

ISSN 2222-0631



ВІСНИК

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«XIII»**

42'2011

Харків

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«Харківський політехнічний інститут»

Збірник наукових праць
Тематичний випуск

42'2011

«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА ТЕХНОЛОГІЯХ»

Видання засновано Національним технічним університетом
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання

Свідцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

Голова: Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

Секретар: К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;
Л.М.Бесов, д-р техн. наук, проф.;
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;
А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;
В.В.Спифанов, канд. техн. наук, проф.;
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;
В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;

С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;
В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;
О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;
В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;
П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В.А.Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;
М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;
Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю.В.Тимофієв, д-р техн. наук, проф.;
М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Харків 2011

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 42. – 193 с.

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

Заступник відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ю. В. Гандель,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Ю. Л. Геворкян,	канд. фіз.-мат. наук, проф.;
О. Л. Григор'єв,	д-р техн. наук, проф.;
В. К. Дубовий,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. В. Курпа,	д-р техн. наук, проф.;
О. С. Куценко,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. М. Любчик,	д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
М. В. Новожилова,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
В. П. Северин,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий,	д-р техн. наук, проф.;
Є. Г. Янюгін,	д-р техн. наук, проф.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПІ».

Каф. ВМ, тел. (057) 707-60-35, (057) 707-60-87. E-mail: kpi_mmtt@mail.ru

Рекомендовано до друку вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 10 від 1 листопада 2011 р.

ISSN 2222-0631

© Національний технічний університет «ХПІ», 2011

А.П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Н.А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ЗАРУБИНА, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;
А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

ПРОФЕССОРУ А.А. ГРУНАУЭРУ 90 ЛЕТ !

Наведені деякі факти із біографії та фахової діяльності відомого харківського вченого і педагога О.А. Грунауера, які раніше не оприлюднювалися.

Приведены некоторые факты из биографии и профессиональной деятельности известного харьковского учёного и педагога А.А. Грунауэра, которые ранее не обнародовались.

Some facts are presented from biography and professional activity of famous Kharkov scientist and teacher A.A. Grunauer that have not been published earlier.

4 октября 2011 года отпразднует свой 90-летний юбилей наш Учитель, выдающийся ученый и педагог, доктор технических наук, профессор *Александр Адольфович Грунауэр*.



*Александр Адольфович
Грунауэр*

Мы поздравляем его с этой знаменательной датой и передаём от редколлегии «Вестника НТУ «ХПИ»» пожелания здоровья и дальнейших творческих успехов.

Знаем, что Александр Адольфович продолжает заниматься наукой, и, вместе с этим сборником, пересылаем в Кайзерсляутерн (земля Рейнлянд-Пфальц, Германия), где он проживает в последние годы, приглашение к сотрудничеству в качестве автора и/или рецензента научных статей, по его выбору.

Объективка. Для старшего и среднего поколения харьковских политехников имя этого человека, проработавшего в нашем институте без малого 50 лет, в том числе более 20 лет на должности заведующего кафедрой теории механизмов и машин, не нуждается в дополнительных комментариях. А для молодых мы скажем кратко – он был все эти годы и остаётся сейчас приме-

ром честного служения науке и, что не менее важно, – делу воспитания будущей технической элиты нашего государства.

Благодаря его исследованиям были открыты новые научные направле-

ния в двигателестроении, теории механизмов и машин, прикладной математике и механике.

Он был автором 5 основополагающих учебников и монографий, неоднократно выступал с докладами на международных конгрессах и научных съездах, проводимых в различных странах Европы и мира.

Он осуществлял научное руководство 15 аспирантами и 2 докторантами, успешно защитившими свои диссертации в учёных советах Харькова, Киева, Ленинграда, Новочеркаска и других городов.

В качестве ведущего специалиста страны в области регулирования и механики тепловых двигателей он, как официальный оппонент, приглашался на заседания специализированных учёных советов московских и ленинградских вузов, где дал путёвку в дальнейшую научную жизнь более 100 соискателям кандидатских и докторских степеней. Особую известность получили случаи, когда проф. А.А. Грунауэр выступал против оппонируемой диссертационной работы и, опираясь во время защиты на неопровержимые аргументы, к этому же решению приводил учёный совет.

Являясь заместителем председателя Методической комиссии Минвуза СССР по теории механизмов и машин, он в 1980–м году подготовил принципиально новый учебный курс, базирующийся на аналитических (а не графических, как было принято ранее) методах исследования рычажных и кулачковых механизмов, а также активном использовании компьютерной техники. И за 10 последующих лет прочёл соответствующий курс лекций (сейчас бы это называлось иначе – *провёл мастер-класс*) в 13 технических университетах страны, проехав с ним от Львова до Владивостока и от Ижевска до Алма-Аты.

Сейчас, по прошествии многих лет, можно предать гласности и тот факт, что Александр Адольфович руководил ещё одной комиссией, наделённой весьма специфическими функциями; неофициально её называли *региональной комиссией по вечным двигателям*. Причём это назначение произошло не только лишь в силу занимаемой им в то время должности; здесь сработал высокий авторитет научного имени и известная широта его научных интересов. Он получал на экспертизу пакеты, первоначально адресованные изобретателями этих двигателей «В Политбюро» или «В ЦК КПСС», и во главе компании уважаемых доцентов выезжал на место демонстрации макетного образца. К сожалению авторов этих проектов, ни в одном из рассмотренных комиссией случаев факт нарушения закона сохранения энергии зафиксировать не удалось.

На сайте проф. Грунауэра [1] можно найти информацию, что за время своей работы он прочитал лекционные курсы для более четырёх тысяч студентов – политехников. Добавим от себя: в том числе и для тех, кто остался работать в ХПИ и со временем пришёл к руководству вузом. Ещё на старте своей преподавательской карьеры он проводил практические занятия в паре с Н.Ф. Киркачём, впоследствии ректором ХПИ, а также руководил курсовым проектом будущих профессоров А.Ф. Шеховцова и Н.К. Шокотова, которые на протяжении многих лет работали, соответственно, секретарями парткома и профкома. В списке его учеников и среди значений его *второй производной*

(то есть, учеников его учеников) можно увидеть проректора по научной работе, деканов и многих заведующих кафедрами машиностроительного и электромашинностроительного профиля.

Если уж и составлять историю ХПИ, то на примерах таких людей, каким является Александр Адольфович Грунауэр. В 70-е годы 20-го столетия он относился к той немногочисленной, но «могучей кучке» профессоров института, с мнением которой руководство считалось. Для людей непосвящённых, но хорошо знавших реалии той эпохи, всегда оставалось загадкой: каким образом этот беспартийный и подчёркнуто аполитичный человек умудряется на протяжении 20 лет руководить кафедрой, все доценты которой состояли в партии, а часть из них, к тому же, были героями – фронтовиками. Время постепенно раскрывает все тайны, дошла очередь и до этой.

В начале всех его историй была война. Как рассказывал Александр Адольфович уже в 1990-е годы (то есть незадолго до своего отъезда в Германию), его родители повстречали друг друга на фронтах первой мировой войны. Отец происходил из приволжских немцев и служил офицером, а мать была украинской дворянкой, которая добровольно пошла работать сестрой милосердия в армейский госпиталь. После революций 1917-го года отец присяге не изменил и воевал на той стороне, которая проиграла; в конце гражданской войны его следы теряются. Дворянское происхождение и связь с офицером Белой Армии сказались на дальнейшей судьбе матери – она была на долгие годы понижена в правах и, несмотря на среднее образование и фронтовой опыт хирургической медсестры, не могла работать по специальности. В годы НЭПа она шила тряпичных медведей и собак. В 1942-м году дочь похоронила её в Фергане, где они жили в эвакуации.

Несмотря на все трудности, мать смогла воспитать в детях подлинную интеллигентность и привить им чувство патриотизма. Сестра Александра Грунауэра Екатерина в 20-е годы начала учиться в Харьковской Авиашколе, но была исключена, как классово-чуждый элемент. Продолжила учёбу в школе планеристов, участвовала во всесоюзных слётах планеристов в Коктебеле, первой среди женщин СССР получила звание пилота-парителя. В 30-е годы работала инструктором в Московской Высшей школе планеристов, а в годы эвакуации – шофёром грузовика ЗИС-5. В 1929 году вышла замуж за курсанта академии им. Жуковского «красного лётчика» Анатолия Сенькова, который в 70-е годы работал в должности заместителя генерального конструктора ЦАГИ.

Александр поступил в ХММИ, но учёбу прервала война. Друзья уходили на фронт, однако людей с немецкими корнями в Красную Армию не брали. Для них в те годы был развёрнут так называемый Трудовой фронт, по сути – одна из разновидностей ГУЛАГа. Александр Адольфович был мобилизован на этот фронт и отправлен эшелоном сначала в Сталинград, а затем – в Барнаул. Работая по 12-14 часов в день без праздников и выходных, он налаживал станки и точил детали агрегатов танка (в частности, гильзы двигателя В-2) сначала для фронта и Победы, а затем, уже после мая 1945-го, для будущих побед.

Потенциальных врагов в окружении тогдашнего СССР было много, и демобилизовывать этот ГУЛАГ никто не спешил. В данном частном случае всё закончилось тяжёлой хронической болезнью, и 25 летнего бойца «списали» за невозможностью дальнейшего использования, после чего, с прекрасной характеристикой в личном деле, отправили в Харьков лечиться и доучиваться на инженера.

Начало научной карьеры. Судьба и далее продолжала испытывать его на прочность. В 1948 году, то есть, сразу же после окончания учёбы в ХПИ, А.А. Грунауэр получил назначение на должность начальника электростанции жилищно-строительного комбината в городе Вятские Поляны. Времена были крутые. Предыдущий начальник был снят с должности и осуждён за тяжёлую аварию мощного дизель – генератора фирмы *Ингерсол*, полученного по ленд-лизу из США; такая же участь грозила и ему.

Техническая документация отсутствовала, и без неё было невозможно определить, сколько масла необходимо залить в регулятор, чтобы он функционировал правильно. Грунауэр тщательно обмерил основные детали дизеля и регулятора, после чего составил подробную математическую модель их работы и произвёл необходимые расчёты. Анализ подтвердил, что генератор будет работать устойчиво, если в баке регулятора будет строго определённый уровень масла. Рабочий залез внутрь бака, чтобы отметить керном необходимый уровень, и на той же самой высоте смог разглядеть фабричный знак.

В результате А.А. Грунауэр не только справился с заданием, но и окончательно поверил в силу научных, в том числе и математических, методов исследования. Со временем он стал очень известным специалистом в областях автоматического регулирования и математического моделирования.

В дальнейшем, занимаясь оптимизационным синтезом кулачковых механизмов, он разрабатывал новые подходы к решению задач вариационного исчисления (использующие фазовые диаграммы). Им разработаны оригинальные методы аналитического исследования для ряда замечательных кривых высшей математики, в частности, овалов Кассини, а также линий пересечения тора и цилиндра. На протяжении многих лет заведования кафедрой ТММ ХПИ А.А. Грунауэр поддерживал традицию, заложенную *Я.Л. Геронимусом*, который, работая на той же кафедре ранее, получал новые научные результаты и в механике, и в математике. До Геронимуса в таком же ключе удавалось работать *Ляпунову*, а ещё раньше – *Лагранжу*, *Эйлеру*, *Ньютону*, *Архимеду* и некоторым другим, великим или прославленным учёным.

Профессор Грунауэр и его «научная берлога». Первое знакомство авторов статьи с А.А. Грунауэром происходило в 1970-е годы, когда он уже защитил докторскую диссертацию, стал профессором, заведующим кафедрой и находился на пике своей научной формы. Так совпало, что примерно в той же фазе находилось развитие всей нашей страны и её экономики. Мультипликативный эффект от такого совпадения позитивно сказался на судьбе кафедры теории механизмов и машин ХПИ, которая не только получила новую территорию, но и

провела активное омоложение кадров и научной тематики. В результате немалых усилий этому процессу был сообщён значительный ускоряющий импульс, и, как следствие, к середине 80-х годов, после присоединения кафедры подъёмно-транспортных машин, под руководством проф. А.А. Грунауэра был сосредоточен учебный и научный потенциал, насчитывающий около 70 сотрудников.

И тут надо заметить, что положение профессора в те времена сильно отличалось от того положения, что мы имеем сейчас. Прежде всего, профессор было очень мало; так, после смерти М.Ф.Семко (в 1978 году) А.А. Грунауэр на протяжении нескольких лет был единственным доктором наук и профессором на всём машиностроительном факультете!

Тогда считалось, что в научном мире профессор – это медведь, то есть для наших лесов – это царь зверей, а царей, как известно, изначально не может быть много. Хорошо известно, что два медведя в одной берлоге не уживаются; поэтому на одной кафедре два профессора работать не могли по определению, и каждому, кто защитит докторскую диссертацию, отдавали в руководство свою кафедру.

Поскольку все события (в том числе и защиты диссертаций) в те времена планировались, то указанная система распределения профессорских кадров работала без сбоев; если «свободной» кафедры не было, то её создавали вновь либо находили у соседей. При этом исходили из старой университетской традиции, когда само слово «кафедра» рассматривалось как место, на котором преподаёт профессор, а все остальные сотрудники ему ассистируют.

Профессорский уровень и стиль жизни. Материальное обеспечение профессора в 1970-ые годы превосходило теперешнее (в сопоставимых ценах и без учёта пенсии, которую получают не все) в 2.5...3 раза. Но надо заметить, что и в те времена профессора были им не довольны – они помнили, что в 1950-ые годы реальный уровень обеспечения был выше ещё в два раза.

Известно, например, что акад. Д.Ф. Проскура в 40-е и 50-е годы на свою профессорскую зарплату, без особого ущерба для семейного бюджета, содержал двух секретарей, выплачивая им аспирантскую стипендию.

Если же вернуться на несколько десятилетий назад, в 1910-е годы, то соответствующие цифры можно смело увеличивать ещё в 2.5 ... 3 раза. Но тут нужно сделать важную оговорку: те деньги государство выплачивало не одному человеку, а целому трудовому коллективу, включающему неработающую профессорскую жену, кучера, дворника, кочегара, повара, горничную, гувернантку для детей, и пр., и пр. И отказаться от услуг этого коллектива было нельзя – чин действительного тайного советника, которым обладал каждый ординарный профессор императорского университета, не только давал право принимать участия в заседаниях Сената, но и регламентировал определённый уклад и материальный уровень его жизни.

Возвращаясь к анализу той ситуации, которая сложилась и была актуальной для А.А. Грунауэра в 70-е и 80-е годы, можно утверждать, что наш Профессор служил примером мудрого, интеллигентного, доброго и, одновременно,

вполне успешного человека. Он легко тратил деньги на книги для огромной научной библиотеки, которую, перед отъездом в Германию, также легко подарил своим ученикам. Он не пропускал премьерные спектакли и значительные, по масштабам нашего города, концерты. Львиную долю своих немалых, по тем временам, доходов он тратил на путешествия; в зрелом возрасте маршруты таких поездок стали традиционными. На ноябрьские и майские праздники – это Крым (7-ми дневную путёвку в фешенебельный военный санаторий доставала жена, доцент военного училища), а затем на два летних месяца – в Палангу, где они вместе с женой снимали комнату в доме директора местной школы.

В любом возрасте, как мы его помним, он был лёгок на подъём. Значительную часть своей жизни проводил в командировках, причём даже в Москву любил летать самолётами; по количеству лётных часов в наше время с ним может сравниться разве что государственный чиновник высшего ранга.

В дальних совместных поездках с другими сотрудниками кафедры «права не качал» и «деньгами не сорил». Но из этого правила существовало исключение, о котором знали все. Ему часто приходилось ездить в Киев или в Москву вместе с проф. А.Э. Симпсоном, заведующим кафедрой теплотехники ХИИТа, и тогда он обязательно заказывал себе место в салон–вагоне. Объяснялось это просто: А.Э.Симпсон по должности имел ведомственный чин *генерала тяги*, и ему такое место предоставлялось автоматически. Поскольку гражданский статус профессоров был одинаков, ХПИ не имел право уступать ХИИТу. Институтское начальство понимало эти нюансы и утверждало смету командировки при сверхнормативном расходовании средств.

Многие командировки в те годы осуществлялись транзитом через Москву; и тогда на обратном пути Профессор на сутки задерживался в столице. Только в 90–е годы мы узнали, что он ездил в подмосковный поселок Жуковский, где в то время жила его сестра и семья Анатолия Сенькова. Разумеется, институтское начальство узнало об этих поездках раньше нас, и Александр Адольфович, по всей видимости, сам того не ведая, попал в список советской (но по-прежнему беспартийной!) номенклатуры.

Грунауэр увлекался фотографией и любил демонстрировать слайды, содержащие хронику его поездок. Автомобиля в собственное пользование он так и не приобрёл, но в 60-е годы был заядлым байкером и (нередко вместе со своим сыном) совершал длительные путешествия на мототоллере. Однажды, возвращаясь с Кавказа по Ростовской трассе, он попал в тяжёлую аварию, но не бывает худа без добра: за три больничных месяца умудрился написать докторскую диссертацию, на что ранее не хватало времени.

Приезжая в Москву или Ленинград, которые в то время были центрами демонстративного изобилия, он покупал только книги и считал, что всё оставшее в состоянии приобрести дома, пусть и по более высоким ценам. Толкаться в длинной очереди профессор, по его разумению, не имел права.

Внимательно следил за новинками программируемой микропроцессорной техники (калькуляторы, электронные записные книжки, и т.п.), лучшие образцы покупал и с успехом использовал в своей научной деятельности.

Считал, и не без основания, что для решения многих инженерных задач использование программируемого калькулятора оказывается эффективнее обращения к ЭВМ общего пользования. Уже в самом начале 80-х годов установил на своей кафедре лучшую по тем временам ПЭВМ «МИР-2», но приобрести персональный компьютер в личное пользование смог только в середине 90-х, после переезда в Германию.

Профессорская реформа конца 70-х. Некоторые регламентные моменты, определяющие высокий общественный статус профессора, продолжали действовать в 1970-е и более поздние годы, но их реальное значение со временем затухало. Переломным в этом отношении стал 1976-й год, когда, копируя зарубежный опыт, в нашей стране стали срочно и во множестве создавать научные школы нового образца. Теперь каждая кафедра университета, организующая работу специализированного учёного совета по защитам диссертаций, обязана была иметь в своём составе несколько докторов наук, которые образуют, пусть и формально, региональную научную школу по данной специальности.

Поставленная задача решалась разными средствами: за счёт внутренних резервов (для чего были убраны преграды, которые ранее искусственно сдерживали карьерный рост преподавателей и научных сотрудников вуза) и за счёт кадров, которые переводились на преподавательскую работу из отделов научных институтов или руководящего состава промышленных предприятий. Количество немедленно перешло в качество, но, как и для любой реформы, при этом переходе не всё было таким уж однозначно положительным.

Хранители традиции. Кафедра теории механизмов и машин ХПИ не имела и не планировала организовывать свой специализированный совет, и благодаря этому обстоятельству девальвация профессорского звания здесь затронула только лишь сферу его реального материального содержания, а на других уровнях она была отсрочена на целое десятилетие. В результате на этой кафедре, как в интеллектуальном заповеднике, на протяжении всех 80-х годов (когда двум авторам этой статьи посчастливилось работать под руководством проф. А.А. Грунауэра) были сохранены традиции, которые, по свидетельству многих, определяли лицо Харьковского политехнического института во все предшествующие десятилетия его истории.

Описывая эти традиции, прежде всего, следует указать на непререкаемый авторитет Профессора как учёного, преподавателя и руководителя трудового коллектива. Мы слышали от старших товарищей, что в прошлом переход к такому положению вещей не был гладким, но в годы нашей работы на кафедре такое состояние уже устраивало всех.

Да, Александр Адольфович вёл на кафедре свою научную тематику и активно помогал её исполнителям, как говорится, и словом и делом; возможно, он даже по-своему любил этих людей, которых сам отобрал когда-то среди многих других, а затем воспитывал по своему образцу и подобию. Но, с другой стороны, этими же молодыми ответственными исполнителями науч-

ных тем он закрывал все форс-мажорные обстоятельства, которых в той жизни было предостаточно (колхозы, стройки, ночные дежурства, и т.п.). Имея огромный жизненный опыт, он видел дальше нас, и когда мы, по молодости, увлекались решением неперспективной проблемы, любил повторять: «Прежде, чем решать сложную задачу, подумай, что будешь делать с её ответом!».

Да, у Профессора было своё, отличное от многих, понимание структуры и задач современного ему учебного курса по ТММ; он первым в СССР среди известных механиков своего поколения осознал те революционные изменения, которые произойдут в теории механизмов и машин после появления компьютеров. Но в то же время он с большим уважением относился к труду своих коллег – преподавателей и, здраво оценивая ситуацию, не форсировал реформу, время для которой тогда ещё не наступило.

Его неизменно доброжелательное отношение к студентам служило примером для всего коллектива кафедры; собственно говоря, при другом отношении ни один её сотрудник не проработал бы здесь и одного дня.

Таким же доброжелательным было отношение к аспирантам и другим соискателям научных степеней при публичной защите диссертации. Уже потом, во время «разбора полётов» для узкого круга своих учеников, он, как опытный тренер, чаще указывал на ошибки и недочёты заслушанной работы. Глубокое знание предмета исследования и многолетняя практика официального оппонирования научили его безошибочно определять для каждой диссертации её подлинную научную новизну и практическую ценность, и если они были весомыми, то это, в его глазах, перевешивало остальные плюсы и минусы, выявляемые в ходе защиты.

В Методическую комиссию Минвуза СССР Александр Адольфович попал не по должности и связям, а исключительно благодаря своим способностям, когда врождённая склонность к хорошо организованному, аналитическому и рациональному мышлению была развита годами интенсивной научной и педагогической работы. Его лекции отличались глубиной, доказательностью и лаконичностью; по этим параметрам они, например, приближались к тому «золотому стандарту», к которому постоянно стремятся (но так и не могут его достичь) в лучших учебных курсах высшей математики для технических университетов. Теоретический материал иллюстрировался многочисленными примерами, использующими передовой технической опыт.

Однажды после его очередной открытой лекции Профессора спросили: «Как долго вы готовились к этой лекции?». Он ответил – «К каждой своей лекции я готовлюсь на протяжении всей предшествующей жизни», и мы точно знали, что это было сказано не ради красного словца.

Оценивая открытую лекцию своего начинающего коллеги, он как-то съязвил: «У меня возникло впечатление, что к началу лекции Ваше знание материала опережало аудиторию на 90 минут, но к её концу уровни знаний совпали. Не расстраивайтесь, цель лекции, в основном, достигнута, а указанный недостаток с возрастом проходит».

В дальнейшем цитированные фразы стали достоянием институтского

фольклора.

Профессор был требовательным, но справедливым руководителем, никогда не повышал голос на подчинённых, стремился предотвратить, а если это не удавалось, то быстро погасить возникающий конфликт.

При приёме на работу каждого нового сотрудника А.А. Грунауэр собирал объективную информацию о претенденте, как носителе тех или иных профессиональных навыков и человеческих качеств; графы анкеты *партийность* или *национальность* его интересовали в последнюю очередь, и то лишь с той целью, чтобы оценить реальные шансы зачисления в штат. И так в ХПИ того времени поступали многие руководители, но, к сожалению, этот тест на подлинную интеллигентность выдержали тогда далеко не все. Впрочем, время для откровенного разговора на данную тему ещё не наступило.

Как-то, когда руководству вуза удалось навязать ему новую сотрудницу, которая отличалась взрывным темпераментом и скандальным характером, Грунауэр грустно вздохнул и заметил: «Ну что же, теперь будем и на нашей кафедре учиться использовать атомную энергию в мирных целях». Однако, как он и предвидел, ничего хорошего из этой начальственной затеи не вышло.

Виртуальный профессорский кабинет. Одна из сохранных традиций восходила к моменту основания вуза, когда квартиры его обычных профессоров располагались на территории института, и это создавало уникальную среду для активизации научного и культурного общения всех его сотрудников. Заметим, что эту традицию пытались поддерживать и далее, когда рядом с институтом строили ведомственное жильё, но габариты новых квартир плохо соответствовали решению данной задачи.

Грунауэр жил на Пушкинском въезде в высотном доме дореволюционной постройки и, вместе с женой и её сыном, занимал там три, а затем четыре комнаты в пятикомнатной крупногабаритной квартире с парадным и чёрным ходом, высокими потолками, дубовым паркетом и просторными коридорами.

Одна из комнат служила профессорским кабинетом, где стоял огромный, во всю стену, книжный шкаф, журнальный столик и мягкие кресла, располагающие к долгой и неторопливой беседе.

Впрочем, гостей принимали и в других комнатах этой квартиры, где можно было увидеть большой профессорский стол и все те материалы, с которыми он работал в это время. Собственно говоря, этот стол и эта квартира и были тем штабом, из которого осуществлялось руководство коллективом, численность которого, напомним, доходила до 70-ти человек.

Александр Адольфович, если в этот день он не был в командировке, приходил на кафедру ровно в 10 часов утра (по этому моменту можно было сверять часы), и, как правило, находился на ней до 12 часов дня. Своего кабинета, да и особой нужды в нём, у него не было. После полудня его следовало искать на лекции, на заседании какого-либо совета, либо дома; все передвижения Профессора были известны заранее и, если возникала такая необходимость, с ним можно было встретиться в перерыве лекции или, после

предварительного звонка, со своими проблемами прийти к нему домой.

Последнее было особенно приятным, потому что там не только решали твои производственные проблемы, но и обязательно угощали чем-нибудь вкусным. Поэтому от приглашения в гости к своему заведующему сотруднику кафедры обычно не отказывались.

Исход, или возвращение к отцовским корням. Номер домашнего телефона 43-23-21 в Харькове уже не существует, но и через 20 лет его не возможно забыть. Часто хочется позвонить, договориться, как это бывало раньше, о встрече с Учителем, и там, за чашкой чая, решить все свои проблемы. Но, увы, эту возможность мы уже давно потеряли.

В 1994-м году горисполком отказал Профессору в предоставлении последней, освободившейся к этому времени комнаты из описанной выше коммуналки, то есть он не признал его гражданского (и статусного) права, хотя бы на склоне лет, пожить вместе с семьёй в своём доме. Когда и ректор института Ю.Т.Костенко не смог отстоять это его право перед городскими чиновниками, А.А. Грунауэр принял решение эмигрировать в Германию.

Перед отъездом Александр Адольфович предал огласке ещё одну страницу своей истории, которая, в силу принятого им ранее решения, так и не стала фактом его биографии (но это своё давнее решение, как было ясно из разговора, он теперь считал ошибочным).

В 1979-м году в Сибирском отделении Академии наук СССР появилась вакансия члена - корреспондента по специальности «механика», и Грунауэр получил официальное приглашение баллотироваться на это место. При этом он должен был переехать в Барнаул и занять одно из кресел в руководстве Алтайского политехнического института. К этому креслу прилагалась четырёхкомнатная двухуровневая квартира в номенклатурном доме, расположенном в самом центре Барнаула, и ещё целый список других благ и привилегий.

За годы войны Барнаул стал для Александра Адольфовича родным городом, поэтому, прежде чем окончательно отказаться от этого заманчивого предложения, он долго колебался. Наверняка, на принятие такого решения повлияло много факторов, но главным было то, что он получал в то время огромное удовлетворение от своей работы и того настоящего Дела, которым он занимался в Харькове, в стенах его политехнического института, а также далеко за пределами нашего города.

Когда, уже много позже и по независящим от него причинам, этого Дела не стало, на первый план вышли вопрос здоровья и «квартирный вопрос» (который, и тут нужно согласиться с Михаилом Булгаковым, для нашей страны остаётся большим и поныне). Вспомним также о произошедшем к середине 90-х годов катастрофическом ухудшении материального положения вузовских преподавателей, что больше всего ударило по профессуре, привыкшей жить иначе и, одновременно, не имеющей альтернативных источников существования.

В результате, мы стали свидетелями того массового и печального для

нашей страны явления, которое когда-нибудь, следуя библейской традиции, назовут Исходом. Сейчас на работу в Западную Европу и Северную Америку уезжают самые сильные, а тогда уезжали лучшие из нас. Прямые и отдалённые последствия нового Исхода, как это было и в Древнем Египте, Украина будет преодолевать ещё долгие десятилетия.

При всей трагичности этого явления для общества в целом, Исход для отдельных его участников был выбором нового жизненного пути, и с ним связывались определённые надежды. У Профессора такие надежды сбылись частично и не оказались напрасными: в Кайзерслаутерне имеется университет, и он продолжил там свою научную работу. Кроме того, в почтовой переписке и по телефону, он продолжал консультировать своих учеников и, что не менее важно, неизменно поддерживал их во всех трудных начинаниях.

А на летние месяцы, как и во все свои последние годы жизни в Харькове, Профессор уезжал из Германии отдыхать в Палангу, то есть в бывшую Советскую Прибалтику, которая уже успела стать независимой, но от этого не перестала быть для нас родной.

Заключение. Просматривая представленный выше материал, вслед за классиком можно и должно вспомнить *дороги, которые мы выбираем, а также те дороги, которые выбирают нас.*

В отношении Александра Адольфовича Грунауэра такое воспоминание тем более ценно, потому что здесь, и это можно отметить в дополнение к классику, присутствует еще одна компонента триады: *его дороги и выборы, которые остались нам.*

Так что же стало с теми дорогами и направлениями, которые торил проф. Грунауэр? И тут, прежде всего, важна позиция его кафедры; в истории взаимоотношений коллективов кафедр ХПИ с их бывшими руководителями можно найти разные варианты ответа на поставленный вопрос.

Сотрудники кафедры ТММ и САПР трепетно относятся к уникальному опыту, который оставили предшественники, в первую очередь – Александр Адольфович. Это воплощено в методике и практике работы преподавателей, некоторые из которых начинали свою педагогическую деятельность под руководством Профессора либо были его студентами. Это закреплено в подготовленном на кафедре современном учебнике по ТММ, материалы к которому отбирались с его участием. Это – и её научные кадры, направления и традиции, которые перекинуты в наше время, но проявляются теперь по-новому.

Так, многие задачи исследования кинематики, силового анализа, динамики, а также синтеза механизмов и машин в настоящее время осуществляются путем компьютерного моделирования. При этом используются новейшие интегрированные системы проектирования и оригинальные разработки молодых ученых, направленные на совершенствование и реализацию математических моделей, разработанных для процессов и состояний, происходящих в сложных или сверхсложных механических системах.

Для решения этих задач привлекаются современные программные ком-

плексы, а их эффективное функционирование обеспечивает развернутый на кафедре уникальный компьютерный кластер «Политехник-125» [8]. Как и во времена проф. Грунауэра, тесны связи кафедры с машиностроительными предприятиями, выполняются фундаментальные и прикладные исследования по бюджетной и грантовой тематике.

Но, как хорошо известно, научные интересы Профессора не ограничивались теорией механизмов и машин, а его научная школа не замыкалась рамками нашего города. Ученики профессора А.А. Грунауэра защищали диссертации по различным направлениям прикладной гидромеханики, динамики и прочности машин, приборостроения; фирменным знаком, отличающим эти работы, была их фундаментальность и широкое использование методов прикладной математики. Профессор любил руководить исследованиями, которые лежали на стыке наук. Но главным научным приоритетом оставалось то, что составляло основу его инженерного образования и стало началом научной карьеры, – двигателестроение; здесь же он находил приложения для всех разрабатываемых теорий.

А.А. Грунауэр, вместе с проф. А.Э. Симсоном и другими выдающимися учёными, был инициатором открытия в Харькове специализированного совета по тепловым двигателям и многое сделал для того, чтобы этот город стал ведущим научным центром страны по двигателестроению.

Разработанные под его руководством физические и математические модели высокого уровня для топливной системы традиционного или аккумуляторного типа, для гидромеханического регулятора и некоторых других агрегатов дизеля остаются востребованными и в наше время. Без этого научного фундамента дизельные топливные системы с электромагнитным управлением впрыскивания, электронный регулятор дизеля и многие другие современные разработки харьковских двигателестроителей были бы не возможными.

В-общем, дороги, которыми проходил проф. Грунауэр, не заросли, не забыты. Они оказались как раз теми магистральными путями, по которым сейчас идет интенсивное движение научной мысли. При этом мы хотим высказать дань глубокого уважения к Человеку, Ученому, Профессору Александру Адольфовичу Грунауэру, который не только предвосхитил эти направления, но и продвигал их с завидной энергией.

Остается только пожелать здоровья и долгих лет активной жизни нашему юбиляру.

Список литературы: 1. www.grunauer.narod.ru. 2. Костенко Ю.Т. и др. Харьковский политехнический: Учёные и педагоги. – Харьков, 1999. 3. Грунауэр А.А. Проектирование механизмов с помощью цифровых ЭВМ. – Харьков: Вища шк., 1980. – 120 с. 4. Грунауэр А.А., Долгих И.Д. Теория механизмов и машин (Системный подход). – Киев: УМК ВО, 1992. – 384 с. 5. Настенко Н.Н., Борошок Л.Б., Грунауэр А.А. Регуляторы тракторных и комбайновых дизелей. – Москва: Машиностроение, 1963. – 346 с. 6. Грунауэр А.А., Долгих И.Д. Применение ЭВМ для изучения динамики САР. – Киев: УМК ВО, 1989. – 170 с. 7. Грунауэр А., Зауэр Б. Анализ плоских механизмов: кинематическое исследование механизмов высших классов. – Dusseldorf: Springer VDI Verlag: Konstruktion. – 12. – 2001, S. 68-73 (язык немецкий). 8. www.kpi.kharkiv.edu/tmm-sapr/.

Поступила в редколлегию 01.09.2011

І. С. БЕЛОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ПРО LMI – ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕВІД'ЄМНИХ КОСИНУС – МНОГОЧЛЕНІВ

Розглянуті невід'ємні косинус – многочлени з мінімальним вільним членом, який знаходиться як розв'язок задачі SDP-програмування.

Рассмотрены неотрицательные косинус – многочлены с минимальным свободным членом, который находится как решение задачи SDP – программирования.

Nonnegative cosine polynomials with minimal free term are considered, which is a solution of task of SDP - programming

Вступ. Тригонометричний многочлен

$$P(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

називається *невід'ємним* в $[a, b]$, якщо $P(\theta) \geq 0$ ($a \leq \theta \leq b$).

Невід'ємний тригонометричний многочлен по косинусах

$$A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

визначає нескінченну множину лінійних нерівностей відносно коефіцієнтів $\vec{a}(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Перетин відповідних півпросторів утворює опуклий

конус $C_{n+1} = \{ \vec{a} \mid A(\theta) \geq 0 \}$. Умовою невід'ємності косинус-многочлена є

відома теорема *Фейєра – Ріса* про спектральну факторизацію [2]. А саме, для

невід'ємності косинус-многочлена $A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$ у $[-\pi, \pi]$ необ-

хідно і достатньо існування параметрів $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ таких, що

$$A(\theta) = \left| x_0 + x_1 e^{-i\theta} + \dots + x_n e^{-in\theta} \right|^2.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь

$$a_0 = \sum_{k=0}^n x_k^2 \quad a_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i x_{k+i} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (1)$$

Отже, для перевірки невід'ємності $A(\theta)$ достатньо дослідити на сумісність систему квадратичних рівнянь (1). Якщо $a_0 = E(a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$ є найменше значення, при якому $A(\theta)$ є невід'ємним, будемо казати, що відповід-

ний косинус - многочлен має *нормальну форму*.

Пізніше, з розвитком обчислювальних методів, з'явилися так звані LMI – характеристики невід'ємних косинус – многочленів [2]. А саме, LMI – характеристика у формі рівностей стверджує що $\vec{a} \in C_{n+1}$ тоді і тільки тоді, коли існує ненегативна матриця

$$X = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{n0} \\ X_{10} & X_{11} & X_{n1} \\ X_{n0} & X_{n1} & X_{nn} \end{pmatrix} \succ 0,$$

така що виконується система рівностей

$$\begin{cases} a_0 = X_{00} + X_{11} + \dots + X_{nn}, \\ a_1 = X_{10} + X_{21} + \dots + X_{nn-1}, \\ a_n = X_{n0}. \end{cases} \quad (2)$$

Дійсно, за умови (2) маємо $A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ e^{in\theta} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{n0} \\ X_{10} & X_{11} & X_{n1} \\ X_{n0} & X_{n1} & X_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ e^{in\theta} \end{bmatrix} \geq 0.$

За допомогою матриці $E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ систему (2) можна подати у вигляді

$$a_k = \text{Tr}(E^k X) \quad (0 \leq k \leq n). \quad (3)$$

Обернене твердження легко отримати з (1)

$$a_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i x_{k+i} = x^T E^k x = \text{Tr}(E^k x x^T).$$

Безпосередньо з (2) отримуємо, що

$$A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці P порядку n матриця $X(\vec{a}, P)$ порядку $n+1$ є ненегативною

$$X(\vec{a}, P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 & a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & a_1 \\ a_1 \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4)$$

Це і є LMI – характеристика у формі нерівностей.

Для перевірки умов (3,4), в яких фігурують позитивно – визначені матриці, існує декілька пакетів так званого *SDP – програмування*: Sedumi, SDPT3, SDPPACK, SDPA та інші. Ми розглянемо SDPT3 та варіант, що є імплементований у MatLab Control System Toolbox

Постановка задачі. Ми побудуємо невід’ємні косинус – многочлени в яких з теоретичних міркувань відомі мінімальні вільні члени і спробуємо знайти їх як розв’язок задачі на екстремум SDP – програмування.

Для цього розглянемо *ядро Фейєра*

$$F_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos k\theta,$$

яке є невід’ємним косинус – многочленом із мінімальним вільним членом $a_0 = 1$. Легко перевірити, що за теоремою Фейєра – Ріса йому відповідають параметри

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Дослідимо відповідні косинус – многочлени із параметрами

$$P\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Розв’язок задачі. Спочатку розглянемо питання, коли у сумісній системі (1) не можна зменшити a_0 . Для цього, вважаючи координати розв’язку $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ диференційованими функціями a_0 , про- диференціюємо систему (1) по a_0 . Отримаємо, позначаючи $x_i = P(i+1)$, лінійну систему для P' :

$$\begin{cases} P(1) * P'(1) + P(2) * P'(2) + \dots + P(n) * P'(n) + P(n+1) * P'(n+1) = \frac{1}{2}, \\ P(2) * P'(1) + (P(1) + P(3)) * P'(2) + \dots, \\ \dots + (P(n-1) + P(n+1)) * P'(n) + P(n) * P'(n+1) = 0, \\ P(n+1) * P'(1) + P(1) * P'(n+1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зрозуміло, що при мініальному a_0 P' не існує, а це можливо тоді і тільки тоді, коли визначник системи (3) дорівнює нулю.

Отже доведена наступна

Теорема. Для того щоб сумісна система (1) визначала найменший ві-

льний член a_0 , при якому

$$A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$$

є невід'ємним при фіксованих (a_1, a_2, \dots, a_n) необхідно і достатньо, щоб дорівнював нулю визначник

$$\Delta(P) = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & P(n+1) \\ P(2) & P(1)+P(3) & P(n) \\ P(n+1) & 0 & P(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Для проведення конкретних обчислень вважатимемо $n = 7$, хоча все наступне має місце при будь-якому $n = 2^k - 1$. Розглянемо, наприклад, точку

$$P_2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right),$$

(нумерація пов'язана із нумерацією Пелі функцій Уолша [1]), якій за Фейєром – Рісом відповідає невід'ємний косинус – многочлен

$$A_2(\theta) = 1 + \frac{5}{4} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta - \cos 4\theta - \frac{3}{4} \cos 5\theta - \frac{1}{2} \cos 6\theta - \frac{1}{4} \cos 7\theta.$$

Згідно теореми складаємо визначник (6)

$$\Delta(P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси маємо, що $1 = E \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$.

Відповідна ЛМІ – задача на екстремум має вигляд:

$$\min \operatorname{tr}(X)$$

$$\text{s.t. } X_{10} + X_{21} + X_{32} + X_{43} + X_{54} + X_{65} + X_{76} = \frac{5}{4};$$

$$X_{20} + X_{31} + X_{42} + X_{53} + X_{64} + X_{75} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned}
 X_{30} + X_{41} + X_{52} + X_{63} + X_{74} &= -\frac{1}{4}; & X_{40} + X_{51} + X_{62} + X_{73} &= -1; \\
 X_{50} + X_{61} + X_{72} &= -\frac{3}{4}; & X_{60} + X_{71} &= -\frac{1}{2}; & X_{70} &= -\frac{1}{4};
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$X = \begin{pmatrix}
 X_{00} & X_{10} & X_{20} & X_{30} & X_{40} & X_{50} & X_{60} & X_{70} \\
 X_{10} & X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} & X_{51} & X_{61} & X_{71} \\
 X_{20} & X_{21} & X_{22} & X_{32} & X_{42} & X_{52} & X_{62} & X_{72} \\
 X_{30} & X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{43} & X_{53} & X_{63} & X_{73} \\
 X_{40} & X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{54} & X_{64} & X_{74} \\
 X_{50} & X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{65} & X_{75} \\
 X_{60} & X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} & X_{76} \\
 X_{70} & X_{71} & X_{72} & X_{73} & X_{74} & X_{75} & X_{76} & X_{77}
 \end{pmatrix} > 0.$$

Розв'язок задачі (7) (для подвоєних даних $2 * \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$)

за допомогою солвера MatLab **mincx** [4] має вигляд:

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

```

1          3.561480
***      new lower bound:  -0.049342
2          2.207842
***      new lower bound:  1.258658
.....
26         2.000014
***      new lower bound:  1.999984
27         2.000010
***      new lower bound:  1.999991

```

Result: feasible solution of required accuracy
best objective value: 2.000010
guaranteed relative accuracy: 9.50e-006
f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009

Розв'язок тієї ж задачі за допомогою солвера SDPT3 **sdlp** [3] має вигляд:

```

num. of constraints = 36
dim. of sdp var = 8, num. of sdp blk = 1

```

```

dim. of free var = 7 *** convert ublk to lblk
*****
*
SDPT3: Infeasible path-following algorithms
*****
*
version predcorr gam expon scale_data
HKM 1 0.000 1 0
it pstep dstep pinfeas dinfeas gap prim-obj dual-obj cputime
-----
0|0.000|0.000|1.4e+001|6.9e+000|8.4e+002|-5.084022e-010 0.000000e+000|
0:0:00| chol 1 1
1|1.000|0.951|4.9e-006|4.1e-001|3.7e+001|-6.517675e-001 -3.476110e+001| 0:0:00|
chol 1 1
.....
18|1.000|0.930|6.9e-013|5.7e-009|7.7e-008|-2.000000e+000 -2.000000e+000|
0:0:01| chol 2 2
19|1.000|0.931|4.0e-012|1.3e-009|1.9e-008|-2.000000e+000 -2.000000e+000|
0:0:01|
stop: max(relative gap, infeasibilities) < 1.00e-008
-----
number of iterations = 19
primal objective value = -1.99999999e+000
dual objective value = -2.00000001e+000
gap := trace(XZ) = 1.91e-008
relative gap = 3.81e-009
actual relative gap = 3.73e-009
rel. primal infeas = 3.98e-012
rel. dual infeas = 1.30e-009
norm(X), norm(y), norm(Z) = 2.5e+000, 2.0e+000, 4.0e+000
norm(A), norm(b), norm(C) = 1.4e+001, 3.8e+000, 4.3e+000
Total CPU time (secs) = 0.9
CPU time per iteration = 0.0
termination code = 0
DIMACS: 7.6e-012 0.0e+000 2.0e-009 0.0e+000 3.7e-009 3.8e-009
-----

```

Зведемо у таблицю результати аналогічних обчислень для невід’ємних многочленів $\{A_1, \dots, A_8\}$, параметри яких є функціями Уолша. Столпець таблиці містить коефіцієнти двох многочленів, які відрізняються зсувом на π і тому мають однакові характеристики.

Зауваження. Не слід вважати, що будь-яка послідовність чисел ± 1 визначає за Фейєром – Рісом невід’ємний косинус – многочлен із коефіцієнтом

$a_0 = E(a_1, \dots, a_n)$. Наприклад, для $P(-1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1)$ маємо $\Delta(P) = 32$, отже, за доведеною теоремою вільний член $a_0 = 8$ не є мінімальним.

Таблиця

Результати обчислень для невід’ємних многочленів

	[7/4 3/2 5/4 1 3/4 1/2 1/4] [-7/4 3/2 -5/4 1 -3/4 1/2 -1/4]	[1/4 -3/2 -1/4 1 1/4 -1/2 -1/4] [-1/4 -3/2 1/4 1 - 1/4 -1/2 1/4]	[5/4 1/2 -1/4 -1 -3/4 -1/2 -1/4] [-5/4 1/2 1/4 -1 3/4 -1/2 1/4]	[3/4 -1/2 -3/4 -1 -1/4 1/2 1/4] [-3/4 -1/2 3/4 -1 1/4 1/2 -1/4]
mincx				
number of iterations	7	16	27	21
objective value	2,000004	2,000013	2,00000001	2,000012
guaranteed relative accuracy:	6,06E-6	9.5E-6	9.5E-6	9.5E-6
sqlp				
number of iterations	9	17	19	18
objective value	2.00000000	2.00000003	2.00000001	2.00000002
relative gap	7.63E-9	7.87E-9	3.81E-9	6.86E-9

Висновки.

1. Порівнюючи результати у таблиці, бачимо, що на розглянутих прикладах солвер **sqlp** працює краще за **mincx**.
2. Розгляд многочленів $\{A_1, \dots, A_8\}$ при $n = 7$ дозволяє припустити, що невід’ємні косинус – многочлени, параметри яких є функціями Уолша, мають нормальну форму.

Список літератури: 1. Б.И.Голубов, А.В.Ефимов, В.А.Скворцов. Ряды и преобразования Уолша.- М: Наука.–1987.–344 с. 2. B.Dumitrescu. Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications.-Springer.–2007.–239 p. 3. K.C.Toh,R.H.Tutuncu,M.J.Todd. On the implementation and usage of SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite – quadratic – linear programming, version 4.0.– Draft, 2006.–46 p. 4. MatLab2010 Control Toolbox.-Users Guide.–2010.–78 p.

Надійшла до редколегії 07.09.2011

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТОЙЧИВОЙ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ВИНТОВОМ СТЕРЖНЕ

Отримано формули для розрахунку основних характеристик гвинтових фононів: енергії, імпульсу і спіну. Показано, що енергія цієї хвилі переносу пропорційна частоті, а значенню постійної Планка відповідатиме гвинтова траєкторія, діаметр якої близький до діаметру атома.

Получены формулы для расчёта основных характеристик винтовых фононов: энергии, импульса и спина. Показано, что энергия этой волны трансляции пропорциональна частоте, а значению постоянной Планка отвечает винтовая траектория, диаметр которой близок к диаметру атома.

The formulas for calculation of basic performances of propeller phonons are obtained: energy, impulse and spin. Is rotined, that the energy of this wave of translation is proportional to frequency, and the value of Planck's constants is responded by a propeller pathway, diameter is close to which one to diameter of atom.

Введение и постановка задачи. В работе [1] составлены линеаризованные уравнения высокочастотной гармонической волны переноса деформации в цилиндрической пружине (винтового фонона):

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot v_f' + f_v \cdot v_f) &= qf' - B \cdot qf + \Omega \cdot Qy_0 \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= v_f' + B^T \cdot v_f + \Omega \cdot Vy_0 \end{aligned} \right\}, \tag{1}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

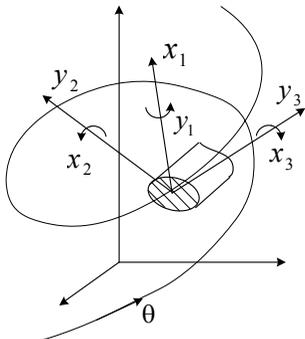
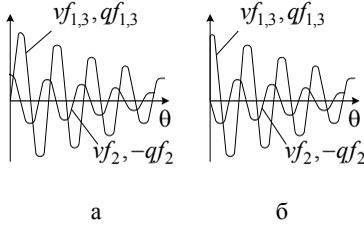


Рисунок 1 – Координаты поперечного сечения

v_f – скорость перемещения волны; Mx , Cx – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения; v_f , qf – скорости изменения координат (рис.1) и величины упругих сил (моментов сил); χ_2, χ_3 – изгиб и кручение стержня. Уравнения учитывают рассеивание энергии на трение (f_v, f_q – коэффициенты трения) и поступление энергии от группы низкочастотных колебаний пружины (описываются векторами скоростей Vy_0 и сил Qy_0).

Там же получена формула для логарифми-

ческого декремента затухания волны (рис.2)



а
б
Рисунок 2 – Синусная (а) и косинусная (б) формы фонона

$$k_T = \left[0.5(f_v + f_q) / \omega_c^2 \right] \cdot \omega \quad (3)$$

и уравнение энергетического баланса фонона:

$$dE_n / d\tau = N_0 - N_T, \quad (4)$$

где ω , E_n – круговая частота и полная механическая энергия этой уединённой волны переноса; ω_c – частота синфазных колебаний пружины (рис.3).

Предложена модель квантования амплитуды, базирующаяся на гистерезисе между нагрузкой и деформацией (рис.4).

В данной статье мы продолжим указанное направление исследования и получим основные характеристики винтового фонона, в том числе зависимость его энергии E_n от частоты ω . На связь этой задачи с актуальными проблемами механики сплошной активной среды указывалось в работах [3-8].

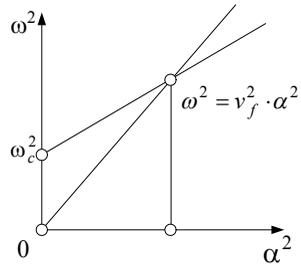


Рисунок 3 – Связь между волновым числом α и скоростью фонона

Условия устойчивости и ядро фонона.

Вычислим обе части неравенства

$$N_0 > N_T, \quad (5)$$

определяющего необходимые условия устойчивости фонона, имеющего амплитуду A и (для определённости) синусную форму волны. Начнём с вычисления мощности сил трения

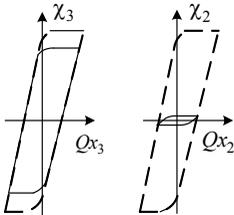


Рисунок 4 – Частичные петли гистерезиса для кручения и изгиба

$$N_T = \int_0^\infty \left[f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) \right] d\theta.$$

Сравнивая эту формулу с равенством (36) из работы [1], можем сразу записать результат:

$$N_T = A^2 \cdot [1 / (4k_T\alpha)] \cdot (f_v \cdot T_1 + f_q \cdot \Pi_1).$$

Учтём, что плотность Π_1 потенциальной энергии составляет половину от плотности всей механической энергии, следовательно:

$$N_T = A^2 \cdot [(f_v + f_q) / (8k_T\alpha)] \cdot E_1,$$

где $E_1 = T_1 + \Pi_1 = z^{-2}$; z – индекс пружины.

Для гистерезисного трения

$$f_v + f_q = 2k_T \cdot \omega_c^2 / \omega ,$$

откуда после сокращения декрементов получаем:

$$N_T = A^2 \cdot [\omega_c^2 / (8\omega \cdot \alpha)] \cdot E_1 .$$

Для круглого сечения стержня эта формула принимает следующий вид:

$$N_T = A^2 / (2\omega \cdot \alpha) . \quad (6)$$

Если синусную форму волны заменить косинусной формой, то результат вычисления мощности N_T , рассеиваемой на трение, не изменится.

Теперь будем вычислять мощность N_0 , для чего воспользуемся формулами (28 а) и (29 а) из работы [1], а также (20) для несобственного интеграла.

- Для случая $\chi_{2,3} = 0$ (на гистерезисной полке по кручению) матрица связи $\Omega = 0$, и, следовательно, мощность N_0 также равна 0.
- Для случая $\chi_2 = 0$ (на гистерезисной полке) получаем:

$$\begin{aligned} N_0 / Ay_0 &= cx_3 \int_0^\infty Qx_3 \cdot Qx_2 d\theta + cx_3 \int_0^\infty Qx_3 \cdot Vx_2 d\theta = \\ &= A^2 cx_3 qx_3 (qx_2 + vx_2) \int_0^\infty e^{-2k_T \alpha \theta} \sin(\alpha \theta) \cos(\alpha \theta) d\theta = A^2 cx_3 qx_3 (qx_2 + vx_2) / (4\alpha) . \end{aligned}$$

Анализ формул из работы [2] для компонент продольного фонона показывает, что второе слагаемое скобок значительно меньше первого (в $z \gg 1$ раз), и им можно пренебречь. В результате формула для мощности приобретает следующий вид (здесь принято значение коэффициента $\mu = 0.27$):

$$N_0 = -0.8 / (4\omega \cdot \alpha z) \cdot A^2 \cdot Ay_0 . \quad (7)$$

Как следует из формул (6), (7), малая величина декремента трения k_T не влияет на результат. Но считать этот декремент равным нулю нельзя, поскольку колебания перестанут быть затухающими, а несобственные интегралы перестанут сходиться. Оказывается, что исследуемая *гармоническая волна трансляции получает энергию от поперечных колебаний только лишь потому, что она является затухающей по длине.*

Если угловая скорость изгиба $Vy_1 = Ay_0$ при низкочастотных колебаниях отрицательна (то есть *пружина распрямляется*, смотри рис.1), то эта мощность оказывается положительной. Если скорость изгиба положительна (пружина сворачивается), то мощность N_0 отрицательна, что делает существование стабильного фонона с синусной формой волны не возможным.

Но показательным является следующий результат: у косинусной формы волны компоненты vx_2 и qx_2 используются с противоположным знаком, в результате чего формула для мощности также изменяет знак. Следовательно, *для устойчивости косинусной формы волны пружина должна не распрямляться, а наоборот, сворачиваться.*

- Для случая $\chi_2 \neq 0$ (за пределами полки) получаем:

$$\begin{aligned}
N_0 / Ay_0 &= \int_0^\infty [cx_3 Qx_3 \cdot Vx_2 - cx_2 Qx_2 \cdot (Qx_1 + Vx_3)] d\theta = \\
&= A^2 [cx_3 qx_3 \cdot vx_2 - cx_2 qx_2 \cdot (qx_1 + vx_3)] \cdot \int_0^\infty e^{-2kr\alpha\theta} \sin(\alpha\theta) \cos(\alpha\theta) d\theta = \\
&= A^2 [cx_3 qx_3 \cdot vx_2 - cx_2 qx_2 \cdot (qx_1 + vx_3)] / (4\alpha) .
\end{aligned}$$

Анализ формул работы [2] для компонент продольного фонана показывает, что первые слагаемые круглой и квадратной скобок значительно меньше вторых слагаемых (в $z \gg 1$ раз), и ими можно пренебречь. В результате формула для мощности приобретает следующий вид:

$$N_0 = -A^2 cx_2 qx_2 vx_3 / (4\alpha) = [1 / (4\omega \cdot \alpha)] \cdot A^2 \cdot Ay_0 . \quad (8)$$

У косинусной формы фонана в силу изложенной выше причины формула для этой мощности также имеет противоположный знак.

Сравнивая формулы (7) и (8), а также аналогичные равенства для косинусной формы фонана, замечаем, что

- мощности имеют противоположные знаки, причём для стабильной волны первая мощность должна быть положительной, следовательно, вторая – отрицательная;
- величина отрицательной мощности в z раз больше величины положительной мощности.

При большом значении индекса пружины $z \gg 10$ стабильный фонон будет иметь в «голове» волны короткий участок X , на котором нарушается условие $\chi_2 = 0$, и избыточная мощность возвращается назад, в группу поперечных колебаний. Для синусной формы волны он будет располагаться непосредственно на фронте волны (рис.5 а), а для косинусной формы – отставать от фронта волны на четверть периода (рис.5 б).

Этот участок мы далее будем называть *нелинейным ядром фонана*.

Заметим, что о необходимости существования такого нелинейного участка у фотона сказано, например, в классическом учебнике по квантовой механике [9], Э. Вихман использовал для него схожий термин – *ядро фотона*. Но всем ясно, что такое ядро не является центральным и отличается от привычного понятия ядра атома. Кроме того, если индекс z не является очень большим числом, то ядро фонана будет иметь несколько частей X_j (рис.6), соответст-

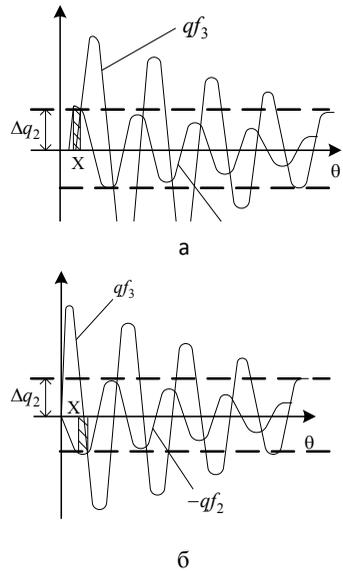


Рисунок 5 – Расположение ядра для синусной (а) и косинусной (б) формы фонана

вующих различной «глубине погружения» волны в область изменённой кривизны $\chi_2 \neq 0$, где

$$|qf_2| > \Delta q_2 .$$

Разумеется, следует понимать, что рис.5,6 – это схемы первого приближения; в действительности уход с гистерезисной полки имеет переходной участок, и именно на этом участке будет располагаться та часть фонона, которая названа его ядром.

Теперь мы готовы учесть условие устойчивости. Неравенство (5) с учётом формул (6) и (7) принимает следующий вид (синусная форма):

$$A^2 / (2\omega \cdot \alpha) < A^2 \cdot [0.2 / (\omega \cdot \alpha \cdot z)] \cdot Ay_0 ,$$

что эквивалентно условию

$$-Ay_0 > 2.5 \cdot z . \tag{9}$$

Для косинусной формы волны соответствующее условие будет иметь вид

$$Ay_0 > 2.5 \cdot z . \tag{9 а)$$

Заметим, что эти неравенства противоречат условию прочности для одиночной волны из работы [2], но могут быть реализованы для суммы волн, как указывалось там же. Необходимо отметить также и то, что требуемая по условию (9) скорость распрямления пружины должна быть очень большой; линейная скорость V_3 осевого перемещения торца близка к скорости звука в материале пружины. В следующем пункте мы опишем другие условия формирования устойчивого фонона, не требующие такой экстремальной динамики для поддерживающих колебаний. Но прежде, чем двигаться дальше, нужно изучить полученные решения, и, понять ту схему, которая обеспечивает устойчивость фонона.

Заметим, что при выводе неравенства (9) квадраты амплитуды колебаний опять были сокращены. Но сейчас впервые в этой работе возникает ситуация, когда условие устойчивости волны зависит от величины амплитуды колебаний.

Поскольку максимальное значение изгибающего момента Qx_2 и момента кручения Qx_3 пропорциональны модулю амплитуды A , то от величины этой амплитуды зависит выполнение условий

$$\chi_{2,3} = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 \neq 0 \text{ или } \chi_{2,3} \neq 0 ,$$

которые влияют на интенсивность и направление энергетического обмена между фононом и низкочастотными поперечными колебаниями.

