

ISSN 2222-0631



**ВІСНИК**

**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО  
УНІВЕРСИТЕТУ  
«XIII»**

**13'2011**

**Харків**

# ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«Харківський політехнічний інститут»

Збірник наукових праць  
Тематичний випуск

13'2011

## «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА ТЕХНОЛОГІЯХ»

Видання засновано Національним технічним університетом  
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України  
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

### КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

**Голова:** Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

**Секретар:** К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;  
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;  
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;  
Л.М.Бесов, д-р техн. наук, проф.;  
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;  
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;  
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;  
А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;  
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;  
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;  
В.В.Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.;  
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;  
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Клепіков, д-р техн. наук, проф.;

С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;  
В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;  
В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;  
Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;  
В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;  
О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;  
В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;  
П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;  
В.А.Пуляев, д-р техн. наук, проф.;  
М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;  
Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;  
Ю.В.Тимофійєв, д-р техн. наук, проф.;  
М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Харків 2011

**Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».** Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», – 2011. – № 13. – 203 с.

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

**Відповідальний редактор:** В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

**Заступник відповідального редактора:** Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Ю. В. Гандель,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Ю. Л. Геворкян,	канд. фіз.-мат. наук, проф.;
О. Л. Григор'єв,	д-р техн. наук, проф.;
В. К. Дубовий,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. В. Курпа,	д-р техн. наук, проф.;
О. С. Куценко,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. М. Любчик,	д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
М. В. Новожилова,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
В. П. Северин,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий,	д-р техн. наук, проф.;
Є. Г. Янютін,	д-р техн. наук, проф.

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПІ».  
Каф. ВМ, тел. (057) 707-60-35, (057) 707-60-87. E-mail: kpi\_mmtt@mail.ru

Рекомендовано до друку вченою радою НТУ «ХПІ».  
Протокол № 4 від 8 квітня 2011 р.

ISSN 2222-0631

© Національний технічний університет «ХПІ», 2011

*Л.В. АВТОНОМОВА*, канд. техн. наук, пров. наук співр., НТУ «ХПІ»

## **ОСОБЛИВОСТІ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕХАНІЧНОГО СТАНУ ПОТУЖНОСТРУМОВОГО З'ЄДНАННЯ**

Розглядаються особливості математичної моделі електротермомеханічного стану електричного з'єднання на прикладі гніздового затискача. Досліджено вплив зміни його температури на напружено-деформований стан та перехідний опір.

Рассматриваются особенности математической модели электротермомеханического состояния электрического соединения на примере гнездового зажима. Исследовано влияние изменения его температуры на напряженно-деформированное состояние и переходное сопротивление.

Electrotherm mechanical state of the electrical connector kind of F-clamp is considered. The effect of changing temperature on the stress-strain state and transient resistance is examined.

**Вступ.** Проблема взаємозв'язку полів різної природи займає в механіці суцільного середовища важливе місце і має велике значення при розв'язанні прикладних задач. Одним з прикладів таких задач є дослідження в галузі електричних контактів. Розв'язання проблеми оптимального вибору режимів роботи, вивчення теплофізичних процесів в електричних контактах безпосередньо пов'язано з напружено-деформованим станом, викликаним різними факторами (затягування контактів, термонапружені зусилля й інше). Тільки розв'язання зв'язаної задачі електротермомеханіки здатне прогнозувати характер зміни фізичного стану електричного контакту в процесі роботи і дати рекомендації ще на стадії проектування щодо вибору режимів експлуатації, зміни конструкції з'єднання, що дозволять поліпшити їх працездатність і збільшити термін служби.

**Аналіз досліджень.** Дослідження електричного, теплового та механічного станів електричного контакту з урахуванням процесів, що протікають в зоні контакту, виконуються переважно експериментально. Практично неможливо визначити розподіл температурного поля контактної системи і, тим більше, поля напружень і деформацій у процесі роботи [1]. Аналітично для скінчених тіл можна отримати тільки наближені розв'язки задач лінійної електротермопружності, основані на використанні методів осереднення та асимптотичного розкладання по малому параметру задачі [2]. В даний час, з розробкою програмних продуктів, таких як ANSYS, стало можливим отримувати чисельні розв'язки у тривимірній постановці зв'язаних задач електротермомеханіки на основі методу скінчених елементів. Враховуючи одночасно складну геометрію і різну фізичну природу взаємодії тіл доцільно об'єднати процеси знаходження невідомих та врахування різного роду нелінійностей в рамках єдиної ітераційної схеми. При використанні методу фрагментації для розв'язання зв'язаної задачі електротермопластичності необхідно розглянути

задачі для механічного, теплового та електричного контакту системи скінчених тіл. Розрахунок напружено-деформованого (н.д.с.) стану струмопровідних реальних конструкцій з урахуванням контактної взаємодії різної фізичної природи стає актуальною задачею інженерної практики.

**Постановка задачі та математична модель.** Метою роботи є створення математичної моделі, що описує контактну взаємодію електричних пар з'єднання, які піддаються інтенсивним електротермомеханічним впливам, і найбільш точно відображає реальні граничні умови та забезпечує зв'язаність окремих крайових задач в єдиному обчислювальному процесі.

Факторами, що впливають на роботу електричного контакту, є перехідний опір, температура зони контакту електричних пар, температура та інтенсивність теплообміну контакт-деталей, контактні зусилля, габаритні розміри. Із підвищенням температури зони контакту збільшується перехідний опір, який викликає нове підвищення температури і т.д., аж до виходу контакту із ладу [1]. Зменшення та стабільність його може бути досягнута при підвищенні рівня контактного стиснення, що збільшує ефективну площу електричного контакту, яка залежить від н.д.с. У деяких випадках при виконанні контактного з'єднання певної конфігурації, термопружні напруження сприяють збільшенню контактного стиснення, що може забезпечувати необхідний рівень перехідного опору. На прикладі чисельного дослідження електротермомеханічного стану навісного потужнострумовевого електричного затиску можна показати вплив його термонапруженого стану на величину контактного зусилля, стабілізацію перехідного опору і вибір діапазону параметрів для раціонального робочого режиму електричного з'єднання.

У загальному випадку система рівнянь описує нелінійні пов'язані електромагнітні, теплові і механічні поля, що виникають в електричних контактних з'єднаннях. Якщо знехтувати динамічним членами в рівняннях руху і не враховувати зв'язаність полів деформацій та температури, то отримаємо таку систему рівнянь:

- рівняння електричного поля

$$\operatorname{div} \sigma(T, \sigma^{ij}) \operatorname{grad} \varphi = 0, j(x_i, t) = I(t) * \left[ -\sigma(T, \sigma^{ij}) \operatorname{grad} \varphi \right]; \quad (1)$$

- рівняння нестационарної теплопровідності

$$\rho c_v \partial T / \partial t = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + j^2(x_i, t) / \sigma(T, \sigma^{ij}); \quad (2)$$

- рівняння квазістационарної механіки твердого тіла

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u_i) + [\operatorname{grad}(\operatorname{div} u_i)] / (1 - 2\nu) = [2\alpha_t E / (1 - 2\nu) G] * \operatorname{grad} T; \quad (3)$$

- рівняння стану (Прандтля – Рейса):

$$d \varepsilon_{ij} = \left[ d \sigma_{ij} - \nu (3d \sigma g_{ij} - d \sigma_{ij}) \right] / E + 3d \varepsilon_u^p (\sigma_{ij} - \sigma g_{ij}) / 2 \sigma_u + \alpha_t d T g_{ij}. \quad (4)$$

У початковий момент часу  $t_0$  задана конфігурація контактного з'єднання, напруження  $\sigma_{ij}^0(x_k, 0)$ , температура, термомеханічні властивості середо-

вищ (теплопровідність, опір, щільність, пружні сталі та ін.).

Граничні умови задаються в інтервалі часу  $[t_0, t_1]$ .

Початкові умови задаються для температури. Граничні умови для потенційної задачі струмів на поверхнях розриву:

- метал – ізолятор –  $j_n = 0$ ;  $j_t = H_0$  або  $j_n^{CT} = -\sigma \text{grad}_n \varphi$ ;

- метал - джерело е.р.с. –

$$j_t = 0; \text{ або } \sigma_1 \partial \varphi_1 / \partial n - \sigma_2 \partial \varphi_2 / \partial n = j_n^{CT} - j_n^{CT}; \varphi_1 = \varphi_2;$$

- метал – метал –  $j_{n1} = j_{n2}$ ;  $\sigma_1 j_{t1} = \sigma_2 j_{t2}$  або

$$\sigma_1 \partial \varphi_1 / \partial n - \sigma_2 \partial \varphi_2 / \partial n; \varphi_1 = \varphi_2 \quad (\varphi_1 - \varphi_2) / R_{nep} = \sigma_1 \partial \varphi_1 / \partial n,$$

де  $n, t$  – відповідають нормальним і тангенціальним компонентам векторів електромагнітного поля, а 1, 2 – граничним умовам 1-го і 2-го середовищ,  $j$  – густина струму,  $R_{nep}$  – перехідний опір.

Поблизу зон сторонніх джерел у наближенні рівномірно розподіленого по електродній площі струму:

$$(\partial \varphi / \partial n)_S = I(k, t) / \sigma S_i(k),$$

де  $S_i(k)$  – площа  $k$ -ого електрода; у наближенні еквіпотенціальності електродної площі:

$$I(k, t) = const; \quad \varphi_k = \varphi(k) = const; \quad \varphi_i = \varphi(i) = const.$$

Густина струму в однорідних областях провідника, що не містять сторонніх е.р.с., і щільність джерел Джоулевого тепловиділення:

$$J(x_i, t) = I(t) * (-\sigma \text{grad} \varphi), \quad q = j^2(x_i, t) / \sigma. \quad (5)$$

Граничні умови для рівняння теплового стану в загальному випадку є наступними:

$$T = T_0(r, t) - \text{температура};$$

$$\lambda(\partial T / \partial n) = -q(r, t) - \text{відома густина теплового потоку};$$

$$\lambda(\partial T / \partial n) = -\alpha(r, t) * [T(r, t) - T_0] - \text{відома умова теплообміну};$$

$$[T(r, t)_1 - T(r, t)_2] / R_{KT} = \lambda(\partial T / \partial n) - \text{відома умова теплообміну твердих тіл}.$$

Для рівнянь теорії упругопластичності граничні умови [3] задаються в інтервалі часу деформування тіла, при цьому на поверхні тіла, що деформується, задаються поверхневі напруження  $p_{iv} - \sigma_{ik} n_k$ , або переміщення  $v_i - v(r, t)$ ,  $u_i - u(r, t)$ , або змішані. Для точок, що лежать на межі поділу контактуючих поверхонь, граничні умови формулюються так:

- $u_i^1 = u_i^2$  (для зони прилипання –  $\Sigma_0$ )

- і закон тертя Кулона  $\sigma_{nt} = f * \sigma_{nn}$  (для зони ковзання –  $\Sigma_v$ ),

де  $\sigma_{nt}$  – напруга тертя,  $\sigma_{nn}$  – нормальний тиск,  $f$  – коефіцієнт тертя в при-  
 контактному шарі; а також виконується умова непроникнення тіл одне в одне:

$$(u_n^{i-1} + u_n^{i+1}) \leq 0, \quad \sigma_{nn}^i \leq 0,$$

де  $u_n^{i-1}$ ,  $u_n^{i+1}$  – переміщення точок у напрямку загальної нормалі до контакт-  
 ної поверхні. Межа між зонами прилипання  $\Sigma_0$  і ковзання  $\Sigma_v$ , межа  $\Sigma_p$  –  
 між пружною і пластичною областями попередньо невідомі.

У загальному випадку наведена система рівнянь є зв'язаною і неліній-  
 ною, що впливає із залежності контактних характеристик від величин відпо-  
 відних напружень на контактній поверхні у контактних граничних умовах:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) / R_{nep}(\sigma_{ij}) = \sigma_i (\nabla \partial \varphi_i / \partial n), (T_1 - T_2) / R_{KT}(\sigma_{ij}) = \lambda_i (\partial T_i / \partial n), \quad (6)$$

де  $R_{nep}$ ,  $R_{KT}$  – опір електричний, термічний. Аналіз нестационарних процесів  
 спрощується, завдяки зведенню до квазістационарного типу рівнянь електро-  
 магнітного поля і термопружнопластичності.

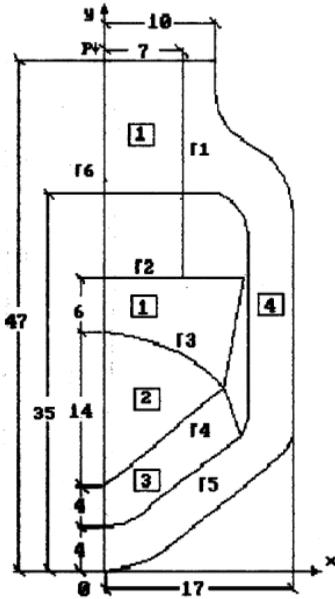


Рисунок 1 – Схема затиску

**Чисельна реалізація.** При проекту-  
 ванні оригінальної конструкції потужност-  
 румового гніздового затиску, яка дозволяє  
 стабілізувати перехідний опір електричного  
 контакту в режимі пропускання струму, не-  
 обхідно провести аналіз його стану,  
 розв'язуючи зв'язану задачу електротермо-  
 пластичності з відповідними граничними та  
 початковими умовами. Чисельно завдання  
 розв'язувалось методом скінченних елемет-  
 нтів, і результати порівнювалися з даними  
 тензометричних досліджень.

На рис.1 представлена схема констру-  
 кції такого затиску, в якій позначено: 1 –  
 латунна планка та притискний болт, 2 –  
 алюмінієвий дріт, 3 – мідна клема, 4 – кор-  
 пус, виготовлений із алюмінієвого сплаву,  
 що має відповідні механічні і теплофізичні  
 властивості. Струм (межа Г4 між дротом і  
 клемою) проводиться через гніздо затиску,  
 що знаходиться спочатку в напружено-  
 деформованому пружному стані, що зале-  
 жить від затягування болта крутним моме-

нтом  $M$ . Цей стан визначався для граничних умов, заданих у вигляді неліній-  
 ного закону розподілу дотичних зусиль у різьбовому з'єднанні на межі Г1. Біч-  
 на стінка затиску при даній схемі навантаження відчуває вплив сили  $P$ , роз-

тягується під натиском болта на планку, і згинального моменту, який створюється силою Р.

При розв'язанні струмової задачі у квазістатичному наближенні вважається, що розподіл густини струму за перетином дроту рівномірний. Для задачі теплопровідності на зовнішніх межах задано конвективний теплообмін із середовищем, а на межах Г1, Г2, Г3, Г4:  $\lambda \partial T / \partial n = (T - T_0) / R_{km}$ . Джоулеве виділення тепла при проходженні струму враховується при введенні теплових об'ємних джерел. За знайденим розподілом струму (1) обчислювалися щільності джерел джоулевого тепловиділення. Із розв'язку задачі термопружності (2)-(4) знайдено напружено-деформований стан (н.д.с.). Оскільки він впливає на величину контактної електричної і теплової опору, то розподіл струмів і температур в зоні електричного контакту також змінюється.

Після декількох ітерацій остаточно визначається н.д.с. контактної з'єднання, включаючи розташування зон контактування, пластичність, величину перехідного опору.

В окремих випадках можливо домогтися поліпшення параметрів електричного контакту. Наприклад, при нагріванні з'єднання, затягнутого моментом 3кГм, при проходженні струму, величини напруження, що виникають при дії згинального моменту, трохи збільшуються і перевищують напруження розтягнення від зусилля, що призводить до зростання притискового зусилля на межі Г2 та стабілізації перехідного опору.

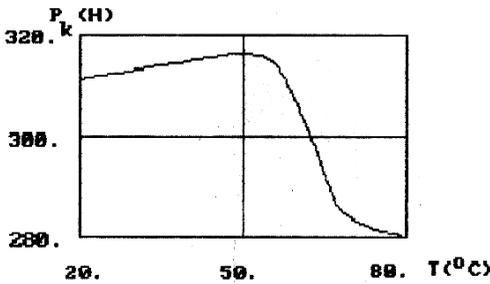


Рисунок 2 – Зміна величини притискового зусилля при нагріві затискача

На рис.2 представлена залежність зміни притискового зусилля від температури на межі Г2. Слід зазначити, що зі збільшенням величини номінального струму, що викликає нагрів до 50°С, відбувається зростання притискового зусилля за лінійним законом, що дає підставу стверджувати про пружний стан затиску. Далі зі збільшенням температури до 80°С відбувається його спад за нелінійним законом, що свідчить про роботу затиску у пластичній зоні. Тобто зростання величини струму призводить до поглиблення зон пластичності, а це в свою чергу, призводить до перерозподілу напружень в найбільш навантажених зонах. Чисельні результати показали, що лінійний розмір зон пластичного деформування практично пропорційний густині струму. Із нелінійного спадаючого характеру кривої випливає, що з появою пластичного деформування корпусу гніздового затиску зменшується тиск болта, а отже і зони контакту-

вання, що призводить до зростання перехідного опору на межі Г4, додаткового локального нагріву і порушення струмопередачі між дротом і клеюю.

На рис. 3 наведена крива залежності моменту затягування болта від температури нагріву при пропусканні струму, що характеризує роботу гніздового затиску, у зоні пружності – область 1 і у зоні пластичності – область 2. Рекомендоване поєднання величини нагріву від струму і моменту затягування затиску відповідає граничній кривій.

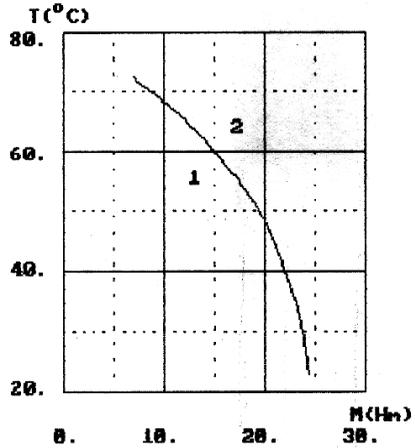


Рисунок 3 – Залежність деформації в стінці корпусу від моменту затягнення і температури затиску

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** Автор вважає перспективними подальші напрямки досліджень, пов'язані з розробками математичних моделей, алгоритмів розв'язання зв'язаних задач електротермомеханіки з урахуванням контактної взаємодії та врахуванням залежності властивостей матеріалів від величин полів. Застосування таких математичних моделей для дослідження потужнострумівих електричних з'єднань надасть можливість вивчити процеси, що протікають безпосередньо в зоні електричного контакту, проводити розрахунок і вибір параметрів з урахуванням тертя на поверхнях дотику.

Отримані чисельні результати аналізу електротермомеханічного стану дозволяють дослідити вплив різних фізичних параметрів електричного гніздового затиску. Проведення таких розрахунків для електричних контактів, які зазнають вплив інтенсивних пов'язаних електротермомеханічних полів дозволяє провести вибір робочих режимів і рекомендувати експлуатаційні параметри таких з'єднань, що забезпечують необхідний термін служби при гарантованій працездатності.

**Список літератури:** 1. Дзекцер М.М., Вісленев Ю.С. Многоамперные контактные з'єднання // 1987. –Л. –Вища школа, 128с. 2. Кім Є.І., Омельченко В.Т., Харін С.М. Математичні моделі теплових процесів електричних контактів // 1977. – Алма-Ата. – Наука КазССР, 236 с. 3. Галин Л.А. Контактні задачі теорії пружності і в'язко пружності. // 1980. – М – Наука, 304 с.

Надійшла до редколегії 21.03.2011

**І. С. БЕЛОВ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХП»

### ПРО ОДНУ ТЕОРЕМУ У. Х. ЯНГА

Розглянуті косинус – многочлени  $Y_n(a) = a + \sum_{k=1}^n (1/k) \cos k\theta \geq 0$ , невід’ємні при  $a \geq 1$  (теорема Янга). Встановлена невід’ємність  $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$ .

Рассмотрены косинус – многочлены  $Y_n(a) = a + \sum_{k=1}^n (1/k) \cos k\theta \geq 0$ , неотрицательные при  $a \geq 1$  (теорема Янга). Установлена неотрицательность  $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$ .

Cosine polynomials  $Y_n(a) = a + \sum_{k=1}^n (1/k) \cos k\theta \geq 0$ , nonnegative at  $a \geq 1$  (theorem of W.H.Young) are considered. Nonnegative of  $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$  is proved.

**Вступ.** Тригонометричний многочлен  $P(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$  називається *невід’ємним* в  $[c, d]$ , якщо  $P(\theta) \geq 0$  ( $c \leq \theta \leq d$ ).

**Теорема Фейсра – Ріса.** Для невід’ємності косинус – многочлена

$$P(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$$

у  $[-\pi, \pi]$  необхідно і достатньо існування параметрів  $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$  таких, що

$$a_0 = \sum_{k=0}^n x_k^2; \quad a_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i x_{k+i} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Існують різні причини цікавитися проблемою конструювання і вивчення властивостей невід’ємних тригонометричних многочленів. Історично одним з перших прикладів невід’ємного ряду Фур’є було ядро Пуассона. (також Гаус, ненадруковане [7])

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k\theta = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2}, \quad (-1 < \rho < 1). \quad (1)$$

Нехай  $\rho \rightarrow 1$  в (1). Тоді отримуємо формальний тригонометричний ряд

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\theta$$

для дельта - функції Дірака  $\delta(\theta)$ . Тепер є класичною формула Пуассона

$$f(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi$$

і в теорії узагальнених функцій строго доводиться, що досить "хороші" функції можуть бути представлені як згортки з певними ядрами.

Розглянемо властивості цих ядер. З вище сказаного інтуїтивно ясно, що вони повинні наслідувати деякі з властивостей ядра Пуассона і дельта - функції Дірака. Отже, парне позитивне ядро є будь-яка послідовність  $k_n(\theta)$  парних, невід'ємних, неперервних  $2\pi$  - періодичних функцій, таких що  $k_n(\theta)$  нормалізовані умовою

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(\theta) d\theta = 1$$

і рівномірно збігаються до нуля на будь-якій замкнутій підмножині  $[-\pi, \pi]$ .

Наскільки відомо, Фейєр [1] був першим, хто усвідомив викладені вище факти приблизно біля 1900 р. Він довів, що косинус - многочлени

$$F_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos k\theta$$

є невід'ємними, і встановив їх компактну форму  $F_n(\theta) = \frac{\sin^2(n+1)\frac{\theta}{2}}{(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}}$ .

З цього безпосередньо випливає, що  $F_n(\theta)$  є ядром сумування. Відомо, що відповідна згортка

$$F_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) f(x - \theta) d\theta$$

співпадає з *середнім по Чезаро* ряду Фур'є функції  $f(x)$ ,

$$F_n(f, x) = \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)}{n+1}.$$

Тут  $S_n(f, x)$  означає n - ту частинну суму ряду Фур'є функції  $f(x)$ .

Інша причина, з якої Фейєр цікавився невід’ємними тригонометричними многочленами – це *явище Гіббса*. Ми відсилаємо читача до класичної книги [Zygmund 4, Глава 9] і змістовного огляду Е. Hewitt і Р. Е. Hewitt [5] для більш детальної інформації на цю тему. Цей інтерес Фейєра приводить його в 1910 р. до здогадки, що частинні суми

$$\sum_{k=1}^n (1/k) \sin k\theta$$

синус - ряду Фур’є функції  $(\pi - \theta)/2$ , продовженої як непарна функція, невід’ємні в  $(0, \pi)$ .

Джексон і Гронуолл довели гіпотезу Фейєра незалежно, з різницею в декілька місяців. Нині нерівність

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin k\theta, \quad (0 < \theta < \pi)$$

називається *нерівністю Фейєра - Джексона - Гронуолла*.

Продовжуючи ці дослідження У. Х. Янг в 1913 р. [6, т.2, с. 92] встановив аналогічний факт для косинус - многочленів:

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cos k\theta \geq 0, \quad [-\pi < \theta < \pi].$$

**Постановка задачі.** Зрозуміло, що в розвиненні невід’ємного косинус - многочлена

$$P(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$$

$a_0 > 0$  і при збільшенні вільного члена  $a_0$  значення  $P(\theta)$  залишається невід’ємним. Тому деякий інтерес становить знаходження найменшого значення  $a_0 = E(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , при якому  $P(\theta)$  є невід’ємним. Будемо говорити, що відповідний косинус – многочлен має *нормальну форму*. Метою статті є дослідження нормальної форми многочленів Янга

$$Y_n(a_0) = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cos k\theta. \quad (2)$$

**Розв’язок задачі.** Ми розглянемо многочлени (2) при початкових значеннях  $n$  і використовуючи відповідний процес математичного моделювання [2], побудуємо невід’ємні многочлени Янга зі значеннями  $a_0 < 1$ . Для цього

використаємо теорему Фейєра - Ріса і будемо виконувати випадковий пошук у просторі параметрів  $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Випадковий пошук був здійснений у середовищі «Matlab2010». Сформулюємо отримані результати.

1.  $n = 1$ . Зрозуміло, що  $E\left(\frac{1}{1}\right) = 1$ .

2.  $n = 2$ . Легко перевірити, що  $E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ .

3.  $n = 3$ . Більш детальний аналіз встановлює, що  $E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}$ .

При  $n \geq 4$  знаходження точного значення  $E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}\right)$  виглядає проблематичним, тому є цікавими його оцінки.

4.  $n = 4$ . Розглянемо в просторі параметрів точки  $P_1(1,1,1,1)$ ,  
 $P_2(1,0,-1,0,1)$ ,  $P_3(1,1,1,0,0)$ ,  $P_4(0,1,0,0,1)$ ,  $P_5(0,10,0,-1)$ .

Невід'ємними косинус – многочленами, що відповідають їм за теоремою Фейєра – Ріса, є

$$T_1 = 5 + 8 \cos x + 6 \cos 2x + 4 \cos 3x + 2 \cos 4x;$$

$$T_2 = 3 - 4 \cos 2x + 2 \cos 4x; \quad T_3 = 3 + 4 \cos x + 2 \cos 2x;$$

$$T_4 = 2 + 2 \cos 3x; \quad T_5 = 2 - 2 \cos 3x.$$

Безпосередньо перевіряється, що  $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$  є наступна лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами многочленів  $T$ :

$$Y_4\left(\frac{4}{5}\right) = 0,0833T_1 + 0,0417T_2 + 0,0833T_3 + 0,0021T_4 + 0,0021T_5.$$

Звідси, косинус – многочлен  $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$  – невід'ємний, і тому

$$E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \leq \frac{4}{5}.$$

5.  $n = 5$ . Розглянемо в просторі параметрів точки  $P_1(0,1,1,1,0,-1)$ ,  
 $P_2(1,1,1,1,1,1)$ ,  $P_3(0,1,1,-1,-1,0)$ ,  $P_4(1,0,-1,0,1,1)$ ,  $P_5(1,-1,0,0,0,1)$ ,  
 $P_6(1,-1,-1,0,1,1)$ .

Невід'ємними косинус – многочленами, що відповідають їм за теоремою Фейєра - Ріса є

$$T_1 = 4 + 4 \cos x - 2 \cos 3x - 2 \cos 4x;$$

$$T_2 = 6 + 10 \cos x + 8 \cos 2x + 6 \cos 3x + 4 \cos 4x + 2 \cos 5x ;$$

$$T_3 = 4 + 2 \cos x - 4 \cos 2x - 2 \cos 3x ;$$

$$T_4 = 4 + 2 \cos x - 4 \cos 2x - 2 \cos 3x + 2 \cos 4x + 2 \cos 5x ;$$

$$T_5 = 3 - 2 \cos x - 2 \cos 4x + 2 \cos 5x ;$$

$$T_6 = 5 + 2 \cos x - 4 \cos 2x - 4 \cos 3x + 2 \cos 5x .$$

Безпосередньо перевіряється, що  $Y_5 \left( \frac{4}{5} \right)$  є наступна лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами многочленів  $T$  :

$$Y_5 \left( \frac{4}{5} \right) = 0,0315T_1 + 0,0815T_2 + 0,0278T_3 + 0,0019T_4 + 0,0083T_5 + 0,0833T_6 .$$

Звідси, косинус – многочлен  $Y_5 \left( \frac{4}{5} \right)$  – невід'ємний, і тому

$$E \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right) \leq \frac{4}{5} .$$

6.  $n = 6$  Розглянемо в просторі параметрів точки  $P_1 (0,1,1,1,0,-1,-1)$ ,

$$P_2 (1,1,1,1,1,1), P_3 (0,1,1,-1,-1,0,-1), P_4 (1,0,-1,0,1,1,0),$$

$$P_5 (1,-1,0,0,0,1,0), P_6 (1,-1,-1,0,1,1,1), P_7 (0,0,0,1,-1,0,-1) .$$

Невід'ємними косинус – многочленами, що відповідають їм за теоремою Фейєра - Ріса є

$$T_1 = 5 + 6 \cos x - 4 \cos 3x - 4 \cos 4x - 2 \cos 5x ;$$

$$T_2 = 7 + 12 \cos x + 10 \cos 2x + 8 \cos 3x + 6 \cos 4x + 4 \cos 5x + 2 \cos 6x ;$$

$$T_3 = 5 + 2 \cos x - 2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 5x ;$$

$$T_4 = 4 + 2 \cos x - 4 \cos 2x - 2 \cos 3x + 2 \cos 4x + 2 \cos 5x ;$$

$$T_5 = 3 - 2 \cos x - 2 \cos 4x + 2 \cos 5x ;$$

$$T_6 = 6 + 4 \cos x - 2 \cos 2x - 4 \cos 3x - 2 \cos 4x + 2 \cos 6x ;$$

$$T_7 = 3 - 2 \cos x + 2 \cos 2x - 2 \cos 3x .$$

Безпосередньо перевіряється, що  $Y_6 \left( \frac{4}{5} \right)$  є наступна лінійна комбінація з невід'ємними коефіцієнтами многочленів  $T$  :

$$Y_6 \left( \frac{4}{5} \right) = 0,0164T_1 + 0,0629T_2 + 0,0215T_3 + 0,0114T_4 + \\ + 0,0006T_5 + 0,0204T_6 + 0,00004T_7 .$$

Звідси, косинус - многочлен  $Y_6 \left( \frac{4}{5} \right)$  – невід'ємний, і тому

$$E\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right) \leq \frac{4}{5}.$$

**Висновки.** Розгляд многочленів Янга  $Y_4\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_5\left(\frac{4}{5}\right)$ ,  $Y_6\left(\frac{4}{5}\right)$  дозволяє припустити, що  $Y_n\left(\frac{4}{5}\right)$  ( $n \geq 4$ ) є невід'ємним косинус - многочленом. Це припущення сильніше за теорему Янга, яка стверджує лише, що  $Y_n(1)$  – невід'ємний косинус - многочлен.

Автор вдячний проф. О.Л. Григор'єву за змістовні зауваження.

**Список літератури:** 1. *L. Fejer.* Sur les fonctions bornees et integrables // C.R.Acad. Sci. Paris. – 1900.– №133.– С.984 - 987. 2. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа.– М.: Физматгиз. – 1986.–741с. 3. *L. Fejer.* Uber trigonometrische Polynome // J. Reine Angev. Math. – 1915. – № 146.–С 55-82. 4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, Т.2. – М.: Мир. – 1965. – 615 с. 5. *E.Hewitt and R.E.Hewitt,* The Gibbs - Wilbracham phenomenon: an episode in Fourier analysis // Arch Hist. Exact Sci. – 1979. - № 21. – С 129 - 160. 6. *Г. Полюа, Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, Ч.2. – М.: ГИТТИ.– 1956.– 432 с. 7. *Dimitar K. Dimitrov.* Extremal Positive Trigonometric Polynomials // Approximation theory. – A volume dedicated to Blagovest Sendov.–2002.– pp. 1-24.

Надійшла до редколегії 11.03.2011

УДК 539.1

**В.А. ВАНИН**, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»;

**А.А. ГРИГОРЬЕВ**, аспірант, НТУ «ХПИ»

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ СРЕДЫ

Вивчено поле пришивдшень, що виникає в пружнопластичному гетерогенному середовищі Максвелла при його кристалізації. Показано, що неоднорідне розширення цього середовища призводить до взаємного тяжіння частинок (центрів кристалізації) та виникненню силового поля, подібного до гравітаційного поля Ньютона.

Изучено поле ускорений, возникающее в упругопластической гетерогенной среде Максвелла при её кристаллизации. Показано, что неоднородное расширение этой среды приводит к взаимному притяжению частиц (центров кристаллизации) и возникновению силового поля, подобного гравитационному полю Ньютона.

The field of the accelerations which originate in the elasto-plastic heterogeneous Maxwell environment during its crystallization is examined. It is shown that an uneven expansion of this environment causes a mutual attraction of the fragments (centers of the crystallization) and an origination of a field of force which is similar to the gravitational field of Newton.

**Введение и постановка задачи. Среда Максвелла.** Известно, что кроме ядерной и квантовой физики *Лев Ландау* работал над теорией гистерезисных свойств материалов, а *Альберт Эйнштейн* – над динамической теорией гетерогенных сред (см., напр., учебник [1, с.361]). *Анри Пуанкаре* считал (см. монографию [2]), что все физические процессы являются проявлениями нелинейных упругих деформаций, происходящих внутри твёрдого однородного и изотропного (напр., поликристаллического) тела. В развитие этих исследований в наших статьях [3,4] предпринята попытка объяснить происхождение и свойства электромагнитного поля на основе анализа особенностей упругопластического расширения активной механической среды, названной *средой Максвелла*.

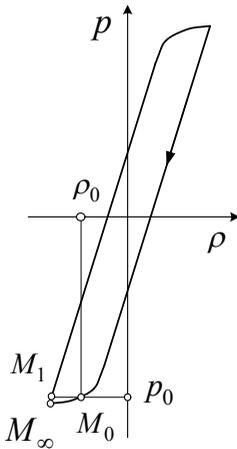


Рисунок 1

На рис.1 показана типичная гистерезисная кривая, описывающая зависимость давления  $p$  от плотности  $\rho$  в частичном цикле деформации некоторого твёрдого материала. Предполагается, что в начальный момент времени образец материала (имеющий, напр., шарообразную форму, рис. 2, и значительные размеры) был сжат внешней силой давления, в результате чего в нём возникли пластические деформации. Силу сжатия уменьшили, и в материале начались продольные колебания, которые, в силу значительных размеров шара, имеют малую частоту. Стрелка на рис.1 определяет направление колебаний для этого *частичного цикла*.

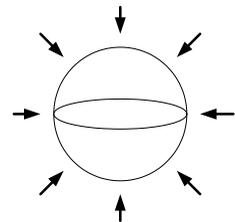


Рисунок 2

В соответствии с известными космологическими моделями расширения Вселенной, в работах [3,4] было принято, что в настоящий момент времени материал имеет давление  $p_0 > 0$ , плотность  $\rho_0$  и находится в точке  $M_0$  пологого участка гистерезисной кривой. При этом давлению  $p_0$  отвечает также и точка  $M_1$  (см. рис.1). Плотность материала  $\rho_1$  в этой точке несколько ниже, чем  $\rho_0$ , но крутизна гистерезисной кривой значительно выше (на порядки). Поэтому скорость звука  $a_1$  и, особенно, коэффициент сжимаемости  $\alpha_1$  оказываются значительно больше величин  $a_0$  и  $\alpha_0$ . Удобно говорить, что точка  $M_0$  отвечает пластичной, а точка  $M_1$  – твёрдой фазе материала, хотя эти определения с физической точки зрения не совсем корректны.

В точке  $M_\infty$  расширение среды завершается переходом всей пластичной фазы в твёрдую, и эту точку цикла естественно связывать с *концом света*. При переходе части материала по пути  $M_0M_\infty M_1$  гистерезисной кривой выделяется кинетическая энергия, поэтому данная среда (до наступления конца света) является активной.

В статье [4] было высказано дополнительное предположение, что *указанный переход является неотъемлемым атрибутом существования материи* (то есть, массы и энергии), и, по этой причине, в моделируемой среде уже присутствует примесь из частиц твёрдой фазы, имеющих, напр., форму упругих тонкостенных оболочек (рис.3,  $\delta R \ll R_{об}$ ),

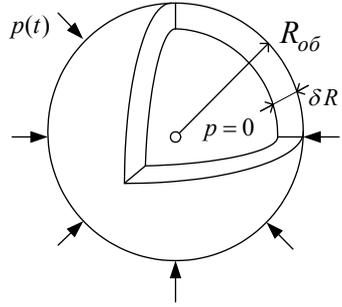


Рисунок 3

заполненных неупругой массой. Показано, что колебания давления  $p$  для такой среды описываются уравнением Клейна – Гордона

$$a_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - (\omega_{np} / a_{np})^2 p, \quad (1)$$

где формулы для круговой частоты  $\omega_{np}$  и скорости звука  $a_{np}$  получены в [4],

$$\omega_{np} \approx \sqrt{\varepsilon} \cdot a_{np} / R_{об}, \quad a_{np} = \sqrt{K_0 / \rho_0},$$

$\varepsilon$  – объёмная доля примеси,  $\rho_0, K_0$  – плотность и модуль объёмного сжатия упругой среды (для точки  $M_0$ , рис.1). Если считать оболочку пустой и учесть её внешнюю приведенную массу

$$M_{np} = 0.5 \rho \cdot \iiint_{r > R_{об}} (R_{об} / r)^4 dV = 2\pi \cdot R_{об}^3 \cdot \rho,$$

то формула для этой частоты изменится и примет вид  $\omega_{np} \approx \sqrt{3\varepsilon} \cdot a_{np} / R_{об}$ .

В обоих случаях  $\omega_{np}$  надо рассматривать как результат усреднения соответствующего эффекта для оболочек разного размера (и различного типа).

На указанной частоте поле давления становится однородным,

$$p(t) = p_0 + p_* \cdot \sin(\omega_{np} \cdot t), \quad p_0 = const, \quad p_* = const,$$

и это пульсирующее поле поддерживает синфазное поле поперечных колебаний, описываемое (в гауссовой системе единиц) уравнениями Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t, & \text{div } \vec{E} = 4\pi \cdot q, \\ \text{rot } \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}, & \text{div } \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где волновые функции  $\vec{E}$  и  $\vec{H} / c$  отвечают амплитудам колебаний плотности для векторов ускорения и угловой скорости закручивания упругой среды,  $q$ ,

$\vec{J}$  – это плотности амплитуды колебаний свободного заряда и тока;  $c$  – скорость распространения плоской (или сферической) волны поперечных колебаний (то есть, скорость света). Для лабораторной системы координат, движущейся вместе со средой, величины  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяют силу Лоренца

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot c^{-1} \cdot \vec{v} \times \vec{H}, \quad (3)$$

которая воздействует на электрический заряд  $Q$ , имеющий скорость  $\vec{v}$ .

В данной статье мы продолжим анализ гетерогенной среды Максвелла и, используя потенциальные возможности разработанной математической модели, проясним физическую сущность электрических зарядов. После чего покажем, что здесь наблюдается и другой (не электромагнитный) тип взаимодействия между частицами, который приводит к возникновению силового поля притяжения, подобного гравитационному полю Ньютона.

**Заряды среды Максвелла.** Указанная среда устроена таким образом, что колебания давления происходят без изменения её плотности. Заметим, что эффект не сжимаемости достигается за счёт изменения свободного объёма, находящегося внутри упругих оболочек примеси. Расширение пластической фазы компенсируется соответствующим сжатием упругих оболочек, а сжатие фазы – синхронным расширением оболочек. Такой порядок поддерживается в большей части точек, занятых средой Максвелла; эту часть естественно связать с понятиями пространства, вакуума или эфира.

Поясним, что в этом случае является зарядом. Пусть в некоторой замкнутой области  $\Omega$  среды Максвелла происходят интенсивные колебания давления с максимальной амплитудой, близкой к величине  $p_{\max} = p_* - p_\infty$ . Тогда часть материала совершает фазовый переход по пути  $M_0 M_\infty M_1$  (рис.4), и выделяется кинетическая энергия. Вследствие этого синхронный порядок работы оболочек в этой области нарушается, и эффект не сжимаемости пропадает.

Будем считать, что внутри шара  $\Omega: \{r \leq R\}$ , где  $r$  – расстояние от точки до центра шара, в результате частичной дезорганизации синхронной работы оболочек уравнение (1) принимает вид

$$a_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - (\omega_{np}^2 / a_{np}^2 - \omega^2 / c^2) \cdot p, \quad (4)$$

где величина  $\omega > 0$  имеет физический смысл круговой частоты рассогласо-

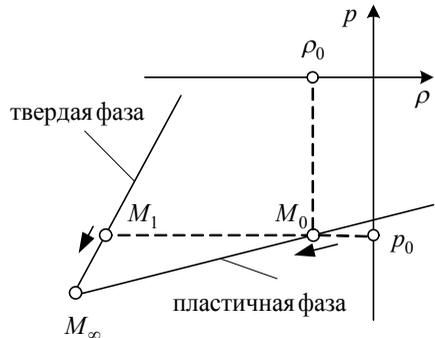


Рисунок 4

вания колебаний. Уравнение (4) имеет известное ограниченное решение

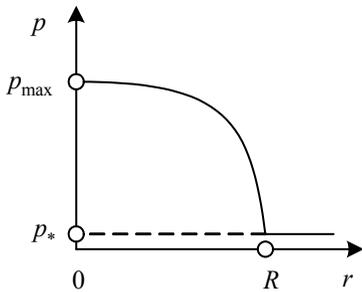


Рисунок 5

$$p(r, t) = p_{\max} \cdot \frac{\sin((\omega/c)r)}{(\omega/c)r} \cdot \sin(\omega_{np}t), \quad (5)$$

график соответствующей амплитудной функции показан на рис.5.

В результате этих колебаний на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  возникают гармонические пульсации радиальной скорости и ускорения среды. Равенство

$$(\omega/c) \cdot R \approx \pi$$

определяет радиус  $R$  области  $\Omega$ .

Пусть формула (5) отвечает изменению давления внутри положительного

заряда (источника). Тогда равенство

$$p(r, t) = -p_{\max} \cdot \frac{\sin((\omega/c) \cdot r)}{(\omega/c) \cdot r} \cdot \sin(\omega_{np} \cdot t)$$

описывает изменение давления внутри отрицательного заряда (стока). Источник и сток работают в противофазе, имеют одинаковую производительность, поэтому эфир остаётся несжимаемым.

Пульсации ускорения  $\vec{a}(R, t)$  (силы инерции) передаются через границу  $\partial\Omega$ , и их амплитуда оказывается пропорциональной вектору  $\vec{E}$  напряжённости электрического поля, которое изменяется в эфире по его законам. Отметим важнейшую особенность описываемого процесса: *расширение или сжатие среды внутри заряда остаются внутренними*, то есть они, главным образом, происходят за счёт изменения объёма пустотелых оболочек примеси. Отсюда, в частности, следует, что при положительном давлении  $p(0, t)$  ускорение  $\vec{a}(R, t)$  направлено к центру заряда, а не от центра, как это обычно бывает в механике сплошной среды.

Именно благодаря этому свойству одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Так, если считать все заряды неподвижными, то поле  $\vec{E}$  оказывается потенциальным, и описывается законом Кулона.

Поясним направление действия силы Кулона на следующем примере. Два положительных заряда занимают переменные объёмы

$$Q_1(t) = Q_{0,1} - Q_{*,1} \cdot \sin \omega_{np}t; \quad Q_2(t) = Q_{0,2} - Q_{*,2} \cdot \sin \omega_{np}t$$

и на том полупериоде, где  $\sin \omega_{np}t > 0$ , они притягиваются, а где  $\sin \omega_{np}t < 0$  – отталкиваются. Мгновенное значение силы, действующей на второй заряд в направлении первого заряда, определяется формулой

$$F_2 = E \cdot \sin \omega_{np}t \cdot (Q_{0,2} - Q_{*,2} \cdot \sin \omega_{np}t), \quad \text{где } E = |\vec{E}| > 0,$$

а среднее за период значение оказывается отрицательным, то есть в среднем за продолжительный промежуток времени такие заряды отталкиваются.

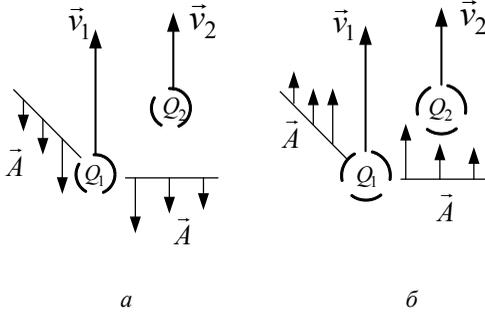


Рисунок 6

При движении зарядов кроме пульсаций ускорений возникают пульсации угловой скорости

$$\vec{\omega} = 0.5 \cdot c^{-1} \cdot \vec{H} \cdot \sin \omega_{np} t$$

закручивания среды, и связь этих полей распространяется по эфиру в соответствии с уравнениями Максвелла (2).

Пусть область  $\Omega$  содержит заряд  $Q$  и движется со скоростью  $\vec{v}$  относительно среды. Тогда с учётом ускорения Кориолиса (см. учебник [5, с.105])

$$\vec{a}_K = 2\vec{\omega} \times \vec{v} = c^{-1} \cdot \vec{H} \times \vec{v} \cdot \sin \omega_{np} t$$

сила, действующая на этот заряд, описывается формулой (3), то есть в известном электродинамическом равенстве (см., напр., [6, с. 439])

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - c^{-1} \cdot \partial \vec{A} / \partial t, \quad \text{где } \vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

величина  $\vec{A}/c$  определяет переносную скорость  $\partial \vec{u}_* / \partial t$  изменения амплитуды колебаний смещения среды  $\vec{u} = \vec{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t$ , а второе слагаемое – величину  $\partial^2 \vec{u}_* / \partial t^2$  переносного ускорения.

Поясним, почему при параллельном движении положительных зарядов  $Q_1, Q_2$  со скоростями  $\vec{v}_1 \uparrow \vec{v}_2$  возникает сила притяжения Лоренца. Направления  $\vec{A}$  переносной скорости смещения среды при движении заряда  $Q_1(t)$  показаны на рис.6 (для первого полупериода – позиция а, для второго – позиция б). Пунктирными окружностями символически отмечено изменение размеров зарядов. На первом полупериоде, где  $\sin \omega_{np} t > 0$ , в районе второго заряда величина  $\vec{\omega}$  противоположна направлению магнитного поля  $\vec{H}$  в классической электродинамике, и здесь заряды отталкиваются. Но на втором полупериоде, когда заряды занимают большие объёмы, они притягиваются, и в среднем по продолжительному промежутку времени (из-за разницы объёмов) притяжение оказывается эффективнее отталкивания.

Формальная процедура усреднения действующих сил, приводящая к возникновению силы Лоренца, была проведена в работе [4].

**Стабильные частицы среды Максвелла.** Схема заряда, описанная в предыдущем пункте, может соответствовать *заряженному бозону* либо другой частице, не имеющей спина. Известно (см. [7]), что бозоны нестабильны, а все стабильные частицы (*фотон, нейтрино, электрон, протон*, и их античастицы) имеют собственный момент инерции, который называют *спином*.

В среде Максвелла таким частицам отвечают другие решения уравнения Клейна – Гордона (1).

Примем, что в цилиндрической области

$$\Omega(t) : \{ R_1 \leq r \leq R_2, z \leq c \cdot t,$$

перемещающейся вдоль оси  $Oz$  со скоростью света  $c$  (здесь  $r, \varphi, z$  – это цилиндрические координаты), по причине дезорганизации работы оболочек уравнение для давления принимает вид (4), где

$$\omega = c \cdot \lambda,$$

$\lambda > 0$  – волновое число. Тогда, как несложно проверить, решением уравнения (1) является *винтовая волна трансляции (спинор)*

$$p(r, \varphi, z, t) = p_{\max} \cdot \sin(\omega_{np} t - \lambda z - n\varphi) \cdot \eta(z - ct), \quad (6)$$

где  $n$  – целое положительное число;  $\eta(x)$  – *функция Хевисайда*.

Заметим, что решение (6) имеет непрерывные и быстро убывающие продолжения за пределы области  $\Omega(t)$ , которые описываются модифицированными функциями Бесселя  $K_n((\omega/c) \cdot r)$ ; кроме того, в уравнении (4) не учтена диссипация энергии (см. статьи [4, 8]), которая приводит к медленному затуханию волны по её длине. График амплитудной функции для случая  $n = 2$  показан на рис.6. Среднее по сечению  $z = const$  давление равняется нулю, поэтому *волна не взаимодействует с электромагнитным полем*.

В дальнейших публикациях цикла будет проведено исследование этих волн, представляющих интерес для квантовой физики, в частности,

- для теории фотонов, случай  $R_1 \approx R_2$ , спин  $S$  кольца, имеющего массу  $m$ , равен:

$$S = mR_2^2 \cdot \omega_{ep} = \hbar,$$

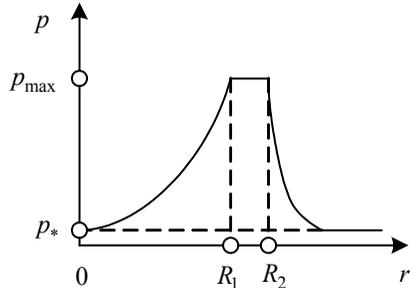


Рисунок 7

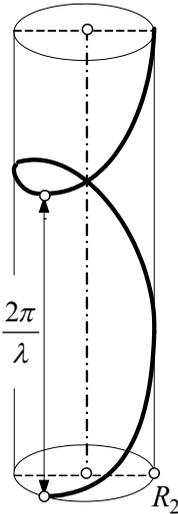


Рисунок 8

- для теории электронного нейтрино, случай  $R_1 = 0$ , спин  $S$  диска, имеющего массу  $m$ , равен:

$$S = 0.5 m R_2^2 \cdot \omega_{ep} = \hbar / 2,$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка. Но уже сейчас мы подчеркнём важную особенность нового решения: *в области  $\Omega(t)$  постоянно присутствуют точки, для которых*

$$p(r, \varphi, z, t) = p_\infty.$$

Указанное множество точек далее будем именовать *ядром частицы*.

Для фотона в каждый фиксированный момент времени  $t$  эти точки образуют винтовые линии, показанные на рис.8, а для нейтрино они лежат на поверхности геликоида. При изменении времени указанные ядра вращаются с угловой скоростью  $\omega_{ep} = (\omega_{np} - \omega) / n$  и перемещаются вдоль оси вращения со скоростью света.

В точках ядра, как уже указывалось выше, происходит фазовый переход, который сопровождается выделением кинетической энергии  $\delta T$  и расширением пластической фазы внутрь оболочек, что, в свою очередь, приводит к некоторому дополнительному снижению давления на величину  $\delta p \sim \delta T$ .

*В результате, среднее значение давления в области  $\Omega(t)$  оказывается отрицательным и не изменяется с течением времени.*

Таким же свойством обладают решения, описывающие *стабильные фермионы*, которые имеют *массу покоя* (напр., электрон и протон); останавливаться на этих вопросах подробнее в данной публикации мы не будем.

Выделившаяся в ядре частицы кинетическая энергия  $\delta T$  является её *полной энергией*; она тратится на поддержание стабильности частицы и создаваемых ею полей. В том числе и на поддержание отрицательного давления  $\delta p$  в ядре частицы и постоянный приток среды в это ядро, что, как мы покажем далее, служит причиной возникновения силового поля, подобного гравитационному полю Ньютона.

**Теории гравитации от Кеплера до Эйнштейна.** Для объяснения существования электромагнитного поля в работах [3,4] авторам пришлось наделять эфир теми свойствами, которыми обладает твёрдый материал, испытывающий упругопластические деформации. Далее мы перейдём к современным моделям гравитационного поля и, в итоге, придём к тому же выводу.

В этом и следующем пунктах мы систематизируем некоторые исторические факты, которые исследователи развития науки относят к разряду хрестоматийных и обычно освещают в энциклопедиях.

Уже в начале 17-го столетия, после разрушения древней системы представлений об устройстве мира, построенной *Аристотелем*, и отказа от хрустальных сфер *Птоломея*, перед учёными встал вопрос: что удерживает пла-

неты на их орбитах? Было ясно, что это должна быть какая-то сила притяжения, но было непонятным, какую она имеет природу и структуру.

История науки сберегла несколько заслуживающих внимания вариантов ответа на этот вопрос.

Первый вариант решения проблемы был предложен ещё *Иоганном Кеплером*. Опираясь на первые работы по магнетизму, выполненные *Уильямом Гильбертом*, Кеплер предположил, что причиной притяжения планет к Солнцу является магнетизм. Учитывая известный факт размещения всех планет в одной плоскости, Кеплер считал, что магнитная сила в основном действует именно в этой плоскости и убывает обратно пропорционально расстоянию. Последнее утверждение вступило в противоречие с законом всемирного тяготения, открытого Ньютоном, и поэтому после окончательного признания новой (ньютоновской) механики магнитная теория тяготения была отброшена как несостоятельная.

Такая же участь ожидала и теорию гравитации, которую в 1644-м году обнаружил *Рене Декарт*. Отличие этой теории от абстрактной теории магнетизма Кеплера состояла в том, что указывались конкретные источники силы – вихри, которые возникали в специальной жидкой субстанции (*пленуме*), заполняющей, по убеждению Декарта, весь мир.

Показательно, что *Исаак Ньютон* не высказывал никаких допущений относительно природы открытой им универсальной гравитационной силы. Эту работу, вместо него, но позднее, выполнил швейцарский физик *Жорж Лесаж*, и в 1874 - м году разработал первую теорию гравитации, которая не имела противоречий с приобретенным на то время опытом.

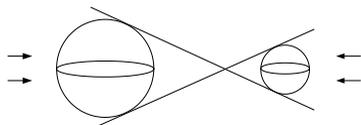


Рисунок 9

В соответствии с представлениями Лесажа мировое пространство заполнено мелкими твёрдыми частицами, которые летят с приблизительно одинаковой и очень высокой скоростью, а их поток имеет одинаковую плотность по всем направлениям. Сталкиваясь с атомами вещества, частицы отскакивали от них и передавали некоторый импульс. Одно тело создавало частично проницаемый экран для процесса бомбардировки другого (рис.9), и в результате возникал точно такой же эффект взаимодействия, который предсказывался законом всемирного тяготения Ньютона. В частности, сила тяготения изменялась с расстоянием по закону обратных квадратов.

Заметим, что частицы, которые использовал в своей теории Лесаж, после знакомства со свойствами нейтрино (см. учебник [7]) уже не кажутся фантастическими. Напомним, что существование нейтрино сначала было предсказано *Энрико Ферми* теоретически, а затем через небольшой промежуток времени эти частицы были зарегистрированы в эксперименте. Что касается новых виртуальных частиц современной физики – *гравитонов*, обмен которых

ми, согласно существующим теориям, приводит к гравитационному взаимодействию тел, то их экспериментальная регистрация уже явно запаздывает, и это порождает сомнения в их реальном существовании.

Теория Лесажа имела один свободный параметр – скорость частиц, и каждый из его последователей выбирал её значение по-своему. *Пьер Лаплас*, например, считал, что скорость этих частиц примерно в миллион раз больше скорости света. Поэтому в теории гравитации Лапласа скорость распространения импульса, который выполняет взаимодействие между телами, в миллион раз больше скорости света. Теория Лапласа господствовала в науке до начала 20-го столетия. Что касается Ньютона, то он считал, что гравитационное взаимодействие происходит мгновенно – потому что именно это обстоятельство подтверждается опытом. В дальнейшем последователи и оппоненты Ньютона (в том числе и *Альберт Эйнштейн*) затратили много усилий, чтобы найти другие объяснения этому важнейшему экспериментальному факту. В теории гравитационного поля, разработанной Эйнштейном, этот факт подтверждается только лишь для равномерно движущихся тел; при этом сферические (или плоские) гравитационные и электромагнитные волны в пустом пространстве распространяются с одинаковыми скоростями.

**Принципы относительности Маха и Эйнштейна.** Австрийский физик и философ *Эрнст Мах*, которого *Альберт Эйнштейн* считал идейным учителем, сформулировал свой принцип относительности, где инертность тела объяснялась его гравитационным взаимодействием с отдалённой материей (дальними звёздами). Рассуждения Маха сводились к следующему:

- известно, что изменение скорости  $\vec{v}$  движения материальной точки массы  $m$  описывается уравнением

$$m \cdot d\vec{v} / dt = \vec{F} ;$$

- в этом уравнении равнодействующая сила  $\vec{F}$  определяет действие всех известных факторов, источники которых расположены вблизи данной точки;
- следовательно, сила  $\vec{F}$  не учитывает возможного влияния дальних источников (отдалённых звёзд);
- единственной известной силой, действующей на очень больших расстояниях, является сила гравитации;
- следовательно, сила инерции  $m \cdot d\vec{v} / dt$  – это равнодействующая сил гравитации между материальной точкой и удалёнными звёздами.

Таким образом, если поверить Маху, то получается, что инерция и гравитация – это разные проявления одного и того же физического явления. Эйнштейн, по его собственному признанию (см. книгу *Вольфганга Паули* [2]), при создании общей теории относительности так и не смог полностью реализовать принцип относительности Маха, но взял из него главное – равенство инерционной и гравитационной массы. При этом *Эйнштейн рассматривал гравитацию как релятивистский эффект, вызванный расширением про-*

странства, но его непростое объяснение механизмов функционирования этой связи базировалось на тензорных уравнениях, описывающих изменение кривизны пространства, и было чисто формальным.

В теории Эйнштейна главенствующую роль играет принцип равенства скорости света во всех инерционных системах отсчёта, который оправдывал отрицательный результат опытов *Майкельсона* и *Морли* по определению скорости эфирного ветра, проведенных в 1887 году. Из этого принципа, в частности, следовало *совпадение скорости распространения гравитационных и электромагнитных волн*, что противоречило теории Лапласа. Американский физик *Дейтон Миллер* в 1925 году усовершенствовал схему интерферометра Майкельсона и повысил его чувствительность в 3 раза. После чего он повторил опыты в гористой местности (обсерватория *Маунт – Вилсон*, 1830 метров над уровнем моря), где наблюдал долгожданное смещение интерференционных картин; в 1929 году к этим исследованиям присоединился Майкельсон. Учёные установили (см. статьи [10,11]), что скорость  $\vec{v}$  эфирного ветра на указанной высоте изменялась в диапазоне 6...10 км/с, а его направление было перпендикулярно плоскости, где обращаются планеты Солнечной системы (эта плоскость параллельна диску Галактики, рис.10). Аналогичные результаты на интерферометре другой конструкции в 1998 – 2004 годах получены харьковским физиком *Юрием Галаевым* (описаны в брошюре [12]).

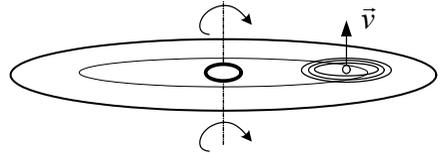


Рисунок 10

Таким образом, в современной физике вопрос существования эфирного ветра, как и в конце 19-го столетия, опять считается открытым (см. обзор [13]), и это положение позволяет разрабатывать теории гравитации, противоречащие указанному следствию из принципа относительности Эйнштейна.

Однако, как показано далее, в активной упругопластической среде Максвелла существует силовое поле, подобное гравитационному, которое *удовлетворяет упомянутому принципу*, что подтверждает правоту Эйнштейна в этом вопросе.

**Гравитация в среде Максвелла.** Любая частица этой среды, как было объяснено выше, содержит внутри себя область  $\Omega_0$  пониженного давления, в которой происходит кристаллизация пластичной фазы и её расширение внутрь пустотелых оболочек. В результате на границе  $\partial\Omega_0$  этой области возникает постоянный во времени поток среды и её ускорение к центру частицы. При малых частотах уравнение (1) для давления  $p$  становится волновым (см. [4]) и имеет вид:

$$\hat{a}_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p ,$$

где  $\hat{a}_{np}$  – скорость звука в рассматриваемой гетерогенной смеси.

За пределами частицы среднее давление  $p_0$  остаётся одинаковым для всех точек, а среда – несжимаемой. Её поперечные низкочастотные колебания описываются уравнением

$$\rho_0 \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -G_0 \cdot \text{rot rot } \vec{u} ,$$

или, что эквивалентно,

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = \Delta \vec{u} , \quad (7)$$

где  $\vec{u}$  – смещение точки среды;  $\rho_0$  – плотность среды;  $G_0$  – модуль сдвига;  $c$  – скорость света,

$$c = \sqrt{G_0 / \rho_0} .$$

Для начала анализа предположим, что все частицы неподвижны. Тогда поперечные колебания отсутствуют, но наблюдается потенциальное установившееся перемещение  $\vec{u}_{np}$  несжимаемой среды, имеющее стоки в ядрах частиц. Поле ускорений  $\vec{g}(M)$  здесь описывается уравнением Пуассона

$$\Delta \vec{g}(M) = -4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot m(M) ,$$

или известной формулой

$$\vec{g}(M) = \gamma \cdot \text{grad} \int_{R^3} \frac{m(P)}{|\overline{MP}|} dV = -\gamma \cdot \int_{R^3} \frac{m(P)}{|\overline{MP}|^3} \overline{MP} dV ,$$

где  $m(P)$  – плотность массы в точке  $P$ ,  $\gamma$  – универсальная гравитационная постоянная, для эфира  $\gamma \approx 6.7 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{сек}^2)$ .

В результате вокруг каждой частицы создаётся поле центростремительных ускорений *свободного падения*  $\vec{g}$ , изменяющееся по закону обратных квадратов. Встречаясь с другой частицей (имеющей массу  $M_0$ ), это поле создаёт *виртуальную силу притяжения*  $\vec{F} = M_0 \cdot \vec{g}$ , описываемую (для больших расстояний или для частиц сферической формы) формулой Ньютона.

Перейдём к анализу движущихся частиц, и здесь, как и для электромагнитного поля, поскольку *все частицы являются волнами трансляции для поперечных смещений*, из абсолютного ускорения  $\vec{g}$  нужно вычесть переносное ускорение и ускорение Кориолиса, вызванное перемещением и вращением лабораторной системы координат.

Заметим, что движение изолированной массы приводит к такому же изменению скоростей среды, которое для высокочастотного диапазона вызывало движение положительного электрического заряда на первом полупериоде синфазных колебаний (где  $\sin \omega_{np} t > 0$ , см. рис. 7 а). Сказанное позволяет, не повторяя выкладки, проведенные в работах [3,4,6] для анализа сплошной среды и электромагнитного поля, сформулировать следующие выводы:

- новое силовое поле имеет такую же структуру, как электромагнитное, и в лабораторной системе координат описывается формулой вида (3)

$$\vec{F} = M_0 \cdot \vec{G} + M_0 \cdot c^{-1} \cdot \vec{v} \times \vec{X}, \quad (8)$$

где  $\vec{G}, \vec{X}$  – напряжённости гравитации и гравитационной индукции,  $\vec{v}$  – скорость (пробной) массы  $M_0$  в этой же системе координат;

- напряжённости  $\vec{G}, \vec{X}$  выражаются через скалярный и векторный потенциалы  $\varphi, \vec{A}$ ,

$$\vec{G} = -\text{grad } \varphi - c^{-1} \cdot \dot{\vec{A}}, \quad \vec{X} = \text{rot } \vec{A};$$

где  $m, \vec{\kappa}$  – это плотности распределения массы и тока массы (импульса), связанные уравнением неразрывности

$$\partial m / \partial t + c^{-1} \cdot \text{div } \vec{\kappa} = 0;$$

- потенциалы  $\varphi, \vec{A}$  связаны условием Лоренца

$$\partial \varphi / \partial t + c^{-1} \cdot \text{div } \vec{A} = 0$$

и во всём пространстве удовлетворяют волновым уравнениям

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = \Delta \varphi - 4\pi \cdot m, \quad c^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = \Delta \vec{A} - 4\pi \cdot \vec{\kappa} / c, \quad (9)$$

причём вектор  $\vec{A} / c = \partial(\vec{u}_{np} + \vec{u}) / \partial t$  определяет переносную скорость движения лабораторной системы координат, относительно которой смещения упругой среды описываются уравнениями Максвелла, а вектор  $\vec{X} / c$  пропорционален угловой скорости вращения этой местной системы координат;

- напряжённости  $\vec{G}, \vec{X}$  удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{G} = -c^{-1} \partial \vec{X} / \partial t, & \text{div } \vec{G} = -4\pi \cdot m, \\ \text{rot } \vec{X} = c^{-1} \partial \vec{G} / \partial t - (4\pi / c) \vec{\kappa}, & \text{div } \vec{X} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что уравнения (9) и (10) совпадут с уравнениями электромагнитного поля, если у напряжённостей  $\vec{G}, \vec{X}$  изменить знаки. Тогда формула (8) для силы примет вид:

$$\vec{F} = -M_0 \cdot \vec{G} - M_0 \cdot c^{-1} \cdot \vec{v} \times \vec{X}. \quad (11)$$

Откуда, в частности, следует, что

- неподвижные массы или массы, движущиеся с одинаковыми скоростями, притягиваются согласно закону всемирного тяготения Ньютона;
- между массами, движущимися с одинаковыми по направлению скоростями, возникает дополнительная сила отталкивания, вызванная гравитационной индукцией.

