



ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«XIII»

69'2010

Харків

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХП»

Збірник наукових праць
Тематичний випуск

69'2010

«ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН»

Видання засновано Національним технічним університетом
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання
Свідцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

Голова: Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

Секретар: К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;	С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;	В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;	В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
Л.М.Бесов, д-р техн. наук, проф.;	Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;	В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;	О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;	В.І.Николасенко, канд. іст. наук, проф.;
А.І.Гرابченко, д-р техн. наук, проф.;	П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;	В.А.Пуляев, д-р техн. наук, проф.;
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;	М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;	В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;
В.В.Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.;	Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;	Ю.В.Тимофійев, д-р техн. наук, проф.;
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;	М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.
В.Б.Клепіков, д-р техн. наук, проф.;	

Харків 2010

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 69. – 179 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Відповідальний редактор: О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.

Відповідальний секретар: А.Г.Андреев, канд. техн. наук, доц.

К.В.Аврамов	д-р техн. наук, проф.
Є.Є.Александров	д-р техн. наук, проф.
Д.В.Бреславський	д-р техн. наук, проф.
Ю.С.Воробйов	д-р техн. наук, проф.
А.П.Зиньковський	д-р техн. наук, проф.
Л.В.Курпа	д-р техн. наук, проф.
Г.І.Львов	д-р техн. наук, проф.
Ю.В.Міхлін	д-р фіз.-мат. наук, проф.
М.А.Ткачук	д-р техн. наук, проф.
Ю.М.Шевченко	академік НАНУ, д-р техн. наук, проф.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».
Каф. ДММ, тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 10 від 26 листопада 2010 р.

ISSN 2078-9130

© Національний технічний університет «ХПІ»

Л.В.АВТОНОМОВА, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
Ю.П.АНАЦКИЙ, ст. инж., АО «УПЭК», Харьков;
А.В.СТЕПУК, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
Ю.М.ШМЫГАРЕВ, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., НТУ «ХПИ»;

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРУКТУРНОЙ СИСТЕМЫ КОРПУСА ДВС

Запропоновано підхід до динамічного аналізу складної структурної системи двигуна внутрішнього згоряння. На прикладі корпусу ДВС тепловоза досліджено вплив зміни геометрії на резонансні частоти і амплітуду коливань.

It is suggested an approach to dynamic analysis of complex structural systems of internal combustion engine. Influence of the varying geometry on the resonance frequency and amplitude of oscillation is investigated for a locomotive engine body sample.

Введение. При создании экономичных и надежных в эксплуатации ДВС на стадии конструкторского проектирования необходимы точные оценки степени оптимальности разработки. Особое значение в таких случаях приобретает виртуальное проектирование всей сложной функциональной системы, ее подсистем и отдельных составных частей оригинальных узлов, деталей и т.д.

Для полного прогноза состояния и поведения во времени такой сложной системы, прежде всего, требуется провести структурный анализ связанных подсистем. При анализе структуры важно выявить взаимосвязь между ее подсистемами и элементами, с учетом воздействия одного элемента на другой и характера их физического взаимодействия. Далее, необходимо провести функциональный анализ – теоретическое исследование системы, в рамках которого, каждая подсистема рассматривается исключительно с позиции ее внешнего аспекта, поскольку в иерархически организованных сложных системах сущность функций какого-либо элемента в подсистеме определяется не столько структурой этого элемента, сколько ролью его в структуре самой системы. Таким образом, прочностной и динамический анализ ее подструктур, элементов, имеющий многоуровневый характер, выполняется с целью выяснения влияния отдельных параметров на формирование исследуемых динамических характеристик системы.

В общем случае силы, действующие при работе двигателя на различных режимах, влияют, помимо прочностных свойств узлов и деталей, на уравновешенность двигателя, характер и амплитуду колебательных процессов, возникающие в механизмах. Так при расчете подсистем ДВС необходимо знать характер и амплитуды колебательных процессов для учета их влияния на прочность системы, уменьшения уровней вибрации ДВС с применением систем снижения активности источников вибрации, а также специальных технологических и конструкторских решений на стадии предварительного проектирования.

Постановка задачи. Динамический анализ ДВС обычно имеет многовариантный характер и позволяющий определить отдельные параметры, влияющие на формирование исследуемых динамических характеристик всей системы. Наиболее трудоемкие задачи анализа связаны с оценками напряженно-деформированного состояния при колебаниях, вызванных регулярными возмущениями. Такие оценки требуют многократного определения собственных частот и форм динамической модели, включая как ее подсистемы, так и отдельные элементы на каждом шаге вариации упруго-инерционных параметров. При этом, зависящие от времени нагрузки, нестационарные реакции механизмов (подсистем) в значительной степени усложняют динамический анализ крупногабаритных ДВС [1]. Для прогнозирования поведения и состояния этой системы используются традиционные методы анализа: расчет напряжений при статической нагрузке, анализ собственных колебаний, частотный отклик отдельных узлов и элементов, в том числе и для предотвращения появления усталостных трещин во всей конструкции ДВС, возникающих за счет вибрации отдельных ее элементов.

При проектировании проводятся многочисленные работы по снижению уровней вибрации ДВС посредством снижения активности источников вибрации, а также специальных технологических и конструкторских решений на стадии технического задания. При этом применение только традиционных виброизоляторов не позволяет решить проблему виброизоляции двигателей и требуется проведение предварительного динамического анализа его подсистем и элементов.

На примере оригинальной конструкции корпуса крупногабаритного ДВС рис. 1, возможные модификации которого очень различаются и включают разнообразные конструкционные элементы, проводился анализ структуры корпуса ДВС. Такой анализ позволил выявить взаимосвязь между его отдельными элементами при изменении их геометрии. Затем проводился предварительный динамический анализ корпуса, в результате чего находились решения, позволяющие сместить резонансный пик его амплитудно-частотных характеристик, уменьшая амплитуду вынужденных колебаний двигателя (системы) а также разгрузки в концентраторах напряжений для предотвращения разрушений в опасных областях и повышения динамической прочности системы в целом.

Метод решения. Использование численного метода МКЭ для динамического анализа ДВС, позволяет решать задачи определения собственных частот для упрощенных моделей, что может уже на предварительном этапе конструирования дать результаты, которые дадут возможность избежать изначальных прочностных ошибок проектирования ДВС. При этом следует отметить, что часто требуется применение новых, в том числе достаточно оригинальных моделей, для нахождения наилучших решений. Введение некоторых упрощений в сложную модель необходимо проводить так, чтобы это существенно не отразилось на адекватности реальному объекту.

Важным этапом выполнения анализа несущей способности конструкции (системы или подсистемы) является составление расчетной схемы. Как правило, на первом этапе вводится расчетная схема для укрупненного анализа и

оценки состояния конструкции, в общем. Далее на основе полученных данных осуществляется детальное моделирование прогнозируемых опасных зон по критериям динамической прочности.

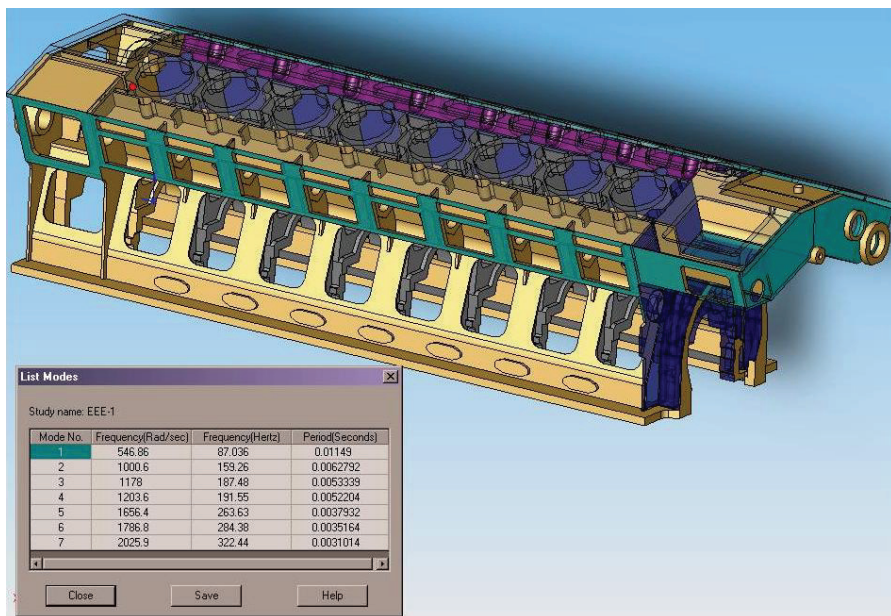


Рисунок 1 – Общий вид картера ДВС

В настоящей работе с помощью программы ANSYS на основе МКЭ было проведено моделирование корпуса ДВС и решение задачи определения собственных частот. Расчетная модель, имеющая около 90 000 степеней свободы, строилась при использовании предварительно подготовленной двухмерной модели корпуса в программе AutoCAD. При этом учитывалось, что упрощение модели для сокращения времени на ее подготовку можно проводить лишь до некоторого предела, чтобы точность расчета не повлияла на преимущества конечно-элементного подхода. Отдельные фрагменты модели характеризовались наличием сложной структуры пересечения поверхностей с наличием малых поверхностей, образующихся при наложении различных операций при моделировании. Это вызывало трудности генерации конечно-элементной сетки и необходимость в «огрублении» модели с удалением несущественных конструктивных элементов.

Не менее важной задачей подготовительного этапа является формирование поверхностей для последующего задания на них граничных условий. В данном исследовании, учитывая геометрическую сложность и крупные габариты (рис. 1) корпуса, была создана твердая модель, приближенно отвечающая натурному объекту, не искажая стратегию прочностного анализа и позволяющая прогнозировать опасные либо проблемные зоны.

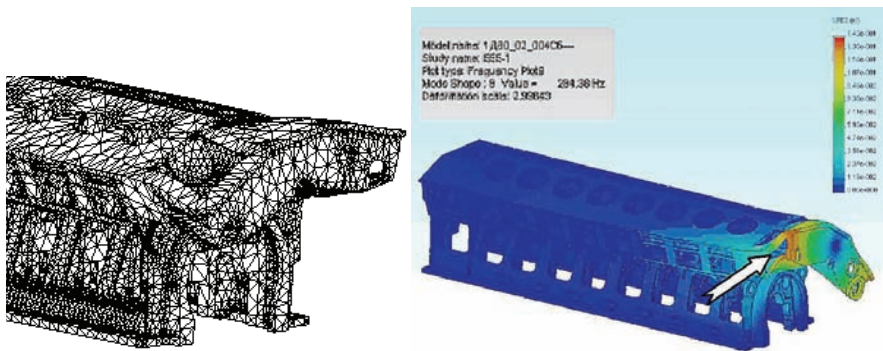


Рисунок 2 – Конечно-элементная сетка; 6-й гармоника колебаний

На следующем этапе каждый из набора связанных объемов разбивался генератором сетки на элементы гексаэдрической формы. После серии расчетных экспериментов в качестве основы была выбрана конечно элементная сетка со следующими параметрами: количество элементов – 189381; количество узлов – 373532. Фрагменты разбивки показаны на рис. 2.

В качестве оценочных параметров динамического поведения системы были выбраны частота резонансных колебаний, их модальная форма и величина максимальных относительных отклонений. При моделировании рассматривались также различные варианты конструкции подкрепляющих силовых элементов на корпусе, предназначенных для перераспределения зон распространения колебаний на другие участки корпуса.

Анализ результатов. В результате расчетов были построены амплитудно-частотные характеристики расчетной модели корпуса ДВС. В качестве примера на рис.2 показаны шестая гармоника колебаний корпуса со стороны наиболее опасного участка, в котором области развития трещин отмечены стрелкой. В указанной области были детально проанализированы вибрационные процессы с использованием локального сгущения конечно-элементной сетки. Результаты исследования форм колебаний, отвечающих нижней части спектра собственных частот корпуса двигателя, позволило установить совпадение зон повышенного возбуждения вибраций на корпусе для шестой формы колебаний (собственная частота 278 Гц) с наиболее выраженной областью трещинообразования в корпусе эксплуатируемого двигателя, что позволило сделать вывод о наибольшем риске разрушений именно при такой частоте

Полученные результаты затем сравнивались с экспериментальными [2,3] данными частотной диаграммы провода вала дизеля типа Д100 (рис. 3), геометрия которого подобна рассматриваемому в работе дизелю. В приведенных экспериментальных данных собственные частоты вала соответствуют 3200 кол/мин. При такой частоте в рабочем диапазоне частот вращения вала 400-850 об/мин в резонанс попадают гармоники моментов 4, 5, 6 и 7. В идеальном случае гармоника 6-го порядка не должна иметь пересечений с кривыми собственных частот (А и Б на рис. 3). Рассчитанная для корпуса ДВС, гармоника 6-го порядка собственной частоты – 278 Гц соответствует $278 \cdot 60/2\pi = 2656$

кол/мин, пересекает кривую Б собственных частот, что может приводить к разрушению узлов ДВС. Для предотвращения таких последствий необходимо принятие мер гашения таких колебаний с помощью силиконовых демпферов и иных механизмов поглощения колебаний.

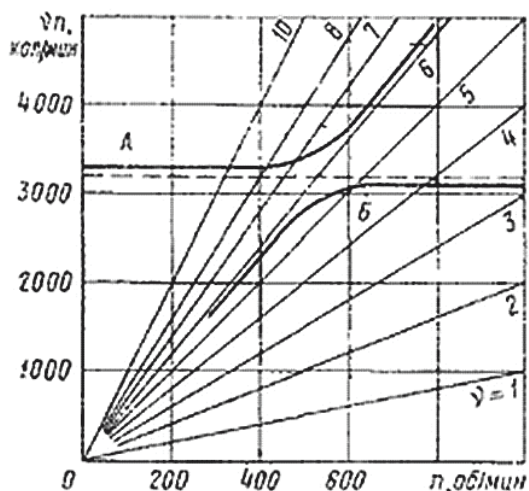


Рисунок 3 – Зависимость частоты гармонических составляющих вращающих моментов от частоты вращения вала дизеля Д100

В частности, альтернативным решением может быть усиление прочности в зонах интенсивных колебаний дополнительными механическими элементами, т.н. «косынками». Анализ такой усовершенствованной конструкции показал незначительное изменение резонансной частоты – до 284 Гц (рис. 2) при существенном сокращении (в 2 раза) относительных перемещений в опасных зонах. Это позволяет утверждать, что небольшое конструкционное дополнение снижает риск возникновения разрушений в концентраторах напряжений в несколько раз.

Выводы. При проектировании ДВС для снижения уровней вибрации целесообразно применение специальных технологических и конструкторских предложений уже на стадии технического задания.

Основными критериями анализа таких конструкций принимаются: расчет напряжений при статической нагрузке, анализ собственных колебаний и частотный отклик, относительные перемещения.

Полученные данные должны сравниваться с экспериментально полученными результатами, что позволяет, в дальнейшем, перейти к анализу долговечности.

Использование конечно-элементной модели показало высокую эффективность предлагаемой методики анализа динамического поведения корпуса ДВС.

Список литературы: 1. *Пильов В.О., Шеховцов А.Ф.* Двигуни внутрішнього згоряння: Серія підручників Т.4. Основи САПР ДВЗ. / За ред. *А.П. Марченка, А.Ф. Шеховцова.* – Харків, Прапор, 2004. – 336 с. 2. *Володин А.И.* Локомотивные двигатели внутреннего сгорания. – М.: Транспорт, 1990. – 256 с. 3. *Zunmin Geng, Jin Chen and J. Barry Hull,* Analysis of engine vibration and design of an applicable diagnosing approach // International Journal of Mechanical Sciences. – 2003. – Vol. 45, Issue 8. – PP. 1391-1410.

Поступила в редколлегию 03.11.2010

УДК 621.88

А.Г.АНДРЕЄВ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.В.ЩЕПКИН, наук. співр., НТУ «ХПІ»

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДЕЯКИХ ТИПІВ ПРОФІЛЬНИХ З'ЄДНАНЬ З НАТЯГОМ

Описана імітаційна модель, призначена для дослідження процесу складання конструкцій, які мають з'єднання з натягом, забезпечує виконання технологічних і міцностних вимог до конструкції. Контактна задача вирішується за допомогою ПК ANSYS. Результати наведені у вигляді таблиці та малюнків.

The created simulation model is intended for a research of assembly, ensures execution technological and strength of the requirements to a construction. Hertzian problem is solved by the program complex ANSYS. Results are given in the form of tables and drawings.

У сучасному машинобудуванні для установки деталей на валах з можливістю передачі крутного моменту застосовуються шліцові та шпоночні з'єднання. Такі з'єднання є недостатньо зносостійкими, трудомісткими, нетехнологічними в виготовленні. Намагання усунути ці недоліки призвело до появи профільних безшпоночних конструкцій, які використовують вали некруглого поперечного перерізу, які з'єднуються з натягом із втулкою відповідної форми. Такі з'єднання застосовуються для виготовлення складних зубчастих, черв'ячних та локомотивних коліс, колінчатих валів, з'єднання зубчастих коліс з валами, для посадки підшипників коливання на вал, роторів електродвигунів та ін. З'єднання з натягом відносять до нероз'ємних, хоча вони займають проміжне положення між роз'ємними та нероз'ємними. Ці з'єднання можна розбирати без зруйнування деталей, однак повторне їх складання не завжди забезпечує надійність з'єднання.

Профільні з'єднання є високонадійними та дозволяють передавати значні осьові зусилля та крутячі моменти. Вони прості за конструкцією та технологією виготовлення (немає проміжних деталей, добре базування у процесі складання), але потребують високої точності виготовлення. Існують такі основні способи складання деталей при посадках з натягом: 1) складання під пресом за рахунок його осьового зусилля при нормальній температурі, так зване поздовжнє запресування; 2) складання з попереднім розігрівом охоплюючої деталі (втулка) і (або) охолодженням охоплюваної деталі (вал) до визначеної темпе-

ратури (спосіб термічних деформацій, або поперечне запресування).

Дана робота присвячена дослідженню напружено-деформованого стану посадки з натягом втулок однакових зовнішніх розмірів на вали різної форми.

Характеристики матеріалу конструкції: модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; межа пластичності $\sigma_{ПС} = 350$ МПа. Для розрахунків застосований програмний комплекс ANSYS з використанням об'ємних елементів SOLID45, цільових TARGE170 і контактних CONTA174.

З'єднання вала еліптичної форми і круглої втулки з еліптичним отвором (див. рис. 1): $a = 138$ мм; $b = 110$ мм; $r = 110$ мм; натяг $\Delta = 0,12$ мм; довжина втулки $l_{вт} = 100$ мм; вала – $l_{вал} = 300$ мм. Розподіл переміщень $u_{сум}$ і еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$ у з'єднанні показаний на рис. 3.

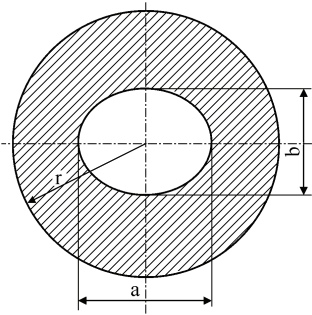


Рисунок 1 – Вал еліптичної форми і кругла втулка з еліптичним отвором

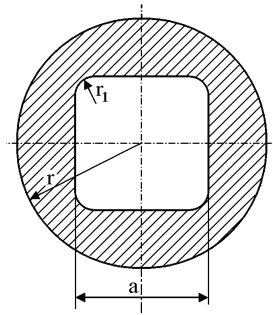
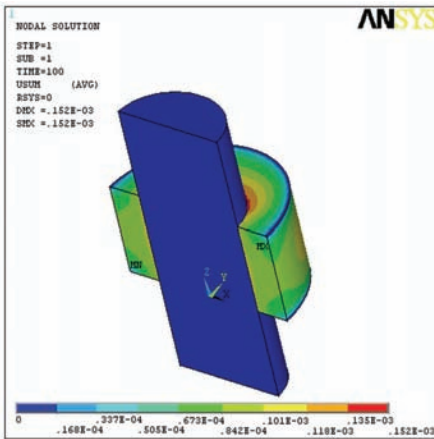
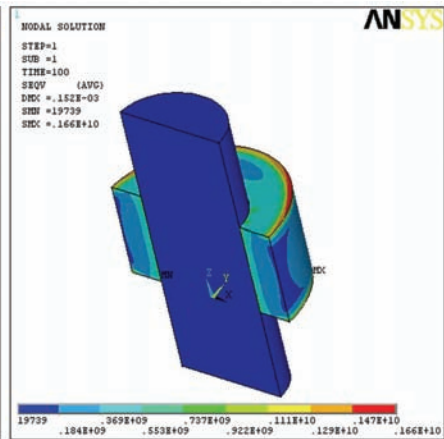


Рисунок 2 – Вал квадратної форми і втулка з квадратним отвором

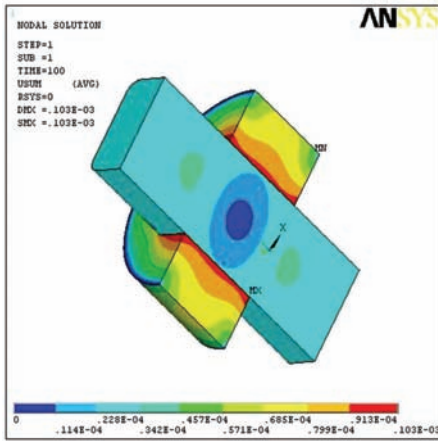


a

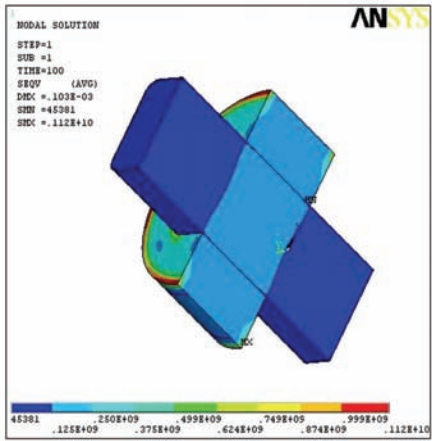


б

Рисунок 3 – Розподіл переміщень $u_{сум}$ (*a*) і еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$ (*б*) у з'єднанні вала еліптичної форми і втулки з еліптичним отвором



а



б

Рисунок 4 – Розподіл переміщень $u_{сум}$ (а) і еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$ (б) у з’єднанні вала квадратної форми і втулки з квадратним отвором

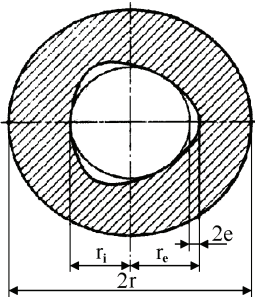


Рисунок 5 – Схема з’єднання вала у вигляді криволінійного трикутника і круглої втулки з отвором у вигляді криволінійного трикутника

З’єднання вала квадратної форми і круглої втулки з квадратним отвором (див. рис. 2): $a = 103$ мм; $r = 110$ мм; $r_1 = 14$ мм; натяг $\Delta = 0,12$ мм; довжина втулки $l_{вт} = 100$ мм; вала – $l_{вал} = 300$ мм. Розподіл переміщень $u_{сум}$ і еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$ у з’єднанні показаний на рис. 4.

Схема з’єднання вала у вигляді криволінійного трикутника і круглої втулки з отвором у вигляді криволінійного трикутника показано на рис. 5: $r_1 = 54$ мм; $r_c = 66$ мм; $r = 110$ мм; $e = 6$ мм; натяг $\Delta = 0,12$ мм; довжина втулки $l_{вт} = 100$ мм; вала – $l_{вал} = 300$ мм. Розподіл переміщень $u_{сум}$ і еквівалентних напружень $\sigma_{екв}$ у з’єднанні показаний на рис. 6.

Форма поперечного перерізу вала	Максимальний контактний тиск P , МПа	Максимальне еквівалентне напруження у втулці у зоні контакту σ_e , МПа	Максимальне окружне напруження у втулці у зоні контакту σ_θ , МПа
Циліндричний	138	356	267
Еліптичний	172	401	287
Квадратний	197	442	311
Трикутний	177	407	289

В таблиці приведені дані про напружено-деформований стан досліджених профільних з'єднань і з'єднання втулки з валом циліндричної форми з радіусом $r = 62$ мм; натяг $\Delta = 0,12$ мм.

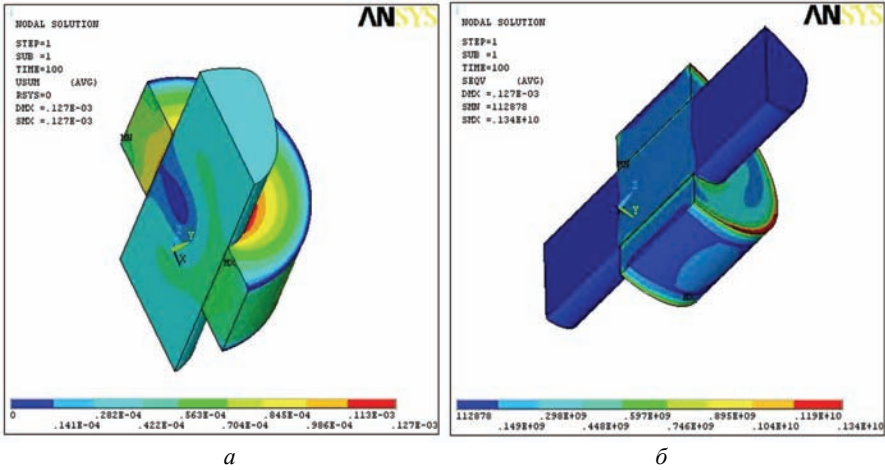


Рисунок 6 – Розподіл переміщень $u_{\text{сум}}$ (а) і еквівалентних напружень $\sigma_{\text{екв}}$ (б) у з'єднанні вала трикутної форми і втулки з трикутним отвором

Отримані результати дають можливість провести порівнювальний аналіз переваг та недоліків профільних з'єднань різної форми і можуть бути використані при застосуванні подібних видів з'єднань.

Список літератури: 1. Берникер Е.И. Посадки с натягом в машиностроении. – М., Л.: Машиностроение, 1968. 2. Антипин П.К. Определение посадочных напряжений в деталях при бесшпоночном соединении некруглых валов с втулками // Вестник машиностроения. – М.: Наука, 1964. – № 7. – С. 40-42. 3. Борович Л.С. Бесшпоночное соединение деталей машин. – М.: Mashgiz, 1961. 4. Перин А.П., Андреев А.Г. Расчет посадок с натягом при овальности и эксцентриситете соединенных деталей на основе ПК ANSYS // Вісник НТУ «ХП». Збірник наукових робіт. Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – 2007. – № 38. – С. 117-123. 5. Балацкий Л.Т. Прочность прессовых соединений. – Киев: Техника, 1982. – 151 с. 6. Басов К.А. ANSYS в примерах и задачах. – М.: Компьютер Пресс, 2002. – 224 с. 7. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров: Справ. пособие. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 512 с. 8. Басов К.А. Графический интерфейс комплекса ANSYS. – М.: ДМК Пресс, 2006. – 248 с.

Надійшла до редколегії 01.11.2010.

Н.В.БАБКОВА, асп., НТУ «ХПИ»;
И.В.ГАЛУЩАК, ст. преп., НТУ «ХПИ»;
В.Я.ГОРБАТЕНКО, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.М.НИКИТИН, ст. преп., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВОГО ПОТОКА В ОБЛАСТИ ОРЕБРЕНИЯ ТРУБЫ

Приведено спосіб комбінованого функціонального моделювання з одним модельним параметром. Розроблена і випробувана модельна метода що до вилучення величин модельного параметру у реальних конструкціях на двох паралельних моделях. Показана можливість відслідкування величини модельного параметру та його розбіг на реальних діапазонах конструктивних розмірів елементів оребрення.

The mode of combined functional simulation with one parameter is reduced. The procedure of obtaining of the model parameter values to actual constructions on two parallel models designed and tested. Possibility of watching of the model value parameter and her dispersion on actual gamut's of constructive sizes of ribbing units is shown.

Разработка теплообменного оборудования паровых котлов связана с использованием спирально-оребрённых поверхностей нагрева с разрезанными ребрами. Существующие рекомендации по выбору конструктивных параметров подобного оребрения не позволяют достигать необходимой эффективности процесса теплообмена [1]. Это и стало одной из главных причин появления данной публикации.

Численное моделирование технологических процессов актуально при экспериментальных исследованиях, оптимизации параметров технологических элементов и конструкций. В то же время, тщательно обоснованный численный эксперимент существенно ускоряет и удешевляет сам процесс разработок. Эффективными оказываются модели, построенные таким образом, чтобы дискретная модель отражала состояние наиболее информативных и напряженных элементов исследуемого процесса. Адекватность моделирования можно оценивать по результатам нескольких (хотя бы двух) численных моделей или результатам численного и физического эксперимента.

Настоящая публикация представляет авторскую разработку комбинированной модели процесса передачи тепла от греющих газов к тепловоспринимающим поверхностям в элементах теплоэнергетических установок, использующих поверхности нагрева с разрезанным спирально-ленточным оребрением.

1 Постановка задачи. Основной задачей выполняемой работы является построение модельного пространства на основании двух разнородных моделей обтекания и получение характерных величин для эквивалентных потоков греющих газов в элементах теплоэнергетических установок.

В данной работе авторами реализован способ определения расчетных зависимостей для получения величины параметра, соответствующего характерному размеру плоского канала, основанный на определении чисел $Re = V_{\infty}L/\nu$

[2] по модельным размерам L задачи. Это позволило моделировать сложное течение газа в пространстве между соседними параллельными поверхностями орebrения, как течение в плоских каналах и как обтекание плоских пластинчатых элементов. Согласно формулировке выделенной задачи можно предложить пошаговую последовательность ее решения.

2 Модель плоского канала. Эскиз трубы со спирально-орebrенной поверхностью нагрева с разрезанными ребрами приведен на рис. 1, а. Можно ожидать, что при тепловом симметричном нагружении производная $\frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} \approx 0$, что соответствует малым тепловым потокам вдоль оси аппликат, $z=0, 5 \cdot s, b$.

кат, тогда расчетная область принимает вид рис. 1, б.

Для лепестка, как граничного элемента пространства движения газов, процесс теплоотдачи от газов к поверхности лепестка обусловлен состоянием некоторого объема в потоке газа [3]. На рис. 1, б этот объем выделен, как часть пространства между соседними лепестками.

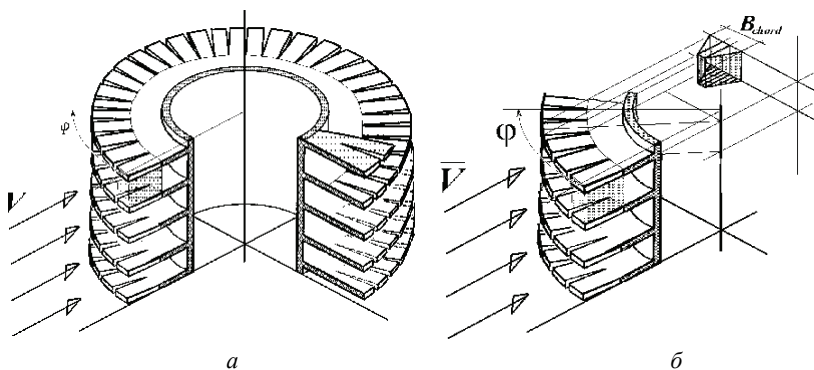


Рисунок 1 – Объем потока между лепестками и его отображение на плоскость YZ

Объем пространства, занимаемого потоком, в щели между соседними лепестками $V = H \cdot B \cdot \Delta = \text{const}$. Проходная площадь в просвете определяется: $S = V/B_{chord}$. Искомый эквивалентный размер задачи [4]: $L = 4S/\chi$, χ – эквивалент смоченного периметра для канала $\chi = 2(\Delta + B_{chord})$.

В таком случае $L = \frac{2V}{\left(\Delta \cdot B_{chord} + B_{chord}^2\right)}$, Δ – величина просвета в контрольном газовом объеме, B_{chord} – размер проекции исследуемого объема на ординату, перпендикулярную плоскости, проходящей через ось трубы и направление движения газового потока.

Очевидно, для произвольного положения выделяемого объема относительно системы координат $B_{chord} = B \cos(\varphi) + H \sin(\varphi)$ – ширина перекрытия потока. Считая самым большим размером $H \gg B, \Delta$, введем параметры выде-

ляемого объема $\sigma_{\Delta} = \Delta/H$ и $\sigma_B = B/H$.

Тогда величину эквивалентного размера в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, можно представить как функцию относительных параметров:

$$L(H, \sigma_{\Delta}, \sigma_B, \varphi) = \frac{2V}{\left[H^2 (\sigma_{\Delta} + \sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) (\sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \right]}$$

и далее:

$$L(\Delta, \sigma_{\Delta}, \sigma_B, \varphi) = \frac{2\Delta\sigma_B}{\left[(\sigma_{\Delta} + \sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) (\sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \right]} \quad (1)$$

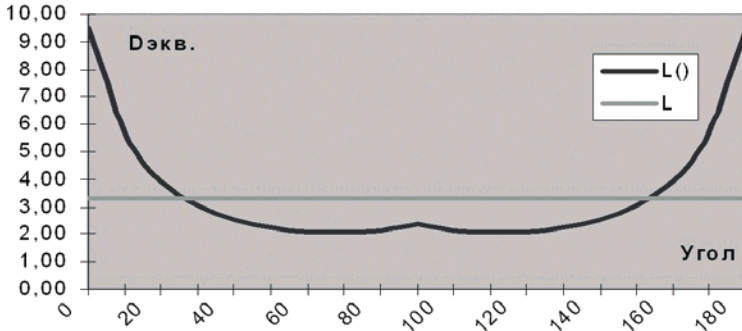


Рисунок 2 – Вид функции (1) и эквивалентный диаметр (2) модельного канала для оребрения: $\Delta = 4$ мм; $B = 4$ мм и $H = 9,5$ мм. $L_{cp}^{*1} = 3,45$ мм

Средний по полувитку оребренного элемента характерный размер в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$ определим по теореме о среднем

$$L_s = \frac{2\Delta\sigma_B}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\left[(\sigma_{\Delta} + \sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) (\sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \right]} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\varphi}{\left[(\sigma_{\Delta} + \sin(\varphi) - \sigma_B \cos(\varphi)) (\sin(\varphi) - \sigma_B \cos(\varphi)) \right]} \right\} \quad (2)$$

На рис. 2 показаны характерное распределение эквивалентного диаметра плоского канала, соответствующего выражению (1), и среднеинтегральное его значение согласно (2). Отметим, что в предложенных модельных зависимостях присутствуют все параметры лепестка и оребрения: шаг оребрения – S , длина – H , ширина – B , толщина – $\delta = S - \Delta$. Кроме того, на данном этапе моделирования остается открытым вопрос о соответствии понятия эквивалентного диаметра в полуоткрытом пространстве выделенного объема потока. Поэтому модель потока в данном исполнении считаем лишь качественной

3 Модель обтекания. Рассмотрим тепловоспринимающую поверхность лепестка оребрения. Очевидно, плоскость лепестка играет главную роль в этом процессе, и определяется как $S = B \cdot H = \text{const}$ – величина площади по-

верхности лепестка. В интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ проекция лепестка, зависит от угла φ в виде трапеции с основаниями: $B_{chord} = B \cos(\varphi) + H \sin(\varphi)$ и $B_{chord}^* = H \sin(\varphi) - B \cos(\varphi)$. Средняя длина линии тока получится при делении площади трапеции на длину ее нижнего основания $L(\varphi) = S/B_{chord}$ или $L(\varphi) = \frac{S}{B \cos(\varphi) + H \sin(\varphi)}$, что во введенных относительных параметрах для модели канала.

$$L(\varphi) = \frac{B}{\sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)}. \quad (3)$$

Средний по полувитку оребренного элемента характерный размер в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$ определим по теореме о среднем

$$L_{\text{л}}^* = \frac{B}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sigma_B \cos(\varphi) + \sin(\varphi)} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin(\varphi) - \sigma_B \cos(\varphi)} \right\}. \quad (4)$$

Отметим, что в (4) параметрически участвуют только H и B , вариации остальными параметрами оребрения могут оказаться недоступными при дальнейшем использовании только модели обтекания.

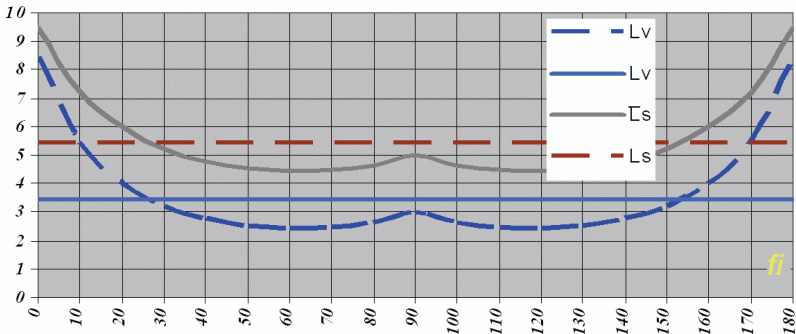


Рисунок 3 – Результаты получены двумя способами для канала $\Delta = 4$ мм; $B = 4$ мм и $H = 9,5$ мм. Средние значения: $L_{cp1}^* = 3,45$ мм, $L_{cp2}^* = 5,39$ мм

На рис. 3 показаны качественные распределения характерных размеров для течений по обеим моделям.

4 Тестирование моделей. Настоящий этап располагает двумя качественными моделями, которые для $\varphi = \pi/2$ показывают возможность локального максимума, соответствующего положению лепестка перпендикулярно направлению потока. Вид модельных построений (1 и 3) позволяет предположить для модели канала $L_k(\pi/2) \approx \Delta$, а для модели обтекания $L_0(\pi/2) = B$. Коррекция обеих моделей в указанной точке согласует результаты, по обеим вариантам моделирования.

На рис. 4 показаны результаты моделирования характерных размеров по-

тока в диапазоне изменения длины лепестка $6,5 \leq H \leq 11,5$ мм и относительный разбег модельных значений в пределах тестового диапазона.

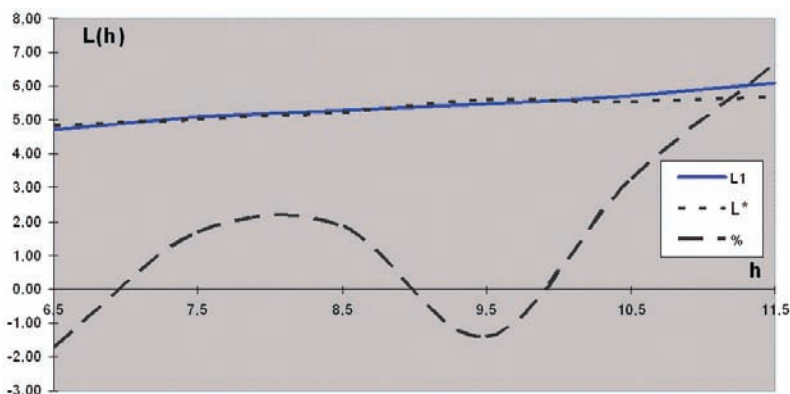


Рисунок 4 – Моделирование для $\Delta = 4$ мм; $B = 4$ мм и $6,5 \leq H \leq 11,5$ мм, пунктир показывает относительный разброс модельных значений в процентах

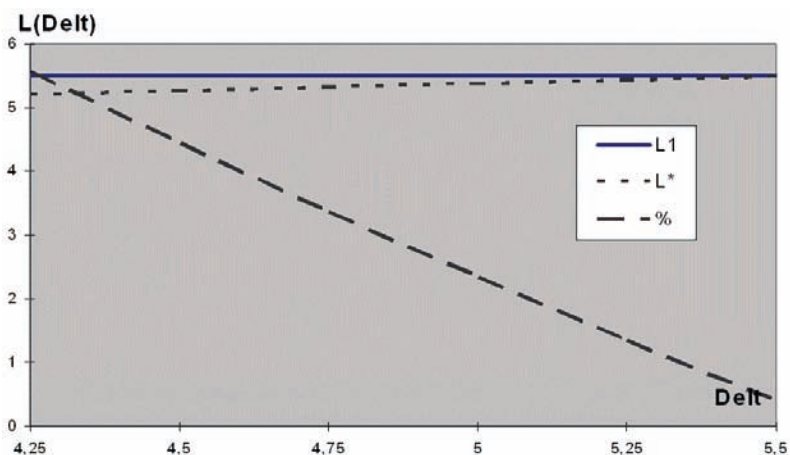


Рисунок 5 – Результат моделирования для $4,25 \leq \Delta \leq 5,5$ мм; $B = 4$ мм и $H = 9,5$ мм

На рис. 5 показаны результаты моделирования характерных размеров потока в диапазоне изменения длины лепестка $4,25 \leq \Delta \leq 5,5$ мм и относительный разбег модельных значений в пределах тестового диапазона.

Подтверждение применимости построенных моделей и окончательная коррекция возможно следующими способами:

- проведением экспериментальных исследований, хотя бы в пределах приведенных диапазонов параметров оребрения,
- численным экспериментом для всего процесса передачи тепла от греющих газов к рабочему телу и экспериментальной проверкой для

- численным экспериментом для передачи тепла от греющих газов к рабочему телу для реализованных типов устройств с опубликованными характеристиками, использующих оребренные поверхности теплообмена.

5 Моделирование процессов конвективного теплообмена. В данной работе авторами реализован [1] способ определения расчетных зависимостей для коэффициентов теплоотдачи на тепловоспринимающие поверхности оребрения основанный на определении чисел Re по усредненным размерам линий тока. Это позволило моделировать сложное течение газа в пространстве между соседними ребрами, как течение в плоском канале заданной толщины.

В связи с этим введены три дополнительные параметра модели, представляющие собой значения эквивалентных размеров для каждого канала. Подобный подход использован в [4], где в качестве определяющего размера эквивалентного канала использована длина линии тока на участке исследования. Для этого варианта модели существенно упрощается вычислительный процесс потому, что для всех трех эквивалентных течений использовалась один и тот же вид описания процесса теплоотдачи со стороны газов, изменялись только значения определяющих размеров L_i , $i = 1, 2, 3$. Одновременно значения чисел Рейнольдса получаются

$$\text{Re}_{gi} = \frac{w_g L_i}{\nu_g}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Выпишем выражения для коэффициентов теплоотдачи всех границ модельной области. Так, коэффициент теплоотдачи от газов ко всем поверхностям лепестка оребрения принимается равным α_1 , к поверхности кольца оребрения – α_2 , к неоребренной поверхности трубы – α_3 , при этом:

$$\alpha_i = 0,66 \frac{\lambda_g}{L_i} \text{Re}_g^{0,5} \text{Pr}_g^{0,33}, \quad \text{Re} < 40000, \quad (5)$$

$$\alpha_i = 0,037 \frac{\lambda_g}{L_i} \text{Re}_g^{0,8} \text{Pr}_g^{0,43}, \quad \text{Re} \geq 40000, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Выводы

На приведенных тестах показана возможность применения использованного подхода к задаче моделирования параметров сложного потока на функциональном уровне с одним модельным параметром L . В диапазонах измерения реальных размеров оребрения $4,25 \leq \Delta \leq 5,5$ и $6,5 \leq H \leq 11,5$ мм модельный разброс не превышал 8 %, а в сравнении со значениями, полученными графическим методом – 5 %.

Можно отметить, что модель канала предоставляет более широкие возможности для моделирования параметров оребрения, в сравнении с моделью обтекания. Поэтому в большинстве случаев может оказаться предпочтительной.

Аналогично, применение изложенного подхода реализует моделирование потока для неразрезанной части оребрения, с целью привести к использованию однотипных моделей в задачах для обтекания сложных комбинированных поверхностей. Граничные условия получают более простые выражения и рас-

предела температур в материале трубы не зависят от положения разреза (продольный или поперечный) относительно оси трубы. Такой подход может существенно упростить реализацию численного решения для задач теплообмена.

Полученные результаты позволяют сравнивать течение теплоносителя в различных конфигурациях ребренных экранов и позволяют использовать их в задачах, связанных с теплообменом между потоком и тепловоспринимающей поверхностью сложной формы.

Унифицированные выражения (5,6) существенно упрощают алгоритмы вычисления граничных значений для условий теплоотдачи на границе греющие газы – тепловоспринимающие ребренные поверхности.

Список литературы: 1. Филитов Э.Б., Черепенников Г.Б., Лещенко Т.Г. Метод численного исследования тепловой эффективности трубчатой поверхности нагрева с поперечно-лепестковым ребрением // Теплоэнергетика. – 2006. – № 6. – С. 36-40. 2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: «Наука», 1978. – 736 с. 3. Л. Л. Товажнянский, А.М. Никитин и др. Исследование гидродинамики турбулентных потоков в моделях: каналов пластинчатых теплообменников // ХПИ, Тез. докл. Всес. конф. «Повышение эффективности, совершенствование процессов и аппаратов хим. Производства». – Харьков: 1985. – Т. 3. 4. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред.чл.-корр. АН СССР В.А. Григорьева, В. М. Зорина. – 2-е изд., перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с.

Поступила в редколлегию 11.11.2010.

УДК 539.3

Е.О.БЕЗДЕТКО, инж. I кат., НТУ «ХПИ»;
А.А.ОСЕТРОВ, асс., НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ RfM К ЗАДАЧАМ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН С РАЗРЕЗАМИ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Розглядаються задачі про власні коливання тонких пластин, що містять розрізи та мають різні види граничних умов. Математична модель задачі уявляє собою диференціальне рівняння четвертого порядку відносно прогину. Розв'язок поставленої задачі виконується варіаційно-структурним методом. Для побудови базисних функцій, які враховують розріз пластини, розташований в середині області, використано структури спеціального виду. При цьому апроксимація невизначених компонент виконується за допомогою степеневих поліномів, а також сплайнів. Отримано чисельні результати для квадратних вільно опертих та жорстко закріплених пластин з вертикальним розрізом, які добре узгоджуються з відомими в літературі. В роботі також наведено форми та частоти коливань квадратних пластин з прямокутним нахиленим розрізом. Побудовані структури розв'язків можуть бути використані для криволінійних розрізів, будь-якої геометрії пластини та різних видів крайових умов.

Eigenfunctions and eigenvalues of thin plates with cuts and different boundary conditions are being investigated. The governing equations for plates are differential equations of the fourth order constructed relatively to deflection. The given problem is solved by variation-structural method. Special types of structures are used to build basic functions taking internal cuts in account. Here the approximation of undefined components is performed using power polynomials and splines. Obtained numerical results for

simply supported and clamped square plates with the vertical cut have a good agreement with known in literature. Also results for eigenvalues and eigenforms of square plates with slope cut are presented. The constructed solution structures can be used for curvilinear cuts, different geometrical forms and boundary conditions of plates.

Задача о колебаниях тонких пластин привлекает внимание многих авторов, поскольку элементы конструкций, моделируемые пластинами, часто используются на практике. Влияние граничных условий на частоту колебаний пластины достаточно полно обсуждалось в литературе. Однако задаче о колебаниях пластины с разрезом посвящено лишь небольшое количество работ. В то же время, решение такой задачи является важным, поскольку разрезы можно рассматривать как первое приближение открытых трещин, которые действительно могут появиться в процессе эксплуатации конструкции.

В настоящей работе предлагается подход к решению задач о колебаниях пластин с разрезами, основанный на методе R-функций [2].

1 Математическая постановка. Рассмотрим однородную тонкую пластину постоянной толщины h . Дифференциальное уравнение движения колеблющейся тонкой пластины, полученное в рамках классической теории имеет вид [8]:

$$\nabla^4 W - \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где ρh – масса пластины, отнесенная к единице поверхности.

Для защемленной пластины уравнение (1) дополняется следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} W = 0, & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial W}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

где n – внешняя нормаль к контуру пластины $\partial\Omega$, а для свободно опертой пластины – граничными условиями:

$$\begin{cases} W = 0, & x \in \partial\Omega \\ \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \left(\frac{1 - \nu_0^2}{\rho_0} \right) \frac{\partial W}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

где τ – касательная к контуру пластины $\partial\Omega$, ρ_0 – радиус кривизны границы, а ν_0 – коэффициент Пуассона.

2 Метод решения. В соответствии с методом Ритца, задача о свободных поперечных колебаниях тонкой пластины постоянной толщины h сводится к нахождению минимума следующего функционала:

$$\begin{aligned} J(W) = & \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \partial\Omega - \\ & - \frac{\lambda^2 \rho h}{2} \iint_{\Omega} W^2 \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

на множестве координатных функций [3], удовлетворяющих по крайней мере кинематическим граничным условиям. При этом способ построения системы базисных функций зависит от вида заделки пластины на границе. Согласно методу R-функций [2], структуры решения краевых задач (1)-(2) и (1)-(3) имеют следующий вид:

1. Для защемленной пластины:

$$W = \omega^2 \Phi; \quad (5)$$

2. Для свободно опертой пластины:

$$W = \omega \Phi, \quad (6)$$

где $\omega = 0$ – уравнение границы области, Φ – неопределенная компонента структуры решения.

В случае если пластина содержит разрез $l = 0$, структуры решения (5) и (6) уже не будут обладать свойством полноты [4]. Для учета того факта, что аппроксимируемое решение по разные стороны от разреза ведет себя, вообще говоря, независимо, в [4] была предложена следующая структура решения краевой задачи (1)-(2):

$$W = \omega^2 [q_1(x, y)\Phi_1 + q_2(x, y)\Phi_2], \quad (7)$$

где Φ_1 и Φ_2 – неопределенные компоненты, q_1 и q_2 – функции, которые при подходе к разрезу по нормали с одной его стороны стремятся к нулю, а при подходе с другой – к 1:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}(1 + D_1^{(l)}\omega_r) \\ q_2 = \frac{1}{2}(1 - D_1^{(l)}\omega_r) \end{cases} \quad (8)$$

Здесь оператор $D_1^{(l)}\omega_r = \frac{\partial \omega_r}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial \omega_r}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial y}$ [2], $l = 0$ – уравнение линии, со-

державшей разрез $\omega_r = 0$, при этом знак l меняется при переходе через линию $l = 0$.

Для задачи (1)-(3) предлагается использовать такую структуру решения:

$$W = \omega [q_1(x, y)\Phi_1 + q_2(x, y)\Phi_2]. \quad (9)$$

Заметим, что $\omega = 0$ здесь, как и в формулах (5), (6) – это уравнение границы области без разреза; $\omega_r = 0$ – уравнение разреза, которое используется при построении функций q_1 и q_2 . В [4] доказана теорема о том, что построенные с помощью структур (7), (9) последовательности координатных функций удовлетворяют главным краевым условиям задачи и образуют полную систему. С помощью этих структур в [4] решена задача изгиба тонкой пластины, содержащей разрез. В настоящей работе нами рассматривается задача о колебаниях такой пластины.

3 Численные результаты. Рассмотрим тонкую пластину квадратной формы, а) жестко защемленную по контуру и б) свободно опертую по контуру. Для свободно опертой пластины известно точное решение задачи о колебаниях, а для защемленной – приближенные решения, например, решение, полученное методом рядов [8]. Для сравнения решим эти задачи методом R-функций, используя полные структуры решений (5) и (6) соответственно. Не-

определенную компоненту Φ будем аппроксимировать полиномами (степень полинома $N = 10$) и сплайнами (сетка сплайнов 16×16). В табл. 1, 2 приведены значения безразмерного частотного параметра Λ_i для первых четырех частот квадратной пластины с различными способами заделки.

$$\Lambda_i = a^2 \lambda_i \sqrt{\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}},$$

где λ_i – i -я частота колебаний пластины, a – характерный размер, ρ – плотность материала, из которого сделана пластина, h – ее толщина.

Проведем исследование свободных колебаний тонкой пластины квадратной формы, содержащей разрез, расположенный по центру параллельно одной из сторон (рис. 1). Для такой задачи неизвестно точное решение, однако она решена приближенно с помощью МКЭ [1]. Решим эту задачу методом R-функций.