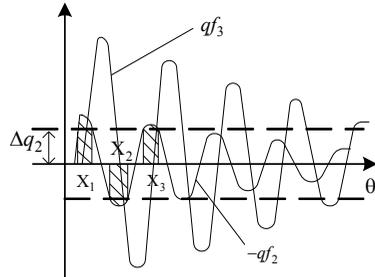


Рисунок 6 – Фонон с тремя ядрами

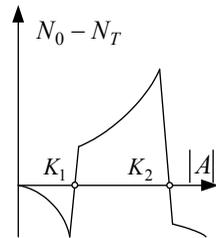


Рисунок 7 – Баланс мощностей

На рис.7 показана схема поступления мощности при разных амплитудах, но одной и той же частоте волны.

При малых амплитудах имеет место условие $\chi_{2,3} = 0$, суммарная мощность определяется силами трения и отрицательна.

При средних значениях амплитуды имеем $\chi_2 = 0$, $\chi_3 \neq 0$, поступление мощности превышает убыль, и суммарная мощность положительна.

При больших значениях амплитуды имеет место условие $\chi_{2,3} \neq 0$, вместо поступления энергии от низкочастотных колебаний наблюдается её убыль, и суммарная мощность отрицательна.

У этого процесса имеются две точки устойчивого равновесия – точка начала координат и точка K_2 , а также точка неустойчивого равновесия K_1 . Координаты точек $K_{1,2}$ изменяются пропорционально частоте ω .

При амплитудах, меньших K_1 , волна рассеивает всю свою энергию в тепло и быстро затухает во времени. Тем самым реализуется своеобразный барьер для излучения фонона: если амплитуда возбуждаемого колебания меньше K_1 , то уединённая волна трансляции на данной частоте не возникает.

С другой стороны, если в стержне уже возникла волна, определяемая уравнениями продольного фонона и имеющая амплитуду, большую K_1 , то эта волна не затухнет, а её амплитуда стабилизируется на уровне K_2 . Необходимая для этого энергия будет получена от низкочастотных поперечных колебаний. А если первоначальная энергия волны является излишней, то эта часть энергии будет в ядре фонона возвращена поперечным колебаниям.

Таким образом, в описываемом процессе прослеживается чёткий механизм стабилизации амплитуды волны в зависимости от частоты; такой механизм называется *квантованием амплитуды*. Кроме того, квантуется и фаза волны: в зависимости от направленности процесса низкочастотной деформации «выживает» синусная либо косинусная форма фонона.

Заметим, что в соответствии с описанным механизмом квантования амплитуда (а, значит, и энергия) косинусной формы оказывается большей, чем амплитуда (и энергия) синусной формы; это объясняется разным расположением ядра. Поэтому синусная форма при изменении фазы ψ (смотри формулы (18) работы [1]) является формой устойчивого равновесия, а косинусная форма – не устойчива.

Например, если пружина не распрямляется, а сворачивается, то косинусная форма в любой момент подъёма амплитуды волны может перейти в синусную форму, и волна будет затухать. Но если амплитуду всё же удалось поднять до точки K_2 , то синусная форма будет продолжать разгоняться, пока этот процесс не столкнётся с другими ограничениями, которые используемой в этой работе линеаризованной моделью не описываются.

Поэтому *устойчивость винтовых фононов возможна только при расп-*

рямлящейся пружине («вселенная» обязана расширяться).

Стабилизация фонона за счёт энергии колебаний кластера. Теперь, когда имеем механизм квантования, целесообразно вернуться к задаче синтеза фонона и попытаться обойти условие (9), которое требует чрезмерной интенсивности для амплитуды низкочастотных колебаний.

Используем вместо длинно волновых колебаний основной частоты низкочастотные колебания, образующие кластер, описанный формулами работы [2]. Формулы для величин плотностей получаемой мощности примут вид:

$$N = -cx_3 Qx_3 \cdot Qx_1 \cdot \sin(\theta) \cdot Ay0,$$

$$N = -cx_3 Qx_3 \cdot Qx_1 \cdot \sin(\theta) \cdot Ay0 - cx_2 Qx_2 \cdot Qx_1 \cdot \cos(\theta) \cdot Ay0.$$

Они отличаются от формул (28 а) и (29 а) из работы [1] тем, что моменты Qx_3 и Qx_1 совпадают и описываются тригонометрическими функциями одного типа (либо косинусами, либо синусами). В результате интеграл для вычисления мощности N_0 оказался аналогичным интегралу для вычисления энергии, и её формула (для случая $\chi_2 = 0, \mu = 0.27$) принимает вид

$$N_0 = -[0.89 / (4\alpha z^2 \cdot k_T)] \cdot A^2 \cdot Ay0 \cdot \sin(\theta).$$

Появление в знаменателе этой формулы вместо частоты ω (это число больше индекса z) декремента k_T (это число имеет порядок 0.002) позволяет обеспечить выполнение условия устойчивости (9) при значительно меньшем (на порядки) значении амплитуды скорости $Ay0$.

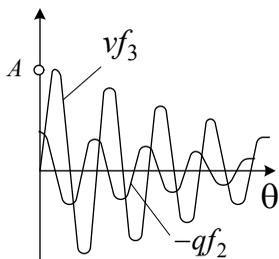


Рисунок 8 – Начальный участок фонона

Кластер (смотри [2]) имеет короткую длину волны и позволяет стабилизировать фонон локально, на малом участке витка. Поэтому мы не будем приводить дальнейший анализ этого случая, а используем его как источник положительного опыта, который нужно повторить в других случаях.

Характеристики фононов. «Постоянная Планка» для стержня. В этом пункте будут определены основные характеристики для синусной формы фононов (рис.8): амплитуда, спин, угол закручивания, деформация уплотнения, полная энергия, масса, импульс и мощность трения. Для косинусной формы амплитуда, полная энергия, масса, импульс и мощность трения определяются по аналогичным формулам, а спин, угол закручивания и деформация уплотнения оказываются меньшими в $k_T^{-1} \approx 500$ раз, то есть близкими к нулю.

Амплитуда волны. Условие

$$\Delta\sigma \approx k_m \cdot \sigma_T,$$

применительно к изгибу стержня и выполненным нормировкам упругих сил и моментов сил принимает следующий вид:

$$A \cdot cx_2 \cdot qx_2 = k_m \cdot 0.005 \cdot z \approx 10^{-4} \cdot z ,$$

где $k_m \approx 0.02$ – коэффициент затухания свободного гармонического колебания. Отсюда, поскольку

$$cx_2 \cdot qx_2 = 1/\omega ,$$

находим амплитуду волны:

$$A = (k_m \cdot 0.005 \cdot z) \cdot \omega \approx 10^{-4} \cdot z \cdot \omega . \quad (10)$$

Теперь учтём ограничение на частоту ω , вытекающее из условия прочности стержня. Максимальное кручение χ_3 определяется равенством

$$\chi_{3.\max} = A \cdot cx_3 \cdot qx_3 = A \cdot [0.627 \cdot (1 + \mu) / z] \approx 0.8 \cdot 10^{-4} \cdot \omega .$$

Исходя из условия прочности, эта величина должна быть меньше допустимого предела $0.01 z$, то есть

$$0.8 \cdot 10^{-4} \cdot \omega \leq 0.01 z ,$$

откуда

$$\omega \leq 125 \cdot z . \quad (11)$$

Можно учесть связь между декрементом и коэффициентом затухания:

$$k_m = 2\pi \cdot k_T ,$$

после чего неравенство (11) примет общий вид:

$$\omega \leq (0.4/k_T) \cdot z \approx (2.5/k_m) \cdot z . \quad (11 \text{ а})$$

Правые части неравенств (11) определяют верхний предел частоты фона, достижимый по условию прочности. Максимальная угловая скорость A_M закручивания витка на верхнем пределе частоты определяется формулой

$$A_M = 1.25 \cdot 0.00625 \cdot z^2 ,$$

или, после перехода к размерным величинам путём умножения на нормировочный множитель

$$\delta T^{-1} = a_{np} / (2 \cdot z \cdot R) ,$$

$a_{np} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ – скорость звука для продольной волны; R – радиус витка:

$$\hat{A}_M \approx 18.75 \cdot z / R \text{ [1/сек]} .$$

Максимальная угловая скорость A закручивания витка определяется формулой (10), которая при частоте $\omega = 1.25 z$, то есть на нижней границе рассматриваемого волнового диапазона $\alpha \geq 1$, определяется формулой

$$A_m = k_m \cdot 0.00625 \cdot z^2 \approx 1.25 \cdot 10^{-4} \cdot z^2 . \quad (12)$$

На верхней границе диапазона эта величина будет в $1.25 \cdot k_m^{-1}$ раз больше:

$$A_M = 1.25 \cdot 0.00625 \cdot z^2 \approx 19 \dots 75 , \quad (13)$$

где приближённые значения соответствуют индексам $z \approx 50 \dots 100$.

Для перехода к размерным величинам эти результаты нужно умножить на нормировочный множитель δT^{-1} :

$$\hat{A}_m \approx 15 \cdot k_m \cdot z / R \approx 0.3 \cdot z / R = 0.3 / r; \quad \hat{A}_M \approx 18.75 \cdot z / R = 18.75 / r. \quad (14)$$

Спин волны. Эта величина определяется формулой

$$I_3 = mx_3 \cdot A / \alpha$$

и при значениях $\alpha \geq 1$ практически не зависит от частоты и длины волны. Поэтому вычислим её при волновом числе $\alpha = 1$ и значениях

$$mx_3 = 1 / (2z^2), \quad \omega = 1.25 \cdot z \cdot \alpha: \\ I_3 \approx 0.5 \cdot 0.00625 \cdot k_m \approx 6.25 \cdot 10^{-5}. \quad (15)$$

Спин имеет физическую размерность *действия*, то есть $[Дж \cdot с = кг \cdot м^2 / с]$.

Учтём, что инерционный коэффициент до нормировки имел значение

$$\widehat{mx}_3 = \rho \pi r^4 / 2,$$

следовательно, для действия получаем нормировочный множитель:

$$\Delta h = \frac{\widehat{mx}_3}{mx_3} \cdot \frac{\hat{A}_m}{A_m} \cdot \frac{\alpha}{\hat{\alpha}} = \frac{(1/2) \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^4}{(1/2) \cdot 1/z^2} \cdot \frac{a_{np}}{2 \cdot z \cdot R} \cdot \frac{1}{R^{-1}} = \rho \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2} \cdot a_{np} \cdot z.$$

Теперь используем этот множитель и формулу (15):

$$I_3 \approx 3.125 \cdot 10^{-3} \cdot k_m \cdot \rho \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2} \cdot a_{np} \cdot z. \quad (16)$$

Для стального стержня плотность $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$, коэффициент $k_m \approx 0.02$ и

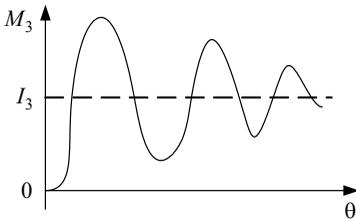
$$I_3 \approx 3600 \cdot z \cdot r^4 = 3600 \cdot R \cdot r^3 [Дж \cdot с]. \quad (16 \text{ а})$$

Поскольку радиус сечения стержня обычно удовлетворяет условию

$$r < 0.01 \text{ м},$$

то спин фонона является достаточно малой величиной.

Рисунок 9 – Изменение момента количества движения для начального участка волны.



Изменение момента количества движения $M_3(\theta)$ для начального отрезка фонона происходит по закону, показанному на рис.9. Оказывается, что весь этот момент переносится головной частью волны, составляющей четверть её длины. Для частоты $\omega = 1.25 \cdot z$ этот отрезок занимает четверть витка пружины, а для $\omega = 125 \cdot z$ – около 1.5^0 .

Угол закручивания стержня. Эта величина (обозначим её Δx_3) также не

зависит от частоты и вычисляется по формуле

$$\Delta x_3 = x_3(\infty) - x_3(0) = \int_0^\infty (\partial x_3 / \partial \theta) d\theta = \nu f^{-1} \cdot \int_0^\infty V x_3(\theta) d\theta = \nu f^{-1} \cdot A / \alpha .$$

Используя результаты, полученные при вычислении спина, имеем:

$$\Delta x_3 \approx [0.00625 \cdot 10^{-4} z^2 \cdot k_m / (1.25 \cdot z)] \approx 10^{-4} \cdot z . \quad (17)$$

Данная величина является безразмерной и определяется в радианах. Основное закручивание происходит в головной части волны, где сосредоточен и её спин.

Деформация уплотнения. Указанная деформация стержня происходит в направлении бинормали (параллельно оси пружины) и определяется формулой:

$$\Delta x_1 = x_1(\infty) - x_1(0) = \int_0^\infty (\partial x_1 / \partial \theta) d\theta = \nu f^{-1} \int_0^\infty V x_1(\theta) d\theta = \nu f^{-1} \cdot (A / \alpha) \cdot (1.13 / z^2) ,$$

которая преобразуется к следующему виду:

$$\Delta x_1 \approx [0.00625 \cdot 10^{-4} z^2 \cdot k_m / (1.25 \cdot z)] \cdot [1.13 / z^2] \approx 10^{-4} \cdot z^{-1} .$$

После перехода к размерным величинам, получаем:

$$\Delta x_1 \approx 10^{-4} \cdot r . \quad (18)$$

Если радиус сечения составляет несколько миллиметров или сантиметров, то деформация Δx_1 определяется в микронах, то есть очень мала. Характер изменения этой величины по длине волны повторяет изменение момента количества движения (смотри рис.9).

Энергия волны. Полная механическая энергия волны в стержне с учётом формул статьи [1] определяется равенством:

$$E_n = A^2 / (4 k_T \cdot \alpha \cdot z^2) .$$

Используем для амплитуды волны формулу (10) и получим:

$$E_n = (0.005 \cdot k_m \cdot z \cdot \omega)^2 \cdot \frac{1}{4(k_m / (2\pi))\alpha \cdot z^2} \approx 12.5 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot k_m \cdot \omega^2 / \alpha .$$

Учтём, что при условии $\alpha > 2$ (рис.10) выполняется соотношение

$$\lambda \approx a_{np} \cdot \alpha \approx 1.25 \cdot z \cdot \alpha .$$

Следовательно

$$E_n \approx 12.5 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot k_m \cdot 1.25 \cdot z \cdot \omega \approx 0.5 \cdot 10^{-4} \cdot k_m \cdot z \cdot \omega \approx 10^{-6} \cdot z \cdot \omega . \quad (19)$$

Энергия распределена по всей длине фотона, но неравномерно (рис.11), и экстремальные значения плотности $\delta E(\theta)$ убывают по экспоненциальному

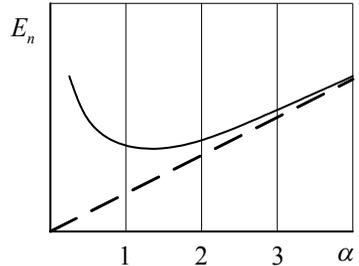


Рисунок 10 – Зависимость энергии от длины волны

закону.

Коэффициент

$$h = 12.5 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 1.25 k_m \cdot z \approx 10^{-6} \cdot z \quad (20)$$

играет в формуле (19) ту же роль, что и постоянная Планка \hbar в известной формуле [10], связывающей энергию и частоту фотона.

Сравнивая формулы (15) и (20), замечаем, что спин фонона будет равен величине постоянной $\hbar = h/(2\pi)$, как это имеет место у фотона, при условии $z = 62.5$.

Но, если учесть, что число 0.005, используемое в формуле (11) для измерения отношения напряжения при пластической деформации к пределу текучести, может быть изменено, то следует принять условие

$$z \approx 50 \dots 100.$$

Тем самым, будет обеспечено выполнение известного тезиса квантовой механике о том (смотри [9]), что *постоянные Планка, определяющие энергию волны и момент количества движения волны – это одна и та же величина.*

В трёхмерном случае выполнение этого тезиса обеспечивается дополнительной *устойчивой процедурой квантования индекса*. Если величина R здесь определяется начальной кривизной пространства и является величиной заданной, то радиус $r = R/z$, определяющий характерные размеры поперечного сечения волны, в принципе может быть произвольным. Но существуют условия, которые среди многих возможных значений r отбирают только то, которое удовлетворяет цитированному тезису. Обсуждение этих условий выходит за рамки данной работы.

Принятие условия $z \approx 50 \dots 100$ означает, что начальная величина относительной кривизны z^{-1} стержня (читай – пространства) мала.

Если число 0.005, используемое в формуле (11), обозначить κ , то

$$z = [1/\pi]/\kappa,$$

$$A = (1/\pi) \cdot k_m \cdot \omega, \quad (10 \text{ а})$$

$$h = 2 \cdot m x_3 \cdot k_m \cdot a_{non} = 2 \cdot k_m \cdot a_{non}, \quad (20 \text{ а})$$

а предельное по условиям прочности волновое число α_M определяется формулой

$$\alpha_M = [0.005/\kappa] \cdot [(1+\mu)/k_m].$$

«Постоянная Планка» \hbar так же, как и спин, имеет физическую размерность действия, и в размерных величинах определяется формулой:

$$\hat{h} = h \cdot \Delta h = 12.5 \cdot 10^{-6} \pi \cdot 1.25 \cdot k_m \cdot z \cdot \rho \cdot \frac{\pi r^4}{2} \cdot a_{np} z \approx 5 \cdot 10^{-5} k_m \cdot \rho \cdot \frac{\pi r^4}{2} \cdot a_{np} z^2.$$

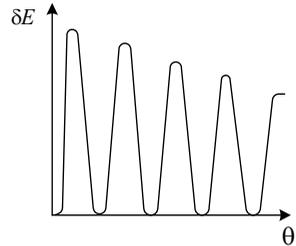


Рисунок 11 – Плотность распределения энергии по длине фонона

Этой формуле можно придать следующий вид:

$$\hat{h} \approx 5 \cdot 10^{-5} \cdot k_m \cdot \widehat{m}x_3 \cdot a_{np} \cdot z^2. \quad (21)$$

Для стального стержня результат становится более конкретным:

$$\hat{h} \approx 10^{-6} \cdot \widehat{m}x_3 \cdot a_{np} \cdot z^2 \approx 30 \cdot R^2 \cdot r^2 [\text{Дж} \cdot \text{с}]. \quad (21 \text{ а})$$

Масса и импульс. Если центр системы координат, показанной на рис.1, разместить в ядре фонона и перемещать по стержню с той же скоростью звука a_{non} , с которой движется волна, то фонон будет выглядеть как неподвижное деформированное упругое тело. При этом он сохранит свою потенциальную энергию Π , а кинетическая энергия окажется равной 0.

Будем, как это принято в механике (смотри, например, похожий вывод для фотонов в [10]), считать, что фонон имеет приведенную массу m_{np} , которая перемещается по стержню со скоростью a_{non} , и кроме кинетической энергии

$$T = 0.5 \cdot m_{np} \cdot a_{non}^2$$

обладает внутренней энергией Π (в данном случае это энергия упругих деформаций). Тогда из двух равенств для энергий

$$T + \Pi = E_n \quad \text{и} \quad T = \Pi$$

получаем соотношение

$$E_n = m_{np} \cdot a_{non}^2, \quad (22)$$

которое является аналогом знаменитого *уравнения Эйнштейна*.

Заметим, что на самом деле, применительно к винтовому фонону (и фотону) *это равенство является определением инерционной массы*, а основной (или первичной) характеристикой волны является её частота.

Если рассматривать крупный масштаб времени, то естественно принять, что фонон движется вдоль оси пружины со скоростью

$$a_\phi = a_{non} \cdot \sin \delta, \quad (23)$$

где δ – это угол подъёма винтовой линии. В результате формула (22) принимает вид

$$E_n = m_\phi \cdot a_\phi^2, \quad (22 \text{ а})$$

и может служить определением *инерционной массы фонона* m_ϕ :

$$m_\phi = E_n / a_\phi^2 = [\hat{h} / a_\phi^2] \cdot \omega = [\hat{h} / (\sin^2 \delta \cdot a_{non}^2)] \cdot \omega = [\hat{h} / (\sin^2 \delta \cdot a_{non})] \cdot \alpha,$$

то есть его инерционная масса пропорциональна частоте и волновому числу.

Величина

$$I_\phi = m_\phi \cdot a_\phi = E_n / a_\phi = [\hat{h} / a_\phi] \cdot \omega = [\hat{h} / (\sin \delta \cdot a_{non})] \cdot \omega = (\hat{h} / \sin \delta) \cdot \alpha$$

определяет модуль *импульса фонона*; импульс направлен вдоль оси пружины.

Мощность трения. Для фонона эта величина пропорциональна полной энергии, но коэффициент пропорциональности – это коэффициент трения

$$f = k_T \cdot \omega_c^2 / \omega ,$$

и он обратно пропорционален частоте. В результате мощность трения \hat{N}_T для всех частот имеет одно и то же значение:

$$\hat{N}_T = [k_m / (2\pi)] \cdot \hat{h} \cdot \hat{\omega}_c^2 , \quad (24)$$

где $\hat{\omega}_c$ – размерное значение нижней синфазной круговой частоты продольных колебаний.

Пример №1. Рассматривается цилиндрическая пружина, изготовленная из стального прута диаметром $2r = 10 \text{ мм}$. Диаметр пружины $2R = 700 \text{ мм}$, индекс $z = 70$, угол навивки $\delta = 3^\circ$, коэффициент затухания $k_m = 0.02$.

Нижняя синфазная частота для продольных колебаний составляет около 1400 Гц, для поперечных колебаний – около 2300 Гц.

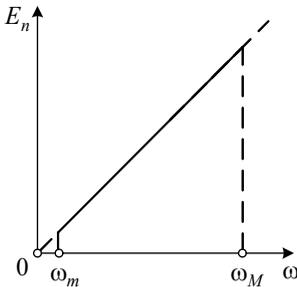


Рисунок 12 – Изменение энергии фонона в зависимости от его частоты

«Постоянная Планка»

$$\hat{h} = 2\pi \hat{I}_3 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{с} .$$

Энергия фонона изменяется пропорционально частоте (рис.12):

- от значения 5.2 Дж на нижней границе
- до значения 162.5 Дж на верхней границе волнового диапазона.

Инерционная масса фонона m_ϕ изменяется в пределах $0.058...1.8 \text{ г}$.

Для сравнения укажем массу одного витка пружины – $m_0 = 1.4 \text{ кг}$, что в сотни раз больше максимальной массы фонона m_ϕ .

Импульс фонона изменяется в диапазоне $0.0058...0.18 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}$.

Верхняя синфазная частота для поперечных колебаний составляет около 205 кГц , то есть, находится в ультразвуковой области; для продольных колебаний эта величина превышает 20 МГц (диапазон радиочастот).

Волновой диапазон фононов составляет (по частотам) от $\omega_m = 4000 \text{ Гц}$ до $\omega_M = 125 \text{ кГц}$, то есть, находится в области звуковых и ультразвуковых колебаний.

Спин фонона оценивается величиной

$$\hat{I}_3 \approx 0.31 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} \cdot \text{с} ,$$

угол закручивания $\Delta\alpha_3 \approx 0.4^\circ$,

деформация уплотнения $\Delta\chi_1 \approx 0.5 \text{ мкм}$.

Мощность трения составляет $\hat{N}_T \approx 0.35 \text{ Вт}$.

Анализ полученных результатов показывает, что для возбуждения фонона в данной пружине можно воспользоваться, например, звуковым генератором, входящим в комплект высокочастотной измерительной аппаратуры и используемым для тарирования датчиков. Амплитуду волны несложно проконтролировать по изменению угла закручивания.

Если коэффициент затухания k_m составляет не 0.02, как принято в этом расчёте, а 0.005, что по данным работы [11] так же возможно, то верхний предел волнового диапазона фононов увеличится в четыре раза, до 500 кГц.

Но постоянная \hat{h} изменяется пропорционально величине k_m^2 , и поэтому она уменьшится в 16 раз. Следовательно, минимальная энергия фонона снизится в 16 раз и составит 0.32 Дж, а максимальная – в четыре раза, до 40 Дж.

Пример № 2. Рассматривается обратная задача. По величинам постоянной Планка $\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, скорости света $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$, коэффициентов Пуассона $\mu \approx 0.27$ и затухания $k_m \approx 0.005$ требуется оценить диаметр пружины, имеющей индекс $z \approx 70$ и такое же значение константы \hat{h} .

Используем формулы (21), (21 а) и получим:

$$7.5 \cdot R^2 \cdot r^2 = 7.5 \cdot R^4 / z^2 = 1.05 \cdot 10^{-34},$$

откуда

$$2R \approx 3.2 \cdot 10^{-8} \text{ м}.$$

Диаметр пружины оказался в 320 раз большим диаметра атома.

Но если вместо скорости звука a_{np} использовать в формуле (21) значение скорости света c , увеличенное (как это имеет место в механике при переходе от поперечных колебаний к продольным колебаниям) в $\sqrt{2(1+\mu)} \approx 1.6$ раза, то диаметр пружины уменьшится в 18 раз и составит

$$2R \approx 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Учтём, что при распространении волны по винтовому стержню проекция скорости на направление оси уменьшается (при плотной укладке витков) в $\pi \cdot z \approx 200$ раз, поэтому в формуле (21) скорость a_{np} следует дополнительно увеличить в такое же число раз. В результате диаметр пружины уменьшится:

$$2R \approx 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ м},$$

что в 5 раз больше диаметра атома.

Осталось заметить, что неизвестна плотность материала, из которого изготавливается эта гипотетическая «пружина», и поэтому мы использовали для величины ρ то же значение, что и у плотности стали.

Поскольку

$$a_{np} = \sqrt{E / \rho},$$

где E – это модуль упругости, то величина \hat{h} пропорциональна $\sqrt[8]{1/\rho}$.

Известно (смотри, например, [12]), что плотность вещества в ядре атома составляет $2 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3$, и это превышает плотность стали в $2.5 \cdot 10^{13}$ раз. Поэтому, если согласиться с тем, что плотность ρ должна быть выше плотности стали, причём не менее чем в $5^8 \approx 4 \cdot 10^5$ раз, то *диаметр пружины будет иметь тот же порядок величины, что и диаметр атома.*

В заключение заметим, что стремление объяснить квантовую природу фотона как закономерное свойство сплошной механической среды не ушло из науки и в наше время. Так, в [13] описана модель фотона, использующая *вихревые дорожки Кармана* и турбулентные пульсации газоподобного эфира.

Выводы. Изучены условия, обеспечивающие устойчивость фонона и прочность пружины, а также сформулированы требования, накладываемые на геометрию пружины для соответствия свойств винтовых фононов и фотонов. Показано, что пружина обязана иметь большой индекс $z \approx 50 \dots 100$.

Получены формулы для расчёта основных характеристик фононов, в том числе спина, импульса и полной энергии волны. Показано, что в широком диапазоне частот энергия пропорциональна частоте.

Исследована зависимость коэффициента пропорциональности \hat{h} (аналога постоянной Планка h) от свойств материала и геометрии пружины. Показано, что при совпадении этих постоянных диаметр пружины оказывается близок к диаметру атома.

Список литературы: 1. Григорьев А.А., Деряченко А.И. Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.39-54. 2. Ванин В.А., Григорьев А.А. Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 4. Ванин В.А., Григорьев А.А. Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 5. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.55-68. 6. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 7. Ванин В.А., Григорьев А.А., Деряченко А.И. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 8. Ванин В.А., Григорьев А.А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С. 23-37. 9. Э. Визман. Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. – 415 с. 10. Куттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. Берклевский курс физики – М.: Наука, 1983. – 447 с. 11. Писаренко Г.С., Яковлев А.А., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 375 с. 12. Х. Кухлинг. Справочник по физике. – М.: Наука, 1982. – 419с. 13. Ацюковский В.А. Общая эфиродинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 280 с.

Поступила в редколлегию 07.09.2011

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

КВАНТОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА УЕДИНЁННЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЛН ПЕРЕНОСА ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЯ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОМУ СТЕРЖНЮ

Отримано формули для розрахунку енергії, яку переносять експоненціальні хвилі деформації кручення стержня, що мають квантовану амплітуду. Показано, що основні характеристики хвилі при зміні швидкості переносу підкорюються релятивістському перетворенню Лоренца, а її ефективна довжина скорочується відповідно до гіпотези Фітцджеральда.

Получены формулы для расчёта энергии, которую переносят экспоненциальные волны крутильной деформации стержня, имеющие квантованную амплитуду. Показано, что основные характеристики волны при изменении скорости переноса подчиняются релятивистскому преобразованию Лоренца, а её эффективная длина укорачивается в соответствии с гипотезой Фитцджеральда.

The formulas for calculation of energy are obtained, which one is transferred by exponential wave of torsion deformation of a rod having quantized amplitude. It is noted, that the basic performances of a wave at an alteration of speed of carry are subject to relativistic Lorentz transformation laws, and the effective length is shortened pursuant to a hypothesis Fitzgerald.

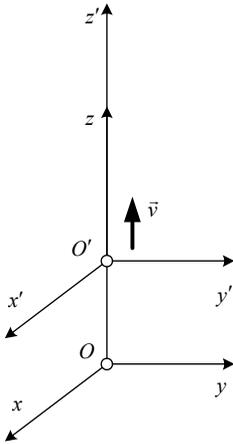


Рисунок 1 –
 Системы координат.

Введение. Знание релятивистской квантовой физики, выстроенное Альбертом Эйнштейном и его последователями, строилось не на песке и основывалось, в том числе, на некоторых выводах волновой механики, которые были классическими по сути, но релятивистскими и совершенно неожиданными по форме. Новый пример такого типа проанализирован в этой статье далее, но прежде обратимся к истории рассматриваемой научной проблемы.

Релятивизм и инвариантность. Рассмотрим две системы координат, имеющие параллельные оси: неподвижную $Oxyz$ и движущуюся $O'x'y'z'$ (рис.1). Вторая система имеет постоянную скорость $\vec{v} = v \cdot \vec{k}$, а координаты связаны равенствами

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - v \cdot t,$$

причём время для обеих систем принимается одним и тем же: $t' = t$. Тогда скорости \vec{u}, \vec{u}' и ускорения

\vec{a}, \vec{a}' оказываются связанными известными соотношениями

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{a}' = \vec{a}.$$

В современной физике приведенную систему соотношений для координат

нат, скоростей и ускорений называют *преобразованием Галилея* [1], это преобразование связывает параметры движения в инерциальных системах отсчёта, движущихся с малой относительной скоростью $v/c \ll 1$, и было положено в основу классической механики, разработанной *Ньютоном* и его последователями. Но применительно к электродинамике, описываемой *уравнениями Максвелла*, соотношения Галилея были признаны неудовлетворительным по следующим причинам:

- при переходе к системе, движущейся вместе с зарядами, происходит существенное усложнение уравнений для потенциалов;
- условие $v/c \ll 1$ не выполняется для многих электродинамических процессов, происходящих в лаборатории или в окружающей среде;
- преобразование Галилея противоречит опытам Майкельсона и Морли.

Чтобы исправить положение, Лоренц предложил своё преобразование координат, времени, массы и напряжённости электромагнитного поля, которое впоследствии было названо *преобразованием Лоренца*.

Пусть $v/c = \beta < 1$ и $1/\sqrt{1-\beta^2} = \gamma > 1$. Тогда при переходе от (условно) неподвижной системы $Oxyz$ к движущейся системе $O'x'y'z'$ (рис.1) принимаются следующие соотношения:

- для координат и времени: $x' = x, y' = y, z' = \gamma(z - v \cdot t), t' = \gamma(t - \beta z/c)$;
- для инерционной массы: $m' = \gamma \cdot m$;
- для напряжённости электрического и магнитного полей:

$$E'_x = \gamma \cdot (E_x - \beta \cdot H_y), \quad E'_y = \gamma \cdot (E_y + \beta \cdot H_x), \quad E'_z = E_z, \\ H'_x = \gamma \cdot (H_x + \beta \cdot E_y), \quad H'_y = \gamma \cdot (H_y - \beta \cdot E_x), \quad H'_z = H_z;$$

- величина и плотность заряда считается неизменной: $q' = q, \lambda' = \lambda$;
- плотность тока J' пересчитывается пропорционально изменению скорости:

$$u'_x = u_x / (\gamma (1 - \beta u_z / c)), \quad u'_y = u_y / (\gamma (1 - \beta u_z / c)), \quad u'_z = (u_x - v) / (1 - \beta \cdot u_z / c).$$

Лоренц доказал, что предложенная им система замен сохраняет неизменной форму уравнений динамики движущихся зарядов, а именно

- уравнения Максвелла принимают вид (здесь $\nabla' = \{ \partial / \partial x', \partial / \partial y', \partial / \partial z' \}$):

$$\begin{cases} \nabla' \times \vec{E}' = -c^{-1} \partial \vec{H}' / \partial t' & , & \nabla' \cdot \vec{E}' = 4\pi \cdot \lambda' & , \\ \nabla' \times \vec{H}' = c^{-1} \partial \vec{E}' / \partial t' + (4\pi / c) \vec{J}' & , & \nabla' \cdot \vec{H}' = 0 & , \end{cases}$$

- уравнения для потенциалов остаются волновыми:

$$c^{-2} \partial^2 \Phi' / \partial t'^2 = \nabla'^2 \Phi' + 4\pi \cdot \lambda' & , \quad c^{-2} \partial^2 \vec{A}' / \partial t'^2 = \nabla'^2 \vec{A}' + (4\pi / c) \cdot \vec{J}' & ,$$

- связь потенциалов и напряжённости описывается формулами

$$\vec{E}' = -\nabla' \Phi' - c^{-1} \partial \vec{A}' / \partial t' & \quad \text{и} & \quad \vec{H}' = \nabla' \times \vec{A}' & ,$$

- сила Лоренца, действующая на заряд q' , движущийся со скоростью \vec{v}' ,

описывается формулой $\vec{F}' = q' \cdot (\vec{E}' + (\vec{v}'/c) \times \vec{H}')$.

Следует особо подчеркнуть, что, по твёрдому убеждению Лоренца, реального сжатия пространства в направлении движения заряда и фактического замедления времени не происходит; реально «сжимается» только лишь объём аналитической работы, необходимый для визуализации электромагнитного поля. Лоренц смотрел на своё преобразование как на удобный и достаточно заурядный приём решения соответствующих уравнений и никогда не фетишизировал используемые в нём замены. Но при дальнейшем развитии физики, происходящем в 20-м столетии, это преобразование ждала другая судьба.

Напомним, что квантовая физика в первые годы развития не имела наглядных физических моделей и использовала формальные критерии для отбора математических моделей, пригодных для решения поставленных задач. Одним из критериев служил принцип соответствия уравнений преобразованию Лоренца. При этом физики исходили из следующего здравого рассуждения: если объекты квантовой физики являются волнами переноса, а перенос описывается волновым уравнением, которое «выдерживает» преобразование Лоренца, то и уравнения, описывающие объект, должны «выдерживать» это преобразование. Иначе при изменении скорости объект неминуемо распадётся.

Известно, что уравнения, которые не изменяют своей формы в результате преобразования Лоренца, называют *релятивистски инвариантными*. К таким, в частности, относятся *уравнения Максвелла, Гельмгольца, Клейна – Гордона*, а также некоторые системы уравнений в частных производных, например, *уравнения Дирака*, описывающие электроны, и *уравнения общей теории относительности*, разработанной Эйнштейном. В то же время *уравнение Шредингера* не является инвариантным относительно преобразования Лоренца, и это закономерно – оно описывает движение внешнего электрона, имеющего малые относительные скорости $\beta = v/c < 1/137$, и здесь допустимо использовать классическое преобразование Галилея.

При создании теории относительности Эйнштейн постулировал несколько физических принципов, например, равенство гравитационной и инерционной массы, которое неукоснительно выполняется на практике. Один из принципов провозгласил равенство скоростей света c для всех инерционных систем отсчёта и имел прямое отношение к преобразованию Лоренца.

Тут следует напомнить, что Лоренц нашёл не одно, а множество преобразований, зависящих от некоторого параметра k и сохраняющих инвариантность указанных выше уравнений, но с одной оговоркой: эти преобразования содержали также и формулу для пересчёта величины скорости света вида

$$c' = f(\beta, k) \cdot c.$$

Изменяя параметр k , можно получить не только разные значения скорости света, но и иные, чем указано в [1], изменения масштабов для координат и времени; например, можно было оставить неизменным «ход времени», а вместе с «продольным» растяжением осей использовать и «поперечное». С

формальной точки зрения все такие преобразования одинаково полезны, поскольку они не влияли на конечный результат. Но, проанализировав результаты опыта Майкельсона – Морли (смотри ниже), *Эйнштейн счёл необходимым из всех возможных преобразований Лоренца рекомендовать использовать то, которое не изменяет значения скорости света.*

В этом случае преобразование Лоренца получало дополнительную идейную нагрузку и соответствовало новым, на то время, представлениям о свойствах физического пространственно – временного континуума.

Известные опыты *Майкельсона* и *Морли* проводились в 1887-м году, а затем повторялись многими исследователями. К тому времени, на основе изучения колебательных явлений в разных сферах, было выяснено, что:

- скорость волны продольных колебаний зависит от скорости источника,
- скорость волны поперечных колебаний не зависит от скорости источника.

Кроме того, считалось, что свет – это короткие электромагнитные волны, то есть поперечные колебания эфира; следовательно, абсолютная скорость волны должна здесь равняться относительной скорости (скорости света c).

Схема проведения опытов хорошо известна: в крестообразном интерферометре Майкельсона (рис. 2) монохроматический луч света расщеплялся полупрозрачным зеркалом на два потока (параллельный и перпендикулярный) и направлялся по путям одинаковой длины L ; после отражения от зеркал он собирался тем же полупрозрачным зеркалом и в зрительной трубе наблюдался результат интерференции этих потоков.

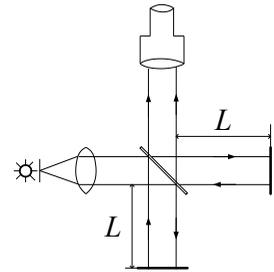


Рисунок 2 – Схема интерферометра.

Параллельный поток имел направление орбитальной скорости Земли \vec{v} , величина которой, как известно, приближённо равна 29 км/с . Считалось, что эфир неподвижен, а свет распространяется по нему с одинаковой скоростью $c \approx 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$, *не зависящей от скорости излучателя.* Экспериментаторы подсчитали, что скорость движения Земли приведёт к разной длине пути, проходимого светом, и эту разницу планировали зарегистрировать при помощи интерферометра.

Действительно, для параллельного луча света продолжительности T_1^{\parallel} и T_2^{\parallel} распространения в прямом и обратном направлениях удовлетворяют очевидным соотношениям

$$c \cdot T_1^{\parallel} = L + v \cdot T_1^{\parallel}, \quad c \cdot T_2^{\parallel} = L - v \cdot T_2^{\parallel}, \quad \text{откуда} \quad T_1^{\parallel} + T_2^{\parallel} = (2L \cdot c) / (c^2 - v^2).$$

Для луча, движущегося перпендикулярно, продолжительности T_1^{\perp} и T_2^{\perp} распространения в прямом и обратном направлениях одинаковы и находятся из условия

$$\sqrt{c^2 - v^2} \cdot T_{1,2}^\perp = L, \quad \text{откуда} \quad T_1^\perp + T_2^\perp = 2L / \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Следовательно,

$$(T_1^\perp + T_2^\perp) / (T_1^\parallel + T_2^\parallel) = \sqrt{1 - (v/c)^2} = 1/\gamma < 1,$$

что и создавало соответствующую разницу пройденных путей, которую было нетрудно зарегистрировать в эксперименте.

Однако, к удивлению экспериментаторов, *указанной разницы путей в эксперименте обнаружено не было*. Позже догадались, что абсолютная скорость движения Земли относительно эфира может иметь другую величину и направление. Поэтому этот прибор ориентировали в разных направлениях пространства, но результат не изменился.

После столь очевидного триумфа экспериментальной физики над её теоретическими моделями, построенными при использовании принципа относительности Галилея, а также законов классической механики Ньютона и электродинамики Максвелла, учёные начали отрабатывать версии, объяснявшие обнаружившийся парадокс. Одна из них, которая поначалу большинством физиков всерьёз не воспринималась, привела к созданию теории относительности Эйнштейна. Но имеет смысл напомнить о существовании менее радикальной версии.

Английский физик *Фитцджеральд* предположил (смотри [2]), что движущиеся твёрдые тела **реально** сокращают свои размеры в направлении движения, причём коэффициент сокращения k_\parallel определяется формулой

$$k_\parallel = 1/\gamma = \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

При этом он исходил из того, что в направлении движения электрическое поле каждого одиночного заряда ослабевает в $1/\gamma^2$ раз и это, согласно *закону Кулона*, приводит к уменьшению расстояния между зарядами кристаллической решётки в $1/\gamma$, то есть, в k_\parallel раз. Тогда, в результате преобразования Лоренца, длина прямого пути составляет

$$L^\parallel = \gamma \cdot (k_\parallel \cdot L) = \gamma \cdot ((1/\gamma) \cdot L) = L,$$

что и объясняет наблюдаемый парадокс.

Это была хорошая версия, но у неё быстро обнаружился изъян. В направлении, перпендикулярном движению, поле усиливается в γ раз, что, исходя из провозглашённого принципа, должно приводить к расширению твёрдых тел в этом направлении с некоторым коэффициентом k_\perp . Для согласования теории с экспериментом необходимо, чтобы

$$k_\parallel / k_\perp = 1/\gamma,$$

и получить эту пропорцию только лишь на основании закона Кулона не удаётся. Тем не менее, закономерности *фитцджеральдовой деформации тел* можно уточнить; поэтому, учитывая результаты моделирования экспоненциальных волн переноса (смотри далее), а также цитированное в [3] мнение

Дирака о значении отрицательных частот для новых теорий квантовой физики, отбрасывать эту версию, как заведомо несостоятельную, не следует.

О роли преобразования Лоренца для современных теорий глобальных полей (материального и информационного) рассказано в статьях [4, 5].

Постановка задачи. В работе [3] при использовании трёхмерной модели линейной теории упругости решена задача о распространении экспоненциальных волн переноса по прямому цилиндрическому стержню. Решения используют бегущие скалярные и векторные потенциалы, в том числе потенциалы Герца, связанные граничными условиями на боковой поверхности стержня. Полученные решения подтвердили, а в случае коротких волн – уточнили, результаты применения для этой же задачи классической теории тонких стержней, использующей гипотезу о равномерном деформировании сечения (рис.3).

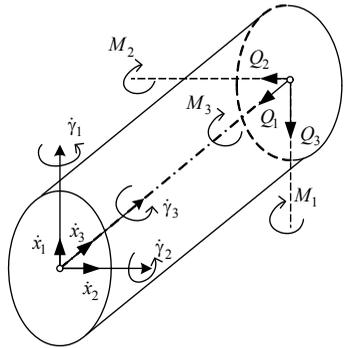


Рисунок 3 – Скорости смещения сечения стержня и действующие в нём силы.

Показано, что при упругих вращениях поперечных сечений стержня смещения среды \vec{u} в цилиндрических координатах описываются формулой

$$\vec{u} = A \cdot J_1(\beta \cdot r) \cdot \exp(i\omega t - i\lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi \quad (1)$$

и дисперсионным соотношением

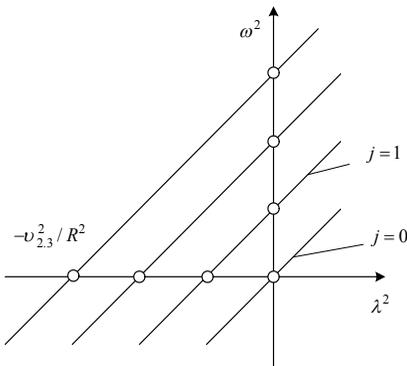
$$\lambda^2 - \omega^2 / a_{non}^2 = v_{2,j}^2 / R^2, \quad (2)$$

где A – амплитуда, λ, ω – волновое число и круговая частота, a_{non} – скорость распространения волны кругильной деформации, $v_{2,j}$ – j -й корень функции Бесселя $J_2(x)$,

$$\beta = \sqrt{\omega^2 / a_{non}^2 - \lambda^2}.$$

При условии $j=0$ имеем вырожденный случай $\beta_1 = 0$, который соответствует равномерному вращению сечения вокруг его оси, описываемому классической моделью стержня.

Рисунок 4 – Решения дисперсионного уравнения для равномерного ($j=0$) и зонального ($j>0$) вращения



На рис.4 этому вращению соответствует прямая линия, проходящая через начало координат. При $j=1$ получаем простейшее зональное вращение стержня (рис.5); на рис.4 ему отвечает смещённая прямая линия.

В первом и третьем квадранте решение (1) является ограниченным и описывает уединённую волну трансляции, распространяющуюся вдоль оси стержня со скоростью

$$v = \omega / \lambda .$$

Причём для третьего квадранта зависимость (1) целесообразно переписать в виде

$$\vec{u} = A \cdot J_1(\beta \cdot r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi, \quad (1 \text{ а})$$

где, следуя Дираку, положительное число ω называют отрицательной частотой, а положительное число λ – отрицательным волновым числом.

Волна (1 а) и без учёта трения оказывается затухающей по длине. Непосредственной целью данной работы является определение энергии этой экспоненциальной волны, после чего будет предпринята ещё одна попытка обоснования некоторых релятивистских эффектов квантовой волновой механики на основе известных законов классической механики.

Энергия экспоненциального фонона. Вернёмся к анализу результатов, представленных на рис.4. Наклонная прямая, проходящая через начало координат, отвечает уравнению

$$a_{non}^{-2} \partial^2 \psi / \partial t^2 = \partial^2 \psi / \partial z^2 ,$$

это уравнение является волновым; в квантовой механике такое уравнение описывает фотоны, а в волновой механике упругой среды волны, аналогичные фотонам, называют *фононами*.

Как видно, фонон существует во всём диапазоне частот (в том числе, и при отрицательных частотах, где соответствующая волна переноса является экспоненциальной). Скорость фонона не зависит от частоты и длины волны.

Предположим, что функция ψ экспоненциального фонона определяет угол γ_3 поворота его сечения и описывается формулой

$$\psi(z, t) = \psi_0 \cdot \exp(\omega t - \lambda z), \quad (3)$$

где амплитуда ψ_0 не зависит от его частоты, и, как для любого фонона,

$$\omega / \lambda = a_{non} . \quad (4)$$

Запишем уравнения крутильных колебаний (смотри статью [6])

$$\left\{ \rho I_3 \cdot \partial^2 \gamma_3 / \partial t^2 = \partial M_3 / \partial z , \quad c \gamma_3 \cdot M_3 = \partial \gamma_3 / \partial z \right. \quad (5)$$

в следующем виде

$$\left\{ \rho I_3 \cdot \partial \omega_3 / \partial t = \partial M_3 / \partial z , \quad c \gamma_3 \cdot \partial M_3 / \partial t = \partial \omega_3 / \partial z , \right.$$

где $\omega_3 = \partial \gamma_3 / \partial t$ – это угловая скорость вращения сечения, ρI_3 , $c \gamma_3$ – момент его инерции и коэффициент податливости при кручении.

Тогда

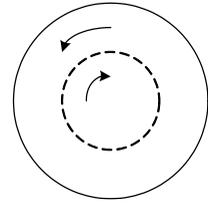


Рисунок 5 –
Зональное кручение сечения

$$\rho I_3 \cdot \omega_3 \cdot \partial \omega_3 / \partial t + c \gamma_3 \cdot M_3 \cdot \partial M_3 / \partial t = \omega_3 \cdot \partial M_3 / \partial z + M_3 \cdot \partial \omega_3 / \partial z ,$$

то есть,

$$(\partial / \partial t)(0.5 \rho I_3 \omega_3^2 + 0.5 c \gamma_3 M_3^2) = \partial(\omega_3 M_3) / \partial z .$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$(\partial / \partial t) \int_{-\infty}^{\infty} (0.5 \rho I_3 \omega_3^2(z, t) + 0.5 c \gamma_3 M_3^2(z, t)) dz = \omega_3(z, t) M_3(z, t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0 .$$

Следовательно, величина

$$E_n = \int_{-\infty}^{\infty} (0.5 \rho I_3 \omega_3^2(z, t) + 0.5 c \gamma_3 M_3^2(z, t)) dz$$

не изменяется с течением времени и определяет полную механическую энергию фонона, а интеграл от первого или второго слагаемого – соответственно, кинетическую и потенциальную энергии.

Покажем, что у фонона кинетическая и потенциальная энергии одинаковы. Действительно, в силу равенств (4) и (5)

$$c \gamma_3 \cdot M_3 = \partial \gamma_3 / \partial z = -\lambda \cdot \gamma_3 = -\lambda \cdot \omega_3 / \omega = -a_{non}^{-1} \cdot \omega_3$$

и

$$c \gamma_3 \cdot M_3^2 / (\rho I_3 \omega_3^2) = c \gamma_3^{-1} \cdot a_{non}^{-2} \cdot \omega_3^2 / (\rho I_3 \omega_3^2) = a_{non}^{-2} / (\rho I_3 \cdot c \gamma_3) = 1 .$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_n &= \rho I_3 \int_{-\infty}^{\infty} \omega_3^2(z, t) dz = \rho I_3 \int_0^{\infty} (\partial \psi(0, z) / \partial t)^2 dz = \rho I_3 \cdot \omega^2 \psi_0^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\lambda z} dz = \\ &= \rho I_3 \cdot \omega^2 \psi_0^2 / (2\lambda) = \rho I_3 \cdot 0.5 \cdot \psi_0^2 \cdot a_{non} \cdot \omega . \end{aligned}$$

Обозначим

$$0.5 \cdot \rho I_3 \cdot \psi_0^2 \cdot a_{non} = \hbar ,$$

где величину \hbar будем называть *константой Планка для стержня*.

В результате мы получили известное из квантовой механики соотношение между энергией фонона E и его круговой отрицательной частотой ω :

$$E = \hbar \cdot \omega .$$

Преобразование Лоренца для волн переноса в стержне. Ещё раз вернёмся к графикам рис.4 и рассмотрим наклонную прямую, не проходящую через начало координат. Она отвечает уравнению

$$a_{non}^{-2} \partial^2 \psi / \partial t^2 = \partial^2 \psi / \partial z^2 - \omega_0^2 \cdot a_{non}^{-2} ,$$

где частота ω_0 соответствует точке пересечения графика с осью ординат.

Это уравнение Клейна – Гордона, которое в квантовой механике описывает движение не релятивистской частицы, имеющей массу покоя (например, уединённого электрона или протона). В волновой механике устоявшихся названий для аналогичных объектов нет, поэтому будем называть её *Частицей*.

Отрицательная частота ω и отрицательное волновое число λ Частицы связаны очевидным соотношением

$$a_{non}^{-2} \omega^2 = \lambda^2 - \omega_0^2 \cdot a_{non}^{-2},$$

в третьей четверти координатной плоскости $O\lambda^2\omega^2$ она является ограниченной волной переноса. Скорость этой волны определяется формулами

$$v = \omega / \lambda = a_{non} \cdot \omega / \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} = a_{non} \cdot \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2 \cdot a_{non}^{-2}} / \lambda.$$

Следовательно, для экспоненциальной Частицы выполнено неравенство $v < a_{non}$, и только лишь при условии $\omega, \lambda \rightarrow \infty$ имеем в пределе $v \rightarrow a_{non}$.

Из полученных соотношений несложно вывести и такое:

$$(v/a_{non})^2 (\omega^2 + \omega_0^2) = \omega^2, \quad \text{откуда} \quad \omega = (v/a_{non}) \cdot \omega_0 / \sqrt{1 - (v/a_{non})^2}$$

и (здесь обозначено $\lambda_0 = \omega_0 / a_{non}$)

$$\lambda = \lambda_0 / \sqrt{1 - (v/a_{non})^2}. \quad (6)$$

В классическом пределе имеем $\omega \approx 0$, $v \approx 0$, и величина этой скорости определяется формулой

$$v \approx a_{non} \cdot \omega / \omega_0.$$

Вычислим кинетическую энергию Частицы. Учтём, что тангенциальное смещение материала стержня описывается формулой

$$\vec{u}(r, z, t) = (\psi_0 / \beta) \cdot J_1(\beta \cdot r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi,$$

где $\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2 / a_{non}^2}$, $\omega t - \lambda z \leq 0$, $\beta \cdot R = v_{2,j}$,

ψ_0 – константа, определяемая прочностными свойствами материала при ограничении напряжения кручения *def* $\vec{a}_{r\varphi}$.

Следовательно, линейная скорость движения среды равняется

$$\vec{v}(r, z, t) = (\psi_0 / \beta_1) \cdot \omega \cdot J_1(\beta_1 r) \cdot \exp(\omega t - \lambda z) \cdot \vec{i}_\varphi,$$

а кинетическая энергия всей волны представляется следующим интегралом:

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^\infty dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R 0.5 \rho \cdot v^2(r, z, t) r dr = \pi \rho \omega^2 \psi_0^2 \beta_1^{-2} \int_0^R 0.5 J_1^2(\beta_1 r) r dr \cdot \int_0^\infty e^{-2\lambda z} dz = \\ &= A_j \cdot \omega^2 / (2\lambda) = 0.5 \cdot A_j \cdot v \cdot \omega = 0.5 \cdot [A_j \cdot \omega_0 / a_{non}] \cdot [1 / \sqrt{1 - (v/a_{non})^2}] \cdot v^2, \end{aligned}$$

где $A_j = 0.5 \pi \rho \cdot \psi_0^2 \beta^{-2} \cdot \int_0^R J_1^2(\beta r) r dr = 0.5 \pi R^4 \rho \cdot \psi_0^2 \cdot v_{2,j}^{-4} \cdot \int_0^{v_{2,j}} J_1^2(r) r dr$

– это константа, имеющая физическую размерность $кг \cdot м$.

Сравнивая результат с известной формулой для кинетической энергии

$$E_k = 0.5 \cdot m \cdot v^2,$$

приходим к выводу, что *Частица обладает массой*

$$m = \frac{m_{0,j}}{\sqrt{1 - (v/a_{non})^2}}, \quad (7)$$

где величина $m_{0,j} = A \cdot \omega_0 / a_{non} = 0.5\pi R^3 \cdot \rho \cdot \psi_0^2 \cdot v_{2,j}^{-3} \cdot \int_0^{v_{2,j}} J_1^2(r) r dr$

определяет её *массу покоя*.

Соотношения (6), (7) отвечают преобразованию Лоренца и подтверждают правоту гипотезы Фитцджеральда о сокращении размеров движущихся тел, а также теории относительности Эйнштейна. Будем под термином *эффективная длина Частицы* понимать длину участка, где сконцентрировано 90 % энергии. Оказывается, что с увеличением скорости *эффективная длина Частицы реально уменьшается, а масса – реально увеличивается*.

Заметим, что при выводе этих соотношений мы использовали *условие квантования амплитуды волны* вида $\psi_0 = const$; в нелинейной теории упругости можно найти много веских причин, в силу которых данное условие квантования следует считать не только приемлемым, но и единственно возможным. Так, например, в работе [7] аналогичное условие получено для винтовых стержней. Если прямой цилиндрический стержень был использован для навивки пружины, имеющей очень большой индекс $z \gg 10$, то возникающая при этом малая относительная кривизна не оказывает существенного влияния на остальные характеристики коротких экспоненциальных волн переноса (обоснование дано в [3]), но ограничивает амплитуду волны.

Осталось также заметить, что на рис.4 имеется много параллельных линий, и каждая из них соответствует своей Частице, имеющей определённую массу покоя. Но вот что становится особенно любопытным: при условии $x > 5$ выполняется приближённое равенство (смотри рис.6)

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x J_1^2(r) r dr \approx \frac{1}{\pi},$$

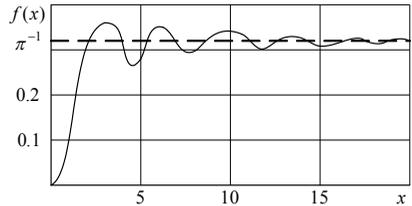


Рисунок 6 – Асимптотическое поведение функции.

поэтому

$$m_{0,j} \approx 0.25 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \rho \cdot \psi_0^2 \cdot v_{2,j}^{-2}.$$

Кроме того, $v_{2,j} \approx 5.1 \cdot j$, и, в результате, $m_{0,j} \sim 1/j^2$.

Масса Частицы пропорциональна энергии, следовательно, *кинетические энергии Частиц, отвечающих разным номерам j, описываются той же закономерностью, что и энергии электронов на разных оболочках атома [1]*.

Фазовая и групповая скорость волны. Гармоническая волна переноса (1), отвечающая первой четверти дисперсионной диаграммы (смотри рис.4), имеет фазовую скорость, превышающую скорость звука a_{non} :

$$v_f = \omega / \lambda = a_{non} \cdot \omega / \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} > a_{non} ,$$

и другие, чем описано выше, зависимости для динамических параметров. В релятивистской квантовой физике, где также решают уравнение Клейна – Гордона, чтобы исправить возникающее противоречие между теорией и практикой вводят понятие *групповой скорости волны переноса* [8]

$$v = c^2 / v_f , \quad (8)$$

актуальное для так называемого *волнового пакета*. Аналогичная формула для волн кручения стержня имеет вид

$$v = a_{non}^2 / v_f$$

но указать её физический смысл затруднительно. Преимущество экспоненциальных волн переноса заключается в том, что здесь можно ограничиться анализом уединённых волн и нет необходимости искать физический смысл для волнового пакета. Тем более что если изучаемая волна не описывает, например, установившееся состояние электронной оболочки атома, а распространяется в свободном пространстве, то существование волнового пакета, отвечающего соотношению (8), представляется сомнительным.

Выводы. Получены формулы для расчёта кинетической энергии, которую переносят экспоненциальные волны крутильной деформации стержня, имеющие постоянную (квантованную) амплитуду и определённую форму деформации сечения. Показано, что частота, волновое число и энергия волны при изменении скорости переноса подчиняются релятивистскому преобразованию Лоренца, а её реальная длина укорачивается в соответствии с гипотезой Фитцджеральда. При изменении формы деформации сечения энергия волны изменяется дискретно в соответствии с квантовым постулатом Нильса Бора.

Список литературы: 1. *Х. Кухлинг.* Справочник по физике.– М.: Наука, 1982. 2. *Паули В.* Теория относительности. – М.: Наука, 1983. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А., Деряченко А.И.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 4. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.14-32. 5. *Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л.* Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера // там же. – С.55-68. 6. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 7. *Григорьев А.А., Деряченко А.И.* Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2011. – № 13. – С.39-54. 8. *Э. Вихман.* Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. – 415 с.

Поступила в редколлегию 07.09.2011

Ю.В. ГАНДЕЛЬ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНУ им. В.Н. Каразина,
Харьков;

С.В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИФРАКЦИИ ТЕ-ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Побудована математична модель розсіяння ТЕ-хвиль на дифракційній решітці, розташованій в поперечному перерізі плоско паралельного хвилеводу, на базі гиперсингулярного інтегрального рівняння, відповідного крайовій задачі для рівняння Гельмгольца. Дискретизація проведена чисельним методом дискретних особливостей, з використанням квадратурних формул інтерполяційного типу.

Построена математическая модель рассеяния ТЕ-волн на дифракционной решетке, расположенной в поперечном сечении плоскопараллельного волновода, на базе граничного гиперсингулярного интегрального уравнения, соответствующего краевой задаче для уравнения Гельмгольца. Дискретизация проведена численным методом дискретных особенностей, с использованием квадратурных формул интерполяционного типа.

