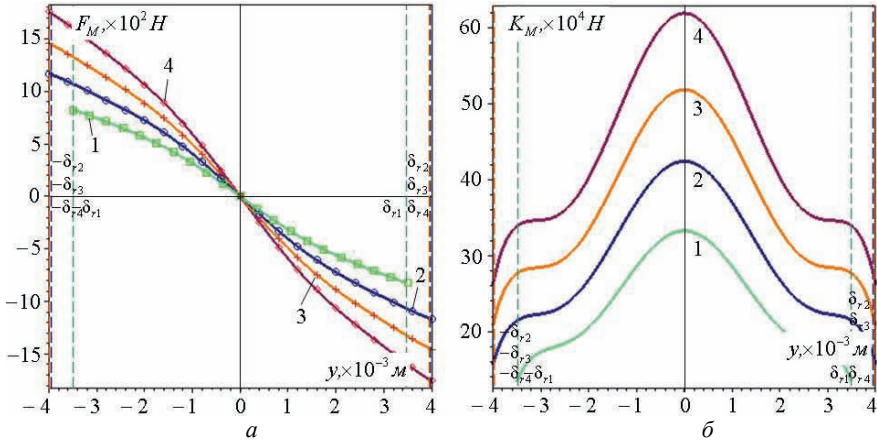


Рисунок 20 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящего из набора 3 колец с осевой намагниченностью (вариант 1):
 a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

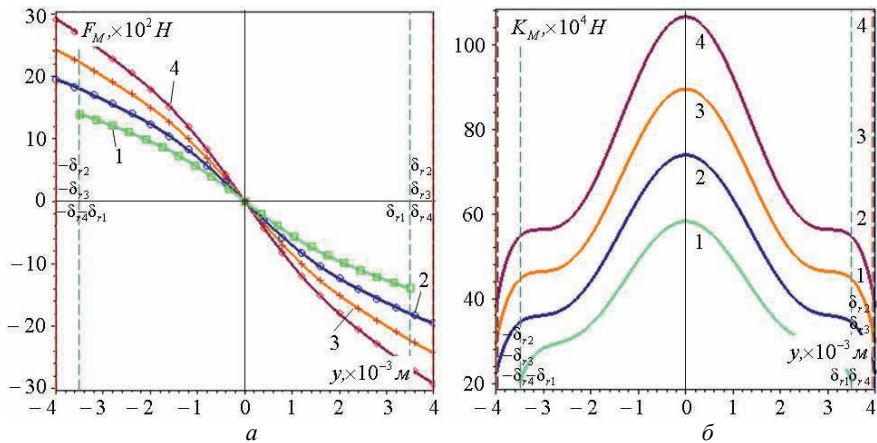


Рисунок 21 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящего из набора 5 колец с осевой намагниченностью (вариант 2):
 a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

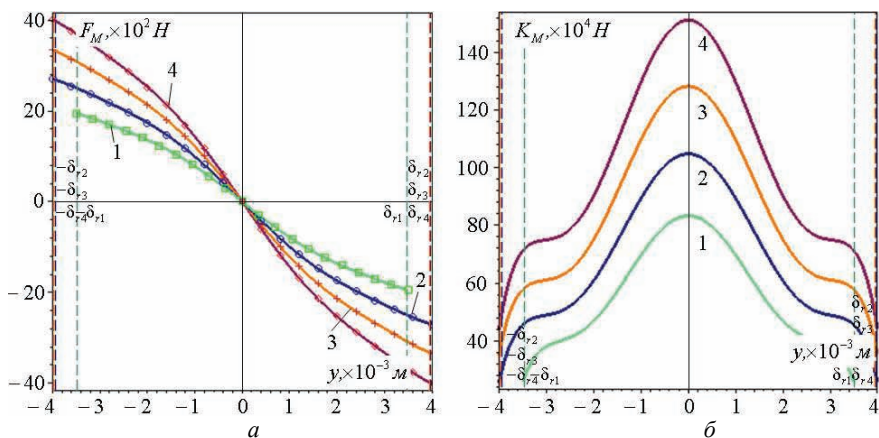


Рисунок 22 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящего из набора 7 колец с осевой намагниченностью (вариант 3):
 a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

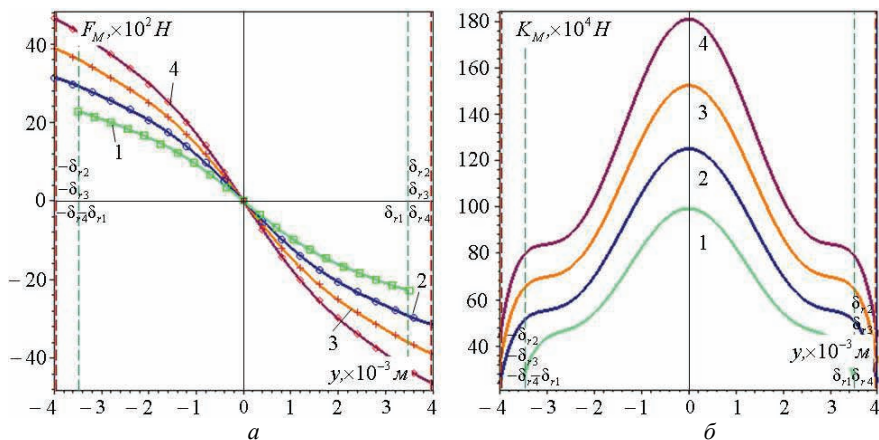


Рисунок 23 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящего из набора 9 колец с осевой намагниченностью (вариант 4):
 a – магнитной силы, b – квазиупругого коэффициента

Оценивая результаты, можно прийти к выводу, что при тех же массогабаритных размерах такое конструктивное исполнение позволяет увеличить подъемную силу по сравнению с лучшим из предыдущих вариантов «поликольцо с радиальной намагниченностью колец» в 1,3-2 раза, а коэффициент жесткости вблизи положения равновесия – в 1,5-3 раза, но только для всех вариантов конструкции, кроме первого, в котором используются два статорных и один роторный магнит и который является наиболее простым с точки зрения практической реализации.

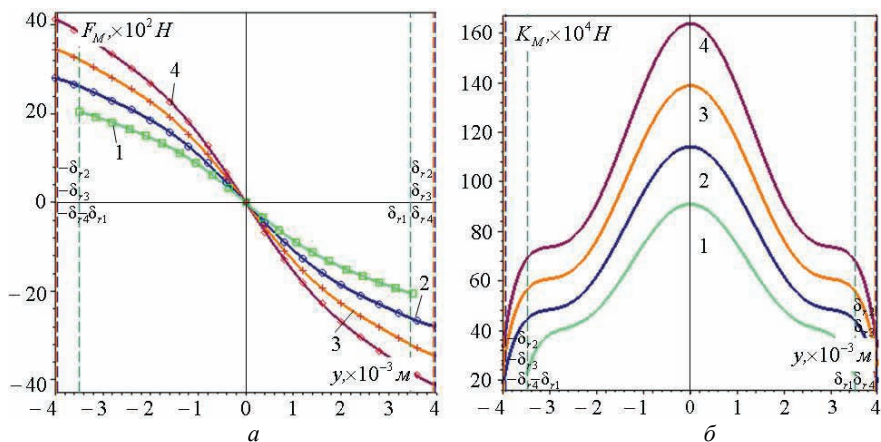


Рисунок 24 – Зависимости характеристик МП для ротора ДКА, состоящего из набора 9 колец с осевой намагнитченностью (вариант 5): а – магнитной силы, б – квазиупругого коэффициента

Кроме того, для всех оптимальных проектов при всех значениях количества магнитов силовые характеристики подобны и отличаются только значениями. Так же можно охарактеризовать и зависимости коэффициентов жесткости. Эти характеристики являются симметричными во всем диапазоне возможных смещений, как и у предыдущих четырех конструкций, но в отличие от них мягкими. При сравнении лучших, а именно последних двух конструктивных вариантов МППМ, также не следует забывать, что они, равно как и все другие радиальные МП, неустойчивы в осевом направлении. Результаты сравнительных расчетов по осевой силе приведены в табл. 9.

Таблица 9 – Сравнение МППМ по значению силы F_{Mz} при максимально возможных смещениях в осевом направлении

№ про-екта	y , мм	δ_H , мм	Поликольца		Наборы колец					
			z , мм	F_{Mz} , Н	z , мм	F_{Mz} , Н				
						№ варианта геометрии				
						1	2	3	4	5
1	0	1	$-\delta_H$	$-0,9\delta_H$	-268,8	-268,0	-468,6	-619,3	-730,3	-658,6
2					-298,2	-324,1	-554,2	-723,6	-838,7	-746,6
3					-342,3	-374,0	-628,6	-815,1	-932,4	-822,0
4					-388,2	-423,3	-698,9	-896,1	-1009,2	-883,9

Здесь y и z – смещения центров масс роторных магнитов вдоль осей декартовой системы координат (см. рис. 13, б и 17, б), а F_{Mz} – значение магнитной силы в осевом направлении. Для обоих вариантов МППМ значение этой силы является отрицательным при отрицательном смещении, что свидетель-

ствуется о ее дестабилизирующем действии. Только для первого варианта конструкции «набор колец с осевой намагниченностью» значение осевого усилия при крайних отклонениях сопоставимо с теми же усилиями в предыдущей конструкции. Для остальных четырех вариантов они в 1,7-2,5 раза больше. Это свидетельствует о предпочтительности конструкции «поликольцо с радиальной намагниченностью колец», но окончательный выбор необходимо делать, учитывая, кроме последнего, и другие факторы: соотношение максимальных восстанавливающих усилий и коэффициентов жесткости в радиальном направлении, простоту технической реализации той или иной конструкции, ну и, конечно, массогабаритные размеры, определяющие стоимость подшипника.

Заключение. Переход от традиционных подшипников скольжения к магнитным опорам, безусловно, обладает целым рядом преимуществ, главными из которых являются отказ от маслосистем и снижение потерь на трение.

В работе предложена схема полного магнитного подвеса ротора детандер-компрессорного агрегата, которая позволяет сделать управляемой только одну степень свободы ротора из пяти. Это достигается за счет применения постоянных кольцевых магнитов с осевой намагниченностью в радиальных магнитных подшипниках. Такой подход удешевляет конструкцию и снижает эксплуатационные затраты.

Решение задачи оптимизации позволило найти геометрические параметры кольцевых магнитов, обеспечивающие требуемую величину подъемной силы, хотя при этом величина статического смещения ротора несколько превышает допустимые значения. При этом проведенные расчетные исследования позволили выявить, что уменьшением зазора в радиальных МППМ, выполненных из двух колец с осевой намагниченностью, невозможно добиться увеличения магнитных восстанавливающих усилий из-за нерационального перераспределения силовых линий магнитного поля.

Кроме того, показано, что применение в такой конструкции МППМ колец примерно тех же размеров, но с радиальной намагниченностью не дает выигрыша по несущей способности, а, наоборот, приводит к уменьшению как восстанавливающей силы, так и жесткости опирания.

Использование же вместо двух колец двух пакетов колец при тех же массогабаритных размерах меняет ситуацию, и уже более предпочтительными являются кольца с радиальной намагниченностью.

Для получения необходимых жесткостных параметров радиальных магнитных опор был также проанализирован радиальный магнитный подшипник, выполненный как набор кольцевых постоянных магнитов с осевой намагниченностью, в котором центрирование достигается за счет сил притяжения, а не отталкивания.

В итоге, проведенные исследования позволили найти оптимальные па-

раметры для последних трех конструктивных вариантов, которые обеспечивают возможность подвесить ротор турбодетандера с требуемой жесткостью, вписавшись в размеры существующих подшипников скольжения.

При выборе конструкции МППМ следует также учитывать, что использование колец с осевой намагниченностью позволяет применять обмотки подмагничивания для обеспечения возможности управления жесткостью подшипника [11]. Однако окончательный выбор конструкции МППМ для ротора ДКА должен быть сделан по результатам расчетов динамики ротора с полученными характеристиками опор.

Список литературы: 1. *G. Schweitzer, E.H. Maslen* Magnetic bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. – Berlin: Springer, 2009. – 535 p. 2. Magnetic bearing for oil&gas industry. – S2M/SKF, 2010. – 14 p. 3. *Журавлев Ю.Н.* Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 4. *Мартыненко Г.Ю.* Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах // Вісник НТУ «ХП». – 2007. – № 38. – С. 83-95. 5. *Ульянов Ю.М., Мартиненко Г.Ю., Смирнов М.М.* Система управління осьовим рухом ротора на комбінованому магнітному підвісі з пасивними радіальними і активним осьовим підшипниками // Зб. наук. пр. – Х.: УкрДАЗТ, 2008. – Вип. 97. – С. 107-118. 6. *Бухолдин Ю.С., Левашов В.А., Гадяка В.Г., Мартыненко Г.Ю.* Особенности проектирования ротора с опорами на постоянных магнитах для детандер-компрессорного агрегата // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Х.: Технологический центр, 2011. 7. *Бухолдин Ю.С., Зленко А.В., Таринов В.М., Северин А.С., Шахов С.В.* Совершенствование технологии сжижения природного газа на базе модернизированного стенда реконденсации метана // Технические газы. –Одесса: ПО «Издательский центр», 2010. – № 4. – С. 26-29. 8. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с. 9. *Пановко Я.Г., Плотников А.М.* Общие сведения о нелинейных механических системах // Вибрации в технике. – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2. – С. 11-41. 10. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. – М.: Мир, 1964. – 773 с. 11. *Мартыненко Г.Ю.* Магнитный подшипник на постоянных кольцевых магнитах с изменяемой жесткостью // Проблемы машиностроения. –Х.: ИПМаш НАН Украины, 2008. – Т. 11, № 2. – С. 46-55.

Поступила в редколлегию 14.04.2011

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, ст. преп., НТУ «ХПИ»

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ЗЕРНА НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Методом ВБК побудовано наближений розв'язок граничної задачі гідродинаміки, яка описує рух по нахиленому плоскому віброрешету неоднорідної зернової суміші з експоненціальною зміною вібров'язкості по товщині шару. Проведено розрахунки, проаналізовано числові результати та похибки наближеного розв'язку.

Using the VBK method an approximate solution of the boundary of hydrodynamics describing the motion on the inclined plane vibrosieve inhomogeneous grain mixture with an exponential change in the vibratory viscosity of the layer was constructed. The calculations, analyze results and numerical error of the approximate solutions were carried out.

Методом ВБК построено приближенное решение предельной задачи гидродинамики, описывающей движение по наклоненному плоскому виброрешету неоднородной зерновой смеси с экспоненциальным изменением вибровязкости по толщине слоя. Проведены расчеты, проанализированы числовые результаты и погрешности приближенного решения.

Постановка проблемы. Моделируя движение сепарируемого зернового слоя по виброрешету, приходится учитывать изменение вибровязкости смеси по толщине слоя. Движение неоднородного слоя описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, а его аналитическое решение выражается с помощью специальных функций. Такие решения не всегда удобны для инженерных приложений, поскольку могут возникнуть затруднения при вычислении значений специальных функций. Поэтому для проведения инженерных расчетов, наряду с точными, желательно иметь более простые приближенные решения хорошей точности. Построение таких решений является актуальным при математическом моделировании зерновых потоков в условиях вибраций.

Обзор последних исследований и публикаций. Установившееся движение неоднородного слоя виброожиженной зерновой смеси по наклонному плоскому виброрешету рассматривали в [1-7]. Изменение вибровязкости по толщине слоя в [1,2] описывали линейной функцией поперечной декартовой координаты. Случай гиперболической зависимости вибровязкости от этой координаты рассмотрен в [3], а квадратичной (параболической) – в [4]. Указанные публикации вошли в шестую главу монографии [5]. Решения краевых задач гидродинамики при нелинейных (экспоненциальной и степенной) зависимостях вибровязкости построены в функциях Кельвина в работах [6,7]. В отличие от названных публикаций здесь строится приближенное решение краевой задачи.

Целью работы является построение и апробация расчетами приближенных формул для вычисления скорости потока зерновой смеси с экспоненциальным изменением вибровязкости по плоскому решету, которое совершает продольные гармонические колебания в своей плоскости.

Средством достижения цели выбран метод ВБК [8], который обычно приводит к компактным формам решений.

Основная часть работы. При постановке и решении краевой задачи используем расчетную схему, представленную на рис. 1.

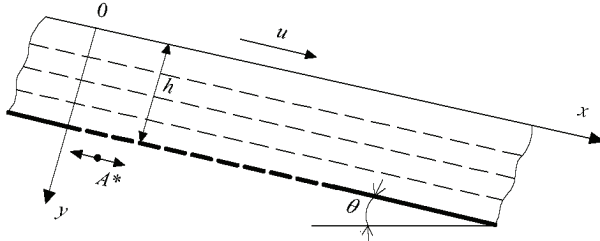


Рисунок 1 – Расчетная схема

На схеме x и y соответственно продольная и поперечная декартовы координаты; h – толщина зернового слоя; θ – угол наклона решета к горизонту; A^* , ω – амплитуда и круговая частота колебаний виброрешета в направлении оси Ox .