Таблица 1 – Безразмерные частотные параметры квадратной жестко заземленной пластины

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Метод рядов [8]	35,985	73,40	73,40	108,22
RFM + pol, $N = 10$	36,0	73,4	73,4	108
RFM + spl, сетка 16×16	35,98	73,39	73,39	108,2

Таблица 2 – Безразмерные частотные параметры квадратной свободно опертой пластины

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Точное решение [8]	19,739	49,348	49,348	78,957
RFM + pol, $N = 10$	19,7	49,3	49,3	79,0
RFM + spl, сетка 16×16	19,74	49,35	49,35	78,96

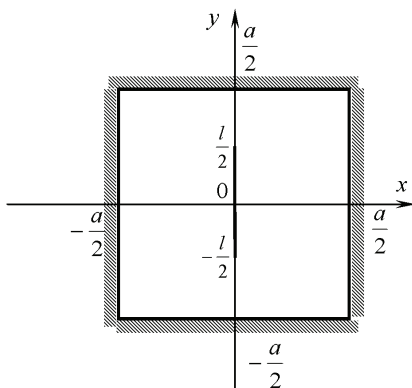


Рисунок 1

Отношение стороны квадрата к длине разреза принято равным $l/a = 0,5$. Условия закрепления на краях пластины – жесткое защемление, разрез сво-

бодный. Для этой задачи уравнение линии l , содержащей разрез – это уравнение оси y , то есть $l \equiv x$. Значит, $D_1^{(l)}\omega_r = \frac{\partial\omega_r}{\partial x}$ (так как $\frac{\partial l}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial l}{\partial y} = 0$). В табл. 3-6, 8 приведены значения безразмерного частотного параметра Λ_i для первых четырех частот.

Данная задача решена в работе методом RFM с помощью полиномиальной и сплайн-аппроксимации неопределенных компонент. Как показал численный эксперимент, при использовании полиномиальной аппроксимации, стабилизация в третьем знаке начинается с 11 степени полиномов (табл. 3). Результаты, представленные в табл. 4 подтверждают, что при сплайн-аппроксимации достаточно рассмотреть сетку сплайнов 32×32 и применять метод интегрирования, базирующийся на применении семиточечных формул Гаусса (7×7) на каждом элементарном прямоугольнике сетки.

Таблица 3 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении количества координатных функций (аппроксимация полиномами, N -степень полинома)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
$N = 6$	35,9	69,3	73,4	108
$N = 7$	35,6	64,8	73,4	108
$N = 8$	34,5	64,2	73,3	107
$N = 9$	34,1	64,1	73,2	106
$N = 10$	34,0	63,5	72,9	106
$N = 11$	33,7	63,2	72,8	106
$N = 12$	33,6	62,8	72,7	106
$N = 13$	33,5	61,9	72,4	106
$N = 14$	33,4	60,2	71,8	106
$N = 15$	33,3	59,6	71,5	105

Таблица 4 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении сетки сплайнов (аппроксимация сплайнами)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Sp 8×8	34,30	61,89	73,23	106,4
Sp 16×16	33,11	59,47	72,57	105,4
Sp 24×24	32,81	58,97	72,39	105,2
Sp 32×32	32,67	58,61	72,28	105,0

В табл. 5, 6 приведены безразмерные частотные параметры свободных колебаний исследуемой пластины при условии жесткого защемления на краях (разрез свободный) и при условии свободного опирания, полученные методом конечных элементов (J.A. Crossland, S.M. Dickinson [1]) и методом R-функций (аппроксимация полиномами и сплайнами). Полиномиальная аппроксимация проведена в системе POLE-RL при количестве точек Гаусса $k = 5$ и степени аппроксимационного полинома $N = 15$. Результаты аппроксимации сплайнами получены при сетке сплайнов 32×32 и удержании узлов интегрирования Га-

усса 7×7 на каждом элементарном прямоугольнике сетки. Численные эксперименты по аппроксимации сплайнами проведены на базе созданного программного комплекса, использующего математический пакет Maple [6] и ряд разработанных программных модулей, реализующих на C++ сплайн-аппроксимацию неопределенных компонент в структурных формулах (7), (9).

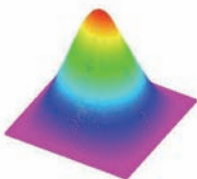
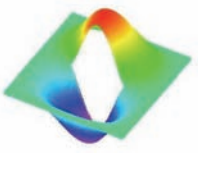
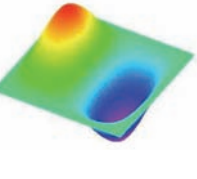
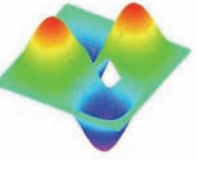
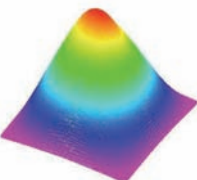
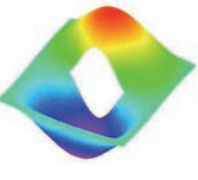
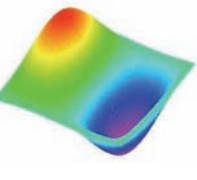
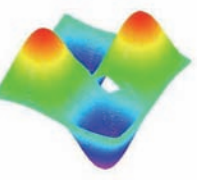
Таблица 5 – Безразмерные частотные параметры жестко защемленной пластины (разрез свободный)

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
RFM + pol, $N = 15$	33,3	59,6	71,5	105
RFM + spl, сетка 32×32	32,67	58,61	72,28	105,0
МКЭ [1]	32,73	58,99	72,28	105,1

Таблица 6 – Безразмерные частотные параметры свободно опертой пластины (разрез свободный)

Метод решения	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
RFM + pol, $N = 15$	18,4	44,1	48,3	78,0
RFM + spl, сетка 32×32	17,92	43,35	48,78	77,68

Таблица 7 – Формы свободных колебаний и соответствующие им значения Λ_i жестко защемленной и свободно опертой пластины

			
$\Lambda_1 = 32,67$	$\Lambda_2 = 58,61$	$\Lambda_3 = 72,28$	$\Lambda_4 = 105,0$
			
$\Lambda_1 = 17,92$	$\Lambda_2 = 43,35$	$\Lambda_3 = 48,78$	$\Lambda_4 = 77,68$

Анализ результатов табл. 5, 6 показывает, что появление свободного разреза приводит к уменьшению основного частотного параметра Λ_1 на 9 % (вне зависимости от вида граничного условия на внешнем контуре пластины). На параметр Λ_2 появление разреза влияет сильнее: в случае жесткой заделки Λ_2 уменьшается на 20 % по сравнению с пластиной без разреза, а в случае свободного опирания – на 12 %. Наглядно это продемонстрировано в табл. 7. В ней приведены первые четыре формы и значения частотного параметра Λ_i свободных колебаний пластины, представленной на рис. 1, полученные с помощью сплайн-аппроксимации при жестко закрепленном контуре (первая

строка таблицы) и при свободно опертном контуре. Сравнивая вторые формы колебаний, мы видим, что в случае жестко закрепленного контура раскрытие разреза больше.

Таким образом, наличие свободного разреза, который моделирует трещины в первом приближении, существенно влияет на спектр собственных частот колебаний пластин.

Заметим, что построенные структурные формулы являются универсальными относительно геометрии трещины. Рассмотрим, например пластину, изображенную на рис. 2. Здесь разрез расположен под углом 45 градусов, отношение стороны квадрата к длине разреза по-прежнему $l/a = 0,5$, пластина защемлена по контуру, разрез свободен.

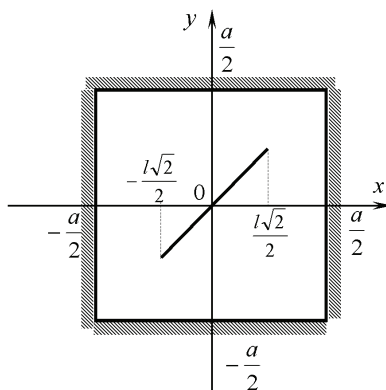


Рисунок 2

Благодаря использованию метода R-функций, для вычисления частот свободных колебаний этой пластины требуется изменить лишь небольшую часть программы, написанной для расчета пластины на рис. 1. Ниже приведено исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении количества координатных функций (табл. 8) и при увеличении сетки сплайнов (табл. 9). Сравнение результатов приведено в табл. 10.

Таблица 8 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении количества координатных функций для квадратной жестко защемленной пластины со свободным наклонным разрезом (аппроксимация полиномами, N -степень полинома)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
$N = 10$	29,3	57,4	66,1	102
$N = 11$	29,0	56,7	65,8	100
$N = 12$	28,9	55,6	65,3	99,9
$N = 13$	28,8	54,5	65,1	99,4
$N = 14$	28,6	53,7	64,4	98,1
$N = 15$	28,4	52,7	63,5	96,4

Таблица 9 – Исследование сходимости значений безразмерного частотного параметра Λ_i при увеличении сетки сплайнов для квадратной жестко защемленной пластины со свободным наклонным разрезом (аппроксимация сплайнами)

	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Sp 8×8	34,99	64,80	71,71	105,3
Sp 16×16	33,26	59,24	71,76	102,8
Sp 24×24	32,67	57,77	71,53	101,4
Sp 32×32	32,50	56,95	71,42	101,1

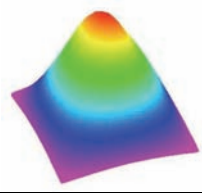

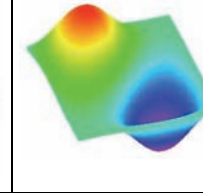
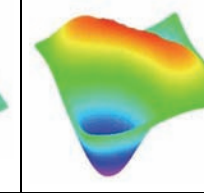
Таблица 10 – Безразмерные частотные параметры жестко защемленной пластины с наклонным разрезом (рис. 2)

Вид аппроксимации неопределенных компонент	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
Степенные полиномы, $N = 15$	28,4	52,7	63,5	96,4
Сплайны, сетка 32×32	32,50	56,95	71,42	101,1

Анализ табл. 10 показывает расхождение результатов более чем на 10 % между разными аппроксимационными схемами. Данный факт, по нашему мнению связан с особенностью интегрирования каждого из аппроксимационных подходов и не имел места в случае параллельного одной из сторон разреза (табл. 5-6).

Формы свободных колебаний пластины, представленной на рис. 2, полученные с помощью сплайн-аппроксимации при жестко закрепленном контуре (разрез свободный), приведены в табл. 11.

Таблица 11 – Формы свободных колебаний и соответствующие им значения Λ_i жестко защемленной пластины со свободным диагональным разрезом

			
$\Lambda_1 = 32,50$	$\Lambda_2 = 56,95$	$\Lambda_3 = 71,42$	$\Lambda_4 = 101,1$

Анализ результатов табл. 5 и 10 показывает, что поворот свободного разреза не оказал существенного влияния на основную частоту жестко закрепленной пластины. При этом 4-я собственная частота изменилась на 4 %, что наглядно иллюстрируется «выпучиванием» соответствующей формы колебаний пластины в области свободного выреза.

При применении полиномиальной аппроксимации с более высокими степенями аппроксимирующих полиномов наблюдалась нестабильность алгоритмов линейной алгебры, таким образом дальнейшее уточнение решения услож-

нялось. Это обстоятельство и сопоставление сходимости результатов при полиномиальной и сплайн-аппроксимации для исследуемых пластин с разрезом, приводит к выводу о большей эффективности сплайн-аппроксимации. Однако необходимо отметить, что полиномиальная аппроксимация требует значительно меньше вычислительных затрат, поэтому в случае удовлетворительной сходимости результатов стоит отдать предпочтение ей.

Выводы

В работе предложен эффективный метод анализа влияния свободного разреза на спектр собственных колебаний пластин при разных видах граничных условий. На основе предложенного метода проведено численное исследование влияния разреза на спектр собственных частот и форм изотропных пластин при жестком закреплении и шарнирном опирании по внешнему контуру с использованием двух аппроксимационных подходов. Даны рекомендации по применимости приведенных подходов. В работе также приведено сравнение полученных результатов с ранее опубликованными, что подтверждает достоверность полученных результатов.

В дальнейшем предполагается, что база алгоритмов и программное обеспечение будут использованы для исследования пластин сложной формы с криволинейными разрезами, а также для исследования динамического поведения оболочек.

Список литературы: 1. *J.A. Crossland, S.M. Dickinson* The free vibration of thin rectangular planform shallow shells with slits // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – 199(3). – P. 513–521. 2. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с. 3. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М., 1956. 4. *В.Л. Рвачев, Л.В. Курна, Е.О. Михаль* Проблема полноты структур решений в методе R-функций // *Наукоемкие технологии*. – 2003. – Т. 4, № 8. – С. 48-59. 5. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 6. *Дьяконов В.* Maple 9 в математике, физике, образовании. – «СОЛОН-Пресс», 2004 г. – 688 с. 7. *Рвачев В. Л., Курна Л.В.* R-функции в задачах теории пластин. – К.: Наукова думка, 1987. – 175 с. 8. *Справочник по теории упругости / Под ред. Варнака П.М., Рябова А.Ф.* – К.: Будівельник, 1971. – 420 с.

Поступила в редколлегию 16.11.2010

В.И.БЕЛЫХ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины,
Харьков;

О.Ф.ПОЛИЩУК, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН
Украины, Харьков;

К.Б.МЯГКОХЛЕБ, канд. техн. наук, науч. сотр., ИПМаш НАН Украины,
Харьков

РАСШИРЕНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНСТРУКТИВНЫХ ДОПОЛНЕНИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБРАЗЦОВ-СВИДЕТЕЛЕЙ

Розглянуті особливості застосування методу конструктивних доповнень при використанні зразків-свідків, а також шляхи розширення його можливостей на основі нового методу оцінки довговічності агрегатів і конструкцій, в основу якого покладена ідея внесення конструктивних доповнень в досліджуваній об'єкт для накопичення експлуатаційних пошкоджень з подальшим проведенням стендових випробувань. Результати досліджень можуть бути використані для вироблення конструкторських і технологічних рекомендацій з підвищення втомного ресурсу виробів, які експлуатуються в умовах динамічного вантаження.

The features of the method of constructive additions to the use of witness samples, as well as ways to broaden its capabilities through a new method of assessing durability of components and structures, based on the idea of making structural additions to the object of study for the accumulation of operational damage, followed by bench tests. The research results can be used to develop design and technological recommendations to improve the fatigue life of products, operating in conditions of dynamic loading.

Введение

Применение образцов-свидетелей связано с задачами контроля и диагностирования состояния оборудования и трубопроводов объектов ядерного топливного цикла, контроля качества покрытий на изделиях (объектах), контроля термической обработки деталей и др. [1-5].

По способу применения образцов-свидетелей можно выделить два основных метода, а именно метод непосредственной замены образцами-свидетелями объектов контроля (при контроле качества покрытий на изделиях (объектах), контроле термической обработки деталей) и метод конструктивных дополнений, когда образцы-свидетели прикрепляются к исследуемому объекту и длительное время вместе с ним находятся под действием агрессивной среды (например, оборудование объектов ядерного топливного цикла).

Применение метода конструктивных дополнений можно показать на примере контроля корпусов ядерных реакторов [5].

Корпуса ядерных реакторов подвержены радиационному охрупчиванию. Это создает потенциальную угрозу разрушения всей конструкции. Для контроля за состоянием материалов корпуса атомники используют так называемые образцы-свидетели, которые устанавливаются в специально выбранных местах внутри корпуса. Через определенные интервалы в течение всего времени эксплуатации реактора, часть комплектов образцов извлекается для проведения необходимых анализов.

Постановка проблемы

Стремление многих стран-пользователей атомными электростанциями продлить сроки эксплуатации приводит к нехватке образцов-свидетелей.

Так по сообщению AtomInfo.Ru японские атомные энергоблоки, отработавшие 30 и более лет, рискуют столкнуться с нехваткой образцов-свидетелей, использующихся для контроля за состоянием корпуса реактора.

Таким образом, возникла задача создания методов контроля и оценки ресурса объектов длительного пользования на основе кратковременного (по отношению к общей длительности эксплуатации) применения образцов-свидетелей и по результатам их испытаний делать оценку состояния исследуемого оборудования.

Предложенный в работе [6] метод оценки долговечности агрегатов и конструкций на основе комплексного использования внесения конструктивных дополнений и виброусталостных испытаний позволяет расширить возможности применения метода конструктивных дополнений при использовании образцов-свидетелей.

Суть метода [6] заключается в том, что в зонах возможных поломок агрегата или конструкции укрепляется образцы-свидетели заблаговременно перед запланированными сроками контроля, осуществляют заданный цикл нагружения в условиях эксплуатации, а затем по данным экспериментальных исследований формируют систему из n уравнений с n неизвестными и по результатам их решения делают выводы по оценке надежности контролируемого оборудования.

Система из 5 формирующих уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} n_{11} \frac{\sigma_1^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_2^m}{A} + n_{31} \frac{\sigma_3^m}{A} + n_{41} \frac{\sigma_4^m}{A} + n_{51} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\cdot 11} \frac{\sigma_{\cdot 11}^m}{A} = 1 \\ n_{11} \frac{\sigma_2^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_3^m}{A} + n_{31} \frac{\sigma_4^m}{A} + n_{41} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\cdot 11} \frac{\sigma_{\cdot 11}^m}{A} = 1 \\ n_{11} \frac{\sigma_3^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_4^m}{A} + n_{31} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\cdot 11} \frac{\sigma_{\cdot 11}^m}{A} = 1 \\ n_{11} \frac{\sigma_4^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\cdot 11} \frac{\sigma_{\cdot 11}^m}{A} = 1 \\ n_{11} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\cdot 11} \frac{\sigma_{\cdot 11}^m}{A} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

где n_i – число циклов данного уровня напряжений; σ – действующие напряжения; m, A – параметры уравнения.

Из системы уравнений (1) можно определить значения n_{j1} согласно выражений

$$n_{11} = \frac{A - n_{\cdot 11} \sigma_{\cdot 11}^m}{\sigma_5^m} = B_1;$$

$$n_{21} = \frac{A - n_{\cdot 11} \sigma_{\cdot 11}^m - B_1 \sigma_4^m}{\sigma_5^m} = B_2;$$

$$n_{31} = \frac{A - n_{23}\sigma_{21}^m - B_1\sigma_3^m - B_2\sigma_4^m}{\sigma_5^m} = B_3 ;$$

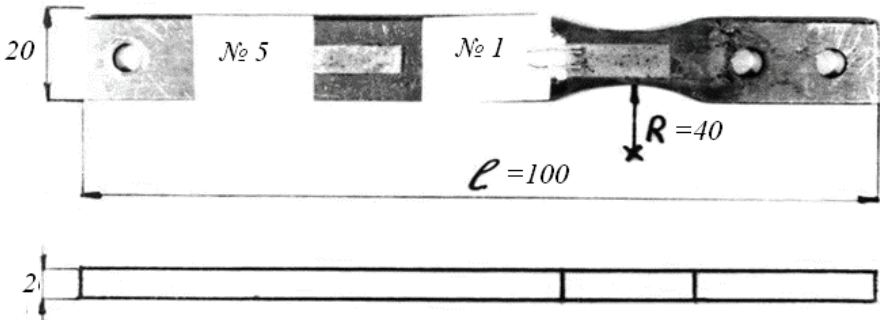
$$n_{41} = \frac{A - n_{22}\sigma_{21}^m - B_1\sigma_2^m - B_2\sigma_3^m - B_3\sigma_4^m}{\sigma_5^m} = B_4 ;$$

$$n_{51} = \frac{A - n_{21}\sigma_{21}^m - B_1\sigma_1^m - B_2\sigma_2^m - B_3\sigma_3^m - B_4\sigma_4^m}{\sigma_5^m} = B_5 ,$$

где B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 – числовые значения параметров $n_{11}, n_{21}, n_{31}, n_{41}, n_{51}$.

Значение σ_1 выбирается в виде максимального значения из σ_i , полученных расчетным путем с помощью программного комплекса (ПК) ANSYS для зоны крепления образцов-свидетелей в данной конструкции или путем перебора на основании кривой усталости материала и определения значений параметров (2).

Дело в том, что значения n_i являются действительными числами от 1 до B_i . В случае, если при выбранных значениях ряда $\sigma_1, \dots, \sigma_5$ на основании статического или вибрационного нагружения образца с наклеенными со смещением по длине образца (в точках предполагаемого крепления при усталостных испытаниях) тензодатчиками (см. рисунок), значения n_i , соответствующие максимальным σ_i будут существенно меньше 1, то необходимо производить пересчет системы (1) для следующего значения σ_i .



Образец с наклеенными тензодатчиками

Например, σ_2 становится σ'_1 и осуществляется повторный расчет значений B_1, \dots, B_5 .

Правомочность ограничения числа уравнений в системе (1) связана с принципом построения кривой усталости материала, где минимальное значение σ_i определяется величиной предела выносливости σ_{-1} .

Для учета влияния повышенных температур и других дополнительных факторов при проведении стендовых усталостных испытаний образцов-свидетелей можно использовать специальные испытательные стенды [7]. В таких стендах испытание образцов производят в специальных камерах, в которых можно задавать требуемые программой испытания параметры.

Выводы

Рассмотренный в работе метод оценки долговечности агрегатов и конструкций позволяет устанавливать образцы-свидетели заблаговременно перед запланированными сроками контроля, что может помочь решить задачу компенсации нехватки изначально заложенных образцов.

Кроме этого, данный метод можно использовать при решении задачи качественной и количественной оценки изменения динамической прочности усовершенствованных конструкций или подвергнутых ремонту.

Список литературы: 1. ГОСТ 9.406-84. Покрытия органосиликатные. Технические требования и методы испытаний. 2. ГОСТ 8832-76. Материалы лакокрасочные. Методы получения лакокрасочного покрытия для испытаний. 3. ГОСТ 27953-88 Покрытия детонационные. Общие требования. 4. РД 39-0147014-348-89. Инструкция по защите от коррозии внутрипромышленного оборудования при помощи ингибиторов отечественного производства. – М.: ВНИИТнефть, 2002. – 5 с. 5. Правила устройства и безопасной эксплуатации оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок ПНАЭ Г-7-008-89. – М.: НТЦ ЯРБ, 2003. – 158 с. 6. *Белых В.И.* Метод оценки долговечности агрегатов и конструкций на основе комплексного использования внесения конструктивных дополнений и виброусталостных испытаний / *В.И. Белых, О.Ф. Полищук, К.Б. Мякохлеб* // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – №37. – С. 51-54. 7. А.с. №1313121(СССР). МПК³ G 01 M 7/00. Установка для вибрационных испытаний изделий / *Божко А.Е., Шпачук В.П., Белых В.И.* и др. (Украина). – № 3977849; заявл. 19.11.1985; опубл. 23.04.1988. – Бюл. № 15.

Поступила в редколлегию 25.11.2010.

УДК 539.3

С.В.БОНДАРЬ, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ОСНАСТКИ НА ПРИМЕРЕ МАТРИЦ ДЛЯ ВЫДАВЛИВАНИЯ

У статті розглядається задача міцності щодо складеної бандажованої матриці для видавлювання. Об'єктом дослідження є конічна матриця із впиранням на фундамент. Проаналізований вплив різних режимів нагріву на напружений стан матриці.

The firmness analyzing problem of the composite bandaging die for stamping of materials are considered in this work. The conical die with support on fundament is the investigation object. The influence of different components of die heating on the die stress state was analyzed.

Актуальность и состояние проблемы. При анализе прочности и жесткости различных конструкций одним из центральных вопросов является обоснованный выбор расчетных схем. Современный уровень развития вычислительной техники обуславливает широкое применение различных численных методов анализа напряженно-деформированного состояния. Использование численных методов подразумевает как можно более полный учет реальных геометрических параметров конструкции, условий закрепления и нагружения.

Так, при расчете составных матриц для выдавливания центральными во-

просами являются: учет контактного взаимодействия между составными частями матрицы и между матрицей и деформируемой заготовкой, учет упруго-пластического деформирования заготовки, учет неравномерно распределенного температурного поля. При пластическом деформировании заготовки происходит выделение тепла [1]. Следствием этого является то, что детальный анализ напряженного состояния различных видов матриц штампов приводит к необходимости предварительного решения задачи теплопроводности. Поэтому определенный интерес представляет выяснение влияния на напряженное состояние дополнительного теплового воздействия, связанного с пластическим деформированием заготовки.

Постановка задачи и метод решения. Для оценки степени влияния дополнительного тепловыделения на напряженное состояние матрицы в данной работе рассматривается термоупругое деформирование составной бандажированной матрицы, одна из возможных расчетных моделей которой приведена на рис. 1. Эта расчетная модель получена путем упрощения схем составных бандажированных матриц, приведенных в работе [2]. На рис. 1 приведены геометрические параметры и параметры температурного нагружения. Следует отметить, что расчетная схема, содержит основные конструктивные элементы, встречающиеся в конструкциях составных бандажированных матриц: рабочую вставку – 1 (материал сталь X12M, $E = 2,2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 11,2 \cdot 10^{-6}$; $\nu = 0,3$ [3]) и бандажи – 2,3 (материал сталь 35ХГСА, $E = 1,98 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha = 12,2 \cdot 10^{-6}$; $\nu = 0,1$ [3]).

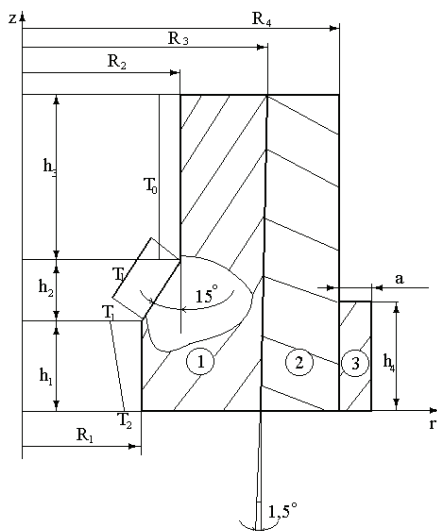


Рисунок 1 – Расчетная схема составной матрицы

Специфика силового и теплового нагружений позволяют рассматривать эту расчетную схему в рамках осесимметричной задачи. При решении задачи

теплопроводности примем следующие допущения. Матрицу будем рассматривать отдельно от заготовки. Ее влияние на поле температур в матрице можно представить температурой заготовки, которая неравномерно распределяется по участкам внутренней поверхности рабочей вставки. На верхнем цилиндрическом участке полагаем, что температура постоянна и совпадает с температурой окружающей среды T_0 . В пределах конического участка поверхности происходит значительный нагрев заготовки, связанный с тем, что в этой зоне находится очаг деформации. На этом участке температура задается также постоянным значением T_1 . И, наконец, на нижнем цилиндрическом участке рабочей вставки примем линейный закон распределения температуры от температуры нагрева T_1 до значения $T_2 = T_1/2$. Температуру нагрева в очаге деформации можно найти при помощи связи выделяющейся тепловой энергией A_T и работой пластической деформации $A_{пл}$, которая устанавливается через коэффициент выхода тепла η_T . На основании экспериментальных данных установлено [1], что для конструкционных сталей $\eta_T = 0,75...0,85$. В результате оказывается, что заготовка нагревается в диапазоне $100^\circ\pm 200^\circ\text{C}$.

Задача нахождения установившегося температурного поля в нагретой конструкции в рамках осесимметричной задачи эквивалентна проблеме минимизации функционала следующего вида:

$$I = \iint_S \left\{ \frac{K}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} r dr dz + \int_{L_3} \frac{\alpha}{2} [T^2(r, z) - 2T_\infty T(r, z)] r dr dz. \quad (1)$$

Вторая часть функционала в соотношении (1) учитывает конвективный теплообмен с внешней средой на наружных поверхностях матрицы. где α – коэффициент конвективного теплообмена, T_∞ – температура внешней среды, K – коэффициент теплопроводности материала. В качестве расчетных примем следующие значения указанных параметров: $\alpha = 50 \text{ Вт/м}$; $T_\infty = 25^\circ\text{C}$; $K = 50 \text{ Вт/м}^2$. Термоупругая задача решалась без учета механических поверхностных и объемных нагрузок. В этом случае задача сводилась к минимизации функционала:

$$\Pi = \pi \iint_S [\sigma_r (\epsilon_r - \alpha T) + \sigma_z (\epsilon_z - \alpha T) + \sigma_\varphi (\epsilon_\varphi - \alpha T) + \tau_{rz} \gamma_{rz}] r dr dz, \quad (2)$$

Оценки прочности керамического контейнера. При численном анализе применялся метод конечных элементов. Конструкция разбивалась на четырех-угольные косоугольные изопараметрические элементы с билинейной аппроксимацией температуры и перемещений. Между составными частями матрицы вводились слои специальных контактных элементов.

Специальным образом подобранные механические и теплофизические характеристики материала слоев [4] позволили моделировать условия идеального теплового контакта и механический натяг (0,02 мм) между составными частями матрицы. Решение задач теплопроводности и термоупругости в трех вариантах и заготовки проведено с помощью конечно-элементного программного комплекса SPACE-T [5].

Геометрические характеристики модели матрицы были приняты следующими: $R_1 = 13$ мм; $R_2 = 20$ мм; $R_3 = 28$ мм; $R_4 = 44,8$ мм; $h_1 = 20$ мм; $h_2 = 26,12$ мм; $h_3 = 100$ мм; $h_4 = 56,12$ мм; $a = 10$ мм. Расчет проводился для трех значений температурного воздействия на матрицу $T_1 = 100$ °C; $T_1 = 150$ °C; $T_1 = 200$ °C. На рис. 2 приведены графики зависимости температуры от радиальной координаты r в сечении матрицы $z = h_1$. Штриховыми линиями показаны габаритные радиусы матрицы в этом сечении.

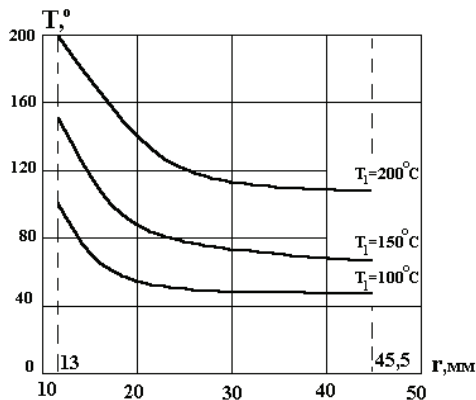


Рисунок 2 – Зависимость температуры от радиальной координаты в сечении матрицы при различных режимах нагрева

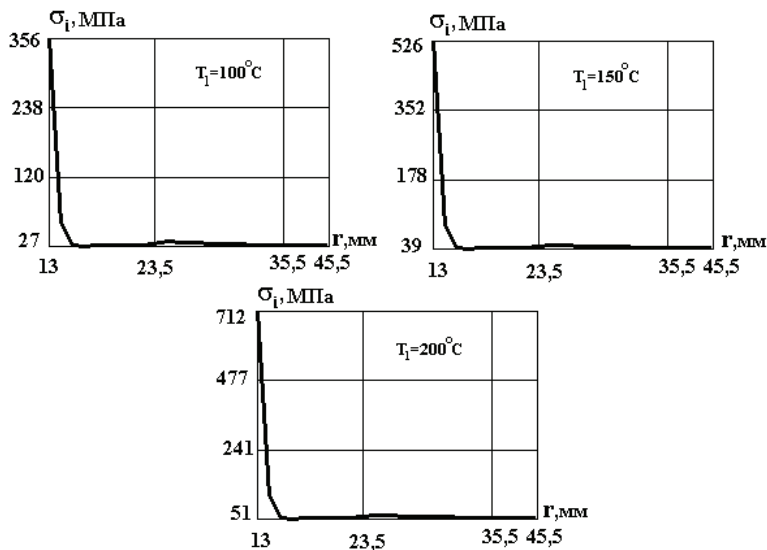


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений σ_i в нагретой матрице

Анализируя эти графики, можно отметить, что качественно в трех случаях распределение температуры практически идентично. Кроме того, по графикам можно проверить справедливость утверждений об автоматическом выполнении условий идеального теплового контакта при построении конечно-элементной модели. Графики непрерывные, гладкие монотонно убывающие, следовательно, можно утверждать, что в области соприкосновения различных частей модели с различными свойствами выполняются условия идеального теплового контакта.

После решения задачи стационарной теплопроводности решалась задача термоупругости со всеми упрощениями, оговоренными ранее. Учет влияния неравномерного нагрева производился путем введения квазистатических узловых усилий. На рис. 3 представлен график распределения интенсивности напряжений в нагретой (за счет тепла, выделяющегося при деформировании) матрице в радиальном направлении в сечении $z = h_1$, при различных температурных режимах

Максимальные значения интенсивность напряжений $\sigma_i = 0,712$ ГПа достигает в точках зон, прилегающих к поверхности рабочей вставки в очаге деформации, которая, как и следовало ожидать, является наиболее нагруженным элементом конструкции из-за наибольшего перепада температуры на ней.

Следует отметить, что в большей части конструкции уровень напряжений гораздо (приблизительно в 12-15 раз) меньше чем в той части рабочей вставки, которая непосредственно контактирует с заготовкой.

В то же время известно, что от механического воздействия, которое является преобладающим для матриц, интенсивность напряжений достигает значений порядка 15 ГПа, т.е. воздействие тепловыделения при пластическом деформировании заготовки является незначительным и им можно пренебречь в дальнейших практических расчетах, что значительно сократит время задания исходной информации.

Выводы. Проведено моделирование составной бандажированной матрицы для полугорячего выдавливания в рамках осесимметричной постановки. Решены задачи теплопроводности и термоупругости. Решение проведено методом конечных элементов средствами программного комплекса SPACE-T

Список литературы: 1. *Евстратов В.А.* Теория обработки металлов давлением. – Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981. – 248 с. 2. *Евстратов В.А., Кузьменко В.И.* Совершенствование конструкций матриц для выдавливания и условия их крепления в штампах // Кузнечно-штамповое производство. – № 9. – 1997. 3. *Геллер Ю.А.* Инструментальные стали : 4-е изд. – М.: Металлургия, 1975. 4. *Конохов В.И., Лавинский Д.В.* // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». - Харків: НТУ «ХПІ». - 2003. - № 5. - С. 93-98. 5. *Бондарь С.В., Зубатый С.С., Киркач Б.Н., Лавинский В.И.* Программный комплекс SPACE-T для решения термоупругопластических контактных задач // Динамика и прочность машин. – 2000. – № 57. – С. 24-34.

Поступила в редколлегию 17.11.2010

В.А.ВАНИН, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»,
А.А.ГРИГОРЬЕВ, асп., НТУ «ХПИ»

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ СИНФАЗНЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Показано, що зміни амплітуди поперечних синфазних високочастотних коливань пружного середовища, індукованих однорідним полем коливань тиску, описуються системою рівнянь Максвелла. Вивчені умови, при яких в пружно – пластичному суцільному середовищі виникає однорідне поле високочастотних коливань тиску.

It is shown that the changes of the amplitude of the cross-section inphase high-frequency oscillations of the elastic medium induced by the homogeneous field of the pressure oscillations are described by the set of equations of Maxwell. The conditions which cause an elastic medium of the high-frequency pressure oscillations in an elastoplastic field are examined.

Введение и постановка задачи. Колебания среды, которую в современной науке именуют вакуумом, а 100 лет назад называли эфиром, в гауссовой системе физических единиц описываются уравнениями Максвелла [1]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t, & \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \cdot q, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}, & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где \vec{E}, \vec{H} – напряженности электрического и магнитного поля, $q(M)$ – плотность электрического заряда в точке M , $\vec{J}(M)$ – плотность тока, созданного движением свободных зарядов; c – скорость света. В статье [2] было показано, что система (1) является факторизацией известного уравнения для поперечных упругих смещений $\vec{u}(M, t)$ сплошной однородной среды [3]:

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -G \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{rot} \vec{L}, \quad (2)$$

где t – время; ρ – плотность среды; G – модуль сдвига; \vec{L} – векторный потенциал для поля плотностей \vec{f} внешних (массовых) сил. При этом напряженности \vec{E}, \vec{H} получили определенную механическую трактовку:

$$\vec{E} = G \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{L}, \quad \vec{H} = (G/c) \cdot \partial \vec{u} / \partial t, \quad (3)$$

где $c = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения поперечных колебаний.

Но, как уже отмечалось в нашей статье [2], а ранее в книге А.Пуанкаре [4], система уравнений Максвелла (1) имеет и другие факторизации, которые приводят к иным трактовкам для напряженностей.

Так, если вычислить от каждой части соотношений (3) ротор, а также принять обозначение $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\psi}$, то мы придем к равенствам

$$\vec{E} = G \cdot \operatorname{rot} \vec{\psi} - \vec{L}, \quad \vec{H} = (G/c) \cdot \partial \vec{\psi} / \partial t.$$

Теперь напряженность \vec{H} пропорциональна угловой скорости вращения среды, и это позволяет трактовать второе слагаемое формулы

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H}$$

для *силы Лоренца*, действующей на заряд Q , движущийся со скоростью \vec{v} , как известный в механике *эффект Магнуса* [5].

Однако, и после указанных изменений, трактовки напряженностей не отвечают современным представлениям о природе электромагнитного поля. Как и для некоторых полей квантовой механики [6], это поле будем считать *волновым*, то есть образующимся при синфазных высокочастотных колебаниях. В волновом поле напряженности $\vec{E}(M, t)$, $\vec{H}(M, t)$ описывают не сами эти величины, а **амплитуды их колебаний** в точке M для момента времени t .

Изучая свойства синфазного поля колебаний упругой среды, обладающего дополнительным свойством однородности колебаний, мы получим уравнения для указанных волновых полей, которые, как и следовало ожидать, окажутся уравнениями Максвелла вида (1). После чего мы предложим модель упругой активной среды, обеспечивающую выполнение этого дополнительного свойства, и назовем ее *средой Максвелла*.

Однородные стоячие волны. Уравнение (2) не учитывает продольные колебания упругой среды, которые сопровождаются изменением давления и плотности. Если эти скалярные величины изменяются синфазно, то им отвечают *стоячие волны*. Известно, что стоячая волна, как правило, не имеет постоянной амплитуды в пределах всего колеблющегося объема, но из этого правила существуют исключения, которые будем называть *однородными волнами*. В статье [7] указывалось, что однородные стоячие волны существуют у винтового стержня, навитого с постоянным углом подъема; очевидно, что такие волны возникают и при колебаниях тонкой сферической оболочки.

Оказывается, что подобные волны существуют и в упругих объемах, лишенных первоначальной кривизны. Так, в последние годы активно развивается *моментная теория упругости* [8, 9], описывающая сплошную среду системой уравнений Коссера:

$$\begin{cases} \rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \vec{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \vec{u} + 2\alpha \text{rot } \vec{\delta} + \vec{f}, \\ j \cdot \partial^2 \vec{\delta} / \partial t^2 = (2\gamma + \beta) \text{grad div } \vec{\delta} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \vec{u} + 2\alpha \text{rot } \vec{u} - 4\alpha \vec{\delta} + \vec{g}, \end{cases} \quad (4)$$

где μ , λ – модули упругости, подобные известным модулям Ламэ [10], α , β , γ , ε – дополнительные модули упругости модели Коссера, $\vec{\delta}$ – угол разворота зерна, j , \vec{g} – плотности моментов инерции и массовых сил.

У однородной стоячей волны в *среде Коссера* все пространственные производные равны 0, и система (4) сводится к уравнению

$$j \cdot \partial^2 \vec{\delta} / \partial t^2 + 4\alpha \cdot \vec{\delta} = 0, \quad (5)$$

которому отвечает однородное поле синфазных гармонических колебаний зерен, происходящих с круговой частотой $\omega_c = 2\sqrt{\alpha / j}$.

Указанные колебания могут, например, объяснить причину существования спина у фотона и других элементарных частиц, но для целей данного ис-

следования они бесполезны. Электромагнитное поле является полем поперечных колебаний, поэтому в качестве несущего (и, одновременно, донорского) поля здесь могут выступать только лишь продольные колебания (то есть, колебания давления и плотности). У среды, обладающей нужными свойствами, материал зерна должен иметь коэффициент сжатия, значительно превышающий такой же коэффициент для остальной среды; пример такой среды будет описан в этой статье далее. Но прежде, не сосредотачиваясь здесь на деталях решения этой задачи (которая, к тому же, может иметь и другие решения), мы выведем уравнения для соответствующих волновых полей.

Усреднение динамических характеристик синфазного поля. Если плотность упругой среды переменная, то уравнение ее линейных колебаний имеет следующий вид:

$$\partial(\rho \cdot \partial \bar{u} / \partial t) / \partial t = \text{grad}(K \text{div} \bar{u}) - \text{rot}(G \text{rot} \bar{u}), \quad (6)$$

где K – модуль объемного сжатия, $K = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu)) \cdot G$; μ – коэффициент Пуассона; остальные обозначения даны ранее. Левая часть уравнения (6) при отсутствии скорости переноса определяет изменение импульса, а правая часть – упругую силу, являющуюся причиной этого изменения.

Будем считать, что плотность ρ , а также модули K , G изменяются по синфазному гармоническому закону, то есть

$$\rho = \rho_0 + \rho_* \cdot \sin \omega_{np} t, \quad K = K_0 + K_* \cdot \sin \omega_{np} t, \quad G = G_0 + G_* \cdot \sin \omega_{np} t,$$

причем коэффициенты, используемые в правых частях этих равенств, одинаковы для всего колеблющегося объема и являются медленно изменяющимися во времени величинами либо константами. Теперь естественно и решение уравнения (6) искать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t,$$

причем, поскольку амплитуды ρ_* и p_* изменения плотности и давления пропорциональны величине $\text{div} \bar{u}_*$, то эта дивергенция не зависит от координат и времени, и это означает, что **мы моделируем поперечные колебания среды**. Подставим это решение в левую часть уравнения (6) и получим:

$$\begin{aligned} \partial \bar{u} / \partial t &= \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \sin \omega_{np} t + \omega_{np} \cdot \bar{u}_* \cdot \cos \omega_{np} t; \\ \partial^2 \bar{u} / \partial t^2 &= \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 \sin \omega_{np} t + 2\omega_{np} \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \cos \omega_{np} t - \omega_{np}^2 \cdot \bar{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t; \\ \partial(\rho \cdot \partial \bar{u} / \partial t) / \partial t &= \rho_* \cdot \omega_{np} \cdot \cos \omega_{np} t \cdot \partial \bar{u} / \partial t + (\rho_0 + \rho_* \cdot \sin \omega_{np} t) \cdot \partial^2 \bar{u} / \partial t^2 = \\ &= \rho_* \cdot \omega_{np} \cdot \cos \omega_{np} t \cdot \left(\partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \sin \omega_{np} t + \omega_{np} \cdot \bar{u}_* \cdot \cos \omega_{np} t \right) + \\ &+ (\rho_0 + \rho_* \sin \omega_{np} t) \left(\partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 \sin \omega_{np} t + 2\omega_{np} \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \cos \omega_{np} t - \omega_{np}^2 \bar{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t \right) = \\ &= \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 (\rho_* \sin^2 \omega_{np} t + \rho_0 \sin \omega_{np} t) + \bar{u}_* \cdot (\rho_* \cdot \omega_{np}^2 \cos 2\omega_{np} t - \rho_0 \omega_{np}^2 \cdot \sin \omega_{np} t) + \\ &+ \omega_{np} \cdot \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot (\rho_* \cdot 1.5 \cdot \sin 2\omega_{np} t + \rho_0 \cdot 2 \cdot \cos \omega_{np} t). \end{aligned}$$

Частота ω_{np} считается очень большой (для электромагнитного поля она, например, превосходит частоту покоя электрона, равную $1,2 \cdot 10^{19}$ Гц), и

следить за подробностями столь быстро изменяющегося процесса не обязательно. Вместо этого выполним усреднение результата по промежутку времени $T \gg 2\pi / \omega_0$, для чего вычислим среднее интегральное значение левой части уравнения (6) на промежутке $[t, t - T]$. Несложно видеть, что

$$\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \sin^2 \omega_{np} \tau d\tau = \frac{0,5}{T} \int_{t-T}^t (1 - \cos 2\omega_{np} \tau) d\tau = 0,5 - \frac{0,25}{T \cdot \omega_{np}} \cdot \sin 2\omega_{np} \tau \Big|_{t-T}^t \approx 0,5,$$

а результаты интегрирования остальных слагаемых равны (либо близки) нулю.

Следовательно, среднее интегральное значение левой части уравнения (6) равняется

$$0,5 \cdot \rho_* \cdot \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2.$$

Такое же усреднение правой части приводит к следующему очевидному результату:

$$\begin{aligned} & 0,5 K_* \text{grad div } \bar{u}_* - 0,5 G_* \text{rot rot } \bar{u}_* = \\ & = \|\text{grad div } \bar{u}_* = 0\| = -0,5 G_* \text{rot rot } \bar{u}_*. \end{aligned}$$

То есть, мы снова получили уравнение вида (2)

$$\rho_* \cdot \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 = -G_* \cdot \text{rot rot } \bar{u}_*, \quad (7)$$

но не для поперечных смещений упругой среды, а для амплитудной функции соответствующих синфазных колебаний.

Если эта теория действительно описывает электромагнитное поле, то становится ясно, что скорость света c определяется равенством

$$c^2 = G_* / \rho_*, \quad \text{а не} \quad c^2 = G_0 / \rho_0,$$

и, при упруго – пластической деформации материала, на отдельных участках гистерезисной кривой (см. рис. 1 и его подробное разъяснение в статье [2]) мы получаем совсем другой результат, чем дает линейная теория Гука. Косвенное подтверждение этого вывода можно найти в современной экспериментальной астрономии. Точные измерения параметров орбиты Луны, выполненные с использованием лазерных лучей и уголко-вых отражателей, установленных на ее поверхности, показали, что Луна удаляется от Земли со скоростью 1 мм в год. Такое поведение планет противоречит закону всемирного тяготения Ньютона, но может быть легко объяснено соответствующим снижением величины скорости света c , которое, если верить принятой модели эфира и рис. 1, продолжается и в наше время.

Если по тем же правилам, что описаны выше и в работе [2], от уравнений (7) перейти к уравнениям Максвелла, то мы получим:

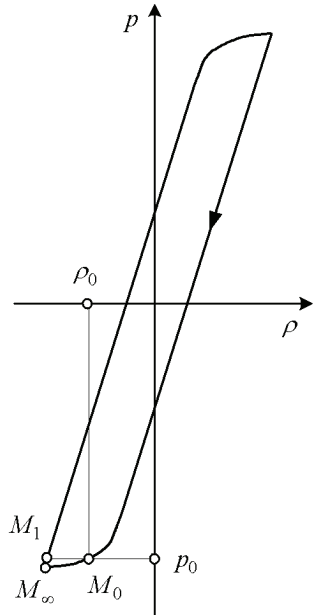


Рисунок 1

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_* = -c^{-1} \partial \vec{H}_* / \partial t; & \text{div } \vec{E}_* = 4\pi \cdot q_*; \\ \text{rot } \vec{H}_* = c^{-1} \partial \vec{E}_* / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}_*; & \text{div } \vec{H}_* = 0, \end{cases}$$

где величины \vec{E}_* , \vec{H}_* , \vec{J}_* определяют амплитуды пульсаций для напряжений \vec{E} , угловой скорости вращения среды \vec{H} и плотности токов \vec{J} .

Чтобы выполнить усреднение силы Лоренца $\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H}$ учтем равенства

$$\vec{E} = \vec{E}_* \cdot \sin \omega_{np} t; \quad \vec{H} = \vec{H}_* \cdot \sin \omega_{np} t$$

и примем, что заряд имеет постоянную массу m_0 , а его объем изменяется по формуле

$$Q = Q_0 + Q_* \cdot \sin \omega_{np} t.$$

Тогда уравнение движения заряда примет следующий вид:

$$\begin{aligned} m_0 \cdot d\vec{v} / dt &= Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H} = \\ &= (Q_0 + Q_* \sin \omega_{np} t) \vec{E}_* \sin \omega_{np} t + (Q_0 + Q_* \sin \omega_{np} t) \vec{v} \times \vec{H}_* \sin \omega_{np} t, \end{aligned}$$

и усреднение ее правой части приводит к аналогичной формуле для амплитудной функции электродинамической силы Лоренца (коэффициент 0,5, как и в остальных случаях, здесь вынесен за скобку и сокращен):

$$\vec{F} = Q_* \cdot \vec{E}_* + Q_* \cdot \vec{v} \times \vec{H}_*.$$

При записи уравнений электродинамики индекс «*» в обозначениях величин отбрасывается, но это обстоятельство не изменяет их физического смысла.

Неоднородные поля синфазных колебаний шарового слоя. В работе [11], где исследовались колебания цилиндрических стержней, было указано, что у таких стержней существует много частот синфазных колебаний. Такая же ситуация характерна для упругих тел любой формы, например, шарового слоя

$$T: \{ R_1 \leq r \leq R_2 \text{ (рис. 2)}. \}$$

Чтобы получить частоты стоячих волн для продольных колебаний этого слоя, будем искать решение уравнения для потенциала

$$a^{-2} \cdot \partial^2 \psi / \partial t^2 = \Delta \psi$$

в виде $\psi = \hat{\psi}(r) \cdot \exp(i\omega t)$, где $a = \sqrt{K/\rho}$ – скорость распространения сферической волны продольных колебаний, $i = \sqrt{-1}$. Подстановка приводит к известному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\hat{\psi}'' + (2/\rho) \cdot \hat{\psi}' + \omega^2 / a^2 \cdot \hat{\psi} = 0,$$

имеющему общее решение

$$\hat{\psi}(\rho) = C_1 \cdot \sin(\omega r / a) / r + C_2 \cdot \cos(\omega r / a) / r.$$

Следовательно,

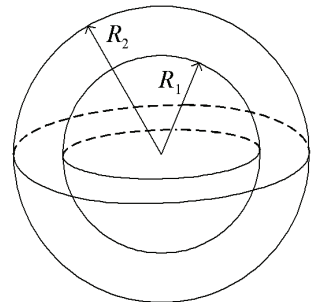


Рисунок 2

$$\begin{aligned}\bar{u}(r,t) &= \exp(\omega t) \cdot \text{grad } \hat{\psi}(r) = \\ &= \exp(\omega t) \cdot [C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)' + C_2 \cdot (\cos(\omega r/a)/r)'] \cdot \vec{i}_r.\end{aligned}$$

Далее нужно учесть граничные условия на внешней и внутренней поверхности слоя, которые для этого случая сводятся к равенству нулю нормального давления

$$\text{def } \bar{u}_{rr} + (\mu/(1-2\mu)) \text{div } \bar{u} = 0,$$

то есть

$$\partial u_r / \partial r + (\mu/(1-2\mu)) \cdot (\partial u_r / \partial r + (2/r) \cdot u_r) = 0.$$

Чтобы избежать в этом вспомогательном примере громоздких выкладок, примем значение коэффициента Пуассона $\mu = 0$. В результате получаем:

$$\begin{cases} C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)'' + C_2 \cdot (\cos(\omega r/a)/r)'' \Big|_{r=R_1} = 0, \\ C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)'' + C_2 \cdot (\cos(\omega r/a)/r)'' \Big|_{r=R_2} = 0. \end{cases}$$

Однородная система для неизвестных коэффициентов C_1, C_2 имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю; это условие сводится к тригонометрическому уравнению, имеющему множество решений.

В частном случае, когда $R_1 = 0$ и шаровой слой превращается в полный шар радиуса R , решение, ограниченное в центре шара, имеет вид

$$u(r,t) = \exp(\omega t) \cdot \text{grad } \hat{\psi}(r) = C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)' \cdot \exp(\omega t) \cdot \vec{i}_r,$$

а внешнее граничное условие сводится к уравнению

$$(\sin(\omega r/a)/r)' \Big|_{r=R} = 0 \quad \text{или} \quad \sin x/x = \cos x/(1-x^2/2),$$

где выполнена замена $x = \omega R/a$.

Последнее уравнение легко анализируется: оно имеет решение x_k на каждом промежутке вида $(\pi k, \pi(k+1))$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, причем

$$x_1 \approx 2,09; \quad x_2 \approx 5,94; \quad x_3 \approx 9,20, \quad \text{и так далее.}$$

Таким образом, многочисленные «параллельные» поля синфазных пульсаций возникают и внутри шара. Но с увеличением номера k возрастают градиенты изменения скорости, что, после учета трения, приведет к быстрому угасанию поля. В привилегированном положении находятся продольные колебания, имеющую частоту ω_1 : они «звучат» дольше, и для их поддержания требуется меньше энергии.

И тут необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Для этой частоты во внутренних областях шара относительная плотность ΔE_c энергии синфазных колебаний мала и изменяется пропорционально r^2 (рис. 3). Следовательно, «мир поперечных колебаний», созданный внутри шара, будет устроен таким образом, что мас-

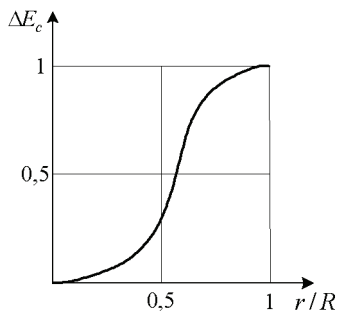


Рисунок 3

сивные частицы, берущие много энергии от синфазного поля, соберутся вблизи поверхности шара. Легким частицам (фотонам и нейтрино) для поддержания баланса много дополнительной энергии не нужно, поэтому для них вся внутренность шара будет «прозрачной».