A mathematical model of TE-wave radiation on diffraction grating placed in a transverse cross-section of the parallel-plate waveguide is built on the basis of boundary hypersingular integral equation, corresponding to the boundary-value problem for the Helmholtz equation. Discretization is carried out with the numerical method of discrete peculiarities, using quadrature formulae of interpolation type.

Введение. В работе [1] было выведено граничное сингулярное интегральное уравнение краевой задачи для уравнения *Гельмгольца* в случае рассеяния плоской монохроматической волны на дифракционной решетке, лежащей в сечении плоского волновода. А в работах [2-3] показано, что численный метод, использующий гиперсингулярные интегральные уравнения, в отличие от метода, основанного на сингулярных интегральных уравнениях, дает выигрыш в скорости вычисления результатов при условии достижения одинаковой точности. В связи с этим было решено провести построение математической модели для задачи дифракции в плоскопараллельном волноводе, в сечении которого помещена дифракционная решетка, смотри геометрию задачи, использующей гиперсингулярное интегральное уравнение.

В статье краевые задачи для уравнений *Максвелла* и *Гельмгольца*, сведены к гиперсингулярным интегральным уравнениям. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели для приближенного (с контролируемой точностью) решения рассмотренных краевых задач. Эти задачи служат математическими моделями электродинамических структур и нашли широкое применение при проектировании и создании волноводов с неоднородностями и фильтров на их основе.

Постановка задачи. В рассматриваемых задачах граница – параллельные идеально проводящие плоскости, между плоскостями – дифракционная

решетка, содержащая одну или несколько продольных неограниченных, бесконечно тонких лент. Выберем декартовую систему координат так, чтобы дифракционная решетка лежала в плоскости Oyz . На рисунке представлено сечение волновода плоскостью, перпендикулярной к дифракционной решетке.

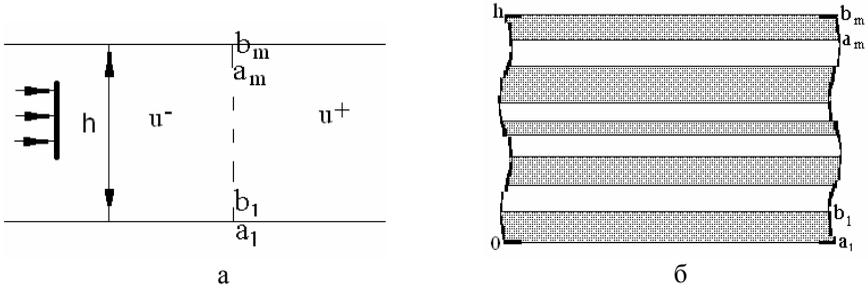


Рисунок – Сечения волновода с дифракционной решеткой:
 (а) плоскостью, перпендикулярной к дифракционной решетке;
 (б) плоскостью, содержащей дифракционную решетку.

Введем обозначения: $L = \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i)$ – это сужение металлических лент дифракционной решетки на плоскость сечения, а $CL = [0, h] \setminus L$ – сужение щели дифракционной решетки на ту же плоскость.

Задача дифракции ТЕ-волны в 2-D случае сводится ко второй краевой задаче для уравнения Гельмгольца.

Искомая функция $u(x, z)$ (то есть искомое «поле») удовлетворяет следующим условиям:

- уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u(x, z) + k^2 u(x, z) = 0, \tag{1}$$

в области $\{(x, z) | x \in (-\infty, \infty), z \in (0, h)\} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \right)$;

- граничному условию:

$$\left. \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = - \left. \frac{\partial u_0(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad z \in L, \tag{2}$$

- условию излучения Зоммерфельда:

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial x} - iku(x, z) = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow \infty, \tag{3}$$

- условию Майкснера на ребре:

$$\int_{\Omega} [k^2 |u|^2 + |\nabla u|^2] ds < \infty, \quad (4)$$

для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$.

В работе рассматриваются стационарные задачи, зависимость полей от времени дается множителем $e^{-i\omega t}$, $u_0(x, z) = e^{-ikx}$, $k = \omega/c$, c – скорость света в вакууме.

Сужения искомой функции $u(x, z)$ на «левую» $x < 0$ и «правую» $x > 0$ полуплоскость, обозначим соответственно $u^-(x, z)$ и $u^+(x, z)$. Если функции $u^-(x, z)$, $x < 0$ и $u^+(x, z)$ $x > 0$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены «условия сопряжения»:

$$u^+(x, z)|_{x=0} = u^-(x, z)|_{x=0}, \quad z \in CL, \quad (5)$$

и

$$\frac{\partial u^+(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u^-(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad z \in CL, \quad (6)$$

то существует функция $u(x, z)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца во всем пространстве без объединения лент $\bigcup_{q=1}^m [a_q, b_q]$, причем $u(x, z) = u^-(x, z)$, $x < 0$ и $u(x, z) = u^+(x, z)$, $x > 0$.

Парное сумматорное и гиперсингулярное интегральные уравнения.

Представления Фурье для функций $u^-(x, z)$, $x < 0$ и $u^+(x, z)$, $x > 0$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца, ищем в виде рядов (сходимость которых понимается в смысле обобщенных функций):

$$u^+ = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \cos(\lambda_n z) e^{-\Gamma_n x},$$

$$u^- = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- \cos(\lambda_n z) e^{\Gamma_n x};$$

здесь $\lambda_n = \frac{\pi n}{h}$, $\Gamma_m = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 - k^2}$, а ветвь радикала выбирается так, чтобы

$\text{Re } \Gamma_n > 0$ при $n > \frac{kh}{\pi}$ и $\text{Im } \Gamma_n < 0$ при $n < \frac{kh}{\pi}$, h – расстояние между плоскостями. Тогда условия (5), (6) принимают вид

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^+ \cos(\lambda_n z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^- \cos(\lambda_n z), & z \in CL, \\ \sum_{n=0}^{\infty} -\Gamma_n C_n^+ \cos(\lambda_n z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n C_n^- \cos(\lambda_n z), & z \in CL. \end{cases} \quad (7)$$

Из второго условия сопряжения (6) и граничного условия (2) следует, что:

$$-C_n^+ = C_n^- \equiv C_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Действуя так же, как в [2], и используя первое соотношение системы (7) и граничное условие (2), получаем парное сумматорное уравнение:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n C_n \cos \lambda_n z = -\frac{\partial u_0}{\partial x}, & z \in L, \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \lambda_n z = 0, & z \in CL. \end{cases}, \quad (8)$$

При этом Γ_n можно представить в виде:

$$\Gamma_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 - k^2} = \frac{\pi n}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{kh}{\pi n}\right)^2} = B_1 n + \frac{B_2}{n} + K_n,$$

где B_1, B_2 – известные константы, $K_n = \Gamma_n - B_1 n - \frac{B_2}{n}$.

Перепишем первое уравнение в системе (8), используя представление для Γ_n :

$$\begin{aligned} C_0 \Gamma_0 + B_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n |n| \cos \lambda_n z + B_2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{1}{|n|} \cos \lambda_n z + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} K_n C_n \cos \lambda_n z = -\frac{\partial u_0(0, z)}{\partial x}, \quad z \in L. \end{aligned} \quad (9)$$

Введем новую неизвестную функцию:

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \lambda_n z; \quad v(z) = 0, \quad z \in CL. \quad (10)$$

через значения которой выражаются все искомые коэффициенты C_n :

$$C_0 = \frac{1}{h} \int_0^h v(\zeta) d\zeta; \quad C_n = \frac{1}{h} \int_L v(\zeta) \cos \lambda_n \zeta d\zeta, \quad n \in \mathbb{N}$$

Параметрические представления гиперсингулярного и логарифмического интегральных операторов на интервале $(0, h)$ получим, используя соответствующие представления интегралов [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \lambda_n \zeta, \\ \frac{1}{2h} a.f.p. \int_0^h \frac{v(\zeta) d\zeta}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} + \frac{1}{2h} \int_0^h \frac{v(\zeta) d\zeta}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2}} = - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \cos \lambda_n z, \end{array} \right. \quad (11)$$

здесь интеграл понимается в смысле *конечной части по Адамару* (*a.f.p.*),

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \lambda_n \zeta, \\ \frac{1}{h} \int_0^h v(\zeta) \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2} \right| d\zeta + \\ + \frac{1}{h} \int_0^h v(\zeta) \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2} \right| d\zeta = -2C_0 \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n} \cos \lambda_n z. \end{array} \right. \quad (12)$$

Применяя параметрические представления (11-12) к уравнению (9) и учитывая свойство (10), получаем гиперсингулярное интегральное уравнение на системе отрезков в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{B_1}{2h} a.f.p. \int_0^h \frac{v(\zeta) d\zeta}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} - \frac{B_1}{2h} \int_0^h \frac{v(\zeta) d\zeta}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2}} - \\ & - \frac{B_2}{h} \int_L v(\zeta) \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2} \right| d\zeta - \frac{B_2}{h} \int_L v(\zeta) \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2} \right| d\zeta - \\ & - \frac{B_2 \ln 2}{h} \int_L v(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2h} \int_L K(\zeta, z) v(\zeta) d\zeta + \frac{\Gamma_0}{2h} \int_L v(\zeta) d\zeta = f(z) \quad , \quad (13) \end{aligned}$$

где $K(\theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n \zeta)$; $f(z) = -\partial_x u_0(0, z)$.

Представим подынтегральную функцию для первого интеграла уравнения (13) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} = \frac{2}{\lambda_1^2 (\zeta - z)^2} + \left[\frac{1}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} - \frac{2}{\lambda_1^2 (\zeta - z)^2} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda_1 \frac{\zeta - z}{2} - k\pi \right)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

а во втором интеграле этого уравнения «ядро» преобразуем так:

$$\ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2} \right| = \ln \left| \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2} \right| + \ln \left| \frac{\sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}}{\lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} \right|. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13), перепишем уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{B_1}{h\lambda_1^2} * a.f.p. \int_L \frac{v(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \frac{B_2}{h} \int_L v(\zeta) \ln |\zeta - z| d\zeta + \\ & + \left[-\frac{B_1}{2h} \int_L v(\xi) \left\{ \frac{1}{2\sin^2 \lambda_1 \frac{\xi - z}{2}} - \frac{2}{\lambda_1^2 (\xi - z)^2} \right\} d\xi - \frac{B_2}{h} \int_L v(\zeta) \ln \left| \frac{\sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}}{\lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} \right| d\zeta - \right. \\ & \left. - \frac{B_2 \ln \lambda_1}{h} \int_L v(\zeta) d\zeta - \frac{B_1}{2h} \int_L \frac{v(\zeta) d\zeta}{2\sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2}} - \frac{B_2}{h} \int_L v(\zeta) \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2} \right| d\zeta + \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma_0}{2h} \int_L v(\zeta) d\zeta + \frac{1}{h} \int_L K(\zeta, z) v(\zeta) d\zeta \right] = f(z). \end{aligned}$$

Условие Майкснера на ребре (4) будет выполнено, если сужение функции $v(\zeta)$ на интервал (a_q, b_q) представить в таком виде:

$$v(\zeta)|_{(a_q, b_q)} = w_q(\zeta) \sqrt{(b_q - \zeta)(\zeta - a_q)}, \quad a_q < \zeta < b_q.$$

Таким образом получим сумму интегралов по каждому интервалу (a_q, b_q) :

$$\begin{aligned} & -\frac{B_1}{h\lambda_1^2} \sum_{q=1}^m a.f.p. \int_{a_q}^{b_q} \frac{w_q(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \sqrt{(b_q - \zeta)(\zeta - a_q)} d\zeta - \\ & - \frac{B_2}{h} \sum_{q=1}^m \int_{a_q}^{b_q} w_q(\zeta) \ln |\zeta - z| \sqrt{(b_q - \zeta)(\zeta - a_q)} d\zeta + \\ & + \frac{1}{h} \sum_{q=1}^m \int_{a_q}^{b_q} w_q(\zeta) G(\zeta, z) \sqrt{(b_q - \zeta)(\zeta - a_q)} d\zeta = f(z), \quad z \in L. \quad (16) \end{aligned}$$

$$\text{где } G(\zeta, z) = -\frac{B_1}{2} \left\{ \frac{1}{2\sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} - \frac{2}{\lambda_1^2 (\zeta - z)^2} \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -B_2 \ln \left| \frac{\sin \lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}}{\lambda_1 \frac{\zeta - z}{2}} \right| - B_2 \ln \lambda_1 - \frac{B_1}{2} \frac{1}{2 \sin^2 \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2}} - \\
& - B_2 \ln \left| \sin \lambda_1 \frac{\zeta + z}{2} \right| + \frac{\Gamma_0}{2} + K(\zeta, z).
\end{aligned}$$

Сделав замену переменных в (16), переходим от интервала (a_q, b_q) к стандартному интервалу $(-1, 1)$:

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (a_q, b_q) : t \mapsto \zeta = \frac{b_q - a_q}{2} t + \frac{b_q + a_q}{2},$$

$$w_q(\zeta) \Big|_{(a_q, b_q)} \equiv \sqrt{1-t^2} \gamma_q(t).$$

И гиперсингулярное интегральное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}
& -\frac{B_1}{h \lambda_1^2} \left(a.f.p. \int_{-1}^1 \frac{\gamma_p(t)}{(t-t_0)^2} \sqrt{1-t^2} dt \right) - \frac{B_2}{h} \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 \gamma_p(t) \ln |t-t_0| \sqrt{1-t^2} dt + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^m \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 G_{pq}(t_0, t) \gamma_q(t) \sqrt{1-t^2} dt = f_p(t_0), \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\text{где } G_{pq}(t_0, t) = \begin{cases} G(g_p(t_0), g_p(t)) - B_2 \ln \frac{b_p - a_p}{2}, & p = q, \\ G(g_p(t_0), g_q(t)) - \frac{B_1}{\lambda_1^2 (g_p(t_0) - g_q(t))^2} - \\ - B_2 \ln |g_p(t_0) - g_q(t)|, & p \neq q, \end{cases}$$

$$f_p(t_0) = \frac{2}{b_p - a_p} f(g_p(t_0)).$$

Дискретная математическая модель. Для дискретизации системы интегральных уравнений (14) введем в рассмотрение неизвестную функцию $\gamma_p^{n_p-2}(t)$ – полином степени $n_p - 2$.

Также заменим гладкие ядра уравнений их интерполяционными полиномами по каждой из переменных с узлами $t_{oj}^{n_p}$, $j = 1, \dots, n_p - 2$ – нулями полинома Чебышева II рода $U_{n_p-2}(t_0)$.

Точные квадратурные формулы для дискретизации интегральных операторов с весовой функцией $\sqrt{1-t^2}$ имеют вид [5]:

- интегральный оператор с гладким ядром

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 P_{n-2}[K(t_{0j}^{n_p}, t)] \gamma_q^{n_q-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt \equiv \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q-1} (1-(t_{0k}^{n_q})^2) K(t_{0j}^{n_p}, t_{0k}^{n_q}) \gamma_q^{n_q-2}(t_{0k}^{n_q}),$$

- интегральный оператор с логарифмическим ядром

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln |t_{0j}^{n_q} - t| \gamma_q^{n_q-2}(t) \sqrt{1-t^2} dt \equiv \\ & \equiv -\frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q-1} \gamma_q^{n_q-2}(t_{0k}^{n_q}) (1-(t_{0k}^{n_q})^2) \left(\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n_q-1} \frac{1}{r} T_r(t_{0k}^{n_q}) T_r(t_{0j}^{n_q}) + \frac{(-1)^k T_{n_q}(t_{0j}^{n_q})}{2n_q} \right), \end{aligned}$$

- гиперсингулярный интегральный оператор

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_q^{n_q-2}(t)}{(t_{0j}^{n_q} - t)^2} \sqrt{1-t^2} dt \equiv \frac{1}{n_q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_q-1} \gamma_q^{n_q-2}(t_{0k}^{n_q}) (1-(t_{0k}^{n_q})^2) \frac{1-(-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{n_q} - t_{0k}^{n_q})^2} - \frac{n_q}{2} \gamma_q^{n_q-2}(t_{0j}^{n_q}),$$

где $P_{n-2}[*]$ – полином степени $n-2$ и квадратурные формулы с узлами

$t_{0j}^n = \cos \frac{j\pi}{n}$ и $t_{0k}^n = \cos \frac{k\pi}{n}$ (нулями полиномов Чебышева II рода [5]).

Применяя квадратурные формулы интерполяционного типа к гиперсингулярному интегральному уравнению (17), приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно «приближений» неизвестных функций $\gamma_p^{n_p-2}(t)$, $p = 0, \dots, m$:

$$\begin{aligned} & \frac{B_1 \pi}{\lambda_1^2 h n_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n_p-1} \gamma_p^{n_p-2}(t_{0k}^{n_p}) (1-(t_{0k}^{n_p})^2) \frac{1-(-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{n_p} - t_{0k}^{n_p})^2} - \frac{B_1 \pi}{\lambda_1^2 h} \frac{n_p}{2} \gamma_p^{n_p-2}(t_{0j}^{n_p}) - \\ & - \frac{B_2 \pi}{h n_p} \left(\frac{b_p - a_p}{2} \right)^2 \sum_{k=1}^{n_p-1} \gamma_p^{n_p-2}(t_{0k}^{n_p}) (1-(t_{0k}^{n_p})^2) * \\ & * \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n_p-1} \frac{1}{r} T_r(t_{0k}^{n_p}) T_r(t_{0j}^{n_p}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2n_p} \right] - \\ & - \sum_{q=1}^m \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \frac{\pi}{h n_q} \sum_{k=1}^{n_q-1} \gamma_q^{n_q-2}(t_{0k}^{n_q}) (1-(t_{0k}^{n_q})^2) G_{pq}(\mathcal{g}_p(t_{0j}^{n_p}), \mathcal{g}_q(t_{0k}^{n_q})) = \\ & = -f_p(t_{0j}^{n_p-2}) \quad j = 1, \dots, n_p - 1, \quad p = 0, \dots, m. \quad (18) \end{aligned}$$

При решении системы линейных алгебраических уравнений (18) мы находим значения неизвестных функций $\gamma_p^{n_p}(t)$ в узлах $t_{0j}^{n_p}$, а затем по полученным значениям, восстанавливаем $\gamma_p^{n_p-2}(t_{0k}^{n_p})$ как интерполяционный полином.

Выводы. В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевая задача для уравнения Гельмгольца с границей, образованной параллельными идеально проводящими плоскостями и размещённой между плоскостями дифракционной решеткой, содержащей одну или несколько продольных лент, сведена к гиперсингулярному интегральному уравнению на системе отрезков. На базе этого граничного интегрального уравнения построена дискретная математическая модель (18) для приближенного (с контролируемой точностью) решения указанной краевой задачи. Построенная дискретная математическая модель, позволяет проводить численные эксперименты по определению технических характеристик рассмотренных волноведущих структур.

Список литературы: 1. Гандель Ю.В., Стрельченко В.А. Сингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на ленточных диафрагмах в волноводе.// Интегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. Зб. наук. праць. - Київ: НАН України, вип.9, 1995. – С. 154 – 161. 2. Духопельников С.В. Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями / Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 68. – С. 76–86. 3. Гандель Ю.В., Духопельников С.В. Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями в случае те-волн / Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 13. – С. 33–39. 4. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145с. 5. Гандель Ю.В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. / Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с.

Поступила в редколлегию 15.09.2011

Ю.П. ГЛУХОВ, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Институт механики
НАН Украины, Киев

ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Наведено проміжні результати дослідження плоских задач про збурення рухомим поверхневим навантаженням багатопшарової основи з початковими (залишковими) напруженнями.

Приведены промежуточные результаты исследования плоских задач о возмущении подвижной поверхностной нагрузкой многослойного основания с начальными (остаточными) напряжениями.

The midline results of the study of plane tasks of the perturbation of the moving surface load of multilayered base with initial (residual) stresses are presented.

Введение. Исследования и решение задач оптимального проектирования слоистых конструкций представляет большой научный и практический интерес. Слоистые конструкции технологичны и просты в изготовлении и широко используются в различных областях. Например, при создании звуковой и вибрационной защиты, волноводов, фильтров, эффективных демфирующих покрытий и так далее.

Действию подвижных нагрузок на слоистые тела посвящено много работ. Для классических сред такие задачи изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей многослойной среды.

Одной из интересных и актуальных проблем, анализ которой невозможно провести в рамках классической линейной теории упругости, является теория распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями

Начальные напряжения возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания, в кровеносных сосудах живых организмов и так далее. Таким образом, механика материалов и элементов конструкций, геофизика, сейсмология, механика композитов, механика горных пород, биомеханика и ряд других – это далеко не полный перечень научных направлений фундаментального и прикладного характера, в которых возникают проблемы, связанные с необходимостью исследования влияния начальных (или остаточных) напряжений или деформаций.

В данной работе кратко представлены некоторые промежуточные результаты исследований плоских задач о возмущении подвижной поверхностной нагрузкой многослойного основания с начальными (остаточными) напряжениями.

Исследования были проведены в рамках линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. В линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями и деформациями предполагается, что возмущенному состоянию тела предшествует некоторое начальное состояние с отличными от нуля напряжениями и деформациями. При этом рассматриваются только малые дополнительные напряжения (возмущения) по сравнению с напряжениями в начальном состоянии. Такая теория в отличие от линейной классической теории упругости более полно отражает свойства реальных деформируемых тел.

Основы линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями подробно изложены в работах основоположника этой теории академика НАН Украины Александра Николаевича Гузя и его учеников.

Общая постановка задач. Общая постановка исследуемого класса задач выглядит следующим образом. Рассматривается многослойная полоса, состоящая из N слоев, лежащих на упругом полупространстве или жестком основании (смотри рисунок). Слои пронумерованы по порядку $s = \overline{1, N}$ сверху вниз. Порядковый номер подстилающего полупространства – $N + 1$.

Граничные поверхности слоев плоские и параллельные между собой. Толщина слоев произвольная и равна h_s .

Элементы слоистой среды состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных нелинейно-упругих материалов с произвольной формой упругого потенциала. В случае ортотропного тела будем считать, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей выбранной системы координат.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние слоистой среды является однородным.

$$u_j^{0\{s\}} = \delta_{ij} (\lambda_i^{\{s\}} - 1) x_i; \quad \lambda_i^{\{s\}} = const, \quad \left(\not\equiv i \right); \quad \sigma_{11}^{0\{s\}} \neq 0; \quad \sigma_{22}^{0\{s\}} \neq 0; \quad \sigma_{33}^{0\{s\}} \neq 0. \quad (1)$$

Здесь x_i – это лагранжевы координаты, которые в естественном состоянии совпадают с декартовыми, $\lambda_i^{\{s\}}$ – удлинения; δ_{ij} – символ Кронекера, $\sigma_{ii}^{0\{s\}}$ – компоненты тензора обобщенных напряжений.

Слоистое полупространство отнесено к декартовой системе координат ξ_i ($i=1,2,3$), соответствующей начальному деформированному состоянию:

$$\xi_i = \lambda_i x_i, \quad (\mathcal{X}_i). \quad (2)$$

К свободной границе первого слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты ξ_3 . Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся плоское деформированное состояние.

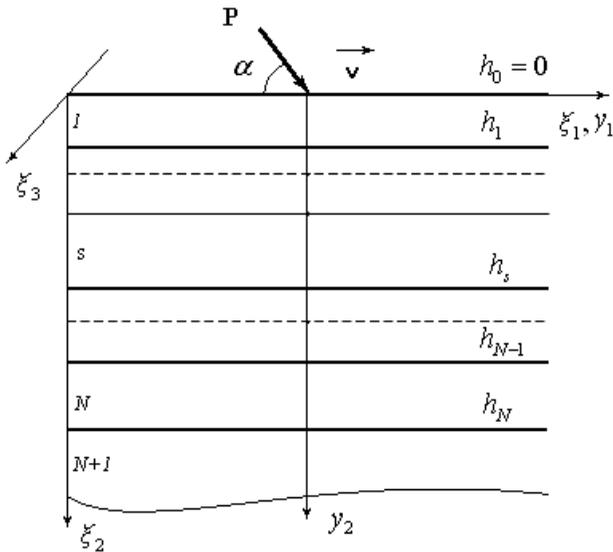


Рисунок – Схема нагружения многослойной полосы.

Координаты подвижной системы координат определяются соотношениями

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (3)$$

Также предполагаем, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризованную теорию упругости для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

При таких предположениях с учетом общих решений плоских динамических задач линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями общая постановка плоских задач об установившемся движении упругой многослойной полосы, лежащей на упругом полупространстве или жестком основании, включает:

уравнения движения элементов слоистой среды

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (4)$$

и граничные условия при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \delta_{\theta N} P_1 \delta(y_1); \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}} = P_2 \delta(y_1); \quad (5)$$

и при $y_2 = -h_s$

(для упругого основания)

$$u_2^{\{s\}} = u_2^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); \quad s = \overline{1, N}; \quad (6)$$

(для жесткого основания)

$$u_2^{\{s\}} = u_2^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{s\}}|_{y_2=-h_s} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); \quad s = \overline{1, N-1}; \quad (7) \\ u_2^{\{N\}} = 0; \quad (1 - \theta_1^{\{N\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}} u_1^{\{N\}}.$$

Изучается два варианта контакта между элементами слоистой среды и основанием – жесткий и нежесткий: $\theta_1^{\{s\}} = 1$ – если жесткий контакт; при $\theta_1^{\{s\}} = 0$ – скользящий контакт; $\theta = \sum_{s=1}^N \theta_1^{\{s\}}$

Функции $\eta_j^{\{s\}}$ в уравнениях движения (4) определяются из уравнений

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (8)$$

где для сжимаемого тела

$$2A^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) - (\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}})^2; \\ A_1^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = (\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) (\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}} = \rho^{\{s\}};$$

а для несжимаемого

$$2A^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} (\tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} (\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}}); \\ A_1^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} (\tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \quad \tilde{q}_{ij}^{\{s\}} = \delta_{ij} \lambda_i^{\{s\}} q_i^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} = \rho^{\{s\}},$$

$\rho^{\{s\}}$ — плотность материала элементов многослойного полупространства в естественном состоянии. $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ и $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ - параметры характеризующие материал элементов слоистой среды.

Компоненты напряженно-деформированного состояния элементов слоистой среды определяются по формулам:

$$u_i^{\{s\}} = -\beta_{il}^{\{i\}\{s\}} \frac{\partial^2 \chi^{(i)\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\sum_{p=1}^2 \beta_{ip}^{\{j\}\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \chi^{(j)\{s\}}; \quad i \neq j;$$

$$\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{p=1}^2 \alpha_{ij}^{\{pk\}\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \frac{\partial \chi^{(k)\{s\}}}{\partial y_{k-(-1)^k} \delta_{ij}};$$

$$i, j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1};$$

где в случае сжимаемых тел

$$\alpha_{jj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \quad \alpha_{jj}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right);$$

$$\alpha_{mj}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} \right); \quad \alpha_{mj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right);$$

$$\alpha_{jj}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \quad \alpha_{mj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}};$$

$$\alpha_{jj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right) - \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} \right);$$

$$\alpha_{mj}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right) - \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right);$$

$$\beta_{11}^{\{1\}\{s\}} = \beta_{21}^{\{2\}\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}; \quad \beta_{12}^{\{2\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}};$$

$$\beta_{22}^{\{1\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \quad \beta_{11}^{\{2\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2;$$

$$\beta_{21}^{\{1\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2; \quad m, j = 1, 2;$$

а в случае несжимаемых тел

$$\alpha_{22}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \left(\tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right); \quad \alpha_{11}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \alpha_{22}^{\{12\}\{s\}}; \quad \alpha_{mj}^{\{12\}\{s\}} = -\tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1};$$

$$\alpha_{22}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}}; \quad \alpha_{11}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-2} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \left(2\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right);$$

$$\alpha_{22}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right) + \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \left(2\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right);$$

$$\alpha_{11}^{\{11\}\{s\}} = -\left(\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \right); \quad \alpha_{11}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{22}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \alpha_{11}^{\{21\}\{s\}};$$

$$\alpha_{mj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\chi}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{mj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{mj}^{\{21\}\{s\}} = -\tilde{\chi}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad m, j = 1, 2;$$

$$\beta_{11}^{\{1\}\{s\}} = \beta_{12}^{\{2\}\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \beta_{21}^{\{2\}\{s\}} = \beta_{21}^{\{1\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \beta_{11}^{\{2\}\{s\}} = \beta_{22}^{\{1\}\{s\}} = 0.$$

При изложенных выше условиях имеем плоскую установившуюся задачу в плоскости $y_1 O y_2$, состоящую в совместном решении уравнений движения (4) при соответствующих граничных условиях на поверхности первого слоя (6), условий контакта (7) или (8) и условия затухания на бесконечности.

Таким образом, при использовании общих решений плоских динамических задач линеаризированной теории рассматриваемые задачи сводятся к краевым задачам для функций $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2$).

Фундаментальное решение задач в области изображений Фурье. Поставленные краевые задачи решаются с помощью преобразования Фурье по переменной y_1 .

Решение задачи получаем в общем виде для сжимаемого и несжимаемого материалов с произвольным упругим потенциалом для теории конечных и двух вариантов малых начальных деформаций, для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой).

Решение преобразованных уравнений (4) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\begin{aligned} \chi^{\{s\}(j)F} = & [1 - \delta_{j2}^{\{s\}} (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}})] \times \\ & \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_3^{\{s\}(j)} e^{-k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + \right. \\ & \left. + [1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_s)] \times \right. \\ & \left. \left(C_2^{\{s\}(j)} e^{k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}(j)} e^{-k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j = \overline{1, 2}$; $m = \overline{1, 4}$; $s = \overline{1, N+1}$) – постоянные интегрирования, k – параметр преобразования Фурье,

$$\delta_{\eta \eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & \eta_1^{\{s\}} \neq \eta_2^{\{s\}} \\ 1, & \eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}} \end{cases}; \quad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \end{cases}.$$

В представлении (10)

$$k_j \equiv \sigma = |k|/k, \text{ если } \eta_j^{\{s\}2} > 0, \text{ и } k_j = i, \text{ если } \eta_j^{\{s\}2} < 0.$$

В случае если $\eta_j^{\{s\}}$ принимает комплексные значения, то в представлении решения (10) следует положить

$$k_j = 1, \quad \eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j, \quad j = 1, 2.$$

Введем постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C_m^{\{s\}(1)} &= C_m^{\{s\}}; \quad m = 1, 4; \quad C_m^{\{s\}(2)} = i \gamma_m^{\{s\}} C_m^{\{s\}}; \\ C_{m+2}^{\{s\}(2)} &= i \gamma_{3-m}^{\{s\}} C_{m+2}^{\{s\}}; \quad \gamma_j^{\{s\}} = k_j \eta_j^{\{s\}}; \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния в области изображений (9) с учетом (10) и (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} &= i^{1-\delta_{nj}} k^2 \sum_{m=1}^4 \tau_{ms} \gamma_{nj}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})}; \\ u_n^{\{s\}F} &= i^{\delta_{1n}} k \sum_{m=1}^4 \tau_{ms} \alpha_n^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})};\end{aligned}\quad (12)$$

$$n, j = 1, 2.$$

В выражениях (12) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tau_m &= \delta_{m1} + \delta_{m4} + 2(\delta_{m2} + \delta_{m3}); \\ \tau_{ms} &= \delta_{1m} + \delta_{2m} + (1 - \delta_s^{N+1})(\delta_{3m} + \delta_{4m}).\end{aligned}$$

Параметры $\gamma_{mj}^{\{s\}(n)}$, $\alpha_1^{\{s\}(1)}$ в формулах (12) являются функциями параметров $k, \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}$, $\gamma_p^{\{s\}}$, $\beta_{im}^{(j)\{s\}}$, $\alpha_{ij}^{(km)\{s\}}$ [3], а именно:

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^{\{s\}(1)} &= k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(21)} - \zeta_{jj}^{\{s\}(11)} \right); \quad \gamma_{jj}^{\{s\}(3)} = k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(22)} + \zeta_{jj}^{\{s\}(12)} \right); \\ \gamma_{jj}^{\{s\}(2)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{jj}^{\{s\}(12)} - \zeta_{jj}^{\{s\}(22)} \right) - \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \zeta_{jj}^{\{s\}(12)} \right]; \\ \gamma_{jj}^{\{s\}(4)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{jj}^{\{s\}(11)} + \zeta_{jj}^{\{s\}(21)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \zeta_{jj}^{\{s\}(11)} \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{mj}^{\{s\}(1)} &= -k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(21)} + \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right); \quad \gamma_{mj}^{\{s\}(3)} = k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(22)} - \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right); \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{mj}^{\{s\}(22)} + \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right]; \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(4)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{mj}^{\{s\}(21)} - \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right) - \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right]; \\ j, m &= 1, 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^{\{s\}(1)} &= -k \left(\tau_1^{\{s\}(11)} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_1^{\{s\}(21)} \right); \quad \alpha_1^{\{s\}(3)} = k \left(\tau_1^{\{s\}(12)} - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_1^{\{s\}(22)} \right); \\ \alpha_1^{\{s\}(2)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_1^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_1^{\{s\}(12)} + \tau_1^{\{s\}(22)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \tau_1^{\{s\}(12)} \right]; \\ \alpha_1^{\{s\}(4)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_1^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_1^{\{s\}(11)} - \tau_1^{\{s\}(21)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \tau_1^{\{s\}(11)} \right]; \\ \alpha_2^{\{s\}(1)} &= k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_2^{\{s\}(11)} - \tau_2^{\{s\}(21)} \right); \quad \alpha_2^{\{s\}(3)} = -k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_2^{\{s\}(12)} + \tau_2^{\{s\}(22)} \right); \\ \alpha_2^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_2^{\{s\}(2)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_2^{\{s\}(12)} - \tau_2^{\{s\}(22)} \right) - \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \tau_2^{\{s\}(22)} \right]; \\ \alpha_2^{\{s\}(4)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_2^{\{s\}(1)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_2^{\{s\}(11)} + \tau_2^{\{s\}(21)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \right) \tau_2^{\{s\}(21)} \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{jj}^{\{s\}(np)} &= \gamma_p^{\{s\}} \left(\alpha_{jj}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{jj}^{\{s\}(2n)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \quad \zeta_{mj}^{\{s\}(np)} = \gamma_p^{\{s\}2\delta_{n2}} \left(\alpha_{mj}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{mj}^{\{s\}(2n)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \\
\zeta_{jj}^{\{s\}(p)} &= \alpha_{jj}^{\{s\}(11)} + 2(-1)^p \alpha_{jj}^{\{s\}(22)} \gamma_p^{\{s\}2} - 3\alpha_{jj}^{\{s\}(21)} \gamma_p^{\{s\}2}; \\
\zeta_{mj}^{\{s\}(p)} &= -\gamma_p^{\{s\}} \left[\alpha_{mj}^{\{s\}(12)} - 2(-1)^m \alpha_{mj}^{\{s\}(21)} - 3\alpha_{mj}^{\{s\}(22)} \gamma_p^{\{s\}2} \right]; \\
\tau_1^{\{s\}(1p)} &= \gamma_p^{\{s\}} \beta_{11}^{\{s\}(1)}; \quad \tau_1^{\{s\}(2p)} = \gamma_p^{\{s\}} \left(\beta_{11}^{\{s\}(2)} - \beta_{12}^{\{s\}(2)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \\
\xi_1^{\{s\}(p)} &= \beta_{11}^{\{s\}(1)} - 2(-1)^p \beta_{12}^{\{s\}(2)} \gamma_p^{\{s\}2}; \quad \tau_2^{\{s\}(1p)} = \gamma_p^{\{s\}2} \beta_{21}^{\{s\}(2)}; \\
\tau_2^{\{s\}(2p)} &= \beta_{21}^{\{s\}(1)} - \beta_{22}^{\{s\}(1)} \gamma_p^{\{s\}2}; \quad \xi_2^{\{s\}(p)} = \gamma_p^{\{s\}} \left(\beta_{21}^{\{s\}(2)} + 2(-1)^p \beta_{22}^{\{s\}(1)} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя (12) в преобразованную систему уравнений (5), (6) (полоса на упругом основании) или (5), (7) (полоса на жестком основании), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$:

полоса на упругом основании

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^4 \overline{\gamma}_{2q}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} &= i^{\delta_{2q}-1} k^{-2} \delta_{\theta N}^{\delta_{1q}} P_q^F; \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \overline{\alpha}_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \tau_{m,s+1} \overline{\alpha}_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right\} &= 0; \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \overline{\gamma}_{2q}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \theta_1^{\{s\} \delta_{1q}} \tau_{m,s+1} \overline{\gamma}_{2q}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right\} &= 0; \quad (13) \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \tau_{m,s+1} \left[k \left(1 - \theta_1^{\{s\}} \right) \overline{\gamma}_{21}^{\{s+1\}(m)} - \theta_1^{\{s\}} \overline{\alpha}_1^{\{s+1\}(m)} \right] C_m^{\{s+1\}} + \right. \\
\left. + \theta_1^{\{s\}} \overline{\alpha}_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} \right\} &= 0; \\
q = 1, 2; \quad s = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

полоса на жестком основании

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^4 \overline{\gamma}_{2q}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} &= i^{\delta_{2q}-1} k^{-2} \delta_{\theta N}^{\delta_{1q}} P_q^F; \\
\sum_{m=1}^4 \left(\overline{\alpha}_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \overline{\alpha}_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right) &= 0; \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \overline{\gamma}_{2q}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \theta_1^{\{s\} \delta_{1q}} \overline{\gamma}_{2q}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right\} &= 0;
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^4 \left\{ \left[k \left(1 - \theta_1^{\{s\}} \right) \tilde{\gamma}_{21}^{\{s+1\}(m)} - \theta_1^{\{s\}} \tilde{\alpha}_1^{\{s+1\}(m)} \right] C_m^{\{s+1\}} + \theta_1^{\{s\}} \tilde{\alpha}_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} \right\} = 0;$$

$$q = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1}; \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^4 \tilde{\alpha}_2^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{N\}} \Delta h_N} = 0;$$

$$\sum_{m=1}^4 \left[k \left(\theta_1^{\{N\}} - 1 \right) \tilde{\gamma}_{21}^{\{N\}(m)} - \theta_1^{\{N\}} \tilde{\alpha}_1^{\{N\}(m)} \right] C_m^{\{N\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{N\}} \Delta h_N} = 0.$$

В формулах (13) и (14) используются следующие обозначения:

$$\Delta h_s = h_{s+1} - h_s;$$

$$\tilde{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)} = \gamma_{2n}^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_{s-1}}; \quad \tilde{\alpha}_n^{\{s\}(m)} = \alpha_n^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_{s-1}}; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad h_0 = 0;$$

$$\tilde{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)} = \gamma_{2n}^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_s}; \quad \tilde{\alpha}_n^{\{s\}(m)} = \alpha_n^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_s}; \quad s = \overline{1, N}.$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойной упругой полосы с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (13) или (14) относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$.

Для того чтобы перейти в формулах (12) к оригиналам, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

Проведенные исследования. К настоящему моменту выполнена следующая работа.

1. Даны постановки и решены аналитически и численно задачи об установившемся движении упругого двухслойного полупространства, состоящего из упругой пластины и подстилающего ее упругого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки. Уравнения движения пластины записаны с учетом сдвига и инерции вращения.

Решения задач были получены с применением метода интегральных преобразований Фурье и метода комплексных потенциалов [2].

Решения получены в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел с произвольной формой упругого потенциала для теории конечных и двух вариантов малых начальных деформаций.

На основании полученных результатов проведено численное исследование влияния начальных напряжений на значение критических скоростей

движения нагрузки и на напряженно-деформированное состояние двухслойной среды.

Численные исследования выполнены для сжимаемого (с потенциалом гармонического типа) и для несжимаемого (с потенциалом типа Бартенева-Хазановича) материалов в рамках теории конечных начальных деформаций.

Анализ полученных результатов исследования позволяет сделать следующие выводы.

- Значения критических скоростей движения нагрузки и их количество существенно зависят от начальных напряжений в полупространстве, механических параметров пластины и полупространства, а также условий их контакта. При жестком контакте возможно существование двух критических скоростей движения нагрузки, причём, по крайней мере, одна из которых больше скорости волн Рэлея.

- Влияние начальных напряжений на значения критических скоростей движения нагрузки более существенно для сравнительно мягких пластин и для нежесткого контакта. Чем мягче пластина по сравнению с полупространством, тем меньше у нее критическая скорость по сравнению со скоростью волн Рэлея. Значение наименьшей критической скорости при жестком контакте всегда больше, чем при нежестком контакте.

- При заданных механических параметрах всегда можно выделить область значений начальных деформаций, при которых существуют критические скорости движения нагрузки.

- Значения параметров напряженно-деформированного состояния в конкретной точке двухслойного полупространства зависят от начальных напряжений, ее координат и условий контакта. Для докритических скоростей движения нагрузки при жестком контакте напряжения, скорости перемещений в полупространстве и изгибающий момент в пластине меньше, чем при нежестком контакте.

- Темп роста амплитуды величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, при сжатии больше, чем при растяжении. Затухание с удалением от точки приложения нагрузки при сжатии происходит медленнее, чем при растяжении.

- Влияние начальных напряжений значительно увеличивается с ростом скорости движения нагрузки. Особенно это проявляется при предварительном сжатии. При жестком контакте влияние скорости и начальных напряжений менее существенно, чем при нежестком контакте.

- Учет инерции вращения при выводе уравнений движения для пластины особенно важен при нежестком контакте, предварительном сжатии и больших скоростях движения нагрузки.

- Для скоростей движения нагрузки, больших скорости распространения сдвиговых волн в полупространстве, наличие начальных напряжений оказывает существенное влияние на распределение напряжений и скоростей перемещений в полупространстве и изгибающего момента в пластине. Характер этого влияния различен в зависимости от положения рассматриваемой точки слоистого тела относительно точки приложения нагрузки.

2. В рамках рассмотренных в настоящей работе постановок в пространстве изображений Фурье получены аналитические решения следующих задач:

- для упругой полосы, лежащей на упругом полупространстве [3],
- для упругой полосы, лежащей на жестком основании [4],
- для многослойной упругой полосы, лежащей на упругом полупространстве [3],
- для многослойной упругой полосы, лежащей на жестком основании.

Получены рекуррентные формулы для представления решения задач для слоистых конструкций с любым количеством слоев.

Выводы.

1. Учет начальных напряжений в рамках линеаризованной теории упругости приводит к новым постановкам задач взаимодействия деформируемых тел, существенно отличающихся от постановок классических задач теории упругости.

2. Начальные (остаточные) напряжения оказывают существенное влияние на значение параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние слоистых конструкций.

3. Влияние начальных напряжений зависит от скорости движения поперечной нагрузки, механических параметров элементов слоистой среды и условий их сопряжения.

Список литературы: 1. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: “А.С.К”, 2004. – 672 с. 2. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг, 2007. – Издательство «Кременчуг». – С. 795. 3. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки. – Доповіді НАН України, 2011, № 7, С. 52 - 57. 4. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием. – Вісник національного Черкаського університету. Вип. 172. – Черкаси, 2010. – С. 20 - 24.

Поступила в редколлегию 07.09.2011

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Ю.Л. ГЕВОРКЯН, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

МАТРИЧНЫЙ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМАССОВОЙ ЦЕПНОЙ СИСТЕМЫ

Описаний новый метод інтегрування рівнянь руху механічної системи із зосередженими параметрами. Метод використовує можливість представлення загального рішення задачі Коши у вигляді лінійної форми з матричними коефіцієнтами. Для знаходження матричних коефіцієнтів застосовується метод послідовного подвоєння шагу інтегрування.

Описан новый метод интегрирования уравнений движения механической системы с сосредоточенными параметрами. Метод использует возможность представления общего решения задачи Коши в виде линейной формы с матричными коэффициентами. Для нахождения матричных коэффициентов применяется метод последовательного удвоения шага интегрирования.

The new method of an integration of the equations of driving of a mechanical lumped-parameter system is circumscribed. The method uses representation of a common solution of a Cauchy problem as the linear form with matrix factors. The method of sequential doubling of an integration step is applied to a determination of matrix factors

Введение и постановка задачи. Целью данной статьи является описание разработанного авторами матричного метода интегрирования систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, при использовании которых, обычно, выполняется математическое моделирование движения технических устройств различного назначения.

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение второго порядка

$$M \cdot \ddot{\vec{x}} + F \cdot \dot{\vec{x}} + (C + Z) \cdot \vec{x} = \vec{f}(t) + Z \cdot \vec{x}_{cm}(t). \quad (1)$$

В этом уравнении все матрицы являются квадратными и положительными, причём матрицы M и Z – диагональные. При использовании таких уравнений моделируется движение многомассовой механической системы с сосредоточенными параметрами.

В векторном уравнении движения (1) матрицы M и F состоят из инерционных коэффициентов и коэффициентов вязкого трения, а матрицы C и Z – из коэффициентов жёсткости внутренних и внешних связей, соответственно. В правой части уравнения первое слагаемое отвечает силовому, а второе – кинематическому возмущению системы; зависимость векторов $\vec{f}(t)$ (внешние силы) и $\vec{x}_{cm}(t)$ (перемещения подвижных стоек механизма) от времени t предполагается известной. Слагаемым левой части уравнения (1) соответствуют внутренние силы инерции, трения и упругости. В статье рассматривается общий случай, когда матрицы F и C не пропорциональны и не коммутируют. Аналогичный метод для частного случая – свободных колеба-

ний вязкоупругой модели Фойгхта – был рассмотрен в [1, 2].

Известно (смотри, например, [4, § 68]), что для устойчивости явного разностного метода интегрирования при выбранном шаге Δt все частоты λ собственных колебаний должны попадать внутрь области, выделенной на рис.1 штриховкой, а для сходимости этого метода основные частоты ω_m должны удовлетворять неравенству

$$|\omega_m| \cdot \Delta t \ll 1.$$

Представляемый метод разрабатывался для исследования механических систем с растянутым спектром собственных частот, где он позволяет отказаться от неявных или других трудоемких схем (типа *схемы Адамса*). В этих системах весь спектр располагается вблизи мнимой оси, и соотношение максимальной ω_M и минимальной ω_m частот удовлетворяет неравенству

$$\omega_M / \omega_m \gg 1.$$

При численном интегрировании уравнений движения (1) для таких систем явные разностные схемы устойчивы, как и в жёстких системах, при чрезмерно малом шаге, а устойчивые неявные схемы при крупном шаге искажают высокочастотные составляющие решения и не обеспечивают сходимость (в жёстких системах этим искажением можно пренебречь).

Заметим, что при постоянных матричных коэффициентах уравнение (1) описывает движение линейной системы, что для большинства рассматриваемых в наше время задач по исследованию динамики технического устройства является недопустимой идеализацией их исходной постановки. Но если считать, что эти коэффициенты являются медленно изменяющимися функциями времени или, например, зависят от значений искомым динамических параметров, то новый метод станет актуальным для большинства задач указанного класса; соответствующее обобщение анализируется в конце статьи.

Первая краткая презентация метода была выполнена в докладе [4].

Примеры цепных механических систем. На рис.2 схематически изображена простейшая динамическая модель *цепной механической системы*, состоящей из n масс m_i , связанных между собой пружинами с коэффициентами жёсткости c_i . При помощи такой модели изучаются, например, свободные продольные колебания, возникающие в железнодорожном составе при изменении скорости локомотива.

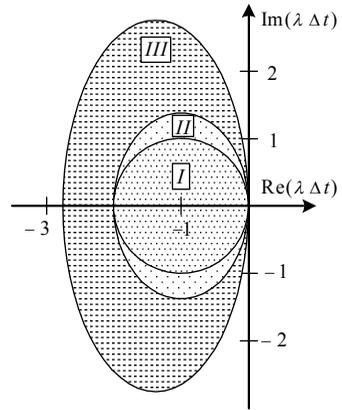


Рисунок 1 – Области устойчивости разностной схемы (I – метод Эйлера, II и III – методы Рунге – Кутты 2 и 4 порядков).

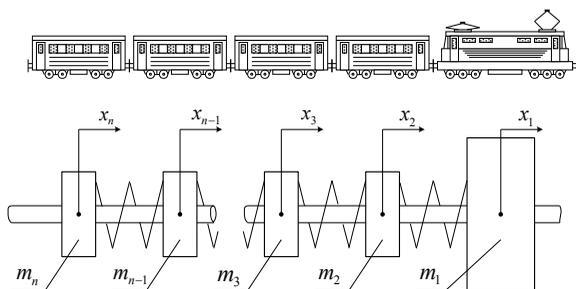


Рисунок 2 – Дискретная динамическая модель железнодорожного состава.

к вагону не передаются. В результате матрица C оказывается трёхдиагональной и имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} -c & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & -2 \cdot c & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & -2 \cdot c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \cdot c & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & -c \end{pmatrix},$$

где c – это коэффициент жёсткости сцепки.

На рис.3 изображён участок цепной передачи, используемой, например, в велосипедах и мотоциклах. Если колесо 1 является ведущим, а колесо 2 – ведомым, то этот участок не нагружен внешними силами, и в нём могут развиваться интенсивные свободные колебания. Положение i -того звена цепи определяется 6 – тью координатами: тремя перемещениями центра звена относительно осей Ox , Oy , Oz , двумя углами поворота оси звена в горизонтальной и вертикальной плоскости, а также углом разворота звена вокруг его оси (смотри рис.3).

Пусть анализируемый горизонтальный участок цепи состоит из n звеньев. Перенумеруем координаты звеньев в следующем порядке: номера от 1 до 6 получат координаты первого звена, номера от 7 до 12 – такие же координаты второго звена, и так далее. В результате каждая координата получит свой номер $i \in \overline{1, (6 \cdot n)}$; обозначим её x_i . Этой координате соответст-

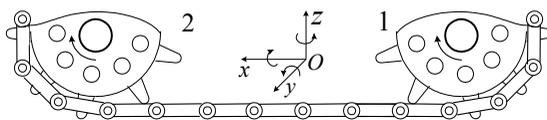


Рисунок 3 – Динамическая модель фрагмента цепной передачи.

В модели положение каждого элемента определяется только одной координатой – перемещением x_i локомотива или вагона вдоль рельсового пути. Железнодорожная сцепка устроена так, что остальные формы колебаний (в вертикальном и поперечном направлении, а также угловые) от вагона

оказывается трёхдиагональной

вует некоторый инерционный коэффициент – масса или момент инерции; обозначим его m_i .

Предположим, что все силы и моменты сил, возникающие в соединениях цепи, пропорциональны изменениям координат. Тогда изменение i -той координаты будет удовлетворять уравнению

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = - \sum_{j=1}^{6 \cdot n} c_{ij} \cdot x_j,$$

где c_{ij} – некоторые постоянные числа.

Составим из этих чисел *матрицу коэффициентов жёсткости* $C = [c_{ij}]$ размера $(6 \cdot n) \times (6 \cdot n)$ и представим её в форме блочной матрицы $C = [C_{ij}]$ с квадратными блоками C_{ij} шестого порядка. Каждое звено цепи непосредственно связано с двумя соседними; поэтому матрица C оказывается блочной трёхдиагональной матрицей.

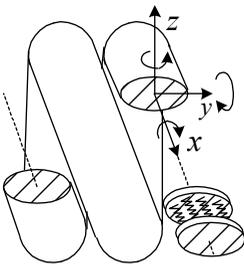


Рисунок 5 – Дискретная модель пружины.

Если прогибом цепи допустимо пренебречь, то колебания по каждой из шести координат происходят независимо от других координат, и это означает, что все ненулевые блоки матрицы являются диагональными. Кроме того, поскольку соединения звеньев также выполнены одинаково, то блоки $C_{i \ i+1}$ и $C_{i+1 \ i}$ одинаковы между собой, и для всех номеров i .

Структура матрицы C показана на рис. 4.

Если представить пружину в виде объединения большого числа тонких колец, связанных посредством упругого невесомого соединения (рис.5), то мы получим ещё один пример цепной механической системы. Матрица C коэффициентов жёсткости этой системы также оказывается блочной трёхдиагональной матрицей (рис.4), но винтовая ось пружины изогнута, поэтому её ненулевые блоки не являются диагональными матрицами.

Аналитическое решение. Далее, с целью экономии места, будем использовать строчную запись для неизвестного вектора \vec{x} и известных векторов $\vec{f}(t)$ и $\vec{x}_{cm}(t)$. Все матричные коэффициенты уравнения (1) симметричны, поэтому изменение формы записи сведётся к простой перестановке сомножителей:

$$\ddot{\vec{x}} \cdot M + \dot{\vec{x}} \cdot F + \vec{x} \cdot (C + Z) = \vec{f}(t) + \vec{x}_{cm}(t) \cdot Z \quad (2)$$

После перехода к обобщенным координатам и силам

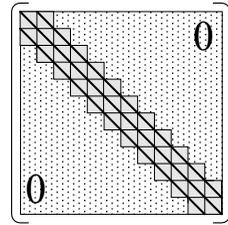


Рисунок 4 – Блочная структура матрицы C .

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{x} \cdot M^{1/2} & \dot{\bar{x}} \cdot M^{1/2} \end{pmatrix}; \quad \bar{b}(t) = \left(\Theta \quad (\bar{f}(t) + \bar{x}_{cm}(t) \cdot Z) \cdot M^{-1/2} \right)$$

уравнение (2) приводится к следующему виду

$$\dot{\bar{q}} = \bar{q} \cdot A + \bar{b}(t), \quad (3)$$

где A – блочная матрица с симметричными блоками,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{C} \\ I & -\hat{F} \end{bmatrix}; \quad \hat{C} = M^{-1/2} \cdot (C + Z) \cdot M^{-1/2}; \quad \hat{F} = M^{-1/2} \cdot F \cdot M^{-1/2}.$$

Общее решение уравнения (3) на промежутке времени $t > t_0$ может быть представлено следующей формулой:

$$\bar{q}(t) = \bar{q}(t_0) \cdot \exp(A \cdot (t - t_0)) + \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau))] d\tau. \quad (4)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости формулы, достаточно подставить это решение в уравнение и воспользоваться правилом дифференцирования *свёрточного экспоненциального интеграла*:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau))] d\tau = \bar{b}(t) + \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot A] d\tau;$$

для доказательства правила можно, например, представить этот интеграл в таком виде:

$$\int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau))] d\tau = \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(-A \cdot \tau)] d\tau \cdot \exp(A \cdot t),$$

а затем дифференцировать произведение двух матриц - функций.

Алгебраический метод. Предположим, что мы смогли для матрицы A найти все собственные числа λ_j и получить её жорданово диагональное представление

$$A = X \cdot D(A) \cdot X^{-1} = X \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot X^{-1}.$$

Воспользуемся этим представлением и умножим обе части равенства (4) справа на матрицу X :

$$(\bar{q}(t) \cdot X) = (\bar{q}(t_0) \cdot X) \cdot \exp(D(A) \cdot (t - t_0)) + \int_{t_0}^t [(\bar{b}(\tau) \cdot X) \cdot \exp(D(A) \cdot (t - \tau))] d\tau. \quad (5)$$

Обозначим $\bar{y}(t) = \bar{q}(t) \cdot X$; $\bar{z}(t) = \bar{b}(t) \cdot X$. Тогда матричное равенство (5) оказалось эквивалентным системе из n независимых скалярных равенств

$$y_j(t) = y_j(t_0) \cdot \exp(\lambda_j \cdot (t - t_0)) + \int_{t_0}^t [z_j(\tau) \cdot \exp(\lambda_j \cdot (t - \tau))] d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Если функции $z_j(t)$ представляют собой степенные или тригонометрические многочлены, то вычисление интегралов, используемых в правых частях равенств (6), может быть выполнено аналитическими методами.

Поэтому целесообразно разбить исследуемый промежуток времени $[0; T]$ на участки $[t_k, t_{k+1}]$ и выполнить на каждом таком участке аппроксимацию вектора $\vec{b}(t)$ аналитическими зависимостями степенного или тригонометрического вида. После того, как для некоторого промежутка времени $[t_k, t_{k+1}]$ будут вычислены все интегралы и, тем самым, будет определена вектор - функция $\vec{y}(t)$, найденное таким образом значение $\vec{y}(t_{k+1})$ для следующего промежутка $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ окажется начальным условием, и расчёт будет продолжен.

После выполнения указанного цикла расчётов для всего промежутка $[0; T]$ по формуле

$$\vec{q}(t) = \vec{y}(t) \cdot X^{-1}$$

и зависимостям

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \cdot M^{1/2} & \dot{\vec{x}}(t) \cdot M^{1/2} \end{pmatrix}$$

можно будет найти скорости $\dot{\vec{x}}(t)$ и перемещения $\vec{x}(t)$ в интересующие моменты времени, после чего построить графики или составить таблицы.

Численно - аналитический метод. Сразу же заметим, что описанный в предыдущем пункте метод интегрирования уравнения (2), если его удастся реализовать на практике, является наиболее эффективным. Однако для получения такого решения потребуются найти собственный базис матрицы A , что для систем с большим числом масс будет связано с очень большими вычислительными затратами.

Этих затрат удастся избежать при использовании следующего метода. Разобьем промежуток $[0; T]$ на N одинаковых отрезков (t_j, t_{j+1}) длиной

Δt и на каждом из них аппроксимируем вектор $\vec{b}(t)$ многочленом:

$$\vec{b}(t) \approx \sum_{k=1}^p \vec{b}_{kj} \cdot (t_{j+1} - t)^{k-1}; \quad t \in (t_j, t_{j+1}); \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Интегрирование уравнения (2) на интервале (t_j, t_{j+1}) приводит к следующей зависимости:

$$\bar{q}(t_{j+1}) = \bar{q}(t_j) \cdot D_0 + \sum_{k=1}^p \bar{b}_{kj} \cdot (\Delta t)^k \cdot D_k, \quad (7)$$

где $D_0 = \exp(A \cdot \Delta t)$; $D_k = \int_0^{\Delta t} \exp(A \cdot \Delta t \cdot \tau) \cdot \tau^{k-1} \cdot d\tau$, $k=1, 2, \dots, p$. (8)

Считаем, что для описания движения системы нам вполне достаточно найти величины скоростей \dot{x}_i и перемещений x_i масс системы в моменты времени $t_j = \Delta t \cdot j$, $j=1, 2, \dots, N$. Поэтому для интегрирования уравнения (2) достаточно определить матричные коэффициенты D_k , а затем, используя начальное значение $\bar{q}(0) = q_0$ и известные значения векторных коэффициентов \bar{b}_{kj} аппроксимирующих многочленов, выполнить последовательный пересчет векторов $\bar{q}(t_j)$ обобщенных координат по формуле (7).

Подчеркнём, что в данном методе определение матричных коэффициентов D_k , что составляет наиболее трудоёмкую часть алгоритма, производится один раз, а их использование – многократно.

Если все собственные числа $\lambda \cdot \Delta t$ матрицы $A \cdot \Delta t$ малы (не превосходят по модулю 1), то для определения этих матриц можно использовать начальный отрезок ряда Маклорена матрицы - функции $\exp(A \cdot \Delta t)$.