В установившемся режиме движения скорость потока u в направлении оси Ox принимаем зависимой лишь от координаты y и времени t . Ее определение в работе [6] сведено к формуле

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0} \cdot (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi) + \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (1)$$

где $\xi = \exp(-\lambda y)$; $\xi_1 = \exp(-\lambda h)$; g – ускорение свободного падения; λ , v_0 – положительные постоянные, согласно которым изменение кинематической вибровязкости смеси v по y описывается выражением:

$$v = v_0 \exp(\lambda y);$$

$w(y)$ – комплексная функция вещественного аргумента, удовлетворяющая дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi} \cdot w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(\xi_1) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(\xi_1) = \operatorname{Re} \frac{dw}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = \operatorname{Im} \frac{dw}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = 0. \quad (3)$$

Аналитическое решение этой краевой задачи в [6] выражено через

функции Кельвина. Далее найдем приближенное выражение $w(\xi)$ в элементарных функциях. Для этого решим (2) приближенно методом ВБК. Согласно указанному методу в нулевом приближении:

$$w(\xi) = (c_1 + ic_2) \cdot \exp\left(\int \sqrt{\frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi}} d\xi\right) + (c_3 + ic_4) \cdot \exp\left(-\int \sqrt{\frac{i\omega}{\lambda^2 v_0 \xi}} d\xi\right). \quad (4)$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Интегрирование в (4) по ξ не вызывает затруднений, что позволяет представить вещественную и мнимую части решения (4) в элементарных функциях:

$$A_1(\eta) = \operatorname{Re} w(\xi) = \exp(\eta) \cdot (c_1 \cos \eta - c_2 \sin \eta) + \exp(-\eta) \cdot (c_3 \cos \eta + c_2 \sin \eta);$$

$$A_2(\eta) = \operatorname{Im} w(\xi) = \exp(\eta) \cdot (c_1 \sin \eta + c_2 \cos \eta) + \exp(-\eta) \cdot (c_4 \cos \eta - c_3 \sin \eta); \quad (5)$$

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\omega}{v_0}} \xi.$$

Подставив (5) и их производные в (3), получаем систему четырех уравнений относительно неизвестных $c_j, j = \overline{1;4}$:

$$c_1 \cos \zeta - c_2 \sin \zeta + \exp(-2\zeta) \cdot (c_3 \cos \zeta + c_4 \sin \zeta) = A^* \omega \exp(-\zeta);$$

$$c_1 \sin \zeta + c_2 \cos \zeta - \exp(-2\zeta) \cdot (c_3 \sin \zeta - c_4 \cos \zeta) = 0; \quad (6)$$

$$c_1 \cos \tau - c_2 \sin \tau - \exp(-2\tau) \cdot (c_3 \cos \tau + c_4 \sin \tau) = 0;$$

$$c_1 \sin \tau + c_2 \cos \tau + \exp(-2\tau) \cdot (c_3 \sin \tau - c_4 \cos \tau) = 0.$$

$$\text{Здесь } \tau = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\omega}{v_0}}; \quad \zeta = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2\omega}{v_0}} \xi_1.$$

Из системы (6) находим значения констант:

$$c_{1,2} = \pm \frac{A^* \omega \exp(-\zeta)}{\Delta} \Delta_{1,2}; \quad c_3 = c_1 \delta_1 - c_2 \delta_2;$$

$$c_4 = c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1; \quad \Delta = \Delta_1^2 + \Delta_2^2; \quad (7)$$

$$\Delta_1 = \cos \zeta + \exp(-2\zeta) \cdot (\delta_1 \cos \zeta + \delta_2 \sin \zeta);$$

$$\Delta_2 = \sin \zeta + \exp(-2\zeta) \cdot (\delta_2 \cos \zeta - \delta_1 \sin \zeta);$$

$$\delta_1 = \exp(2\tau) \cdot \cos(2\tau); \quad \delta_2 = \exp(2\tau) \cdot \sin(2\tau).$$

Учитывая (1), (5) и (7), получаем формулу скорости потока зерновой смеси:

$$u(\xi, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0} \cdot (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi) + A_1(\eta) \sin(\omega t) + A_2(\eta) \cos(\omega t), \quad (8)$$

где $A_1(\eta), A_2(\eta)$ определены выражениями (5) и (7).

Интенсивность сегрегации смеси на виброрешете зависит от градиента скорости зернового потока [9]. В рамках излагаемой теории величина градиента скорости определяется производной $u'_y(y, t)$. Поэтому вычислим эту про-

изводную. Дифференцированием (8) получаем:

$$u'_y(\xi, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda v_0} \cdot \xi \ln \xi - \frac{\lambda \eta}{2} [c_1 f_1(\eta) - c_2 f_2(\eta) - c_3 f_3(\eta) + c_4 f_4(\eta)] \sin(\omega t) - \frac{\lambda \eta}{2} \times \\ \times [c_1 f_2(\eta) + c_2 f_1(\eta) - c_3 f_4(\eta) - c_4 f_3(\eta)] \cos(\omega t). \quad (9)$$

Здесь

$$f_{1,2}(\eta) = \exp(\eta)(\cos \eta \mp \sin \eta); \quad f_{3,4}(\eta) = \exp(-\eta)(\cos \eta \pm \sin \eta).$$

Согласно граничным условиям $u'_y(1, t) = 0$, то есть градиент скорости на свободной поверхности слоя равен нулю.

И так, формулы (8) и (9) позволяют приближенно определять скорость потока и ее градиент без вычисления значений специальных функций.

Для проведения расчетов используем исходные данные работы [6], в которой: $\theta = 5^\circ$; $A^* = 0,0075$ м; $\omega = 41,86$ с⁻¹; $\lambda = 50$ м⁻¹; $v_0 = 0,00005$ м²с⁻¹; $h = 0,006$ м.

Результаты вычисления $u(y, t)$ по формуле (8) для трех значений безразмерного времени $t_1 = \omega t \pi^{-1}$ и различных y записаны в таблице.

Значения $10 u(y, t)$, м/с при разных t_1 и y

yh^{-1}	$10 u(y, t)$, м/с			yh^{-1}	$10 u(y, t)$, м/с		
	$t_1 = 0,5$	$t_1 = 1$	$t_1 = 1,5$		$t_1 = 0,5$	$t_1 = 1$	$t_1 = 1,5$
0,0	2,37	2,45	2,68	0,5	1,75	2,37	1,91
0,05	2,36	2,45	2,67	0,6	1,70	2,32	1,38
0,1	2,33	2,44	2,66	0,7	1,80	2,17	0,62
0,2	2,22	2,43	2,60	0,8	2,09	1,84	-0,40
0,3	2,06	2,40	2,47	0,9	2,56	1,18	-1,68
0,4	1,89	2,39	2,26	1,0	3,14	0,00	-3,14

На рис. 2 указаны профили скорости, которые получены в [6] для указанных значений t_1 с помощью решения задачи гидродинамики в функциях Кельвина.

Значения скорости в таблице незначительно отклоняются от результатов, представленных на рис. 2. Этим подтверждается хорошая точность приближенного решения (8), к которому приводит метод ВБК.

Графики колебаний производной скорости и скорости при разных y нанесены на рис. 3 и 4.

Они рассчитаны по формулам (8) и (9) при $v_0 = 0,0001$ м²с⁻¹; $h = 0,01$ м и прежних остальных исходных данных. Расчеты подтверждают быстрое затухание вибрационного поля по толщине зернового слоя с удалением от поверхности виброрешета.

О влиянии параметра λ на колебания скорости потока позволяют сделать вывод графики на рис. 5. Расчеты проведены для трех значений λ при $v_0 = 0,0001$ м²с⁻¹; $h = 0,1$ м и прежних других параметрах. Значение λ существ-

венно влияет на значение скорости, относительно которого происходят ее колебания. Амплитуды колебаний при этом меняются незначительно.

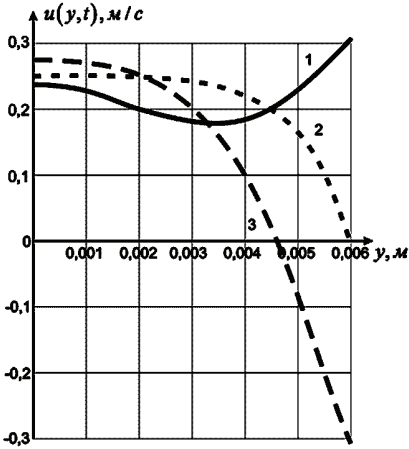


Рисунок 2 – Профили скорости потока зерновой смеси в различные моменты времени: — $t_1 = 0,5$; $t_1 = 1$; - - - - $t_1 = 1,5$

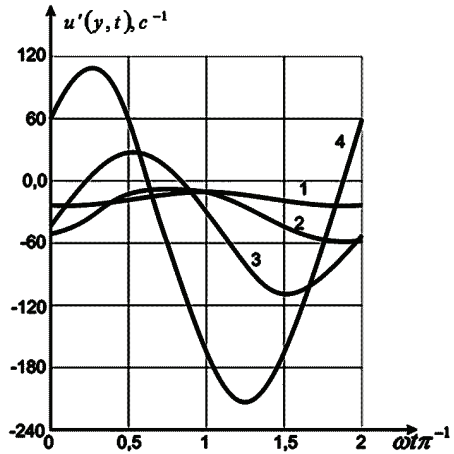


Рисунок 3 – Зависимости производной скорости от времени для разных y : 1, 2, 3, 4 – $y/h^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

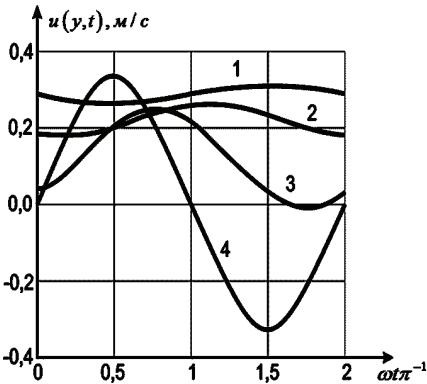


Рисунок 4 – Зависимости скорости от времени для разных y : 1, 2, 3, 4 – $y/h^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

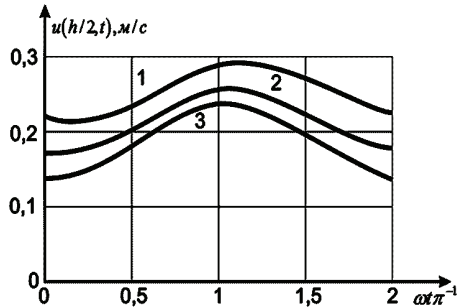


Рисунок 5 – Зависимости скорости от времени при $y = 0,5h$ и разных λ : 1, 2, 3 – $\lambda = 30; 50; 70 \text{ м}^{-1}$

Таким образом, при экспоненциальном изменении вибровязкости зерновой смеси по толщине слоя расчет колебаний можно проводить приближенно методом ВБК, который приводит к компактным расчетным формулам, не связанным с вычислением значений специальных функций.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н. Колебания неоднородного зернового потока на виброрешетах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2010. – № 4 (60). – С. 138-143. 2. Ольшанский В.П. Колебания скорости вибротранспортирования решетом неоднородного слоя зерновой смеси / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Транспортное машиностроение: Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ, 2010. – Вып. 38. – С. 134-139. 3. Тищенко Л.Н. К расчету колебаний неоднородного слоя зерновой смеси на виброрешете / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. – № 1 (61). – С. 182-185. 4. Ольшанский В.П. К расчету колебаний скорости движения зерновой смеси на плоском виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Динаміка та міцність машин: Вісник НТУ «ХПИ». – 2010. – Вып. 37. – С. 123-129. 5. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 280 с. 6. Ольшанский В.П. О колебаниях скорости движения неоднородного виброоживленного слоя зерна на плоском решете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Механіка та машинобудування. – 2010. – № 1 – С. 12-19. 7. Ольшанский В.П. Динамика неоднородного слоя зерна на плоском виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Динамические системы. – 2010. – Вып. 28. – С. 162-170. 8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с. 9. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.

Поступила в редколлегию 24.10.2011.

УДК 539.3

Р.Л.ОНАЦКИЙ, науч. сотр., ПАО «УкрНИИХиммаш», Харьков

ОБРАЗОВАНИЕ КРУГЛОЙ ВМЯТИНЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ВДАВЛИВАНИЕМ ШТАМПА

В статті розглянуто процес утворення круглої вм'ятини під дією індентора. Розрахунок виконано на основі методу скінченних елементів з урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей. Проведено аналіз форми отриманих вм'ятин під дією штампів різноманітної форми.

The article describes the process of formation of circular dent under the influence of the indenter. The calculations are based on the finite element method taking into account the geometrical and physical nonlinearities. Analysis of forms are obtained dent under the influence of different forms of stamps.

В статье рассмотрен процесс образования круглой вмятины под воздействием индентора. Расчеты выполнены на основе метода конечных элементов с учетом геометрической и физической нелинейностей. Проведен анализ формы получаемой вмятины под воздействием штампов различных форм.

Сосуды и аппараты являются основными элементами технологического оборудования, эксплуатируемого на химических и нефтеперерабатывающих производствах. Наиболее распространенной формой сосуда является цилиндрическая обечайка с двумя замыкающими эллиптическими днищами.

Множество аппаратов содержат различного рода дефекты, такие как:

вмятины, выпучины, овальности, трещины, при этом около десяти процентов содержат вмятины.

В результате проведенного анализа размеров и формы вмятин (наиболее характерные случаи приведены в табл. 1) были получены выводы, что в основном вмятины имеют круглую или эллиптическую формы в плане. Глубина вмятины находится в пределах $K_1 = 1 \div 2$ толщин (не учитывая огромных редких сосудов с отношением радиуса к толщине стенки $\gamma = 1072,9$) и в среднем можно принять $\gamma = 100$.

Таблица 1 – Сосуды с вмятинами

№	D , мм	h , мм	S , мм	d , мм	c , мм	b , мм	$\gamma = \frac{D}{2h}$	$K_1 = \frac{S}{h}$	$K_2 = \frac{c}{b}$
1	2000	14	9	-	300	120	71,4	0,64	2,5
2	3200	12	16	800	-	-	133,3	1,33	1
3	3772	14	15	-	1000	250	134,7	1,07	4
4	3772	14	18	-	1000	300	134,7	1,28	3,33
5	10300	4,8	125	-	1650	4375	1072,9	26,04	0,37
6	2400	8,8	7	400	-	-	136,3	0,79	1
7	4500	12	10	-	400	300	187,5	0,83	1,33
8	2400	12	16	200	-	-	100	1,33	1
9	1400	10	5,5	100	-	-	70	0,55	1
10	1400	10	9	150	-	-	70	0,9	1
11	2600	12	14	230	-	-	108,3	1,16	1
12	5000	16	50,5	1000	-	-	156,2	3,15	1

Здесь D – диаметр сосуда, h – толщина стенки, S – глубина вмятины, d – диаметр вмятины, c – длина вмятины, b – ширина вмятины, γ – коэффициент характеризующий размер сосуда, K_1 – относительная глубина вмятины, K_2 – отношение длины к ширине эллиптической вмятины.

Вмятины, как правило, образуются при транспортировке и/или эксплуатации сосуда при его взаимодействии с различного рода телами, жесткость которых выше. Назовем такое тело штампом (индентором). Процесс образования вмятины на цилиндрической оболочке под действием сферического штампа был рассмотрен в работах [1, 6].

Целью данной статьи является определение формы штампа в результате вдавливания которого на цилиндрической оболочке образуется наиболее круглая вмятина.

При диагностировании вмятин дефектоскопистами, как правило, истинную форму вмятины определить затруднительно ввиду того, что вмятины располагаются не на плоских поверхностях. Поэтому форму вмятины в большинстве случаев определяют визуально. При неярко выраженных отличиях длины и ширины вмятину считают круглой, измеряя наибольший из размеров и назначая его диаметром круглой в плане вмятины.

Как было показано в работах Кильчевского Н.А. [2], а до него Г. Герцем, в результате контактного взаимодействия упругих тел, форма поверхности которых описывается поверхностью 2-го порядка, пятно контакта, полученное при этом, будет описано в плане линией второго порядка. Исходя из этого, зная, что в большинстве случаев вмятины бывают круглыми или эллиптическими в плане, можно сделать вывод о форме штампа. Она должна быть описана поверхностью 2-го порядка. Как известно из аналитической геометрии [3] поверхностями второго порядка являются: сфера, цилиндр, конус, эллипсоид, эллиптический параболоид.

В качестве примера выбран типовой сосуд (см. рис. 1) с геометрическими параметрами обечайки $\gamma = D/2h = 100$.

Диаметр аппарата $D = 3000$ мм, толщина стенки $h = 15$ мм, длина сосуда 7500 мм. Температура стенки 20 °С, материал сталь Ст3. Предел текучести $\sigma_T = 250$ МПа, предел прочности $\sigma_B = 460$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, модуль упрочнения $E_T = 840$ МПа, деформации при разрыве образца $\delta = 0,25$. Нормативные допускаемые напряжения $[\sigma] = 166$ МПа [4].

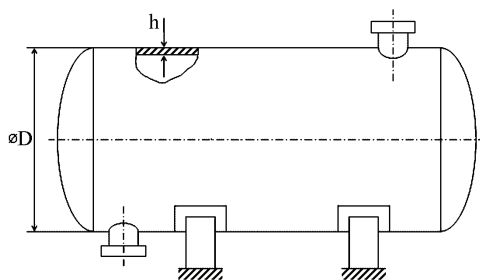


Рисунок 1 – Типовой сосуд

Пусть глубина вмятины S является значением функции $f(x)$, зависящей от параметра x – величины необходимого перемещения штампа, после извлечения которого образуется вмятина. Для определения величины перемещения индентора запишем нелинейное уравнение относительно x :

$$F(x) = f(x) - S = 0. \quad (1)$$

Для решения уравнение (1) воспользуемся итерационным методом Ньютона [7], для этого преобразуем (1) к виду (2).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}. \quad (2)$$

Критерием окончания вычислений корня является выполнение условия $x_{n+1} - x_n < \varepsilon$, где ε – требуемая точность вычисления корня. В нашем случае $\varepsilon = 0,01$.

При образовании вмятины процесс состоял из двух этапов. На первом этапе к индентору плавно прикладывалось перемещение, увеличивая значе-

ние на каждом шаге на 1/10 от максимального значения. На втором – индентор извлекался и происходило небольшое упругое выпрямление оболочки. При этом в оболочке возникали остаточные деформации и образовывалась вмятина. Глубина вмятины была принята равной двум толщинам $S = 30$ мм.

Для начала остановимся на следующих вариантах формы штампа таких как: сфера, цилиндр (ось которого перпендикулярна оси оболочки) рис. 2, а, 2, б.

Задача решена в физически и геометрически нелинейной постановке. Физические свойства материала определяются теорией малых упруго-пластических деформаций с билинейным кинематическим упрочнением.

При решении задачи мы рассматривали только цилиндрическую обечайку. Геометрическая модель обечайки показана на рис. 2 и представляет собой (цилиндрическую оболочку) диаметром $D = 3000$ мм, толщиной $h = 15$ мм и длиной $L = 7500$ мм.

Учтена симметрия: рассмотрена четверть оболочки, при этом на ее краях заданы условия симметрии.

Для решения задачи использовались объемные 20 - узловые конечные элементы (КЭ) с тремя степенями свободы (U_x, U_y, U_z) в каждом узле [5]. Выбор объемных КЭ основан на том, что на этапе образования вмятины в зоне вдавливания штампа возникает объемное напряженно-деформированное состояние. При формировании вмятины были использованы контактные конечные элементы, моделирующие «жестко-податливый» контакт.

При выполнении расчета использовалась неоднородная конечноэлементная сетка со сгущением к центру вмятины, конечноэлементная сетка показана на рис. 2. Для выбора размера КЭ выполнена серия расчетов, направленная на оценку сходимости решения по числу КЭ.