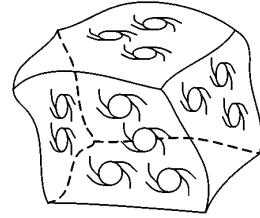


Рисунок 4

Заметим, что аналогичные закономерности наблюдаются при распределении материи во Вселенной. Современные астрономы утверждают, что галактики распределены неравномерно, и их скопления образуют относительно тонкие оболочки (*стенки*) вокруг *межгалактических пузырей* (рис. 4). При продольных колебаниях пузырей на их стенках могут возникать синфазные однородные поля, например, электромагнитные. Показательно, что внутри пузырей светящейся материи нет.

Упругая среда Максвелла. В предыдущем пункте мы рассматривали синфазное поле продольных колебаний среды внутри шара; ясно, что эти колебания будут высокочастотными лишь для шара малого размера.

Чтобы получить высокочастотное синфазное поле для большого объема упругой среды эти колебания нужно изучать не внутри шара, а за его пределами. Простейшей задачей указанного плана является следующая. Пусть в упругой однородной среде равномерно распределены твердые частицы шарообразной формы; требуется составить уравнения продольных колебаний указанной гетерогенной среды и проанализировать его решения.

Будем считать, что анализируемая среда испытала в прошлом интенсивную упруго – пластическую деформацию и находится в точке M_0 гистерезисной кривой (рис. 1). При этом материал твердых частиц соответствует точке M_1 , где модуль сжатия увеличивается на два – три порядка.

Опишем структуру упругой гетерогенной среды, синфазные колебания которой обладают свойством однородности.

Примем, что примесь состоит из частиц, представляющих собой жесткую пустотелую тонкую оболочку сферической формы (рис. 5). Заметим, что в силу высокой жесткости материала, процесс деформирования такой оболочки можно считать равномерным, а поле давлений в материале оболочки – однородным. В этой модели будем также считать, что высокочастотные колебания давления среды $p(t)$ воздействуют лишь на внешнюю поверхность частицы.

Пусть радиус частицы, равен R ; тогда площадь ее поверхности составляет $S = 4\pi R^2$, а объем – $W = (4/3)\pi R^3$. Толщину оболочки обозначим δR . Рассмотрим одну такую частицу (рис. 5), находящуюся в поле внешнего давления p ; в силу постановки задачи это поле также следует считать однородным. Внутреннее давление в материале оболочки обозначим p_q , а модуль сжатия – K_q . Примем, чтобы не усложнять выкладки, коэффициент Пуассона μ равным 0. Тогда из уравнения $div \vec{u} = p_q / K_q$ получаем формулу для радиальной деформации

$$u_r(r, t) = (p_u(t) / K_u) \cdot (r + C / r^2),$$

а неизвестную величину $C = \text{const}$ определим из однородного граничного условия $\text{def } \bar{u}_{r,r} = (u_r)'_r = 0$ на внутренней поверхности оболочки:

$$u_r(r, t) = (p_u / K_u) \cdot (r + 0,5 \cdot (R - \delta)^3 / r^2) \approx \\ \approx y_R(t) = (p_u(t) / K_u) \cdot (3/2) \cdot R,$$

где y_R – радиальное смещение оболочки.

На верхней границе оболочки в статике имеем условие

$$K_u \cdot u'_r = p, \quad \text{откуда}$$

$$p_u = p / \left(1 - (R - \delta R)^3 / R^3\right) \approx p / (3 \cdot \delta R / R);$$

в динамике это условие учитывает силы инерции и принимает другой вид:

$$K_u \cdot u'_r = p - (M_u \cdot d^2 y_R / dt^2) / S.$$

Учтем, что

$$K_u \cdot u'_r = p_u \cdot \left(1 - (R - \delta R)^3 / R^3\right) \approx 3 p_u \cdot \delta R / R = 3 y_R \cdot K_u \cdot \delta R / (1,5 R^2),$$

$$M_u = \rho_u \cdot S \cdot \delta R$$

и получим

$$2 y_R \cdot K_u \cdot \delta R / R^2 = p - \rho_u \cdot \delta R \cdot d^2 y_R / dt^2,$$

то есть

$$d^2 y_R / dt^2 + 2 \cdot (a_u / R)^2 y_R = p / (\rho_u \cdot \delta R), \quad (8)$$

где a_u – скорость звука в материале оболочки, $a_u = \sqrt{K_u / \rho_u}$.

Если внешнее давление изменяется по гармоническому закону

$$p = P \cdot \sin \omega t,$$

то уравнение (8) имеет очевидное решение

$$y_R = \frac{P / (\rho_u \cdot \delta R)}{2 \cdot (a_u / R)^2 - \omega^2} \cdot \sin \omega t.$$

Проанализируем это решение, для чего, прежде всего, найдем резонансную частоту

$$\omega_u = \sqrt{2} \cdot a_u / R.$$

В низкочастотной области, где $\omega \ll \omega_u$, радиальная деформация y_R изменяется пропорционально давлению $p = P \cdot \sin \omega t$, то есть здесь динамикой деформирования частицы можно пренебречь. В результате уравнения продольных колебаний гетерогенной среды принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \rho_0 \partial \bar{v} / \partial t = -\text{grad } p, & 2 \cdot (K_u / R^2) y_R = p / \delta R, \\ K_0^{-1} \partial p / \partial t = -\text{div } \bar{v} - (\varepsilon \cdot S / W) \cdot dy_R(t) / dt \end{cases}$$

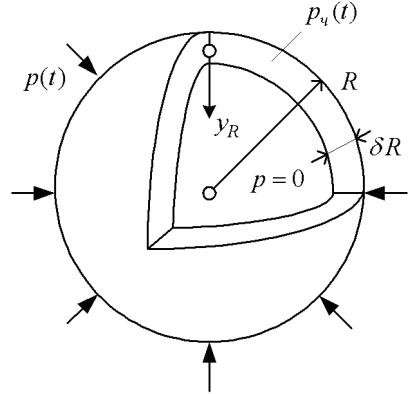


Рисунок 5

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \partial \bar{v} / \partial t = -grad p, (K_0^{-1} + 1.5 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot K_u^{-1}) \cdot \partial p / \partial t = -div \bar{v}, \end{array} \right. \quad (9)$$

где ε – объемная доля примеси, δ – относительная толщина оболочки, $\delta = \delta R / R$, ρ_0, K_0 – плотность и модуль объемного сжатия упругой среды (для точки M_0 , см. рис. 1).

Система уравнений (9) является факторизацией волнового уравнения для давления

$$\hat{a}_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p, \quad (10)$$

где $\hat{a}_{np} = \sqrt{\hat{K} / \rho_0}$, $\hat{K}^{-1} = K_0^{-1} + 1.5 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot K_u^{-1}$.

В высокочастотной области, где $\omega \gg \omega_u$, ускорение $d^2 y_R / dt^2$ изменяется пропорционально давлению $p = P \cdot \sin \omega t$, и здесь фактически можно пренебречь внутренним давлением p_u . В результате система уравнений для продольных колебаний гетерогенной среды принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \partial \bar{v} / \partial t = -grad p, \quad d^2 y_R / dt^2 = S \cdot p / M_u \\ K_0^{-1} \partial p / \partial t = -div \bar{v} - (\varepsilon \cdot S / W) \cdot dy_R(t) / dt \end{array} \right. , \quad (11)$$

или

$$a_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - (\omega_{np} / a_{np})^2 p, \quad (12)$$

где частота

$$\omega_{np} = \sqrt{3 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot \rho_0 / \rho_u} \cdot a_{np} / R, \quad a_{np} = \sqrt{K_0 / \rho_0}.$$

Уравнение Клейна – Гордона (12) имеет искомого решение

$$p = p_* \cdot \sin \omega_{np} t, \quad \text{где } p_* = const.$$

Но, чтобы это решение отвечало поставленной задаче, необходимо выполнить условие $\omega_{np} \gg \omega_u$, то есть

$$\varepsilon / \delta \gg \sqrt{2} \cdot K_u / K_0. \quad (13)$$

Поскольку величина ε мала, то, чтобы соблюсти условие (13), величина δ должна быть меньше, по крайней мере, еще на три порядка, что создает понятные технические трудности; кроме того, синфазная частота получилась слишком большой. Этим трудностям можно избежать, если увеличить массу оболочки, не изменяя ее жесткости, что не сложно сделать на практике. Например, если масса заполнит весь объем шара, то уравнение (8) изменится и станет таким:

$$(3 / \delta) \cdot d^2 y_R / dt^2 + 2 \cdot (a_u / R)^2 y_R = p / (\rho_u \cdot \delta \cdot R).$$

Это означает, что резонансная и синфазная частоты уменьшатся в $\sqrt{\delta / 3}$ раз, а формула для синфазной частоты примет вид

$$\omega_{np} = \sqrt{\varepsilon \cdot \rho_0 / \rho_u} \cdot a_{np} / R \approx \sqrt{\varepsilon} \cdot a_{np} / R.$$

Например, если принять

$$\omega_{np} = 10^{20} \text{ 1/c}, a_{np} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ м/c}, \varepsilon = 10^{-12},$$

то мы получим $R \approx 5 \cdot 10^{-18}$ м, что соответствует ожидаемому размеру для частицы примеси, возникающей в некоторых моделях квантовой физики.

Надо понимать, что конкретная модель оболочки была проанализирована в этой статье только лишь для того, чтобы показать принципиальную реализуемость изучаемого эффекта на основе известных механических свойств гетерогенной среды. Природа, если ей действительно понадобилась бы такая оболочка для организации синфазного поля равномерных колебаний давления, могла бы без особого труда реализовать ее в форме «снежинки» из тонких кристаллических нитей, показанной на рис. 6, либо, что еще более вероятно, цилиндрической трубки, остающейся в эфире после пролета фотона. В квантовой физике считают (см. [6]), что пространство, обладающее свойствами вакуума, формируется траекториями фотонов, и описанная выше теория не противоречит этому мнению.

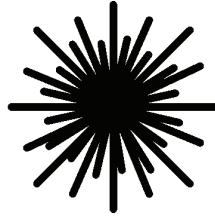


Рисунок 6

Кроме того, отдельные частицы твердой примеси могут иметь различные размеры и характеристики; при этом синфазная частота ω_{np} и само уравнение Клейна – Гордона (12) возникает как результат их усредненного воздействия на исследуемые здесь свойства гетерогенной среды.

Диссипация и источник энергии для однородного поля колебаний давления. Мы получили искомое поле синфазных колебаний, и осталось понять, откуда оно берет энергию для поддержания этих колебаний на постоянном уровне.

Заметим, что учет линейного внутреннего трения приводит к изменению уравнения (12), которое приобретает следующий вид:

$$a_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta(p + \mathcal{G} \cdot \partial p / \partial t) - (\omega_{np} / a_{np})^2 p, \quad (14)$$

где \mathcal{G} – коэффициент трения, определяемый с учетом выбора вязкой модели трения Кельвина-Фойгхта или гистерезисной модели трения Бока-Шлиппе-Колара [12]. При однородных колебаниях давления поле производной $\partial p / \partial t$ также является однородным, и $\Delta(v \partial p / \partial t) \equiv 0$. Следовательно, **эти колебания не теряют своей энергии по причине действия внутреннего линейного трения**, и мы получили очень важное, но, к сожалению, не достаточное усло-

вие для обеспечения их стабильности. Даже из текста предыдущего пункта становится понятно, что существуют и другие затраты энергии, которые нужно покрывать за счет некоторого источника.

Вывод уравнений, описывающих энергетические обмены моделируемых полей, составит предмет отдельной публикации; там же мы будем изучать прикладные аспекты развиваемой теории. Но уже здесь заметим (и это утверждение полностью соответствует современным космологическим теориям), что источником стабильности однородного синфазного поля является энергия расширения среды. Изучаемая среда расширяется, и, как указывалось в статье [2], происходящий в этой среде переход части материала из состояния M_0 на гистерезисной кривой в состояние M_1 (см. рис. 1, путь $M_0M_\infty M_1$) сопровождается выделением кинетической энергии, то есть **среда Максвелла является активной**. Эта дополнительная энергия нивелирует влияние диссипативных факторов, не учтенных в уравнении (14).

Теперь можно установить связь между однородными и неоднородными полями синфазных колебаний, рассмотренными в этой статье. Относительно медленный процесс расширения шара создает во внешнем шаровом слое необходимые условия для функционирования однородного поля высокочастотных колебаний давления и волнового поля синфазных поперечных колебаний, описываемого уравнениями Максвелла.

Выводы.

Показано, что изменения амплитуды поперечных синфазных высокочастотных колебаний упругой среды, индуцированных однородным полем колебаний давления, описываются системой уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Рассмотрены конкретные примеры синфазных неоднородных полей колебания давления в упругой среде (стоячих волн в шаровом слое и шаре).

Составлена физическая и математическая модели упруго – пластической деформации сплошной среды и изучены условия, при которых в этой среде возникает синфазное однородное поле высокочастотных колебаний давления.

Список литературы: 1. *Никольский В.В.* Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1964. 2. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 4. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. 5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. 6. *Вихман Э.* Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. 7. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 8. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. 9. *Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н.* Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Механика твердого тела. – № 4. – 2007. – С. 100-113. 10. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. 11. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 12. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971.

Поступила в редколлегию 25.10.2010

А.В.ВОРОПАЙ, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ, Харьков

УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПЛАСТИНЕ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-обпертої по контуру та зосередженої маси, що лежить на пластині. На пластину діє нестационарне навантаження, що збуджує коливання та сила, яка забезпечує керування коливаннями. Викладаються результати розв'язку оберненої задачі визначення керуючого навантаження. Розрахунки зводяться до аналізу системи інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate and concentrated mass, which is lying on the plate. The non-stationary concentrated load, which initiates vibration, and force, which provides controlling of vibration, are acting on the plate. The results of solution for inverse problems of controlling force determination are presented. The problems are reduced to the system of first-kind Volterra integral equations, which is solved numerically with using of Tikhonov's regularization method.

Введение. Существуют различные способы управления нестационарными колебаниями в механических системах, которые имеют элементы конструкций в виде пластин. Так как эта статья не посвящена анализу систем управления нестационарными колебаниями и их схемам, отметим лишь некоторые работы. В работах [1, 2] применяются элементы конструкций в целом, созданные из так называемых усовершенствованных материалов (smart materials). В статьях [3, 4] описано управление колебаниями с помощью специальных устройств пьезодатчик/пьезопровод (piezosensor/actuator), изготовленных в виде накладок, растяжек и т.д., вводимых в механические системы. В случае гашения колебаний часто используются управляемые и неуправляемые гасители колебаний (vibration absorber) [5].

Для решения подобных задач удобно использовать следующий подход – управление колебаниями осуществляется с помощью введения в механическую систему дополнительных управляющих нагрузок. Тогда задача управления сводится к идентификации этих неизвестных нагрузок, которые определяются из решения соответствующих обратных нестационарных задач. А выбор конкретной системы управления и механизмов реализации найденных управляющих сил осуществляется уже на стадии практических или экспериментальных исследований.

1 Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 1). Считается, что изменение перемещения во времени сосредоточенной массы полностью совпадает с изменением прогиба пластины в точке, где находится масса, то есть $w_M(t) = w(x_M, y_M, t)$.

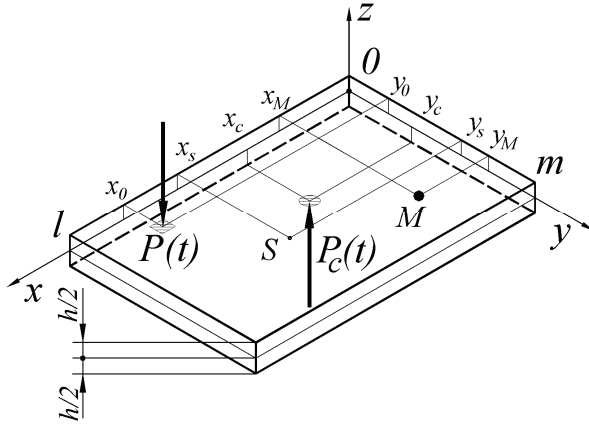


Рисунок 1 – Схема нагружения

На пластину в некоторой точке воздействует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы. Требуется управлять нестационарными колебаниями сосредоточенной массы. Управление осуществляется посредством приложения к пластине дополнительной (управляющей) нагрузки $P_c(t)$. Задача управления заключается в идентификации закона изменения во времени этой нагрузки $P_c(t)$. Таким образом, для определения закона изменения во времени управляющего воздействия требуется решить обратную нестационарную задачу для механической системы, состоящей из пластины и массы.

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузок (возмущающей и управляющей), и координаты сосредоточенной массы произвольны (любые точки принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина сосредоточенной массы.

2 Решение прямой задачи. В рамках теории пластин С. П. Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений [6], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + P_c(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t) \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; w – перемещение срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота; ρ, E, ν – постоянные материала пластины; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\varphi_{xy} = \frac{\partial\psi_x}{\partial x} - \frac{\partial\psi_y}{\partial y}$,

$$\psi_{xy} = \frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что:

$P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная);

$P_C(x, y, t)$ – управляющее воздействие на пластину (сосредоточенная или распределенная нагрузка);

$R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – реакция пластины на воздействие сосредоточенной массы M .

Систему дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решаем посредством разложения искомых функций w_0, ψ_x, ψ_y в двойные ряды Фурье согласно рассмотренной схеме опирания. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа; в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_i \int_0^t P_i(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_x(x, y, t) &= \sum_i \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\psi_x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_i \int_0^t P_i(\tau) K_i^{\psi_y}(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где $P_1(t) = P(t)$; $P_2(t) = -P_C(t)$; $P_3(t) = -P(t)$,

$K_i(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$\begin{aligned} K_i^W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t, \\ K_i^{\psi_x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}, \\ K_i^{\psi_y}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}. \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения: $a = \frac{G'}{\rho}$,

$$b = \frac{G'h}{\rho \cdot J}, \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}, \quad \lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}, \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}, \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right),$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(a+d)+b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4}; \quad \omega_{1kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) + \Delta_{kn}]};$$

$$\omega_{2kn} = \sqrt{0,5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) - \Delta_{kn}]};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Укажем, что вид коэффициентов C_{ikn} зависит от геометрической формы нагрузки, а именно если нагрузка сосредоточенная, то:

$$C_{kn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m},$$

в случае, когда нагрузка равномерно распределена по прямоугольнику со сторонами Δx и Δy соответственно, коэффициенты C_{ikn} будут иметь вид:

$$C_{kn} = \frac{4}{lm} \frac{1}{\rho h} \frac{4}{\lambda_k^* \mu_n^*} \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \sin \frac{k\pi \cdot \Delta x}{2l} \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m} \sin \frac{n\pi \cdot \Delta y}{2m},$$

а если нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r , то:

$$C_{kn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{\lambda_{kn}} \cdot J_1(\lambda_{kn}r) \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_i}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_i}{m}\right),$$

где $J_1(\lambda_{kn}r)$ – функция Бесселя.

3 Решение обратной задачи. В случае если требуется, чтобы перемещение сосредоточенной массы во времени изменялось согласно заданному закону (например, в виде синусоиды), критерий управления примет вид $w(x_M, y_M, t) = w_c(t)$. Тогда для точки (x_M, y_M) , можно записать следующую систему интегральных уравнений (СИУ):

$$\begin{cases} w_c(t) = \int_0^t P(\tau)K_P(t-\tau)d\tau - \int_0^t P_c(\tau)K_{P_c}(t-\tau)d\tau - \int_0^t R(\tau)K_R(t-\tau)d\tau; \\ w(x_M, y_M, t) = w_c(t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau. \end{cases} \quad (3)$$

Систему интегральных уравнений (3) после дискретизации можно представить в матричном виде:

$$\mathbf{A}_R \mathbf{R} + \mathbf{A}_{P_c} \mathbf{P}_c = \mathbf{A}_P \mathbf{P} - \mathbf{w}_c;$$

$$\mathbf{A}_M \mathbf{R} = \mathbf{w}_c,$$

где вектор \mathbf{P} – соответствует известной функции $P(t)$, матрицы \mathbf{A}_R , \mathbf{A}_M , \mathbf{A}_{P_c} и \mathbf{A}_P отвечают соответствующим ядрам системы уравнений (3), \mathbf{R} и \mathbf{P}_c – неизвестные векторы, соответствующие $P(t)$ и $P_c(t)$.

Решение указанной системы уравнений в силу некорректности осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [7]

(РА Тихонова).

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Считалось, что возмущающая нагрузка равномерно распределена по прямоугольной области со сторонами Δx и Δy соответственно и центром (x_0, y_0) , а управляющая нагрузка равномерно распределена по кругу радиуса r с центром (x_c, y_c) . При вычислениях принимались следующие значения: $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7890$ кг/м³; $h = 0,04$ м; $l = 0,6$ м; $m = 0,4$ м; $x_0 = 0,4$ м, $y_0 = 0,2$ м; $x_c = 0,2$ м, $y_c = 0,15$ м; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 ; $x_M = 0,15$ м, $y_M = 0,3$ м – координаты сосредоточенной массы.

Существенное влияние на «качество» управления оказывает, параметр регуляризации α , содержащийся в РА Тихонова. Этот параметр определялся на основе минимизации α функционала «качества», соответствующего приближению полученных значений прогиба к требуемым значениям:

$$M^\alpha [P_c] = \left\| w_c - A_p P + A_R R^\alpha + A_{P_c} P_c^\alpha \right\|.$$

График изменения функционала в зависимости от параметр регуляризации α приведен на рис. 2.

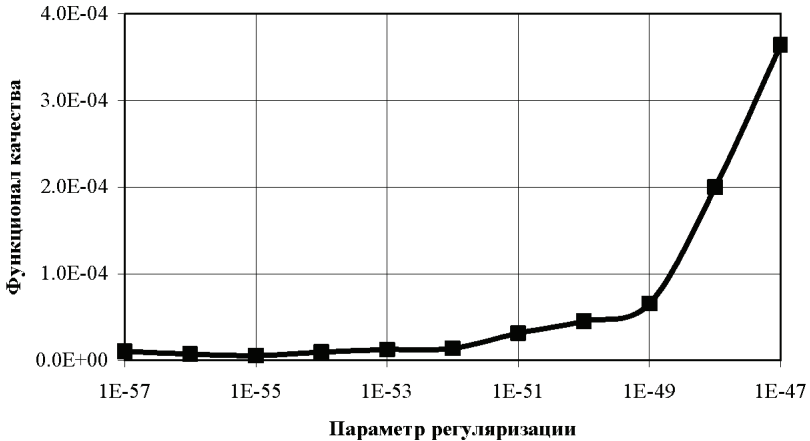


Рисунок 2 – Определение параметра регуляризации

Из рис. 2 видно, что параметр регуляризации желательно брать меньше $\alpha = 10^{-49}$, а наибольшее «качество» достигается при $\alpha = 10^{-55}$.

На рис. 3 показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ – кривая 1; и определенные в результате решения СИУ (3) значения управляющего воздействия $P_c(t)$ и реакции массы $P(t)$ – кривые 2 и 3 соответственно, найденные при значении $\alpha = 10^{-55}$. Укажем, что для удобства анализа результатов величины возмущающей и управляющей нагрузок, а также реакция сосредоточенной массы, приведены в ньютонах (равномерно распределенные нагрузки в паскалях были умножены на соответствующие площади контакта).

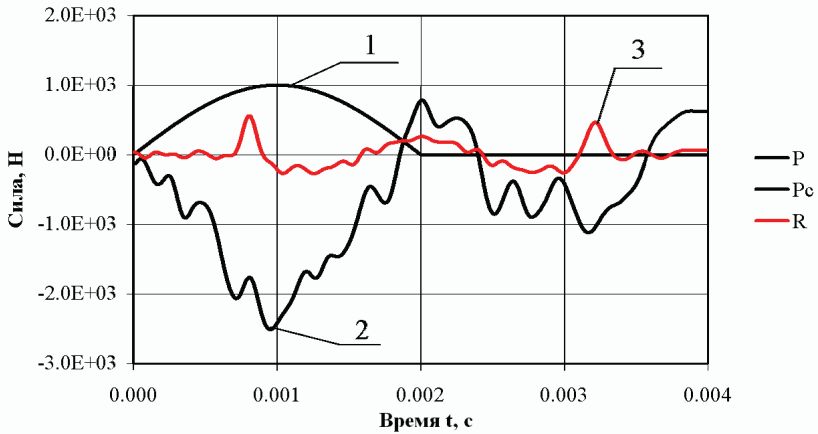


Рисунок 3 – Определение реакции сосредоточенной массы

На рис. 4 показаны три кривые изменения перемещения сосредоточенной массы:

- кривая 1 показывает требуемое перемещение сосредоточенной массы – целевая функция для управления;
- кривая 2 – перемещение сосредоточенной массы и прогиба пластины при воздействии только возмущающей нагрузки;
- кривая 3 – результат управления (перемещение сосредоточенной массы при воздействии возмущающей нагрузки и управляющего воздействия).

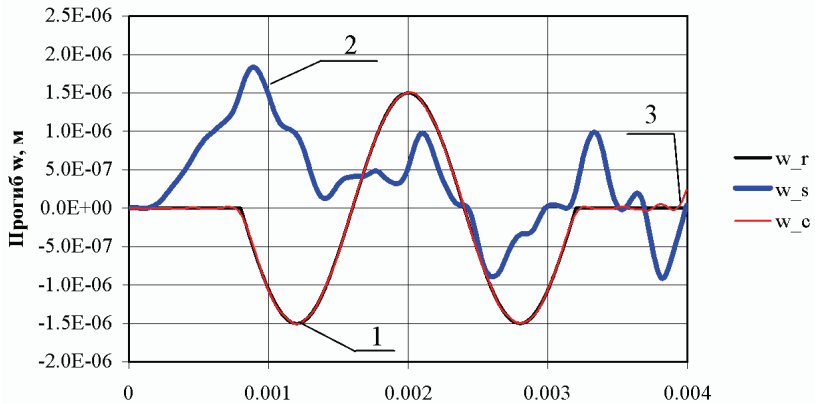


Рисунок 4 – Идентификация неизвестной нагрузки

Как видно из рис. 4 кривые 1 и 3 практически полностью совпадают, что свидетельствует о достижении требуемых результатов. Только в конце исследуемого промежутка времени кривая 3 незначительно отходит от кривой 1, это вызвано, по-видимому, накоплением погрешностей при вычислении управ-

ляющей нагрузки.

Выводы. Показана возможность управления нестационарными колебаниями сосредоточенной массы, лежащей на прямоугольной пластине, с помощью дополнительной (управляющей) нагрузки. На основе представленных результатов (рис. 4) можно сделать вывод о том, что предложенная схема управления и алгоритм определения управляющего воздействия при решении обратной задачи для механической системы являются эффективными и достаточно устойчивыми.

Список литературы: 1. He X.Q., Ng T.Y., Sivashanker S., Liew K.M. Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38, № 9. – P. 1641-1655. 2. Kapuria S., Dumir P.C. Coupled FSDT for piezothermoelectric hybrid rectangular plate // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – 37, № 42. – P. 6131-7153. 3. Chen Lin-Hung, Huang Shyh-Chin. Vibration attenuation of a cylindrical shell with constrained layer damping strips treatment // Comput. and Struct. – 2001. – 79, № 14. – P. 1355-1362. 4. Saadat S., Noori M. et al. Using NiTi SMA tendons for vibration control of coastal structures // Smart Mater. and Struct. – 2001. – 10, № 4. – P. 695 – 704. 5. Wu S. T., Chen J.Y., Yeh Y.C., Chiu Y.Y. An active vibration absorber for a flexible plate boundary-controlled by a linear motor // Journal of Sound & Vibration. – 2007. – 300(1-2). – PP. 250-64. 6. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 7. Тихонов А. Н., Гончаровский А. В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 19.11.2010

УДК 536.421.4

С.ГЛАДКОВ, ICAMS Bochum/TU Dortmund, Германия;
Р.СПАТЧЕК, Dr. rer. nat, ICAMS Bochum, Германия;
И.ШТАЙНБАХ, Dr. rer. nat, ICAMS Bochum, Германия;
Б.СВЕНДСЕН, Dr. rer. nat., TU Dortmund Германия

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ БИНАРНОГО СПЛАВА НА МЕЗО УРОВНЕ

У статті наведено чисельну процедуру для рішення задачі твердіння бінарного сплаву засновану на прямому методі Ейлера в часі та монолітичному лінійному методі скінченних елементів в просторі. Також наведені приклади використання даного методу для моделювання росту дендритів в переохоложеному розплаві.

In the article numerical procedure for solution of the equiaxial solidification problem which is based on the forward Euler method in time and monolithic linear finite element formulation in space is described. Numerical examples consist of simulation of the dendritic growth of the initially disk-like solid inclusion in the undercooled melt.

1 Введение. Литье и последующее затвердевание материала играет важную роль в формировании микроструктуры, которая в свою очередь оказывает влияние на термомеханические свойства финального изделия, готового для

дальнейшей технологической обработки. Поэтому корректное моделирование затвердевания и роста дендритов основанное на эффективных численных методах требует разработки, анализа и проверки. На данный момент разработано большое количество численных методов для задач затвердевания, в основном основывающихся на различных вариациях метода конечных разностей с одной стороны, и техниках метода поверхностей уровня и метода фазового поля с другой. Различные подходы к моделированию задач затвердевания представлены в нескольких замечательных обзорах [1-6]. В данной работе мы представляем наши разработки по применению метода конечных элементов для задач затвердевания. Эта работа является в некотором роде продолжением работ начатых в статьях [7-9].

Физическая модель, рассматриваемая в этой работе, была разработана Аланом Кармой [10] с использованием метода фазового поля, где интерфейс между жидкой и твердой фазами «размазан» в пространстве. Таким образом интерфейс не представляет собой скачкообразную (и соответственно не дифференцируемую) функцию, а плавно меняется в пространстве, но по очень узкой ширине и с высокими градиентами. Детали этой модели представлены в следующей части статьи.

2 Формулировка модели. Как было сказано во введении, модель А. Кармы [10] для двумерного роста дендритов использована в этой работе. Это реалистичная модель низколегированного бинарного сплава с неравными линиями ликвидуса и солидуса. Модель также включает в себя кристаллическую анизотропию и член «анти-захвата» примеси корректирующий поток массы. Эта модель основана на методе фазового поля и использует двухямный потенциал.

Модель состоит из двух уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \tau(\theta)\dot{\phi} &= -D_{\phi}f(\phi) - \frac{\lambda}{1-k}D_{\phi}g(\phi)[\exp u(\phi, c) - 1] + \nabla \cdot [W(\theta)^2 \nabla \phi] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left[W(\theta)D_{\theta}W(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[W(\theta)D_{\theta}W(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right], \\ \dot{c} &= -\nabla \cdot \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\phi \in [-1, 1]$ – это фазовое поле ($\phi = 1$ соответствует твердой, а $\phi = -1$ жидкой фазе), $c \in [0, 1]$ – это концентрация определенная как молевая фракция В в бинарном сплаве А и В,

$$\mathbf{j}(\phi, c) = -Dcq(\phi)\nabla u - aWc_l^0(1-k)\exp u(\phi, c)\dot{\phi} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} - \quad (2)$$

это диффузионный поток с дополнительным членом «анти-захвата»,

$$\theta = \arctan \frac{\partial_y \phi}{\partial_x \phi} - \quad (3)$$

это угол между направлением нормали фазового поля и осью x ,

$$a_s(\theta) = 1 + \epsilon_4 \cos(4\theta) - \quad (4)$$

это функция, описывающая кристаллическую анизотропию (предпочтительное направление роста – вдоль координатных осей),

$$\tau(\theta) = \tau a_s(\theta)^2, \quad (5)$$

$$D_\phi f(\phi) = \phi^3 - \phi, \quad (6)$$

$f(\phi)$ – это двухямный потенциал с минимумами при $\phi = \pm 1$,

$$D_\phi g(\phi) = (1 - \phi^2)^2, \quad (7)$$

$$u(\phi, c) = \ln \frac{2c/c_l^0}{1 + k - (1 - k)\phi} - \quad (8)$$

это безразмерная величина отклонения химического потенциала от равновесия,

$$W(\theta) = W a_s(\theta), \quad (9)$$

$$D_\theta W(\theta) = -4W \epsilon_4 \sin(4\theta), \quad (10)$$

$$q(\phi) = \frac{1 - \phi}{1 + k - (1 - k)\phi}, \quad (11)$$

$$\nabla u(\phi, c) = D_\phi u \nabla \phi + D_c u \nabla c, \quad (12)$$

$$D_\phi u(\phi, c) = \frac{1 - k}{1 + k - (1 - k)\phi}, \quad (13)$$

$$D_c u(\phi, c) = \frac{1}{c}. \quad (14)$$

Постановка задачи должна быть дополнена начальными и краевыми условиями. Начальные условия будут указаны в следующей части статьи, вместе с численными примерами. Краевые же условия приняты однородными условиями Неймана¹, то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Слабая формулировка уравнений (1) с учетом краевых условий (15) ведет к следующим вариационным уравнениям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tau(\theta) \phi^* \dot{\phi} dx &= \int_{\Omega} \left(-\phi^* D_\phi f(\phi) - W(\theta)^2 \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda}{1 - k} \phi^* D_\phi g(\phi) [\exp u(\phi, c) - 1] \right. \\ &\quad \left. + W(\theta) D_\theta W(\theta) \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \right) dx \\ &\quad + \int_{\partial \Omega} \phi^* W(\theta) D_\theta W(\theta) \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} n_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} n_1 \right] da, \quad (16) \\ \int_{\Omega} c^* \dot{c} dx &= \int_{\Omega} \left(-D_c q(\phi) \nabla c^* \cdot (D_\phi u \nabla \phi + D_c u \nabla c) \right. \\ &\quad \left. - a W c_l^0 (1 - k) \exp u(\phi, c) \phi \nabla c^* \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) dx, \end{aligned}$$

где $\{\phi, c\}$ – это неизвестные функции, $\{\phi^*, c^*\}$ – это тестовые функции и n_1, n_2 – это компоненты внешней нормали к границе области.

¹ Также следовало бы рассмотреть периодические краевые условия для этой задачи, но на данной стадии это не нужно так как рассматриваемые поля фактически «не дотрагиваются» до границы вычислительной области.

3 Численные примеры. Решение связанной вариационной задачи (16) численно производится с применением прямого метода Эйлера во времени и билинейных конечных элементов в пространстве. Эти результаты также сравниваются с результатами полученными методом конечных разностей на более густой сетке.

Производная по времени от фазового поля ϕ входящая в уравнения (1₂, 16₂) (член «анти-захвата») и является той величиной которая делает проблему связанной, что в свою очередь ведет к тому что глобальная матрица «масс» системы будет несимметричной. Для решения системы линейных алгебраических уравнений с несимметричной матрицей специальные решатели должны быть использованы. В данной работе использован итерационный BiCGstab (bi-conjugate gradient stabilized, стабилизированный метод бисопряженных градиентов). Следует отметить, что несимметричные решатели типа BiCGstab работают намного медленнее симметричных итерационных решателей типа CG (conjugate gradient, метод сопряженных градиентов). По этой причине стоит рассмотреть в будущем применение методов расщепления для данной проблемы, которые приведут к последовательному решению двух симметричных линейных задач.

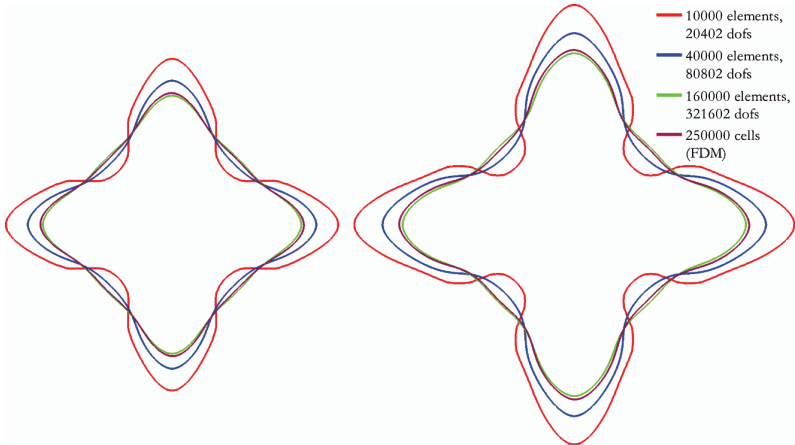


Рисунок 1 – Положение интерфейса в пространстве для $t = 1600$ (слева) и $t_{final} = 2400$ (справа)

Следующие численные параметры были приняты для вычислений согласно [10] (данная модель является безразмерной, поэтому все параметры приведены в безразмерном виде). Расчетная область $\Omega = [0, 200]^2$, постоянный шаг по времени $\Delta t = 0.008$, полное время $t_{final} = 2400$. Количество конечных элементов $N_{elements} = 100^2, 200^2, 400^2$ (декартова сетка), количество конечно-разностных ячеек $N_{cells} = 500^2$ и соответственно длина стороны элемента $dx = 2.0, 1.0, 0.5$, длина стороны ячейки $dx = 0.4$. Коэффициент распределения равный отношению концентраций на твердой и жидкой стороне интер-

фейса $k = 0.15$, $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, толщина интерфейса $W = 1$, $\tau = 1$, параметр анизотропии $\epsilon_4 = 0.02$, коэффициент диффузии $D = 1$, $a_2 = 0.6267$, $c_l^0 = 0.5$, нормированное перенасыщение $\Xi = \frac{c_l^0 - c_\infty}{c_l^0(1-k)} = 0.55$ и $a_1 = 0.8839$. Следующие параметры были вычислены: начальная концентрация $c_\infty = c_l^0(1 - \Xi(1 - k)) = 0.26625$, $\lambda = \frac{D\tau}{a_2 W^2} = 1.595659805$, микроскопическая капиллярная длина $d_0 = \frac{a_1 W}{\lambda} = 0.5539401301$ и радиус начального зерна $r_{seed} = 22d_0 = 12.18668286$.

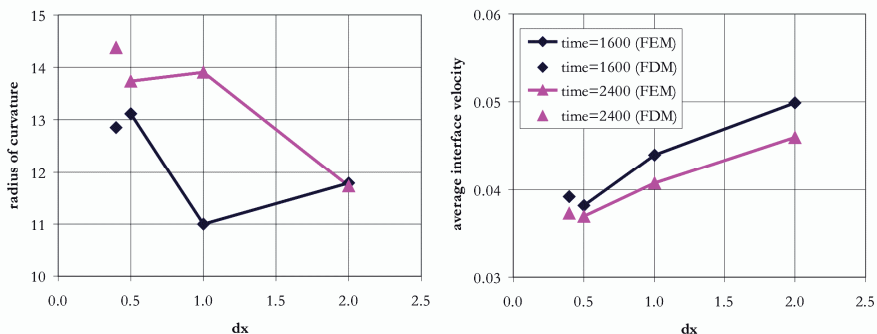


Рисунок 2 – Радиус кривизны (слева) и средняя скорость (справа) вершины дендрита для различных дискретизаций

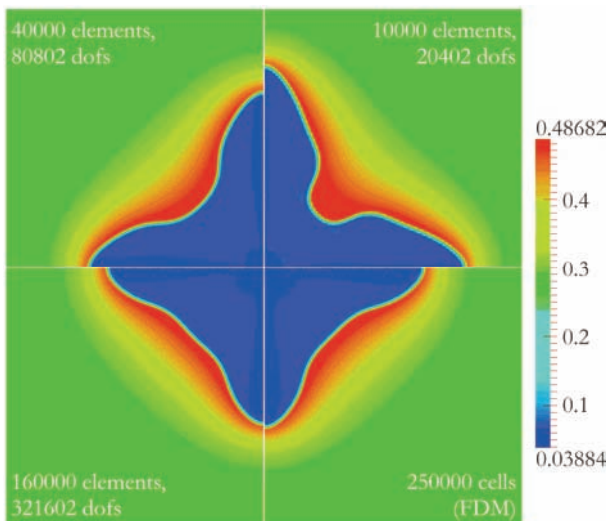


Рисунок 3 – Распределение концентрации в пространстве для различных сеток на последнем шаге по времени

Положение интерфейса ($\phi = 0$) для двух моментов времени и различных сеток показаны на рис. 1. Качественно из рисунка видно что решение посчи-

танное на самой густой КЭ-сетке очень близко к решению на еще более густой КР-сетке. Кроме того, беря во внимание графики для скорости вершины дендрита и радиуса его кривизны (рис. 2) можно заключить что КЭ-результат даже ближе к точному решению. Однако это требует более строгой проверки.

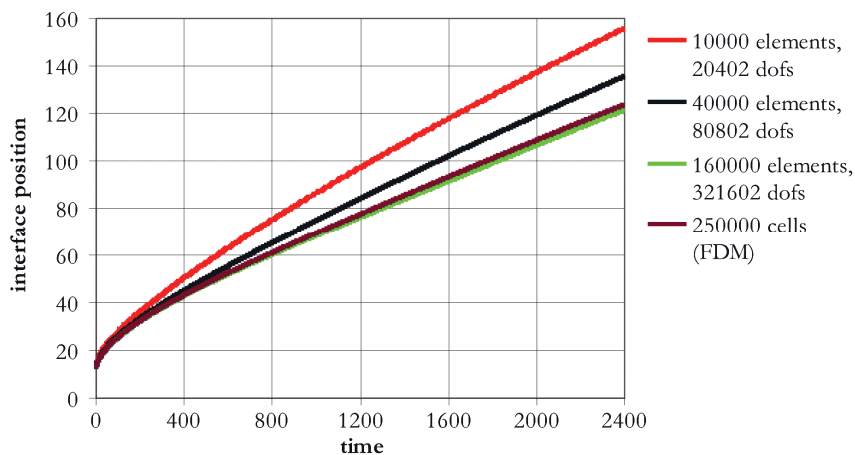


Рисунок 4 – Эволюция во времени вершины дендрита для различных сеток

4 Выводы. В работе представлено численное решение задачи затвердевания бинарного сплава основанное на модели А. Кармы и методе конечных элементов. Численные примеры иллюстрируют правильность и сходимость метода, а также некоторые преимущества по сравнению с методом конечных разностей.

Замечание: эта статья была переведена с английского на русский язык и может ввиду этого содержать неточности.

Список литературы: 1. Boettinger W. J., Warren J. A., Beckermann C., Karma A. Phase-field simulation of solidification // Annual Review of Materials Research. – 2002. – Vol. 32. 2. Rafii-Tabar H., Chirazi A. Multi-scale computational modelling of solidification phenomena // Physics Reports. – 2002. – Vol. 365. 3. Hoyt J. J., Mark A., Karma A. Atomistic and continuum modelling of dendritic solidification // Materials Science and Engineering: R: Reports. – 2003. – Vol. 41. 4. Granasy L., Pusztai T., Warren J. A. Modelling polycrystalline solidification using phase field theory // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2004. – Vol. 16. 5. Hecht U., Granasy L. et al. Multiphase solidification in multicomponent alloys // Materials Science and Engineering: R: Reports. – 2004. – Vol. 46. 6. Asta M., Beckermann C. et al. Solidification microstructures and solid-state parallels: Recent developments, future directions // Acta Materialia. – 2009. – Vol. 57. 7. Gladkov S., Stiemer M., Svendsen B. Phase-field-based modelling and simulation of solidification behavior of technological alloys // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. – 2008. – Vol. 8. 8. Gladkov S., Stiemer M., Grosse-Woehrmann A., Svendsen B. Numerical modelling of phase-separation in binary media based on the Cahn-Hilliard equation // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – Vol. 30. 9. Stiemer M., Grosse-Woehrmann A., et al. Efficient and reliable finite element techniques for phase field models // International Journal of Materials Research. – 2010. – Vol. 101. 10. Karma A. Phase-Field Formulation for Quantitative Modeling of Alloy Solidification // Physical Review Letters. – 2001. – Vol. 87.

Поступила в редколлегию 10.11.2010

Б.Я.КАНТОР, д-р техн. наук, проф., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
С.А.АНДРЮЩЕНКО, Начальник отдела прочности, регулирования,
автоматики и натурных испытаний, ООО «Харьковтурбоинжиниринг»;
С.Ю.МИСЮРА, асп., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРЫШКИ ГИДРОТУРБИНЫ И ВОЗМОЖНОСТЕЙ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ЕЕ КОНСТРУКЦИИ

Чисельно вивчений напружено-деформований стан кришки гідротурбіни, виявлені зони найбільших напружень. Оцінена залежність результатів від густоти сітки скінчених елементів. Перевірено виконання умов за міцністю. Запропонований метод зниження напружень, що не вимагає збільшення товщини елементів конструкції.

Stress-strain state of the hydroturbine cover was numerically investigated. The greatest stress zones were defined. Results dependence of the density of finite element mesh was estimated. Fulfillment of the conditions of strength was verified. A method of reducing stress without increasing the thickness of the structure elements was proposed.

Создание надежных и долговечных циклически симметричных деталей и узлов гидротурбин, к которым можно отнести крышку, требует выполнения анализа их прочностных характеристик теоретическими методами на стадии проектирования, и особенно важно – при определении объемов реконструкции (модернизации) оборудования после истечения нормативного срока эксплуатации. Эта проблема является актуальной как в Украине, так и за рубежом.

1 Постановка задачи. Объект исследования – крышка радиально-осевой гидротурбины.

Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния (НДС) крышки гидротурбины в упругой постановке при двух режимах работы: эксплуатационном и аварийном (срыве уплотнения между крышкой турбины и ступицей радиально-осевого колеса), а также изучение путей совершенствования конструкции крышки и уменьшения ее массы.

Требуется разработать математическую модель крышки и методом конечных элементов (МКЭ) выполнить численное исследование задачи с целью определения НДС конструкции.

2 Обзор предыдущих исследований и методов расчета НДС крышек гидротурбин. Изучение НДС крышки гидротурбины требует применения численных методов механики деформируемого твердого тела, так как получение аналитических (точных) решений невозможно в связи со сложностью ее формы и структуры. Практически во всех известных в этой области исследованиях для решения задачи применен МКЭ.

МКЭ активно используется для решения различных задач механики деформируемого твердого тела. Он достаточно широко представлен в литературе. Можно отметить монографии О. Зенкевича [1, 2], Д. Норри и др. [3],

А.С. Сахарова и др. [4], Р. Галлагера [5].

В работе [6] задача об определении НДС конструкций крышек гидротурбин решена в осесимметричной постановке, причем радиально-осевые ребра приведены к телу вращения эквивалентной жесткости. В работе [7] предложен альтернативный подход, включающий в себя метод подконструкций, разложения перемещений в ряды Фурье и МКЭ. В публикациях [8, 9] проведен анализ конструктивных особенностей крышек гидротурбин и их нагружения, который позволил разработать эффективную методику оценки прочностных и динамических характеристик конструкции (в вакууме). Это дает возможность свести вычисление перемещений к решению независимых задач для каждого члена ряда Фурье. Достоверность результатов, полученных по этой методике, подтверждена в работах [10, 11]. Приведенный подход был применен в [12] для определения НДС крышки, как конструктивно-ортоотропного тела при несимметричном нагружении.

3 Описание объекта. Крышка гидротурбины является трехмерной циклически симметричной конструкцией, состоящей из тонкостенных оболочек вращения, объединенных n -ребрами – меридиональными пластинами сложной конфигурации (рис. 1). В ребрах для размещения механизмов и снижения массы узла предусмотрены вырезы. Габаритные размеры крышки: диаметр 4,76 м, высота 1,45 м.

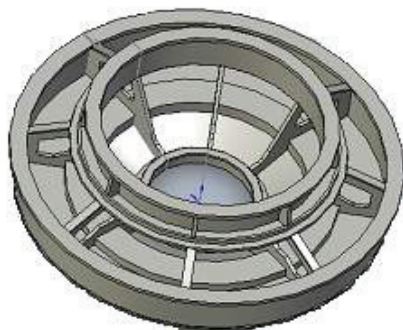


Рисунок 1– Крышка гидротурбины

Конструктивно крышка изготавливается из листового проката стали Ст20 или его аналога ASTM A516 Gr.60 с толщинами в диапазоне от 20 до 50 мм. Механические свойства материала: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона 0,3, плотность 7850 кг/м^3 , предел текучести $\sigma_T = 215$ МПа, временное сопротивление $\sigma_B = 430$ МПа.

Для решения статической задачи определения НДС при осесимметричной нагрузке конструкцию можно рассматривать как циклически симметричную. При этом расчетная схема может быть принята в виде сектора крышки с углом раствора $360/n$ с условиями симметрии на краях (рис. 2).

Крышка крепится к верхнему кольцу направляющего аппарата турбины с помощью шпилек. Нижние поверхности облицовки крышки находятся под

действием давления воды. Величина и характер распределения давления зависят от режима работы (эксплуатационный или аварийный) и определяются в результате гидродинамических расчетов.

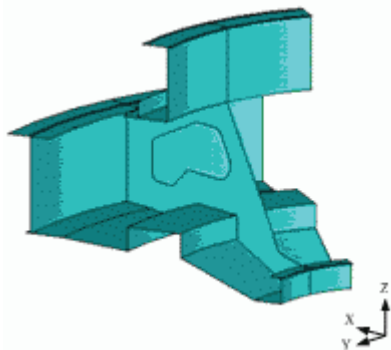


Рисунок 2 – Сектор крышки гидротурбины

Распределение давлений для обоих режимов работы гидротурбины приведены на рис. 3. В эксплуатационном режиме давление меняется в зависимости от радиуса крышек радиально-осевых гидротурбин. Резкое изменение давления характерно для зоны установки верхнего лабиринтного уплотнения рабочего колеса. В аварийном режиме при разрушении уплотнения на участке от минимального радиуса до радиуса установки уплотнения происходит значительное увеличение давления.

4 Моделирование крышки гидротурбины. Поясним основные моменты и использованные приемы при моделировании геометрии крышки. При построении модели сектора вначале задаются ключевые точки в плоскости ребра, по которым строятся линии, затем создается модель ребра (поверхность пластины). Для получения оболочечных частей конструкции и полной модели сектора (см. рис. 2) линии сечений поверхностей оболочек поворачиваются по- и против часовой стрелки на угол $360/2n$. Далее на нее наносится конечно-элементная сетка, после чего на гранях сектора вводятся условия циклической симметрии. Используются треугольные конечные элементы (КЭ) тонкой оболочки (см. далее). Отношение толщины элементов крышки к характерному размеру не превышает $1/10$, поэтому применяется теория тонких оболочек. Вводятся условия закрепления крышки к фланцу верхнего кольца направляющего аппарата, который считается абсолютно жестким – упрощение в принятой расчетной схеме. Сектор закрепляется по окружности, соответствующей оси расположения шпильки фланцевого соединения. Затем к днищу прикладывается гидравлическое давление и приведенная к эквивалентному давлению сила веса установленных на крышку деталей и узлов; учитывается собственный вес конструкции.

В расчетной модели кроме гидравлического давления воды учитывались весовые нагрузки от установленных на крышку деталей и узлов: направляю-

щего подшипника ($m_3 = 7000$ кг), регулирующего кольца ($m_1 = 5300$ кг), части уплотнения вала ($m_2 = \frac{1}{2} \cdot 2500 = 1250$ кг). Весовые нагрузки имитировались приведенным давлением (рис. 4), распределенным по опорным поверхностям, на которые установлены узлы: направляющий подшипник ($P_3 = 0,041$ МПа), регулирующее кольцо ($P_1 = 0,057$ МПа), уплотнения вала ($P_2 = 0,028$ МПа). Сумма масс крышки и приложенных к ней сил составляет 27550 кг, q – давление воды.

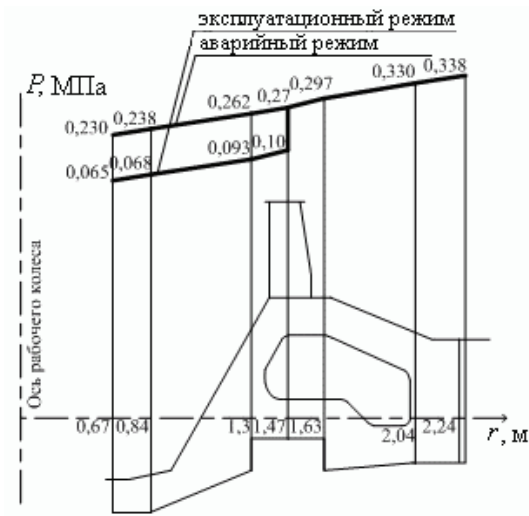


Рисунок 3 – Распределение давления под крышкой турбины

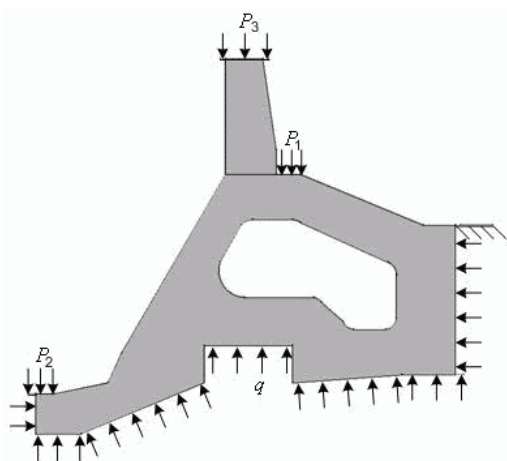


Рисунок 4 – Приведенные к давлению весовые нагрузки и давление воды

Равнодействующую сил давления воды на днище крышки можно оценить по формуле

$$N = 2\pi g \int_{r_0}^{r_n} q(r)rdr,$$

где $q(r)$ – давление в зависимости от радиуса; g – ускорение свободного падения; r – радиус крышки гидротурбины. При эксплуатационном режиме $N = 297$ т, в аварийном – $N = 410$ т.