**Гравистатика вращающихся дисков.** Далее поле напряжённостей  $\vec{G}$  будем называть *гравитационным*, а поле  $\vec{X}$  – *индукционным*. Если источники этих полей (плотности распределения масс и импульсов) не изменяются с те-

чением времени, поля являются статическими и (после перехода к единой системе физических единиц) описываются формулами вида:

$$\vec{G}(M) = \frac{\gamma_0}{4\pi} \cdot \int_{P \in R^3} \frac{m(P) \cdot \overline{PM}}{|\overline{PM}|^3} dV; \quad \vec{X}(M) = \frac{\chi_0}{4\pi} \cdot \int_{P \in R^3} \frac{\vec{\kappa}(P) \times \overline{PM}}{|\overline{PM}|^3} dV, \quad (12)$$

где 
$$\vec{F} = \vec{F}_\gamma + \vec{F}_\chi = -M_0 \cdot \vec{G} - M_0 \cdot \vec{v} \times \vec{X},$$

$\vec{F}_\gamma, \vec{F}_\chi$  – гравитационная и индукционная силы;  $\gamma_0, \chi_0$  – гравитационная и индукционная постоянные среды Максвелла, связанные равенством

$$\chi_0 = \gamma_0 / c^2.$$

Для эфира  $\gamma_0 / (4\pi) = \gamma$ , то есть  $\chi_0 \approx 9 \cdot 10^{-27} \text{ м/кг}$ .

Используя разработанную теорию, найдём, для примера, силу взаимодействия двух идентичных тонких колец  $L_1$  и  $L_2$ , имеющих равномерные погонные плотности  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Кольца вращаются с угловыми скоростями

$\omega_1, \omega_2$  вокруг общей оси  $Oz$  (рис.11).

Радиусы колец равны  $R$ , расстояние между ними  $h \ll R$ .

Сила взаимодействия  $F$  является алгебраической суммой сил  $F_\gamma$  гравитационного притяжения и  $F_\chi$  индукционного отталкивания, направленных вдоль оси  $Oz$ .

Найдём эти силы.

Для этого расположим одно из колец в плоскости  $xOy$  и определим напряжённость индукционного и гравитационного поля, создаваемого этим кольцом в точке  $M$  второго кольца.

Учтём, что вращающееся кольцо  $L_1$  создаёт ток массы  $\kappa_1 = \lambda_1 \cdot \omega_1 \cdot R$ ; в точке  $M$  он перпендикулярен плоскости  $xOz$ , следовательно

$$\vec{\kappa}_1(M) = \lambda_1 \omega_1 R \vec{j}, \quad X_y(M) = 0, \quad X_x(M) = \frac{\kappa_1 R h}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(2R^2 + h^2 - 2R^2 \cos \varphi)^{3/2}};$$

$$X_z(M) = \frac{\kappa_1 \cdot R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos \varphi) d\varphi}{(2R^2 + h^2 - 2R^2 \cos \varphi)^{3/2}}.$$

Индукционная сила действует по направлению вектора  $\vec{\kappa}_2(M) \times \vec{X}(M)$ , где  $\vec{\kappa}_2(M) = \lambda_2 \cdot \omega_2 \cdot R \cdot \vec{j}$ , и поэтому проекция  $f_\chi(M)$  плотности силы на ось  $Oz$  зависит только от компоненты  $X_x(M)$  и определяется равенством:

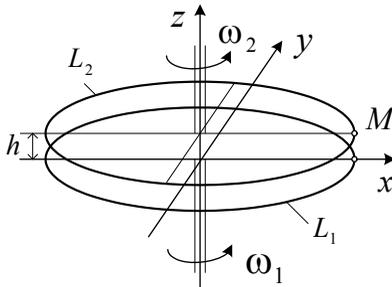


Рисунок 11

$$f_{\chi}(M) = \mu_0 \cdot \kappa_2 \cdot \vec{H}_x(M) = \frac{\chi_0 \cdot \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot h}{4\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1+k^2 - \cos \varphi)^{3/2}},$$

где  $k = h / (\sqrt{2} R)$ . Используемый в этом равенстве полный эллиптический интеграл при значениях  $k \ll 1$  с высокой точностью равен  $2\sqrt{2}/k^2$ . В результате получаем искомые формулы для плотности  $f_{\chi}$  и силы  $F_{\chi}$ :

$$f_{\chi} = \frac{\chi_0 \cdot \kappa_1 \cdot \kappa_2}{2\pi h}, \quad F_{\chi} = \frac{\chi_0 \cdot \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot R}{h} = \frac{\chi_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot R^3}{h}.$$

При вычислении силы гравитационного взаимодействия учтём, что линейные скорости зарядов  $v_1 = \omega_1 \cdot R$  и  $v_2 = \omega_2 \cdot R$  удовлетворяют условию  $|v_{1,2}| \ll c$ , где  $c$  – скорость света; иначе в формулы необходимо вносить релятивистские поправки.

Для определения напряжённости поля в точке  $M(R, 0, h)$  составим вектор  $\vec{PM} = \{R - x, -y, h\}$  и интеграл по кольцу  $L_1: \{x^2 + y^2 = R^2$ :

$$\vec{G}(M) = \frac{\gamma_0 \lambda_1}{4\pi} \int_{L_1} \frac{\vec{PM}}{|\vec{PM}|^3} dl = \frac{\gamma_0 \lambda_1 R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{R - R \cos \varphi, -R \sin \varphi, h\}}{(2R^2 + h^2 - 2R^2 \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi.$$

Плотность  $f_{\gamma}(M)$  осевой силы использует третью компоненту вектора напряжённости:

$$f_{\gamma}(M) = \frac{\gamma_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot h}{4\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot R^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+k^2 - \cos \varphi)^{3/2}}.$$

При малых значениях  $k$  для интеграла справедливо то же самое приближение, что и выше, следовательно,

$$f_{\gamma}(M) = \frac{\gamma_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{2\pi \cdot h} \text{ и } F_{\gamma} = \frac{\gamma_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{2\pi \cdot h} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{\gamma_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot R}{h}.$$

Для сравнения сил вычислим их отношение

$$\frac{F_{\chi}}{F_{\gamma}} = \frac{\chi_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot R^3}{h} \cdot \frac{h}{\gamma_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot R} = \frac{1}{c^2} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot R^2 = \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2},$$

где  $v_{1,2} = \omega_{1,2} \cdot R$  – линейные скорости зарядов;  $c$  – скорость света в вакууме.

Так, два тысяча килограммовых плоских диска, имеющих сечение  $1 \text{ см} \times 20 \text{ см}$  и средний радиус  $R = 1 \text{ м}$ , притягиваются друг к другу с силой  $F_{\gamma} \approx 10^{-3} \text{ Н}$ . При синхронном вращении этих дисков с частотой  $3.000 \text{ об/мин}$  сила притяжения убывает на величину  $F_{\chi} \approx 10^{-15} \text{ Н}$ , то есть уточняется двенадцатая значащая цифра.

Полученный результат означает, что при скоростях вращения диска, обеспечивающих его прочность на разрыв, индукционной силой можно пренебречь.

Ясно, что поскольку в это соотношение не входит величина радиуса дисков, оно остаётся справедливым и для двух протяжённых объектов, летящих параллельным или встречным курсом (рис.12).

Численное моделирование силы индукционного отталкивания между вращающимся диском и вращающимся шаром (рис.13) привело к сходному по порядку величины результату, причём, как оказалось, увеличение массы и размера шара мало влияет на результат. Объяснение этого далеко не очевидного факта дано в следующем пункте.

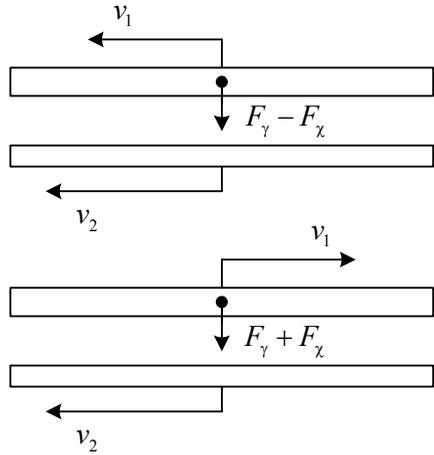


Рисунок 12

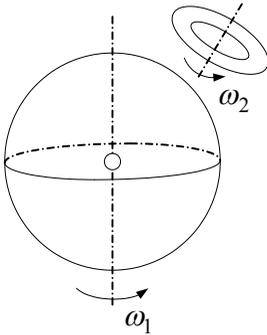


Рисунок 13

**Теорема.** Пусть гравитационное и индукционное поля, создаваемые телом  $T_1$ , являются стационарными и описываются формулами (12), причём внутри тела  $T_2$  гравитационное поле можно считать однородным. Тогда отношение индукционной и гравитационной сил, действующих на тело  $T_2$ , удовлетворяет неравенству

$$F_{\chi} / F_{\gamma} \leq v_1 \cdot v_2 / c^2,$$

где  $v_1, v_2$  – максимальные скорости движения точек первого и второго тела,  $c$  – скорость света.

*Доказательство.* Оценим величину индукции, создаваемой телом  $T_1$  в некоторой точке

$M \in T_2$ :

$$|\vec{X}(M)| \leq \frac{\chi_0}{4\pi} \int_{P \in T_1} \frac{|\vec{k}(P) \times \overline{PM}|}{|\overline{PM}|^3} dV \leq \frac{\chi_0}{4\pi} \int_{P \in T_1} \frac{|\vec{k}(P)|}{|\overline{PM}|^2} dV = \frac{\chi_0}{4\pi} \int_{P \in T_1} \frac{|m(P)\vec{v}(P)|}{|\overline{PM}|^2} dV \leq$$

$$\leq \frac{\chi_0 \cdot v_1}{4\pi} \int_{P \in T_1} \frac{m(P)}{|PM|^2} dV = \frac{\chi_0 \cdot v_1}{\gamma_0} \cdot \frac{\gamma_0}{4\pi} \int_{P \in T_1} \frac{m(P)}{|PM|^2} dV = \frac{v_1}{c^2} \cdot |\vec{G}(M)|.$$

Теперь оценим величину индукционной силы, действующей на тело  $T_2$ :

$$F_\chi \leq \int_{M \in T_2} |\vec{v}(M) \times \vec{X}(M)| m(M) dV \leq v_2 \int_{M \in T_2} X(M) m(M) dV \leq \leq \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \cdot |\vec{G}(M)| \int_{M \in T_2} m(M) dV = \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2} \cdot F_\gamma.$$

*Теорема доказана.* Пример вращающихся дисков показывает, что получить более жёсткую априорную оценку для отношения этих сил невозможно.

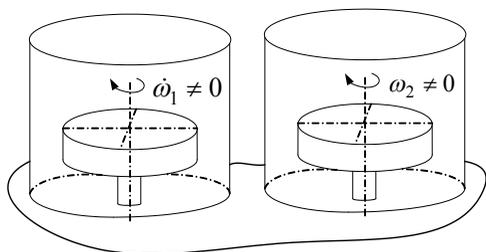


Рисунок 14

**Гравитационная индукция: миф или реальность?** Наличие гравитационной индукции предсказывается не только теорией гравитации, разработанной для среды Максвелла, но и общей теорией относительности Эйнштейна, где в рамках используемой математической модели возникают гравитационные волны, сходные с электромагнитными. Однако существование этих волн не имеет однозначного экспериментального подтверждения.

Гравитационное поле протона почти в  $10^{40}$  раз слабее электрического поля, поэтому гравитация существенна только для больших электрически нейтральных областей (небесных тел), а в лаборатории обнаружить гравитационную индукцию трудно.

Схема эксперимента, в котором её можно выявить, показана на рис.14. Из стеклянных колпаков выкачали воздух; опору левого диска подсоединили к приводу высокооборотного вращения, в свободной опоре правого диска минимизировали трение. В отличие от опытов по электромагнетизму (см. [14, с.230]), эти диски не несут электрического заряда. Если эфир действительно является средой Максвелла, то при ускоренном вращении левого диска начинает вращаться правый. Известно, что в 1960-ые годы такие эксперименты в нашей стране уже проводились, однако их положительные результаты официальной наукой признаны не были. Но даже если признать, что эта индукция действительно существует, то в инженерных расчётах, как показано выше, её можно пренебрегать.

**Перспективы дальнейших обобщений: гравитационный диполь и масса поля.** При сходстве гравитационного и электрического полей между

ними существуют два существенных различия:

- все источники гравитации имеют один знак (по терминологии теории поля это *стоки*, то есть они отрицательные);
- электрический заряд квантуется и не зависит от скорости движения, а масса может принимать любые значения и зависит от скорости частицы.

Благодаря первому свойству *не происходит гравитационной поляризации среды и вещества*, и гравитационное поле может свободно проникать внутрь массивных тел.

Чтобы пояснить причину возникновения этого различия мы снова обратимся к анализу модели среды Максвелла (рис.1) и той связи между низкочастотными и высокочастотными продольными колебаниями упругой среды, о которой шла речь в статье [4]. Тогда следует признать, что давление  $p_0$  не является постоянной величиной, а медленно изменяется во времени, напр., по гармоническому закону

$$p_0 = p_{0,0} + p_{0,1} \cdot \sin \omega_0 t .$$

В случае эфира круговая частота  $\omega_0$  составляет  $10^{-17}$  1/сек и менее, то есть период  $T_0$  этих колебаний исчисляется десятками миллиардов лет.

Равномерное поле колебаний давления при определённых условиях, которые мы будем обсуждать в отдельной публикации, способно создать новое низкочастотное синфазное поле, являющееся полным аналогом электромагнитного. В нём будут свои положительные и отрицательные заряды, силовые поля которых будут вновь описываться уравнениями Максвелла, а также свои частицы и их гравитационное взаимодействие.

На промежутке времени  $T \ll T_0$  и в области  $\Omega_1$ , диаметр которой составляет десятки миллиардов парсек, давление  $p_0$  убывает и находится вблизи минимума гистерезисной кривой (рис.1). Похоже на то, что указанное место и время соответствует процессу *упругопластического расширения*, которое происходит в ядре некоторой заряженной Частицы из мира низкочастотных поперечных колебаний.

В то же самое время, но в другом месте пространства, существует Частица  $\Omega_2$ , которая испытывает *упругопластическое сжатие* и находится в верхней части гистерезисной диаграммы. Фазовый переход (уплотнение) материала при сжатии создаёт внутри частицы  $\Omega_2$  такое же гравитационное поле взаимного притяжения масс, как и внутри частицы  $\Omega_1$ .

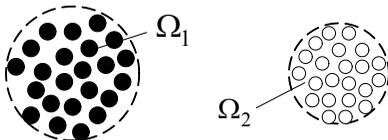


Рисунок 15

Но если усреднить процесс взаимодействия по промежутку времени  $T \gg T_0$ , то окажется, что массы будут отталкиваться, а сами эти частицы образуют диполь из двух зарядов разных знаков (рис.15).

Поясняя причину второго отличия, следует сказать, что оно во многом

проистекает из первого. Но, в тоже время, надо признать, что уравнения (10) должны учитывать не только массу частиц, но и энергию (а, значит, массу) создаваемых ими полей. Известно (см. монографию [9], а также нашу статью [3]), что импульс переноса энергии электромагнитного (а теперь и гравитационного) поля может быть описан при помощи векторов Пойтинга,

$$\vec{S}_e = \vec{E} \times \vec{H}, \quad \vec{S}_g = \vec{G} \times \vec{X},$$

но здесь требует подробного разъяснения физический смысл массы поля, чему будет посвящена отдельная публикация. Там же будут проанализированы конкретные причины, которые приводят к выполнению в среде Максвелла законов сохранения массы и энергии, а также прояснён (для этой среды) физический смысл известного преобразования Лоренца.

**Выводы.** На примере конкретной активной механической среды изучены условия, приводящие к возникновению электрических зарядов и силового электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла.

На том же примере объяснено, как устроена устойчивая частица, обладающая массой.

Показано, что в изучаемой среде возникает дополнительное силовое поле, похожее на гравитационное поле Ньютона, но учитывающее индукцию движущихся масс. Получена эффективная оценка для силы гравитационной индукции и рассмотрены соответствующие примеры.

**Список литературы:** 1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. 2. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 4. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С. 35-45. 5. *Киттель Ч., Найт В., Рудерман М.* Механика. Берклевский курс физики – М.: Наука, 1983. 6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 7. *Вихман Э.* Квантовая физика. Берклевский курс физики – М.: «Наука», 1974. 8. *Григорьев А.А., Деряченко А.И.* Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня // – см. статью в настоящем сборнике. 9. *Паули В.* Теория относительности. – М.: Наука, 1983. 10. *Miller D.C.* Significance of the ether-drift experiments of 1925 at Mount Wilson // Science. – 1926. – Vol.68, No.1635. – P.433-443. 11. *Michelson A.A., Pease F.G., Pearson F.* Repetition of the Michelson – Morley experiment // Journal of the optical Society of America and Review of Scientific Instruments. – 1929. – Vol.18, No.3- P181-182. 12. *Галаев Ю.М.* Измерение скорости эфирного ветра и кинематической вязкости эфира оптическим интерферометром. – Харьков: ООО «Инфобанк», 2007. 13. *Ацкоковский В.А.* Общая эфиродинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1990. 14. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. Берклевский курс физики – М.: Наука, 1983.

*Поступила в редколлегию 03.02.11*

**Ю.В. ГАНДЕЛЬ**, д-р физ. - мат. наук, проф., ХНУ им. В.Н. Каразина;  
**С.В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ**, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНТЕНН С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ В СЛУЧАЕ ТЕ-ВОЛН

Побудовані математичні моделі для випадку випромінювання циліндричної ТЕ-хвилі з подовж-  
 них щілин на базі гіперсингулярних або сингулярних інтегральних рівнянь. Дискретизація про-  
 ведена чисельним методом дискретних особливостей, з використанням квадратурних формул ін-  
 терполяційного типу.

Построены математические модели для случая излучения цилиндрических ТЕ-волн из продоль-  
 ных щелей на базе гиперсингулярных и сингулярных интегральных уравнений. Дискретизация  
 проведена численным методом дискретных особенностей, с использованием квадратурных фор-  
 мул интерполяционного типа.

For the case of cylindrical TE-wave radiation from longitudinal slits mathematic models are built on the  
 basis of hypersingular and singular integral equations. Discretization is carried out with the numerical  
 method of discrete peculiarities, using quadrature formulae of interpolation type.

**Введение.** Модель резонаторной апертурной антенны – идеально проводящая цилиндрическая поверхность с конечным числом продольных щелей, которая возбуждается линейным источником, расположенным на оси цилиндра. Такие электродинамические структуры используются, как зеркальные антенны СВЧ и в антенной технике для авиации и ракетостроения.

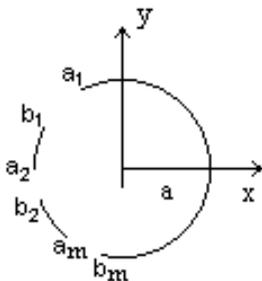


Рисунок 1 – Поперечное сечение цилиндрической поверхности с  $m$  щелями.

В работе [1] изучен случай излучения ТМ-волн из продольных щелей в цилиндре. Предлагаемая работа посвящена решению задачи излучения ТЕ-волн из идеально проводящего цилиндра со щелями.

Математическое описание указанной электродинамической задачи – краевая задача для уравнения Гельмгольца. Она сведена к граничным гиперсингулярным, а также к сингулярным интегральным уравнениям. Дискретная математическая модель этих уравнений построена на базе метода дискретных особенностей (МДО), и, в конечном счете, приводит к системам линей-

ных алгебраических уравнений (СЛАУ), через решение которых выражаются приближенные значения технических характеристик рассматриваемых антенн. Скорость сходимости приближенных значений к точным может быть оценена аналитически [2-3].

**Постановка задачи.** В работе рассмотрен случай излучения стационарной электромагнитной цилиндрической волны, зависимость от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ . Распространение волн происходит в однородной и изотропной среде. На оси цилиндра расположен источник цилиндрической волны. Известно, что электромагнитное поле внутри и вне рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Задача излучения цилиндрической волны из продольных щелей цилиндрической антенны сведена к краевой задаче Неймана для уравнения Гельмгольца [2] с границей, изображенной на рис. 1. Введены полярные координаты  $(r, \varphi)$ .

Введем обозначения: пусть щели – дуги  $(a_q, b_q)$ ,  $q = 1, \dots, m$  окружности  $S_a$  радиуса  $a$ ,

$$a_q = a\alpha_q, b_q = a\beta_q, \varphi \in (\alpha_q, \beta_q), L \equiv \bigcup_{q=1}^m (\alpha_q, \beta_q), \text{ а } CL = [-\pi, \pi] \setminus L.$$

Сужение дуг щелей на плоскость  $XOY$  (см. рис. 1) ( $L$ ) будем называть «основными интервалами», а сужение дуг металлических лент ( $CL$ ) – «дополнительными интервалами».

Искомая функция  $u(r, \varphi)$ , описывающая поле во всем пространстве вне дуг  $\overline{CL}$   $u(r, \varphi) = H_z(r, \varphi)$ , удовлетворяет следующим условиям:

- уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(r, \varphi) + k^2 u(r, \varphi) = 0, \quad (1)$$

- граничному условию

$$\left. \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} = - \left. \frac{\partial u_0(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad \varphi \in CL, \quad (2)$$

- условиям излучения Зоммерфельда;
- условию Майкснера на ребре.

Здесь

$$u_0(r, \varphi) = H_0^{(1)}(kr) - CH_0^{(2)}(kr) \text{ при } r < a,$$

где  $C = \frac{H_0^{(1)'}(ka)}{H_0^{(2)'}(ka)}$ , так что  $\left. \frac{\partial u_0(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} \equiv 0$ ;  $u_0(r, \varphi) = 0$  при  $r > a$ .

Ограничения искомой функции  $u(r, \varphi)$  на круг  $r < a$  и внешность круга  $r > a$ , обозначим соответственно  $u^+(r, \varphi)$  и  $u^-(r, \varphi)$ . Если функции  $u^+(r, \varphi)$ ,  $r < a$  и  $u^-(r, \varphi)$ ,  $r > a$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены т.н. «условия сопряжения» для полного поля

$$\left. (u^+(r, \varphi) + u_0(r, \varphi)) \right|_{r=a} = \left. u^-(r, \varphi) \right|_{r=a}; \quad \varphi \in L \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u^+(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial u^-(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=a}, \quad \varphi \in L, \quad (4)$$

то существует функция  $u(r, \varphi)$ , удовлетворяющая уравнению Гельмгольца во всем пространстве вне объединения дуг  $C\bar{L}$  окружности  $S_a$ , причем  $u(r, \varphi) = u^+(r, \varphi)$ , при  $r < a$  и  $u(r, \varphi) = u^-(r, \varphi)$ , при  $r > a$ .

Фурье-представления для функций  $u^+(r, \varphi)$  и  $u^-(r, \varphi)$ , удовлетворяющие уравнению Гельмгольца (1), имеют вид:

$$u^+(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ J_n(kr) e^{in\varphi}, \quad r < a,$$

$$u^-(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(kr) e^{in\varphi}, \quad r > a,$$

причем  $u^-(r, \varphi)$  удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

Используя условия сопряжения (3-4) и граничное условие (2), получаем парный ряд Фурье:

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \Gamma_n e^{in\varphi} = -u_0|_{r=a}, & \varphi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi} = 0, & \varphi \in CL \end{cases}, \quad (5)$$

где введены обозначения:

$$\Gamma_n = \left[ \frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right], \quad C_n^+ J_n'(ka) = C_n^- H_n^{(1)'}(ka) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Причем имеет место асимптотическая формула при  $n \rightarrow \infty$ :  $\Gamma_n = \frac{B}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

**Вывод сингулярного интегрального уравнения на «основных интервалах».** Сведем задачу (1)–(2) к сингулярному интегральному уравнению.

Действуя так же, как и в работе [3], сводим парное уравнение (5) к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с дополнительным условием. Для этого вводим в рассмотрение неизвестную функцию

$$v(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\varphi}. \quad (6)$$

Удовлетворяя условию Майкснера на ребре и сделав замену переменных, переходим от интервала  $(\alpha_q, \beta_q)$  к стандартному интервалу  $(-1, 1)$ :

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2},$$

$$v(\varphi)|_{(\alpha_q, \beta_q)} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{w_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Окончательно система СИУ на стандартном интервале принимает вид:

$$\frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{w_q(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 G_{pq}(t, t_0) w_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad q=1, \dots, m, \quad (7)$$

и дополнительные условия:

$$\frac{B}{\pi} \left( \pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} -$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 Q_{pq}(t) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi u_0|_{r=a}, \quad q=1, \dots, m. \quad (8)$$

где

$$G_{pq}(t, t) = \frac{B}{2} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \left[ ctg \frac{g_p(t) - g_q(t)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t)} \right] +$$

$$+ (1 - \delta_{pq}) B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t) - g_q(t)} + K_{pq}(t, t);$$

$$K_{pq}(t, t_0) = \frac{b_q - a_q}{2} \sum_n \left( \Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin \left( n (g_p(t) - g_q(t_0)) \right), \quad p=1, \dots, m;$$

$$Q_{pq}(t) = -(1 - \delta_{pq}) B \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} -$$

$$- B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 R_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}};$$

$$R_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos \left( n (g_p(t) - g_q(t_0)) \right).$$

Дискретизация проведена методом дискретных особенностей [2]. Для получения приближенного решения уравнения (7) с дополнительным условием (8), заменяем неизвестные функции, гладкие ядра и правые части их интерполяционными полиномами, ищем приближенные решения задачи. Полу-

чаем системы интегральных уравнений для приближенных решений. Используя квадратурные формулы интерполяционного типа [2] к системе интегральных уравнений, построенных для приближенных решений, сводим систему интегральных уравнений с дополнительными условиями к эквивалентной СЛАУ относительно значений неизвестных функций в узлах интерполирования [4] (9). Через решение которых получаем приближенные (с контролируемой точностью) решения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{w_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) w_p(t_i^{N_p}) = 0 \\ \frac{B}{N_q} \left( \pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} w_q(t_i^{N_q}) + \\ + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) w_p(t_i^{N_p}) = \pi u_0 \Big|_{r=a} \end{array} \right. , \quad (9)$$

где  $j = 1, \dots, N_q - 1$ ,  $q = 1, \dots, m$ .

**Вывод граничного гиперсингулярного интегрального уравнения на «дополнительных интервалах».** В случае вычисления поля, излученного из щелей малых размеров, удобно располагать точки интерполяции не в щелях структуры, а на металле. Для этого сделаем в парном ряде (5) замену:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{B_n}{\Gamma_n}, \quad n \neq 0 \\ C_0 = \frac{B_0}{\Gamma_0} - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a} \end{array} \right. .$$

Теперь парное уравнение (5) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\varphi} = 0, \quad \varphi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_n e^{in\varphi}}{\Gamma_n} = \frac{u_0}{\Gamma_0} \Big|_{r=a}, \quad \varphi \in CL \end{array} \right. , \quad (10)$$

При этом

$$\frac{1}{\Gamma_n} = \left[ \frac{J_n(ka)}{J_n'(ka)} - \frac{H_n^{(1)}(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \right]^{-1} \equiv D_0 |n| + D_1 \frac{1}{|n|} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Как и при выводе граничного интегрального уравнения на «основных интервалах», введем новую неизвестную функцию.

$$v(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\varphi}.$$

Применяя параметрические представления интегральных операторов [5] с гиперсингулярным и гладким ядром к парному ряду (10), запишем гиперсингулярное интегральное уравнение (ГСИУ) на системе отрезков в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{D_0}{2\pi} a.f.p. \int_{CL} \frac{v(\theta)}{2 \sin^2 \frac{\theta-\varphi}{2}} d\theta - \frac{D_1}{\pi} \int_{CL} v(\theta) \ln \left| \sin \frac{\theta-\varphi}{2} \right| d\theta - \frac{D_1 \ln 2}{\pi} \int_{CL} v(\theta) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{CL} K(\theta, \varphi) v(\theta) d\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_{CL} v(\theta) d\theta = f(\varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } K(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \Gamma_n - D_0 |n| - D_1 \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(\varphi - \theta)); \quad \left. \frac{u_0(r, \varphi)}{\Gamma_0} \right|_{r=a} = f(\varphi).$$

Удовлетворяя условию Майкснера на ребре и сделав замену переменных, переходим от интервала  $(\beta_q, \alpha_{q+1})$  к стандартному интервалу  $(-1, 1)$ :

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\beta_q, \alpha_{q+1}) : t \mapsto \theta = \frac{\alpha_{q+1} - \beta_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_{q+1}}{2}, \quad (12)$$

$$v(\varphi) \Big|_{(\alpha_q, \beta_q)} \equiv \sqrt{1-t^2} w_q(t). \quad (13)$$

Как и в задаче на «основных интервалах», заменяя в (11) неизвестные функции, гладкие ядра и правые части их интерполяционными полиномами и учитывая (12-13), ищем приближенные решения задачи. Используя метод дискретных особенностей, сводим ГСИУ (11) к СЛАУ [4]:

$$\begin{aligned} \frac{B_1}{N_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_p-1} w_p^{N_p-2} (t_{0k}^{N_p}) \left( 1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \frac{1 - (-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{N_p} - t_{0k}^{N_p})^2} - B_1 \frac{N_p}{2} w_p^{N_p-2} (t_{0j}^{N_p}) - \frac{B_2}{N_p} \left( \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \right)^2 * \\ * \sum_{k=1}^{N_p-1} w_p^{N_p-2} (t_{0k}^{N_p}) \left( 1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \left[ \ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{N_p-1} \frac{1}{r} T_r (t_{0k}^{N_p}) T_r (t_{0j}^{N_p}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2N_p} \right] - \\ - \sum_{q=1}^m \left( \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q-1} w_q (t_{0k}^{N_q}) \left( 1 - (t_{0k}^{N_q})^2 \right) K_{pq} \left( g_p (t_{0j}^{N_p}), g_q (t_{0k}^{N_q}) \right) = \\ = f_p (t_{0j}^{N_p-2}), \quad j = 1, \dots, N_p - 1, \quad p = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (14)$$

**Выводы.** В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца с границей – цилиндрической поверхностью с продольными щелями, сведены к гиперсингулярным, а также к сингулярным интегральным уравнениям на системе отрезков. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели (9), (14) для приближенного (с контролируемой точностью) решения указанных краевых задач. Построенные дискретные математические модели, позволяют проводить численные эксперименты по определению технических характеристик (диаграмм направленностей, полей в ближней зоне) для антенн с конечным числом продольных щелей, как это сделано, например, в [1].

**Список литературы:** 1. *Духопельников С.В.* Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 68. С. 76-86. 2. *Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С.* Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие. Ч. II. – Харьков: ХГУ, 1992. – 145 с. 3. *Гандель Ю.В.* Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многощелевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков / *Ю. В. Гандель, С. В. Духопельников* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Зб. наук. праць. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264-293. 4. *Гандель Ю.В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учебное пособие, часть I. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. / Харьков: Издательство Харьковского национального университета, 2001. – 92 с. 5. *Гандель Ю. В.* Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. / X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. – P.57-62.

*Поступила в редколлегию 04.04.2011*

УДК 539.1

*А.А. ГРИГОРЬЕВ*, аспирант, НТУ «ХПИ»;

*А.И. ДЕРИЕНКО*, канд. техн. наук, доц., КУСИТУ, Кременчуг

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА ДЛЯ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОГО СТЕРЖНЯ**

Створено лінійаризовану модель і складено рівняння енергетичного балансу для незгасаючої гармонічної хвилі трансляції (гвинтового фонона), що рухається по циліндричному гвинтовому стержню зі швидкістю звука. Запропонована модель квантування амплітуди хвилі.

Создана линеаризованная модель и составлено уравнение энергетического баланса для незатухающей гармонической волны трансляции (винтового фонона), движущейся по цилиндрическому винтовому стержню. Предложена модель квантования амплитуды волны.

A mineralized model has been created and also an equation of the energy balance for a sustained harmonic repeater wave (screw phonon), which moves along a cylindrical spiral core has been formulated. A model of the quantization of a wave amplitude has been suggested.

**Введение и постановка задачи.** В работах [1-3] представлены результаты исследования высокочастотных колебаний в упругих трёхмерных континуумах, которые, возможно, открывают дорогу для механического истолкования квантовых эффектов микромира, а также к пониманию природы фундаментальных физических полей. Если указанная там схема взаимодействия полей действительно имеет отношение к решению универсальных проблем, то она открывает перспективу для освоения принципиально нового источника энергии. Точнее – она указывает на существование такого источника, но метод его освоения ещё предстоит разработать. Речь идёт об энергии донорского поля, поддерживающего существование фундаментальных силовых полей (гравитационного, электрического, и др.). Как следует из новой концепции, *все эти поля являются полями синфазных колебаний*, что является простейшим разумным объяснением и материальной основой наблюдающегося единства мира.

Однако чтобы прояснить механизм функционирования фундаментальных полей и, возможно, найти способ для непосредственного подключения к донорскому полю, нужно основательно изучить эти проблемы на более простых моделях меньшей физической размерности. Без этого знания проводить эксперименты с физическим пространством опасно и безответственно.

Математическая модель, описанная в [4], представляет собой новый инструмент для исследования связанных нелинейных колебаний и автоколебаний, возникающих в упругом одномерном и однородном континууме (винтовом стержне). Работа с этим инструментом только началась, но уже получен ряд результатов, представляющих интерес (смотри [5-7]). Часть этих результатов, касающаяся синтеза простейших автоколебательных волн трансляции (*винтовых фононов*), помещена в данной статье.

**Линеаризованные уравнения фонона. Учёт трения.** Уравнения модели [4] используют сопряжённые матрицы влияния (см. далее). Это означает, что они описывают замкнутую механическую систему, в которой общая механическая энергия остаётся постоянной.

Если учесть влияние трения, то часть энергии колебаний рассеется в тепло, и механическая энергия всей системы будет убывать. Но отдельные части такой системы могут определённое время получать энергию от других частей, достаточную для стабилизации своих колебаний. По такому принципу, напр., работает часовой механизм; далее мы покажем, что нечто похожее наблюдается и при автоколебаниях винтового стержня.

Фотон, как это принято в квантовой механике, является простой (самостоятельной) моногармонической волной, имеющей постоянную максимальную амплитуду на фронте и медленное затухание по длине [8]; этим он отличается от волновых пакетов интерферирующих волн, имеющих сложную структуру. У затухания волны трансляции, распространяющейся по упругому континууму, гипотетически, могут быть две причины:

- дисперсия волн (эта причина для фонона не актуальна),

- трение в материале (внутреннее) или на поверхности стержня (внешнее).

Трение необходимо учесть; именно этот фактор обычно обеспечивает устойчивость движения механической системы; в комплексе с другими условиями, он способен обеспечить стабильность фонона.

Будем считать, что внешнее трение пропорционально скоростям смещения координат (с коэффициентом  $f_v$ ), а внутреннее – обобщённым силам (с коэффициентом  $f_q$ ); в механике такие силы трения называют *линейными* (см. работу [9]). Кроме того, будем учитывать вязкое или гистерезисное внутреннее трение, определяемое коэффициентом  $f_\alpha$ .

В случае гармонических колебаний операторы Кельвина – Фойгхта для вязкого и Шлиппе – Колара для гистерезисного трения записываются одинаково (см. [10]), но во втором случае коэффициент трения  $f_\alpha$  зависит от частоты, а в первом – не зависит. В результате при вязком трении логарифмический декремент  $k_T$  затухания колебаний растёт пропорционально частоте  $\omega$ , а при гистерезисном трении – не изменяется.

Физической причиной внутреннего линейного трения является неравномерность деформации материала в пределах сечения проволоки, а внутреннего вязкого или гистерезисного трения – неравномерность деформации материала для близких сечений. В стержнях, изготовленных из стали, никеля или др. ферромагнитных материалов, внутреннее трение является гистерезисным.

Внешнее линейное трение и вязкое внутреннее трение изменяет в математической модели [4] уравнения движения,

$$Mx \left( \frac{\partial Vx}{\partial \tau} + f_v \cdot Vx \right) = \frac{\partial Qx}{\partial \theta} - B Qx + f_\alpha \left( \frac{\partial^2 Qx}{\partial \theta \partial \tau} - B \frac{\partial Qx}{\partial \tau} \right) + \Omega \cdot Qy, \quad (1)$$

$$My \left( \frac{\partial Vy}{\partial \tau} + f_v \cdot Vy \right) = \frac{\partial Qy}{\partial \theta} + B^T Qy + f_\alpha \left( \frac{\partial^2 Qy}{\partial \theta \partial \tau} + B^T \frac{\partial Qy}{\partial \tau} \right) + \Omega \cdot Qx, \quad (2)$$

а внутреннее линейное трение – уравнения деформации:

$$Cx \left( \partial Qx / \partial \tau + f_q \cdot Qx \right) = \partial Vx / \partial \theta + B^T Vx + \Omega \cdot Vy, \quad (3)$$

$$Cy \left( \partial Qy / \partial \tau + f_q \cdot Qy \right) = \partial Vy / \partial \theta - B \cdot Vy + \Omega \cdot Vx, \quad (4)$$

где матрицы связи

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3 Qx_3 & -cx_2 Qx_2 \\ -cx_3 Qx_3 & 0 & 0 \\ cx_2 Qx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$Mx, \dots, Cy$  – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения стержня,  $mx_1, my_2, my_3, cx_2, cy_1 = 1$ ,

$$mx_2, my_1, cy_3 = \frac{1}{4z^2}, cx_3 = 1 + \mu, mx_3 = \frac{1}{2z^2}, cx_1, cy_2 = \frac{1 + \mu}{2z^2},$$

$\mu$  – коэффициент Пуассона;  $z$  – индекс навивки стержня;  $Qx_1, Qx_2, \dots, Qy_3$  – упругие силы,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \dot{X} = Vx = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \dot{Y} = Vy = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}, Qx = \begin{bmatrix} Qx_1 \\ Qx_2 \\ Qx_3 \end{bmatrix}, Qy = \begin{bmatrix} Qy_1 \\ Qy_2 \\ Qy_3 \end{bmatrix};$$

$\theta$  – угловая координата сечения (рис.1),  $\tau$  – безразмерное время.

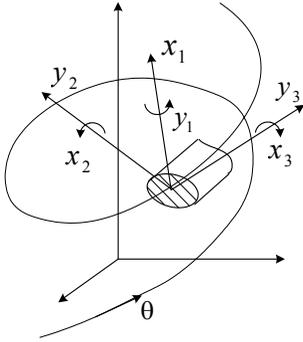


Рисунок 1 – Координаты поперечного сечения

Заметим, что после учёта гистерезиса коэффициенты податливости, используемые в формуле (5), могут отличаться от диагональных элементов матрицы  $Cx$ , поэтому далее мы будем помечать их знаком «\*».

В этих уравнениях, в отличие от общего случая, описываемого моделью [4], принято, что все деформации оси равны 0:  $\varepsilon_{1,2,3} = 0$ , а проекция вектора кривизны на направление нормали не изменяется:  $\chi_1 = 0$ .

Величину  $\varepsilon_1$  допустимо считать нулевой, поскольку она пропорциональна силе  $q_1$ , которая для винтового фоновна, отвечающего нижней прямолинейной ветви характеристической диаграммы, мала (см. формулы и рисунки работы [7]); кроме того, при индексе  $z > 7$  мал коэффициент податливости  $cx_1$ . Деформации  $\varepsilon_{2,3}$ , а также проекцию  $\chi_1$  допустимо считать нулевыми, поскольку они отвечают группе поперечных колебаний, а их амплитуда в описываемом процессе крайне мала.

Поскольку мы рассматриваем колебания, имеющие малую амплитуду, а величина матрицы связи  $\Omega$  так же мала, то последние слагаемые уравнений (1) и (3) можно считать постоянными. Значения этих «чужих» для данного уравнения величин будем, обозначать  $Vy_0, Qy_0$ , они определяются низкочастотными поперечными колебаниями винтового стержня, а также соответствующими статическими деформациями (если таковые присутствуют).

Сказанное означает, что мы можем вычлениить из системы (1) – (5) замкнутую подсистему уравнений

$$Mx \left( \frac{\partial Vx}{\partial \tau} + f_v \cdot Vx \right) = \frac{\partial Qx}{\partial \theta} - B Qx + f_a \left( \frac{\partial^2 Qx}{\partial \theta \partial \tau} - B \frac{\partial Qx}{\partial \tau} \right) + \Omega \cdot Qy_0, \quad (6)$$

$$Cx \left( \partial Qx / \partial \tau + f_q \cdot Qx \right) = \partial Vx / \partial \theta + B^T Vx + \Omega \cdot Vy_0, \quad (7)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3^* \cdot Qx_3 & -cx_2^* \cdot Qx_2 \\ -cx_3^* \cdot Qx_3 & 0 & 0 \\ cx_2^* \cdot Qx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Система (6) – (8) является моделью винтового фонона. Поскольку при

$$cx_{2,3}^* = const \quad (8a)$$

модель линейна, то среди её решений содержатся моногармонические колебания; учёт трения приводит к тому, что эти колебания затухают по длине волны. Решения  $Vx$ ,  $Qx$ , и  $\Omega$  системы после подстановки в оставшиеся уравнения (2), (4) и их интегрирования при нулевых начальных и граничных условиях определяет так называемый *инверсионный след фонона*, проявляющийся в виде изменения координат из группы поперечных колебаний.

**Коэффициент затухания и спин фонона.** Будем искать решения системы уравнений (6) – (8) в форме волны трансляции  $v_f, qf(\theta + v_f \cdot \tau)$ , где  $v_f$  – скорость волны, близкая к скорости звука  $a_{non}$ . В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot v_f' + f_v \cdot v_f) &= qf' + f_\alpha v_f qf'' - B \cdot (qf + f_\alpha v_f qf') + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= v_f' + B^T \cdot v_f - \Omega^T \cdot Vy0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \chi_3 & -\chi_2 \\ -\chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cx_3 qf_3 & -cx_2 qf_2 \\ -cx_3 qf_3 & 0 & 0 \\ cx_2 qf_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий порядок этой системы после учёта вязкого (или гистерезисного) трения оказался равным 9-ти, а не 6-ти, что было бы более логичным. Кроме того, это трение нарушает симметрию уравнений. Поэтому, чтобы упростить анализ и сохранить симметрию, мы далее в этой работе будем исследовать частный случай этой системы, при котором влияние вязкого или гистерезисного трения непосредственно не учитывается (коэффициент  $f_\alpha = 0$ ), а аналогичный эффект затухания обеспечивается за счёт внутреннего линейного трения. Соответствующая система уравнений имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot v_f' + f_v \cdot v_f) &= qf' - B \cdot qf + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= v_f' + B^T \cdot v_f + \Omega \cdot Vy0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Характеристическое уравнение системы (10) имеет корень  $k = 0$  второй кратности и две пары комплексно сопряжённых корней, причём, как показало компьютерное моделирование, координаты одной пары приблизительно со-

ответствуют координатами точки пересечения для средней ветви характеристического уравнения и прямой линии  $\omega^2 = v_f^2 \cdot \alpha^2$  (рис. 2).

Такое совпадение является закономерным следствием слабого влияния трения и матрицы  $\Omega$ .

Известно, что влияние каждого слабого фактора можно исследовать отдельно от других. Так, если в системе (10) отказаться от учёта трения (принять условие  $f_{v,q} = 0$ ), то

полученная система уравнений

$$\left. \begin{aligned} Mx \cdot v_f \cdot v_f' &= qf' - B \cdot qf + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx \cdot v_f \cdot qf' &= v_f' + B^T \cdot v_f - \Omega^T \cdot Vy0 \end{aligned} \right\}, \quad (10 \text{ а})$$

как показал её анализ, будет иметь пару мнимых характеристических чисел  $\pm k_1 i$ , определяющих волновое число  $\alpha$  затухающего гармонического колебания. Величину  $\alpha$  найдём, решив систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= v_f^2 \cdot \alpha^2 \\ \omega^2 &= \omega_c^2 + a_{non}^2 \cdot \alpha^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\omega_c^2}{v_f^2 - a_{non}^2}. \quad (11)$$

Если в системе (10) отказаться от учёта влияния поперечных колебаний (то есть принять условие  $\Omega = 0$ ), то полученная система

$$\left. \begin{aligned} Mx(v_f \cdot v_f' + f_v \cdot v_f) &= qf' - B \cdot qf \\ Cx(v_f \cdot qf' + f_q \cdot qf) &= v_f' + B^T \cdot v_f \end{aligned} \right\}, \quad (10 \text{ б})$$

как показал её анализ, будет иметь пару комплексно сопряжённых характеристических чисел вида  $\beta_0 k_1^2 \pm i k_1$ , где число  $k_1$  практически то же, что и выше ( $k_1 \approx \alpha$  – это волновое число, определенное равенством (11)), а вещественная часть определяет логарифмический декремент затухания волны

$$k_T = \left[ 0.5(f_v + f_q) / \omega_c^2 \right] \cdot \omega. \quad (12)$$

Формула (12) была получена при обобщении результатов численного решения характеристического уравнения системы (10 б), но затем было найдено её аналитическое обоснование. Приведём это обоснование.

Если не учитывать трение, то, как показано в [7], на рассматриваемой ветви диаграммы частота  $\omega$  и волновое число  $\alpha$  будут связаны равенством

$$cx_3 + cx_2 \alpha^2 - mx_3 cx_2 cx_3 \omega^2 = 0,$$

которое можно переписать в следующем эквивалентном виде:

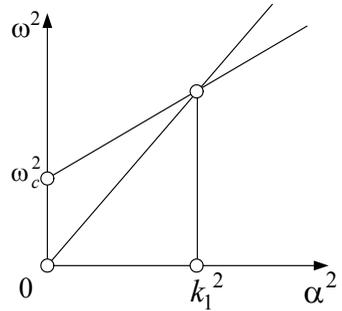


Рисунок 2 – Связь между волновым числом и скоростью фона

$$(cx_3i\omega) + (cx_2i\omega)\alpha^2 + (mx_3i\omega)(cx_2i\omega)(cx_3i\omega) = 0. \quad (13)$$

Учёт линейного трения сводится к соответствующей корректировке дисперсионного уравнения:

$$\det \begin{bmatrix} (i\omega + f_v)Mx & i\alpha I + B \\ i\alpha I + B^T & (i\omega + f_v)Cx \end{bmatrix} = 0. \quad (14)$$

Становится понятным, что для учёта трения достаточно в равенстве (13) заменить  $(cx_{2,3}i\omega)$  и  $(mx_3i\omega)$  выражениями  $(cx_{2,3}(i\omega + f_q))$  и  $(mx_3(i\omega + f_v))$ :

$$cx_3(i\omega + f_q) + cx_2(i\omega + f_q)\alpha^2 + mx_3(i\omega + f_v)cx_2(i\omega + f_q)cx_3(i\omega + f_q) = 0$$

и сократить полученное равенство на общую скобку:

$$cx_3 + cx_2\alpha^2 + mx_3cx_2cx_3(i\omega + f_v)(i\omega + f_q) = 0.$$

После деления на  $mx_3cx_2cx_3$  уравнение приобретает знакомый вид:

$$\omega_c^2 + a^2\alpha^2 = (\omega - f_v i)(\omega - f_q i). \quad (15)$$

При условии  $\omega = \nu f \cdot \alpha$  уравнение (15) становится квадратным

$$(\nu f^2 - a^2) \cdot \alpha^2 - i(f_v + f_q)\nu f \cdot \alpha + f_v f_q - \omega_{c,n}^2 = 0,$$

и, если

$$f_v + f_q \ll 2\omega_c^2 / \omega, \quad (16)$$

то его решения  $\alpha_{1,2} \approx i \frac{(f_v + f_q)\nu f}{2(\nu f^2 - a^2)} \pm \frac{\omega_c}{\sqrt{\nu f^2 - a^2}} \approx \alpha \left( 1 + i \frac{(f_v + f_q) \cdot \omega}{2 \cdot \omega_c^2} \right)$ ,

что и требовалось доказать.

Таким образом, величина декремента затухания оказалась пропорциональным волновому числу или частоте, то есть таким же, как для вязкого трения [9]. Поэтому отказ от учёта вязкого трения оказался оправданным.

Для учёта гистерезисного трения величину коэффициента трения  $f_q$  нужно корректировать, а именно уменьшать пропорционально увеличению частоты  $\omega$ :

$$f_q = f_0 \cdot \omega_0 / \omega,$$

где  $\omega_0$  – характерное значение частоты, отвечающее условию  $\alpha > 2$ .

В обоих случаях влиянием внешнего трения допустимо пренебречь.

У стали внутреннее трение является гистерезисным, а коэффициент затухания не зависит от частоты. В результате мы пришли к следующей формуле для коэффициента линейного внутреннего трения в стальном стержне:

$$f_q = 2k_T \cdot \omega_c^2 / \omega. \quad (17)$$

Следовательно, у системы уравнений (10) существует двухпараметрическое множество решений, отвечающее комплексно сопряжённой паре харак-

теристических чисел  $k_T \alpha \pm i \alpha$ , причём точка с координатами  $\alpha^2, \omega^2 = v_f^2 \cdot \alpha^2$  расположена вблизи рассматриваемой ветви дисперсионного уравнения. В вещественной форме это множество решений имеет вид:

$$\begin{pmatrix} v f(\theta) \\ q f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v x_1 \cdot \cos \alpha \theta \\ -v x_2 \cdot \sin \alpha \theta \\ v x_3 \cdot \cos \alpha \theta \\ q x_1 \cdot \cos \alpha \theta \\ -q x_2 \cdot \sin \alpha \theta \\ q x_3 \cdot \cos \alpha \theta \end{pmatrix} C_1 + \begin{pmatrix} v x_1 \cdot \sin \alpha \theta \\ v x_2 \cdot \cos \alpha \theta \\ v x_3 \cdot \sin \alpha \theta \\ q x_1 \cdot \sin \alpha \theta \\ q x_2 \cdot \cos \alpha \theta \\ q x_3 \cdot \sin \alpha \theta \end{pmatrix} C_2 \cdot \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \eta(\theta), \quad (18)$$

где  $\eta(\theta)$  – ступенчатая функция Хевисайда;  $C_1, C_2$  – произвольные константы;  $v x_j, q x_j$  – компоненты форм колебаний, описываемые теми же формулами, которые в работе [7] получены для модели, не учитывающей трение.

Формуле (18) можно придать другую форму:

$$\begin{pmatrix} v f(\theta) \\ q f(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v x_1 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \\ v x_2 \cdot \cos(\alpha(\theta + \psi)) \\ v x_3 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \\ q x_1 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \\ q x_2 \cdot \cos(\alpha(\theta + \psi)) \\ q x_3 \cdot \sin(\alpha(\theta + \psi)) \end{pmatrix} \cdot A \cdot \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \eta(\theta),$$

где  $\psi, A$  – фаза и амплитуда колебания.

Затухание волны имеет логарифмический декремент

$$k_T = 0.01 \dots 0.02 \cdot (2\pi)^{-1}.$$

Базисные функции представления (18) имеют вид, показанный на рис.3.

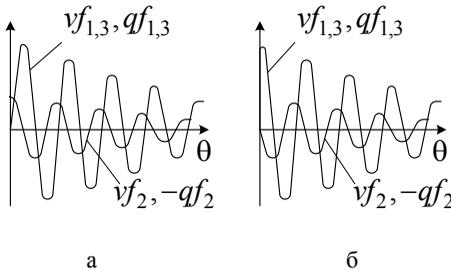


Рисунок 3 – Синусная (а) и косинусная (б) формы фона

Название формы определяет её ведущая характеристика – угловая скорость  $v f_3$  закручивания витка. Заметим, что разные компоненты этих функций различаются по своей величине на много порядков, поэтому на рис.2 сходные формы колебаний приведены к одному масштабу. Изменение изгибающего момента  $q f_2$  отстаёт от изменения скорости  $v f_3$  на четверть длины волны.

Интеграл от скорости  $v f_3$  определяет внутренний момент количества

движения волны; в квантовой механике [8] такая величина называется *спином*  $I_3$  :

$$I_3 = \int_0^{\infty} mx_3 \cdot v f_3(\theta) d\theta . \quad (19)$$

Поскольку ось распространения волны имеет винтовую форму с постоянным углом подъёма, данная величина пропорциональна так называемой *третьей компоненте изотопического спина*.

Несобственный интеграл (19) легко вычисляется при использовании таблицы преобразования Лапласа. Здесь и в дальнейшем нам понадобятся следующие результаты:

$$\int_0^{\infty} e^{-kas} \cdot \sin(\alpha s) ds = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+k^2} ; \quad \int_0^{\infty} e^{-kas} \cdot \cos(\alpha s) ds = \frac{k}{\alpha} \cdot \frac{1}{1+k^2} ; \quad (20)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2kas} \cdot \cos^2(\alpha s) ds = \frac{1}{4k\alpha} \cdot \frac{1+2k^2}{1+k^2} , \quad \int_0^{\infty} e^{-2kas} \cdot \sin^2(\alpha s) ds = \frac{1}{4k\alpha} \cdot \frac{1}{1+k^2} . \quad (21)$$

Для синусной формы фонона имеем

$$I_3 = A \cdot mx_3 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \sin(\alpha \theta) d\theta = mx_3 \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{A}{1+k_T^2} \approx mx_3 \cdot \frac{A}{\alpha} , \quad (19 \text{ а})$$

для косинусной формы

$$I_3 = A \cdot mx_3 \cdot \int_0^{\infty} \exp(-k_T \alpha \theta) \cdot \cos(\alpha \theta) d\theta = mx_3 \cdot \frac{k_T}{\alpha} \cdot \frac{A}{1+k_T^2} \approx mx_3 \cdot \frac{A \cdot k_T}{\alpha} , \quad (19 \text{ б})$$

где  $A$  – амплитуда волны.

Оказалось, что при одной и той же амплитуде синусная форма имеет на три порядка больший спин, чем косинусная. Поэтому синусную форму фонона можно иначе называть *спиновой*, а косинусную – *без спиновой*.

В заключение этого пункта заметим, что мы пока не можем ничего сказать об амплитуде фонона; решаемая система уравнений однородна, и поэтому амплитуда может быть любой. С другой стороны, это соображение верно для внутренних точек волны, но не для её фронта. На фронте слабой ударной волны амплитуда должна удовлетворять определённым условиям, обеспечивающим её равновесие. Подробное изучение вопроса – в следующих пунктах.

**Уравнение энергетического баланса.** Запишем уравнения (6), (7) при условии  $f_{\alpha} = 0$  :

$$Mx(\partial Vx / \partial \tau + f_v Vx) = \partial Qx / \partial \theta - B Qx + \Omega \cdot Qy_0 , \quad (6 \text{ а})$$

$$Cx(\partial Qx / \partial \tau + f_q \cdot Qx) = \partial Vx / \partial \theta + B^T Vx + \Omega \cdot Vy_0 , \quad (7 \text{ а})$$

скалярно умножим обе части уравнения (6 а) на вектор скоростей  $Vx$  , а урав-

нения (7 а) – на вектор сил  $Qx$ , после чего левые и правые части полученных равенств складываются между собой. Получим:

$$\begin{aligned} & (Mx \cdot Vx, \partial Vx / \partial \tau) + (Cx \cdot Qx, \partial Qx / \partial \tau) + f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) = \\ & = (Vx, \partial Qx / \partial \theta) + (Qx, \partial Vx / \partial \theta) - (Vx, B Qx) + (Qx, B^T Qx) + \\ & + (Vx, \Omega \cdot Qy0) + (Qx, \Omega \cdot Vy0), \end{aligned} \quad (22)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} & \partial / \partial \tau [0.5(Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5(Cx \cdot Qx, Qx)] + f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) = \\ & = \partial / \partial \theta (Vx, Qx) + (\Omega^T \cdot Vx, Qy0) + (\Omega^T \cdot Qx, Vy0). \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем обе части этого равенства по промежутку  $\theta \in (0, +\infty)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (Mx \cdot Vx, Vx) + \frac{1}{2} (Cx \cdot Qx, Qx) \right] d\theta + \int_0^{\infty} \left[ f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx) \right] d\theta = \\ & = (Vx, Qx) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \left[ (\Omega^T \cdot Vx, Qy0) + (\Omega^T \cdot Qx, Vy0) \right] d\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

В силу затухания волны верхняя подстановка равна 0.

Каждое слагаемое формулы (23) имеет механический смысл. Так, величина

$$E_n = \int_0^{\infty} [0.5(Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5(Cx \cdot Qx, Qx)] d\theta \quad (24)$$

определяет полную механическую энергию волны, состоящую из двух видов:

- кинетической энергии  $T_n = \int_0^{\infty} [0.5(Mx \cdot Vx(\theta), Vx(\theta))] d\theta$ ;
- потенциальной энергии  $\Pi_n = \int_0^{\infty} [0.5(Cx \cdot Qx(\theta), Qx(\theta))] d\theta$ .

Распределение энергии на кинетическую и потенциальную части, а также по видам деформации (сдвиг, изгиб и кручение), было представлено в [7]. Основная доля энергии винтового фонона связана с кручением стержня.

Величина

$$N_T = \int_0^{\infty} [f_v(Mx \cdot Vx, Vx) + f_q(Cx \cdot Qx, Qx)] d\theta \quad (25)$$

определяет суммарную мощность сил внешнего и внутреннего трения.

Величина

$$N_{nep} = (Vx(0), Qx(0)) \quad (26)$$

определяет мощность потока энергии через неподвижное сечение стержня  $\theta = 0$ ; в этом сечении в данный момент времени находится «голова» волны (далее мы будем называть это сечение *нелинейным ядром фонона*).

Величина

$$N_0 = \int_0^{\infty} N(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} [(\Omega^T \cdot Vx, Qy0) + (\Omega^T \cdot Qx, Vy0)] d\theta \quad (27)$$

определяет суммарную мощность, передаваемую от группы поперечных колебаний. В развёрнутом виде плотность  $N(\theta)$  этой мощности определяется следующими формулами:

- при условии  $\chi_2 = 0$  (на «гистерезисной полке», см. далее) –

$$N = \begin{pmatrix} \chi_3 \cdot Qx_2 \\ -\chi_3 \cdot Qx_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot Vy0 + \begin{pmatrix} \chi_3 \cdot Vx_2 \\ -\chi_3 \cdot Vx_1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot Qy0, \quad (28)$$

- при условии  $\chi_2 \neq 0$

$$N = \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_3 \cdot Qx_1 \\ -\chi_2 \cdot Qx_1 \end{pmatrix}^T \cdot Vy0 + \begin{pmatrix} \chi_3 \cdot Vx_2 - \chi_2 \cdot Vx_3 \\ -\chi_3 \cdot Vx_1 \\ -\chi_2 \cdot Vx_1 \end{pmatrix}^T \cdot Qy0, \quad (29)$$

где  $\chi_3 = cx_3 Qx_3$ ,  $\chi_2 = cx_2 Qx_2$ .

Нуль в формуле (29) получился как результат очевидного равенства

$$\chi_3 \cdot Qx_2 - \chi_2 \cdot Qx_3 = cx_3 Qx_3 \cdot Qx_2 - cx_2 Qx_2 \cdot Qx_3 = 0.$$

Если учесть, что формула для форм низкочастотных колебаний длинной пружины также содержит три нуля, то скалярные произведения (28) и (29) содержат небольшое число слагаемых и остаются обозримыми:

$$N = cx_3 Qx_3 \cdot (Qx_2 + \Delta \cdot Vx_2) \cdot Ay0, \quad (28 a)$$

$$N = [\Delta \cdot cx_3 Qx_3 \cdot Vx_2 - cx_2 Qx_2 \cdot (Qx_1 + \Delta \cdot Vx_3)] \cdot Ay0. \quad (29 a)$$

Аналогичные, но более громоздкие формулы отвечают низкочастотным коротковолновым колебаниям, описанным в [7]. Но для кластера эти формулы предельно упрощаются:

$$N = -cx_3 Qx_3 \cdot Qx_1 \sin(\theta) Ay0, \quad (28 b)$$

$$N = -(cx_3 Qx_3 \sin(\theta) + cx_2 Qx_2 \cos(\theta)) \cdot Qx_1 Ay0. \quad (29 b)$$

Таким образом, равенство (23) можно трактовать как уравнение энергетического баланса, составленное для всей волны:

$$\partial E_n / \partial \tau + N_{nep} = N_0 - N_T. \quad (30)$$

Заметим, что для стабильной волны выполняется условие

$$E_n = const,$$

но, поскольку волна движется и переносит часть своей энергии через неподвижное сечение  $\theta = 0$ , то для этой волны должны выполняться условия:

$$\partial E_n / \partial \tau < 0 \quad (31 \text{ а})$$

и

$$\partial E_n / \partial \tau + N_{nep} > 0. \quad (31 \text{ б})$$

Условие (31 б) означает, что часть энергии, переносимой через сечение  $\theta = 0$ , рассеивается в нелинейном ядре фонона. Рассеивание является следствием трения и сглаживает фронт ударной волны (рис.4).

В равенстве (30) целесообразно перейти от частной производной по времени к полной производной, вычисленной в силу решаемой системы дифференциальных уравнений. Для этого к обеим частям прибавим величину

$$N_{fp} = v_f \cdot [0.5 \cdot (Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5 \cdot (Cx \cdot Qx, Qx)] \Big|_{\theta=0},$$

определяющую поток энергии через фронт волны. В результате получим:

$$dE_n / d\tau = N_0 - N_T + N_{fp} - N_{nep}. \quad (32)$$

Учтём, что скорость  $v_f = \lambda / \alpha$ , а также систему соотношений

$$\left. \begin{aligned} Mx(i\lambda \cdot Vx + f_v \cdot Vx) &= i\alpha \cdot Qx - B \cdot Qx + \Omega \cdot Qy0 \\ Cx(i\lambda \cdot Qx + f_q \cdot Qx) &= i\alpha \cdot Vx + B^T \cdot Vx + \Omega \cdot Vy0 \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

справедливую для комплексного представления формы, и преобразуем последние два слагаемых правой части равенства (32):

$$\begin{aligned} N_{fp} - N_{nep} &= (\omega / \alpha) \cdot [0.5 \cdot (Mx \cdot Vx, Vx) + 0.5 \cdot (Cx \cdot Qx, Qx)] - (Qx, Vx) = \\ &= 0.5 \cdot (Qx, Vx) + 0.5 \cdot i \cdot \alpha^{-1} (B \cdot Qx, Vx) - 0.5 \cdot i \cdot \alpha^{-1} \cdot (\Omega \cdot Qy0 - f_v Vx, Vx) + \\ &+ 0.5 (Vx, Qx) - 0.5 i \cdot \alpha^{-1} \cdot (B^T \cdot Vx, Qx) - 0.5 i \cdot \alpha^{-1} \cdot (\Omega \cdot Vy0 - f_q Qx, Qx) - (Qx, Vx) = \\ &= -0.5 i \cdot \alpha^{-1} \cdot [(\Omega^T \cdot Qx, Vy0) + (\Omega^T \cdot Vx, Qy0)] + 0.5 i \cdot \alpha^{-1} \cdot [f_v (Vx, Vx) + f_q (Qx, Qx)]. \end{aligned}$$

Следовательно, после перехода к вещественным формам равенство (32) принимает следующий вид:

$$dE_n / d\tau = N_0^* - N_T^*, \quad (34)$$

$$\text{где } N_0^* = \int_0^\infty [(\Omega^T Vx, Qy0) + (\Omega^T Qx, Vy0)] d\theta + \frac{0.5}{\alpha} [(\Omega^T Vx, Qy0) + (\Omega^T Qx, Vy0)] \Big|_{\theta=0},$$

$$N_T^* = \int_0^\infty [f_v (Mx Vx, Vx) + f_q (Cx Qx, Qx)] d\theta + \frac{0.5}{\alpha} [f_v (Mx Vx, Vx) + f_q (Cx Qx, Qx)] \Big|_{\theta=0}.$$

Заметим, что вторые слагаемые  $\Delta N_0$  и  $\Delta N_T$  этих формул, как показали результаты конкретных расчётов, часто, но не всегда, значительно меньше первых, поэтому звёздочку в обозначении этих величин можно не писать, а на практике ограничиться приближённым равенством

$$dE_n / d\tau = N_0 - N_T. \quad (34 \text{ а})$$

Следовательно, необходимые условия устойчивости (32) теперь можно заменить одним неравенством следующего вида:

$$N_0^* > N_T^*, \quad (35)$$

Неравенство предполагает, что избыток мощности

- частично будет рассеян трением на фронте волны,
- а основная часть из группы продольных колебаний будет возвращена назад, в группу поперечных колебаний.