Для первого расчета было взято 800 КЭ (20 элементов по длине оболочки, 20 в окружном направлении и 2 элемента по толщине) со сгущением к точке контакта оболочки со штампом. После варьирования размеров элементов, для дальнейших расчетов, остановились на количестве – 25600 КЭ (по толщине – 4 элемента; в осевом и окружном направлениях – 80 КЭ). Размеры конечных элементов были неодинако-

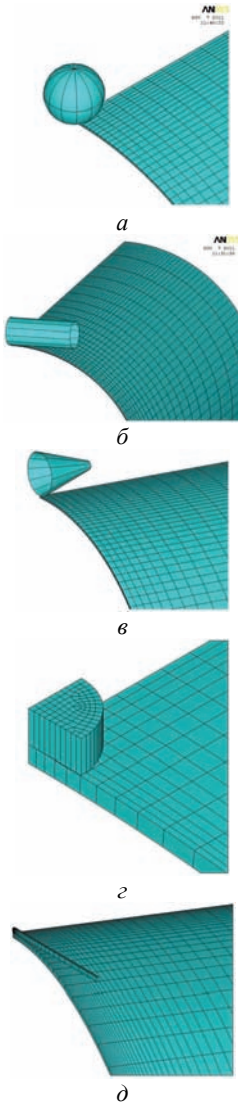


Рисунок 2 – Геометрическая модель

вые – в зоне вмятины была построена более мелкая сетка. В итоге, в области вмятины размеры КЭ составили: $t_1 = 3,75$ мм; $t_2 = 7,3$ мм; $t_3 = 7,5$ мм (см. рис. 2).

За границу вмятины принято значение остаточных прогибов равных 10 % от максимального значения (в центре вмятины).

Сферический индентор. Как известно [8], при контактом взаимодействии двух сфер область контакта ограничена окружностью. Поэтому для первого расчета был выбран сферический индентор диаметром $D_i = 300$ мм.

В результате воздействия сферического индентора (рис. 2, а) посредине оболочки образовалась вмятина заданной глубины $S = 30$ мм, длиной $a = 720$ мм и шириной $b = 236$ мм. Вмятина имеет эллиптическую форму в плане, с отношением $a/b = 3,05$, ориентированную в осевом направлении. Распределение радиальных перемещений в оболочке после снятия штампа показано на рис. 3. Из этого рисунка видно, что полученная эллиптическая вмятина ориентирована в осевом направлении (большая ось эллипса параллельна оси обечайки). Большее значение длины вмятины связано с большей податливостью оболочки в осевом направлении, чем в окружном. Для увеличения ширины вмятины необходимо увеличить размер штампа в направлении перпендикулярном оси оболочки. Для этого используем цилиндрический индентор.

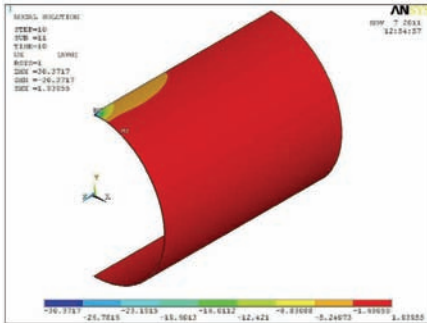


Рисунок 3 – Радиальные перемещения (мм) после снятия сферического индентора

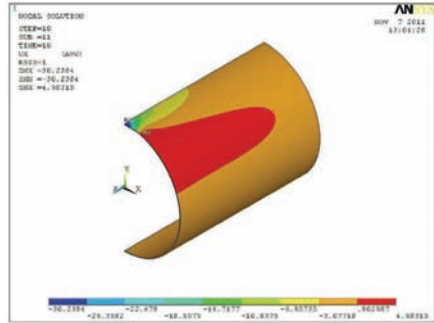


Рисунок 4 – Радиальные перемещения (мм) после снятия цилиндрического индентора

Цилиндрический индентор. Как известно, контакт между двумя скрещенными цилиндрами с одинаковыми радиусами эквивалентен контакту между шаром этого же радиуса и плоскостью [8]. В результате чего получается круговая зона контакта.

Воздействия цилиндрического индентора (ориентированного как на рис. 2, б) радиусом, равным радиусу обечайки (1500 мм), существенного изменения в необходимую сторону не дал ($a/b = 2,58$). Хотя зона контакта и представляет собой не окружность, а эллипс (с большей осью перпендикулярной

оси оболочки), но все же меньшая ось эллипса достаточно велика. Это связано с тем, что радиус индентора велик. Рассмотрим цилиндрический индентор меньшего радиуса.

В результате воздействия цилиндрического индентора с диаметром $D_i = 600$ мм (рис. 2, б), ось которого перпендикулярна оси оболочки посредине оболочки, была получена вмятина глубиной $S = 30$ мм, длиной $a = 698$ мм и шириной $b = 330$ мм. Вмятина имеет эллиптическую форму в плане, с отношением $a/b = 2,11$, ориентированную в осевом направлении. Распределение радиальных перемещений в оболочке после снятия штампа показано на рис. 4.

Видно, что при уменьшении радиуса цилиндра вмятина становится все более круглой в плане, поэтому рассмотрим предельный случай. Возьмем вместо цилиндра полосу шириной в половину толщины оболочки, высотой равной толщине и длиной в половину радиуса обечайки.

Индентор в виде полосы. В результате воздействия конического индентора (рис. 2, в) была получена эллиптическая вмятина, ориентированная в осевом направлении, глубиной $S = 30,4$ мм, длиной $a = 630$ мм и шириной $b = 353$ мм. Соотношение длины к ширине $a/b = 1,78$. Распределение радиальных перемещений в оболочке после снятия штампа аналогично приведенным на рис. 4.

Конический индентор. В качестве следующей формы штампа выберем сочетание полосы и саеры, то есть конический индентор (рис. 2, з) с ось параллельной оси оболочки и радиусом 300 мм. В результате воздействия конического индентора, была получена вмятина глубиной $S = 29,8$ мм, длиной $a = 390$ мм и шириной $b = 240$ мм. Вмятина имеет эллиптическую форму в плане, с отношением $a/b = 1,62$, ориентированную в осевом направлении. Распределение радиальных перемещений в оболочке после снятия штампа показано на рис. 5. Изменение радиуса основания конуса мало сказывается на соотношении длины к ширине вмятины.

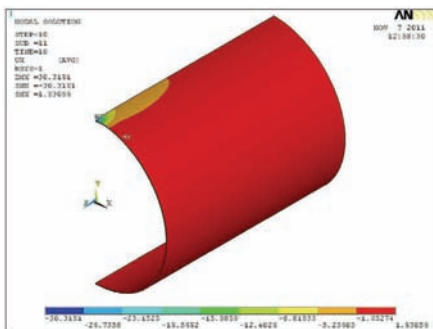


Рисунок 5 – Радиальные перемещения (мм) после снятия конического индентора

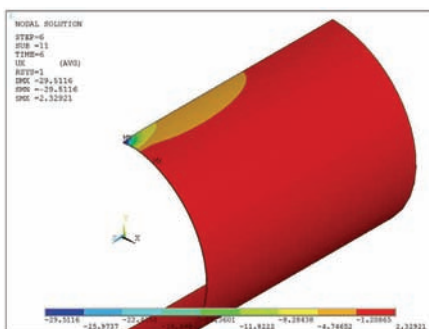


Рисунок 6 – Радиальные перемещения (мм) после снятия цилиндрического штампа с плоским основанием

Рассмотрим еще один вид формы штампа – цилиндр, опирающийся своим основанием на обечайку (рис. 2, д). Как было показано в книге Качанова [9], при вдавливании плоского штампа в полуплоскость пластические зоны возникают по контуру основания, в этом случае после снятия штампа вмятина образованная таким штампом должна быть по форме близкой к форме линии описывающей основание штампа. То есть, в нашем случае, при вдавливании цилиндра в полуплоскость должны получать вмятину круглой формы.

Цилиндрический штамп. Рассмотрим, что получится при вдавливании плоского основания цилиндра в оболочку. После извлечения штампа на оболочке получилась вмятина эллиптической формы (см. рис. 6) с размерами: ширина 275 мм длина 550 мм глубиной 29,5 мм. Соотношение длины к ширине $a/b = 2,0$. Равномерное изменение размеров основания мало влияет на размеры вмятины. Если взять в качестве основания цилиндра не круг, а эллипс, то зафиксировав его длину (размер в осевом направлении оболочки) и увеличивая ширину, можно добиться большей округлости вмятины. Однако, в конечном итоге, наш цилиндр выродится в полосу результат нагружения которой показан выше.

В табл. 2, приведены размеры полученных вмятин и параметр характеризующий ее форму (отношение длины к ширине вмятины).

Таблица 2 – Размеры и форма вмятины

Форма штампа	Глубина S , мм	Длина a , мм	Ширина b , мм	Отношение a/b
Сфера	30,3	720	236	3,05
Цилиндр $Ri = 1500$ мм	30,1	721	279	2,58
Цилиндр $Ri = 300$ мм	29,9	698	330	2,11
Полоска	30,4	630	353	1,78
Конус $Ri = 300$ мм	29,8	390	240	1,62
Цилиндрический штамп* $Ri = 50$ мм	29,5	550	275	2,0

*– здесь имеется ввиду цилиндрический индентор внедряющийся плоским основанием в оболочку см. рис. 2, д.

Выводы. В статье рассмотрен процесс образования вмятин на цилиндрической оболочке, представляющей собой обечайку сосуда, под действием различных инденторов. Заданная глубина вмятины была получена итеративным методом Ньютона. Оценка формы вмятины проведена по отношению длины к ширине вмятины.

В результате расчетов было установлено, что наиболее круглая вмятина была получена при вдавливании конического штампа с относительным радиусом основания $1/5$ радиуса оболочки сосуда. При этом отношение длины к ширине составило 1,62.

В остальных случаях вмятина получалась эллиптической формы с боль-

шей осью параллельной оси сосуда. Недостаточная круглость формы вмятины, возможно, связана с рассмотренной схемой образования вмятины при статическом контактном нагружении. При динамическом контактном взаимодействии это обстоятельство может измениться.

Неполноту округлости формы, также, можно объяснить разницей податливости оболочки в осевом и окружном направлениях. При увеличении толщины оболочки она становится более жесткой и при вдавливании штампом в виде полоски и цилиндра с плоским основанием можно добиться соотношения длины к ширине вмятины 1,3.

В дальнейшем следует более детально остановиться на обобщении зависимости между жесткостью оболочки и нагрузках на штамп, необходимых для получения заданной глубины вмятины.

Список литературы: 1. Кантор Б.Я., Долинский В.М., Онацкий Р.Л. Статическая прочность нагруженных внутренним давлением тонкостенных сосудов, содержащих вмятины // Проблемы машиностроения. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 38-43. 2. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев: Наукова думка, 1976. – 320 с. 3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 872 с. 4. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность: ГОСТ 14249–89. – Введ. 01.01.90. – М.: Изд. стандартов, 1989. – 79 с. 5. Басов К.А. ANSYS: справочник пользователя. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с. 6. Кантор Б. Я., Долинский В. М., Онацкий Р. Л. Влияние вмятин на несущую способность сосудов // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 14. – С. 99. 7. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с. 8. Johnson K. L. Contact mechanics // Cambridge University Press. – 6. – Nachdruck der 1. Auflage, 2001. 9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

Поступила в редколлегию 17.10.2011.

УДК 539.3.534

А.С. СТЕПЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;

Е.Н. ДУДКИНА, аспирантка, НТУ «ХПИ»;

В.А. СОБОЛЬ, студентка, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИПОВОГО РЯДА КОНСТРУКЦИЙ КОРПУСОВ ЦИЛИНДРА НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ МОЩНЫХ ПАРОВЫХ ТУРБИН: ЧАСТЬ 2. ПОСТРОЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ КЭ-МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК.

Розроблена структурна параметрична модель ЦНТ для суперелементного моделювання, яка представлена у вигляді діаграми класів UML, в якій виділені змінюванні характеристики структурних елементів. Проведено розрахунок динамічних характеристик для одного із класів ЦНТ.

There has been developed the structural parameter model of LPC for the superelement modeling. It is presented in the form of the UML class diagram. The variable characteristics of the structural elements have been marked out in the model. The dynamic characteristic for one of the LPC class is calculated.

Разработана структурная параметрическая модель ЦНТ для суперэлементного моделирования, представленная в виде диаграммы классов UML, в которой выделены изменяемые характеристики структурных элементов. Проведен расчет динамических характеристик для одного из классов ЦНТ.

Введение. Многоопорная роторная система паровых турбин представляет собой крупногабаритную конструкцию, которая должна обеспечить длительный срок эксплуатации при работе в условиях значительных динамических нагрузок. Особенно большое влияние на динамическую податливость опор ротора оказывает цилиндр низкого давления (ЦНД) турбины. С целью обеспечения заданного уровня вибраций для типового ряда ЦНД (турбины различной мощности), ранее [1] были рассмотрены, классифицированы и систематизированы типичные конструкции ЦНД. В результате были вычленены подобные структуры для конструкций типового ряда ЦНД, наследуемые в различных модификациях и отличающиеся пропорциями и отдельными структурными элементами. Разработанная в результате структурная схема типового ряда конструкций ЦНД позволяет построить параметрическую конечноэлементную модель для анализа динамических характеристик. Это позволит сформулировать критерии и проводить оптимизацию конструкции с целью обеспечения допустимого уровня вибрации опор ротора ЦНД.

Постановка задачи. На основе структурной схемы, разработанной ранее [1], построить суперэлементную параметрическую КЭ-модель типового ряда ЦНД. Так как ЦНД имеет две плоскости симметрии, то оценки динамических характеристик необходимо строить модель только для симметричной $\frac{1}{4}$ части конструкции [3, 4]. Для оценки достоверности модели провести тестовые расчеты вибрационных характеристик для одного варианта корпуса ЦНД «стержневого» класса.

Построение суперэлементной модели ЦНД. В результате систематизации типового ряда ЦНД, проведенной в первой части работы [1], проведение разделение конструкций всего типового ряда наружного корпуса ЦНД на крышку (верхнюю половину) и корпус (нижнюю половину). Крышка представляет собой оболочечную конструкцию полцилиндрической формы. Корпус представляет собой прямоугольную пластинчато-стержневую сварную конструкцию. Корпус и крышка могут быть двух классов: «сотового» (ужесточение пластинами) и «стержневого» (ужесточение стержнями).

Однако и крышка и корпус ЦНД всегда состоят из секций, которые систематично повторяются во всех конструкциях. Особенностью этих секций есть то, что форма граничной части их не меняется, а внутренняя структура может отличаться. Данные секции целесообразно взять в качестве суперэлементов и из них набирать типовой ряд ЦНД.

Суперэлементная модель корпуса. В результате сравнительного анализа всего типового ряда ЦНД, выпускаемых ОАО «Турбоатом» предлагается следующее разбиение на суперэлементы конструкции корпуса ЦНД: сек-

ция выхлопа, секция подшипникового узла, секция диффузора и секция размещения обоймы. Суперэлементное разбиения на примере корпуса ЦНД «стержневого» класса приведено на рис. 1.

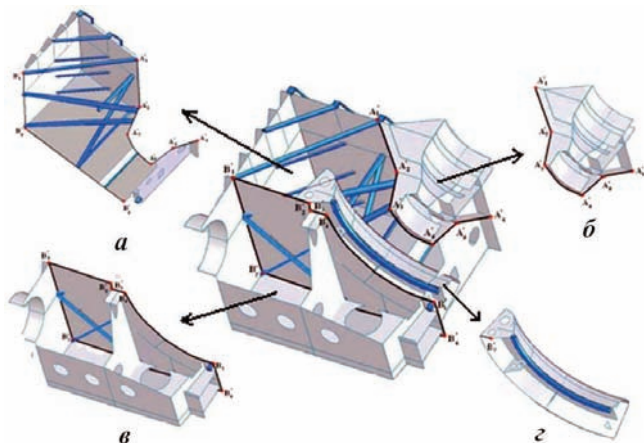


Рисунок 1 – Суперэлементная модель корпуса ЦНД:
а – секция выхлопа, *б* – секция подшипникового узла, *в* – секция размещения обоймы, *г* – секция диффузора.

Внутренняя структура секции выхлопа принципиально отличается для двух классов: в «стержневых» в качестве ужесточающих элементов используются стержни, а в «сотовых» – пластины. Также отличительной особенностью секции выхлопа для «стержневых» и «сотовых» корпусов являются форма и количество ужесточающих коробок на торцевых стенках наружного корпуса.

Внутренняя структура секции размещения обоймы определяется подводом пара в ЦНД. Существует два способа подвода пара: боковой и нижний. Турбины, которые проектируются для работы на АЭС имеют нижний подвод пара, таковы требованиями биологической защиты и компоновки турбоустановки: все паропроводы должны быть убраны из машинного зала в связи с радиоактивностью пара. Для турбин ТЭС применяют боковой подвод пара.

Секция диффузора имеет несколько вариантов конструкции внутренней структуры: торовые листы размещают на направляющих листах, на ребрах, либо используют диффузор в виде «бублика». При проектировании корпусов ЦНД для различных турбоагрегатов возможно использование любого из вышеперечисленного диффузора. Применение того или иного варианта зависит от длины лопатки 5 ступени, выбора системы охлаждения выхлопного патрубку, а также от выбранной схемы влагоудаления.

Секция подшипникового узла зависит от класса корпуса. В «сотовых» конструкциях используют подшипник «простой конический», а в «стержневых» - «составной конический». Диаметр самого подшипника зависит от мас-

сы ротора.

Все вышеперечисленные отличия определяют также различие в варьируемых параметрах для каждого суперэлемента в зависимости от вида.

Суперэлементная модель крышки. На основании систематизации типового ряда крышек ЦНД, выпускаемых ОАО «Турбоатом» [1], предлагается следующее разбиение на секции конструкции крышки ЦНД: секция выхлопа, секция подшипникового узла, секция диффузора и секция размещения обоймы. Суперэлементное разбиения для крышки ЦНД «стержневого» класса приведено на рис. 2.

Секция размещения обоймы различается количеством ужесточающих элементов – косынок.

Внутренняя структура секции выхлопа не имеет принципиального отличия для двух классов и определяется количеством, формой ужесточающих элементов (коробка и стержни).

Секция диффузора не зависит от класса корпуса, а является симметричной частью секции диффузора корпуса и определяется такими же параметрами как и одноименная секция, описанная выше.

Секция подшипникового узла крышки определяется классом ЦНД и в зависимости от класса крышки используют «простой конический» в «сотовых» конструкциях или «составной конический» в «стержневых».