В результате мы приходим к следующим формулам:

$$D_k = \sum_{l=0}^r (A \cdot \Delta t)^l / (l! \cdot (l+k)), \quad k=0, 1, \dots, p. \quad (9)$$

Заметим, что при использовании этих формул вместо возведения матрицы в степень используются рекуррентные соотношения.

К сожалению, многомассовая система, как правило, имеет растянутый спектр собственных частот, и выполнение условия $|\lambda \cdot \Delta t| < 1$ требует слишком малого шага Δt , что делает интегрирование уравнения (2) по формулам (7) неэффективным. Поэтому для определения матрицы D_0 используется алгоритм вычисления матричной экспоненты, основанный на очевидном тождестве

$$\exp(A \cdot \Delta t) = \exp(A \cdot \Delta t / 2) \cdot \exp(A \cdot \Delta t / 2).$$

Если в обозначении матриц D_k учесть их зависимость от шага интегрирования Δt , то это тождество можно переписать в следующем виде:

$$D_0(\Delta t) = D_0(\Delta t / 2) \cdot D_0(\Delta t / 2). \quad (10)$$

Оказалось, что аналогичные тождества можно получить и для интегралов (8):

$$D_k(\Delta t) = (1/2)^k \cdot [D_k(\Delta t/2) + \sum_{l=1}^k \{C_{k-1}^{l-1} \cdot D_l(\Delta t/2)\} \cdot D_0(\Delta t/2)], \quad (11)$$

где C_k^l – биномиальные коэффициенты, $C_k^l = (k!)/[(l!) \cdot (k-l)!]$.

Если использовать тождества (10), (11) m раз, то шаг интегрирования уменьшится до величины $\Delta = \Delta t/2^m$, при которой вычисление матриц D_k можно проводить по формулам (9). Определив, таким образом, начальные значения этих матриц, после m циклов вычислений по рекуррентным формулам

$$D_k = (1/2)^k \cdot [D_k + \sum_{l=1}^k \{C_{k-1}^{l-1} \cdot D_l\} \cdot D_0], \quad k = p, p-1, \dots, 1, \quad D_0 = D_0 \cdot D_0 \quad (12)$$

получаем искомые значения матричных коэффициентов D_k для формулы интегрирования (7).

Заметим, что при фактическом использовании формул (11), чтобы не произошло потери точности, вместо матрицы D_0 преобразуется матрица

$$\hat{D}_0 = D_0 - E,$$

где E – единичная матрица порядка $2 \cdot n$, а вместо матриц D_k при значениях $k = p, p-1, \dots, 1$ используются матрицы

$$\hat{D}_k = D_k - (1/k) \cdot E.$$

В том случае, когда степень $p = 1$, расчётные формулы (12) выглядят особенно просто:

$$D_1 = (1/2) \cdot (D_1 + D_1 \cdot D_0); \quad D_0 = D_0 \cdot D_0,$$

и эти действия повторяются m раз.

Однако повышение степени p аппроксимирующего многочлена с 1 до 2 или 3 позволяет использовать для описания вектора $\vec{b}(t)$ непрерывные зависимости (кусочно-линейные, кусочно-параболические или сплайновые) и, как следствие, увеличить шаг интегрирования Δt без ущерба для точности результатов расчета.

Учтём симметрию матричных коэффициентов. Описанный выше общий подход не учитывает специфику решаемой задачи, а именно, особенности структуры матрицы A , вектора \vec{b} и их связи с исходными дифференциальными уравнениями движения (1).

Выполненный анализ этих особенностей позволил существенно упростить и улучшить метод.

Во-первых, оказалось, что степени матрицы A имеют следующий

блочный вид:

$$A^k = \begin{pmatrix} A_k + \hat{F} \cdot V_k & -\hat{C} \cdot V_k \\ V_k & A_k \end{pmatrix},$$

где A_k, V_k – некоторые симметричные матрицы, связанные соотношениями

$$V_{k+1} = A_k.$$

Таким образом, вычисление этих степеней сводится к использованию рекуррентной формулы:

$$A_{k+1} = -\hat{F} \cdot A_k - \hat{C} \cdot A_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

при начальных условиях

$$A_0 = I; \quad A_1 = I - \hat{F}.$$

Во-вторых, такую же структуру имеют матричные коэффициенты D_k :

$$D_k = \begin{pmatrix} U_k + \hat{F} \cdot W_k & -\hat{C} \cdot W_k \\ W_k & U_k \end{pmatrix},$$

где симметричные матрицы U_k, W_k связаны соотношениями

$$W_0 = \Delta t \cdot U_1; \quad W_k = (\Delta t / k) \cdot (U_1 - U_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (14)$$

Таким образом, вычисление матричных коэффициентов D_k сводится к циклическому пересчету последовательности матриц U_k , а объем вычислений сокращается приблизительно в 8 раз.

В-третьих, в векторе $\vec{b}(t)$, как правило, только несколько элементов b_j отличны от нуля, причем номера j этих элементов (*каналов силового или кинематического возмущения* системы), известны заранее и в ходе расчетов не изменяются.

Это означает, что во всех матрицах D_k при $k = 1, 2, \dots, p$ фактически используется только несколько одних и тех же строк из нижних блоков. Составим из этих строк так называемые *усеченные* неквадратные матрицы

$$\hat{D}_k = \begin{pmatrix} \hat{W}_k & \hat{U}_k \end{pmatrix}.$$

Оказалось, что алгоритм для пересчета этих матриц \hat{D}_k остался прежним (формулы (12), (14)), но его трудоемкость значительно снизилась и определяется, в основном, трудоемкостью вычисления одной только матрицы D_0 .

Пересчет нижних блоков этой матрицы производится по следующим рекуррентным формулам:

$$W_0 = W_0 \cdot U_0 + U_0 \cdot W_0 + W_0 \cdot \hat{F} \cdot W_0; \quad U_0 = U_0 \cdot U_0 - W_0 \cdot \hat{C} \cdot W_0. \quad (15)$$

Оценим спектр собственных колебаний. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \left\| \begin{bmatrix} -\lambda \cdot I & -\hat{C} \\ I & -\hat{F} - \lambda \cdot I \end{bmatrix} \right\| = 0$$

и, используя для этого одну из формул вычисления определителя блочной матрицы (смотри [1]), преобразуем его к следующему эквивалентному виду:

$$\det(\lambda^2 \cdot I + \lambda \cdot \hat{F} + \hat{C}) = 0, \quad (16)$$

или

$$\det(\lambda^2 \cdot M + \lambda \cdot F + C) = 0. \quad (17)$$

Равенство (16) (или (17)) называется характеристическим уравнением *квадратичного матричного пучка* (смотри [5]). Коэффициентами этого уравнения являются симметричные положительные матрицы I, \hat{F}, \hat{C} (или M, F, C).

С *матричным пучком* $\lambda^2 \cdot I + \lambda \cdot \hat{F} + \hat{C}$ может быть ассоциирована блочная матрица

$$S = \begin{pmatrix} \Theta & -\hat{C}^{1/2} \\ \hat{C}^{1/2} & -\hat{F} \end{pmatrix},$$

имеющая, в чём не сложно убедиться, то же самое характеристическое уравнение (16).

Заметим, что совпадение спектров матриц A и S имеет не только алгебраическое, но и физическое объяснение, но развивать эту тему дальше в данной статье мы не будем.

Поскольку блок $\hat{C}^{1/2}$ симметричный, то матрица S является *J - симметричной матрицей колебаний* (смотри [1]), и весь её спектр расположен в левой полуплоскости (рис.6).

Используя для спектра матрицы S стандартные оценки, приведенные, например, в [3, § 68], и очевидные формулы

$$\operatorname{Re} S = \begin{pmatrix} \Theta & \Theta \\ \Theta & -\hat{F} \end{pmatrix}; \quad \operatorname{Im} S = \begin{pmatrix} \Theta & i \cdot \hat{C}^{1/2} \\ -i \cdot \hat{C}^{1/2} & \Theta \end{pmatrix},$$

получаем, что её собственные числа λ удовлетворяют условиям

$$-\lambda_F \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0; \quad -\sqrt{\lambda_C} \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \sqrt{\lambda_C},$$

$$\text{где } \lambda_F = \|\hat{F}\|; \quad \lambda_C = \|\hat{C}\|.$$

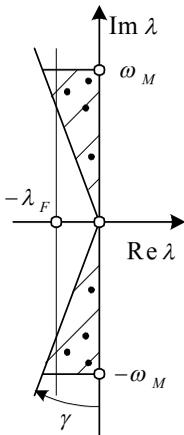


Рисунок 6 – Спектр частот собственных колебаний.

Напомним, что оценку нормы положительной матрицы удобнее всего

проводить при использовании её следа. В частности, если использовать этот приём для матрицы

$$\hat{C} = M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2},$$

то окажется, что максимальная собственная круговая частота ω_{\max} колебаний системы будет оцениваться сверху величиной ω_M , где

$$\omega_M = \sqrt{(Sp \hat{C})} = \sqrt{(c_{11}/m_1 + c_{22}/m_2 + \dots + c_{nn}/m_n)}.$$

При движении механической системы силы вязкого трения обычно оказываются существенно меньшими, чем силы упругости, и можно считать, что

$$F \ll C,$$

то есть *квадратичный пучок имеет малое демпфирование*. Поэтому все собственные числа располагаются комплексно сопряжёнными парами вблизи мнимой оси (смотри рис.6).

Покажем, что при выполнении условия

$$\hat{F} < 2 \cdot \theta \cdot \hat{C}^{1/2}$$

или, что эквивалентно,

$$\hat{F}^2 < 4 \cdot \theta^2 \cdot \hat{C},$$

где число $\theta \in [0, 1[$, весь спектр расположен внутри треугольников, выделенных на рис.2 штриховкой, причём острый угол γ этих треугольников определяется формулой

$$\gamma = \arcsin \theta.$$

Действительно, если собственное число λ_j подставить в уравнение квадратичного пучка, то мы получим вырожденную матрицу

$$\lambda_j^2 \cdot I + \lambda_j \cdot \hat{F} + \hat{C},$$

в ядре которой находится некоторый ненулевой вектор \vec{X} , то есть

$$(\lambda_j^2 \cdot I + \lambda_j \cdot \hat{F} + \hat{C}) \cdot \vec{X} = \Theta.$$

Тогда

$$\lambda_j^2 \cdot \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle + \lambda_j \cdot \langle \hat{F} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle + \langle \hat{C} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0,$$

и, если мы представим комплексное число λ_j в тригонометрической форме

$$\lambda_j = |\lambda_j| \cdot (\cos \varphi_j + i \cdot \sin \varphi_j),$$

то

$$\cos^2 \varphi_j = \langle \hat{F} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle^2 / [2 \cdot \langle \hat{C} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle \cdot \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle] \leq \theta^2,$$

что и требовалось показать.

Выберем оптимальный дробный шаг. Укажем порядок определения чисел r и m , используемых в алгоритме. При этом мы будем стремиться к

минимизации объема вычислений при заданной допустимой погрешности.

Предположим, что мы перешли от основного шага интегрирования Δt к дробному шагу $\Delta = \Delta t / 2^m$, а затем выполнили m циклов расчётов по приведенным выше формулам. Тогда относительная погрешность ε выполнения шага интегрирования Δt по формуле (17) совпадёт с величиной этой погрешности, вычисленной для явной схемы r -го порядка при шаге интегрирования Δ , и будет оцениваться формулой:

$$\varepsilon(m, r) = 2^m \cdot (\omega_M \cdot \Delta)^{r+1} / [(r+1)!].$$

Минимизируем эту величину при условии $m+r = const$ (что примерно отвечает одинаковой трудоемкости расчета) и приходим к выводу, что оптимальное дробление Δ шага интегрирования Δt соответствует условию:

$$\omega_M \cdot \Delta = (r+2) / 2^{r+1}, \quad (18)$$

а минимальное значение ε_m погрешности ε при данном уровне трудоемкости определяется формулой:

$$\varepsilon_m = [(r+2) / 2^{r+1}]^r / [(r+1)!]. \quad (19)$$

Результаты вычислений по формулам (18) и (19) приведены в таблице.

Таблица
Оптимальные сочетания параметров метода

Порядок схемы r	Дробный шаг $\omega_M \cdot \Delta$	Погрешность ε_m
1	0,75	$4 \cdot 10^{-1}$
2	0,50	$4 \cdot 10^{-2}$
3	0,31	$1 \cdot 10^{-3}$
4	0,19	$1 \cdot 10^{-5}$
5	0,11	$2 \cdot 10^{-8}$
6	0,06	$1 \cdot 10^{-11}$

Их анализ показывает, что разработанный метод позволяет производить интегрирование уравнений движения при минимальных вычислительных затратах с любым сколь угодно крупным шагом Δt ; погрешность вычисления может быть легко доведена при этом до погрешности округления чисел в ЭВМ.

При расчете систем с растянутым спектром по численно - аналитическому методу шаг Δt

обычно согласовывается с основным тоном колебаний и изменяется в пределах $0,1 \dots 1 \cdot (1/\omega_{\min})$, где ω_{\min} – минимальная собственная круговая частота.

Поэтому коэффициент 2^m дробления шага приблизительно равен отношению частот $\omega_{\max} / \omega_{\min}$. В подробных математических моделях, учитывающих движение большого числа масс, указанное отношение частот может достигать значений $10^3 \dots 10^6$, чему соответствует изменение числа m в пределах $10 \dots 20$.

Учтём специфику цепной системы. Покажем, что нам удастся дополнительно повысить эффективность применения этого метода для интегрирования уравнения (1) в тех случаях, когда матрицы F и C имеют трёх диагональную или блочную трёх диагональную структуру.

Такой вид матриц соответствует цепным (или *штурмовым*, смотри [6]) механическим системам, у которых каждая масса (кроме крайних) связана только с двумя соседними массами (рис.2,3,5).

При большом числе масс матрицы F и C таких систем оказываются сильно разреженными и имеют *коэффициент заполнения* [7]

$$\alpha \approx 3/n \ll 1.$$

Но анализ формул (9) и (11) показал, что блоки матричных коэффициентов также являются разреженными и $2 \cdot s + 1$ - диагональными (или $2 \cdot s + 1$ -блочно диагональными), причём число заполненных диагоналей составляет:

- у матрицы $A_k - (2 \cdot k + 1)$,
- у матрицы $W_0(2^k \cdot \Delta) - (2^{k+1} \cdot r - 1)$,
- у матрицы $U_0(2^k \cdot \Delta) - (2^{k+1} \cdot r + 1)$.

Поэтому для максимального снижения трудоемкости расчета целесообразно, не изменяя описанного выше алгоритма, ввести учет заполнения матриц ненулевыми элементами и использовать специальную процедуру перемножения симметричных матриц с $2 \cdot s + 1$ - диагональной (блочно диагональной) структурой.

Оценим перспективы обобщения метода. В заключение обсудим возможности использования данного метода для исследования нелинейных систем. Уравнения движения таких систем после линеаризации имеют прежний вид (1), но теперь матрицы M, F, C и Z (а чаще – только некоторые элементы этих матриц) при переходе от одного расчетного интервала (t_j, t_{j+1}) к другому интервалу изменяют свои значения.

Это означает, что в ходе выполнения расчета генерация матричных коэффициентов D_k должна производиться неоднократно, в худшем случае – для каждого нового шага интегрирования Δt . Заметим, что формула интегрирования (7) теперь содержит избыточную информацию, поскольку она дает общее решение задачи для данного интервала (t_j, t_{j+1}) , а мы используем только частное решение. Плата за избыточную информацию – увеличение трудоемкости алгоритма.

Этого недостатка лишен известный альтернативный численный *метод Рунге - Кутты* r - го порядка, трудоемкость которого на шаге интегрирования оказывается ниже приблизительно в $2 \cdot n$ раз.

Однако для получения допустимой погрешности ε_m метод Рунге-Кутта

будет проходить расчётный интервал (t_j, t_{j+1}) с малым дробным шагом

$$\Delta = \Delta t / 2^m,$$

что увеличит трудоёмкость в 2^m раз.

Подсчёт числа операций показывает, что при условии

$$2 \cdot n < 2^m / m \quad (20)$$

трудоёмкость использования метода Рунге – Кутты будет выше трудоёмкости матричного метода.

Условие (20) для дискретных математических моделей механических систем с растянутым спектром частот собственных колебаний выполняется с большим запасом. Поэтому для исследования таких систем (как линейных, так и нелинейных) матричный численно-аналитический метод может рассматриваться в качестве универсального расчётного метода.

Выводы.

1. Описана общая структура дискретной математической модели, используемой для исследования динамики цепной механической системы, и приведены примеры.

2. Разработан численно-аналитический метод интегрирования уравнений движения многомассовой механической системы, основанный на представлении общего решения соответствующей задачи Коши в виде линейной формы с матричными коэффициентами. Метод имеет явную расчётную схему и предназначен для исследования динамики систем, имеющих растянутый спектр частот собственных колебаний.

3. Выполнена оптимизация порядка расчётной схемы и величины используемого дробного шага с учётом допустимой погрешности расчёта.

4. Указан порядок использования метода для динамического анализа нелинейных систем.

Список литературы: 1. Григорьев А.Л., Молдавский Э.А., Тартаковский И.И. Операторный метод расчёта вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов» – Харьков, 1991. – С.78. 2. Григорьев А.Л., Тартаковский И.И. Численно – аналитический метод интегрирования уравнений движения квазилинейной системы с сосредоточенными и распределёнными параметрами // Тез. докладов межд. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции", – Самара, 1992.– С.77-78. 3. Григорьев А.Л. Матричный метод интегрирования уравнений движения механической системы // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. Сб науч. тр.– Харьков:ХГПУ,1999.-Вып.7.–Ч.1.–С. 262-268. 4. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Учебник. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2002. – 542 с. 5. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. 6. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950. 7. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1980.

Поступила в редколлегию 06.09.2011

А.Г. КОШОВИЙ, магістр, НАУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», Харків;
Г. І. КОШОВИЙ, канд. фіз.-мат. наук., доц.,
НАУ ім. М. Є. Жуковського «ХАІ», Харків

ОДНОВИМІРНІ САМОПОДІБНІ ФРАКТАЛИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У МОДЕЛЮВАННІ

На основі строгої теорії самоподібних фракталів проведено системний аналіз процесу побудови одного класу самоподібних фракталів зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Наведені приклади його застосування для впорядкування дофрактальних стрічкових ґраток. Розроблені математичні моделі процесу розсіювання плоскої електромагнітної хвилі та отримані асимптотичні вирази вихідних змінних.

На основе строгой теории самоподобных фракталов проведено системный анализ процесса построения одного класса самоподобных фракталов с переменной фрактальной размерностью. Приведены примеры его использования для упорядочивания предфрактальных ленточных решеток. Разработанные математические модели процесса рассеивания плоской электромагнитной волны и получены асимптотические выражения выходящих переменных.

The construction process of a self-similar fractal's (SSF) class, with variable Hausdorff dimension, is systematically analyzed. Examples of the SSF class usage for ordering prefractal strip grids are presented. Mathematical models of the scattering process of plane electromagnetic waves are developed. Asymptotic expressions of output variables are obtained.

Вступ. Класична математика описує той світ, який створила людина (будинки, дороги, квартали сіл та міст, промислові об'єкти тощо) і, зокрема, ті прилади і засоби, що використовуються нею. Але все те, що існувало здавна (гори, хмари, дерева і тому подібне) не може бути описаним за допомогою класичної математики. Це також стосується і різних процесів, що відбуваються з плином часу і є як природними, так і штучними. Тому виникла потреба у розробці нових теорій, які мають справу з досить дивними математичними утвореннями і можуть більш адекватно описувати зазначені природні об'єкти та процеси. До таких теорій відноситься теорія фракталів, основоположником якої вважається *Бенуа Мендельброт*, хоча перші фрактали були побудовані ще до його народження, але не носили таку назву. *Функція Карла Вейєрштрасса* та *досконала множина Георга Кантора* (ДМК) довго лякали і не сприймалися багатьма великими математиками. Але тільки з часом ці перші *самоподібні фрактали* (СПФ) були належно оцінені, коли знайшли своє практичне застосування у багатьох галузях діяльності людини. Щоб у цьому впевнитись досить заглянути на відповідні сторінки світової павутини "Інтернет".

У даній статті проводиться системний аналіз одного з класів СПФ зі змінною *розмірністю Хаусдорфа* (РХ) та на цій основі пропонується ряд математичних моделей (в тому числі і асимптотичної, для якої є явний розв'язок) процесу розсіювання плоскої електромагнітної хвилі *дофрактальними дифракційними ґратками* (ДФДГ). Спершу розглянемо процес тво-

рення найпростішого з класів СПФ зі змінною PX , що є першим узагальненням ДМК та проведемо його системний аналіз.

Системний підхід до процесу побудови СПФ. Принцип творення ДМК, а також його початковий об'єкт побудови можна в певних межах змінювати. При цьому будуть виникати нові множини з іншими позитивними значеннями фрактальної розмірності та нульовою топологічною розмірністю.

Коли змінити розміри сегментів утворювача класичної ДМК, тобто, наприклад, взяти сегменти відносного розміру 2α , що розташовані на відносній відстані один від одного, то в результаті нескінченного процесу зменшення утворювача та заміщення ним сегментів виникне СПФ з $PX \ln 2 / \ln \kappa$, де $\kappa = 1 + \beta / \alpha$. Для практичного його застосування потрібно виділити окремі елементи процесу творення, подати їх у аналітичному вигляді, а потім знову об'єднати у єдину систему.

Утворювач для даного класу СПФ можна досить просто формалізувати математично, використавши геометричні параметри та параметр t , для якого $|t| \leq 1$. Це будуть функції

$$2(\beta - \alpha) x_m^1(t) = (-1)^m \cdot \beta + \alpha \cdot t, \quad m = 1, 2;$$

верхній індекс у функцій позначає, що маємо першу стадію побудови чи утворювач (дивись рис. 1). Попередньою стадією вважаємо певний прямолінійний сегмент, скажімо $[-1, 1]$, що зветься *ініціатором*, який розміщуємо у основі деревовидної структурної схеми процесу побудови СПФ.

<i>Утворювач</i>	<i>Перша стадія</i>	<i>Друга стадія</i>	...	<i>n-та стадія</i>
$-\beta + \alpha t$	$-\beta - \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta - \beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$		$-\beta - \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$
	$-\beta + \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta - \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$
$\beta + \alpha t$	$-\beta + \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta + \beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$		$-\beta + \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$
	$\beta - \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta - \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$
	$\beta + \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta + \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$		$\beta + \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$

Рисунок 1 – Структурна схема побудови СПФ з $PX \ln 2 / \ln \kappa$.

Наступною (другою) стадією побудови є четвірка сегментів, що формалізується такими функціями:

$x_m^2(t) = (-1)^m(\beta + \beta_2) + \alpha_2 t$ для $m = 1, 4$ та $x_m^2(t) = (-1)^m(-\beta + \beta_2) + \alpha_2 t$ для ...;
де $\beta_2 = \beta / \kappa$ $\alpha_2 = \alpha / \kappa$.

Подібним чином на основі самоподібності визначаються функції, що відповідають чи, точніше, закріплюють на числовій осі сегменти наступних стадій. Для довільного натурального n , що визначає стадію побудови СПФ, маємо впорядковану послідовність функцій $x_m^n(t)$, де $m = 1, \dots, 2^n$. Коли цей процес зобразити у вигляді дерева, то на кожному рівні, що відповідає певній стадії творення, маємо розгалуження у точках $x_m^n(t)$ на дві гілки, які у певному розумінні повторюють все дерево. У цьому і полягає основна властивість самоподібності фракталів даного класу.

Геометрична ілюстрація процесу творення. Для геометричної ілюстрації цього процесу творення можна використовувати дуги різного розміру та форми, що опираються на кінці сегментів стадій побудови. На рис.2 показаний процес побудови СПФ з PX $d_\chi \approx 0.7067$, де використані дуги парабол $y = c(1 - t^2)$ і зображені три стадії творення. Вони вочевидь вказують на самоподібність структури фракталу.

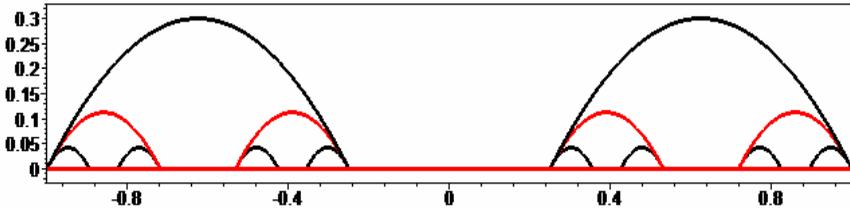


Рисунок 2 – Три стадії процесу побудови СПФ.

Але краще зображувати ці сегменти на різних рівнях, як це показано на рис.3. Тут зображено початковий сегмент та три стадії побудови, зокрема, вісім сегментів третьої стадії на рівні $y = 0.3$.

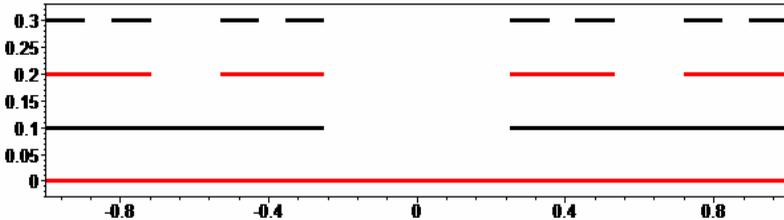


Рисунок 3 – Три стадії процесу побудови СПФ.

Слід зазначити, що алгоритм та програма розрахунку для геометричної ілюстрації створюється на основі структурної схеми і разом з нею є елементами системного аналізу процесу творення.

Наступним більш значним узагальненням є використання дуг різного розміру та форми, що опираються на кінці сегментів утворювача, а процес побудови залишити. В результаті структурна схема побудови визначає тільки абсциси дуг, а в якості ординат можна взяти функції певного типу, наприклад,

$$y = c(1-t^2)(1 \pm 2t)(1 \pm 4t).$$

Геометрична ілюстрація процесу побудови такого класу СПФ наведена на рис.4.

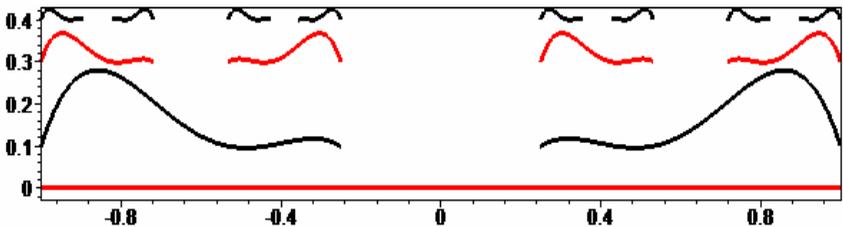


Рисунок 4 – Три стадії процесу побудови “дугового” СПФ.

Після геометричної ілюстрації процесу творення СПФ перейдемо до дослідження основних його властивостей.

Дослідження основних властивостей СПФ. Одну з них – властивість самоподібності – вже було зазначено і проілюстровано вище. Перейдемо до виявлення інших, що забезпечують саму назву фракталу.

З принципу творення СПФ та з його геометричної ілюстрації випливає, що лінійна міра досить швидко вичерпується. Доведемо цей факт аналітично.

Маємо розмір ініціатора $2(\beta + \alpha) = 2$, на першому етапі він зменшується на величину $2(\beta - \alpha)$. На другому етапі відкидаються два відрізки довжини $2(\beta - \alpha)/\kappa$, $\kappa = 1 + \beta/\alpha$, на третьому етапі – чотири відрізки довжини $2(\beta - \alpha)/\kappa/\kappa$ і так до нескінченності. Отже маємо геометричну прогресію

$$2(\beta - \alpha) \left[1 + \frac{2}{\kappa} + \frac{2^2}{\kappa^2} + \dots \right] = 2 \frac{\beta - \alpha}{1 - 2/\kappa} = 2(\beta + \alpha),$$

сума якої віднімається від довжини ініціатора, тобто лінійна міра СПФ є нульовою.

Можна визначити потужність СПФ, встановивши взаємно однозначну відповідність між сегментами певної стадії творення СПФ та сегментами тієї ж стадії творення класичної ДМК. Таким чином, потужність СПФ є континуум.

Далі слід зазначити, що СПФ містить точки, відмінні від кінців сегментів, яких зліченна кількість: їх можна занумерувати натуральними числами. Тобто у СПФ містяться точки двох типів, при чому потужність множини точок, відмінних від кінців сегментів, дорівнює континууму.

Розмірність Хаусдорфа обчислимо подібно до класичної ДМК. При побудові на n -тому кроці маємо 2^n сегментів довжиною $2\alpha/\kappa^n$ кожний. Тоді мінімальним δ -покриттям з $\delta = 2\alpha/\kappa^n$ буде покриття з 2^n елементів, тобто

$$H_{\delta}^s = \sum_{i=1}^{2^n} |U_i|^s = 2^n \cdot \left| \frac{2\alpha}{\kappa^{n-1}} \right|^s = \frac{2^n}{\kappa^{(n-1)s}} (2\alpha)^s.$$

Звідси граничний перехід $\delta \rightarrow 0$ (або $n \rightarrow \infty$) тільки у випадку $2/\kappa^s = 1$ дає відмінне від нескінченності та нуля значення хаусдорфівської S -міри. Щоб визначити критичне значення s , яке і є за означенням розмірністю Хаусдорфа візьмемо логарифм. В результаті отримаємо наступний вираз для обчислення розмірності Хаусдорфа $d_{\chi} = \ln 2 / \ln \kappa$.

Оскільки коефіцієнт самоподібності κ є більшим за двійку, то ця розмірність змінюється в інтервалі $(0,1)$. Таким чином, побудована досконала множина має дві основні властивості характерні для ідеальних з математичної точки зору конструкцій, які позначаються терміном *фрактал*. По-перше, побудована множина є самоподібною, а, по-друге, її фрактальна розмірність строго більше нуля, тобто більше топологічної розмірності.

На основі структурної схеми побудови СПФ, де міститься, зокрема, повна інформація про вихідні змінні моделі процесу творення, можна розглядати математичні моделі процесу розсіювання ДФДГ плоскої електромагнітної хвилі у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

Математичні моделі процесу розсіювання хвиль ДФДГ. Загальна постановка задачі розсіювання плоскої електромагнітної хвилі системою ідеально провідних та нескінченно тонких циліндричних стрічок є класичною [1].

Тут є новим провідний об'єкт, який змінює електромагнітне поле внаслідок взаємодії його з плоскою хвилею. Поперечний перетин системи являє собою відповідну кількість сегментів, що утворюють певну стадію творення СПФ зі змінною РХ, тому цю систему циліндричних стрічок доречно назвати *дофрактальною дифракційною ґраткою*.

Перехід від тривимірної фізичної моделі до двовимірної математичної моделі ґрунтується на основі теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. В результаті отримуємо двовимірні зовнішні *задачі Діріхле* (E - поляризація) та *Неймана* (H - поляризація) для двовимірного *рівняння Гельмгольца* з відповідною умовою випромінювання на нескінченності та крайовими умовами на кінцях сегментів [1]. За відомим методом інтегральних рівнянь (ІР) вказані двовимірні задачі переводяться до одновимірної задачі розв'язання систем ІР або інтегрально-диференціальних рівнянь (ІДР).

Коли на систему набігає плоска E - поляризована хвиля основною математичною моделлю є наступна система сингулярних ІР (СІР):

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^1 \phi_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|) dt = \frac{2i}{\pi} \exp[iq_1 x_\ell^n(\tau)]. \quad (1)$$

У випадку набігання плоскої H -поляризованої хвилі, систему ІДР можна перетворити, розв'язуючи її диференціальну частину і вона прийме такий вигляд

$$\sum_{m=1}^{2^n} \int_{-1}^1 \psi_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|) dt = A_\ell \exp[ix_\ell^n(\tau)] + B_\ell \exp[-ix_\ell^n(\tau)] - \frac{4q_2 \exp(iq_1 x_\ell^n(\tau))}{k(1 - q_1^2)}. \quad (2)$$

Вихідними змінними тут є наступні параметри: n – номер стадії побудови СПФ, q_1, q_2 – компоненти напрямного вектора плоскої хвилі та вихідні змінні $x_m^n(t)$ геометричної моделі побудови СПФ зі змінною РХ. Вихідними змінними цієї моделі є функції $j_m(t)$, що визначають щільність поверхневих струмів на стрічках.

Серед методів, що тут можна з успіхом застосовувати для визначення вихідних змінних, в першу чергу треба вказати на прямі чисельні методи [2,3]. Але особливо ефективним є чисельно-аналітичний *метод регуляризації Векуа-Карлемана* (РВК) [4-6] і в основному він буде використовуватись. В рамках цього методу на основі відомого *методу малого параметру* виникає

можливість суттєво спростити основні математичні моделі (1), (2) та отримати явні вирази для їх вихідних змінних. Так, у випадку моделі слабо наповненої дофрактальної дифракційної ґратки [7-8] маємо наступні асимптотичні вирази для шуканих змінних:

$$\varphi_m(t) \approx c_m / \pi \sqrt{1-t^2}, \psi_m(t) \approx -2i\alpha^2 \sqrt{1-t^2} / k.$$

Таким чином, з математичної точки зору, задача розсіювання плоско поляризованої електромагнітної хвилі слабо наповненою ДФДГ може вважатись розв'язаною. З точки зору практичних застосувань взагалі і виділення фрактальних властивостей зокрема, слід проводити дослідження інтегральних характеристик [7-8].

Висновки. На основі строгої теорії самоподібних фракталів проведено системний аналіз процесу побудови класу СПФ зі змінною розмірністю Хаусдорфа, який включає розробку структурної схеми процесу побудови, геометричні ілюстрації цього процесу, доведення вичерпності лінійної міри та розрахункової формули розмірності Хаусдорфа.

Наведено приклад застосування СПФ для моделювання дофрактальних дифракційних ґраток (ДФДГ) у вигляді кількох математичних моделей процесу взаємодії плоскої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок, що утворюють ґратку. Наводяться асимптотичні вирази для вихідних змінних зазначених моделей у випадку слабо наповнених дофрактальних ґраток.

Список літератури: 1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. – М.: Мир, 1964 – 428 с. 2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – К: Наук. Думка, 1984. – 344 с. 3. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с. 4. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2007.– № 3. – С. 451-455. 5. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. 2007. – № 1. – С. 141-147. 6. Кошевой Г. И. Некоторые классы самоподобных фракталов и их использование в радиофизике // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – Т.12, № 11. – С. 28-32. 7. Кошовий Г. І. Системний підхід до дослідження дофрактальних дифракційних ґраток // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2011.– № 1. – С. 3-10. 8. Кошовий Г. І., Шматько О.О. Взаємодія плоскої Е-поляризованої хвилі з слабо наповненою дофрактальною дифракційною решіткою (асимптотична модель) // Журнал нано- та електронної фізики. – 2011. – Т.3, № 2.– С.19-26.

Надійшла до редколегії 01.09.2011

А. М. ЛЕВТЕРОВ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
ИПМаш НАН Украины, Харьков

АНАЛИЗ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ В СТРАНЕ И В МИРЕ. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНЫХ ДВС

Наводиться аналіз енергоспоживання в країні і в світі, умов появи альтернативних палив та заміни ними традиційного органічного палива. Обґрунтовується конкурентоздатність ДВЗ як основного перетворювача енергії на тривалий термін. Пропонується методологія дослідження основних показників ДВЗ, що працюють на різноманітних видах палива. Методологія надає можливість прогнозувати показники двигуна, що визначають його споживачські якості.

Приводится анализ энергопотребления в стране и в мире, условий появления альтернативных топлив и замены ими традиционного органического топлива. Обосновывается конкурентоспособность ДВС как основного преобразователя энергии на длительный период времени. Предлагается методология исследования основных показателей ДВС, работающих на различных видах топлива. Методология дает возможность прогнозировать показатели двигателя, которые определяют его потребительские качества.

Analysis of power consumption in the country and the world, conditions of appearing alternative fuels and substitution of conventional organic fuel to alternative ones is being carried out. Competitiveness of ICE as the main energy converter for a long period is proved. Methodology is offered for investigating the main performances of transport ICE working on different types of fuels. Methodology allows forecasting the main engine performances which identify its consumer qualities.

Введение и анализ энергопотребления в стране и мире. Никогда прежде человечество не подвергалось таким перегрузкам, как в начале 3-го тысячелетия. Человек вступил в противоречие с результатами своего же труда, стал предельно зависим от научно-технических достижений, порождающих все новые проблемы. Среди проблем общечеловеческого масштаба, определяющих судьбу цивилизации, важное место занимают глубоко взаимозависимые проблемы экологии и энергопотребления. Вовлечение новых видов топлива на фоне истощения традиционных источников энергии, количественный и мощный рост потребителей энергии приводит к нарушению баланса в окружающей среде.

К началу 21 века в суммарном энергопотреблении в мире доля нефти составила 40 %, углей – 27 %, газа – 23 %, атомной энергии – 7 %, прочих видов энергии – 3 % с динамикой структуры потребления, представленной на рисунке 1. За 100 лет XX века количество существенных источников энергии увеличилось с двух до шести, причем ни один из новых источников не имел тенденции к сокращению своего производства [1].

На рисунках 2 и 3 представлены два прогноза на изменение энергопотребления: по прогнозам академика Лаверова (Россия) и по данным междуна-

родного информационного агентства статистики и энергетического анализа (США) [1, 2].

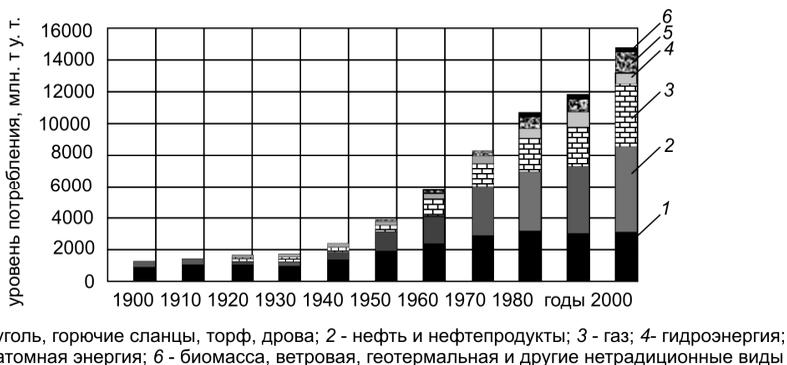


Рисунок 1 – Динамика структуры потребления энергоресурсов в мире в XX столетии.

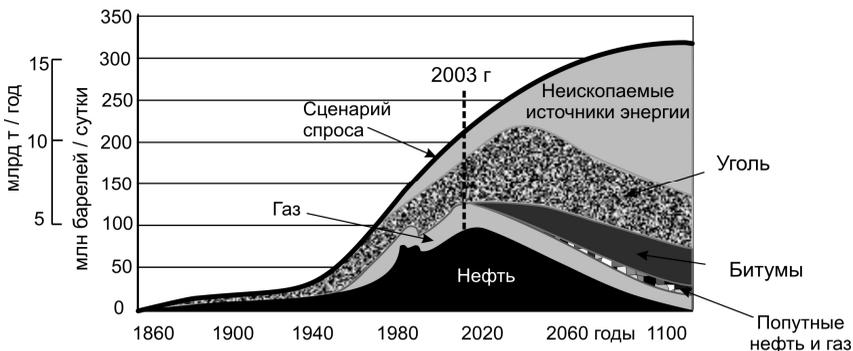


Рисунок 2 – Потребление различных ископаемых источников энергии в мире: прогноз и реальность.



Рисунок 3 – Реальное мировое потребление нефти и прогноз спроса до 2125 года.

Единодушие относительно уменьшения доли нефти к концу 21 века неоспоримо, а, краткосрочные прогнозы и оценка текущего состояния энергопотребления свидетельствуют о неуклонном росте глобального энергопотребления на фоне незначительного уменьшения динамики потребления нефти и небольшого роста потребления природного газа (ПГ) и угля. За последнее 10-летие среднегодовой темп роста потребления нефти был в 2 раза ниже, чем ПГ и 2,5 раза ниже, чем угля. Надо отметить, что нетрадиционные источники энергии и реально, и в прогнозах мало присутствуют на рынке энергоресурсов (рис.4) [1, 3].

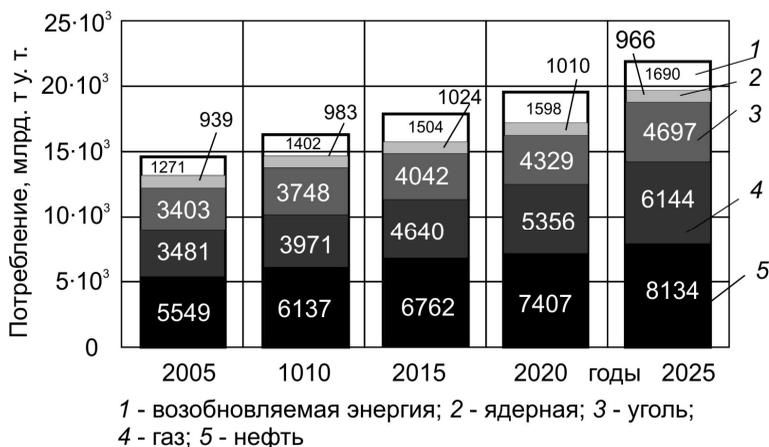


Рисунок 4 – Мировое потребление различных энергоресурсов в период с 2005 до 2025 года.

Энергетическая безопасность любой страны, прежде всего, определяется обеспеченностью запасами углеводородного сырья, эффективностью его добычи, переработки и использования. Время дешевой энергии закончилось, однако зависимость от импорта (по ожиданиям прогнозов) будет расти. Для Украины энергетический эквивалент поставок органического сырья в 2005 году составил 60,7 % от общего энергопотребления, и это большая цифра. С учетом геополитического, макроэкономического, социального и научно-технического развития Украины Кабинетом министров была принята «Энергетическая стратегия Украины на период до 2030 года» [4], направленная на уменьшение энергоемкости отечественного производства, развитие экспортного потенциала энергетики, оптимизацию добычи собственных ресурсов, привлечение нетрадиционных источников энергии.

Рисунок 5 отражает прогноз потребления органического топлива в Украине до 2030 года [4], а таблица 1 – сравнение структуры потребления первичных ресурсов в Украине к 2030 году и ЕС [5]. На ближайшую перспективу в Украине, как и во всем мире, очевидна большая доля потребления ор-

ганического сырья, а возобновляемые источники энергии на настоящий момент составляют лишь 0,8 % от общего энергопотребления в стране.

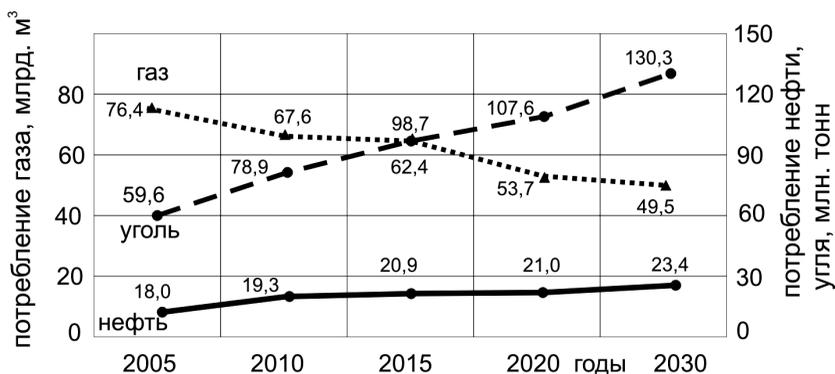


Рисунок 5 – Прогноз потребления угля, нефти и природного газа в Украине.

Таблица

Баланс спроса на первичные энергоресурсы в ЕС и Украине к 2030 году

Энергетические ресурсы, %	Украина	ЕС
Твёрдое топливо	33,7	15,5
Нефть	11,2	33,8
Газ	18,8	27,3
Ядерная энергия	21,4	11,1
Возобновляемые источники	15,6*	12,2

* – с учетом шахтного метана

Таким образом, роль традиционных энергоносителей в мировом энергобалансе до 2025 – 2030 года принципиально не изменится. В отдаленной перспективе возможен постепенный переход от нефти к газу с последующим сдвигом к возобновляемым источникам энергии. Углубление энергетического кризиса будет расширять экономические границы использования альтернативных топлив. Сокращение потребления нефти может начаться раньше, если будет достигнут прогресс в области водородных технологий. В энергопотреблении Украины предполагается значительно уменьшить долю нефти и газа в общем балансе за счет твердого топлива, ядерной энергетики и возобновляемых источников энергии.

Как известно, 80 % всех производных нефти идет на различного рода транспорт, а большая доля моторного топлива – на нужды автомобильного транспорта, использующего в качестве силовых установок двигателя внутреннего сгорания. Автомобильный парк планеты на текущий момент оценивается примерно в 900 млн. единиц. Этот показатель будет расти, если учесть

уровень автомобилизации населения и существенное изменение структуры перевозок в пользу автотранспорта. Следовательно, будет расти и спрос на моторные топлива. На примере динамики изменения потребности в топливе для транспорта США (рис.6) видно, как растет превышение потребности над производством нефтяного топлива. В США 95 % транспорта зависит от нефтяного топлива, и потребляет транспорт 67 % всей используемой нефти [6, 7]. Очевидно, что такая ситуация характерна для многих стран, во всяком случае, энергодефицитных.

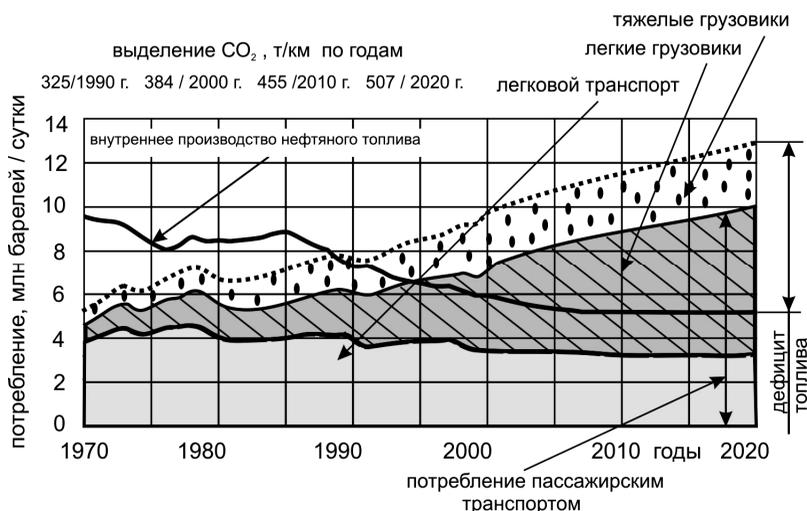


Рисунок 6 – Производство и потребности нефтяного топлива для автомобильного транспорта США.

Транспорт имеет большое влияние на экономику и национальный торговый баланс любой страны. Кроме того, с автомобильным транспортом связана проблема загрязнения окружающей среды: в отработавших газах любого поршневого ДВС присутствует около 280 различных компонентов, часть из которых токсичные вещества. По данным американского агентства по охране окружающей среды [8] доля вредных выбросов в атмосферу, которую «обеспечил» транспорт к началу третьего тысячелетия составляет: 33% CO₂, 44% сажи, 53% оксидов азота, 79% угарного газа, 25% макрочастиц, 13% свинца, 7% оксида серы.

Постановка задачи и методы исследования. Технический уровень ДВС, главная функция которого эффективное преобразование химической энергии топлива в механическую работу, по-прежнему определяет уровень конкурентоспособности транспортных средств, а проблема экономии традиционного топлива и защиты окружающей среды на текущий момент выдвигается

гает ряд задач, связанных с эксплуатацией и созданием тепловых энергоустановок: совершенствование конструкции и рабочих процессов ДВС разного типа; использование альтернативных топлив всех видов и типов; создание комбинированных энергоустановок; переход на электромобили и автомобили с топливными элементами. Для своего решения каждая из этих задач сопряжена с большим объемом разносторонних исследовательских работ.

По итогам проведенного анализа представляется целесообразным комплексное рассмотрение одной из задач исследования транспортных ДВС на традиционных и альтернативных топливах:

- изучение моторных свойств топлива-претендента;
- прогнозирование основных характеристик ДВС, использующих то или иное топливо, расчетный выбор оптимальных регулировочных параметров двигателя для проведения натурных (стендовых) испытаний;
- способы и методы адаптации ДВС к виду топлива;
- прогнозирование моторесурса как важнейшего показателя надежности двигателя и его обеспечение в эксплуатации;
- экспериментальная оценка проводимых исследований ДВС на моторных стендах.

ДВС можно рассматривать как сложную открытую неоднородную динамическую стохастическую систему. При рассмотрении установившегося режима работы двумя последними свойствами двигателя как технической системы можно пренебречь [9]. Сюда же необходимо добавить свойство иерархичности двигателя как технической системы. Иерархичность структуры объекта является основой для разработки методики, алгоритмов и программ исследования объекта в целом и его элементов.

В подтверждение того, что ДВС – сложная техническая система, свидетельствуют следующие признаки [10]:

- многообразии выполняемых функций;
- наличие большого числа составных частей, образующих единое целое как конструктивно, так и функционально;
- разветвленный характер связей между отдельными частями;
- наличие сложно организованного управления;
- проявление свойств при взаимодействии с внешней средой, которая оказывает влияние на их формирование;
- наличие элементов случайности в реакции системы на внешние воздействия.

Сюда же по Шеннону Р. [11] можно добавить: изменчивость, противоинтуитивное поведение, тенденции к ухудшению характеристик.

Используя системные понятия применительно к ДВС, значительно легче применить в исследовании и проектировании двигателей подходы, теории и методы, нашедшие успешное распространение в других прогрессивных областях техники. Увеличение номенклатуры составных частей, усложнение конструкции двигателя, улучшение его качества в связи с возрастающими требованиями потребителя; регламентированные ресурсы математических

средств диктуют необходимость применения в исследованиях ДВС именно такого подхода, способного учитывать взаимодействие всех составляющих системы. На вооружение берется физическое, математическое моделирование и натуральный эксперимент.

Задач исследования сложных систем две: задача анализа_связана с изучением свойств и поведения системы в зависимости от ее структуры и значений параметров; задача синтеза_сводится к выбору структуры и значений параметров, исходя из заданных свойств системы. Нередко задача синтеза ставится как экстремальная задача. Методов, позволяющих строго формально решать задачи синтеза почти нет (кроме случая конечных автоматов) [10]. Поэтому на практике приходится пользоваться различными неформальными приемами синтеза сложных систем. В конце концов, все они сводятся к перебору вариантов или «синтезу через анализ», когда известными методами анализа вариант исследуется, затем определяются всевозможные показатели в пространстве варьируемых параметров.

Функционирование физического объекта, каковым является ДВС, определяется взаимосвязанной совокупностью процессов различной физической природы (механических, газо- и гидродинамических, физико-химических, информационных) и внешними факторами (рис. 7).

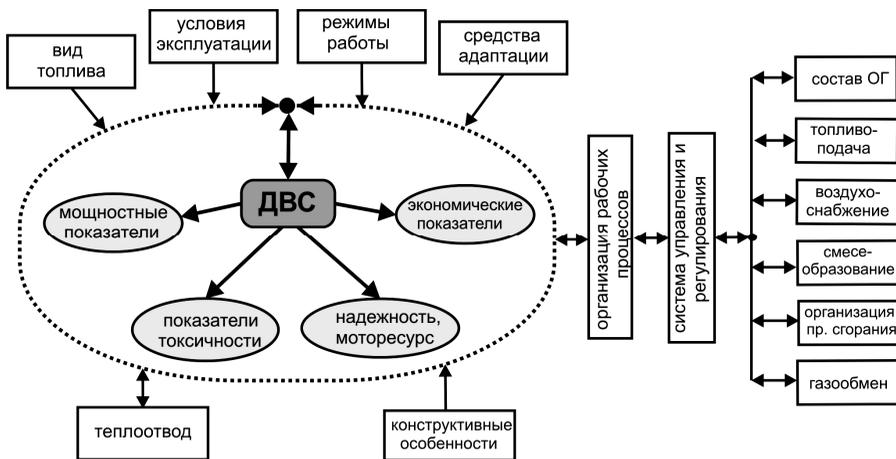


Рисунок 7 – Схема взаимовлияния систем двигателя и внешних факторов на его основные показатели.

Формализация большинства процессов сложна и трудна в описании, тем более, во взаимосвязи процессов часто невозможна. В этом случае помогает концепция системы, системный подход: систему приходится расчленять на подсистемы, сохраняя связи между ними, обеспечивающие учет взаимодействия. Каждый элемент иерархической системы двигателя можно рассматри-

вать как самостоятельный объект, так как он является вполне определенной функциональной единицей. В конечном итоге все применяемые на практике математические модели с определенной степенью допущений достаточно подробно описывают процессы в отдельных составляющих ДВС объектах, а математическая модель системы ДВС в целом является многоуровневой конструкцией элементов–подсистем, объединенных системой отношений. Каждая подсистема представляет собой математическую модель того или иного объекта ДВС.

Так как основные требования к качеству ДВС касаются мощностных, экологических, экономических и прочностных показателей, в силу сложности самой системы ДВС и связей ее объектов оптимальный вариант современного двигателя – всегда взвешенный компромисс между различными требованиями к нему. Этот факт, безусловно, определяет необходимость прогнозирования основных показателей ДВС как при его проектировании и модернизации, так и при исследовании влияния на характеристики традиционных и новых видов топлив.

В этой связи представляется возможным осуществлять прогнозирование по двум направлениям: путем анализа расчетно-экспериментальных исследований рабочего цикла двигателя с определением мощностных, экономических показателей, показателей токсичности и по результатам расчетно-экспериментальных исследований теплового и напряженно-деформированного состояния наиболее нагруженных элементов, обеспечивающих надежность и срок службы двигателя.

Кроме того существует проблема адаптации к новым топливам существующих двигателей, технический парк которых разрабатывался в расчете на жидкое нефтяное топливо. С ориентировкой на нефтяное топливо двигатели конструировались, создавалась инфраструктура, разрабатывались соответствующие теоретические положения. Поэтому на начальном этапе внедрения биотоплив приходится идти на компромисс между требованиями к новым топливам и их возможностями с учетом того, что это топлива новой, особой природы, и соответственным образом приспособлять к этому системы двигателей.

Для численного исследования рабочего цикла двигателя в требуемых диапазонах изменения режимных, конструктивных и регулировочных параметров целесообразно использовать термодинамическую модель на базе 2-х зонной или многозонной модели сгорания с учетом диссоциации продуктов сгорания [12, 13]. Такая модель позволяет провести качественный анализ вредных составляющих отработавших газов – CO, NO, CO₂ и, что немаловажно, индикаторных показателей в полном объеме с достаточной достоверностью и при минимальных затратах расчетного времени. Кроме того, возмож-

но определение оптимального диапазона регулировочных параметров двигателя, что позволяет выбрать направление экспериментальных исследований и сократить материальные и временные затраты на них.

Работоспособность и надежность ДВС в большинстве случаев определяется наиболее нагруженной его составляющей – цилиндропоршневой группой (ЦПГ), которая, в свою очередь, представляет собой сложную систему элементов, материал, конструкция и тепловая нагруженность которых могут существенно влиять на оптимальные параметры ЦПГ и двигателя в целом.

При исследовании функциональности самого нагруженного объекта ДВС – цилиндропоршневой группы необходимо рассмотреть тепловое и напряженно– деформированное состояние ее элементов в случае

- замены материала деталей ЦПГ;
- изменения конструкции или геометрии;
- форсирования или дефорсирования двигателя,

которые возможны с применением нового топлива. Для этой цели подходят хорошо зарекомендовавшие себя расчетные программные комплексы «Крок», «COSMOS», «ANSYS», другие.

Выводы. Таким образом, анализ энергопотребления в стране и мире, условий появления альтернативных топлив и замены ими традиционных топлив дает возможность утверждать, что ДВС в обозримом будущем останется самым конкурентоспособным преобразователем энергии, что, в свою очередь, определяет необходимость его исследований как на стадии проектирования и модернизации, так и в эксплуатации. Предлагаемая методология исследования транспортных ДВС, работающих на разного вида топливах, позволяет прогнозировать основные показатели двигателя, определяющие его потребительские качества, и принимать решение относительно объекта в целом.

Это особенно важно, когда речь идет о смесевых топливах, когда необходимо исследование характеристик двигателя на каждой топливной композиции, так как использование новых видов топлив влечет изменение акцентов в борьбе с токсичностью самих топлив, токсичностью отработавших газов двигателей и в защите элементов двигателей от агрессивного воздействия топлив.

С использованием вышеизложенной методологии в ИПМаш НАН Украины выполнен цикл расчетно-экспериментальных исследований и получен опыт прогнозирования основных характеристик ДВС разного типа и назначения для случаев использования таких моторных топлив как бензин, нефтяное дизельное топливо, бензоэтанол и смесевое биодизельное топливо, природный газ и биогаз. С помощью численного моделирования были получены показатели экономичности, токсичности, прочности двигателей, работающих

на перечисленных видах моторных топлив.

Экспериментальная часть исследований реализована на моторных стендах с использованием двигателей с искровым зажиганием и жидкостной системой питания 4Ч 7,9/8,0, 4Ч 7,5/7,1; газовой топливной системой 2Ч 10,5/12 (на базе дизеля Д21), а также дизелей 1Ч 8,5/11 и 2Ч 10,5/12 (Д21А).

Результаты исследований изложены в отчетах о научной деятельности и публикациях [14 – 22, другие].