Скоро мы покажем, как этот процесс, замыкающий круговорот энергии между связанными колебаниями, реализуется в ядре фонона на практике.

Условия (31) или (35) являются необходимыми, но не достаточными условиями устойчивости фонона. Кроме того, поскольку обе части неравенства (35) оказываются пропорциональными квадрату амплитуды фонона, то уравнение энергетического баланса не накладывает ограничений на величину этой амплитуды. В то же время, как известно из курса физики, амплитуда такой волны должна быть квантованной и зависеть от её частоты. В следующем пункте будет показано, что такие требования будут выполняться автоматически, если воспользоваться современными общепризнанными теориями нелинейной упругости и пластичности.

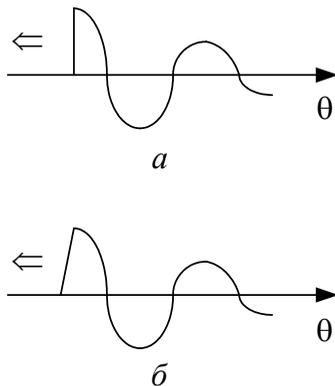


Рисунок 4 – Сглаживание фронта ударной волны (а) трением (б)

**Гистерезисная модель квантования.** Поскольку эта конкретная модель носит характер гипотезы, целесообразно начать с изложения тех требований, которым должна удовлетворять любая модель такого типа.

Известно [8], что энергия фотона пропорциональна частоте, а спин от частоты не зависит. Используем для описания фонона формулы (14), выберем, для определённости, синусную форму фонона, неизвестную амплитуду волны обозначим буквой  $A$  и, используя формулу (24), вычислим полную механическую энергию волны:

$$E_n = A^2 \cdot \int_0^{\infty} [0.5(Mx \cdot \nu f, \nu f) + 0.5(Cx \cdot qf, qf)] d\theta. \quad (36)$$

После раскрытия скалярных произведений мы получим интегралы

$$I_s = \int_0^{\infty} \exp(-2k_T \alpha \theta) \sin^2(\alpha \theta) d\theta \quad \text{и} \quad I_c = \int_0^{\infty} \exp(-2k_T \alpha \theta) \cos^2(\alpha \theta) d\theta,$$

которые при малом значении декремента  $k_T$  принимают близкие значения:

$$I_s, I_c = 1/(4k_T\alpha) .$$

Следовательно, равенство (36) принимает вид:

$$E_n = A^2 / (4k_T\alpha) \cdot [0.5(Mx \cdot vx, vx) + 0.5(Cx \cdot qx, qx)] ,$$

где, напоминаем,  $vx, qx$  – это компоненты формы гармонических колебаний.

Выражение, стоящее в квадратных скобках, определяет плотность

$$E_1 = T_1 + P_1 = z^{-2} \quad (37)$$

энергии формы. Следовательно,

$$E_n = A^2 / (4k_T\alpha) \cdot E_1 \quad (38)$$

Заметим, что вычисление энергии для косинусной формы фонона приведёт, как это ясно из анализа приведенных выше выкладок, к точно такому же результату, то есть *при совпадении амплитуд синусная и косинусная формы фонона обладают одинаковой энергией.*

Теперь, следуя Планку, будем считать, что

$$E_n \sim \omega .$$

Тогда должно выполняться соотношение

$$A^2 \sim \omega \alpha ,$$

и, поскольку в области  $\alpha \gg 1$  коротких волн можно принять условие

$$\alpha \sim \omega ,$$

то мы приходим к *требованию пропорциональности амплитуды  $A$  и частоты  $\lambda$*  :

$$A \sim \omega . \quad (39)$$

*Это же требование обеспечивает постоянство спина волны:*

$$I_3 = mx_3 \cdot (A/\alpha) = const . \quad (40)$$

Ранее в [7] было показано, что для рассматриваемой здесь формы амплитуды колебания моментов кручения  $qx_3$  и изгиба  $qx_2$  на любой частоте  $\omega > 2\omega_{c,n}$  определяются таким образом, что их отношение пропорционально частоте  $\omega$ . Следовательно, если по какой-либо причине величину момента изгиба зафиксировать, то момент кручения будет возрастать пропорционально частоте. И точно также пропорционально частоте будет возрастать амплитуда волны  $A$ , что и требуется получить.

Но здесь, априори, возникают два естественных вопроса. Какой «механизм» сможет обеспечить постоянство изгибающего момента при любых частотах колебания стержня? И где он должен располагаться – внутри стержня (внутренние факторы) или за его пределами (внешние факторы)? Ясно, что ответы на эти вопросы не являются однозначными и реализация такого механизма на практике может быть различной. Но замечательным обстоятельством оказывается то, что такой механизм у природы уже есть, и не нужно изобретать ничего нового. Достаточно внимательно проанализировать то, что уже давно и хорошо известно.

Известно, что закон Гука, постулирующий пропорциональность силы и

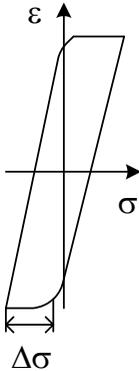


Рисунок 5 – петля гистерезиса

деформации в твёрдом теле, имеет место только для ограниченного диапазона нагрузок [11]. За пределами этого диапазона происходит пластическое упрочнение материала, после чего связь между нагрузкой  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  при гармонических колебаниях нагрузки описывается так называемой гистерезисной кривой (рис. 5). Работы деформации и разгрузки здесь не совпадают, что приводит к возникновению гистерезисного трения. Относительная площадь петли гистерезиса определяет величину декремента  $k_T$  затухания колебаний.

Для стального стержня декремент затухания очень мал, а гистерезисная кривая имеет острую форму. На ней можно выделить два участка пологого протекания характеристики, называемые «гистерезисными полками», и два участка, на которых изменение нагрузки и деформации соответствуют закону Гука. Ширина гистерезисной полки  $\Delta\sigma$  обычно составляет 1-2 % от величины нагрузки, обеспечивающей предел текучести материала  $\sigma_T$ :

$$\Delta\sigma \approx k_m \cdot \sigma_T, \quad (41)$$

где  $k_m$  – коэффициент затухания свободного гармонического колебания.

В научной литературе по материаловедению (напр., в [11]) появление гистерезисной полки объясняют структурной неоднородностью материала, возникшей после пластической деформации. Для каждого вида деформации формируются *каркасы* из отдельных *дислокаций*, которые самостоятельно воспринимают данный конкретный вид нагрузки, но, пока её величина не выходит за пределы полки, они не взаимодействуют друг с другом.

Предположим, что стержень когда-либо в прошлом испытывал интенсивную изгибную и крутильную деформацию, выводящую соответствующие напряжения в материале за пределы текучести. Это означает, что в материале стержня возникли остаточные напряжения, и при каждой новой деформации связь между моментом и значением кривизны или кручения определяются не законом Гука, а гистерезисными кривыми, показанными на рис. 5.

На рис.6 отражён тот факт, что амплитуда  $Qx_3$  колебаний момента кру-

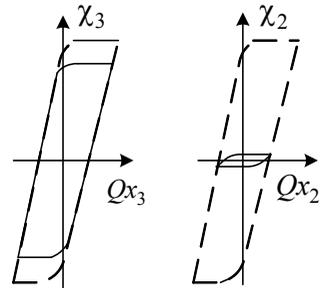


Рисунок 6 – Частичные петли гистерезиса для кручения и изгиба

чения для фонона примерно в  $\omega$  раз больше, чем амплитуда  $Qx_2$  колебаний момента изгиба, а безразмерная частота  $\omega$  при выбранной нормировке – это большое число, большее, напр., чем индекс  $z$ .

Гипотеза, названная *гистерезисной моделью квантования*, возникла из анализа рис.6. Суть гипотезы проста: *амплитуда момента изгиба  $Qx_2$  на всех частотах равна величине соответствующей гистерезисной полки.*

Поскольку ширина полки не зависит от частоты  $\omega$ , то и момент  $Qx_2$  не будет зависеть от частоты, что, в силу сказанного выше, обеспечит правильное квантование амплитуды фонона. Априори ясно, что выход амплитуды  $Qx_2$  за пределы полки приводит к существенной нелинейности уравнений фонона (изменению матрицы влияния  $\Omega$ ). А в точках стыка разных уравнений возникают предпосылки для выполнения условий устойчивости решения.

Но какой конкретный механизм является ответственным за выполнение этой гипотезы, и о каких условиях устойчивости здесь идёт речь? Ответы будут даны в следующей публикации цикла.

**Выводы.** Составлены линеаризованные уравнения винтового фонона, учитывающие рассеивание энергии на трение и поступление энергии от группы низкочастотных колебаний пружины. Получена формула для коэффициента затухания волны и составлено уравнение энергетического баланса фонона. Предложена модель квантования амплитуды, базирующаяся на гистерезисе между нагрузкой и деформацией.

**Список литературы:** 1. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 2. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // – см. статью в настоящем сборнике. 4. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 5. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 6. *Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериенко А.И.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 7. *Ванин В.А., Григорьев А.А., Дериенко А.И.* Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С. 23-37. 8. *Э. Вихман.* Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. – 415 с. 9. *Васильев Н.В.* Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992, – 430с. 10. *Писаренко Г.С., Яковлев А.А., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 375с. 11. *Дж. Мейс.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. – 318 с.

*Поступила в редколлегию 03.02.11*

**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**Ю.Л. ГЕВОРКЯН**, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СРЕДЕ МАКСВЕЛЛА И КОССЕРА

Вивчаються можливості використання відомих математичних моделей суцільного пружного середовища для опису інформаційно – енергетичних обмінів між глобальним інформаційним і глобальним матеріальним полями. Відмічено, що необхідними властивостями наділена модель несиметричної теорії пружності, що описується рівняннями Коссера.

Изучаются возможности использования известных математических моделей сплошной упругой среды для описания информационно – энергетических обменов между глобальным информационным и глобальным материальным полями. Показано, что необходимыми свойствами обладает модель несимметричной теории упругости, описанная уравнениями Коссера.

The opportunities of the usage of the famous mathematical models of the elastic continuous medium for a description of the informational-energetic interchanging between the global informational and the global material fields are being examined. It is shown that the model of the unsymmetrical theory of the elasticity, which was described by the Cassie equations, has all the necessary features.

**Введение и постановка задачи.** В работах [1-3] изучается новая модель активной механической среды, наделённой упругими и пластическими свойствами; авторы публикаций назвали её *средой Максвелла*. Модель проясняет природу и описывает возможные механизмы функционирования фундаментальных физических полей (электромагнитного и гравитационного) как результат взаимодействия однородного поля продольных колебаний и волнового синфазного поля поперечных колебаний этой среды. Для описания колебаний в основном использовались уравнения классической теории упругости, имеющие известный вид (см., напр., учебник [4]):

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{u} + \vec{F}, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность среды;  $G$  – модуль сдвига;  $K$  – модуль Ламэ объёмного сжатия,  $K = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu)) \cdot G$ ;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\vec{F}$  – известное поле плотностей внешних (массовых) сил.

Показано, что в точках  $M$  пустого пространства, где отсутствуют электрические заряды и массы, волновые функции  $u^*(M, t)$  смещения среды описываются уравнениями поперечных колебаний (здесь  $c$  – скорость света)

$$c^{-2} \cdot \partial^2 \vec{u}^* / \partial t^2 = -\text{rot rot } \vec{u}^*, \quad (2)$$

а во всём пространстве – соответствующими системами уравнений Максвелла. Кроме того, в поисках возможных обобщений разработанной ими модели сплошной активной среды авторы статьи [2] обращаются к несимметричной теории упругости, описываемой уравнениями Коссера (см. монографию [5])

$$\begin{cases} \rho \cdot \partial^2 \bar{u} / \partial t^2 = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \bar{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \bar{u} + 2\alpha \text{rot } \bar{\delta} + \bar{f}, \\ j \cdot \partial^2 \bar{\delta} / \partial t^2 = (2\gamma + \beta) \text{grad div } \bar{\delta} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \bar{u} + 2\alpha \text{rot } \bar{u} - 4\alpha \bar{\delta} + \bar{g}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\mu, \lambda$  – модули упругости, подобные модулям Ламэ,  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  – дополнительные модули упругости модели Коссера,  $\bar{\delta}$  – угол разворота зерна,  $j, \bar{g}$  – плотности моментов инерции и массовых сил.

В работе [6], опубликованной теми же авторами, делается попытка создания простейшей математической модели для описания информационно-энергетического обмена между сознанием и материей; в основу своей модели авторы положили известную систему уравнений в частных производных, описывающую связанные одномерные колебания тонкого винтового стержня. Там же указывается на необходимость обобщения этого подхода на трёхмерный случай, но само обобщение выполнено не было.

В данной публикации мы ликвидируем указанный недостаток и покажем, что для описания информационно-энергетического обмена можно использовать математическую модель среды Коссера. Кроме того, мы поддержим направление исследования физических полей, начатое в [1-3], и, не углубляясь здесь в математические тонкости, выполним содержательный анализ полученных результатов. Но прежде мы обратимся к известной математической *теореме Гельмгольца об интенсивности вихревых трубок* (см., напр., [7]) и покажем, что использование для моделирования эфира любой теории сплошной среды может привести к парадоксальным результатам.

**Вихревая связь.** К тому, что вы прочтёте в этом пункте, вряд ли стоит относиться серьёзно. Когда мы рассказывали об этой концепции своим коллегам – математикам, то всегда встречали возражения – «это неконструктивно!», «при помощи какого математического аппарата вы сможете это описать?», «это разрушит сам фундамент науки!», и так далее. Тем не менее, давайте спокойно выслушаем версию, в которую и самим авторам, честно говоря, не до конца хочется верить.

Будем двигаться по направлению от простого к сложному. Рассмотрим единённый нейтральный атом, который имеет ядро и наиболее слабо связанный с ядром валентный электрон. Предположим, что связь между электроном и ядром (правильнее сказать – остальной частью атома) осуществляется, в том числе, посредством вихревых трубок, соединяющих электрон с атомом (на существование таких трубок указывает уравнение (2)). Картинка, показанная на рис.1, условная, но она помогает пониманию.

Далее наш атом ионизируется в результате удара фотона либо вступает в химическую реакцию с другими атомами. В результате он теряет валентный

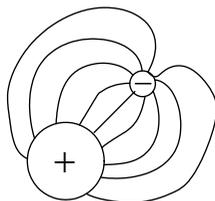


Рисунок 1

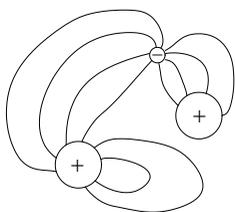


Рисунок 2

электрон, который улетает в пространство или обобществляется созданной молекулой. При этом часть вихревых трубок, идущих к этому электрону, замыкается на себя, часть перехватывается другими атомами (рис.2). Но, и это ключевой момент концепции, некоторая часть этих трубок продолжают связывать электрон с «его» атомом. И как бы далеко не улетал этот электрон, в какие бы новые химические альянсы он не вступал, часть вихревых трубок продолжает поддерживать эту связь.

Ясно, что с течением времени эта связь будет слабеть, но полностью исчезнуть она не может (вихревая трубка обладает кинетической энергией и сама по себе не рвётся). Пусть наш ионизированный атом остался на Земле, а электрон смог улететь на звезду Альфа – Центавра, но этот электрон, говоря языком радистов, «остаётся на прямой связи с Землёй». Кроме того, и это прямо следует из доказанной теоремы, поскольку интенсивность трубки в данный момент времени  $t$  для всех сечений одна и та же, *вихревая трубка осуществляет мгновенную связь между объектами.*

Энергетическое значение этой связи, по-видимому, невелико, но уже давно не секрет, что помимо материального в нашем мире существует информационное поле. Это новое поле использует энергию материального поля и, взамен, отдаёт ему информацию. Скорее всего, между этими полями существует неразрывная взаимодополняющая связь, и, как уже было отмечено в статье [6], главный философский вопрос – «Что первично, материя или сознание?» является некорректным.

**Примеры вихревой связи.** Теперь мы спустимся с философских высот на тот уровень обобщений, который будет понятен всем. У матери рождается ребёнок. По сути, это почка, выросшая из организма матери, и можно себе представить, насколько сильна описанная выше вихревая связь. Проходят годы, дети уезжают от родителей, но эта связь остаётся.

Те подтверждения, которые преподносятся как феномены, на самом деле является нормой. Можно приводить долгие возражения и даже не замечать эту тему, пока не столкнёшься с ней сам. Один из авторов этой статьи получил во сне информацию о неожиданной смерти своей матери, находясь за полторы тысячи километров от её дома.

Переходим ко второму сюжету. Москва, 1395-й год, войска Тамерлана находятся в 200-х километрах от города и имеют ясные намерения: жечь, убивать, грабить. Разрозненные отряды русских воинов, находящиеся в соприкосновении с противником, отступают, местами – бегут. В тесном московском храме собираются тысячи горожан и истово молятся о спасении. И, о чудо, их молитвы достигают цели: Тамерлан, говоря современным языком, совершает немотивированный поступок – прекращает преследование и уво-

дит своё войско в заволжские степи.

Считается, что Господь внял молитвам верующих и, Своею Волею, отвёл беду. Скорее всего, так всё и было, но может быть – не совсем так, а куда проще и, одновременно, сложнее. Давно известно, что все случаи чудесных спасений или исцелений происходили в местах, именуемых *намоленными*. Эти места являются своеобразными информационными фокусами для многомиллионных общин. Здесь, одновременно, молятся тысячи людей, и, как результат, происходит интенсивный обмен валентными электронами. В этом обмене участвует и церковная утварь. Создаётся и усиливается за счёт эффекта резонанса мощное информационное поле, которое, посредством вихревых трубок, распространяется из своего фокуса на тысячи километров. Это поле, возможно, и смутило разум Тамерлана. То, что он тоже мог быть вовлечён в это поле, сомнений нет: русские князья со своей свитой в то время «гостили» в Орде годами.

Надо заметить, что в наше время сказанное относится не только к церковным строениям, но, например, к концертным и спортивным залам, а также и к лекционным аудиториям. В одной аудитории лекции читаются очень легко, а в другой они, мягко говоря, не получаются. Потом, когда начинаешь погружаться в историю вопроса, выясняется, что в первой аудитории, например, сто лет назад читал лекции *Александр Михайлович Ляпунов*, а другая аудитория на протяжении десятилетий использовалась университетом в качестве ритуально – мемориального зала.

Концепция, с которой мы вас познакомили, имеет один существенный порок – в ней предполагается, что материальной основой нашего мира является некоторая сплошная и бесконечно делимая среда. Если учесть дискретность этой среды (например, зернистость поликристаллического упругого тела из модели Коссера), то часть сформулированных утверждений потеряет свой абсолютный характер. Например, связывающих векторных нитей уже изначально будет конечное число и, в конце концов, все они могут быть перехвачены другими объектами. При таком перехвате возникнут эффекты компенсации, но теория, учитывающая эти эффекты, будет сложной. Поэтому примите к сведению всё, что было сказано выше, а от дальнейших комментариев на эту тему мы отказываемся.

**Изоморфизм полей.** «Антинаучность» концепции, изложенной в предыдущем пункте, заключена в том, что она предпринимает попытку вернуть в физику возможность действия предметов на расстоянии. В прошлом такая возможность не вызывала сомнений, но потом, по мере развития науки, была отброшена и заменена теориями силовых полей. Согласно этим теориям предмет передаёт импульс полю, то есть некоторой сплошной среде, этот импульс распространяется по среде и через определённое время достигает другого предмета, что приводит к его ускорению. Ясно, что вихревые трубки с их возможностью избирательного и мгновенного действия на расстоянии всту-

пают в противоречие с этими теориями.

Возможно, *Альберт Эйнштейн*, который постулировал существование предельной скорости для произвольных видов взаимодействия (речь идёт о скорости света), и изгнал в своё время из физики понятие эфира (как упругую среду, в которой возможно существование вихревых трубок), чтобы в дальнейшем не обращать внимания на известное противоречие. *Нет эфира, нет и проблемы*. Но официальной версией была другая – из опытов *Майкельсона* и других физиков того времени следовало, что в эксперименте невозможно определить важнейшие характеристики эфира, в том числе и скорость его движения.

В современных теориях квантовой физики все частицы одного типа (например, электроны) считаются одинаковыми. Иначе говоря, в этих теориях они не имеют ни «родословной», ни «кредитной истории», ни особых «отметин», которые реализуются, например, при помощи вихревых трубок. Поскольку эти теории подтверждаются экспериментами, то и концепция одноклассности элементарных частиц является правомочной. Но эти эксперименты пока что относились только к материальному полю, а для информационного поля они только начались, и основные результаты ещё впереди. Поэтому, априори, возможность передачи информации на расстоянии, как концепция или рабочая гипотеза, имеет право на жизнь. Однако тут мы можем выдвинуть возражение философского характера. Будем, как и авторы работы [6], исходить из того, что сознание способно понять и объяснить мир. Поэтому информационное поле обязано быть во многом похожим, на материальное поле, или, как говорят математики, изоморфно ему.

**Общий пульс и некоторые парадоксы времени.** Неоднократно приходилось сталкиваться с мнением, что *в любой научной работе ровно столько науки, сколько в ней математики*. Возможно, для некоторых работ такая оценка является оправданной, но для тех сложнейших проблем, которые обсуждаются в данной статье, она неверна. Если объект исследования невозможно увидеть воочию, и не собрано достаточно информации для воссоздания его физической модели, то полагаться только лишь на методы математической аналогии опасно. Так, тот математический формализм, который ещё в начале 20-го столетия смог прорваться в некоторые фундаментальные разделы физики, до сих пор не выкорчеван и приносит сейчас свои «плоды». «Чёрные дыры», «червячные переходы», «кротовые норы» – эти и подобные им термины буквально заполнили страницы современных научных журналов по астрофизике. И чего только не происходит с пространством и временем в этих переходах или норах. Время замедляется, затем течёт вспять, а иногда, как мы все недавно узнали, в «кротовых норах» происходят вообще ужасные вещи, когда ось времени меняется местами с одной из пространственных осей. Соответствующие теории развиваются, идейно обогащают и поддерживают друг друга, сливаются и рожают новые экзотические теории. Наверное, всё это имеет какой-то смысл, но от современного человека он пока скрыт. В технике, например, давно действует неписанное правило: *новая конструкция,*

до её экспериментального исследования, содержит ровно одно новшество; аналогичное сдерживающее начало существовало и в науке. Учёные всегда завидовали Природе, которая, пусть и не боится аналитических трудностей, но умеет находить самые простые и эффективные решения. Относительная простота новой теории ранее считалась залогом (или необходимым условием) её правильности.

Но времена изменились, поэтому мы могли бы сейчас последовать примеру своих коллег и дать набросок общей синергетической теории, отдельные моменты которой рассматривались в [1-3]. Однако мы надеемся, что этим полезным делом авторы указанных статей займутся и без нашего участия, и в данном пункте ограничимся краткими тезисами на заданную тему.

*Теория синфазных волновых полей возвращает в физику концепцию существования абсолютного времени.* Метрономом, отсчитывающим ход этого времени, служат однородные колебания давления, которые, если верить этой теории, происходят в некоторой обширной области нашей Вселенной.

Но тут необходимо сделать важное замечание. Казалось бы, что существование абсолютного времени возвращает преобразованию Лоренца его первоначальный смысл. Однако считать соответствующие преобразования координат пространства и времени только лишь формальной заменой переменных, полезной для решения некоторых (главным образом, теоретических) задач, возникающих при анализе движущихся заряженных тел, было бы неправильным. В мире волн переноса и интерференционных картин действуют свои законы и ограничения, причём, как показывает опыт, многие из этих условий получают простые и разумные формулировки только лишь после выполнения преобразования Лоренца.

Поэтому, наряду с абсолютным временем в физике материального поля сохраняет свою актуальность и *относительное* (другое название – *служебное*) время; ясно, что такое же общее правило должно действовать и в информационном поле.

*Многовековой опыт познания мира свидетельствует об объективном существовании материальной и духовной сферы.* Материализм или идеализм одному из этих понятий отдаёт приоритет; на самом деле они образуют неразрывное единство, и если когда-либо были созданы (что не исключено), то Акт Творения для обеих сфер происходил одновременно. *Это, как колокольный звон – колокола и раскачиваются, и поют одновременно.*

Материальная и духовная сфера даны человеку в его ощущениях и образуют, говоря языком современной науки, два Глобальных поля – Материальное и Информационное. Эти два поля взаимодействуют друг с другом, обмениваясь энергией и информацией. Собственно говоря, энергия и информация – суть одно и то же, и их не нужно фетишизировать. Энергия – это один из интегралов уравнений механики, то есть то, что для замкнутой системы в течение определённого промежутка времени остаётся постоянным. Информация – это соответствующий интеграл уравнений Информационного поля, которые ещё предстоит вывести.

Для людей, знакомых с основами информатики, заметим, что квантова-

ние информации на биты – это дань времени, связанная с техническими особенностями передающих и запоминающих устройств; в действительности, информация может храниться и в аналоговом виде, а соответствующее Информационное поле оказывается непрерывным.

Без всякого сомнения, человеческое сознание относится к духовной сфере и является частью глобального Информационного поля. Это означает, что каждый человек является тем Коммуникационным Узлом, в котором информационное поле получает энергию от материального поля и передаёт ему свою энергию (то есть информацию), корректирующую процессы материальной сферы. Такими же коммуникационными узлами являются все другие объекты животного и растительного мира, а также те клетки, из которых они состоят; ясно, что на клеточном уровне указанные обмены энергией и информацией оказываются слабыми.

Ключевой вопрос – что является первичной Коммутационной Точкой, из которой состоят эти узлы. Если считать, что такой точкой является живая клетка, то это означает, что Глобальное Информационное поле возникло в ходе эволюции Глобального Материального поля, то есть классические материалисты 19 –го века были правы. Но сейчас 21–вый век, и в науке накоплено достаточно материала, чтобы усомниться в истинности эволюционистских теорий.

Авторы и сами иногда считают себя материалистами, но их материализм примирит и устроит всех. Будем вслед за индусами считать, что «душа» есть у всех предметов живой и неживой природы. Более того, поскольку структурной единицей природы является элементарная частица, будем считать, что она и является той Коммутационной Точкой, в которой стыкуются материальная и духовная сферы. Далее мы покажем, что последовательное воплощение этой гипотезы может стать основой для понимания устройства нашего мира.

**Информационное поле должно уметь думать.** Главная задача, которая решается информационным полем – это прогнозирование событий, которые произойдут в материальном поле в ближайшее время, а также в отдалённой перспективе. Мы не берёмся судить о том, была ли эта функция синтезирована целенаправленно, в момент Творения Мира, либо всё получилось как бы само собой.

В наш компьютеризованный век удобно считать, что информационное поле – это гигантский Аналоговый Суперкомпьютер, который в реальном масштабе времени получает информацию о расположении всех элементарных частиц Вселенной. Действительно, мы уже предположили, что каждая частица является Коммутационной Точкой, следовательно, данное предположение не является новым. Но как устроен и как работает этот Компьютер?

Знакомство с возможностями человеческого сознания позволяет сделать вывод о том, что он прекрасно справляется со своей задачей. Главная проблема, по-видимому, состоит в том, как «снять» эту информацию и как её использовать для своей выгоды. Неживая природа этого делать не умеет вовсе,

и это та грань, которая ранее отделяла её от живой природы. Человек, создавая «умные» машины, стирает эту грань. Тем не менее, мы склонны считать, что Информационное поле управляет многими процессами, происходящими и в неживой природе (например, в геологии), воздействуя на них в районе точки бифуркации (неустойчивого равновесия).

Любой, даже самый быстродействующий компьютер, на обработку информации требует определённого времени. Аналоговые вычислительные машины (а наш Суперкомпьютер является не цифровым, а аналоговым) используют это время на то, чтобы моделировать соответствующие переходные процессы в своих цепях. Получив в некоторый момент времени полную информацию об окружающем материальном мире, он отключается от этого мира и производит его физическое моделирование, двигаясь по шкале времени вперёд и, как мы покажем далее, назад. В момент новой коммутации между информационным и материальным миром можно получить информацию о будущих или прошлых событиях материального мира.

Подчеркнём, что в любом случае (даже если речь идёт о моделировании прошлого), Информационное поле выдаёт прогноз событий (или их реконструкцию). Живое существо, получив неблагоприятный прогноз, изменит своё поведение, и прогнозируемой катастрофы не случится. Тропический ураган, получив слабые корректирующие импульсы «из будущего», отклонится в сторону от Флориды. Разумеется, эти примеры упрощают существо дела.

Для получения точных прогнозов Информационное поле должно подчиняться тем же законам, что и Материальное. Говоря языком математики, оно должно быть изоморфно Материальному полю, но при этом может иметь другую физическую основу. Важнейшим отличием Информационного поля от Материального является его «подвижность».

Для объяснения этого требования, которое и обеспечивает умение «думать», впервые в основном тексте данной статьи используем математику.

Предположим, что развитие Материального поля приближённо описывается системой дифференциальных уравнений

$$dX / dt = F[X, t],$$

где  $X$  – вектор состояния поля;  $F[.]$  – некий оператор;  $t$  – время. Тогда моделирование этого развития в Информационном поле описывается системой

$$dY / d\tau(t) = F[Y, \tau(t)],$$

где  $Y \leftrightarrow X$ ;  $F[.]$  – тот же оператор, что и выше, а  $\tau$  – это *служебное время*, которое в процессе моделирования изменяется не только неравномерно по времени  $t$ , но и немонотонно.

**Приведём конкретный пример.** Примем, что в системе уравнений Коссера (3) массовые силы и моменты отсутствуют, а поле вращений зёрен является несжимаемым, то есть

$$\begin{cases} \rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = (2\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}) \text{grad div } \vec{u} - (\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}) \text{rot rot } \vec{u} + 2\boldsymbol{\alpha} \text{rot } \vec{\delta}, \\ j \cdot \partial^2 \vec{\delta} / \partial t^2 = -(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}) \text{rot rot } \vec{\delta} + 2\boldsymbol{\alpha} \text{rot } \vec{u} - 4\boldsymbol{\alpha} \vec{\delta}, \end{cases}$$

Вычислим ротор от обеих частей первого уравнения и обозначим  $0.5 \text{rot } \vec{u} = \vec{\psi}$ , где вектор  $\vec{\psi}(M, t)$  определяет угол закручивания среды в данной точке пространства. В результате получим систему

$$\begin{cases} \rho \cdot \partial^2 \vec{\psi} / \partial t^2 = -\boldsymbol{\mu} \text{rot rot } \vec{\psi} + \boldsymbol{\alpha} \text{rot rot } (\vec{\delta} - \vec{\psi}), \\ j \cdot \partial^2 \vec{\delta} / \partial t^2 = -(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}) \text{rot rot } \vec{\delta} + 4\boldsymbol{\alpha} (\vec{\psi} - \vec{\delta}). \end{cases} \quad (4)$$

При выполнении условия пропорциональности модулей  $(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}) / j = \boldsymbol{\mu} / \rho$  система (4) допускает очевидное упрощение

$$\begin{cases} \vec{\delta} \equiv \vec{\psi}, \\ \rho \cdot \partial^2 \vec{\psi} / \partial t^2 = -\boldsymbol{\mu} \text{rot rot } \vec{\psi}, \end{cases}$$

при котором зерно разворачивается вместе со средой; такое упрощение называют *стеснённым вращением* и оно соответствует так называемой *псевдоупругой среде Коссера* (см. работу [5]). Но для среды Максвелла, где примесь имеет форму пустотелых оболочек с предельно малым моментом инерции, характерны другие соотношения:

$$(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}) / j \gg \boldsymbol{\mu} / \rho \gg \boldsymbol{\alpha} / \rho,$$

и векторные поля  $\vec{\delta}(M, t)$  и  $\vec{\psi}(M, t)$  становятся слабо связанными, причём скорость распространения сферических или плоских волн в первом поле оказывается существенно выше, чем во втором,

$$c_1 = \sqrt{(\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}) / j} \gg c_2 = \sqrt{\boldsymbol{\mu} / \rho}.$$

Второе поле описывает линейные перемещения среды и именно его можно отождествлять с Глобальным Материальным полем; тогда первое является Глобальным Информационным полем. В результате «*скорость мысли*»  $c_1$  оказалась значительно большей скорости света  $c_2 = c$ , но этот факт трудно назвать новым; аналогичное утверждение даже вошло в детский фольклор. Однако очевидное следствие этого утверждения звучит совсем не по-детски: *с точки зрения информационного поля любые движения материальных тел происходят настолько медленно, что соответствующими релятивистскими поправками можно пренебречь*.

Отсюда, возможно, проистекают причины безоговорочного доверия к результатам классической механики, крепко укоренившиеся в сознании большинства учёных, и неприятия и непонимания этим большинством соотношений релятивистской механики.

Заметим, что если в среде проис-

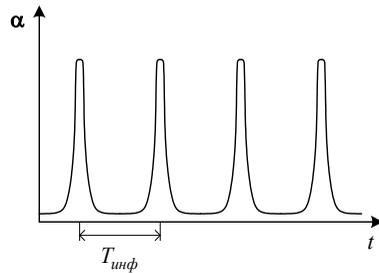


Рисунок 3

ходят однородные гармонические колебания давления с круговой частотой  $\omega_{np}$ , то система (4) отвечает результату усреднения пульсаций, и входящие в неё величины определяют амплитуды соответствующих колебаний. В этой же среде, как об этом говорилось в работе [3], может происходить низкочастотное синфазное колебание угла закручивания зёрён и касательного напряжения, что приводит к изменению коэффициента связи  $\alpha$ .

Предположим, что в силу действия ряда нелинейных факторов этот коэффициент изменяется, как показано на рис. 3, где период  $T_{инф}$  повторения импульсов отвечает, например, известному альфа – ритму, имеющему частоту  $12 \text{ Гц}$ . Тогда точки максимума будут отвечать моментам коммуникации по-

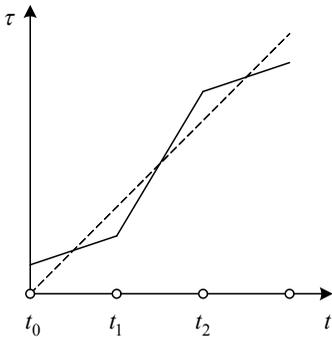


Рисунок 4

лей, и в них происходят основные обмены энергией и информацией.

Заметим, что коэффициент  $\alpha$  и в точках своего максимума остаётся малой величиной, поэтому влияние информационного поля на материальное поле является очень слабым и при дальнейшем анализе не учитывается.

Пусть к моменту  $t_0$  очередной коммуникации в точке  $M_0$  выполняются неравенства

$$\bar{\delta}(M_0, t_0) > \bar{\psi}(M_0, t_0),$$

$$\partial \bar{\delta}(M_0, t_0 - 0) / \partial t > \partial \bar{\psi}(M_0, t_0 - 0) / \partial t,$$

а инерционный коэффициент  $j$  очень мал.

Тогда плотность  $4\alpha(\bar{\psi} - \bar{\delta})$  дополнительной силы приведёт к появлению значительного углового ускорения, которое практически сразу же изменит соотношение между угловыми скоростями,

$$\partial \bar{\delta}(M_0, t_0 + 0) / \partial t < \partial \bar{\psi}(M_0, t_0 + 0) / \partial t,$$

а в момент времени  $t_1 = t_0 + T_{инф}$ , то есть к началу следующей коммуникации, — и между углами разворота:

$$\bar{\delta}(M_0, t_1) < \bar{\psi}(M_0, t_1),$$

$$\partial \bar{\delta}(M_0, t_1 - 0) / \partial t < \partial \bar{\psi}(M_0, t_1 - 0) / \partial t.$$

Таким образом, если считать, что в момент времени  $t_0$  развитие поля  $\bar{\delta}(M, t)$  опережало развитие поля  $\bar{\psi}(M, t)$ , то в момент времени  $t_1$  оно будет отставать. Продолжая изучать этот процесс, в момент времени  $t_2 = t_1 + T_{инф}$  будем иметь неравенства

$$\bar{\delta}(M_0, t_2) > \bar{\psi}(M_0, t_2), \quad \partial \bar{\delta}(M_0, t_2 - 0) / \partial t > \partial \bar{\psi}(M_0, t_2 - 0) / \partial t,$$

то есть информационное поле будет снова опережать материальное.

Изменение служебного времени  $\tau$  для этого случая показано на рис. 4; как и абсолютное время, оно возрастает, но этот рост происходит неравномерно.

Если увеличить амплитуду колебаний информационного поля, то можно добиться того, чтобы

$$\bar{\delta}(M_0, t_1) < \bar{\psi}(M_0, t_0),$$

теперь информационное поле в момент времени  $t_1$  будет воспроизводить картину развития материального поля, которая наблюдалась в прошлом, при некотором значении  $t < t_0$ , а служебное время станет изменяться немонотонно (рис. 5). Возникает эффект *дежавю*, с которым, как известно, в своей жизни сталкивается практически каждый человек. При этом в моменты времени  $t_0, t_2, t_4, \dots$  информационное поле

будет прогнозировать будущее развитие материального поля, и по мере возрастания амплитуды колебаний, глубина этого прогноза увеличивается.

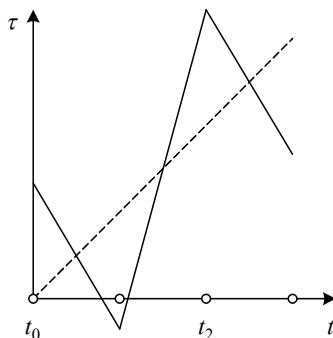


Рисунок 5

**Тайна Нострадамуса.** В книгах, которые не носят статус научных или учебных изданий, описываются технологические приёмы, позволяющие увеличивать амплитуду колебаний информационного поля; эти приёмы были известны человеку уже с древних времён, но их научные исследования находятся в самом начале пути. Одна из технологий описана, например, в научно — популярном издании [8]; она использует два параллельных зеркала и размещённый между ними источник света (в старину для этой цели применяли зажжённые свечи). В соответствие с наиболее вероятным замыслом её создателей, который в дальнейшем был утерян и передавался иносказательно, многократное отражение световых лучей увеличивало колебательную энергию материального поля, и эта энергия передавалась информационному полю. Возможно, со временем были утеряны ещё какие-то важные детали, и эта технология не всегда приводила к желаемому эффекту. Но иногда, если верить сохранившимся свидетельствам участников действия, описанная выше простейшая «машина времени» срабатывала, и перед мысленным взором появлялись картинки из их недавнего прошлого, а также (как им это представлялось) из недалёкого будущего.

Однако служить объяснением для известных феноменов *Нострадамуса*, *Мессинга*, *Ванги* и других людей, которые умели видеть сквозь годы, предоставленная теория раскачивания информационного поля не может. Согласитесь, когда идёт речь о прояснении судьбы целых народов или о предвидении будущего для всего Человечества, то раскачать соответствующее поле одному человеку, пусть он и будет семи пядей во лбу, не под силу.

Поэтому, а также по многим другим причинам, описанную выше схему организации связанных колебаний материального и информационного поля не следует возводить в абсолют; это всего - лишь одна из возможных моделей, причём простейшая, которая ещё подлежит уточнению. В ходе уточнения модели, как это представляется сейчас, обязательно произойдёт *структурирование Глобального поля*, и в разных по своему масштабу событиях будут действовать локальные поля, имеющие различные периоды  $T_{инф}$  повторения импульсов коммуникации (в том числе и такие, которые исчисляются часами, годами или даже веками). И чем больше пространственно-временной масштаб события, тем большими оказываются период и амплитуда колебаний; поэтому, возможно, картины отдалённого будущего уже созданы в информационном поле без участия человека, и ему просто осталось научиться их видеть.

Часть упомянутых периодических процессов хорошо известна (к такому, например, относятся биоритмы суточной и недельной активности, месячный и сезонный циклы развития биосферы, 7-ми годичный цикл развития человеческой личности, а также построенная *Гумилёвым* теория циклического развития этноса и государства); другие ещё предстоит открыть. Считается, что все эти ритмы связаны с периодическими колебаниями, происходящими на Земле, Луне, Солнце и его планетах, а также на ближайших звёздах, но важнейшие детали этой связи пока неизвестны.

Немецкая поговорка утверждает, что «чёрт гнездится в деталях». Сформировав общие представления об устройстве человеческой памяти и механизмах запоминания информации, современная наука так и не смогла ответить на основной вопрос: где именно располагается долговременная память, определяющая личность? Существуют разные варианты ответа – в «астральном теле» (то есть, где-то в непосредственной близости от пользователя), на «небесах», в земных недрах, и так далее. Опыт полётов человека к Луне привёл к расширению *ноосферы Вернадского*, по крайней мере, на ближний к Земле космос. Но переносится ли эта информация в пространстве вместе с движением центра ноосферы и где, на самом деле, располагается этот центр пока неясно. На наш взгляд, заслуживает внимания и принципиально другая версия: *информация о событиях хранится там, где это событие произошло*, а если говорить точнее – в том месте пространства, где создавалась соответствующая копия оперативной памяти человека.

Мы понимаем, что за время жизни каждый человек, двигаясь по Вселенной вместе с Землёй, успевает переместиться на многие миллиарды километров. Поэтому настаивать на столь радикальной версии, не имея на то веских доказательств, не будем. Анализируя современное состояние науки и то место, которое, наконец – то, в ней заняла биология и биофизика, нам остаётся повторить известный призыв *Сократа*: «Человек, познай самого себя!». Тогда и будет разгадана тайна феномена Нострадамуса.

**Эйнштейн как пример для подражания.** Концепция, с которой мы вас познакомим выше, является (среди многих известных теорий такого же рода) наименее радикальной, что даёт ей дополнительные шансы оказаться правильной. Кроме того, она сообщает новый импульс извечному спору *о роли личности в истории*. Мы не собираемся участвовать в этом споре, поскольку считаем, что законы развития общества сложнее законов физики, и дилетантам там не место. Здесь куда уместнее ещё немного поговорить *о роли личности в физике* и том вкладе, который внёс в её развитие *Альберт Эйнштейн*. И в этой связи, прежде всего, следует подчеркнуть то, что, по мнению его коллег, было в этой Личности главным.

- Эйнштейн всю свою жизнь брался за решение научных проблем, которые большинство физиков его времени отпугивали своей сложностью.
- Он занимался разделами физики, которые в начале его деятельности считались абстрактной игрой ума, а в конце – стали определять темпы и направления научно-технического прогресса всего Человечества.
- Он получил классическое инженерное образование и, занимаясь созданием новой физики, постоянно стремился к ясности и конкретности её основных положений, но достигнутым в этом направлении результатом остался недоволен.
- Он совершал ошибки и не боялся признавать их.
- Он заложил основы квантовой физики, но всю дальнейшую жизнь стремился разрушить её здание, выстроенное на этом фундаменте другими учёными по неправильным, как он считал, «чертежам».
- Он был инициатором создания американской ядерной бомбы, но вспоминал об этом с сожалением.

Да, во всех своих начинаниях Эйнштейн не был одинок и при получении основных результатов лишь на один – два шага опережал своих не менее знаменитых коллег (*Анри Пуанкаре, Давида Гильберта, и некоторых других*). Но в те годы, когда совершались эти научные открытия, он опережал их постоянно и, в результате, заработал огромный научный авторитет, который затем использовал для достижения важных целей.

Любая истина относительна, но знаменитая *формула Эйнштейна*, связывающая энергию и массу, останется в физике на все времена. С другой стороны, со времени получения этой формулы прошло более 100 лет, и нужно быть готовым к тому, что уже очень скоро появится Учёный, который не побоится авторитета Эйнштейна, и будет, *со знанием дела*, последовательно отрицать другие постулаты его теорий. Именно так, в своё время, поступал сам Эйнштейн, когда, не убоившись авторитета Ньютона, разрушал здание классической механики. В этом состоит объективная логика развития науки, и истории остаётся только подбирать фамилии для её действующих лиц и исполнителей главных ролей.

Эйнштейн работал над созданием единой теории Материального поля, но завершить эту работу не смог. Среди причин называют наступивший в

1930-е годы крайне неблагоприятный (для теоретика такого масштаба) этап развития экспериментальной физики.

Чтобы понять эти причины, предположим, что во времена Ньютона в экспериментах были бы уже обнаружены некоторые эффекты, относящиеся к релятивистской физике. Тогда Ньютон просто не смог бы построить свою механику, и революция в развитии науки была бы отложена на века.

Нечто подобное происходило в 20-м столетии, когда бурный поток принципиально новых экспериментальных результатов не давал времени для широких и плодотворных теоретических обобщений. Но времена изменились, и новые инструменты исследования (например, андронный колайдер), стали настолько сложными и дорогими, что прогресс экспериментальной физики, наконец-то, затормозился. И это обстоятельство, а также опыт и результаты, достигнутые многими поколениями учёных, вселяют надежду рассчитывать на скорое появление в физике новой синергетической теории, такой же всеобъемлющей и полезной, каковой была классическая механика Ньютона. Если судить по направленности статей [1-3], то это событие может произойти уже совсем скоро.

Суммируя, можно заключить, что «мир без Эйнштейна» был бы похож на наш сегодняшний мир, но во многом он был бы другим.

**Заключение.** Завершая статью, мы просили бы своих читателей не спешить с оценкой описанной здесь научной гипотезы; что в ней является правдой, а что вымыслом – это рассудит время. Напомним также известные слова *Леонардо да Винчи*: «*Науки, которые не родились из опыта, этой основы всех познаний, бесполезны и полны заблуждений*».

**Список литературы:** 1. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 2. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Волновые поля высокочастотных синфазных колебаний упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 69. – С.35-45. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды // – см. статью в настоящем сборнике. 4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 5. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 6. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 68. – С.23-37. 7. *Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И.* Векторный анализ. – М.: Наука, 1979. 8. *Иванов С.М.* Абсолютное зеркало – М.: Знание, 1986.

*Поступила в редколлегию 03.02.11*

**В.Б. ГРИНЕВ**, д-р техн. наук, проф., ХГТУСА, Харьков;  
**Е.Г. ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**В.Т. ГРИШАКИН**, канд. техн. наук, ассист., ХНАДУ, Харьков

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОДВИЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ВЯЗКО-УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

В статті пропонується засіб розв'язання прямих та обернених задач механіки деформованого твердого тіла на прикладі пластини, що лежить на пружній інерційній основі та перебуває під дією зосередженої рухомої сили. Задачі розглянуті для пластини теорії Кірхгоффа. Моделювання основи здійснено за допомогою теорії Власова-Леонтьєва. Урахування дисипації енергії коливань здійснено за допомогою моделі Фойгта.

В статье предлагается способ решения прямых и обратных задач механики деформируемого твердого тела на примере пластины, лежащей на упругом инерционном основании и находящейся под действием сосредоточенной подвижной силы. Задачи рассмотрены для пластин теории Кирхгоффа. Моделирование основания осуществлено с помощью теории Власова-Леонтьева. Учет диссипации энергии колебаний выполнен с помощью модели Фойгта.

The direct and inverse problems of deformable rigid body mechanics solving methods on example of the viscoelastic plate on elastic foundation under the action of the concentrated mobile force are offered in this article. Problems are considered for plate of the Khirhgoff theory. The foundation modeling is conducted with the help of the Vlasov-Leontiev theory. The account of fluctuation energy dissipation is carried out by means of the Foight model.

**Введение.** Настоящая статья посвящена решению обратной задачи динамики вязко-упругих пластин, лежащих на упругом инерционном основании типа Власова-Леонтьева. Рассмотренная задача относится к проблеме идентификации неизвестных нагрузок, воздействующих на элементы конструкций. При этом определение внешних сил производится на основе анализа их косвенных проявлений [1-3].

**Анализ публикаций.** В идейном смысле рассмотренные здесь задачи примыкаю к кругу вопросов, которые были рассмотрены в монографиях [4,5], а именно к задачам математической физики на материале математической теории упругости.

**Постановка задачи.** Задачу будем рассматривать с использованием дифференциального уравнения классической теории, которое приведено в работе [6], а именно:

$$\left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) D \Delta \Delta w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = q_z(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\alpha$  – время релаксации деформаций;  $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Предполагается, что колебания пластины нестационарны, а диссипация энергии колебаний в материале происходит согласно модели Фойгта [7].

Контакт между пластиной и основанием примем двухсторонним, причем горизонтальные перемещения отсутствуют как в материале пластины, так и в основании. Распределение вертикальных перемещений в основании описываются функцией  $\psi(z)$ , т.е.  $w_0(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \cdot \psi(z)$ . При этом функцию распределения  $\psi(z)$  будем выбирать в виде [8]:

$$\psi(z) = sh(\gamma_0(H - z)) / sh(\gamma_0 H), \quad (2)$$

где  $H$  – толщина сжимаемого слоя основания;  $\gamma_0$  – объемный вес материала основания.

На рис. 1 изображена схема рассматриваемой механической системы – прямоугольной плиты на упругом основании, вдоль которой движется сосредоточенная сила  $P(t)$  в направлении возрастания координаты  $x$ .

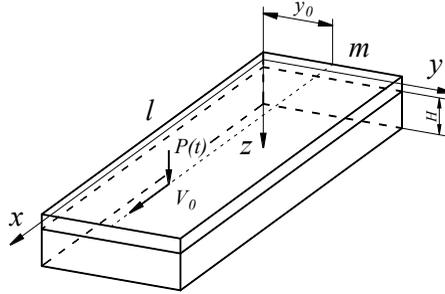


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины на основании

Поперечная нагрузка, действующая на пластину, имеет вид

$$q_z(x, y, t) = P(t)\delta(x - V_0 t)\delta(y - y_0) - R(x, y, t), \quad (3)$$

где  $P(t)$  – произвольная функция времени;  $R(x, y, t)$  – реакция упругого основания.

**Решение прямой задачи.** Согласно методике, предложенной в монографии [8], величина реактивных сил определяется в форме

$$R(x, y, t) = -2t_1 \Delta w(x, y, t) + k_1 \cdot w(x, y, t) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где  $t_1 = \frac{E_0}{4(1 + \nu_0)} \int_0^H \psi^2(z) dz$ ;  $k_1 = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \int_0^H \psi'^2(z) dz$ ;  $m_0 = \rho_{zp} \int_0^H \psi^2(z) dz$ ;

$$E_0 = E_{zp} / (1 - \nu_{zp}^2); \nu_0 = \nu_{zp} / (1 - \nu_{zp}).$$

После подстановки в уравнение (1) выражений (3) и (4) получим

$$(1 + \alpha \partial / \partial t) D \Delta \Delta w(x, y, t) - 2t_1 \Delta w(x, y, t) + k_1 \cdot w(x, y, t) + (m_0 + m_1) \partial^2 w / \partial t^2 = P(t) \delta(x - V_0 t) \delta(y - y_0), \quad (5)$$

где  $m_1 = \rho \cdot h$  – удельная масса пластины.

Решение уравнения (5) искалось в форме двойного ряда Фурье

$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_j w_{kj}(t) \sin(k\pi x / l) \sin(j\pi y / m). \quad (6)$$

Используя для решения указанного уравнения метод Фурье, а также воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций и свойством  $\delta$  - функции Дирака, а именно

$$\int_a^b f(x) \delta(x - c) dx = f(c), \quad a < c < b,$$

приведем (5) к виду

$$(m_1 + m_0) d^2 w_{kj}(t) / dt^2 + \alpha D dw_{kj}(t) / dt \cdot (\lambda_k^2 + \mu_j^2) + w_{kj}(t) \times \left( D(\lambda_k^2 + \mu_j^2)^2 - 2t_1(\lambda_k^2 + \mu_j^2) + k_1 \right) = (4 / ml) P(t) \cdot \sin(\lambda_k V_0 t) \cdot \sin(\mu_j y_0). \quad (7)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (7) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа во времени [9]. В пространстве изображений полученное уравнение примет вид

$$s^2 w_{kj}^L(s) + 2\tilde{n}_{kj} s w_{kj}^L(s) + \tilde{p}_{kj}^2 w_{kj}^L(s) = (4 / lm(m_1 + m_0)) F_{kj}^L(s), \quad (8)$$

где

$$2\tilde{n}_{kj} = \alpha D (\lambda_k^2 + \mu_j^2) / (m_1 + m_0); \quad \tilde{p}_{kj}^2 = \left[ D(\lambda_k^2 + \mu_j^2)^2 - 2t_1(\lambda_k^2 + \mu_j^2) + k_1 \right] / (m_1 + m_0);$$

$$F_{kj}^L(s) \rightarrow P(t) \sin \lambda_k V_0 t \sin \mu_j y_0.$$

Решение уравнения (8) в пространстве изображений запишем в форме

$$w_{kj}^L(s) = \frac{4}{lm(m_1 + m_0)} \frac{F_{kj}^L(s)}{s^2 + 2\tilde{n}_{kj} s + \tilde{p}_{kj}^2}. \quad (9)$$

Используя стандартные правила обратного преобразования Лапласа, а также табличные соотношения справочника [9], получим

$$w_{kj}(t) = \frac{4}{lm(m_1 + m_0)} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kj}(t-\tau)} \frac{\sin \tilde{p}_{\partial k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial k} > 0;$$

$$w_{kj}(t) = \frac{4}{lm(m_1 + m_0)} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kj}(t-\tau)} \frac{\text{sh} \tilde{p}_{\partial k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial k} < 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \tilde{p}_{\partial k} = \sqrt{\tilde{p}_{kj}^2 - \tilde{n}_{kj}^2}.$$

Общий вид решения дифференциального уравнения (1) при нагрузке, заданной в виде (3), получается путем подстановки формул (10) в ряд (6).

В рамках решения прямой задачи были проведены расчеты для прямоугольной пластины на упругом основании со следующими геометрическими и механическими характеристиками: длина пластины  $l=7$  м; ширина  $m=3$  м; толщина  $h=0,2$  м; плотность материала пластины  $\rho=2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости материала пластины  $E=3,2 \cdot 10^3$  МПа; коэффициент Пуассона материала пластины  $\nu=0,3$ ; плотность материала основания  $\rho_{cp}=2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости основания  $E_{cp}=15,3$  МПа; коэффициент Пуассона материала основания  $\nu_{cp}=0,2$ ; толщина деформируемого слоя основания  $H=1$  м; величина подвижной нестационарной силы  $P=1$  кН; скорость движения силы  $V_0=500$  м/с.

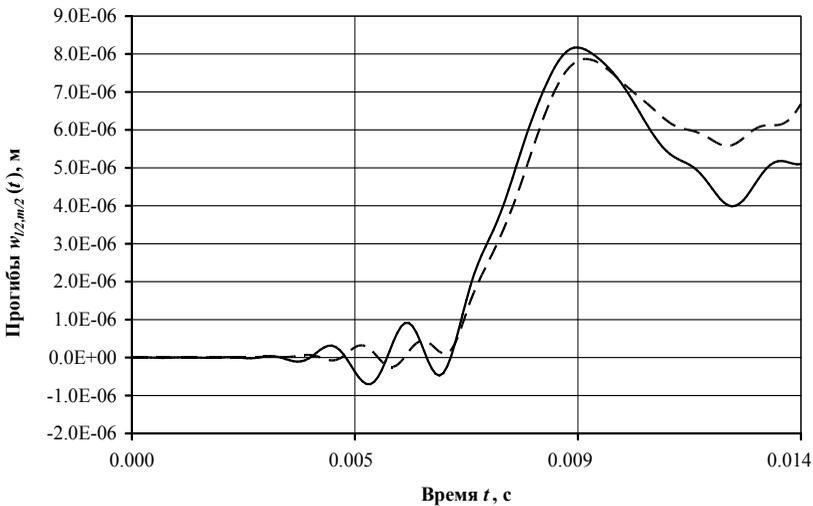


Рисунок 2 – Сопоставление результатов расчета перемещений центра пластины

На рис. 2 приведены результаты расчета перемещений точки с координатой  $(l/2, m/2)$  для пластины с внутренним трением, соответствующим значению  $\alpha=10^{-5}$  с, вычисленные с применением разложения в ряды Фурье (сплошная кривая) и с помощью теории метода конечных разностей (пунктирная кривая).

Из рис. 2 можно сделать вывод о том, что полученные двумя существенными разными методами результаты расчета перемещений центра вязко-упругой пластины на упругом основании типа Власова-Леонтьева, вызванные действием на пластину подвижной силы, хорошо согласованы.

**Решение обратной задачи.** Необходимость рассмотрения обратных задач связана, например, с открывающейся в результате их решения возможностью определения напряженно-деформированного состояния конструкций без априорного знания о воздействующих на них нагрузках. В состав комплекса операций, необходимых для решения обратной задачи для пластины, лежащей на упругом основании, может входить установка датчика для регистрации в произвольной точке исследуемой пластины перемещений или деформаций, численные значения которых используются в рамках решения обратной задачи для определения нагрузки.

В работах [10, 11] отмечалось, что решения обратных задач математической физики представляют собой сложнейшую проблему. Это же относится и к задачам математической теории упругости. Как правило, решение их в замкнутой аналитической форме практически невозможно, и их удается получить только для небольшого числа начально-краевых задач. Здесь же применяется метод решения некорректных задач математической теории упругости, основанный на введении регуляризирующего функционала согласно теории А.Н. Тихонова [11].

Как показали исследования [1-3], эффективным способом решения аналогичных задач является регуляризация матричного уравнения, согласно которого решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(A^T \cdot A + \alpha \cdot C) \cdot q = A^T \cdot w, \quad (11)$$

где  $A = A^* \cdot \sin(\lambda_k \cdot V_0 t)$ ;  $q$  – вектор, определяющий изменение силы во времени;  $C$  – трехдиагональная матрица, представленная в монографии [11].

На рис. 3 показаны результаты численного эксперимента, проведенного на примере пластины с указанными ранее геометрическими и механическими характеристиками.

В качестве исходных данных было принято изменение прогиба (кривая 3) в точке пластины с координатой  $(l/4, m/2)$ , вычисленное по формулам (6), (10), которое незначительно «зашумлялось» случайной величиной, составляющей максимум 2% от основной величины (кривая 2). На представленном рис. 3 кривые 2 и 3 при визуальной регистрации практически совпадают. Сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принятой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки с учетом эффекта «зашумления» исходных данных.

**Выводы.** На основе представленных результатов можно сделать вывод, что процедура применения сглаживающего функционала А.Н. Тихонова в проблеме изучения колебаний пластины на упругом основании при наличии в

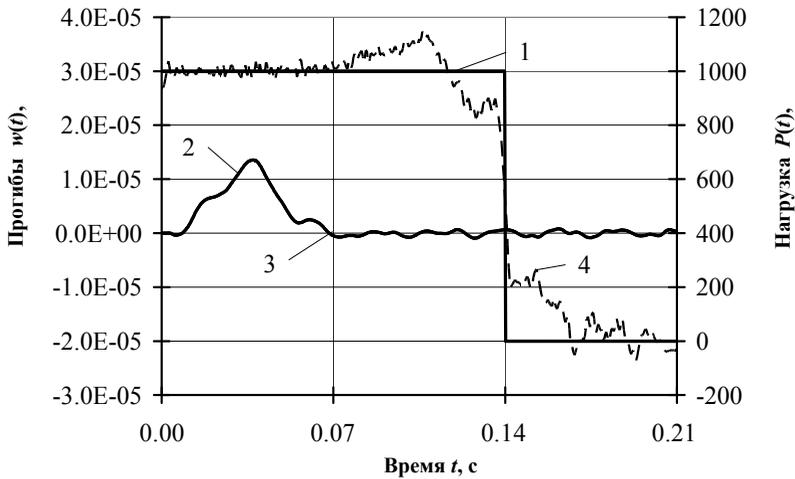


Рисунок 3 – Результат идентификации

уравнениях их движения диссипативных членов может довольно эффективно использоваться при решении обратных задач. Ранее эта процедура использовалась только при идентификации подвижных нагрузок для упругих и вязкоупругих балок и пластин без основания [1-3].

В заключение укажем, что на основе решения обратных задач теории упругости могут быть рассмотрены и принципиально другие проблемы, имеющие как фундаментальное, так и прикладное значение.

**Список литературы:** 1. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Гришакин В.Т. Идентификация подвижных нагрузок, действующих на балки и плиты. Збірник наукових праць Національного гірничого університету. – 2006, №24. – С. 145-150. 2. Янютин Є.Г., Гнатенко Г.О., Гришакин В.Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007, №8. – С. 18-23. 3. Є.Г. Янютин, В.Т. Гришакин. Идентификация подвижных нагрузок, действующих на вязко-упругие балки и плиты. Сборник трудов // International Conference «Dynamical system modeling and stability investigation», (Киев, 27-29 мая 2009 г.). К.: Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченко, 2009. – С. 267. 4. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. К.: Наук. думка, 1975. – 294 с. 5. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений. К.: Наук. думка, 1979. – 211 с. 6. Василенко Н.В. Теория колебаний: Учебное пособие. К.: Вища школа, 1992. – 430 с. 7. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Наука. – 1960. – 186 с. 8. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 492 с. 9. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа. – 1966. – 405 с. 10. Вапудьян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. – 224 с. 11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 288 с.

Поступила в редколлегию 23.03.11

**С.С. ДОБРОТВОРСКИЙ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**Е.В. БАСОВА**, аспирант., НТУ «ХПИ»;  
**А.А. РЕПЕТА**, студент, НТУ «ХПИ»

## **ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБРАБАТЫВАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

В роботі наведені області застосування вейвлетних перетворень. Представлене обґрунтування перспектив застосування вейвлет-аналізу в технології машинобудування. Розглянуті переваги даного методу над перетворенням Фур'є. Наведені способи розрахунку шорсткості поверхні за допомогою вейвлет-аналізу.

В работе приведены области использования вейвлет-преобразований. Представлено доказательство перспектив использования вейвлет-анализа в технологии машиностроения. Рассмотрены преимущества данного метода над преобразованием Фурье. Приведены способы расчета шероховатости поверхности с помощью вейвлет-анализа.

The paper presents the application of wavelet transforms. Prospects for the application of wavelet analysis in mechanical engineering were presented. The advantages of this method over Fourier transforms were considered. Methods for calculating the surface roughness using wavelet analysis were given.

**Введение.** Вейвлет-анализ является на сегодняшний день одной из самых перспективных технологий анализа данных, его инструменты находят применение в самых различных сферах интеллектуальной деятельности.

Вейвлетное преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа, типичный представитель которого – классическое преобразование Фурье. Термин "вейвлет" (wavelet) в переводе с английского означает "маленькая (короткая) волна". Вейвлеты - это обобщенное название семейств математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной базовой (порождающей) посредством ее сдвигов и растяжений по оси времени. Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте. Как правило, вейвлет-преобразования (WT) подразделяют на дискретное (DWT) и непрерывное (CWT).

DWT используется для преобразований и кодирования сигналов, CWT – для анализа сигналов. Вейвлет-преобразования в настоящее время принимаются на вооружение для огромного числа разнообразных применений, нередко заменяя обычное преобразование Фурье. Это наблюдается во многих областях науки. В последнее время существует тенденция к использованию вейвлет-анализа в машиностроении для описания шероховатости, которую рассматривают как аналог сигнала.

Теория вейвлетов не является фундаментальной физической теорией, но она дает удобный и эффективный инструмент для решения многих практических задач. Основная область применения вейвлетных преобразований – анализ и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве, когда результаты анализа должны содержать не только частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения о локальных координатах, на которых проявляют себя те или иные группы частотных составляющих или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала.