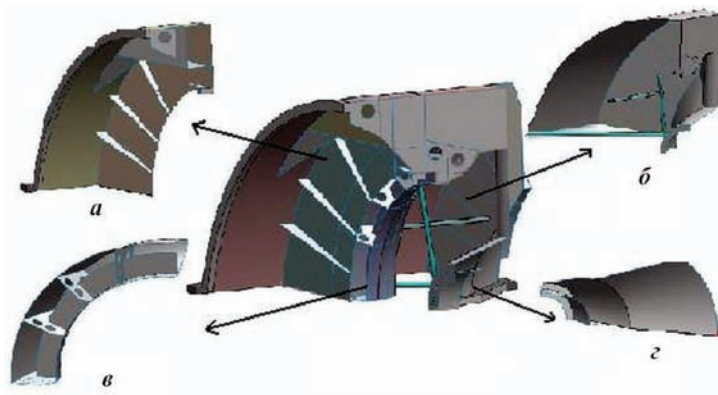


Рисунок 2 – Суперэлементная модель крышки:
a – секция размещения обоймы, *б* – секция выхлопа, *в* – секция диффузора, *г* – секция подшипникового узла

Разработка параметрической модели ЦНД. В рамках теории систем автоматического проектирования, для оптимизации параметрических моделей сложных объектов и систем, обычно применяется язык унифицированного моделирования UML [5]. UML – это графический язык, соответствующему которому моделирование описывается в виде определенного набора диаграмм (наиболее распространенные из которых – классы, объекты, пакеты,

деятельности, взаимодействия, последовательности и развертывание). Он используется для структурного моделирования: структурная часть это унифицированное представление в предметной области в виде декомпозиции сложной системы на классы объектов. Данный язык и был использован для описания параметрической суперэлементной модели ЦНД.

На рис. 3 и 4 приведены диаграммы классов, которые представляют декомпозицию параметрической геометрической модели ЦНД на структурные единицы: секцию подшипникового узла, секцию выхлопа, секцию размещения обоймы и секцию диффузора. Приведенные параметры каждой из этих секций. Такое представление дает возможность разделить параметры, которые принадлежат к разным суперэлементам и выделить параметры, которые являются общими для различных классов ЦНД.

Таким образом, для построения параметрической модели ЦНД нужно, задав необходимые параметры, построить модели отдельных суперэлементов, а потом провести процедуру их объединения.

Используя приведенную выше методологию, была разработана параметрическая КЭ-модель корпуса «стержневого» класса ЦНД турбины К-320-23,5 [6]. Полученная параметрическая КЭ-модель построена с управляемой регулярной сеткой. Модели корпуса ЦНД с разной плотностью сетки приведены на рис. 5. Поскольку построена модель симметричной части, то на соответствующие плоскости наложены граничные условия симметрии.

Как видно из рис. 5 расчетная модель корпуса ЦНД представляет собой оболочечно-пластинчато-стержневую систему. В КЭ-моделях использовались пространственный двух узловый стержневый КЭ и четырех узловый оболочечный КЭ с шестью степенями свободы в узле.

Построенная параметрическая модель позволяет варьировать параметрами пластин и стержней, геометрическими размерами.

Анализ собственных частот и форм ЦНД. Предварительное статическое НДС может оказывать влияние на динамические характеристики корпуса ЦНД. Оно определяется действием давления от вакуума внутри корпуса ЦНД и веса присоединенных к нему частей ЦНД (конденсатор, обойма, ротор). Присоединенные части учтены в модели как сосредоточенные массы, данный способ учета показал достаточно точные результаты при расчете вибраций ЦНД [3.4]. Поэтому предварительно была решена задача статического деформирования корпуса ЦНД действию силы тяжести и давления от вакуума.

Разрешающая система уравнений для определения статических перемещений в КЭ-постановке имеет вид:

$$[K_0] \cdot \xi = g \cdot \text{diag}([M_0]) + F, \quad (1)$$

где $[K_0]$, $[M_0]$ – матрицы жесткости и масс корпуса ЦНД; g – ускорение свободного падения; ξ – вектор перемещений, F – давление от вакуума внутри корпуса.

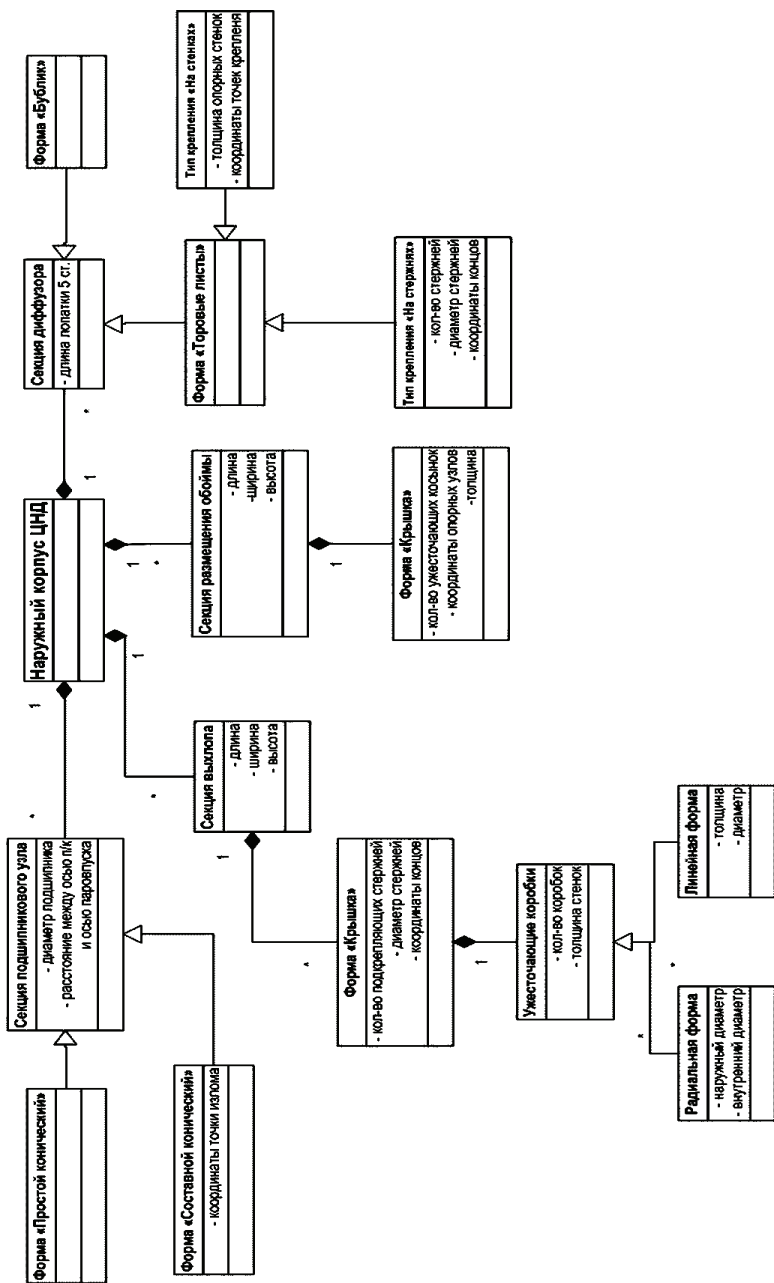


Рисунок 3 – Структура параметров для модели верхней половины корпуса ЦНД, которая представлена в виде диаграммы классов UML.

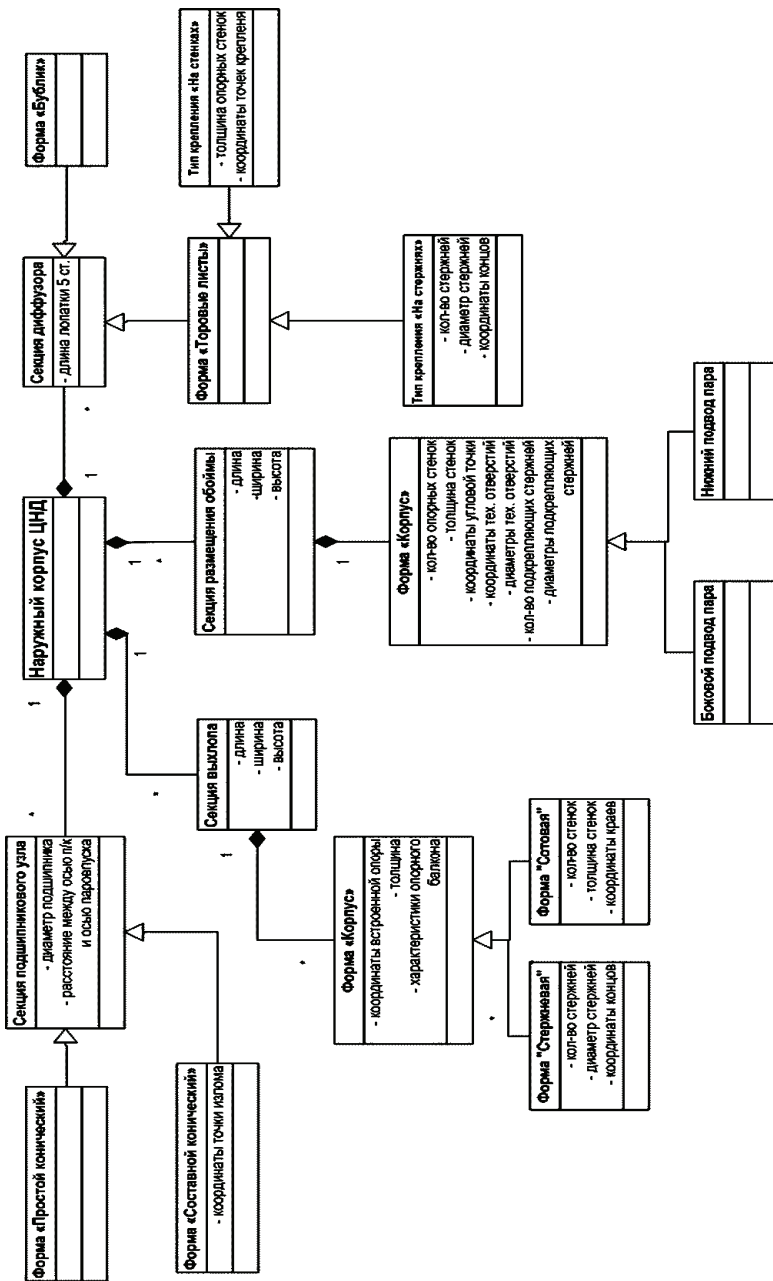


Рисунок 4 – Структура параметров для модели нижней половины корпуса ЦНД, которая представлена в виде диаграммы классов UML.

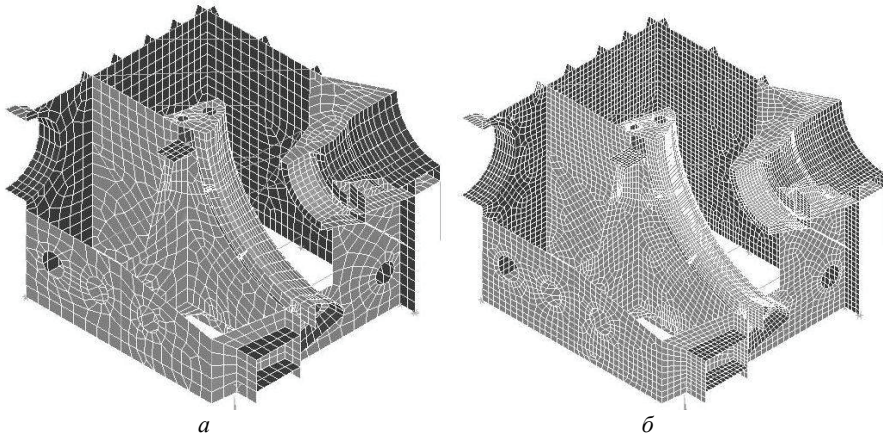


Рисунок 5 – Конечно-элементная модель корпуса ЦНД:
a – грубая сетка, *б* – мелкая сетка

Наличие предварительного НДС приводит в рамках КЭ-постановки к появлению дополнительной составляющей в матрице жесткости конструкции при записи уравнения форм колебаний:

$$([K_0] + [\bar{K}(\sigma_0)] - p^2 \cdot [M_0]) \cdot \lambda = 0, \quad (2)$$

где $[\bar{K}]$ – матрица добавочной жесткости (которая определяется предварительным статическим напряженным состоянием), σ_0 – вектор предварительных статических напряжений в конструкции; p – собственная частота, λ – вектор собственных форм.

Собственные частоты моделей ЦНД

№	Частоты, Гц			
	Модель с грубой КЭ-сеткой		Модель с мелкой КЭ-сеткой	
	без учета НДС	с учетом НДС	без учета НДС	с учетом НДС
1	14,697	14,697	14,778	14,778
2	27,009	27,011	27,348	27,348
3	30,324	30,325	29,731	29,731
4	38,923	38,923	38,862	38,862
5	39,106	39,106	39,061	39,061
6	39,673	39,674	39,170	39,170
7	47,374	47,373	46,780	46,780
8	60,415	60,491	59,790	59,793

На основе построенной конечно-элементной модели были проведены тестовые расчеты собственных частот ЦНД, величины которых приведены в таблице. Как видно из таблицы величины собственных частот практически не

меняются при учете НДС и изменении густоты КЭ-сетки. 1-я, 7-я, 8-я собственные частоты соответствуют глобальным резонансам ЦНД, остальные частоты соответствуют локальным резонансам отдельных пластин и стержней корпуса ЦНД. Наиболее опасной является 7-я собственная частота, которая близка к рабочей частоте вращения ротора 50 Гц. Ее собственная форма приведена на рис. 6.

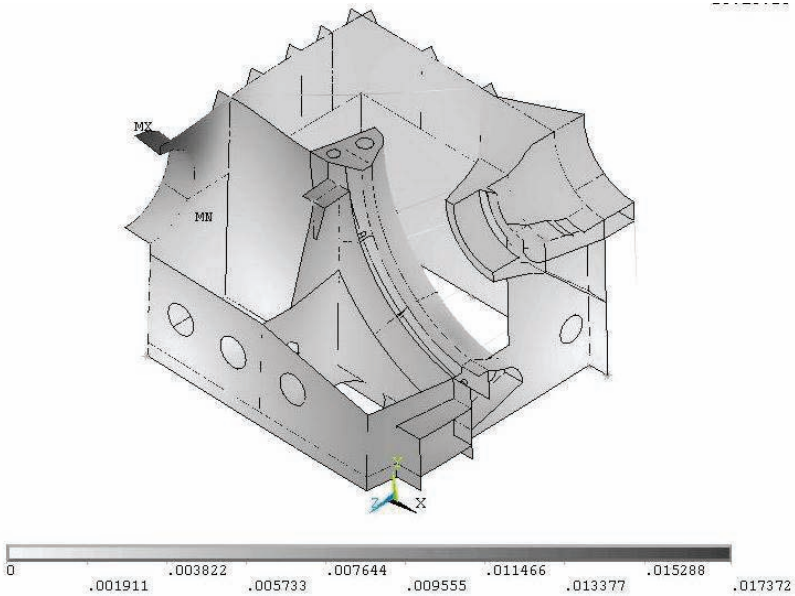


Рисунок 6 – Собственная форма ЦНД на частоте 47,373 Гц

Выводы

- 1) Разработана параметрическая геометрическая и КЭ-модель типового ряда ЦНД;
- 2) Проведен расчет и анализ динамических характеристик типового ряда ЦНД;
- 3) Показано незначительное влияние предварительного НДС на собственные частоты корпуса ЦНД.

Список литературы: 1. Дудкина Е.Н., Степченко А.С. Моделирование типового ряда конструкций корпусов цилиндра низкого давления мощных паровых турбин: Часть I. Классификация и разработка структурной схемы // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХП». – 2009. – № 42. – С. 147-154. 2. Степченко А.С., Дудкина Е.Н. Оптимизация структуры корпуса турбоагрегата по динамическим характеристикам на основе параметрической модели // Міцність матеріалів та елементів конструкцій: Тези допов. Міжнародної наук.-техн. конф. – К.: ІПМ ім. Г.С. Писаренка НАН України. – 2010. – Т. 2. – С. 113-114. 3. Степченко О., Красніков С., Торянік О. Комп'ютерне моделювання багатокорпусного турбоагрегата у системі турбоагрегат-фундамент-основа // машинознавство. – Львів: «КІНПАТРІ ЛТД», 2009. –

№ 2 (140). – С. 27-33. 4. *Степченко А.С.* Алгоритм структурной оптимизации системы турбоагрегат-фундамент по спектральным характеристикам // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 37. – С. 145-153. 5. *Фаулер М., Скотт К.* UML в кратком изложении. Применение стандартного языка объектного моделирования. – М.: Мир, 1999. 6. *Дудкина Е.Н., Степченко А.С.* Экспериментальные исследования причин опасных вибраций корпуса ЦНД турбины К-320-23,5 // *Матеріали ХІ МНПК «Можливості використання методів механіки для розв'язання питань безпеки в умовах надзвичайних ситуацій»* (9 грудня 2011 р., м. Харків, УЦЗУ). – 2011. – С. 36-37.

Поступила в редколлегию 05.10.2011

УДК 534.014.4

А.С.СТЕПЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
А.А.ЛАРИН, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
С.Л.АРТЕМОВ, аспирант, инженер, ОАО «ТУРБОАТОМ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СВЯЗИ НА ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛОПАТОК СВЕРХБОЛЬШОЙ ДЛИНЫ С ДВУХЪЯРУСНЫМ БАНДАЖОМ

Розроблена параметрична модель двохярусної лопатки надвисокої довжини, яка дозволяє варіювати положенням проміжного бандажа. На серії скінчено-елементних циклосиметричних моделях лопаткового апарату проведено розрахунок напружено-деформованого стану з урахуванням контакту в бандажних зв'язках. Отримані результати дозволили визначити оптимальні місця положення проміжного бандажу.

A parametric model of two-stage ultra-long blade, which allows to vary the location of the snubber had been developed. Stress-strain state has been calculated taking into account the contact bandage links on the series of finite-element models of the cycle symmetric blades system. The obtained results allowed to determine the optimal location of the snubber.

Разработана параметрическая модель двухярусной лопатки сверхвысокой длины, позволяющая варьировать положением промежуточного бандажа. На серии конечноэлементных циклосимметричных моделях лопатного аппарата проведен расчет напряженно-деформированного состояния с учетом контакта в бандажных связях. Полученные результаты позволили определить оптимальные места положения промежуточного бандажа.