Список литературы: 1. *Лавров Н. Л.* Топливоэнергетические ресурсы. //Вестник Российской академии наук. – 2006. – том 76. – №5. – С 398 – 408. 2. Long Term World Oil Supply // U.S Energy Information Administration. – 2000. – July, 28. – Режим доступа: www.eia.doe.gov. 3. *Иванов А. С., Матвеев И. Е.* Мировой энергетический рынок: «Перезагрузка» в контексте глобального финансово-экономического кризиса. //Бурение и нефть.– 2009.– №11.– С. 3 – 7. 4. Энергетическая стратегия Украины на период до 2030 года. Принята распоряжением КМ Украины от 15 марта 2006 г., № 145-р.– 129 с. 5. *Capros P.* EU energy trends to 2030 // *Mantzos, P. Capros, N. Tasios, A. De Vita* // EC Directorate-General for Energy in collaboration with Climate Action DG and Mobility and Transport DG –2009.– 184 p.– Режим доступа: Europa server (<http://europa.eu>). 6. Transportation Energy Data Book: Edition 25 DOE/ORNL.– 2006.– 332 p. 7. Annual Energy Outlook 2000 With Projections to 2020 //EIA-0383(2000).– 1999.– 250 p.– Режим доступа: www.eia.doe.gov. 8. David Rodgers Putting Advanced Transportation Technologies to Work for Clean Air and Energy Security// The Mobile Source Technical Review Subcommittee.– U.S. Department of Energy.– 2001. 9. *Исерлис Ю. Э., Мирошников В. В.* Системное проектирование ДВС. – Л.: Машиностроение, 1981.– 254 с. 10. *Бусленко Н. П.* Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978.– 400 с. 11. *Шеннон Р.* Имитационное моделирование систем и наука. – М.: Мир, 1978.– 423 с. 12. *Куценко А. С.* Моделирование рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания на ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1988. – 100 с. 13. *Кулеиов А. С., Грехов Л. В.* Математическое моделирование и компьютерная оптимизация топливоподачи и рабочих процессов ДВС. – М.: МГТУ, 2000.– 64 с. 14. *Левтеров А.М., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю.* Исследование характеристик двигателя с искровым зажиганием, работающего на бензоэтанольных топливных композициях. // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ "ХПИ". – 2008. – № 1. – С. 52-57. 15. *Левтеров А.М., Мараховский В.П., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю.* Результаты расчетно-экспериментальных исследований характеристик автомобильного двигателя при использовании бензоэтанольных смесей. // Автомобильный транспорт: сб. научн. тр. – 2008. – № 23. – С. 100-103. 16. *Левтеров А.М., Авраменко А. Н.* Трехмерная конечно элементная модель анализа нестационарных термоупругих напряжений поршня быстроходного дизеля. //Материалы Х111 Международного конгресса двигателестроителей. – 2008. – № 1. – С. 49 – 55. 17. *Левтеров А. М., Белогуб А. В.* Контроль качества проектирования поршня быстроходного автомобильного двигателя. //Двигатели внутреннего сгорания.– 2005.– №1.– С.135 – 137. 18. *Левтеров А. М., Абрамчук Ф. И* Опыт конвертации дизелей в газовые двигатели с искровым зажиганием. //Автомобильный транспорт: сб. научн. тр. – 2007. – № 21. – С. 94–97. 19. *Левтеров А.М., Строков А. П. Авраменко А. Н.* Разработка модели нестационарной термоупругости составного поршня транспортного дизеля. //Проблемы машиностроения.– 2009.– №2.– С. 76–84. 20. *Левтеров А.М., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю.* Использование альтернативных топлив в транспортных ДВС. // Автомобильный транспорт: сб. научн. тр. – 2010. – № 27. – С. 78– 82. 21. *Левтеров А.М., Левтерова Л.И., Гладкова Н.Ю.* Образование монооксида азота и исследование влияния на его эмиссию регулируемых параметров двигателя и вида используемого топлива. //Двигатели внутреннего сгорания.– 2010.– №2.– С. 113 – 117. 22. *Левтеров А. М.* Анализ теплового и напряженно-деформированного состояния составного поршня форсированного дизеля. //Авиационно-космическая техника и технология: Сб. науч. Трудов.- Харьков.- 2000.– Вып. 19.– С. 268 – 270.

Поступила в редколлегию 14.09.2011г.

А.М. ЛЕВТЕРОВ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН
Украины, Харьков;
Л.И. ЛЕВТЕРОВА, вед. инженер, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Н.Ю. ГЛАДКОВА, вед. инженер, ИПМаш НАН Украины, Харьков

МЕТОД АНАЛИТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО СГОРЕНИЯ НА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ТОПЛИВАХ

Пропонується числовий метод дослідження основних характеристик ДВЗ в широкому діапазоні варіювання чинників, що впливають на якість робочого циклу двигуна. Такий метод дозволяє визначити та звужити інтервал експериментальних досліджень, і таким чином скоротити на них витрати часу та коштів. Це є особливо важливим при дослідженні сумішевих палив різноманітних композицій.

Предлагается численный метод исследования основных характеристик ДВС в широком диапазоне изменения параметров влияющих на качество рабочего цикла двигателя. Такой метод позволяет определить и сузить интервал экспериментальных исследований, и таким образом сократить трудовые и денежные затраты на них. Это является особенно важным при исследовании смесевых топлив различных композиций.

Numerical method of investigating the main performances of internal combustion engine in a wide range of factors influencing on quality of operating cycle has been offered. This method allows defining and narrowing the interval of experimental researches reducing in such a way their time and material factors that is especially important for investigating of different composite fuels.

Введение и постановка задачи. Энергоресурсы – запас носителей первичной энергии, доступных для извлечения и использования, постепенно истощаются; все прогнозы сходятся на том, что к концу текущего столетия добыча нефти достигнет параметров, отвечающих началу развития нефтяной промышленности в 60–х годах 19 столетия [1, 2]. Человечество пытается искать замену нефти и находит ее, привлекая альтернативные источники энергии, в том числе альтернативные топлива. Основная масса нефтяного сырья идет на нужды транспорта, транспорт создает проблему нехватки топлива и проблему защиты окружающей среды от вредных выбросов с отработавшими газами двигателя. По данным американского агентства по охране окружающей среды (ЕРА) [3] доля вредных выбросов в атмосферу транспортными средствами к началу 3-го тысячелетия составила: CO₂ – 33%, сажи – 44%, оксидов азота – 53%, угарного газа – 79%, микрочастиц – 25%, свинца – 13%, оксида серы – 7%.

Изменение потребления доли энергетического сырья в ближайшей перспективе представлено на рис.1; очевиден небольшой прирост возобновляемых источников энергии и стабильный рост потребления газа и нефти [1]. Тем не менее, проблема замены традиционных моторных топлив альтернативными остается как при проектировании двигателей внутреннего сгорания,

так и при эксплуатации существующего многочисленного парка транспортных двигателей. До сих пор мало изучено влияние воздействия новых видов топлива на конструкционные материалы двигателей, требуют тщательных проработок методы адаптации рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания к использованию новых топлив. Проведение подобных исследований связано с большими затратами на натурные испытания. Математическое моделирование процессов тепловых двигателей способно уменьшить затраты времени и средств, предоставив предварительный прогноз о показателях двигателя на том или ином топливе; особенно это касается смесевых топлив, когда необходимо исследование каждой топливной композиции.

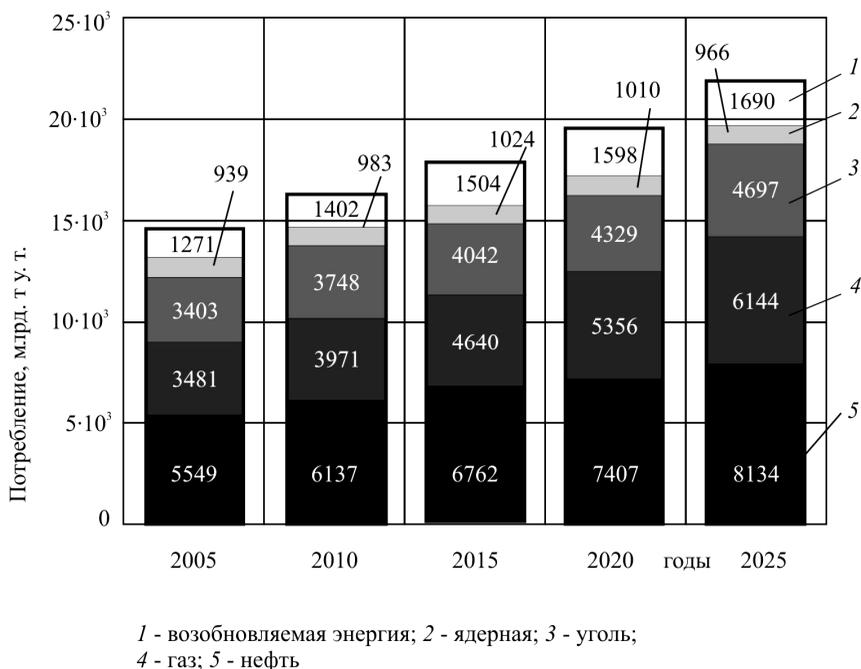


Рисунок 1 – Реальное и прогнозируемое потребление различных энергоресурсов в мире на период с 2005 до 2025 года.

Проведение численного эксперимента по прогнозированию характеристик ДВС, его показателей токсичности и экономичности в широком диапазоне изменения параметров двигателя, влияющих на качество его рабочего цикла, выполненное для каждой топливной композиции, позволяет сузить используемый в экспериментальных исследованиях интервал регулировочных параметров до оптимальной величины. На рис. 2 представлен алгоритм реализации такого метода исследования, в основу которого положено математическое моделирование рабочих процессов двигателя с искровым зажига-

нием, позволяющее исследовать характеристики двигателя на альтернативных топливах: бензоэтанольных топливных смесях, природном газе и биогазе, водороде.

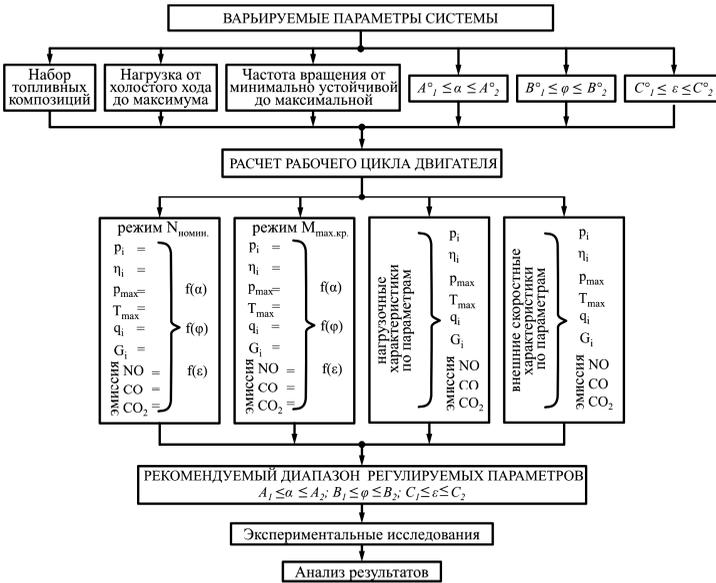


Рисунок 2 – Структурная схема реализации метода исследования показателей ДВС.

Здесь $p_i, \eta_i, p_{max}, T_{max}, g_i, G$ – расчетные индикаторные показатели двигателя; NO, CO, CO₂ – расчетные показатели вредных выбросов с отработавшими газами. Задаваемые пределы изменения варьируемых параметров системы: коэффициент избытка воздуха – $A^{\circ}_1 \leq \alpha \leq A^{\circ}_2$; угол опережения зажигания – $B^{\circ}_1 \leq \phi \leq B^{\circ}_2$; степень сжатия – $C^{\circ}_1 \leq \epsilon \leq C^{\circ}_2$. Рекомендованный диапазон изменения регулировочных параметров двигателя для коэффициента избытка воздуха составляет – $A_1 \leq \alpha \leq A_2$, для угла опережения зажигания – $B_1 \leq \phi \leq B_2$, для степени сжатия – $C_1 \leq \epsilon \leq C_2$.

Математическая модель. Выбранная для расчета рабочего цикла поршневого двигателя квазимерная термодинамическая модель, опирающаяся на 2-х зонную модель сгорания и знание теплофизических свойств используемых топлив [4], дает вполне достоверные результаты мощностных, экономических и экологических показателей двигателя [5, 6], а реализация алгоритма расчета на современной ЭВМ занимает приемлемое счетное время, что позволяет проводить качественное сравнение характеристик двигателя как на отдельных композициях смесевых топлив, так и на разных видах топлива.

Упрощенная математическая модель помогает получить оптимальное решение как функцию главных переменных и выстроить с ее помощью ряд прогнозов, а при детальном исследовании (если такое требуется) осуществлять проверку и расчеты с помощью существующих программных комплексов. Таким образом, используя результаты численного эксперимента, можно натурный эксперимент (стендовые испытания) проводить только для нескольких топливных композиций и прогнозировать характеристики двигателя на прочих соотношениях исследуемого смесового топлива.

Полная математическая модель рабочего цикла двигателя объединяет все его процессы, начиная с процесса сжатия и заканчивая процессом наполнения. В процессе реализации алгоритма расчета параметров двигателя часто встречающиеся подзадачи, как-то: определение теплофизических свойств индивидуальных веществ и рабочей смеси; определение температуры смеси по заданным энтальпии, энтропии или внутренней энергии; определение расхода газа при истечении через заданные сечения; определение констант равновесия химических реакций; определение равновесного состава продуктов сгорания и кинетики образования монооксида азота оформлены в отдельные математические модули.

Система определяющих уравнений для термодинамической системы на стадии сгорания в случае двухзонной модели, когда рабочее вещество разделено на две зоны – зону заряда и зону продуктов сгорания, представима в виде

$$(1-x) \cdot u(T_1, g_1) + x \cdot u(T_2, g_2) = u ; \quad (1)$$

$$(1-x) \cdot R(g_1) \cdot T_1 + x \cdot R(g_2) \cdot T_2 = p \cdot v ; \quad (2)$$

$$s_T(g_1, T_1) - R(g_1) \cdot \ln p = s ; \quad (3)$$

$$c_i = \varphi(T_2, v_2), \quad i = 1, \dots, N ; \quad (4)$$

$$g_{2i} = \mu_i \cdot v_2 \cdot c_i, \quad i = 1, \dots, N ; \quad (5)$$

$$v_2 = R(g_2) \cdot T_2 / p, \quad (6)$$

где индекс 1 относится к параметрам зоны заряда, 2 – к параметрам зоны продуктов сгорания; x – доля выгоревшей топливовоздушной смеси, задается тем или иным законом выгорания, $u(T_k, g_k)$ – удельная внутренняя энергия соответствующей зоны, v_k – удельный объем соответствующей зоны, u – удельная внутренняя энергия системы, v – удельный объем системы, $R(g_k)$ – газовая постоянная, g_k – вектор равновесного состава смеси соответствующей зоны в массовых долях, p – давление системы, s – удельная энтропия зоны заряда, s_T – ее температурная составляющая, c – вектор концентраций компонент, μ – молярная масса i -го компонента смеси, N – соответствует количеству компонент в смеси, φ – численная операция решения системы нелинейных алгебраических уравнений для определения равновесных конце-

нтраций компонент продуктов сгорания N, O, H, N₂, O₂, H₂, NO, OH, CO, CO₂, H₂O.

Система уравнений (1 – 3) содержит три неизвестных T_1, T_2, p и при заданных x, u, s, v, g_1, g_2 может быть разрешима численно методом Ньютона, что реализуется отдельной процедурой. Уравнение (6) (уравнение газового состояния зоны продуктов сгорания) включено для полного замыкания системы уравнений (1– 6). Взаимосвязь между переменными системы представляет собой замкнутую структуру численных операторов, предопределяющих итерационный процесс, критерием завершения которого является совпадение с заданной степенью точности значений T_2 и v_2 на входе и выходе вышеупомянутой системы уравнений $(T_2, v_2)_{(k+1), вх} = (T_2, v_2)_{k, вых}$.

Расчет равновесного состава продуктов сгорания дополняется отдельной процедурой вычисления, включающей три обратимых химических реакции, на базе которых записывается дифференциальное уравнение изменения концентраций монооксида азота

$$\frac{dc_{NO}}{dt} = k_1 c_N c_{OH} - \bar{k}_1 c_H c_{NO} + k_2 c_N c_{O_2} - \bar{k}_2 c_O c_{NO} + k_3 c_{N_2} c_O - \bar{k}_3 c_N c_{NO}, \quad (7)$$

где k_1, k_2, k_3 и $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ – константы скорости прямой и обратной реакций соответственно. Необходимые для определения c_{NO} равновесные концентрации продуктов сгорания определяются в соответствии с температурой и временем на каждом шаге интегрирования. На достаточно малом интервале времени Δt , известных концентрациях и температуре аналитическое интегрирование (7) дает следующий результат

$$c_{NO}(t + \Delta t) = e^{a\Delta t} (c_{NO}(t) + \frac{b}{a} (1 - e^{-a\Delta t}));$$

$$a = -(\bar{k}_3 c_N + \bar{k}_2 c_O + \bar{k}_1 c_H);$$

$$b = k_3 c_O c_{N_2} + k_2 c_O c_N + k_1 c_N c_{OH}$$

на участках сжатия и расширения математической моделью процесса будет уравнение закона сохранения энергии в дифференциальной форме

$$dU = -pdV + dQ. \quad (8)$$

Для участка расширения оно дополняется системой уравнений, определяющих состав продуктов сгорания. В случае моделирования процесса сгорания двухзонной моделью, по всему объему надпоршневого пространства состав и температура рабочего вещества постоянны и для получения значений температуры, давления и концентраций достаточно системы уравнений

$$u(T_2, g_2) = U / m;$$

$$c_i = \varphi(T_2, v_2), \quad i = 1, \dots, N;$$

$$g_{2i} = \mu_i \cdot v_2 \cdot c_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где φ , как и ранее, численная операция решения системы уравнений для определения равновесных концентраций компонент продуктов сгорания. Давление p , необходимое для интегрирования уравнения (8), как для участка сжатия, так и для участка расширения определяется в соответствии с уравнением состояния.

Элемент теплопередачи dQ на каждом шаге интегрирования для всех стадий рабочего процесса определяется соотношением

$$dQ = \alpha \cdot F(T - T_w)dt,$$

где α – коэффициент теплопередачи, в теории двигателей внутреннего сгорания обычно представляемый в виде $\alpha = \alpha_0 f(p, T)$. В свою очередь, α_0 – некоторая постоянная, $f(p, T)$ – функция текущих параметров рабочего вещества в виде $\sqrt[3]{p^2 \cdot T}$, T – температура зоны заряда или зоны продуктов сгорания, T_w – температура стенки цилиндра, F – поверхность теплообмена, $d\tau$ – временной интервал.

Процесс газообмена характеризуется переменностью массы рабочего вещества в цилиндре двигателя. Предполагается, что все процессы истечения адиабатические, а состав продуктов сгорания постоянен и соответствует составу в конце процесса расширения. Система дифференциальных уравнений математической модели газообмена включает уравнение закона сохранения энергии для открытой термодинамической системы и уравнения материального баланса

$$\frac{dU}{dt} = -p \frac{dV}{dt} - h \cdot (G_{01} + G_{02}) + h_1 G_{01} + h_2 G_{20} + Q;$$

$$\frac{dm}{dt} = G_{10} + G_{20} - G_{01} - G_{02};$$

$$m \frac{dg^1}{dt} = (1 - g^1) \cdot G_{10} - g^1 \cdot G_{20},$$

с учетом того, что $g^2 = 1 - g^1$. Здесь h, h_1, h_2 – удельные энтальпии рабочего вещества в цилиндре, во впускном и выпускном коллекторах; G_{jk} – расходы вещества определяются обращением к специальному модулю; g_1, g_2 – массовые доли заряда и продуктов сгорания.

Объединение численных моделей отдельных процессов дает полную математическую модель рабочего цикла двигателя. В качестве начального приближения выбираются термодинамические параметры, соответствующие впускному коллектору, которые корректируются по конечному результату. По достижении сходимости определяются интегральные показатели цикла, для получения нагрузочных и внешних скоростных характеристик двигателя в алгоритм расчета вносятся дополнения.

Анализ результатов моделирования. На рис. 3 и 4 приведены некоторые результаты расчетов для различных видов топлив: природного газа, биогаза и бензоэтанола с учетом полученных в соответствии с методом исследования оптимальных диапазонов регулировочных параметров.

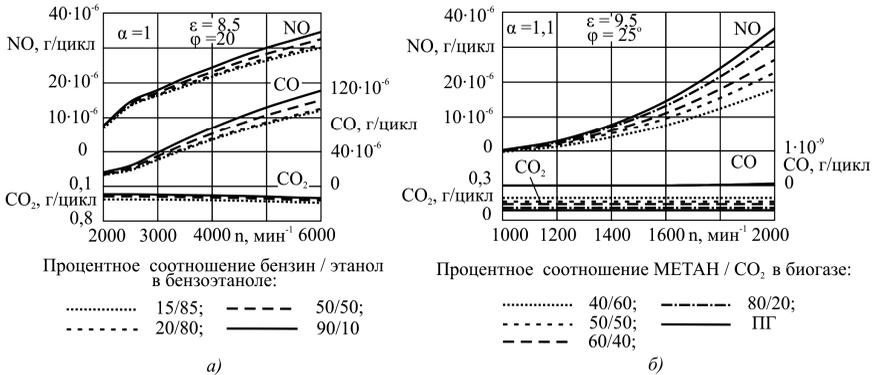


Рисунок 3 – Показатели токсичности отработавших газов бензинового 4Ч 7,9/8,0 (а) и газового 2Ч 10,5/12,0 (б) двигателей по внешним скоростным характеристикам.

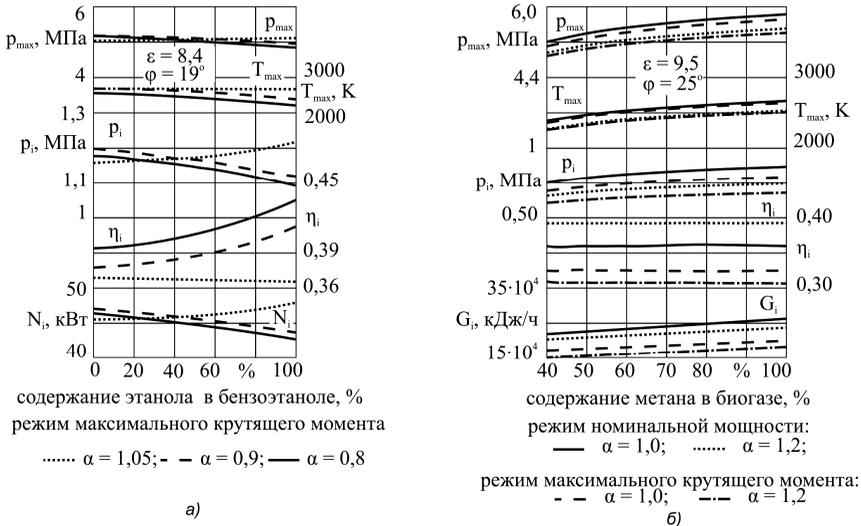


Рисунок 4 – Основные характеристики бензинового 4Ч 7,9/8,0 (а) и газового 2Ч 10,5/12,0 (б) двигателей как функции коэффициента α и топливных композиций.

Величина добавки этанола к бензину, начиная с 20 %, заметно снижает уровень эмиссии угарного газа и монооксидов азота, который увеличивается с ростом частоты вращения коленчатого вала.

Биогаз, состав которого, как правило, переменный, в сравнении с природным газом дает положительный эффект по эмиссии монооксидов азота, а увеличение эмиссии углекислого газа не сопряжено с ростом парникового эффекта в виду биологического происхождения этого топлива.

В зависимости от состава топливовоздушной смеси и коэффициента избытка воздуха α индикаторные показатели двигателя изменяются в ту или иную сторону. Так, увеличение в бензоэтанольной смеси содержания этанола однозначно ведет к росту коэффициента полезного действия; в случае с биогазом состав смесового топлива не сказывается на характере кривой, но величина коэффициента полезного действия сильно зависит от α и режима нагрузки двигателя.

Полученные результаты численного эксперимента согласуются с данными аналогичных исследований [7].

Выводы. Необходимость постепенной замены нефтяного топлива альтернативными (природным газом, биогазом, бензоэтанолом, водородом) сопряжена с многочисленными экспериментальными исследованиями, что связано с большими материальными и временными затратами. Рассматриваемый метод численного моделирования рабочего цикла поршневого двигателя с искровым зажиганием позволяет сделать прогноз по его экономическим и экологическим параметрам, выбрать направление экспериментальных исследований и ограничить их диапазон по многим параметрам.

Список литературы: 1. *Лаверов Н. Л.* Топливоэнергетические ресурсы. //Вестник Российской академии наук.– 2006.– Т. 76.– №5.– С. 398 – 408. 2. Long Term World Oil Supply //U.S. Energy Information Administration.– 2000.– July, 28.– Режим доступа: www.eia.doe.gov. 3. *Rodgers D.* Putting Advanced Transportation Technologies to Work for Clean Air and Energy Security / *D. Rodgers* // Presented to the Mobile Source Technical Review Subcommittee.– U.S. Department of Energy.– 2001. 4. *Куценко А. С.* Моделирование рабочих процессов двигателей внутреннего сгорания на ЭВМ – К.: Наукова думка, 1988. – 104 с. 5. *Левтеров А.М., Мараховский В. П., Левтерова Л.И., Гладкова Н. Ю.* Результаты расчетно-экспериментальных исследований характеристик автомобильного двигателя при использовании бензоэтанольных смесей. // Автомобильный транспорт. Сб. научн. тр.– Харьков: Изд-во ХНАДУ.– 2008.– Вып. 23.– С. 100 – 103. 6. *Левтеров А. М., Левтерова Л. И., Гладкова Н. Ю.* Использование альтернативных топлив в транспортных ДВС // Вестник ХНАДУ – Харьков: Изд-во ХНАДУ. – 2010. – №27. 7. A. Roubaud, R. Rotlisberger, D. Favrat /Lean-Burn Cogeneration Biogas Engine with Unscavenged Combustion Prechamber: Comparison with Natural Gas //Int.J. Applied Thermodynamics, ISSN 1301-9724 Vol.5 (No.4), pp.169-175, December-2002.

Поступила в редколлегию 13.09.2011г.

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
О.О. ЛИТВИН, канд. фіз.-мат. наук, доц., УПА, Харків;
О.В. ТКАЧЕНКО, наук. співр., УПА, Харків

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ІЗОГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ 2-Х ЗМІННИХ.

В статті доведена одна теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій 2-х змінних. Зроблені висновки про вгнутість (опуклість) функції двох змінних при фіксованих значеннях y або x у напрямках осей Ox або Oy відповідно, якщо сліди цієї функції є вгнутими (опуклими) відповідно.

В статье доказана одна теорема об изогеометрических свойствах операторов интерликации функций двух переменных. Сделаны выводы о вогнутости (выпуклости) функции двух переменных при фиксированных значениях y или x в направлении осей Ox или Oy соответственно, если следы этой функции являются вогнутыми (выпуклыми) соответственно.

The article one theorem of isogeometrical properties of operators interlineation functions of two variables is proved. Conclusions are drawn on concavity (camber) of function of two variables at the fixed values y or x in a direction of axes Ox or Oy accordingly if traces of this function are concave (convex) accordingly.

Вступ. Сучасні системи автоматичного проектування (САПР) поверхонь лопаток авіадвигунів вимагають від математичних моделей (ММ) цих поверхонь збереження важливих ізогеометричних властивостей (неперервності кривини, монотонності на наперед заданих частинах поверхні, включення без змін частин відомих ліній і навіть поверхонь у математичну модель тощо). В той же час, найчастіше, дані про поверхню можуть бути заданими системою точок, розміщених на системі просторових (взагалі кажучи) ліній. Побудова таких математичних моделей є предметом дослідження багатьох відомих фірм при створенні САПР поверхонь.

Аналіз останніх досліджень. Збереженню ізогеометричних властивостей оригінальної кривої або поверхні при побудові математичних моделей кривих або поверхонь присвячено багато праць, огляд яких можна знайти у книзі [1]. В основному увага у вказаній книзі і в цитованих у ній працях зосереджена на дослідженні того, яким умовам повинні задовольняти сплайни відповідного степеня (квадратичні, кубічні тощо) для того, щоб побудована з їх допомогою крива (поверхня) зберігала відповідні ізогеометричні властивості. Дослідження, присвячені аналізу ізогеометричних властивостей ММ поверхонь для випадку, коли інформація про поверхню задається системою точок і ліній, розміщених на поверхні, авторам невідомі.

Постановка задачі. В даній роботі вперше формулюється і доводиться теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій двох змінних [2], які витікають з відповідних властивостей її слідів на системі прямих – сторін прямокутника.

Теорема. *Якщо наближувана функція*

$$f(x, y) \in C^{2,2}(D), D = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$$

має сліди $f(x_1, y), f(x_2, y), f(x, y_1), f(x, y_2)$, які задовольняють умови

$$f^{(0,2)}(x_1, y) > (< 0), f(x_2, y) > (< 0), y_1 \leq y \leq y_2; \quad (1)$$

$$f^{(2,0)}(x, y_1) > (< 0), f^{(2,0)}(x, y_2) > (< 0), x_1 \leq x \leq x_2;$$

де позначено

$$f^{(i,j)}(x, y) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y), \quad (2)$$

то оператор

$$\begin{aligned} O(x, y) = Of(x, y) = & \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1, y) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2, y) + \\ & + \frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(x, y_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x, y_2) - \\ & - \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_1, y_2) \right) - \\ & - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \left(\frac{y-y_2}{y_1-y_2} f(x_2, y_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2, y_2) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

задовольняє умови інтерлінації

$$O(x_i, y) = f(x_i, y), i = 1, 2; \quad (4)$$

$$O(x, y_j) = f(x, y_j), j = 1, 2 \quad (5)$$

та умови

$$\frac{\partial^2 O(x, y)}{\partial x^2} > (< 0), x_1 \leq x \leq x_2; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 O(x, y)}{\partial y^2} > (< 0), y_1 \leq y \leq y_2. \quad (7)$$

Доведення. Інтерлінаційні властивості (4) – (5) операторів $Of(x, y)$ можна встановити безпосередньою перевіркою (див. [2]).

Враховуючи припущення (1) теореми 1, отримаємо

$$\frac{\partial^2 O(x, y)}{\partial x^2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} f^{(2,0)}(x, y_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f^{(2,0)}(x, y_2) > 0 (< 0),$$

тобто властивості (6) доведені.

Аналогічно, враховуючи припущення (2) теореми, отримаємо

$$\frac{\partial^2 O(x, y)}{\partial y^2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f^{(0,2)}(x_1, y) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f^{(0,2)}(x_2, y) > 0 (< 0),$$

що, в свою чергу, доводить властивості (7).

Теорема доведена.

Аналіз отриманих результатів. Теорема стверджує, що $Of(x, y)$ є вгнутою (опуклою) функцією двох змінних, якщо її розглядати як функцію однієї змінної x (при фіксованому $y \in [y_1, y_2]$) або якщо її розглядати як функцію однієї змінної y (при фіксованому $x \in [x_1, x_2]$), при умовах, що сліди $f(x_1, y)$, $f(x_2, y)$, $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$ функції $f(x, y)$ є вгнутими (опуклими) функціями однієї змінної.

Перспективи подальших досліджень. Наступний крок полягає у дослідженні ізогеометричних властивостей $Of(x, y)$ у ситуації, коли вказані сліди $f(x_1, y)$, $f(x_2, y)$, $f(x, y_1)$, $f(x, y_2)$ задаються не формулами, а значеннями у системі точок.

Висновки. Доведена теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій двох змінних на сторонах прямокутника встановлює тісний зв'язок між ізогеометричними властивостями слідів та ізогеометричними властивостями операторів інтерлінації функцій двох змінних, що може мати узагальнення і важливі практичні застосування.

Список літератури: 1. Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 360 с. 2. Литвин О.М. Интерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.

Надійшла до редколегії 30.09.2011

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УІПА, Харків;

К. В. НОСОВ, канд. фіз.-мат. наук, наук. співр., ХНУ ім. В. Н. Каразіна,
Харків;

Т. А. БАРАНОВА, асистент, НТУ «ХП»

ВИБІР ОПТИМАЛЬНИХ КООРДИНАТНИХ ФУНКЦІЙ В МЕТОДІ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Пропонується схема для наближеного розв'язання еліптичних крайових задач у частинних похідних парного порядку методом скінчених елементів для областей спеціального вигляду. Знаходження наближеного розв'язку ґрунтується на варіаційних принципах. На відміну від раніше запропонованих схем, з кожним вузлом сітки пов'язується своя система координатних функцій, що дозволяє отримати більш високу точність наближення.

Предложена схема для приближенного решения эллиптических краевых задач в частных производных четного порядка методом конечных элементов для областей специального вида. Нахождение приближенного решения основано на вариационных принципах. В отличие от предложенных ранее схем, с каждым узлом сетки связывается своя система координатных функций, что позволяет получить более высокую точность приближения.

In the paper the schema for approximate solution of elliptic boundary problems in partial derivatives of even order by the finite element method for special shaped domains is suggested. Calculation of approximate solution is based upon variational principles. In contrast to earlier suggested schemas, in this case a specified system of coordinate functions corresponds to each node of mesh. This fact allows to obtain higher precision of approximation.

Вступ. Наш час характерний різким розширенням застосувань математики, що значною мірою пов'язане зі створенням та розвитком засобів обчислювальної техніки. Бурхливий розвиток швидкодіючих обчислювальних систем (ЕОМ) призвів до нового етапу розвитку науки та технології досліджень. Більшість проблем, пов'язаних з фізико-технічними, економічними, біологічними галузями знань, не може бути успішно розв'язана без використання математичного моделювання, чисельних експериментів та залучення нових чисельних методів розв'язання граничних задач, що орієнтовані на сучасні ЕОМ.

Метод скінчених елементів (МСЕ) набув загальне визнання як ефективний метод розв'язання найрізноманітніших задач математичної фізики і техніки. Така популярність методу пояснюється простотою його фізичної інтерпретації та математичної форми. До переваг цього методу можливо також віднести гнучкість та різноманітність сіток, відносну простоту побудови схем підвищених порядків точності для еліптичних крайових задач в довільних областях.

При побудові схем МСЕ виникає задача вибору системи координатних функцій, за допомогою яких будується наближений розв'язок. Використання

тієї чи іншої системи координатних функцій підпорядковується задачам забезпечення потрібного класу диференційованості шуканого наближеного розв'язку в області інтегрування та досягнення необхідного порядку збіжності наближеного розв'язку до точного (при подрібненні сітки). Незважаючи на різноманітність схем МСЕ для еліптичних задач з частинними похідними, практичне отримання розв'язку з великою точністю зустрічає серйозні перешкоди у зв'язку із стрімким зростанням обчислювальних витрат та накопиченням похибок округлення при збільшенні ступенів свободи та/або збільшенні степені використовуваних інтерполантів. Тому розробка обчислювальних схем МСЕ, які при заданому, як правило, відносно невеликому, числі степенів свободи забезпечують мінімальну похибку, залишається цілком актуальною.

Аналіз згаданих схем МСЕ показав, що побудова систем координатних функцій враховує лише деякі властивості крайової задачі (належність узагальненого розв'язку до певного класу, задовільнення головним крайовим умовам тощо) і мало пов'язана з властивостями диференціального оператора задачі. Тому врахування цих властивостей привело до одного з плідних підходів до розв'язання цієї проблеми.

Аналіз останніх досліджень. Схеми МСЕ з вибором координатних функцій, які є оптимальними з точки зору мінімізації функціоналу енергії варіаційної задачі, що еквівалентна початковій, вперше запропоновані у роботах О. М. Литвина [1-2]. У подальших роботах О. М. Литвина, К. В. Носова, Т. А. Баранової [3-7] були розроблені різні обчислювальні схеми для МСЕ з вибором координатних функцій. Так, у роботі [4] координатні функції наближеного розв'язку будувалися з використанням сплайнів першого степеня, параметри яких визначалися з умови мінімуму функціоналу енергії з використанням *методу Гауса-Зейделя*. У роботах [5-6] була розроблена ітераційна схема "фліп-флоп", згідно якої сукупності вузлових параметрів та координатних функцій обчислювалися на окремих кроках ітераційного процесу.

Метою даної роботи є розробка обчислювальної схеми МСЕ з вибором координатних функцій, яка у відомому сенсі є узагальненням попередніх схем [1-7]. Узагальнення торкається використання своєї системи координатних функцій для кожного вузла розбиття сітки. Обчислювальний експеримент, проведений для модельної задачі на кількох областях, підтвердив високу точність запропонованої схеми.

Постановка задачі у загальному випадку. Розглянемо наступну граничну задачу для самоспряженого диференціального оператора:

$$\begin{aligned} Au(\mathbf{x}) &= f(x), \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \\ \partial^s u / \partial \mathbf{v}^s &= 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega, s = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

де Ω — n -вимірний багатогранник, грані якого паралельні координатним площинам, \mathbf{v} — нормаль до $\partial\Omega$, $f(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega)$, A — самоспряжений дифе-

ренціальний оператор еліптичного типу порядку $2m$:

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_\alpha(x) D_x^\alpha u), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (2)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad D_x^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}.$$

Звичайним чином вводиться розбиття області Ω на гіперпаралелепіеди гіперплощинами $x_k = x_{k,i_k}, i_k = \overline{1, N_k}, k = \overline{1, n}$, і далі будується наближений розв'язок з використанням вузлових параметрів у кожній точці розбиття та системи функцій, які забезпечують відповідні характеристики розв'язку. Введемо позначення $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$, $\Delta_{k,i_k} = x_{k,i_k+1} - x_{k,i_k}$, $k = \overline{1, n}$. Гіперпаралелепед, що відповідає точці $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, позначимо

$$\Pi_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{x} \mid x_k \in [x_{k,i_k}, x_{k,i_k+1}], k = \overline{1, n}\}.$$

У $\Pi_{\mathbf{i}}$ наближений розв'язок представимо у формі

$$\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sum_{r_1=0}^{m-1} \dots \sum_{r_n=0}^{m-1} \sum_{\mu_1=0}^1 \dots \sum_{\mu_n=0}^1 u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle} \prod_{q=1}^n h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu_q, r_q} \left(\frac{x_q - x_{q, i_q}}{\Delta_{q, i_q}} \right) \Delta_{q, i_q}^{r_q}, \quad (3)$$

де індекси $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, $\mathbf{i} + \boldsymbol{\mu} = (i_1 + \mu_1, i_2 + \mu_2, \dots, i_n + \mu_n)$, а функції $h_{q, \mathbf{i}, \mu, p}(\cdot) \in W_2^{2m}[0, 1]$ мають властивості:

$$h_{q, \mathbf{i}, 1-\mu, p}^{(s)}(\gamma) = \delta_{\mu, \gamma} \delta_{s, p}, \quad \mu = 0, 1; s = \overline{0, m-1}; p = \overline{0, m-1}; q = 0, 1. \quad (4)$$

Нескладно перевірити, що для $\tilde{u}_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$, як і для наближеного розв'язку, запропонованого у [2], виконується умова

$$D^\alpha \tilde{u}(\mathbf{x}) \Big|_{x_1=x_{1, i_1}, \dots, x_n=x_{n, i_n}} = u_{\mathbf{i}, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$$

для всіх вузлових параметрів $u_{\mathbf{i}, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ області Ω .

Але суттєвим розширенням попередньої схеми [2] є використання для кожного вузлового параметра $u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}$ окремої системи координатних функцій, що і відображено у (1).

Наближений розв'язок будемо знаходити з умови мінімуму функціоналу енергії для задачі (1)

$$J(u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\mathbf{x}) (D_x^\alpha u(\mathbf{x})) - 2f(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \right] dx$$

по координатним функціям $h_{q, \mathbf{i}, \mu, p}(\cdot)$ та вузловим параметрам $u_{\mathbf{i}+\boldsymbol{\mu}}^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}$.

Повторюючи міркування, аналогічні до наведених у роботі [2] (Теорема

1.1), можна показати, що сталі $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ та координатні функції $h_{q, i, \mu, p}(\cdot)$, які реалізують мінімум функціоналу енергії, задовольняють системі Рітца

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}} = 0,$$

та крайовій задачі для системи звичайних нелінійних інтегро - диференціальних рівнянь виду

$$\delta_{h_{q, i, 1-\mu_q, r_q}} J(\tilde{u}) = 0,$$

де $u_{i_1, \dots, i_n}^{\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle}$ пробігають усі вузлові параметри області Ω , а через δ позначена варіація функціоналу J по функціям $h_{q, i, 1-\mu_q, r_q}(\cdot)$.

Кожна така варіація представляє собою звичайне нелінійне інтегродиференціальне рівняння. Крайові умови невідомих функцій, що входять до цих рівнянь, визначаються з умов (4)

Задача Діріхле для рівняння Пуассона. Проведемо детальне дослідження схеми побудови наближеного розв'язку модельної задачі (*задача Діріхле для рівняння Пуассона*)

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \overline{\partial G}.$$

Спираючись на припущення щодо виду області G , її можна розбити прямими

$$x = x_i, j = \overline{0, n_x} \quad y = y_j, j = \overline{0, n_y}$$

на прямокутні елементи

$$\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$$

і вважати, що з кожним вузлом розбиття пов'язується система із 4-х базисних функцій. Тоді наближений розв'язок у Π_{ij} можна представити у формі

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) = & u_{i,j} h_{1,i,j} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i,j} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i+1,j} h_{0,i+1,j} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{1,i+1,j} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + \\ & + u_{i,j+1} h_{1,i,j+1} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i,j+1} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right) + u_{i+1,j+1} h_{0,i+1,j+1} \left(\frac{x-x_i}{\Delta_{1,i}} \right) H_{0,i+1,j+1} \left(\frac{y-y_j}{\Delta_{2,j}} \right). \end{aligned}$$

Функції $h_{0,i,j}(x)$, $h_{1,i,j}(x)$, $H_{0,i,j}(y)$, $H_{1,i,j}(y)$ мають наступні властивості:

- належать до класу W_2^1 (це забезпечує існування функціоналу енергії).

- задовольняють граничним умовам

$$h_{\mu,i,j}(\gamma) = \delta_{\mu,1-\gamma}, \quad H_{\mu,i,j}(\gamma) = \delta_{\mu,1-\gamma} \quad \gamma = 0,1, \quad \mu = 0,1.$$

Для знаходження наближеного розв'язку використовується така ітеративна схема.

Вважаючи функції $h_{\mu,i,j}(x)$, $H_{\mu,i,j}(y)$ відомими (на першому кроці їх можна вважати лінійними функціями з відповідним граничним умовам), знаходимо невідомі $u_{i,j}$ із системи Рітца $\partial J(u) / \partial u_{i,j} = 0$.

Будемо використовувати позначення $h^{[k]}_{\mu,i,j}(x)$ для функції $h_{\mu,i,j}(x)$, знайденої на кроці k ітеративного процесу, аналогічно $H^{[k]}_{\mu,i,j}(y)$ — це k -та ітерація функції $H_{\mu,i,j}(y)$. Таким чином, початкові функції $h_{\mu,i,j}(x)$ і $H_{\mu,i,j}(y)$ позначимо як $h^{[0]}_{\mu,i,j}(x)$ та $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$.

Позначимо $u_{i,j}$, знайдені на цьому кроці, через $u^{[0,0]}_{i,j}$, де верхній індекс відбиває номери ітерацій для базисних функцій ($h^{[0]}_{\mu,i,j}(x)$ та $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$), що використовуються для знаходження $u^{[0,0]}_{i,j}$. Далі, використовуючи знайдені вузлові параметри $u^{[0,0]}_{i,j}$ та вважаючи функції $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$ фіксованими, з умови $\delta_{h_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($\mu = 0,1$) знаходимо систему функцій $h_{\mu,i,j}(x)$, яку позначимо $h^{[1]}_{\mu,i,j}(x)$.

Знову з системи Рітца, вважаючи $h^{[1]}_{\mu,i,j}(x)$ та $H^{[0]}_{\mu,i,j}(y)$ відомими, знаходимо вузлові параметри $u_{i,j}$, які позначимо $u^{[1,0]}_{i,j}$. Аналогічно, з умови $\delta_{H_{\mu,i,j}(\cdot)} J(\tilde{u}) = 0$ ($\mu = 0,1$) знаходимо систему функцій $H^{[1]}_{\mu,i,j}(y)$, після чого алгоритм повторюється зрозумілим чином.

Послідовність початкових ітерацій для знаходження вузлових параметрів та координатних функцій можна представити схемою

$$\begin{aligned} \{h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[0,0]}_{i,j}, \quad \{u^{[0,0]}_{i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} \mapsto h^{[1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[1,0]}_{i,j}, \quad \{u^{[0,0]}_{i,j}, h^{[1]}_{\mu,i,j}\} \mapsto H^{[1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[1,1]}_{i,j}. \end{aligned}$$

Аналогічно, для кроку k ітеративний процес передається схемою

$$\begin{aligned} \{h^{[k]}_{\mu,i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[k,k]}_{i,j}, \quad \{u^{[k,k]}_{i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} \mapsto h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, H^{[k]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[k+1,k]}_{i,j}, \quad \{u^{[k,k]}_{i,j}, h^{[k+1]}_{\mu,i,j}\} \mapsto H^{[k+1]}_{\mu,i,j}, \\ \{h^{[k+1]}_{\mu,i,j}, H^{[k+1]}_{\mu,i,j}\} &\mapsto u^{[k+1,k+1]}_{i,j}. \end{aligned}$$

Опишемо кожний тип ітерацій.

Знаходження чергової ітерації для вузлових параметрів (розв'язування

системи Рітця), як відомо, зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки поставлена задача мінімізації функціоналу по вузловим параметрам $u_{i,j}$ є квадратичною.

З квадратичності випливає єдиність розв'язку системи Рітця при довільних координатних функціях $h_{\mu,i,j}(x)$, $H_{\mu,i,j}(y)$, на які накладено приведені вище умови.

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент був проведений з модельною задачею — двовимірною граничною задачею Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою правою частиною

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= -2, & (x, y) \in G, \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) \in \bar{\partial}G. \end{aligned} \tag{6}$$

Експеримент проводився для трьох областей різної форми. На рис. 1 представлені контури цих області з сіткою, на якій реалізувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

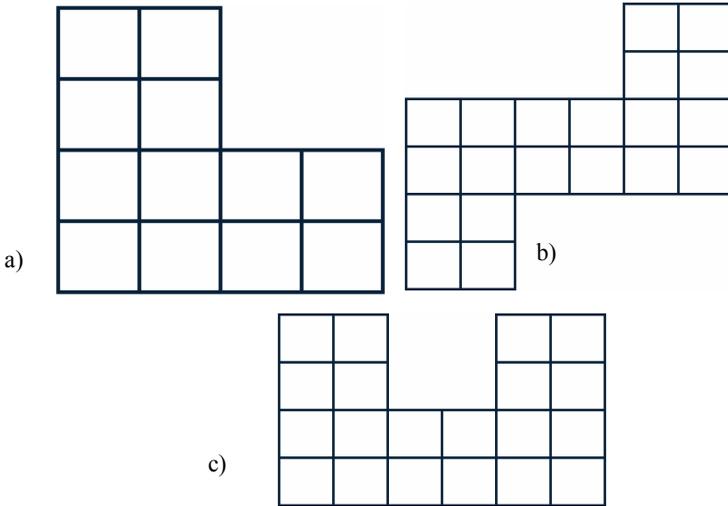


Рисунок 1 – Области **a**, **b**, **c** з сіткою, на якій реалізувалася схема МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій.

Для кожної області проводилися ітерації до обчислення сукупності вузлових параметрів та функцій $u^{[1,1]}_{i,j}$, $h^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$, $H^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$ включно. При цьому порівнювалися точності двох наближених розв'язків — отриманого за допомогою схеми МСЕ з вибором координатних функцій та отриманого з використанням кусково-лінійних координатних функцій

$$(h_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t, H_{\mu,i,j}(t) = \mu + (1 - 2\mu)t, \mu = 1,2).$$

Остання схема є класичною для задачі (6) [14]. Критерієм порівняння виступало значення функціоналу енергії наближеного розв'язку, яке для еліптичних задач співвідноситься з похибкою наступним чином

$$J(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2,$$

де $\| \cdot \|_A$ — енергетична норма, пов'язана з оператором A крайової задачі (в нашому випадку це оператор Лапласа). У якості початкових на-

ближень координатних функцій $h_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot), H_{\mu,i,j}^{[0]}(\cdot)$ використовувалися згадані вище кусково-лінійні координатні функції.

Обчислювальний експеримент полягав у проведенні ітераційного процесу МСЕ з вибором координатних функцій, обчисленні функціоналу енергії для наближеного

розв'язку цієї схеми (на кожному кроці) та знаходженні кількості вузлових параметрів наближеного розв'язку за класичною схемою МСЕ, який дає таке ж значення функціоналу енергії. Тобто, знаходилася та кількість вузлових параметрів, при якій наближений розв'язок класичної схеми має таку ж похибку у енергетичній нормі, що і наближений розв'язок МСЕ з вибором координатних функцій. Для класичної схеми МСЕ використовувалася рівномірна сітка з однаковим кроком розбиття по обом координатам.

Кількість вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу $J(\tilde{u})$ від наближеного розв'язку, побудованого МСЕ з вибором координатних функцій, обчислювалася наступним чином.

Таблиця 1

Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій за класичною схемою МСЕ для області $([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	N
$h_{\mu,i,j}^{[0]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-0.63502358	5
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-0.738081695	13
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-0.739004998	14
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-0.852729837	1061
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,1]}$	-0.85311464	1217

Таблиця 2

Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій за класичною схемою МСЕ для області $([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	N
$h_{\mu,i,j}^{[0]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-1.18308396379	9
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[0,0]}$	-1.37441579503	25
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[0]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-1.37618989105	26
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,0]}$	-1.54020382384	142
$h_{\mu,i,j}^{[1]}, H_{\mu,i,j}^{[1]}, u_{i,j}^{[1,1]}$	-1.54529312246	161

Для класичної схеми знаходилися значення функціоналу енергії для послідовності сіток (починаючи з мінімального кроку розбиття); для цієї послідовності будувався *лінійний інтерполянт*, що відбиває залежність значення функціоналу $J(\tilde{u})$ класичного розв'язку від кількості вузлових параметрів, і цей інтерполянт використовувався для знаходження шуканої кількості вузлових параметрів класичної схеми, що відповідає значенню функціоналу енергії від розв'язку, отриманого МСЕ з вибором координатних функцій. Число N у наведених нижче таблицях є саме цією кількістю вузлових параметрів, отриманих за допомогою інтерполянта.

1. Область $([0, 2] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, 2])$, *рис. 1, а*. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями використано рівномірну сітку з кроком $1/2$ по обом координатам. Кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 5. В табл. 1 наведені значення функціоналу енергії на послідовних кроках ітераційного процесу для МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій і кількість степенів свободи (вузлових параметрів) N класичної МСЕ, яка необхідна для досягнення того ж значення функціоналу енергії.

2. Область $([0, 1] \times [0, 1]) \cup ([0, 3] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [2, 3])$, *рис. 1, б*. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями взята рівномірна сітка з кроком $1/2$ по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В табл. 2 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до табл. 1.

3. Область $([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$, *рис. 1, с*. Для МСЕ з оптимальними координатними функціями вибрана рівномірна сітка з кроком $1/2$ по обом координатам, кількість степенів свободи для такої сітки дорівнює 9. В Табл. 3 наведено порівняння точності двох схем МСЕ, аналогічне до табл. 1.

Як впливає з результатів, представлених у табл. 1-3, для досягнення точності у енергетичній нормі, яку дає МСЕ з вибором координатних функцій на кроці ітераційного процесу, що відповідає сукупності $u^{[1,1]}_{\mu,i,j}, h^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot), H^{[1]}_{\mu,i,j}(\cdot)$, потрібна кількість елементів класичної схеми, яка для першої області у $1217/5 \approx 243$ разів більша кількості елементів схеми МСЕ з вибором координатних функцій, та приблизно у

Таблиця 3

Порівняння точності МСЕ з вибором координатних функцій за класичною схемою МСЕ
 $([0, 3] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [1, 2]) \cup ([2, 3] \times [1, 2])$

Ітерації	$J(\tilde{u})$	N
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[0]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.18308396379	9
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,0]}_{i,j}$	-1.26529114578	16
$h^{[0]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,1]}_{i,j}$	-1.26884552075	16
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[0,1]}_{i,j}$	-1.46178685862	49
$h^{[1]}_{\mu,i,j}, H^{[1]}_{\mu,i,j}, u^{[1,1]}_{i,j}$	-1.46356362589	50

18 та 6 разів для другої та третьої відповідно.

Висновки. В даній роботі запропоноване подальше розширення обчислювальних схем МСЕ з вибором оптимальних координатних функцій для еліптичних крайових задач, що відрізняється від раніш запропонованих використанням локальної системи координатних функцій, пов'язаних з кожним вузлом, на відміну від загальної системи функцій, запропонованої у попередніх роботах. Можна сказати, що данна схема підвищує адаптивність обчислювальної схеми, що дає змогу значно підняти точність наближених розв'язків, отриманих за цією схемою.

Головні властивості запропонованої схеми полягають у тому, що координатні функції МСЕ не задаються наперед, як у відомих схемах, що використовують поліноміальні інтерполянти, а знаходяться з умови мінімуму функціоналу енергії, що відповідає заданій крайовій задачі. На відміну від адаптивних схем МСЕ, вид цих функцій не фіксується (у вигляді полінома чи функції іншого класу), а знаходиться як розв'язок варіаційної задачі, що визначається функціоналом енергії задачі та формою наближеного розв'язку.

Розв'язання модельної задачі, проведене у ході обчислювального експерименту, має наступні особливості:

1) наближений розв'язок знаходиться ітераційним методом, у якому на початку використовувались відомі координатні функції (наприклад, кусково-лінійні, як в данній роботі) і ітерації проводилися для кожної смуги розбиття області на елементи;

2) знаходження координатних функцій по смугам дозволяє використовувати алгоритми з розпаралелюванням, що може мати значення для великих, складних областей, а також, напевне, для задач високої розмірності;

3) обчислювальний експеримент продемонстрував набагато вищу точність пропонованої схеми порівняно з класичним МСЕ на основі кусково-лінійних інтерполянтів.

Список літератури: 1. *Литвин О.Н.* К вопросу о построении оптимальных схем МКЭ // Тезисы докл. 2-й респ. конференции "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе". — К. — 1978. — С. 21-22. 2. *Литвин О.Н.* Оптимальные координатные функции в методе конечных элементов // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т 20, № 4. — С.677-688. 3. *Литвин О.Н.* Методи обчислень. Додаткові глави. — Київ: Наукова думка, 2005. — 333 с. 4. *Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В.* Про чисельну реалізацію оптимального методу скінчених елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи) // Вісник Львівської Політехніки. — 1998. — № 337, Т. 2. — С. 294-297. 5. *Литвин О.Н., Носов К.В.* Некоторые аспекты численной реализации оптимального метода конечных элементов на примере бигармонической задачи с краевыми условиями второго рода // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 1. — С. 178-187. 6. *Литвин О.М., Носов К.В.* Деякі оцінки ітераційного процесу в методі оптимальних скінчених елементів // Матеріали X міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. — К.: Задруга, 2004. — С. 436. 7. *Баранова Т. А.* Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінчених елементів // Праці міжнародного симпозіуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)”, присвяченої 50-річчю створення Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. — Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007, — С. 34-35.

Надійшла до редколегії 07.09.2011.

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
Ю.І.ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА, Харків

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ РОЗРИВНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

В роботі запропоновані математичні моделі процесів, що описуються функціями однієї змінної з можливими розривами в заданих вузлах області визначення функції, за допомогою розривних лінійних інтерполяційних та апроксимаційних сплайнів, використовуючи метод найменших квадратів. Побудовані математичні моделі можна буде використати в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

В работе предложены математические модели процессов, которые описываются функциями одной переменной с возможными разрывами в заданных узлах области определения функции, с помощью разрывных линейных интерполяционных и аппроксимационных сплайнов, используя метод наименьших квадратов. Построенные математические модели можно использовать в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

In work mathematical models of processes which are described by one variable functions with possible ruptures in the set knots of a range of definition of function, by means of explosive linear interpolational and approximal splines are offered, using a method of the least squares. The constructed mathematical models can be used in medical, geological, space and other researches.

Вступ. Задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів. Наприклад, при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність, тобто щільність тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Аналіз останніх досліджень. Дослідженню розривних функцій присвячені, наприклад, роботи [1], [2], [4], а наближення неперервних функцій розглядається, наприклад, в роботах [3], [6].

В роботі [5] розглядалася задача рівномірного наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій розривними сплайнами однієї змінної. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [1], [4], в яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення

розривних функцій, то авторами невідомі загальні методи сплайн-апроксимації та сплайн-інтерполяції розривних функцій за допомогою розривних сплайнів.

Автори вважають, що наближувати розривні функції треба за допомогою теж розривних функцій. В даній роботі пропонується розробити та дослідити інтерполяційний метод наближення та апроксимаційний метод наближення розривних функцій розривними сплайнами, використовуючи метод найменших квадратів.

Постановка задачі. Нехай досліджуваний процес описується функцією однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими розривами першого роду в точках $x_k, k = \overline{1, n}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розрив першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a, b]$ на $n-1$ частин. Метою роботи є побудова та дослідження математичних моделей заданого розривного процесу із заданими можливими розривами у вигляді розривного лінійного інтерполяційного та апроксимаційного сплайнів.

Побудова математичної моделі з використанням інтерполяції.

Визначення. Будемо називати *розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізьку $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ наступну функцію:*

$$S(x) = Sp_k(x, C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (1)$$

де $C_k^+ = f(x_k + 0)$, $C_{k+1}^- = f(x_{k+1} - 0)$.

Теорема 1. *Функція $S(x) = Sp_k(x)$, $k = \overline{1, n}$ задовольняє наступним властивостям:*

$$Sp_k(x_k + 0) = C_k^+, \quad Sp_{k-1}(x_k - 0) = C_k^- \quad (2)$$

Визначимо вигляд похибки наближення розривним сплайном (1) та оцінку наближення розривної функції побудованим сплайном таким же чином, як наведено в роботах [3] та [7].

Теорема 2. *Якщо $f(x) \in C^r[a, b]$, $r = 1, 2$, то залишок $Rf(x) = f(x) - S(x)$ наближення розривним інтерполяційним сплайном вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття буде мати вигляд*

$$Rf(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi) G(x, \xi) d\xi, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \frac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \leq \xi \leq x \leq x_{k+1}, \\ -\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \leq x \leq \xi \leq x_{k+1}. \end{cases}$$

Теорема 3. Оцінка похибки наближення функції $f(x)$ побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x) = Sp_k(x)$ на кожному інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ має вигляд

$$f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |f(x) - Sp_k(x)| \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]},$$

$$f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow \|R(x)\|_\infty \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}.$$

Зауваження. Якщо $C_k^+ = C_k^- = f(x_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний інтерполяційний сплайн вигляду (1) являється неперервним лінійним інтерполяційним сплайном.

Таким чином, математична модель розривного процесу, що побудована за допомогою розривного інтерполяційного сплайну, визначається за формулами (1) та (2).

Побудова математичної моделі з використанням апроксимації.

Визначення. Будемо називати *розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відрізьку* $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ функцію вигляду (1), де коефіцієнти C_k^+ , C_k^- сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(t))^2 dt \rightarrow \min_C. \quad (3)$$

Для того, щоб оцінити апроксимаційний сплайн $S(x)$ вигляду (1), побудований за допомогою методу найменших квадратів, на кожному інтервалі розбиття $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$ розв'яжемо мінімізаційну задачу:

$$J_k(C) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 dx \rightarrow \min_C, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\frac{\partial J_k(C)}{\partial C_k^+} = 0$,

$$\frac{\partial J_k(C)}{\partial C_{k+1}^-} = 0, \quad \text{складену відносно невідомих } C_k^+, C_{k+1}^-:$$

$$\begin{cases} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \cdot \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \cdot \left(-\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) dx = 0, \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \cdot \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \cdot \left(-\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) dx = 0, \\ C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k+1})^2}{(x_k - x_{k+1})^2} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k+1})} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)(x - x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} dx, \\ C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k+1})(x - x_k)}{(x_k - x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)^2}{(x_{k+1} - x_k)^2} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)(x - x_k)}{x_{k+1} - x_k} dx. \end{cases}$$

В отриманій системі зробимо заміну $C_{k+1}^- = f(x_{k+1} - 0) + \varepsilon_{k+1}$, $C_k^+ = f(x_k + 0) + \varepsilon_k$, та замінимо функцію $f(x)$ інтерполяційним поліномом Лагранжа із залишковим членом $R(x)$. Після обчислення інтегральних членів системи отримаємо систему наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1} - x_k) \cdot \varepsilon_k + \frac{1}{6}(x_{k+1} - x_k) \cdot \varepsilon_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx, \\ \frac{1}{6}(x_{k+1} - x_k) \cdot \varepsilon_k + \frac{1}{3}(x_{k+1} - x_k) \cdot \varepsilon_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} dx. \end{cases} \quad (4)$$

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\| = \max\{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}\}$ та результати теореми 3, перепишемо систему (4) у ыншому вигляді.

1. Якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1} - x_k) \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{1}{6}(x_k - x_{k+1}) \cdot \|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_{\infty} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right)^2, \\ \frac{1}{6}(x_{k+1} - x_k) \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{1}{3}(x_k - x_{k+1}) \cdot \|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_{\infty} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{2} \right)^2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\| \leq \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{\infty}.$$

2. Якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1} - x_k) \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{1}{6}(x_k - x_{k+1}) \cdot \|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_{\infty} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{16}, \\ \frac{1}{6}(x_{k+1} - x_k) \cdot \|\varepsilon\| \leq \frac{1}{3}(x_k - x_{k+1}) \cdot \|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_{\infty} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{8}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\| \leq \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{\infty}.$$

З цих нерівностей витікає, що, якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_{\infty}[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_{\infty}[x_k, x_{k+1}]},$$

а якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_{\infty}[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_{\infty}[x_k, x_{k+1}]},$$

$$L_{\infty}[a, b] = \lim_{p \rightarrow \infty} L_p[a, b].$$

Якщо наближувана функція $f(x)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією з точками розриву $x = x_k$, $k = \overline{1, n}$ та наближуємо її кусково-лінійним сплайном $S(x)$, визначеним формулами (1) з невідомими коефіцієнтами C_k^+ , C_k^- , що знаходяться з умови (3), то отримуємо точно наближувану функцію, тобто $S(x) = f(x)$.

Зуваження. Якщо $C_k^+ = C_k^- = S(x_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Отже, математична модель розривного процесу, побудована за допомогою розривного апроксимаційного сплайну, визначається за формулами (1) та (3).

Чисельний експеримент. Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1, 1]$ з трьома точками розриву першого роду (рис.1)

$$f(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \leq x < -0.5 \\ 0.5 - 4x^2, & -0.5 \leq x < 0 \\ 2x^2 - 1, & 0 \leq x < 0.5 \\ 1 - x, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

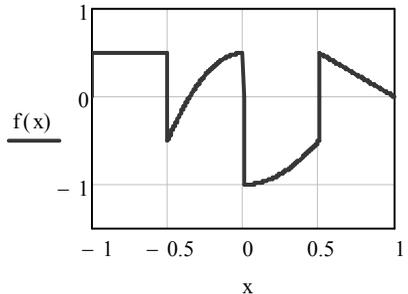


Рисунок 1 – Аналітичний та графічний вигляд наближуваної функції.

Обираємо вузли сплайну: $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$, $x_5 = 1$.
Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

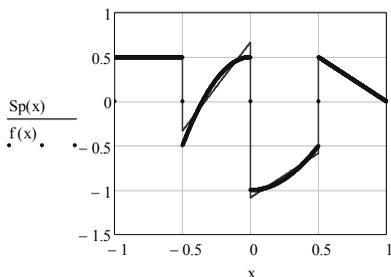
$$\begin{aligned}
 C_1^+ &= f(x_1 + 0) = 0.5, & C_3^+ &= f(x_3 + 0) = -1, \\
 C_2^- &= f(x_2 - 0) = 0.5, & C_4^- &= f(x_4 - 0) = -0.5, \\
 C_2^+ &= f(x_2 + 0) = -0.5, & C_4^+ &= f(x_4 + 0) = 0.5, \\
 C_3^- &= f(x_3 - 0) = 0.5, & C_5^- &= f(x_5 - 0) = 0.
 \end{aligned}$$

Наближуючий інтерполяційний сплайн, згідно формули (1), буде мати вигляд (рис.2 а):

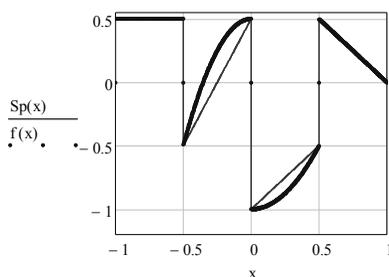
$$S_{інтерп}(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \leq x < -0.5, \\ 2x + 0.5, & -0.5 \leq x < 0, \\ x - 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ 1 - x, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Апроксимаційний сплайн, побудований у вигляді формули (1), де коефіцієнти матриці C знаходяться з умови (3), набуває вигляду (рис.2б)

$$S_{апрокс}(x) = \begin{cases} 0.5, & -1 \leq x < -0.5, \\ 2x + 0.7, & -0.5 \leq x < 0, \\ x - 1.08, & 0 \leq x < 0.5, \\ 1 - x, & 0.5 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



а)



б)

Рисунок 2 – Графічний вигляд функції $f(x)$ (тонка лінія) та наближуючого: а) інтерполяційного сплайну, б) апроксимаційного сплайну (жирна лінія).

Максимальне відхилення функції $f(x)$ від побудованого інтерполяційного та апроксимаційного сплайнів відповідно дорівнюють

$$\max |f(x) - S_{інтерп}(x)| \approx 0.26,$$

$$\max |f(x) - S_{\text{апрокс}}(x)| \approx 0.16.$$

Як бачимо, побудовані сплайни точно наближують функцію на тих інтервалах, де вона постійна або задана лінійно. Звичайно, апроксимаційний сплайн наближує функцію краще ніж інтерполяційний. Чисельний експеримент підтверджує викладену вище теорію.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

Висновки. Таким чином, в роботі запропонована математична модель розривного процесу, що описується функцією однієї змінної, побудована за допомогою розривного інтерполяційного сплайну. Визначений загальний вигляд похибки наближення функції побудованою розривною конструкцією в інтегральному вигляді, та наведені оцінки похибки наближення в кожному інтервалі розбиття. В роботі також запропонована математична модель розривного процесу, що побудована за допомогою розривного апроксимаційного сплайну, коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня.

Список літератури: 1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И.,* Мирошніченко В. Л. Методи сплайн-функцій. – Москва: Наука, 1980. – 352 с. 2. *Корнейчук Н. П.* Сплайни в теорії приближення. – Москва: Наука, 1976. – 320 с. 3. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с. 4. *Литвин О. М., Рвачов В. Л.* Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. – К.: Наук. думка, 1973 – 122 с. 5. *Попов Б. А.* Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989.– 272с. 6. *De Vore R.A.* A method of grid optimization for finite element methods. – Computer method in appl. Mechanics and engineering, 1983. – Vol.41. – P. 29–45.

Надійшла до редколегії 12.09.2011

Т.В. МАЛИХІНА, ст. викл., ХНУ імені В.Н. Каразіна, Харків

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРОЦЕСІВ НИЗЬКИХ ЕНЕРГІЙ ВЗАЄМОДІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ З РЕЧОВИНОЮ ПРИ РОЗРОБЦІ ДЕТЕКТОРІВ

Розглянуто два способи комп'ютерного моделювання детекторного блоку пристрою, що призначений для локації точкового джерела гамма-випромінювання, з використанням бібліотеки класів Geant4, модель низьких енергій. Визначено, що в області енергій до 1 МеВ обидва способи дають коректні результати, що підтверджується експериментальними даними. Визначені деякі особливості використання моделей, що розглядаються, та надані рекомендації розробникам детекторів випромінювання.

Рассмотрены два способа компьютерного моделирования детекторного блока прибора, предназначенного для локации точечного источника гамма-излучения, с использованием библиотеки классов Geant4. Показано, что в области энергий до 1 МэВ оба способа дают корректные результаты, что подтверждается экспериментальными данными. Определены некоторые особенности использования рассматриваемых моделей, даны рекомендации разработчикам детекторов излучения.

Two methods of computer simulation of the detector unit designed for location a point source of gamma radiation, using the Geant4 class library are presented. It is shown that at energies up to 1 MeV both models give the correct results, as confirmed by experimental data. Some features of these models are identified, and recommendations for developers of devices for locating sources of radiation are given.

Постановка проблеми. Пошук джерел проникаючого випромінювання був і залишається актуальним завданням, особливо необхідним після техногенних катастроф, таких як аварія на ЧАЕС, аварія на атомній електростанції Фукусіма. При розробці приладів для виявлення джерел випромінювання все частіше використовується комп'ютерне моделювання з метою оптимального вибору різних параметрів детекторного блоку, що розроблюється, таких як матеріали детекторів, геометричні характеристики, взаємне розташування компонент детекторного блоку тощо.

Аналіз літератури. В роботах [1, 2] були зроблені спроби створення макетів недорогих приладів для локації джерела випромінювання. Однак, дані, отримані в результаті експериментів з макетами приладів, що розроблювались, не дозволяли зробити висновки про однозначність визначення напрямку на джерело випромінювання. В роботі [3] наведено макет установки для визначення напрямку на точкові джерела гамма-випромінювання. Для виявлення можливості визначення напрямку на джерело випромінювання було проведено серію експериментів, в якій у якості джерела випромінювання використовувався ізотоп Cs-137 (гамма-кванти з енергією 661 кеВ), розташований на відстані 0,8 м від геометричного центру поглинача. Вимірювання проводились при кроковому повороті поглинача на 20° у трьох пло-

щинах. Напрямок на джерело гамма-випромінювання запропоновано визначати з відношення інтенсивностей проникаючого випромінювання, що виміряні першим та другим детекторами [3].

В роботі [4] проведено комп'ютерне моделювання відгуку детекторів установки, описаної в [3], та виявлено діапазон кутів, у якому можливо одностороннє виявлення напрямку приходу гамма-квантів. Моделювання проводилось за допомогою програми, розробленої мовою C++, яка використовує бібліотеку Geant4 [5, 6], та була створена спеціально для вирішення цієї задачі.

Мета роботи – проаналізувати результати двох способів Geant4-моделювання відгуку детекторів приладу для локації точкового джерела гамма-випромінювання. Актуальність роботи в тому, що при моделюванні взаємодії випромінювання з речовиною необхідно правильно обрати потрібну модель фізичних процесів, область застосування тощо.

Geant 4-моделювання детекторного блоку. Для комп'ютерного моделювання процесів взаємодії випромінювання з речовиною існують різні засоби, що використовують метод Монте-Карло. Бібліотека класів Geant4 пропонує достатній набір інструментів [5], що необхідні для вирішення поставленої задачі, і тому її було використано при розробці двох програм – для двох способів моделювання проходження гамма-квантів через детекторний блок приладу. Геометричні параметри моделі відповідали параметрам детекторного блоку прототипу приладу. Схему детекторного блоку установки наведено на рис. 1. Детекторний блок являє собою алюмінієву кулю S0 діаметром 50 мм, в якій розташовано два CdTe детектори D1 і D2, кожний з яких – куб із ребром 5 мм, причому детектор D2 розташовано у сферичній порожнині S1 радіусом 15 мм.

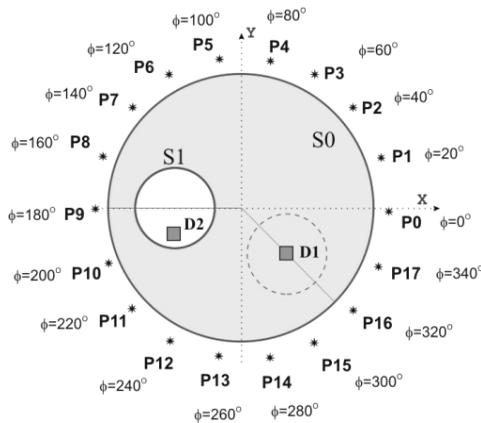


Рисунок 1 – Схема детекторного блоку установки.

На рис. 1 також наведено точки P0 – P17 – місця розташування джерела гамма-випромінювання під час кожної серії моделювання.

Докладніше параметри детекторного блоку наведені в [4].

Задачу визначення напрямку приходу гамма-квантів може бути вирішено методом підрахунку різниці потоків гамма-квантів в детекторах D1 і D2, що є результатом того, що гамма-кванти до поглинання в детекторах D1 і D2 проходять різний шлях у речовині S0 (див. рис. 1). В роботі [3] описаний експеримент з макетом приладу, де у якості джерела гамма-випромінювання використовувався ізотоп Cs-137, тобто гамма-кванти з енергією 661 кеВ. Тому для підрахунків із використанням бібліотеки класів Geant4 при розробці програм для моделювання відгуку детекторів було обрано моделі електромагнітних процесів низьких енергій.

В Geant4 версії 9.4 (грудень 2010) є можливість використовувати дві різні моделі при описуванні електромагнітних процесів низьких енергій для моделювання проходження гамма-квантів через речовину: модель “Livermore” та модель “Penelope” [6]. Назва моделі “Livermore” походить від назви міста Лівермор, США, і ця модель використовує табличні дані Ліверморської національної лабораторії імені Е. Лоуренса [7], а назва моделі “Penelope” – акронім, походить від назви засобу моделювання Penelope – (PENetration and Energy LOSS of Positrons and Electrons in matter) [8].

Відомо, що гамма-кванти з енергією 661 кеВ при проходженні через речовину зазнають Комптон-ефект, фотоефект [9]. При розробці комп’ютерних програм для моделювання проходження гамма-квантів через детекторний блок пристрою використовувались класи бібліотеки Geant4, необхідні для моделювання Комптонівського розсіювання та фотоефекту, відповідно: G4LivermoreComptonModel та G4LivermorePhotoElectricModel (програма, що базується на моделі “Livermore”), G4PenelopeComptonModel та G4PenelopePhotoElectricModel (програма, що базується на моделі “Penelope”). В таблиці 1 наведено перелік класів бібліотеки Geant4, що використані для першого та другого способів моделювання.

Таблиця 1

Класи Geant4, що використані для опису електромагнітних процесів

Модель “Livermore”	Модель “Penelope”
Комптонівське розсіювання	
G4LivermoreComptonModel	G4PenelopeComptonModel
Фотоефект	
G4LivermorePhotoElectricModel	G4PenelopePhotoElectricModel

В програмах, що розроблені, також було використано класи бібліотеки Geant4, необхідні для опису взаємодії з речовинами детекторного блоку вторинних частинок, незважаючи на те, що їх внесок в діапазоні енергій, що розглядається, є незначним [9].

Опис електромагнітних процесів взаємодії гамма-квантів з речовиною у моделях, що використовуються.

1. Комптонівське розсіювання. При використанні моделі “*Livermore*” розрахунки перерізу Комптонівського розсіювання здійснюється за емпіричною формулою [6]:

$$\sigma(Z, E_\gamma) = P_1(Z) \cdot \frac{\log(1+2X)}{X} + \frac{P_2(Z) + P_3(Z) \cdot X + P_4(Z) \cdot X^2}{1 + aX + bX^2 + cX^3}, \quad (1)$$

де Z – атомний номер речовини, E_γ – енергія гамма-кванта, $X = E_\gamma / m_e c^2$, m_e – маса електрона, $P_i(Z) = Z(d_i + e_i Z + f_i Z^2)$.

Підбір емпіричних параметрів a, b, c, d_i, e_i, f_i здійснюється за експериментальними точками на інтервалі $1 \leq Z \leq 100$ [6].

Точність визначення перерізу Комптонівського розсіювання залежить від енергії гамма-кванта, що налітає [6]:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \begin{cases} \approx 10\% & 10 \text{ кеВ} \leq E_\gamma \leq 20 \text{ кеВ} \\ \leq 5\% & E_\gamma > 20 \text{ кеВ} \end{cases} \quad (2)$$

Довжина пробігу $\lambda(E_\gamma)$ гамма-кванта з енергією E_γ до Комптонівської взаємодії визначається за формулою

$$\lambda(E_\gamma) = \left(\sum_i n_{\text{ати}} \cdot \sigma_i(E_\gamma) \right)^{-1}, \quad (3)$$

де $n_{\text{ати}}$ – кількість атомів у одиниці об’єму i -го елемента матеріалу.

При використанні моделі “*Penelope*” повний переріз Комптонівського розсіювання визначається з аналітичної параметризації. При енергіях гамма-квантів вище ніж 5 МеВ використовується формула (1), а при енергії нижче ніж 5 МеВ враховуються ефекти зв’язку атомів і доплерівське уширення [6]:

$$\sigma(E) = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{r_e^2}{2} \frac{E_C^2}{E^2} \left(\frac{E_C}{E} + \frac{E}{E_C} - \sin^2 \theta \right) \times \sum_{\text{shells}} f_i \Theta(E - U_i) n_i (p_z^{\max}) d(\cos \theta) \quad (4)$$

де r_e – класичний радіус електрона, θ – кут розсіювання, E_C – комптонівська енергія, визначається за формулою:

$$E_C = \frac{E}{1 + (E/(m_e c^2)) \cdot (1 - \cos \theta)} \quad (5)$$

f_i – число електронів на i -й атомній оболонці, m_e – маса електрона, U_i – енергія іонізації i -ї атомної оболонки, Θ – функція Хевісайда, p_z^{\max} – найбільш можливе значення p_z (проекція початкового імпульсу електронів у напрямку кута розсіювання):

$$p_z^{\max} = \frac{E(E - U_i)(1 - \cos \theta) - m_e c^2 U_i}{c \cdot \sqrt{2E(E - U_i)(1 - \cos \theta) + U_i^2}} \quad (6)$$

Інтегрування рівняння (4) проводиться методом Гауса за 20 точками [6].

2. Фотоефект. При моделюванні електромагнітних процесів низьких енергій з використанням будь-якої з моделей, що розглядаються, (як “*Livermore*”, так і “*Penelope*”) використовуються табличні дані LLNL (Ліверморської національної лабораторії), і повний переріз фотоефекта для гамма-кванта з енергією E визначається шляхом інтерполяції [6]

$$\log(\sigma(E)) = \frac{\log(\sigma_1)\log(E_2/E) + \log(\sigma_2)\log(E/E_1)}{\log(E_2/E_1)}, \quad (7)$$

де E_1 і E_2 – відповідно, найближчі менше й більше значення енергій гамма-квантів, для яких доступні табличні дані перерізів σ_1 и σ_2 фотоефекта.

Результати моделювання. З використанням двох моделей електромагнітних процесів низьких енергій було проведено моделювання проходження гамма-квантів через детекторний блок приладу. На рис. 2 наведено спектри поглиненої в детекторі D2 енергії, що були розраховані двома способами. Число первинних гамма-квантів з енергією 661 кеВ однаково для двох способів моделювання і дорівнює 10^8 . Джерело гамма-квантів розташоване в точці з координатами $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 180^\circ$ (див. рис. 1), випромінювання моделюється рівномірно в 4π . Дані, що відповідають фотоефекту (енергії, що дорівнюють 661 кеВ), на рис. 2 не наведені з метою кращого представлення даних Комптонівського розсіювання, тому що при обробці даних моделювання було виявлено, що число подій, які відповідають фотоефекту, дорівнюють для моделей “*Livermore*” та “*Penelope*”, відповідно 4139 та 4248, що складають незначну кількість порівняно з Комптонівським розсіюванням, де загальна сума зареєстрованих подій у спектрі, відповідно, 74662 для моделі “*Livermore*” та 75338 для моделі “*Penelope*”. Як можна помітити з рис. 2, спектри, отримані з використанням двох різних моделей, практично ідентичні.

Обидві розроблені програми мають інтерактивний та пакетний режими. Інтерактивний режим використовує бібліотеку OpenGL і призначений, в основному, для візуалізації моделі детекторного блоку з метою наочного уявлення взаємного розташування елементів та спостереження траєкторій первинних гама-квантів та вторинних частинок тощо. Пакетний режим призначений для моделювання великої кількості подій, при цьому всі результати зберігаються в текстових файлах з метою подальшої статистичної обробки.

Розрахунки, що наведені вище, було проведено у пакетному режимі на комп'ютері з операційною системою Windows7, який має таку досить сучасну (на момент розрахунків – червень 2011 року) конфігурацію: процесор Intel Core i7 2600K з частотою 3,7 ГГц, оперативна пам'ять 1333 DDR3 об'ємом 8 ГБ тощо, при цьому програма, що базується на моделі “*Livermore*” виконувалась приблизно 35 хвилин, а програма, що базується на моделі “*Penelope*” виконувалась 50 хвилин, тобто вимагала більше часу за рахунок більш громіздких обчислень.

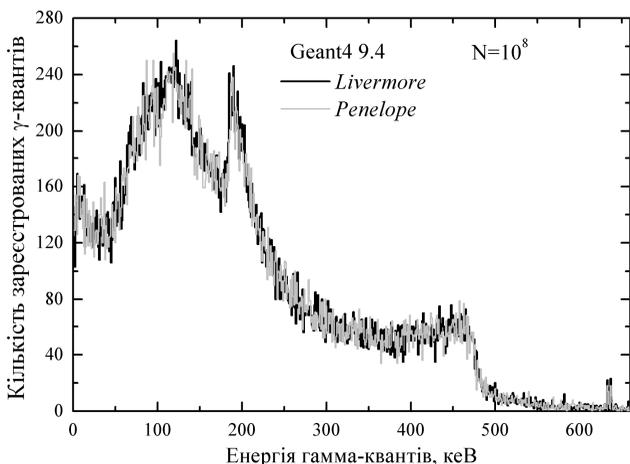


Рисунок 2 – Змодельовані спектри поглиненої в детекторі D2 енергії.

Далі було проведено дві серії моделювання для однакової кількості первинних гамма-квантів ($N_{\text{events}} = 10^8$) як для першої моделі електромагнітних процесів (“*Livermore*”), так і для другої моделі (“*Penelope*”). Моделювання проводилось при розташуванні джерела гамма-випромінювання відносно детекторного блоку, як вказано на рис. 1, при цьому полярний кут $\theta = 90^\circ$, азимутальний кут φ змінювався від -40° до 320° . Енергія гамма-квантів дорівнює 661 keV. На рис. 3 наведено результати моделювання та їх співставлення з експериментальними даними [3].

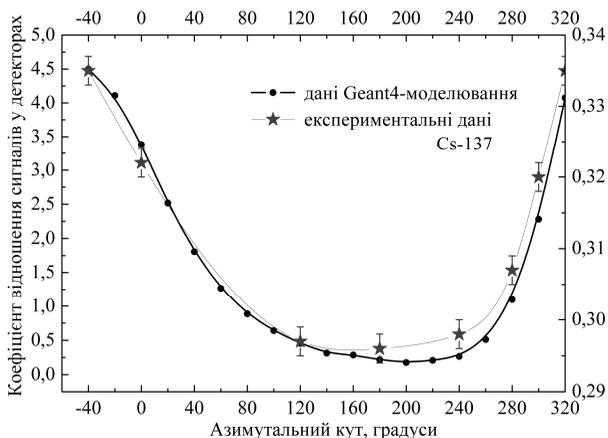


Рисунок 3 – Значення коефіцієнтів відношення сигналів у детекторах.

Змодельовані різними способами коефіцієнти відношення сигналів у детекторах співпадають, та у діапазоні азимутальних кутів від -40° до 180° (див. рис. 3) співставні з результатами експерименту [3].

Висновки. Результати моделювання показують, що при моделюванні в даній області енергій є відмінності лише в межах статистичної похибки, однак програма, що базується на моделі низьких енергій “*Penelope*” вимагала більше часу для моделювання за рахунок більш громіздких розрахунків. В результаті можна зробити висновок про застосовність обох моделей електромагнітних процесів у Geant4 для моделювання відгуку детекторів приладу, але переважніше все ж використовувати модель низьких енергій “*Livermore*”.

Список літератури: 1. Беденко Л.Б., Григор'єв О.М. Практичне застосування напівпровідникових детекторів іонізуючих випромінювань: гамма-спектрометр ТДК 10 та пристрій для визначення напрямку на джерело випромінювання. Матеріали науково-практичної конференції «Захист населення і території у надзвичайних ситуаціях» – Харків, 2006. – С. 42. 2. Беденко Л.Б., Григор'єв О.М., Сакун О.В., Коваленко С.М. Дослідження способів локації джерел проникаючих ядерних випромінювань. // Системи озброєння та військова техніка. – 2006. – № 4(8). – С. 33 – 37. 3. Григор'єв А.Н., Сакун А.В., Марущенко В.В. Устройство для определения направления в пространстве на точечные источники гамма-излучения. Материалы международной конференции «Инженерия сцинтилляционных материалов и радиационные технологии (ИСМАРТ-2008)» – Харьков, 2008. – С. 50 – 52. 4. Малыгина Т.В., Марущенко В.В., Сакун А.В., Стервиедов Н.Г. Компьютерное моделирование установки для локализации источника гамма-излучения // Вестник Харьковского университета. Сер. МИА. – 2010. – № 925, Вып. 14. – С. 132 – 139. 5. Geant4 – a simulation toolkit. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 2003. А 506. – P. 250 – 303. 6. Geant4 Physics Reference Manual. <http://geant4.web.cern.ch/geant4/UserDocumentation/UsersGuides/PhysicsReferenceManual/fo/PhysicsReferenceManual.pdf>. – 2010. – 534 p. 7. Cullen D.E. et al. Tables and graphs of photon-interaction cross sections from 10 eV to 100 GeV derived from the LLNL evaluated photon data library (EPDL), Report UCRL-50400 Lawrence Livermore National Laboratory. – 1989. 8. Salvat F., Fernández-Varea J. M., Acosta E., Sempau J. PENELOPE – A Code System for Monte Carlo Simulation of Electron and Photon Transport. Workshop Proceedings Issy-les-Moulineaux, France 5 – 7 November 2001. – 248 p. 9. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Пятаевский Л.П., под общ. ред. Пятаевского Л.П. Теоретическая физика. – Том IV. – Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1989. – 724 с.

Надійшла до редколегії 23.09.2011

А.П. МАРЧЕНКО, д-р техн. наук, проф., НТУ«ХП»;

В.В. ПИЛЬОВ, аспірант, НТУ«ХП»;

І.І. СУКАЧЕВ, канд. техн. наук, доцент, НТУ«ХП»;

УДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВИПАРОВУВАННЯ ПАЛИВНОЇ ПЛІВКИ ЗІ СТІНКИ КАМЕРИ ЗГОРЯННЯ ДИЗЕЛЯ

Розглянуто варіанти математичних моделей випаровування паливної плівки зі стінки камери згоряння дизеля з об'ємно-плівковим сумішоутворенням, заснованих на врахуванні теплообміну. Показано, що при просторово-одновимірній постановці задачі повне випаровування плівки можливе лише за наявності в пристінній області полум'я.

Рассмотрены варианты математических моделей испарения топливной пленки со стенки камеры сгорания дизеля с объемно-пленочным смесеобразованием, основанных на учете теплообмена. Показано, что при одномерной постановке задачи полное испарение пленки возможно лишь в случае наличия в пристеночной области пламени.

Versions of the mathematical models of the fuel film vaporization from the combustion chamber's wall of the diesel with volume-film mixing are considered. These models are based on the processes of heat exchange. It is shown, that the full vaporization of the film is possible at the one-dimensional statement of the problem only in case of presence of the flame near the wall.

Постановка проблеми. Сучасні дизелі переважно мають об'ємне чи об'ємно-плівкове сумішоутворення. Одним з визначальних чинників якості згоряння у циліндрі двигуна внутрішнього згоряння при об'ємно-плівковому сумішоутворенні є випаровування паливної плівки зі стінки камери згоряння (КЗ). Частково-динамічна теплоізоляція поверхні поршня лвигуна, до якої можна віднести тонке штучне теплозахисне покриття та шар природного нагару, викликає коливання температури поверхні КЗ протягом робочого циклу [1] та впливає на прогрів і випаровування частини палива, яка потрапляє на цю стінку [2]. Врахування цього впливу є необхідним при узгодженні конструкції теплоізоляованої КЗ та робочого процесу, розрахунку останнього.

Аналіз публікацій. У відомих роботах при моделюванні робочого процесу питання врахування випаровування палива зі стінки КЗ не розглядається [3], не достатньо розкриті [4], або врахування цього процесу здійснюється за емпіричними залежностями [5, 6], які не призначені для випадку наявності теплоізоляції. При цьому в [5, 6] паливна плівка розглядається як сукупність окремих крапель, що миттєво приймають температуру стінки і зберігають її протягом випаровування.

Нами у [2] було запропоновано одновимірну у просторі математичну модель прогріву паливної плівки на поверхні стінки поршня, яка оснований на визначенні теплообміну між стінкою, паливом та робочим тілом при дотри-

манні закону збереження енергії. Недоліками цієї моделі є заниження кількості палива, що випаровується у кожний момент часу, і, внаслідок накопичення похибки, неможливість адекватного опису досліджуваного процесу під час фази дифузійного згоряння.

Мета дослідження. Метою роботи є удосконалення одновимірної нестационарної математичної моделі прогріву і випаровування паливної плівки на стінці камери згоряння поршня для досягнення несуперечливості процесів випаровування та тепловиділення.

Перший етап розробки моделі. Модель розроблялась поетапно. На першому етапі на основі розгляду відомих уявлень [5] щодо фізичних процесів, які мають місце при прогріві та випаровуванні паливної плівки, було прийнято ряд спрощень та припущень, які загалом мало відрізняються від наведених у [2].

Тут прийнято, що плівка з початковими товщиною h_0 і температурою T_{i0} миттєво утворюється на стінці КЗ в момент φ_w досягнення останньої фронтом паливного факелу. Теплообмін між стінкою КЗ та паливною плівкою супроводжується перемішуванням шарів палива, що виражається в усередненні температури по товщі плівки. Це усереднення закладене у модель з метою урахування дифузії молекул та руху палива по стінці. Аналогічно, теплообмін з перемішуванням шарів палива здійснюється між робочим тілом і паливною плівкою.

При досягненні поверхневим шаром плівки температури кипіння палива $T_{кип}$ нагрів припиняється, а надлишок теплоти, що підводиться, викликає випаровування певної кількості палива з відповідним зменшенням товщини плівки. У разі неповного випаровування плівки передбачене її вилучення з досліджуваної поверхні на початку такту випуску для отримання більш достовірного опису теплообміну стінки КЗ з робочим тілом протягом циклу.

Сама стінка може мати шар теплоізоляції. Для визначення зміни температури поверхні останньої протягом циклу необхідним є отримання високочастотного нестационарного температурного поля всієї стінки. Як для основного її матеріалу, так і для теплоізоляції, використане *рівняння теплопровідності у формі Фур'є*.

Застосовано граничні умови 3-го роду. Зі сторони робочого тіла вони визначаються на основі даних робочого процесу як функції часу, що не залежать від наявності чи відсутності паливної плівки, а зі сторони масляного охолодження приймаються постійними.

З урахуванням рекомендацій [7] задача розв'язувалась методом скінченних різниць за явною схемою.

Розрахункова сітка є двовимірною і має просторовий та часовий шари. У стінці загальною товщиною l , до якої відноситься і шар теплоізоляції δ , виділено k вузлів на відстані Δx один від одного, що подано на рис. 1. Паливна плівка також поділена на окремі шари, але у визначенні температури кожного з них немає необхідності. Вузли поставлені у відповідність лише

$$\rho_t c_t \cdot \frac{T_{3^*,m+1} - T_{t,m}}{\Delta \tau} = \frac{T_{2^*,m+1} - T_{3^*,m+1} \cdot \lambda_t}{\Delta x} + \frac{(\alpha_{\check{a},m+1}(T_{\check{a},m+1} - T_{3^*,m+1}) + \alpha_{\check{a},m}(T_{\check{a},m} - T_{t,m}))/2}{\Delta x/2}, \quad h_m > 2\Delta x, \quad (5)$$

де $T_{\check{a}}$ – температура робочого тіла, $\alpha_{\check{a}}$ – коефіцієнт його теплообміну зі стінкою КЗ чи паливом;

- визначення товщини паливної плівки за відсутності випаровування

$$h_{m+1} = h_m, \quad h_m > 2\Delta x, \quad T_{3^*,m+1} \leq T_{\check{e}\check{c}\check{d}},$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 2 \right\}, \quad j \in N, \quad (6)$$

де n – частота обертання колінчастого валу, N – множина натуральних чисел;

- визначення товщини паливної плівки при випаровуванні

$$\frac{\Delta x}{2} c_t (T_{3^*,m+1} - T_{t,m}) = \left(\frac{\Delta x}{2} - \frac{h_m - h_{m+1}}{2} \right) c_t (T_{\kappa_{\text{min}}} - T_{t,m}) + r(h_m - h_{m+1}),$$

$$h_m > 2\Delta x, \quad T_{3^*,m+1} > T_{\check{e}\check{c}\check{d}},$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 2 \right\}, \quad j \in N, \quad (7)$$

де r – питома теплота пароутворення, при цьому повинна виконуватись умова $\Delta x > h_m - h_{m+1}$;

- визначення товщини паливної плівки на інших ділянках циклу

$$h_{m+1} = 0, \quad h_m \leq 2\Delta x, \quad m \in N \setminus \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 1 \right\}, \quad j \in N; \quad (8)$$

- вилучення з розрахунку частини плівки, що не випарувалась

$$h_{m+1} = 0, \quad h_m > 2\Delta x, \quad m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 1 \right\}, \quad j \in N; \quad (9)$$

- визначення температури палива у разі відсутності випаровування

$$T_{t,m+1} = T_{1,m+1} \cdot \frac{\Delta x/2}{h_{m+1}} + T_{1^*,m+1} \cdot \frac{\Delta x}{h_{m+1}} + T_{2^*,m+1} \cdot \left(1 - \frac{2\Delta x}{h_{m+1}} \right) + T_{3^*,m+1} \cdot \frac{\Delta x/2}{h_{m+1}},$$

$$h_m > 2\Delta x, \quad T_{3^*,m+1} \leq T_{\check{e}\check{c}\check{d}},$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 2 \right\}, \quad j \in N; \quad (10)$$

- визначення температури палива у разі наявності випаровування

$$T_{t,m+1} = T_{1,m+1} \cdot \frac{\Delta x/2}{h_{m+1}} + T_{1^*,m+1} \cdot \frac{\Delta x}{h_{m+1}} + T_{2^*,m+1} \cdot \frac{h_m - 2\Delta x}{h_{m+1}} + T_{\xi\check{c}d'} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x/2 - h_m}{h_{m+1}}\right),$$

$$h_m > 2\Delta x, \quad T_{3^*,m+1} > T_{\xi\check{c}d'},$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 2 \right\}, \quad j \in N; \quad (11)$$

- визначення температури поверхні КЗ за наявності палива

$$\frac{\rho_1 + \rho_t}{2} \cdot \frac{c_{1,m} + c_t}{2} \cdot \frac{2T_{1,m+1} - T_{t,m+1} - T_{1,m}}{\Delta\tau} = \frac{\lambda_1 \cdot \frac{T_{2,m} - T_{1,m}}{\Delta x} - \lambda_t \cdot \frac{T_{1,m} - T_{t,m}}{\Delta x}}{\Delta x}, \quad h_m > 2\Delta x; \quad (12)$$

- граничні умови зі сторони камери згоряння за відсутності палива

$$\rho_1 c_1 \cdot \frac{T_{1,m+1} - T_{1,m}}{\Delta\tau} = \frac{\lambda_1 \cdot \left(\frac{T_{2,m+1} - T_{1,m+1}}{\Delta x} + \frac{T_{2,m} - T_{1,m}}{\Delta x} \right) / 2}{\Delta x/2} +$$

$$+ \frac{(\alpha_{z,m+1}(T_{z,m+1} - T_{1,m+1}) + \alpha_{z,m}(T_{z,m} - T_{1,m})) / 2}{\Delta x/2}, \quad h_m \leq 2\Delta x; \quad (13)$$

- граничні умови зі сторони охолодження

$$\rho_k c_k \cdot \frac{T_{k,m+1} - T_{k,m}}{\Delta\tau} = \frac{\alpha_m (2T_m - T_{k,m+1} - T_{k,m}) / 2}{\Delta x/2} - \frac{\lambda_k \cdot \frac{T_{k,m} - T_{k-1,m}}{\Delta x}}{\Delta x/2}, \quad (14)$$

де T_m – температура охолоджуючого масла, α_m – коефіцієнт його теплообміну зі стінкою КЗ;

- початкова температура стінки КЗ

$$T_{i,1} = T_0, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad (15)$$

де T_0 – прийнята початкова температура стінки;

- початкова температура паливної плівки

$$T_{t,m} = T_{t0}, \quad m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] \right\}, \quad j \in N; \quad (16)$$

- початкова товщина паливної плівки

$$h_m = h_0, \quad m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] \right\}, \quad j \in N. \quad (17)$$

Перевірка адекватності першого варіанту моделі. Наведена вище модель реалізована у вигляді комп'ютерної програми мовою Delphi.

Критерієм її адекватності було висунуто несуперечливість моменту кінця тепловиділення φ_x , що має бути отриманий при розрахунку робочого процесу, та моменту кінця випаровування палива φ_{en} , який можна визначити

з точністю до $6n\Delta\tau$ на основі результатів використання моделі, що розроблюється, за допомогою виразів

$$h \left[\frac{\varphi_{en} + 720 \cdot j_z}{6n\Delta\tau} \right] > 0, \quad h \left[\frac{\varphi_{en} + 720 \cdot j_z}{6n\Delta\tau} \right]_{+1} = 0, \quad (18)$$

де j_z – номер робочого циклу двигуна, при якому вважається, що нестационарний модельований процес установився. Температурний стан стінки, паливної плівки, а також товщина останньої як залежності від кута повороту колінчастого валу $\varphi \in [0; 720]$

$$T_{i, \left[\frac{\varphi + 720 \cdot j}{6n\Delta\tau} \right]}, \quad T_{t, \left[\frac{\varphi + 720 \cdot j}{6n\Delta\tau} \right]}, \quad h \left[\frac{\varphi + 720 \cdot j}{6n\Delta\tau} \right]$$

при довільній величині $j \geq j_z$ вважаємо остаточною, і подальший розрахунок може не проводитись. Значення j_z встановлюємо сумісним розв'язуванням нерівностей

$$\left| T_{1, \left[\frac{360 + 720 \cdot (j_z - 2)}{6n\Delta\tau} \right]} - T_{1, \left[\frac{360 + 720 \cdot (j_z - 1)}{6n\Delta\tau} \right]} \right| \geq \Delta T_z,$$

$$\left| T_{1, \left[\frac{360 + 720 \cdot (j_z - 1)}{6n\Delta\tau} \right]} - T_{1, \left[\frac{360 + 720 \cdot j_z}{6n\Delta\tau} \right]} \right| < \Delta T_z, \quad j_z \in N, \quad (19)$$

де нами прийнято $\Delta T_z = 0,02 \text{ E}$.

Слід звернути увагу, що у разі відповідності моделі вищевказаному критерію якості $\varphi_{en} < \varphi_x$ неповне випаровування не матиме місця і процедура вилучення плівки буде зайвою.

Окрім цього, закінчення випаровування повинне відбутися пізніше за початок дифузійного згорання φ_d , який теж визначається при розрахунку робочого процесу.

Перевірка моделі здійснювалась щодо двох режимів роботи дизеля 4ЧН12/14, результати моделювання робочого процесу для яких опубліковано у [8]. Обраний двигун має зміщену від центра КЗ форсунку, розпилювач якої утворює два довгих і два коротких струменя палива. Це дозволяє проводити спостереження при суттєво відмінних умовах і процесах, що відбуваються у КЗ, і поширювати зроблені висновки на інші конструкції.

Початкова товщина паливної плівки та момент її утворення на відмінних режимах роботи двигуна та для коротких і довгих паливних струменів різняться. Значення цих величин отримано з розрахунку робочого процесу і наведено у табл. 1, де N_e позначає ефективну потужність дизеля.

Товщину стінки та параметри її теплообміну з робочим тілом в КЗ і охолоджуючим маслом також узято згідно [8].

Початкова температура паливної плівки T_{f0} формується при взаємодії

паливного струменя зі стінкою. Вона має належати діапазону 320-520 К [9].

Початкова температура стінки КЗ на номінальному режимі роботи приймалась $T_0 = 470 \text{ K}$, а на досліджуваному частковому – $T_0 = 450 \text{ K}$.

Таблиця 1

Початкові параметри паливної плівки двигуна 4ЧН12/14

Режим роботи двигуна	Паливний струмінь	h_0 , мм	φ_w , гр. п.к.в.
Номінальний, $N_e = 100 \text{ кВт}$, $n = 2000 \text{ хв}^{-1}$	довгий	0,6	365
	короткий	0,34	354
Частковий, $N_e = 40 \text{ кВт}$, $n = 1000 \text{ хв}^{-1}$	довгий	0,3	355,8
	короткий	0,48	350

Теплофізичні властивості сплаву АК12М2МгН (АЛ25), з якого утворена стінка КЗ, та палива були задані аналогічно до [2], за винятком температури кипіння палива. Остання приймалась незалежно від фракційного складу паливної плівки на кожному кроці, $T_{кин} = 530 \text{ K}$.

Крок сітки Δx за просторовою координатою варіювався в діапазоні 0,005..0,1 мм. Цьому відповідає $\Delta \tau \approx 10^{-6} \text{ с}$.

Проведення розрахунків за описаною моделлю показало, що для усього рекомендованого діапазону T_{t0} випаровування палива не відбувається.

Математична модель з переважанням випаровування над перемішуванням. Можливим поясненням причин розбіжностей між реальним фізичним процесом та результатами моделювання можуть бути занижене теплопідведення до паливної плівки, завищення теплопідведення від неї чи зашвидка передача теплоти від поверхневого шару палива у його товщу внаслідок перемішування.

Оскільки паливна плівка набуває своєї початкової температури при теплообміні зі стінкою під час руху по останній, стінка повинна мати вищу за плівку температуру, і теплопідведення від палива не відбуватиметься.

З метою усунення можливої зашвидкої передачі теплоти, на другому етапі розробки моделі було висунуте припущення, що швидкість процесу випаровування палива з поверхні плівки перевищує швидкість процесів дифузії та механічного перемішування. Для граничного випадку це виражається у тому, що теплота, яка підводиться до паливної плівки від робочого тіла, повністю витрачається на нагрів і випаровування поверхневого шару паливної плівки.

Вказана особливість відрізняє другу запропоновану модель від першої. При цьому з розрахункової сітки вилучено вузол 3*. Фрагмент сітки подано на рис. 2.

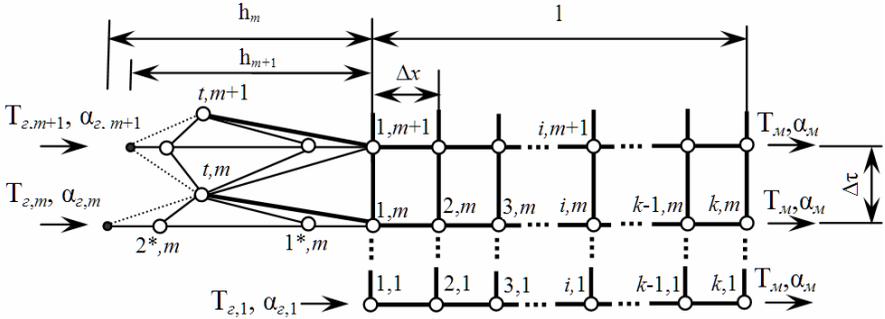


Рисунок 2 – Схема розрахункової сітки другого варіанту моделі.

Математичний опис моделі включає вирази (1)-(2), (14)-(17) незмінними, а інші набувають вигляду (20)-(27):

- визначення температури в першому допоміжному вузлі

$$\rho_t c_t \cdot \frac{T_{1^*,m+1} - T_{t,m}}{\Delta \tau} = \frac{\lambda_t \cdot \frac{T_{1,m} - T_{t,m}}{\Delta x}}{\Delta x}, h_m > \frac{3}{2} \Delta x; \quad (20)$$

- визначення температури в другому допоміжному вузлі

$$T_{2^*,m+1} = T_{t,m}, h_m > \frac{3}{2} \Delta x; \quad (21)$$

- визначення температури палива після перемішування

$$T_{t,m+1} = T_{1,m+1} \cdot \frac{\Delta x/2}{h_{m+1}} + T_{1^*,m+1} \cdot \frac{\Delta x}{h_{m+1}} + T_{2^*,m+1} \cdot \left(1 - \frac{3\Delta x/2}{h_{m+1}}\right), h_m > \frac{3}{2} \Delta x,$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 2 \right\}, j \in N; \quad (22)$$

- визначення товщини паливної плівки при випаровуванні

$$\frac{(\alpha_{z,m+1}(T_{z,m+1} - T_{kun}) + \alpha_{z,m}(T_{z,m} - T_{kun}))}{2\rho_t} = \frac{h_m - h_{m+1}}{\Delta \tau} (c_t(T_{kun} - T_{t+1,m}) + r), h_m > \frac{3}{2} \Delta x,$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 2 \right\}, j \in N; \quad (23)$$

- визначення товщини паливної плівки на інших ділянках циклу

$$h_{m+1} = 0, h_m \leq \frac{3}{2} \Delta x, m \in N / \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 1 \right\}, j \in N; \quad (24)$$

- вилучення частини паливної плівки, що не випарувалась

$$h_{m+1} = 0, h_m > \frac{3}{2} \Delta x, m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_x + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta\tau} \right] - 1 \right\}, j \in N; \quad (25)$$

- визначення температури поверхні КЗ за наявності палива

$$\frac{\rho_1 + \rho_t}{2} \cdot \frac{c_{1,m} + c_t}{2} \cdot \frac{2T_{1,m+1} - T_{t,m+1} - T_{1,m}}{\Delta\tau} = \frac{\lambda_1 \cdot \frac{T_{2,m} - T_{1,m}}{\Delta x} - \lambda_t \cdot \frac{T_{1,m} - T_{t,m}}{\Delta x}}{\Delta x},$$

$$h_m > \frac{3}{2} \Delta x; \quad (26)$$

- граничні умови зі сторони камери згоряння за відсутності палива

$$\rho_1 c_1 \cdot \frac{T_{1,m+1} - T_{1,m}}{\Delta\tau} = \frac{\lambda_1 \cdot \left(\frac{T_{2,m+1} - T_{1,m+1}}{\Delta x} + \frac{T_{2,m} - T_{1,m}}{\Delta x} \right) / 2}{\Delta x / 2} +$$

$$+ \frac{(\alpha_{\varepsilon,m+1}(T_{\varepsilon,m+1} - T_{1,m+1}) + \alpha_{\varepsilon,m}(T_{\varepsilon,m} - T_{1,m})) / 2}{\Delta x / 2}, h_m \leq \frac{3}{2} \Delta x. \quad (27)$$

Розрахунки із застосуванням такої моделі показали, що випаровування відбувається, але лише невеликий проміжок часу, що відповідає максимальним значенням температури робочого тіла T_{ε} та коефіцієнту тепловіддачі α_{ε} . Товщина плівки на досліджуваних режимах внаслідок випаровування зменшується на 0,02-0,03 мм. Відповідно, частина палива, що випарувалася, не перевищує 8% від загальної кількості останнього.

Математичні моделі з урахуванням пристінного полум'я. Отже, використання запропонованого на другому етапі припущення не викликало достатнього підвищення достовірності моделі. І в першому, і в другому випадках недостатньою є кількість теплоти, яка підводиться до плівки.

Зі сторони стінки КЗ теплопідведення прийнято без термічного опору і при максимальному з можливих теплоперепадів, тобто збільшеним бути не може. Тоді засобом можливого підвищення теплопідведення від робочого тіла постає заміна протягом існування паливної плівки параметрів газів у граничних умовах 3-го роду параметрами полум'я. Припущення наявності полум'я у пристінній зоні випаровування є прийнятним у разі достатнього надходження до неї окислювача при якісному вихроутворенні в КЗ. Температуру полум'я $T_{nl} = 2600$ К прийнято з роботи [6], коефіцієнт тепловіддачі $\alpha_{nl} = 20000$ Вт/(м² · К) при зриві пристінного шару газу – відповідно до *теорії конвекційного сплеску Вошіні* [10].

Таким чином, на третьому етапі використано модель першого етапу, в якій за наявності паливної плівки застосовуються вище означені граничні умови полум'я. Вона містить вирази (1)-(4), (6)-(17) та, для визначення температури в третьому допоміжному вузлі, доповнюється наступним:

$$\rho_i c_i \cdot \frac{T_{3^*,m+1} - T_{t,m}}{\Delta \tau} = \frac{\frac{T_{2^*,m+1} - T_{3^*,m+1}}{\Delta x} \cdot \lambda_t + \alpha_{d'e} \left(T_{d'e} - \frac{T_{3^*,m+1} + T_{t,m}}{2} \right)}{\Delta x/2}, \quad h_m > 2\Delta x. \quad (28)$$

При застосуванні означеної моделі отримано часткове випаровування паливної плівки у межах 6% від її товщини. Тобто, навіть таке значне збільшення теплопідведення за розглянутого підходу не спроможне викликати істотне випаровування.

Тому за четвертим підходом висунуте припущення наявності полум'я в пристінній зоні було вжито до моделі другого підходу. Модель складається з виразів (1)-(2), (14)-(17), (20)-(22), (24)-(27) та виразу для визначення товщини паливної плівки при випаровуванні

$$\frac{\alpha_{nl} (T_{nl} - T_{kun})}{\rho_t} = \frac{h_m - h_{m+1}}{\Delta \tau} (c_t (T_{kun} - T_{t+1,m}) + r), \quad h_m > \frac{3}{2} \Delta x,$$

$$m \in \left\{ \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta \tau} \right], \left[\frac{\varphi_w + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta \tau} \right] + 1, \dots, \left[\frac{\varphi_\delta + 720 \cdot (j-1)}{6n\Delta \tau} \right] - 2 \right\}, \quad j \in N. \quad (29)$$

Тільки при розгляді такої моделі було досягнуто повне випаровування палива зі стінки. При цьому використання лише температури полум'я, або лише коефіцієнту тепловіддачі при конвекційному сплеску, виявляється недостатнім.

Встановлено, що для досліджуваних режимів при початковій температурі палива $T_{t0} > 440 \text{ E}_c$ та усталеному рішенні нестационарної задачі теплопровідності, паливо догріває стінку КЗ, що є фізично неможливим. Тому прийнято $T_{t0} = 440 \text{ E}_c$. Порівнювані величини для чотирьох випадків, що аналізуються, наведені у табл. 2.

Таблиця 2

Характерні моменти робочого процесу двигуна 4ЧН12/14

Режим роботи двигуна	Паливний струмінь	φ_d , гр. п.к.в.	φ_{en} , гр. п.к.в.	φ_x , гр. п.к.в.
Номінальний, $N_e = 100 \text{ кВт}$, $n = 2000 \text{ хв}^{-1}$	довгий	374	428,4	446
	короткий		388,8	
Частковий, $N_e = 40 \text{ кВт}$, $n = 1000 \text{ хв}^{-1}$	довгий	364,5	371,4	412
	короткий		375,8	

Видно, що дифузійне згоряння починається до моменту закінчення ви-

паровування палива зі стінки, який в свою чергу передує кінцю тепловиділення.

Зрозуміло, що реальний процес знаходиться між граничними випадками, які описані наведеними моделями. Однак, виходячи з наданих результатів, найбільш прийнятною є четверта модель.

Висновки. Розроблено одновимірну математичну модель випаровування паливної плівки зі стінки КЗ, що враховує теплообмін між стінкою і плівкою, полум'ям і плівкою, а в моменти часу, коли паливо відсутнє – між робочим тілом і стінкою КЗ. Модель враховує товщину плівки та зміну її температури протягом випаровування і може бути використана у разі застосування теплозахисного покриття поверхні КЗ чи присутності на останній нагару.

Встановлено, що принаймні при постановці задачі в одновимірному вигляді, для випаровування паливної плівки зі стінки КЗ необхідними є врахування конвекційного сплеску і присутність біля цієї поверхні полум'я.

Подальший напрямок робіт пов'язаний із дослідженням за допомогою розробленої моделі ефектів частково-динамічної теплоізоляції у зоні наявності паливної плівки, а також розробкою двовимірної математичної моделі для процесів, що вивчаються.

Список літератури: 1. *Шпаковський В.В.* Науково-технічні основи поліпшення показників ДВЗ застосуванням поршнів з корундовим шаром / Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.05.03 / НТУ «ХПІ». – Харків, 2010. – 37 с. 2. *Марченко А.П., Пильов В.В.* Моделювання прогріву паливної плівки на стінці камери згоряння дизеля з частково-динамічною теплоізоляцією поршня // Двигатели внутреннего сгорания. – 2011. – №2. – С. 28-33. 3. *Зеленцов А.А.* Исследование локального теплообмена в камере сгорания дизеля, конвертированного на природный газ / Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.04.02 / МГТУ им. Н.Э.Баумана. – М., 2011. – 16 с. 4. *Абрамчук Ф.И., Авраменко А.Н.* Программный комплекс для моделирования внутрицилиндровых процессов ДВС // Двигатели внутреннего сгорания. – 2010. – №2. – С. 7-12. 5. Процессы в перспективных дизелях / А.Ф. Шеховцов, Ф.И. Абрамчук, В.И. Крутов, А.П. Марченко и др. / Под ред. А.Ф. Шеховцова. – Харьков: Изд-во «Основа» при Харьк. ун-те, 1992. – 352 с. 6. *Марченко А.П., Карягин И.Н., Сукачев И.И.* Влияние температуры стенок камеры сгорания на испарение и выгорание топлива в форсированных дизелях // Двигатели внутреннего сгорания. – 2010. – №2. – С. 40-46. 7. *Кавтарадзе Р.З.* Локальный теплообмен в поршневых двигателях: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. – 472 с. 8. Оценка влияния режимных факторов на параметры температурного высокочастотного колебания в поверхностном корундовом слое поршня / *Марченко А.П., Шпаковский В.В., Сукачев И.И.* и др. // Двигатели внутреннего сгорания. – 2010. – №1. – С. 65-69. 9. Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности / Ф.И. Абрамчук, А.П. Марченко, Н.Ф. Разлейцев, Е.И. Третяк и др. / Под ред. А.Ф. Шеховцова. – К.: Техника, 1992. – 272 с. 10. *Woschni G.* Experimental investigation of the heat transfer in internal combustion engines with insulated combustion chamber walls // Heat and mass transfer in gasoline and diesel engines. – 1987. – 13 p.

Надійшла до редакції 15.09.2011

З.Ф. НАЗИРОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна,
Харків;
Н.В. ЧЕРЕСЬКА, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХП»;
А.А. ЯНЦЕВИЧ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна,
Харків

ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. У статті розглядалися лінійні перетворення над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Рассмотрены линейные преобразования некоторых классов случайных полей. Получены необходимые и достаточные условия в терминах корреляционных функций для того чтобы преобразованное поле принадлежало тому или иному классу. В статье рассматривались линейные преобразования двухпараметрические последовательности в гильбертовом пространстве, которые строятся по заданному дискретному случайному полю.

The article deals with linear transformations of certain classes of random fields. Necessary and sufficient conditions in terms of correlation function to convert the field belonged to a particular class. The article deals with two-parameter sequence of linear transformations in Hilbert space, which are constructed from a given discrete random field.

Вступ. Статистична нестационарність або неоднорідність широко зустрічається у прикладних задачах. Наприклад, неоднорідна турбулентність, перехідні процеси у різноманітних стохастичних системах, розповсюдження хвиль у статистично неоднорідних або нестационарних середовищах. Розв'язання таких задач приводить до неоднорідних випадкових полів, які є мало дослідженими.

Аналіз останніх досліджень. До цього часу була розроблена достатньо повна спектральна теорія однорідних випадкових полів [1,2]. Дискретні поля вивчалися лише епізодично [3,4]. Гільбертів підхід до лінійних перетворень дискретних випадкових полів не розглядався.

Постановка задачі. Визиває зацікавленість розповсюдження результатів робіт [3,4], в яких розглядалися лінійні перетворення випадкових послідовностей як послідовностей у гільбертовому просторі, на дискретні випадкові поля.

Розв'язання задачі для однорідного випадкового поля. Нехай $u(n, m, \omega)$ – це дискретне випадкове поле з математичним очікуванням $M u(n, m, \omega) = 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ та кореляційною функцією $K(n, m, p, q) = M u(n, m, \omega) \overline{u(p, q, \omega)}$. Вкладемо випадкове поле $u(n, m, \omega)$ стандартним чином у гільбертів простір. Отримаємо $u(n, m)$ – поле у гільбертовому просторі з кореляційною функцією $K(n, m, p, q) = \langle u(n, m), u(p, q) \rangle$. Поле назвемо *еволюційно зображеним*, якщо у відповідному гільбертовому просторі $u(n, m) = T_1^n T_2^m u_0$. Припускаємо, що T_1, T_2 комутовують, тобто $[T_1, T_2] = 0$ або $T_1 T_2 - T_2 T_1 = 0$.

Означення. Поле $u(n, m)$ вважається однорідним, якщо

$$K(n, m, p, q) = K(n - p, m - q).$$

Теорема 1. *Однорідне поле завжди еволюційно зображене.*

Доведення. Розглянемо лінеал $L = \bigvee_{n, m \in \mathbb{Z}} u(n, m)$. В L визначимо T_τ наступним чином:

$$\forall h \in L : h = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} u(k, l) \quad T_\tau h = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} u(k + \tau, l),$$

аналогічно,

$$T_t h = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} u(k, l + t), \quad [T_\tau, T_t] = 0.$$

Через однорідність поля T_τ, T_t є ізометрією.

Дійсно, $\forall x, y \in L : x = \sum_{n, m=1}^{N_1, N_2} a_{n, m} u(n, m)$, $y = \sum_{p, q=1}^{N_1, N_2} b_{p, q} u(p, q)$, маємо

$$\langle T_\tau x, T_\tau y \rangle_L = \sum_{n, m=1}^{N_1, N_2} \sum_{p, q=1}^{N_1, N_2} a_{n, m} \overline{b_{p, q}} \langle u(n + \tau, m), u(p + \tau, q) \rangle,$$

але кореляційна функція однорідного поля залежить від різниці

$$K(n + \tau, p + \tau, m, q) = K(n, m, p, q) = \langle u(n, m), u(p, q) \rangle,$$

таким чином, $\langle T_\tau x, T_\tau y \rangle_L = \langle x, y \rangle_L$. Аналогічно розглядається і $\langle T_t x, T_t y \rangle_L$. За

неперервністю це продовжується на замикання \overline{L} і звідси витікає, що T_τ, T_t є унітарними операторами. Їх комутованість очевидна.

Розглянемо оператори зсуву на одиницю:

$$U_1 h = \sum_{k,l=1}^{N_1, N_2} u(k+1, l), \quad U_2 h = \sum_{k,l=1}^{N_1, N_2} u(k, l+1).$$

Якщо $u(n, m) = T_n u(0, m)$, $u(n, m) = T_m u(n, 0)$, тоді $T_n = U_1^n$, $T_m = U_2^m$.

Ці зображення легко отримати за методом математичної індукції.