**Постановка задачи.** Одна из наиболее актуальных задач получения качественной поверхности – задача снижения шероховатости. Одним из параметров качества механически обработанной поверхности считается высота ее микронеровностей, которую можно выявить из профилограммы.

Профиль обработанной поверхности (даже после высококачественной обработки) не является идеально гладким. Он имеет большое количество отклонений различной формы и размеров и нуждается в последующем анализе, который можно осуществить посредством преобразования Фурье. Недостатком этого метода является невысокая точность представления локальных особенностей сигналов.

Вейвлетный анализ – это современный и перспективный метод обработки данных, одним из его преимуществ является способность выполнения местного анализа, то есть анализ ограниченной области большого сигнала. Аппарат вейвлет-анализа получил своё развитие в начале 1980-х годов в работах Морле, Гросмана и некоторых других учёных [1-3]. Результаты, полученные в самых различных областях с помощью вейвлет-анализа, усилили интерес к этому направлению и способствуют его непрерывному развитию, в том числе и в области технологии машиностроения. В работе Дианова А. А. [4] вейвлет-анализ использовался для исследования профиля поверхности деталей с износостойкими покрытиями, обработанных прерывистыми кругами. Хвостиков А.С., Курдюков В.И. и др. исследователи применили вейвлет-анализ для диагностики режущего инструмента [5, 6].

Однако проведенный анализ современных работ показал, что научно-техническая литература недостаточно рассматривает результаты применения вейвлет-анализа для исследования шероховатости после процесса высокоскоростного фрезерования.

В настоящий момент существует необходимость разработки алгоритма описания шероховатости поверхности детали на базе вейвлет-анализа, аналогично принципу обработки широкополосного случайного шума из измеренного сигнала, а также разрешения группы дефектов сплошности в изделии и количественной оценки геометрических параметров отдельных дефектов.

**Материнский вейвлет и вейвлет-функции.** Существует большое количество различных материнских вейвлет функций: гладкие вейвлет функции, функции с простым математическим описанием, вейвлет с простыми связанными функциями, сжатые вейвлет функции (Добеши) [7,8]. Материнский вейвлет используется для преобразования, масштабирования и трансформирования остальных функций (1):

$$\psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad (1)$$

где  $b$  – параметр перевода и параметр масштабирования.

**Непрерывное вейвлет-преобразование.** Непрерывное вейвлет - преобразование похоже на преобразование Фурье (ПФ) [9], за исключением того, что вместо основания бесконечных синусов и косинусов различных частот SWT сравнивает сигнал с растяжением и репринтами версий одной основной функции – материнским вейвлетом. Определяется SWT следующим образом (2):

$$W_{(a,b)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( s(t) / \sqrt{|a|} \right) \psi((t-b)/a) dt, \quad (2)$$

где  $s(t)$  – любой, зависящий от времени, сигнал;  $\psi(t)$  – материнский Вейвлет (расширенный/масштабированный) ;  $b$  – сдвиг во времени;  $W_{(a,b)}$  – вычисляемый

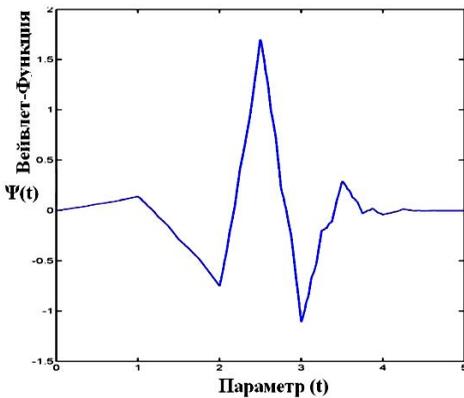


Рисунок 1 – Вейвлет Добеши

вейвлет-коэффициент масштаба  $a$  и положения  $b$ .

Временные и частотные расширения SWT зависят от масштаба. В области высокочастотной гармоники наблюдается хорошее разрешение во времени, но частотное разрешение оставляет желать лучшего. Это связано с тем, что вейвлет-анализ хорошо локализован во времени, но плохо локализован по частоте. В области низкочастотной гармоники наоборот наблюдается хорошее частотное разрешение и слабое временное разрешение. Это означает, что для сигнала с быстрыми изменениями по частоте на высоких частотах и малыми изменениями - в области низких частот, вейвлет-анализ в результате даст лучшее временное представление частоты сигнала, чем ПФ (рис. 1).

**Программное обеспечение.** Среди профессионального и наиболее современного программного обеспечения, способного решать довольно сложные задачи практического применения вейвлетов и вейвлет-преобразований, можно выделить три основных программных пакета Mathcad 14 Professional, Matlab 7, Mathematica 4/4.1. Эти программные комплексы применимы как и для самого анализа свойств вейвлет-функций и вейвлет-преобразований, так и для их использования в задачах обработки цифровых сигналов и изображений промышленных деталей. Непосредственно для работы с вейвлетами используются соответствующие расширения, интегрированные в эти программные пакеты: Wavelet Toolbox (Matlab), Wavelet Extension Pack (Mathcad), Wavelet Explorer (Mathematica).

**Математическая модель вейвлет-анализа в исследовании шероховатости поверхности.** Любая поверхность представляет собой не только основную кривую шероховатости, но и микрошероховатость наложенную на контур основной [10,11]. Представим шероховатость в виде сигнала, а микрошероховатость в виде шумов. Для повышения качества детали необходимо уменьшить шероховатость поверхности. Следовательно сгладить микрошумы с помощью вейвлет-преобразования исходного сигнала.

Модель такой шероховатости можно записать следующим образом (3):

$$S(t) = f(t) + \sigma e(t), \quad (3)$$

где  $f(t)$  – основная кривая шероховатости,  $e(t)$  – микрошероховатость,  $\sigma$  – уровень микрошероховатости,  $s(t)$  – исследуемая шероховатость.

В большинстве случаев можно предположить, что функция  $e(t)$  описывается моделью Гаусса, и информация о микрошероховатости содержится в высокочастотной области спектра, а о шероховатости – в низкочастотной, если проводить аналогию с сигналом.

Для такой модели удаление микрошероховатости при помощи вейвлет-преобразования выполняется в четыре этапа: 1) Разложение кривой шероховатости по базису вейвлетов; 2) Выбор порогового значения микрошероховатости для каждого уровня разложения. 3) Пороговая фильтрация коэффициентов детализации. 4) Реконструкция кривой.

Традиционно для решения таких задач применяется известный из практики фильтрации метод подавления высокочастотных составляющих спектра. Кроме того, с использованием вейвлетов есть еще один метод – ограничение уровня детализирующих коэффициентов. Задав определенный порог для их уровня и «отсекая» коэффициенты ниже этого порога, можно значительно снизить уровень шума и сжать сигнал. Важным моментом является то, что пороговый уровень можно устанавливать для каждого коэффициента отдельно. Операция сжатия сигналов с удалением малозначимых значений вейвлет-коэффициентов также выполняется на основе определенных пороговых ограничений их значений, и во многом практически тождественна операциям удаления шумов.

Со статистической точки зрения такая методика представляет собой не-

параметрическую оценку регрессионной модели шероховатости с использованием ортогонального базиса. Методика наилучшим образом работает на достаточно гладких кривых, т.е. на шероховатости, в разложении которой лишь небольшое количество коэффициентов детализации значительно отличается от нуля.

Выбор используемого вейвлета и глубины разложения, в общем случае, зависит от свойств конкретной шероховатости. Более гладкие вейвлеты создают более гладкую аппроксимацию кривой, и наоборот – "короткие" вейвлеты лучше отслеживают пики аппроксимируемой функции.

Глубина разложения влияет на масштаб отсеиваемых деталей. Другими словами, при увеличении глубины разложения модель вычитает микрошероховатость все большего уровня, пока не наступит "переукрупнение" масштаба деталей и преобразование начнет искажать форму исходной кривой. Интересно, что при дальнейшем увеличении глубины разложения преобразование начинает формировать сглаженную версию исходной кривой шероховатости, т.е. отфильтровывается не только шум, но и некоторые локальные особенности (выбросы) исходной кривой.

**Анализ результатов.** При использовании любой технологии получения поверхностей деталей на формирование микрорельефа оказывают влияние многочисленные факторы, включая чисто случайные, независимые друг от друга. Это практически означает, что профиль реальной поверхности можно рассматривать как реализацию случайной функции, а саму микрогеометрию – как реализацию случайного поля. Задачу правильной фильтрации аналогового сигнала профиля мы предпочли решать посредством методики фильтрации профиля с помощью его амплитудного спектра. Известно, что информацию о шероховатости профиля содержит именно падающая часть спектра профиля [12].

Отметим, что при выборе порога микронеровностей используют, как правило, критерии, минимизирующие квадратичную функцию потерь для выбранной модели. Существует множество таких критериев, но их рассмотрение выходит за рамки этой статьи. В качестве примера приведем выражение для так называемого "универсального" критерия, вполне подходящего для модели Гаусса микрошероховатости с матожиданием 0 и дисперсией 1 (4):

$$\theta = \sqrt{2 \ln(n)}, \quad (4)$$

где  $n$  – длина выборки,  $\theta$  – пороговое значение.

Если уровень микронеровностей (для гауссовского распределения – это среднеквадратичное отклонение) отличается от 1, то значение порога должно быть масштабировано на эту величину.

Для фильтрации коэффициентов детализации, выполняемой на следующем этапе, лучше использовать метод "мягкой" пороговой фильтрации. При этом коэффициенты, абсолютное значение которых меньше порогового, обнуляются, а остальные – "подтягиваются" к нулевому значению на величину порога(5):

$$y = \begin{cases} x + \theta, & \text{если } x < 0 \text{ и } |x| > \theta \\ x - \theta, & \text{если } x > 0 \text{ и } |x| > \theta, \\ 0, & \text{если } |x| \leq \theta \end{cases} \quad (5)$$

где  $x$  – значение коэффициента до фильтрации,  $y$  – значение коэффициента после фильтрации,  $\theta$  – порог.

На рис. 2, в соответствии с вышеизложенным материалом, нами представлено графическое отображение результата очистки некоторой шероховатости с элементами микронеровностей с помощью гладкого вейвлета (Добеши 7-го порядка, 5 уровней разложения), на рис.3 – то же, но с использованием более короткого вейвлета (Добеши 2-го порядка, лучше отслеживаются пики сигнала), на рис.4 – результат "переукрупнения" (7 уровней разложения, сглаживаются локальные особенности кривой).

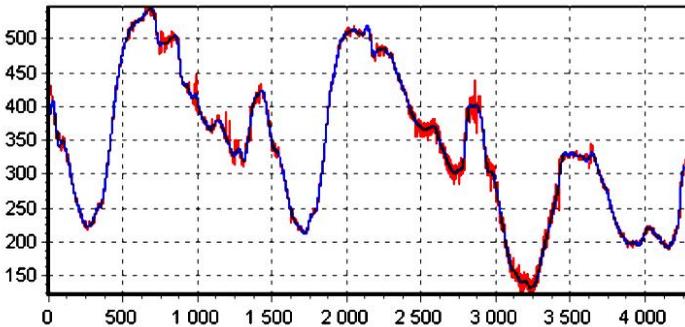


Рисунок 2 – Очистка вейвлетом Добеши 7-го порядка, 5 уровней разложения

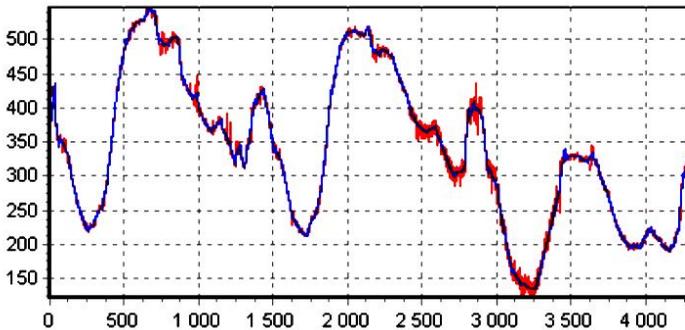


Рисунок 3 – Очистка вейвлетом Добеши 2-го порядка

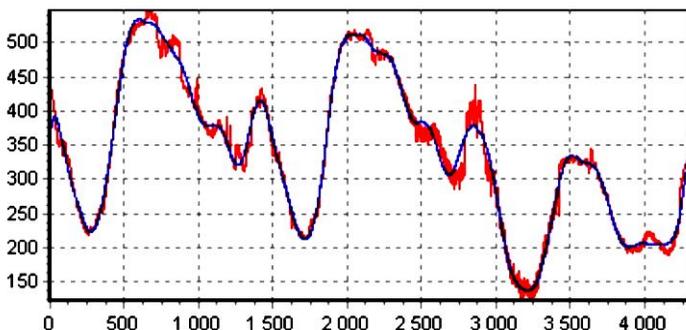


Рисунок 4 – Очистка вейвлетом Добеши в 7 уровней разложения

В результате проведённых экспериментов с использованием вейвлета Добеши мы определили, что структура исследуемого сигнала на самых больших частотах имеет фрактальный характер, следовательно, для её анализа необходимо применение метода стохастического анализа (теории случайных процессов), что в результате позволит оценить и контролировать качество механообработанных поверхностей. Следует отметить, что при стохастическом анализе шероховатости поверхности изначально необходимо установить корреляции размерностей, что, по сути, является базой автоматизации контроля качества поверхностей и критерием различия исследуемых величин от шума.

**Выводы.** Вейвлет-анализ является на сегодняшний день одной из самых перспективных технологий анализа данных. Вейвлет-преобразования рассматривают анализируемые временные функции в терминах колебаний, локализованных по времени и частоте. Основная область применения вейвлетных преобразований – анализ и обработка сигналов и функций, нестационарных во времени или неоднородных в пространстве. Результаты анализа должны содержать не только частотную характеристику сигнала (распределение энергии сигнала по частотным составляющим), но и сведения о локальных координатах, на которых проявляют себя те или иные группы частотных составляющих или на которых происходят быстрые изменения частотных составляющих сигнала.

Профиль обработанной поверхности (даже после высококачественной обработки) не является идеально гладким. Он имеет большое количество отклонений различной формы и размеров и нуждается в последующем анализе, который можно осуществить посредством преобразования Фурье. Отметим, что профили реальных поверхностей с точки зрения математики представляют собой реализацию случайных функций. Из математики широко известно, что наибольшей информацией о профиле, как о случайной функции, облада-

ют функции плотности распределения его ординат и углов наклона. Отсюда следует вывод, что такие функции целесообразно использовать в качестве критерия оценки и контроля микрогеометрии поверхности. Применение вейвлет-анализа позволяет в полной мере оценить преимущества использования таких графических представлений различных функций в качестве критериев оценки и контроля микрогеометрии как графики функций распределения ординат и углов наклона профиля, графики опорных кривых (кривых Аббота), непосредственно графические изображения самих профилей, и, в идеале, микротопографию поверхности. Выбор используемого вейвлета и глубины разложения, в общем случае, зависит от свойств конкретной шероховатости. Более гладкие вейвлеты создают более гладкую аппроксимацию кривой, и наоборот – "короткие" вейвлеты лучше отслеживают пики аппроксимируемой функции.

Таким образом, результатом данной работы является предложение и обоснование перспектив применения альтернативного метода проведения анализа, который представляет собой особый тип линейного преобразования сигналов и отображаемых этими сигналами фактических данных о процессах и свойствах природных сред и объектов.

**Список литературы:** 1. *Grossmann A.* / Decompression of Hardy Function into Square Integrable Wavelets of Constant Shape / *A. Grossman, J. Morlet* // *SIAM Journal Mathematical analysis.* – 1984. – Vol. 15. – P. 723-736. 2. *Morlet J.* Sampling Theory and Wave Propagation in NANO ASI Series / *J. Morlet* // *Acoustic signal. Image processing and recognition.* – 1983. – Vol.1. – P.233-261. 3. *Morlet J.* Wave Propagation and Sampling Theory / *J. Morlet, G. Arens, I. Fourgeau et al.* // *Geophysics.* – 1982. – Vol. 47. – P. 203-236. 4. *Дианов А.А.* Технологическое обеспечение качества деталей с износостойкими покрытиями за счёт управления параметрами точности основы и покрытия [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.02.08 / *Дианов Александр Андреевич*; Алтайск. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Б., 2010. – 16 с. 5. *Хвостиков А.С.* Диагностика износа режущего инструмента на основе вейвлет-анализа сигнала виброакустической эмиссии [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.03.01 / *Хвостиков Александр Станиславович*; Комсомольск-на-Амуре гос. техн. ун-т. – Комсомольск-на-Амуре, 2007.–157 с. 6. *Кудряков В.И.* Перспективы применения вейвлет-анализа для диагностики износа режущего инструмента [Текст] / *В.И. Кудряков, А.К. Остапчук, В.Е. Овсянников и др.* // *Известия Тульского государственного университета. Серия : Технические науки.* Т., 2009. – №4. – С. 253-256. 7. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: Основы теории и примеры применения [Текст] / *Н.М. Астафьева* // *Успехи физических наук.* – 1996. – т.166. – № 11. – С. 1145-1170. 8. *Дремлин И.Л.* Вейвлеты и их использование [Текст] / *И.Л. Дремлин* // *Успехи физических наук.* – 2001. – т.171. – № 5. – С. 465-501. 9. *Дьяконов В.,* MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник [Текст] / *В. Дьяков, И. Абраменкова.* – СПб.: Питер, 2002. – 608 с. 10. Теория и применение вейвлетов [Электронный ресурс]. Теория и применение вейвлет-анализа / *Я. А. Илюшин* // Вейвлеты. – 2009. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM). – Библиогр.: в конце ст. 11. *Петухов А.П.* Введение в теорию базисов всплесков [Текст]/ *А.П. Петухов.* – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999. – 132с. 12. *Мусалимов В.М.* Динамика фрикционно-го взаимодействия / *В.М Мусалимов, В.А. Валетов* – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. – 191 с.

*Поступила в редколлегию 11.04.2011*

**І.С. ЗАВ'ЯЛОВ**, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;  
**Ю.М. КУХТЕНКОВ**, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»;  
**О.М. ГРИШИН**, ст. викл., НТУ «ХПІ»

## **РОЗРАХУНОК ВТРАТ ВІД ОСЬОВОГО ВИХРОВОГО ДЖГУТА У ВІДСМОКТУЮЧІЙ ТРУБІ РАДІАЛЬНО-ОСЬОВОЇ ГІДРОТУРБИНИ**

Проведені експериментальні дослідження з визначення у відсмоктуючій трубі втрат від осьового вихрового джгута у модельній гідротурбіні РО310. Втрати у відсмоктуючій трубі від вихрового джгута визначалися, як різниця повних експериментальних втрат енергії на різних режимах роботи та розрахункових втрат у відсмоктуючій трубі - циркуляційних, внутрішніх у відсмоктуючій трубі і втрат, пов'язаних з перерозподілом швидкостей внаслідок завихорення потоку. Ключові слова: гідравлічні втрати енергії, відсмоктуюча труба, робоче колесо, вихровий джгут.

Проведены экспериментальные исследования по определению потерь от осевого вихревого жгута в модельной гидротурбине РО310. Потери от вихревого жгута определялись как разность полных экспериментальных потерь энергии на различных режимах работы и расчетных потерь – циркуляционных, внутренних в отсасывающей трубе и потерь, связанных с перераспределением меридианальных скоростей вследствие завихренности потока. Ключевые слова: гидравлические потери энергии, отсасывающая труба, рабочее колесо, вихревой жгут.

Are spent experimental researches by definition of losses from a vortical swirl in modelling hydraulic turbine RO310. Losses from a vortical swirl were defined as a difference of full experimental losses of energy on various operating modes and settlement losses - circulating, internal of a draft tube and the losses connected with redistribution meridianal of speeds owing to a curling of a stream. Key words: hydraulic losses of the energy, draft tube, work wheel, vortical swirl.

**Вступ.** Класифікація гідравлічних втрат у гідротурбінах умовна. Найбільшою мірою це відноситься до втрат у відсмоктуючій трубі. Так, до втрат безпосередньо в самій трубі, безумовно, варто віднести внутрішні втрати, що є втратами у приграничному шарі на стінках відсмоктуючої труби. Втрати на виході з відсмоктуючої труби залежать від геометричних розмірів вихідного перетину, однак, більшою мірою визначаються розподілом швидкостей потоку, що залежить в основному від режиму роботи турбіни і геометрії лопатей робочого колеса на вході у відсмоктуючу трубу. Вихрові втрати, що обумовлені режимом роботи та геометрією лопатей, практично мало залежать від форми й розмірів труби. Разом з тим, з огляду на місце прояву вихрових і вихідних втрат, відносимо їх також до втрат у трубі.

Внутрішні і вихідні втрати у відсмоктуючій трубі розглянуті в роботах [1, 2], де показано, що в першому наближенні, зневажаючи нерівномірність потоку на виході, можна вважати ці втрати пропорційними квадрату витрати. Найменш досліджені вихрові втрати. На основі підходу, використовуваного у вихровій теорії гвинта, у роботі [3] показано, що вихрова завеса, що збігає з вихідних крамок лопатей робочого колеса і на прямого апарату при мінли-

вості циркуляції уздовж розмаху лопаті, пов'язана з індуктивними, або, інакше кажучи, вихровими втратами у турбіні. Згідно [4] втрати у трубі складаються з наступних складових (1)

$$\xi_{от} = \xi_p + \xi_{vm} + \xi_{ц} + \xi_{во}, \quad (1)$$

де  $\xi_p$  – сума втрат внутрішніх, на виході з відсмоктуючої труби, пропорційна в першому наближенні квадрату витрати;  $\xi_{vm}$  – втрати, обумовлені перерозподілом меридіональних швидкостей внаслідок завихореності потоку за робочим колесом;  $\xi_{ц}$  – вихрові втрати, що пов'язані із закрученням потоку (циркуляційні втрати),  $\xi_{во}$  – вихрові втрати, що пов'язані з осьовим вихрем.

Втрати  $\xi_p$  будемо визначаються, як деяка частка  $K_p$  кінетичної енергії потенційного потоку при даній витраті у вхідному перетині відсмоктуючої труби (2)

$$\xi_p = \frac{K_p}{2gH} \int_0^1 V_{m\text{пот}}^2 d\bar{\psi}, \quad (2)$$

де  $V_{m\text{пот}}$  – меридіональна швидкість потенційного потоку. Аналіз експериментального матеріалу показав, що коефіцієнт  $K_p$  можна прийняти 0.2.

Вихрові втрати  $\xi_{vm}$  пов'язані з перерозподілом меридіональних швидкостей. Дійсний потік на виході з робочого колеса можна представити як суму потенційного потоку та деякого додаткового потоку – вихрового, втрати від якого визначаються із (3)

$$\xi_{vm} = \frac{1}{2gH} \int_0^1 \Delta V_m^2 d\bar{\psi}, \quad (3)$$

де  $\Delta V_m = V_m - V_{m\text{пот}}$ . Різниця швидкостей  $\Delta V_m$ , що входить у формулу вихрових втрат, залежить від завихореності потоку на виході з робочого колеса. Остання, у свою чергу, визначається нерівномірністю циркуляції на виході з напрямного апарату і нерівномірністю циркуляції, що спрацьовується уздовж розмаху лопаті робочого колеса. Чим більше нерівномірність циркуляції в напрямному апараті і робочому колесі, тим більше  $\Delta V_m$  і  $\xi_{vm}$ . Вихрові втрати, пов'язані із закрученням потоку,

$$\xi_{ц} = \frac{1}{2gH} \int_0^1 V_u^2 d\bar{\psi} \quad (4)$$

– втрати кінетичної енергії обертання потоку.

Якщо закручення потоку на внутрішній поверхні струму не дорівнює нулю, то в перетині під робочим колесом осі турбіни (при  $r = 0$ ) окружна скла-

дова швидкості від вихрового джгута теоретично прямує до нескінченності. У дійсності з'являється осьовий вихор, усередині якого рідина обертається за законом твердого тіла [5]. Енергія, що витрачена при виникненні осьового вихру, є третім видом вихрових втрат у відсмоктуючій трубі  $\xi_{\text{во}}$ .

**Експериментальні випробування у модельній гідротурбіні.** Для визначення втрат  $\xi_{\text{во}}$ , через виникнення вихоря у відсмоктуючій трубі, були використані результати зондових випробувань структури потоку, проведені в проточній частині моделі Р0310. Випробування виконані співробітниками кафедри "Гідромашин" НТУ „ХПІ” в гідротурбінній лабораторії ВАТ "Турбоатом". Виміри були проведені п'ятиканальним кульовим інерційним зондом у косому перетині за робочим колесом уздовж вихідної кромки (рис. 1) при різних відкриттях напрямного апарату  $\alpha_0$ . Результати вимірів, а також результати обчислень зведені у таблиці 1, 2. Модельна гідротурбіна Р0310 була випробувана з робочим колесом діаметром  $D_1 = 0.388 \text{ м}$ , а  $r_{\text{вт}} = 0.05 \text{ м}$  – радіус втулки робочого колеса.

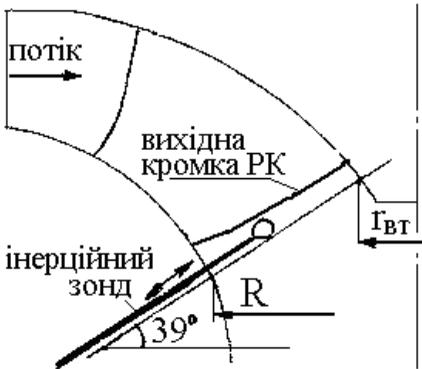


Рисунок 1 – Схема вимірювання параметрів потоку за допомогою інерційного зонду

результати обчислень зведені у таблиці 1, 2. Модельна гідротурбіна Р0310 була випробувана з робочим колесом діаметром  $D_1 = 0.388 \text{ м}$ , а  $r_{\text{вт}} = 0.05 \text{ м}$  – радіус втулки робочого колеса.

**Алгоритм розрахунку втрат у відсмоктуючій трубі за робочим колесом від вихрового джгута.** З урахуванням вищевикладеного, формули, що визначають втрати, можуть бути представлені у вигляді (5)-(7)

$$\xi_p = \frac{K_p}{2gH} \frac{\sum_{r_{\text{вт}}}^R V_{\text{мі пот}}^3 r_i}{\sum_{r_{\text{вт}}}^R V_{\text{мі пот}} r_i}, \quad (5)$$

$$\xi_{\text{ц}} = \frac{1}{2gH} \frac{\sum_{r_{\text{вт}}}^R V_{\text{мі пот}}^2 V_{\text{мі пот}} r_i}{\sum_{r_{\text{вт}}}^R V_{\text{мі пот}} r_i}, \quad (6)$$

$$\xi_{\text{вм}} = \frac{1}{2gH} \frac{\sum_{r_{\text{вт}}}^R (V_{\text{мі пот}} - V_{\text{мі}})^2 V_{\text{мі}} r_i}{\sum_{r_{\text{вт}}}^R V_{\text{мі}} r_i}, \quad (7)$$

де  $r_i$  – радіус  $i$ -го перетину;  $K_p = 0.2$ ;  $V_{\text{мі}} = \sqrt{V_{\text{зі}}^2 + V_{\text{рі}}^2}$ , а  $V_{\text{зі}}$ ,  $V_{\text{зі}}$ ,  $V_{\text{рі}}$  –

складові швидкості за робочим колесом.

Втрати від осьового вихрового джгута з урахуванням експериментів розраховуються по формулі (8)

$$\xi_{\text{во експ}} = \xi'_{\text{от}} - (\xi'_p + \xi_{\text{вм}} + \xi_{\text{ц}}), \quad (8)$$

де  $\xi'_{\text{от}} = \xi_{\text{от експ}} - \xi_{\text{вих}}$ , а  $\xi_{\text{от експ}}$ ,  $\xi_{\text{вих}}$ ,  $\xi'_{\text{от}}$  – відповідно повні з урахуванням вихідних, вихідні та повні відносні втрати у відсмоктуючій трубі, що розраховуються виходячи з експериментальних даних потоку за робочим колесом; вони визначаються із залежностей

$$\xi_{\text{от експ}} = E_{\text{оср}}/H = \frac{1}{H} \frac{\sum_{r_{\text{вт}}}^R E_i V_{\text{mi}} r_i}{\sum_{r_{\text{вт}}}^R V_{\text{mi}} r_i}, \quad (9)$$

де  $E_{\text{оср}}$  – повна осереднена енергія за робочим колесом, що визначалася з експерименту;  $\xi_{\text{вих}} = \alpha_k V'_{\text{вих}}{}^2 / (2gH)$ , де  $\alpha_k = 2$  – коефіцієнт Коріоліса,  $V'_{\text{вих}} = (0.25 - 0.3)V'_m$  – швидкість на виході з труби, а  $V'_m$  – осереднена меридіональна швидкість на виході з робочого колеса.

У програмі, що складена для розрахунку втрат від вихрового джгута у відсмоктуючій трубі, ураховується той факт, що випробування проводилися при  $D_1 = 0.388 \text{ м}$  у косому перетині під кутом  $39^\circ$  до горизонталі.

**Результати розрахунку вихрових втрат.** Створено програму на мові Фортран та адаптовано під сучасну ЕОМ. У тексті програми розрахунку втрат від вихрового джгута у відсмоктуючій трубі використовувалися: напір випробувань моделі робочого колеса –  $H = 30 \text{ м}$ ;  $K = 2.58$  – масштабний коефіцієнт перерахування;  $R_i$  – радіус розташування кульового зонда у  $i$ -й точці вимірювання;  $Q$  – витрата через турбіну,  $\text{м}^3\text{с}^{-1}$ ;  $N = 15$  – кількість інтервалів розбинок експериментальних даних, та інші. Проведені чисельні розрахунки з визначення експериментальних втрат у трубі для чотирьох режимів  $a_0$  при  $n'_1 = 63 \text{ хв}^{-1}$  і  $H = 30 \text{ м}$  (див. табл.1). Результати виміру швидкостей за робочим колесом за допомогою кульового зонду наведені у табл. 2.

Таблиця 1  
Визначення експериментальних втрат у відсмоктуючій трубі

№ реж.	$a_0$ , мм	$Q$ , $\text{м}^3\text{с}^{-1}$	$\xi_{\text{ц}}$	$\xi'_p$	$\xi_{\text{вм}}$	$\xi'_{\text{от}}$	$\xi_{\text{вих}}$	$\xi_{\text{во експ}}$
1	15	0.2318	0.0122	0.006	0.0032	0.0304	0.003	0.009
2	20	0.2722	0.00011	0.007	0.00263	0.0117	0.0043	0.002
3	25	0.2988	0.00508	0.009	0.0037	0.0203	0.0047	0.0025
4	27.5	0.3217	0.01371	0.011	0.0045	0.035	0.005	0.0053

Таблиця 2

Результати вимірів швидкостей і повної енергії у трубі при  $n'_1 = 63 \text{ хв}^{-1}$  та  $a_o = 15; 20; 25; 27.5 \text{ мм}$

сеч. №	R, м	$V_z, \text{ м/с}$				$V_u, \text{ м/с}$				$V_r, \text{ м/с}$				E, м			
		$a_o=15$	20	25	27.5	15	20	25	27.5	15	20	25	27.5	15	20	25	27.5
1	0.050	1.75	4.0	4.4	4.0	4.4	-0.2	-3.0	-5.3	0.6	2.5	3	3	1.2	1.25	2.25	2.7
2	0.055	1.85	3.5	4.1	4.5	4.25	-0.25	-3.4	-5.0	0.5	2.0	2.3	2.7	1.0	1.0	1.8	2.75
3	0.062	2.00	3.3	4.1	4.7	4.0	-0.25	-3.1	-4.6	0.3	1.6	1.8	1.8	1.05	1.15	1.5	2.6
4	0.070	2.30	3.5	4.2	4.7	3.7	-0.25	-2.75	-4.3	0.3	1.5	1.7	1.7	1.15	1.25	1.4	2.4
5	0.078	2.75	3.7	4.4	4.75	3.4	-0.15	-2.5	-4.0	0.4	1.4	1.4	1.4	1.25	1.25	1.4	2.0
6	0.086	3.10	3.9	4.55	5.0	3.25	-0.15	-2.25	-3.8	0.5	1.3	1.3	1.2	1.35	1.25	1.3	1.75
7	0.093	3.40	4.1	4.75	5.2	3.2	-0.15	-2.0	-3.5	0.6	1.1	1.0	0.9	1.25	1.2	1.25	1.7
8	0.101	3.75	4.3	5.0	5.3	3.1	0.0	-2.0	-3.3	0.5	1.0	0.9	0.8	1.25	1.2	1.2	1.6
9	0.103	4.00	4.5	5.1	5.4	3.0	0.2	-1.75	-3.0	0.2	0.8	0.8	0.7	1.35	1.1	1.2	1.4
10	0.117	4.10	4.5	5.2	5.5	2.83	0.25	-1.5	-2.7	0.0	0.6	0.5	0.5	1.3	1.05	1.2	1.3
11	0.124	4.05	4.6	5.15	5.6	2.7	0.3	-1.15	-2.2	-0.2	0.4	0.2	0.0	1.25	1.0	1.1	1.3
12	0.132	4.10	4.5	5.0	5.4	2.6	0.25	-1.35	-2.1	-0.1	0.2	0.1	-0.2	1.3	0.95	1.05	1.2
13	0.140	4.25	4.2	4.6	4.8	2.55	0.05	-1.35	-2.5	-0.1	0.2	0.1	-0.2	1.45	0.8	1.0	1.1
14	0.148	4.20	4.3	4.0	4.2	2.5	0.3	-1.5	-2.6	-0.2	0.7	-0.1	-0.3	1.45	0.7	0.95	1.05
15	0.155	3.25	5.0	3.1	3.7	2.4	0.8	-1.0	-2.3	-0.4	1.5	-0.5	-0.3	1.25	0.3	0.95	1.0

За даними експерименту були побудовані залежності  $\xi_{ц}, \xi_{вп}, \xi'_p, \xi_{вих}, \xi'_{от}, \xi_{во експ}, \xi_{во теор} = f(a_o)$  (рис.2) і зіставлені із результатами обчислень по формулі, запропонованій у [4] для поворотньо-лопатевих турбін,

$$\xi_{во теор} = 1.25 \Gamma_{2вн}^2 / ((\pi D_1)^2 gH), \quad (10)$$

де  $\Gamma_{2вн} = 2\pi r_{вт} V_u$ . Результати розрахунку втрат по цій формулі зведені до таблиці 3. Порівняння експериментальних і теоретичних втрат від вихрового джгута у відсмоктуючій трубі при  $n'_1 = 63 \text{ хв}^{-1}$  представлені на рис.2.

Таблиця 3

Результати розрахунку втрат від вихрового джгута у відсмоктуючій трубі

$a_o, \text{ мм}$	$V_u, \text{ мс}^{-1}$	$r_{вт}, \text{ м}$	$\Gamma_{2вн}, \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$	$\xi_{во теор}$
15	4.4	0.05	1.3	0.00455
20	- 0.2	0.05	- 0.059	0.00011
25	- 3.0	0.05	- 0.889	0.0021
27.5	- 5.25	0.05	- 1.55	0.0064

**Висновки.** Таким чином, із порівняння розрахункових і експериментальних втрат видно, що найбільші втрати приходяться на складові, пов'язані із

закрученням потоку  $\xi_{\text{во}}$ ,  $\xi_{\text{ц}}$ , а також внутрішні  $\xi'_p$ .

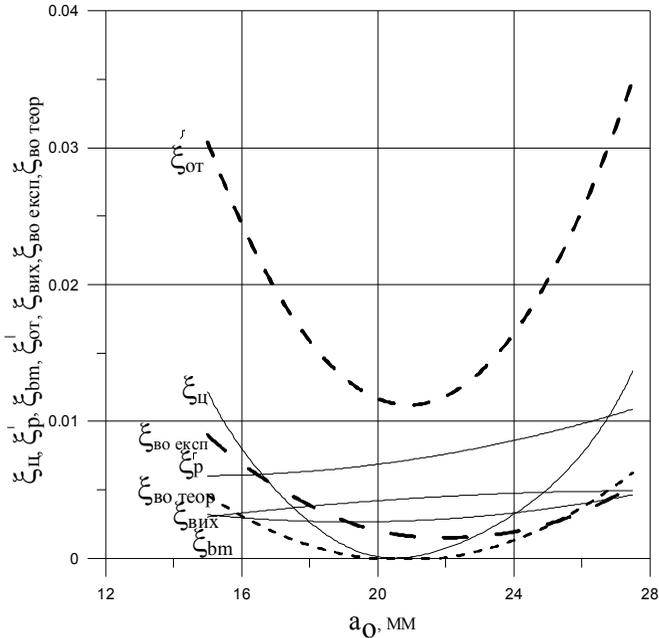


Рисунок 2 – Втрати  $\xi_{\text{ц}}, \xi_{\text{вм}}, \xi'_p, \xi_{\text{ввих}}, \xi'_{\text{от}}, \xi_{\text{во експ}}, \xi_{\text{во теор}} = f(a_0)$  у відсмоктуючій трубі модельної гідротурбіни РО310 при  $n'_1 = 63x\omega^{-1}$

Із аналізу рис.2 бачимо, що втрати від осьового вихору у відсмоктуючій трубі, що обчислені із [3, 4] по формулі (10), де автор використовує коефіцієнт 1,25, отриманий із випробувань гідротурбін поворотньо-лопатевого типу на пропелерних режимах роботи і декілька відрізняються від  $\xi_{\text{во експ}}$  для гідротурбіни РО310. Виходячи з цього для радіально-осьових гідротурбіни, цей коефіцієнт у лівій частині графіку функції  $\xi_{\text{во теор}} = f(a_0)$  може бути запропонований у діапазоні 1,3-1,4, що більш точно відповідає даному типу гідротурбіни. Для інших типів РО гідротурбін також можуть бути уточнені коефіцієнти в (10) для втрат від вихорового джгута у відсмоктуючій трубі на основі проведення модельних випробувань.

**Список літератури:** 1. Колтон А.Ю., Этинберг И.Э. Основы теории и гидродинамического расчета водяных турбин. – М.-Л.: Машгиз. – 1958. – 340 с. 2. Этинберг И.Э. Теория и расчет точной части поворотньо-лопастных гидротурбин. – М.-Л.: Машиностроение. – 1963. – 388 с. 3. Топаж Г.И. Индуктивные потери энергии в гидротурбине. – М: Энергомашиностроение. - 1975. – 325 с. 4. Этинберг И.Э., Раухман Б.С. Гидродинамика гидравлических турбин. – Л.: Машиностроение. – 1978. – 280 с. – Библиогр.: с. 272-275. 5. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир. – 1964. – 655 с.

Надійшла до редколегії 28.03.2011

**О.П. ІВАНІЦЬКАЯ**, канд. техн. наук, доц., НТУ “ХПІ”

## **ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРАВЛІЧНИХ МОДУЛІВ З ВЕРТИКАЛЬНИМ ГІДРАВЛІЧНИМ ЦИЛІНДРОМ**

Уся різноманітність гідравлічних дросельних приводів з вертикальним гідравлічним циліндром може бути зведена до 16 гідравлічних модулів залежно від напрямку руху поршня, напрямку дії навантаження, наявності або відсутності дроселя (або регулятора витрати) і розташування його в напірній або зливній магістралях. Наведені математичні моделі 16 основних типів гідравлічних модулів з вертикальним гідравлічним циліндром, шток якого орієнтований униз.

Все разнообразие гидравлических дросельных приводов с вертикальным гидравлическим цилиндром можно свести к 16 гидравлическим модулям в зависимости от направления движения поршня, направления действия нагрузки, наличия или отсутствия дросселя (или регулятора расхода) и расположения его в напорной или сливной магистралях. Приведены математические модели 16 основных типов гидравлических модулей с вертикальным гидравлическим цилиндром, шток которого ориентирован вниз.

All variety of hydraulic throttle drives with the vertical hydraulic cylinder can be reduced to 16 hydraulic modules depending on a direction of movement of the piston, a direction of action of loading, presence or absence of a throttle (or a regulator of the charge) and its arrangements in pressure head or drain highways. Mathematical models 16 of the basic types of hydraulic modules with the vertical hydraulic cylinder which rod is focused downwards are resulted.

**Вступ.** Питання математичного модулювання гідравлічних систем є актуальним, тому що гідрофіковані машини застосовуються у всіх галузях життєдіяльності і кожна з них є унікальною.

**Мета статті.** Метою даної статті є розробка математичних моделей для робочого процесу гідравлічних модулів з вертикальним одноштоковим гідравлічним циліндром (ГЦ), шток якого орієнтований униз.

**Поняття гідравлічного модуля.** Будемо вважати, що будь-яку гідравлічну схему можна представити у вигляді гідравлічного блоку (модуля), який складається з: ГЦ; гідравлічного розподільника (у загальному випадку двопозиційного чотирьох лінійного); дроселя зі зворотним клапаном; напірної магістралі, з'єднаної з насосом; зливальної магістралі, з'єднаної з баком (див. модуль № 1 – 16 табл.) [1, 2].

Використовуючи поняття гідравлічного модуля, усі наявні гідравлічні схеми з вертикальним одноштоковим ГЦ можливо звести до 16 гідравлічних модулів. Перші чотири модулі здійснюють втягування штока ГЦ. При цьому розподільник перебуває в лівій робочій позиції (див. табл.). Навантаження спрямоване нагору. Гідравлічні модулі з п'ятого по восьмий (див. табл.) здійснюють висування штока ГЦ. Розподільник при цьому перебуває в правій робочій позиції. Навантаження спрямоване нагору.

Математичні моделі гідравлічних модулів з вертикальним ГЦ  
(шток орієнтований униз)

	Гідравлічна схема модуля	Математична модель модуля
1		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}}(p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$
2		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu f d \sqrt{\frac{2}{\rho}}(p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$
3		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}}(p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu f d \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$
4		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(p_1 F_s - p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (\mu f d_1 \sqrt{\frac{2}{\rho}}(p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( -\mu f d_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{cases}$

5		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_1 + V F_s) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_2) - V F_n \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$
6		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_1 + V F_s) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_2) - V F_n \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$
7		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_1 + V F_s) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_2) - V F_n \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$
8		$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} = (-\mu f_{d1} \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_1 + V F_s) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} = \left( \mu f_{d2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_2) - V F_n \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{cases}$

9		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{aligned} \right.$
10		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{aligned} \right.$
11		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{aligned} \right.$
12		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m} (p_1 F_s - p_2 F_n - R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (\mu f_{d1} \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_n - p_1) - VF_s) \frac{E}{W_{01} + F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( -\mu f_{d2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} p_2 + VF_n \right) \frac{E}{W_{02} - F_n y}. \end{aligned} \right.$

Продовження табл.

13		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{aligned} \right.$
14		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (-\mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( \mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{aligned} \right.$
15		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (-\mu f_d \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( \mu \pi d_z x_z \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{aligned} \right.$
16		$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m}(-p_1 F_s + p_2 F_n + R - Rt); \\ \frac{dp_1}{dt} &= (-\mu f_{d1} \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1 + V F_s}) \frac{E}{W_{01} - F_s y}; \\ \frac{dp_2}{dt} &= \left( \mu f_{d2} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_2) - V F_n} \right) \frac{E}{W_{02} + F_n y}. \end{aligned} \right.$

Гідравлічні модулі з дев'ятого по дванадцятий здійснюють втягування штока ГЦ. При цьому розподільник перебуває в лівій робочій позиції (див. табл.). Навантаження спрямоване вниз.

Гідравлічні модулі із тринадцятого по шістнадцятий (див. табл.) здійснюють висування штока ГЦ. Розподільник при цьому перебуває в правій робочій позиції. Навантаження спрямоване вниз.

Розглянуті гідравлічні модулі із вертикальним одноштоковим ГЦ (шток орієнтований униз) мають наступні особливості схеми (див. табл.):

- модуль №1: шток втягується, дроселі відсутні, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №2: шток втягується, дросель установлений у напірній магістралі, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №3: шток втягується, дросель установлений у зливній магістралі, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №4: шток втягується, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №5: шток висувається, дроселі відсутні, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №6: шток висувається, дросель установлений у напірній магістралі, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №7: шток висувається, дросель установлений у зливній магістралі, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №8: шток висувається, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, навантаження спрямоване нагору;
- модуль №9: шток втягується, дроселі відсутні, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №10: шток втягується, дросель установлений у напірній магістралі, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №11: шток втягується, дросель установлений у зливній магістралі, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №12: шток втягується, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №13: шток висувається, дроселі відсутні, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №14: шток висувається, дросель установлений у напірній магістралі, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №15: шток висувається, дросель установлений у зливній магістралі, навантаження спрямоване вниз;
- модуль №16: шток висувається, дроселі встановлені в напірній і зливній магістралях, навантаження спрямоване вниз.

**Математичні моделі гідравлічних модулів з вертикальним гідравлічним циліндром.** При побудові математичних моделей будемо використовувати наступні припущення [3]: відсутні витоки робочої рідини (РР); сухе тертя дорівнює нулю; хвильові процеси в трубопроводах відсутні; температура РР постійна (тобто постійними вважаємо коефіцієнти кінематичної в'язкості й сили тертя); втрати на тертя в магістралях і зворотному клапані, розподільнику й іншій апаратурі не враховуються; тиск у зливній магістралі дорівнює нулю; радіальний зазор між втулкою й золотником у золотникових розподільниках приймаємо рівним нулю; робочі кромки вважаємо гострими; приймаємо постійним  $E$  – модуль пружності РР.

1. *Рівняння нерозривності.* Рівняння нерозривності виражає закон збереження маси рідини, що рухається. Для двох поперечних перерізів того самого потоку ідеальної рідини рівняння нерозривності можна записати у вигляді:

$$Q_1 = Q_2 \quad \text{або} \quad V_1 S_1 = V_2 S_2, \quad (1)$$

де  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  – витрати, швидкості РР й площі поперечних перерізів 1-1 і 2-2.

Так, наприклад, для гідравлічної системи із дросельним способом регулювання швидкості (модуль 3, табл.) при лівій робочій позиції розподільника рівняння нерозривності має вигляд:

$$Q_n = Q_{p1} = Q_{u1}; \quad Q_{u2} = Q_{op} = Q_{p2} = Q_{\bar{o}}, \quad (2)$$

де  $Q_n$  – витрата насоса;  $Q_{p1}$ ,  $Q_{p2}$  – витрата через розподільник;  $Q_{u1}$  – витрата штокової порожнини ГЦ;  $Q_{u2}$  – витрата поршневої порожнини ГЦ;  $Q_{op}$  – витрата через дросель;  $Q_{\bar{o}}$  – витрата, що надходить із ГЦ через розподільник у бак.

2. *Рівняння динаміки* виконавчого органа гідравлічного приводу, що описує рух поршня як твердого тіла, відповідно до законів механіки, а саме на основі принципу Даламбера (згідно з яким сила інерції дорівнює різниці активних сил і сил опору), запишемо у вигляді:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = p_1 F_n - (p_2 F_s + R + R_t), \quad (3)$$

де  $m$  – приведена до поршня маса рухливих частин і РР;  $p_1, p_2$  – тиск у порожнинах гідроциліндра;  $F_n, F_s$  – ефективні площі поршня поршневої і штокової порожнин ГЦ;  $R$  – навантаження;  $R_t$  – сили тертя;  $y$  – переміщення поршня.

При усталеному русі або стані спокою рухливого елемента рівняння (3) перетвориться в рівняння балансу сил, що діють на рухливий елемент (рівняння рівноваги сил):

$$p_1 F_n = (p_2 F_s + R + R_t). \quad (4)$$

3. Рівняння витрат РР через апаратуру. Для ГЦ з урахуванням стисливості РР, рівняння витрати, наприклад, для модуля 3 табл. має вигляд:

$$Q_{ц1} = F_n V + \frac{(W_{01} + F_n y)}{E} \frac{dp_1}{dt}; \quad Q_{ц2} = F_s V - \frac{(W_{02} - F_s y)}{E} \frac{dp_2}{dt}, \quad (5)$$

де  $V$  – швидкість поршня;  $W_{01}, W_{02}$  – початковий об'єм РР у порожнинах ГЦ.

Для гідравлічної апаратури, у якій відбувається дроселювання РР (дроселі, розподільники), рівняння витрати має вигляд:

$$Q_{др} = \mu f_d \sqrt{2\Delta p / \rho}, \quad Q_p = \mu \pi d_z x_z \sqrt{2\Delta p / \rho}, \quad (6)$$

де  $Q_{др}$ ,  $Q_p$  – витрата через дросель та розподільник;  $\mu$  – коефіцієнт витрати;  $f_d$  – площа прохідного перетину дроселя;  $\Delta p$  – перепад тиску на щілині гідроапаратури;  $\rho$  – густина РР;  $d_z$  – діаметр золотника розподільника;  $x_z$  – величина відкриття вікна розподільника.

У табл. наведені математичні моделі гідравлічних модулів з вертикальним одноштоковим ГЦ (шток орієнтований униз), які складені на підставі розглянутих вище рівнянь нерозривності, руху рухливих елементів і рівнянь витрати через гідравлічну апаратуру.

**Висновки.** Усе різноманіття гідравлічних дросельних приводів з вертикальним одноштоковим ГЦ (шток орієнтований униз) можна звести до 16 типових гідравлічних модулів залежно від напрямку руху штока, напрямку дії навантаження, наявності дроселя (або регулятора витрати) і розташування його в напірній або зливній магістралях.

Для опису робочого процесу гідравлічних приводів використовуються основні види рівнянь: нерозривності; руху рухливих елементів; витрат рідини через апаратуру.

Наведені математичні моделі 16 основних гідравлічних модулів з вертикальним одноштоковим ГЦ (шток орієнтований униз).

**Список літератури:** 1. *Иваницкая Е.П.* К вопросу о типизации гидравлических приводов // Восточно-европейский журнал передовых технологий, 2009. – № 4 / 10 (40). – С. 37 – 40. 2. *Иваницкая Е.П.* Математические модели гидравлических модулей с вертикальным гидравлическим цилиндром // Восточно-европейский журнал передовых технологий, 2009. – №5 / 6 (41). – С. 38 – 41. 3. *Лур'є З.Я., Іваницька О.П.* Моделювання та динаміка гідравлічних систем: Навчальний посібник. – Харків: ХДПУ, 2000. – 132 с.

Надійшла до редколегії 29.03.2011

**С.Н. ИСАКОВ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **О МЕТОДЕ РАСЧЕТА ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ СТРУКТУРНО-СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ**

У статті розглянуто метод чисельного розрахунку параметрів динамічних процесів модульних високочастотних структурно-зв'язаних систем (ВЧ СЗС), що базується на об'єднанні механічних та електричних перемінних у єдиний узагальнений вектор переміщень. Це дозволяє суттєво покращити розрахункову модель в умовах кратного та щільного спектру власних частот конструкції на прикладі ультразвукових медичних інструментів.

В статье рассмотрен метод численного расчета параметров динамических процессов модульных высокочастотных структурно-связанных систем (ВЧ ССС), который базируется на объединении механических и электрических переменных в один обобщенный вектор перемещений. Это позволяет существенно улучшить расчетную модель в условиях кратного и плотного спектра собственных частот конструкции на примере ультразвуковых медицинских инструментов.

The method numerical calculations of dynamic processes parameters of modular high-frequency structure constrained systems (HF SCS) which based on the combine of mechanical and electric variables in one generalized vector of movements are considered at the paper. It allows substantially to improve a calculation model at the conditions of multiple and closed spectrum of structure Eigen-frequencies on the ultrasonic medical instruments example.

**Введение.** Большинство технологических процессов, выполняемых с использованием высокочастотных структурно-связанных систем (ВЧ ССС), отличаются тем, что на рабочий орган кроме формообразующего движения подачи относительно обрабатываемого изделия или среды сообщаются высокочастотные колебания определенного направления, частоты и интенсивности [1-3]. Ультразвуковые установки и аппараты являются типичными представителями таких систем и относятся к общему классу высокочастотных вибрационных систем [10], однако они выделяются в отдельную группу по следующим основным причинам.

Первая определяется принципиальными особенностями поведения материалов и сред в ультразвуковом поле, что выявлено и подтверждено многочисленными экспериментами [4, 5, 6]. Эти особенности проявляются в радикальном изменении наблюдаемых в эксперименте их упругопластических характеристик и реологических свойств.

Вторая причина обусловлена спецификой конструктивных особенностей основных элементов таких систем, которые представляют собой сложные составные колебательные системы прямолинейной, криволинейной и объемной формы, составленные, как правило, из неоднородных участков активных и пассивных материалов и работающие в режиме резонансного нагружения в условиях плотного и кратного спектра частот [7, 8, 9]. По этой причине при описании колебаний такие конструкции моделируются системами с распре-

деленными параметрами и описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, а также применяется специализированное программное обеспечение. Поскольку такие колебательные системы обладают высокой добротностью, ВЧ ССС эффективно работают в резонансных режимах, позволяющих получить достаточные для проведения технологического процесса амплитуды колебаний рабочего органа.

Отдельные составные части и элементы высокочастотных структурно-связанных систем (ВЧ ССС), имеют между собой силовые, кинематические и инерционные связи, а также используют различные системы управления, в том числе, и с обратной связью. В зависимости от поставленной задачи отдельные части сложной ВЧ ССС могут рассматриваться как самостоятельные системы.

В настоящем исследовании предложен специализированный метод расчета динамических параметров ВЧ ССС, который в дальнейшем может быть использован для модификации схем анализа чувствительности и увеличения эффективности процессов оптимального проектирования сложных ВЧ ССС.

**Расчет динамических параметров.** Широкий класс ВЧ ССС, применяемых на практике, представляет собой прямолинейную или плоско-криволинейную систему, свободные колебания которой могут быть описаны системой дифференциальных уравнений, представленных в [10]:

$$\frac{d\bar{y}}{d\xi} = [C]\bar{y} + \omega^2 [M]\bar{y}, \quad (1)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \alpha & 0 & \cos^2 \alpha / (EFL^2) & \cos \alpha \sin \alpha / (EFL^2) \\ 0 & 0 & \cos \alpha & 0 & \cos \alpha \sin \alpha / (EFL^2) & \sin^2 \alpha / (EFL^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1/(EI) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho IL^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\rho FL^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho FL^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{y} = \{u \quad v \quad \varphi \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y\}^T,$$

где  $E$  – модуль упругости,  $\rho$  – плотность материала,  $F$  и  $I$  – площадь и мо-

мент инерции поперечного сечения,  $L$  – криволинейная длина УЗ ССС,  $\alpha$  – угол наклона криволинейной оси и  $\xi = s/L$  – относительная криволинейная координата.

Систему (1) необходимо дополнить уравнениями электрического поля, которые для прямолинейного преобразователя, расположенного вдоль оси  $s$  и изготовленного из пьезокерамических шайб, поляризованных по толщине в направлении той же оси  $s$ , имеют вид

$$\frac{dD_s}{d\xi} = 0, \quad \frac{d\varphi_s}{d\xi} = -E_s. \quad (2)$$

Физические соотношения для данного случая примут вид

$$\sigma_s = E\varepsilon_s \frac{d_{33}}{S^E} E_s, \quad D_s = \frac{d_{33}}{S^E} \varepsilon_s + \varepsilon\varepsilon_0 E_s, \quad (3)$$

где  $d_{33}$  – пьезомодуль,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная и  $S^E$  – податливость пьезокерамики.

Объединяя переменные из уравнений (1) и (2) в один обобщенный вектор перемещений и, проведя несложные преобразования, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{z}}{d\xi} = [C]\bar{z} + \omega^2 [M]\bar{z}. \quad (4)$$

При этом обобщенные матрицы жесткости и масс записываются так:

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha & 0 & \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \cos^2\alpha}{Z_N} & \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{Z_N} & 0 & F_{PC} \frac{d_{33} \cos\alpha}{S^E Z_N} \\ 0 & 0 & \cos\alpha & 0 & \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{Z_N} & \frac{\sin^2\alpha}{Z_N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(EI + \frac{I_{PC}}{S^E})} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d_{33} \cos\alpha}{S^E Z_N} & 0 & 0 & -\frac{F_{PC}}{S^E Z_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$Z_N = (\varepsilon\varepsilon_0(EF + \frac{d_{33}^2}{S^E}) + d_{33}^2 F_{PC})L^2; \quad \bar{z} = \{u \quad v \quad \varphi \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y \quad \varphi_x \quad D_x\}^T;$$

$$[M]= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(\rho I + \rho_{PC} I_{PC}) L^2 & 0 & \dots & 0 \\ -(\rho F + \rho_{PC} F_{PC}) L^4 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(\rho F + \rho_{PC} F_{PC}) L^4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где  $\rho_{PC}$  – плотность пьезокерамики,  $F_{PC}$  и  $I_{PC}$  – площадь и момент инерции поперечного сечения пьезошайбы.

Решение (4) проводится методом начальных параметров с численным интегрированием системы и ортогонализацией, а также с разбиением системы на подконструкции для лучшей сходимости.

В конечном итоге, задавая величину приложенного на электродах пьезопреобразователя напряжения, мы получаем распределение перемещений и деформаций по объему ВЧ ССС и, соответственно, можем вычислить все динамические параметры системы.

**Уравнение энергетического баланса.** Электрические характеристики пьезопреобразователя определяются из уравнения энергетического баланса, которое для ВЧ ССС может быть записано в виде:

$$P = \Delta W_{\Sigma} f_0, \quad (5)$$

где  $P$  – мощность подводимая в систему,  $f_0$  – рабочая частота возбуждения генератора, а  $\Delta W_{\Sigma}$  – суммарные потери энергии в системе определяются как

$$\Delta W_{\Sigma} = \Delta W + \Delta W_C + \Delta W_{CZ}, \quad (6)$$

где  $\Delta W$  – потери энергии в материале конструкции,  $\Delta W_C$  – потери в конструкционных соединениях и  $\Delta W_{CZ}$  – потери энергии в зоне контакта.

Учитывая, что

$$P = UI, \quad (7)$$

где  $U$  – напряжение на электродах пьезопакета, получим выражение для силы тока  $I$  в пьезоэлементах в виде

$$I = \frac{\Delta W_{\Sigma} f_0}{U m_{pc}}, \quad (8)$$

где  $m_{pc}$  – количество пьезошайб в пьезопакете.

Электроэнергетические характеристики ВЧ ССС рассчитываются следующим образом:

- сопротивление пьезошайбы

$$R = U / I \quad (9)$$

- добротность

$$Q = 2\pi E_k / (\Delta W_\Sigma), \quad (10)$$

где  $E_k$  – кинетическая энергия ВЧ ССС

- коэффициент эффективности

$$\chi = \alpha^2 / P, \quad (11)$$

где  $\alpha$  – амплитуда на рабочем торце

- коэффициент

$$k_{0,7} = \omega / Q. \quad (12)$$

**Тестовые расчеты.** Для криволинейных ВЧ ССС характерен достаточно плотный (и даже кратный) спектр собственных частот [9], когда в зоне автоподстройки генератора находится несколько собственных форм колебаний.

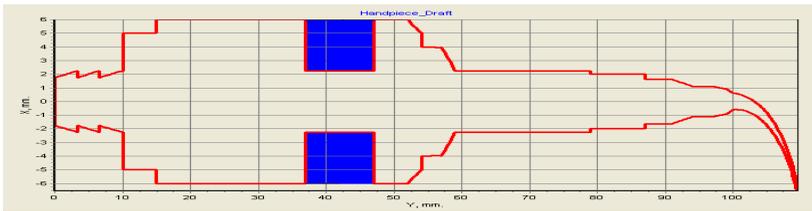


Рисунок 1 – Плоско-криволинейная ВЧ ССС



Рисунок 2 – Рабочая форма 1 колебаний на частоте 30,96 кГц

Так для ВЧ ССС, представленной на рис. 1 и исследованной в [10], при напряжении на электродах пьезопакета 100В формы колебаний системы представлены на рис. 2 и 3, соответственно, а распределение потенциала по

длине пьезопреобразователя представлено на рис. 4

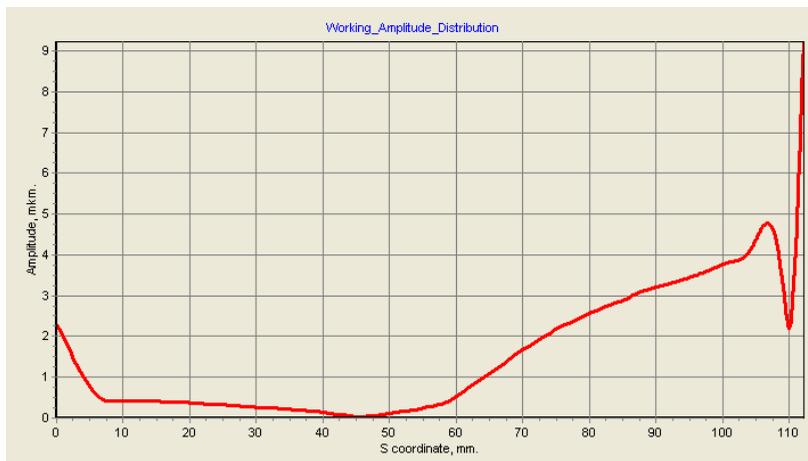


Рисунок 3 – Рабочая форма 2 колебаний на частоте 33,38 кГц

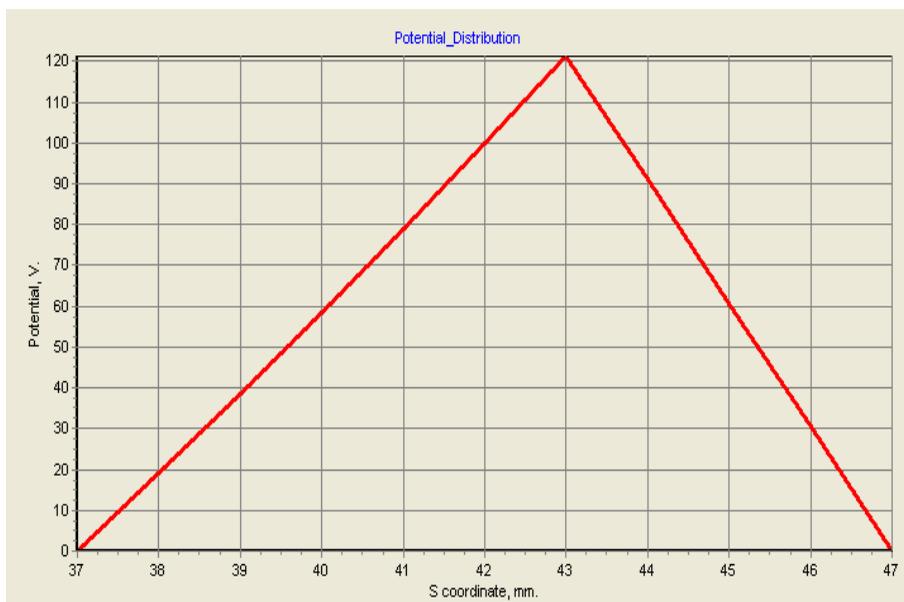


Рисунок 4 – Распределение потенциала по длине пьезопреобразователя

Характеристики пьезопреобразователя на близких формах колебаний представлены в таблице.

Таблица

Характеристики	Форма 1	Форма 2
Рабочая частота, кГц	30,96	32,38
Рабочая амплитуда, мкм	165	9,2
Мощность, Вт	48,8	0,75
Сила тока, мА	240	3,7
Сопrotивление, Ом	410	2682
Добротность	520	470
Коэффициент эффективности, мкм <sup>2</sup> /Вт	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$2,3 \cdot 10^{-10}$
Коэффициент $k_{0.7}$	373	435

Исходя из анализа результатов, можно заключить, что вторая форма колебаний является «паразитной» и при ее захвате системой автоподстройки генератора будет происходить существенное снижение амплитуд колебаний, что скажется на эффективности всего процесса в целом. Поэтому в дальнейшем необходимо провести изменение конструкции с целью расширения диапазона между рабочей и «паразитной» частотами.