Введение. Повышение удельной мощности современных паровых турбин приводит к необходимости увеличения длины лопаток последних ступеней цилиндров низкого давления. Конструктивно лопатки сверхбольшей длины имеют сложный профиль переменного сечения и большой угол предварительной закрутки. Такая геометрия определяет ее большую изгибно-крутильную податливость, что приводит к высоким уровням напряжений и вибраций. С целью увеличения жесткости лопаточного аппарата соответст-

вующих ступеней применяются межлопаточные связи. При этом получение приемлемых прочностных и вибрационных характеристик соответствующих аппаратов требует введения не только периферийного бандажа, но и дополнительной промежуточной связи. Все эти факторы требуют тщательного выбора формы и места межлопаточных связей. В современной практике наибольшее распространение получили цельнофрезерованные полочные связи, причем технологические особенности замыкания лопаток в венце требуют использования разъемных бандажей [1-4]. Такие бандажи способны выполнять функции межлопаточной упруго-демпферной связи. При этом ее характеристики определяются параметрами контактного взаимодействия, так как площадь области плотного контакта определяет жесткость связи, а площадь области скользящего контакта ее диссипативные свойства.

Постановка задачи. Целью данной работы является исследование влияния расположения промежуточного полочного разъемного бандажа на напряженно деформированное состояние (НДС), характер контактного взаимодействия в разъемных соединениях. Моделирование лопаточного венца проводилось в рамках конечно-элементного подхода, при этом учитывалась циклическая симметрия системы. В результате была значительно сокращена размерность решаемых матричных систем уравнений и КЭ модель периодической части системы была построена с высокой степенью детализации, особенно в местах контактного взаимодействия.

Следует отметить, что ранее нами в работах [1, 5] показано, что степень нелинейности прямо зависит от плотности предварительного статического контакта и определено, что флуктуация резонансных частот происходит в окрестности собственных частот линеаризованных моделей, которые получаются путем замены контактных условий кинематическими связями по результатам предварительно рассчитанной статической задачи. Поэтому проведения на их основе анализа прочностных характеристик при варьировании положением промежуточного бандажа по высоте пера лопатки есть важный этап и для дальнейшего обеспечения допустимых динамических характеристик.

Построение модели единичной лопатки. На рис. 1 представлена базовая геометрическая модель лопатки сверхбольшой длины с двухъярусным полочным бандажом разъемного типа. Периферийный бандаж в рассматриваемой модели представляет собой классическое Z-образное зацепление (рис. 1, в). Конструктивное исполнение промежуточного бандажа бывает прямого [3] и Z-образного зацепления. В работе [2] был проведен сравнительный анализ влияния формы зацепления промежуточного бандажа на НДС данного лопаточного аппарата и показано, что в Z-образном зацеплении реализуется значительно более плотный контакт. Поэтому это зацепление и было выбрано для конструкции промежуточного бандажа (рис. 1, а).

Построение расчетной модели проводилось в рамках конечно-элементного подхода – соответствующие модели приведены на рис. 2 (использова-

лись трехмерные изопараметрические 8-узловые конечные элементы (КЭ) с тремя степенями свободы в узле). Влияние диска в при моделировании не учитывалось. Поэтому лопатка в хвостовой части имеет жесткую заделку по поверхностям контакта зубьев хвостовика и диска.

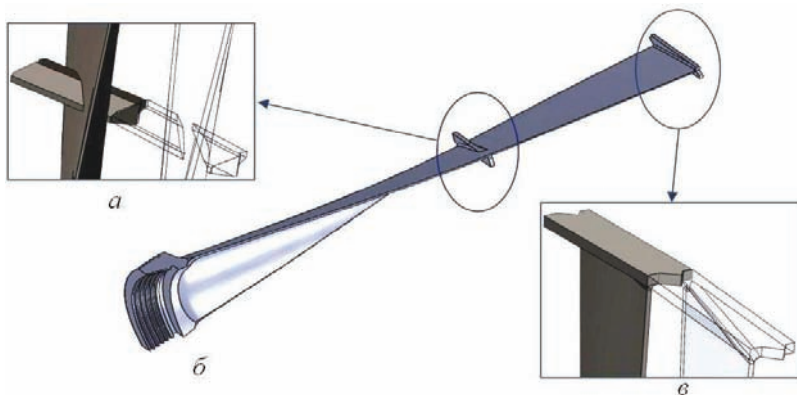


Рисунок 1 – Твердотельная модель лопатки и формы бандажных связей



Рисунок 2 – Конечно-элементная модель лопатки

Построение расчетной модели проводилось в рамках конечно-элементного подхода – соответствующие модели приведены на рис. 2 (использовались трехмерные изопараметрические 8-узловые конечные элементы (КЭ) с тремя степенями свободы в узле). Влияние диска в при моделировании не учитывалось. Поэтому лопатка в хвостовой части имеет жесткую заделку по поверхностям контакта зубьев хвостовика и диска.

При моделировании лопаточного венца учитывалась циклическая симметрия системы. В этом случае задача анализа его прочности и собственных колебаний сводится к рассмотрению только одной периодической части системы, в качестве которой был взят сектор с одной лопаткой, закрепленной по опорным поверхностям зубьев хвостовика. При этом разделение осуществлялось таким образом, чтобы контактирующие части бандажных связей вошли внутрь сектора [2, 5]. По плоскости контакта Z-образных зацеплений бандажей

задавались контактные КЭ типа поверхность-поверхность, реализующие решение контактной задачи на основе метода множителей Лагранжа [6].

Геометрическая (см. рис. 1) и конечно-элементная (см. рис. 2) модели были построены в параметрическом виде и позволяют изменять положение по высоте полки промежуточного бандажа. С целью оценки влияния положения полки на контактное взаимодействие в бандажах, напряженно-деформированное состояние лопатки и собственные частоты было построено пять моделей лопаток аналогичных вышеприведенным с разной высотой полки (рис. 3).

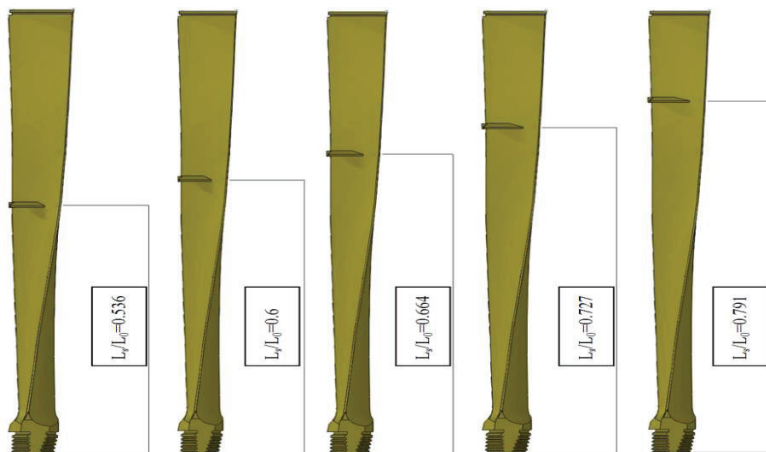


Рисунок 3 – Варианты моделей лопатки с разной высотой промежуточного бандажа

Моделирование НДС лопаточного аппарата с учетом контактного взаимодействия. Полученные модели для контактных зацеплений приведены на рис. 4, а, б, где полки бандажей разрезаны плоскостью симметрии и их части с зубом Z-образного зацепления соединены с соответствующей впадиной.

На рис. 4 показано, что влияние отброшенной части системы заменены силами (вектором узловых сил $\{Q\}$), приложенными на поверхности разделения. Для удобства математического представления, в этом случае, целесообразно выделить отдельно степени свободы, принадлежащие поверхностям разделения сектора, а вектор перемещений представить, как $\{q\}^T = \{q_l\}^T, \{q_c\}^T, \{q_r\}^T$. Тогда, разрешающая система уравнений теории упругости в конечно-элементной постановке примет вид:

$$\begin{bmatrix} [K_l] & [K_{cl}] & 0 \\ [K_{cl}] & [K_c] & [K_{cr}] \\ 0 & [K_{cr}] & [K_r] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{q_l\} \\ \{q_c\} \\ \{q_r\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_l\} \\ \{f_c\} \\ \{f_r\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{Q_l\} \\ 0 \\ \{Q_r\} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где индексами l и r – обозначено принадлежность компонент к левой и правой поверхностям разделения сектора, а индексом c – к его внутренней части; $[K]$ – матрица жесткости; $\{f\}$ – вектор приведенной к узлам нагрузки. На

компоненты вектора перемещений и внутренних сил, принадлежащих поверхностям разделения, накладываются условия циклической симметрии, которые, в условия равномерно распределенной по углу лопаточного венца нагрузки, принимают вид:

$$\{q_l\} = \{q_r\}; \quad \{Q_l\} = -\{Q_r\}. \quad (2)$$

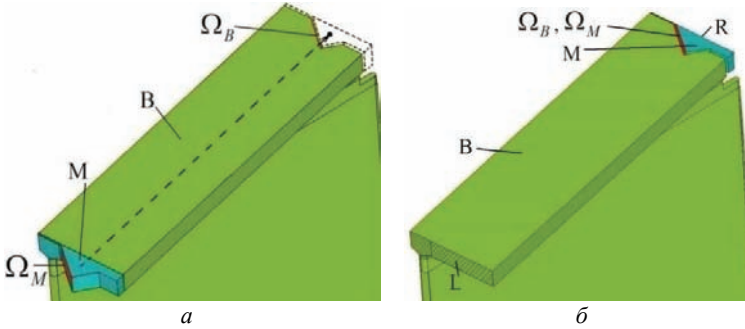


Рисунок 4 – Моделирование периодической части циклически симметричного лопаточного аппарата (а – исходная геометрия периферийного бандажа; б – сектор циклически симметричной системы)

Учет условий (2) позволяет выразить степени свободы, принадлежащие одной поверхности разделения, через степени свободы другой и избавиться от неизвестных векторов внутренних сил $\{Q_l\}$ и $\{Q_r\}$

$$\begin{bmatrix} [K_l] + 2[K_{cl}] + [K_r] & [K_{cl}] + [K_{cr}] \\ [K_{cl}] + [K_{cr}] & [K_c] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{q_l\} \\ \{q_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_l\} + \{f_r\} \\ \{f_c\} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Вектор приведенной к узлам нагрузки, с учетом наличия контактного взаимодействия внутри сектора, можно разложить на составляющие обусловленные: внешними силами $\{F\}$ и контактным давлением $\{p\}$

$$\begin{Bmatrix} \{f_l\} + \{f_r\} \\ \{f_c\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_l\} + \{F_r\} \\ \{F_c\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{p(q_1, q_2, \dots)\} \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Контактное давление зависит от компонент вектора перемещений, что приводит к нелинейности матричного уравнения (3) с правой частью в виде (4). Кроме того, в рамках рассматриваемой постановки, аналитического выражения для соответствующих зависимостей давления от перемещений (деформации) нет, а конкретные значения определяются для каждой пары контактирующих узлов в соответствии с алгоритмом метода множителей Лагранжа [6]. При этом сами уравнения решаются итерационно.

Анализ статического напряженно-деформированного состояния. Было проведено серию исследований по определению параметров НДС лопаточного аппарата для различных вариантов конструкции (с разными положениями по высоте для промежуточного бандажа). Отдельно была рассмотрена

конструкция лопатки без промежуточной связи. Расчет выполнялся для двух стационарных режимов работы турбины ($0,5\omega_0$ и ω_0), где ω_0 – частота вращения ротора на номинальном режиме работы турбины.

На рис. 5 представлено поле перемещений для лопатки без промежуточной связи. Максимум перемещений, вызванный раскруткой пера лопатки, находится на высоте $L/L_0 = 0,682$. В районе этой высоты и проведено варьирование положением промежуточного бандажа (рис. 3).

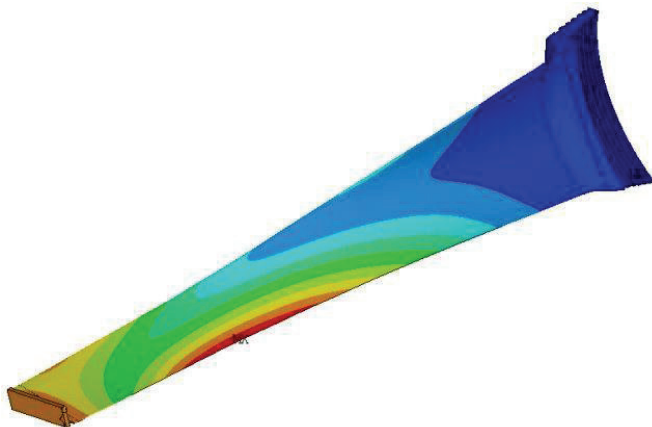


Рисунок 5 – Поле перемещений лопатки лопаточного аппарата с конструкцией без промежуточного бандажа под действием центробежных сил

На рис. 6 представлено распределение эквивалентных по Мизесу напряжений для лопаточных аппаратов без промежуточного бандажа и при варьировании его высотой (результаты приведены в относительных единицах: за единицу приняты максимально допустимые напряжения). Как видно из рис. 6, во всех случаях интенсивность напряжений равномерно снижается от корня лопатки к периферии. Присутствуют два участка концентрации напряжений: 1 – зона на выходной кромке у корня лопатки, 2 – зона вокруг промежуточной бандажной полки. При этом для случая без промежуточного бандажа (рис. 6, *a*) концентрация напряжений в 1-й зоне достигает предельно допустимых значений. С введением промежуточной связи на высотах ниже $L/L_0 = 0,682$ происходит резкое снижение концентрации напряжений в 1-й зоне, однако возникает 2-зона концентрации. При этом для случая $L/L_0 = 0,6$ концентрация напряжений ниже допустимых. Для случаев, когда промежуточная связь расположена на высотах выше $L/L_0 = 0,682$ в обеих зонах концентрация напряжений достигает либо превышает допустимые значения.

На рис. 7 приведен график зависимости максимальных значений эквивалентных напряжений по критерию Мизеса определенных при различных положениями промежуточной бандажной полки по высоте лопатки. Там же приведено результаты для лопатки без промежуточной бандажной связи.

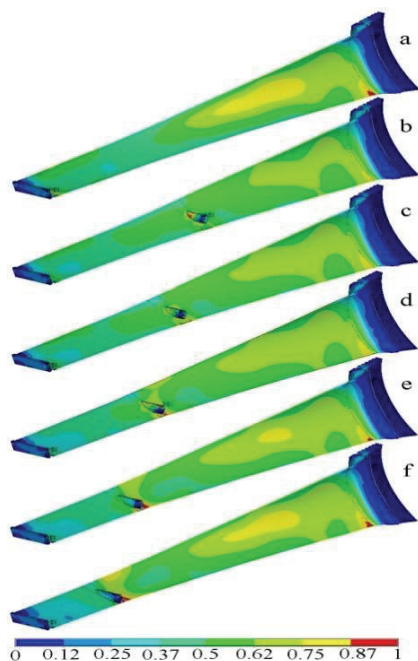


Рисунок 6 – Распределение интенсивности напряжений в лопатках

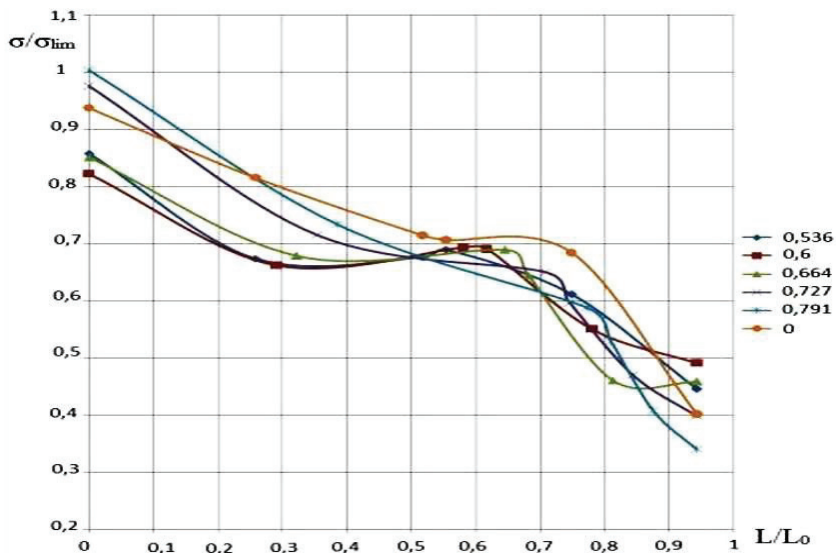


Рисунок 7 – Зависимость максимальных напряжений по лопатке от высоты установки промежуточной полки

Из анализа зависимостей рис. 8 видно, что изменение высоты промежуточной полки незначительно влияет на величину средних напряжений по высоте лопатки, но существенно влияет на величину максимальных напряжений.

На основе полученных результатов, можно сказать, что для поиска наилучшего места расположения промежуточной полки нужно рассматривать участок лопатки ниже $0,682 L_0$. Для вариантов с высотой выше $0,682 L_0$ необходимо изменение формы прикорневой зоны лопатки.

Анализ контактного взаимодействия в межлопаточных связях. В результате расчета выявлено, что периферийная и промежуточная полки контактируют по областям показанным на рис 8. Поверхности, вступающие в контакт показаны темным цветом.

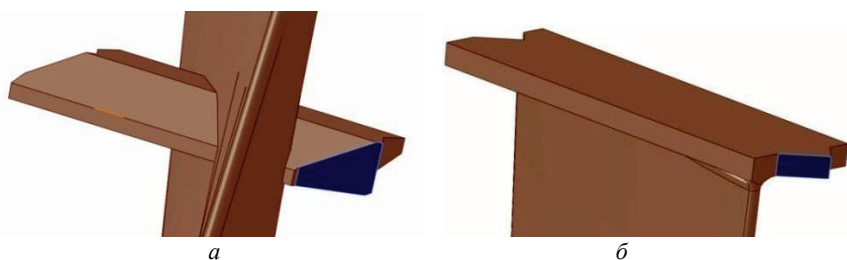


Рисунок 8 – Поверхности контакта в промежуточном (а) и периферийном (б) бандажах

Результаты расчета распределения нормального контактного давления и статуса контакта на всех режимах и для всех вариантов конструкций лопаток сведены в таблицы (см. рис. 9). Из анализа статуса контакта для всех случаев следует что нет плотного контакта в межлопаточных зацеплениях. Наблюдаемый скользящий контакт обеспечивает сочленение лопаток в процессе работы, но обуславливает увеличение диссипативных свойств системы при рабочей нагрузке за счет рассеяния энергии колебаний на трение.