Якщо від $n = 0$ перейти до $n = -1$, отримаємо $T_n = U_1^{-n} = (U_1^{-1})^n$. Аналогічні міркування є справедливими і для m . Отримуємо,

$$u(n, m) = U_1^n U_2^m u(0, 0), \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Позначимо $u(0, 0) = u_0$. U_1^n, U_2^m – комутуючі унітарні оператори. Розглянемо спектральні розклади операторів U_1 і U_2 . З комутуємості операторів U_1 і U_2 витікає комутуємості відповідних розкладів одиниці:

$$U_1 = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_1(\lambda), \quad U_2 = \int_0^{2\pi} e^{i\mu} dE_2(\mu), \quad [E_1(\lambda), E_2(\mu)] = 0.$$

$$U_1 U_2 = U_2 U_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda+\mu)} E(d\lambda, d\mu), \quad E(d\lambda, d\mu) = dE_1(\lambda) dE_2(\mu),$$

тоді для однорідного випадкового поля $u(n, m)$ отримуємо спектральний розклад

$$u(n, m) = U_1^n U_2^m u(0, 0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n + i\mu m} E(d\lambda, d\mu) u_0$$

Розглянемо лінійне перетворення однорідного поля $u(n, m)$ – поле $V(n, m) = Bu(n, m)$, де оператор $B \in [H_u, H_u]$, $\|B\| < \infty$, і нехай $I - B^* B = \langle \cdot, e \rangle e$.

Означення. Поле $V(n, m) = Bu(n, m)$ назовемо *дилатацією першого порядку* однорідного поля $u(n, m)$.

Розглянемо кореляційну функцію поля $V(n, m)$:

$$\begin{aligned} K_{V_V}(n, m, p, q) &= \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = \\ &= K_{uu}(n, m, p, q) - \Phi(n, m) \overline{\Phi(p, q)}, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\Phi(n, m) = \langle u(n, m), e \rangle, \quad (2)$$

Відзначимо, що $\Phi(n, m)$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Теорема 2. Для того щоб поле $V(n, m)$ було дилатацією першого порядку однорідного поля $u(n, m)$, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція $K_{VV}(n, m, p, q)$ мала вигляд (1), де $\Phi(n, m)$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Доведення. Необхідність.

$$K_{uu}(n, m, p, q) = \langle u(n, m), u(p, q) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda_1 n + i\mu_1 m - i\lambda_2 n - i\mu_2 m} \langle E(d\lambda_1, d\mu_1)u_0, E(d\lambda_2, d\mu_2)u_0 \rangle.$$

За властивостями розкладу одиниці E_λ, E_μ , отримуємо

$$K(n, m, p, q) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\lambda + i(m-q)\mu} F(d\lambda, d\mu), \quad (3)$$

де $F(d\lambda, d\mu) = \|E(d\lambda, d\mu)u_0\|^2$.

Якщо існує похідна $\frac{\partial^2 F(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu} = f(\lambda, \mu)$, яка називається *спектральною щільністю*, то

$$K(n-m, p-q) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)\lambda + i(m-q)\mu} f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu. \quad (4)$$

Через те, що $I - B^*B = \langle \cdot, e \rangle e$, для функції

$$K_{VV}(n, m, p, q) = \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = \langle B^*Bu(n, m), u(p, q) \rangle$$

легко отримуємо зображення (1).

Достатність. За спектральною мірою $F(d\lambda, d\mu) = F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо (не єдиним чином) оператори \hat{U}_1 і \hat{U}_2 , відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n, m) = \hat{U}_1^n \hat{U}_2^m u_0$, яке має задану кореляційну функцію (3) або (4). Далі стандартним чином будуємо гільбертів простір H_u . Через те, що $\Phi(n, m)$ – лінійний функціонал від $\hat{u}(n, m)$, то за теоремою Риса він має вигляд $\Phi(n, m) = \langle \hat{u}(n, m), \hat{h} \rangle_H$. Через те, що $H_u = \overline{V_{n, m \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n, m)}$, то $\forall \hat{h} \in H_u$ отримуємо

$$\hat{h} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0, \quad (5)$$

де $\varphi(\lambda, \mu) = \sum_{n,m=1}^{N_1, N_2} a_{n,m} e^{i\lambda n + i\mu m}$, або $\varphi(\lambda, \mu) \in$ границю за метрикою H_u таких елементів. Отже, для h (як і для будь-якого елемента H_u) маємо зображення

$$h = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0 \text{ з невідомою функцією } \varphi(\lambda, \mu).$$

Через те, що

$$\Phi(n, m) = \langle u(n, m), h \rangle_H = \left\langle \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n + i\mu m} E(d\lambda, d\mu) u_0, \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0 \right\rangle,$$

але, згідно з властивостями диференціалів dE_λ, dE_μ , отримуємо

$$\Phi(n, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\varphi(\lambda, \mu)} F(d\lambda, d\mu),$$

де $F(d\lambda, d\mu) = \|E(d\lambda, d\mu) u_0\|^2$. $F(d\lambda, d\mu) = f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$, тобто

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\partial^2 F(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu}.$$

Таким чином, $\Phi(n, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\varphi(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$, тобто

$\Phi(n, m)$ – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є для функції $\overline{\varphi(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu)$.

$$\text{Отже, } \overline{\varphi(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n - i\mu m} \Phi(n, m).$$

Звідси $\varphi(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi f(\lambda, \mu)} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\Phi(n, m)}$. Остаточно отримуємо

$$h = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi f(\lambda, \mu)} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\Phi(n, m)} E(d\lambda, d\mu) u_0.$$

За відомим h легко підібрати лінійний обмежений оператор B , такий що $I - B^* B = \langle \cdot, h \rangle h$.

Теорема доведена.

Розглянемо далі дилатації r -го порядку $I - B^* B = \sum_{\alpha=1}^r \langle \cdot, e_\alpha \rangle e_\alpha$ та функцію.

$$K_{VV}(n, m, p, q) = K_{uu}(n, m, p, q) - \sum_{\alpha=1}^r \Phi_\alpha(n, m) \overline{\Phi_\alpha(p, q)}, \quad (4)$$

де $\Phi_\alpha(n, m) = \langle u(n, m), e_\alpha \rangle$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Теорема 3. Для того щоб поле $V(n, m)$ було дилатацією r -го порядку однорідного поля $u(n, m)$, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція $K_{VV}(n, m, p, q)$ мала вигляд (4), где $\Phi_\alpha(n, m)$ – лінійні функціонали від $u(n, m)$.

Доведення. Необхідність. Нехай B – обмежений оператор, такий що

$$I - B^*B = \sum_{k=1}^r \langle \cdot, h_k \rangle h_k.$$

Тоді

$$\begin{aligned} K_{VV}(n, m, p, q) &= \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = \langle u(n, m), u(p, q) \rangle - \\ &- \langle (I - B^*B)u(n, m), u(p, q) \rangle = K_{uu}(n, m, p, q) - \sum_{\alpha=1}^r \Phi_\alpha(n, m) \overline{\Phi_\alpha(p, q)}, \end{aligned}$$

де $\Phi_\alpha(n, m) = \langle u(n, m), h_\alpha \rangle_H$.

Достатність. За спектральною мірою $F(d\lambda, d\mu) = F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо оператори \hat{U}_1 і \hat{U}_2 , відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n, m) = \hat{U}_1^n \hat{U}_2^m u_0$ і будуємо H_u . Через те, що $\Phi_\alpha(n, m)$ – це лінійний функціонал від $\hat{u}(n, m)$, то за теоремою Риса він має вигляд

$\Phi_\alpha(n, m) = \langle \hat{u}(n, m), \hat{h}_\alpha \rangle_{H_u}$. Оскільки $H_u = \overline{V_{n, m \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n, m)}$, то

$$\hat{h}_\alpha = \sum_{n, m=1}^{N_1, N_2} a_{n, m}^{(\alpha)} u(n, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\alpha(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0, \quad (6)$$

де $\varphi_\alpha(\lambda, \mu) = \sum_{n, m=1}^{N_1, N_2} a_{n, m}^{(\alpha)} e^{i\lambda n + i\mu m}$, або $\varphi_\alpha(\lambda, \mu)$ має вигляд границь (6) в середньоквадратичному.

Таким чином, $\Phi_\alpha(n, m) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\varphi_\alpha(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$, тобто

$\Phi_\alpha(n, m)$ – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є для функції $\overline{\varphi_\alpha(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu)$.

Отже, $\overline{\varphi(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n - i\mu m} \Phi_\alpha(n, m)$, звідси

$$\varphi_\alpha(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi f(\lambda, \mu)} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\Phi_\alpha(n, m)}.$$

Остаточно отримуємо

$$h_\alpha = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{f(\lambda, \mu)} \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n + i\mu m} \overline{\Phi_\alpha(n, m)} E(d\lambda, d\mu) u_0.$$

Завершення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Розв'язання задачі для ганкелевого випадкового поля. Розглянемо еволюційно зображене поле $u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0$, де A_1, A_2 – самоспряжені перестановочні обмежені оператори у гільбертовому просторі

$$H = \overline{V u(n, m)}. \quad \forall h \in L : h = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} u(k, l) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0,$$

де $\varphi(\lambda, \mu) = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} \lambda^k \mu^l$. Кореляційна функція такого поля залежить від суми аргументів.

Лема. Для того щоб поле було ганкелевим, необхідно та достатньо, щоб кореляційна функція цього поля задовольняла співвідношенню

$$K(n, m, p, q) = K(n + p, m + q). \quad (7)$$

Доведення. Необхідність. За означенням кореляційної функції

$$\begin{aligned} K(n, m, p, q) &= \langle u(n, m), u(p, q) \rangle_{H_u} = \langle A_1^n A_2^m u_0, A_1^p A_2^q u_0 \rangle_{H_u} = \\ &= \langle A_1^{n+p} A_2^{m+q} u_0, u_0 \rangle_{H_u} = K(n + p, m + q). \end{aligned}$$

Достатність. Вкладемо поле $u(n, m)$ в гільбертів простір H_u , який є замиканням елементів вигляду $h = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} A_1^k A_2^l u_0$. Тоді з умови (7) легко отримати співвідношення

$$\langle A_1 h, f \rangle_{H_u} = \langle h, A_1 f \rangle_{H_u}, \quad (8)$$

де $f = \sum_{p, q=1}^{N_1, N_2} b_{p, q} A_1^p A_2^q u_0$. Переходячи до замикання в (8) отримуємо, що

$$\langle A_1 h_1, h_2 \rangle_{H_u} = \langle h_1, A_1 h_2 \rangle_{H_u} \quad \forall h_1, h_2 \in H_u.$$

Звідси витікає $A_1 = A_1^*$. Рівність $A_2 = A_2^*$ можна отримати аналогічно, якщо урахувати умову $[A_1, A_2] = 0$. Лема доведена.

Такі поля та їх збурення розглядалися у [3,4]

Розглянемо спектральні розклади операторів A_1 і A_2 :

$$A_1 = \int_{a_1}^{b_1} \lambda dE_1(\lambda), \quad A_2 = \int_{a_2}^{b_2} \mu dE_2(\mu), \quad [E_1(\lambda), E_2(\mu)] = 0.$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda \mu E(d\lambda, d\mu), \quad E(d\lambda, d\mu) = dE_1(\lambda) dE_2(\mu),$$

тоді для ганкелева випадкового поля $u(n, m)$ отримуємо спектральний роз-

$$\text{клад } u(n, m) = A_1^n A_2^m u_0 = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^n \mu^m E(d\lambda, d\mu) u_0.$$

Розглянемо лінійне перетворення ганкелева поля $u(n, m)$ – поле $V(n, m) = Bu(n, m)$, де оператор $B \in [H_u, H_u]$, $\|B\| < \infty$ і $I - B^*B = \langle \cdot, e \rangle e$.

Означення. Поле $V(n, m) = Bu(n, m)$ назвемо дилатацією першого порядку ганкелевого поля $u(n, m)$.

Розглянемо кореляційну функцію поля $V(n, m)$

$$K_{V'}(n, m, p, q) = \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = K_{uu}(n, m, p, q) - \Phi(n, m) \overline{\Phi(p, q)}, \quad (7)$$

де

$$\Phi(n, m) = \langle u(n, m), h \rangle, \quad (8)$$

Відзначимо, що $\Phi(n, m)$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Через те, що $K_{uu}(n, m, p, q) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^{n+p} \mu^{m+q} F(d\lambda, d\mu)$, або, якщо існує

похідна $\frac{\partial^2 F(\lambda, \mu)}{\partial \lambda \partial \mu} = f(\lambda, \mu)$, тобто $F(d\lambda, d\mu) = f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$, то

$$K_{uu}(n, m, p, q) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^{n+p} \mu^{m+q} f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu. \quad (9)$$

Теорема 4. Для того щоб поле $V(n, m)$ було дилатацією першого порядку ганкелева поля $u(n, m)$, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція

$K_{VV}(n, m, p, q)$ мала вигляд (7), де $\Phi(n, m)$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Доведення. Необхідність. За властивостями розкладу одиниць E_λ, E_μ , отримуємо

$$K_{uu}(n, m, p, q) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^{n+p} \mu^{m+q} F(d\lambda, d\mu), \quad (10)$$

де $F(d\lambda, d\mu) = \|E(d\lambda, d\mu)u_0\|^2$.

Через те, що $I - B^*B = \langle \cdot, e \rangle e$, то для функції

$$K_{VV}(n, m, p, q) = \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = \langle B^*Bu(n, m), u(p, q) \rangle$$

легко отримати зображення (7).

Достатність.

За спектральною мірою $F(d\lambda, d\mu) = F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо (не єдиним чином) оператори \hat{A}_1 и \hat{A}_2 , відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n, m) = \hat{A}_1^n \hat{A}_2^m u_0$, яке має задану кореляційну функцію (9) або (10). Далі стандартним чином будуємо гільбертів простір H_u . Через те, що $\Phi(n, m)$ – лінійний функціонал від $\hat{u}(n, m)$, то за теоремою Риса він має вигляд

$\Phi(n, m) = \langle \hat{u}(n, m), \hat{h} \rangle_H$. Оскільки $H_u = \overline{\text{span}_{n, m \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n, m)}$, то $\forall \hat{h} \in H_u$ отримуємо

$$\hat{h} = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} u(k, l) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0, \text{ де } \varphi(\lambda, \mu) = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a_{k, l} \lambda^k \mu^l$$

або $\varphi(\lambda, \mu)$ є границею за метрикою H_u таких елементів. Отже, для h має-мо зображення:

$$h = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0$$

з невідомою функцією $\varphi(\lambda, \mu)$.

Через те, що

$$\Phi(n, m) = \langle u(n, m), h \rangle_H = \left\langle \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^n \mu^m E(d\lambda, d\mu) u_0, \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0 \right\rangle,$$

але за властивостями dE_λ, dE_μ , отримуємо

$$\Phi(n, m) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^n \mu^m \overline{\varphi(\lambda, \mu)} F(d\lambda, d\mu), \text{ де } F(d\lambda, d\mu) = \|E(d\lambda, d\mu)u_0\|^2.$$

Звідки

$$F(d\lambda, d\mu) = f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu, \text{ тобто } \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu} = f(\lambda, \mu).$$

Таким чином, $\Phi(n, m) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^n \mu^m \overline{\varphi(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$, і ми отримуємо

двомірну проблему моментів. Умови розв'язання проблеми моментів у випадку, що розглядається, мають вигляд [5]: $\left| \langle P_1^{(n)}(A_1) P_2^{(m)}(A_2) u_0, h \rangle \right| < C$

$$\forall n, m > 0, \text{ де } P_1^{(n)}(A_1) = \sum_{k=0}^n C_n^k (I - A_1^{n-k})^k, P_2^{(m)}(A_2) = \sum_{j=0}^m C_m^j (I - A_2^{m-j})^j.$$

За $\Phi(n, m)$ відновлюємо $\overline{\varphi(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu)$, тобто отримуємо зображення для елемента \hat{h} . За відомим \hat{h} легко підібрати лінійний обмежений оператор B такий, що $I - B^*B = \langle \cdot, h \rangle h$. Теорема доведена.

Розглянемо далі дилатації r -го порядку $I - B^*B = \sum_{\alpha=1}^r \langle \cdot, e_\alpha \rangle e_\alpha$. та функцію

$$K_{VV}(n, m, p, q) = K_{uu}(n, m, p, q) - \sum_{\alpha=1}^r \Phi_\alpha(n, m) \overline{\Phi_\alpha(p, q)}, \quad (11)$$

де $\Phi_\alpha(n, m) = \langle u(n, m), e_\alpha \rangle$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Теорема 5. Для того щоб поле $V(n, m)$ було дилатацією r -го порядку однорідного поля $u(n, m)$, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція $K_{VV}(n, m, p, q)$ мала вигляд (11), де $\Phi_\alpha(n, m)$ – лінійний функціонал від $u(n, m)$.

Доведення. Необхідність. Нехай B – обмежений оператор, такий що

$$I - B^*B = \sum_{k=1}^r \langle \cdot, h_k \rangle h_k. \text{ Тоді}$$

$$\begin{aligned} K_{VV}(n, m, p, q) &= \langle Bu(n, m), Bu(p, q) \rangle = \langle u(n, m), u(p, q) \rangle - \\ &- \left\langle (I - B^*B)u(n, m), u(p, q) \right\rangle = K_{uu}(n, m, p, q) - \sum_{\alpha=1}^r \Phi_\alpha(n, m) \overline{\Phi_\alpha(p, q)}, \end{aligned}$$

де $\Phi_\alpha(n, m) = \langle u(n, m), h_\alpha \rangle_H$.

Достатність. За спектральною мірою $F(d\lambda, d\mu) = F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо (не єдиним чином) оператори \hat{A}_1 і \hat{A}_2 , відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n, m) = \hat{A}_1^n \hat{A}_2^m u_0$ і будуємо H_u . Через те, що $\Phi_\alpha(n, m)$ – лінійний функціонал від $\hat{u}(n, m)$, то за теоремою Риса він має вигляд

$\Phi_\alpha(n, m) = \langle \hat{u}(n, m), \hat{h}_\alpha \rangle_H$. Оскільки $H_u = \overline{\text{span}_{n, m \in \mathbb{Z}} \hat{u}(n, m)}$, то $\forall \hat{h} \in H_u$ отримуємо

мо $\hat{h} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi_\alpha(\lambda, \mu) E(d\lambda, d\mu) u_0$, де

$$\varphi_\alpha(\lambda, \mu) = \sum_{k, l=1}^{N_1, N_2} a^{(\alpha)}_{k, l} \lambda^k \mu^l, \quad (12)$$

або щільність $\varphi_\alpha(\lambda, \mu)$ має вигляд границь (12) в середньоквадратичному.

Таким чином, $\Phi_\alpha(n, m) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \lambda^n \mu^m \overline{\varphi_\alpha(\lambda, \mu)} f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$. Тобто мизно-

ву приходимо до двомірної проблеми моментів, умови розв'язання якої були наведені раніше. Завершення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 4.

Висновки. У статті розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. На відміну від стандартного підходу до лінійних перетворень полів у статті лінійні перетворення розглядалися над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Список літератури: 1. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Т. 1. – Вып.5(51),– С.3-168. 2. Цзян Цзе Пей О линейной экстраполяции непрерывного однородного поля // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – Т. 2. – №1. – С. 60-91. 3. Шаронова Н.В., Черемская Н.В. Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета.– 2004. – №1(19). – С.343-348. 4. Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А. Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національного технічного університету „Харківський політехнічний університет”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ“ХПІ”. 2011. №13.–С.146-153. 5. Shohat J.A., Tamarkin J.D. The Problem of Moments // New York, 1943.– 140 p.

Надійшла до редколегії 27.09.2011

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, ассистент., НТУ «ХПИ»

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

За допомогою функцій Кельвіна виражено амплітуди коливань швидкості руху вібророзрідженої зернової суміші на плоскому нахиленому решеті в усталеному режимі роботи. Вивчено вплив параметрів повздовжніх коливань решета і механіко-технологічних характеристик суміші на нерівномірність її потоку, коли зміна вібров'язкості суміші по товщині шару зерна описується степеневою функцією з від'ємним показником степені.

С помощью функций Кельвина выражены амплитуды колебаний скорости движения виброоживленной зерновой смеси на плоском наклонном решете в установившемся режиме работы. Изучено влияние параметров продольных колебаний решета и механико-технологических характеристик смеси на неравномерность её потока, когда изменение вибровязкости смеси по толщине слоя описывается степенной функцией с отрицательным показателем степени.

With the aid of the Kelvin pronounced amplitude of the velocity vibroliquefaction grain mixture on a flat inclined sieve in the steady state of his work. The influence of parameters of longitudinal vibration of the sieve and mechanical-technological characteristics of the mixture on the unevenness of its flow when a change of the vibroviscosity mixture of the layer of grain is described by a power function with a negative exponent.

Постановка проблеми. Вибрации решета интенсифицируют процесс разделения на нём зерновой смеси на две фракции. Движение виброоживленной смеси по наклонному решету имеет сходство с течением вязкой жидкости по наклонному лотку. Поэтому для описания потока зерна по вибрирующей поверхности в математических моделях стали использовать уравнения динамики однородной вязкой жидкости. Но специфика виброоживленной смеси проявляется в том, что её эффективная вязкость зависит от внутреннего трения и давления, которые возрастают с удалением от свободной поверхности вглубь слоя. При учёте этой особенности, движение смеси приходится описывать уравнениями течения неоднородной жидкости, у которой вязкость зависит от одной из пространственных координат. Разрабатывая уточнённые модели зернового потока по направляющей перфорированной поверхности желательного учитывать эту зависимость.

Обзор последних исследований и публикаций. Из работ, в которых математически моделировалось движение неоднородного зернового слоя, отметим [1-4,9]. В [1] определялась усреднённая за период колебаний скорость потока. Поэтому в уравнениях течения не учитывались (отбрасывались) инерционные члены. Колебания скорости движения неоднородного слоя,

вызванные продольными вибрациями решета, рассматривали в [2,3], где изменение вибровязкости по толщине слоя подчиняли линейной зависимости. Отличие работы [3] от [2] заключается в том, что в ней дополнительно учтено разделение потока зерна на перфорированной поверхности на потоки проходовой и сходовой фракций. В [4] рассмотрены установившиеся колебания скорости потока в линейно-неоднородном слое, вызванные поперечными вибрациями решета. Для безотрывного движения, *методом Бубнова-Галёркина* построены приближённые решения динамической краевой задачи. Колебания в слое движущейся зерновой смеси с нелинейным изменением вибровязкости по толщине слоя относятся к малоизученным вопросам, что стало мотивом к этой работе.

Целью работы является вывод формул для расчёта колебаний скорости потока зерновой смеси на плоском решете, совершающем продольные гармонические колебания, когда изменение эффективной вязкости смеси по толщине слоя нелинейное и аппроксимируется степенной функцией с отрицательным показателем степени.

Частным случаем этой аппроксимации является гиперболический закон увеличения вибровязкости с удалением от свободной поверхности слоя зерна.

Постановка и аналитическое решение краевой задачи. Рассматривая установившийся режим колебаний, полагаем проекцию абсолютной скорости u на координатную ось oy (см. рис. 1) равной нулю.

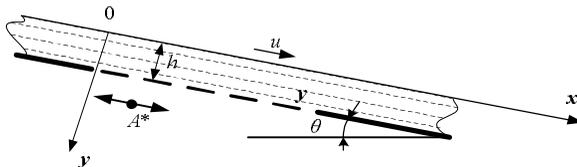


Рисунок 1 – Расчётная схема.

Проекцию абсолютной скорости потока u на ось ox считаем независимой от координаты x и определяем из решения краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) $v(y)$ – эффективная кинематическая вязкость виброоживленной зерновой смеси; g – ускорение свободного падения; θ – угол наклона решета к горизонту; h – толщина движущегося слоя зерна; A^* , ω – амплитуда и частота продольных колебаний решета; t – время.

Далее предполагаем, что изменение $v(y)$ с достаточной для практики точностью аппроксимируется выражением

$$v(y) = v_0(1 - \beta y)^{-\alpha}, \quad (3)$$

где $v_0 = v(0)$ – вибровязкость на поверхности слоя; α, β – неотрицательные постоянные, причём $\beta h < 1$.

При $\alpha = 1$ зависимость (3) представляет гиперболический закон возрастания $v(y)$ с увеличением y , который рассмотрен в [5] и [6].

Введём вспомогательную переменную

$$\xi = 1 - \beta y$$

и подстановкой (3) в (1) уравнение (1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha. \quad (4)$$

Учитывая линейность (4), его решение ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (5)$$

в которой первое слагаемое не зависит от t .

Выражение (5) будет решением (4), когда

$$\frac{d^2 u_1}{d \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{d u_1}{d \xi} = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{1}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

При этом, в силу (2), должны выполняться граничные условия:

$$\left. \frac{d u_1}{d y} \right|_{y=0} = u_1(h, t) = 0; \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; u_2(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (9)$$

Краевая задача, представленная выражениями (6) и (8), имеет решение

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left(\frac{\xi^{\alpha+1} - \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\xi^{\alpha+2} - \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right), \quad (10)$$

где $\xi_1 = 1 - \beta h > 0$. Решение (10) находили, понижая (6) до уравнения первого порядка.

Формула (10) имеет неопределённость вида $\|0/0\|$ при $\beta \rightarrow 0$. Раскрывая её, для указанного частного случая, получаем

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{2v_0} (h^2 - y^2), \quad (11)$$

что соответствует движению однородного слоя [2].

Формула (10) переходит в (11) также при $\alpha \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи, представленной выражениями (7) и (9), ищем в виде

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (12)$$

где комплексная функция вещественного аргумента $w(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (13)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(h) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(h) = 0; \quad \operatorname{Re} w'_y(0) = \operatorname{Im} w'_y(0) = 0. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (13) выражается через цилиндрические функции:

$$w(y) = (c_1 + ic_2) \eta^s e^{i \frac{s\pi}{2}} I_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) + (c_3 + ic_4) \eta^s e^{-i \frac{s\pi}{2}} K_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right). \quad (15)$$

Здесь $s = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}$; $\eta = \lambda \xi^q$; $\lambda = \frac{1}{\beta q} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}}$; $q = 1 + \frac{\alpha}{2}$; $I_s(z), K_s(z)$ - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индексов s ; c_1, c_2, c_3, c_4 - вещественные произвольные постоянные.

Учитывая, что [7]

$$e^{i \frac{s\pi}{2}} I_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{ber}_s(\eta) + i \operatorname{bei}_s(\eta); \quad (16)$$

$$e^{-i \frac{s\pi}{2}} K_s \left(\eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{ker}_s(\eta) + i \operatorname{kei}_s(\eta),$$

вещественную и мнимую части решения (15) выражаем с помощью функций

Кельвина: $ber_s(\eta), bei_s(\eta), ker_s(\eta), kei_s(\eta)$:

$$\operatorname{Re} w = \eta^s [c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + c_3 ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta)]; \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} w = \eta^s [c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + c_3 kei_s(\eta) + c_4 ker_s(\eta)]$$

Продифференцируем выражения (17) по η . Используя (16) и формулы [7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[\eta^s I_s \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] &= e^{i\frac{\pi}{4}} \eta^s I_{s-1} \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right); \\ \frac{d}{d\eta} \left[\eta^s K_s \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] &= -e^{i\frac{\pi}{4}} \eta^s K_{s-1} \left(\eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{Re} w) &= -\frac{\eta^s}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta)] + c_2 [ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta)] + \\ &+ c_3 [ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta)] + c_4 [ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta)]\}; \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{Im} w) &= \frac{\eta^s}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta)] - c_2 [ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta)] + \\ &+ c_3 [ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta)] - c_4 [ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta)]\}. \end{aligned}$$

Учитывая (14), (17) и (18), составляем систему алгебраических уравнений для определения постоянных $c_j, j = \overline{1;4}$:

$$\begin{aligned} c_1 ber_s(\zeta) - c_2 bei_s(\zeta) + c_3 ker_s(\zeta) - c_4 kei_s(\zeta) &= A^* \omega \zeta^{-s}; \\ c_1 bei_s(\zeta) + c_2 ber_s(\zeta) + c_3 kei_s(\zeta) + c_4 ker_s(\zeta) &= 0; \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 &= 0; \\ c_1 f_2 - c_2 f_1 + c_3 f_4 - c_4 f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$f_{1,2} = ber_{s-1}(\lambda) \pm bei_{s-1}(\lambda), \quad f_{3,4} = ker_{s-1}(\lambda) \pm kei_{s-1}(\lambda), \quad \zeta = \lambda(1 - \beta h)^q.$$

Решив (19), находим константы:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad c_3 = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = -\delta_2 c_1 + \delta_1 c_2; \quad (20)$$

$$\Delta = (ber_s(\zeta) + \delta_1 ker_s(\zeta) + \delta_2 kei_s(\zeta))^2 + (bei_s(\zeta) + \delta_1 kei_s(\zeta) - \delta_2 ker_s(\zeta))^2;$$

$$\Delta_1 = A^* \omega \zeta^{-s} (ber_s(\zeta) + \delta_1 ker_s(\zeta) + \delta_2 kei_s(\zeta));$$

$$\Delta_2 = -A^* \omega \zeta^{-s} (bei_s(\zeta) + \delta_1 kei_s(\zeta) - \delta_2 ker_s(\zeta));$$

$$\delta_1 = -\frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_3^2 + f_4^2}.$$

Таким образом, согласно (5), (10), (12), (17), колебания скорости потока виброожиженной смеси описываются выражением

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left(\frac{\xi^{\alpha+1} - \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\xi^{\alpha+2} - \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right) + \eta^s [c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + c_3 ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta)] \sin(\omega t) + \eta^s [c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + c_3 kei_s(\eta) + c_4 ker_s(\eta)] \cos(\omega t), \quad (21)$$

в котором постоянные c_j следует вычислять по формулам (20).

Решение (21) существенно упрощается когда $\alpha = 0$. При этом значении показателя степени движущийся слой смеси однороден. Индекс у функций Кельвина $s = 1/2$ и они сводятся к элементарным функциям:

$$\begin{bmatrix} ber_{1/2}(\eta) \\ bei_{1/2}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \left\{ e^{\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 + \frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\eta_1 + \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} - e^{-\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\eta_1 - \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \right\};$$

$$\begin{bmatrix} ker_{1/2}(\eta) \\ kei_{1/2}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\eta}} e^{-\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\eta_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому колебания скорости потока однородного слоя в работе [8] описаны с помощью гиперболических и тригонометрических функций.

Интегрируя (21), по формуле

$$\bar{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy = \frac{1}{\beta q \lambda^{1/q}} \int_{\zeta}^{\lambda} \eta^{1-2s} u(\eta, t) d\eta \quad (22)$$

определяем удельную производительность решета.

Поскольку [7]

$$\int \eta^{1-s} \begin{bmatrix} ber_s(\eta) \\ bei_s(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \frac{\eta^{1-s}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta) \\ ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta) \end{bmatrix};$$

$$\int \eta^{1-s} \begin{bmatrix} ker_s(\eta) \\ kei_s(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \frac{\eta^{1-s}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta) \\ ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta) \end{bmatrix},$$

то подстановка (21) в (22) позволяет описать колебания удельной производительности решета выражением

$$\bar{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left[\frac{1 - \xi_1^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\beta} - \frac{1 - \xi_1^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\beta} + \frac{h \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{h \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\beta q \lambda^{1/q}}} \left[(c_1 s_1 - c_2 s_2 + c_3 s_3 - c_4 s_4) \sin(\omega t) + (c_1 s_2 + c_2 s_1 + c_3 s_4 + c_4 s_3) \cos(\omega t) \right]$$

В нём

$$s_{1,2} = \lambda^{1-s} [ber_{s-1}(\lambda) \mp bei_{s-1}(\lambda)] - \zeta^{1-s} [ber_{s-1}(\zeta) \mp bei_{s-1}(\zeta)];$$

$$s_{3,4} = \lambda^{1-s} [ker_{s-1}(\lambda) \mp kei_{s-1}(\lambda)] - \zeta^{1-s} [ker_{s-1}(\zeta) \mp kei_{s-1}(\zeta)]$$

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,006 \text{ м}$, $v_0 = 0,00005 \text{ м}^2/\text{с}^{-1}$; $\alpha = 1$; $\beta = 0,1 \text{ м}^{-1}$ которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Колебания решета характеризовали параметрами: $\theta = 5^0$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$.

Вычисленные по формуле (21) изменения скорости по толщине слоя и по времени показаны графически на рис. 2-5.

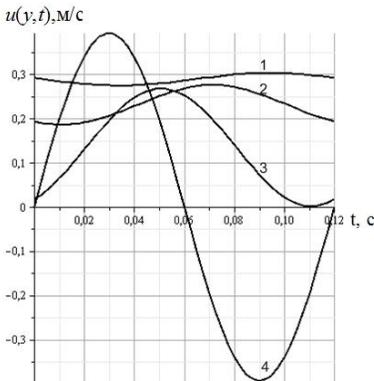


Рисунок 2 – Колебания скорости при разных y : 1,2,3,4 - $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

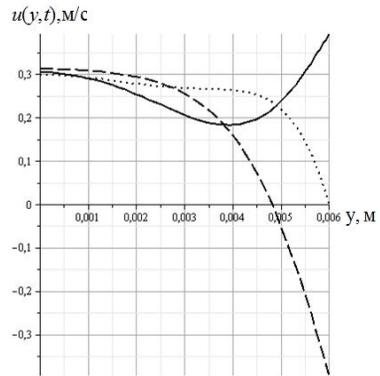


Рисунок 3 – Профили скорости в различные моменты времени: — $t = \frac{\pi}{2\omega}$; $t = \frac{\pi}{\omega}$; --- $t = \frac{3\pi}{2\omega}$

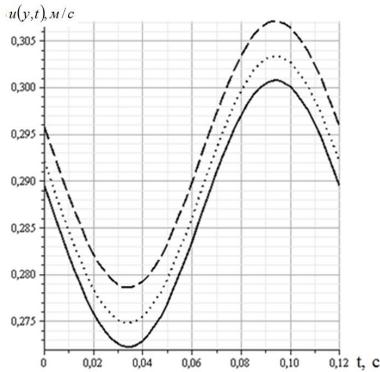


Рисунок 4 – Колебания скорости при различных значениях α : — $\alpha = 0,1$; \cdots $\alpha = 0,4$; --- $\alpha = 0,7$ и $\beta = 0,01 \text{ м}^{-1}$; $y h^{-1} = 0,25$

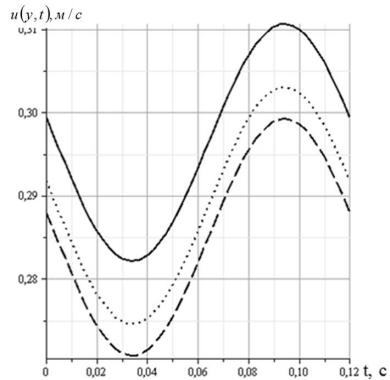


Рисунок 5 – Колебания скорости при различных значениях β : — $\beta = 0,005 \text{ м}^{-1}$; \cdots $\beta = 0,075 \text{ м}^{-1}$; --- $\beta = 0,01 \text{ м}^{-1}$ и $\alpha = 1$; $y h^{-1} = 0,25$

Выводы. Расчёты подтверждают быстрое затухание вибрационного поля с удалением от поверхности виброрешета в сторону свободной поверхности слоя. Это затухание усиливается неоднородностью вибровязкости зернового слоя по его толщине, поскольку у свободной поверхности она меньше, чем у поверхности решета.

Список литературы: 1. *Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В.* К расчёту движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 77. – С. 238-244. 2. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: “Міськдрук”, 2010. – 174 с. 3. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10. Т.7. – С. 32-42. 4. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Дидур В.А.* Колебания скорости неоднородного слоя зерновой смеси, вызванные поперечными вибрациями решета // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10. Т.7. – С. 173-180. 5. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчёту колебаний неоднородного слоя зерновой смеси на виброрешете // Вібрації в техніці та технологіях. 2011. – №1 (61) – С.182-185. 6. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Виброрешётная сепарация зерновых смесей. – Харьков: “Міськдрук”, 2011. – 280с. 7. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) – М.: Наука, 1979. – 832 с. 8. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях. 2009. – № 1(53). – С. 109-113. 9. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете // Динамика и прочность машин. Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ, 2010. – Вип. 69. – С. 100-108.

Поступила в редколлегию 01.09.2011

А.Л. ПЛОТНИКОВ, д-р техн. наук, проф. ВГТУ, Волгоград;
И.Н. КОЛУПАЕВ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ» ХПИ;
С.М. ШЕВЧЕНКО, ассистент, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРОЧНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ СТАЛИ В ТЕХНОЛОГИИ АЛМАЗНО-ИСКРОВОГО ШЛИФОВАНИЯ

Розглянуто питання моделювання глибини білого шару в залежності від технологічних параметрів алмазно-іскрового шліфування (АІШ).

Рассмотрены вопросы моделирования глубины белого слоя в зависимости от технологических параметров алмазно-искрового шлифования (АИШ).

The issues of white layer (WL) depth modeling depending on technological operation factors of diamond-spark grinding and other pulse reinforcing machine processing's are examined.

Вступлення. В современной практике широко применяются отделочные упрочняющие методы, целью которых является формирование в поверхностном слое структуры «белого слоя» (БС). Метод алмазно-искрового шлифования (АИШ) на определенных режимах позволяет реализовать условия, характерные для импульсных упрочняющих обработок, в результате происходит оптимизация структуры за счет формирования структуры БС или бесструктурного мартенсита.

Воздействие в процессе АИШ–упрочнения можно назвать «управлением», если рассматривать обрабатываемый материал как динамическую систему. Практически применяемыми воздействиями являются нагрев, охлаждение и изотермическая выдержка – это составляет смысл термической обработки как технологии упрочнения деталей машин. При исследовании процессов импульсной упрочняющей термической обработки, предпринимается расчет температурного поля внутри обрабатываемой детали.

Постановка задачи. Необходимо получить зависимость глубины БС от технологических режимов АИШ и химического состава обрабатываемой стали. Важное прикладное значение метода АИШ стимулирует более детальное исследование процесса АИШ для выработки общих рекомендаций и прогнозов эффективности метода. Материал исследования – сталь У7 в состоянии после закалки, низкого отпуска и последующего АИШ. Оценка требует указания термодинамических параметров материала и воздействия (параметров АИШ), проводимого в данной работе. Это и осуществляется операторами программы расчета WZ4S(c), система *MATLAB* [1, 2, 3].

Математическая модель. Моделирование предполагает определение толщины такого слоя в образце, в котором энергетические условия не противоречат кинетическим по отношению к возникновению БС. Для получения качественных БС [4], необходимо обеспечивать условия, удовлетворяющие энергетическому критерию K_3 , [(К × Па × с × кг)/ Дж]:

$$K_3 = TP_0\tau / (cT_3), \quad (1)$$

где c – удельная теплоемкость обрабатываемого металла, Дж/(кг × К); T_3 – температура закалки металла, К.

Уравнение теплопроводности принимается в виде закона Фурье [5], согласно которому количество теплоты, передаваемой через изотермическую поверхность, пропорционально площади этой поверхности, времени протекания теплоты и температурному градиенту:

$$dQ = -\lambda dF(dQ/dn)d\tau. \quad (2)$$

Для оценки тепловыделения в зоне обработки учитывается выделение джоулевого тепла в плоскости контакта за время действия теплового импульса. Реальная площадь контакта и переходное сопротивление принимаются на основе экспериментальных данных. При расчете температурного поля учитывается изменение теплоемкости стали при нагреве. Таким образом, целью расчета является оценка глубины конкретной марки стали У7.

Температура на заданной глубине вычисляется исходя из закона теплопроводности с учетом выделения тепла на поверхности шлифования и фазовых превращения стали при достижении определенной температуры [3]:

$$T = (q/(2\lambda))\sqrt{2\pi ah/V_\delta}, \quad (3)$$

где h – ширина зоны контакта вдоль направления движения детали (ширина детали); V_δ – скорость перемещения теплового источника (детали); a – коэффициент температуропроводности, м²/с; λ – коэффициент теплопроводности Вт/м·К.

Для формулы (3) определяем плотность теплового потока q :

$$q = (P_z \cdot V_{kp}) / S, \quad (4)$$

где P_z – сила резания, Н; V_{kp} – скорость круга, м/с; S – площадь зоны контакта, м²,

$$S = h \cdot l, \quad (5)$$

h – ширина зоны контакта (высота шлифовального круга, м); l – длина дуги контакта, м,

$$l = \sqrt{\left((1 \pm V_\delta / (60V_{kp}))^2 + (S_{np} / (60V_{kp}))^2 \right) \cdot (Ddt / (D + d))}. \quad (6)$$

В формуле (4) определяем тангенциальную составляющую силы резания, величину P_z , [кг] [7]:

$$P_z = 14,7 t^{0,88} S_{np}^{0,89} V_d^{0,85} . \quad (7)$$

Время действия максимальной температуры и давления τ , [с] составляет:

$$\tau = 1/V_d , \quad (8)$$

l – длина дуги контакта.

Давление в зоне обработки P_0 , [Па] определяется по формуле:

$$P_0 = P_y / S , \quad (9)$$

где S – площадь зоны контакта; P_y – радиальная составляющая силы резания [7]:

$$P_y = 51 t^{0,79} S_{np}^{0,74} V_d^{0,74} . \quad (10)$$

Расчет требует указания термодинамических параметров материала (стали У7) и воздействия, проводимого в данной работе: интенсивность выделения энергии в зоне контакта, диапазон расстояний (от поверхности), коэффициент теплопроводности, теплоемкость, длительность теплового импульса, плотность материала, температуропроводность материала, диапазон величины тока (тепловое воздействие), реальная площадь контакта, контактное электросопротивление, температура фазового превращения. Обозначаются переменные и разумный диапазон их значений, принимаемые в качестве аргументов. В данном случае – это параметры внешнего воздействия: величина тока и длительность его действия. Вычисление ведется на основе уравнения теплового баланса в нестационарных условиях.

Результаты моделирования. Распределение температуры по глубине материала показано на графиках (рис.) в зависимости от длительности импульса и величины тока.

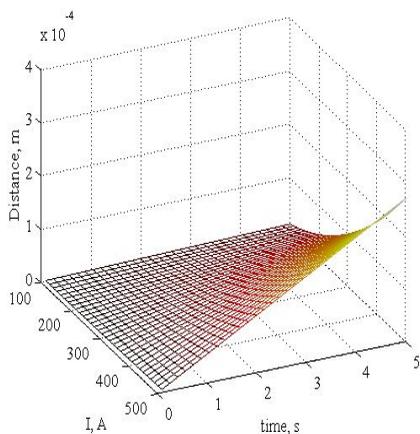
Влияние параметров внешнего воздействия: величины тока и длительности его действия представлены на рис., а. Для параметров внешнего воздействия (нагрузка и длительность действия импульса тока) проводится аналогичный расчет, результаты которого представлены на рис., б.

Отличие состоит в расчете снижения контактного напряжения за счет пластической деформации материала. Для этого учитывается снижение напряжения текучести стали У7 [8] в рассчитанном температурное поле.

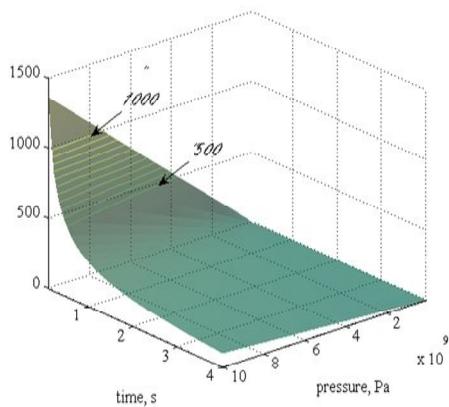
Таким же путем учитывается изменение теплоемкости стали при нагреве [9].

Особенностью настоящей модели является учет изменения напряжения пластического течения материала при нагреве как важного параметра, влияющего на площадь контакта круг-деталь. Обычно удельное давление считается постоянным, однако по нашему мнению, его изменение при нагреве может изменять условия возникновения БС.

Зависимость носит монотонный характер и позволяет количественно определить соотношение длительности и силы тока при котором выполняются условия критерия.



а.



б.

Рисунок – Зависимость глубины БС от параметров импульсного теплового воздействия:

а). длительность – сила тока; б). длительность – нагрузка.

Воздействие в процессе АИШ–упрочнения можно назвать *управлением*, если рассматривать обрабатываемый материал как динамическую систему. Практически применяемыми воздействиями являются нагрев, охлаждение и изотермическая выдержка – это составляет смысл термической обработки как технологии упрочнения деталей машин.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. На основании предложенной модели, в которой рассматривается критерий возникновения БС как параметра оценки можно перейти к более общей модели, учитывающей динамику изменения фазового состава материала в процессе обработки.

Прикладное материаловедение традиционно пользуется диаграммной техникой. Обращает на себя внимание «инкубационный период превращения t^* », то есть время, которое можно оценить из С-образной диаграммы.

Величина t^* зависит от переохлаждения для конкретного материала даже в изотермических условиях. Фазовое превращение (ФП) происходит с некоторой конечной скоростью, описанием которой занимается кинетика ФП

как частного случая кинетики химических реакций, при этом внутренние параметры всех фаз должны успевать принимать равновесные значения [10]. Образом «К» условия является константа равновесия, прямо связанная со скоростью ФП. Кроме температуры и давления появляется параметр «время».

Если выбирать критерий как соотношение скоростей – тогда можно «взять» эффективную скорость V_{eff} как отношение температуры ФП к времени инкубационного периода.

Для моделирования скорости превращения существует также *уравнение Авраами:*

$$V_{id} = A \cdot \exp(-B \cdot t)$$

Проще всего рассматривать первый порядок превращения – тогда скорость превращения:

$$dc/dt = -K \cdot c,$$

а величина K может быть связана с «характерным временем» t^* соотношением:

$$(c - c_0)/t^* \approx K \cdot (c - c_0), \quad \text{то есть} \quad K \sim 1/t^*.$$

Предложенный расчет рассматривает время как важный параметр импульсного энергетического воздействия и позволяет сопоставлять известные технологии импульсного упрочнения. С развитием компьютерного имитационного моделирования, математические модели позволяют анализировать все более сложные материаловедческие ситуации.

Список литературы: 1. *Потемкин В.* Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x (в 2-х томах). – Диалог-МИФИ. 1999. 2. *Колупаев И. Н., Шипкова И. Г.* Количественная обработка цифровых изображений микроструктур (система MatLab): Учеб. метод. пособие. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2006. – 84 с. 3. <http://dkhramov.dp.ua/index.php?n=Sci.Matlab>. 4. *Бабей Ю.И.* Физические основы импульсного упрочнения стали и чугуна. – Киев: «Наукова думка», 1988. – 237 с. 5. *Якимов А.В., Слободяник П.Т., Усов А.В.* Теплофизика механической обработки. – Киев – Одеса: Либідь, – 1991. – 237 с. 6. *Маслов Е.Н.* Теория шлифования материалов. – М.: Машиностроение, 1974. – 320 с. 7. *Беззубенко Н.К.* Повышение эффективности алмазного шлифования путем введения в зону обработки дополнительной энергии в форме электрических разрядов / Н.К. Беззубенко. Докторская диссертация. Харьков: ХГПУ, 1995. – 200 с. 8. *Гольдсмит Х. Д.* Сплавы внедрения – М.: Металлургия, – 1971, – 423 с., т.1. 9. *Кристал М. А.* Механизм диффузии в железных сплавах. – М.: Металлургия, – 1972. – 398 с. 10. *Палатник Л.С., Равицкая Т.М., Островская Е.Л.* Структура и динамическая долговечность сталей в условиях тяжелого нагружения. – Челябинск: «Металлургия», Челябинское отделение, – 1988. – 160 с.

Поступила в редколлегию 08.09.2011

А. Н. СЕМКО, д-р техн. наук, проф., ДонНУ, Донецк;
В.А. БИГВАВА, зам. директора, НИПКИ «Искра», Луганск

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ ПОРОХОВОГО ИМПУЛЬСНОГО ВОДОМЕТА С ПЛОСКОЙ ПРЕГРАДОЙ

Представлено результати дослідження поширення й взаємодії с перешкодою затопленого струменя порохового імпульсного водомета. Побудовано математичну модель процесу, наведені результати розрахунків для конкретної установки. Показано, що в рідині формується імпульсний затоплений струмінь із радіусом, рівним радіусу вихідного перерізу сопла. Зона підвищеного тиску локалізована поблизу центра перешкоди. Установлено, що основні параметри установки не залежать від зовнішніх умов і можуть розраховуватися без їхнього обліку.

Представлены результаты исследования распространения и взаимодействия с преградой затопленной струи порохового импульсного водомета. Построена математическая модель процесса, приведены результаты расчетов для конкретной установки. Показано, что в жидкости формируется импульсная затопленная струя с радиусом, равным радиусу выходного сечения сопла. Зона повышенного давления локализована вблизи центра преграды. Установлено, что основные параметры установки не зависят от внешних условий и могут рассчитываться без их учета.

The investigation results of expansion and interaction drowned jet from pulse-jet water cannon with barrier are presented. The mathematic model of the processes is build. The results obtained for specific construction are performed. It is shown, that radius of liquid formed drowned jet congruent the radius of nozzle exit area. The maximum pressure zone is localized near the center of barrier. It is estimated, that the main installation parameters are not depend on ambient conditions and can calculated without taken into account this parameters.

Введение. Импульсные высокоскоростные струи жидкости (ультра-струи) нашли широкое применение в различных технологических процессах, таких, как фрагментация крепких материалов, разрушение негабаритов, горных пород и бетонных блоков, обработка поверхности и так далее [1 – 3]. Для получения таких струй используют импульсный водомет (ИВ) и гидропушку (ГП), в которых реализуются экструзионный и инерционный принципы ускорения жидкости. Разный механизм ускорения жидкости в этих установках существенно отражается на основных гидродинамических параметрах ультра-струй: максимальной скорости, компактности, дальнобойности и коэффициенте превышения давления (отношение максимального динамического давления струи к максимальному статическому давлению внутри установки). Например, максимальная скорость струи ИВ достигает 1500 м/с, а при помощи ГП получают струи со скоростью до 3000 м/с.

Эффективность силового воздействия ультраструи зависит в первую очередь от давления, которое струя развивает на преграде. При этом можно выделить две стадии взаимодействия струи с преградой: начальную, которая характеризуется непосредственно ударом и соответственно давлением гидроудара, и установившуюся, которая характеризуется натеканием струи и соот-

ветственно динамическим напором. Давление на этих стадиях определяется исключительно скоростью струи. Как правило, рассматривается взаимодействие струи с преградой, расположенной в воздухе. Однако имеются сообщения о предварительных экспериментальных исследованиях взаимодействия импульсной высокоскоростной струи жидкости с преградой, погруженной в воду [4]. Эти исследования показали, что затопленная ультраструя может достаточно эффективно воздействовать на объекты, находящиеся в жидкости.

Теоретические исследования, выполненные на модельных задачах, в которых предполагалось, что ультраструя истекает с постоянной скоростью, позволили установить некоторые особенности и закономерности взаимодействия, затопленных ультраструй с плоской недеформируемой преградой [5, 6]. Установлено, что перед ультраструей формируется ударная волна, интенсивность которой убывает по мере распространения. Давление на преграде изменяется скачкообразно под действием ударной волны, а затем устанавливается, соответствуя динамическому напору ультраструи.

В работах [7 – 9] численно исследовано взаимодействие затопленных ультраструй, генерируемых конкретными конструкциями ГП, с плоской преградой. Как известно, в отличие от ИВ истечение струи ГП начинается с максимальной скоростью, которая затем быстро уменьшается. Эта особенность истечения ультраструи ГП сказывается на характере изменения давления струи на преграду. В начале истечения ультраструи в жидкости генерируется ударная волна, которая создает на преграде ударное давление. Затем на преграду натекает струя, оказывая динамическое давление.

В работах [10 – 11] рассмотрены перспективы применения импульсных высокоскоростных струй жидкости для обезвреживания взрывоопасных предметов (ВОП) в различных условиях, в том числе и под водой. Теоретические исследования выполнены численно с использованием описанных выше моделей ультраструй. Экспериментальные исследования подтвердили принципиальную возможность применения ультраструй, генерируемых пороховой ГП, для обезвреживания ВОП.

В настоящей работе рассматривается распространение затопленной ультраструи, истекающей из сопла ИВ с пороховым приводом, и взаимодействие ее с плоской жесткой преградой. Построена математическая модель процесса, приведены результаты расчетов для конкретной конструкции порохового ИВ. Расчеты выполнены методом Годунова в подвижных сетках с учетом кавитации. Показано, что в жидкости формируется импульсная затопленная струя, радиус которой практически равен выходному радиусу сопла ИВ, а максимальное давление на преграду близко к максимальному скоростному напору струи. Установлено, что основные параметры ИВ можно рассчитывать, предполагая, что выстрел происходит в воздухе, а не в жидкости. Показано, что влияние вязкости жидкости незначительно сказывается на гидродинамических параметрах импульсных затопленных струй при расстояниях до преграды порядка 10 – 20 радиусов струи.

Постановка задачи. Пусть пороховой ИВ, конструкция которого описана в [3, 12], погружен в объем, заполненный водой (рис. 1). В жидкости на некотором расстоянии от торца установки перпендикулярно ее оси расположена плоская жесткая преграда. Сопло ИВ закрыто тонкой диафрагмой от проникания в него внешней жидкости. В начальный момент пороховой заряд поджигается. Пороховые газы вытесняют воду из сопла ИВ, и она истекает в виде затопленной импульсной струи жидкости. Необходимо оценить действие этой струи на преграду.

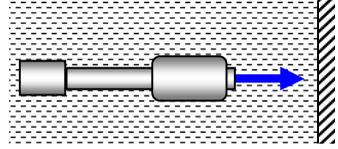


Рисунок 1 – Схема формирования струи.

Как обычно для таких процессов жидкость считаем идеальной и сжимаемой, вязкость и теплопроводность не учитываем [1, 3]. Влиянием воздуха в сопле и диафрагмы в выходном сечении пренебрегаем. Движение жидкости внутри ИВ с достаточной точностью описывается в квазиодномерном приближении [1, 3]. Течение импульсной затопленной струи жидкости рассматривается в осесимметричной постановке. Эти особенности течения учтем при построении математической модели и конечно-разностной сетки.

В принятой постановке квазиодномерное изэнтропическое течение идеальной сжимаемой жидкости в пороховом ИВ описывается системой уравнений нестационарной газовой динамики при следующих начальных и граничных условиях [3,12]

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{n}{n-1} \frac{p+B}{\rho} \right) = 0, \quad (1)$$

$$p = B \left[\left(\rho / \rho_0 \right)^n - 1 \right],$$

$$u(0, x) = 0, \quad p(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L; \quad (2)$$

$$p(t, x_g) = p_g, \quad u(t, x_g) = u_g. \quad (3)$$

Здесь t – время; x – координата; u , p и ρ – скорость, давление и плотность; F – площадь поперечного сечения сопла; L – длина водяного заряда; x_g – координата контактной поверхности; p_g и u_g – давление и скорость пороховых газов на контактной поверхности. Начало координат для этой области совмещено с начальным положением контактной поверхности. На срезе сопла никаких граничных условий не ставилось, а совместно решалась задача движения жидкости внутри и снаружи установки.

Распространение затопленной струи жидкости и взаимодействие ее с преградой описывается уравнениями газовой динамики со следующими начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{ra}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{rb}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{rc}}{\partial r} = \mathbf{f}; \quad (4)$$

$$\mathbf{a} = \{\rho, \rho u, \rho v\}, \quad \mathbf{b} = \{\rho u, p + \rho u^2, \rho uv\},$$

$$\mathbf{c} = \{\rho v, \rho uv, p + \rho v^2\}, \quad \mathbf{f} = \{0, 0, p\};$$

$$u(0, x, r) = 0, \quad v(0, x, r) = 0, \quad p(0, x, r) = p_a; \quad 0 < x \leq L_T, \quad r > 0; \quad (5)$$

$$u(t, x, r) = 0, \quad v(t, x, r) = 0, \quad p(t, x, r) = p_a; \quad 0 \leq x \leq L_T, \quad r \rightarrow \infty; \quad (6)$$

$$u(t, 0, R_s) = 0, \quad r > R_s; \quad u(t, L_T, r) = 0, \quad r > 0. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{f} – векторы; x и r – осевая и радиальная координаты; u и v – осевая и радиальная компоненты скорости; p_a – начальное давление жидкости, L_T – расстояние от выходного сечения сопла ИВ до преграды, R_s – радиус выходного сечения сопла ИВ. Начало цилиндрической системы координат для этой области располагалось на оси ИВ в выходном сечении.

Горение пороха рассчитывалось в квазистационарном приближении при допущениях, характерных для задач внутренней баллистики в артиллерии [13]: порох воспламеняется мгновенно и горит адиабатически параллельными слоями по геометрическому закону; химический состав продуктов сгорания постоянный, их параметры одинаковые по объему; параметры состояния пороховых газов связаны упрощенным уравнением Ван-дер-Ваальса, учитывающим только собственный объем молекул.

Система уравнений и начальные условия, описывающие квазистационарное горение пороха следующие:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{u_1 p_g}{h_1}, \quad Q_g = \frac{dm_g}{dt} = m_{p0} \sigma(z) \frac{dz}{dt};$$

$$\frac{1}{k-1} \frac{d(p_g V_g)}{dt} + p_g F u_g = q Q_g; \quad (8)$$

$$\frac{dV_g}{dt} = Q_g (1/\rho_p - \alpha) + u_g F, \quad u_g = \frac{dx_g}{dt};$$

$$z = 0, \quad V_g = V_{g0}, \quad m_g = m_{g0}, \quad p_g = p_{g0}, \quad x_g = -L.$$

Здесь h_1 – половина толщины порохового зерна; z – толщина сгоревшего слоя, отнесенная к h_1 ; u_1 – постоянная скорости горения; p_g – давление пороховых газов; Q_g – скорость прихода пороховых газов; $\sigma(z)$ – функция, зависящая от формы порохового зерна (для зерна сферической формы $\sigma(z) = 3(1 - 2z + z^2)$ [13]); α – поправка на собственный объем молекул; m_g – масса газа; m_{p0} – начальная масса пороха; k – показатель адиабаты; q и ρ_p

– удельная теплота сгорания и плотность пороха; V_g – объем пороховых газов; V_{g0} , m_{g0} , p_{g0} – параметры газа после срабатывания воспламенителя.

Особенности расчетов. Поставленная задача решалась численно конечно-разностным методом Годунова [14], обобщенным на случай нестационарных квазидвимерных и осесимметричных течений жидкости [1, 3, 12]. Течение рассчитывалось с момента воспламенения пороха до окончания вытеснения жидкости из ИВ. Расчетная сетка состояла из двух частей: подвижной и регулярной внутри установки и неподвижной прямоугольной в наружном объеме жидкости. Сетка внутри ИВ перестраивалась по мере движения контактной поверхности. Определялась координата x^g контактной поверхности через шаг по времени и рассчитывался новый шаг сетки

$$h^r = (L - x^g) / N,$$

где N – число расчетных ячеек в ИВ. При истечении струи объем жидкости внутри установки и, соответственно, шаг сетки уменьшались. Когда шаг сетки становился меньше заданного, производилось укрупнение ячеек. Две соседние ячейки объединялись в одну; параметры в объединенной ячейке определялись как среднее с весом. В расчетах использовались сетки с числом ячеек $N = 64, 128$ и 256 .