**Список литературы:** 1. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. / Под ред. И.П. Голяминой. - М.: Советская энциклопедия, 1979. – 400 с. 2. Марков А.И. Ультразвуковая обработка материалов. – М.: Машиностроение, 1980. – 237 с. 3. Харитонович М.В., Эскин Г.И. Ультразвук в процессах пластической деформации металлов и сплавов. Обзор отечественной и зарубежной литературы 1955-1969 гг. – М.: ВИЛС, 1970. – 112 с. 4. Северденко В.П., Клубович В.В., Степаненко А.В. Ультразвук и пластичность.– Минск: Наука и техника, 1976. – 446 с. 5. Асташев В.К. О влиянии ультразвука на процессы пластического деформирования. – Машиноведение, 1983, № 2. – С. 3 - 12. 6. Youshikazu K., Takeshi T. Sadayuki U., Electrical equivalent circuit of loaded thick Langevin flexural transducer // Japanese Journal of Applied Physics.– 1997.– V.36, №1. – P.3121-3125. 7. Simson E., Taranukha F. Shape optimization of large ultrasonic tools // Proc. 3rd Int. Conf. OPTI' 93 - 1993. – p. 31 - 42. 8. Богомоллов С.И., Симсон Э.А. Оптимизация механических систем в резонансных режимах. - Харьков: Вища школа, 1983. – 152 с. 9. Isakov S., Kedrovskaya O. Designing of ultrasonic waveguides in conditions of spatial oscillations, MicroCAD'99 " Information technologies: Science, Technique, Technology, Education, Health ", issue 7, part 1, 1999. – p.293-299. 10. С.Н. Исаков, А.С. Исаков, С.И. Марусенко. Вынужденные колебания высокочастотных структурно-связанных систем // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2009 – № 4/10 (40). – С. 41-44.

*Поступила в редколлегию 21.03.11*

**О.В. КАЗАК**, аспирант, ДонНУ, Донецк;

**А.Н. СЕМКО**, д-р техн. наук, проф., ДонНУ, Донецк

## **ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В СТАЛЕПЛАВИЛЬНЫХ ПЕЧАХ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПОДОВЫМ ЭЛЕКТРОДОМ**

У рамках моделі магнітної гідродинаміки вивчені електровихрові течії у дугових пічках постійного струму з подовим електродом. Показано, що сила Лоренца відіграє визначну роль у виникненні вихрового руху розплаву й підвищеного зносу футеровки в пічці поблизу подового електрода.

В рамках модели магнитной гидродинамики исследованы электровихревые течения в дуговых сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом. Показано, что сила Лоренца играет определяющую роль в возникновении вихревого движения расплава и повышенного износа футеровки печи вблизи подового электрода.

The electro vortex movement in DC arc furnace with bottom electrode is studied under magneto hydrodynamic model. It is shown, that Lorentz force take the main role in electro vortex flows appears end increase wearing of fettle right near the bottom electrode.

**Введение.** В последнее время в металлургии все большее распространение получают дуговые печи постоянного тока с подовыми электродами (ДСПТ). На данный момент в мировом производстве печи постоянного тока составляют около 70% от общего количества новых электросталеплавильных печей [1]. ДСПТ успешно работают на целом ряде промышленных предприятий, таких как: «Balboa» (Испания, 70 тонн), «Hylsa Planos» (Мексика, 135 тонн), «ABC Danarc Plus» (Италия, 90 тонн), ОАО «Курганмашзавод» (Россия, две печи по 6 тонн), ОАО «Курганмашзавод» (Россия, две печи по 6 тонн), ЗАО ОАО «Арселор Митал Кривой Рог» (Украина, от 0,5 до 6 тонн), ОАО Запорожский алюминиевый комбинат» (Украина, 12 тонн), ОАО «Завод Днепропрес» (Украина, 6 тонн) [2]. По сравнению с дуговыми печами переменного тока эти печи потребляют меньше электроэнергии на 10-15 %, огнеупорных материалов на 20-30 %, электродов в 2-5 раз, исходного сырья на 1,5-2,0 %, легирующих добавок на 20-60 % на производство единицы готовой продукции. Немаловажным достоинством таких печей является экологическая безопасность, т.к. при их эксплуатации образование пыли сокращается в 8-10 раз (от 52,5 до 6,3 кг/ч), уровень шума понижается с 105 до 85 дБ [3]. Практика показала, что дуговые печи постоянного тока обладают более высоким КПД, низким процентом угара металла, меньшим износом деталей печи, и более высоким качеством приготовляемой стали. В таких печах возможно использование электрохимических реакций для очистки от примесей и контроль качества стали путем забора проб в процессе выплавки металла [2-5].

Конструктивной особенностью ДСППТ является наличие подового электрода, который вмонтирован в днище подины и является анодом. Являясь одним из основных элементов печи, подовый электрод служит для бесперебойного подвода тока к переплавляемому металлу. Функциональные особенности подового электрода определяют высокие требования к качеству материала электрода: высокую стойкость к тепловым, токовым и механическим нагрузкам, отсутствие его взаимодействия с материалом подины. Эксплуатация таких печей показала повышенный износ футеровки в окрестности подового электрода. В среднем подовый электрод служит в 10 раз меньше чем все основные элементы печи, и выходит из строя через 300 - 400 плавов. Это приводит к длительному простоя печи, дорогостоящей и технически сложной замене подины и самого подового электрода. По мнению исследователей [2], причинами повышенного износа подового электрода и футеровки вблизи электрода являются:

- размывание футеровки движением расплава металла;
- перегрев расплава;
- джоулево тепло, выделяющееся от протекающего по электроду тока;
- физико-химическое взаимодействие расплава с материалом электрода;
- микродуги между электродом и переплавляемым металлом;
- наличие интенсивных потоков расплавленного металла, вызываемых действием электромагнитных сил.

Предполагается, что основной причиной повышенного износа подового электрода и футеровки является размывание футеровки электровихревыми течениями (ЭВТ), которые возникают в проводящей жидкости под действием магнитного поля, создаваемого протекающим по жидкости током [2, 6, 7]. Они возникают не только под действием внешнего магнитного поля, но и под действием индуцированного магнитного поля, которое создается током, непосредственно протекающим по самой жидкости при его пространственной неоднородности, как это и происходит в электросталеплавильных печах с подовым электродом.

С другой стороны интенсификация ЭВТ позволяет осуществлять перемешивание расплава тем самым, уменьшая время химических реакций и улучшая однородность состава по объему. Эти противоречивые требования ставят перед разработчиками сложную задачу изучения и управления электровихревыми потоками. Отсутствие теории электросталеплавильных печей в период приготовления металла является основным сдерживающим фактором распространения этих печей.

Для численного моделирования процессов в ДСППТ сейчас широко используются специализированные пакеты программ и пакеты мультифизики [8-14]. Большие трудности в использовании пакетов прикладных программ возникают с выбором метода решения и настроек, а также при выборе рас-

четной области и размерности модели. На некоторых режимах работы процессы, протекающие в ДСППТ, носят пространственный характер, моделирование которых в трехмерной постановке требует значительных мощностей расчетной техники. Однако значительную часть времени работы процессы в ДСППТ близки к установившимся и могут быть смоделированы в стационарной осесимметричной постановке. В осесимметричной постановке удастся наиболее рационально выполнить конечноэлементное разбиение расчетной области с учетом градиентов расчетных величин.

В настоящей работе исследуется электровихревое движение расплава в осесимметричной ДСППТ и его влияние на повышенный износ футеровки без учета термогравитационной конвекции. Получено поле объемных электромагнитных сил Лоренца, ротора этих сил, а также гидродинамическая картина движения расплава под действием электромагнитных сил. Детально исследованы гидродинамические поля в непосредственной близости подового электрода. Практическое применение результатов работы позволит оптимизировать работу печи и сократить расходы на выплавку металла.

**Физическая и математическая постановка задачи.** В работе ДСППТ можно выделить несколько основных периодов: нагрев и плавление шихты, жидкий период, во время которого приготавливается сталь, и слив жидкого металла. Время жидкого периода колеблется от 15 до 60 % от общего времени плавки, в зависимости, от марки приготавливаемой стали и исходного сырья [4, 5]. В жидкий период плавки металл полностью расплавлен и находится при температуре около 1550-1600 °С.

Оценим процессы в ДСППТ в жидкий период по критериям подобия [7, 15]. Тепло, производимое электрической дугой, мало и только компенсирует потери тепла через защитный слой футеровки. Относительная мощность джоуля тепла невелика и составляет около

$$Q = \frac{j_0^2 L}{\sigma \rho c u_0 \Delta T} \approx 10^{-3} \ll 1$$

по сравнению с тепловой мощностью электрической дуги. Тепловое число Пекле, характеризующее относительную роль конвективного переноса тепла в сравнении с его переносом за счет молекулярной теплопроводности  $Pe = u_0 L / \chi \approx 10^{-5} \ll 1$ . Число Грасгофа, характеризующее отношение архимедовой силы в неоднородном поле температур к силам вязкого трения, составляет

$$Gr = \beta \Delta T g L / u_0^2 \approx 10^{-2} \cdot \Delta T \approx 10^{-2} \cdot 1850 \approx 18.5 > 1.$$

Эти оценки позволяют на данном этапе рассматривать процессы в расплаве без учета конвекции и теплопереноса.

Для построения физической модели процесса сделаем следующие допущения:

- среда считается немагнитной ( $\mu = 1$ , для железа *точка Кюри* равна 760 °С);
- среда является хорошим проводником и ее диэлектрической проницаемостью можно пренебречь ( $\varepsilon = 1$ );
- конвективным током, вызванным движением среды, по сравнению с током проводимости, можно пренебречь;
- физические характеристики среды предполагаются однородными и изотропными;
- расплав считается несжимаемой жидкостью с одинаковой по объему температурой, тепловая конвекция не учитывается;
- химические реакции не учитываются.

Протекающие в ДСППТ процессы при выплавке металла нестационарные. Однако они протекают достаточно медленно и с хорошей точностью могут описываться в стационарной постановке с учетом электромагнитной силы Лоренца  $\vec{j} \times \vec{B}$ . По предварительным оценкам число Рейнольдса составляет величину порядка  $10^6$ , что дает основания рассматривать движение расплава как турбулентное. Поэтому для замыкания уравнений движения использовалась  $k - \varepsilon$  модель турбулентности.

Для стационарных процессов система уравнений магнитной гидродинамики, описывающих турбулентное движение изотермического расплава металла в печи, имеет вид:

- уравнение Навье – Стокса:

$$\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla \cdot \left[ -p\vec{I} + (\eta + \eta_T)(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T) \right] + \rho\vec{g} + \vec{j} \times \vec{B}; \quad (1)$$

- уравнение неразрывности

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0; \quad (2)$$

- уравнения  $k - \varepsilon$  модели турбулентности

$$\rho\vec{u} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \eta_T P(\vec{u}) - \rho\varepsilon; \quad (3)$$

$$\rho\vec{u} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[ \left( \eta + \frac{\eta_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon \eta_T P(\vec{u})}{k} - \frac{C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon^2}{k}; \quad (4)$$

где

$$P(\vec{u}) = \frac{\nabla\vec{u}}{\nabla\vec{u} + \nabla\vec{u}^T}, \quad \eta_T = \frac{\rho C_\mu k^2}{\varepsilon}; \quad (5)$$

- уравнения Максвелла

$$\nabla \times \vec{E} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_e; \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}; \quad (8)$$

- закон Ома для движущейся среды

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}); \quad (9)$$

- закон сохранения заряда

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0; \quad (10)$$

где  $\vec{v}$ ,  $\rho$  и  $p$  – скорость, плотность и давление жидкости;  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения;  $\vec{j}$  – плотность тока;  $\vec{B}$  – индукция магнитного поля;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости среды;  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $C_\mu$  – константы модели турбулентности;  $k$ ,  $\varepsilon$  – параметры модели турбулентности;  $\eta$  – вязкость;  $\eta_T$  – турбулентная вязкость;  $\sigma$  – удельная проводимость среды;  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля.

В уравнении (1) учтены следующие силы:

давления  $-\nabla \cdot p$ , вязкого трения  $\nabla \cdot (\eta + \eta_T)(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$ , тяжести  $\rho \vec{g}$ , электромагнитная сила Лоренца  $\vec{j} \times \vec{B}$ .

Задача решалась при следующих граничных условиях:

- условия прилипания на границе расплава

$$\vec{v} = 0; \quad (11)$$

- для электрического поля

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, \quad D_{n_1} = D_{n_2}; \quad (12)$$

- для магнитного поля

$$B_{n_1} = B_{n_2}, \quad B_{\tau_1} = B_{\tau_2}; \quad (13)$$

- для плотности тока на поверхности футеровки

$$j_n = 0; \quad (14)$$

- на торцах электродов

$$j_n = j_0 = I/S. \quad (15)$$

Условие прилипания (11) использовалось как на границе соприкосновения расплава с футеровкой, так и со шлаком на верхней поверхности расплава. Такое приближение справедливо, т.к. вязкость шлака на поверхности расплава значительно выше вязкости расплава.

На границах расчетной области использовались условия магнитной и электрической изоляции (электрическое и магнитное поле не распространяется за пределы расчетной области) или неотражающие граничные условия (электрическое и магнитное поле не отражается от искусственных границ расчетной области), которые были опробованы в работах [20-23]. Результаты расчетов модельных задач для этих граничных условий при реальных размерах расчетной области хорошо совпадают, что указывает на отсутствие влияния граничных условий на искусственных границах расчетной области на электромагнитные параметры в центральной зоне.

**Стратегия решения с использованием сопряженного анализа.** Рассматриваемая задача не имеет аналитического решения и поэтому решается численно. По результатам предварительного анализа численных методов решения был выбран метод конечных элементов [16] и система ANSYS [17]. Задача относится к классу мультифизических, и стратегия решения такой задачи состоит из следующих этапов:

**1-й этап** – моделирование электромагнитных полей;

**2-й этап** – моделирование электровихревых течений.

Такая последовательность в решении задачи обусловлена особенностями решения задач мультифизики в рамках системы ANSYS. Результатом моделирования электромагнитных полей являются значения электромагнитной силы и других электромагнитных параметров, полученные для каждой узловой точки по объему расплава. Кроме того, результатом решения 1-го этапа является определение количества джоулева тепла в каждой узловой точке. Задавая распределения электромагнитной силы в виде начальной нагрузки, на 2-м этапе можно рассчитать скорость движения расплава, вызванного электромагнитным воздействием. Далее необходима проверка влияния движения расплава на распределение электромагнитных параметров по объему. Учитывая все эти факторы и повторяя эту последовательность до получения сходимости результатов, получаем реальное поле скоростей по объему расплава.

**Моделирование электровихревых движений в осесимметричной печи.** Рассмотрим электромагнитные и гидродинамические процессы в модели осесимметричной печи постоянного тока, схема и размеры расчетной области которой приведены на рис. 1.

Для моделирования за основу взяты данные, соответствующие параметрам реальной промышленной печи разработки фирмы Danieli [18]: сила тока  $I = 80 \text{ кА}$ , проводимость металла  $\sigma_1 = 0,9 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ , проводимость электродов  $\sigma_2 = 0,2 \cdot 10^6 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$ , относительная магнитная проницаемость металла и окружающей среды  $\mu = 1$ , относительная диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon = 1$ . Гидродинамические параметры для температуры расплава были взяты из [19], константы  $k - \varepsilon$  модели турбулентности (3-5) из работы [1].

В силу осевой симметрии задачи расчетная область составляла половину реальной области. Расчеты проводились с использованием различных видов анализа на различных сетках. Выявлено существенное влияние на результаты расчетов размеров расчетной сетки и формы конечных элементов. По предварительному анализу было определено оптимальное разбиение на конечные элементы и их форма. Расчетная область разбивалась на элементы неравномерно: в области подового электрода, где большие градиенты электромагнитных параметров, элементы располагались густо и имели небольшие размеры, порядка 0,01 от радиуса электрода. По мере удаления от подового электрода,

в связи с уменьшением градиентов параметров, размеры элементов увеличивались пропорционально расстоянию до оси симметрии, увеличиваясь в десять раз на периферии.

Задача решалась при следующих граничных условиях для границ, обозначенных на рис. 1:

для границ  $V_1, V_5, V_6, V_9$  плотность тока (15);

для границ  $V_8, V_7$  изоляция электрического тока (14);

для границ  $V_6, V_7, V_8, V_9$  условия непрерывности электрического (12) и магнитного поля (13).

Гидродинамические процессы рассматривались только для области расплавленного металла и на границах чаши печи  $V_6, V_7, V_8, V_9$  задавалось условие прилипания (11).

На всех этапах решения задача на оси симметрии задавалось условие осевой симметрии.

Исследовано влияние граничных условий для электромагнитного поля на искусственных границах расчетной области  $V_2, V_3, V_4$  на параметры в центральной зоне. В расчетах использовались условия магнитной изоляции, которые являются стандартными для электромагнитного анализа, и неотражающие граничные условия. На модельных задачах выяснено несущественное влияние разных граничных условий на параметры в центральной зоне. Результаты расчетов с условиями магнитной изоляции и неотражающими условиями различаются в пределах погрешностей расчета на 0,7 %. В дальнейшем расчеты проводились с неотражающими граничными условиями и за расчетную область была выбрана граница расплава металла, защитный слой футеровки, верхний и нижний электроды [20-23].

На рис. 2 приведено векторное и контурное поле силы Лоренца около подового электрода (анода). Здесь: 1 – огнеупорная футеровка, 2 – жидкий металл, 3 – электрод. Величина силы Лоренца по объему расплава изменялась от 0,01 Н до 39,3 кН и в среднем в центральной зоне составляла около 30% от объемной силы тяжести. Результаты расчетов подтверждают факт, что сила Лоренца в печах с подовым электродом является определяющей при возникновении электровихревого течения.

На рис. 3 приведено контурное поле ротора силы Лоренца в окрестности подового электрода. Из графиков видно, что ротор силы Лоренца достигает максимальных значений в области подового электрода, что подтверждает теоретическое предположение о вихревом характере движения расплава, вызванного этой силой.

На следующем этапе, согласно стратегии решения задачи, были смоделированы гидродинамические процессы в расплаве металла в осесимметричной постановке [24, 25]. На рис. 4 приведены гидродинамические поля модуля скорости, вектора скорости и линии тока расплава. Как видно из графиков в расплаве возникает интенсивное вихревое движение. Вихрь образуется в



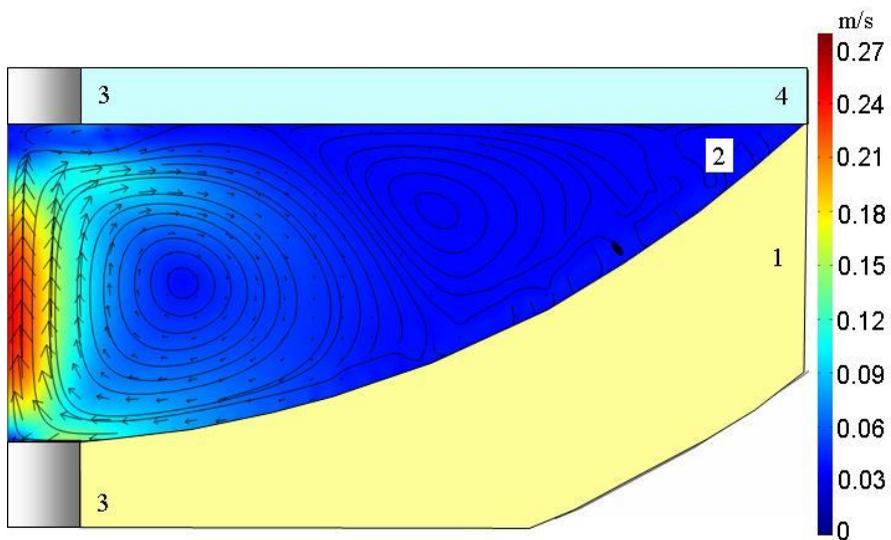


Рисунок 4

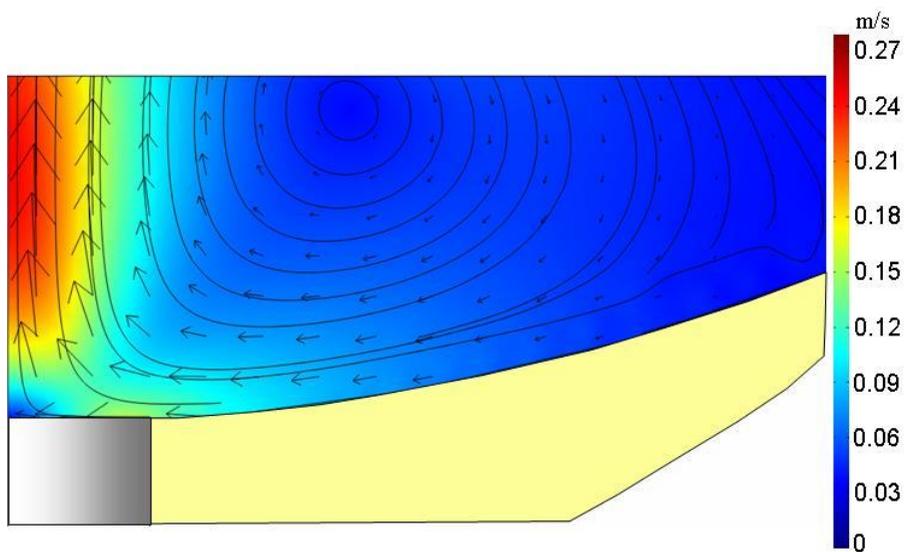


Рисунок 5

области подового электрода, как показано на рис. 4, и там имеет максимальную скорость. Поток расплава на оси симметрии восходящий и, достигая верхней границы объема расплава, устремляется вниз. Максимальная скорость вихревого движения наблюдается на оси электродов и достигает 0,3 м/с. Скорость расплава у торца анода возле футеровки около 0,1 м/с.

Для верификации полученных результатов аналогичные расчеты были проведены в системе COMSOL. Сравнение результатов полученных в COMSOL и ANSYS показало незначительное отклонение, которое составило порядка 5%. Хорошее совпадение расчетов разными методами и пакетами говорит о надежности моделей, методов и достоверности полученных результатов.

Для подтверждения предположения об определяющем влиянии электро-вихревого движения на повышенный износ футеровки более подробно рассмотрены процессы в непосредственной близости подового электрода. На рис. 5 приведены гидродинамические поля модуля скорости, вектора скорости и линии тока расплава в непосредственной близости подового электрода. Из графика видно многократное возрастание скорости движения расплава под действием сил Лоренца.

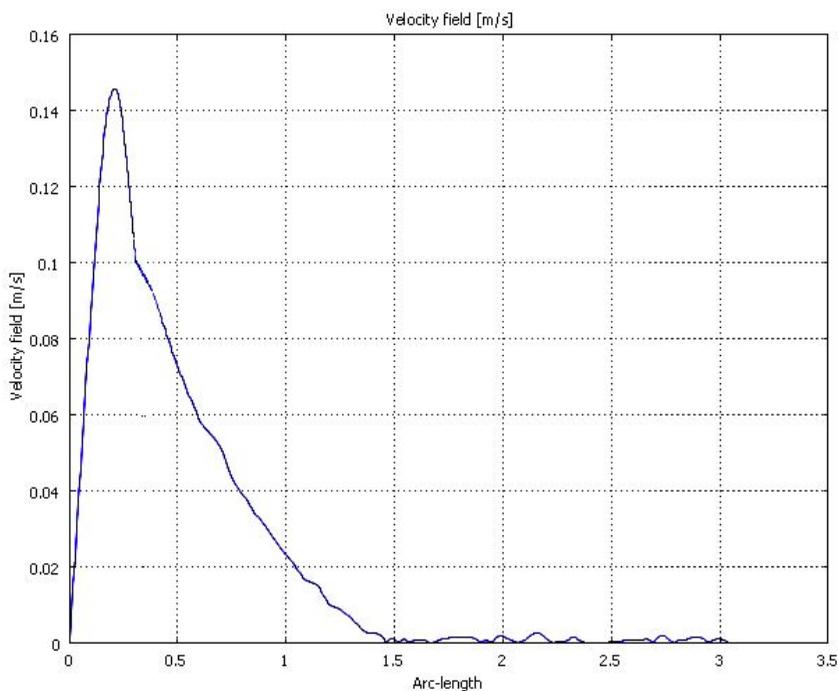


Рисунок 6

На рис. 6 приведен график зависимости касательной составляющей скорости на границе вязкого подслоя вдоль поверхности футеровки вблизи подового электрода. Из графика видно существенное увеличение касательной составляющей скорости расплава в области подового электрода и футеровки на расстоянии порядка радиуса электрода. Повышенные значения скорости движения расплава соответствуют большим значениям силы вязкого трения на поверхности, вдоль которой движется расплав. Приведенные результаты расчетов, в которых отмечена максимальная интенсивность течения вблизи подового электрода, подтверждают предположение об определяющем действии движения расплавленного металла на повышенный износ футеровки.

На рис. 7 приведен график зависимости силы вязкого трения, действующей на единицу поверхности футеровки вблизи подового электрода, которая определялась в формуле:

$$\left[ \eta \left( \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) \right] \cdot \vec{n}.$$

Из графика видно многократное возрастание силы вязкого трения в области подового электрода и футеровки в непосредственной близости от электрода (на расстоянии порядка радиуса электрода).

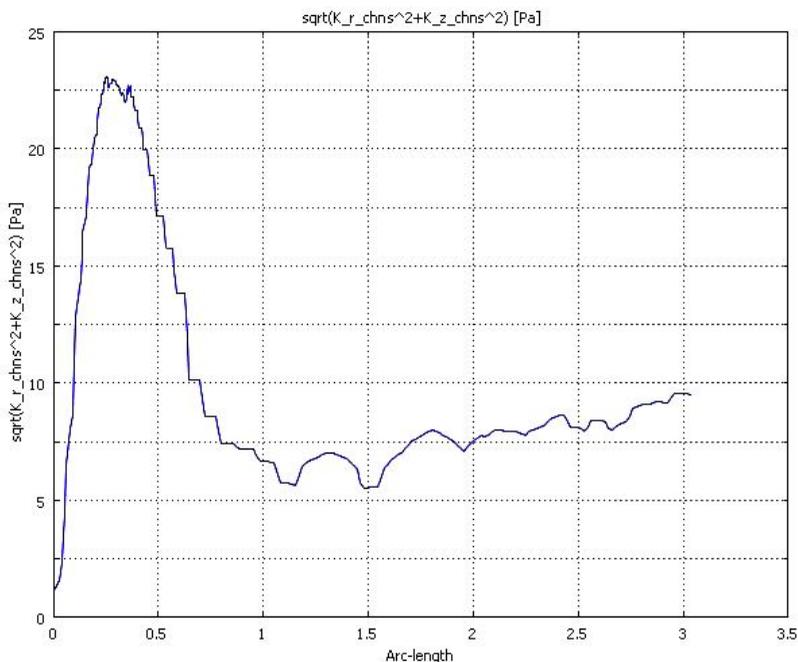


Рисунок 7

Анализируя результаты расчетов, и сравнивая их с экспериментальными данными по износу футеровки, которые приведены на рис. 8 [2] (слева новый подовый электрод, а справа электрод после 400 плавов), можно сделать вывод, что электровихревое течение расплава существенно влияет на износ футеровки в окрестности подового электрода.

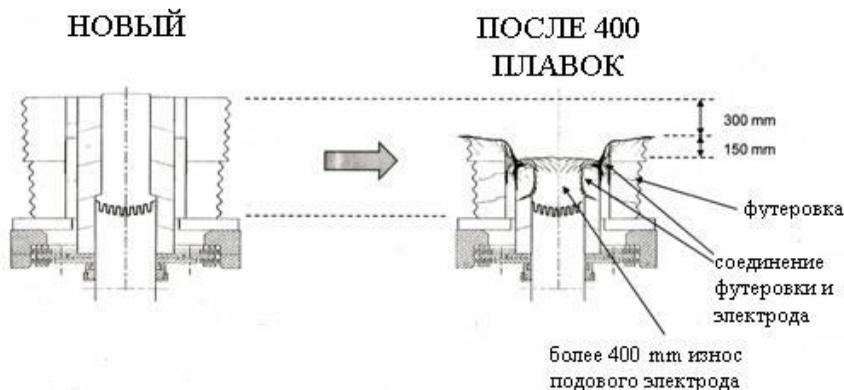


Рисунок 8

**Выводы.** Для описания процессов в электросталеплавильной печи постоянного тока с подовым электродом использована модель магнитной гидродинамики, учитывающая пространственное распределение электрического тока, электрического и магнитного полей и силы Лоренца. Разработана стратегия решения поставленной сопряженной задачи при помощи пакета ANSYS. В осесимметричной постановке решена задача, на которой отработаны методы расчета электромагнитных и гидродинамических полей, оценено влияние искусственных граничных условий на границах расчетной области на параметры в центральной зоне. Определен оптимальный тип конечных элементов, размеры сетки и вид анализа.

Показано, что пространственное распределение тока в расплаве металла приводит к возникновению вихревого поля силы Лоренца, которая вызывает электровихревое движение расплава. Установлено, что сила Лоренца составляет около 30 % от объемной силы тяжести и играет определяющую роль в возникновении вихревого движения расплава, максимальной скоростью которого достигает 0,3 м/с.

Результаты расчетов в ANSYS сравнивались с экспериментальными данными и расчетами в COMSOL. Хорошее совпадение расчетов разными методами и пакетами говорит о надежности методов и достоверности результатов.

**Список литературы:** 1. Wang F. Numerical study of dc arc plasma and molten bath in dc electric arc furnace / F. Wang, Z. Jin, Z. Zhu // Ironmaking and Steelmaking. – 2006, Vol 33, No 1. – P. 39-44.

2. *Зайцев В.А.* Подовые электроды дуговых печей постоянного тока / В.А. Зайцев, Л.Б. Медовар // СЭМ. – 2009, №2. – С. 3-8. 3. *Nekhamin S.M.* DC arc melting furnaces / S.M. Nekhamin, A.G. Lunin, M.M. Krutyanskii, and A.K. Filippov // Refractories and Industrial Ceramics. – 2005, Vol. 46, No. 1. – P. 37-39. 4. *Малиновский В.С.* Технично-экономические результаты промышленного освоения дуговых печей постоянного тока нового поколения / В.С. Малиновский, И.Б. Власова, В.Д. Малиновский // Черная металлургия: Бюл. НТИ. – 2010, №2. – С. 26-40. 5. *Малиновский В.С.* Дуговые печи постоянного тока нового поколения (ДППТПП) в сталеплавильном производстве / В.С. Малиновский // Труды 6-го конгресса сталеплавильщиков. 2001. – С. 213-220. 6. *Ячиков И.М.* Моделирование электровихревых течений в ванне дуговой печи постоянного тока / И.М. Ячиков, О.И. Карандаева, Т.П. Ларина – Монография. Магнитогорск, ГОУ ВПО «МГТУ», 2008. – 234 с. 7. *Бояревич В.В.* Электровихревые течения / В.В. Бояревич, Я.Ж. Фрейберг, Е.И. Шилова и др. – Рига: Зинатге, 1985. – 315 с. 8. *Ushio M.* Mathematical modelling of flow field and heat transfer in high-current arc discharge / M. Ushio, J. Szekely, and C.W. Chang // Ironmaking and Steelmaking. – 1981, No. 6. – P. 279-286. 9. *Szekely, J.* Heat-transfer fluid flow and bath circulation in electric arc furnaces and dc plasma furnaces / J. Szekely, J. McKelliget and M. Choudhary // Ironmaking and Steelmaking. – 1983, Vol. 10, No.4. – P. 169-179. 10. *Henning B.* DC furnace containment vessel design using computational fluid dynamics / B. Henning, M. Shapiro and L.A. le Grange // Proceedings: Tenth International Ferroalloys Congress; INFACON X: 'Transformation through Technology' – 1 – 4 February 2004 Cape Town, South Africa. – P. 565-574. 11. *Alexis J.* Modeling of heat transfer from an electric arc – a simulation of heating – Part I / J. Alexis, M. Ramirez, G. Trapaga and P. Jonsson // Electric Furnace Conference Proceedings. –1999. – P. 279-287. 12. *Alexis J.* Modeling of a DC Electric Arc Furnace – Heat Transfer from the Arc / J. Alexis, M. Ramirez, G. Trapaga, and P. Jonsson // ISIJ International. – 2000, Vol. 40, No. 11. – P. 1089-1097. 13. *Ramirez M.* Effects of the Arc, Slag and Bottom bubbling of argon on the fluid flow and heat transfer of a DC EAF Bath – Part II / M. Ramirez, G. Trapaga, J. Alexis, and P. Jonsson // Electric Furnace Conference Proceedings. – 1999. – P. 751-761. 14. *Ramirez M. J.* Fluid flow and heat transfer in steel/slag baths of a DC electric arc furnace under the influence of the arc and gas injection / M. Ramirez, G. Trapaga, and McKelliget // Paper presented at the Brimacombe Memorial Symposium. – 4 October 2000. Vancouver, British Columbia, Canada. – P. 14-18. 15. *Повх И.Л.* Магнитная гидродинамика в металлургии / И.Л. Повх, А.Б. Капустра, Б.В. Чекин – М.: Металлургия, 1974. – 240 с. 16. *Trif D.* Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics / D. Trif, T. Petrila. – Boston: Springer Science Business Media Inc, 2005. – 438 p. 17. ANSYS Advanced analysis techniques guide ANSYS Release 10.0. – U.S.A. Canonsburg, august 2005. – 340 P. 18. <http://www.danieli.com>. 19. Таблицы физических величин. Справочник. // Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с. 20. *Казак О.В.* Электровихревые поля в сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Вісник донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки, 2010, вип. 1. – С. 118-125. 21. *Казак О.В.* Моделирование электровихревых полей в металлургических печах / О.В. Казак, А.Н. Семко // Математичне моделювання. – 2009, №2(21). – С. 48-53. 22. *Казак О.В.* Вихревое движение расплава в сталеплавильных печах / О.В. Казак, А.Н. Семко // Международная научная конференция «Физика конденсированного состояния» (ФКС-XVII). Гродно, Беларусь – 21-23 апреля 2010. – С. 39 – 42. 23. *Kazak O.* Modelling Vortex Fields in Metal Smelting Furnaces / O. Kazak, O. Semko // The International Journal of Multiphysics. Volume 4, Number 4, 2010 – P. 351-358. 24. *Казак О.В.* Электровихревые течения в осесимметричных сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Вісник донецького національного університету, Сер. А: Природничі науки, 2010, вип. 2. – С. 116-122. 25. *Казак О.В.* Электровихревое движение расплава в печах постоянного тока с подовым электродом / О.В. Казак, А.Н. Семко // Инженерно-физический журнал. 2011, Том 84 №1. – С. 209-217.

Надійшла до редакції 28.03.2011

**А.Г. КОШОВИЙ**, магістр, НАУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків;  
**О.П. ПУХЛЯР**, бакалавр, НАУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків;  
**Г.І. КОШОВИЙ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., НАУ  
ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

## **УЗАГАЛЬНЕННЯ КОНТИНУУМУ СЕРПІНСЬКОГО: ФРАКТАЛЬНІ КИЛИМИ ЗІ ЗМІННОЮ РОЗМІРНІСТЮ ХАУСДОРФА**

Пропонуються узагальнення другого континуума Серпінського, які пов'язані з самоподібними фракталами зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Проведений математичний аналіз отриманих дофрактальних структур та доведено ряд тверджень стосовно їх властивостей.

Предлагаются обобщения второго континуума Серпинского, которые связаны с самоподобными фракталами со сменной размерностью Хаусдорфа. Проведен математический анализ полученных предфрактальных структур и доказано ряд утверждений касательно их свойств.

Generalizations of Sierpinski carpet are suggested. They deal with self similar fractals of variable Hausdorff dimension. Mathematical analyses of obtained prefractal structures are presented. Series of statements about their properties are proved.

Узагальнюючи дисконтинууми *Георга Кантора* (ДК) на двовимірний простір, польський математик *В. Серпінський*, побудував 2 континууми [1]. Перший з них, який має назву *трикутника Серпінського*, був створений у 1915 році, а другий, що зветься *килимом Серпінського*, роком пізніше. Його практичне застосування пов'язане з розвитком мобільного зв'язку, де виникла потреба у широкому діапазоні частот для збільшення кількості послуг. Тобто потрібна була антена неklasичної структури. Такою виявилась фрактальна антена, де використовувались певні стадії побудови континуумів Серпінського (КС) [2,3]. Розширювати полосу частот можна як за рахунок зміни стадії побудови, так і змінюючи початкові об'єкти творення, а також сам закон творення.

У даній роботі пропонується ряд узагальнень другого КС, які пов'язані з узагальненням ДК, коли виникають самоподібні фрактали (СПФ) зі змінною розмірністю Хаусдорфа (РХ) [4]. Щоб розібратись у цих узагальненнях спочатку приділимо достатню увагу класичним СПФ, зокрема, побудові КС.

**Другий континуум Серпінського.** Цей самоподібний фрактал, що будується наступним чином. Беремо квадрат (ініціатор), ділимо його на дев'ять рівних частин і відкидаємо середню частину.

В результаті виникає початковий об'єкт творення, що зветь утворювачем (рис. 1 б). Далі він зменшується у три рази та заміщує кожний з восьми квадратів. Так виникає 64 квадрати, кожний з яких має  $1/81$  від площі ініціатора. Цей процес зменшення та заміщення продовжується необмежено.

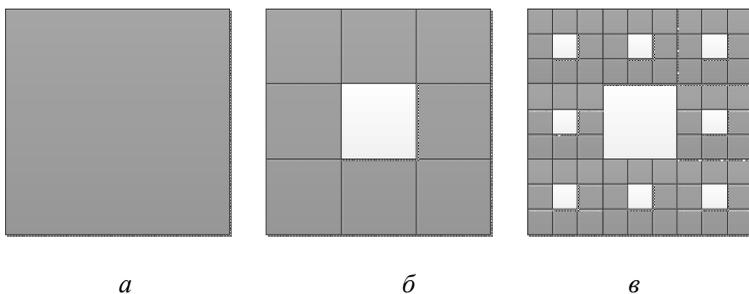


Рисунок 1– Початок побудови КС: ініціатор, утворювач та друга стадія побудови

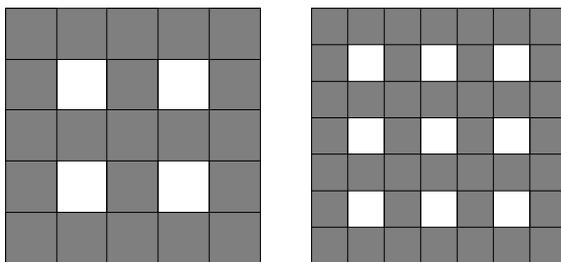
Як результат творення виникає ідеальний з математичної точки зору об'єкт, який зветься самоподібним фракталом, бо його розмірність Хаусдорфа  $\ln 8/\ln 3$  є строго більшою за топологічну. Легко доводиться, що площа початкового квадрата повністю вичерпується.

Дійсно, на першому кроці відкидається квадрат, що становить  $1/9$  площі, на другому 8 квадратів, кожний з яких становить  $1/81$  площі і так далі. Таким чином, маємо геометричну прогресію зі знаменником  $8/9$ , сума якої дорівнює одиниці. Отже, в результаті віднімання отримаємо нуль і стає зрозумілим те, чому другий КС належить до канторових кривих і має одиничну топологічну розмірність. Інші тонкощі побудови та топологічну сутність другого КС можна знайти у підручнику [1].

Тут ми розглянемо тільки те, що потрібно з практичної точки зору. В першу чергу зазначимо, що використовуються тільки деякі стадії побудови, зокрема при розробці антен. Тому ці антени варто назвати, часто так і роблять, «дофрактальними» (prefractal). Як очевидно з рис.1, де зображена, зокрема, 2 стадія побудови двовимірного СПФ, маємо для неї тільки два можливих характерних внутрішніх розмірів вирізів  $1/3$  та  $1/9$  від сторони початкового квадрата. Відповідно, для довільної стадії творення таких характерних внутрішніх розмірів буде  $n$  ( $n$  - номер стадії чи порядок наближення до СПФ) і визначаються вони степенем трійки. Перейдемо тепер до можливих узагальнень в рамках математичної строгості означення СПФ, як множини, розмірність Хаусдорфа якої є строго більшою за топологічну.

**Перше узагальнення КС.** Почнемо з узагальнення пов'язаного з кількістю елементів розподілу ініціатора при побудові утворювача. Тут будемо наслідувати В.Серпінського, використавши СПФ з  $PX \ln 3/\ln 5$ . Поділимо ініціатор, квадрат зі стороною 1, на 25 рівних частин і відкидаємо 4 з них, як показано на рис.2 а.

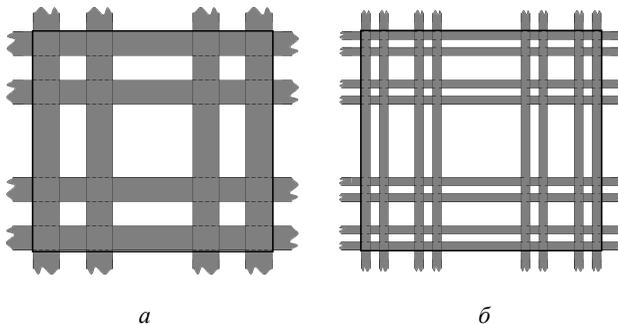
Далі зменшуємо утворювач у п'ять разів та заміщуємо ним кожний з 21 квадратів. Коли процес зменшення та заміщення продовжувати необмежено,



*a* *б*  
Рисунок 2 – Утворювачі узагальнень КС5 та КС7

то виникне СПФ, що можна назвати КС5. Подібно до класичного КС обчислюється РХ КС5 –  $\ln 21/\ln 5$ . При діленні ініціатора на 49 рівних частин і відкиданні 9 частин, отримаємо утворювач, зображений на рис 2 б. З нього виникне СПФ, що можна назвати КС7, РХ якого дорівнює  $\ln 40/\ln 7$  і т.д. Переваги цих узагальнень з точки зору основних характерних внутрішніх розмірів вирізів невеликі: характерний внутрішній розмір для утворювача КС –  $1/3$ , але виріз один (рис 1 б;  $1/5$  – для утворювача КС5, але вирізів 4 (рис 2 а;  $1/7$  – для утворювача КС7, але вирізів вже аж 9 (рис 2 б). Ще раз зазначимо, що узагальнення не виходить за рамки математичного означення СПФ, чого не дотримуються деякі дослідники, та, особливо, розробники.

**Друге узагальнення КС.** Можна дещо змінити підхід до побудови КС, залишаючи ініціатор без змін та витлумачивши утворювач, як перетин двох площинних ґраток зі стрічок. І спробувати далі розглядати стадії творення як перетини однакових дофрактальних стрічкових ґраток (ДФСГ). Тоді другою стадією буде наступний об'єкт (рис. 3 а), що нагадує другу стадію побудови КС, зображену на рис. 1 в, але відрізняється від неї наявністю прямокутних вирізок.



*a* *б*  
Рисунок 3 – Перетини двох площинних ДГ з РХ  $\ln 2/\ln 3$   
(*a* – друга та *б* – третя стадії)

Третя стадія побудови, наведена на рис. 3 б, утворена перетином двох ДФСГ, що відповідають третій стадії побудови класичного ДК з РХ, що визначається виразом  $\ln 2 / \ln 3$ . Зрозуміло, що в результаті нескінченного процесу тут теж виникає ідеальний об'єкт, що має схожі до попередніх властивості. Зокрема, можна довести вичерпність площі, бо розміри відповідних ДМК є нульовими, тобто, отримуємо канторову криву [1]. На відміну від попередніх СПФ, які позначались КС5 та КС7, назвемо його фрактальним килимом (ФК) і вказуватимемо номер 3 : ФК3.

Більш суттєвим узагальненням ФК3 може бути використання ДФСГ, які пов'язані з одновимірними СПФ зі змінною РХ [4]. Розпочнемо з простого їх класу, коли утворювачем буде пара сегментів, а РХ визначається виразом  $\ln 2 / \ln k, k > 2$ . Якщо коефіцієнт подібності  $k$  є меншим, або більшим за 3, то другій стадії творення відповідає квадрат з прямокутними вирізами, зображений на рис. 4 а. Тут характерними внутрішніми розмірами будуть не два, а вже три  $1 - 2/k, 1/k - 2/k/k, 1/k/k$ . Коли коефіцієнт подібності  $k > 3$ , то структура буде менш наповненою ніж зображені на рис. 1 та рис. 3, відповідно, коли  $k < 3$ , то структура буде більше наповненою. Можна взяти значення  $k = 9, 27, \dots, 3^n, \dots$ , тоді відповідна РХ буде  $1/2, 1/3, \dots, 1/n$  і наповнення буде швидко зменшуватись.

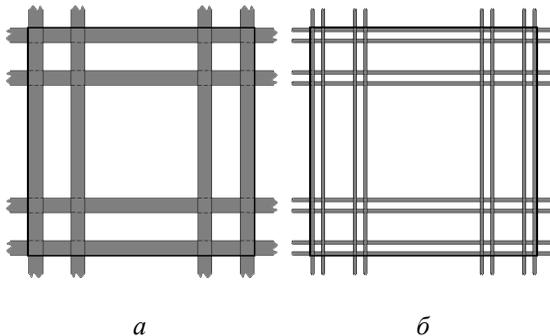


Рисунок 4 – Перетини двох площинних ДГ з РХ 1/2 (друга та третя стадії).

В результаті нескінченного процесу тут теж виникає ФК, що відрізняється від ФК3, тому будемо вказувати його номер за коефіцієнтом подібності  $k$ , тобто ФК $k$ . Зокрема, при  $k = 3$ , маємо ФК3, тобто, це є узагальненням ФК3.

Другий, дещо складніший клас СПФ зі змінною РХ [5], має у якості утворювача три сегменти, тому вже на першій стадії побудови отримаємо квадрат з чотирма квадратними вирізами (див. рис. 5 а). При цьому вже можемо мати не один параметр, як у КС чи КС5, а два параметра. Друга стадія значно підвищує кількість вирізаних квадратів, з'являються прямокутні вирізи і, відповідно, збільшується кількість параметрів (див. рис. 5 б). Зазначимо,

що  $PX$  даного класу одновимірного СПФ дорівнює  $\ln 3/\ln k$ ,  $k > 3$ , що доводиться подібно до ДК.

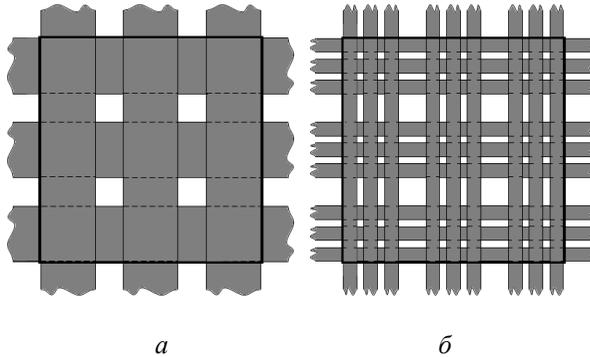


Рисунок 5 – Перетини двох площинних ДГ з  $PX \ln 3/\ln 4$  (1 та 2 стадії).

Таким чином, друге узагальнення КС дає не один клас, а декілька класів ФК, які суттєво відрізняються як від першого узагальнення КС, так і між собою. Зазначимо, що принциповою є строга математична впорядкованість пропонувананих двовимірних фрактальних об'єктів. Це дозволяє провести системний аналіз процесу їх побудови, подібно до того, як це зроблено для одновимірних СПФ зі змінною  $PX$ . Такий аналіз важливий з огляду на можливе практичне застосування певних стадій побудови у моделюванні деяких радіотехнічних, акустичних пристроїв та процесів, що там можуть відбуватися. Та це вже виходить за межі даної статті. Тут дещо зупинимось на математично-му аналізі процесу побудови фрактальних килимів.

**Математичний аналіз фрактальних килимів.** Зазначимо, що термін фрактал означає множину у  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $R^n$ , у якій топологічна розмірність є строго меншою за розмірність Хаусдорфа ( $PX$ ). Класичним прикладом фракталу в  $R^2$  є КС у якого топологічна розмірність дорівнює 1, а  $PX$  дорівнює  $\ln 8/\ln 3 > 1$ . Перейдемо до аналізу дофрактальних структур утворених перетинами двох ДФСГ, що відповідають одній стадії СПФ зі змінною  $PX \ln 2/\ln k$ ,  $k > 2$ . Під фрактальним килимом розуміємо об'єкт, що утворюється перетином двох однакових фрактальних стрічкових ґраток, впорядкованих відповідно до одновимірного СПФ.

**Лема 1.** *Фрактальний килим на основі СПФ з  $PX \ln 2/\ln k$  має нульову площу, тобто є канторовою кривою з одиничною топологічною розмірністю.*

*Доведення.* Звернемось до процесу побудови: на першому кроці маємо 4

квадрати та 4 прямокутники. Квадрати замінюються знову на 4 квадрати та 4 прямокутники кожний. Прямокутники замінюються на відрізки першої стадії, а далі на наступному кроці на відрізки другої стадії, і т.д. Тобто, вони за площею вичерпуються подібно до того, як вичерпується за лінійною мірою до-сконала множина Кантора: на першому кроці відкидаємо  $(k-2)/k$  (залишається  $2/k$ ) загальної лінійної міри початкового сегмента, на другому –  $2(k-2)/k^2$ , на n-му кроці  $2^{n-1} \cdot (k-2)/k^n$ . Порахуємо загальну суму довжин відрізків, що відкидаються

$$\frac{k-2}{k} \cdot \left(1 + \frac{2}{k} + \dots + \frac{2^{n-1}}{k^{n-1}} + \dots\right) = \frac{k-2}{k} \cdot \frac{1}{1-2/k} = 1.$$

Отже, будемо звертати увагу на квадрати: їх на другій стадії побудови буде  $4^2$ , відповідно, на n-й стадії –  $4^n$ . Проведемо дослідження їх площі.

Коли початковий квадрат (ініціатор) має одиничну площу, то за рахунок зменшення його сторони у  $k$  разів, викидають 4 квадрати, площа кожного з яких  $1/k^2$ .

Відповідно на n-стадії  $4^n$  квадратів будуть мати загальну площу  $(2/k)^{2n}$ .

Оскільки коефіцієнт самоподібності  $k > 2$ , то  $2/k < 1$ . В результаті граничного переходу при  $n \rightarrow \infty$  прийдемо до нульової площі.

Лему доведено.

Таким чином, топологічна розмірність ФКк є одиничною. Визначимо розмірність Хаусдорфа частини ФКк, яку утворюють квадрати.

**Лема 2.** *Розмірність Хаусдорфа частини ФКк, що утворюється граничним процесом зменшення та зміщення квадратів становить  $\ln 4 / \ln k$ .*

*Доведення.* Встановлюємо діаметри квадратів в залежності від стадії побудови. На першому кроці сторона квадрата  $1/k$ , а його діаметр  $\sqrt{2}/k$ .

На другому –  $\sqrt{2}/k^2$ , а на n-стадії маємо  $\sqrt{2}/k^n$ .

Відповідно їх кількість становить  $4^n$ . Тоді, s-міра Хаусдорфа даної множини  $H^s$  визначається границею

$$H^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4^n \cdot \left(\sqrt{2}/k^n\right)^s\right) = 2^{S/2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4/k^s\right)^n$$

Щоб ця границя була скінченною і відмінною від нуля необхідно щоб  $4 = k^s$ , звідки логарифмуванням знаходимо критичне значення s при якому значення  $H^s$  переходить від нуля до нескінченності. Це критичне значення  $\ln 4 / \ln k$  і є, за означенням, розмірністю Хаусдорфа. Лему доведено.

З цих двох лем випливає наступна теорема.

**Теорема.** Фрактальний килим на основі СПФ з  $PX \ln 2/\ln k$  містить у собі самоподібний фрактал з  $PX \ln 4/\ln k$ , а його топологічна розмірність дорівнює 1, тобто він є самоподібним фракталом зі змінною розмірністю Хаусдорфа.

Подібним чином можна довести фрактальність і інших класів килимів.

**Висновки.** В межах строгого математичного означення самоподібного фракталу проведено узагальнення другого континууму Серпінського. В результаті отримано декілька класів самоподібних фракталів (фрактальних килимів) у двовимірному просторі, які мають характерні властивості континуумів Серпінського: вони є канторовими кривими і їх розмірності Хаусдорфа перевищують 1, але менші за 2.

Перший клас фрактальних килимів побудований на основі зміни початкового об'єкта творення – утворювача, при цьому використовуються дисконтинууми Кантора зі змінною розмірністю Хаусдорфа:

$$\ln 2/\ln 3, \ln 3/\ln 5, \ln 4/\ln 7.$$

При першому узагальненні принцип творення залишається без змін.

Другий клас фрактальних килимів утворюється, як результат перетину фрактальних стрічкових ґраток. В свою чергу стрічки у ґратках впорядковані у відповідності з самоподібними фракталами з різними розмірностями Хаусдорфа

$$\ln 2/\ln k, k > 2, \ln 3/\ln k, k > 3.$$

У випадку дофрактальних структур утворених перетином двох дофрактальних ґраток (ДФГ), що відповідають одній стадії СПФ зі змінною  $PX \ln 2/\ln k, k > 2$ , проведений математичний аналіз.

Зазначимо, ФК застосовується у якості елемента фрактальної антени, тому наступним має бути розгляд математичних моделей розсіювання електромагнітних та акустичних хвиль [6].

**Список літератури:** 1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию — М.: Наука. — 1977. 2. Puente C., Romeu J., Pous R., Cardama A. On the behavior of the Sierpinski multiband fractal antenna // IEEE Transactions on antennas and propagation. — 1998. — № 4. — P. 517-524. 3. Puente C., Borau C.B., Rodero M.N., Robert J.R. An iterative model for fractal antennas: application to the Sierpinski casket antenna. // IEEE Transactions on antennas and propagation. — 2000. — № 5. — P. 713-719. 4. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиопизика и електроника. — Х.: Ин-т радиопизики и електрон. НАН України. 2007. — № 3. С. — 451–455. 5. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиопизика и електроника. — Х.: Ин-т радиопизики и електрон. НАН України. — 2007. — № 1. — С. 141–147. 6. Теория дифракции / [Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.]. — М.: Мир, 1964. — 428с.

Надійшла до редколегії 23.03.11

*Л.В.КУРПА*, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХП»;  
*М.А.БУДНІКОВ*, аспірант, НТУ «ХП»

## **ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

В роботі пропонується метод дослідження вимушених нелінійних коливань багатошарових пластин, який базується на теорії R-функцій та варіаційних методах. Задача розглядається в рамках класичної геометрично нелінійної теорії багатошарових пластин в припущенні відсутності розшарування та ковзання шарів. Завдяки використанню теорії R-функцій, метод може бути застосованим для пластин складної геометричної форми з різними способами закріплення. Показано порівняння результатів, що були отримані за допомогою запропонованого підходу, з відомими в літературі та представлені нові результати дослідження для пластин складної форми.

В работе предлагается метод исследования вынужденных нелинейных колебаний многослойных пластин, который базируется на теории R-функций и вариационных методах. Задача рассматривается в рамках классической геометрически нелинейной теории многослойных пластин в предположении отсутствия расслоения и проскальзывания слоев. Благодаря использованию теории R-функций, метод может быть использован для пластин сложной геометрической формы и с различными способами закрепления. Показано сравнение результатов, полученных с помощью разработанного подхода, с известными в литературе и представлены новые результаты исследования для пластин сложной формы.

In the present paper the method of investigation of the forced nonlinear vibrations of the laminated plates is proposed. The developed method is based on the R-functions theory and variational methods. The problem is considered with using the classic geometrically nonlinear theory of the laminated plates in assumption that delaminating between layers is absent. Due to application of R-functions, the method can be used for plates with different geometric forms and ways of fastening. Comparisons of the obtained results with results which are known in the literature are carried out. The new results for the plates with complex shape are presented.

**Вступ.** У сучасних конструкціях в якості розрахункових елементів широко застосовуються багатошарові пластини. Зазвичай при експлуатації на них діють різні навантаження, тому дослідження динамічної поведінки таких елементів з урахуванням нелінійних факторів, що виникають в реальних умовах, є актуальною задачею.

На даний момент існує велика кількість робіт, в яких розглядаються задачі про нелінійні коливання багатошарових пластин. Найбільш повний огляд літератури з даного питання виконано у роботах [1–5]. Слід зауважити, що в більшості існуючих статей розглядаються вільні коливання пластин прямокутної форми. Суттєво менша кількість публікацій присвячена дослідженню вимушених коливань багатошарових пластин [5,6]. Що ж стосується пластин більш складної форми, то таких робіт практично немає. В більшості представлених публікацій для розв'язання вказаного класу задач застосовується метод скінчених елементів (МСЕ) [2,5].

У даній роботі пропонується альтернативний підхід, що базується на теорії R-функцій та варіаційних методах.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу про вимушені коливання багатошарової пластини під дією поперечного навантаження  $F(t) = P \cos \Omega t$ . Припускається, що розшарування та ковзання шарів відсутні. Математичну постановку задачі виконаємо в рамках класичної геометрично нелінійної теорії багатошарових пластин, яка базується на гіпотезі недеформованих нормалей, прийнятої для всього пакету шарів пластини в цілому. Відповідно до цієї теорії:

- нормальний до серединної поверхні прямокутний елемент після деформації залишається прямолінійним, нормальним та зберігає свою довжину;
- нормальними напруженнями на площинах, які паралельні серединній площині, можна знехтувати.

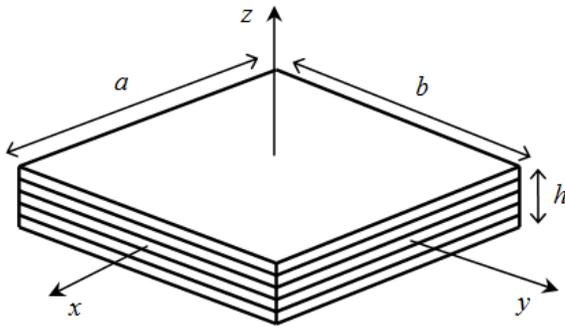


Рисунок 1 – Загальний вигляд багатошарової пластини

Нехтуючи силами інерції в серединній площині, систему рівнянь руху багатошарової пластини симетричної будови можна представити в операторній формі [7]:

$$\begin{cases} L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v = -Nl_1(w), \\ L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v = -Nl_2(w), \\ L_{33}(D_{ij})w = F - Nl_3(u, v, w) + m_1 \partial^2 w / \partial t^2. \end{cases} \quad (1)$$

Диференціальні оператори  $L_{ij}$ ,  $Nl_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) визначаються як:

$$L_{11}(C_{ij}) = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{12}(C_{ij}) = L_{21}(C_{ij}) = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{22}(C_{ij}) = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{33}(D_{ij}) = -D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$Nl_1(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{11}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{12}^{(N)}(w), \quad Nl_2(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{12}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{22}^{(N)}(w),$$

$$Nl_3(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

де

$$N_{11}^{(N)}(w) = \frac{1}{2} C_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$N_{22}^{(N)}(w) = \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$N_{12}^{(N)}(w) = \frac{1}{2} C_{16} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Приведені жорсткісні характеристики  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) визначаються за формулами:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^n \int_{-\frac{h_{s-1}}{2}}^{\frac{h_s}{2}} B_{ij}^s(1, z^2) dz.$$

Величина  $m_1$  визначається наступним чином:

$$m_1 = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz,$$

де  $\rho_s$  – щільність матеріалу  $s$ -го шару.

Система (1) доповнюється відповідними граничними і початковими умовами. У даній роботі розглядаються два види граничних умов:

1. Шарнірно-закріплений контур:  $u = 0, v = 0, w = 0, M_n = 0$ .
2. Жорстко закріплений контур:  $u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ .

**Метод розв'язання.** Функції  $u, v, w$  будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot w_i^{(c)}(x, y), \\ u(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot u_{ij}(x, y), \\ v(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot v_{ij}(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

де  $w_i^{(c)}(x, y)$  – власні функції лінійної задачі про вільні коливання пластини.

Метод знаходження функцій  $w_i^{(c)}(x, y)$  у випадку багат шарових пластин різної форми описано в роботі [8].

Функції  $u_{ij}(x, y)$  та  $v_{ij}(x, y)$  є розв'язками системи:

$$\begin{cases} L_{11}(C_{ij})u_{ij} + L_{12}(C_{ij})v_{ij} = -NI_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\ L_{12}(C_{ij})u_{ij} + L_{22}(C_{ij})v_{ij} = -NI_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \end{cases} \quad (3)$$

доповненої відповідними граничними умовами. Оператори  $NI_1^{(2)}$  та  $NI_2^{(2)}$  визначаються як:

$$\begin{aligned} NI_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \left( C_{11} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \left( C_{16} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right), \\ NI_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \left( C_{16} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \left( C_{66} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Підставляючи вирази (2) для невідомих функцій  $u, v, w$  в рівняння (1), легко переконатися, що перші два рівняння руху системи (1) задовольняються тотожно.

Застосовуючи *процедуру Бубнова-Гальоркіна* до третього рівняння, і враховуючи ортогональність власних функцій  $w_i^{(c)}(x, y)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), отримаємо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$y_s''(t) + \omega_{L,s}^2 y_s(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n y_i(t) y_j(t) y_k(t) \gamma_{sijk} = \tilde{F}_s(t), \quad (4)$$

$$\text{де } \gamma_{sijk} = -\frac{1}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[ N_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(p)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{(p)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x \partial y} \right] w_s^{(c)} d\Omega,$$

$$\tilde{F}_s(t) = -\frac{F(t)}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_s^{(c)} d\Omega, \quad \begin{Bmatrix} N_{11}^{(p)} \\ N_{22}^{(p)} \\ N_{12}^{(p)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(p)} \\ \varepsilon_{22}^{(p)} \\ \varepsilon_{12}^{(p)} \end{Bmatrix},$$

$$\varepsilon_{11}^{(p)} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^{(p)} = \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{12}^{(p)} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x} \right)$$

При використанні одномодової апроксимації, система (4) значно спрощується та зводиться до одного рівняння:

$$y''(t) + \omega_L^2 y(t) + \gamma y^3(t) = \tilde{F}(t). \quad (5)$$

Рівняння (5) може бути розв'язано методом Бубнова-Гальоркіна [9]. Тоді залежність відношення  $\nu = \Omega/\omega_L$  від амплітуди  $A$  коливань пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  визначається за формулою:

$$\frac{\Omega}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \gamma A^2 \pm \frac{\tilde{P}}{A}}. \quad (6)$$

**Чисельні результати.** Для чисельної реалізації запропонованого метода було розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL, яке дозволяє розглядати багатошарові пластини симетричної будови зі складною формою плану. Тестування програми було виконано на ряді прикладів з використанням одномодової апроксимації.

**Задача 1.** Враховуючи, що одношарові пластини можна розглядати як окремий випадок багатошарових, розроблене програмне забезпечення було апробовано на прикладі ізотропної пластини ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 100$ ). Результати порівняння відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань ізотропної пластини представлені в табл. 1. Максимальне відхилення не перевищує 0.63%. В табл. 2 наведені результати порівняння нелінійного частотного відношення  $\Omega/\omega_L$  для вимушених коливань ізотропної пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  при  $\tilde{P} = 0.2$ .

Таблиця 1  
Відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань  
ізотропної пластини

$A/h$	Нерухомий шарнір (а)		Жорстке закріплення (б)	
	Метод RFM	[4]	Метод RFM	[4]
0.2	1.0196	1.0196	1.0072	1.0073
0.4	1.0764	1.0767	1.0285	1.0288
0.6	1.1648	1.1659	1.0631	1.0636
0.8	1.2784	1.2813	1.1097	1.1106
1.0	1.4111	1.4168	1.1669	1.1681
1.2	1.5580	1.5678	1.2332	1.2347
1.4	1.7154	–	1.3072	–
1.6	1.8808	–	1.3877	–
1.8	2.0521	–	1.4736	–
2.0	2.2281	–	1.5641	–

Таблиця 2  
Відношення  $\Omega/\omega_L$  для  
вимушених коливань ізотропної  
пластини

$A/h$	Жорстке закріплення	
	Метод RFM	[4]
0.2	0.1701	0.1637
-0.2	1.4244	1.4245
0.4	0.7847	0.7561
-0.4	1.2711	1.2536
0.6	0.9628	0.9014
-0.6	1.2624	1.2161
0.8	1.1013	1.0145
-0.8	1.3088	1.2367
1	1.2342	1.0944
-1	1.3868	1.2634

На рис. 2 представлено порівняння амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) для вимушених коливань ізотропної пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  при  $\tilde{P} = 0.2$ , що були отримані в даній роботі, з результатами роботи [4].