Для решения задачи используется треугольный упругий оболочечный КЭ с тремя узлами. Элемент в каждом узле имеет шесть степеней свободы: перемещения в направлении осей X, Y, Z и повороты вокруг осей X, Y, Z .

Итоговая конечноэлементная модель крышки гидротурбины (рис. 5) насчитывает 26481 элементов n_e , 13728 узлов n_v и 41184 степеней свободы.

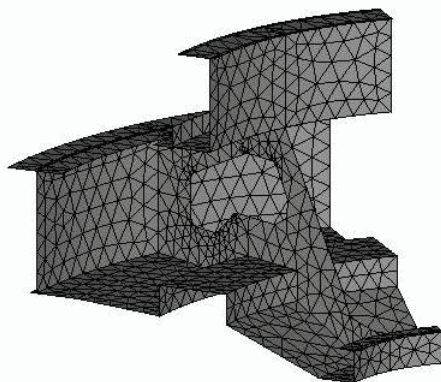


Рисунок 5 – Конечноэлементная модель крышки гидротурбины

5 Оценка достоверности результатов. Для оценки точности полученных результатов задача была решена с использованием измельченной конечноэлементной сетки и с добавлением сгущений на ребрах.

Приведем расчетные данные для аварийного режима работы при изменении размера КЭ во всей модели крышки с применением линейного элемента.

В табл. 1 приведены значения максимальной интенсивности напряжений σ_{\max} и перемещений u_{\max} .

Таблица 1 – Значения интенсивности напряжений и перемещений для линейного элемента

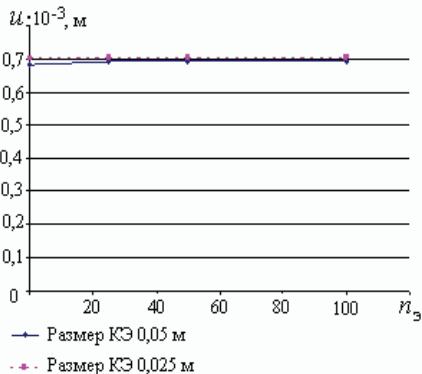
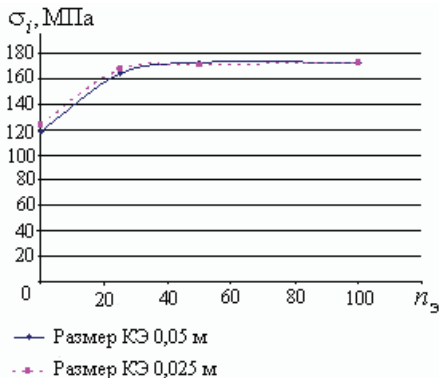
Размер КЭ во всей модели, м	Напряжения σ_{\max} , МПа	Перемещения $u_{\max} \cdot 10^{-3}$, м	Количество узлов n_v
0,1	62,9	0,632	974
0,075	72,6	0,652	1526
0,05	117,9	0,683	3001
0,03	126,0	0,699	7678
0,01	154,1	0,710	65520
0,005	162,0	0,711	260995

Как показывают данные таблицы, измельчение размера КЭ во всей модели не эффективно с точки зрения проверки сходимости, так как требует резко увеличения размерности задачи. Более эффективно сгущение конечноэлементной сетки в области концентрации напряжений, которая возникает в местах скруглений вырезов в ребрах.

В табл. 2 приведены расчетные данные для аварийного режима при сгущении КЭ в области скруглений выреза в ребре крышки.

Таблица 2 – Зависимость результатов от размера КЭ на скруглениях

Размер КЭ во всей модели, м	Количество элементов на скруглениях (сгущение), n_s	Интенсивность напряжений, МПа	Осевые перемещения, $u \cdot 10^{-3}$	Количество узлов n_u
0,05	сгущения нет	117,9	0,683	3001
0,025	сгущения нет	123,9	0,701	10894
0,05	25	164,3	0,691	3464
0,025	25	167,7	0,705	11746
0,05	50	172,6	0,691	3888
0,025	50	171,1	0,705	12336
0,05	100	172,6	0,692	4838
0,025	100	173,1	0,705	13728



Видно, что метод сгущения сетки в зоне концентрации напряжений требует существенно меньших вычислительных затрат, так как локальное сгущение сетки вызывает лишь незначительное увеличение числа узлов.

Различие в значениях максимальной интенсивности напряжений σ_{max} (см. табл. 2 между 7-й и 8-й строками) составляет 0,2 %.

Относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\delta = \left| \frac{x - x_0}{x_0} \right|.$$

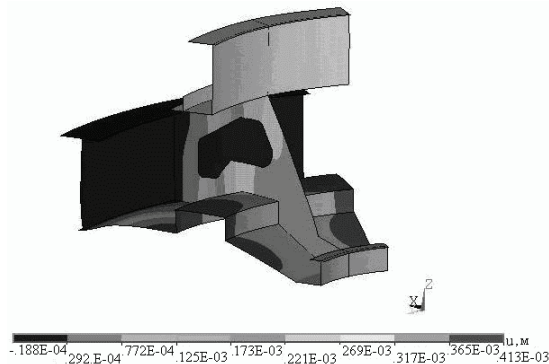
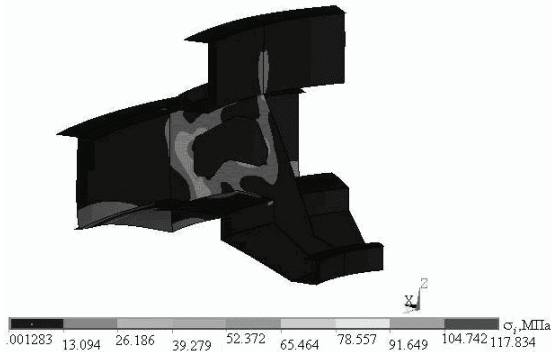
На рис. 6, 7 приведены зависимости интенсивности напряжений σ_i и перемещений u от количества элементов n_3 (сгущения) на скруглениях выреза в ребре.

5 Результаты численного исследования. Проведены расчеты крыши гидротурбины для двух режимов работы: эксплуатационного (при расчетном напоре) и аварийного (срыва уплотнения).

В табл. 3. представлены значения максимальной интенсивности напряжений σ_{\max} и максимальные осевые перемещения u_{\max} , полученные в результате численного исследования.

Таблица 3 – Расчетные данные

Режим работы	Максимальная интенсивность напряжений σ_{\max} , МПа	Максимальные осевые перемещения u_{\max} , м
эксплуатационный	117,8	$0,413 \cdot 10^{-3}$
аварийный	173,1	$0,705 \cdot 10^{-3}$



Распределение интенсивности напряжений σ_i имеет резко неравномерный характер с локальными областями максимальных напряжений σ_{\max} в зоне скруглений выреза в ребре. Максимальные осевые перемещения крышки u_{\max} в зоне установки направляющего подшипника турбины, с учетом рекомендаций полученных при эксплуатации агрегатов, при эксплуатационном режиме не должны превышать значений от 0,5 до 1 мм. Крышка турбины служит основанием для установки направляющего подшипника и ее недостаточная жесткость может привести к повышенным вибрациям гидроагрегата.

Распределения интенсивности напряжений и осевых перемещений в секторе при эксплуатационном режиме показаны на рис. 8, 9.

С целью уменьшения концентрации напряжений на скруглениях выреза в ребре выполнены расчеты по оптимизации геометрии конструкции. В результате расчетов, за счет относительно небольших коррекций геометрии выреза, удалось снизить уровень максимальных напряжений в крышке без увеличения ее массы.

На рис. 10 приведено совмещение двух контуров отверстия в ребре: исходного (сплошная линия) и нового (пунктирная линия).



Рисунок 10 – Контур исходного и нового отверстия ребра

При изменении геометрии отверстия были внесены следующие коррективы: левое нижнее скругление с прилегающей к нему справа линией заменены сплайном; радиус правого верхнего скругления увеличен с 0,05 до 0,2 м; радиус правого нижнего скругления увеличен с 0,05 до 0,12 м.

В табл. 4 приведены расчетные данные для новой формы отверстия ребра.

Распределения интенсивности напряжений в секторе при эксплуатационном режиме с новым отверстием в ребре показаны на рис. 11.

Таблица 4 – Расчетные данные

Режим работы	Максимальная интенсивность напряжений σ_{\max} , МПа
эксплуатационный	87,3
аварийный	125,8

Выводы. Решена задача определения НДС крышки радиально-осевой гидротурбины МКЭ с применением циклически симметричной расчетной схемы. Расчеты выполнены для эксплуатационного и аварийного режимов, учитывались весовые и распределенные гидравлические нагрузки.

Выполнены расчеты по оптимизации крышки гидротурбины и предложен

новый конструктивный вариант геометрии выреза в ребре, при котором значения максимальной интенсивности напряжений снизились на 25% без увеличения массы крышки.

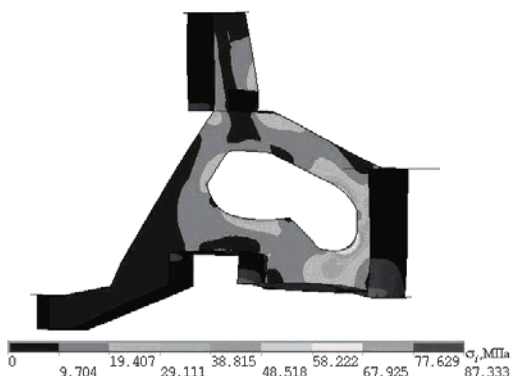


Рисунок 11 – Интенсивность напряжений для новой геометрии ребра

Как уже отмечалось выше, распределение напряжений в исходном варианте конструкции весьма неравномерно. Выполненная работа демонстрирует целесообразность проведения оптимизации крышки методами нелинейного математического программирования на стадии проектирования с целью улучшения ее прочностных характеристик, снижения материалоемкости без ухудшения эксплуатационных и технологических качеств.

Список литературы: 1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. 2. *Зенкевич О.* Конечные элементы и аппроксимация / *Зенкевич О., Морган К.* – М.: Мир, 1986. – 318 с. 3. *Норри Д.* Введение в метод конечных элементов / *Норри Д., Де Фриз Ж.* – М.: Мир, 1981. – 304 с. 4. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / *Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.Н., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кеплер Х., Кочык З.* – К.: Вища школа, 1982. – 480 с. 5. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с. 6. *Медведовская Т.Ф.* Прочность, динамика и ресурс несущих конструкций гидротурбин / *Медведовская Т.Ф., Зеленская О.Н., Медведовский А.В.* // Проблемы машиностроения. – 2007. – 10, № 3. – С. 49-55. 7. *Кантор Б.Я.* Эффективный метод определения напряженно-деформированного состояния конструкций из оболочек или тел вращения, подкрепленных регулярной системой радиальных пластин при несимметричном радиальном и осевом нагружении / *Б.Я. Кантор, В.М. Миткевич* / АН УССР Ин-т проблем машиностроения. – Харьков, 1985. – 16 с. – Деп. в ВИНТИ 26.03.85, № 2484. 8. *Миткевич В.М.* Применение метода конечных элементов и разложений Фурье к расчету циклически симметричных конструкций из тел вращения и радиальных пластин / *Миткевич В.М., Медведовская Т.Ф.* / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – Харьков, 1981. – 47 с. – Деп. в ВИНТИ 2.07.81, №3251. 9. *Кантор Б.Я.* Исследование динамики циклически симметричных несущих конструкций гидротурбин / *Кантор Б.Я., Веремеенко И.С.* и др. // Совершенствование физического моделирования: Тр. междунар. науч.-техн. конф. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 1997. – С. 503-506. 10. *Эйгенсон С.Н.* Экспериментальное исследование напряженного состояния ребер крышек гидротурбин поляризационно-оптическим методом / *Эйгенсон С.Н., Титов В.Б.* // Энергомашиностроение. – 1978. – № 11. – С. 11-14. 11. *Веремеенко И.С.* Конечн-элементный анализ прочностных и динамических характеристик крупногабаритных несущих конструкций гидротурбин / *Веремеенко К.С., Зеленская О.Н.* и др. // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: Тр. междунар. науч.-техн. конф. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2000. – С. 502-508. 12. *Медведовская Т.Ф.* Метод конечных эле-

УДК 539.3; 539.4

Р.Е.КОЧУРОВ, асп., НТУ «ХПИ»;
С.А.БЕЛОВ, канд. техн. наук, зав. лаб., ОАО «УКРНИИХИММАШ»,
Харьков;
К.В.АВРАМОВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Л.В.РОЗОВА, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СОСУДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЕЙСМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Проведено міцнісний розрахунок горизонтального сосуда на сідлових опорах на статичні навантаження і сейсмічний вплив. Напружено-деформований стан конструкції досліджується за допомогою програмного комплексу, що реалізує метод кінцевих елементів. Для сейсмічних розрахунків застосовується лінійно-спектральна теорія сейсмостійкості.

Strength calculations of seismically excited horizontal vessels are carried out. Stress-strain state is analyzed by using software for finite elements calculations. Linear-spectral theory of seismic stability is used.

1 Введение и постановка задачи. Горизонтальные цилиндрические сосуды широко используются в нефтехимической и нефтеперерабатывающей промышленности. Часто такие конструкции устанавливаются в сейсмически активных районах, где есть опасность их разрушения, потери устойчивости и нарушения эксплуатационных режимов. Химические аппараты являются опасными объектами, и аварии на них могут привести к техногенным катастрофам. Поэтому данные конструкции подлежат расчетному анализу, и к ним предъявляются жесткие требования по сейсмостойкости. Отметим, что расчет горизонтальных сосудов на сейсмическое воздействие в соответствии с методиками, опирающимися на ДБН В.1.1 – 12: 2006 [1] не позволяет получить полную картину деформирования, а также учесть большое количество собственных частот конструкции.

В данной работе предлагается подход к расчету напряженно-деформированного состояния аппарата, который базируется на использовании программного комплекса, реализующего метод конечных элементов. Для сейсмических расчетов конструкций применяется линейно-спектральная теория сейсмостойкости [2, 3], которая основана на разложении системы дифференциальных уравнений колебаний по собственным формам. Согласно этому подходу, анализ сейсмостойкости включает следующие этапы: 1) по спектрам отклика вычисляются инерционные сейсмические нагрузки, соответствующие каждой из собственных мод колебаний; 2) данные нагрузки прикладываются как статиче-

ские, при этом определяются модальные отклики (перемещения, поперечные и продольные усилия, моменты) конструкции; 3) суммируя модальные отклики по формулам среднеквадратичного осреднения, вычисляется суммарный отклик, по которому оценивается сейсмостойкость конструкции.

В качестве исследуемой конструкции рассмотрим камерную печь [4], схема которой представлена на рис. 1. Печь представляет собой горизонтальный стальной цилиндрический сосуд – 1, футерованный огнеупорным кирпичом – 2. На торце аппарата установлены горелки 3. Через штуцера 4 производится ввод кислых газов. Выход дымовых газов осуществляется через штуцер 5. Аппарат установлен на седловых опорах – 6.

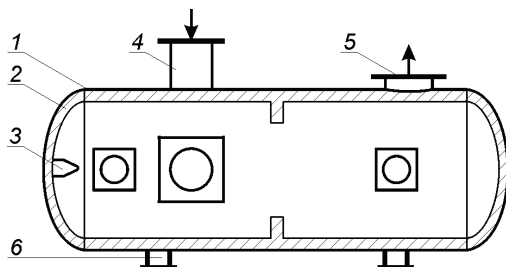


Рисунок 1 – Схема печи

В расчетах использовались следующие параметры системы: длина корпуса аппарата $h = 7,6$ м; внутренний диаметр обечайки $D = 2,8$ м; толщина обечайки $S = 0,016$ м; масса аппарата в рабочем режиме – 41610 кг; внутреннее давление – 1,7 МПа; среднее значение температуры корпуса – 200 °С; материал сосуда и седловых опор – сталь 09Г2С. Высота установки конструкции – 40 м.

2 Математическая модель аппарата. Для создания расчетной модели использовались 4х-узловые конечные элементы оболочки имеющие шесть степеней свободы в узле: перемещения в направлениях осей X , Y , Z и углы поворота относительно этих осей. Геометрическая модель аппарата с конечно-элементной сеткой приведена на рис. 2. Аппарат жестко защемлен в точках основания седловых опор (см. рис. 2).

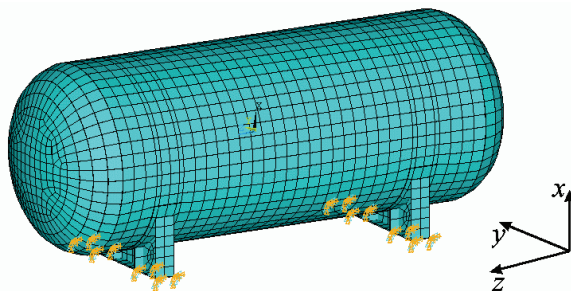


Рисунок 2 – Модель аппарата и его конечно-элементная сетка

3 Статический анализ конструкции. Ниже приведены результаты статического расчета. В рабочем режиме на сосуд действует давление газа, температурное поле, весовые нагрузки. На рис. 3, *а* представлена диаграмма суммарных перемещений аппарата. Максимальные прогибы в корпусе составляют 1.3 мм. На рис. 3, *б* представлена диаграмма распределения эквивалентных напряжений в конструкции. Максимальные напряжения возникают в области примыкания эллиптического днища к цилиндрической части и составляют 77,8 МПа.

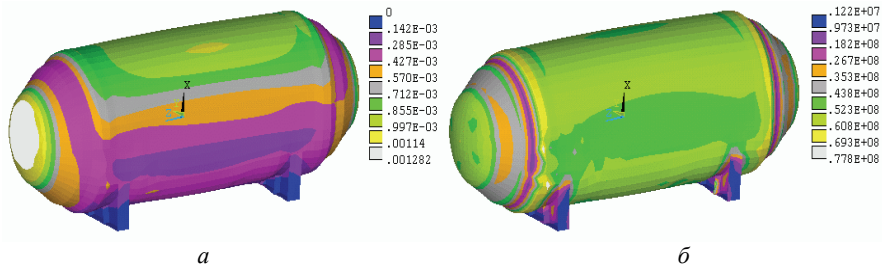


Рисунок 3 – Результаты статического расчета: *а* – диаграмма суммарных перемещений (м); *б* – диаграмма эквивалентных напряжений (Па).

4 Сейсмический анализ системы. Произведем анализ прочности аппарата при действии сейсмической нагрузки. В качестве исходных данных этой нагрузки используем обобщенные спектры отклика (рис. 4) [5]. Данный подход позволяет исследовать прочность, как корпуса аппарата, так и его сборочных единиц, а также позволяет учесть влияние составных частей аппарата (в данном случае седловых опор) на общую картину деформирования.

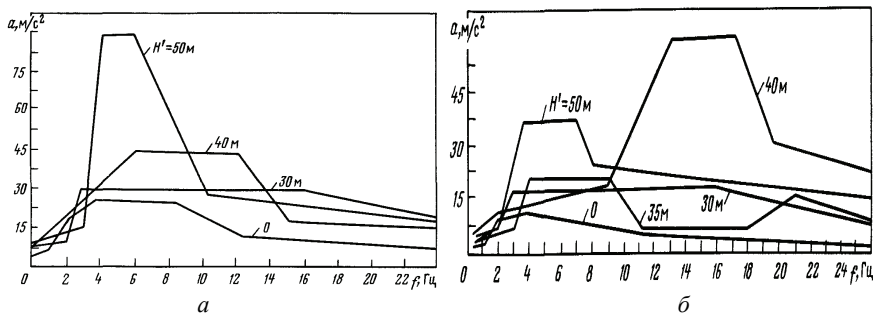


Рисунок 4 – Обобщенные спектры отклика колебаний при относительном демпфировании $K = 0,02$ и сейсмичности площадки 9 баллов: *а* – горизонтальных; *б* – вертикальных.

Длина сейсмической волны по сравнению с протяженностью сооружения весьма велика. Поэтому предположим, что при ее проходе фундамент сооружения испытывает лишь некоторое поступательное перемещение вдоль координатных осей (рис. 2).

В табл. 1 приведены собственные частоты колебаний конструкции, расположенные в порядке возрастания в диапазоне от 0 до 30 Гц. Этот частотный диапазон соответствует сейсмическому нагружению.

Результаты сейсмического анализа представлены на рис. 5-7. На рис. 5 представлены диаграммы максимальных суммарных перемещений и максимальных эквивалентных напряжений от сейсмического воздействия при возмущении вдоль оси x . В этом случае наибольший вклад в деформирование сосуда вносят формы с номерами частот $i = 2,3,4,6,7$ (табл. 1). Максимальные прогибы, возникающие в корпусе аппарата, составляют 2,9 мм. Максимальные эквивалентные напряжения в корпусе аппарата составляют 31,3 МПа, напряжения на опорах – 69,3 МПа.

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний конструкции

i	1	2	3	4	5	6	7	8
ω_i (Гц)	8,9761	15,928	16,630	19,248	20,783	24,190	24,776	28,284

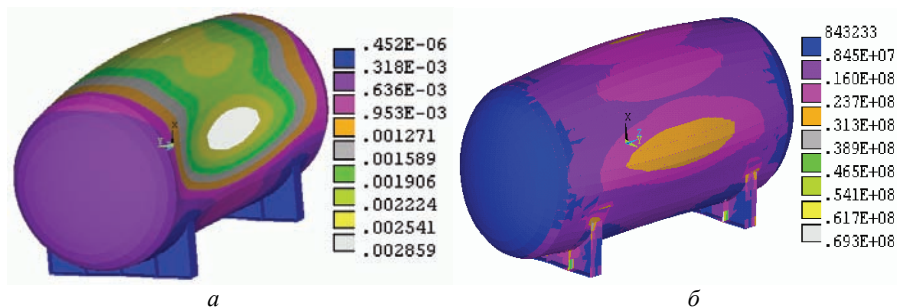


Рисунок 5 – Результаты сейсмического анализа при возмущении в направлении оси x :
 а – диаграмма суммарных перемещений (м); б – диаграмма напряжений (Па)

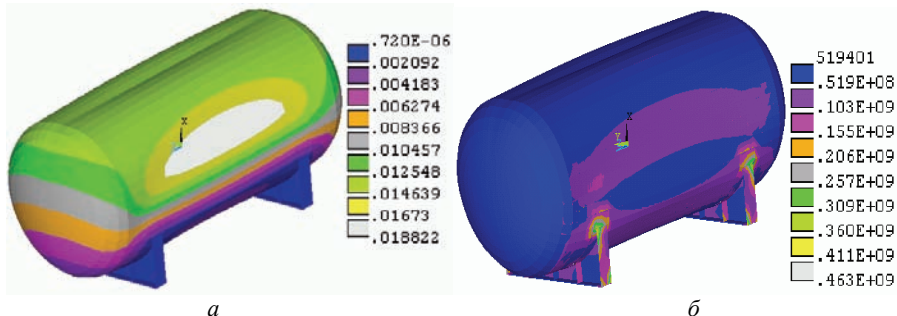


Рисунок 6 – Результаты сейсмического анализа при возмущении в направлении оси y :
 а – диаграмма суммарных перемещений (м); б – диаграмма напряжений (Па)

Рис. 5 соответствует сейсмическому возмущению конструкции вдоль оси y . При этом наибольший вклад в деформирование сосуда вносят формы с номерами частот $i = 1,3,5,8$. Максимальные прогибы составляют 18,8 мм. Макси-

мальные эквивалентные напряжения в корпусе аппарата составляют 155 МПа, на опорах – 463 МПа.

Рис. 6 представляет результаты сейсмического анализа от возмущений вдоль оси z . Наибольший вклад в деформирование сосуда вносят формы с номерами частот $i = 2, 4, 6, 7$. Максимальные прогибы составляют 0,9 мм. Максимальные эквивалентные напряжения в корпусе аппарата составляют 22,5 МПа, на опорах – 101 МПа.

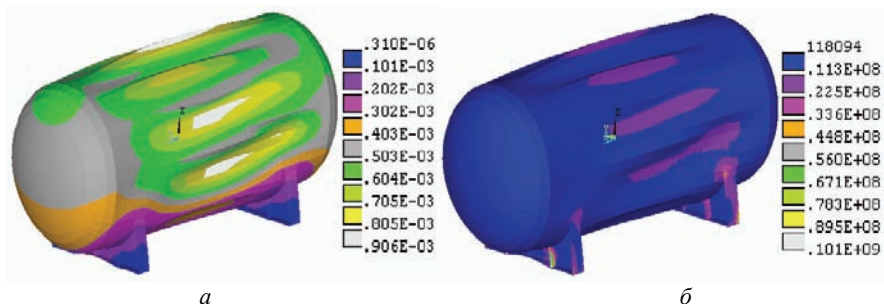


Рисунок 7 – Результаты сейсмического анализа при возмущении в направлении оси z :
 а – диаграмма суммарных перемещений (м); б – диаграмма напряжений (Па)

5 Оценка прочности конструкции. Результаты статического расчета (от статических нагрузок в рабочем режиме) и сейсмического анализа (от динамического воздействия при сейсмичности 9 баллов) свидетельствуют о том, что максимальные эквивалентные напряжения, возникающие в корпусе аппарата и на опорах, не превышают допустимых [6]:

$$\sigma_{max} = 463 \text{ МПа} < 3 [\sigma] = 495 \text{ МПа.}$$

Выводы. В статье представлен анализ динамической прочности печи, представляющей собой горизонтальный цилиндрический сосуд, установленный на седловых опорах, при сейсмическом воздействии. Приведенный расчет показывает, что рассматриваемая конструкция отвечает требованию сейсмостойкости при сейсмичности 9 баллов. При этом напряжения от сейсмического воздействия оказываются определяющими. Они в несколько раз превышают статические напряжения. Отметим, что для данного сосуда наиболее опасным направлением при сейсмическом возмущении является направление вдоль оси u .

Список литературы: 1. ДБН В.1.1 – 12: 2006. Будівництво у сейсмічних районах України. – Київ: Міністерство будівництва, архітектури та житлово-комунального господарства України, 2006 р. – 49 с. 2. Бирбраер А. Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость / А. Н. Бирбраер. – СПб.: Наука, 1998. – 255с. 3. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учеб. / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лацеников, Н. Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с. 4. Исламов М. Ш. Печи химической промышленности / М. Ш. Исламов. – Ленинград: Химия, 1975. – 432 с. 5. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1989 г. – 528 с. 6. ГОСТ Р 52857.1 – 2007. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. Общие требования.– М.: Стандартинформ, 2008 г. – 22 с.

Поступила в редколлегию 10.10.2010

А.А.ЛАРИН, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ»

Ю.В.АРЕФИН, Автомобильно-дорожный институт, Дон НТУ, Донецк

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНЫ С УЧЕТОМ ЕЕ ВНУТРЕННЕЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ И ОРТОТРОПИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

У роботі представлено комп'ютерну модель пневматичної шини, яка враховує наявність всіх внутрішніх шарів шини з їх індивідуальними властивостями, а також їх ортотропію. Представлено методику визначення механічних властивостей композитних шарів. На основі моделі проведений аналіз статичного напружено-деформованого стану шини під дією внутрішнього тиску повітря. Визначено ступінь напруженості кожного з шарів шини.

In the work the computer model of a pneumatic tire, which takes into account all its internal layers with their individual properties, as well as their orthotropy have been given. A method for determining the mechanical properties of composite layers is represented. Analysis of the static stress-strain state which appears under the influence of the internal air pressure has been carried out on the base of developed model. The stress level of each tire layer has been determined.

Введение. Надежность, функциональные и эксплуатационные характеристики автомобиля во многом определяются параметрами пневматических шин. Это приводит к необходимости выдвигать к ним высокие требования, которые разделяются на следующие группы: безопасность, экономичность, комфортабельность, низкая стоимость [1,2]. Полностью удовлетворить всем приведенным требованиям практически не возможно.

Наиболее важной характеристикой качества шин является срок их службы, который определяется способностью шинных материалов сопротивляться различным видам разрушения. Работоспособность шины зависит от физико-механических свойств материалов, внешних эксплуатационных факторов и ее конструктивных особенностей шины.

Основные виды разрушения элементов пневматических шин связано с явлениями усталости, которые возникают в результате динамических циклических деформаций при ее качении по дороге. Полный комплекс загрузок, которые воздействуют на движущуюся шину, а это и внутреннее давление, и вертикальное нагружение от веса автомобиля, и влияние неровностей дорожного покрытия и температурное поле – чрезвычайно многообразен и приводит к невероятно сложной математической задачи даже численная симуляция которой в полной мере невозможна на сегодняшний день. В этой связи инженерные расчеты пневматических шины проводятся поэтапно: статическая постановка, анализ линейных автономных колебаний, анализ вынужденных колебаний, задача определения теплообразования, исследование кинетики роста усталостной повреждаемости и, наконец, определение ресурса шины.

При этом на каждом следующем этапе шина должна рассматриваться как предварительно напряженная конструкция. Особенно это касается вопросов связанных с динамическими задачами. Действительно статическое деформи-

рованное состояние определяет положение равновесия системы вокруг, которого рассматриваются колебательные процессы, а начальные напряжения способны совершать работу на возникающих динамических деформациях, а, значит, влиять на жесткость конструкции.

Поэтому, несмотря на то, что надежность пневматической шины в первую очередь определяется ее динамическим поведением, важнейшим этапом анализу является решение задачи ее статического деформирования. При этом точность соответствующего решения имеет особенную важность, так как оно используется в дальнейшем в качестве исходной информации.

1 Объект исследования. В работе рассматривается пневматическая радиальная шина, предназначенная для легковых автомобилей. На рис. 1 приведена геометрическая схема профиля шины и основные определяющие размеры. Исследования проводились для шины украинского производства ОАО «Россава» модель БЦ-43.

Основные параметры шины имеют следующие значения:
 общий диаметр колеса $D = 576$ мм; ширина шины $B = 182$ мм;
 диаметр диска $D_{\text{rim}} = 329,4$ мм; положение средней линии $H_c = 69,93$ мм;
 высота шина $H = 123,3$ мм; длина беговой части $L = 122$ мм.

Внутренний контур шины определяется типами и размерами ее слоев. В зависимости от типа шины, ее назначения внутренняя структура может иметь существенные отличия (в первую очередь в размерах и количестве каждого из видов слоев). Вместе с тем, несмотря на такое разнообразие в зависимости от назначения и положения существует некоторая унификация структурных элементов шины (рис. 2). Шина состоит из беговой части, плечевой зоны, боковой стенки и борта [1,2].

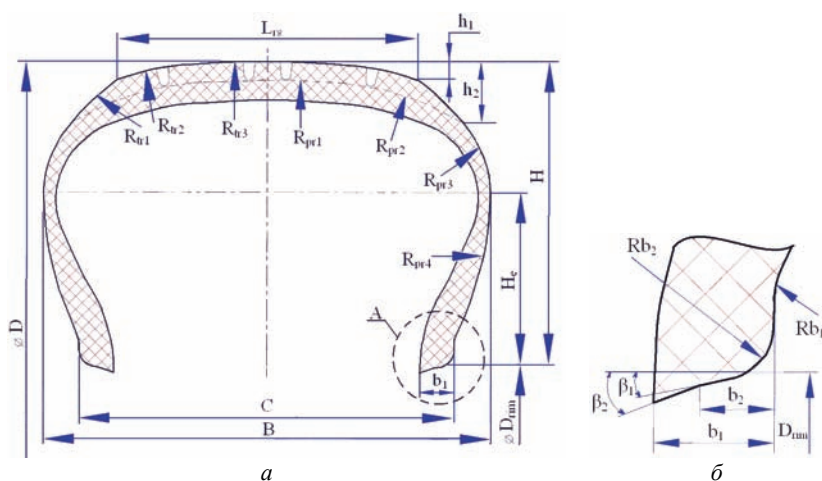


Рисунок 1 – Геометрическая модель профиля поперечного сечения пневматической шины и его основные размеры: а – профиль шины; б – борт

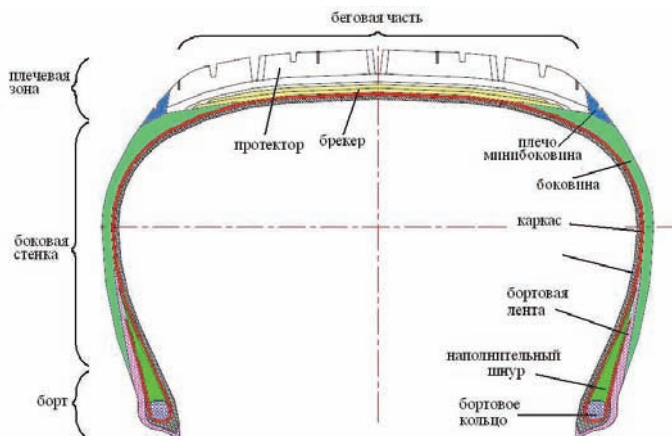


Рисунок 2 – Структурная карта пневматической шины

Так в основании любой шины лежит резиноканевый кордный слой, которых охватывают всю шину и заворачиваются вокруг бортовых колец, образуя ее каркас. У бескамерных шин к внутренней стороне каркаса привулканизирован герметизирующий слой (прослойка).

По периметру каркаса располагается почти нерастяжимый металлический пояс (бортовое кольцо). Бортовая зона благодаря своей форме и высокой жесткости обеспечивает герметичность и надежность посадки шины на диск. Кроме того бортовое кольцо охватывает каркас и трансформирует его первоначально круглый профиль в более плоский.

Беговая часть – это часть шины, которая непосредственно находится во взаимодействии с дорожным покрытием, что определяет особенности ее конструкции: ее поверхность должна обеспечивать наибольшую площадь контакта шины с дорогой (для надежного сцепления) при наименьшей деформации боковой стенки. В связи с этим для увеличения жесткости беговой зоны сверху на каркас накладывается брекер, состоящий из нескольких слоев корда (стального или же из другого материала).

Внутренняя структура шины защищается от воздействия внешней среды резиновыми слоями: протектором и боковиной.

Механические свойства основных резиновых смесей применяемых в различных слоях шины. В основе каждого из слоев пневматической шины лежит некоторая резиновая смесь. В зависимости от функционального назначения слоя применяются различные резины, при этом их свойства могут иметь существенные отличия. Так в таблице 1 сведены основные механические свойства резиновых смесей, используемых в исследуемой пневматической шине (БЦ-43).

Как отмечалось ранее среди всех слоев, из которых состоит пневматическая шина слои каркаса и брекера представляют собой резинокордные композиты. Основные механические и геометрические параметры матрицы и во-

локна этих композитов сведены в табл. 2 (некоторые параметры матриц приведены в табл. 1).

Таблица 1 – Механические свойства основных резиновых смесей, используемых в исследуемой пневматической шине (БЦ-43)

Назначение резиновой смеси	Модуль Юнга,	Модуль сдвига,	Предел прочности при растяжении,	Относительное удлинение при разрыве,
	Е, МПа		G, МПа	
гермослой	3	1	7,8	350
каркас	6	2	19,6	400
наполнительный шнур	16	5.3	9.8	150
бортовое кольцо	16	5.3	11.3	130
боковина	3,74	1,25	14,7	550-750
брекер	6	2	19,6	350
подпротекторный слой	3	1	16,7	490-650
протектор	3	1	15,7	400
Коэффициент Пуассона резиновых материалов			$\nu = 0,49$	
Плотность резиновых материалов			$\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$	

Таблица 2 – Параметры композитных слоев шины (БЦ-43)

	Каркас	Брекер
Жесткость нити корда	1333 Н/нить	24040 Н/нить
Диаметр корда	0,63 мм	0,64 мм
Частота укладки волокон	1130 нить/м	600 нить/м
Угол укладки корда	0	± 70 град
Толщина «обрезинки» (матрицы)	1,17 мм	1,23 мм

В данной работе исследования проводятся в предположении того, что все слои шины можно считать состоящих из сплошного материала с усредненными свойствами. Композитные слои шины при этом представляют собой классический ортотропный материал.

Для определения усредненных параметров каркаса и брекера в работе предлагается воспользоваться трехмерным обобщением *Pelc* [3,4] для упрощенного правила смеси *Halpin-Tsai* [4,5,6].

$$E_1 = E_c \nu_c + E_r (1 - \nu_c); \quad E_2 = E_r \frac{(1 + 2\nu_c)}{(1 - \nu_c)}; \quad E_3 = E_2; \quad (1)$$

$$G_{12} = \frac{G_r [G_c + G_r + (G_c - G_r) \nu_c]}{G_c + G_r + (G_c - G_r) \nu_c}; \quad G_{13} = G_{23} = 3G_{12}; \quad (2)$$

$$v_{12} = v_c v_c + v_r(1 - v_c); \quad v_{13} = v_{12}; \quad v_{23} = 0,48 - v_{21}, \quad (3)$$

где $E_c, E_r, G_c, G_r, v_c, v_r$ – модули упругости, сдвига и основные коэффициенты Пуассона корда и матрицы соответственно; v_c – объемная доля волокна в композите; индексы 1, 2, 3 – соответствуют направлениям: ориентации волокна, поперечному направлению и направлению из плоскости слоя. Остальные коэффициенты Пуассона определяются исходя из соображений симметрии упругих свойств:

$$v_{21} = v_{12} \frac{E_2}{E_1}; \quad v_{31} = v_{13} \frac{E_3}{E_1}; \quad v_{32} = v_{23} \frac{E_3}{E_2}. \quad (4)$$

Исследование статического НДС шины в осесимметричной постановке. В работе проведены исследования статического деформирования пневматической шины находящейся под действием внутреннего давления воздуха. Нагружение шины при этом происходит в рамках осевой симметрии, что дает возможность искать решение задачи также в осесимметричной постановке. На рис. 3 приведена плоская КЭ модель шины. Модель учитывает наличие различных слоев шины, каждый из которых обладает своими механическими свойствами. Композитные слои (каркас и брекер) заданы не в глобальной, а в специально созданных локальных системах координат, так чтобы ориентация материальных свойств КЭ соответствовала ориентации соответствующих слоев в шине. Кроме осевой симметрии учитывалась также и симметрия поперечного сечения.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов статического деформирования шины.

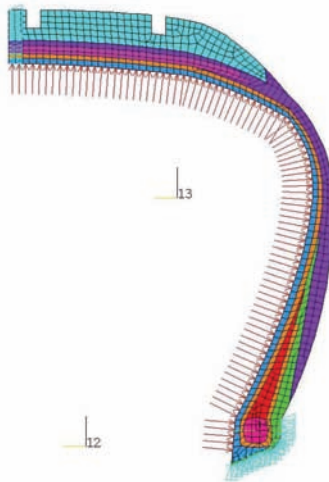


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель сечения пневматической шины с учетом ее многослойной структуры и граничных условий

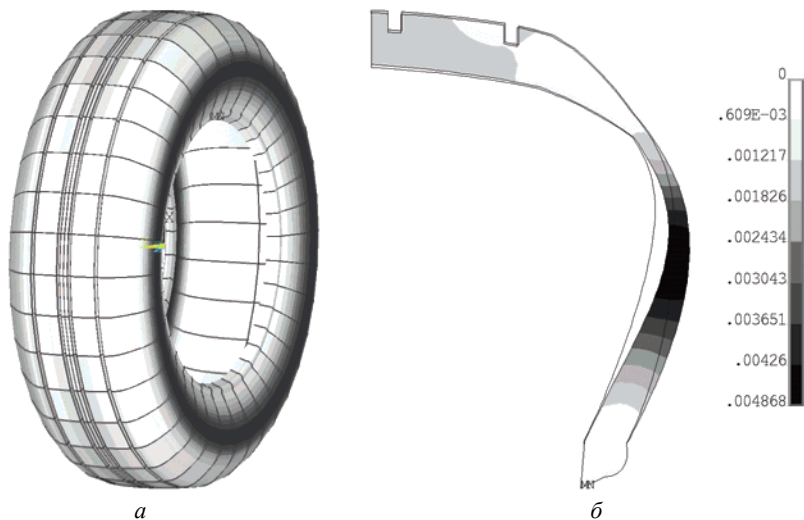


Рисунок 4 – Деформация пневматической шины нагруженной внутренним давлением

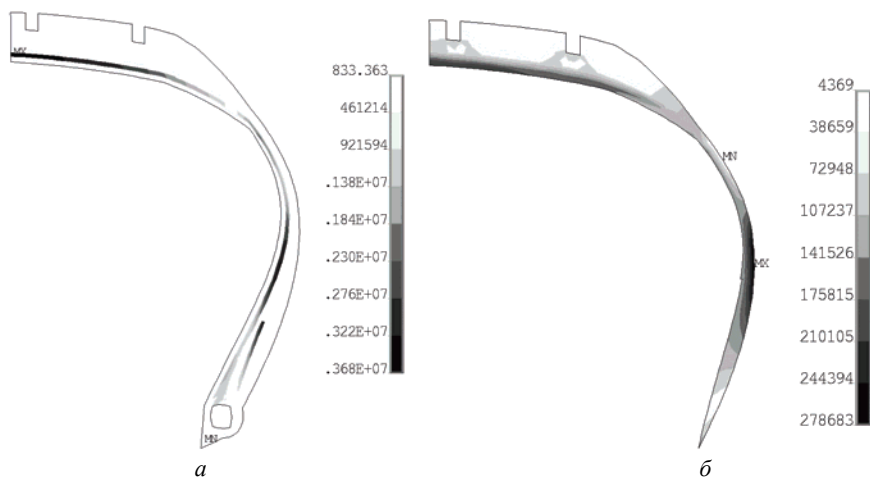


Рисунок 5 – Распределение напряжений в сечении пневматической шины нагруженной внутренним давлением: *а* – распределение по всему сечению; *б* – распределение в боковине, брекере и протекторе.

Как видно из приведенных результатов напряжения распределяются не равномерно, при этом можно выделить некоторые наиболее нагруженные зоны. Наиболее напряженными местами шины являются бортовое кольцо (оно же совпадает с местом заделки) и каркас, который и воспринимает основное нагружений от внутреннего давления. Исключая из рассмотрения каркас и борт (рис. 5, *б*), можно видеть, что остальные слои также имеют неравномер-

ное напряженное состояние с наличием концентрации напряжений в районе боковины шины, и слоев брекера. Кроме того следует отметить, что наличие протектора формирует существенную неоднородность напряженного состояния в беговой зоне приводя к наличию областей локализации напряжений в районе самих канавок протектора. Однако следует отметить, что полученные напряжения с точки зрения прочности весьма незначительны.

Выводы. Таким образом, в данной работе представлено компьютерную модель пневматической шины, которая учитывает наличие всех внутренних слоев шины с их индивидуальными свойствами, а также ортотропию композитных слоев (каркаса и брекера). Представлено методику определения механических свойств ортотропных слоев. На основе модели проведен анализ статического напряженно-деформированного состояния шины возникающего при воздействии внутреннего давления воздуха. Определено степень напряженности, каждого из слоев шины.

Список литературы: 1. Бухин Б.Л. Введение в механику пневматических шин / Б.Л. Бухин. – М.: Химия, 1988. – 224 с. 2. Кнороз В.И. Работа автомобильной шины / В.И. Кнороз. – М.: Транспорт, 1978. – 238 с. 3. J. Pelc Material modelling in cord-rubber structures // KGK Kautschuk Gummi Kunststoffe. – 53. Jahrgang, N 10. – 2000. – PP. 561-565. 4. Er. M. Akif Finite element analysis of cornering characteristics of rotating tires // PhD thesis, The Middle East Technical University. – 2003. – PP. 178. 5. S.K. Clark (Chairman of Editorial Board) et al The pneumatic tire // National Highway Traffic Safety Administration. USA Dep. Of Transportation. – 2006. – Pp. 707. 6. Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.

Поступила в редколлегию 25.11.2010.

УДК 303.01 / 504.054

В.В.ЛЕВЕНЕЦ, канд. физ.-мат. наук, нач. отдела, ННЦ «ХФТИ», Харьков;
И.Л.РОЛИК, мл. науч. сотр., ННЦ «ХФТИ», Харьков

МЕТОД ВЫРАЖЕНИЯ СПЕЦИФИЧЕСКИХ И НЕСПЕЦИФИЧЕСКИХ ИНГАЛЯЦИОННЫХ РИСКОВ В ЕДИНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ

В роботі обґрунтовується необхідність і спроможність виразу вираження в єдиних показниках специфічних і неспецифічних ризиків для здоров'я людини при інгаляційному шляху надходження забруднюючих речовин. Наводиться метод, який реалізує відповідну можливість і його застосування на прикладі ризиків для здоров'я працівників Вільногірського гірничо-металургійного комбінату.

The paper explains the necessity and possibility to express in single indicators the specific and non-specific risks to human health at inhalation route of pollutants. The method that implements proper possibility is presented as well as its application as an example of risks to health of workers of Volnogorsky Mining and metallurgical Combine.

Введение

Неоспоримой является необходимость строгого экологического контроля при проектировании и реализации новых, модернизации уже существующих промышленных проектов. При оценке их воздействия на окружающую среду и здоровье населения важно не просто оценить фактические параметры среды и степень изменения ее абсолютного состояния, а определить уровень влияния данного изменения на реципиентов или смежные компоненты среды.

С целью решения данной задачи уже несколько десятилетий развивается новое направление, основанное на принципе теории рисков. Конкретные методические подходы здесь отличаются в постановке задачи, масштабах, достоверности, схеме исследования, типе применяемого математического и аналитического аппаратов. Такие различия приводят к несоответствию получаемых результатов оценки рисков.

Целью работы является разработка метода выражения в единых показателях специфических и неспецифических ингаляционных рисков полученных на основании так называемой классической методики оценки рисков [1] и методологии основанной на принципах гигиенического регламентирования вредных факторов ОС [2].

Оценка риска – отличия и сходства методик

Оценка риска – это оценка вида и степени выраженности опасности, создаваемой агентом в результате существующего или возможного воздействия на определенную группу людей, а также существующий или потенциальный риск для здоровья, связанный с данным агентом [3].

Исходя из приведенного определения риска следует, что понятие риск в широком смысле, подразумевает под собой две основные составляющие: качественную и количественную. Качественная - заключается в определении т.н. опасности для организма, ее характере и степени выраженности. Количественный анализ заключается в определении вероятности возникновения или невозникновения отрицательного эффекта [4]. Таким образом, двойственность самого понятия риска обуславливает и разницу в методических подходах его исследования, что особенно выражено при оценке неканцерогенных эффектов обладающих т.н. порогом воздействия. В настоящее время уже существуют четкие методологические основы оценки перечисленных составляющих риска, из которых широко используемыми являются т.н. классическая методология оценки риска и методология основанная на принципах гигиенического регламентирования вредных факторов ОС. Основные отличия данных подходов представлены в табл. 1.

Общим для обеих концепций является в основном то, что:

- гигиенические нормативы по существу служат критериями риска неблагоприятных эффектов от воздействия физических, химических и биологических факторов, поскольку они отражают определенную вероятность возникновения у лиц специфических и неспецифических эффектов;

- используется пороговый принцип воздействия агентов риска;
- возможно определение комплексного и комбинированного воздействия загрязняющих веществ;
- шкала приемлемости рисков включает 5 уровней опасности [1, 2, 5].

Таблица 1 – Отличия методических подходов оценки риска для здоровья человека

Принципы оценки	Классическая методология оценки риска	Методология оценки риска основанная на принципах гигиенического регламентирования
Показатели опасности агентов риска (определение дозозависимых реакций)	Референтные дозы или концентрации (RFD, RFC)	Предельно допустимые концентрации (ПДКм.р., ПДКс.с)
Метод оценки риска	Кратность превышения безопасного уровня	– модель индивидуальных порогов (острое воздействие); – линейно-экспоненциальная модель (хроническое воздействие)
Конечные показатели риска	Индекс опасности (HQ) – характеризует наличие или отсутствие опасности для конкретных органов и систем (качественная составляющая).	– вероятность развития рефлекторных реакций (Rref.); – вероятность роста общей заболеваемости (Rxp.) (количественная составляющая).
Оцениваемые эффекты воздействия	Специфический	Неспецифический
Шкала приемлемости	Базируется на превышении референтного уровня	Учитывает количество негативных реакций

Анализ отличий и сходств данных методических подходов оценки риска, а так же фактических исследований с их применением, свидетельствует о несоответствии получаемых уровней опасности рисков для ряда веществ, но о возможности их сопоставления. Результаты произведенных исследований позволяют сделать вывод о возможности и необходимости разработки метода выражения специфических и неспецифических рисков в единых показателях, что упростит интерпретацию результатов оценки рисков для здоровья человека.

Метод определения единых показателей степени опасности специфических и неспецифических рисков

Метод выражения величин специфических и неспецифических неканцерогенных рисков в единых показателях осуществляется в 2 этапа.

Первый из них заключается в присвоении каждому значению риска одной из пяти, так называемых категорий соответствия, отвечающих определенной степени опасности данного значения риска. Предлагается разделение на пять основных категорий, которые позволяют сопоставлять степени опасности имеющие место при оценке отдельно специфических и неспецифических рисков, см. табл. 2 [1, 2, 5].

Таблица 2 - Категории соответствия

Категории соответствия	Специфический риск (HQ)	Риск рефлекторных реакций (Rреф.)	Риск хронической интоксикации (Rхр.)
A	$\leq 0,1; 0,1 - 1$	$\leq 0,02$	$\leq 0,05$
B	$= 1$	0,02-0,16	0,05-0,16
C	1-5	0,16-0,5	0,16-0,5
D	5-10	0,5-0,84	0,5-0,84
I	≥ 10	0,84-1	0,84-1

Таблица 3 – Единые показатели степени опасности рисков

Сочетание категорий соответствия	Единая степень опасности риска	Характеристика проявления неблагоприятных эффектов
AA	Удовлетворительная	Отсутствуют неблагоприятные медико-экологические тенденции
BB, AB, AC	Относительно напряженная	Недостовверная тенденция роста общей заболеваемости у особо чувствительных подгрупп, единичные случаи специфической патологии (недопустимый для населения, допустимый для производственных условий)
AI, BD, CC, BC, AD	Существенно напряженная	Достоверный рост общей заболеваемости, появление значительного числа случаев специфической патологии
DD, CI, CD, BI	Критическая	Специфические и неспецифические патологии носят массовый характер, тенденция к увеличению смертности
II, DI	Катастрофическая	Появление случаев хронического отравления, изменение структуры заболеваемости, достоверная тенденция к росту смертности и пр. (переход в иное качественное состояние)

Таблица 4 – Риск для здоровья рабочих металлургического производства
ВГМК

Название вещества	Хроническое воздействие		Острое воздействие	
	HQ	Rxp.	HQ	Rref.
Аммиак	12 / I	0.341 / C	19 / I	0.976 / I
Водород хлорид	20 / I	0.051 / A	1.1 / B	0.768 / D
Ксилол	65 / I	0.445 / C	7.7 / D	1 / I
Пыль (SiO ₂ < 20 %)	11.4 / I	0.126 / B	-	0.921 / I
Углерод оксид	0.06 / A	0.002 / A	0.03 / A	-
Серная кислота	99 / I	0.021 / A	5.2 / D	0.992 / I
Фосген	1124 / I	1 / I	395.7 / I	1 / I
Хлор	760 / I	0.086 / B	3.6 / C	0.654 / D
ΣHI	2093 / I	1 / I	432 / I	1 / I

Таблица 5 – Сравнительная характеристика уровней риска

Тип риска	Уровень опасности	
	Хроническое воздействие	Острое воздействие
Специфический	I – фосген, хлор, серная кислота, ксилол, водорода хлорид, аммиак, пыль (SiO ₂ < 20 %); A – углерода оксид	I – фосген, аммиак; D – ксилол, серная кислота; C – хлор; B – водорода хлорид; A – углерода оксид.
Неспецифический	I – фосген; C – ксилол, аммиак B – пыль (SiO ₂ < 20 %), хлор, A – серная кислота, водорода хлорид, углерода оксид	I – фосген, серная кислота, ксилол, аммиак, пыль (SiO ₂ < 20%); D – водорода хлорид, хлор A – углерода оксид
Единая степень опасности	Катастрофическая – фосген; Критическая – аммиак, ксилол, хлор, пыль (SiO ₂ < 20 %); Существенно напряженная – серная кислота, водорода хлорид Удовлетворительная – углерода оксид	Катастрофическая – фосген, аммиак, ксилол, серная кислота, пыль (SiO ₂ < 20 %); Критическая – хлор; Существенно напряженная – водорода хлорид Удовлетворительная – углерода оксид

На втором этапе производится сравнение присвоенных категорий специфических и неспецифических рисков для каждого вещества при одинаковой экспозиции и сценарии воздействия. В зависимости от сочетания категорий соответствия предлагается отнесение вещества к одной из пяти единых степеней опасности (табл. 3). Разработка категорий соответствия и единых степеней опасности производилась на основании существующих градаций степени

приемлемости неканцерогенных рисков (таблицы) с учетом принципа возможной переоценки риска. То есть при сочетании менее и более опасных уровней риска, не имеющих между собой промежуточного критерия, данному сочетанию присваивалась более высокая степень опасности.