Распространение и взаимодействие импульсной затопленной струи жидкости с преградой рассчитывалось на прямоугольной сетке. По оси x шаг сетки h_x задавался постоянным, равным шагу по радиусу h_{rk} в коллиматоре ИВ. Использовались сетки с шагом $h_x = R_s / 8, R_s / 12, R_s / 16$. Детализация течения проводилась на мелких сетках, а длительные процессы рассчитывались на более крупных сетках. Шаг сетки по радиусу h_r был переменным. При $r \leq 2R_s$ он равнялся шагу h_x , и ячейки здесь были квадратными. При больших расстояниях ($r > 2R_s$) шаг h_r увеличивался по мере удаления от оси струи по закону арифметической прогрессии. Приращение шага h_r выбиралось в пределах 10 – 20 %, чтобы размеры соседних ячеек отличались незначительно, и эта разница не влияла на точность расчетов. Число ячеек по оси x определялось расстоянием до преграды, а число ячеек по радиусу доходило до 100.

Границы расчетной области, на которых ставились условия на бесконечности, удалялись на такое расстояние, чтобы их влияние не сказывалось в центре преграды за расчетное время процесса. При расчете длительных процессов использовались так называемые «неотражающие» условия [15], которые слабо влияют на параметры течения вблизи преграды. В расчетах применялось условие «протекания», соответствующее равенству текущих параметров в фиктивной (за пределами границы расчетной области) и граничной ячейках, которое меньше всего влияло на параметры течения [3]. Но даже для

такого «неотражающего» условия границы расчетной области все равно приходилось удалять на расстояние $L_G/4$, где $L_G = a_0 t_p/2$ – расстояние, определяемое длительностью процесс t_p и скоростью распространения возмущений $a_0 \approx 1500$ м/с. Большая длительность процесса (около 4 мс) и особенности выстрела ИВ приводят к величине $L_G \approx 3$ м. Чтобы покрыть такую расчетную область использовались, как отмечено выше, неравномерные сетки с увеличивающимся шагом при удалении от оси струи.

Для стыковки разных расчетных сеток в том конце коллиматора, которым заканчивалось сопло ИВ, вводился переходной цилиндрический участок с неподвижной прямоугольной сеткой. На этом участке течение жидкости рассматривалось в осесимметричной постановке. Справа по торцу коллиматора эта область граничила с внешним объемом жидкости, в котором движение рассматривалось в осесимметричной постановке. Слева от сечения, проходящего по середине коллиматора, переходная область стыковалась, с объемом жидкости внутри ИВ, в котором течение считалось квазиодномерным. Длина переходной области выбиралась равной двум радиусам коллиматора, так как на таком расстоянии от его конца течение становилось практически одномерным [3].

Параметры на правой границе переходной области рассчитывались по единому алгоритму как для обычных внутренних ячеек. Расчет на левой границе переходной области производился по особому алгоритму. Распад произвольного разрыва на этой границе рассчитывался для каждой отдельной ячейки справа и единственной ячейки слева от границы. «Большие величины», необходимые для расчета параметров течения, определялись из равенства потоков массы и импульса в этом сечении

$$\mathbf{F}_L = \frac{\sum \mathbf{F}_{P_{j+1/2}} S_{j+1/2}}{\sum S_{j+1/2}}, \quad \mathbf{F} = \{RU, RU^2, P\},$$

где \mathbf{F}_L и \mathbf{F}_P – значения вектора «больших величин» слева и справа от границы; R, U, P – плотность, осевая скорость и давление на границе после распада произвольного разрыва; $S_{j+1/2} = \pi(r_{j+1}^2 - r_j^2)$ – площадь кольца; r_j – радиус границы кольца с номером j .

При расчете вблизи оси симметрии использовалась улучшенная аппроксимация уравнений, опробованная при решении модельной задачи [16]. По мнению ряда авторов, разностная схема, построенная на основе однородных уравнений (5), дает менее точные результаты, чем схема, построенная на неоднородных уравнениях следующего вида

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial r} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = -\frac{1}{r} \{ \rho v, \rho uv, \rho v^2 \}. \quad (10)$$

В отличие от системы (5) уравнения (10) все неоднородные, и соответствующая разностная схема является полностью неконсервативной. Все законы сохранения в разностной форме для такой схемы выполняются приближенно. Этот недостаток схемы обычно игнорируют, если речь идет о точности расчетов около оси симметрии. Расчеты, проведенные на модельной задаче [16], показали, что дисбаланс массы и энергии для двух видов аппроксимации был одного порядка и не превышал 0,5 %.

Анализ результатов расчетов. Ниже приведены некоторые результаты расчетов для экспериментального порохового ИВ со следующими параметрами [12]: радиус ствола 20 мм, радиус сопла и коллиматора 10 мм, длина ствола 400 мм, длина сопла вместе с коллиматором 156 мм, объем камеры сгорания 135 см³, коническое сопло с углом схождения 13°, масса водяного заряда 600 г. Использовался порох с зерном сферической формы массой 100 г с такими данными: $h_1 = 0,53$ мм; $u_1 = 0,91$ м/(с·ГПа); $k = 1,22$; $q = 3,806$ МДж/кг; $\rho_p = 1,6$ г/см³; $\alpha = 1,02$ дм³/кг. Давление пороховых газов p_{g0} после срабатывания воспламенителя составляло 5 МПа. Начальный объем и масса газов определялись по объему камеры сгорания V_k , массе пороха и давлению газов после срабатывания воспламенителя:

$$V_{g0} = V_k - m_{p0} / \rho_p, \quad m_{g0} = \frac{p_{g0} V_{g0}}{(k-1)q}.$$

Начальное давление воды равнялось 1 МПа, что соответствовало глубине погружения установки на 100 м.

На рис. 2 приведена зависимость давления в центре преграды от времени для разных расстояний до преграды $L_T = 4, 8, 12$ и $16 R_s$ (кривые 1, 2, 3 и 4, соответственно). На рис. 3 представлены зависимости от времени давления пороховых газов (кривая 1), давления воды у входа в сопло в сечении $x = 0$, (кривая 2), давления в центре преграды (кривая 3) и скорости истечения струи из сопла (кривая 4) для расстояния до преграды, равного $8 R_s$.

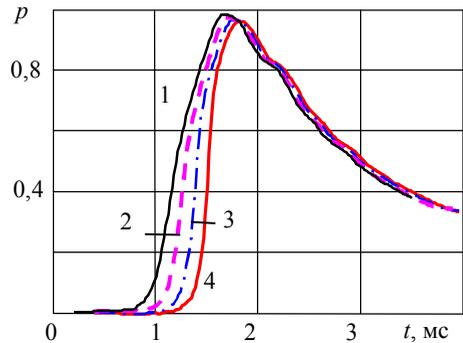


Рисунок 2 – Результаты расчётного исследования.

Из графиков видно, что характер изменения давления на преграде не зависит от расстояния до нее. Максимальное давление на преграде достигает 245 МПа на момент времени $t = 1,75$ мс. Максимальное давление пороховых

газов составляет 338 МПа и практически равно максимальному давлению воды в сопле (около 326 МПа). Максимальная скорость истечения достигает 762 м/с в момент времени $t = 1,64$ мс. Динамическое давление струи при

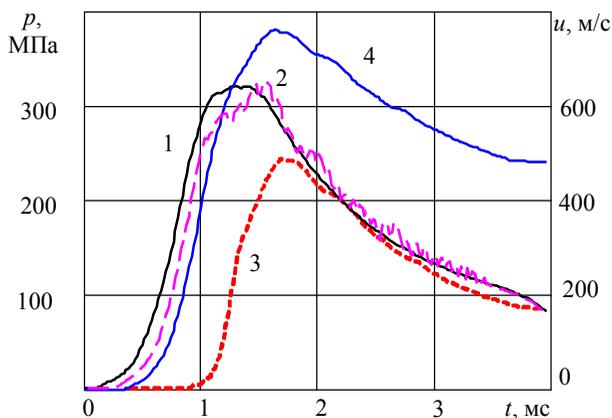


Рисунок 3 – Изменение давления в центре преграды.

такой скорости, рассчитанное по *уравнению Бернулли*, составляет 290 МПа для несжимаемой и 306 МПа для сжимаемой жидкости, что различается примерно на 5%. Коэффициент превышения давления k_p для порохового ИВ (то есть, отношение максимального динамического давления струи к максимальному давлению внутри установки [1]) достигает 0,9.

Предельное значение этого параметра для ИВ разных конструкций не превышает единицы, если выстрел ИВ близок к квазистационарному [1]. Для данной конструкции ИВ отношение максимального давления струи на преграду к максимальному давлению внутри установки меньше k_p и достигает 0,73. Таким образом, импульсная струя жидкости порохового ИВ достаточно эффективно воздействует на преграду, даже если преграда погружена в жидкость.

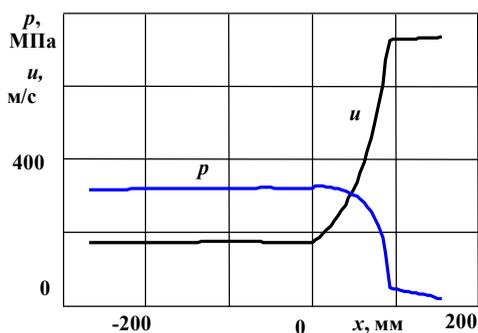


Рисунок 4 – Параметры истечения жидкости при минимальном расходе.

На рис. 4 приведены распределения давления и скорости по длине установки на момент времени $t = 2$ мс, когда давление внутри ИВ и скорость истечения струи близки к максимальным значениям (кривые помечены соответствующими индексами).

Видно, что в стволе давление и скорость практически постоянные (давление приблизительно равно 320 МПа, а скорость – 170 м/с). В сопле, которое начинается с координаты $x = 0$, скорость жидкости быстро возрастает до значения 725 м/с, а давление уменьшается до величины 40 МПа у входа в коллиматор. В коллиматоре (цилиндрическом участке для стабилизации параметров импульсной струи) давление линейно уменьшается до 10 МПа, а скорость возрастает незначительно до 735 м/с. Распределения этих параметров наглядно показывают стабилизирующее действие коллиматора, которое заключается в том, что формируется участок струи, равный длине коллиматора, скорость жидкости на котором примерно одинаковая. Это приводит к большей устойчивости струи и большей эффективности ее воздействия на преграду.

Для порохового ИВ равенство потоков массы через поперечные сечения установки хорошо выполняется практически в течение всего выстрела. Например, на момент достижения максимальной скорости истечения струи отношение секундных потоков в коллиматоре и в стволе $(u_s \rho_s F_s) / (u_c \rho_c F_c) = 0,997$. Без учета сжимаемости жидкости это отношение составляет около 1,08. Слабая зависимость расхода от сжимаемости жидкости связана с относительно небольшими давлениями внутри установки (около 330 МПа), при которых плотность воды возрастает всего на 10 %.

Наружная жидкость практически не влияет на параметры внутренней баллистики порохового ИВ. Расчетная скорость истечения струи ИВ в воздухе на 0,7 % отличается от скорости истечения в воде. Слабая зависимость параметров ИВ от условий истечения связана с большими давлениями внутри установки по сравнению с окружающим пространством.

На рис. 5 представлены поля давлений и скоростей на момент времени $t = 1,75$ мс, когда давление на преграде, отстоящей на $8R_s$ от ИВ, максимальное. Координаты на графиках отнесены к выходному радиусу сопла R_s , давление дано возле изобар в МПа, направление и величина скорости изображены соответствующими векторами.

Из графиков следует, что зона повышенного давления локализована в центре преграды в небольшой области размером около $2R_s$. В толще воды формируется четко выраженная затопленная струя, радиус которой практически равен радиусу выходного сечения сопла.

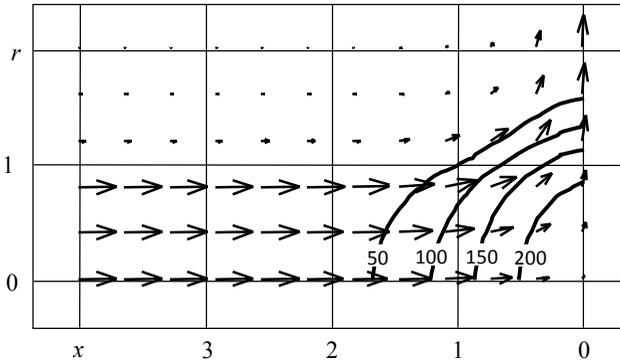


Рисунок 5 – Поле давлений и скоростей.

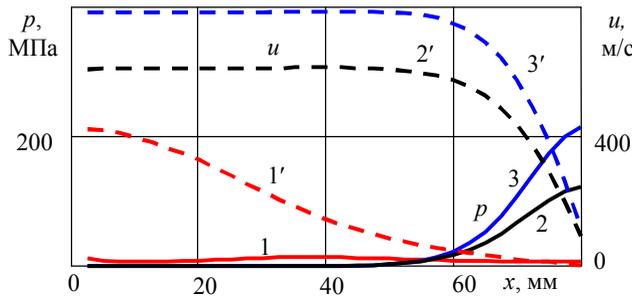


Рисунок 6 – Распределения давления и скорости вдоль оси струи.

На рис. 6 приведено распределение давления (кривые 1, 2 и 3) и скорости (кривые 1', 2' и 3') вдоль оси затопленной струи на моменты времени $t = 1, 2$ и 3 мс. Из графиков видно, что когда струя достигает преграды, то изменение ее параметров происходит в малой зоне возле преграды. Вдоль струи скорость и давление практически постоянные. Скорость близка к максимальному значению на этот момент времени, а давление незначительно превышает давление окружающей среды. Существенные изменения параметров течения струи наблюдаются только вблизи преграды.

По методике, описанной в работе [16], оценено влияние вязкости жидкости на гидродинамические параметры импульсной струи порохового ИВ. Установлено, что для данной конструкции порохового ИВ вязкость жидкости несущественно влияет на гидродинамические параметры ультраструи. Максимальное давление струи на преграду для вязкой жидкости на 5 – 7% меньше, чем для идеальной. Поэтому с достаточной для практических целей точностью расчет параметров порохового ИВ можно проводить в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости. И только для уточнения результатов рас-

четов можно использовать более сложные модели вязкой и сжимаемой жидкости

Способность импульсной затопленной струи жидкости оказывать большое силовое давление на объект воздействия может быть использовано при обезвреживании ВОП под водой, как отмечается в работах [10, 11].

Дальнейшие исследования в этом направлении должны быть направлены на детализацию картины взаимодействия ультраструи с преградой, учет деформации и разрушения преграды, установление критериев для оценки эффективности порохового ИВ и дальнейшей оптимизации его параметров на основании установленных критериев.

Заключение. В результате выполненных теоретических исследований показано, что импульсная струя порохового ИВ может эффективно воздействовать на преграду, расположенную под водой на расстоянии, равном нескольким радиусам струи. В жидкости формируется импульсная затопленная струя с радиусом, равным радиусу выходного сечения сопла. Внешние условия незначительно влияют на параметры струи водомета. Основные параметры порохового ИВ можно рассчитывать без учета условий истечения струи.

Список литературы: 1. *Атанов Г. А.* Гидроимпульсные установки для разрушения горных пород. – К.: Вища школа, 1987. – 155 с. 2. *Vijay M.M.* Pulsed jets: fundamentals and applications. – Proc. of the 5th Pacific Rim International Conference on Water Jet Technology. New Delhi, India, February 3–5, 1998. – P. 610-627. 3. *Семко А.Н.* Импульсные струи жидкости высокого давления. – Донецк: Вебер (Донецкое отделение), 2007. – 149 с. 4. *Cooley W., Clipp L.* High-pressure water jets for undersea rock excavation // J. Eng. Ind. (ASME). – 1970. – V.5, № 281. – P. 281 – 287. 5. *Атанов Г.А., Семко А.Н.* Impulsive water jet under water // Proc. 8th American Water Jet Conf.- Houston (Texas). August 26 – 29. – 1995. – Paper 62. – P. 845 – 853. 6. *Атанов Г. А., Семко А. Н.* Импульсная струя жидкости под водой // Теорет. и прикл. механика. – 1999. Вып. 29. – С. 169 – 174. 7. *Атанов Г.А., Семко А.Н.* Расчет импульсной струи пороховой гидропушки под водой // Известия РАН, Механика жидкости и газа. – 2002. – №2. – С. 31 – 38. 8. *Атанов Г. А., Семко А. Н.* Numerical Analysis of the Jet Flows of Compressible Water // Proc. of The International Summer Scientific School «High Speed Hydrodynamics» (HSH-2004, June 2004). – Cheboksary, Russia, 2004. – P. 39 – 45. 9. *Семко А.Н.* Особенности взаимодействия импульсных затопленных струй с преградой // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2007, № 1. – С. 147 – 155. 10. *Семко А.Н., Бигвава В.А., Кочергин А.В., Козак Т.Н.* Исследование возможности обезвреживания взрывоопасных предметов под водой воздействием ультраструи гидропушки // Науківий вісник ХДМІ – Херсон, 2010. – №1(2). – С. 217-232. 11. *Семко А.Н., Бигвава В.А.* Повышение экологической безопасности при гуманитарном разминировании при помощи импульсных струй жидкости // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2009, № 2. – С. 388 – 397. 12. *Семко А. Н.* Внутренняя баллистика импульсного водомета с пороховым приводом // Прикладная механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 3. С. 118 – 124. 13. Проектирование ракетных и ствольных систем / Под ред. Орлова Б. В. – М.: Машиностроение. – 1974. – 382 с. 14. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. Годунова С.К. М.: Наука, 1976. – 400 с. 15. *Ильгамов М. А.* О неотражающих условиях на границах расчетной области // Динамика оболочек в потоке. Тр. семинара Казанского физ.-тех. ин-та. – 1985. – Вып. 28. – С. 4 – 76. 16. *Семко А.Н.* Выход ударной волны из цилиндрической трубы в открытый объем, заполненный жидкостью // Вестник ХГПУ. – Харьков: ХГПУ, 1998. Вып. 8. – С. 169 – 172. 16. *Веремеев С.А., Семко А.Н.* Взаимодействие импульсной затопленной струи жидкости с преградой // Прикладная гидромеханика. – 2008. – Т. 10 (82). № 1. – С. 3 – 9.

Поступила в редакцию 05.09.2011

Н.А. ТКАЧУК, д-р техн. наук, проф., НТУ „ХПИ”;

А.В. ГРАБОВСКИЙ, канд. техн. наук, мл. научн. сотруд., НТУ „ХПИ”;

Н.Н. ТКАЧУК, канд. техн. наук, мл. научн. сотруд., НТУ „ХПИ”;

Ю.В. КОСТЕНКО, аспирант, НТУ „ХПИ”;

И.В. АРТЕМОВ, гл. конструктор, ЧАО «АзовЭлектроСталь», Мариуполь

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ

Запропоновано нові підходи до дослідження віброударних систем. Розглядаються дві складові задачі. Перша полягає у новому підході до представлення шуканої сили ударної взаємодії, друга – в ідентифікації вигляду залежності сили ударної взаємодії від фазових координат. Наведені розв’язання цих задач на прикладі машини для вибивки литих деталей із ливарних форм.

Предложены новые подходы к исследованию виброударных систем. Рассматриваются две составляющие задачи. Первая заключается в новом подходе к представлению искомой силы ударного взаимодействия, вторая – в идентификации вида зависимости силы ударного взаимодействия от фазовых координат. Приведены решения этих задач на примере машины для выбивки литых деталей из литейных форм.

It is suggested new approaches to the study of vibro-impact systems. We consider the two components of the problem. The first is a new approach to the representation of the desired force of shock interaction. The second is to identify the type of shock-dependence of the force of interaction on the phase coordinates. Solutions of these problems as an example for the knockout machine castings from molds is presented.

Введение. В современной технике широкое применение находят виброударные машины. При анализе их динамики в простейшем случае приходим к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения двух масс, связанного усилием ударного взаимодействия. Обычно для определения контактной силы используется ее представление в виде зависимости от относительной скорости и величины взаимного сближения (внедрения друг в друга) двух взаимодействующих тел. Эти модельные зависимости [1–6] имеют разнообразный вид, диктуемый геометрией и свойствами материала тел. Задавшись некоторой моделью для описания данной силы в виде зависимости от фазовых переменных (перемещений и скоростей отдельных тел), в результате интегрирования разрешающей системы уравнений можно получить, кроме перемещений и скоростей взаимодействующих тел, еще и временные распределения для силы ударного взаимодействия.

В то же время для некоторых случаев модельная зависимость для определения силы ударного взаимодействия неизвестна. Тогда возникает обратная задача – определение этой зависимости, например, по результатам экспериментальных измерений на том или ином объекте. Целью данной работы является разработка подходов к решению этой задачи для случая взаимодействия ударной машины с частично разрушающимся в процессе такого взаимодействия грузом. До настоящего времени данные задачи не получили полного решения, и поэтому являются актуальными новые подходы и модели, пригодные для их исследования.

Постановка задачи. Рассмотрим систему двух тел, взаимодействующих при ударе и в последующем движущихся в поле тяжести раздельно (рис. 1, а). В течение промежутка времени, когда тела m_1 и m_2 непосредственно контактируют (см. рис. 1, б, г), сила ударного взаимодействия $F = F^{\wedge} > 0$ (рис. 2). Во время раздельного движения (смотри рис. 1, в и рис. 2) сила F – нулевая. Таким образом, конкретная природа возникновения диктует неотрицательность внутренней силы ударного взаимодействия в системе (смотри рис. 1, 2) (фактор I). С другой стороны, поскольку исследуемый технологический процесс сопровождается частичным разрушением технологического груза, то при ударе неизбежно происходит диссипация механической энергии (фактор II).

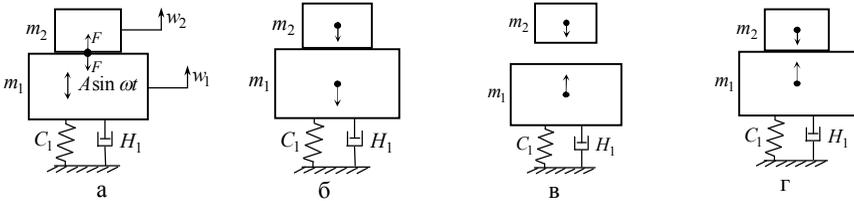


Рисунок 1 – Виброударная система, состоящая из двух тел.

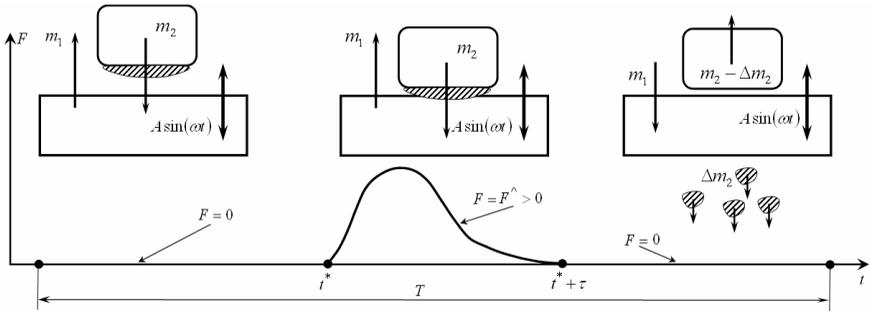


Рисунок 2 – Общая схема моделируемого технологического процесса.

Отмеченные факторы I и II накладывают на искомую силу F определенные ограничения. С учетом этих ограничений исходная задача сводится к идентификации силы ударного взаимодействия, удовлетворяющей в некоторой степени данным экспериментальных измерений (задача В, смотри далее) и в полной мере ограничениям I и II (задача А).

Задача А. Формирование модели для силы ударного взаимодействия. Рассмотрим, следуя [5], процедуру восстановления структуры силы F . Она входит в уравнения

$$\begin{cases} m_1 \ddot{w}_1 + C_1 \dot{w}_1 + H_1 w_1 + A \sin \omega t + m_1 g + F = 0 \\ m_2 \ddot{w}_2 + m_2 g - F = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь w_1 и w_2 – с точностью до направления перемещения тел 1 и 2 с массами m_1, m_2 ; C_1, H_1 – коэффициенты жесткости и вязкости системы подпрессоривания тела 1; A, ω – амплитуда и круговая частота внешней возбуждающей гармонической силы; g – ускорение свободного падения.

Предполагаем далее, что внутренняя сила ударного взаимодействия зависит от относительного сближения $\zeta = w_1 - w_2$ и скорости $\dot{\zeta}$:

$$F = F(\zeta, \dot{\zeta}). \quad (2)$$

При этом для удовлетворения требованиям неотрицательности (смотри рис. 2) имеем

$$F = 0 \text{ при } \zeta < 0; F = F^{\wedge} \geq 0 \text{ при } \zeta \geq 0. \quad (3)$$

Требование диссипативности можно удовлетворить, предположив следующие свойства:

$$F(\zeta, \dot{\zeta}) = F(\zeta, 0) \text{ при } \dot{\zeta} < 0. \quad (4)$$

Этим постулируется, что если тела находятся в контакте, но начинают удаляться, то сила их взаимодействия не зависит от скорости. Кроме того, потребуем выполнения еще одного условия:

$$F(\zeta, \dot{\zeta}) > F(\zeta, 0) \text{ при } \dot{\zeta} > 0. \quad (5)$$

Этим самым подтверждается активная роль скорости $\dot{\zeta}$ в моделируемых диссипативных процессах.

Влияние данных условий на характер взаимодействия проиллюстрировано на рис. 2. Рассмотрим один удар, изображенный на рис. 3. Точка 1 на этой диаграмме соответствует моменту времени t_1 , когда тела вступают в контакт ($\zeta(t_1) = 0$) с некоторой положительной скоростью встречи $\dot{\zeta}(t_1) > 0$. В этот момент будет наблюдаться скачок силы F от 0 до конечного положительного значения в контакте

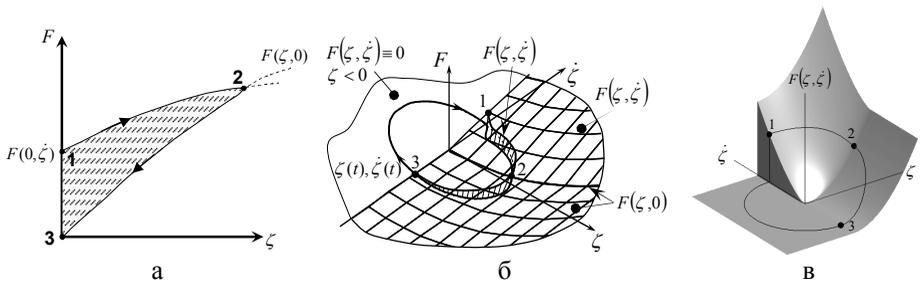


Рисунок 3 – Сила ударного взаимодействия для одного удара (а) и общий вид вязкоупругой силы (2), удовлетворяющей условиям (3)-(6) (б, в).

$$F(\zeta(t_1), \dot{\zeta}(t_1)) = F(0, \dot{\zeta}(t_1)) > F(0, 0) = 0$$

после удара. Проникновение растет до тех пор, пока силы отталкивания не останавливают движение двух тел друг навстречу другу, то есть до момента времени t_2 , и соответствует точке 2 на диаграмме. В данный момент при изменении относительной скорости знак с положительного меняется на отрицательный, следовательно, $\dot{\zeta}(t_2) = 0$. Далее вязкая компонента силы приобретает нулевое значение и в соответствии с кривой $F(\zeta, 0)$ (4) ее значение следует к точке 3, в которой два тела разъединяются и контактная сила исчезает.

Следует отметить, что вязкоупругая составляющая силы присутствует на отрезке 1-2, после чего исчезает на участке 2-3. В случае контакта закон взаимодействия (2) удовлетворяет условию (5). Этот факт гарантирует положительность гистерезиса силы удара и априорную диссипативность рассматриваемой модели. Рис. 3 иллюстрирует объясненное выше влияние ограничений (3)-(5) в 2-мерном фазовом пространстве для одной фазовой траектории типичного столкновения.

Таким образом, условия (3)-(5) позволяют полностью идентифицировать силу $F = F(\zeta, \dot{\zeta})$, задавшись ее представлением $F = F^\wedge(\zeta, \dot{\zeta})$ в квадранте $\zeta > 0, \dot{\zeta} > 0$. Принимая естественное предположение $F^\wedge(0, 0) = 0$, можно искомую силу F^\wedge представить в виде функционального ряда

$$F^\wedge(\zeta, \dot{\zeta}) = \sum \gamma_{ij} \cdot \varphi_i(\zeta) \cdot \psi_j(\dot{\zeta}), \quad (6)$$

в частности, ряда Тейлора:

$$F^\wedge(\zeta, \dot{\zeta}) = \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \dot{\zeta} + \alpha_3 \zeta \dot{\zeta} + \dots \quad (7)$$

Представления (6), (7) дают возможность восстановить функцию F^\wedge в первом квадранте по значениям коэффициентов γ, α при базисных функциях φ, ψ (или при степенях $\zeta, \dot{\zeta}$). Частичные суммы рядов (6), (7) дают некоторое приближение F , и при этом возникают две задачи: определение количества удерживаемых членов того или иного ряда и определение коэффициентов γ, α .

Предложенный подход расширяет традиционные представления силы F^\wedge в виде заранее постулируемой функции от координат $\zeta, \dot{\zeta}$ [3, 4, 6]. При этом возникают две новые задачи:

1) анализ влияния базисных функций φ, ψ , а также значений коэффициентов γ, α на характер динамического процесса в исследуемой системе;

2) определение такого множества базисных функций, их удерживаемого количества и значений коэффициентов усеченного ряда γ, α , которые с заданной точностью описывают реальные виброударные процессы в тех или иных машинах.

Задача 1) является предметом отдельных дальнейших исследований (бу-

дет описана в последующих статьях), а решение задачи 2) (идентификация F^{\wedge}) для случая представления (7) изложена далее в статье.

Задача В. Идентификация силы F^{\wedge} . Для идентификации (верификации) коэффициентов и количества удерживаемых членов частичной суммы ряда (7) требуется разработать критерии верификации и алгоритмы их удовлетворения, а также применить предложенные алгоритмы к исследованию реального объекта.

Критерии. Можно выбирать различные варианты идентификации, которые позволяют оценить расхождение между предсказанным приближением и реальным поведением системы (1), наблюдаемым в эксперименте. Можно сравнивать различные динамические параметры. В предложенном подходе сравниваются временные распределения и закон изменения силы ударного взаимодействия с экспериментальными данными, полученными для машины для выбивки литья из песчано-глинистой формы. Основной акцент сосредоточен на стационарном режиме колебаний, поскольку на нем данная машина работает основное время, и здесь возникают максимальные нагрузки.

Рассмотрим два распределения силы ударного взаимодействия во времени для установившихся колебаний с круговой частотой $\omega = 2\pi\nu$ и периодом $T = 1/\nu$, изображенные на рис. 4. Кривая F_E получена из эксперимента. Кривая F_N получается как результат численного моделирования, и в тенденции должна быть во все большей мере идентична экспериментальной путем приближения модели F^{\wedge} к искомой за счет соответствующего выбора α_i . На графике оба распределения силы совмещены по времени начала удара t^* . Разница между положительным значением $F_E(t)$ и $F_N(t)$, а также длительностями импульса τ_E и τ_N , полученных путем экспериментальных исследований и как результаты численного моделирования, имеет важное значение для верификации.

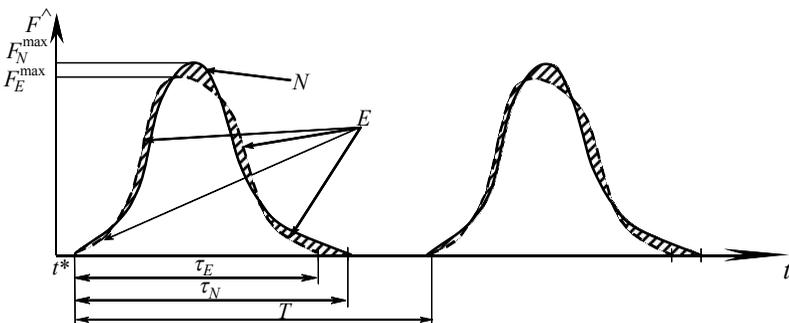


Рисунок 4 – Схематическое отображение распределений силы ударного взаимодействия, полученных численно и экспериментально.

Для того, чтобы измерить это несоответствие, вводится несколько функционалов от распределения $F_E(t)$ и $F_N(t)$ во времени:

$$I_1 = \frac{\max|F_N^\wedge - F_E^\wedge|}{\max|F_E^\wedge|}; I_2 = \frac{\int|F_N^\wedge - F_E^\wedge|dt}{\int|F_E^\wedge|dt}; I_3 = \sqrt{\frac{\int(F_N^\wedge - F_E^\wedge)^2 dt}{\int(F_E^\wedge)^2 dt}}; I_4 = \frac{|\tau_N - \tau_E|}{\tau_E}. \quad (8)$$

Эти функционалы обладают следующими свойствами нормы

$$I_k \geq 0 \quad \forall F_N^\wedge, F_E^\wedge, k; \quad (9) \quad I_k = 0 \quad \text{при } k=2,3 \Rightarrow F_N^\wedge \equiv F_E^\wedge. \quad (10)$$

Чем меньше погрешность несоответствия результатов расчета и эксперимента, тем точнее приближение (7) при определенном наборе параметров α_i аппроксимирует функцию F^\wedge .

Алгоритмы. Определяются параметры α_i приближенной модели, приводящие к минимуму несоответствие по одной из норм (8). Выбор функционалов является необходимым и важным этапом исследований. Для иллюстрации рассмотрим модельную задачу для системы с параметрами: $m_1 = 15960$ кг, $m_2 = 5000$ кг, $C = 5280$ кН/м, $H = 127680$ Н·с/м, $A = 293$ кН, $\nu = 16$ Гц.

Предположим, что сила ударного взаимодействия может быть выражена как линейная форма

$$F = \bar{\alpha}_1 \zeta + \bar{\alpha}_2 \dot{\zeta} \quad \text{при } \zeta, \dot{\zeta} > 0, \quad (11)$$

с известными (заданными)

$$\bar{\alpha}_1 = 2.06 \cdot 10^8 \text{ Н/м}, \quad \bar{\alpha}_2 = 1.28 \cdot 10^7 \text{ Н·с/м}.$$

В этой искусственно созданной ситуации приближения (7) только два члена ряда аппроксимируют „эталонное” распределение силы в случае $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$ и $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$. Рассмотрим чувствительность функционалов I_k для идентификации параметров. Известно, что если $I_k(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = 0$, то для этих значений коэффициентов функция $F(\zeta, \dot{\zeta})$ совпадает с $F^\wedge(\zeta, \dot{\zeta})$, и, следовательно, $F_E(t) = F_N(t)$ (то есть численное моделирование совпадает с „экспериментальной” кривой $F_E(t)$).

На рис. 5 показаны значения для $I_k(\alpha_1, \alpha_2)$ в области значений $\alpha_1 \in [1.03 \cdot 10^8, 3.09 \cdot 10^8] \times$

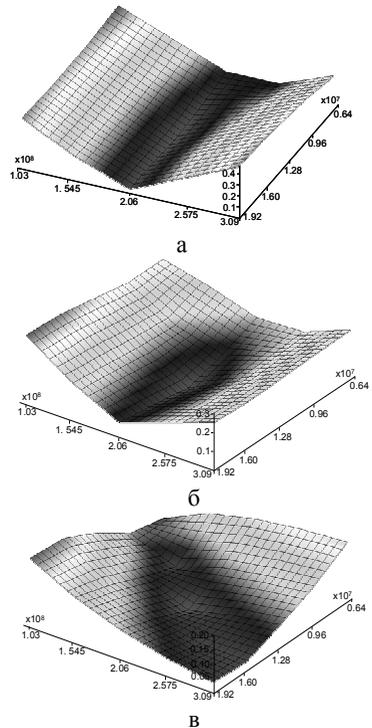


Рисунок 5 – Визуализация различных норм I_1 (а), I_2 (б), I_4 (в).

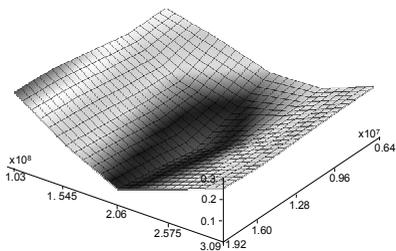
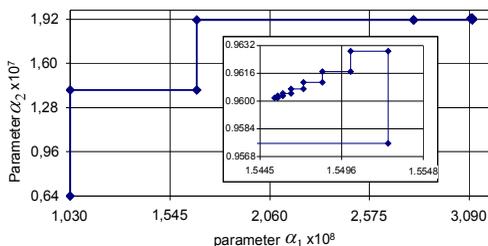
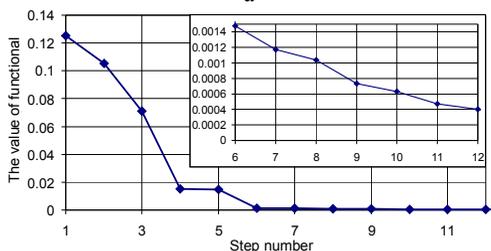


Рисунок 6 – Альтернативный функционал $I_0 = (I_1 + I_4)/2$.



а



б

Рисунок 7 – Итерационный процесс минимизации для I_2 :

а – траектория точки текущего приближения в координатах α_1, α_2 ; б – изменение функционала в ходе итерационного уточнения решения.

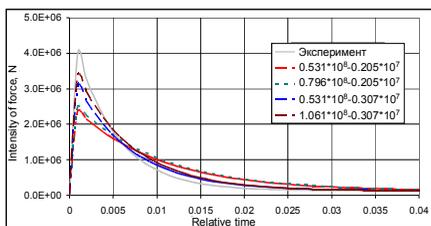


Рисунок 8 – Аппроксимация силы ударного взаимодействия для ряда итераций ее точного распределения.

$$\alpha_2 \in [0.64 \cdot 10^7, 1.92 \cdot 10^7].$$

Следует заметить, что функционалы I_2 и I_3 имеют минимум при $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2$. В то же время функционалы I_1 и I_4 показывают плохую чувствительность к изменению данных параметров, что создает трудности в осуществлении процедуры минимизации. Ситуация может быть улучшена путем введения альтернативного функционала $I_0 = (I_1 + I_4)/2$. Такая их комбинация имеет лучшую сходимость, что можно увидеть на рис. 6.

В случае удачного выбора функциональной нормы можно получить стабильный по сходимости процесс идентификации. Минимизация может быть выполнена ускоренным методом направленного спуска. В частности, выбор функционала I_2 приводит к следующим результатам (рис. 7, 8). На рис. 7 представлен итерационный процесс. На рис. 8 показаны кривые сходимости силы $F_N(t)$ к ее „эталонному” значению.

Тестовая задача решена с использованием функционала I_2 . Зависимость I_2, I_3, I_0 от α_1, α_2 идентичны по виду, то есть процесс сходимости будет аналогичен для любого из функционалов. Таким образом, функционалы I_2, I_3 в общем

случае могут быть выбраны в качестве критериев идентификации. При этом наблюдаемый динамический процесс представлен на рис. 9 во временном срезе, а соответствующий фазовый портрет – на рис. 10.

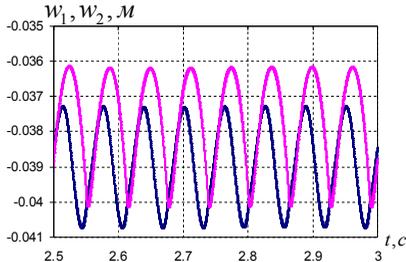


Рисунок 9 – Динамический процесс в модельной виброударной системе

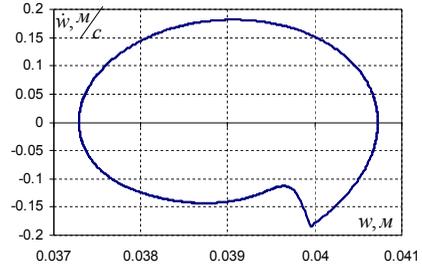


Рисунок 10 – Фазовая траектория для модельной виброударной системы (тело m_1)

Задача для реального объекта. При исследовании реальных виброударных машин, в отличие от модельных случаев, приходится применять более широкие представления для силы F^{\wedge} . В частности, предложенный подход был использован для идентификации модели силы удара в выбивной машине, предназначенной для установки в составе автоматизированной литейной линии на ОАО „Азовмаш” [7].

Для описания внутренней силы ударного взаимодействия в этом случае был выбран полином четвертой степени. Предлагаемое приближение отражает многие ключевые особенности реального взаимодействия, которое было предложено как результат идентификации [8]. В частности, нелинейные члены позволяют сместить максимум силы удара от начала столкновения ближе к его средней части (рис. 11).

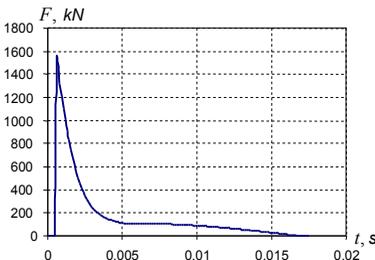


Рисунок 11 – Предсказанный характер временного распределения силы удара по приближенной модели.

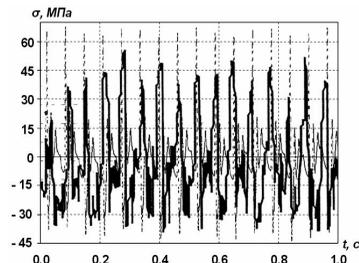


Рисунок 12 – Сравнение результатов численного моделирования и экспериментально полученных напряжений в контролируемых точках в выбивной машине во времени.

В конечном итоге была построена модель, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными. Рис. 12 показывает расхождение экспериментальных и расчетных значений напряжений в выбивной машине для контролируемых точек в ходе экспериментальной проверки [8]. Оказалось, что модель позво-

ляет достаточно точно получить динамические параметры рассматриваемой виброударной системы, такие как продолжительность воздействия импульса, амплитуды ускорений и силы в выбивной машине с точностью 11-18% [8, 9].

Заключение. В данной работе был предложен новый подход к моделированию внутренней силы ударного взаимодействия в виброударной системе и ее идентификации. Основные отличительные особенности этого подхода, а также ключевые результаты состоят в следующем.

1. Предложенный подход, в отличие от традиционных, не постулирует внутреннюю силу ударного взаимодействия, а предлагает процедуру верификации для ее построения. При этом саму функцию представляем в виде ряда от фазовых координат, а процедура идентификации сводится к определению таких коэффициентов этого ряда, чтобы временные распределения силы (получаются из численного интегрирования уравнений движения) соответствовали данным экспериментальных измерений.

2. Подход позволяет в процессе идентификации учесть особенности динамического процесса. В частности, это частичное разрушение груза (для конкретного случая) выбиваемой из песчано-глинистой формы отливки, что эффективно моделируется нелинейным вязкоупругим диссипативным слоем.

3. В работе были предложены различные критерии определения степени точности моделирования внутренней силы ударного взаимодействия. Это было проиллюстрировано на проверочной модельной задаче. Получена высокая скорость сходимости и удовлетворительная для практики точность.

4. Применимость предложенного подхода была проиллюстрирована при численном и экспериментальном исследовании реальных выбивных машин. Это позволило добиться высокой точности при описании их динамических характеристик. На основе данных исследований спроектирована работоспособная выбивная крупнотоннажная машина. Ее работоспособность проверена многолетней эксплуатацией.

Этот подход можно расширить на широкий класс виброударных систем и использовать для анализа и синтеза вибромашин, что является направлением дальнейших исследований.

Список литературы: 1. *Грабовский А.В.* О расчетно-экспериментальном моделировании динамических процессов в виброударных системах // Механіка та машинобудування. – Харків: НТУ „ХПІ”, – 2009. – № 1. – С. 119-129. 2. *Грабовский А.В.* Методы и алгоритмы верификации сил ударного взаимодействия в виброударных системах // Східно-Європейський журнал передових технологій. – Харків: УДАЗТ. – 2010. – № 3/9(45). – С. 42-46. 3. *Баженов В.А., Позорелова О.С., Постникова Т.Г. и др.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах // Пробл. прочности. – 2009. – № 4. – С. 69-77. 4. *Баженов В.А., Позорелова О.С., Постникова Т.Г. и др.* Аналіз динаміки ударно-вібраційного майданчика при зміні його параметрів // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 82-90. 5. *Ткачук Н.Н., Грабовский А.В., Ткачук Н.А.* Подход к идентификации ударной модели для виброударной системы // Вісник СевНТУ. Механіка, енергетика, екологія. – Севастополь: СевНТУ. – 2010. – №1 10. – С. 55-60. 6. *Вибрации* в технике: Справочник в 6 томах. – М.: Машиноведение. – 1981. 7. *Барчан Е. Н.* Усовершенствование методов расчета и конструкций выбивной транспортной машины для формовочной линии крупного литья: дис. канд. техн. наук: 05.02.02. – Мариуполь. – 2008. – 178 с. 8. *Грабовский А.В.* Ударное взаимодействие и динамические процессы в виброударных машинах с частичным разрушением технологического груза: дис. канд. техн. наук: 05.02.09. – Харьков. – 2011. – 181 с. 9. *Барчан Є.М., Артёмов І.В., Грабовський А.В.* Удосконалення методів розрахунку та конструкції вибивної транспортуючої машини для формувальних ліній крупного литва // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем. вип.: “Транспортне машиностроєння”. — Харків : НТУ „ХПІ”, 2010. – № 19. – С. 18-34.

Поступила в редакцию 08.09.2011

С.М. ШЕВЧЕНКО, ассистент, НТУ «ХПИ»

УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ ДЛЯ МИКРОТВЕРДОСТИ УПРОЧНЕННОГО ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ СТАЛИ ПРИ АЛМАЗНО-ИСКРОВОМ ШЛИФОВАНИИ

У статті розглянуті питання математичної залежності між критерієм якості поверхневого шару – мікротвердістю сталі У7, що оброблена алмазно-іскровим шліфуванням (АІШ) та параметрами АІШ.

В статье рассмотрены вопросы математической зависимости между критерием качества поверхностного слоя – микротвердостью стали У7, обработанной алмазно-искровым шлифованием (АИШ) и технологическими параметрами АИШ.

The article suggests the questions of mathematical dependence between quality in particular microhardness of surface of ball-bearing steel У7 by diamond-spark-grinding (DSG) and technological parameters of DSG.

Вступлення. Значительного улучшения качества машин, повышения их долговечности и большой экономии металла в машиностроении можно достичь внедрением в производство прогрессивной технологии механической обработки конструкционных материалов и их поверхностного упрочнения. По прогнозам специалистов по машиностроению на ближайшие годы, комбинированные методы, совмещающие процессы пластической деформации с фазовыми превращениями, будут основными при производстве высокопрочных металлических материалов [1, 2]. Благодаря процессам, протекающим на поверхности металла при алмазно-искровом шлифовании (АИШ), данный метод можно с уверенностью отнести к комбинированным методам обработки деталей машин.

Исследование инновации поверхностного слоя стали в процессе технологии АИШ представляет научный и практический интерес, так как АИШ является ресурсосберегающим и экологически чистым процессом и позволяет во многих случаях заменить традиционную термическую и химикотермическую обработку, при которых используются токсичные среды, оказывающие вредное влияние на здоровье человека.

Анализ последних исследований. Сущность отделочно-упрочняющей обработки АИШ состоит в создании в процессе шлифования такого теплонапряженного состояния, которое вызывает в поверхностном слое структурные превращения (вторичную закалку), так называемый «белый слой» (БС) или гарденит (рис.1), обладающий, как известно, рядом ценных свойств: высокой твердостью, прочностью, слабой травимостью (коррозионостойкостью) [3].

Для образования БС необходим высокотемпературный локальный нагрев и значительное удельное давление в зоне шлифования и быстрого охла-

ждения за счет отвода тепла в глубину изделия и за счет действия смазывающе-охлаждающей жидкости.

Температура и давления в зоне обработки зависят от технологических параметров АИШ; следовательно, изменяя соответствующим образом технологические параметры АИШ можно управлять температурно-силовыми условиями.

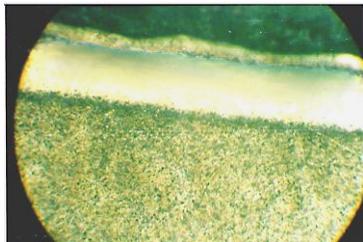


Рисунок 1 – Микроструктура упрочненного АИШ поверхностного слоя (увеличение $\times 360$).

является микротвердость, которая для стали У7 в исходном состоянии после закалки, низкого отпуска и последующего АИШ составляет 8400 – 12060 МПа.

Исследования влияния АИШ на параметры качества поверхностного слоя стальных образцов показали, что одним из важнейших параметров, влияющих на упрочнение – это глубина шлифования t , мм [4], которая задает величину силы тока, следовательно, температуру нагрева поверхностного слоя стали и определяет уровень упрочнения (рис. 3).

Постановка задачи. В связи с тем, что АИШ – это многофакторный метод обработки, возникает необходимость установить математическую зависимость между параметрами режимов АИШ и микротвердостью обработанной поверхности (Н, МПа).

Как видно из схемы, представленной на рис. 2, имеются три основных параметра круглого наружного АИШ – это глубина шлифования t , мм, продольная подача S_{np} , мм/мин и скорость вращения детали V_0 , мм/мин.

Экспериментальные исследования показали, что одним из наиболее информативных критериев качества поверхностного слоя обработанной детали

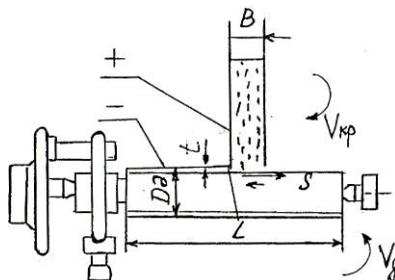


Рисунок 2 – Схема внешнего круглого АИШ в центрах.

Метод разработки модели. Для установления влияния на микротвердость поверхностного слоя стали У7 трёх параметров АИШ:

- глубины шлифования $t = 0,035 \div 0,07$ мм,
- продольной подачи $S_{np} = 1300 \div 1600$, мм/мин и
- скорости заготовки $V_{\dot{o}} = 10 \div 20$ мм/мин

был применен метод многофакторного планирования эксперимента (МПЭ) типа 3^3 . При этом форма связи между рассматриваемыми параметрами была принята такой:

$$H = C \times t^{\alpha} \times S_{np}^{\beta} \times V_{\dot{o}}^{\gamma} \quad (1)$$

Прологарифмировав зависимость (1), привели её к виду:

$$\ln H = \ln C + \alpha \ln t + \beta \ln S_{np} + \gamma \ln V_{\dot{o}} \quad (2)$$

или

$$y = x_1 + x_2 a + x_3 b + x_4 c \quad (3)$$

где $y = \ln H$ – измеряемый параметр (микротвердость) в логарифмических координатах; x_1, x_2, x_3, x_4 – значения коэффициентов; a, b, c – логарифмы составляющих.

Задача заключается в экспериментальном получении коэффициентов уравнения (2). Решение проводилось с помощью системы *MATLAB* [5, 6, 7]. При составлении плана эксперимента исходим из того, что при МПЭ для каждой переменной выбираем определенное число уровней. В нашем случае для значений глубины шлифования, поперечной подачи и скорости вращения

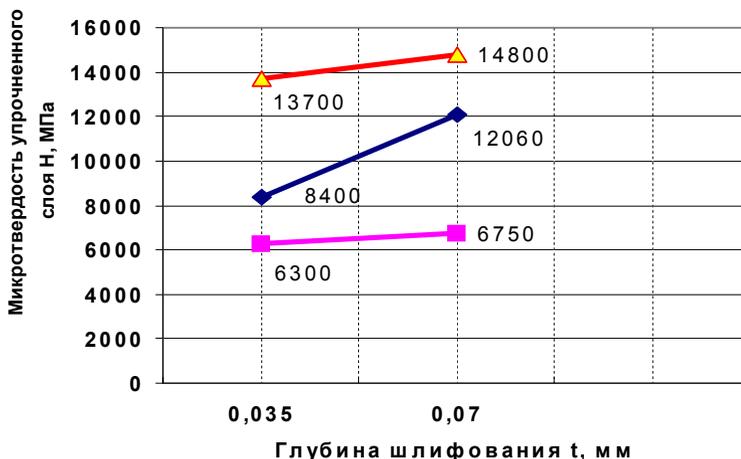


Рисунок 3 – Влияние глубины шлифования на упрочнение углеродистых сталей 45, У7, У12 в процессе АИШ.

детали выбраны три уровня: верхний, средний и нижний.

Результаты моделирования. На рис. 4 представлены результаты экспериментальных (○) и расчетных (□) значений микротвердости в зависимости от заданных параметров АИШ.

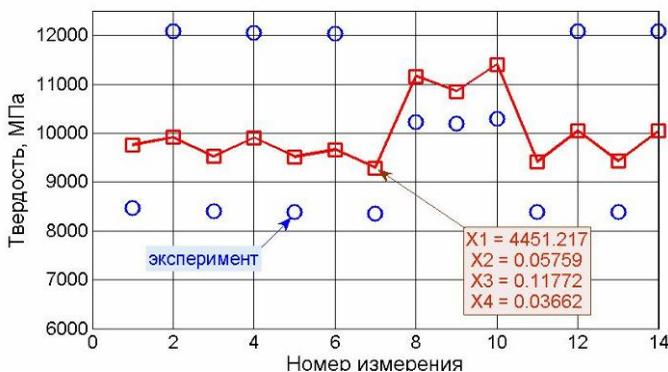


Рисунок 4 – Экспериментальные и рассчитанные значения микротвердости поверхностного слоя стали У7 в процессе АИШ

Полученная зависимость величины микротвердости от основных параметров АИШ имеет вид:

$$H = 4451,217 \times t^{0,05759} \times S_{non}^{0,11772} \times V_0^{0,3662}$$

Вывод. Посредством МПЭ и аппаратом MATLAB выведена формула, с помощью которой можно определить уровень упрочнения поверхностного слоя стали в зависимости от технологических параметров АИШ. Полученные результаты могут быть использованы при АИШ сталей первой группы обрабатываемости [8].

Список литературы: 1. Дьяченко С.С. Физические основы прочности и пластичности металлов. – Х.: ХНАДУ, 2003. – 226 с. 2. Багмутов В.П., Паршев С.Н., Дудкина Н.Г., Захаров И.Н. Электромеханическая обработка. – Новосибирск: «Наука», 2003. – 317 с. 3. Бабей Ю.И. Физические основы импульсного упрочнения стали и чугуна. – К: Наукова думка, 1988. – 237 с. 4. Фуке М.Я., Беззубенко Н.К., Свердлова Б.Н. Состояние поверхностного слоя материалов после алмазной и эльборовоной обработки. – К: Вища школа, 1979. – 160 с. 5. Потемкин В. Система инженерных и научных расчетов MATLAB 5.x (в 2-х томах). – Диалог-МИФИ. – 1999. 6. Колупав И. Н., Шункова И. Г. Количественная обработка цифровых изображений микроструктур (система MatLab). – Харьков: НТУ “ХПИ”, 2006. – 84 с. 7. <http://dkhramov.dp.ua/index.php?n=Sci.Matlab>. 8. Корчак С.Н. Производительность процесса шлифования стальных деталей. – М.: Машиностроение, 1971. – 279 с.

Поступила в редколлегию 11.10.2011

ЗМІСТ

МАРЧЕНКО А.П., ТКАЧУК Н.А., ЗАРУБИНА А.А., ГРИГОРЬЕВ А.Л. Профессору А.А. Грунауэру 90 лет !	3
БЄЛОВ І.С. Про LMI – характестики невід’ємних косинус – многочленів	15
ВАНИН В.А., ГРИГОРЬЕВ А.А. Моделирование характеристик устойчивой волны переноса упругопластической деформации в винтовом стержне	22
ВАНИН В.А., ГРИГОРЬЕВ А.А. Квантовая релятивистская механика уединённых экспоненциальных волн переноса деформации кручения по цилиндрическому стержню	37
ГАНДЕЛЬ Ю.В., ДУХОПЕЛЬНИКОВ С.В. Математическая модель дифракции ТЕ-волны на решетке в плоскопараллельном волноводе	48
ГЛУХОВ Ю.П. Динамика многослойной предварительно напряженной полосы при воздействии подвижной нагрузки	57
ГРИГОРЬЕВ А.Л., ГЕВОРКЯН Ю.Л. Матричный численно-аналитический метод интегрирования уравнений движения многомассовой цепной системы	68
КОШОВИЙ А.Г., КОШОВИЙ Г.І. Одновимірні самоподібні фрактали та їх використання у моделюванні	82
ЛЕВТЕРОВ А.М. Анализ энергопотребления в стране и в мире. Методология исследования основных показателей транспортных ДВС	89
ЛЕВТЕРОВ А.М., ЛЕВТЕРОВА Л.И., ГЛАДКОВА Н.Ю. Метод аналитического исследования характеристик поршневых двигателей внутреннего сгорания на альтернативных доплавах	99
ЛИТВИН О.М., ЛИТВИН О.О., ТКАЧЕНКО О.В. Одна теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій 2-х змінних	107
ЛИТВИН О.М., НОСОВ К.В., БАРАНОВА Т.А. Вибір оптимальних координатних функцій в методі скінчених елементів для еліптичних крайових задач	110

ЛИТВИН О.М., ПЕРШИНА Ю.І. Математичне моделювання процесів, що описуються розривними функціями однієї змінної	119
МАЛИХІНА Т.В. Моделювання електромагнітних процесів низьких енергій взаємодії випромінювання з речовиною при розробці детекторів	126
МАРЧЕНКО А.П., ПИЛЬОВ В.В., СУКАЧЕВ І.І. Удосконалення математичної моделі випаровування паливної плівки зі стінки камери згоряння дизеля	133
НАЗИРОВ З.Ф., ЧЕРЕМСЬКА Н.В., ЯНЦЕВИЧ А.А. Лінійні перетворення дискретних випадкових полів	144
ОЛЬШАНСКИЙ В.П., ОЛЬШАНСКИЙ С.В. Установившиися колибання скорости потока зерновой смеси на плоском виборешете	155
ПЛОТНИКОВ А.Л., КОЛУПАЕВ И.Н., ШЕВЧЕНКО С.М. Моделирование параметров упрочнения поверхностного слоя стали в технологии алмазно-искрового шлифования	163
СЕМКО А.Н., БИГВАВА В.А. Взаимодействие затопленной струи порохового импульсного водомета с плоской преградой	168
ТКАЧУК Н.А., ГРАБОВСКИЙ А.В., ТКАЧУК Н.Н., КОСТЕНКО Ю.В., АРТЕМОВ И.В. Численное моделирование динамических процессов в виброударных системах	179
ШЕВЧЕНКО С.М. Уравнение регрессии для микротвердости упрочненного поверхностного слоя стали при алмазно-искровом шлифовании . .	188

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«Харківський політехнічний інститут»**

Тематичний випуск
«Математичне моделювання в техніці та технологіях»
Випуск 42

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін
Технічний редактор: С. Д. Нижник
Відповідальний за випуск: к. т. н. Г. Б. Обухова

Обл. вид. № 167-11

Підп. до друку 18.11.2011 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов. друк. арк. 10. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 0738. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зebra», Харків, пл. Повстання, 7/8