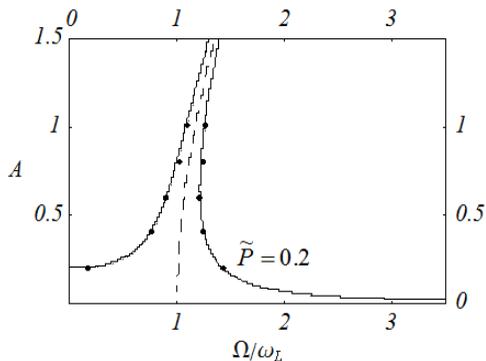


Рисунок 2 – АЧХ для вільних коливань ізотропної пластини  
під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  при  $\tilde{P} = 0.2$ ,

- які були отримані в даній роботі;
- які були отримані в роботі [4]

**Задача 2.** Розглянемо прямокутну п'ятишарову пластину з геометричними властивостями  $a/b=1$ ,  $a/h=100$ , яка виготовлена з матеріала [5]:

$$E_1 = 40E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_1 = 0.5. \quad (7)$$

У табл. 3 наведено порівняння отриманих результатів для вільних коливань пластини з різними варіантами укладання шарів з результатами роботи [5]. Аналіз порівняння показує, що максимальне відхилення  $\omega_{NL}/\omega_L$  не перевищує 1.6%.

Таблиця 3

Порівняння нелінійного частотного відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань прямокутної п'ятишарової пластини

	$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$				$(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$			
	Нерухомий шарнір (а)		Жорстке закріплення (б)		Нерухомий шарнір (в)		Жорстке закріплення (г)	
$A/h$	Метод RFM	[5]	Метод RFM	[5]	Метод RFM	[5]	Метод RFM	[5]
0.2	1.0313	1.0315	1.0078	1.0085	1.0146	1.0147	1.0069	1.0072
0.4	1.1198	1.1210	1.0309	1.0335	1.0571	1.0577	1.0274	1.0283
0.6	1.2536	1.2572	1.0682	1.0739	1.1244	1.1260	1.0607	1.0626
0.8	1.4199	1.4281	1.1183	1.1282	1.2123	1.2154	1.1056	1.1086
1.0	1.6086	1.6237	1.1797	1.1946	1.3168	1.3219	1.1608	1.1647
1.2	1.8127	1.8370	1.2505	1.2714	1.4342	1.4416	1.2248	1.2267

На рис. 3 представлені АЧХ для вимушених коливань прямокутної п'ятишарової пластини під дією поперечного навантаження

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$$

при  $\tilde{P} = 0.2$  та  $\tilde{P} = 0.4$  для наступних випадків укладання шарів та граничних умов:

- а)  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , нерухомий шарнір;
- б)  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , жорстке закріплення;
- в)  $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ , нерухомий шарнір;
- г)  $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ , жорстке закріплення.

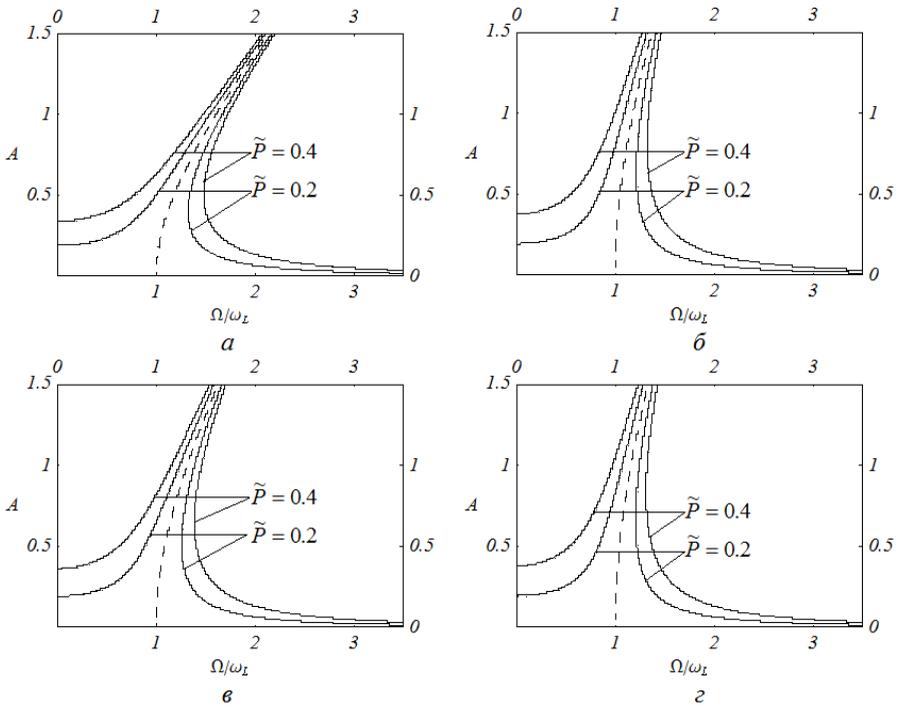


Рисунок 3 – АЧХ для вимушених коливань прямокутної п’ятишарової пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$ ,  $\tilde{P} = 0.2$  та  $\tilde{P} = 0.4$

**Задача 3.** Розглянемо п’ятишарову ортогонально армовану пластину з вирізами, зображену на рис. 4. Механічні параметри цієї пластини співпадають з (7).

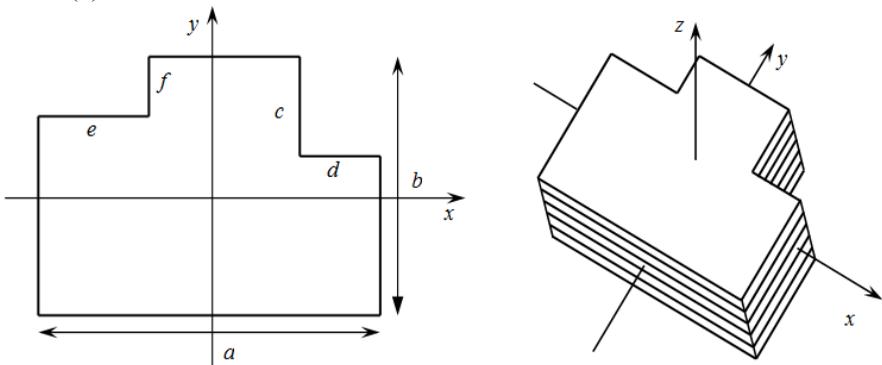


Рисунок 4 – П’ятишарова пластинка з вирізами

В табл. 4 наведені нелінійні частотні відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань пластини для різних значень  $c, d, e, f$ . Як видно з таблиці, при вирізах порядку  $0.01a$ , значення  $\omega_{NL}/\omega_L$  практично співпадають з відповідними значеннями  $\omega_{NL}/\omega_L$  при відсутності вирізів, що свідчить про вірогідність запропонованого алгоритма для пластин складної геометричної форми.

Таблиця 4

Відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань пластини з вирізами

$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$						
Нерухомий шарнір (а)				Жорстке закріплення (б)		
$A/h$	$c = d = e = f = 0$	$c = d = e = f = 0.01a$	$c = f = 0.2a$ $d = e = 0.1a$	$c = d = e = f = 0$	$c = d = e = f = 0.01a$	$c = f = 0.2a$ $d = e = 0.1a$
0.2	1.0313	1.0312	1.0273	1.0078	1.0079	1.0079
0.4	1.1198	1.1196	1.1051	1.0309	1.0313	1.0311
0.6	1.2536	1.2531	1.2238	1.0682	1.0691	1.0687
0.8	1.4199	1.4191	1.3728	1.1183	1.1199	1.1192
1.0	1.6086	1.6075	1.5434	1.1797	1.1820	1.1810
1.2	1.8127	1.8114	1.7292	1.2505	1.2538	1.2524

На рис. 5 представлені АЧХ пластини, що розглядається, при умовах  $c = f = 0.2a, d = e = 0.1a$ , яка знаходиться під дією поперечного навантаження

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$$

для випадків шарнірного спирання (рис. 5, а) та жорсткого закріплення (рис. 5, б).

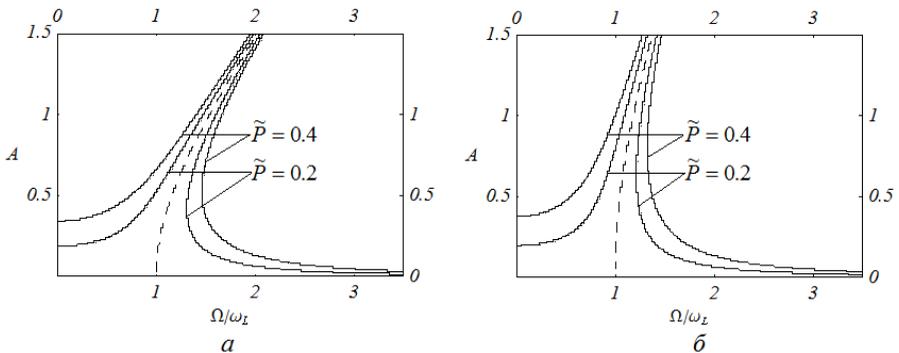


Рисунок 5 – АЧХ для вимушених коливань п'ятишарової пластини, яка зображена на рис. 4, під дією поперечного навантаження

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t \quad (\tilde{P} = 0.2 \text{ і } \tilde{P} = 0.4, c = f = 0.2a, d = e = 0.1a)$$

Як видно з рис. 3 та 5, резонансні криві для кожного випадку ( $\tilde{P} = 0.2$  и  $\tilde{P} = 0.4$ ) містять дві неперервні дуги, одна з яких лежить лівіше від скелетної кривої, зображеної пунктирною лінією, а друга – правіше.

При неперервній зміні частоти  $\Omega$  виникають області нестійких режимів, коли одному значенню  $\Omega$  відповідають три можливі дійсні значення амплітуди. В даній роботі алгоритм знаходження регіону нестійкості не розглядається. Зауважимо тільки, що перехід з однієї гілки резонансної кривої на іншу при зміні частоти відбувається завдяки стрибку амплітуд в зоні нестійкості.

**Перспективи подальших досліджень.** Надалі планується дослідження нелінійних вимушених коливань багатошарових пластин несиметричної будови в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку.

**Висновки.** Запропонований підхід дозволяє розв'язувати задачі про вимушені коливання багатошарових пластин симетричної будови складної геометричної форми з різними граничними умовами.

Порівняння результатів, які були отримані у цій роботі, з відомими в літературі свідчить про достовірність запропонованого методу.

**Список літератури:** 1. *Abe A.* Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance / *A.Abe, Y.Kobayashi, G.Yamada* // Journal of Sound and Vibration – 2007. – 304. – P. 957-968. 2. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / *M.Amabili*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p. 3. *Qatu M.S.* Vibration of Laminated Shells and Plates / *M.S. Qatu* – Elsevier Ltd., Oxford. – 2004. 4. *Kadiri M. El.* Improvement of the semi-analytical method, based on Hamilton's principle and spectral analysis, for determination of the geometrically non-linear response of thin straight structures. Part III: steady state periodic forced response of rectangular plates / *M. El Kadiri, R.Benamar* // Journal of Sound and Vibration – Vol. 264, Issue 1, 26 June 2003. – P. 1-35. 5. *Singha M.K.* Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates / *M.K.Singha, R.Daripa* // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 328. – P. 541-554. 6. *Ribeiro P.* Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method / *P.Ribeiro, M.Petyt* // Composite Structures. – 1999. – 46. – P. 197-208. 7. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек / *С.А. Амбарцумян* – М.: Наука, 1974. – 446 с. 8. *Курпа Л.В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек / *Л.В.Курпа* – Харків: НТУ “ХП”, 2009. – 408 с. 9. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек / *А.С.Вольмир* – М.: Наука, 1972. – 432 с. 10. *Бабаков И.М.* Теория колебаний / *И.М. Бабаков* – М.: Наука, 1965. – 732 с.

Надійшла до редколегії 13.04.2011

*Л. В. КУРПА*, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПІ";  
*О. С. МАЗУР*, канд. физ.-мат. наук, ст. викл., НТУ "ХПІ";  
*В. В. ТКАЧЕНКО*, аспірант, НТУ "ХПІ"

## **ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН ПІД ДІЄЮ ПЕРІОДИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Досліджено параметричні коливання та стійкість багатошарових пластин складної форми, навантажених статичним або динамічним навантаженням в серединній площині. Запронований метод базується на застосуванні теорії R-функцій та варіаційних методів. За допомогою представленого методу досліджено нелінійні коливання багатошарових пластин складної форми та отримані чисельні результати у вигляді областей динамічної нестійкості, резонансних кривих та ін.

Исследованы параметрические колебания и устойчивость многослойных пластин сложной формы, нагруженных в своей плоскости статической или динамической нагрузкой. Предложенный метод основан на применении теории R-функций и вариационных методов. С помощью представленного алгоритма исследованы нелинейные колебания многослойных пластин сложной формы и получены численные результаты в виде областей динамической неустойчивости, резонансных кривых и др.

The problem of parametric vibrations and stability analysis for the laminated plates with complex shape, loaded by static or periodic load in plane, for different types of boundary conditions is considered. The proposed method is based on the application of the R-functions theory and Ritz's method. For some cross-ply laminated plates with complex shape nonlinear behavior is investigated and instability domains, response curves are constructed.

Дана робота присвячена дослідженню параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин складної форми, що знаходяться під дією статичного або динамічного навантаження в серединній площині. Актуальність порушеної проблеми, перш за все, пов'язана з широким застосуванням композитних матеріалів для виготовлення пластинчатих елементів тонкостінних конструкцій. Особливий інтерес викликає дослідження динамічної поведінки багатошарових пластин, що знаходяться під дією різних видів навантажень, оскільки в цьому випадку гостро виникає питання збереження неушкодженості конструкції та розрахунку її на міцність.

Вивченню параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин присвячена велика кількість публікацій [1,6,9] та ін. Однак в цих роботах переважно розглянуто пластини канонічної форми, для яких докритичний стан є однорідним і відомим. Для дослідження нелінійної динаміки пластин зі складною формою та неоднорідним докритичним станом використовуються наближені методи, серед яких головним є метод скінченних елементів [10] (МКЕ). Одним із підходів для дослідженні даного класу задач є використання методу, що базується на теорії R – функцій [3] (RFM) та варіаційних методах. В роботах [7,8] такий підхід було застосовано для дослідження параметрич-

них коливань одношарових ізотропних та ортотропних пластин В представленій роботі RFM вперше розвинуто на новий клас задач, а саме параметричні коливання багатшарових пластин під дією статичних та періодичних зусиль в серединній площині. Запропонований підхід чисельно реалізовано в рамках системи POLE-RL та проілюстровано на ряді задач.

**Математична постановка.** Розглянемо багатшарову пластину симетричної структури постійної товщини  $h$ . Вважаємо, що пластина знаходяться під дією зусиль в серединній площині. Для математичної постановки задачі використаємо класичну теорію багатшарових пластин, яка базується на наступних гіпотезах:

- 1) пластина навантажена у своїй площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;
- 2) докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини до втрати стійкості нехтуємо;
- 3) згин пластини моделюється за допомогою гіпотез Кірхгофа-Лява;
- 4) всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру  $\lambda$ .

Представимо рівняння руху [5] в операторній формі

$$L_{11}u + L_{12}v = -Nl_1(w), \quad (1)$$

$$L_{21}u + L_{22}v = -Nl_2(w), \quad (2)$$

$$L_{33}w = Nl_3(u, v, w) + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де  $u, v, w$  – переміщення точок серединної площини в напрямках  $Ox$ ,  $Oy$  та  $Oz$  відповідно. В рівняннях (1)-(3) диференціальні оператори  $L_{ij}$ ,  $Nl_i$   $i, j = 1, 2, 3$  визначаються наступним чином:

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$Nl_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} C_{11} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} C_{16} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} C_{16} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \\
N_3 &= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Тут  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  – нормальні та тангенціальні зусилля, що діють у серединній площині, та визначаються для багатошарових пластин симетричної структури за відомими формулами [1,4,5], представленими нижче в матричній формі:

$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_{xy})^T = \mathbf{C} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})^T.$$

Компоненти деформації  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_{xy}$ ,  $\varepsilon_y$ , визначаються як:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2.$$

Величини  $m_1$ ,  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  ( $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ ) мають наступний вигляд:

$$m_1 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz, \quad (C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij} (1, z^2) dz.$$

Тут  $\rho_s$  – щільність, а  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) – пружні сталі  $s$ -го шару. Якщо шари пластини виготовлені з ортотропного матеріалу, головні напрямки пружності яких не збігаються з напрямками осей координат  $x$  і  $y$ , тоді пружні константи  $B_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) кожного шару визначаються за нижче поданими формулами [5]:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \tilde{B}_{11} \cos^4 \theta + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{B}_{22} \sin^4 \theta, \\
B_{22} &= \tilde{B}_{11} \sin^4 \theta + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{B}_{22} \cos^4 \theta, \\
B_{12} &= \tilde{B}_{12} + [\tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
B_{16} &= \frac{1}{2} [\tilde{B}_{22} \sin^2 \theta - \tilde{B}_{11} \cos^2 \theta + (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta,
\end{aligned}$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{B}_{22} \cos^2 \theta - \tilde{B}_{11} \sin^2 \theta - (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2\theta \right] \sin 2\theta,$$

$$B_{66} = \tilde{B}_{66} + \left[ \tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

де пружні постійні  $\tilde{B}_{ij}$  визначаються як

$$\tilde{B}_{11} = \frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \tilde{B}_{22} = \frac{E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \tilde{B}_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{(1-\nu_1\nu_2)} = \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)},$$

$$\tilde{B}_{66} = G_{12}, \quad \tilde{B}_{44} = G_{23}, \quad \tilde{B}_{55} = G_{13}.$$

Система рівнянь (1)-(3) доповнюється граничними умовами, які залежать від способу закріплення краю пластини. Розглянемо деякі з них.

(C1) – жорстко затиснена пластинка:

$$u_n = 0, \quad v_n = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad (4)$$

(SS1) – вільно оперта пластинка рухома в площині:

$$N_n = 0, \quad T_n = 0; \quad w = 0, \quad M_n = 0; \quad (5)$$

(SS2) – вільно оперта нерухома в площині пластинка

$$u_n = 0, \quad v_n = 0; \quad w = 0, \quad M_n = 0; \quad (6)$$

(SS3) – вільно оперта частково рухома в площині:

$$u_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (7)$$

На навантаженій частині контуру граничні умови в площині визначимо як

$$N_n = -p, \quad T_n = 0. \quad (8)$$

В формулах (4)-(8)  $N_n, T_n, u_n, v_n$  визначаються за формулами

$$N_n = N_x l^2 + N_y m^2 + 2N_{xy} lm, \quad T_n = N_{xy} (l^2 - m^2) + (N_y - N_x) lm,$$

$$u_n = ul + vm, \quad v_n = -um + vl;$$

тут  $l$  та  $m$  – направляючі косинуси нормалі до границі області.

Для зручності подальшого викладення представимо сили  $N_n, T_n$  наступним чином:

$$N_n = N_n^{(L)} + N_n^{(N)}, \quad T_n = T_n^{(L)} + T_n^{(N)},$$

де

$$N_n^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11} l^2 + C_{12} m^2 + 2C_{16} lm) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{12} l^2 + C_{22} m^2 + 2C_{26} lm) +$$

$$+ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (C_{16} l^2 + C_{26} m^2 + 2C_{66} lm),$$

$$N_n^{(N)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{11} l^2 + C_{12} m^2 + 2C_{16} lm) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{12} l^2 + C_{22} m^2 + 2C_{26} lm) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (C_{16} l^2 + C_{26} m^2 + 2C_{66} lm), \\
T_n^{(L)} = & \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11} (l^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11}) lm) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{26} (l^2 - m^2) + (C_{22} - C_{12}) lm) + \\
& + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (C_{66} (l^2 - m^2) + (C_{26} - C_{16}) lm), \\
T_n^{(N)} = & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{16} (l^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11}) lm) + \\
& + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{26} (l^2 - m^2) + (C_{22} - C_{12}) lm) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (C_{66} (l^2 - m^2) + (C_{26} - C_{16}) lm).
\end{aligned}$$

**Метод розв'язання.** Поставлену задачу будемо розв'язувати в декілька етапів. По-перше, треба визначити докритичний стан пластини, а також розв'язати задачу про лінійні коливання пластини, що стискається контурними статичними зусиллями в серединній площині. Для визначення до критичного стану пластини необхідно розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned}
L_{11} u_1 + L_{12} v_1 &= 0, \\
L_{21} u_1 + L_{22} v_1 &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

з неоднорідними граничними умовами

$$N_n^{(L)}(u_1, v_1) = -1, T_n^{(L)}(u_1, v_1) = 0. \tag{10}$$

Задача (9) – (10) є плоскою задачею теорії пружності, її варіаційна постановка зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу

$$I(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x^{(L)} \varepsilon_x + N_y^{(L)} \varepsilon_y + N_{xy}^{(L)} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(L)} u_{1n} d\Omega_1, \tag{11}$$

Де  $\partial\Omega_1$  – навантажена частина границі. Побудову координатних функцій, що задовольняють граничним умовам для пластин складної форми будемо виконувати за допомогою методу R-функцій.

Розв'язавши задачу (10) - (11), отримуємо функції  $u_1$  і  $v_1$ , що дозволяють визначити неоднорідний докритичний стан, обчислюючи зусилля  $N_x(u_1, v_1), N_y(u_1, v_1), N_{xy}(u_1, v_1)$ .

Задача про лінійні коливання пластини, що навантажена в серединній площині, може бути розв'язана за допомогою методу Рітця як результат мінімізації функціоналу:

$$J = \Pi_{\max} - T_{\max}. \tag{12}$$

В (12)  $T_{\max}$  – кінетична енергія пластини, а  $\Pi_{\max}$  – потенціальна енергія пластини, які визначаються за наступними формулами:

$$T_{\max} = \frac{m_1 \Omega_L^2}{2} \iint_{\Omega} w^2 d\Omega,$$

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + p_0 (N_x^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{xy}^{(L)}(u_1, v_1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y})] d\Omega,$$

де  $\Omega_L$  – власна частота, що відповідає даному навантаженню  $p_0$ , а  $M_x, M_y, M_{xy}$  – згинальні та крутильний моменти, які для багат шарових пластин симетричної структури визначаються за формулами:

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_{xy})^T = \mathbf{D} \cdot \vec{\chi}; \quad \text{де } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}, \quad \vec{\chi} = (\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})^T.$$

В цих формулах компоненти деформації  $\chi_x, \chi_{xy}, \chi_y$  визначаються як

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Таким чином, розв'язання лінійної задачі про коливання пластини зводиться до розв'язання задачі на власні значення при відповідних однорідних граничних умовах.

Для розв'язання нелінійної задачі представимо невідомі функції  $(u, v, w)$  у вигляді

$$w(x, y, t) = y(t) \cdot w_1(x, y), \\ u(x, y, t) = p u_1(x, y) + y^2(t) \cdot u_2(x, y), \quad v(x, y, t) = p v_1(x, y) + y^2(t) \cdot v_2(x, y). \quad (13)$$

Тут  $w_1(x, y)$  – власна функція, що відповідає основній частоті лінійних коливань пластини під дією статичного навантаження  $p_0$ , а функції  $(u_2, v_2)$  мають задовольняти рівнянням типу Ламе

$$L_{11}(u_2) + L_{12}(v_2) = -N_1(w_1), \\ L_{21}(u_2) + L_{22}(v_2) = -N_2(w_1) \quad (14)$$

та наступним граничним умовам:

$$N_n^{(L)}(u_2, v_2) = -N_n^{(N)}(w_1), \\ T_n^{(L)}(u_2, v_2) = -T_n^{(N)}(w_1). \quad (15)$$

Варіаційна постановка цієї задачі зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$I(u_2, v_2) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} - 2(Nl_1(w_1)u_2 + Nl_2(w_1)v_2)) d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(N)}(u_2 l + v_2 m) + T_n^{(N)}(-u_2 m + v_2 l) d\Omega_1 .$$

Підставимо (13) в рівняння (3) та застосуємо до нього *метод Бубнова-Гальоркіна*. Тоді якщо пластина навантажена статичними зусиллями  $p_0$ , отримуємо звичайне диференціальне рівняння наступного виду:

$$y_1''(t) + \Omega_L^2 (y(t) + \beta \cdot y^3(t)) = 0 . \quad (16)$$

У випадку, коли навантаження періодичне та має вигляд

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t , \quad (17)$$

де  $p_0$  – статичне навантаження,  $p_t$  – амплітуда змінної за часом частини навантаження,  $\theta$  збуджуюча частота, отримуємо рівняння з періодичними коефіцієнтами

$$y_1''(t) + \Omega_L^2 ((1 - 2k \cdot \cos(\theta t))y(t) + \beta \cdot y^3(t)) = 0 . \quad (18)$$

Коефіцієнти  $k$  та  $\beta$  в (16), (18) визначаються наступним чином:

$$k = \frac{p_t}{2p_{kr}} , \quad \beta = - \frac{\iint_{\Omega} Nl_3(u_2, v_2, w_1) w_1 d\Omega}{m_1 \Omega_L^2 \|w_1\|^2} .$$

У випадку статичного навантаження розв'язок рівняння (16) представимо у вигляді

$$y(t) = A \cos \omega_N t ,$$

де  $A$  – амплітуда,  $\omega_N$  – нелінійна частота, та застосуємо до (16) метод Бубнова-Гальоркіна. Таким чином, для статичного навантаження отримуємо залежність амплітуди коливань від відношенням нелінійної та лінійної частот  $v = \omega_N / \Omega_L$ :

$$v = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta A^2} . \quad (19)$$

Якщо ж на пластину діє періодичне навантаження (17), тоді, як відомо, при деяких співвідношеннях параметрів навантаження та власної частоти коливань в системі виникають коливання з наростаючими амплітудами. Для визначення областей параметрів, що відповідають областям динамічної нестійкості (ОДН), згідно з принципом, викладеним в роботі Болотіна В.В. [2], розглянуто лінеаризоване рівняння

$$y_1''(t) + \Omega_L^2 (1 - 2k \cdot \cos(\theta t))y(t) = 0 . \quad (20)$$

Рівняння (20) — це добре досліджене *рівняння Мат'є*, розв'язки якого можуть бути або обмеженими, або необмежено зростаючими. Головна об-

ласть нестійкості (поблизу  $\theta = 2\Omega_L$ ) обмежена кривими [2]:

$$\theta_1 = 2\Omega_L\sqrt{1-k}, \quad \theta_2 = 2\Omega_L\sqrt{1+k}. \quad (21)$$

Для аналізу нелінійних коливань після втрати стійкості будемо досліджувати нелінійне рівняння (18). Застосовуючи підхід, викладений в [2], отримуємо залежність між частотним відношенням  $\theta/2\Omega_L$  та амплітудою коливань  $A$ :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3\beta}} \sqrt{\frac{\theta^2}{4\Omega_L^2} - 1 \pm k}. \quad (22)$$

**Чисельні результати.** Будемо вивчати параметричні коливання багатошарових пластин з різними механічними характеристиками, які наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

матеріал	$E_1/E_2$	$G/E_2$	$\nu_1 = \nu_2 E_1/E_2$
glass-epoxy	3	0.6	0.25
boron-epoxy	10	0.33	0.22
graphite	40	0.6	0.25

Вважаємо, що всі шари мають однакову товщину, а загальну товщину пластини приймаємо такою, що  $h/a = 0.01$ , де  $a$  – характерний розмір плану пластини.

**Задача 1.** Для тестування запропонованого алгоритму розглянемо коливання п'ятишарової пластини (рис. 1) з різними видами граничних умов (SS1, SS2, SS3, C1) та способами укладки шарів.

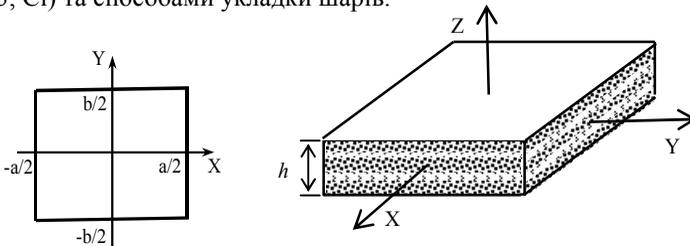


Рисунок 1 – Форма пластини

В табл. 2 наведені значення частотного відношення  $\nu = \omega_N / \omega_L$  ( $\omega_L$  – частота лінійних коливань ненавантаженої пластини). Відхилення отриманих результатів від результатів роботи [6] не перевищує 3%. Найсуттєвіше відхилення простежується для способу укладки шарів  $45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$ .

Таблиця 2

Порівняння значень частотного відношення  $\nu = \omega_N / \omega_L$   
для п'ятишарової квадратної пластини

$\nu = \omega_N / \omega_L$						
Граничні умови						
SS2		SS3			Cl	
A	RFM	[ 6 ]	RFM	[ 6 ]	RFM	[ 6 ]
Ортогтропна пластина (graphite), $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$						
0.2	1.03128	1.03147	1.00150	1.00165	1.00783	1.00847
0.4	1.11989	1.12099	1.00599	1.00658	1.03095	1.03347
0.6	1.25373	1.25723	1.01342	1.01473	1.06838	1.07390
0.8	1.42007	1.42805	1.02373	1.02599	1.11868	1.12820
1.0	1.60886	1.62368	1.03684	1.04023	1.18021	1.19461
1.2	1.81310	1.83697	1.05264	1.05729	1.25130	1.27141
Ортогтропна пластина (graphite), $45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$						
0.2	1.01332	1.01473	1.00930	1.00796	1.00850	1.00717
0.4	1.05227	1.05776	1.03671	1.03135	1.03356	1.02834
0.6	1.11417	1.12601	1.08084	1.06885	1.07404	1.06258
0.8	1.19545	1.21542	1.13975	1.11848	1.12828	1.10855
1.0	1.29246	1.32185	1.21129	1.17837	1.19436	1.16474
1.2	1.40195	1.44162	1.29337	1.24629	1.27054	1.22969

Таблиця 3

Залежність частотного параметру  $\Lambda$  від навантаження  $p_0$ ,  $b/a = 1$

$\alpha$ \ $p_0 / p_{kr}$	Glass-epoxy					
	0	0.25	0.5	0.75	0.9	$p_{kr}$
0	25.836	22.375	18.270	12.921	8.176	5.755
$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$	28.568	24.742	20.204	14.290	9.044	7.147
$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$	29.183	25.276	20.640	14.599	9.240	7.456
$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$	28.568	24.742	20.204	14.290	9.044	7.119
$\alpha$ \ $p_0 / p_{kr}$	Boron-epoxy					
	0	0.25	0.5	0.75	0.9	$p_{kr}$
0	35.269	30.55	24.953	17.665	11.210	10.542
$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$	46.274	40.086	32.743	23.172	14.683	18.354
$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$	48.790	42.274	34.539	24.454	15.507	20.188
$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$	46.274	40.097	32.767	23.213	14.744	17.970

Для розглянутої пластини знайдено основні частоти коливань пластини під дією станичного навантаження в площині для граничних умов SS1.

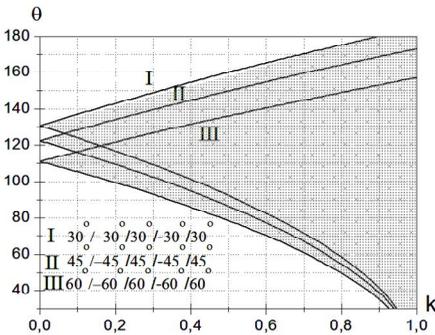
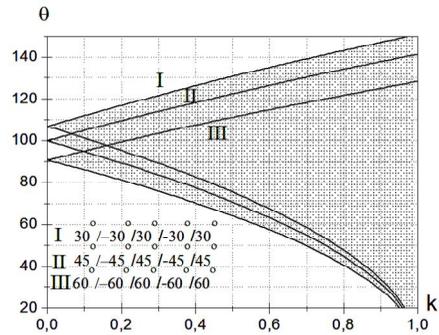
В табл.3,4 представлені результати аналізу впливу навантаження на частотний параметр

$$\Lambda = \Omega_L (a^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}$$

для квадратної та прямокутної пластин ( $b/a = 2$ ).

Залежність частотного параметру  $\Lambda$  від навантаження  $p_0$ ,  $b/a = 2$ 

$\alpha$	$p_0 / p_{kr}$				
	0	0.25	0.5	0.75	$p_{kr}$
0	76.706	66.430	54.241	38.358	12.683
$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$	75.447	65.343	53.357	37.739	12.295
$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$	70.674	61.211	49.985	35.358	10.794
$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$	64.162	55.568	45.375	32.092	8.903

Рисунок 2 – ОДН ( $p_0 / p_{kr} = 0.25$ )Рисунок 3 – ОДН ( $p_0 / p_{kr} = 0.5$ )

Розглянемо параметричні коливання пластини. На рис.2,3,4 представлені області динамічної нестійкості (21), побудовані для

$$p_0 / p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75, \quad b/a = 2$$

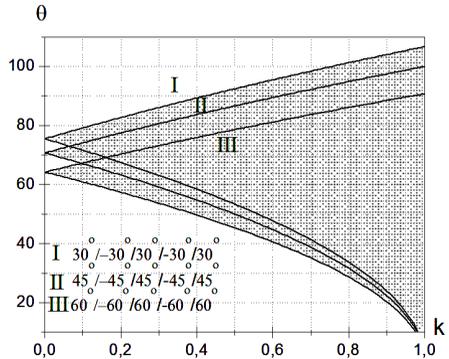
та граничних умов SS1. Аналізуючи отримані результати, можна зауважити, що нестійкість виникає при більших значеннях збуджуючої частоти для пластин з поворотом осей ортотропії на кут  $\alpha = 30^0$ , тобто

$$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0.$$

При укладці шарів

$$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$$

ОДН відповідають меншим значенням збуджуючої частоти.

Рисунок 4 – ОДН ( $p_0 / p_{kr} = 0.75$ )

**Задача 2.** Розглянемо задачу про параметричні коливання пластини складної форми, що знаходиться під дією періодичного навантаження, прикладеного вздовж сторін  $x = \pm a/2$  паралельно осі  $OX$ , рис. 5. Дослідження бу-

ло проведено для граничних умов SS1. Структура розв'язку для розглянутих граничних умов для прогину має вид

$$W = \omega P_0, \quad (23)$$

де  $\omega(x, y) = 0$  – рівняння границі області.

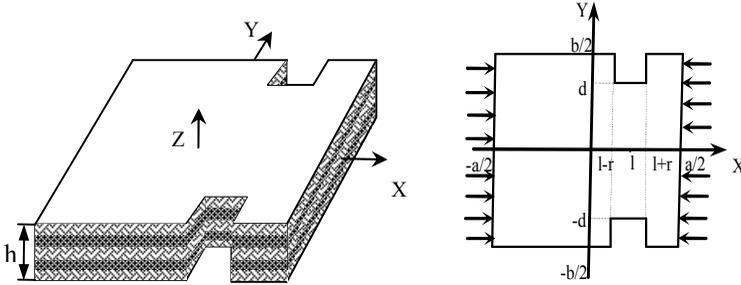


Рисунок 5 – Форма пластини

Функцію  $\omega(x, y)$  побудуємо за допомогою теорії R-функцій [3]:

$$\omega(x, y) = f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 (\bar{f}_3 \vee_0 f_4), \quad (24)$$

де функції  $f_1, f_2, f_3, f_4$  визначаються за наступними формулами,

$$f_1 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, \quad f_2 = \frac{1}{b} \left( \left( \frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0,$$

$$f_3 = \frac{1}{2r} \left( r^2 - (x-l)^2 \right) \geq 0, \quad f_4 = \frac{1}{2d} \left( d^2 - y^2 \right) \geq 0.$$

Символи  $\wedge_0, \vee_0, \bar{\phantom{x}}$  в (24) визначають R - кон'юнкцію, R - диз'юнкцію та R - заперечення [3]. Структури розв'язку для переміщень в площині пластини, вибрано у вигляді

$$u_i = P_i, \quad v_i = P_{i+2}, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

В формулах (23), (25)  $P_i, i = 0..4$  – це невизначені компоненти структури [3].

В табл. 5 представлені частотні параметри  $\Lambda$ , що відповідають різним значенням навантаження  $p_0$ . На рис.6 зображено залежності амплітуди від частотного співвідношення  $\theta/2\Omega$  (22). Амплітудно-частотні залежності побудовані для багатошарових пластин з укладкою шарів  $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$ ,  $90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$ . Результати отримані при варіюванні амплітуди  $p_i$  змінної частини навантаження ( $b/a = 1, l/a = 0.2, d/a = 0.4, r/a = 0.1$ ).

**Висновки.** В роботі запропоновано підхід для дослідження параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин симетричної будови з дові-

Залежність частотного параметру  $\Lambda$  від навантаження пластини  $p_0$ 

$\alpha$ \ $p_0 / p_{kr}$	0.	0.5	0.75	0.9	$p_{kr}$
0	37.233	26.737	19.176	12.29	10.510
$0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$	38.477	28.036	20.400	13.254	10.274
$90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$	39.095	29.678	22.103	14.502	7.853

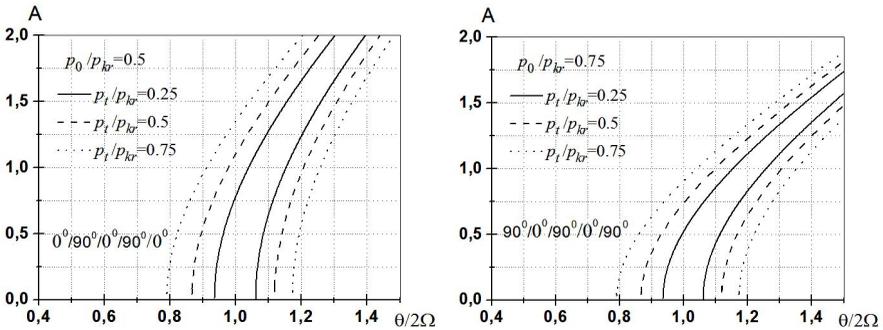


Рисунок 6 – Амплітудно-частотні залежності для пластини, зображеної на рис.5

льною формою плану для різних видів граничних умов та способу укладки шарів. Метод базується на теорії R-функцій та варіаційних методах. Алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL. За допомогою створеного програмного забезпечення було проведено тестування та розв'язані нові задачі коливання багат шарових пластин складної форми під дією статичного та періодичного навантажень в серединній площині.

**Список литературы:** 1. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition / J.N.Reddy // USA: CRC PRESS, – 2004. – р.834. 2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин – М.: Гостехиздат, 1956. – 500 с. 3. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек./ Л.В.Курпа // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408 с. 4. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницький – М.: Гостехиздат. – 1957. – 464 с. 5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1967.–266 с. 6. Singha M.K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. – Journal of Sound and Vibration, 2009, – pp.541-554. 7. Курпа Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9-15. 8. Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method. / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P.179-189. 9. Григоренко Я. М. Устойчивость нелинейных вынужденных колебаний пологих прямоугольных в плане цилиндрических оболочек/ Я. М. Григоренко, В. И. Гуляев, Е. С. Дехтярюк, В. В. Чембалаев// Механика твердого тела. – 1983. – №6. – С.137–142. 10. S. K. Sahu Dynamic Stability of Laminated Composite Curved Panels with Cutouts / P. K. Datta, S. K. Sahu Journal of engineering mechanics – november 2003 – pp. 1245-1253

Поступила в редколлегию 14.04.11

**З.Ф. НАЗИРОВ**, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна;  
**Н.В. ЧЕРЕМСЬКА**, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ „ХПІ”;  
**А.А. ЯНЦЕВИЧ**, д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна

## ПРО ОДИН КЛАС НЕОДНОРІДНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

У статті введено клас неоднорідних випадкових полів, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLS. В роботі реалізовано операторний підхід до вивчення одного класу неоднорідних випадкових полів. Розробка кореляційної теорії такого класу неоднорідних полів може бути перспективною для розв'язання багатовимірних прикладних задач.

В статье вводится класс неоднородных случайных полей, являющихся аналогом почти стационарных в широком смысле случайных процессов UBLS. В работе реализован операторный подход к изучению одного класса неоднородных случайных полей. Разработка корреляционной теории такого класса неоднородных полей может быть перспективной для решения многомерных задач.

The paper is devoted to introduce the class of inhomogeneous discrete random fields. This fields are corresponded a wide sense stationary process UBLS. The way for the study of inhomogeneous discrete random fields based on the operator methods, was proposed.

**Вступ.** Існує великий клас прикладних задач, для яких є характерною статистична нестационарність. Наприклад, поширення хвиль у турбулентній атмосфері, при дослідженні електромагнітних хвиль, які поширюються поблизу земної кулі або в іоносфері, аналізі задач гасіння або зростання поверхневих хвиль сильною турбулентністю, що створюється об'єктом, який рухається та інші. При розв'язанні таких задач використання моделей стаціонарних випадкових процесів або однорідних випадкових полів приводить до великих похибок. Тому постає необхідність у розробці кореляційної теорії широкого класу нестационарних випадкових функцій, яка була б перспективною для розв'язання прикладних задач, для яких статистична нестационарність або неоднорідність відповідних статистичних даних істотна.

**Аналіз останніх досліджень.** До цього часу розроблена достатньо повна кореляційна теорія однорідних випадкових полів, а також полів з однорідними приростами [1,2,3]. Щодо кореляційної теорії інших класів неоднорідних випадкових полів, то вона розвинута лише фрагментарно. В [4] розглянуто клас так званих дисипативних еволюційно зображених полів, відповідна кореляційна теорія заснована на трикутних та універсальних моделях систем комуруючих дисипативних операторів. В роботі [5] було розглянуто спеціальний клас неоднорідних дискретних полів нескінченного рангу нестационарності. В [6] розглядалися майже стаціонарні в широкому сенсі випадкові процеси UBLS (uniformly bounded linearly stationary: однорідно обмежені лінійно

стаціонарні). Слід відзначити, що цей клас ширше, ніж клас дисипативних випадкових процесів, який розглядався в [7]. З урахуванням обмеженості оператора зсуву, одразу можна отримати, що клас дисипативних випадкових процесів входить до класу UBLS. Слід відзначити, що лінійне перетворення дисипативної кривої в гільбертовому просторі виводить цю криву з класу дисипативних кривих.

**Постановка задачі.** Викликає зацікавленість розповсюдження результатів роботи [6] на деякі класи неоднорідних випадкових полів. Введення класу неоднорідних випадкових полів, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLS може привести до результативної кореляційної теорії неоднорідних випадкових полів.

**Розв’язання.** Нехай  $u(x, y, \omega)$  – випадкове поле з математичним очікуванням  $Mu(x, y, \omega) = 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_2$  або  $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$  – множина цілих чисел),  $\omega \in \Omega$ , де  $\Omega$  – імовірнісний простір, і кореляційною функцією  $K(u_1, u_2, v_1, v_2) = Mu(x_1, y_1, \omega) \overline{u(x_2, y_2, \omega)}$ . Якщо у випадку  $x, y \in \mathbb{R}_2$  кореляційна функція неперервна, то  $u(x, y, \omega)$  можна занурити в гільбертів простір  $H_u = \overline{Vu(x_k, y_j)}$ , і тоді кореляційну функцію можна зобразити як скалярний добуток у гільбертовому просторі  $K(x_1, x_2, y_1, y_2) = \langle u_{x_1, y_1}, u_{x_2, y_2} \rangle_{H_u}$ , де  $u_{x, y}$  – двопараметрична сім’я елементів у гільбертовому просторі  $H_u$ , що відповідає початковому полю  $u(x, y, \omega)$ . Надалі  $u_{x, y}$  називатимемо *поверхнею у гільбертовому просторі  $H_u$* .

Поле  $u(x, y, \omega)$  називатимемо *квазіоднорідним*, якщо

$$M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j u(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2) \right|^2 \leq \chi M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j u(x_i, y_j) \right|^2, \quad (1)$$

де  $0 < \chi < \infty$ .

Якщо поле однорідне, то в (1) нерівність переходить в рівність, і  $\chi = 1$ .

В термінах кореляційних функцій (1) переходить в нерівність

$$\sum_{i,j,p,q=1}^{N_1, N_2} K(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2, x_p + \tau_1, y_q + \tau_2) a_{ij} \overline{a_{pq}} \leq \chi \sum_{i,j,p,q=1}^{N_1, N_2} K(x_i, y_j, x_p, y_q) a_{ij} \overline{a_{pq}}. \quad (2)$$

Клас таких процесів позначатимемо  $G_{qv}$ .

**Теорема 1.** Нехай  $u_{x,y} \in G_{qv}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_2$ . Тоді  $v_{x,y} = Bu_{x,y} \in G_{qv}$ , де  $u_{x,y}$  – відповідна поверхня в гільбертовому просторі  $H_u$ , а  $B$  – лінійний оборотний обмежений оператор.

*Доведення.* З (1) витікає, що існує стала  $\chi > 0$  така, що

$$M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j u(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2) \right|^2 \leq \chi M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j u(x_i, y_j) \right|^2.$$

З того що  $B$  є обмеженим і лінійним витікає, що

$$\begin{aligned} M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j v(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2) \right|^2 &= M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j Bu(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2) \right|^2 \leq \\ &\leq \|B\|^2 M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j v(x_i + \tau_1, y_j + \tau_2) \right|^2 \leq \|B\|^2 \chi M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j u(x_i, y_j) \right|^2. \end{aligned}$$

Але,  $u_{x,y} = B^{-1}v_{x,y}$  і, отже,

$$M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j u(x_i, y_j) \right| \leq \|B^{-1}\|^2 M \left| \sum_{i,j=1}^{N_1, N_2} a_i b_j v(x_i, y_j) \right|.$$

Тоді  $v_{x,y} \in G_{qv}$ .

Властивості (1) і (2) означають, що існує двопараметрична група  $T_{t,s}$  ( $T_{t,s}u_{x,y} = u_{x+t, y+s}$ ) обмежених операторів зсуву в  $H_u$  з  $\|T_{t,s}\| \leq \chi$ ,  $t, s \in \mathbb{R}_2$ .

**Лема 1.** Нехай  $T_{t,s}$  – двопараметрична група лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі  $H_u$ , яка задовольняє умові  $\|T_{t,s}\| \leq \chi \forall t, s \in \mathbb{R}_2$ ; тоді існує лінійний обмежений самоспряжений оператор  $B$ , який діє в  $H_u$ , з обмеженим оберненим  $B^{-1}$ , такий що оператор  $U_{t,s} = B^{-1}T_{t,s}B$  – унітарний оператор в  $H_u \forall t, s \in \mathbb{R}_2$ .

*Доведення.* Нехай  $E$  – множина усіх дійсних обмежених функцій двох змінних  $t, s \geq 0$ . Визначимо функціонал  $p(\xi(t, s))$ :

$$p(\xi(t, s)) = \min_{\sigma, \tau} \left[ \overline{\lim}_{\sigma, \tau} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \xi(\sigma_k + t, \tau_l + s) \right],$$

де  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{N_1})$ ,  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_2})$  – довільні.

Функція  $p(\xi(t, s))$ , що очевидно, задовольняє умовам:

$$1) p(\xi + \eta) \leq p(\xi) + p(\eta),$$

$$2) p(a\xi) = ap(\xi), \quad a \geq 0,$$

$$3) a \leq p(\xi) \leq b, \text{ якщо тільки } a \leq \xi(t, s) \leq b.$$

З 1) і 2) витікає, що існує лінійний обмежений функціонал  $L(\xi)$  такий, що  $L(\xi) \leq p(\xi)$ . Крім того, з 3) отримаємо, що з умови  $\xi(t, s) \geq 0$  витікає

$$p(\xi) \geq 0 \text{ і } p(-\xi) \leq 0, \quad L(-\xi) \leq p(-\xi) \leq 0, \quad L(\xi) = -L(-\xi) \geq 0.$$

З іншого боку

$$L(\xi(t + t_0, s + s_0)) = L(\xi(t, s)), \quad \forall t_0, s_0 \geq 0.$$

Насправді, нехай  $\eta(t, s) = \xi(t + t_0, s + s_0) - \xi(t, s)$ . Тоді  $\forall N_1, N_2$

$$\begin{aligned} p(\eta) &\leq \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \eta(\sigma_k + t, \tau_l + s) = \\ &= \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} [\xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s + s_0) - \xi(\sigma_k + t, \tau_l + s)]. \end{aligned}$$

Через те що

$$\begin{aligned} \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s + s_0) - \xi(\sigma_k + t, \tau_l + s) &= \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s + s_0) - \\ &- \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s) + \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s) - \xi(\sigma_k + t, \tau_l + s), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} p(\eta) &\leq \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s + s_0) - \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s) + \\ &+ \frac{1}{N_1} \frac{1}{N_2} \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} \xi(\sigma_k + t + t_0, \tau_l + s) - \xi(\sigma_k + t, \tau_l + s). \end{aligned}$$

Оберемо  $\sigma_k = (k-1)t_0$ ,  $\tau_k = (l-1)s_0$ , тоді неважко показати, що

$$p(\eta) \leq \frac{4 \max\{N_1, N_2\} \max|\xi|}{N_1 N_2}.$$

Через справедливність оцінки  $\forall N_1, N_2$  витікає  $p(\eta) \leq 0$ .

Аналогічно можна показати, що  $p(-\eta) \leq 0$ . Тоді

$$L(\eta) = -L(-\eta) \geq -p(-\eta) \geq 0, \quad L(\eta) = 0.$$

Функціонал  $L(\xi)$  задовольняє умові  $L(1) = 1$ . Насправді, через те, що

$$p(1) = 1, \quad p(-1) = -1, \quad \text{то } L(1) \leq 1 \text{ і } -L(-1) = L(1) \geq -p(-1) = 1.$$

З поняття „узагальненої границі” для функцій можна визначити „узагальнену границю” для послідовностей  $\{\xi(n, m)\}$  з властивостями:

$$а) L(a\xi(n, m) + b\eta(n, m)) = aL(\xi(n, m)) + bL(\eta(n, m)),$$

$$б) L(\xi(n, m)) \geq 0, \text{ якщо } \xi(n, m) \geq 0,$$

$$в) L(\xi(n + n_0, m + m_0)) = L(\xi(n, m)), \quad n_0, m_0 \geq 0,$$

$$г) L(1) = 1.$$

*Зауваження.* Можна визначити  $L(\xi(n, m))$  як  $L(\xi(t, s))$ , де  $\xi(t, s) = \xi([t], [s])$ ,  $[t], [s]$  – цілі частини  $t, s$  відповідно.

Нехай  $f, g$  – елементи з  $H$ , тоді послідовність

$$\xi(n, m) = (T(n, m)f, T(n, m)g) \text{ обмежена, } |\xi(n, m)| \leq c^2 \|f\| \cdot \|g\|, \quad c > 0.$$

Визначимо ермітово-білінійну форму  $\langle f, g \rangle = L(T(n, m)f, T(n, m)g)$ .

Тоді маємо

$$\frac{1}{c} \leq \frac{\|T(n, m)f\|}{\|T(-n, -m)T(n, m)f\|} = \frac{\|T(n, m)f\|}{\|f\|} \leq c.$$

З умов а), б), в) отримаємо, що

$$\frac{1}{c^2} \|f\|^2 \leq \langle f, f \rangle \leq c^2 \|f\|^2.$$

Застосовуючи відому теорему про обмежені білінійні форми, отримаємо, що існує самоспряжений обмежений оператор  $A$ , який діє в  $H$  і такий, що  $\langle f, g \rangle = (Af, g)$ .

Оператор  $A$ , очевидно, задовольняє умові

$$\frac{1}{c^2} I \leq A \leq c^2 I.$$

З іншого боку, з в) витікає, що

$$\begin{aligned} (AT(h_1, h_2)f, T(h_1, h_2)g) &= L(T(h_1 + n, h_2 + m)f, T(h_1 + n, h_2 + m)g) = \\ &= L(T(n, m)f, T(n, m)g) = (Af, g), \end{aligned}$$

тобто

$$[T(h_1, h_2)]^* AT(h_1, h_2) = A. \quad (3)$$

Нехай  $B = A^{\frac{1}{2}}$ , тоді  $\frac{1}{c} I \leq B \leq cI$  і  $\frac{1}{c} I \leq B^{-1} \leq cI$ . З (3) отримаємо, що

$$\begin{aligned}
B^{-1} \left( [T(h_1, h_2)]^* BBT(h_1, h_2) \right) B^{-1} &= B^{-1} (BB) B^{-1} = \\
&= \left( BT(h_1, h_2) B^{-1} \right)^* \left( BT(h_1, h_2) B^{-1} \right) = I.
\end{aligned}$$

Це означає, що оператор  $U(h_1, h_2) = BT(h_1, h_2) B^{-1}$  унітарний.

Зауважимо, що ми довели унітарність  $U(h_1, h_2)$ , коли  $h_1, h_2 \geq 0$ . Якщо  $h_1, h_2 \leq 0$ , то

$$U(h_1, h_2) = BT(h_1, h_2) B^{-1} = BT(-h_1, -h_2) B^{-1} = \left( BT(-h_1, -h_2) B^{-1} \right)^{-1};$$

отже, в цьому випадку  $U(h_1, h_2)$  також унітарний.

Якщо  $h_1 \geq 0, h_2 \leq 0$ , то

$$U(h_1, h_2) = BT(h_1, 0) T(0, h_2) B^{-1} = \left[ BT(h_1, 0) B^{-1} \right] \left[ BT(0, h_2) B^{-1} \right],$$

тобто і в цьому випадку оператор  $U(h_1, h_2)$  унітарний. Лема доведена.

**Теорема 2.** Нехай  $v_{x,y} \in G_{q^v}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_2$ . Тоді існує однорідне поле  $u_{x,y}$  і лінійний обмежений самоспряжений оператор  $B$ , який діє в  $H_u$ , з обмеженим оберненим  $B^{-1}$ , такий що  $v_{x,y} = Bu_{x,y}$ .

*Доведення.* Через те що  $v_{x,y} \in G_{q^v}$ , то двопараметрична сім'я операторів зсуву  $T_{t,s}$  утворюють двопараметричну групу лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі  $H_u$  і  $v_{x,y} = T_{t,s} v_{x,y}(0)$ . Тоді за лемою, існує лінійний обмежений самоспряжений оператор  $B$ , який діє в  $H_u$ , з обмеженим оберненим  $B^{-1}$ , такий що оператор  $U_{t,s} = B^{-1} T_{t,s} B$  – унітарний оператор в  $H_u \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_2$ . Нехай  $u_{x,y}$  визначається наступним чином:  $u_{x,y} = U_{t,s} B^{-1} v_{x,y}(0)$ . Тоді

$$v_{x,y} = T_{t,s} v_{x,y}(0) = BU_{t,s} B^{-1} v_{x,y}(0) = Bu_{x,y}.$$

**Лема 2.** Нехай  $z(n, m)$  – біле дискретне поле, тобто  $Mz(n, m) = 0$ , а  $Mz(m, n) \overline{z(p, q)} = \delta_{mn} \cdot \delta_{pq}$ . Нехай  $B$  – лінійний оператор в  $L_z = V_{n,m} z(n, m)$  ( $L_z$  лінійна оболонка  $z(n, m)$ ) і  $B|z(n, m)|^2 = B\|z(n, m)\|^2 < C, C > 0$ . Тоді  $B$  може бути розширеним до обмеженого оператора в  $\overline{L_z} = H_z$ .

*Доведення.* Нехай  $z(n, m) = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} z(i, j)$  є елементом  $L_z$ . Тоді твер-

дження леми витікає з нерівності

$$M |Bz(n, m)|^2 = M \left| \sum_{i,j=1}^{n,m} a_{i,j} Bz(i, j) \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n,m} M |a_{i,j} Bz(i, j)|^2 \leq C \sum_{i,j=1}^{n,m} |a_{i,j}|^2 = CM |z|^2,$$

і обмеженість  $B$  очевидна.

**Теорема 3.** Нехай дискретне випадкове поле має вигляд

$$u(n, m) = \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} h(n-p, m-q) g(p, q) w(p, q), \quad (4)$$

де  $w(n, m)$  – дискретний білий шум та існують дві константи  $C_1$  і  $C_2$  такі, що  $C_1 \leq |g(p, q)|^2 \leq C_2$ . Тоді  $u(n, m) \in G_{qv}$ .

*Доведення.* За означенням  $u(n, m)$  маємо

$$\begin{aligned} M \left| \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} a_p b_q u(n+p, m+q) \right|^2 &= \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} \sum_{r,s=1}^{N_1, N_2} a_p \bar{a}_r b_q \bar{b}_s M u(n+p, m+q) \cdot \overline{u(n+r, m+s)} = \\ &= \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} |g(p+n, q+m)|^2 \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} \sum_{r,s=1}^{N_1, N_2} a_p \bar{a}_r b_q \bar{b}_s h(n-p, m-q) \overline{h(n-r, m-s)}. \end{aligned}$$

Через те, що

$$\sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} \sum_{r,s=1}^{N_1, N_2} a_p \bar{a}_r b_q \bar{b}_s h(n-p, m-q) \overline{h(n-r, m-s)} = \left| \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} a_p b_q h(n-p, m-q) \right|^2 \geq 0,$$

та

$$|g(p+n, q+m)|^2 = \frac{|g(p+n, q+m)|^2 |g(p, q)|^2}{|g(p, q)|^2} \leq C_2 C_1^{-1} |g(p, q)|^2,$$

маємо

$$\begin{aligned} &M \left| \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} a_p b_q u(n+p, m+q) \right|^2 \leq \\ &\leq C_2 C_1^{-1} \sum_{p,q=-\infty}^{\infty} |g(p, q)|^2 \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} \sum_{r,s=1}^{N_1, N_2} a_p \bar{a}_r b_q \bar{b}_s h(n-p, m-q) \overline{h(n-r, m-s)} = \end{aligned}$$

$$= C_2 C_1^{-1} M \left| \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} a_p b_q u(n+p, m+q) \right|^2.$$

Отже,  $u(n, m) \in G_{qv}$ .

**Теорема 4.** Нехай поле має вигляд

$$u(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x - \xi, y - \eta) g(\xi, \eta) dZ(\xi, \eta),$$

де  $Z(\xi, \eta)$  – поле з ортогональними прирідками з  $M|Z(\xi, \eta)|^2 = dx dy$  та існують дві константи  $C_1$  і  $C_2$  такі, що  $C_1 \leq |g(\xi, \eta)|^2 \leq C_2$ . Тоді  $u(x, y) \in G_{qv}$ .

*Доведення.* Маємо

$$M \left| \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} a_p b_q u(x+p, y+q) \right|^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} |g(\xi+p, \eta+q)|^2 \left| \sum_{p,q=1}^{N_1, N_2} a_p b_q h(x-p, y-q) \right|^2 dp dq.$$

Подальші міркування аналогічні міркуванням при доведенні теореми 3.

**Висновки.** У статті введено клас неоднорідних випадкових полів, який є аналогом майже стаціонарних в широкому сенсі випадкових процесів UBLS. В роботі реалізовано операторний підхід до вивчення одного класу неоднорідних випадкових полів. Відзначимо, якщо два UBLS поля некорельовані, то сума і добуток таких полів також є UBLS полем. На цьому шляху можливо отримання канонічних зображень полів у вигляді суперпозицій „елементарних” некорельованих UBLS полів. Розробка кореляційної теорії такого класу неоднорідних полів може бути перспективною для розв’язання багатовимірних прикладних задач.

**Список літератури:** 1. Яглом А.М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. – Том 1. – Вып.5(51),– С.3-168. 2. Яглом А.М. Корреляционная теория процессов со случайными n-ми приращениями // Мат. сборник –1955. – Т.37(79), №1,– С.141-196. 3. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем // М.: Логос, 2004. – 1000с. 4. Аббауи Л. Об одном классе неоднородных случайных полей // Вестн. Харьк.ун-та. Сер. Механика, теория управления и математическая физика. – Харьков, 1984. – № 254. – С.49-53. 5. Шаронова Н.В., Черемская Н.В. Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета.– 2004. – №1(19). – С.343-348. 6. Dag Tjostheim and Jonh B.Thomas Some Properties and Examples of Random Processes that Are Almost Wide Sense Stationary // IEEE Trans. on Information Theory, v.21, №3, 1975, p. 257-262. 7. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах / Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. – 160с.

Надійшла до редколегії 31.03.11

**Е. Л. ПИРОТТИ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**В. А. ОТДЕЛЬНОВ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗА РЕШЁТКОЙ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Статья посвящена моделированию розподілу електромагнітного поля за решіткою розсіювачів. Апаратно імітовано діаграму спрямованості електромагнітного поля. Здійснено математичне та технічне моделювання розподілу електромагнітного поля за наявністю одного та декількох розсіювачів, а також за змін положень останніх. Результати можуть бути враховані та використані у виробництві антен, елементів радіостанцій та інших радіотехнічних засобів.

Статья посвящена моделированию распределения электромагнитного поля за решёткой рассеивателей. Аппаратно имитирована диаграмма направленности электромагнитного поля. Осуществлено математическое и техническое моделирование распределения электромагнитного поля при наличии одного и нескольких рассеивателей, а также при изменении положения последних. Результаты могут быть учтены и использованы в производстве антенн, элементов радиостанций и других радиотехнических средств.

The article is devoted to the modeling of electromagnetic field distribution behind the grating of scatterers. The electromagnetic directivity diagram is simulated by hardware. The mathematical and technical design of electromagnetic field distribution in presence of one and a few scatterers, also as with regulations changes of the last ones is realized. The results can be used and allowed for antenna industries, radio station elements and other radio technical facilities manufacturing.

**Введение.** Рассеивающая антенна, электромагнитное поле которой рассеивается объектами биологического происхождения, незаменима в терапевтической отрасли медицины. Задачей является техническая реализация модели антенны с узким управляемым лучом.

**Математическая модель.** В статье предложена модель, демонстрирующая способы управления лучом. Используя функцию Грина [1,2], можно привести волновое уравнение к интегральным уравнениям Максвелла совместно с граничными условиями на разделе двух сред:

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2) \int_V (\varepsilon/\varepsilon_c - 1) \vec{E}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}'; \\ \vec{H}(\vec{r}) = H_0(\vec{r}) + \frac{i\omega\varepsilon_c}{4\pi} \text{rot} \int_V (\varepsilon/\varepsilon_c - 1) \vec{E}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}', \end{cases} \quad (1)$$

где  $f(x) = e^{-ikx}/x$ ,  $\vec{E}_0(\vec{r})$  и  $\vec{H}_0(\vec{r})$  – электрическое и магнитное поля соответственно, которые были бы в точке  $\vec{r}$  при отсутствии биологического рассеивателя,  $\varepsilon_c$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\vec{E}$  – падающее поле,  $k$  – волновой вектор,

$\omega$  – круговая частота монохроматической электромагнитной волны. Для решения (1) удобно использовать (2) и (3).

**Результаты моделирования.** Электромагнитное поле с помощью расширения «Antenna toolbox» формируется дипольным излучателем. Частота исходного излучения была выбрана равной 600 МГц. В процессе моделирования поверхность излучателя разбивается на равные поверхностные элементы и с помощью расширения «PDE toolbox» находится распределение поверхностных токов. Следующим этапом после определения токов на поверхности излучателя является нахождение излучаемого электромагнитного сигнала в исследуемом пространстве. Нахождение электромагнитных полей осуществляется с применением дипольной модели. Суть метода заключается в замене каждого поверхностного элемента излучателя на малый диполь, обладающий тем же самым дипольным моментом. Поле, излучаемое малым диполем, представляет собой известное аналитическое выражение. Искомое излучаемое поле затем вычисляется как сумма полей, образованных малыми диполями.