Таким образом в качестве основных агентов риска для рабочих металлургического производства ВГМК выступают (по мере снижения уровня риска): фосген, аммиак, ксилол, серная кислота, пыль ($\text{SiO}_2 < 20\%$), хлор, хлористый водород. При этом у всех реципиентов будет наблюдаться нарушение деятельности следующих органов и систем: органов дыхания, печени, почек, ЦНС, иммунной системы, глаз.

Выводы

Произведен анализ отличий и сходств методических подходов оценки риска для здоровья человека, ориентированных на определение качественной и количественной составляющей риска. Разработан метод выражения уровней опасности специфических и неспецифических ингаляционных рисков в единых показателях. Полученный метод реализован при оценке риска здоровья рабочих металлургического производства ВГМК.

Базируясь на разработанном методе, возможно сопоставлять идентифицированную специфическую опасность возникающую при влиянии агента риска, со значением вероятности его возникновения, что позволит с большей эффективностью планировать меры по снижению риска в экологически неблагоприятных районах, организации мониторинга окружающей среды и т.д.

Список литературы: 1. МР «Оцінка ризику для здоров'я населення від забруднення атмосферного повітря» – К: МОЗ України Наказ № 184 від 13.04.2007. 2. МР «2.1. Комплексная гигиеническая оценка степени напряженности медико-экологической ситуации различных территорий, обусловленной загрязнением токсикантами среды обитания населения». – М: № 2510/5716-97-32 от 30.07.1997. 3. *Большаков А.М.* Оценка и управление рисками влияния окружающей среды на здоровье населения / *Большаков А.М., Крутько В.Н., Пуцилло Е.В.* – Москва: Эдиториал УРСС, 1999. – 255 с. 4. *Альгин А.П.* Риск и его роль в общественной жизни / *Альгин А.П.* – М.: Мысль, 1989. – 263 с. 5. *Dennis J.* Paustenbach Human and ecological risk assessment. Theory and practice / *Dennis J.* – New York: 2002. – 635 p.

Поступила в редколлегию 11.11.2010

О.О. ОГОРОДНИК, асп., НТУ «ХП»;

Є.М. ГОРАШ, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХП»

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРОБКИ ПРЕПРОЦЕСОРА ДО РОЗВ'ЯЗУВАЧА ЗАДАЧ МІЦНОСТІ ЗА ДОПОМОГОЮ МСЕ

Представлено підхід до розробки спеціалізованого інженерного ПЗ для візуального моделювання геометрії та статичного розрахунку міцності стержневих конструкцій. Розроблене ПЗ поєднує у собі можливості універсального інженерного ПЗ таких класів, як CAD та CAE. У середовищі програмування Embarcadero RAD Studio розроблено користувацький інтерфейс для створення просторової моделі та задання параметрів розрахунку. При реалізації CAD-модуля 3D моделювання використано графічну бібліотеку OpenGL. З метою проведення розрахунків конструкцій за допомогою МСЕ впроваджено інтеграцію з розв'язувачем відкритої CAE-системи CalculiX. Проведено верифікацію розробленого ПЗ, використовуючи типовий перевірочний розрахунок міцності велосипедної рами.

An approach to development of special-purpose engineering software for visual geometrical modeling and static analysis of beam structures is presented. The developed application combines features of general-purpose engineering software of such classes as CAD and CAE. Graphical user interface for creating of 3D special model and setting the analysis parameters was developed in programming environment Embarcadero RAD Studio. The graphical library OpenGL was used to implement the CAD-module for 3D modeling. The solver of open-source CAE-system CalculiX was integrated for the purpose of structural analysis using FEM. The developed application was verified by employing the typical static strength analysis of bicycle frame.

1. Актуальність теми. Система автоматизованого проектування (САПР) є основною і невід'ємною частиною у всіх важливих наукоємних сферах промисловості (суднобудування, авіабудування, моторобудування, автомобілебудування та ін.). У вітчизняний термін САПР з початку вкладалось поняття про систему автоматизованого проектування (CAD – Computer Aided Design), а згодом додалося й поняття про систему автоматизованого аналізу (CAE – Computer Aided Engineering) [1]. Важко уявити сучасне місце інженера-конструктора, а тим більше розрахувача без цих систем. Поява на ринку такого програмного забезпечення, як сучасні комплекси CAD/CAE дозволила прискорити процеси проектування та дослідження різноманітних конструкцій, насамперед відповідальних. Використання сучасних методів розрахунку, реалізованих в комплексах CAD/CAE, дає можливість проводити дослідження різних характеристик об'єктів, що проектуються. Це дозволяє гнучко змінювати конструкцію цих об'єктів без створення експериментальних зразків та не вдаватися до тривалої та коштовної процедури натурних досліджень на випробувальних стендах.

Останнім часом все більша кількість користувачів вирішують для себе, що універсальність багатьох CAD/CAE систем не завжди є перевагою, особливо враховуючи їх дуже значну вартість. У погоні за універсальністю, розробники ПЗ часто забувають про зручність користувацького інтерфейсу. У свою чергу цей, здавалося б, незначний (у порівнянні з різноманітністю розрахунків,

можливих в ПЗ) недолік робить ускладненою роботу користувачів-початківців. В САЕ-системах ця проблема стоїть особливо гостро, бо головна увага там приділяється якості розрахунків. Хоча пріоритет за розрахунковою частиною ПЗ є незаперечним, проте таким чином не вирішується існуюча проблема – занадто нелінійний та мало зрозумілий графічний інтерфейс, а інколи і його відсутність (у відкритих САЕ-системах).

Нижче наведено приклад вирішення цієї проблеми, тобто створення комп'ютерної системи автоматизованої побудови стержневих конструкцій та проведення аналізу їх статичної міцності. Клас стержневих конструкцій було обрано, як найбільш поширений тип задач в інженерній практиці.

2. Постановка задачі. У статті розглянуто особливості розробки комп'ютерної системи автоматизованої побудови стержневих конструкцій з метою подальшого розрахунку статичної міцності у відкритому САЕ-модулі.

В рамках даної роботи було необхідно:

1. Розробити спеціалізовану інтегровану САЕ/САЕ систему для стержневих конструкцій, що повинна включати у себе:

- ефективний і простий спосіб представлення інформації про модель;
- зручний майстер для відображення елементів моделі та її редагування;
- інтерактивне графічне зображення моделі при створенні та редагуванні.

2. Провести дослідження щодо вводу/виводу даних та проведення розрахунку засобами САЕ-модуля CalculiX [2] та реалізувати:

- підключення САЕ-модуля CalculiX для розрахунку статички;
- препроцесор для САЕ-модуля CalculiX.

3. Огляд застосованих програмних засобів. Програма реалізована на мові програмування Delphi в середовищі Embarcadero RAD Studio 2009. Вибір середовища програмування обумовлений відносною простотою реалізації графічного інтерфейсу користувача (Graphic User Interface – GUI) для невеликих windows-застосунків.

Для збереження та структуризації даних про стержневу модель було обрано розширювану мову розмітки (англ. Extensible Markup Language, скорочено XML), що дозволяє структурувати інформацію різного типу, використовуючи для цього різний набір інструкцій. Для задання валідності XML документу було віддано перевагу моделі XML Schema. Кожний елемент у цій моделі асоціюється з певним типом даних, що дозволяє будувати у пам'яті об'єкт, який відповідає структурі XML-документа. Мовам об'єктно-орієнтованого програмування значно легше мати справу з таким об'єктом, ніж з текстовим файлом. Для створення XML Schema використано програму Altova XMLSpy 2009 [3]. Для обробки XML-документа головною програмою було використано технологію Document Object Model (DOM). DOM – є програмним інтерфейсом який дозволяє здійснювати обхід цілого документа так, наче він є деревом, вузли якого є об'єкти, що відтворюють зміст документу. Документ DOM може створюватись синтаксичним аналізатором або користувачами (з деякими

обмеженнями). Типи даних вузлів DOM-дерев є абстрактними; реалізації мають власні, специфічні для мов програмування типи даних. Реалізації DOM мають тенденцію до інтенсивного використання пам'яті, оскільки, зазвичай, перед початком роботи документ має бути повністю завантажений, оброблений, та перетворений на дерево об'єктів [3]. Через те, що структура документа представляється у вигляді дерева, повний зміст документа аналізується та зберігається в пам'яті комп'ютера. Тому, DOM підходить для застосувань в програмах, які вимагають багаторазовий доступ до елементів документа в довільному порядку.

Бібліотека OpenGL являє собою інтерфейс програмування тривимірної графіки. Одиницею інформації є вершина, з яких створюються складніші об'єкти. Програміст створює вершини, вказує яким чином їх сполучати (лініями або багатокутниками), встановлює координати і параметри камери та ламп, а бібліотека OpenGL бере на себе роботу по створенню зображення на екрані. OpenGL ідеально підходить для програмістів, яким необхідно створити невелику тривимірну сцену і не замислюватися про деталі реалізації алгоритмів тривимірної графіки [4].

З погляду архітектури, графічна система OpenGL є конвеєром, що складається з декількох етапів обробки даних:

- 1) Апроксимація кривих і поверхонь;
- 2) Обробка вершин і збірка примітивів;
- 3) Растеризація і обробка фрагментів;
- 4) Операції над пікселями;
- 5) Підготовка текстури;
- 6) Передача даних в буфер кадру.

Розрахункове ядро CalculiX — відкритий, вільний програмний пакет, призначений для вирішення лінійних та нелінійних тривимірних задач механіки твердого деформованого тіла за допомогою метода скінчених елементів (MCE). CalculiX має явний та неявний розрахунковий модуль. Використовує збіжний з ABAQUS формат вхідного файлу. Охоплює широкий спектр задач механіки: теплові задачі, термічні напруження та контактні проблеми. Усі файли відповідають стандарту ASCII, таким чином вони можуть бути переглянуті та змінені в будь-якому текстовому редакторі [2].

4. Опис програмного комплексу. Запропонований та створений на базі CalculiX програмний комплекс здатен моделювати балочні конструкції на основі тривимірного підходу та запускати на подальший розрахунок міцності.

Таким чином, програмний комплекс має наступні можливості:

- створювати стержневі конструкції будь-якої складності, завдяки функціям «Додати балку», «Видалити балку» та «Редагувати поперечний переріз»;
- вибирати тип поперечного перерізу, а саме: перпендикулярний або круглий, що задається двома локальними координатами;
- здійснювати зручний перегляд тривимірного тіла конструкції та повної інформації про конструкцію у дереві побудови;
- створювати SE-сітку;
- задавати граничні умови по шести ступеням свободи: три переміщення

- задавати зосереджену силу за трьома напрямками;
- автоматичне створення вхідного файлу для подальшої передачі його на розрахунок у САЕ-модуль (розв'язувач) CalculiX;
- перегляд результатів засобами постпроцесора CalculiX CGX.

У ядрі будь-якого САПР можна виділити два основні елементи: набір базових елементів і система інтеграції основних елементів. У реалізованому ПЗ САПР важливим і невід'ємним супутником ядра є візуалізація. Тому пропонується представити базову структуру САПР (систему CAD) у вигляді зв'язаної роботи трьох підсистем [5].

CAD-система також складається з трьох підсистем (рис. 1):

1) ProGeometric (ПЛП); 2) ProView і TabView (ПВВ); 3) ProDoc (ПЗІ).

Підсистема логічного представлення (ПЛП) включає опис всіх доступних елементів моделі окремої САПР. Уся структура та логіка опису геометрії скелетно-конструкції міститься у XML-схемі, за якою і створено XML файл. XML файл у свою чергу передає структуру геометрії у програму через технологію XML DOM. Схема розроблена за допомогою програми Altova XMLSpy (рис. 2).



Рисунк 1 – Логічна структура програмного забезпечення САПР

Підсистема зберігання інформації (ПЗІ) служить для роботи бази даних документу (БДД) конкретної САПР і обміну даними з іншими САПР. Основною частиною БДД є інформація про модель об'єкту, яка має два типи уявлення: у ОЗП і ПЗП.

В даному випадку ПЗІ реалізована за допомогою технології XML DOM. Реалізація DOM має на увазі представлення XML-документа у вигляді набору вузлів (чи вершин) деревовидної структури. Крім того, згідно специфікації DOM, що затверджено W3C, вузлами вважаються усі компоненти структури XML: документ, елементи, атрибути, текст елементів, інструкції обробки і т.д. Таким чином, дані про конструкцію під час роботи програми зберігаються у оперативній пам'яті і у файлі.

Підсистема візуального відображення (ПВВ) забезпечує працездатність інтерфейсу програми. Обов'язковим елементом інтерфейсу САПР є робоча

графічна область для побудови моделі та дерево побудови, що дозволяє переглядати інформацію про модель у структурованому вигляді. Основні завдання ПВВ: зв'язане реалістичне відображення елементів моделі, відображення і працездатність інструментів для роботи з моделлю (меню, панелі інструментів, командний рядок та ін.).

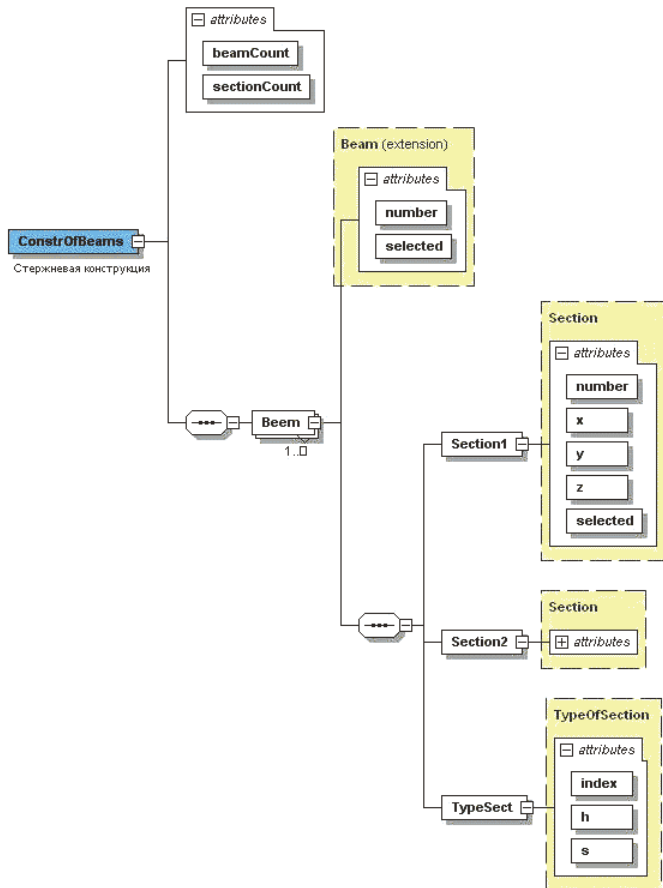


Рисунок 2 – Логічне представлення геометрії за допомогою XML-схеми

Робоча область для побудови моделі і схематичного її відображення реалізована у програмі за допомогою вищеописаної технології OpenGL.

Уся інформація, що відображається ПВВ передається із ПЗІ. Кожного разу, коли застосовуються відповідні інструменти для зміни конструкції, уся інформація оновлюється у ПЗІ, далі інформація автоматично оновлюється у ПВВ, а саме у дереві побудови та графічній області. Така схема і дає ефект ін-

терактивного моделювання, коли можливо побачити усі зроблені зміни відразу після їх внесення.

5. Розрахунок та відображення результатів. Для того, щоб запустити розрахунок міцності для конструкції після її моделювання, необхідно здійснити інтеграцію розробленого препроцесора та розв'язувача CalculiX. Інтеграція реалізується через вхідний (скрипт) файл, який містить дані про SE-сітку та параметри розрахунку, та генерується препроцесором для розв'язувача CalculiX і запускає його на читання (рис. 3).

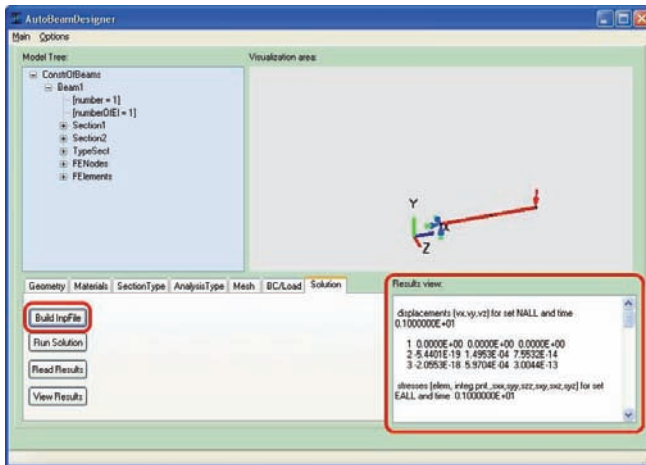


Рисунок 3 – Дані про SE-сітку та параметри розрахунку у дереві побудови

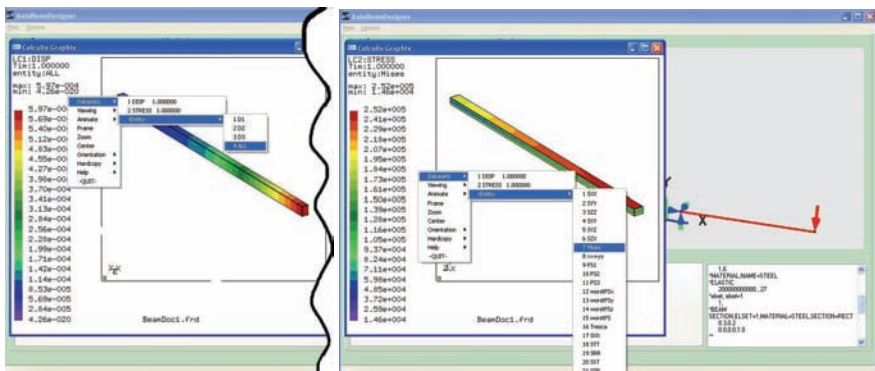


Рисунок 4 – Огляд результатів у вікні CGX: сумарні переміщення [м] (ліворуч) та еквівалентні напруження [Па] (праворуч)

Отримані результати можна переглянути як у текстовому вигляді у полі Results view, так і у графічному вигляді (у вікні постпроцесора CalculiX –

CGX). Як видно на рис. 4 (ліворуч) у цьому вікні можна переглядати переміщення за трьома напрямками (D1, D2, D3) та абсолютні переміщення (All), які і зображено на рис. 4 (ліворуч). А праворуч на рис. 4 зображено еквівалентні напруження за фон Мізесом (von Mises).

У вікні постпроцесора CGX також розміщено інструменти для зручного перегляду результатів розрахунку тривимірної моделі: 1) обертання моделі у просторі на бажаний кут; 2) наближення-віддалення моделі; 3) переміщення моделі відносно вікна перегляду.

6. Висновки. Спроековано та реалізовано програмний комплекс, головною задачею якого є автоматизована побудова геометрії стержневих конструкцій та розрахунок їх статичної міцності у вигляді переміщень, деформацій, напружень на основі даних, що вводяться користувачем.

Розроблена CAD/CAE-система володіє наступними властивостями:

- «Дерево побудови», яке дає можливість зручного та зрозумілого способу перегляду даних про геометричну модель та параметри розрахунку;
- «Графічна область» дає змогу переглядати тривимірну геометричну та кінцево-елементну модель завдяки можливості повертати та наближувати/віддаляти її;
- «Менеджер вкладок», який містить редактори та інструменти для задання параметрів розрахунку;
- автоматизований запуск розрахункового модуля (розв'язувача) CalculiX для аналізу статичної міцності за допомогою МСЕ;
- автоматизований перегляд результатів скінченно-елементного розрахунку засобами постпроцесора Calculix – CGX.

Доробка ПЗ передбачає підключення інших розрахункових модулів з більш широкими можливостями та реалізація інших типів розрахунку.

Список літератури: 1. *Лу К.* Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с. 2. *Dhondt G.* The Finite Element Method for Three-dimensional Thermomechanical Applications. – Chichester: John Wiley & Sons, 2004. – 340 с. 3. *Шенард Д.* Освой самостоятельно XML за 21 день. – Изд. дом «Вильямс», 2002. – 432 с. 4. *Ву М., Девис Т., Нейдер Дж. и Шрайнер Д.* OpenGL. Руководство по программированию. – СПб.: Питер, 2006. – 624 с. 5. *Красніков С.В., Руденко С.С.* Особенности твердотельного геометрического моделирования машиностроительных объектов // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – №38. – С. 181-187.

Надійшла до редколегії 19.11.2010

Г.Ю. МАРТЫНЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
Г.А.САЛЮК, студент, НТУ «ХПИ»

СОЗДАНИЕ ИНТЕГРИРОВАННОГО ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИАЛЬНЫХ АКТИВНЫХ МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКОВ С УЧЕТОМ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ

У роботі запропоновані методика та програмний засіб розрахунку силових характеристик радіального активного магнітного підшипника з восьмиполюсним статором з відомим законом управління. Вона заснована на застосуванні методу скінченних елементів. Магнітні сили розраховуються по тензору натягу Максвелла. Приведено результати розрахункових досліджень за визначенням залежностей магнітних сил від переміщень ротора.

In work the method and software tool calculate of force characteristics of the radial active magnetic bearing (AMB) with octopole stator are offered. They are based on the application of the finite element method. Magnetic forces by Maxwell tension tensor are calculated. The computation results for one of construction variant of radial AMB are presented.

Введение. Активные магнитные подшипники (АМП) – это альтернативный вид упруго-демпферных опор роторов, который по сравнению с другими (подшипниками качения, скольжения, газодинамическими) обладает преимуществами, такими как отсутствие смазочных систем, снижение потерь на трение, сравнительно большой зазор и т.д. [1]. При математическом описании динамического поведения системы «ротор в АМП» немаловажным вопросом является предварительный расчет силовых и жесткостных характеристик АМП. Эти характеристики во многом зависят как от геометрических и физических параметров статорных и роторных частей, так и от параметров применяемого алгоритма управления по которому работает система автоматического регулирования положения ротора. Это напряжения подаваемые на обмотки электромагнитов, токи в них, их активные сопротивления) [2]. Значения напряжений и токов изменяются в соответствии с законом управления и зависят от состояния системы «ротор в АМП», то есть от отклонения ротора от его номинального положения в зазоре подшипника [3]. Физически эти отклонения ограничены зазорами в страховочных подшипниках качения, которые обычно меньше номинальных воздушных (магнитных) зазоров между полюсами статора АМП и ротором приблизительно в 2 раза [4]. Однако знание силовых характеристик во всем диапазоне отклонений в воздушных (магнитных) зазорах позволит повысить адекватность математических моделей динамики роторов в АМП.

1 Постановка задачи. Целью данной работы является создание методики конечно-элементного расчета силовых характеристик радиальных активных магнитных подшипников с восьмиполюсным статором и полюсными катушками, обмотки которых образуют четыре электромагнита. При расчете зависимостей магнитных сил от смещения ротора токи в обмотках должны изме-

няться в соответствии с принятым законом управления. Для автоматизации процесса построения геометрической и конечно-элементной моделей АМП с ротором, находящимся в различных положениях по отношению к статору, и выполнения расчетов магнитостатики, соответствующих каждому такому положению, в работе ставится задача по созданию специализированного интегрированного программного средства.

2 Конструктивные особенности радиального АМП. Объектом исследований в работе выбран радиальный активный магнитный подшипник, обмотки на полюсных наконечниках которого образуют четыре электромагнита, расположенные симметрично по два относительно вертикальной и горизонтальной плоскостей [1]. Его вид и структурная схема системы управления приведены на рис. 1, где u_c – управляющие напряжения, подаваемые системой управления на обмотки электромагнитов для удержания ротора вблизи центрального положения; i_c – токи в обмотках; r_c – активные сопротивления обмоток; δ_r – номинальный зазор.

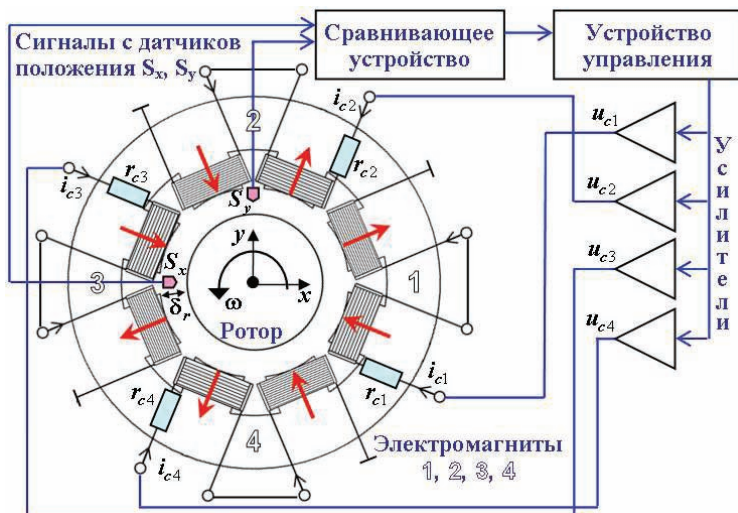


Рисунок 1 – Структурная схема системы управления радиального АМП

3 Управление магнитным подвесом. Ротор в АМП как объект управления является неустойчивым. Для его стабилизации и придания подвесу необходимых динамических параметров в канал управления вводится система управления (СУ), реализующая некоторый закон управления. На вход СУ подается сигнал с датчика положения, а с выхода подается на обмотку электромагнита ток или напряжение, которые обеспечивают необходимое для стабилизации значение магнитной силы (рис. 1). Различают два способа управления: по току, когда управляющим параметром является ток, и по напряжению,

когда управляющий параметр – напряжение.

При управлении по току предполагается, что требуемое значение тока управления может быть обеспечено точно в любой момент времени. В этом случае не учитывается инерционность электромагнитных процессов, а именно индуктивность катушек электромагнитов. Этот подход приемлем для легких роторов и при наличии достаточного ресурса напряжения [4].

Управление по напряжению предполагает обязательный учет инерции процессов и может использоваться для тяжелых роторов.

В данном случае предполагается использование СУ, реализующей способ дискретного управления, описанный в [5], за счет применения импульсного режима работы в аналоговой схеме управления [6]. В ней реализуется ключевой режим работы усилителей мощности, питающих электромагниты.

Тогда закон управления может быть представлен в виде зависимостей средних токов в обмотках электромагнитов от смещения ротора. Токи в обеих обмотках противоположных электромагнитов при центральном положении ротора являются токами смещения. Они создают в подвесе магнитное смещение и тем самым силовой натяг [4], то есть обеспечивают требуемую жесткость магнитного подшипника. Управление силой происходит за счет увеличения натяга в одном направлении и уменьшения в противоположном.

4 Методика расчета электромагнитных сил. Электромагнитные силы и моменты в АМП как нелинейной магнитной системе могут строго и однозначно быть определены только на основании расчета электромагнитного поля [7]. Это поле должно быть рассчитано для данного мгновения времени t , когда ротор и статор занимают по отношению друг к другу определенное положение. При этом в объеме нелинейной магнитной системы известно должно быть распределение плотности токов \vec{J} , магнитной индукции \vec{B} , напряженности магнитного поля \vec{H} , а также магнитной проницаемости μ_a .

Расчет электромагнитных (пондеромоторных) сил, действующих на выделенный объем V (в данном случае – роторные части АМП) нелинейной магнитной системы может быть выполнен тремя способами.

Первый способ предполагает определение силы по изменению энергии ΔW или коэнергии $\Delta \tilde{W}$ магнитного поля при бесконечно малом перемещении выделенного объема на расстояние $\Delta \vec{q} = \vec{n}_q \Delta q$ в направлении единичного вектора \vec{n}_q по координате q :

$$\vec{F}_q = \vec{n}_q F_q = \vec{n}_q \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{W}_q}{\Delta q} = -\vec{n}_q \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W_q}{\Delta q}. \quad (1)$$

Причем приращение коэнергии или энергии магнитной нелинейной системы рассчитывается в условиях постоянства токов или потокоцеплений всех возбуждающих контуров (для АМП обмоток управления).

Полная электромагнитная сила определяется как сумма ее проекций на

оси выбранной системы координат, например, декартовой, где $q = (x, y, z)$:

$$\vec{F} = \sum_q \vec{F}_q = \sum_q \vec{n}_q F_q . \quad (2)$$

Второй способ предусматривает определение электромагнитной силы по натяжению \vec{T}_n в магнитном поле (тензору натяжений Максвелла):

$$\vec{F} = \int_S \vec{T}_n dS . \quad (3)$$

где S – поверхность, охватывающая объем V , включая все поверхности разрыва магнитной проницаемости S_p , имеющиеся в этом объеме, в том числе и граничную поверхность.

Третий способ полагает определение электромагнитной силы по объемной f и поверхностной \vec{f}_S плотностям этой силы в магнитном поле:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV + \int_{S_p} \vec{f}_S dS . \quad (4)$$

Причем доказано, что приращения как энергии, так и коэнергии магнитного поля должны определяться для линейной модели магнитного поля нелинейной системы, в которой сохранено распределение плотностей токов, индукций, а переменные магнитные проницаемости заменены в каждом из элементов поля на постоянные магнитные проницаемости $\mu_a = B/H$, соответствующие найденному распределению индукций [7]. Кроме того, натяжения, объемная и поверхностная плотности электромагнитных сил должны рассчитываться по формулам Максвелла и только по ним [7].

Предлагаемая методика определения силовых характеристик радиального АМП аналогична методике расчета этих же характеристик осевого АМП [8], но только с учетом возможного смещения ротора не вдоль осевой линии, а в плоскости радиального АМП. Она предполагает применение метода конечных элементов (МКЭ). Конечно-элементная формулировка анализа электромагнитных полей основана на уравнениях Максвелла и в случае статического электромагнитного поля имеет вид [8]:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}, \text{ div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_a \vec{J} . \quad (5)$$

Трехмерная задача магнитостатики решается с помощью итерационной процедуры Ньютона-Рафсона путем минимизации нелинейного функционала магнитной энергии, ассоциированного с трехмерным вектором магнитного потенциала. Электромагнитные силы вычисляются как на основе определения компонент тензора натяжений Максвелла (3), так и по изменению магнитного поля при бесконечно малом перемещении объема (2), то есть по работе на возможном перемещении. Такой подход подтвержден сходимостью расчетных и экспериментальных данных [8].

5 Интегрированное программное средство и методика вычислений.

Геометрическая и конечно-элементные модели радиального АМП с восьмипо-

люсным статором представлены на рис. 2. Здесь введена неподвижная декартовая система координат, центр которой расположен в центре тяжести АМП, с ротором, находящимся в центральном положении.

Для расчета зависимостей проекций магнитных сил на оси координат от смещения ротора, то есть проведения серии конечно-элементных анализов магнитостатики с автоматизацией построения расчетных моделей радиального АМП (рис. 2), соответствующих определенному взаимному положению роторных и статорных частей, была создана программа «Расчет АМП». Она интегрирована с многоцелевым пакетом проектирования и конечно-элементного анализа. Геометрические параметры задаются пользователем в окне «Геометрия», вид которого показан на рис. 3. Передача этих и других исходных данных из управляющей программы в пакет осуществляется посредством макроса, содержащего команды построения геометрической и конечно-элементной моделей, задания свойств материалов, граничных условий и нагрузок, запуска на счет и сохранения результатов.

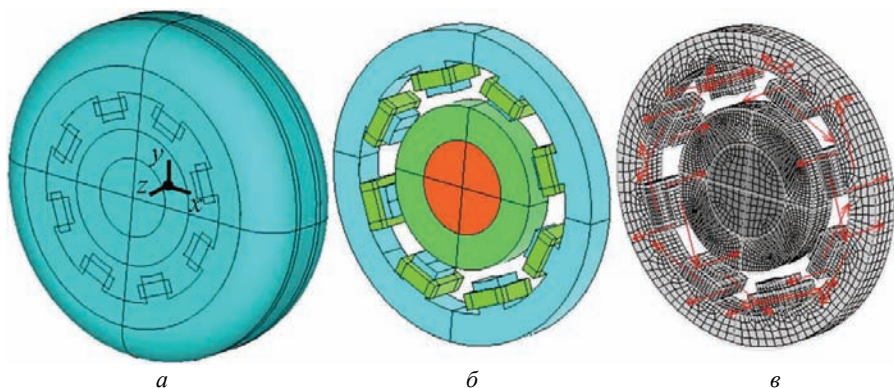


Рисунок 2. Расчетная модель радиального АМП: *а* – геометрическая в объеме воздуха, *б* – геометрическая статора, ротора и катушек, *в* – конечно-элементная

Методика расчета зависимостей магнитных сил от смещения ротора, положенная в основу макроса и программы, заключается в том, что полный номинальный зазор (с обеих сторон диска) равномерно разбивается на $(2n+1)$ уровень и в вертикальном, и в горизонтальном направлениях так, чтобы каждый $(n+1)$ -ый уровень совпал с центральным положением ротора между полюсами статора. Далее ротор смещается, чтобы центр масс его сечения совпал с одним из геометрически допустимых уровней, показанных в окне «Условия смещения ротора» на рис. 4. При этом взаимном положении проводится электромагнитный статический расчет, в результате которого находятся распределение магнитной индукции, напряженности магнитного поля и вычисляются суммарные магнитные силы в направлениях осей системы координат x и y . После этого выполняется аппроксимация магнитных сил, определенных в

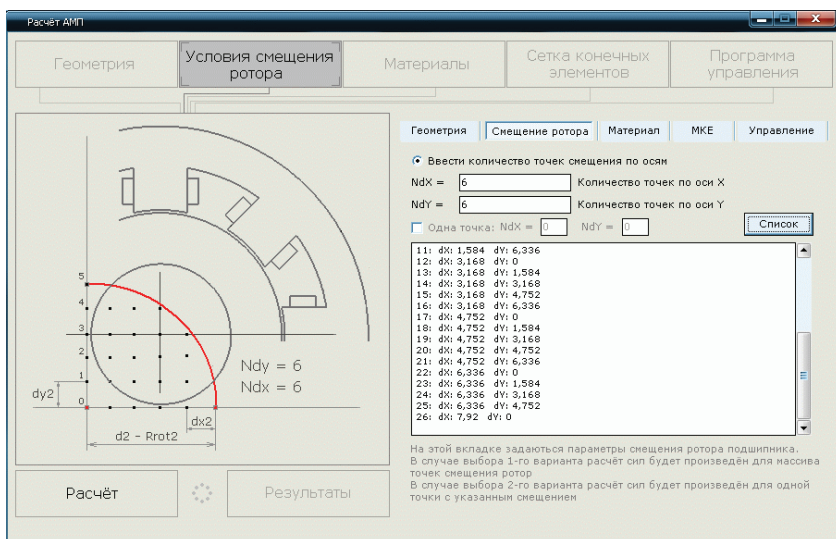
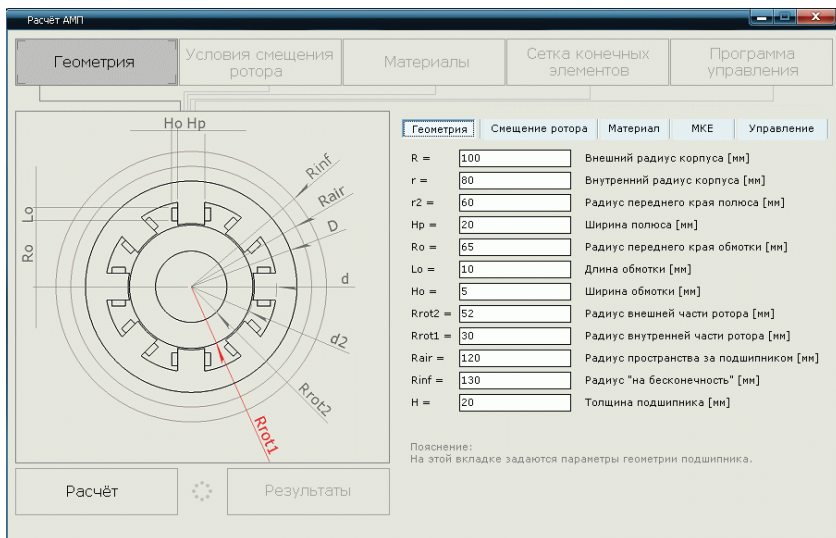


Рисунок 4 – Окно «Условия смещения ротора» интерфейса программы «Расчет АМП»

$(2n+1)$ -ой точках методом наименьших квадратов полными полиномами третьей степени или выше. Это дает возможность определять и зависимости квазиупругих коэффициентов от смещения ротора в зазорах АМП. Нагрузка в каждом статическом электромагнитном анализе определяется плотностью тока в обмотках, которая задается в окружном направлении для всех конечных элементов, моделирующих их объем. Она показана стрелками на рис. 2, в. Эта

плотность для каждого положения вычисляется по значениям средних токов в обмотках электромагнитов, которые, в свою очередь, определяются законом управления.

Параметры закона управления задаются на вкладке «Программа управления», представленной на рис. 5. Здесь реализована возможность выбора диаметра медного провода обмоток по максимальной величине силы тока, которая вычисляется по значению импульса напряжения (U_0) [6], подаваемого на обмотки управления и активного сопротивления этих обмоток.

Вкладка «Материалы» позволяет задать свойства материалов отдельных частей АМП, таких как ротор, цапфа на роторе, статор, обмотки и зазоры.

В полях вкладки «Сетка конечных элементов» задается количество конечных элементов в различных областях модели.

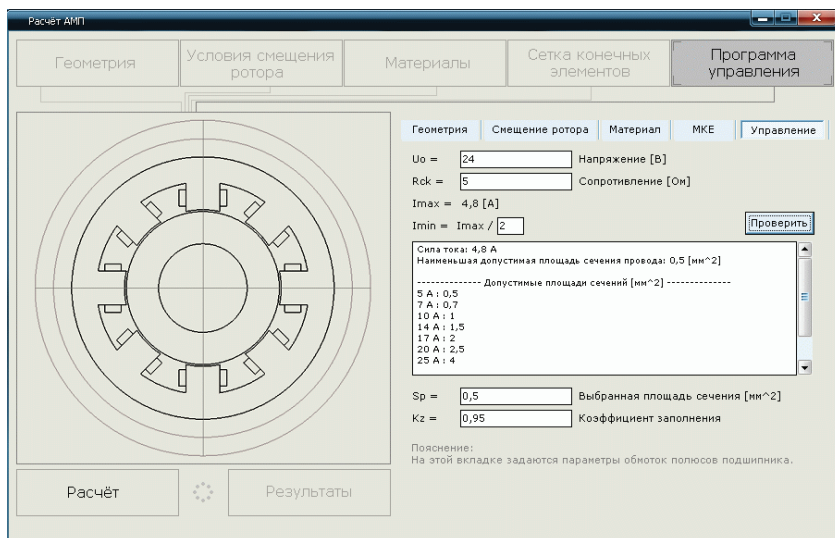


Рисунок 5 – Окно «Программа управления» интерфейса программы «Расчет АМП»

Кроме расчета проекций магнитной силы на оси x и y по описанной выше методике в программе реализована также возможность расчета силовых характеристик при смещенном в осевом направлении (z) роторе. В этом случае подсчитывается также проекция силы на ось z , которая при отсутствии такого смещения равна 0.

После выполнения расчета результаты возвращаются в программу с помощью текстовых файлов, содержащих дискретные зависимости проекций магнитной силы от смещений ротора. Графически они отображаются в окне программы «Результаты» в виде двумерной области, изображающей зазор АМП и разделенной на заданное пользователем количество участков в направлениях x и y . Таким образом, зазор заполняется конечным числом квадратных элементов, а цвет заливки каждого элемента определяет значение си-

лы. Точками отмечены квадраты, для которых выполнен расчет. Значения в остальных получены аппроксимацией.

Верификация программы осуществлялась путем проведения серии численных экспериментов для типоразмерного ряда радиальных активных магнитных подшипников с восьмиполюсными статорами, параметры которых указаны в [4, стр. 196], и сравнения результатов по несущей способности [4, стр. 34]. Расхождение с приведенными данными не превышало 3 %.

6 Численное определение силовых характеристик радиального АМП.

Объектом исследований был выбран радиальный АМП с зазором 3 мм и другими параметрами, значения которых указаны на рис. 3-5. Параметры системы управления: частота управления – 300 Гц, напряжение $U_0 = 24$ В. Результаты расчетов силовых характеристик представлены на рис. 6 и 7.

Оценка густоты сетки и погрешностей конечно-элементных расчетов выполнялась путем сопоставления усредненных узловых результатов и значений в точках интегрирования магнитной индукции и напряженности магнитного поля. За счет выбора рационального количества конечных элементов в разных областях модели, предполагающего плавный переход от элементов с относительно малыми размерами граней (в зазоре) к элементам с большими размерами граней (внешние объемы статора), было достигнуто значение погрешности, обусловленной дискретизацией, не превышающее 0,5 %. Кроме того, не превышающее 0,3 % различие результатов подсчета проекций магнитных сил, выполненных по тензору натяжений Максвелла (3) и по работе на возможном перемещении (2) также позволяет подтвердить адекватность расчетной модели.

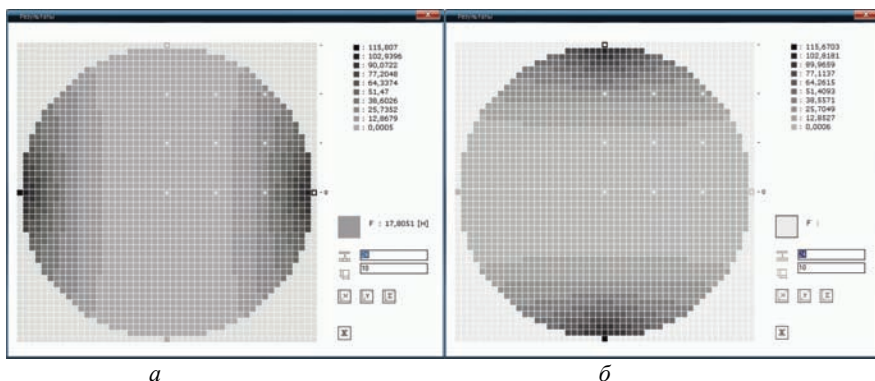


Рисунок 6 – Зависимость модуля проекции магнитной силы: *a* – на ось *x*; *б* – на ось *y*

На рис. 6 приведены зависимости модулей проекций полной магнитной силы на горизонтальную и вертикальную оси. Эти силы можно считать позиционными, так как они зависят от положения механической системы, то есть ее обобщенных координат (проекции полного вектора смещения на оси системы координат), входящих как параметры в закон управления. Магнитные силы

являются восстанавливающими, поскольку их направление противоположно смещению ротора, что обеспечивается законом управления.

На рис. 7 приведена зависимость модуля полной магнитной силы (векторной суммы проекций). Его распределение в зазоре свидетельствует о том, что отрицательная обратная связь в СУ (см. рис. 1) и параметры закона управления гарантируют центрирование ротора в зазоре.

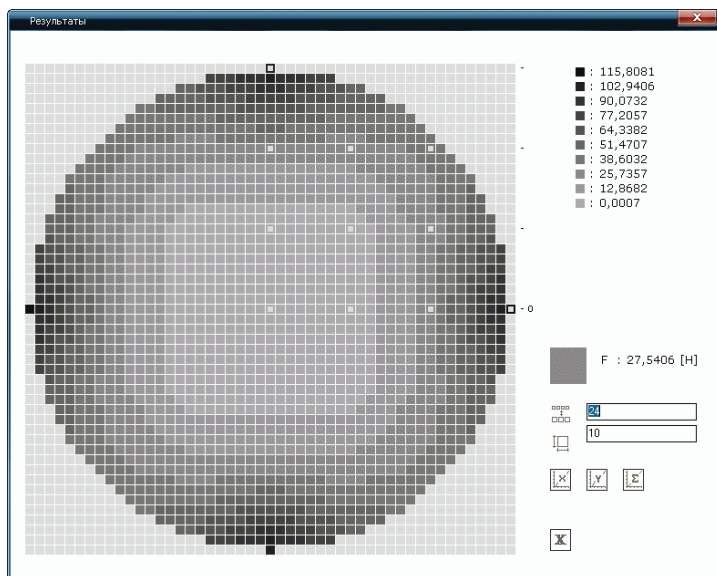


Рисунок 7 – Зависимость модуля полной магнитной силы

Следует отметить, что большей concentричности изолиний графика силовой характеристики можно добиться подбором параметров управления или введением более сложного закона управления.

Заключение. В работе выполнено конечно-элементное моделирование радиального восьмиполюсного АМП с учетом закона управления. Автоматизация моделирования и расчетов зависимостей магнитных сил от смещения ротора реализована в программном средстве, интегрированном с пакетом инженерного анализа. Серия расчетных исследований, проведенных с его помощью, позволила определить, что силовые характеристики при примененном законе управления являются нелинейными, симметричными и жесткими.

Разработанное программное средство, реализующее предложенный подход к расчету магнитных сил в радиальном АМП, может использоваться как для численного определения силовых характеристик существующих АМП, так и для поиска рациональных значений геометрических и физических параметров АМП, системы и алгоритма управления, обеспечивающих требуемые силовые и жесткостные характеристики этого типа упруго-демпферных опор ро-

торов. Еще одним применением программного средства является возможность его использования в качестве расчетного модуля в пакете оптимизации геометрии радиального восьмиполюсного АМП для поиска параметров, обеспечивающих максимальное тяговое усилие при заданных, например, внешнем диаметре и толщине статора, номинальном зазоре, допустимой плотности тока и индукции в зазоре.

Список литературы: 1. G. Schweitzer, H. Bleuler and A. Traxler Active magnetic bearings. – Zürich: ETH, 1994. – 244 p. 2. Steven M, Nataraj C. Suppression of Base Excitation of Rotors on Magnetic Bearings // International Journal of Rotating Machinery. – Vol. 2007, Article ID 91276. – 10 p. 3. Maslen E.H. Magnetic bearings // University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. – 229 p. 4. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. - 206 с. 5. Патент № 2277190. Российская Федерация. МПК F16C 32/04. Способ дискретного управления электромагнитным подвесом вращающихся роторов / ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе», НТУ «ХПИ»; Роговой Е.Д., Бухолдин Ю.С., Левашов В.А., Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М. - № 2003121317/11. - Заявл. 10.07.2003 г. Опубл. 27.05.2006 г. // Изобретения. Официальный бюллетень, 2006. – № 15. 6. Ульянов Ю.М., Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М. Система управления осевым рухом ротора на комбинированому магнітному підвісі з пасивними радіальними і активним осевим підшипниками // Зб. наук. праць Української державної академії залізничного транспорту. – Харків: УкрДАЗТ, 2008. 7. Иванов-Смоленский А.В. Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах. – М.: Высшая школа, 1989. – 312 с. 8. Мартыненко Г.Ю. Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах // Вісник НТУ «ХП»: Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХП», 2007. – № 38. - С. 83–95.

Поступила в редколлегию 14.11.2010

УДК 631.362:532

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;
С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, асп., НТУ «ХПИ»

КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА СЕПАРИРУЕМОЙ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Розглянуто гармонічні коливання швидкості потоку зернової суміші, яка рухається по внутрішній поверхні вертикального циліндричного решета вібророздільника. Використовуючи теорію вібророздільника зернового шару, аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки представлено за допомогою функцій Кельвіна. Побудовано також наближений розв'язок задачі для спрощеного розрахунку швидкості потоку сепарованої суміші та продуктивності решета в виробничих умовах.

Harmonically vibrations of velocity of a flow a grain mix are considered, driven on an internal surface of a vertical cylindrical sieve of vibroseparator. Using the theory vibroliquefaction of a grain layer, the analytical solution of a regional problem of hydrodynamics is submitted with the help of Kelvin functions. The approximate solution of a problem for the simplified account of velocity of a flow separating of a mix and productivity sieve under production conditions is constructed also.

Постановка проблемы. Для создания рациональных конструкций решет вибросепараторов нужно знать закономерности движения по ним сепарируемых зерновых смесей. Обычно при изучении движения сыпучих зерновых материалов определяют усредненную за период колебаний решета скорость потока смеси. Такой подход упрощает моделирование, но не дает информации о неравномерности потока смеси во времени. Поскольку вибрации интенсифицируют разделение смеси на фракции, желательно знать, как распространяются они от виброрешета по объему движущегося зернового слоя. Для изучения распространения вибраций внутри сыпучего материала приходится решать динамические краевые задачи гидродинамики, используя аналогию движений вязкой жидкости и сыпучей среды в условиях вибраций. Построение и анализ решений таких задач позволяет уточнить существующие математические модели движения сепарируемых смесей и поэтому относятся к актуальным научно-прикладным проблемам.

Анализ последних исследований и публикаций. Установившееся вертикальное движение кольцевого слоя зерновой смеси по внутренней поверхности вращающегося цилиндрического виброрешета без учета колебаний скорости потока рассматривалось в [1-4]. Математическое моделирование колебаний скорости потока слоя, вызванных осевыми вибрациями решета, проводилось в [5], где построено решение краевой задачи гидродинамики в функциях Бесселя и Неймана комплексного аргумента. Но при постановке граничной задачи в [5] пренебрегали искривлением поверхности решета. Здесь строится решение краевой задачи в цилиндрической системе координат с учетом искривления поверхности виброрешета.

Целью работы является получение и апробация формул для расчета скорости потока кольцевого слоя зерновой смеси с учетом ее колебаний, вызванных осевыми вибрациями решета.

Постановка и аналитическое решение динамической краевой задачи. Как и в работах [1-3], течение виброоживленного зернового слоя описываем уравнениями движения вязкой ньютоновской жидкости, которые при наличии осевой симметрии имеют вид [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right); \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= \nu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right); \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu \nabla^2 u_z; \\ \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + \frac{\partial}{\partial z} (ru_z) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; u_r, u_ϕ, u_z – соответственно радиальная, тангенциальная и осевая проекции скорости потока; r, z – радиальная и осевая координаты; ρ – плотность зерновой смеси; p – внутреннее избыточное давление; ν – эффективная кинематическая вязкость виброожиженной зерновой смеси; g – ускорение свободного падения; t – время.

Ось $0z$ направлена вертикально вниз по оси цилиндрического виброрешета, как показано на рис. 1.

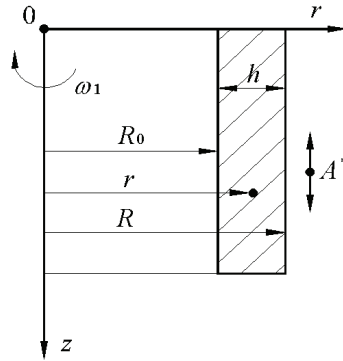


Рисунок 1 – Расчетная схема

Рассматривая установившийся динамический процесс, при решении системы (1), полуобратным методом с учетом [4], задаем:

$$u_r \equiv 0; \quad u_\phi = \omega_1 r; \quad u_z = u_z(r, t); \quad p = \frac{1}{2} \rho \omega_1^2 (r^2 - R_0^2). \quad (2)$$

Здесь $\omega_1 = \text{const}$ – угловая скорость вращения решета; R_0 – радиус внутренней поверхности движущегося кольцевого слоя зерна.

Подстановка (2) в (1) обращает первое, второе и четвертое уравнения в тождества, а третье уравнение системы принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{\nu}. \quad (3)$$

Его следует решать при граничных условиях:

$$u_z(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (4)$$

где $R_0 = R - h$; R – радиус цилиндрической поверхности решета; h – толщина зернового слоя; A^* , ω – амплитуда и круговая частота осевых вертикальных колебаний решета.