Как видно из рис. 9, изменение положения по высоте промежуточной связи существенно изменяет характер контактного взаимодействия и в промежуточной и в периферийной полке. Происходит не только изменение формы пятен контакта, но и их перераспределение на контактирующих поверхностях. Кроме того, наблюдается увеличение контактных давлений между промежуточной и периферийной полкой при увеличении центробежных сил.

Следует отметить следующие особенности влияния высоты промежуточной бандажной связи на характер контактного взаимодействия:

- для варианта $0,664$ наблюдается резкое изменение места контактной площадки и уменьшение площади контакта в промежуточной полке, а напряжения превышают допустимое значение. Это можно объяснить

- максимальной раскруткой лопатки, вызванной центробежной нагрузкой (в данном варианте положение промежуточной бандажной полки близко к максимуму перемещений лопатки без связи рис. 5);
- наилучшие варианты расположения промежуточной связи с высотами $0,6 L_0$ и $0,727 L_0$. При понижении высоты (вариант $0,536 L_0$) наблюдаются превышенные допустимых значений в контактных напряжениях промежуточного бандажа. А при повышении высоты до $0,727 L_0$ наблюдается резкое уменьшение пятна контакта как для периферийной так и для промежуточной связи.

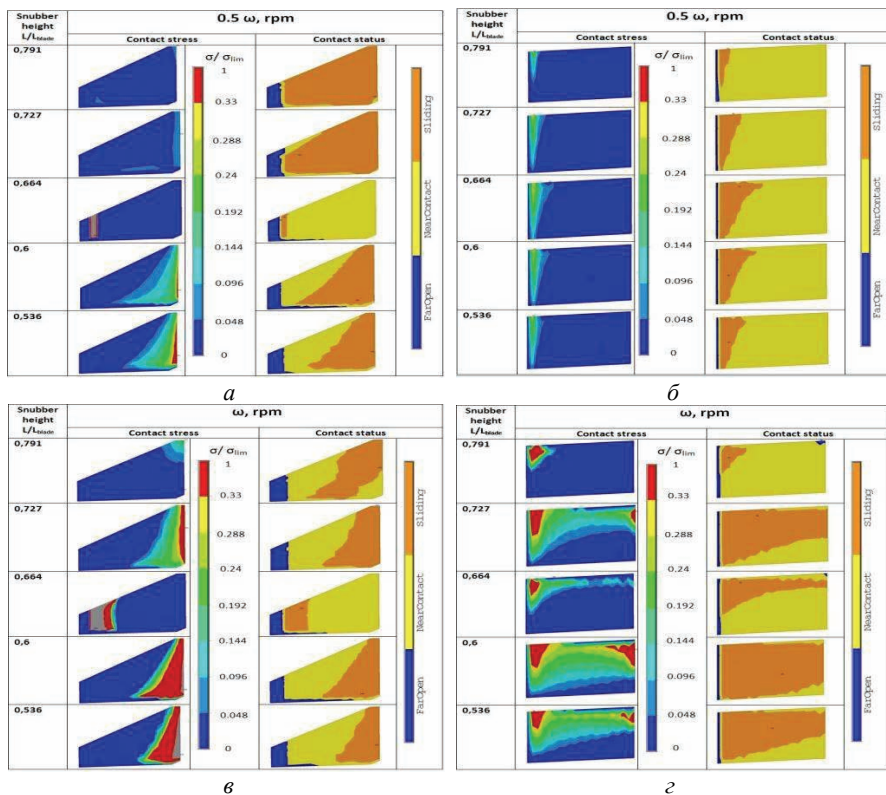


Рисунок 9 – Контактные напряжения и статус контакта при разных оборотах ротора: *a*, *в* – для промежуточной бандажных полки, *б*, *г* – для периферийной бандажной полки

Заключение. В данной работе были выполнен анализ прочности лопаточного аппарата сверхбольшой длины с разъемным двухуровневым бандажом с учетом контактного взаимодействия лопаток в соединениях. При этом варьировалась высота расположения цельнофрезерованной промежуточной

бандажной связи.

Результаты расчетов показывают, что практический интерес представляет размещение промежуточного бандажа в диапазонах относительных высот $0,55 L_0 - 0,66 L_0$ и $0,7 L_0 - 0,72 L_0$, при которых обеспечивается наиболее плотный контакт в разъемных соединениях и допустимые уровни напряжений в лопаточном аппарате.

В связи с тем, что контакт в обоих разъемных бандажах носит скользящий характер, представляет интерес варьирование формой Z-образного соединения. Особенности контактирования промежуточной полки на высоте $0,664 L_0$ требует дополнительных исследований, в том числе и в направлении изменения формы промежуточной связи. Серьезный практический интерес представляет постановка задачи оптимизации на формоизменение и положение промежуточной бандажной связи в диапазоне высот $0,55 L_0 - 0,72 L_0$.

Список литературы: 1. Жовдак В.О, Зінківський А.П., Степченко О.С., Круглий Я.Д. Нелінійні коливання пакетів лопаток з роз'ємними з'єднаннями // Проблеми машиностроення. – Х.: Контраст, 2009. – Т. 12, № 4. – С. 45-52. 2. Степченко А.С., Ларин А.А., Артемов С.Л. Исследование динамических характеристик лопаточного аппарата с двухъярусным бандажированием // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Х.: НТУ «ХП», 2010. – № 48. – С. 127-134. 3. Kaneko Y., Ohyama H. Analysis and measurements of damping characteristics of integral shroud blade for steam turbine // *Journal of system design and dynamics*. – 2008. – Vol. 2 (1). – PP. 311-322. 4. Степченко А.С., Ларин А.А., Кабанов А.Ф., Артемов С.Л. Влияние типа промежуточной бандажной связи на динамические характеристики лопаточного аппарата с двухъярусным бандажированием // Прочность материалов и элементов конструкций. Труды МНТК посвященной 100-летию со дня рождения академика НАН Украины Г.С. Писаренко. – К. – С. 102-109. 5. Демуз Я.Д., Жовдак В.А., Ларин А.А., Степченко А.С., Солянникова Ю.В. Исследование динамического контактного взаимодействия межбандажных соединениях пакетов лопаток паровых турбин с расстройкой // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наук. праць ДНУ. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 11. – С. 53-62. 6. *Wriggers P. Computational contact mechanics*. – Springer, 2006. – 520 p.

Поступила в редколлегию 12.10.2011

Г.Н. ТИМЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
И.О. МОРАЧКОВСКАЯ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
Н.А. БУДНИКОВ, аспирант, НТУ «ХПИ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Розглядається задача про вільні геометрично нелінійні коливання композитних багатощарових пластин складної форми при різних способах закріплення. Математичну постановку виконано в рамках уточненої теорії типу моделі Тимошенка. Наведено числові результати для багатощарових пластин складної геометрії і різних видів граничних умов. Виконано порівняння з відомими результатами та встановлено добре їх узгодження, що свідчить про вірогідність запропонованого методу.

The problem of geometrically nonlinear free vibrations of multilayer composite plates of complex shape at different ways of fixing is considered. Mathematical statement made in the refined theory of Timoshenko-type model. Numerical results for multilayer plates of complex geometry and different types of boundary conditions are presented. A comparison with known results was made and their good agreement was ascertained, indicating the probability of the proposed method.

Рассматривается задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях композитных многослойных пластин сложной формы при различных способах закрепления. Математическая постановка выполнена в рамках уточненной теории типа модели Тимошенко. Приведены числовые результаты для многослойных пластин сложной геометрии и различных видов предельных условий. Выполнено сравнение с известными результатами и установлено хорошо их согласование, которое свидетельствует о достоверности предложенного метода.

Постановки и методы решения задач колебаний изотропных и анизотропных пластин простой геометрической формы в плане даны в [1,2]. Однако обзор литературы показывает, что геометрически нелинейные колебания многослойных пластин, имеющих сложную форму граници, практически изучены недостаточно полно. Исследование влияния способа укладки слоев и врезов краевых границ многослойных пластин актуальны как для развития теории колебаний пластин из композитных материалов, так и для решения прикладных проблем проектирования новой техники. Настоящая работа посвящена исследованию свободных геометрически нелинейных колебаний композитных многослойных пластин, слои которых изготовлены из одного композитного материала, но уложены с разной ориентацией осей анизотропии. Для рассмотренной задачи приводятся дифференциальные уравнения с краевыми условиями для пластин с простыми границами и с врезами. Предложено их решение на основе вариационных методов и теории R-функций. Численные результаты позволили установить влияние как способа укладки слоев, так и глубины врезов многослойных пластин.

Постановка задачи. Рассматриваются пластины постоянной толщины h , в предположении, что проскальзывание между слоями отсутствует. Огра-

начимся рассмотрением пластин симметричного строения, пренебрегая при этом силами инерции в срединной плоскости. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории первого порядка, основанной на гипотезе прямой линии принятой для всего пакета в целом [1,2]. Система уравнений движения пластины в рамках рассматриваемой теории имеет вид

$$L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v + Nl_1(C_{ij})w = m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v + Nl_2(C_{ij})w = m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$L_{33}(C_{ij})w + L_{34}(C_{ij})\psi_x + L_{35}(C_{ij})\psi_y + Nl_3 = m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$L_{43}(C_{ij})w + L_{44}(C_{ij}, D_{ij})\psi_x + L_{45}(D_{ij})\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$L_{53}(C_{ij})w + L_{54}(D_{ij})\psi_x + L_{55}(C_{ij}, D_{ij})\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Линейные операторы L_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ представленные в уравнениях (1)–(5) описаны в [4]. Нелинейные операторы Nl_1 , Nl_2 , Nl_3 определены следующим образом:

$$Nl_1(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{16} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{26} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}; \quad (6)$$

$$Nl_2(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{26} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{26} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}; \quad (7)$$

$$Nl_3(C_{ij}) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left\{ C_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left\{ C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\}, \quad (8)$$

где C_{ij} , D_{ij} приведенные жесткостные характеристики [2], которые определяются через упругие постоянные B_{jk}^i для каждого i -го слоя.

Система дифференциальных уравнений (1) – (5) дополняется соответствующими граничными условиями. Приведем некоторые граничные условия, которые использовались при решении задач:

– жестко закрепленный край

$$u = 0; \quad v = 0; \quad \psi_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad w = 0, \quad (9)$$

– шарнирное опирание (неподвижный шарнир)

$$u = 0; \quad v = 0; \quad \psi_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad w = 0; \quad M_n = 0, \quad (10)$$

где n – нормаль к границе области, M_n – изгибающий момент.

Начальные условия принимаются следующими:

$$w = w_{\max}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Метод решения. Поиск решений рассматриваемых задач реализован в три этапа. На первом – методом Ритца решается линейная задача о колебаниях многослойной пластины с заданной формой границы. Собственные формы и частоты для произвольной области и разных видов граничных условий отыскиваются в аналитическом виде с привлечением теории R-функций. В работе [4] подробно описан алгоритм решения таких задач. Собственные векторы, найденные на первом этапе, выбираются в качестве основных базисных функций для представления неизвестных компонент вектора перемещений.

На втором этапе решается геометрически нелинейная задача о колебаниях многослойной пластины с заданной формой границы. Неизвестные функции w , ψ_x , ψ_y , u , v представляются в следующем виде

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y); \\ \psi_x(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{x1}(x, y); \\ \psi_y(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{y1}(x, y); \\ u(x, y, t) &= y_1^2(t) \cdot u_2(x, y); \\ v(x, y, t) &= y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \end{aligned} \quad (12)$$

где $w_1(x, y)$, $\psi_{x1}(x, y)$, $\psi_{y1}(x, y)$ компоненты собственного вектора, а u_2 и v_2 являются решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u_2 + L_{12}(C_{ij})v_2 &= -Nl_1(C_{ij})w_1; \\ L_{21}(C_{ij})u_2 + L_{22}(C_{ij})v_2 &= -Nl_2(C_{ij})w_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Поиск решения системы уравнений (13), с учетом начальных условий (9), сведен к минимизации функционала

$$I(\vec{U}_2) = \int_{\Omega} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} + C_{66} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(C_{16} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + C_{26} \frac{\partial v_2}{\partial y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + 2 \left(Nl_1(C_{ij}) w_1 u_2 + (Nl_2(C_{ij}) w_1) v_2 \right) \Big\} d\Omega - \\
& - 2 \int_{\partial\Omega} \left(F_1^0 u_{2n} + F_2^0 v_{2n} \right) ds, \tag{14}
\end{aligned}$$

где $U_{2n} = u_2 l + v_2 m, V_{2n} = -u_2 m + v_2 l$.

Подставляя выражения для неизвестных функций в дифференциальное уравнение (3) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, приходим к решению обыкновенного дифференциального уравнения:

$$y_1''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + \beta \cdot y_1^3(t) = 0, \tag{15}$$

где коэффициент β имеет вид:

$$\begin{aligned}
\beta = & - \frac{\int_{\Omega} \left(Nl_{32}(C_{ij}, u_2, v_2, w_1) \right) \cdot w_1 d\Omega}{\rho h \|w_1\|^2}; \\
Nl_{32}(C_{ij}) = & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(C_{11} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + C_{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} + \\
& + C_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \Big\} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \left\{ C_{66} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right. \\
& + C_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \Big\} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left\{ C_{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) \right. \\
& \left. + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

На третьем этапе решается уравнение (15) с начальными условиями (11). С этой целью искомое решение представим в виде $y(t) = A \cos \omega_N t$, где ω_N – частота нелинейных колебаний; A – амплитуда колебаний. Затем, применяя метод Бубнова-Галеркина к уравнению (15), получаем зависимость между отношением частоты нелинейных колебаний к частоте линейных колебаний и амплитудой в виде

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta \cdot A^2}. \tag{16}$$

Численные результаты. Задача 1. Рассмотрим квадратную пятислойную пластину с геометрическими свойствами $a/b = 1$, $a/h = 100$ и жесткостными характеристиками: $E_1 = 40E_2$; $G_{12} = G_{13} = 0,6E_2$; $G_{23} = 0,5E_2$; $\nu_1 = 0,25$.

В табл. 1 приведены результаты сравнения амплитудно-частотных ха-

рактических (АЧХ) для двух случаев укладки слоев пластины и различных способов закрепления (неподвижный шарнир и жесткая заделка), с результатами работы [5].

Таблица 1

(0/90/0/90/0)					
Неподвижный шарнир			Жесткая заделка		
w_{max} / h	RFM	[5]	w_{max} / h	RFM	[5]
0,2	1,0315	1,03147	0,2	1,0079	1,00847
0,4	1,1207	1,12099	0,4	1,0313	1,03347
0,6	1,2553	1,25723	0,6	1,0692	1,07390
0,8	1,4226	1,42805	0,8	1,1201	1,12820
1,0	1,6124	1,62368	1,0	1,1823	1,19461
1,2	1,8176	1,83697	1,2	1,2541	1,27141
(45/-45/ 45 /-45/ 45)					
Неподвижный шарнир			Жесткая заделка		
w_{max} / h	RFM	[5]	w_{max} / h	RFM	[5]
0,2	1,0146	1,01473	0,2	1,0069	1,00717
0,4	1,0571	1,05776	0,4	1,0274	1,02834
0,6	1,1244	1,12601	0,6	1,0607	1,06258
0,8	1,2123	1,21542	0,8	1,1056	1,10855
1,0	1,3168	1,32185	1,0	1,1608	1,16474
1,2	1,4342	1,44162	1,2	1,2248	1,22969

Из таблицы видно, что полученные и расчетные данные из [5] отличаются менее чем на 1 %, что свидетельствует о достоверности предложенного метода. Результаты, представленные в таблице, соответствуют аппроксимации неопределенных компонент степенными полиномами. Данные табл. 1 получены для полиномов седьмой степени. Количество координатных функций определялось по данным о сходимости численных результатов.

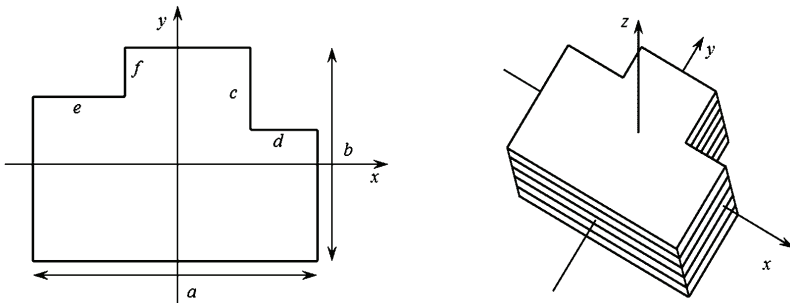


Рисунок 1

Задача 2. Рассмотрим пятислойную пластину с геометрическими свойствами $a/b = 1$; $a/h = 100$ и жесткостными характеристиками: $E_1 = 40E_2$; $G_{12} = G_{13} = 0,6E_2$; $G_{23} = 0,5E_2$; $\nu_1 = 0,25$, изображенную на рис. 1.

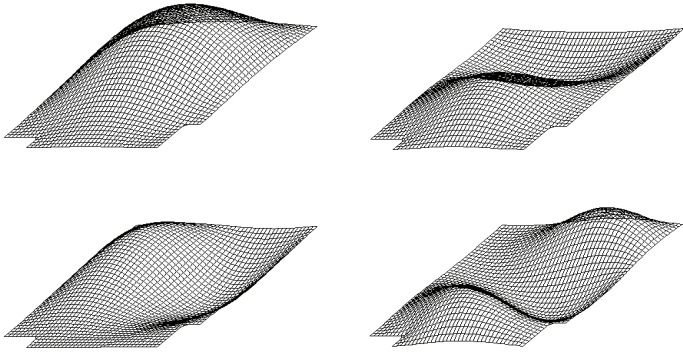


Рисунок 2

Таблица 2

Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
78,45	170,07	232,68	310,22

Таблица 3

(0/90/0/90/0)							
Неподвижный шарнир				Жесткая заделка			
w_{\max} / h	$c=d=0$ $e=f=0$	$c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$	$c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$	w_{\max} / h	$c=d=0$ $e=f=0$	$c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$	$c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$
0,2	1,0315	1,0315	1,0244	0,2	1,0079	1,0079	1,0078
0,4	1,1207	1,1206	1,0643	0,4	1,0313	1,0312	1,0309
0,6	1,2553	1,2551	1,2017	0,6	1,0692	1,0688	1,0682
0,8	1,4226	1,4222	1,3377	0,8	1,1201	1,1195	1,1184
1,0	1,6124	1,6118	1,4945	1,0	1,1823	1,1814	1,1797
1,2	1,8176	1,8169	1,6663	1,2	1,2541	1,2529	1,2507
(45/-45/45/-45/45)							
Неподвижный шарнир				Жесткая заделка			
w_{\max} / h	$c=d=0$ $e=f=0$	$c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$	$c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$	w_{\max} / h	$c=d=0$ $e=f=0$	$c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$	$c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$
0,2	1,0146	1,0143	1,0120	0,2	1,0069	1,0067	1,0038
0,4	1,0571	1,0558	1,0473	0,4	1,0274	1,0272	1,0150
0,6	1,1244	1,1210	1,1035	0,6	1,0607	1,0602	1,0350
0,8	1,2123	1,2067	1,1778	0,8	1,1056	1,1048	1,0589
1,0	1,3168	1,3085	1,2669	1,0	1,1608	1,1596	1,0907
1,2	1,4342	1,4234	1,3679	1,2	1,2248	1,2233	1,1282

В табл. 2 приведены значения трех первых частот, полученные при решении задачи о линейных колебаниях пластин, для случая шарнирного опирания при укладке слоев (0/90/0/90/0) и размерами врезов $c = e = 0,2a$.