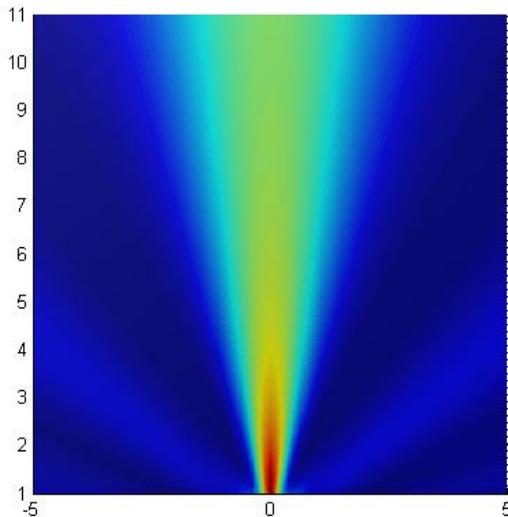


Рисунок 1 – Диаграмма направленности исходного излучения

Задаём диаграмму. На рис.1 продемонстрирован результат моделирования диаграммы направленности исходного излучения электромагнитного поля, учитывая ограничение его по мощности. Затем помещаем одиночный рассеиватель и сравниваем результаты.

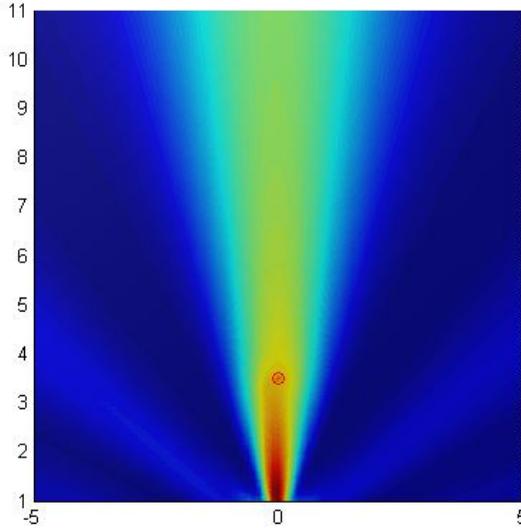


Рисунок 2 – Распределение электромагнитного поля. Один рассеиватель

Как было показано в [3], анализ рассеяния электромагнитного поля частицами [3] является весьма сложной задачей математического моделирования. Однако в данном случае изучаются частицы, представляющие собой сферы, линейные размеры которых намного меньше длины падающей волны, что позволяет применять результаты работы [4] для определения поля рассеяния.

В качестве рассеивателя берётся сфера радиуса  $r = 5\text{ см}$ , с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 4.5$ .

Как видно на рис. 1 и 2, эффект рассеяния одной частицей невелик. Однако, уже здесь (рис.2) наблюдается небольшое отклонение направляющего луча от первоначального направления. При моделировании для вычисления составляющих поля [5] использованы формулы (2) и (3):

$$\vec{E}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{E}_0^{(0)} + \frac{\tilde{A}}{4\pi\Delta} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1 \right) R\vec{E}_0^{(0)}; \quad \vec{H}^{(0)}(\vec{r}) = \vec{H}_0^{(0)} + i\omega\varepsilon_c \frac{\tilde{A}}{4\pi\Delta} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - 1 \right) S\vec{E}_0^{(0)}, \quad (2)$$

$$\tilde{R} = \begin{vmatrix} -\frac{4\pi}{3} + k^2 W' & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4\pi}{3} + k^2 W' & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4\pi}{3} + k^2 W' \end{vmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{4\pi z}{3} & -\frac{4\pi y}{3} \\ -\frac{4\pi z}{3} & 0 & \frac{4\pi x}{3} \\ \frac{4}{3}\pi y & -\frac{4}{3}\pi x & 0 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где  $k$  – волновой вектор,  $W'$  – потенциал Ньютона.

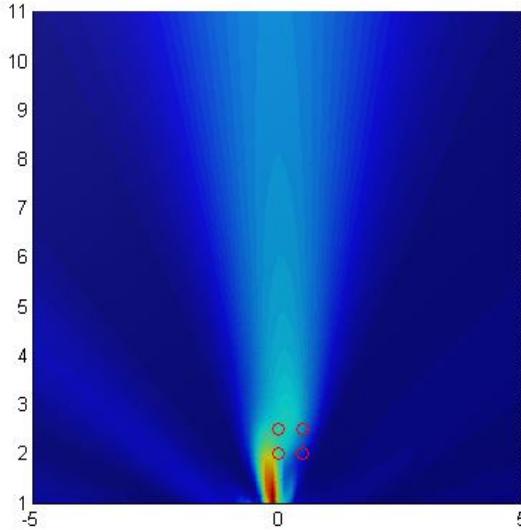


Рисунок 3 – Распределение электромагнитного поля. Четыре рассеивателя.

В случае четырёх рассеивателей (рис. 3) диаграмма направленности отклоняется заметнее. Эффект рассеяния электромагнитной волны СВЧ диапазона одной частицей малого радиуса практически не сказывается на распространении волны. При моделировании такой системы необходимо учитывать

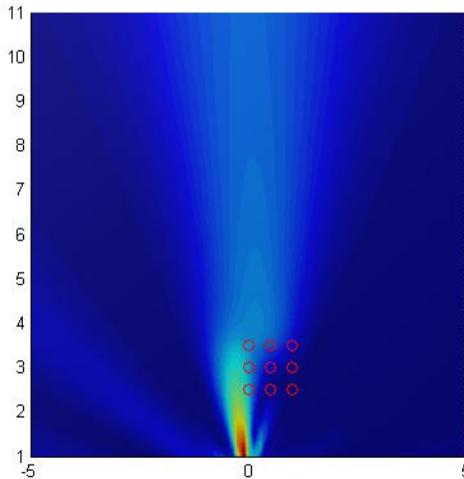


Рисунок 4 – Распределение электромагнитного поля. Девять рассеивателей

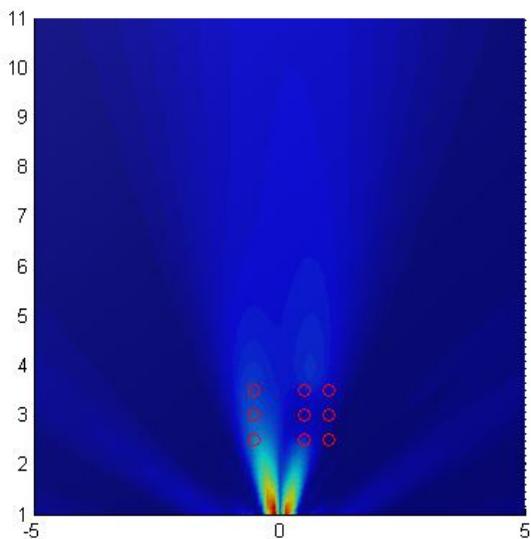


Рисунок 5 – Распределение электромагнитного поля. Девять рассеивателей, расположенных асимметрично

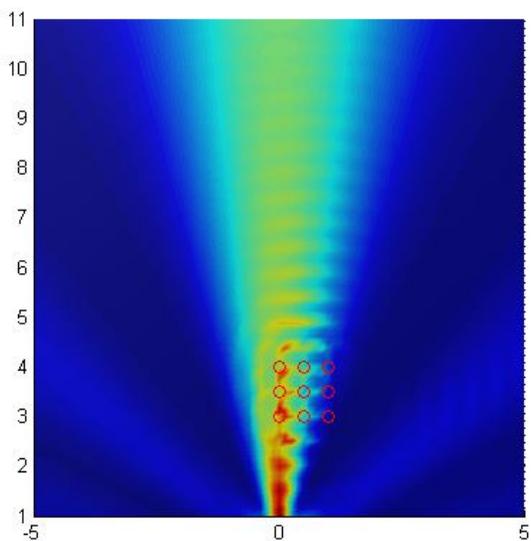


Рисунок 6 – Решётка с непостоянной диэлектрической проницаемостью

влияние полей, рассеянных частицами, на сами частицы. Простейшей системой является решётка из девяти рассеивателей. Форма и линейные размеры рассеивателей оставлены прежними.

Из рисунков 4 и 5 видно, что путём изменения положения шариков – рассеивателей можно менять основной луч диаграммы направленности. В частности, на рис. 5 расстояние между рассеивателями в антенной решётке выбрано неодинаковым. Варьируя расстояние, получаем возможные положения основного луча. На рис. 5 видно, что при выбранном положении рассеивателей луч более растянут и ослаблен по мощности излучения. Однако на практике для осуществления такого подхода потребуются некие механические приспособления, не очень удобные в применении. Намного проще дистанционно изменять диэлектрическую проницаемость материала, из которого изготовлены шарики в антенной решётке. На рис. 6 смоделировано поведение диаграммы направленности, когда диэлектрическая проницаемость есть величина непостоянная и увеличивается вдоль оси абсцисс. Плоская структура рассеивателей с различным распределением значений диэлектрической проницаемости, помещенная вблизи от источника рассеивания, приводит не только к рассеиванию поля, но также и к изменению вектора направленности электромагнитного поля. Этот вариант (рис. 6) является наиболее удобным для практического применения.

Теперь стало очевидно, что компьютерная модель управляемой антенны реализована успешно.

**Выводы и перспективы дальнейших исследований.** Полученные результаты открывают реальный путь к моделированию распределения поля с использованием трёхмерной решётки рассеивателей. Имеет смысл построение имитационной модели с изменением радиуса и диэлектрической проницаемости каждого рассеивателя с целью выявления наилучшего материала, из которого они будут изготавливаться. Важно знать, какое количество шариков в решётке будет оптимальным. Необходимо развивать теорию в этом направлении.

**Список литературы:** 1 *Хижняк Н.А.* Применение интегральных уравнений электродинамики к решению дифракционных задач // Ученые записки ХГУ. Труды радиофизического факультета. – 1957. – Т.2. – С. 13-32. 2. *Хижняк Н.А.* Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред // ЖТФ. – 1958. – Т. 28, № 7. – С. 1592 – 1609. 3. *Пиротти Е.Л., Отдельнов В.А.* Моделирование распределения электромагнитного поля в малых биологических сферах (приближения первого и второго порядка). // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск «Системный анализ, управление и информационные технологии». Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – №41. – С. 17-21. 4. *Пиротти Е.Л.* Внутренние электромагнитные поля в биообъектах, имеющих n-слойную структуру // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. – Харьков: ХГТУРЭ. – 1997. – Вып. 106. – С. 154 - 159. 5. *Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержеев В.Ф.* Специальный курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1976. – 389 с.

*Поступила в редколлегию 31.03.11*

**А.В. СТЕПУК**, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **ТЕРМОЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИЗЕЛЬНОГО ФИЛЬТРА С СВЧ РЕГЕНЕРАЦИЕЙ**

Чисельний аналіз дизельних фільтрів твердих частинок і окислення сажі. Результати підтвердили нестабільність поширення 2.45ГГц ВЧ хвиль і збудження багатозафазних гармонік. Альтернативне рішення для підвищення якості фільтрації сажі пропонується.

Численный анализ дизельных фильтров твердых частиц и окисления сажи. Результаты подтвердили нестабильность распространения 2.45ГГц ВЧ волн и возбуждение многофазных гармоник. Предложено альтернативное решение для повышения качества фильтрации сажи.

Numerical analysis of diesel particulate filters and soot oxidation considered. Results confirmed instability of 2.45GHz HF wave propagation and multiphase harmonic wave excitation. Alternative solution to enhance diesel particulate filtering quality suggested.

**Введение.** Экологические ограничения, особенно в новых стандартах ЕС, на допустимый выброс сажи при сжигании топлива в тепловых и транспортных дизельных установках приводят к необходимости в установке высококачественных фильтров очистки выхлопных газов. В связи с дороговизной замены таких фильтров в процессе эксплуатации широкое применение находят технологии их восстановления, например, СВЧ регенерации при окислении накопленной сажи. Этот способ, несмотря на невысокую стоимость и достаточную эффективность, обладает рядом недостатков, связанных с неоднородностью окисления сажи в фильтре, например, возможности теплового разрушения при возникновении неконтролируемой регенерации - самовозгорания [1,2].

Поиск возможных решений по предотвращению такого разрушения наиболее эффективен при анализе построенных физико-математических моделей процессов возбуждения и распространения электромагнитных и температурных полей в фильтре. Поскольку эти поля связаны и нелинейные, то применение аналитических и аппроксимационных методов анализа не представляется возможным. В настоящей работе исследование распределения связанных электромагнитного и теплового полей в сажевых фильтрах выполняется численными методами с целью поиска способов предотвращения неоднородной регенерации сажи и самовозгорания.

**Постановка и метод решения задачи.** Процессы СВЧ нагрева диэлектриков описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных, состоящей из уравнений Максвелла и уравнения нестационарной теплопроводности. Уравнения Максвелла в системе СИ:

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho; \operatorname{div}\mathbf{B}=0; \operatorname{div}\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t; \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\partial\mathbf{D}/\partial t \quad (1)$$

с учетом материальных соотношений в неподвижной среде:

$$\text{div} \mathbf{j} + \partial \rho / \partial t = 0; \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (2)$$

Для медленно меняющихся полей в представлении

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) * E(t) * e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) * H(t) * e^{i\omega t}$$

уравнения (1,2) при  $k^2 = \mu\omega(\varepsilon\omega - i\sigma)$  сводятся к:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0; \text{div} \mathbf{E} = 0; \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0; \text{div} \mathbf{H} = 0. \quad (3)$$

Тогда условия сопряжения электромагнитного поля на поверхностях раздела  $S_p$  будут иметь вид:

$$E_{vn} = E_n; E_{vt} = E_t; \mathbf{n} * (H_v - \mathbf{H}) = 0; H_{vn} = H_n; \sigma_{ij} * n_j = p_{in}; \quad \forall x \in S_p. \quad (4)$$

Свойство нагрева и сжигания сажи в фильтре определяются ее диэлектрическими свойствами:

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \quad (5)$$

где  $\varepsilon' = \varepsilon_0$  – обуславливает свойства сажи накапливать энергию, а  $\varepsilon'' = \sigma/\omega$  – рассеивать энергию (активное сопротивление). Энергия, выделяющаяся в фильтре, находится из соотношения:

$$Q = \mathbf{j} * \mathbf{E} = \sigma * \mathbf{E}^2 = 2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon'' E^2. \quad (6)$$

Для квазистационарного, медленно меняющегося электромагнитного поля решение системы уравнений полностью определяется заданием граничных условий (4), включая область возбуждения СВЧ колебаний магнетроном. После решения уравнений электродинамики и нахождения соответствующего распределения джоулева тепла (6), температурные поля определяются из уравнения теплопроводности:

$$\nabla^2 T + Q/\lambda - (1/a) * (\partial T / \partial t) = 0, \quad (7)$$

где  $\lambda$ ,  $a$  – коэффициенты тепло- и температуропроводности, при этом линейное расширение материала не учитывается. Граничные условия на поверхности раздела включают в себя конвективный теплообмен с внешней средой:

$$\partial T / \partial n + H_0(T - T_0) = 0, \quad (8)$$

где  $H_0$  – коэффициент теплоотдачи,  $\partial T / \partial n = \text{grad} T * \mathbf{n} = \nabla T * \mathbf{n}$ ; и условия для контактирующих тел:

$$T_1 = T_2; \lambda_1 * (\partial T_1 / \partial n) = \lambda_2 * (\partial T_2 / \partial n). \quad (9)$$

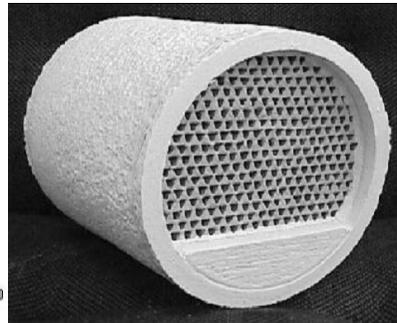
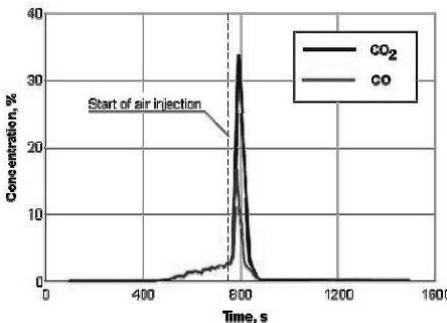


Рисунок 1 – Выделение CO во время СВЧ регенерации в сажевом фильтре (Isuzu)

Нелинейность и связанность системы уравнений обусловлена тем, что значения электромагнитных свойств (2 - диэлектрической проницаемости, проводимости) материалов, зависят от температуры регенерации (400-600°C).

При ограниченной длительности (Рис.1) физических процессов регенерации 100-200 сек [11] влияние процессов теплообмена и потерь электромагнитной энергии в стенках корпуса фильтра не существенно.

Поэтому в граничных условиях устанавливалось, что стенки корпуса фильтра идеально проводящие и теплоизолированные. Также не учитывались дисперсионные (зависимость от частоты) свойства среды при решении системы уравнения. Диэлектрические свойства материалов, используемых в фильтре, приведены в таблице 1:

Таблица 1

Диэлектрические свойства материалов		
Материал	Диэлектрическая проницаемость	Диэлектрические потери
Дизель, сажа №1	10.695	3.561
Дизель, сажа №2	9.578	2.854
Дизель, сажа №3	8.6	7.4
Кордерит №1	2.873	0.138
Кордерит №2	1.000	0.00006
Гамма Al	3.006	0.170
SiO	3.066	0.215
TiO	7.020	0.430
ZrO	4.214	0.186

В общем случае нелинейная зависимость теплопроводности и проводимости от температуры приводит к связанности системы уравнений (3,6,7) и численное решение выполняется до достижения сходимости последовательных итераций. А именно, из уравнений электродинамики определяется электромагнитное поле и соответствующее ему распределение джоулева тепла. Полученная мощность непрерывно распределенных тепловых источников используется в уравнении теплопроводности для определения температурного поля. На основании последнего определяются значения теплопроводности и проводимости, а затем вновь выполняется расчет электромагнитного поля до достижения требуемой сходимости расчета на предыдущем шагу (~1%).

Для численного моделирования распределения электромагнитных и тепловых полей внутри фильтра использовался программный МКЭ пакет Comsol 3.5 Multi physics. Расчетная модель включает в себя анализ волнового стационарного СВЧ электромагнитного поля и полученного на его основе распределения тепловых полей. Суперпозиция электромагнитных и температурных полей в материале сажевого фильтра учитывала распределение температуры по толщине материала в зависимости от его диэлектрических параметров.

Анализ распределения СВЧ поля в полости фильтра выполнялся для дизельного автомобильного фильтра, подобного выпускаемым компанией Isuzu и Bosch (рис.1) диаметром 125 мм и длиной 525 мм с апертурой излучателя от магнетрона СВЧ 50\*80 мм. Частота возбуждения магнетрона СВЧ 2.45ГГц, что соответствует длине волны в вакууме 12.25 см.

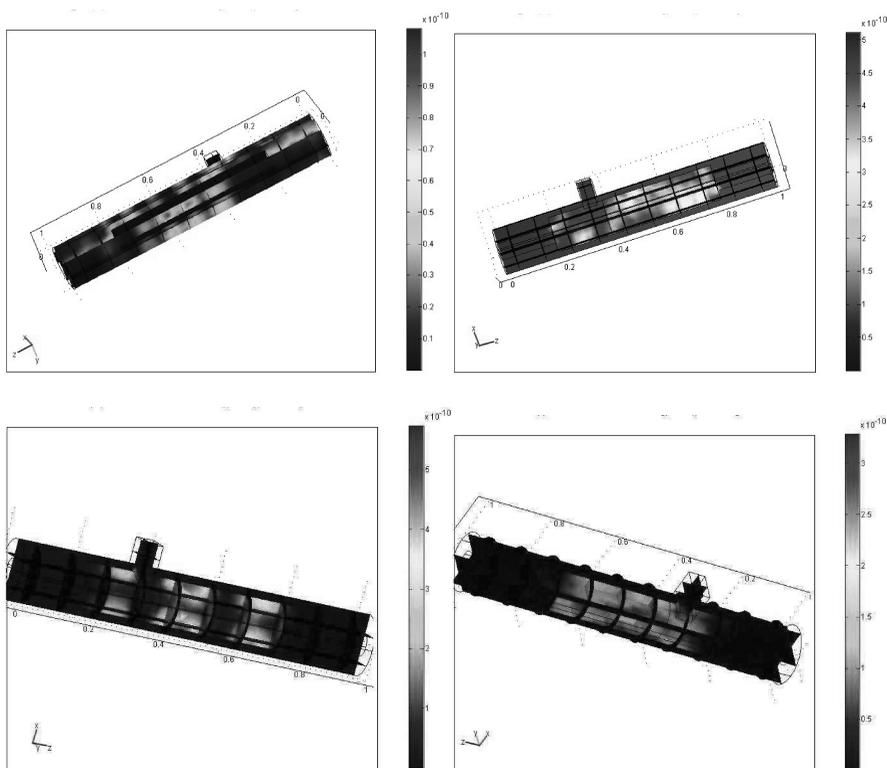


Рисунок 2 – Интенсивность электромагнитного поля в сажевом фильтре для различных СВЧ гармоник и положения отражателя

Поскольку геометрия фильтра неоднородна, то в его полости могут быть генерированы ряд СВЧ гармоник. Например: для прямоугольного волновода (апертуры) – это  $H_{10}$  частотой 1.87 ГГц; для цилиндрического –  $H_{11}$  частотой 1.43 ГГц,  $E_{01}$  частотой 1.87 ГГц и  $H_{21}$  частотой 2.33 ГГц; для цилиндрического резонатора (при размещении отражателя внутри фильтра) –  $H_{111}$  частотой 1.41 ГГц и  $E_{010}$  частотой 1.84 ГГц. Расчетный анализ выполнялся для первых пяти СВЧ гармоник в узле дизельного фильтра с выхлопными трубами. Также рассмотрено влияние фильтра электромагнитного отражателя, размещенного внутри, на выравнивание поля и концентрации тепловыделения в областях скопления частиц сажи.

**Анализ результатов.** На рис.2 представлены модели с рассчитанными распределениями интенсивности электромагнитного поля в зависимости от частоты возбуждения (0.89 ГГц – 2.88 ГГц) и положения СВЧ рефлектора. Сверху - вниз представлены распределения при 0.96 ГГц – 2.44 ГГц. Зоны ма-

ксимальной концентрации энергии распределяются в соответствии с длиной волны возбужденной гармоники. Причем размещение СВЧ отражателей (рис.2, нижний ряд), искажая пространственно-гармоническую структуру поля, не позволяют добиться выравнивания распределения энергии СВЧ поля по объему сажевого фильтра. Для всех рассмотренных вариантов характерны высокая неоднородность распределения СВЧ поля и, соответственно, тепловыделения, необходимого для окисления сажи.

На рис.3 представлены результаты расчета коэффициентов отражения для сажевого фильтра без СВЧ отражателя и с рефлектором (слева направо).

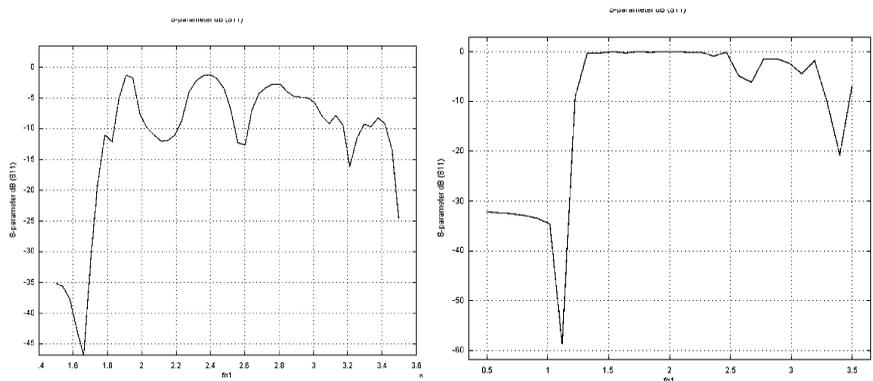


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента отражения от частоты СВЧ гармоники и наличие отражателя в фильтре

По крайней мере для трех резонансных частот коэффициент отражения не превышает 10дБ, что подтверждает многомодовый характер СВЧ возбуждения и невозможность генерации равномерного распределения для заданных физических, геометрических и частотных параметров. Полученные зависимости коэффициента отражения соответствуют теоретическим и экспериментальным значениям затухания [3,4] и распределения мощности в сажевых фильтрах.

**Выводы.** Проведенное исследование подтвердило экспериментально наблюдаемые эффекты неоднородной регенерации сажи в фильтрах. Результаты расчетов показали, что, независимо от частоты возбуждения в диапазоне 1-3 ГГц и изменения положения электромагнитного отражателя, распределения поля СВЧ в рабочем объеме фильтра сохраняет свою неустойчивость и неоднородность. На основании проведенного анализа были предложены несколько способов улучшения работы фильтров.

Одним из способов снижения неоднородности электромагнитного поля может быть использование дополнительных корректирующих элементов: ферритовых колец, магнитных ловушек, что позволило бы окислять накопленную сажу не по всему объему, а по мере окисления отдельных участков филь-

тра. К недостаткам такого подхода можно отнести: возрастание сложности и стоимости оборудования; неустойчивость генерируемого поля в зависимости от пространственного распределения осажденной сажи.

Изменение размеров и частоты СВЧ или способа возбуждения основной гармоника может улучшить равномерность выделения энергии и последующего сжигания сажи только при переходе на частоты кГц диапазона. Такой способ неэффективен с точки зрения затрат на оборудование и проблем электромагнитной совместимости.

Другим способом предотвращения неоднородного поглощения СВЧ энергии в фильтре может быть применение дополнительного резистивного нагрева. Проведенный анализ показывает, что в случае предварительного нагрева до 500-600°C, для последующей инициация окисления сажи достаточно воздействия СВЧ импульса магнетрона, длительностью 30-40 сек, соответствующей скорости окисления.

Выбор способа регенерации сажевых фильтров и указанных выше методов их улучшения определяется условиями применения фильтров. Например, для наиболее массового потребителя сажевых фильтров в катализаторах – автомобильной промышленности, основным критерием становится энергетическая эффективность. Автомобильный ДВС значительную часть времени эксплуатируется при низких нагрузках или на холостом ходу. В таких режимах степень разбавления топливной смеси продуктами сгорания, оставшимися от предыдущего цикла, становится выше и, соответственно, возрастает количество сажи в выхлопных газах, т.е. наиболее эффективным становится импульсная регенерация сажевых фильтров. С другой стороны, в энергетических стационарных установках основным фактором является качество непрерывной очистки, поэтому целесообразнее применение корректирующих СВЧ элементов и варьирование частоты возбуждения электромагнитного.

**Список литературы.** 1. *Richard D. Nixdorf, Johny B. Green Jr., John M. Story and Robert M. Wagner*, Microwave-Regenerated Diesel Exhaust Particulate Filter // SAE 2001 World Congress, Detroit, Michigan, March 5-8, 2001, 9 p. 2. *K.V. Dilipa, Nilesh J. Vasab, Kopp Carstena, K.U. Ravindraa* Incineration of diesel particulate matter using induction heating technique // *Applied Energy*, Vol. 88, Issue 3, March 2011, Pages 938-946 3. *W. Addy Majewski*, "Microwave Regenerated Filters" www.DieselNet.com. Revision 2000.02 4. *Zhi Ning, Yongsheng He*, Experimental Study on Microwave Regeneration Characteristics of Diesel Particulate After-Treatment System) // SAE Technical Papers 1999-01-1470, Michigan, 1999, 6 p 5. *Архангельский, Ю. С.* СВЧ электротометрия - Саратов : СГТУ, 1998. - 408 с 6. *Ma, J., Fang, M., Li, P., Zhu, B., Lu, X., and Lau, N. T.*, 1997, "Microwave-Assisted Catalytic Combustion of Diesel Soot," Appl. Catal. A, 159, pg. 211-228. 7. *Babu, V. S., Fari-nash, L., and Seehra, M. S.*, 1995, "Carbon in Diesel Particulate Matter: Structure, Microwave Absorption, and Oxidation," J. Mater Res., 10(5), pg. 1075-1078. 8. *Meredith, R.*, "Engineers Handbook of Industrial Microwave Heating", ISBN #0852969163, 1988

*Поступила в редколлегию 21.03.11*

*Е.Ю. ТАРСИС*, канд. техн. наук, доц., НТУ "ХПИ"

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ПОПЕРЕЧНОЙ СТОЙКИ БЛОКА ДИЗЕЛЯ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Лінійна пружна податливість опорного вузла колінчастого валу визначається методом R-функцій на базі варіаційного принципу Рейсснера. Вузол моделюється двошаровим тілом з ідеальним контактом між шарами. Коефіцієнт податливості використано для розрахунків на міцність колінчастого валу дизеля.

Линейная упругая податливость опорного узла коленчатого вала определяется методом R-функций на основе вариационного принципа Рейсснера. Узел моделируется двухслойным телом с идеальным контактом между слоями. Коэффициент податливости использован при расчётах на прочность коленчатого вала дизеля.

Linear elastic flexibility of supporting unit of crankshaft is determined by the R-function method based on the variational Reissner's principle. The unit is modeled by two-layer bodies in conditions of ideal contact between layers. It is needed for the calculations of the strength of crankshaft.

**Введение.** Для расчетов коленчатых валов двигателей внутреннего сгорания требуются коэффициенты упругой податливости его опорных узлов. Узел является поперечной стойкой блока, работающей в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, имеет сложную конфигурацию и состоит из элементов различной толщины. Как показывает опыт, основной вклад в его податливость вносят несущий лист и бугельная часть, в которой крепятся коренные подшипники скольжения, а наибольшее влияние на характеристики прочности коленчатого вала оказывают составляющие сил давления газов в цилиндрах и силы инерции неуравновешенных масс шатунно-поршневой группы в вертикальной плоскости.

**Постановка задачи.** Рассмотрен один из конструктивных вариантов опорного узла коленчатого вала дизеля. Основные размеры приведены на рис.1, а расчетные схемы – на рис.2.

Опорный узел моделировался составным телом при полном сцеплении двух контактирующих поверхностей следующих областей: бугельной части – область  $\Omega_1$ , и несущего листа –  $\Omega_2$ . Различия в толщине бугельной части и несущего листа компенсировались значениями модулей упругости  $E_1, E_2$ . Толщина несущего листа равна 14 мм. Толщина бугельной части для короткого подшипника равна 78 мм, а для длинного – 108 мм. В расчетах принималось:  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_2 = 11.14 \cdot 10^5$  МПа – для короткого подшипника;  $E_2 = 15.43 \cdot 10^5$  МПа – для длинного подшипника; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Нагрузка  $P$  равномерно распределялась по длине (на дуге охвата

120 град.) и по толщине бугельной части.

Расчёты проводились в рамках решения плоской контактной задачи методом R-функций на базе вариационного принципа Рейсснера [1].

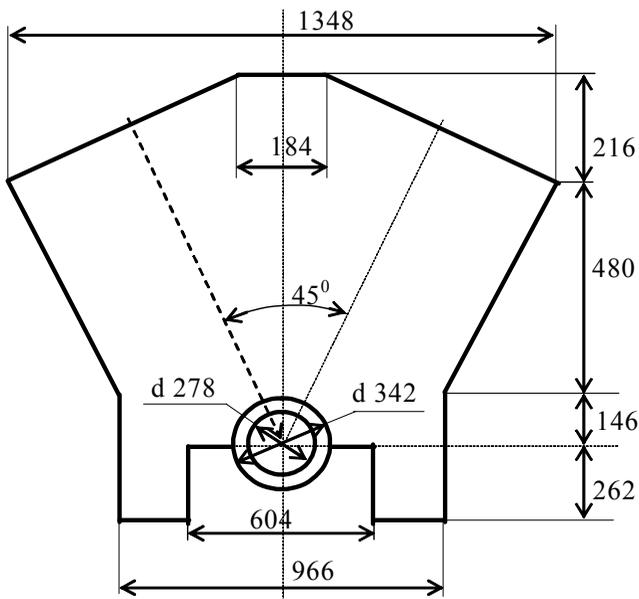


Рисунок 1 – Основные размеры опорного узла.

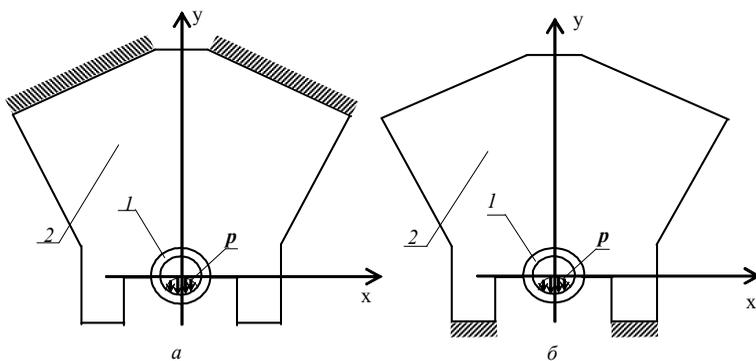


Рисунок 2 – Расчетные схемы опорного узла: *a* – силы давления газов;

*б* – силы инерции; *1* – бугельная часть; *2* – несущий лист.

Структуры для компонентов независимых аппроксимаций векторов напряжений  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_{xy}^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \sigma_{xy}^{(2)}$  и перемещений  $u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_x^{(2)}, u_y^{(2)}$ , в скобках указан номер области, удовлетворяющие всем статическим и кинематическим граничным условиям, а так же условиям идеального контакта, имеют вид:

$$u_x^{(2)} = \Phi_1 \frac{\omega_{(2)}^u}{\omega_{(2)}^u + \omega_{(1,2)}} + \Phi_2 \omega_{(2)}^u \omega_{(1,2)}; \quad u_y^{(2)} = \Phi_3 \frac{\omega_{(2)}^u}{\omega_{(2)}^u + \omega_{(1,2)}} + \Phi_4 \omega_{(2)}^u \omega_{(1,2)};$$

$$u_x^{(1)} = \Phi_1 + \Phi_5 \omega_{(1,2)}; \quad u_y^{(1)} = \Phi_3 + \Phi_6 \omega_{(1,2)};$$

$$\sigma_x^{(2)} = \left(m_{(2)}^\sigma\right)^2 \Phi_7 \frac{\omega_{(1,2)}}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_8 \frac{\omega_{(2)}^\sigma}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_9 \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^\sigma;$$

$$\sigma_y^{(2)} = \left(l_{(2)}^\sigma\right)^2 \Phi_7 \frac{\omega_{(1,2)}}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_{10} \frac{\omega_{(2)}^\sigma}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_{11} \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^\sigma;$$

$$\sigma_{xy}^{(2)} = -\Phi_7 l_{(2)}^\sigma m_{(2)}^\sigma \frac{\omega_{(1,2)}}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_{12} \frac{\omega_{(2)}^\sigma}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_{13} \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^\sigma;$$

$$\sigma_x^{(1)} = \Phi_8 \frac{\omega_{(1)}^\sigma}{\omega_{(1)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \left(m_{(1)}^\sigma\right)^2 \Phi_{15} \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2}}{\omega_{(1)}^{\sigma d} + \omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2}} + \Phi_{16} \omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^\sigma +$$

$$+ \left[ \left( \left( l_{(1)}^\sigma \right)^2 - \left( m_{(1)}^\sigma \right)^2 \right) \frac{P \omega_{(1)}^{\sigma_2}}{\omega_{(1)}^{\sigma_1} + \omega_{(1)}^{\sigma_2}} + \left( m_{(1)}^\sigma \right)^2 \Phi_{14} \right] \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma d}}{\omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2} + \omega_{(1)}^{\sigma d} \omega_{(1,2)}};$$

$$\sigma_y^{(1)} = \Phi_{10} \frac{\omega_{(1)}^\sigma}{\omega_{(1)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \left( l_{(1)}^\sigma \right)^2 \Phi_{15} \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2}}{\omega_{(1)}^{\sigma d} + \omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2}} + \Phi_{17} \omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^\sigma +$$

$$+ \left[ - \left( \left( l_{(1)}^\sigma \right)^2 - \left( m_{(1)}^\sigma \right)^2 \right) \frac{P \omega_{(1)}^{\sigma_2}}{\omega_{(1)}^{\sigma_1} + \omega_{(1)}^{\sigma_2}} + \left( l_{(1)}^\sigma \right)^2 \Phi_{14} \right] \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma d}}{\omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2} + \omega_{(1)}^{\sigma d} \omega_{(1,2)}};$$

$$\sigma_{xy}^{(1)} = \Phi_{12} \frac{\omega_{(1)}^\sigma}{\omega_{(1)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \left[ l_{(1)}^\sigma m_{(1)}^\sigma \left( \frac{P \omega_{(1)}^{\sigma_2}}{\omega_{(1)}^{\sigma_1} + \omega_{(1)}^{\sigma_2}} - \Phi_{14} \right) \right] \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma d}}{\omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2} + \omega_{(1)}^{\sigma d} \omega_{(1,2)}} -$$

$$- l_{(1)}^\sigma m_{(1)}^\sigma \Phi_{15} \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2}}{\omega_{(1)}^{\sigma d} + \omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^{\sigma_1} \omega_{(1)}^{\sigma_2}} + \Phi_{18} \omega_{(1,2)} \omega_{(1)}^\sigma,$$

где  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 18}$ ) – неопределенные компоненты,

$$\omega_{(1,2)} = -(f_{10} \wedge_0 f_9); \omega_{(1)}^{\sigma d} = -(f_{10} \wedge_0 f_{16}); \omega_{(1)}^{\sigma 1} = f_{17} \wedge_0 f_{21};$$

$$\omega_{(1)}^{\sigma 2} = f_{17} \wedge_0 f_{20}; \omega_{(1)}^{\sigma} = (f_{19} \wedge_0 f_{16}) \vee_0 f_{17};$$

$$\omega = ((f_2 \wedge_0 f_3) \vee_0 f_1) \wedge_0 (((f_7 \wedge_0 f_8) \vee_0 f_9) \vee_0 f_{10}) \wedge_0 f_{12} \wedge_0 ((f_5 \wedge_0 f_6) \wedge_0 f_4);$$

$$\omega_{(2)}^u = (f_5 \wedge_0 f_6) \vee_0 f_{13};$$

$$\omega_{(2)}^{\sigma} = ((f_2 \wedge_0 f_3) \vee_0 f_1) \wedge_0 (((f_7 \wedge_0 f_8) \vee_0 f_9) \vee_0 f_{18}) \wedge_0 f_4$$

– для расчета податливости от сил давления газов (рис.2 а);

$$\omega_{(2)}^u = (f_{14} \vee_0 f_{15}) \wedge_0 f_7;$$

$$\omega_{(2)}^{\sigma} = ((f_2 \wedge_0 f_3) \vee_0 f_1) \wedge_0 ((f_8 \vee_0 f_9) \wedge_0 f_{18}) \wedge_0 ((f_5 \wedge_0 f_6) \wedge_0 f_4)$$

– для расчёта податливости от сил инерции (рис.2 б);

$f_i$  ( $i = \overline{1, 21}$ ) – левые части нормализованных до первого порядка уравнений границ опорных областей;  $\wedge_0$  – R-конъюнкция,  $\vee_0$  – R-дизъюнкция [2];

$$l_{(2)}^{\sigma} = -\frac{\partial \omega_{(2)}^{\sigma}}{\partial x}; m_{(2)}^{\sigma} = -\frac{\partial \omega_{(2)}^{\sigma}}{\partial y}; l_{(1,2)} = -\frac{\partial \omega_{(1,2)}}{\partial x}; m_{(1,2)} = -\frac{\partial \omega_{(1,2)}}{\partial y}.$$

Неопределённые компоненты структур  $\Phi_i$  ( $i = \overline{1, 18}$ ), принимались в виде разложений по ортогональным полиномам Чебышева. Коэффициенты в этих разложениях определялись методом Ритца из условия стационарности функционала Рейсснера [3].

**Результаты расчетных исследований.** Задача решена с использованием программирующей системы «Поле». Рассчитывались четыре варианта, отличающиеся типом граничных условий и толщиной бугельной части в связи с наличием коренных подшипников различной длины. При расчетах варьировались: количество базисных функций, их соотношения в аппроксимациях напряжений и перемещений, точность интегрирования. Достоверность решений проверялась выполнением интегральных критериев [3]. Варианты расчётов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Варианты расчета

Номер варианта	Тип граничных условий	Толщина бугельной части, мм
1	Рис. 2 а	78
2	Рис. 2 а	108
3	Рис. 2 б	78
4	Рис. 2 б	108

Значения вертикальных перемещений нагруженной зоны приведены на рис.3. Значения коэффициентов податливости приведены в таблице 2.

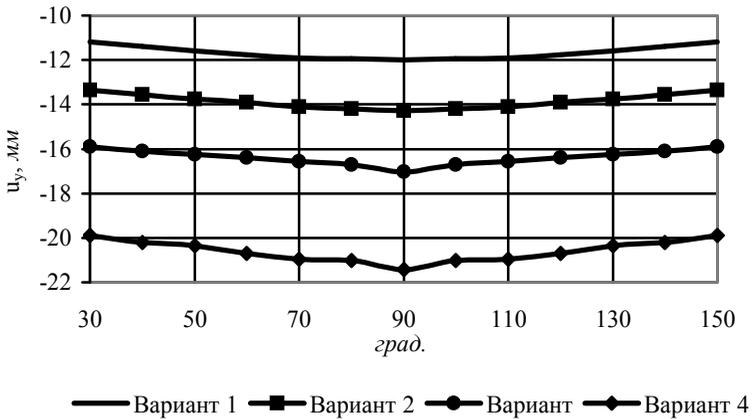


Рисунок 3 – Значения вертикальных перемещений нагруженной зоны.

Таблица 2

Значение, мм/Н	Значения коэффициентов податливости			
	Вариант			
	1	2	3	4
	$0.719 \cdot 10^{-6}$	$0.616 \cdot 10^{-6}$	$1.01 \cdot 10^{-6}$	$0.918 \cdot 10^{-6}$

**Выводы.** 1. Разработана математическая модель опорного узла коленчатого вала как двухслойного тела на основе вариационного принципа Рейсснера.

2. Определены коэффициенты линейной упругой податливости узла, которые использованы при расчетах на прочность коленчатого вала дизеля.

3. Достоверность результатов подтверждена выполнением интегральных критериев.

**Список литературы:** 1. Тарсис Е.Ю. Смешанный вариационный подход к решению задач для составного тела на основе метода R-функций // Проблемы машиностроения. – 2001. – т.4, № 3-4. – С. 116-123. 2. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – Киев: Наук. Думка, 1982. – 566 с. 3. Рвачёв В.Л., Тарсис Е.Ю. Вариационно-структурный метод для решения задач теории упругости на основе функционала Рейсснера // Вісник Інженерної академії України. – 2001. – №3. – С. 17-20.

Поступила в редакцию 30.03.2011

*Н.М. ФАТЄЄВА*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;

*О.М. ФАТЄЄВ*, провідний інженер, ОПК «Гідроелекс», Харків

## **ДО ПИТАННЯ ДИНАМІЧНОГО РОЗРАХУНКУ ПНЕВМОЦИЛІНДРІВ З ДВОСТОРОННІМ УПРАВЛІННЯМ**

В статті наведено динамічні дослідження пневмоприводів з метою одержання часу спрацьовування виконавчих пристроїв. Динамічний розрахунок часу спрацьовування було зроблено на конкретному прикладі виконавчого механізму завантажувального пристрою до токарного верстата. Результати роботи дозволяють проводити всебічний порівняльний аналіз при проектуванні пневмоагрегатів нового верстатного устаткування.

В статье приведены динамические исследования пневмоприводов с целью получения времени срабатывания исполнительных устройств. Динамический расчет времени срабатывания был сделан на конкретном примере исполнительного механизма грузочного устройства к токарному станку. Результаты работы позволяют проводить всесторонний сравнительный анализ при проектировании пневмоагрегатов нового станочного оборудования.

In the article dynamic researches of pneumodrives are resulted with the purpose of receipt of time of wearing-out of executive devices. The dynamic timing wearing-out was done on the concrete example of executive mechanism of load device to the lathe. Job performances allow conducting a comprehensive comparative analysis at planning of pneumounits of new machine-tool equipment.

**Вступ.** Пневматичні системи отримують все більше поширення в промисловості як надійні засоби автоматизації. Пневмопристрої використовують як приводи затискних і транспортуючих механізмів, для дистанційного керування і регулювання, в контрольно-вимірювальних приладах, при автоматизації машин і пристроїв, що працюють в агресивних середовищах, в умовах пожежо- і вибухонебезпеки, радіації, а також при значній вібрації і високих температурах. Пневмосистеми поширені в автомобільній промисловості, в літакобудуванні, в космонавтиці, де вони застосовуються для автоматизації різних робіт, для управління аварійними системами і т. п. Пневмопристрої використовують для управління в нафтовій, газовій, хімічній, харчовій промисловості, в гірській справі, в будівництві і т. п. Елементи пневмоавтоматики все більше впроваджуються в медичні прилади різного призначення (для штучного дихання, кровообігу тощо).

**Аналіз останніх досліджень.** Підвищення продуктивності машин стосовно пневматичних систем означає збільшення їх швидкодії. Оскільки пневматичні системи є частиною машини, то час їх спрацьовування входить в загальний час робочого циклу машини і впливає таким чином на продуктивність машини в цілому. Проблема підвищення продуктивності безпосередньо пов'язана з розробкою методів динамічного дослідження машин і вибору їх оптимальних параметрів і структури. Ці проблеми

складають основний напрям як загальної теорії машин, так і теорії пневматичних систем машин.

**Постановка задачі.** Теорія пневматичних систем має свої характерні риси і особливості. Якщо в теорії механізмів з твердими ланками задача динаміки полягає у вирішенні рівняння руху останніх, то в теорії пневматичних систем це рівняння завжди вирішується спільно з рівняннями, що характеризують термодинамічні процеси, що протікають в порожнинах робочих циліндрів. При складанні цих рівнянь використовуються закони термо- і газодинаміки. Оскільки порожнини більшості пневматичних пристроїв постійно сполучені або з магістраллю, або з атмосферою, то при складанні розрахункових рівнянь використовуються методи термодинаміки змінної маси газу. Таким чином, в теорії пневматичних систем окрім методів механіки твердого тіла застосовуються методи механіки пружної рідини.

Дуже важливим є динамічний розрахунок виконавчих механізмів пневмоприводів, який зводиться до визначення часу спрацьовування, під яким розуміється час  $T$  руху поршня виконавчого пристрою в одному напрямі (лише прямий або лише зворотний). Час прямого ходу (час спрацьовування) дорівнює сумі інтервалів  $T_{n.x.} = t_I + t_{II} + t_{III}$ , де  $t_I$  – час підготовчого періоду – від початку перемикання пристрою, що керує, до початку руху поршня;  $t_{II}$  – час руху поршня, протягом якого поршень пройде увесь заданий робочий хід;  $t_{III}$  – час завершального періоду, протягом якого тиск в робочій порожнині збілюється до необхідної величини [1, 2].

Динамічний розрахунок часу спрацьовування виконавчого пристрою покажемо на прикладі виконавчого механізму завантажувального пристрою до токарного верстата, який був розглянутий в роботі [3]. Виконавчий механізм завантажувального пристрою до токарного верстата з двостороннім управлінням поступальної ходи наведено на рис. 1.

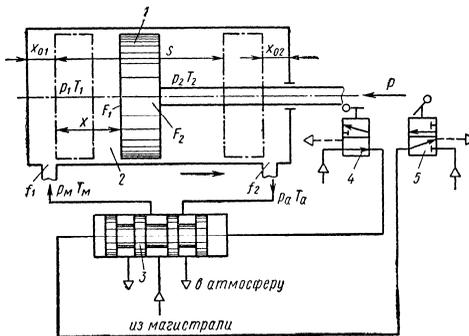


Рисунок 1 – Поршневі пневмоциліндр з двостороннім управлінням: 1 – поршень; 2 – пневмоциліндр; 3 – пневморозподільник; 4, 5 – кінцеві вимикачі

### Математична модель.

При динамічному розрахунку особливий інтерес представляє розрахунок періоду руху поршня. З розрахунком часу підготовчого і завершального періодів можна ознайомитися в роботах [1, 2]. Оскільки в загальному випадку в пневмоциліндрі може бути де-кілька порожнин (наприклад, в диференціальному або багато-ступінчастому пневмоциліндрі), то порожнини до-

цільно пронумерувати, індекси параметрів відповідатимуть нумерації порожнин. На рис. 1 перша порожнина є робочою, а друга – вихлопною.

Рівняння руху поршня пневмоциліндра з двостороннім управлінням має такий вигляд

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = p_1 \cdot F_1 - p_2 \cdot F_2 - P, \quad (1)$$

де  $m$  – маса пневмоциліндра і приєднаних до нього поступально-рухомих частин;  $x$  – координата переміщення поршня;  $p_1, p_2$  – тиск повітря в першій і другій порожнинах;  $F_1, F_2$  – площі торців поршня.

Значення результуючої всіх сил  $P$ , що діють на поршень, крім сил тиску повітря, визначається за формулою:

$$P = P_1 \pm P_2 \pm P_3 \pm p_a F_{ш}, \quad (2),$$

де  $P_1$  – сила тертя;  $P_2$  – сила корисного опору;  $P_3$  – вага поршня і приєднаних до нього рухомих частин пневмоциліндра;  $F_{ш}$  – площа перерізу штока;  $p_a$  – атмосферний тиск.

Рівняння (1) повинно бути вирішено спільно з рівняннями, що характеризують зміни тиску в обох порожнинах робочого пневмоциліндра. Ці рівняння отримані без урахування теплообміну з навколишнім середовищем і при постійних параметрах стисненого повітря в магістралі [1, 2].

Рівняння для визначення тиску  $p_1$  в робочій порожнині 1 має вигляд:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{k \cdot f_1^3 \cdot K \cdot p_m \cdot \sqrt{R \cdot T_m}}{F_1(x_{01} + x)} \cdot \varphi(\sigma_1) - \frac{k \cdot p_1}{(x_{01} + x)} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (3)$$

де  $\sigma_1 = p_1/p_m$  – відносний тиск в робочій порожнині;  $K = [2g \cdot k/(k-1)]^{1/2}$ ;  $x_{01} = V_{01}/F_1$  – приведена початкова координата положення поршня;  $f_1^3 = \mu_1 \cdot f_1$  – ефективна площа вхідного отвору;  $\mu_1$  – коефіцієнт витрати лінії підведення;  $f_1$  – площа вхідного отвору;  $V_{01}$  – початковий об'єм робочої порожнини;  $p_m$  – магістральний тиск;  $k = 1,4$  – показник адіабати;  $R$  – газова стала для повітря;  $T_m$  – абсолютна температура в магістралі.

У рівнянні (3) значення функції витрати  $\varphi(\sigma_1)$  дорівнюють:

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{\sigma^{\frac{2}{k}} - \sigma^{\frac{k+1}{k}}} \quad \text{при } 0,528 < \sigma < 1; \quad \varphi(\sigma) = 0,2588 \quad \text{при } 0 < \sigma < 0,528.$$

При визначенні початкової координати положення поршня необхідно враховувати не лише початковий об'єм порожнини (так званий *шкідливий простір*), але і об'єм трубопроводу від розподільника до робочого пневмоциліндра. Рівняння для визначення тиску  $p_2$  у вихлопній порожнині буде відрізняться від рівняння (3) не тільки знаками його членів і координатами положення поршня, а й тим, що в нього входить перемінна температура  $T_2$  у вихлопній порожнині замість постійної  $T_m$ :

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k \cdot f_2^3 \cdot K \cdot p_2 \cdot \sqrt{R \cdot T_2}}{F_2(s + x_{02} - x)} \cdot \varphi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_2}\right) + \frac{k \cdot p_2}{(s + x_{02} - x)} \cdot \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

де  $\sigma_2 = p_2/p_m$  – відносний тиск у вихлопній порожнині;  $x_{02} = V_{02}/F_2$  – приведена кінцева координата положення поршня;  $f_2^{\circ} = \mu_2 \cdot f_2$  – ефективна площа вихідного отвору;  $\mu_2$  – коефіцієнт витрати вихлопної лінії;  $f_2$  – площа вихідного отвору;  $V_{02}$  – початковий об’єм вихлопної порожнини.

Значення функції витрати  $\varphi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_2}\right)$  в рівнянні (4) так само, як і в рівнянні

(3), дорівнює:  $\varphi(\sigma) = \sqrt{\sigma^{2/k} - \sigma^{(k+1)/k}}$  при  $0,528 < \sigma < 1$ ;  $\varphi(\sigma) = 0,2588$  при  $0 < \sigma < 0,528$ .

Температура  $T_2$  у рівнянні (4) може бути виражена через тиск  $p_2$  за формулою  $p_2/p_1 = (T_2/T_1)^{k/(k-1)}$ , оскільки у вихлопній порожнині при відсутності теплообміну протікає адиабатичний процес. Тоді з рівняння (4) отримаємо наступне рівняння

$$\frac{dp_2}{dt} = - \frac{k \cdot f_2^{\circ} \cdot K \cdot p_2^{(3k-1)/2k} \cdot \sqrt{R \cdot T_m}}{F_2(s + x_{02} - x) \cdot p_m^{(k-1)/2k}} \cdot \varphi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_2}\right) + \frac{k \cdot p_2}{(s + x_{02} - x)} \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (5)$$

Вихідна система рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= p_1 \cdot F_1 - p_2 \cdot F_2 - P \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{k \cdot f_1^{\circ} \cdot K \cdot p_m \cdot \sqrt{R \cdot T_m}}{F_1(x_{01} + x)} \cdot \varphi(\sigma_1) - \frac{k \cdot p_1}{(x_{01} + x)} \cdot \frac{dx}{dt} \\ \frac{dp_2}{dt} &= - \frac{k \cdot f_2^{\circ} \cdot K \cdot p_2^{(3k-1)/2k} \cdot \sqrt{R \cdot T_m}}{F_2(s + x_{02} - x) \cdot p_m^{(k-1)/2k}} \cdot \varphi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_2}\right) + \frac{k \cdot p_2}{(s + x_{02} - x)} \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\}.$$

**Метод розрахунку.** Спільне рішення системи рівнянь (1), (3) і (5) можливо тільки за допомогою чисельних методів інтегрування. Крок інтегрування вибирається залежно від необхідної точності розрахунку. Чим менше значення цього інтервалу часу, тим точніше розрахунок. Інтегрування продовжується до тих пір, поки значення переміщення  $x$  поршня не стане рівним робочому ходу  $s$ . Час, відповідний цьому моменту, дорівнює часу переміщення поршня. З огляду на те, що рішення рівнянь (1), (3) і (5) проводиться чисельними методами, доцільно застосовувати ЕОМ. Алгоритм рішення цієї задачі базується на чисельному методі розв’язання систем диференціальних рівнянь методом Рунге-Кутта IV порядку, який є методом підвищеної точності. Розв’яжемо дану систему рівнянь за допомогою пакету MathCAD (тріал-версія).

Початкові умови  $T_0 = 0$ ;  $z_0 = 0$ ; початкові значення  $x(T_0, z_0) = 0$ ;  $x_0 = 0$ ;  $V_0 = 0$ ;  $p_1 = p_m$ ;  $p_2 = p_a$ . Перше рівняння системи – диференціальне рівняння другого порядку. Позначимо  $dx/dt = z$ , іншими словами,  $x' = z$ , тоді отри-

маємо:

$$m \cdot \frac{dz}{dt} = p_1 \cdot F_1 - p_2 \cdot F_2 - P \text{ и } m \cdot z' = p_1 \cdot F_1 - p_2 \cdot F_2 - P.$$

Остаточна система має вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= z \\ m \cdot z' &= p_1 \cdot F_1 - p_2 \cdot F_2 - P \\ p_1' &= \frac{k \cdot f_1^3 \cdot K \cdot p_m \cdot \sqrt{R \cdot T_m}}{F_1(x_{01} + x)} \cdot \varphi(\sigma_1) - \frac{k \cdot p_1}{(x_{01} + x)} \cdot z \\ p_2' &= -\frac{k \cdot f_2^3 \cdot K \cdot p_2^{(3k-1)2k} \cdot \sqrt{R \cdot T_m}}{F_2(s + x_{02} - x) \cdot p_m^{(k-1)/2k}} \cdot \varphi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_2}\right) + \frac{k \cdot p_2}{(s + x_{02} - x)} \cdot z \end{aligned} \right\}$$

Отримані результати наведені на рис. 2.

t =	x(t) =	z(t) =	p1(t) =	p2(t) =
0	0	0	6·10 <sup>5</sup>	9.81·10 <sup>4</sup>
1	0.015	0.52045	5.92592·10 <sup>5</sup>	9.82629·10 <sup>4</sup>
2	0.03	1.0211	5.73058·10 <sup>5</sup>	9.87441·10 <sup>4</sup>
3	0.045	1.48841	5.46931·10 <sup>5</sup>	9.95242·10 <sup>4</sup>
4	0.06	1.91634	5.18903·10 <sup>5</sup>	1.0058·10 <sup>5</sup>
5	0.075	2.30408	4.91697·10 <sup>5</sup>	1.01891·10 <sup>5</sup>
6	0.09	2.65351	4.66541·10 <sup>5</sup>	1.03442·10 <sup>5</sup>
7	0.105	2.9676	4.43825·10 <sup>5</sup>	1.05223·10 <sup>5</sup>
8	0.12	3.24956	4.2354·10 <sup>5</sup>	1.07232·10 <sup>5</sup>
9	0.135	3.50244	4.05504·10 <sup>5</sup>	1.09473·10 <sup>5</sup>
10	0.15	3.72898	3.89485·10 <sup>5</sup>	1.11957·10 <sup>5</sup>
11	0.165	3.93158	3.75246·10 <sup>5</sup>	1.14705·10 <sup>5</sup>
12	0.18	4.11229	3.62568·10 <sup>5</sup>	1.17745·10 <sup>5</sup>
13	0.195	4.27283	3.51259·10 <sup>5</sup>	1.2112·10 <sup>5</sup>

Рисунок 2

Отримані графічні залежності переміщення, швидкості і зміни тиску від часу спрацьовування наведено на рис. 3 – 6.

**Перспективи подальших досліджень.** Пневматичні приводи мають безсумнівні переваги: виконавчі пристрої мають великі швидкості спрацьовування і низьку вартість; повітря може бути видалено в атмосферу з будь-якої точки системи; наявність необмеженого запасу повітря в якості передавальних механізмів, а також надійність функціонування, яка в сучасних автоматизованих системах управління грає важливу роль. Таким чином, проведення динамічних досліджень пневмоприводів є перспективною задачею, що дозволяє якісно підвищувати результати проектування пневмоагрегатів верстатного обладнання.

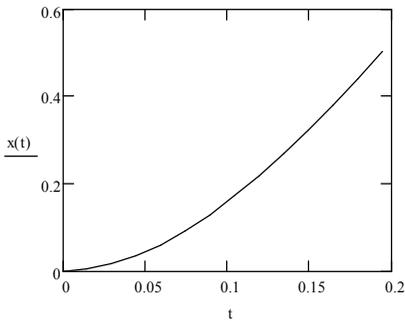


Рисунок 3 – Графік залежності переміщення поршня від часу спрацювання  $f=x(t)$

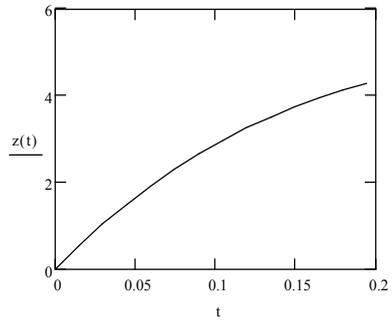


Рисунок 4 – Графік залежності швидкості поршня від часу спрацювання  $f=z(t)$

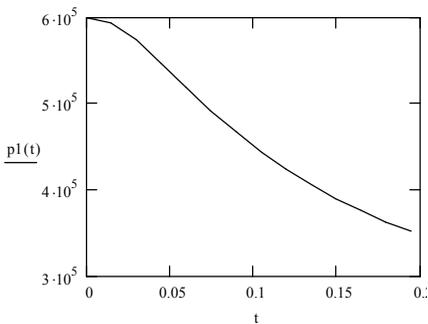


Рисунок 5 – Графік залежності зміни тиску в робочій порожнині від часу спрацювання  $f=p_1(t)$

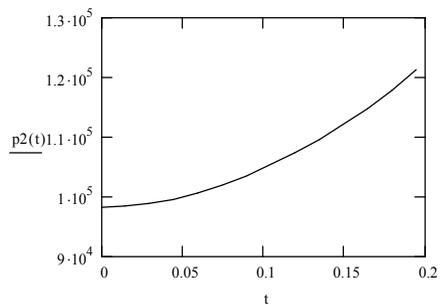


Рисунок 6 – Графік залежності зміни тиску у вихлопній порожнині від часу спрацювання  $f=p_2(t)$

**Висновки.** Результатом динамічних досліджень часу спрацювання пневмоциліндрів є отримані чисельні значення, необхідні в тих випадках, коли основними умовами проектування пневмоприводів є: заданий час руху робочого органу, тривалість циклу, максимальна швидкість пневмопривода, що характерно як для верстатного обладнання, так і для машинобудівної галузі в цілому.

**Список літератури:** 1. Герц Е.В., Крейнин Г.В. Динамика пневматических приводов машин-автоматов. – М. : Машиностроение, 1964. – 236 с. 2. Герц Е.В., Крейнин Г.В. Расчет пневмоприводов. – М. : Машиностроение, 1975. – 272 с. 3. Черкашенко М.В. Гидропневмоавтоматика. – Харьков: Гидроэлект, 2002. – 75 с.

Надійшла до редколегії 04.04.2011

*А.В. ШМАТКО*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
*А.В. МАЛЕЖИК*, адъюнкт, НУГЗУ, Харьков

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ИМПУЛЬСОВ**

У роботі розглядається проблема дослідження стійкості складних технічних систем. Усяка система піддається впливу зовнішніх впливів. Важливо знати, як довго система здатна виконувати свої функції (тобто зберігати функціональність) при отриманих у результаті впливів ушкодженнях. У роботі запропонована модель поширення імпульсних впливів по системі, що дозволяє виявити найбільш сильні й слабкі місця в її структурі. Модель дозволяє оцінювати стійкість елемента системи в залежності від його положення в структурі системи.

В работе рассматривается проблема исследования стойкости сложных технических систем. Всякая система подвержена влиянию внешних воздействий. Важно знать, как долго система будет в состоянии выполнять свои функции (т.е. сохранять функциональность) при полученных в результате воздействий повреждениях. В работе предложена модель распространения импульсных воздействий по системе, которая позволяет выявить наиболее сильные и слабые места в ее структуре. Модель позволяет оценивать стойкость элемента системы в зависимости от его положения в структуре системы.

We consider the problem of studying stability of complex technical systems. Every system can be affected by external influences. It is important to know how long the system will be able to perform their functions (ie, to maintain functionality) when received by the impacts of corruption. A model of pulse propagation effects in the system, which allows you to identify the most strengths and weaknesses in its structure. Model allows us to evaluate the resistance element of the system depending on its position in the structure of the system

**Введение.** Современные технические системы состоят из множества взаимодействующих друг с другом разнородных элементов. Наряду с этим требования, которые предъявляются к эффективности функционирования и качеству производимых изделий, ужесточаются. Поэтому актуальными являются задачи построения адекватных математических моделей сложных технических систем.

Моделирование сложных систем позволяет исследовать особенности их функционирования в различных условиях, наделять их требуемыми характеристиками и снижать риск возникновения чрезвычайных ситуаций (ЧС).

**Анализ последних достижений и публикаций.** Для анализа состояния безопасности объекта, в работах Маршалла В. [1], Хенли Э.Дж., Кумамото Х. [2], Колодкина В.М. [3], Белова П.Г. [4, 5] и других авторов предлагается использование вероятностных оценок риска.

Построение и исследование моделей сложных систем позволяет исследовать особенности их функционирования в различных условиях, наделять их

требуемыми характеристиками и снижать риск возникновения чрезвычайных ситуаций (ЧС). В последнее время в работах В.В. Кульбы [6], Малинецкого Г.Г., Курдюмова С.П. [7, 8] для моделирования систем со сложной структурой предлагается использование методов теории взвешенных графов. Такой подход уже позволил обнаружить ряд синергетических эффектов в поведении систем со сложной структурой.

**Постановка задачи и ее решение.** В работе предлагается использовать теорию самоорганизации – синергетику [9], и теорию управления рисками [10]. Математическая модель исследуемой системы должна содержать основные элементы, по поведению, по качеству, по эффективности функционирования которых можно достоверно судить о всей системе. В качестве подхода к исследованию сложной технической системы предлагается использование системного синтеза [7]. Результативность использования этого подхода к моделированию различных систем представлено во многих работах [6-8, 11,12].