В общем случае кинематическая вибровязкость смеси зависит от параметров вибраций и частоты вращения решета, а также от механико-техноло-

гических характеристик зерновой смеси и радиальной координаты r [2, 8]. Здесь, с целью упрощения математической модели, используем усредненное значение $v = \text{const}$.

Отметим, что решение однородного (без правой части) уравнения (3), при отличных от (4) граничных условиях, решали в [6, 7], рассматривая течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе при пульсирующем во времени перепаде давления.

Здесь решение уравнения (3) ищем в виде суммы

$$u_z(r, t) = u_1(r) + u_2(r, t), \quad (5)$$

при условии, что

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} = -\frac{g}{v}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

При таком выборе $u_z(r, t)$ она удовлетворяет уравнению (3).

Согласно (4), слагаемые суммы (5) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$u_1(R) = 0; \quad \left. \frac{du_1}{dr} \right|_{r=R_0} = 0; \quad (8)$$

$$u_2(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (9)$$

Решение краевой задачи, представленной выражениями (6) и (8), имеет вид

$$u_1(r) = \frac{g}{4v} \left(R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (10)$$

Оно опубликовано в работах [1, 2, 3].

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$u_2(r, t) = \text{Re} \left(w(z) e^{i\omega t} \right) = \text{Re} w(r) \cdot \cos(\omega t) - \text{Im} w(r) \cdot \sin(\omega t), \quad (11)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $w(r)$ – комплексная функция вещественного аргумента.

Она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{i\omega}{v} w = 0 \quad (12)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{Re} w(R) &= A^* \omega; & \text{Im} w(R) &= 0; \\ \left. \frac{d}{dr} \text{Re} w(r) \right|_{r=R_0} &= \left. \frac{d}{dr} \text{Im} w(r) \right|_{r=R_0} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

вытекающим из (9), (11).

Общим решением уравнения (12) является

$$w(r) = (c_1 + ic_2) \cdot I_0(\lambda r \sqrt{i}) + (c_3 + ic_4) \cdot K_0(\lambda r \sqrt{i}). \quad (14)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{\omega/\nu}$; $I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевого индекса; c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Записанные в (14) цилиндрические функции комплексного аргумента выражаются через функции Кельвина нулевого индекса: $ber(x)$, $bei(x)$, $ker(x)$, $kei(x)$ по формулам [9];

$$I_0(x\sqrt{i}) = ber(x) + i bei(x); \quad K_0(x\sqrt{i}) = ker(x) + i kei(x). \quad (15)$$

Поэтому, согласно (14) и (15):

$$\operatorname{Re} w(r) = c_1 ber(\lambda r) - c_2 bei(\lambda r) + c_3 ker(\lambda r) - c_4 kei(\lambda r); \quad (16)$$

$$\operatorname{Im} w(r) = c_1 bei(\lambda r) + c_2 ber(\lambda r) + c_3 kei(\lambda r) + c_4 ker(\lambda r).$$

Подставив (16) и их производные в (13), получаем систему четырех алгебраических уравнений с неизвестными c_j , $j = \overline{1;4}$:

$$\begin{aligned} c_1 ber(\eta) - c_2 bei(\eta) + c_3 ker(\eta) - c_4 kei(\eta) &= A^* \omega; \\ c_1 bei(\eta) + c_2 ber(\eta) + c_3 kei(\eta) + c_4 ker(\eta) &= 0; \\ c_1 ber'(\zeta) - c_2 bei'(\zeta) + c_3 ker'(\zeta) - c_4 kei'(\zeta) &= 0; \\ c_1 bei'(\zeta) + c_2 ber'(\zeta) + c_3 kei'(\zeta) + c_4 ker'(\zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В ней $\eta = \lambda R$; $\zeta = \lambda R_0$; штрихом обозначены производные функций Кельвина по ζ .

Заметим, что функции Кельвина и их производные затабулированы в [10]. Кроме того, производные можно выразить через функции Кельвина индекса единица, таблицы которых опубликованы в [9].

Решив систему (17), находим

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} [ber(\eta) + \delta_1 ker(\eta) + \delta_2 kei(\eta)]; \\ c_2 &= -\frac{A^* \omega}{\Delta} [bei(\eta) + \delta_1 kei(\eta) - \delta_2 ker(\eta)]; \\ c_3 &= \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = \delta_1 c_2 - \delta_2 c_1; \\ \Delta &= [ber(\eta) + \delta_1 ker(\eta) + \delta_2 kei(\eta)]^2 + [bei(\eta) + \delta_1 kei(\eta) - \delta_2 ker(\eta)]^2; \\ \delta_1 &= -\frac{ber'(\zeta) \cdot ker'(\zeta) + bei'(\zeta) \cdot kei'(\zeta)}{(ker'(\zeta))^2 + (kei'(\zeta))^2}; \\ \delta_2 &= \frac{bei'(\zeta) \cdot ker'(\zeta) - ber'(\zeta) \cdot kei'(\zeta)}{(ker'(\zeta))^2 + (kei'(\zeta))^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Определив константы c_j , $j = \overline{1;4}$, после постановки (16) в (11), а затем (10) и (11) в (5), получаем формулу скорости потока зернового слоя

$$u_z(r,t) = \frac{g}{4\nu} \left(R^2 - r^2 + 2R_0 \cdot \ln \frac{r}{R} \right) + [c_1 ber(\lambda r) - c_2 bei(\lambda r) + c_3 ker(\lambda r) - c_4 kei(\lambda r)] \times \\ \times \cos(\omega t) - [c_1 bei(\lambda r) + c_2 ber(\lambda r) + c_3 kei(\lambda r) + c_4 ker(\lambda r)] \cdot \sin(\omega t). \quad (19)$$

Из нее видно, что колебания скорости потока происходят с той же частотой, что и колебания решета, но их амплитуды и фазы зависят от координаты r . Расчеты по формуле (19) позволяют выяснить как затухают амплитуды колебаний внутри движущегося слоя зерна с удалением от поверхности виброрешета.

Используя (19) можно определить изменение производительности решета во времени. Решение этой задачи сводится к вычислению интеграла

$$Q(t) = 2\pi \int_{R_0}^R r u_z(r,t) dr. \quad (20)$$

Учитывая известные интегралы [9]

$$\int r \begin{bmatrix} ber(\lambda r) \\ bei(\lambda r) \end{bmatrix} dr = -\frac{r}{\lambda\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ber_1(\lambda r) - bei_1(\lambda r) \\ ber_1(\lambda r) + bei_1(\lambda r) \end{bmatrix}; \\ \int r \begin{bmatrix} ker(\lambda r) \\ kei(\lambda r) \end{bmatrix} dr = -\frac{r}{\lambda\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ker_1(\lambda r) - kei_1(\lambda r) \\ ker_1(\lambda r) + kei_1(\lambda r) \end{bmatrix},$$

после подставки (19) в (20), получаем формулу

$$Q(t) = \frac{\pi g}{2\nu} \cdot \left(\frac{R^4 + 3R_0^4}{4} - R^2 R_0^2 - R_0^4 \ln \frac{R_0}{R} \right) - \frac{\pi\sqrt{2}}{\lambda^2} \cdot [(c_1 F_1 - c_2 F_2 + c_3 F_3 - c_4 F_4) \times \\ \times \cos(\omega t) - (c_1 F_2 + c_2 F_1 + c_3 F_4 + c_4 F_3)] \sin(\omega t). \quad (21)$$

В ней

$$F_{1,2} = \eta \cdot [ber_1(\eta) \mp bei_1(\eta)] - \zeta \cdot [ber_1(\zeta) \mp bei_1(\zeta)]; \\ F_{3,4} = \eta \cdot [ker_1(\eta) \mp kei_1(\eta)] - \zeta \cdot [ker_1(\zeta) \mp kei_1(\zeta)].$$

Расчет колебаний производительности решета также связан с вычислением цилиндрических функций.

Построение приближенных формул. В производственных условиях работы сепараторов значения расчетных параметров таковы, что $\lambda r \geq \zeta \gg 1$. Поэтому без существенных погрешностей в формулах (18), (19) и (21) функции Кельвина и их производные можно заменить асимптотическими представлениями:

$$\begin{bmatrix} ber(x) \\ bei(x) \end{bmatrix} \sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{8\sqrt{2}x} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}x} \right) \\ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}x} \right) \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ker(x) \\ kei(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{\sqrt{\pi} e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \\ -\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} ber'(x) \\ bei'(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 - \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \\ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} ker'(x) \\ kei'(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{\sqrt{\pi} e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2x}} \cdot \left(1 + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \\ -\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В результате такой замены расчет колебаний скорости потока смеси и производительности решета сводится к вычислениям элементарных функций.

Более существенного упрощения расчетных зависимостей можно достичь, если пренебречь вторым членом в уравнении (12). Так поступали авторы работы [5], используя малое отношение толщины зернового слоя к радиусу решета. Для упрощенного указанным образом уравнения (12) краевая задача имеет компактное решение

$$w(r) = A^* \omega \frac{\text{ch}[i\lambda(r - R_0)]}{\text{ch}[i\lambda(R - R_0)]}.$$

Используя его, как ранее (14), получаем приближенную формулу скорости потоком зерновой смеси

$$\begin{aligned} u_z(r, t) = \frac{g}{4v} \cdot \left(R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right) + [B_1 f_1(r) + B_2 f_2(r)] \cdot \cos(\omega t) + \\ + [B_2 f_1(r) - B_1 f_2(r)] \cdot \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (22)$$

В ней

$$f_1(r) = \text{ch}(\beta(r - R_0)) \cdot \cos(\beta(r - R_0)); \quad f_2(r) = \text{sh}(\beta(r - R_0)) \cdot \sin(\beta(r - R_0));$$

$$B_1 = A^* \omega \cdot \text{cth}(\beta h) \frac{\cos(\beta h)}{\text{sh}(\beta h)}; \quad B_2 = A^* \omega \cdot \frac{\sin(\beta h)}{\text{sh}(\beta h)}; \quad \beta = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2v}}.$$

Проинтегрировав приближенно выражение (22) по толщине слоя определяем производительность решета

$$\begin{aligned} Q(t) = \frac{\pi g}{2v} \cdot \left(\frac{R^4 + 3R_0^4}{4} - R^2 R_0^2 - R_0^4 \ln \frac{R_0}{R} \right) + (B_1 \Phi_1 + B_2 \Phi_2) \times \\ \times \cos(\omega t) - (B_1 \Phi_2 - B_2 \Phi_1) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\Phi_{1,2} = \frac{\pi(R+R_0)}{2\beta} [\operatorname{ch}(\beta h) \cdot \sin(\beta h) \pm \operatorname{sh}(\beta h) \cdot \cos(\beta h)].$$

Для больших значений βh , $\operatorname{ch}(\beta h) \sim \operatorname{sh}(\beta h)$ и формула (23) принимает более компактный вид

$$Q(t) = \frac{\pi g}{2\nu} \cdot \left(\frac{R^4 + 3R_0^4}{4} - R^2 R_0^2 - R_0^4 \ln \frac{R_0}{R} \right) + \pi \cdot (R + R_0) \cdot A^* \sqrt{\nu \omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Из нее следует, что амплитуда колебаний производительности решета возрастает с увеличением R , A^* , ν и ω , причем колебания смещены по фазе на $\pi/4$.

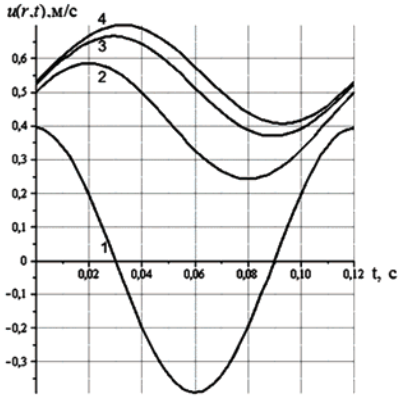


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных r : 1,2,3,4 –

$$r = R; R_0 + \frac{R - R_0}{2}; R_0 + \frac{R - R_0}{4}; R_0.$$

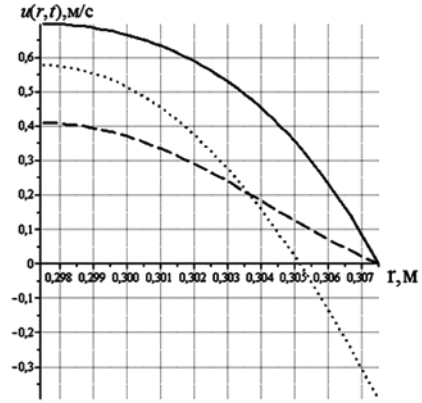


Рисунок 3 – Профили скорости потока зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени:

$$\text{— } t = \frac{\pi}{2\omega}; \cdots t = \frac{\pi}{\omega}; \text{--- } t = \frac{3\pi}{2\omega}.$$

Анализ численных результатов. Для проведения расчетов, следуя [5], задавали: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,01 \text{ м}$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$; $\rho\nu = 0,66 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $R = 0,3075 \text{ м}$. Вычисленные по формуле (19) скорости вертикального движения смеси представлены на рис. 2 и 3.

Из рис. 2 видно, что по мере удаления от поверхности решета в сторону свободной поверхности слоя происходит уменьшение амплитуд колебаний скорости, но увеличиваются средние значения скорости, относительно которых происходят эти колебания.

На рис. 3 показаны распределения скоростей потока по толщине кольцевого слоя в различные моменты времени. Расчеты подтверждают, что профили скорости потока смеси существенно меняются с течением времени, вследствие колебаний решета.

Выводы. Изложенная теория отражает колебательный характер потока сепарируемой зерновой смеси внутри цилиндрического виброрешета, совершающего осевые гармонические колебания. Она может применяться при математическом моделировании процессов зерновых сепараторов.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н. Гидродинамические характеристики псевдооживленных сыпучих сред при виброцентробежном сепарировании на зерноперерабатывающих предприятиях // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних та харчових виробництв: Вісник ХДТУСГ. – Вип. 5. – Харків: ХДТУСГ, 2001. – С. 13-33. 2. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с. 3. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчету движения зерновой смеси по вертикальному цилиндрическому решету вибросепаратора // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – № 2 (54). – С. 50-55. 4. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. О решениях упрощенных уравнений Навье-Стокса в гидродинамической модели движения зерновой смеси // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 75. Т. 1. – С. 217-223. 5. Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В., Мандрыка А.В. Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харьков: Миськдрук, 2010. – 360 с. 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с. 7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с. 8. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. Сравнение двух способов вычисления коэффициента вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 1 (50). – С. 96-100. 9. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 10. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редакцию 01.11.2010

УДК 539.3:621.313

Э.С.ОСТЕРНИК, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,
ГП завод «Электротяжмаш», Харьков

О ЗАВИСИМОСТИ ВИБРАЦИИ ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ ОТ РЕЖИМНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Виконано станційні дослідження залежності вібрації статорів турбогенераторів від активної потужності. Розроблено відповідну математичну модель на основі алгебраїчного полінома. Запропоновано режими експлуатації, що забезпечують вібронадійність турбогенераторів.

We performed station research of dependence between turbogenerator stator vibration and active power. We developed corresponding mathematical model based on the algebraic polynom. We suggested operating conditions, which provide vibration reliability of turbogenerators.

Известно, что вибрация турбогенератора зависит от таких параметров его режима, как ток I_{st} и напряжение U_{st} статора. Радиальные электродинамические усилия и соответствующие амплитуды колебаний статорной обмотки пропорциональны I_{st}^2 [1].

Колебания магнитопровода статора, вызванные силами магнитного тяж-

ния, происходят с удвоенной частотой вращения ротора. При натурных исследованиях на электростанциях установлено, что амплитуды таких колебаний A_m зависят от активной мощности турбогенератора P [2]. С ростом P величины A_m снижаются. Если изгибная жесткость ротора по продольной и поперечной осям выравнена, аналогичная закономерность установлена и для колебаний корпуса статора $A_c(P)$.

Сходные результаты получены исследователями на турбогенераторах ОАО «Электросила» [3, 4] и других фирм [5].

При этом известно, что A_m пропорциональна квадрату напряжения статора U_{st}^2 .

Указанную закономерность для $A_m(P)$ и $A_c(P)$ целесообразно учитывать прежде всего для турбогенераторов с длительным сроком эксплуатации. По современному стандарту их полный назначенный срок службы составляет 40 лет [6]. Современные условия, в том числе в СНГ, зачастую вынуждают эксплуатировать турбогенераторы еще дольше.

Между тем, электростанции СНГ начали оснащаться турбогенераторами мощностью 200 и 300 МВт, начиная с 1960 г., когда стандартный срок службы составлял лишь 20 лет. В результате вибрация статоров зачастую превышает стандартные нормы и может привести к тяжелым авариям.

Среди методов снижения вибрации можно условно выделить такие группы:

- 1) конструкционные (в том числе виброизоляция, отстройку от резонансов);
- 2) технологические (в том числе ремонты и балансировку);
- 3) эксплуатационные (в том числе рассматриваемые в данной работе).

В связи с описанными явлениями, наряду с капитальными ремонтами, особенно для машин, уже вышедших из строя, целесообразно предусмотреть режимные ограничения. В качестве критериев виброненадежности вводятся жесткие ограничения – размахи и пиковые значения виброперемещений, а также средние квадратические значения виброскоростей в контрольных точках [6, 7].

В данной работе следовало дать объяснение физике явления и его математическую модель, позволяющую определить область допустимых режимов эксплуатации турбогенератора.

Физика явления, согласно статье [2], могла объясняться, например, асимметрией магнитного поля или изменением эффективных упругих свойств магнитопровода (сердечника) статора под нагрузкой. В книге [3] предполагается, что причина явления состоит в увеличении температуры сердечника с ростом нагрузки, а также в прижатии сердечника к ребрам статора (или рамы сердечника) электромагнитным моментом вращения.

В статье [4] изучается характер электромагнитных усилий между ротором и статором. При холостом ходе с возбуждением магнитные линии в зазоре направлены радиально. При нагружении генератора электромагнитный момент, уравновешиваемый моментом первичного двигателя (например, турбины), создается за счет появления системы тангенциальных сил магнитного тяжения. При нагрузке

магнитные линии направлены в зазоре нерадиально. В результате радиальная составляющая магнитного тяжения уменьшается, а с ней понижается и вибрация статора. Авторы рассматривают эту модель как упрощенную.

Далее рассматривается задача математического моделирования. Изучаются зависимости A_m и A_c от режимных параметров P , U_{st} , а также от реактивной мощности Q и от цилиндрических координат l , θ точки измерения вибрации на поверхностях магнитопровода или корпуса статора. Эти зависимости представляют собой достаточно гладкие функции, что позволяет применить для моделирования вибрации аппарат алгебраических полиномов от n переменных [8, 9].

Ограниченная функция переменных $\{x_j\}_1^n$, заданная значениями $\{y_i^{(0)}\}_1^K$, например $A_m(P, Q, U_{st}, I_{st}, l, \theta)$, аппроксимируется полиномом степени r

$$y_i = \sum_{S=1}^{\lambda} b_S \prod_{j=1}^n x_{ij}^{s_j}, \quad (1)$$

где $S = \|s_j\|_1^n$ – матрица показателей степеней, число членов полинома $\lambda = C_{r+n}^r$; $s_j \in [0, r]$. Разыскивается наилучший в среднем квадратичном полином из условия экстремальности квадратичной погрешности $E_\lambda = \sum_{i=1}^K [y_i^{(0)} - y_i]^2$. Вычисляется оценка средней квадратичной погрешности

$$\Delta = \sqrt{E_\lambda / (K - \lambda)}$$

и относительная погрешность

$$\kappa = \left| \Delta / \bar{y}^{(0)} \right|, \quad (2)$$

где $\bar{y}^{(0)}$ – среднее значение $y_i^{(0)}$ по всей области задания исходной функции в точках $i = 1 \dots K$.

В данной работе рассматривается ограниченная задача о зависимости A_m или A_c от активной мощности P .

Исследованы данные приемо-сдаточных испытаний головного образца турбогенератора [2]. Вводится понятие о безразмерной функции снижения вибрации

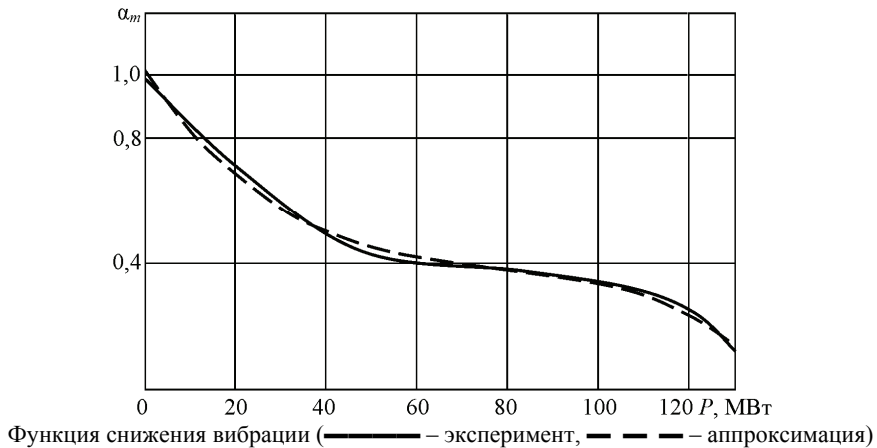
$$\alpha_m(P) = \frac{A_m(P)}{A_m(P=0)}, \quad (3)$$

которая рассматривается в качестве исходной. Здесь величина амплитуды колебаний $A_m(P=0)$ определяется при стандартном режиме испытаний в опыте холостого хода с номинальным напряжением статора $U_{st}^{(nom)}$.

Аппроксимирующая функция выбрана в виде полинома степени $r = 3$

$$\alpha_m^{(3)} = b_0 + b_1 P + b_2 P^2 + b_3 P^3. \quad (4)$$

Результаты аппроксимации представлены на рисунке.



Экспериментальная $\alpha_m(P)$ и аппроксимирующая $\alpha_m^{(3)}(P)$ функции монотонно убывают, так как

$$\Delta = 3b_1b_3 - b_2^2 > 0; \quad b_3 < 0. \quad (5)$$

Относительная погрешность аппроксимации при $r = 3$, вычисленная по формуле (2), составляет $\kappa_3 = 4,0\%$. Полином третьей степени дает кривую, практически совпадающую с исходной, если учесть погрешность эксперимента.

Отсутствие минимума у функции снижения вибрации $\alpha(P)$ в исследованном диапазоне позволяет рекомендовать для данного турбогенератора набор активной нагрузки P как средство снижения амплитуды колебаний магнитопровода A_m (если такая необходимость возникнет в ходе длительной эксплуатации).

Аналогичные результаты получены в последние годы для турбогенератора мощностью 300 МВт, находившегося в длительной эксплуатации. Ее срок превысил требуемое по стандарту время службы. Величина A_c в режиме холостого хода при номинальном напряжении $U_{st}^{(nom)}$ оказалась выше нормы.

Выполнены виброисследования $A_c(P)$, построена характеристика $\alpha_c(P)$. Ее аппроксимация по формуле (4) дает погрешность $\kappa_3 = 2,1\%$. Неравенства (5) выполнены, так что функция снижения вибрации монотонно убывает. Реактивная нагрузка Q в процессе виброисследований менялась незначительно.

В связи с этими данными было рекомендовано продолжить работу энергоблока при $P = P_{\max}$ (с учетом тепловых и других ограничений по генератору, трансформатору, турбине и котлу) так, чтобы величины A_m и A_c не превышали допустимых. В современных мощных объединенных энергосистемах с электростанциями блочного типа возможно перераспределение нагрузок между энергоблоками так, чтобы отдельные блоки работали при $P = P_{\max} \leq P^{(nom)}$.

Отметим, что пространственная аппроксимация для $A_c(l, \theta)$ по формулам (1), (2) выполнена в [10], ее равномерная сходимость при $r \in [1, 6]$ показана в [9].

Выводы. На базе станционных исследований турбогенераторов установлена закономерность снижения вибрации статоров с ростом активной нагрузки. Построена соответствующая математическая модель. Выбраны режимы, позволяющие продолжить работу машин на время, превышающее расчетный срок службы.

Перспективы развития данного направления – построение банка данных о зависимости вибрации от параметров режима, включая активную и реактивную нагрузки, напряжение и ток статора, а также от координат точки измерения колебаний. Такой банк данных по типу [8] составляется для серий турбогенераторов мощностью 200, 300, 500 и более МВт и моделируется с помощью N -мерных полиномов.

Список литературы: 1. Глебов И.А., Данилевич Я.Б. Научные основы проектирования турбогенераторов. – Л.: Наука, 1986. – 184 с. 2. Гаврилов Л.Г., Остерник Э.С. Виброустойчивая работа турбогенераторов ТГВ-200 // Электрические станции. – 1966. – № 10. – С. 38-40. 3. Эксплуатация турбогенераторов с непосредственным охлаждением. Под ред. Л.С.Линдорфа, Л.Г.Мамиконянца. – М.: Энергия, 1972. – 352 с. 4. Перчанок Б.Х., Руденко В.И. Вибрация сердечника турбогенератора // Сборник «Электросила». – 1976. – № 31. – С. 24-27. 5. Hawley R. Recent developments in large turbo-type generators // Electrical Times. – 8 June 1972. – № 23. – P. 161. 6. Машины электрические вращающиеся. Турбогенераторы. Межгосударственный стандарт ГОСТ 533–2000. – К.: 2002. – 28 с. 7. Машиностроение. Энциклопедия. – М.: Машиностроение, 2003. – Т. IV–3. Надежность машин [В.В.Клюев, В.В.Болотин, Ф.Р.Соснин и др.]. – 592 с. 8. Остерник Э.С. Моделирование деформационных полей в электромашиностроении с помощью функций N -переменных // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 29-42. 9. Остерник Э.С. Моделирующие полиномы от N -переменных в машиностроении // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2010. – № 37. – С. 130-135. 10. Станиславский Л.Я., Гаврилов Л.Г., Остерник Э.С. Вибрационная надежность мощных турбогенераторов. – М.: Энергия, 1985. – 240 с.

Поступила в редколлегию 04.10.2010

УДК 539.3 : 621.039.743

С.Ю.САЕНКО, канд. техн. наук, нач. отдела ННЦ «ХФТИ», Харьков;
О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Д.В.ЛАВИНСКИЙ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КЕРАМИЧЕСКОГО КОНТЕЙНЕРА ПРИ ПРОБИВАНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СТЕРЖНЕМ И ПУЛЕЙ

Проведено аналіз ударного деформування керамічного контейнера для транспортування й захоронення радіоактивних матеріалів при пробиванні його металевим стержнем та кулею. Аналіз проводився з метою оцінювання міцності й герметичності за умов нормативних вимог щодо проектів таких об'єктів. Задача розв'язувалась методом скінчених елементів у переміщеннях за допомогою сучасного програмного комплексу ANSYS. Представлені розподіли максимальних інтенсивностей напружень. Одержані результати розрахунків дозволяють зробити висновок, що за вказаних видів навантаження керамічний контейнер залишається міцним та герметичним.

The analysis of impact deformation of a ceramic container for transporting and evaluating of radioactive material to the strength and tightness under regulatory requirements to projects such facilities. The analysis was completed for estimations of the strength and tightness of the container project. The problem was solved by finite element method in displacement with helping of modern program complex ANSYS. The distribution of maximal stress intensity is described.

Актуальность и состояние проблемы. В настоящее время в Украине для транспортирования и хранения отходов, возникающих при эксплуатации атомных электростанций, традиционно используются бетонные упаковки. Такие упаковки не в полной мере отвечают современным требованиям безопасности. Одним из вариантов повышения прочностных характеристик контейнеров является разработка новых защитных материалов и конструкций на их основе [1,2]. Новые варианты конструкций контейнеров должны удовлетворять условиям прочности при стандартных видах нагружения в соответствии с разд. 4.5 руководящих материалов ГОСТа 51824 – 2001 «Контейнеры защитные невозвратные для радиоактивных отходов из конструкционных материалов на основе бетона. Общие технические требования». Одним из видов нагружения, определяемых ГОСТом, является падение металлического стержня из углеродистой стали (масса – 6 кг, диаметр – 32 мм, с полусферическим концом радиусом 16 мм) с высоты 1 м в направлении центра наименее прочной части контейнера. Такой тип нагружения может привести к пробиванию контейнера. Кроме того, в настоящее время хранилища вредных радиоактивных отходов могут стать объектом террористической атаки, при которой весьма велика вероятность поражения контейнера пулей стрелкового оружия. Очевидно, что новая конструкция контейнера может считаться работоспособной, если пробивание корпуса при указанных видах воздействия не произойдет. Этим обусловлена актуальность темы работы.

Постановка задачи и метод решения. В работах [3,4] проведены расчеты и анализ прочности контейнера при статическом нагружении и при падении. В данной работе за основу принималась модель контейнера уже рассмотренная ранее с такими же физико-механическими характеристиками материала. Особенности нагружения в данном случае (при пробивании стержнем или пулей) таковы, что воздействие производится в локальной области поверхности контейнера и, поэтому задача должна рассматриваться в трехмерной постановке. Анализ информационных источников по данной проблеме, а также предыдущие результаты расчетов прочности, позволяют сделать вывод, что при пробивании наименее прочной может считаться середина (по высоте) корпуса и середина крышки. Так же середина корпуса является наиболее вероятной областью попадания пули. На рис. 1 и 2 представлены расчетные схемы задач падения металлического стержня на корпус и попадания пули.

Для двух приведенных расчетных схем должны выполняться следующие условия закрепления. Для схемы рис. 1 – жесткое опирание вдоль линии касания боковой поверхности корпуса и опорой:

$$\bar{U}(x = 0, y \in [0, h], z = 0) = 0. \quad (1)$$

Для схемы рис.2 – жесткое опирание основания контейнера:

$$\bar{U}(x, y, z = 0) = 0. \quad (2)$$

Так как, в данном случае металлический стержень совершает поступательное движение, то его скорость в момент касания боковой поверхности может быть получена из теоремы об изменении кинетической энергии по следующей формуле:

$$v = \sqrt{2gh}, \quad (3)$$

при $h = 1$ м скорость составит $v = 4,43$ м/с. Во втором случае принимаем: масса пули – 9 г, диаметр – 7,62 мм, скорость подлета – 900 м/с.

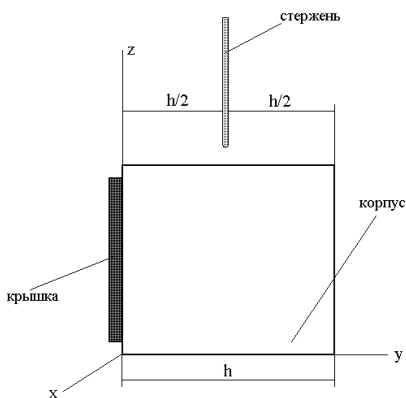


Рисунок 1

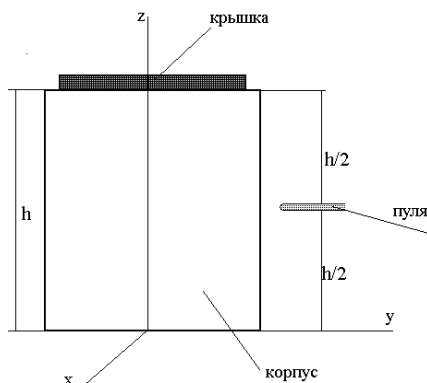


Рисунок 2

Задача решалась методом конечных элементов (МКЭ) в перемещениях средствами модуля программного комплекса ANSYS – LS DYNA. В качестве базового выбирался 10-узловой объемный призматический конечный элемент с квадратичной аппроксимацией перемещений – SOLID168.

Материал контейнера считался упругим, свойства которого выбирались соответствующими спеченной керамике типа ZrO_2 [1]. Содержимое контейнера моделировалось твердым телом с упругими свойствами. Поведение материала стержня и пули моделировалось в рамках смешанного подхода Лагранжа-Эйлера описания сплошной деформируемой среды. Контактные явления, имеющие место между крышкой и корпусом, моделировались путем введения специального слоя контактных конечных элементов.

Оценки прочности керамического контейнера. Рассмотрим вначале результаты, полученные для случая соударения металлического стержня с контейнером.

Следует отметить, что ударное воздействие приводит к возникновению значительных напряжений только в области, непосредственно прилегающей к

месту соударения. В точках удаленных от места соударения напряжения являются незначительными и не приводят к возникновению критических состояний материала. Таким образом можно утверждать, что падение металлического стержня на середину боковой поверхности корпуса контейнера не приведет к нарушению герметизации узла соединения крышки и корпуса.

В расчетах оценивалась длительность соударения, а также напряженное состояние в зависимости от времени соударения. Результаты показали, что длительность соударения составляет $0,5 \cdot 10^{-3}$ с. Максимальные значения напряжений наблюдаются в момент времени соударения $0,25 \cdot 10^{-3}$ с.

На рис. 3 представлена картина распределения максимальной (во времени) интенсивности напряжений в области соударения. Отметим, что максимальное значение интенсивности наблюдается в точка поверхности корпуса, непосредственно контактирующих с падающим стержнем, и составляет 33 МПа. Если воспользоваться критерием прочности Губера – Хенки – Мизеса и сравнить максимальную интенсивность напряжений с пределом прочности материала ZrO_2 – 1400 МПа [1], то можно утверждать, что в результате соударения контейнер остается прочным. Подобный же вывод можно сделать, если воспользоваться критерием Мора и сравнить максимальное значение первого главного напряжения с пределом на растяжение [1].

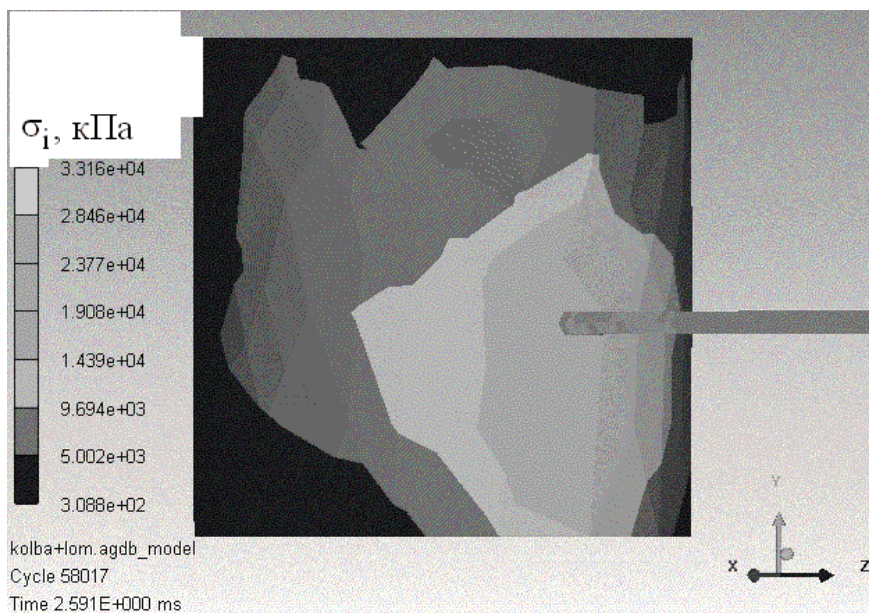


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений в области контакта стержня и контейнера

Подобные результаты были получены и в результате решения задачи о

пробивании боковой поверхности контейнера пулей. На рис. 4 представлена геометрическая модель контейнера и пули, созданная средствами программного комплекса ANSYS. На рис. 5 представлена качественная картина распределения интенсивности напряжений в момент контакта пули и корпуса. Следует отметить, что общая картина распределения напряжений соответствует первому рассмотренному случаю. В точках удаленных от места попадания пули напряжения являются незначительными, а значит и в этом случае разгерметизация узла соединения крышки и корпуса не наблюдается. Количественные оценки также позволяют сделать вывод, что прочность контейнера в месте попадания пули также не нарушается (максимальное значение интенсивности напряжений составляет 300 МПа). Следует отметить, что пуля претерпевает значительное пластическое деформирование.

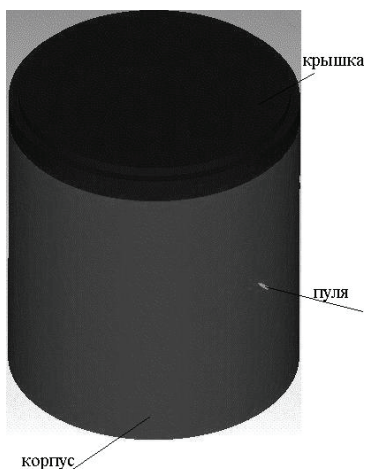


Рисунок 4 – Модель контейнера и пули

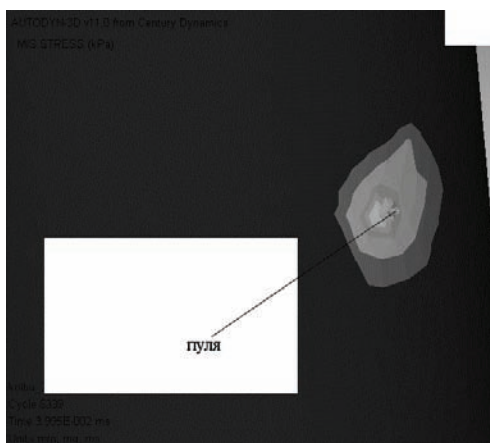


Рисунок 5 – Качественное распределение интенсивности напряжений в области контакта пули с боковой поверхностью пули

Выводы. Проведено моделирование двух критических режимов нагружения керамического контейнера для хранения радиоактивных отходов. Моделирование проводилось средствами программного комплекса ANSYS. Особым образом учтено поведение материала при соударении. Оценки прочности контейнера по теории Губера – Хенки – Мизеса и по теории Мора показывают, что прочность контейнера не нарушается ни при пробивании его боковой поверхности металлическим стержнем, ни при пробивании пулей.

Список литературы: 1. Саенко С.Ю. Технологические подходы для обеспечения безопасности при обращении с радиоактивными отходами // Энергетика, экономика, технологии, экология. – 2007. – № 2 (21). – С. 27-35. 2. Неклюдов И.М., Морачковский О.К., Андреев Ю.М., Саенко С.Ю., Бирюков О.В. Динамическое моделирование по испытанию на прочность контейнеров-упаковок для высокоактивных отходов атомных станций // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – № 6/4 (30) – 2007. – С.4-7. 3. Саенко С.Ю., Морачковский О.К., Лавинский Д.В., Соболев

В.Н. Анализ статического и ударного деформирования керамического контейнера для радиоактивных отходов // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – 2010. – № 37. – С. 136-142. **4.** *Лавинский Д.В., Морачковский О.К., Саенко С.Ю.* Анализ прочности керамического контейнера для хранения радиоактивных отходов. // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. – 2010. – Вип. 101. – С.286-290.

Поступила в редколлегию 10.11.10

УДК 621.822.8

Э.А.СИМСОН, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ», директор по науке и инновациям АО «УПЭК», Харьков;

В.В.ОВЧАРЕНКО, канд. техн. наук, руководитель группы инженерных расчетов АО «УПЭК», Харьков;

Ю.А.ШЕВЧУК, асп., НТУ «ХПИ»

ПОИСК КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОЛИКА И ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ БОРТОВ КОЛЕЦ ПОДШИПНИКА КАЧЕНИЯ

Запропоновано критерій оптимізації торцевої поверхні ролика та відповідних поверхонь бортів кілець. Встановлено, що критерій може бути обраний на основі аналізу енергії, що витрачається на тертя в зоні контакту: чим менше енергії, що витрачається на тертя, тим менше спрацювання та, відповідно, вище ресурс.

Criterion for the front surface of the roller and the response surfaces of the rings sides optimization has been proposed. Established that the criterion can be chosen based on the friction loss energy analysis in the contact zone: the lower the energy spent on friction, the less the wear and therefore higher the resource.

Введение. Постоянно увеличивающиеся требования к грузоподъемности, ресурсу, межремонтному пробегу и другим критериям технического уровня и качества подшипниковых узлов железнодорожного вагонного состава, диктуют необходимость широкого применения теории и численных методов оптимизации. Большинство описанных в литературе постановок задач оптимизации связано с проблемой предельного снижения веса или его аналогов при обеспечении статической прочности. Реже в качестве критерия используются функционалы прочности и жесткости, собственные частоты, критические параметры устойчивости, характеристики флаттера и дивергенции, комплексные характеристики стоимости и надежности.

Анализ литературы. Исследователями ВНИПП проведен ряд работ, направленных на увеличение ресурса снижением трения в зонах торцевого контакта. Оценка проводится комплексно по составу смазочного материала, толщине пленки, критической вязкости смазочной среды, доле проскальзывания в

контакте и другим критериям контактно-гидродинамической теории смазки. Исследуются характеристики, определяющие тепловыделение в контакте, вероятность схватывания и заедания. Расчет проводится с использованием эмпирических формул и таблиц. Критерии оптимизации задаются косвенно. Оптимальная геометрия находится вариантным методом.

В статье Шавшишвили А.Д. [1] предложена методика оценки работы цилиндрических роликовых подшипников, эксплуатируемых при воздействии на них боковых горизонтальных нагрузок, используемая для определения рациональной формы очертания поверхностей торцов роликов и бортов колец подшипников. Рассмотрены четыре исходных схемы контакта: конусный борт – конусный торец, конусный борт – сферический торец, конусный борт – плоский торец, который имеет на периферийной части скругление в форме торового пояса, плоский борт – плоский торец. Установлено, что оптимальным с точки зрения минимизации контактных напряжений и максимизации критических температур является контакт конусный борт – конусный торец, однако в силу ряда факторов для промышленного применения рекомендована схема с конусным бортом и плоским торцом ролика, имеющим на периферийной части скругление, причем точка их касания находится вблизи места сопряжения плоской и криволинейной частей поверхности торца.

Экспериментальные исследования описаны в работе Фелькенинга В. и Хойбергера Х. [2]. Исследуется способность подшипников переносить осевые силы, описывается эмпирический поиск наилучшего профиля торцевой поверхности ролика, приводятся контактные профили изношенных тел качения. Установлено, что профиль конечной формы должен как можно меньше отличаться от профиля износа. Изначально плоские торцевая поверхность ролика и поверхность борта под действием осевых сил изнашиваются, переходя в изгибы с постоянным радиусом (скругления торца и ролика достаточно малы, их практически невозможно заметить без специальных приборов). Наличие же изгибов в исходной конфигурации ведет к значительному уменьшению износа.

Нахождение критерия оптимизации. При оптимальном профилировании поверхностей качения подшипника с короткими цилиндрическими роликами в качестве критерия оптимизации используется минимизация максимальных контактных напряжений, возникающих между боковой поверхностью ролика и поверхностью качения колец под действием непрерывной вертикальной нагрузки [3]. Минимизация же напряжений, появляющихся периодически под действием боковой горизонтальной силы в контакте торцевой поверхности ролика и внутренних поверхностей бортов колец, является нецелесообразной – сопутствующим результатом будет максимизация зоны контакта, нежелательная при наличии трения скольжения.

В ходе исследования установлено, что критерий может быть выбран на основе анализа энергии, затрачиваемой на трение в зоне контакта: чем меньше энергия, затрачиваемая на трение в системе, тем меньше износ и, соответственно, выше ресурс узла. Энергия, затрачиваемая на трение, равна работе сил

трения:

$$E_{Tp} = A_{Tp}. \quad (1)$$

Для недеформируемого твердого тела работа A_{Tp} равна произведению силы трения на путь:

$$A_{Tp} = F_{Tp}L. \quad (2)$$

В случае трения компланарных плоских поверхностей при возвратно-поступательном движении, сила трения вычисляется как произведение силы, действующей на тело в направлении нормальном к поверхности скольжения, на коэффициент трения:

$$F_{Tp} = fF_{Норм}. \quad (3)$$

Соответственно, интенсивность силы трения в точке контакта равна произведению контактного давления на коэффициент трения:

$$F^{iTp} = f\sigma_{конт} \quad (4)$$

Интенсивность работы силы трения в точке контакта равна интегралу от интенсивности силы трения по пути трения:

$$A^{iTp} = \int F^{iTp} dL = f \int \sigma_{конт} dL. \quad (5)$$

В качестве критерия для оптимизации используется интеграл интенсивности работы силы трения по высоте внутренней поверхности борта кольца.

$$G = \int A^{iTp} dh.$$

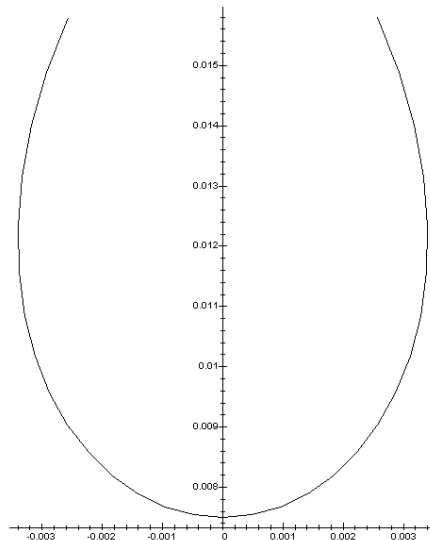


Рисунок 1 – Расчетный путь трения точки борта кольца

Несложно заметить, что для отыскания интенсивности работы силы трения необходимо заранее определить напряжения в зоне контакта и пути тре-

ния, которые проходят по ролику точки ответных поверхностей бортов колец. Учитывая, что при оптимальном проектировании узла вычисление контактных напряжений должно проводиться десятки и даже сотни раз (по одному для каждого конструктивного варианта) нахождение их осуществляется расчетно.

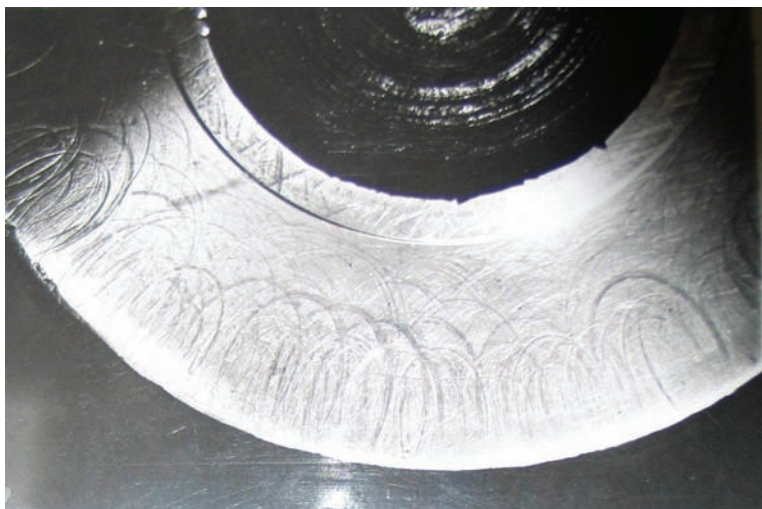


Рисунок 2 – Путь трения точки борта кольца, полученный эмпирически

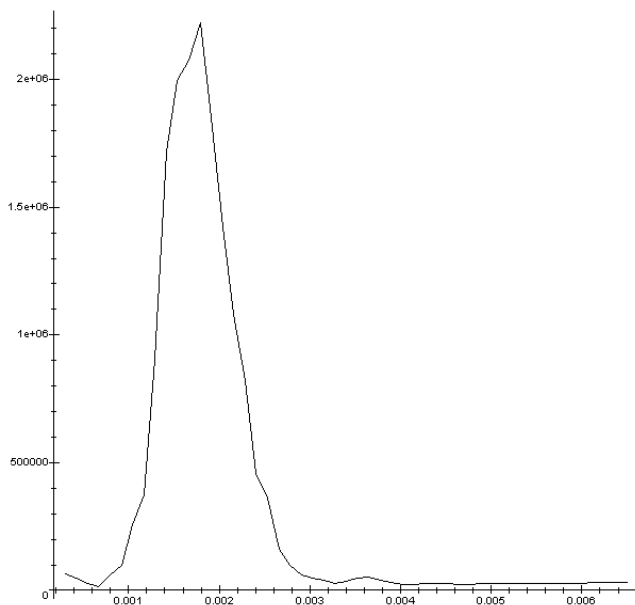


Рисунок 3 – Распределение интенсивности работы сил трения

Путь точки трения в силу малости предполагаемых вариаций геометрии определяется только один раз для каждой принципиальной схемы исполнения, расчетно либо эмпирически. На рис. 1 приведена расчетная траектория точки, на рис. 2 – полученная эмпирически.

На рис. 3 приведено распределение интенсивности работы сил трения по высоте внутренней поверхности бортов колец для исходной геометрии узла.

Выводы. Решена задача поиска критерия оптимизации торцевой поверхности ролика и внутренней поверхности бортов колец подшипника качения. В качестве критерия предложен интеграл интенсивности работы силы трения по высоте внутренней поверхности борта кольца. Изучены пути трения по ролику точки ответных поверхностей бортов колец и распределение интенсивности работы сил трения по высоте внутренних поверхностей бортов колец.

Список литературы: 1. *Шавишивили А.Д.*, Работа цилиндрических роликовых подшипников в контакте торец ролика – борт кольца // Труды ВНИПП. – 1982. – № 2. – С. 91-97. 2. *Фелькенинг В., Хойбергер Х.*, Цилиндрические роликоподшипники для высокоскоростного железнодорожного транспорта // FAG, публикация 07 121. – 1972. 3. *Симсон Э.А., Шевчук Ю.А.*, Моделирование поверхностей качения буксового подшипника // Труды 18-ой международной научно-технической конференции «Прикладные задачи математики и механики». – 2010. – 4. SKF, General Catalog 4000, 2004.

Поступила в редколлегию 08.11.2010

УДК 621.01

С.А.СОКОЛОВСКИЙ, проректор, Академия внутренних войск МВД Украины, Харьков;

Е.Н.ГРИНЧЕНКО, канд. техн. наук, зам. нач. каф., Академия внутренних войск МВД Украины, Харьков;

Н.И.МИСЮРА, канд. техн. наук, зам. нач. каф., Академия внутренних войск МВД Украины, Харьков;

Д.Л.СОКОЛОВ, канд. техн. наук, доцент, Академия внутренних войск МВД Украины, Харьков

СРАВНЕНИЕ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРОЩЕЛКИВАНИЕМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НА ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВАХ

Проведений порівняльний аналіз віброзахисних якостей і властивостей механічних систем з прокладуванням з лінійною або нелінійною характеристикою несучого зв'язку при використанні їх як додатковий віброізолятор, встановлюваний на транспортний засіб для захисту небезпечного вантажу. Показано, що системам з лінійною характеристикою несучого зв'язку слід надавати перевагу у використанні з погляду забезпечення якіснішої віброізоляції небезпечного вантажу.

A comparative analysis vibroprotection qualities and properties of mechanical systems with flipping with linear or nonlinear characteristics of the carrier connection when using them as an extra shock absorbers installed on the vehicle for the protection of dangerous goods. It is shown that a system with linear characteristic carrier connection is preferable to use in terms of ensuring better vibration control of dangerous cargo.

Одной из основных причин выхода из строя различных механизмов и приборов, которые расположены в движущихся объектах, является вредное воздействие вибрации, которая вызывается работой двигателя транспортного средства, влиянием микропрофиля дорожного покрытия, различных дополнительных механизмов и т.д. В связи с этим актуальной проблемой является создание виброзащитной системы и оценка ее эффективности. Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных в работах [1, 2, 3].

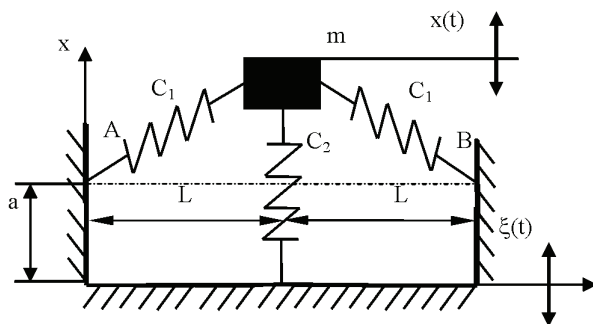


Рисунок 1 – Расчетная схема механической системы с прощелкиванием

В отличие от предыдущих работ здесь исследовалось поведение механической системы с прощелкиванием приведенной на рис. 1, в качестве виброзащитной системы с квазиулевой жесткостью (ВСКЖ), при установке ее на пружину, имеющую нелинейную характеристику или серийный виброизолятор с нелинейной характеристикой. В работе также проводилось сравнение с характеристиками ВСКЖ при использовании в качестве несущей связи пружины с линейной характеристикой.

При расчетах рассматривалась кубическая нелинейная характеристика, как наиболее часто встречающаяся при использовании серийных виброизоляторов. Для оценки виброзащитных свойств системы будем использовать то ее свойство, что она является эффективной при работе в зарезонансной области амплитудно-частотной характеристики (АЧХ).