Формы колебаний, соответствующие частотам из табл. 2, изображены на рис. 2.

В табл. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для двух случаев укладки слоев пластины и различных способов закрепления (неподвижный шарнир и жесткая заделка) при различных значениях врезов.

Заключение. В работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний симметричных многослойных пластин, который основан на использовании теории R-функций, вариационных методов, и метода Рунге-Кутты. Получены новые результаты для пятислойных пластин, исследовано влияние геометрических и физических факторов на свободные нелинейные колебания композитных пластин. Установлено, что при увеличении глубины вреза значения отношения ω_{NL}/ω_L уменьшаются. При малой глубине врезав эти значения стремятся к значениям соответствующим для квадратной пластины.

Список литературы: 1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 2. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974, – 448 с. 3. *Рвачев В.Л., Курпа Л.В.* R-функции в задачах теории пластин. – К.: Наукова думка, 1987. – 176 с. 4. *Курпа Л.В., Тимченко Г.Н.* Исследование геометрически нелинейных колебаний композитных пластин сложной формы / Динамика и прочность машин. – № 21. – С. 113-118. 5. *M.K. Singha, R. Daripa* Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates / Journal of Sound and Vibration. – 328 (2009). – P. 541–554.

Поступила в редколлегию 27.10.2011

УДК 629.783

В.Б. УСПЕНСКИЙ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;
М.В. НЕКРАСОВА, ст. преп., НТУ «ХПИ»

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ

Пропонуються метод і алгоритми визначення компонент векторів кутової швидкості й прискорення центру мас рухомого об'єкту, заснованих на використанні тільки датчиків прискорення, розташованих в заданих точках рухомого об'єкту, без використання гіроскопів. Показано, що для цього достатньо використовувати дев'ять акселерометрів, орієнтованих певним чином в обраних точках.

The method and algorithms for determining angular velocity vector and acceleration of center of mass of a moving object, based on using only acceleration sensors located at specified points of a moving object without the use of gyroscopes is proposed. It is sufficient to use nine accelerometers oriented in some way in selected locations.

Предлагаются метод и алгоритмы определения компонент векторов угловой скорости и ускорения центра масс подвижного объекта, основанные на использовании только датчиков ускорения, расположенных в заданных точках подвижного объекта, без использования гироскопов. Показано, что для этого достаточно использовать девять акселерометров, ориентированных определенным образом в выбранных точках.

Введение. В настоящее время для измерения параметров движения используются, как правило, гироскопы и акселерометры. Различные схемы таких измерителей приведены в [1]. В связи с развитием МЭМС-технологии стоимость инерциальных измерителей и, в частности, акселерометров, становится малой. Это открывает возможность построения избыточных и сильно избыточных систем акселерометров (АК). До настоящего времени вопросы эффективного использования таких систем еще не изучены. В данной статье исследуется возможность использования сильно избыточных систем АК для измерения как ускорения, так и вектора угловой скорости. Такой подход позволит создавать полные инерциальные модули, построенные на основе АК, сравнительно невысокой стоимости.

Постановка задачи. В данной статье рассматривается задача компоновки в твердом теле избыточной (более 3) системы акселерометров и определения угловой скорости и ускорения по их измерениям.

Математическая модель измерений. Рассмотрим акселерометр, расположенный в некоторой фиксированной точке подвижного объекта. Построим математическую модель его измерений.

Пусть $\xi\eta\zeta$ – некоторая инерциальная система координат (ИСК), xyz – система координат, связанная с инерциальным базисом (ИБ, ССК), с центром в произвольно заданной точке O , далее называемой базовой, и задаваемой радиус-вектором \vec{r} . ССК вращается в инерциальном пространстве с абсолютной угловой скоростью $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ в проекциях на оси ССК.

Расположение акселерометра в ССК (точка A) задается радиус-вектором $\vec{\rho}$. Направление оси чувствительности определяется в ССК единичным вектором \vec{e} (рис. 1).

Будем считать, что акселерометр измеряет не кажущееся, а абсолютное ускорение точки своей дислокации, то есть

$$\vec{w}_A = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{w}_O + \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}, \quad (1)$$

где \vec{w}_O – абсолютное ускорение точки O (ускорение переносного движения ССК), $\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}$ – ускорение точки A относительно ССК. Дифференцирование

осуществляется в ИСК. Переходя во втором слагаемом от полной производной к локальной, то есть к производной, относительно вращающейся ССК, в общем случае имеем [2]:

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{\tilde{d}\bar{v}}{dt} + 2 \cdot [\bar{\omega} \times \bar{v}] + \left[\frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} \right] + [\bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times \bar{\rho}]], \quad (2)$$

где $\frac{\tilde{d}}{dt}$ – знак локального дифференцирования, \bar{v} – относительная скорость точки А в ССК.

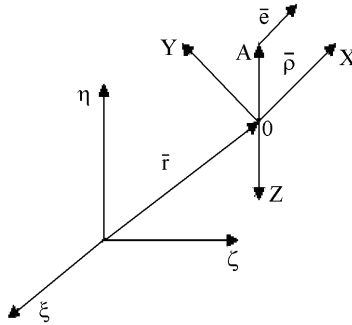


Рисунок 1 – Единичный вектор \bar{e}

Выражение (2) упрощается, если точка А неподвижна в ССК, так как в этом случае

$$\bar{v} = 0; \quad \frac{\tilde{d}\bar{v}}{dt} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, из (1) с учетом (2) и (3) можно получить векторное равенство

$$\bar{w}_A = \bar{w}_O + \left[\frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho} \right] + \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega}, \bar{\rho}) - \bar{\rho} \cdot \omega^2, \quad (4)$$

связывающие абсолютные ускорения точек А и О. При этом акселерометр, расположенный в точке А, измеряет проекцию \bar{w}_A на свою ось чувствительности, то есть величину $A = (\bar{w}_A, \bar{e})$.

Далее, пусть имеется n акселерометров с осями чувствительности $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, расположение которых в ССК задается соответственно векторами $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_n$. Здесь и в дальнейшем все векторные величины определяются в проекциях на оси ССК. В этом случае показания акселерометров соответствуют следующим выражениям:

$$A_i = (\bar{w}_O, \bar{e}_i) + \left(\left[\frac{\tilde{d}\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho}_i \right], \bar{e}_i \right) + (\bar{\omega}, \bar{e}_i) \cdot (\bar{\omega}, \bar{\rho}_i) - (\bar{\rho}_i, \bar{e}_i) \cdot \omega^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Если вектор \bar{e}_i коллинеарен вектору $\bar{\rho}_i$, то (5) существенно упрощается, так как $\left(\left[\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{\rho}_i \right], \bar{e}_i \right) = 0$, и выражение (5) примет вид:

$$A_i = (\bar{w}_O, \bar{e}_i) + (\bar{\omega}, \bar{e}_i) \cdot (\bar{\omega}, \bar{\rho}_i) - (\bar{\rho}_i, \bar{e}_i) \cdot \omega^2. \quad (6)$$

Таким образом, в общем случае измерения акселерометров содержат информацию как об ускорении базовой точки, так и об угловой скорости и угловом ускорении ССК. При выборе базовой точки O на продолжении осей чувствительности (ОЧ) АК, что возможно при пересечении ОЧ всех АК в одной точке, их измерения становятся инвариантными к угловому ускорению.

В этих условиях сформулируем задачу: разработать структуру измерительного акселерометрического модуля и алгоритм определения ускорения и угловой скорости ССК на основании измерений модуля.

Для решения поставленной задачи в общем случае необходимо решить систему уравнений (5), составленную для i акселерометров, где $i = \overline{1, n}$, $n \geq 9$, относительно $\bar{w}_O = (w_{Ox}, w_{Oy}, w_{Oz})$; $\bar{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$; $\dot{\bar{\omega}} = (\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z)$.

Учитывая нелинейный характер уравнений (5), не удалось подобрать достаточно эффективный в общем случае численный метод решения такой системы. Кроме того, способ определения искомых характеристик движения должен составлять основу алгоритма, функционирующего в реальном масштабе времени, что накладывает существенные ограничения на его вычислительную сложность. В этих условиях реализован следующий подход: путем задания рациональной конфигурации АК максимально упростить систему уравнений и, соответственно, алгоритм ее решения.

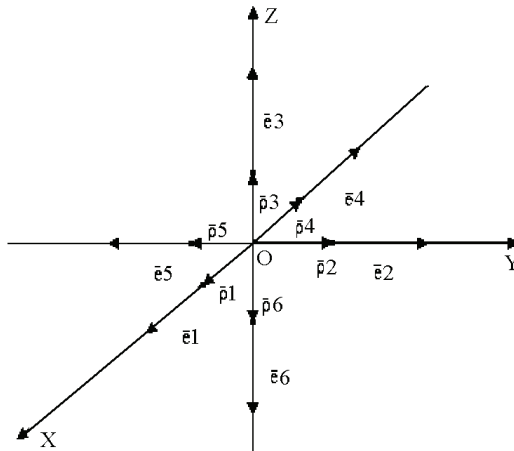


Рисунок 2 – Параметры $\bar{e}_1 - \bar{e}_6$

Вспользуемся описанным ранее свойством инвариантности к угловому ускорению некоторых структур АК. Пусть для шести АК $\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$; $\vec{e}_4 = (-1,0,0)$; $\vec{e}_5 = (0,-1,0)$; $\vec{e}_6 = (0,0,-1)$ и $\bar{\rho}_i = \mu_i \cdot \vec{e}_i$, где μ_i – удаленность i -го акселерометра от точки O (рис. 2).

В этом случае система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{cases} w_{0x} - \mu_1 \omega_y^2 - \mu_1 \omega_z^2 = A_1; \\ w_{0y} - \mu_2 \omega_x^2 - \mu_2 \omega_z^2 = A_2; \\ w_{0z} - \mu_3 \omega_x^2 - \mu_3 \omega_y^2 = A_3; \\ w_{0x} - \mu_4 \omega_y^2 - \mu_4 \omega_z^2 = -A_4; \\ w_{0y} - \mu_5 \omega_z^2 - \mu_5 \omega_x^2 = -A_5; \\ w_{0z} - \mu_6 \omega_x^2 - \mu_6 \omega_y^2 = -A_6. \end{cases}$$

Решая эту систему аналитически, получим

$$\begin{cases} w_{0x} = \frac{\mu_4 \cdot A_1 - \mu_1 \cdot A_4}{\mu_1 + \mu_4} \\ w_{0y} = \frac{\mu_5 \cdot A_2 - \mu_2 \cdot A_5}{\mu_2 + \mu_5} \\ w_{0z} = \frac{\mu_6 \cdot A_3 - \mu_3 \cdot A_6}{\mu_3 + \mu_6} \\ \omega_x^2 = \frac{A_1 + A_4}{2 \cdot (\mu_1 + \mu_4)} - \frac{A_2 + A_5}{2 \cdot (\mu_2 + \mu_5)} - \frac{A_3 + A_6}{2 \cdot (\mu_3 + \mu_6)} \\ \omega_y^2 = \frac{A_2 + A_5}{2 \cdot (\mu_2 + \mu_5)} - \frac{A_1 + A_4}{2 \cdot (\mu_1 + \mu_4)} - \frac{A_3 + A_6}{2 \cdot (\mu_3 + \mu_6)} \\ \omega_z^2 = \frac{A_3 + A_6}{2 \cdot (\mu_3 + \mu_6)} - \frac{A_2 + A_5}{2 \cdot (\mu_2 + \mu_5)} - \frac{A_1 + A_4}{2 \cdot (\mu_1 + \mu_4)} \end{cases} \quad (7)$$

Из полученного решения следует, что компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ могут быть определены по измерениям АК, организованном в данную структуру, с точностью до знака. Для разрешения знаковой неопределенности предлагается использовать прогнозирующую модель вектора угловой скорости вида

$$\vec{\omega}_{k+1} = \vec{\omega}_k + 0,5 \cdot (\dot{\vec{\omega}}_k + \dot{\vec{\omega}}_{k+1}^\pm) \cdot \Delta t, \quad (8)$$

в которой k – номер предыдущего такта обновления информации продолжительности Δt ; $\vec{\omega}_k$, $\dot{\vec{\omega}}_k$ – значения угловой скорости и углового ускорения, определенные для предыдущего момента времени, $\dot{\vec{\omega}}_{k+1}^\pm$ – оценка углового ускорения, полученная для текущего момента времени.

Для получения оценки $\dot{\omega}_{k+1}^{\pm}$ используются измерения от трех дополнительных АК, расположение которых задается параметрами $\bar{e}_7 = (0,1,0)$, $\bar{e}_8 = (0,0,1)$, $\bar{e}_9 = (1,0,0)$; $\bar{\rho}_7 = (\mu_7, 0, 0)$, $\bar{\rho}_8 = (0, \mu_8, 0)$, $\bar{\rho}_9 = (0, 0, \mu_9)$ (рис. 3):

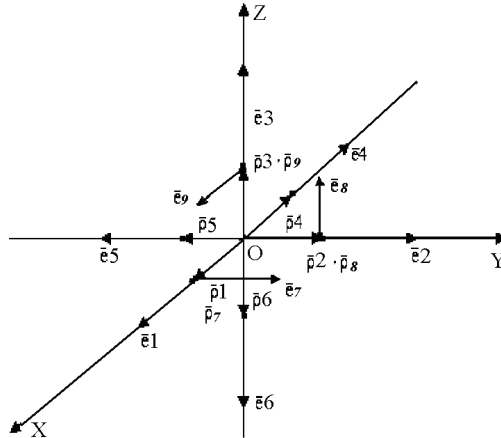


Рисунок 3 – Параметры $\bar{e}_7 - \bar{e}_9$; $\bar{\rho}_7 - \bar{\rho}_9$

При этом

$$\dot{\omega}_x^{\pm} = \frac{1}{\mu_8} \cdot (A_8 - w_{oz} - \mu_8 \cdot \omega_y^{\pm} \cdot \omega_z^{\pm});$$

$$\dot{\omega}_y^{\pm} = \frac{1}{\mu_9} \cdot (A_9 - w_{ox} - \mu_9 \cdot \omega_x^{\pm} \cdot \omega_z^{\pm});$$

$$\dot{\omega}_z^{\pm} = \frac{1}{\mu_7} \cdot (A_7 - w_{oy} - \mu_7 \cdot \omega_x^{\pm} \cdot \omega_y^{\pm}).$$

Запись $\omega_{x,y,z}^{\pm}$ означает, что значения проекций угловой скорости вычисляются из (7) либо со знаком «плюс», либо со знаком «минус». При этом вектор $\dot{\omega}_{k+1}^{\pm}$ формируется из указанных компонент во всевозможных сочетаниях знаков. Таким образом, учитывая возможную двузначность $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, имеем восемь наборов значений вектора $\dot{\omega}_{k+1}^{\pm}$ и восемь значений спрогнозированной угловой скорости $\bar{\Omega}_{k+1}$. Сравнивая прогнозируемое значение скорости $\bar{\Omega}_{k+1}$ с измеренным вектором, составленным из соответствующих компонент $\omega_x^{\pm}, \omega_y^{\pm}, \omega_z^{\pm}$ по критерию минимальной длины вектора разности, принимается решение о действительном значении векторов углового ускорения и угловой скорости, используемых в (8) в последующий момент времени

вместо $\dot{\bar{\omega}}_k, \bar{\omega}_k$. Начальное значение ускорения и угловой скорости считаются известными.

Результаты, полученные на основе изложенного алгоритма, приведены на рис. 4-7 и соответствуют следующим условиям: продолжительность моделирования – 100 с, такт обновления информации – 0,01 с. Истинная угловая скорость генерируется на основании решения динамических уравнений Эйлера при значении момента внешних сил $\bar{M} = (0,005, 0,005, 0,002) \text{ Н} \cdot \text{м}$ и главных центральных моментах инерции $I_1 = 0,48 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_2 = 1,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_3 = 1,32 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (рис. 4), а проекции истинного ускорения меняются, как на рис. 5.

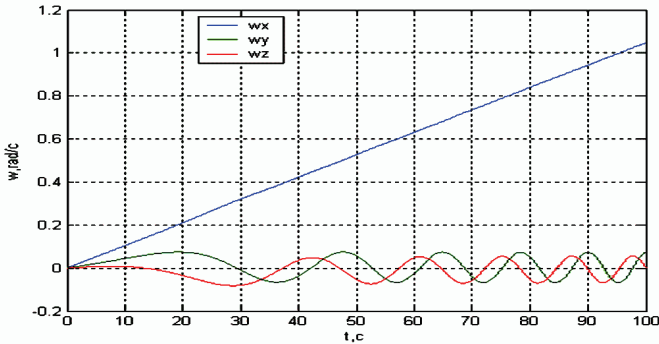


Рисунок 4 – Истинные значения проекций угловой скорости

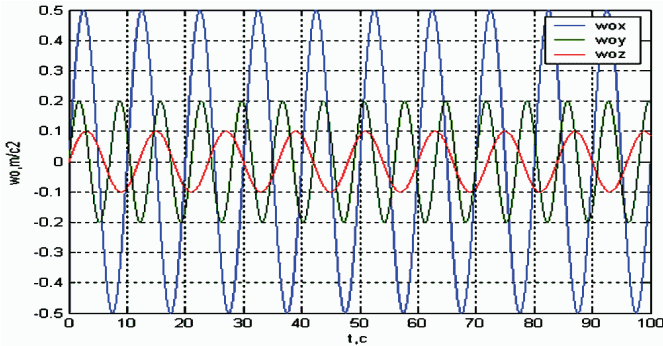


Рисунок 5 – Истинные значения проекций ускорения

Малая величина ошибок (рис. 6, 7) свидетельствуют о принципиальной возможности определения вектора абсолютного ускорения базовой точки и вектора угловой скорости ССК по измерениям 9 акселерометров, расположенных указанных выше образом. Алгоритм такого определения не содержит итераций и вполне реализуем в реальном масштабе времени.