Пусть  $G$  - конечный граф [13, 14]:

$$G = (V, E)$$

где  $V = \{v_i\}$ ,  $i = 1, n$  – множество вершин,  $E = \{e = (v, u)\}$  множество его ребер. Под надежностью элемента системы будем понимать вероятность  $P(t < T)$  его безотказной работы. Надежность элемента системы и долю уменьшения импульсного внешнего воздействия при переходе от одного элемента к другому можно получить экспериментально или при экспертном анализе.

Обозначим через  $w_i(t)$  вес вершины  $v_i \in V, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$w_i(t) = P_i(t < T), \tag{1}$$

Вес вершины характеризуется величиной надежности элемента системы, соответствующего вершине  $v_i$ . Тогда вес дуги  $(v_i, v_j) \in E$  обозначим через  $\varepsilon_{ij} = w(v_i, v_j), j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ , причем со знаком "+", определяется число  $0 < \varepsilon_{ij} \leq 1$ , равное сохранившейся доле передаваемого воздействия, при переходе от вершины  $v_i$  к вершине  $v_j$ . Назовем импульсным воздействием процесс изменения весов вершин графа системы. Импульсное воздействие определяется импульсом  $imp_j(t), j \in \{1, 2, \dots, n\}$  в дискретном времени  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ , который задается отношением:

$$imp_j(t) = w_j(t) / w_j(t - 1), \text{ при } t > 0. \tag{2}$$

Тогда при  $t \geq 0$  для  $i$ -ой вершины графа  $G$  определим импульсное воздействие:

$$w_i(t + 1) = w_i(t) \prod_{j=1}^{dug v_i} \varepsilon_{ji} imp_j(t) \tag{3}$$

$$w_i(t+1) = w_i(t) \prod_{j=1}^{dug v_i} (1 - \varepsilon_{ji} imp_j(t)), \quad (4)$$

где  $dug v_i$  – число входящих в вершину  $v_i$  дуг.

Формулы (2), (3) и (4) задают изменения весов вершин графа  $G = (V, E)$ , тем самым определяя динамику распространения внешних воздействий по системе. Формула (3) соответствует возрастающим импульсным воздействиям, которые увеличиваются при переходе от одной вершины к другой. Формула (4) соответствует затухающим импульсным воздействиям, которые уменьшаются при переходе от одной вершины к другой.

Автономное импульсное воздействие на взвешенном орграфе  $G$  определим по правилу (2), используя вектор начальных значений  $W(0) = (w_1(0), w_2(0), \dots, w_n(0))$  и вектор импульсов:

$$Imp(0) = (imp_1(0), imp_2(0), \dots, imp_n(0)), \quad (5)$$

который задает импульс  $imp_j(0)$  в каждой вершине  $v_j$  в момент времени  $t=0$ .

Автономное импульсное воздействие в паре с вектором начальных значений описывает состояние системы в начальный момент времени, когда под влияние внешних поражающих воздействий попадают все или часть элементов системы.

**Численные результаты.** Проведем исследования импульсного воздействия на систему перекачки жидкости, изображенную на рис. 1 [1].

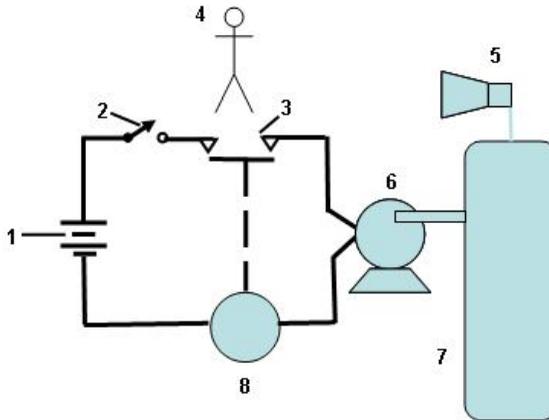


Рисунок 1 – Принципиальная схема перекачки (1- источник питания, 2 – переключатель, 3 – контакты, 4 – оператор, 5 – сирена, 6 – насос, 7 – бак, 8 - таймер)

В системе перекачки бак заполняется за 10 мин и опорожняется за 50 мин. Таким образом, продолжительность одного полного цикла составляет 1

час. После включения переключателя реле времени запускается, обеспечивая размыкание контактов через 10 мин. Если эти механизмы отказывают, то звучит сирена, и оператор выключает переключатель для того, чтобы предотвратить разрыв бака из-за его переполнения. Ориентированный граф системы изображен на рис.2

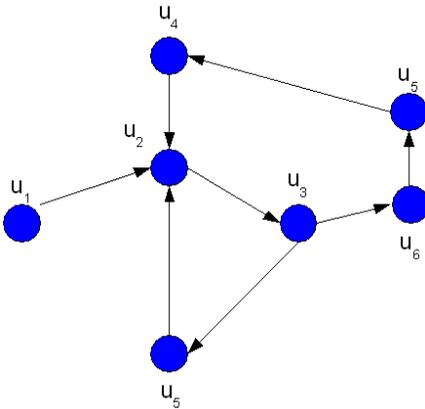


Рисунок 2 – Орграф системы перекачки

Система имеет два простых контура  $(u_2, u_3, u_6, u_2)$  и  $(u_2, u_3, u_6, u_5, u_4, u_2)$

Начальные веса вершин графа определим воспользовавшись формулой вычисления вероятности состояния элемента [5]:

$$P_0 = e^{-\lambda t}$$

Для определения интенсивности отказов  $\lambda$  воспользуемся статистическими данными [5], представленными в таблице 1.

Таблица 1

Показатели безотказности электрического оборудования

№	Наименование оборудования	Интенсивность отказов	Значение $\lambda$
1	Источник питания	В эксплуатации	0,0000025
2	Переключатель	В эксплуатации	$5 \cdot 10^{-5}$
3	Таймер	В эксплуатации	$15 \cdot 10^{-6}$
4	Насос	При работе	0,0004
5	Сирена	При включении	0,0004
6	Бак	Разгерметизация	$3 \cdot 10^{-6}$

Вероятность безошибочности работы для среднестатистического человека, согласно [5], в случае обнаружения сигнала и принятия решения равна 0.9380-0.9780.

Значения весов  $w_i(0)$  вершин представлены в табл. 2. Веса ребер положим равными единице. Проследим, как будет изменяться вектор значений  $W(t)$  при простом импульсном воздействии:

$$Imp(0) = (0.9, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$$

что соответствует импульсному воз-

Таблица 2

Значения весов  $w_i(0)$  вершин

$$G = (V, E)$$

Вершина	Значение $w_i(0)$
$u_1$	0.99
$u_2$	0.99
$u_3$	0.99
$u_4$	0.95
$u_5$	0.99
$u_6$	0.99
$u_7$	0.96

действию направленному на источник питания. Расчетные значения надежности элементов системы представлены на рис.3.

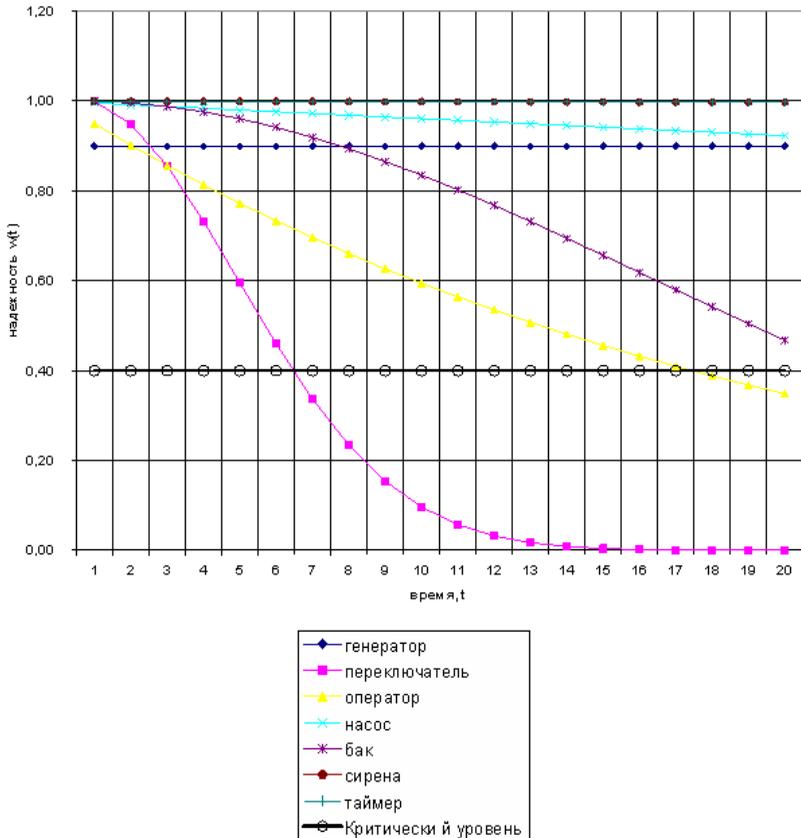


Рисунок 3 – Изменение надежность системы при импульсном воздействии  $Imp(0)=(0.9,1,1,1,1,1,1)$ ,

Как это следует из приведенных на графике данных, наиболее слабым звеном системы является переключатель, надежность которого достигает критического значения уже при  $t=6$ .

Проведем исследование системы при приложении импульсного воздействия

$$Imp(0)=(1,1,0.75,1,1,1,1).$$

Результаты расчетов приведены на рис. 4

Как показывают расчеты, в этом случае, система выйдет из строя мно-

го раньше ( $t=3$ ), так как  $w_3(3) < cr(u_3) = 0.4$ . Таким образом наиболее слабым элементом системы при импульсном воздействии на насос в системе является бак.

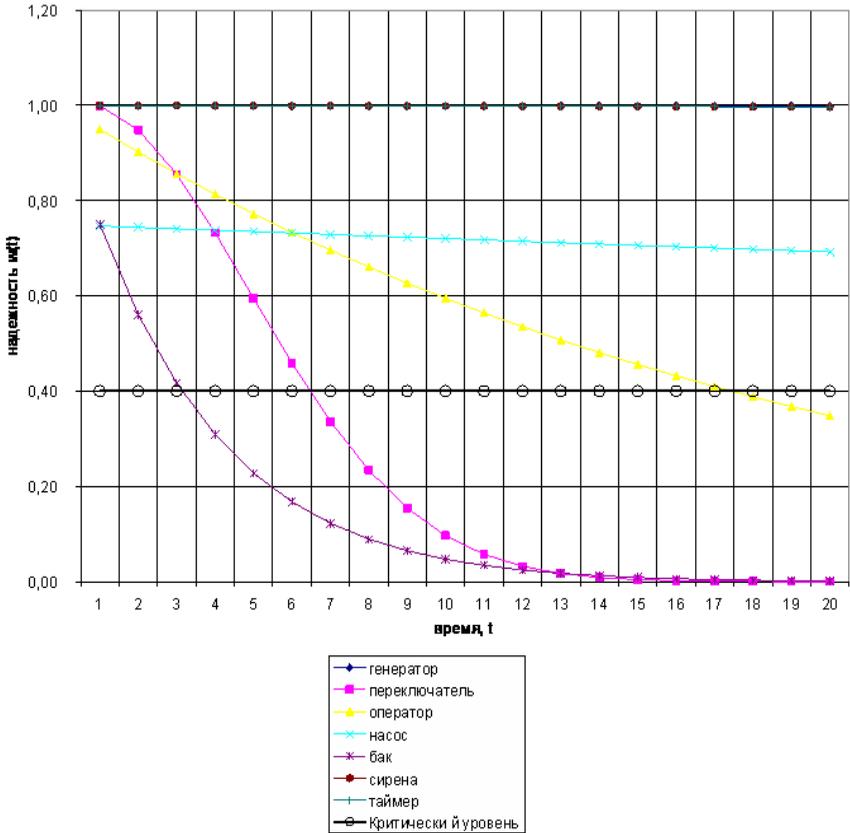


Рисунок 4 – Изменение надежность системы при импульсном воздействии  $Imp(0) = (1, 1, 0.75, 1, 1, 1, 1)$ .

**Перспективы дальнейших исследований.** В соответствии с описанным импульсным воздействием на орграфе, можно ввести различные критерии (признаки) достижения системой предельного состояния. К примеру, можно считать, что система находится в предельном состоянии, если надежность одного или нескольких наиболее значимых элементов системы ниже некоторого допустимого уровня. Этот уровень будем называть *критическим уровнем надежности элемента*. Введенный критерий четко разделяет до

критическое и за критическое состояние элементов системы. Если надежность элемента ниже критического уровня, то элемент не в состоянии выполнять возложенных на него функций, или функционировать требуемое время.

Представление исследуемой системы в виде взвешенного по правилу (2) графа  $G=(V,E)$  и формализация внешнего влияния на систему как автономного импульсного воздействия (3)-(7) определяет модель распространения поражающих воздействий по системе.

Авторы считают перспективным направление исследования, связанное с построением математических моделей сложных технических системы и исследованием этих моделей с целью решения важной задачи – определения того, как внешнее воздействие распространяется по структуре системы и влияет на качественное состояние ее элементов.

**Выводы.** В работе рассматривается математическая модель для исследования стойкости сложной технической систем с использованием вероятностно-детерминистического подхода. Предложенная модель распространения импульсных воздействий по системе позволяет выявлять наиболее сильные и слабые места в структуре системы. Исследование модели позволяет оценивать стойкость элементов системы, в зависимости от его положения в структуре.

**Список литературы.** 1. *Маршалл В.* Основные опасности химического производства / Пер. с англ. под ред. Б.Б. Чайванова и А.Н. Черноплекова. – М.: Мир, 1989. – 671 с. 2. *Хенли Э.Дж., Кумamoto Х.* Надежность технических систем и оценка риска. – М.: Машиностроение, 1984. 3. *Колодкин В.М., Мурин А.В. Петров А.К., Горский В.Г.* Количественная оценка риска химических аварий. – Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 2001 – 228 с. 4. Безопасность жизнедеятельности. / Под ред. С.В. Белова 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1999. 5. *Белов П.Г.* Моделирование опасных процессов в техносфере. – Москва: Издательство Академии гражданской защиты МЧС РФ, 1999. – 124 с. 6. *Кульба В.В., Кононов Д.А., Косяченко С.А., Шубин А.Н.* Методы формирования сценариев развития социально-экономических систем. – М.: СИНТЕГ, 2004. 7. *Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г.* Синергетика и системный синтез // Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие. – М.: Наука, 2002. 8. Новое в синергетике: взгляд в третье тысячелетие / Под ред. Малинецкого Г.Г., Курдюмова С.П. – М.: Наука, 2002. 9. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 10. *Владимиров В.А., Кульба В.В., Малинецкий Г.Г., Махутов Н.А. и др.* Управление риском. – М.: Наука, 2000. 11. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992. 12. *Малинецкий Г.Г.* Базовые модели и ключевые идеи синергетики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, – №70. – М., 1994. 13. *Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А.* Предфрактальные графы в проектировании и анализе сложных структур. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, N1 10. М., 2003. 14. *Архипова И.Л., Кульба В.В.* Управление в чрезвычайных ситуациях. – М.: РГТУ, 1998.

*Надійшла до редколегії 24.03.2011*

*Т.В. ШМАТКО*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

## **ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ**

Розглядається задача про вільні геометрично нелінійні коливання ортотропних пологих оболонок змінної товщини зі складною формою плану. Математична постановка виконана в рамках класичної теорії тонких пологих оболонок. Для рішення застосовується чисельно-аналітичний підхід, що базується на теорії R-функцій і варіаційних методах. Отримано амплітудно-частотні характеристики для оболонок змінної товщини при різних кутах поворота вісей ортотропії відносно головних вісей.

Рассматривается задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях ортотропных пологих оболочек переменной толщины со сложной формой плана. Математическая постановка выполнена в рамках классической теории тонких пологих оболочек. Для решения применяется численно-аналитический подход, базирующийся на теории R-функций и вариационных методах. Получены амплитудно-частотные характеристики для оболочек переменной толщины при повороте осей ортотропии по отношению к главным осям.

Problem about free geometrically nonlinear vibrations of orthotropic shallow shells with variable thickness and complex plan form is considered. Mathematical statement is carried out within classical framework of thin shallow shells theory. The numerically-analytical approach is applied for solving established task. This method is based on the R-function theory and variational methods. Amplitude and frequency relations were obtained for shells with variable thickness at the rotating axes of orthotropii about main axes.

**Введение.** Задачи нелинейной динамики пластин и пологих оболочек являются актуальными для многих областей современной промышленности. Особенно это касается космической отрасли, где пластины и оболочки используются как конструктивные элементы для моделирования многих объектов. На практике подобные элементы могут иметь переменную толщину, различную геометрию срединной поверхности и формы плана, способы закрепления и находиться под действием сил, вызывающих их нелинейное деформирование. Исследованием оболочек переменной толщины занимались многие ученые [1, 4, 6, 7, 8]. Однако практически отсутствуют работы, в которых бы рассматривались задачи о колебаниях анизотропных пологих оболочек переменной толщины со сложной формой плана при их геометрически нелинейном деформировании.

В настоящей работе предложен метод решения указанного класса задач с помощью теории R-функций и вариационных методов, т.е. RFM.

**Постановка задачи.** Задачу о свободных геометрически нелинейных колебаниях анизотропных пологих оболочек переменной толщины  $h(x, y)$  будем рассматривать в рамках классической теории, базирующейся на гипотезах Кирхгоффа-Лява [1].

Относительные деформации удлинения и сдвига координатной поверхности  $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12})^T$  и относительные деформации изгиба и кручения  $\chi = (\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12})^T$  выражаются с помощью следующих соотношений

$$\varepsilon_{11} = u_{,x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \quad \varepsilon_{22} = v_{,y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \quad \varepsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y},$$

$$\chi_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Усилия  $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$  и моменты  $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$  в рамках принятых гипотез определяются как

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{Bmatrix},$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $C_{ij}, D_{ij}$  – приведенные жесткостные коэффициенты, которые являются функциями от  $x$  и  $y$ , и в случае совпадения главных направлений упругости с направлениями осей координат определяются соотношениями

$$C_{ij} = B_{ij} h(x, y), \quad D_{ij} = B_{ij} \frac{h^3(x, y)}{12}, \quad i, j = 1, 2, 6; \quad B_{11} = \frac{E_1}{(1 - \nu_1 \nu_2)};$$

$$B_{22} = \frac{E_2}{(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad B_{66} = G_{12}; \quad B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{16} = B_{26} = 0.$$

Если же имеет место поворот главных направлений упругости относительно осей координат на некоторый угол  $\theta$ , то упругие постоянные материала будут зависеть от упругих постоянных  $B_{ij}$  в главных направлениях ортотропного тела и могут быть определены с помощью известных формул [1].

Систему уравнений движения оболочки относительно перемещений можно представить в виде [9]:

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= -Nl_1w + m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= -Nl_2w + m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= -Nl_3 + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Где линейные дифференциальные операторы  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) и нелинейные  $N_1(w)$ ,  $N_2(w)$ ,  $N_3(u, v, w)$  для анизотропной оболочки определяются так же, как и в работах [9, 10]. Система (1) дополняется соответствующими начальными и граничными условиями.

**Метод решения.** Для решения поставленной задачи будем использовать подход, предложенный ранее в работах [9, 10] и базирующийся на теории R-функций и вариационных методах. Отличие состоит в том, что жесткостные характеристики являются функциями от координат точки и должны быть вычислены для каждого закона изменения толщины оболочки. Согласно этому подходу необходимо, прежде всего, решить линейную задачу о свободных колебаниях оболочки и найти собственные функции, соответствующие формам колебаний. Тогда для решения нелинейной задачи прогиб пластины представим в виде

$$W = y(t)w^{(c)} \quad (2)$$

Подставляя это выражение в первые два уравнения нелинейной системы движения (7) и пренебрегая силами инерции в срединной плоскости, получим следующую систему уравнений

$$L_{11}u + L_{12}v + y(t)L_{13}w^{(c)} = -y^2(t)N_1(w^{(c)}(x, y)), \quad (3)$$

$$L_{21}u + L_{22}v + y(t)L_{23}w^{(c)} = -y^2(t)N_2(w^{(c)}(x, y)).$$

Таким образом, если положить

$$u(x, y, t) = \Delta(y(t)w^{(c)}(x, y)) + y^2(t)u_{11}(x, y), \quad (4)$$

$$v(x, y, t) = \Delta(y(t)v^{(c)}(x, y)) + y^2(t)v_{11}(x, y), \quad (5)$$

где функции  $u_{11}(x, y)$ ,  $v_{11}(x, y)$  являются решением системы уравнений типа Ламе

$$L_{11}u_{11} + L_{12}v_{11} = N_1(w^c), \quad (6)$$

$$L_{21}u_{11} + L_{22}v_{11} = N_2(w^c), \quad (7)$$

то первые два уравнения системы (1) будут удовлетворены тождественно. Символ  $\Delta$  в уравнениях (4)-(5) равен 1 для оболочек и 0 для пластин. Методика решения этих задач с помощью RFM подробно описана в работах [5, 9, 10].

Подставляя выражения (2), (4) – (5) для  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$ ,  $w(x, y, t)$  в третье уравнение системы движения (1) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\xi''(\tau) + \xi(\tau) + \beta\xi^2(\tau) + \gamma\xi^3(\tau) = 0.$$

Здесь

$$\tau = \omega_L t, \quad \xi = \frac{y(t)}{h};$$

$$\beta = \frac{-1}{\omega_{L1}^2 \cdot \|w\|^2 m_1} \iint_{\Omega} \left( L_{31} u_{11} + L_{32} v_{11} - k_1 N_{11}^{(N)}(w^{(c)}) - k_2 N_{22}^{(N)}(w^{(c)}) + \right. \\ \left. + \Delta \left( N_{11}^{(L)}(u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x^2} + 2N_{12}^{(L)}(u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + N_{22}^{(L)}(u^{(c)}, v^{(c)}, w^{(c)}) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial y^2} \right) \right) w^{(c)} d\Omega, \\ \gamma = -\frac{1}{\omega_{L1}^2 \cdot \|w\|^2 m_1} \iint_{\Omega} \left( N_{11}^{(Np)}(u_{11}, v_{11}, w^{(c)}) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(Np)}(u_{11}, v_{11}, w^{(c)}) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2N_{12}^{(Np)}(u_{11}, v_{11}, w^{(c)}) \frac{\partial^2 w^{(c)}}{\partial x \partial y} \right) w^{(c)} d\Omega.$$

Выражения  $N_{ij}^{(N)}$ ,  $N_{ij}^{(L)}$ ,  $N_{ij}^{(Np)}$  обозначают составляющие векторов

$$\vec{N}^{(N)}(N_{11}^{(N)}, N_{12}^{(N)}, N_{12}^{(N)}), \vec{N}^{(L)}(N_{11}^{(L)}, N_{12}^{(L)}, N_{12}^{(L)}), \vec{N}^{(Np)}(N_{11}^{(Np)}, N_{12}^{(Np)}, N_{12}^{(Np)}),$$

которые определяются формулами

$$\vec{N}^{(N)} = C \vec{\varepsilon}^{(N)}, \vec{N}^{(L)} = C \vec{\varepsilon}^{(L)}, \vec{N}^{(Np)} = C \vec{\varepsilon}^{(Np)},$$

где

$$\vec{\varepsilon}^{(L)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^{(c)}}{\partial x} + k_1 w^{(c)} \\ \frac{\partial v^{(c)}}{\partial y} + k_2 w^{(c)} \\ \frac{\partial u^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(c)}}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}^{(N)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}^{(Np)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_{11}}{\partial y} + \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w^{(c)}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Для пластин коэффициент  $\beta = 0$ . Для отыскания амплитудно-частотной характеристики примем, что

$$\xi(\tau) = A \cos \omega_N \tau;$$

тогда после применения метода Бубнова – Галеркина на промежутке, равном четверти периода [2, 3], получим зависимость между максимальной амплитудой колебаний  $A$  и отношением нелинейной частоты к линейной  $\nu = \omega_N / \omega_L$  в виде [2]:

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi} \beta A + \frac{3}{4} \gamma A^2}.$$

**Численные результаты.** Предложенный алгоритм реализован в рамках автоматизированной системы POLE-RL [5]. Входная информация содержит следующие данные: закон изменения толщины оболочки, значения кривизны, логические формулы для плана оболочки, степень полиномов, аппроксимирующих неопределенные компоненты задачи, метод интегрирования. При этом, входная информация может содержать буквенные параметры, что позволяет проводить многовариантные расчеты. Полученные программы были проверены на тестовых задачах и использованы для решения нелинейных задач о колебаниях оболочек переменной толщины. Были проанализированы оболочки различной кривизны, изготовленные из композитных материалов. Их механические параметры и закон изменения толщины рассматривались такими же, как в работах [4, 6], т.е.

$$E_1 = 47.6 \text{ ГПа}, E_2 = 20.7 \text{ ГПа}, G_{12} = 5.31 \text{ ГПа}, \nu_{12} = 0.149$$

$$h = h_0 (1 + \alpha (6x^2 - 6x + 1)),$$

где  $\alpha$  – постоянный коэффициент, изменяющийся в интервале  $[-0.5; 0.5]$ ,  $h_0$  – толщина оболочки, соответствующая  $\alpha = 0$ . Геометрические параметры оболочки следующие:  $h_0/a = 0.008$ ,  $b/a = 1$ .

В табл.1 представлено сравнение значений безразмерного частотного параметра

$$\Lambda_i = \lambda_i (2a)^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}, \text{ где } D_0 = E_{11} h_0^3 / (12(1 - \nu_{12} \nu_{21}))$$

Таблица 1

Сравнение безразмерного частотного параметра жестко защемленной сферической оболочки с квадратным планом

$k_x = k_y$	$\Lambda_i$	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.5
0.8	$\Lambda_1$	42.89	44.07	45.34	45.83	46.43	47.66	48.94
		<b>42.90</b>	<b>44.09</b>	<b>45.25</b>	<b>45.84</b>	<b>46.44</b>	<b>47.67</b>	<b>48.95</b>
	$\Lambda_2$	60.71	60.04	59.31	58.95	58.59	57.96	57.43
		<b>60.79</b>	<b>60.22</b>	<b>59.47</b>	<b>59.1</b>	<b>58.75</b>	<b>58.09</b>	<b>57.56</b>
	$\Lambda_3$	61.18	65.19	68.39	69.75	70.96	72.99	74.52
		<b>61.21</b>	<b>65.22</b>	<b>68.42</b>	<b>69.78</b>	<b>70.99</b>	<b>73.01</b>	<b>74.53</b>
	$\Lambda_4$	79.04	81.98	84.06	84.84	85.47	86.32	82.38
		<b>79.21</b>	<b>82.14</b>	<b>84.23</b>	<b>84.99</b>	<b>85.63</b>	<b>86.46</b>	<b>83.03</b>
0.32	$\Lambda_1$	109.5	111	112.3	112.8	113.2	113.9	114.4
		<b>109.9</b>	<b>111.4</b>	<b>112.6</b>	<b>113.1</b>	<b>113.5</b>	<b>114.2</b>	<b>114.6</b>
	$\Lambda_2$	122.8	123.6	123.9	123.9	123.8	123.3	122.5
		<b>122.4</b>	<b>124.3</b>	<b>124.5</b>	<b>124.5</b>	<b>124.4</b>	<b>123.9</b>	<b>122.9</b>
	$\Lambda_3$	123.3	126.9	129.2	130	130.8	132.3	133.7
		<b>123.7</b>	<b>127.2</b>	<b>129.9</b>	<b>130.7</b>	<b>131.5</b>	<b>132.9</b>	<b>134.2</b>
	$\Lambda_4$	125	127.3	129.8	131.1	132.2	134.1	135.6
		<b>125.8</b>	<b>128.1</b>	<b>129.8</b>	<b>131.1</b>	<b>132.2</b>	<b>134.1</b>	<b>135.6</b>

для сферической оболочки, жестко закрепленной по всему контуру, при различных значениях кривизны и параметра  $\alpha$ , характеризующего толщину оболочки, с результатами работы [4], в которой эта задача была сведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода сплайн-аппроксимации искомого решения. Отклонения не превышают 1.5%, что подтверждает достоверность RFM. Данные работы [4] приведены в табл.1 жирным шрифтом.

В табл.2 приведены аналогичные результаты, полученные с учетом поворота осей ортотропии:  $\theta = 30^0, 45^0, 60^0$ .

Таблица 2

Значения безразмерного частотного параметра сферической оболочки в зависимости от кривизны, толщины и угла поворота осей ортотропии

$\theta$	$k_x = k_y$	$\alpha$ $\Lambda_i$	-0.5	-0.3	-0.1	0	0.1	0.3	0.5	
			30	0.08	$\Lambda_1$	42.385	43.463	44.437	44.905	45.368
	$\Lambda_2$	58.544	60.31		60.024	59.762	59.46	58.777	58.032	
	$\Lambda_3$	60.715	61.768		63.902	64.812	65.608	66.87	67.72	
	$\Lambda_4$	83.337	85.553		86.717	86.946	86.921	85.883	83.258	
	0.32	$\Lambda_1$	109.15		110.33	111.09	111.35	111.53	111.7	111.6
		$\Lambda_2$	116.98		119.97	122.14	122.94	123.56	124.19	123.99
		$\Lambda_3$	126.75		128.25	129.38	129.85	130.28	130.89	130.79
		$\Lambda_4$	131.016		131.46	131.42	131.3	131.15	131.03	131.65
45	0.08	$\Lambda_1$	42.639	43.508	44.245	44.585	44.913	45.541	46.149	
		$\Lambda_2$	57.248	59.272	60.474	60.669	60.573	59.851	58.813	
		$\Lambda_3$	62.793	62.821	62.664	62.702	62.868	63.291	63.524	
		$\Lambda_4$	84.413	86.484	87.387	87.47	87.324	86.333	84.337	
	0.32	$\Lambda_1$	109.58	110.52	111.01	111.13	111.18	111.09	110.77	
		$\Lambda_2$	116.09	118.42	120.05	120.63	121.08	121.57	121.51	
		$\Lambda_3$	128.83	130.19	131.02	131.31	131.52	131.44	129.95	
		$\Lambda_4$	134.44	134.52	133.89	133.39	132.8	131.74	131.71	
60	0.08	$\Lambda_1$	43.821	44.327	44.727	44.905	45.074	45.396	45.709	
		$\Lambda_2$	56.056	57.932	59.265	59.762	60.151	60.537	59.646	
		$\Lambda_3$	67.863	66.962	65.604	64.812	63.971	62.268	61.375	
		$\Lambda_4$	83.829	85.996	86.878	86.946	86.801	85.921	84.297	
	0.32	$\Lambda_1$	110.707	111.25	111.38	111.35	111.27	111	110.65	
		$\Lambda_2$	120.46	121.94	122.75	122.94	122.99	122.67	121.76	
		$\Lambda_3$	127.67	128.89	129.63	129.85	130	129.17	127.44	
		$\Lambda_4$	131.92	132.29	131.79	131.3	130.68	130.09	129.88	

В табл.3 представлены формы колебаний жестко закрепленных сферических оболочек для значений  $\alpha = -0.3, k_x = k_y = 0.08; 0.32; 0.64, \theta = 45^0$ .

В табл.4 аналогичные результаты приведены для шарнирно закрепленной пологой сферической оболочки с квадратным планом для кривизн

$k_x = k_y = 0.32$  и значений угла  $\theta = 0^0, 30^0, 45^0$ .

Таблица 3

Формы колебаний сферической оболочки при изменении ее кривизны

$k_x = k_y = 0.08$			
$\Lambda_1 = 43.5086$	$\Lambda_2 = 59.272$	$\Lambda_3 = 62.821$	$\Lambda_4 = 86.484$
$k_x = k_y = 0.32$			
$\Lambda_1 = 110.52$	$\Lambda_2 = 118.42$	$\Lambda_3 = 130.19$	$\Lambda_4 = 134.52$
$k_x = k_y = 0.64$			
$\Lambda_1 = 192.26$	$\Lambda_2 = 192.839$	$\Lambda_3 = 206.68$	$\Lambda_4 = 215.196$

Таблица 4

Значения безразмерного частотного параметра свободно опертой сферической оболочки в зависимости от толщины и угла поворота осей ортотропии

$\Lambda_i$	$\theta = 0$			$\theta = 30$			$\theta = 45$		
	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$
$\Lambda_1$	74.94	80.46	85.59	94.59	97.31	97.21	99.11	100.2	100.6
$\Lambda_2$	90.14	91.39	91.27	96.49	100.1	104.3	103.8	106.0	107.8
$\Lambda_3$	94.25	97.25	97.46	101.4	105.2	108.4	103.8	109.3	112.7
$\Lambda_4$	95.53	99.56	104.6	113.9	114.9	115.3	114.6	114.7	114.2

Для рассмотренных оболочек был выполнен нелинейный анализ и получены амплитудно-частотные скелетные кривые. В частности, для жестко заземленных пологих оболочек с квадратной формой плана для различных значений параметра  $\alpha$  и геометрических значений

$$h/a = 0.008, \quad k_x = k_y = 0.08, \quad \theta = 45^0$$

были вычислены соответствующие значения  $\omega_N / \omega_L$  в зависимости от  $W_{\max} / h$ . Результаты проведенных исследований представлены в табл. 5.

На рис. 1-4 приведены скелетные кривые для шарнирно опертых пологих сферических оболочек переменной толщины.

Таблица 5

Зависимость отношения нелинейной частоты к линейной от амплитуды для сферической оболочки переменной толщины

$w/h$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$	$w/h$	$\alpha = -0.3$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.3$
0.2	1.063	1.059	1.054	1.2	1.368	1.342	1.315
0.4	1.125	1.116	1.108	1.4	1.428	1.396	1.365
0.6	1.186	1.174	1.161	1.6	1.487	1.451	1.414
0.8	1.247	1.230	1.213	1.8	1.547	1.505	1.463
1.0	1.308	1.286	1.264	2.0	1.606	1.559	1.512

На рис.1-3 изображены амплитудно-частотные зависимости для свободно опертой сферической оболочки при рассмотрении различных углов поворота  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$  (для каждого случая были использованы соответствующие полученные значения коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$ ). На рис.4 показаны амплитудно-частотные кривые для свободно опертой сферической оболочки при рассмотрении различных значений коэффициента  $\alpha = -0.3$ ,  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0.3$  (также учитывались соответствующие полученные значения коэффициентов  $\beta$  и  $\gamma$  для каждого конкретного случая).

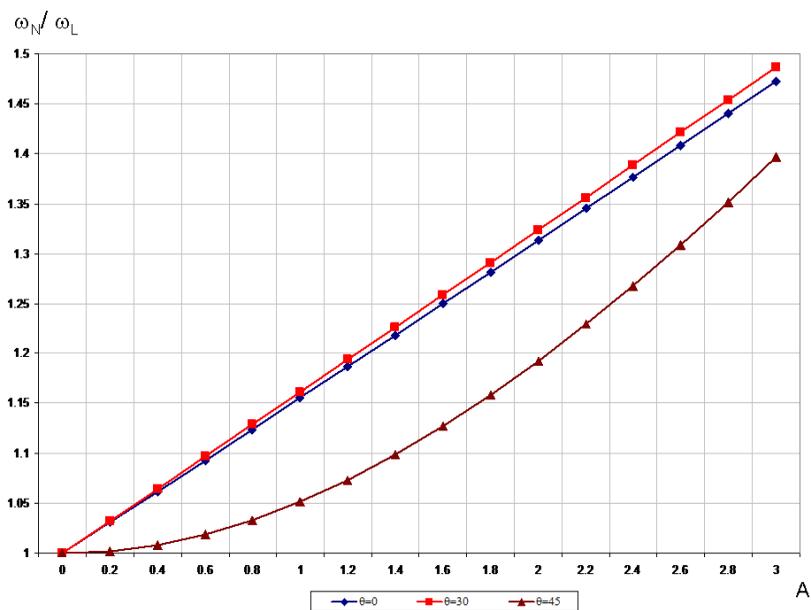


Рисунок 1 – Скелетные кривые свободно опертой сферической оболочки в зависимости от угла поворота осей ортотропии ( $\alpha = -0.3, k_x = k_y = 0.32$ )

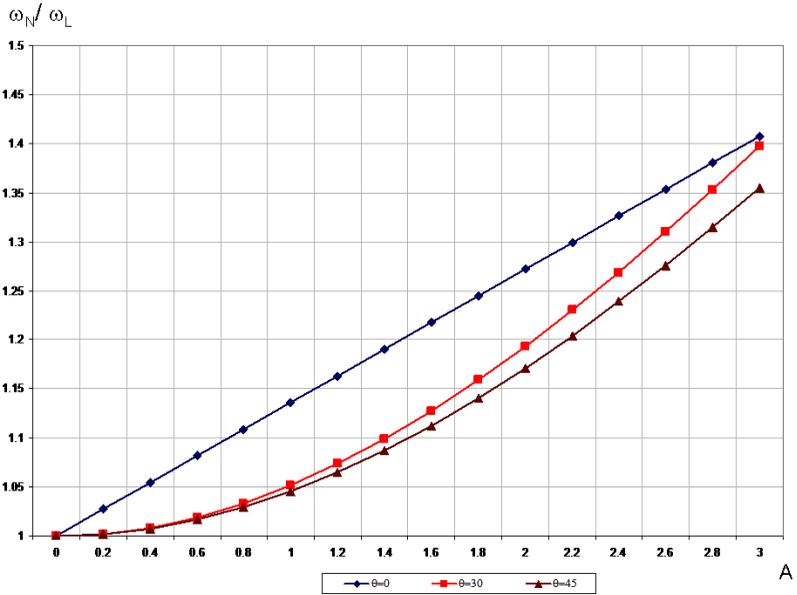


Рисунок 2 – Скелетные кривые для свободно опертой сферической оболочки постоянной толщины ( $\alpha = 0$ ,  $k_x = k_y = 0.32$ )

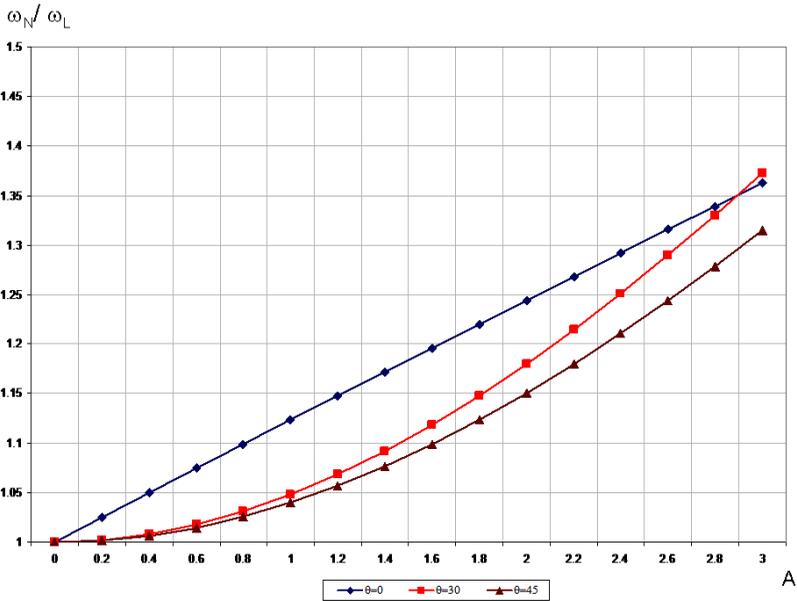


Рисунок 3 – Скелетные кривые свободно опертой сферической оболочки в зависимости от угла поворота осей ортотропии ( $\alpha = 0.3$ ,  $k_x = k_y = 0.32$ )

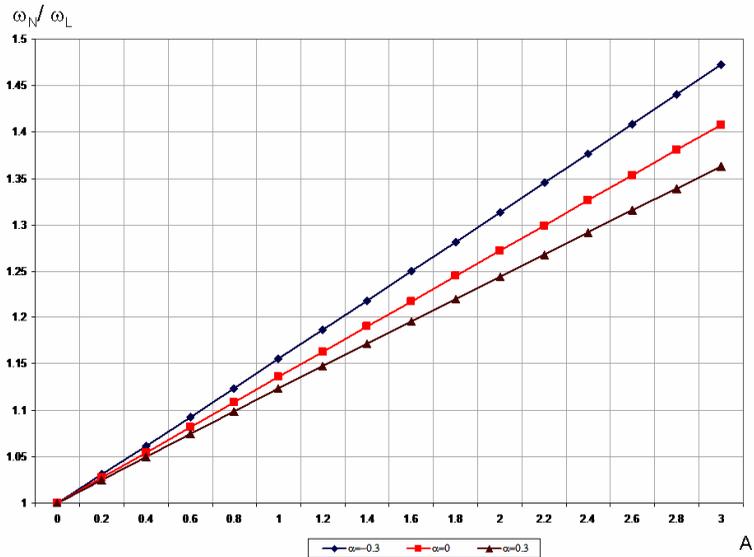


Рисунок 4 – Скелетные кривые свободно опертой сферической оболочки в зависимости от ее толщины ( $\theta = 0$ ,  $k_x = k_y = 0.32$ )

**Заклучение.** В работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний пологих оболочек переменной толщины. С помощью созданного программного обеспечения в рамках системы POLE-RL исследовано влияние различных механических и геометрических факторов на собственные колебания оболочек переменной толщины. Получены новые результаты для спектра колебаний оболочек переменной толщины при повороте осей ортотропии по отношению к главным осям и амплитудно-частотные характеристики. Предложенный метод может быть использован для пологих оболочек произвольной формы, в том числе и многослойных.

**Список литературы.** 1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448с. 2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 3. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней. – Изв. АН СССР, Отдел техн. наук, № 3. 1955. – С. 33-68. 4. Будақ В.Д, Григоренко А.Я., Пузырев С.В. Решение задачи о свободных колебаниях прямоугольных в плане пологих оболочек переменной толщины // Прикладная механика. – 2007. – 43, № 4. – С.89-99. 5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук.думка, 1982. – 552 с. 6. Курна Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 480 с. 7. Ashour A.S. A semi-analytical solution of the flexural vibration of orthotropic plates of variable thickness // Journal of Sound and Vibration. – 2001. – 240, № 3. – P.431-445. 8. Sakiyama T., Huang M. Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness // Journal of Sound and Vibration. – 1998. – № 216 – P.379-397. 9. Курна Л.В. Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана // Мат.методи та фіз.-мех. поля. 2008. – № 2. – С. 1-11. 10. Курна Л.В., Шматко Т.В. Метод R-функций и «ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову» в задачах нелинейной динамики пластин и пологих оболочек. История НТУ „ХПИ” в выдающихся личностях / Под общ. ред. Л.Л.Товажнянского. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – С.191-227.

Поступила в редколлегию 08.04.2011

**Е.Г. ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**Н.И. ВОРОПАЙ**, аспирант, ХНАДУ, Харьков

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ ОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ**

Досліджено нестационарне деформування прямокутної пружної ізотропної пластини під дією імпульсних навантажень. Динамічна поведінка пластини описується у рамках уточненої теорії першого порядку на основі одного хвильового рівняння. Розглянуто розв'язання прямої та оберненої задачі теорії пружності. При дослідженні оберненої некоректної задачі використано алгоритм А.М. Тихонова, що регуляризує її розв'язок. Представлені чисельні результати, достовірність яких перевіряється на підставі порівняння з результатами інших авторів.

Исследуется нестационарное деформирование прямоугольной упругой изотропной пластины под действием импульсных нагрузок. Динамическое поведение пластины описывается в рамках уточненной теории первого порядка на основе одного волнового уравнения. Рассмотрены решения прямой и обратной задачи теории упругости. При исследовании обратной некорректной задачи используется регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова. Представлены численные результаты, достоверность которых проверяется на основании сравнения с результатами других авторов.

The non-stationary deformation of an elastic isotropic rectangular plate under impulse actions is investigated. Dynamic behavior of the plate is described by the refined theory of first order with a single wave equation. Direct and inverse problems of elasticity theory are considered. The Tihonov's regularizing method is used for solving the inverse ill-posed problem. Numerical results, which are validated by a comparison with results of other authors, are presented.

**Введение.** Развитие современной индустрии выдвигает повышенные требования к исследованиям в области механики деформируемого твердого тела. Необходимы достоверные представления о деформационных процессах, протекающих в средах, при различных режимах их эксплуатации, в частности, в элементах конструкций в виде пластин в условиях существенно нестационарных режимов.

Пластины, как плоские конструкционные элементы, широко применяются в различных областях техники и строительства. Это объясняется тем, что наряду с легкостью пластины обладают высокой несущей способностью, экономичностью, хорошей технологичностью, а также им присуща рациональность форм.

Способствовать накоплению научной информации по напряженно-деформируемому состоянию (НДС) элементов конструкций в виде пластин могут результаты, полученные на основе решения прямых и обратных нестационарных задач, которые представлены в настоящей статье.

**Анализ публикаций.** Обзор работ отечественных и зарубежных ученых показывает, что поведение подобных конструкций при статических нагрузках достаточно хорошо изучено. Исследования же поведения этих конструкций при динамических нагрузках еще далеки от завершения. С наиболее полной

библиографией и анализом многочисленных исследований НДС пластин можно ознакомиться, в частности, и с современными достижениями, в обзорных работах [1, 2].

Развитие методов решения обратных задач теории упругости для нестационарно деформируемых пластин находится в начальной фазе.

В настоящей работе представлена методика решения обратной задачи, целью которой является идентификация импульсных воздействий типа сосредоточенной силы при условии заданности перемещений во времени в одной из точек пластины. Поскольку решение обратной задачи связано с решением соответствующей прямой задачи, вначале будет изложено решение прямой задачи. Следует отметить, что импульсное деформирование прямоугольной пластины проанализировано в работе [3], но на основе системы дифференциальных уравнений. А здесь соответствующее решение основывается на базе одного волнового уравнения, которое эквивалентно полной системе уравнений движения.

**Постановка задачи.** Исследуется НДС прямоугольной изотропной шарнирно-опертой пластины размера  $l \times m$  и толщиной  $h$ , срединная плоскость которой совпадает с координатной плоскостью  $xOy$ , в некоторой точке  $(x_0, y_0)$  которой действует сосредоточенная сила  $P(t)$  (рис. 1).

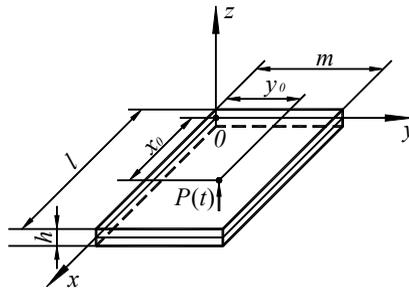


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины

**Уравнение колебания пластины.** Задача о нестационарных колебаниях пластины сводится к решению следующего одного уравнения [4]:

$$\Delta \Delta w - \left( \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{q}{D} + \frac{1}{k' Gh} \left( \frac{\rho I}{D} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q \right), \quad (1)$$

где  $w(x, y, t)$  – прогиб срединной плоскости пластины;  $\rho$  – плотность материала пластины;  $q(x, y, t)$  – интенсивность внешней нагрузки;  $k'$  – коэффициент сдвига;  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ ;  $I = h^3 / 12$ ;  $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  – цилинд-

рическая жесткость;  $c_1^2 = E/\rho(1 - \nu^2)$ ,  $c_2^2 = 2G/3\rho$  – квадраты скоростей распространения волн в пластине;  $G = E/2(1 + \nu)$ ;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Укажем, что в монографии [4] приводится только вид уравнения (1), но непосредственное его решение отсутствует.

Примем нулевые начальные условия для построения решения задачи:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) = 0; \quad \psi_x(x, y, 0) = 0; \quad \psi_y(x, y, 0) = 0; \\ \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \psi_x(x, y, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \psi_y(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\psi_x, \psi_y$  – углы наклона касательной к упругой поверхности вдоль оси  $x$ -ов и  $y$ -ов.

**Решение прямой задачи.** Определение прогиба  $w(x, y, t)$  пластины будем осуществлять для случая сосредоточенного нестационарного воздействия на пластину в точке  $(x_0, y_0)$  ее срединной плоскости. Нагрузка принимается в виде:

$$q(x, y, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), \quad (3)$$

где  $P(t)$  – функция нагрузки во времени (известная в случае рассмотрения прямой задачи; неизвестная – обратной задачи).

Форма решения неизвестной функции  $w(x, y, t)$  представляется в виде тригонометрических рядов по координатам  $x$  и  $y$  согласно принятой схемы закрепления пластины [4]. Укажем, что используется преобразования Лапласа по времени  $t$ .

Отметим, что для корректного перехода в пространство изображений, нулевые начальные условия (2) необходимо дополнить: нагрузка и ее первая производная должны быть равны нулю

$$q(x, y, 0) = 0; \quad \partial q(x, y, 0)/\partial t = 0,$$

что обеспечит равенства

$$\partial^2 w(x, y, 0)/\partial t^2 = 0; \quad \partial^3 w(x, y, 0)/\partial t^3 = 0.$$

В этом, по-видимому, и состоит неудобство получения решения уравнения (1) по сравнению с решением системы уравнений, о котором упоминает А.П. Филиппов в своей монографии [4]. Он указывает, что численно-аналитические методы решения волновых уравнений движения пластин «более удобны для получения решений /4/», чем на основе одного разрешающего уравнения, которым является уравнение (1). Здесь указанное «неудобство» преодолевается за счет принятых начальных значений для импульсного воздействия.

Выражение для искомой функции прогиба  $w(x, y, t)$ , которое получено на основе уравнения (1), имеет вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \int_0^t P(\tau) [\Omega_{1kn} \sin \omega_{1kn}(t - \tau) + \Omega_{2kn} \sin \omega_{2kn}(t - \tau)] d\tau \times \\ \times \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}. \quad (4)$$

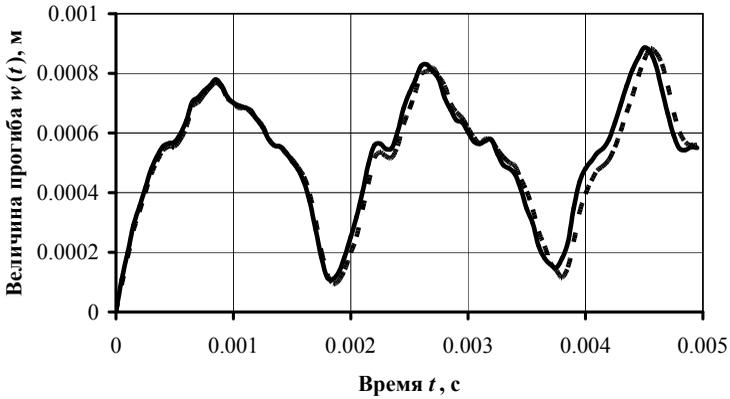
Здесь  $C_{kn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_0}{m}\right)$ ;  $a_1 = c_1^2 + c_2^2$ ;  $a_2 = \frac{\rho h}{D} \cdot c_1^2 c_2^2$ ;  
 $a_3 = c_1^2 c_2^2$ ;  $b_1 = \frac{1}{k'Gh} \frac{\rho I}{D} \cdot c_1^2 c_2^2$ ;  $b_2 = \frac{1}{D} \cdot c_1^2 c_2^2$ ;  $b_3 = \frac{1}{k'Gh} \cdot c_1^2 c_2^2$ ;  
 $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$ ;  $\Omega_{1kn} = \frac{b_2 + b_3 \cdot \lambda_{kn}^2 - b_1 \cdot \omega_1^2}{\omega_{1kn} \cdot (\omega_{2kn}^2 - \omega_{1kn}^2)}$ ;  $\Omega_{2kn} = \frac{b_2 + b_3 \cdot \lambda_{kn}^2 - b_1 \cdot \omega_2^2}{\omega_{2kn} \cdot (\omega_{1kn}^2 - \omega_{2kn}^2)}$ .

На основе полученного выражения (4) можно находить прогибы в пластине, воздействием сосредоточенных поперечных нагрузок, приложенных к ее срединной плоскости.

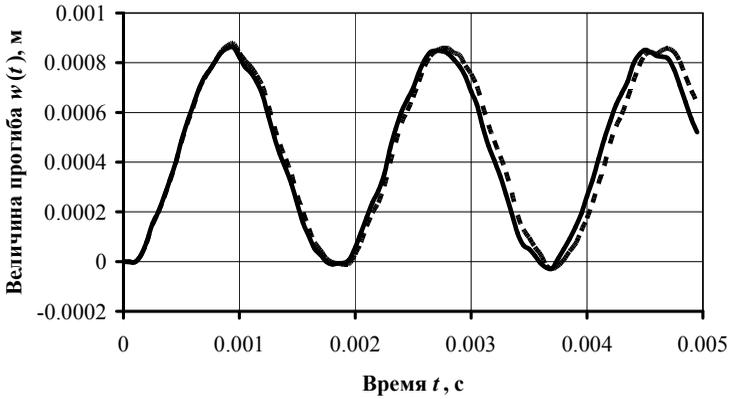
**Численные результаты.** Для численного расчета согласно формуле (4) принимаются следующие исходные данные:  $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$ ;  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $k' = 1$ ;  $h = 0.025 \text{ м}$ ;  $l = 0.6 \text{ м}$ ;  $m = 0.4 \text{ м}$ ; координаты приложения сосредоточенной силы  $x_0 = 0.4 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0.3 \text{ м}$ ;  $P(t) = P_0 \cdot H(t)$ , где  $P_0 = 10^5 \text{ Н}$  – интенсивность действующей нагрузки;  $H(t)$  – функция Хевисайда. Подчеркнем еще раз, что если рассматривается обратная задача, то  $P(t)$  – неизвестная функция.

Бесконечные суммы в выражении (4) при расчете были заменены суммами с конечным числом членов ряда Фурье, причем по независимым переменным  $x$  и  $y$  они принимались равными между собой (указанное число членов ряда выбиралось равное  $lim$ ). Отметим, что величина  $lim$  выбиралась в зависимости от практической сходимости соответствующих рядов при разложении исследуемых функций.

На рис. 2 показаны графики изменения прогиба  $w(t)$  во времени. На рис. 2, а представлены кривые, расчет которых проводился в точках с координатами  $x = 0.4 \text{ м}$ ,  $y = 0.3 \text{ м}$ , то есть непосредственно под нагрузкой; а на рис. 2, б –  $x = 0.3 \text{ м}$ ,  $y = 0.2 \text{ м}$ , то есть посередине пластины. Сплошными линиями представлены результаты расчета согласно выражению (4), пунктирными – результаты, приведенные в работе [5], в которой описано решение аналогичной прямой задачи по импульсному деформированию прямоугольной пластины на основе системы трех уравнений, содержащих функции  $w(x, y, t)$ ,  $\psi_x(x, y, t)$  и  $\psi_y(x, y, t)$ . Приведенное сравнение свидетельствует о достоверности полученного решения.



a



б

Рисунок 2 – Изменение прогиба пластины

**Результаты решения обратной задачи.** Соотношение (4) при заданной функции  $\bar{w}(t) = w(x_s, y_s, t)$  для конкретной точки  $(x_s, y_s)$  и искомой функции  $P(t)$  является интегральным линейным уравнением Вольтерра I рода, которое можно представить как

$$\bar{w}(t) = \int_0^t P(\tau)K(t - \tau)d\tau, \quad (5)$$

где  $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \cdot [\Omega_{1kn} \sin \omega_{1kn}(t) + \Omega_{2kn} \sin \omega_{2kn}(t)] \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m}$ .

Уравнение (5) будем решать посредством метода, основанного на введении сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [6]. Данный метод используется, поскольку рассматриваемое решение будет некорректным в силу свойств интегральных уравнений Вольтерра I рода.

В матричной форме СЛАУ, из которой находится приближенное решение уравнения (5), имеет вид [6]:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{w}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица, элементы которой  $a_{ij} = K[(i - j) \cdot \Delta t]$ ;  $\mathbf{A}^T$  – транспонированная к  $\mathbf{A}$  матрица;  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная матрица;  $\mathbf{p}$  – вектор, который соответствует искомой функции  $P(t)$ ;  $\mathbf{w}$  – вектор исходных данных.

Идентификация временной составляющей нагрузки  $P(t)$  выполняется на основе (6) при тех же численных значениях параметров, которые рассматривались в пункте 6 настоящей статьи, причем численные значения функции, отвечающей кривой представленной на рис. 3, являются исходными данными для восстановления нагрузки, воздействующей на пластину. Функция прогиба на рис. 3 отвечает функции  $P(t)$ , которая является полуволной синуса.

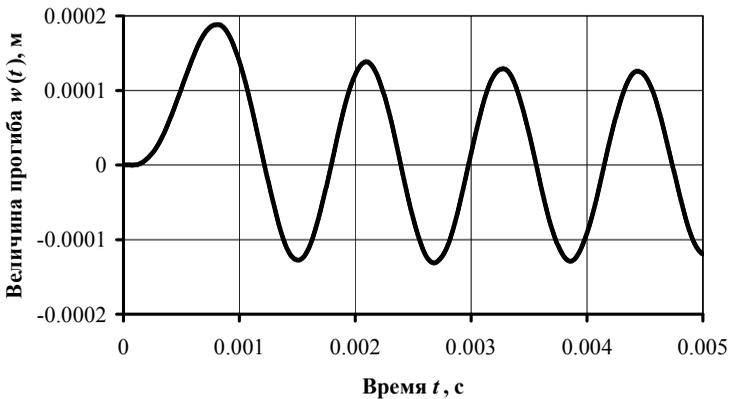


Рисунок 3 – Изменение прогиба во времени

На рис. 4 представлены кривые изменения нагрузки, идентифицированные по приведенным исходным данным (рис. 3). Причем, кривая 1 отвечает случаю, когда восстановление производилось при  $\alpha = 10^{-24}$ ; кривая 2 –  $\alpha = 10^{-25}$ ; кривая 3 –  $\alpha = 10^{-26}$  и кривая 4 –  $\alpha = 10^{-30}$ .

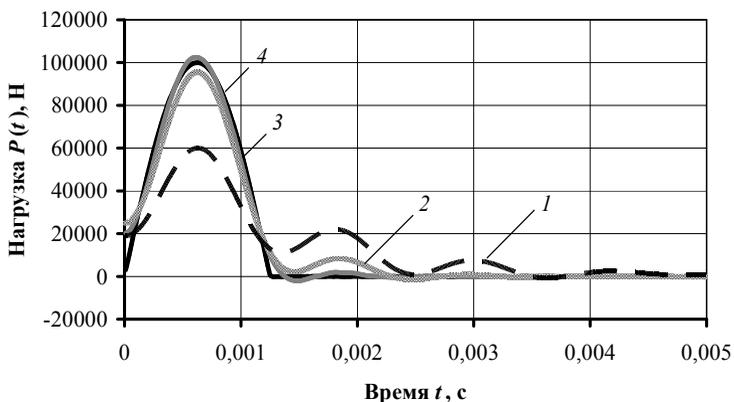


Рисунок 4 – Изменение нагрузки во времени

Все кривые с разной точностью хорошо аппроксимируют упомянутую нагрузку в виде полуволны синуса.

**Выводы.** Из приведенных результатов видно, что введение сглаживающего функционала А.Н. Тихонова позволяет получить устойчивое решение обратной задачи о восстановлении нестационарной нагрузки, действующей на пластину в случае рассмотрения решения одного волнового уравнения теории С.П. Тимошенко.

**Список литературы:** 1. Григолоук Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., 1973. – 272 с. 2. Успехи механики: в 6 т. / Под ред. А.Н.Гузя. – К., 2005-2009. 3. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Вороний А.В., Шараната А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Х., 2004. – 392 с. 4. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970. – 736 с. 5. Сметанкина Н.В., Угримов С.В., Шупіков О.М., Бузько Я.П. Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі // Вісник Харківського національного університету «ХП». Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. 2002. – № 19 – С. 68 – 72. 6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М., 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 22.03.2011

## ЗМІСТ

<i><b>АВТОНОМОВА Л. В.</b></i> Особливості аналізу електротермомеханічного стану потужнострумового з'єднання . . . . .	3
<i><b>БЄЛОВ І. С.</b></i> Про одну теорему У. Х. Янга . . . . .	9
<i><b>ВАНИН В. А., ГРИГОРЬЕВ А. А.</b></i> Моделирование сил взаимодействия частиц при упругопластическом расширении среды . . . . .	14
<i><b>ГАНДЕЛЬ Ю. В., ДУХОПЕЛЬНИКОВ С. В.</b></i> Математические модели для расчёта технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями в случае ТЕ-волн . . . . .	33
<i><b>ГРИГОРЬЕВ А. А., ДЕРИЕНКО А. И.</b></i> Моделирование гармонической волны переноса для связанных колебаний винтового стержня . . . . .	39
<i><b>ГРИГОРЬЕВ А. Л., ГЕВОРКЯН Ю. Л.</b></i> Гносеологические аспекты моделирования обменных колебаний в среде Максвелла и Коссера . . . . .	55
<i><b>ГРИНЁВ В. Б., ЯНЮТИН Е. Г., ГРИШАКИН В. Т.</b></i> Идентификация подвижного нагружения, действующего на вязко-упругую пластину на упругом основании . . . . .	69
<i><b>ДОБРОТВОРСКИЙ С. С., БАСОВА Е. В., РЕПЕТА А. А.</b></i> Перспективы применения вейвлет-анализа для обеспечения качества обрабатываемых поверхностей . . . . .	75
<i><b>ЗАВ'ЯЛОВ П. С., КУХТЕНКОВ Ю. М., ГРИШИН О. М.</b></i> Розрахунок втрат від осьового вихрового джгута у відсмоктуючій трубі радіально-осьової гідротурбіни. . . . .	83
<i><b>ІВАНІЦЬКАЯ О. П.</b></i> Про моделювання гідравлічних модулів з вертикальним гідравлічним циліндром . . . . .	89
<i><b>ІСАКОВ С. Н.</b></i> О методе расчёта высокочастотных структурносвязанных систем . . . . .	97
<i><b>КАЗАК О. В., СЕМКО А. Н.</b></i> Особенности электровихревого движения расплава в сталеплавильных печах постоянного тока с подовым электродом . . . . .	104

<b>КОШОВИЙ А. Г., ПУХЛЯР О. П., КОШОВИЙ Г. І.</b> Узагальнення континууму Серпінського: фрактальні килими зі змінною розмірністю Хаусдорфа . . . . .	117
<b>КУРПА Л. В., БУДНІКОВ М. А.</b> Дослідження нелінійних вимушених коливань багатошарових пластин складної форми . . . . .	124
<b>КУРПА Л. В., МАЗУР О. С., ТКАЧЕНКО В. В.</b> Параметричні коливання багатошарових пластин під дією періодичного навантаження . . . . .	134
<b>НАЗИРОВ З. Ф., ЧЕРЕМСЬКА Н. В., ЯНЦЕВИЧ А. А.</b> Про один клас неоднорідних випадкових полів . . . . .	146
<b>ПИРОТТИ Е. Л., ОТДЕЛЬНОВ В. А.</b> Математическое моделирование распределения электромагнитного поля за решёткой рассеивателей . . . . .	154
<b>СТЕПУК А. В.</b> Термоэлектродинамическая модель дизельного фильтра с СВЧ регенерацией . . . . .	160
<b>ТАРСИС Е. Ю.</b> Определение податливости поперечной стойки блока дизеля методом $R$ -функций . . . . .	166
<b>ФАТЄЄВА Н. М., ФАТЄЄВ О. М.</b> До питання динамічного розрахунку пневмоциліндрів з двостороннім управлінням . . . . .	171
<b>ШМАТКО А. В., МАЛЕЖИК А. В.</b> Математическое моделирование поведения сложных технических систем под воздействием внешних импульсов . . . . .	177
<b>ШМАТКО Т. В.</b> Исследования нелинейных свободных колебаний ортотропных пологих оболочек переменной толщины . . . . .	184
<b>ЯНЮТИН Е. Г., ВОРОПАЙ Н. И.</b> Исследование динамического деформирования пластины на основе одного волнового уравнения . . . . .	194

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК  
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
«Харківський політехнічний інститут»**

Тематичний випуск  
«Математичне моделювання в техніці та технологіях»  
Випуск 13

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. В.А.Ванін

Технічний редактор: С.Д.Нижник

Відповідальний за випуск: В. М. Луньова

Обл.вид. № 57-11

Підп. до друку 05.05.2011 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 10. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 3259. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, вул. Чичибабіна, 9

---