При построении АЧХ исходим из уравнения движения механической системы с прощелкиванием в безразмерных координатах. Для ВСКЖ с линейной несущей связью имеем уравнение:

$$q'' + \tilde{\beta}q' + 2q \left(1 - \frac{(1 + \alpha)}{\sqrt{1 + \tilde{\epsilon}q^2}} \right) + \tilde{C}q = \sin \tilde{\omega}\tau, \quad (1)$$

где $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{C_1 m}}$; $\alpha = \frac{\Delta}{L}$; $\tilde{\varepsilon} = \frac{P_0^2}{L^2 \omega_0^4}$; $\tilde{C} = \frac{C_2}{C_1}$; $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$. Здесь через ' обозначена производная по τ .

Для ВСКЖ с нелинейной несущей связью имеем уравнение:

$$q'' + \tilde{\beta} q' + 2q \left(1 - \frac{(1+\alpha)}{\sqrt{1+\tilde{\varepsilon} q^2}} \right) + \tilde{C} q (1 + k \tilde{\varepsilon}_1 q^2) = \sin(\tilde{\omega} \tau + \theta), \quad (2)$$

где $\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{P_0}{\omega_0^4}$, $q = \frac{\omega_0^2}{P_0} x$, остальные обозначения такие же как и в уравнении (1).

Разложив корень в степенной ряд получим:

для уравнения (1):

$$q'' + \tilde{\beta} q' + (\tilde{C} - 2\alpha) q + (1 + \alpha) \tilde{\varepsilon} q^3 = \sin(\tilde{\omega} \tau + \theta), \quad (3)$$

где θ – некоторый неизвестный фазовый угол.

Для уравнения (2):

$$q'' + \tilde{\beta} q' + (\tilde{C} - 2\alpha) q + ((1 + \alpha) \tilde{\varepsilon} + k \tilde{C} \tilde{\varepsilon}_1) q^3 = \sin(\tilde{\omega} \tau + \theta), \quad (4)$$

которое отличается от уравнения (3) только коэффициентом при q^3 .

При построении АЧХ системы воспользуемся методом прямой линеаризации [4] и будем искать решение уравнения в виде $q_1 = q \sin \tilde{\omega} \tau$.

В результате получим алгебраическое уравнение, связывающее частоту колебаний с амплитудой на этой частоте

для уравнения (3):

$$\tilde{\omega}^4 + (\tilde{\beta}^2 - 2C_0 - 1,5\varepsilon_0 q_1^2) \tilde{\omega}^2 + (C_0 + 0,75\varepsilon_0 q_1^2)^2 - \frac{1}{q_1^2} = 0, \quad (5)$$

где $C_0 = \tilde{C} - 2\alpha$, $\varepsilon_0 = (1 + \alpha) \tilde{\varepsilon}$.

Для уравнения (4):

$$\tilde{\omega}^4 + (\tilde{\beta}^2 - 2C_0 - 1,5\varepsilon_0 q_1^2) \tilde{\omega}^2 + (C_0 + 0,75\varepsilon_0 q_1^2)^2 - \frac{1}{q_1^2} = 0, \quad (6)$$

где $\varepsilon_0 = ((1 + \alpha) \tilde{\varepsilon} + k \tilde{C} \tilde{\varepsilon}_1)$, $C_0 = \tilde{C} - 2\alpha$.

Используя выражение (6) построим АЧХ системы при гармоническом возбуждении основания и различных значениях коэффициента α , описывающего геометрические параметры пружин–корректоров исследуемой виброзащитной системы. Эти графики приведены на рис. 2. Там же приведены и скелетные кривые рассматриваемой системы. При этом принимались такие параметры: $\alpha = 0,1; 0,25$ и $0,5$ (кривая 3, 2 и 1 соответственно).

При анализе графиков АЧХ виброзащитной системы с нелинейной упругой характеристикой несущей связи можно отметить, что при увеличении параметра α происходит ухудшение виброизолирующих свойств виброзащитной системы. Это объясняется тем, что эффективная виброизоляция обеспечивается

только в том частотном диапазоне, где реализуется единственный периодический режим с малыми амплитудами колебаний (зарезонансная область АЧХ).

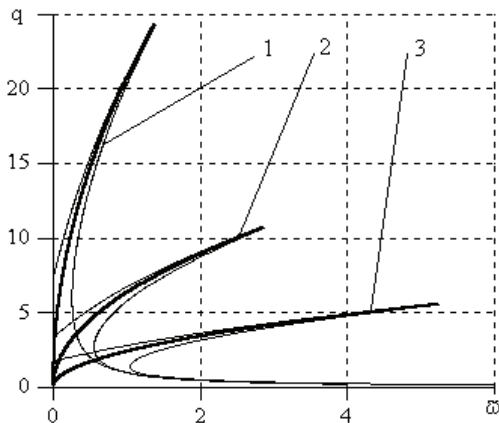


Рисунок 2 – АЧХ ВСКЖ при различных значениях коэффициента α

Можно отметить, что с увеличением параметра α происходит ухудшение виброзащитных свойств системы. Однако, при малых значениях α происходит сужение области существования квазиулевого жесткости в системе с проселкиванием [1], и правильное задание этого коэффициента очень важно для обеспечения эффективной работы предлагаемой системы.

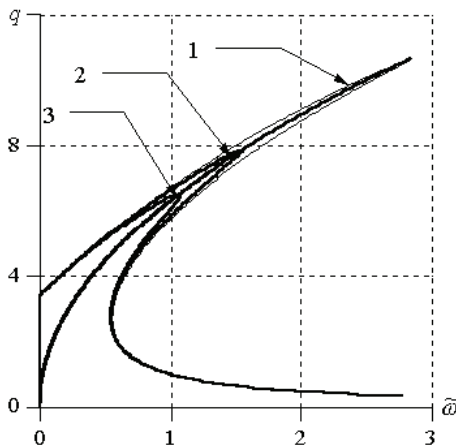


Рисунок 3 – Анализ влияния демпфирования на виброзащитные свойства исследуемой системы

В продолжение исследований рассмотрим влияние демпфирования на виброзащитные свойства ВЗС. Для этого были построены АЧХ системы при различ-

ном значении демпфирования $\tilde{\beta} = 0,055$ (кривая 1), $\tilde{\beta} = 0,078$ – (кривая 2) и $\tilde{\beta} = 0,124$ (кривая 3), приведенные на рис. 3.

Можно отметить, что правильное задание значения коэффициента демпфирования очень важно. С увеличением коэффициента демпфирования система становится более жесткой, что приводит к увеличению частотного диапазона возмущающих сил, на котором возможно возникновение колебаний с большой амплитудой.

В заключение рассмотрим влияние параметра $\tilde{\varepsilon}$ на вид АЧХ исследуемой системы. Были проведены расчеты, результаты которых приведены на рис. 4. Здесь при неизменности остальных параметров менялось значение коэффициента $\tilde{\varepsilon}$. Так, на этом рисунке кривая 1 соответствует значению $\tilde{\varepsilon} = 5,055$; кривая 2 – 36,87 и кривая 3 – 188,25.

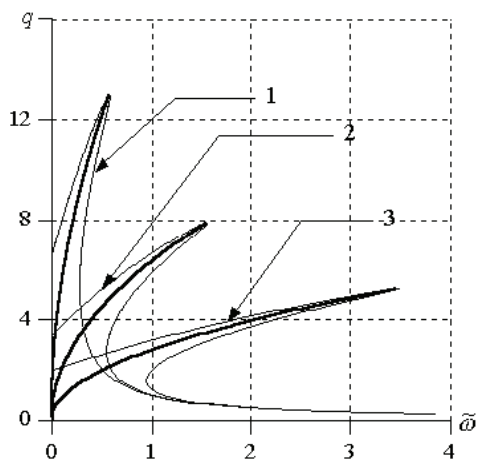


Рисунок 4 – АЧХ системы при различных значениях $\tilde{\varepsilon}$

Отметим, что при увеличении параметра $\tilde{\varepsilon}$ происходит ужесточение системы, и как следствие, уменьшение максимальных резонансных амплитуд колебаний и увеличение области частот, в которых возможны бифуркации решения.

Поэтому, можно сделать вывод о ухудшении виброзащитных свойств системы при увеличении амплитуды возмущающей силы. В связи с этим знание рабочих режимов проектируемой ВЗС представляется очень важным, т.к. в этом случае можно повлиять на характер АЧХ с помощью изменения геометрических или же статических характеристик проектируемой системы.

Представляет интерес также сравнение АЧХ исследуемой системы при линейной и нелинейной упругих характеристиках несущей связи. АЧХ системы с линейной характеристикой приведена на кривой 1, а АЧХ с нелинейной — на кривой 2 рис. 5.

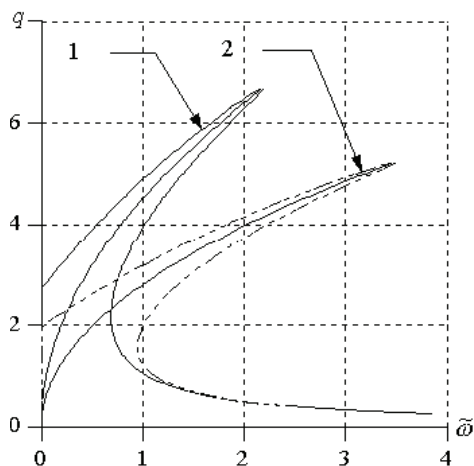


Рисунок 5 – Сравнение АЧХ системы при линейной и нелинейной упругой характеристике несущей связи.

Сравнивая графики, приведенные на рис. 5 можно отметить, что при прочих одинаковых условиях АЧХ ВЗС с нелинейной упругой связью являются более жесткими, что приводит к увеличению минимальной частоты внешнего воздействия, для которой данная ВЗС будет эффективно работать, поскольку в области возможных бифуркаций решения случайный толчок или изменение начальных условий может вывести систему на устойчивый режим работы с большой амплитудой колебаний.

В результате проведенного анализа можно отметить, что при замене линейной упругой несущей связи на нелинейную происходит снижение эффективности виброизоляции из за ужесточения системы, поэтому при возможности выбора для установки устройства с линейной или нелинейной характеристиками следует предпочитать устройство с линейной упругой характеристикой несущей связи. При невозможности использования указанного устройства следует по возможности использовать более мягкую систему, т.е. выбрать параметр α по возможности минимальным. Однако в этом случае происходит сближение положений устойчивого равновесия к началу отсчета, что может повлечь за собой переход системы к колебаниям с большими амплитудам около одного из устойчивых положений равновесия вследствие случайных воздействий на систему.

Список литературы: 1. Гапонов В.С. Выбор параметров виброзащитной системы с квазиулеевой жесткостью на основе исследования ее динамических свойств / Гапонов В.С., Гринченко Е.Н. // Вестник Харк. гос. политехи. университета. – 1999. – Вып 53. Динамика и прочность машин. – С. 78-85. 2. Драгун С.В. К вопросу оценки эффективности виброзащитной системы с квазиулеевой жесткостью / Драгун С.В., Гринченко Е.Н., Чернобай Г.А. // Проблемы пожарной безопасности. Сб. науч. тр. – Вып. 5. – Харьков: ХИПБ, 1999. – С. 87-90. 3. Ольшанский В.П. О возможности применения системы с прощелкиванием для виброизоляции объектов прожарной техники / Ольшанский

УДК 534.014.4

А.С.СТЕПЧЕНКО, доцент, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;

А.А.ЛАРИН, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;

С.Л.АРТЕМОВ, асп., ОАО «Турбоатом», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛОПАТОЧНОГО АППАРАТА С ДВУХЪЯРУСНЫМ РАЗЪЕМНЫМ БАНДАЖИРОВАНИЕМ

У роботі проведено дослідження динамічних характеристик лопаток парових турбін великої довжини з роз'ємним двоjarусним поличним міжлопатковим бандажем. При цьому варіювалося положення проміжного зв'язку по висоті лопатки. На основі скінчено-елементного моделювання проведено порівняльний аналіз динамічних характеристик лопаткових апаратів і оцінка впливу висоти проміжного бандажа.

In the given paper investigation of the dynamic characteristics of the steam turbines extra long has been carried out. This bladings has a peculiarity which consists of the detachable double-leveled inter-blade conjunction. Two variants of intermediate bandage joint as a shelf and a pipe is analyzed. A comparative analysis of the dynamic characteristics of the bladings with different types of intermediate bandage has been carried out on the base of FEM.

1 Введение. Одной из главных проблем при создании новых типов паровых турбин является проблема проектирования лопаток последних ступеней цилиндра низкого давления (ЦНД). Увеличение единичной мощности паровой турбины требует увеличения площади выхлопа ЦНД и, как следствие, – увеличения длины лопаток его последней ступени. Конструктивно лопатка сверхбольшой длинны имеют сложный профиль переменного сечения и большой угол предварительной закрутки. Такая геометрия определяет ее большую изгибно-крутильную податливость, что способно привести к высоким уровням вибраций. С целью увеличения жесткости лопаточного аппарата соответствующих ступеней применяются межлопаточные связи. При этом получение приемлемых прочностных и вибрационных характеристик соответствующих аппаратов требует введения не только периферийного бандажа, но и дополнительной промежуточной связи, в качестве которой в современной практике получает все большее распространение цельнофрезерованная полочная связь. Особенности данного типа связи являются следующие: он не искажает теоретический профиль, обеспечивает большую жесткость связей между лопатками, однако вследствие трудностей при изготовлении и сборки, до последне-

го времени распространен был мало. Одной из главных проблем, при проектировании данного типа связи является выбор оптимального положения связи по высоте лопатки. Выбор высоты связи определяется для каждого лопаточного аппарата индивидуально с учетом его влияния на прочностные и вибрационные характеристики. Таким образом, анализ влияния высоты установки промежуточных бандажей для рабочих лопаточных аппаратов большой и сверхбольшой длины представляет собой актуальную научно-практическую задачу. Данная работа посвящена исследованию динамики и прочности перспективных лопаток последней ступени сверхбольшой длины.

2 Построение математической модели. Конструкции лопаток с полочным промежуточным бандажом были разработаны, используя приближенные оценки прочности, выполненные на основе стержневой модели [1]. Для исследования влияние высоты установки промежуточного бандажа на динамические характеристики были разработаны КЭ модели лопаток (рис. 1).

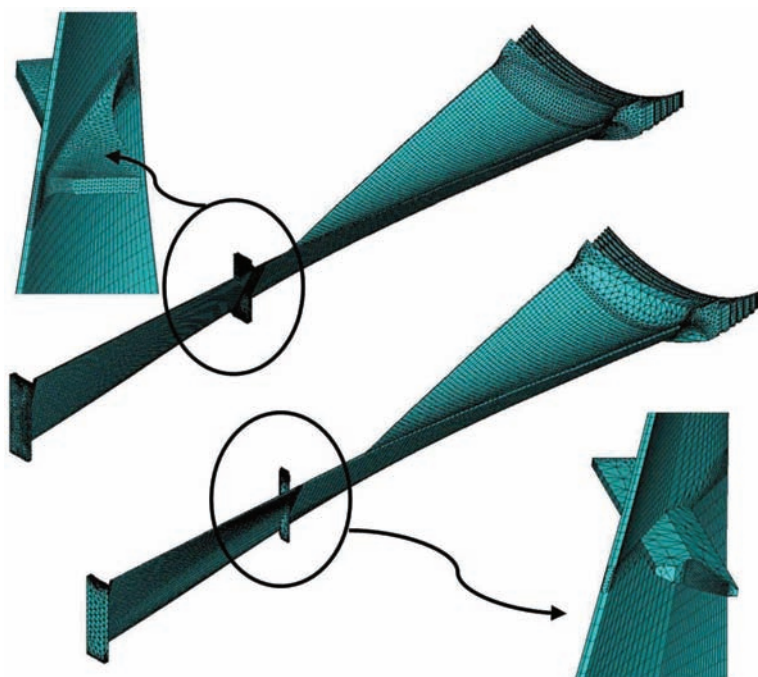


Рисунок 1 – Конечно-элементные модели лопаток с двухъярусным бандажированием (*a* – полочный промежуточный бандаж в сечении $0,6 L$ лопатки; *b* – полочный промежуточный бандаж в сечении $0,67 L$ лопатки.)

Лопатки разбивались на изопараметрические 8-узловые конечные элементы с тремя степенями свободы в каждом узле. Модель одной лопатки-

сектора содержит примерно 75 тысяч КЭ. Данные модели учитывают основные конструктивные особенности: елочный хвост, прикорневую галтель. В лопатке с полочным бандажом в сечении 0,6 L лопатки конструкция полки отличается от варианта с полочным бандажом в сечении 0,67 L лопатки. Это связано с тем, что в этом варианте конструкция полочного бандажа была доработана, чтобы улучшить напряженно-деформированное состояние в районе полки. При моделировании рассматривается только лопаточный аппарат ступени, а влиянием диска пренебрегается. Лопатка закрепляется по опорным поверхностям зубьев хвостовика, то есть запрещение всех степеней свободы соответствующих узлов КЭ сетки.

При моделировании лопаточного венца учитывалась циклическая симметрия системы. В этом случае задача анализа его колебаний сводится к рассмотрению только одной периодической части системы с соответствующими граничными условиями (1). В качестве периодической части был взят сектор с лопаткой и частью бандажной связи. При этом разделение осуществлялось таким образом, чтобы контактирующая часть бандажной связи вошла внутрь сектора, как это показано на рис. 2. Аналогичные операции проведены и для промежуточного бандажа.

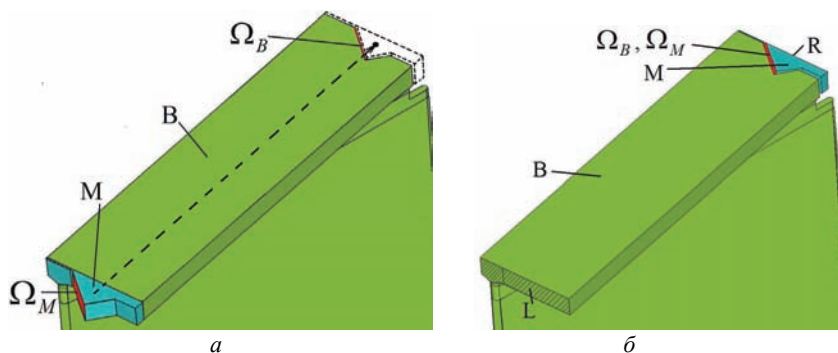


Рисунок 2 – Моделирование разъемного соединения для циклически симметричного лопаточного аппарата (а – исходная геометрия бандажа; б – сектор циклически симметричной системы)

На разработанные КЭ модели сектора накладывались соответствующие краевые условия циклической симметрии:

$$\xi_L^{(h)} = \xi_R e^{i \frac{2\pi}{N} h}; \quad f_L^{(h)} = -f_R e^{i \frac{2\pi}{N} h}, \quad (1)$$

где ξ – вектор амплитуд перемещений, f – внутренние силы прикладываемые на границы сектора (лопатки) и моделирующие влияние отброшенной части полной системы; h – число волн деформации в определяемой форме прогиба (индекс цикличности): $h = \overline{0, N/2}$; N – количество лопаток; $i = \sqrt{-1}$. Индексами L и R обозначены соответственно левая и правая поверхности опреде-

ляющие края сектора (рис. 2, б).

Условия (1), позволяют построить $N/2 + 1$ модели лишь для одного (базового) сектора. Каждая из этих моделей определяется индексом цикличности h и позволяет получить набор частных решений, пространственная форма прогибов которых имеет фиксированное число волн деформаций (узловых диаметров для собственных форм колебаний). Их совокупность представляет собой полный набор всех возможных решений для полного циклически симметричного лопаточного аппарата. А отклик для каждого сектора полной системы ξ_j легко может быть выражен из решений, полученных для базового сектора ξ_S

$$\xi_j^{(h)} = \xi_S e^{i \frac{2\pi}{N} h(j-1)}. \quad (2)$$

Одна из важных особенностей данного лопаточного аппарата заключается в том, что имеющиеся межлопаточные связи являются разъемными соединениями. Очевидно, что при нестационарном нагружении таких систем в общем случае необходимо проводить анализ нелинейных колебаний [2, 3]. Однако для большого числа номинальных режимов лопаточного аппарата динамическая составляющая внешнего воздействия значительно меньше статической нагрузки. При этом, в поле центробежных сил, наблюдается достаточно плотное замыкание в бандажных разъемных соединениях и переменные контактные области практически отсутствуют [4].

Таким образом, исследование динамики лопаточного аппарата в этом случае правомерно проводить в линейной постановке. Для этого необходимо построить адекватную линеаризованную модель, следуя методике предложенной в работах [3, 4]. Предполагается, что контакт в бандажных соединениях данного лопаточного аппарата будет иметь характер аналогичный тому, который наблюдался в конструктивно подобном бандаже рабочего аппарата предпоследней ступени с лопатками меньшей длины [2, 4].

Таким образом, моделирование контактного взаимодействия в разъемных соединениях осуществлялось путем наложения условия совместности перемещений на контактные поверхности разъемных соединений соседних тел. Так, для лопаток с полочным промежуточным бандажом эти дополнительные краевые условия представляются в следующем виде:

$$\xi_S|_{\Omega_B} = \xi_S|_{\Omega_M}; \quad \xi_S|_{\bar{\Omega}_B} = \xi_S|_{\bar{\Omega}_M}, \quad (3)$$

где Ω_B, Ω_M контактные поверхности зубьев основной и перенесенной части периферийного бандажа (см. рис. 2); $\bar{\Omega}_B, \bar{\Omega}_M$ – аналогичные поверхности на частях промежуточного бандажа.

3 Анализ собственных частот и форм лопаточного аппарата. Предварительное статическое НДС оказывает существенное влияние на динамические характеристики лопаточного аппарата. Поэтому предварительно была решена задача статического деформирования лопаточного аппарата в поле центробежных сил.

Разработанная КЭ модель (рис. 1) с учетом краевых условий и условий (1) и (3), позволяют получить разрешающую систему уравнений для прочностного анализа

$$[K_0] \cdot \xi_S = \omega^2 \cdot [I_\omega] \cdot \text{diag}([M_0]) \cdot r_0, \quad (4)$$

где $[K_0]$, $[M_0]$ – матрицы жесткости и масс сектора (из всех возможных систем уравнений определяемых условиями (1) для симметричного статического нагружения имеют физический смысл только системы с $h = 0$); ω – частота вращения диска; $[I_\omega]$ – диагональная матрица индексов приложения квадратов частот вращения (состоит из 0 и 1 причем 1 расположены только в тех строках, которые соответствуют радиальным степеням свободы лопатки); r_0 – радиус вектор геометрического положения узлов КЭ сетки модели (система координат совпадает с осью вращения диска).

В работе проведены расчеты статического НДС возникающего в лопаточных аппаратах с различной высотой установки промежуточной межбандажной связи. Распределения интенсивности напряжений по перу лопатки для обоих типов связи подобны. Зоны концентраций напряжений наблюдаются: на нижней части выходной кромки, в районе промежуточной связи, на первой паре опорных зубьев хвостовика, а также на верхней части выходной кромки под периферийным бандажом (рис. 3).

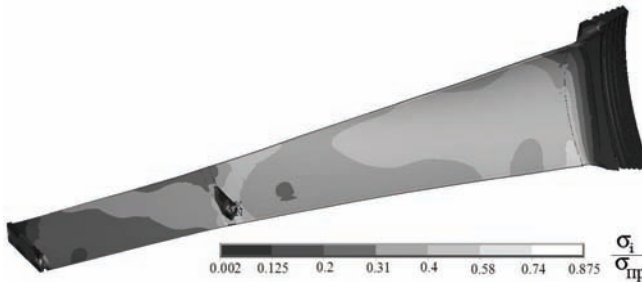


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений

Система уравнений для решения задачи собственных колебаний лопаточного аппарата имеет вид:

$$([K_h] - p_h^2 \cdot [M_h]) \cdot \xi^{(h)} = 0, \quad (5)$$

где $[M_h]$, $[K_h]$ – матрицы масс и жесткости, p – собственная частота колебаний, ξ – вектор амплитуд перемещений (собственные формы).

Наличие в конструкции предварительного НДС приводит к увеличению потенциальной энергии в системе за счет работы начальных напряжений на действительных деформациях. В рамках КЭ формулировки это приводит к появлению дополнительной составляющей в матрице жесткости конструкции

$$([K_h] + [\bar{K}_h(\sigma_0)] - p_h^2 \cdot [M_h]) \cdot \xi^{(h)} = 0, \quad (6)$$

где $[\bar{K}_h]$ – матрица добавочной жесткости (которая определяется предвари-

тельным статическим напряженным состоянием), σ_0 – вектор предварительных статических напряжений в конструкции.

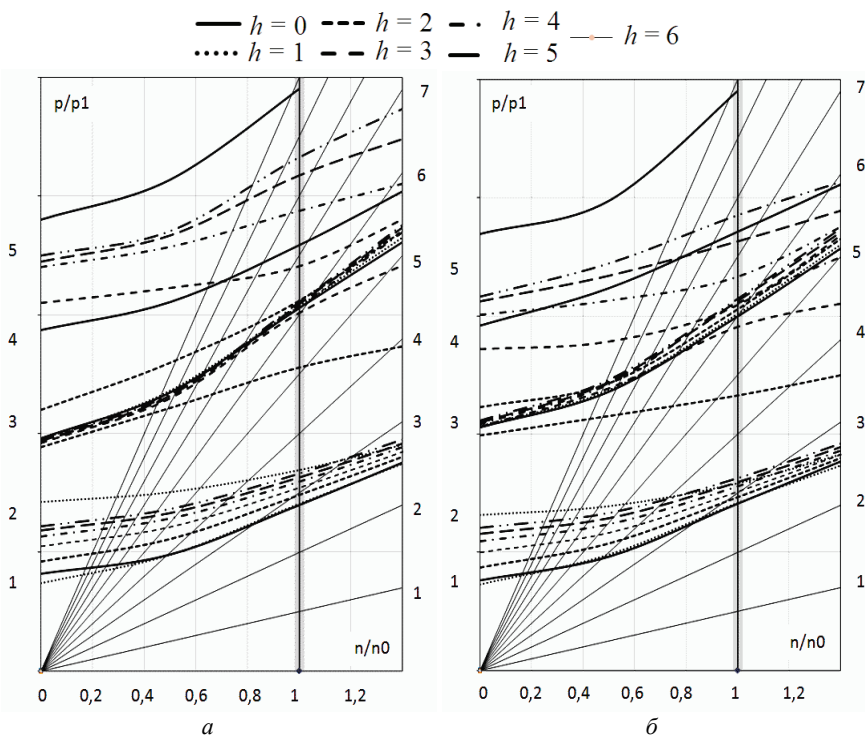


Рисунок 4 – Кэмпбелл диаграмма для рабочей лопатки
(а – полка 0,6 высоты лопатки; б – полка 0,67 высоты лопатки)

В результате численных исследований были получены собственные частоты и формы колебаний лопаточного венца для моделей с различной высотой установки промежуточного полочного бандажа при различных оборотах турбины и построены Кэмпбелл диаграммы (рис. 4). На рисунках введены следующие обозначения: h – индекс цикличности решения (определяет принадлежность частот к группе формы которых имеют h узловых диаметров); p – собственная частота, $p1$ – первая частота в спектре собственных колебаний; n – частота вращения ротора (основная частота внешних сил); $n0$ – рабочая частота вращения ротора. Радиальными лучами на графиках показаны кратности частот нагрузке. Их пересечения с кривыми изменения собственных частот дает возможность определить потенциально опасные резонансные значения.

Как видно на приведенных диаграммах в обеих конструкциях имеет место две зоны с высокой плотностью спектра собственных частот. Следует отметить, что в районе рабочего значения частоты вращения ротора имеет место целый спектр потенциально опасных резонансных режимов (см. таблицу).

В таблице введены следующие обозначения: p_{hm} – собственные частоты, h – индекс цикличности, m – номер формы в группе с фиксированным значением h ($(m-1)$ – количество узловых окружностей), в скобках указаны частоты, не попадающие на резонанс, но находящиеся в непосредственной близости от пределов отстройки от него.

Следует отметить, что из всего спектра резонансных режимов критическими можно считать только те, число узловых диаметров собственных форм которых совпадает с номером кратности гармоники нагружения. Таким образом, в данном лопаточном аппарате можно выделить только одну критическую собственную частоту p_{31} . Это наблюдается для лопаток с обеими вариантами установки полочного промежуточного бандажа.



Рисунок 5 – Формы колебаний лопаточного аппарата

Сравнительный анализ влияния высоты установки промежуточной связи на собственные формы колебаний показал, что для двух моделей формы с $m = 1$ практически совпадают. На рис. 5 показаны собственные формы колебаний для опасных частот (на примере одной лопатки).

Спектр резонансных режимов

	номер гармоники нагрузки						
	1	2	3	4	5	6	7
	лопаточный аппарат с полочным промежуточным бандажом 0,6 L лопатки						
	–	–	p_{21}, p_{31}	–	p_{22}	$p_{32}, p_{03}, p_{13}, p_{52}$	–
	лопаточный аппарат с полочным промежуточным бандажом 0,67 L лопатки						
p_{hm}	–	–	p_{21}, p_{31}, p_{41}	–	–	p_{03}, p_{13}, p_{23}	–

Выводы

1 Изменение по высоте промежуточной полочной связи при двухъярусном бандажированом лопаточном аппарате оказывает значительное влияние на вторую и третью гармоники собственных частот и незначительное влияние на первую гармонику.

2 Имеется опасная частота соответствующая p_{31} и эффективным путем решения этой проблемы может быть проведение оптимизации при варьировании не только положением промежуточного бандажа на пере лопатки, но и его формой.

Список литературы: 1. *Степченко О. С., Артьомов С. Л.* Дослідження впливу різних типів бандажа на міцності характеристики двохбандажних лопаток парових турбін // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я: Тези доповідей XVIII міжнарод. наук.-практ. конф. (12-14 травня. 2010 р.). – Ч 1. – Харків: НТУ «ХПІ», 2010. – С. 44. 2. *Зиньковский А. П., Бусленко И. Н., Матвеев В. В.* Локализация колебаний бандажированного лопаточного венца рабочего колеса турбомашин // Проблемы прочности. – 1994. – № 7. – С. 53-61. 3. *Жовдак В. О., Зиньковський А. П., Степченко О. С., Круглий Я. Д.* Нелінійні коливання пакетів лопаток з роз'ємними з'єднаннями // Проблемы машиностроения. – Харьков: Контраст, 2009. – Т. 12, № 4. – С.45-53. 4. *Демуз Я. Д., Жовдак В. А., Ларин А. А., Степченко А. С., Соляникова Ю. В.* Исследование динамического контактного взаимодействия в межбандажных соединениях пакетов лопаток паровых турбин с расстройкой // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наук. праць ДНУ. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 11. – С.53-62.

Поступила в редколлегию 24.11.2010

УДК 539.3

В.Г.СУКИАСОВ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;
В.П.ЧАПЛИНСКИЙ, МОЗ Украины, Харьков

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ФИКСАТОРА И ФОРМЫ ПЕРЕЛОМА НА МЕХАНИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПЛАСТИНЧАТОГО ОСТЕОСИНТЕЗА

На основі скінченноелементного аналізу виконане зіставлення різних варіантів фіксації прямого й косоного переломів великої гомілкової кістки з позицій жорсткості й напруженого стану під дією фізіологічного навантаження.

The comparison of various options fixing the direct and oblique fractures of tibia based on finite element analysis is performed from the standpoint of stiffness and stress state under the action of physiological load.

При выборе способа фиксации переломов конечностей хирургам в основном приходится полагаться на имеющийся клинический опыт и интуитивные представления о возможных положительных и отрицательных эффектах. Вместе с тем современные средства компьютерного моделирования и анализа да-

ют возможность для обоснованного решения о наиболее рациональном варианте на основе теоретического прогнозирования последствий операции.

В настоящее время одним из наиболее эффективных способов фиксации считается пластинчатый остеосинтез с несущим элементом в виде металлической планки [1]. В данной работе ставится задача сопоставления различных вариантов конструктивного исполнения ортопедических фиксаторов пластинчатого типа с точки зрения механических аспектов восприятия синтезированной костью физиологических нагрузок в ходе восстановительного периода. При этом рассматривается фиксация прямого и косого (под 45° к осевой линии) переломов в центральной части большой берцовой кости. В обоих случаях осевой зазор между торцами фрагментов кости составляет 1,5 мм.

Основу исследования составляет конечноэлементный анализ статического деформирования объемной модели сломанной кости с установленным на ней фиксатором. При этом возможна полноконтактная фиксация путем крепления планки непосредственно к кости с помощью расположенных в один ряд шурупов, либо многоплоскостная, при которой шурупы находятся в разных плоскостях. Для обоих способов рассматривались варианты крепления фиксатора к кости посредством 6 либо 8 шурупов, – соответственно по 3 либо по 4 с каждой стороны от перелома. Кроме того, исследована также фиксация косого перелома с применением 7 шурупов, когда устанавливается добавочный шуруп для непосредственного соединения фрагментов кости в месте перелома. Необходимые геометрические объекты были созданы средствами твердотельного моделирования. Некоторые из них показаны на рис. 1 и 2.

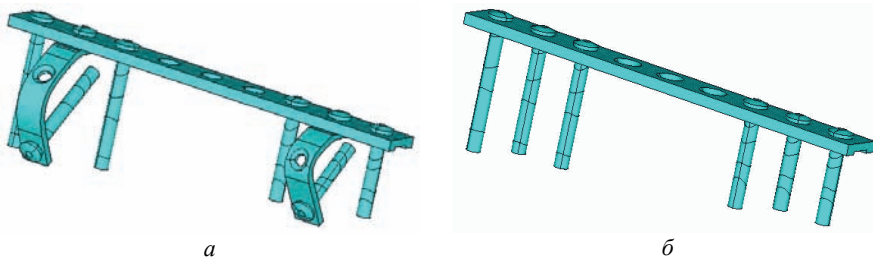


Рисунок 1 – Модели фиксаторов (*а* – многоплоскостного, *б* – полноконтактного) с использованием 6-и крепежных шурупов

Дискретизация объемов выполнена 10-узловыми тетраэдральными элементами. Количественные данные о разбиении изучаемых моделей приведены в табл. 1 и свидетельствуют о сопоставимости густоты конечноэлементных сеток. Достоверность полученных решений обоснована сопоставлением результатов, полученных с применением сеток различной густоты.

Рассматриваемые модели рассчитывались при действии осевого сжатия, имитирующего физиологическую нагрузку на синтезированную кость. Количественно оценивалась подвижность фрагментов сломанной кости, а также уровень напряженного состояния фиксатора и кости.

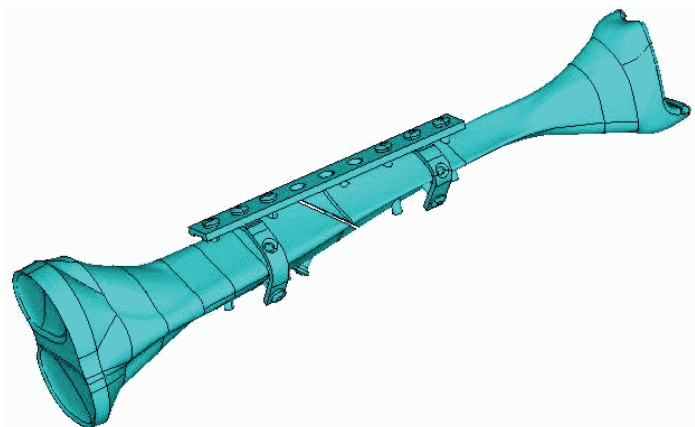


Рисунок 2 – Модель многоплоскостной фиксации косого перелома семью шурупами

Таблица 1

Вид перелома	Число шурупов	Многоплоскостная фиксация		Полноконтактная фиксация	
		Число элементов	Число узлов	Число элементов	Число узлов
прямой	6	143765	221166	128360	196929
прямой	8	177977	268328	148975	225624
косой	6	150556	231764	140861	215357
косой	8	165920	253710	148419	226257
косой	7	159508	243965	148424	226897

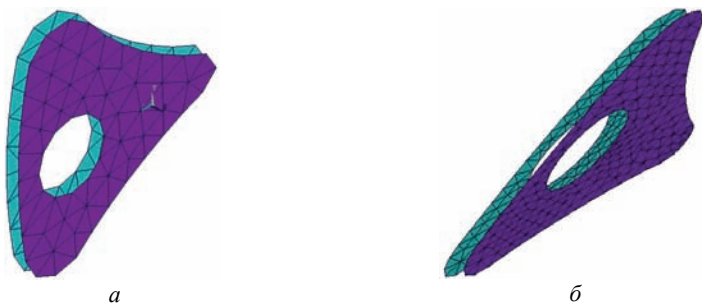
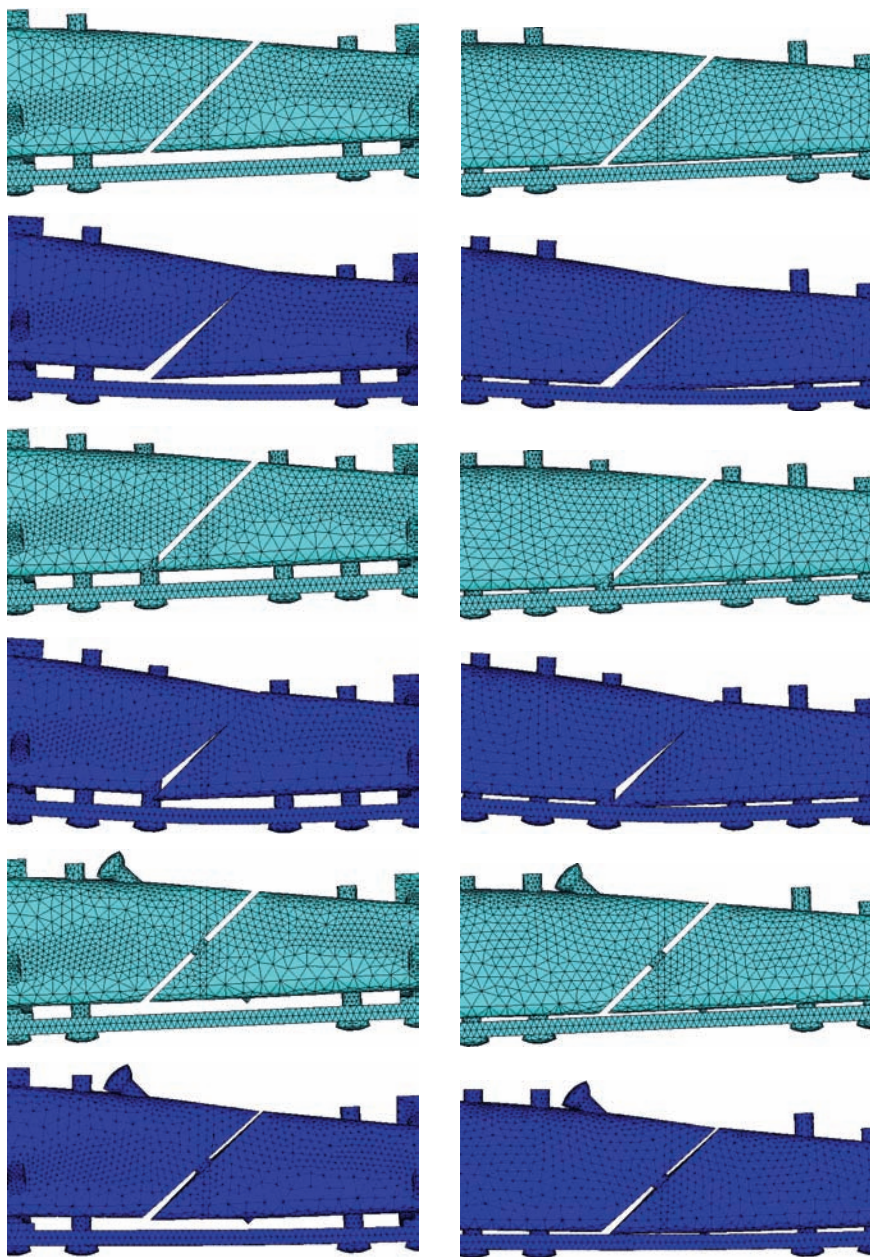


Рисунок 3 – контактные пары (*a* – прямой перелом; *б* – косой перелом)

Материал фиксатора и крепежных деталей – сталь с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Для упругих характеристик кости приняты значения $E = 1 \cdot 10^{10}$ Па и $\nu = 0,36$ в центральной части, а в области суставов – $E = 9 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,38$ [2–4]. Величина сжимающей силы составляет 800 Н. При такой нагрузке фрагменты кости вступают в соприкосно-



многopлоскостная фиксация

полноконтakтная фиксация

Рисунок 4 – исходные и деформированные конфигурации для случая косоrо перелома

вание, что означает необходимость постановки и решения нелинейной контактной задачи. Для ее численного решения применяется итерационная процедура расширенного метода множителей Лагранжа, представляющего собой модификацию метода штрафных функций [5]. Контактные пары на торцах фрагментов для случаев прямого и косоугольного переломов показаны на рис. 3.

Участок модели в зоне косоугольного перелома и его деформированное состояние при действии осевого сжатия для двух способов фиксации с использованием различного числа шурупов показаны на рис. 4 (вид сбоку).

Для оценки подвижности зафиксированной кости в месте перелома подсчитываются разности соответствующих компонент перемещений, найденных в характерных точках верхнего и нижнего торцов:

$$\begin{aligned} \Delta u_x &= u_x^{(верх)} - u_x^{(низ)}; \\ \Delta u_y &= u_y^{(верх)} - u_y^{(низ)}; \\ \Delta u_z &= u_z^{(верх)} - u_z^{(низ)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Расположение упомянутых точек показано на рис. 5.

Относительные перемещения торцов для случая прямого перелома представлены в табл. 2 и 3, а для косоугольного перелома – в табл. 4-6.

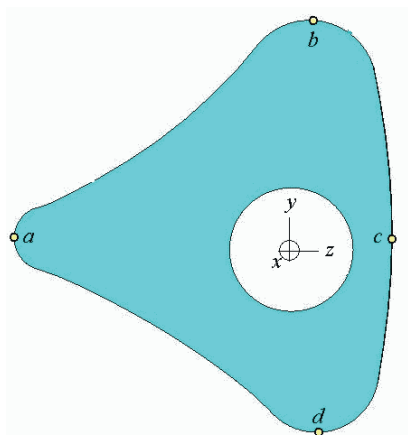


Рисунок 5 – Контрольные точки в месте перелома

Таблица 2

точка	многоплоскостная фиксация 6-ю шурупами			полноконтантная фиксация 6-ю шурупами		
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм
a	0,8471	0,1524	0,0216	0,7842	0,1329	0,0218
b	1,5409	0,1327	0,0322	1,5421	0,1089	0,0348
c	0,8967	0,1390	0,0230	0,8360	0,1141	0,0230
d	0,2648	0,1422	0,0153	0,1571	0,1182	0,0127

Таблица 3

точка	многоплоскостная фиксация 8-ю шурупами			полноконтактная фиксация 8-ю шурупами		
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм
<i>a</i>	0,8293	0,1984	0,0260	0,7623	0,1879	0,0285
<i>b</i>	1,5368	0,1772	0,0368	1,5338	0,1638	0,0427
<i>c</i>	0,8616	0,1800	0,0265	0,7971	0,1639	0,0289
<i>d</i>	0,2355	0,1831	0,0177	0,1303	0,1684	0,0173

Таблица 4

точка	многоплоскостная фиксация 6-ю шурупами			полноконтактная фиксация 6-ю шурупами		
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм
<i>a</i>	1,2017	0,7905	0,0324	1,0331	0,6278	0,0326
<i>b</i>	2,1327	-0,0169	0,0007	1,9583	-0,1874	0,0009
<i>c</i>	1,4119	0,6485	0,0261	1,2425	0,4860	0,0268
<i>d</i>	0,2949	1,7364	0,0591	0,1366	1,5657	0,0610

Таблица 5

точка	многоплоскостная фиксация 8-ю шурупами			полноконтактная фиксация 8-ю шурупами		
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм
<i>a</i>	0,9893	0,3302	0,0324	0,8675	0,2884	0,0333
<i>b</i>	1,7671	-0,3852	0,0190	1,6658	-0,4808	0,0227
<i>c</i>	1,1441	0,2078	0,0330	1,0233	0,1566	0,0348
<i>d</i>	0,2393	1,0949	0,0500	0,1119	1,0600	0,0482

Таблица 6

точка	многоплоскостная фиксация 7-ю шурупами			полноконтактная фиксация 7-ю шурупами		
	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм	Δu_x , мм	Δu_y , мм	Δu_z , мм
<i>a</i>	0,0328	0,0831	0,0233	0,0348	0,0821	0,0230
<i>b</i>	0,1650	-0,0232	0,0081	0,1647	-0,0308	0,0077
<i>c</i>	0,0830	0,0511	0,0194	0,0846	0,0500	0,0185
<i>d</i>	0,0140	0,1163	0,0379	0,0062	0,1223	0,0369

Таблица 7

расчетная характеристика		$\sigma_{i \max}$, Па	
способ фиксации		многоплоскостной	полноконтактный
6 шурупов	планка	$0,41673 \cdot 10^9$	$0,51532 \cdot 10^9$
	кость	$0,12037 \cdot 10^9$	$0,14053 \cdot 10^9$
8 шурупов	планка	$0,77796 \cdot 10^9$	$0,85187 \cdot 10^9$
	кость	$0,73003 \cdot 10^8$	$0,55981 \cdot 10^8$

Таблица 8

расчетная характеристика		$\sigma_{i \max}$, Па	
		многоплоскостной	полноконтakтный
6 шурупов	планка	$0,70959 \cdot 10^9$	$0,87372 \cdot 10^9$
	кость	$0,15951 \cdot 10^9$	$0,15017 \cdot 10^9$
8 шурупов	планка	$0,91490 \cdot 10^9$	$0,10389 \cdot 10^{10}$
	кость	$0,73930 \cdot 10^8$	$0,50674 \cdot 10^8$
7 шурупов	планка	$0,12063 \cdot 10^9$	$0,99619 \cdot 10^8$
	кость	$0,13071 \cdot 10^9$	$0,13835 \cdot 10^9$

Сравнительный анализ показывает, что при осевом сжатии полноконтakтный способ в основном обеспечивает большую жесткость фиксации по сравнению с многоплоскостным. Непосредственное скрепление частей кости добавочным шурупом в месте косоого перелома (фиксация 7-ю шурупами) существенно увеличивает жесткость соединения, при этом фрагменты не вступают в контакт под действием осевого сжатия.

Уровень напряженного состояния изучаемых объектов оценивался по величине интенсивности напряжений σ_i . Данные о наибольших напряжениях в табл. 7 и 8 соответствуют случаям прямого и косоого переломов.

При сопоставлении двух способов фиксации, с точки зрения нагруженности несущей планки более выгодным представляется многоплоскостной способ, исключая вариант крепления 7-ю шурупами. С позиций напряженного состояния кости ни один из способов не обнаруживает однозначного преимущества.

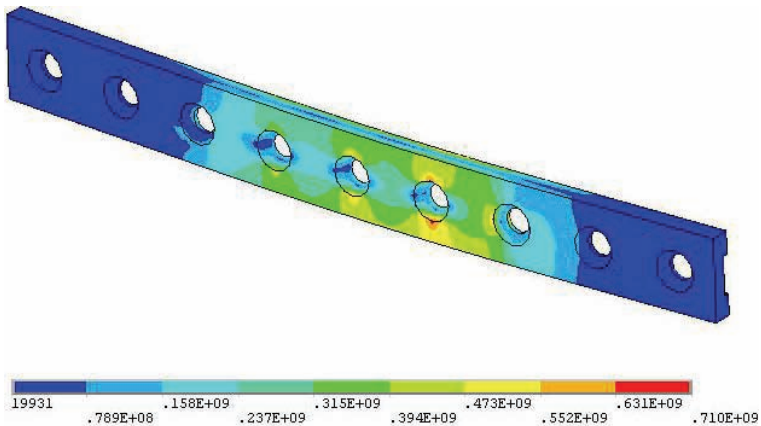


Рисунок 6 – Напряженное состояние планки при использовании 6-и шурупов

Если сравнивать варианты использования шести и восьми крепежных шурупов, то большее их число, естественно, повышает жесткость фиксации, однако в случае прямого перелома этот эффект едва заметен. В то же время, применение восьми шурупов вместо шести увеличивает нагрузку на планку,

одновременно разгружая кость. При этом напряженное состояние планки становится более неоднородным, что иллюстрируют рис. 6 и 7, где показаны поля интенсивности напряжений для случая многоплоскостной фиксации косо́го перелома.

Вблизи контуров свободных отверстий планки наблюдается наибольший уровень напряженного состояния, поэтому с целью его снижения представляется целесообразным закрывать эти отверстия заглушками либо предусмотреть набор конструкций планки с различным расположением отверстий, чтобы при установке на кость не оставалось свободных отверстий в нагруженной зоне. Эффект от подобной модернизации виден на рис. 8, который соответствует модели многоплоскостной фиксации косо́го перелома с закрытым свободным отверстием планки. Наличие заглушки снижает уровень наибольших напряжений, обеспечивая более однородное напряженное состояние в центральной части планки.

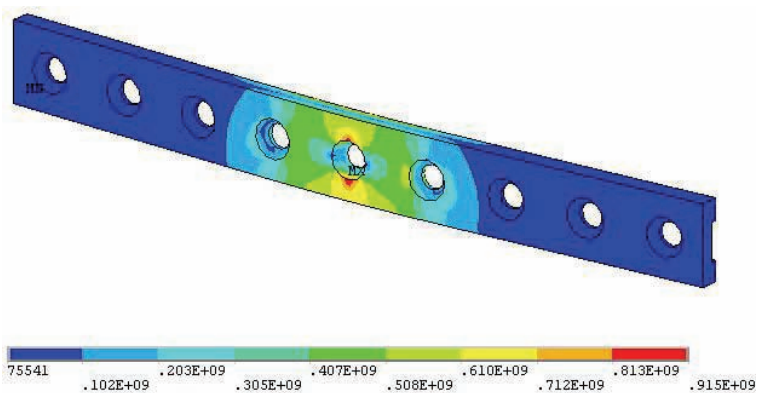


Рисунок 7 – Напряженное состояние планки при использовании 8-и шурупов

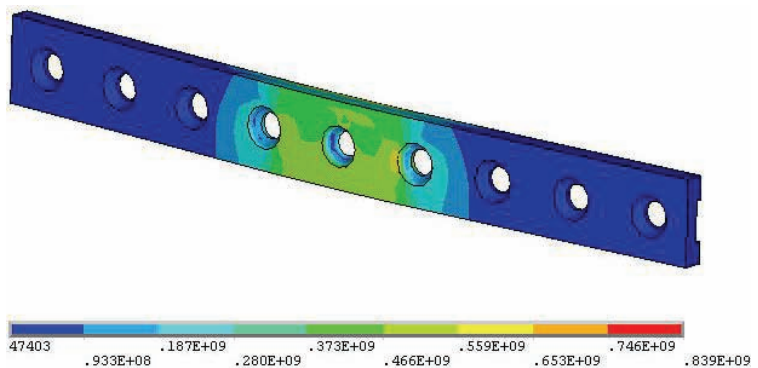


Рисунок 8 – Напряженное состояние планки с заглушкой при использовании 8-и шурупов

По сравнению с полноконтактным способом многоплоскостной выглядит предпочтительнее в отношении напряженного состояния фиксатора и микроподвижности в зоне перелома. Основное же его преимущество состоит в большей надежности фиксации в ходе восстановительного периода, когда проявляется эффект проскальзывания между костной тканью и крепежными деталями. В такой ситуации может произойти отход планки, установленной посредством параллельных шурупов, вплоть до полной потери фиксации. Многоплоскостной фиксатор исключает подобную опасность за счет шурупов разных направлений.

Список литературы: 1. Gardner T.N., Simpson H., Kenwright J. Rapid application fracture fixators – an evaluation of mechanical performance. – *Clinical Biomechanics*, 2001. – 16. – P. 151-159. 2. Weiner S., Traub W., Wagner H.D. Lamellar Bone: Structure–Function Relations. – *J. of Struct. Biology*. 1999. – 126. – P. 241-255. 3. Choi K., Kuhn J.L., Ciarelli M.J., Goldstein S.A. The elastic moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus. – *J. Biomech*. 1990. – 23(11). – P. 1103-1113. 4. Rho J.Y., Ashman R.B., Turner C.H. Young's modulus of trabecular and cortical bone material: ultrasonic and microtensile measurements. – *J. Biomech*. 1993. – 26(2). – P. 111-119. 5. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.