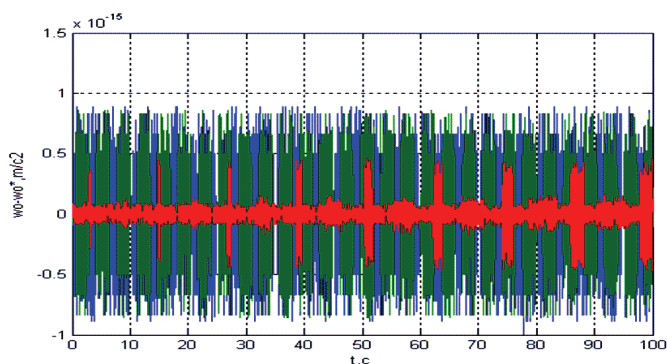


Рисунок 6 – Разность между истинным ускорением и ускорением, полученными на основе измерений

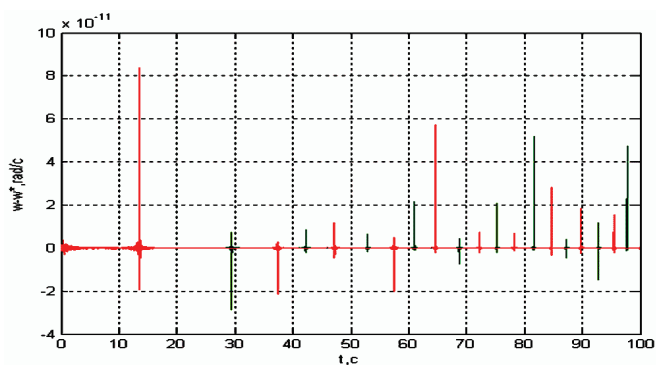


Рисунок 7 – Разность между истинной и полученной по измерениям угловой скоростью

Заключение. Разработана схема компоновки 9 акселерометров в твердом теле, по измерениям которых синтезирован алгоритм определения вектора ускорения и вектора угловой скорости твердого тела. В дальнейшем планируется исследовать область применимости разработанного метода определения характеристик движения по измерениям АК, построить модель ошибок и получить точностные характеристики измерительного акселерометрического модуля с учетом типичных ошибок АК и их сборки.

Список литературы: 1. Анучин О.Н. Интегрированные системы ориентации для морских подвижных объектов / О.Н Анучин, Г.И. Емельянцеv. – СПб., 1999. – 357 с. 2. Бромберг П.В. Теория инерциальных систем навигации / П.В Бромберг. – М.: Наука, 1979. – 294 с.

Поступила в редколлегию 20.10.2011.

ПОРЯДОК ПОДАЧІ СТАТЕЙ ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ У ВІСНИКУ НТУ «ХПІ»

Для опублікування статті у Віснику НТУ «ХПІ» необхідно подати у тематичну редколегію такі документи:

1 Заявку підписану всіма авторами:

«Прошу прийняти статтю [прізвища авторів, назва статті] на ... сторінках [вказати кількість сторінок] для опублікування у Віснику НТУ «ХПІ». Оплату гарантуємо. Відомості про авторів: [прізвище, ім'я, по-батькові кожного автора, наукове звання, посада, місце роботи, контактний телефон].

Підписи авторів.»

2 Текст статті на аркушах формату А4.

3 Акт експертизи про можливість опублікування матеріалів у відкритому друку.

4 Рецензію на статтю з місця роботи, підписану доктором або кандидатом наук.

5 Рецензію на статтю від одного з членів редколегії.

6 Електронну версію статті на дискеті 3,5", лазерному диску, USB-диску або іншому носії інформації.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ, ПОДАВАНИХ ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ У ВІСНИКУ НТУ «ХПІ»

Стаття повинна бути виконана з використанням редактора Word без нумерації сторінок. Переноси допускаються лише автоматичні або «м'які» (клавіша Ctrl+«-»). Розмір паперу: А4; орієнтація – альбомна; усі поля по 1,5 см; по 2 сторінки на аркуші [у термінології Word – 2 колонки на аркуші], поле між ними 3 см. Інтервал між рядками по всій статті – одинарний, шрифт Times New Roman (для текстів комп'ютерних програм – шрифт Arial або Courier), розмір (там, де не зазначено інакше) – 10 пт, звичайний.

Заголовок статті містить:

1 Код УДК. Друкується без відступу, вирівнювання по лівому краю.

2 Ініціали і прізвища авторів. Друкується через один порожній рядок після УДК. Вирівнювання по лівому краю, відступ 0,75 см. Ініціали й прізвища пишуться великими літерами; шрифт курсив напівжирний. Слідом за прізвищем через кому вказується наукове звання, (канд. техн. наук; д-р фіз.-мат. наук; академік та ін.); посада (студент, асп., наук. співр., доц., проф.); назва організації (НТУ «ХПІ»; ПМаш НАН України, Харків; ЗАТ ННГідропривод, Харків; БелгТАСМ, Белгород, Росія) шрифт звичайний; дані на кожного автора закінчуються знаком «;». Назву міста не треба вказувати для НТУ «ХПІ» або якщо вона міститься у назві організації (Сумське НВО ім. Фрунзе). Кожне прізвище пишеться з нового рядка.

3 Назва статті. Друкується великими літерами через один порожній ря-

док після інформації про авторів. Шрифт – прямий, напівжирний; відступ 0,75 см; вирівнювання по лівому краю.

4 Анотація українською мовою довжиною 4...10 рядків. Друкується через один порожній рядок після назви статті. Шрифт – 8 пт; без відступу; вирівнювання по ширині.

5. Анотація англійською мовою. Друкується через один порожній рядок після анотації на українському, оформлення аналогічне.

Основний текст починається через один порожній рядок після заголовка. Вирівнювання по ширині, відступ нового рядка 0,75 см. Посилання в тексті на малюнки, таблиці, формули, літературу мають вигляд: див. рис. 1, а; у табл. 2; у (3); у рівнянні (4); див. формули (5)-(7) або див. формули (5)...(7); у [14, 16]; [11, с. 5]. У тексті рекомендується використовувати тире середньої довжини (клавіша «Ctrl + Gray»). Текст може бути розділений на розділи з заголовками вигляду:

1 Математична модель. Використовується метод ...

Висновки. У результаті отримано...

Перед заголовком пропускається один рядок.

Формули створюються у вигляді об'єктів редактором формул Equation, центруються. Нумерація, якщо вона необхідна, ставиться праворуч у дужках; вирівнюється по правому краю. Невеликі формули можна розміщати не в окремому рядку, а прямо в тексті. Після формул потрібно ставити розділові знаки, якщо цього вимагає орфографія; одна від іншої формули відокремлюються точкою з комою. Якщо формула міститься у середині речення, то продовження речення у наступному за формулою рядку не має відступу.

Не рекомендується використовувати в редакторі формул літери кирилиці. Нескладні формули можна набирати в Word без використання редактора формул, наприклад: $R = \beta \cdot r$; $a^2 + b_1/c$. Розміри шрифту в Equation слід встановлювати такі: звичайний – 10 пт, великий індекс – 6 пт, малий – 5 пт, великий символ – 15 пт, малий – 10 пт. Шрифти: Times New Roman і Symbol, стиль прямий або курсив.

Латинські літери набирають курсивом, прямим шрифтом – функції (sin, tg та ін.), числа подібності (Vi, P_г та ін.), математичні скорочення (max, lim, exp та ін.), хімічні формули (Cl, H₂O та ін.). Прямим шрифтом набирають у формулах літери кирилиці, одиниці вимірювання (МПа, кДж/м² та ін.). Не можна застосовувати у тексті знаки (+, >, =, №, %, 0, °C, Ø [діаметр], sin та ін.) окремо без числових або літерних значень.

Грецькі літери рекомендується набирати прямим шрифтом.

Рисунок повинен бути оформлений як окремий об'єкт у тексті статті, розташування поверх тексту не допускається; рисунок відокремлюється від тексту зверху і знизу порожнім рядком. Рекомендується використовувати чорно-білу палітру, якість відтворення рисунків кольорової палітри не гарантується. Якщо рисунків декілька, то вони нумеруються. В підрисуночних

підписах: Рисунок 1; Рисунок 2 – ... ; назва (якщо є) ставиться після тире, центрується, шрифт – 9 пт. Для растрових малюнків шириною на всю сторінку рекомендована кількість пікселів по горизонталі від 1000 до 3000.

Символи на рисунку повинні бути близькими за розміром до основного тексту. Частини рисунка позначаються під рисунком літерами *a*, *b* без дужки. Написи на рисунку, позначення елементів на рисунку (1, 2, 3) пишуть курсивом. Посилання у тексті, у підрисуночних підписах на частини рисунків (див. рис. 1, *a*, *b*), на його елементи (1, 2, 3) пишуть курсивом.

Таблиця відокремлюється від тексту зверху і знизу порожнім рядком; використовується шрифт – 9 пт. Якщо таблиць декілька, вони нумеруються. Заголовок містить номер таблиці та назву (якщо вона є) і може бути оформлений у вигляді складової частини таблиці з невидимою сіткою. Заголовок має вигляд: Таблиця 1; Продовження таблиці 1; Таблиця 2 – [назва]. Заголовок вирівнюється вліво з відступом 0,75 см; якщо таблиця має назву – заголовок центрується. Назва (якщо є) ставиться після тире.

Через один порожній рядок після основного тексту статті друкується список літератури. Розмір шрифту – 8 пт; без відступу; вирівнювання по ширині. Список літератури починається з набраних напівжирним шрифтом слів «**Список літератури:**», слідом за якими ставиться двокрапка. Сам список літератури набирається суцільним текстом з виділенням прізвищ і ініціалів авторів курсивом, номер позиції виділяється жирним шрифтом. Якщо авторів більше трьох, то після прізвищ перших трьох авторів можна вказувати «і ін.». Ініціали і прізвище не повинні бути у різних рядках, їх можна з'єднати «нерозривним пробілом» (клавіша «Ctrl + Shift + Space»).

Розділові знаки в списку – відповідно до вимог ВАК України. Розділові знаки «:», «>», «←», «/» та «//» відокремлені від тексту пробілами як зліва, так і справа; знаки «.» , «» не відокремлюються від тексту пробілом зліва.

Після списку літератури у наступному рядку указується дата надходження статті в редколегію. Після слів «*Надійшла до редколегії*» ставиться число, місяць і рік через крапку у форматі *00.00.0000*. Розмір шрифту – 8 пт; курсив; вирівнювання по правому краю.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЛІТЕРАТУРИ:

(у статті список літератури набирається суцільним текстом)

Один автор

1 *Коренівський Д. Г.* Ефект параметричного білого шуму в неперервних системах : посібник / *Д. Г. Коренівський*. – К. : Вища школа, 2006. – 111 с.

Два автори

2 *Ромовська З. В.* Сімейне законодавство України / *З. В. Ромовська*,

Ю. В. Черняк. – Х. : Основа, 2006. – 93 с.

Три автори

3 *Гвоздєв О. В.* Механізація агропромислового комплексу : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / *О. В. Гвоздєв, Т. В. Бондар, О. Г. Карпенко* ; за ред. *Т. В. Бондара.* – 2-ге вид., випр. і доп. – К. : Наук. думка, 2005. – 157 с.

П'ять авторів і більше

4 *Психологія менеджмента* / *П. К. Власов, А. В. Лепницький, И. М. Лищихина* и др. – Х. : Прапор, 2007. – 300 с.

Перекладні видання

5 *Акофф Р. Ф.* Создание будущего организации / *Р. Ф. Акофф, Д. Магитсон, Г. Д. Здисон* ; пер. с англ. *Ф. П. Тарасенко.* – Днепропетровск : Бизнес, 2007. – 223 с.

Багатотомні видання

6 *Бондаренко В. Г.* Економіка, менеджмент : у 2 т. Т. 1. Економіка промисловості / *В. Г. Бондаренко, І. П. Канівська.* – К. : НТУ «ХП», 2006. – 278 с.

7 *Ермолов И. Н.* Неразрушающий контроль : учеб. пособ. в 5 кн. / *И. Н. Ермолов, Н. П. Алешин, А. И. Потапов* ; под ред. *В. В. Сухорукова.* Кн. 2. Акустические методы контроля. – М. : Высш. шк, 1995. – 178 с.

Методичні вказівки

8 Методичні вказівки та завдання до контрольних робіт з курсу «Бухгалтерський облік та прийняття рішень» для студентів спеціальності 7.050106 «Облік і аудит» заочної форми навчання / уклад. *Л. В. Кузьменко.* – Х. : НТУ «ХП», 2009. – 55 с.

Періодичні видання

9 *Гранчак Т. В.* Технологічне забезпечення гвинтових конвеєрів / *Т. В. Гранчак, В. А. Горовий* // Вісник НТУ «ХП». – 2008. – Т. 1, вип. 2. – С. 45-52.

Матеріали конференцій

10 *Дарова А. Т.* Кібернетика в сучасних економічних процесах / *А. Т. Дарова, В. П. Петрова* // Использование энергии в промышленности : междунар. науч.-техн. конф., 3-5 окт. 2008 г. : тезисы докл. – Х. : 2008. – С. 35-42.

11 *Пушков Ю. Г.* О нормировании качества жидких электратов / *Ю. Г. Пушков* // Научно-технический прогресс и оптимизация создания препаратов. – Х. : НТУ «ХП», 2008. – С. 30.

Автореферати дисертацій

12 *Новод І. Я.* Моделювання макроекономічних показників : автореф. дис. канд. техн. наук : 05.13.06 / *Новод Іван Якович.* – Х., 2008. – 20 с.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ:

УДК 658.012

Л.В.СОКОЛОВ, д-р техн. наук, проф., АО «Телеком», Киев;
В.С.КОВАЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
В.Т.ШЕВЧЕНКО, студент, ХНУРЕ, Харьков

ВЫДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ГРУПП В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ СОЦИАЛЬНОГО ОПРОСА НАСЕЛЕНИЯ

В статті пропонуються методи обробки даних, здобутих у результаті соціологічного опиту населення про його відношення до тих чи інших партій у Харківській області. Зроблені висновки про верстви населення, на які спираються різні партії.

[Анотація англійською]

В ноябре-декабре 1997 года был проведен опрос населения, целью которого являлось выяснение отношения различных его слоев к тем или иным партиям, зарегистрированным и имеющим более или менее сильные позиции в Харьковской области. Применение математических методов...

Таблица 2 – Результат опроса населения по...

Сокращенное название	Полное название организации	Популярность, %
AAA	Альянс за...	3,5
BBB	Блок сторонников...	6,5
VVV	Все не так...	7,1

Полученные результаты доказывают адекватность модели и могут быть использованы при анализе социально-экономических данных.

Список литературы: 1 *Иванов Л. И.* Факторный анализ в социальных исследованиях / *Л. И. Иванов, В. Т. Смирнов.* – М. : Наука, 1996. – 352 с. 2 *Петров В. С.* Применение методов кластерного анализа при обработке данных экспертного опроса / *В. С. Петров* // Автоматика. – 1995. – № 3. – С. 15-18. 3 *Тишков В. Т.* Кластерный анализ в социальных исследованиях / *В. Т. Тишков* // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. – 1990. – № 260 : Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 10. – С. 5-7. 4 *Иванов Л. В.* Применение методов статистического анализа при обработке данных опроса населения / *Л. В. Иванов, В. С. Петров* // Статистический анализ социально-экономических данных ; под ред. *Р.В.Сидорова.* – К. : Наук. думка, 1997. – С. 57-65.

Поступила в редколлегию 05.03.2007

ЗМІСТ

Л.В.Курпа Владимир Логвинович Рвачев – известный украинский ученый – математик-механик (к 85-летию со дня рождения)	3
Л.В.Автономова, С.В.Бондарь, Б.Н.Киркач, В.И.Конохов, А.В.Степук Моделирование нестационарного обтекания твердого тела в вязкой жидкости	9
И.А.Багмут Настройка фильтра Калмана в задаче коррекции инерциальных измерений в интегрированной навигационной системе	13
Д.В.Данилов, А.Г.Андреев Сравнительный анализ профильных соединений с натягом под действием центробежных нагрузок при вращении	22
В.А.Жовдак, Л.Ф.Тарасова Прогнозирование остаточного ресурса элементов конструкций с использованием двумерных марковских процессов	36
А.Б.Киркач Проблема прочности болтовых соединений на основе слоистых композиционных пластиков	45
С.В.Красніков Моделирование напряжено-деформованного стану фундаменту турбоагрегату 200 МВт	54
Д.В.Лавинский Анализ упруго-пластического деформирования при моделировании операции «заполнения углов». Часть 2	59
А.А.Ларин, И.М.Баранник Исследование формирования теплового состояния пневматических шин в процессе стационарного качения	64
Г.Ю.Мартыненко Оптимальное проектирование радиальных пассивных магнитных подшипников для ротора детандер-компрессорного агрегата	79
В.П.Ольшанский, С.В.Ольшанский Приближенный расчет колебаний неоднородного слоя зерна на плоском виброрешете	101
Р.Л.Онацкий Образование круглой вмятины на цилиндрической оболочке вдавливанием штампа	106
А.С.Степченко, Е.Н.Дудкина, В.А.Соболь Моделирование типового ряда конструкций корпусов цилиндра низкого давления мощных паровых турбин: Часть 2. Построение параметрической КЭ-модели для исследования динамических характеристик	113
А.С.Степченко, А.А.Ларин, С.Л.Артемов Исследование влияния положения промежуточной связи на прочностные характеристики лопаток сверхбольшой длины с двухъярусным бандажом	122
Г.Н.Тимченко, И.О.Морачковская, Н.А.Будников Исследование геометрически нелинейных свободных колебаний композитных многослойных пластин	132
В.Б.Успенский, М.В.Некрасова Измерение ускорения и угловой скорости твердого тела с помощью избыточной системы акселерометров	138
Порядок подачі статей для опублікування у Віснику НТУ «ХП»	146

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»

Збірник наукових праць № 63'2011

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор О.В.Щепкін

Відповідальний за випуск канд. техн. наук І.Б.Обухова

Обл. вид. № 212-11

Підп. до друку 02.12.2011 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов. друк. арк. 8,4. Облік. вид. арк. 9,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 218. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 3657 від 24.12.2009 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, пл. Повстання, 7/8