Поступила в редколлегию 12.11.2010.

УДК 620.171.3, 53.072.11

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, доцент, Национальный университет гражданской защиты Украины, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ФОТОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИНАХ, ОБЛУЧЕННЫХ ИК-ЛАЗЕРОМ.

У роботі розглядається застосування методу кінцевих фотопружних елементів до дослідження залишкових напружень у кристалах опромінених ІК-лазером. Визначені залишкові напруження та помилка в їх значеннях. Доведено, що в припущенні двовимірних напружень величина помилки припустима, а сам метод визначення коректний.

Application of photoelasticity finite elements method is investigated for research of residual stresses in the crystals that radiation-exposed infra-red laser. Residual stresses and mistakes are obtained. In supposition of two-dimensional stresses, the error is small, and the method is correct.

1 Введение. В настоящее время наблюдается повышение интереса к методу фотоупругости. Разрабатываемые методологии и устройства находят применение, например, при производстве стекол для TFT мониторов. Имеется два направления развития метода фотоупругости. Первое – развитие методологии и автоматизации измерений поляризационных параметров, второе – развитие методов интерпретации измерений. В данной статье представлено вто-

рое направление. В работах [1-8] методами имитационного моделирования активно изучались измерительные методы в рамках метода фотоупругости. Изучению были подвергнуты отдельные измерительные схемы. Доказана их состоятельность. В данной работе результаты этих исследований применяются.

2 Актуальность рассматриваемой проблемы. В предлагаемой работе применяются результаты исследований интерпретации измерений проведенные в [1-8]. Отличительной чертой предлагаемого подхода является тот факт, что не делается никаких предположений о распределении напряжений или симметрии свойств среды. То есть все соотношения записываются для общего случая анизотропной задачи. Работа продолжает исследование, представленное в [1, 2, 5]. В рамках этого подхода результат ищется в виде решения задачи метода конечных элементов. Это дает возможность учесть граничные условия и условия равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Будем называть этот способ решения задачи фотоупругости методом конечных фотоупругих элементов (МКФЭ). В работах [1-8] были разработаны подходы к реализации устойчивых к неточности исходных данных методов пьезооптических измерений и обработки результатов, использующих МКФЭ.

3 Метод конечных фотоупругих элементов. С точки зрения МКЭ, метод конечных фотоупругих элементов - новая модификация метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Непосредственно наработки МКЭ переносить в метод фотоупругости нецелесообразно, так как МКЭ в теории упругости твердого деформируемого тела развивался для задач с совместными деформациями (выполняются дифференциальные условия совместности деформаций [1, 5]). Главным достоинством метода фотоупругости является его способность определять остаточные напряжения. Условие совместности деформаций в присутствии остаточных напряжений не выполняется. В работах [1, 2] описываются основы подхода к поляризационно-оптической томографии с использованием метода конечных элементов. Подход состоит в учете граничных условий и условий равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Традиционные вариационные постановки МКЭ содержат это условие и в этом случае неприменимы. В данной работе использовано условие равенства нулю дивергенции:

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma}_{i*}) = 0, \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}_{i*}$ – вектор силы с координатами $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$; σ_{ij} – тензор напряжений. Для любой области внутри тела выполняется соотношение:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\bar{\sigma}_{i*}) dV = 0. \quad (2)$$

Разобьем тело на области (конечные элементы) [6]. Для каждого конечно-го элемента будет выполняться условие (2). σ_{ij} в произвольной точке тела будет представлено интерполяционной формулой для соответствующего конечного элемента [6].

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^m N_{\ell} \sigma_{ij}^{\ell}, \quad (3)$$

где N_{ℓ} – функции формы элемента; σ_{ij}^{ℓ} – искомые величины напряжений в узлах конечных элементов, m – количество узлов в элементе, ℓ – номер узла в элементе. Соотношение (2) тогда будет записано в виде

$$\iiint_V \sum_{j=1}^3 \sum_{\ell=1}^m \left(\sigma_{ij}^{\ell} \frac{\partial N_{\ell}}{\partial x_j} \right) dV = 0. \quad (4)$$

Узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} для всех узлов могут определяться решением системы уравнений (4), записанных для всех элементов и уравнений фотоупругости

$$A_{ij}^{\bar{n}} \sigma_{ij}^{\ell} = \delta^{\bar{n}} \cos(2\varphi^n), \quad (6)$$

определенных для направления \bar{n} в узле ℓ . Уравнения (6) представляют собой уравнения, связывающие напряжения и измеряемые параметры описанные, например, в [3]. В формуле (6): $\delta^{\bar{n}}$ – оптическая разность хода; φ^n – оптический параметр угла изоклины; $A_{ij}^{\bar{n}}$ – коэффициенты, являющиеся функцией пьезооптических коэффициентов, показателя преломления, толщины просвечиваемого слоя, ориентации направления просвечивания и ориентации системы координат, в которой определяются напряжения. Решением систем линейных уравнений (5,6), а так же граничных условий, получены искомые узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} в этой статье.

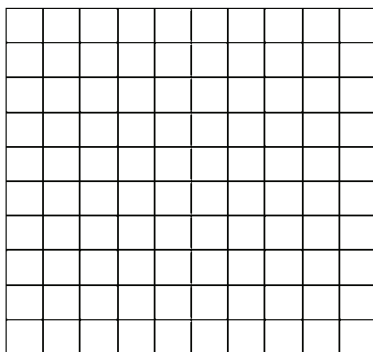


Рисунок 1 – Разбиение квадратной пластины на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы

4 Эксперимент. Пластина кристалла калий хлор (KCl- кристалл с кубической симметрией кристаллической решетки) была облучена мощным, промышленным ИК-лазером. Пластина имела размеры 60x60x10 см. Лазерный

луч мощностью 1 киловатт был направлен в центр пластины перпендикулярно. Лазерный луч был сфокусирован в пятно диаметром 2 мм и действовал 2 минуты. Вследствие термических перегрузок в пластине возникли остаточные напряжения. Были произведены пьезооптические измерения и определены остаточные напряжения. Предварительно плоский кристалл был размечен квадратной сеткой, соответствующей конечно-элементному разбиению пластины (рис. 1). Таким образом, разбиение пластины производилось на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы, описанные в [9].

Измерения производились в местах, соответствующих узлам элементов. Таким образом, измерения давали данные для соотношений фотоупругости, связывающие напряжения в отдельном узле с пьезооптическими параметрами. Результаты расчетов показаны на рис. 2, 3.



Рисунок 2 – Распределение σ_{11} (кГ/см²)

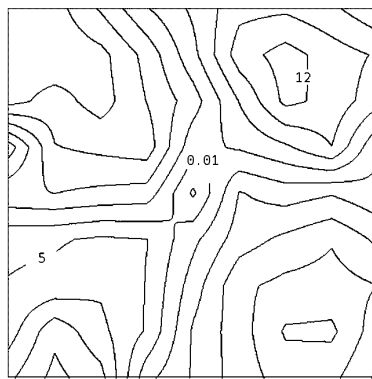


Рисунок 3 – Распределение σ_{11} (кГ/см²)

5 Обсуждение результатов. Полученные результаты несколько похожи на результаты полученные в [1] методами моделирования. По полученному распределению напряжений была построена имитационная модель методами находящимися в точном соответствии с методами в [5]. В точном соответствии с [5] были определены погрешности в определении напряжений. В среднем они оказались на уровне 2-7%. Это очень маленькая ошибка. Оценивая ее, надо помнить, что она сделана для имитационной модели в которой не учитывается некоторая трехмерность в распределении напряжений.

6 Выводы. На основе имитационной модели восстановлен внешний вид монокристаллической пластины между скрещенными поляроидами. В [10] размещен анимированный вариант внешнего вида монокристаллической пластины, показывающий ее вращение между скрещенными поляроидами. Эта анимация практически точно совпадает с видом реального кристалла между скрещенными поляроидами, если его поворачивать. Это есть не точный, но надежный способ верификации полученного результата. Из всего этого можно сделать вывод, что напряжения определены корректно.

Список литературы: 1. *Тесленко А.А.* / Заводская лаборатория 2. – 1998. – Т.64, №8. – С. 42-44. 2. *Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В.* / Функциональные материалы 2. – 1995. – №4. – С. 543. 3. *Тесленко А.А.* Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. 4. *Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др.* / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. 5. *Тесленко А.А.* Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 6. *Тесленко А.А.* Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 7. *Тесленко А.А.* Автоматизация пьезооптических измерений. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 8. *Тесленко А.А.* Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С.169-171. 9. *Еременко С.Ю.* / В кн.: Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – С. 9. 10. <http://www.photoelasticity.land.ru/>.

Поступила в редколлегию 15.11.2010

УДК 539.3

В.В.ТКАЧЕНКО, асп., НТУ «ХПИ»

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

У статті запропоновано метод дослідження статичної стійкості багат шарових пластин симетричної структури під дією стискаючих зусиль в серединній площині пластини. В основу методу покладено використання теорії R-функцій та варіаційного методу Рітца. Математична постановка виконана в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку. Запропонований метод враховує неоднорідний докритичний стан пластини. Метод проілюстровано на конкретних задачах. З метою аналізу вірогідності та точності розробленого підходу виконано порівняння отриманих результатів з відомими в літературі. Також були одержані нові результати для деяких багат шарових пластин симетричної структури зі складною формою плану.

The problem of stability analysis of the symmetric laminated plates with complex shape is considered. The method is based on the application of the R-functions theory and variation Ritz's method. The proposed method takes into account heterogeneous subcritical state of plates. Mathematical problem statement is carried by using the classic theory and the refined first order plate theory like theory by Timoshenko. Some numerical results of the concrete problems are presented and compared with those existing in order to demonstrate the correctness and the accuracy of the present method. New results are obtained for some cross-ply laminated plates with complex shape.

Многослойные пластины широко используются для моделирования композитных элементов многих современных конструкций. Поэтому их исследование на прочность и устойчивость является актуальной проблемой [1, 2, 11]. В настоящей работе предложен метод решения этой проблемы для много-

слойных пластин симметричного строения с произвольной формой плана, находящихся под действием статической нагрузки в срединной плоскости. Подобные задачи для прямоугольных пластин при однородном докритическом состоянии были решены ранее [1-2]. Число публикаций, в которых учитывается неоднородное докритическое состояние весьма ограничено.

Предлагаемый ниже метод позволяет находить собственные частоты и критическую нагрузку при неоднородном докритическом состоянии. Метод разработан для исследования математических моделей, полученных как в рамках классической теории, так и уточненной теории первого порядка. Благодаря применению теории R – функций [3] и вариационных методов [6] предлагаемый подход позволяет исследовать многослойные пластины различной геометрической формы и вида граничных условий. Ранее данный подход применялся для однослойных изотропных и ортотропных пластин [7-10].

1 Математическая постановка. В современной инженерной практике для исследования многослойных пластин часто используется классическая теория, так как с ее помощью удастся получить удовлетворительные результаты, обеспечивающие необходимую практическую точность. Постановка задачи в рамках классической теории основывается на следующих гипотезах:

- 1) пластина нагружена в своей плоскости контурными усилиями, поперечные нагрузки отсутствуют;
- 2) докритическое напряженное состояние описывается соотношениями линейной теории упругости, при этом изменением размеров пластины до потери устойчивости пренебрегаем;
- 3) изгиб пластины моделируется с помощью гипотез Кирхгофа-Лява;
- 4) все внешние нагрузки изменяются пропорционально некоторому параметру P_1^0 .

Однако, для пластин средней толщины использование классической теории является недостаточным, так как в этом случае необходимо также учитывать сдвиговые деформации. Одной из более распространенных теорий является уточненная теория первого порядка, которая основывается на гипотезе прямой линии. Суть этой гипотезы в том, что изначально нормальный к координатной поверхности элемент после деформирования остается прямолинейным, но не обязательно перпендикулярным к деформированной поверхности.

В соответствии с выше указанными гипотезами, перемещения произвольной точки u , v , w определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \Delta \cdot z \cdot \psi_x; \\ v &= v_0 + \Delta \cdot z \cdot \psi_y; \\ w &= w_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где u_0 , v_0 , w_0 – перемещения точек координатной поверхности в направлениях Ox , Oy и Oz соответственно; ψ_x , ψ_y – углы поворота прямолинейного элемента.

Выражения для углов поворота имеют вид:

$$\psi_x = \beta_x - w_{,x}; \quad \psi_y = \beta_y - w_{,y},$$

где β_x, β_y – «интегральные» углы поворота отрезка нормали.

Здесь и далее параметр Δ принимает значение 1 для уточненной теории и 0 – для классической.

Компоненты деформаций могут быть представлены как [11]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x; & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y; & \varepsilon_z &= 0; \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + z\kappa_{xy}; & \varepsilon_{xz} &= \Delta \cdot (w_{0,x} + \psi_x); & \varepsilon_{yz} &= \Delta \cdot (w_{0,x} + \psi_y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= u_{0,x} + w_{0,x}^2 / 2; & \varepsilon_y^0 &= u_{0,y} + w_{0,y}^2 / 2; & \varepsilon_{xy}^0 &= u_{0,y} + v_{0,x} + w_{0,x}w_{0,y}; \\ \kappa_x &= \Delta\psi_{x,x} - (1-\Delta)w_{0,xx}; & \kappa_y &= \Delta\psi_{y,y} - (1-\Delta)w_{0,yy}; \\ \kappa_{xy} &= \Delta(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) - 2(1-\Delta)w_{0,xy}. \end{aligned}$$

Зависимости усилий и моментов от перемещений и углов поворота определяются следующими выражениями:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{yz} \\ \mathbf{e}_{xz} \end{Bmatrix},$$

здесь $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_{xy})^T$; $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_{xy})^T$;

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}; & \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^0 &= (\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0)^T; & \boldsymbol{\kappa} &= (\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})^T. \end{aligned}$$

где N_x, N_y, N_{xy} – нормальные и касательные усилия в срединной плоскости; M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящий моменты.

Приведенные жесткостные характеристики C_{ij}, D_{ij} ($ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (C_{ij}, D_{ij}) &= \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s(1, z^2) dz; & ij &= 1, 2, 6, \\ C_{ij} &= K_{ij}^2 \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^s dz; & ij &= 4, 5, \end{aligned}$$

где K_{ij}^2 – корректирующий сдвиговой множитель, величину которого чаще всего принимают равной 5/6. В общем случае, когда оси анизотропии не совпадают с направлениями осей Ox и Oy упругие константы s -того слоя $B_{ij}^{(s)}(i, j = 1, 2, 6)$ выражаются через упругие постоянные исходной системы

$\tilde{B}_{ij}^{(s)}$ ($i, j = 1, 2, 6$) по известным формулам [5].

Будем предполагать, что все слои работают совместно. Условия равновесия пластины в рамках классической теории [4, 5], выражаются в виде системы уравнений:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \quad (5)$$

$$= \lambda \left(N_x^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

В рамках уточненной теории первого порядка уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y - m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} = 0,$$

где $m_1 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz$ и $m_2 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s z^2 dz$; ρ_s – плотность материала.

2 Метод решения. Для решения задачи о колебаниях пластины, сжимаемой контурными силами, действующими в срединной плоскости, представим функцию прогиба следующим образом:

$$w(x, y, t) = w(x, y) \cdot (a \cos \Lambda t + b \sin \Lambda t), \quad (6)$$

здесь Λ – частота собственных колебаний пластины.

Для решения данной задачи вначале определяются усилия N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 , распределенные внутри пластины. Заметим, что эта задача соответствует плоской задаче теории упругости, решение которой будем отыскивать с помощью метода R-функций (RFM). С этой целью сформулируем вариационную постановку задачи. Согласно принципу Лагранжа она сводится к нахождению минимума функционала:

$$I(u, v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} P_1^0 u_n ds, \quad (7)$$

где $u_n = ul + vm$, P_1^0 – интенсивность внешнего сжимающего усилия, $\partial\Omega_1$ – часть границы области, на которую действуют внешние усилия.

Минимум функционала будем отыскивать на множестве функций, удовлетворяющих главным (кинематическим) граничным условиям.

$$N_n = P, \quad S_n = 0.$$

Последовательность координатных функций в случае областей произвольной формы строится с помощью теории R-функций.

Заметим, что иногда докритическое состояние является однородным и тогда этап решения задачи теории упругости можно исключить. В остальных случаях задача теории упругости решается для $P_1^0 = 1$ в силу линейности.

Изменение значений параметра P_1^0 приводит к изменению интенсивности приложенной контурной нагрузки. Для каждого P_1^0 вычисляются соответствующие значения собственных частот сжатой многослойной пластины.

Частота колебаний пластины может быть найдена с помощью метода Ритца [7] в результате минимизации следующего функционала:

$$I = \Pi_{\max} - T_{\max}, \quad (8)$$

где T_{\max} – кинетическая энергия пластины:

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [m_1(u^2 + v^2 + w^2) + \Delta \cdot m_2(\psi_x^2 + \psi_y^2)] d\Omega,$$

а Π_{\max} – полная потенциальная энергия пластины, которая в рамках классической теории определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \\ & + P_1^0 (N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y})] dx dy. \end{aligned}$$

а в рамках уточненной теории первого порядка соответственно:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\left(M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy} \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \right) + \right. \\ & \left. + Q_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) \right] + \\ & + P_1^0 \left(N_x^0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Решая динамическую задачу, одновременно с частотами можно найти также и критическую нагрузку. Этот подход к нахождению критической нагрузки назван динамическим [4]. В этом случае P_1^0 будет варьируемым параметром. Изменяя значения этого параметра, получим совокупность собственных частот, соответствующих различным сжимающим нагрузкам. До тех пор, пока все частоты получаются вещественными, пластина колеблется около положения равновесия, то есть состояние равновесия устойчиво. С увеличением

P_1^0 могут быть получены нулевые или мнимые значения собственной частоты. В таком случае, положение равновесия является неустойчивым. Значение параметра P_1^0 , соответствующее наименьшему неотрицательному значению собственной частоты, и будет критическим.

3 Численные результаты. Механические свойства материала для всех рассматриваемых ниже задач приняты следующими:

$$G/E_2 = 0,5; \quad \nu_1 = 0,25.$$

При этом будем рассматривать различную степень ортотропии материала, то есть

$$E_1/E_2 = 3; 10; 20; 30; 40.$$

Основные геометрические параметры пластины приняты следующими:

$$a/b = 1; \quad h/2b = 0,1,$$

где h – это общая толщина пластинки при равных толщинах всех слоев, а $2b$ – характерный размер пластинки.

Критическая нагрузка определяется как

$$P_{кр} = \lambda_{кр} \cdot \frac{E_2 h^3}{4b^2},$$

где $\lambda_{кр}$ – безразмерный параметр.

Решение задач выполняется с помощью двух описанных выше методов (энергетического и динамического).

Задача 1. Для тестирования предложенного метода рассмотрим квадратную ортогонально армированную многослойную пластину симметричного строения (рис. 1). Предполагается, что пластина свободно оперта и сжимается усилиями направленными параллельно оси Ox .

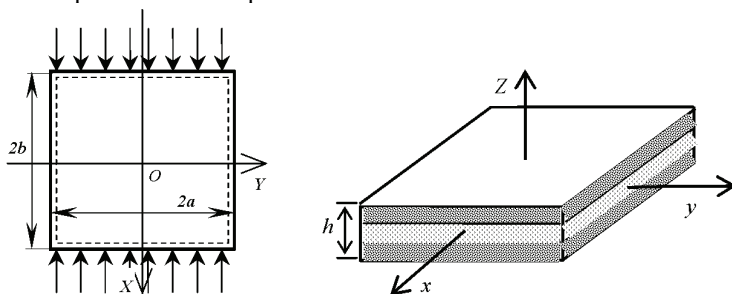


Рисунок 1

В табл. 1 представлены значения безразмерного частотного параметра для трехслойной, пятислойной и девятислойной пластинки, полученные в рамках классической и уточненной теорий при изменении степени ортотропии материала.

Как следует из таблицы, отклонения полученных результатов в рамках клас-

сической теории от результатов, представленных в работе [1] не превышает 0,13 %. Однако, при этом значение критической нагрузки является одинаковым для разного количества слоев. Нахождение решения в рамках классической теории может быть получено с определенной допустимой точностью.

Таблица 1

Кол-во слоев		Метод решения	$\lambda_{кр}$				
			$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
3	Классическая теория	RFM	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
		[1]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16
	Уточненная теория	RFM	5,39	9,87	14,98	19,02	22,31
		[1]	5,40	9,96	15,35	19,76	23,45
		[2]	5,30	9,76	15,02	19,30	22,88
5	Классическая теория	RFM	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
		[1]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16
	Уточненная теория	RFM	5,41	10,07	15,73	20,48	24,54
		[1]	5,41	10,14	15,96	20,91	25,19
		[2]	5,32	9,96	15,65	20,47	24,59
9	Классическая теория	RFM	5,72	11,49	19,72	27,94	36,17
		[1]	5,75	11,49	19,71	27,94	36,16
	Уточненная теория	RFM	5,41	10,07	16,06	21,11	25,49
		[1]	5,42	10,19	16,15	21,26	25,71
		[2]	5,34	10,04	15,92	20,96	25,34

Результаты исследований в рамках уточненной теории сравнивались с результатами работ [1] и [2]. Значение критической нагрузки, полученное с помощью RFM, практически всегда находится между значениями, представленными в работах [1] и [2]. Отличие полученных результатов от результатов, приведенных в статье [2] не превышает 1,1 %.

Как общую тенденцию поведения критической нагрузки, следует отметить ее рост в зависимости от роста степени ортотропии материала.

Задача 2. Рассмотрим трехслойную прямоугольную ортотропную свободно опертую пластину симметричного строения с формой укладки слоев $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ (рис. 2), изготовленную из материала с такими же жесткостными свойствами, как и в тестовом примере. Геометрические характеристики приняты следующими: $a/b = 1$. Толщина всей пластины $h/2b = 0,1$.

Пластина сжимается усилиями параллельно оси Ox и действующими вдоль сторон BC и GF . Граничные условия на $\partial\Omega$ имеют вид вдоль BC и GF :

$$\begin{aligned} N_n &= P; & S_n &= 0; \\ w &= 0; & M_n &= 0. \end{aligned}$$

А вдоль остального контура ($CDEF \cup GHAB$):

$$\begin{aligned} N_n &= 0; & S_n &= 0; \\ w &= 0; & M_n &= 0. \end{aligned}$$

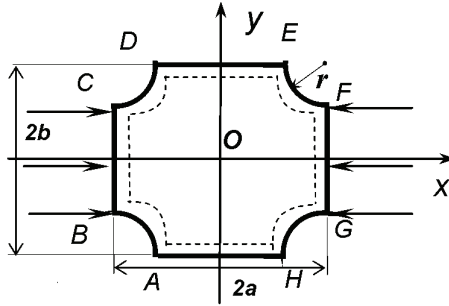


Рисунок 2

В рамках уточненной теории первого порядка на всей границе $\partial\Omega$ добавляется условие $Q_n = 0$. Структура решения [3], соответствующая данной комбинации граничных условий и удовлетворяется главным граничным условиям имеет вид:

$$u = P_1; \quad v = P_2; \quad w = \omega P_3, \quad \text{— в рамках классической теории;}$$

$$u = P_1; \quad v = P_2; \quad w = \omega P_3; \quad \varphi_x = P_4; \quad \varphi_e = P_5 \quad \text{— в рамках уточненной теории.}$$

Используя теорию R-функций, построим уравнение границы области рассматриваемой пластины:

$$\omega = (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 \overline{(F_3 \vee_0 F_4 \vee_0 F_5 \vee_0 F_6)},$$

где

$$F_1 = \left(\sigma_1 = \frac{1}{2a}(a^2 - x^2) \geq 0 \right) \quad \text{— вертикальная полоса между прямыми } x = \pm a;$$

$$F_2 = \left(\sigma_2 = \frac{1}{2b}(b^2 - y^2) \geq 0 \right) \quad \text{— горизонтальная полоса между прямыми } y = \pm b;$$

$F_3 = \left(\sigma_3 = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right)$ — область, которая расположена внутри окружности радиуса R с центром в точке $(a; b)$;

$F_4 = \left(\sigma_4 = \frac{(x-a)^2 + (y+b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right)$ — область, которая расположена внутри окружности радиуса R с центром в точке $(a; -b)$;

$F_5 = \left(\sigma_5 = \frac{(x+a)^2 + (y-b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right)$ — область, которая расположена внутри окружности радиуса R с центром в точке $(-a; b)$;

$$F_6 = \left(\sigma_6 = \frac{(x+a)^2 + (y+b)^2 - R^2}{2R} \geq 0 \right) - \text{область, которая расположена внутри}$$

окружности радиуса R с центром в точке $(-a; -b)$.

В табл. 2 приведены результаты исследования влияния глубины вреза на величину безразмерного параметра критической нагрузки $\lambda_{кр}$ в рамках уточненной теории.

Таблица 2

R/2b	$\lambda_{кр}$				
	$\frac{E_1}{E_2} = 3$	$\frac{E_1}{E_2} = 10$	$\frac{E_1}{E_2} = 20$	$\frac{E_1}{E_2} = 30$	$\frac{E_1}{E_2} = 40$
0,05	5,55	10,10	15,26	19,33	22,63
0,075	5,74	10,31	15,50	19,58	22,88
0,1	5,83	10,41	15,68	19,80	23,13
0,125	6,14	10,89	16,23	20,41	23,78
0,15	6,38	11,31	16,68	21,08	24,53

Заметим, что если $R \rightarrow 0$, то форма плана рассматриваемой пластины стремится к квадратной. Поэтому полученные значения должны стремиться к соответствующим значениям квадратной пластины. Этот факт использован для контроля достоверности полученных результатов.

При увеличении размеров врезов пластинки наблюдается тенденция к росту безразмерного параметра критической нагрузки $\lambda_{кр}$. Однако, скорость роста $\lambda_{кр}$ для пластинки, изготовленной из материала с большей степенью ортотропии, меньше, чем для пластинки, изготовленной из материала с меньшей степенью ортотропии. Так, при изменении $R/2b$ от 0,05 до 0,15, в случае, когда степень ортотропии материала $E_1/E_2 = 3$, критическая нагрузка увеличилась на 15,5 %, а в случае, когда $E_1/E_2 = 40$, $\lambda_{кр}$ увеличилось на 8,4 %.

Выводы. В работе предложены подходы для исследования устойчивости многослойных пластин симметричного строения с произвольной формой плана для разного вида краевых условий. Метод базируется на теории R-функций и вариационных методах, и разработан для уравнений движения, полученных в рамках классической и уточненной теории первого порядка. Алгоритм реализован в рамках системы POLE-RL. При помощи созданного программного обеспечения проведено тестирование и решены новые задачи устойчивости и колебаний многослойных пластин сложной формы при разных способах закрепления.

Список литературы: 1. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition / J.N.Reddy // USA: CRC PRESS. – 2004. – P. 834. 2. Noor A.K. Stability of multilayered composite plates / Fiber Science and Technology. – 1975. – 8. – PP. 81-89. 3. Курна Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л.В.Курна // Харьков, НТУ «ХПИ». – 2009. – 408 с. 4. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехниц-

кий. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464с. **5.** Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1967. – 266с. **6.** Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике» / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с. **7.** Курпа Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9-15. **8.** Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modelling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P. 179-189. **9.** Курпа Л. В. Применение теории R-функций к задаче устойчивости зубчатого диска пилы / Курпа Л.В., Линник А.Б. // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – № 8. – С. 104-108. **10.** Курпа Л. В. Исследование колебаний пластин переменной толщины, нагруженных в срединной плоскости / Курпа Л. В, Линник А. Б. // Прикладная механика. – 2005. – 41. – С. 85-93. **11.** Abe A. Non-linear vibration characteristics of clamped Shallow Shells / A. Abe, Y. Koayashi, G Yamada // Journal of sound and vibration. – 2000. – 234 (3). – PP. 405-426.

Поступила в редколлегию 15 .11.2010

УДК 534.1:539.3

С.В.УГРИМОВ, канд. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
А.Н.ШУПИКОВ, д-р техн. наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ НИЗКОСКОРОСТНОГО УДАРА ПО СЛОИСТЫМ ОРТОТРОПНЫМ ПЛАСТИНАМ. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ

У роботі запропонована узагальнена теорія еластодинаміки ортотропних шаруватих пластин. На її основі розроблено аналітико-чисельний метод розв'язання задачі про низькошвидкісний удар по шаруватим ортотропним пластинам. Можливості та вірогідність запропонованого методу ілюструються на тестових прикладах. Обговорюються питання щодо застосування різних двовимірних теорій для аналізу напружено-деформованого стану шаруватих пластин при ударі.

The generalized theory of elastodynamics orthotropic laminated plates is proposed in paper. On its basis the analytical-numerical method for solving the problem of low-velocity impact on orthotropic laminated plates by ball are developed. Capabilities and reliability of the proposed method are illustrated by test examples. The applicability of different two-dimensional theories for analysis of stress-strain state of laminated plates under impact are discussed.

Введение. Композиты достаточно часто эксплуатируются в условиях действия нестационарных нагрузок. Такие же нагрузки возникают при некоторых аварийных ситуациях, характеризующихся кратковременным воздействием интенсивных импульсных и ударных нагрузок. Особую опасность для композитов представляет поперечный удар твердым телом, который может привести к разрушению его матрицы и расслаиванию. Для оценки прочности композита и влияния различных факторов (структуры композита, геометрических размеров, характеристик нагружения) на напряженно-деформированное состояние (НДС) необходимо наличие высокоэффективных методов их расчета. Поэтому, разработка методов анализа НДС композитов при импульсном и ударном нагружениях является актуальной задачей.

В силу анизотропии свойств и слоистой структуры композита рассматриваемая динамическая задача является математически сложной и требует применения уточненных моделей. Этим объясняется ограниченное количество работ в этой области, большинство из которых посвящено исследованию частотных характеристик. Отдельные вопросы по моделированию отклика композитов на низкоскоростной удар твердым телом были рассмотрены в работах [1-4]. При этом в работах [1-3] для моделирования поведения композита использовались уточненные теории первого порядка (теории типа С.П.Тимошенко), не учитывающие обжатие и нелинейный характер распределения напряжений по толщине композита. В работе [2] решение получено аналитическим методом, а в работах [3-4] – с помощью метода конечного элемента.

В этой работе предлагается численно-аналитический подход к расчету слоистых ортотропных пластин при импульсном и ударном нагружениях. Этот подход базируется на гипотезах обобщенной теории пластин [5, 6], в основе которой лежит метод степенных рядов. Обобщенная теория относится к классу дискретно-структурных и позволяет регулировать точность описания НДС в зависимости от исследуемого объекта.

Постановка задачи. Слоистая ортотропная пластина находится под действием поперечной импульсной нагрузки $\bar{q}_3 = \bar{q}_3(x_1, x_2, t)$ (рис. 1), приложенной к наружной поверхности первого слоя. Материал каждого слоя является ортотропным (главные направления ортотропии совпадают с направлениями осей). Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание.

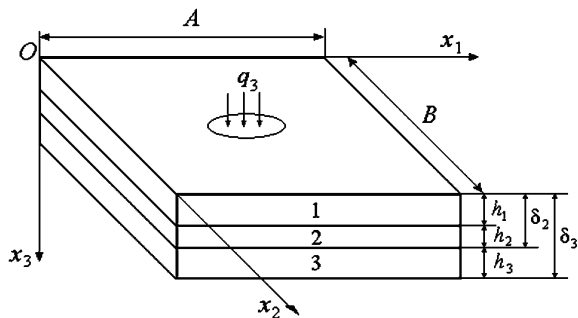


Рисунок 1– Слоистая ортотропная пластина

Поведение слоистой пластины описывается гипотезами обобщенной теории многослойных пластин [5, 6]:

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i \right], \quad (1)$$

где $h_j^k = (h_j)^k$, $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$; $u_{\alpha}^i (\alpha = \overline{1, 3})$ – перемещение

точки i -го слоя в направлении координатной оси Ox_α ; u_α , $u_{\alpha k}^i$ – коэффициенты разложений перемещений в степенные ряды, представляющие функции аргументов x_1, x_2, t ; h_i – толщина i -го слоя; I – количество слоев в пакете; K_α ($\alpha = \overline{1, 3}$) – количество удерживаемых членов в степенных рядах для перемещений. При этом в разложениях (1) для плоскостных перемещений удерживается одно и то же число членов степенного ряда, то есть параметры $K_1 = K_2 = K$. В дальнейшем, будем обозначать обобщенную теорию по количеству удерживаемых членов в рядах для перемещений – теория $\{K, K_3\}$.

Деформации в каждом слое пластины предполагаются малыми и описываются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i), \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений для рассматриваемого случая имеет вид [7]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{11}^i \\ P_{22}^i \\ P_{33}^i \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \varepsilon_{12}^i &= \frac{1}{2G_{12}^i} P_{12}^i; \\ \varepsilon_{13}^i &= \frac{1}{2G_{13}^i} P_{13}^i; \\ \varepsilon_{23}^i &= \frac{1}{2G_{23}^i} P_{23}^i. \end{aligned}$$

где $E_\alpha^i, \nu_{\alpha\beta}^i$ – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для i -го слоя, $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ – модули сдвига для i -го слоя.

Усилия и моменты в i -м слое определяются по формулам

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k P_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Уравнения движения. Уравнения движения и граничные условия получены с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона и в усилиях и моментах имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^I [L_\alpha^i - I_{\alpha 1}^i] + q_\alpha = 0;$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} [L_\alpha^{j+1} - I_{\alpha 1}^{j+1}] - I_{\alpha k_\alpha+1}^i = 0, \quad (2)$$

где $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$; $L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$; $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$;

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left(u_{\alpha 0, \alpha r} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k, \alpha r}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k, \alpha r}^i \right] \right), \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}; \quad i = \overline{1, I}.$$

Таким образом, динамический отклик пластины описывается $(2K + K_3)I + 3$ дифференциальными уравнениями.

Уравнения движения (2) могут быть записаны в перемещениях

$$\Pi \bar{U}_{,tt} - \Pi \cdot \bar{U} = \bar{Q}, \quad (3)$$

где \bar{U} – вектор, компонентами которого являются искомые функции

$$\bar{U}^T = (u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i), \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad i = \overline{1, I}; \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha},$$

Λ, Ω – симметричные квадратные матрицы порядка $(2K + K_3)I + 3$; \bar{Q} – вектор, компоненты которого зависят от внешней силы, приложенной к наружной поверхности многослойной пластины

$$\bar{Q}^T = (q_\alpha, 0, \dots, 0).$$

Элементы матриц Λ, Ω не приводятся в силу их громоздкости.

Вид граничных условий на контуре опирания для прямоугольной свободно опертой пластины приведен ниже:

$$\text{при } x_1 = 0; \quad x_1 = A - \sum_{i=1}^I N_{11}^{i0} = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0;$$

$$N_{11}^{ik_1} + h_i^{k_1} \sum_{j=i}^{I-1} N_{11}^{j+1,0} = 0; \quad u_{2k_2}^i = 0; \quad u_{3k_3}^i = 0,$$

$$\text{при } x_2 = 0; \quad x_2 = B - u_1 = 0; \quad \sum_{i=1}^I N_{22}^{i0} = 0; \quad u_3 = 0;$$

$$u_{1k_1}^i = 0; \quad N_{22}^{ik_2} + h_i^{k_2} \sum_{j=i}^{I-1} N_{22}^{j+1,0} = 0; \quad u_{3k_3}^i = 0; \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}; \quad i = \overline{1, I}. \quad (4)$$

Уравнения движения (3) и граничные условия (4) дополняются начальными условиями. Начальные условия принимаются нулевыми:

$$u_\alpha = u_{\alpha k_\alpha}^i = 0; \quad u_{\alpha,t} = u_{\alpha k_\alpha,t}^i = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (5)$$

Таким образом, динамика свободно опертой слоистой пластины описывается системой уравнений движения (3), граничными (4) и начальными (5) условиями.

Метод решения. Метод решения нестационарной задачи основывается на разложении искомых функций $u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i$ и нагрузки q_α в ряды по функциям $B_{\alpha mn}(x_1, x_3)$, удовлетворяющим условиям на контуре опирания

$$[u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i, q_\alpha] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_{\alpha mn}(t), \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i(t), q_{\alpha mn}(t)] B_{\alpha mn}(x_1, x_2). \quad (6)$$

Для прямоугольной многослойной пластины, свободно опертой по краям, функции $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$ имеют вид

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x_1}{A} \sin \frac{n\pi x_2}{B}; \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \cos \frac{n\pi x_2}{B}; \quad B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \sin \frac{n\pi x_2}{B}.$$

В результате задача о нестационарных колебаниях многослойной пластины для каждой пары значений m и n сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Для интегрирования полученной системы используется оригинальный метод интегрирования, основанный на методе разложения решения в ряд Тейлора [5].

Задача об ударе шаром. Исследуется отклик слоистых свободно опертых пластин при поперечном ударном воздействии. Удар наносится шаром радиуса R и массой M посередине наружной поверхности первого слоя пластины. В момент столкновения с пластиной шар имеет скорость V_0 .

Предполагается, что область взаимодействия индентора и пластины является кругом радиуса $r(t)$, а контактное давление распределено по площадке нагружения в соответствии с законом

$$q_3(x_1, x_2, t) = P_0(t) \left[1 - \frac{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}{r^2} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где x_{10} , x_{20} – координаты точки соприкосновения индентора и пластины в начальный момент времени.

Уравнение движения центра масс шара и начальные условия имеют вид

$$Mz_{,tt} = Mg - P; \quad z(0) = 0; \quad z_{,t}(0) = V_0,$$

где $z = z(t)$ – координаты центра масс шара, P – контактная сила, g – ускорение свободного падения.

Контактная сила, с учетом (7), равна

$$P(t) = \iint_S q_3 dS = \frac{2}{3} P_0 \pi a^2,$$

где S – площадка контактного взаимодействия.

Условие совместности перемещений шара и пластины имеет вид

$$u_3^1(x_{10}, x_{20}, 0, t) + a(t) - z(t) \geq 0, \quad (8)$$

где $a(t)$ – контактное сближение.

Контактное сближение a определяется по закону Герца [1, 5, 8, 9]

$$a = kP^{2/3}.$$

Коэффициент k , зависящий от материала и формы взаимодействующих тел, и должен выбираться на основе эксперимента [1].

Радиус области контакта $r(t)$ вычисляется по формуле [5, 8]

$$r(t) = \left[\frac{3}{16} P(t) \cdot R \cdot (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}; \quad \theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}; \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E},$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала из которого изготовлен шар, E_1 , ν_1 – усредненные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для первого слоя [1].

Решение задачи об ударе подробно изложено в работе [5]. Используя интегральное преобразование Лапласа, решение уравнения движения шара записывается в виде рекуррентной формы для малых отрезков времени. Значение контактной силы на каждом временном интервале определяется из равенства (8).

Численное исследование. Для проверки эффективности предлагаемой теории были проведены расчеты отклика трехслойных и десятислойных композитов на удар шаром.

Рассмотрен отклик трехслойного композита ($0^0/90^0/0^0$) на удар стальным шаром диаметром 12,7 мм и массой 8,4 гр. с начальной скоростью 2,54 м/с [1]. Удар наносится посередине верхнего слоя. Геометрические размеры композита $A = B = 0,254$ м, $\delta_l = 0,635$ см. Упругие характеристики композита: $E_{11} = 173,058$ ГПа, $E_{22} = 33,095$ ГПа, $E_3 = 5,171$ ГПа, $G_{12} = 9,377$ ГПа, $G_{13} = 8,274$ ГПа, $G_{23} = 3,241$ ГПа, $\nu_{12} = 0,036$, $\nu_{13} = 0,25$, $\nu_{23} = 0,171$, $\rho = 1568$ кг/м³. Коэффициент k в законе Герца выбирался таким же, как и в работе [1]: $k = 0,4736 \cdot 10^{-6}$ м/Н^{2/3}.

В таблице приведены максимальные значения контактной силы, прогиба и напряжений, полученные по обобщенной теории, при различном числе удерживаемых членов в степенных рядах (1). При этом в разложениях (6) учитывалось по 100 гармоник в каждом направлении и исследовался интервал времени от 0 до 80 мс. Значения прогиба приведены в точке удара, а значения напряжений – под точкой удара посередине внешних поверхностей композита.

Отклик трехслойной пластины на удар

Теория	Сила P , Н	Прогиб $u_3^3 \cdot 10^4$, см	Напряжение p_{11}^1 / p_{11}^1 , МПа
Теория {1,0}	692	70,54	- 84,896 / 84,896
Теория {3,2}	579	74,17	-350,560 / 42,090
Теория {5,4}	576	74,18	-380,412 / 41,394
Теория {7,6}	576	74,18	-381,952 / 41,261

Из таблицы видно, что при увеличении параметров K , K_3 лучше всего сходятся значения силы и перемещений, а значения напряжений, особенно под точкой удара, сходятся хуже. Обобщенная теория {3,2} и теории более высокого порядка, учитывающие обжатие по толщине и нелинейный характер распределения перемещений по толщине, дают близкие значения как для силы и прогибов, так и для напряжений на тыльной стороне.

На рис. 2, 3 приведено изменение во времени контактной силы и перемещений при ударе. Результаты расчета по предложенному методу (пунктир – теория {7,6}, штрихпунктир – теория {1,0}) сопоставляются с данными, приведенными в работе [1] (сплошная линия) Из рисунка видно, что результаты

расчета по обобщенной теории согласуются с данными, полученными А. Nosier, R.K. Karania, J.N. Reddy по двумерной теории LWPT [1].

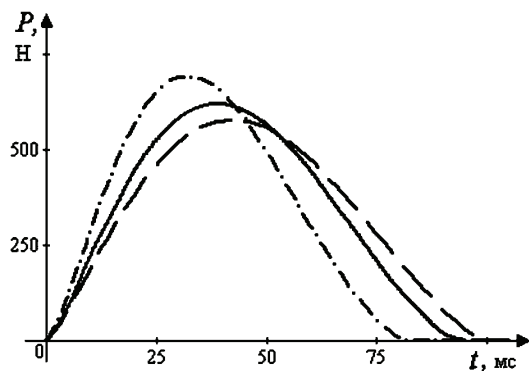


Рисунок 2 – Контактная сила

Изменение напряжений p_{11}^i по толщине композита дано на рис. 4. Распределение приведено для момента времени, когда напряжения достигают максимального значения под точкой удара. Здесь пунктирной линией показаны результаты расчета по теории {7,6}, штрихпунктиром – теории {1,0}, точками – теории {3,2}. Наблюдается существенное отличие результатов, полученных по приведенным теориям. Это объясняется тем, что в исследуемых задачах имеет место локализованное в пространстве нагружение, при котором характер распределения напряжений по толщине является нелинейным [5, 6].

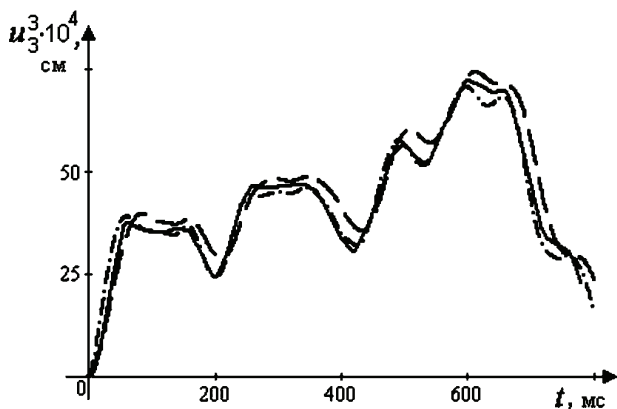


Рисунок 3 – Прогиб

Из рис. 2-4 и таблицы видно, что для анализа напряжений при ударе необходимо использовать теории высокого порядка, а теория {1,0} может быть

использована при приближенном расчете силы и перемещений. Характер распределения напряжений по толщине имеет нелинейный характер даже для рассматриваемого случая относительно тонкого композита.

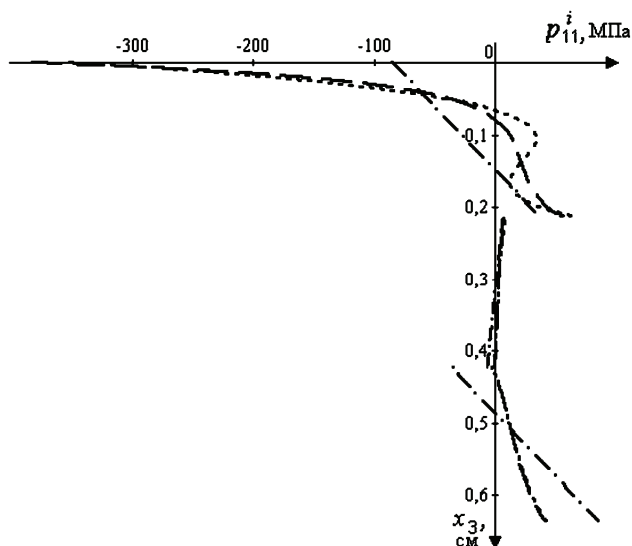


Рисунок 4 – Изменение напряжений p_{11}^i по толщине

Рассмотрен отклик десятислойного композита симметричного строения $(0^0/90^0/0^0/90^0/0^0)_s$ на удар стальным шаром диаметром 12,7 мм и массой 8,5 гр. с начальной скоростью 3 м/с [1, 2, 4]. Геометрические размеры композита $A = B = 0,2$ м, $\delta_f = 2,69$ мм. Свойства материала $E_{11} = 120$ ГПа, $E_{22} = E_{33} = 7,9$ ГПа, $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 5,5$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,3$, $\rho = 1580$ кг/м³. Коэффициент k в законе Герца выбирался таким же, как и в работе [1] для этой задачи: $k = 1,1238 \cdot 10^{-6}$ м/Н^{2/3}.

На рис. 5 показано изменение контактной силы во времени. Сплошной линией показано аналитическое решение двумерной задачи [2], точками – решение методом конечного элемента [2, 4], пунктиром – решение по обобщенной теории {7,6}. Из рисунка видно, что на исследуемом интервале наблюдается повторное соударение после отскока.

Изменение во времени прогибов под точкой удара приведено на рис. 6.

Из рис. 5, 6 видно, что результаты расчета по предлагаемой теории хорошо согласуются с известными решениями.

Выводы. На основе обобщенной теории разработан аналитико-численный метод решения задачи о низкоскоростном ударе по ортотропным

многослойным пластинам. Обобщенная теория базируется на кинематических гипотезах в виде разложений перемещений в степенные ряды по поперечной координате (1). Решение задачи об ударе основывается на гипотезах Герца.

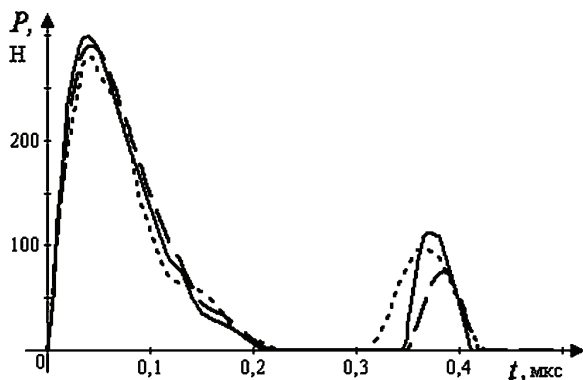


Рисунок 5 – Контактная сила

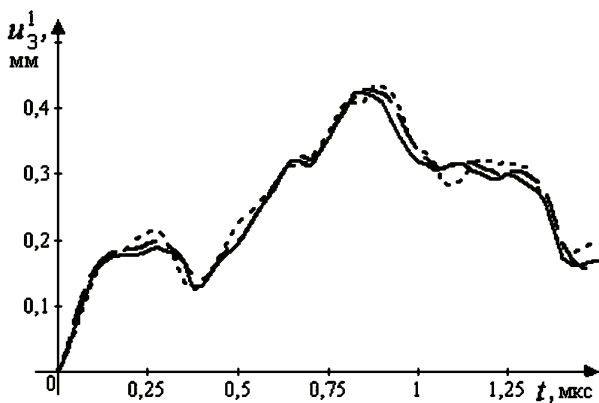


Рисунок 6 – Перемещения

На примерах показаны возможности предложенного подхода. Достоверность полученных результатов иллюстрируется сравнением их с данными расчетов по другим двумерным теориям (рис. 2, 3, 5, 6). Установлено, что силы и перемещения пластин при ударе, найденные по этим теориям, хорошо согласуются между собой.

Также, рассмотрены вопросы применимости различных двумерных аппроксимаций, построенных на основе обобщенной теории, для расчета отклика ортотропных пластин при низкоскоростном ударе. Показано, что, изменяя количество удерживаемых членов в разложениях (1), удается получать аппроксимации разного порядка точности (таблица; рис. 4). Установлено, что характер распределения напряжений по толщине композита под точкой удара

является существенно нелинейным (рис. 4). Поэтому, теории, основанные на гипотезах типа С.П.Тимошенко (теория $\{1,0\}$), могут применяться только для расчета перемещений и величины силы. Для анализа напряжений необходимо применение теорий более высокого порядка точности, например, обобщенной теории $\{5,4\}$ или $\{7,6\}$. В дальнейшем следует более точно оценить границы применимости обобщенной теории в зависимости от размеров области нагружения и характеристик слоистой пластины.

Список литературы: 1. *Nosier A.* Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory / *A. Nosier, R.P. Kapania, J. N. Reddy* // *Computational Mechanics*. – 1994. – Vol. 13. – P. 360-379. 2. *Pierson M.O.* Analytical solution for low-velocity impact response of composite plates / *M.O. Pierson, R. Vaziri* // *AIAA Journal*. – 1996. – Vol. 34, № 8. – P. 1633-1640. 3. *Tiberkak R.* Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact / *R. Tiberkak, M. Bachene, S. Rechak, B. Necib* // *Composite structures*. – 2008. – Vol. 83. – P. 73-82. 4. *Sun C.T.* On the impact of initially stressed composite laminates / *C.T. Sun, J.K. Chen* // *Journal of composite materials*. – 1985. – Vol. 19. – P. 490-504. 5. *Шуников А.Н.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / *А.Н. Шуников, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов*. – Харьков: ХНЭУ, 2004. – 252 с. 6. *Ugrimov S.V.* Generalized theory of multilayer plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39, № 4. – P. 819-839. 7. *Рассказов А.О.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / *А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга*. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с. 8. *Динник А.Н.* Избранные труды: В 2-х т. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т.1. – 350 с. 9. *Динамика удара* / *Дж. А. Зукас, Т. Николас, Х.В. Свифт и др.* – М.: Мир, 1985. – 296 с.

Поступила в редколлегию 09.11.2010

УДК 625.03

В.П.ШПАЧУК, д-р техн. наук, Харківська національна академія міського господарства

Г.О.НІКІТИНА, Харківська національна академія міського господарства

ДО УМОВИ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ФОРМ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ «ПІДРЕСОРЕНА МАСА ВАГОНА – КОЛЕСО – РЕЙКА»

Досліджено динамічну ударну взаємодію контактуючої пари «вагон-колесо-рейка» з урахуванням конструктивної швидкості руху і завантаження вагона, а також геометричних параметрів стику шляху. Розв'язано задачу визначення умов ортогональності форм коливань з метою отримання невідомих констант загального рішення рівнянь руху механічної дискретно-континуальної системи.

Dynamic shock interaction of contacting pair «carriage-wheel-rail» is treated taking into account structural velocity of movement and load of carriage and also geometrical parameters of way joint. Estimation of orthogonality conditions of vibrations forms is pursued for the purpose of definition of unknown constants of common decision of mechanical discrete-continuum system equations.

Постановка проблеми. Залізниці України в даний час усе гостріше відчувають дефіцит у рухомому складі і матеріалах верхньої будови колії. З огля-

ду на важливість проблеми, виникає необхідність зниження взаємовпливу вагона і колії, особливо в зоні стиків, удосконалення конструкції вагона і верхньої будови колії, переходу до більш надійних, довговічних і високошвидкісних засобів транспорту, а також упровадження ресурсозберігаючих технологій. Практика показує, що істотно слабким місцем в процесах динамічної взаємодії вагона з верхньою будовою колії є ізольовані стикові нерівності колії, що відносяться до рейкових стиків. При цьому найбільш інформативним показником взаємодії в системі «вагон – рейка» є осадка баластового шару в місцях стикових нерівностей під шпалами рейки, оскільки в цих місцях рейка, як правило, випробовує найбільші динамічні навантаження ударного типу. Найбільше осідання баластового шару відбувається в місцях стикових нерівностей під шпалами приймаючої рейки. Це пов'язано з тим, що в цих місцях рейка, як правило, випробує найбільші силові динамічні навантаження ударного типу. Динамічна взаємодія вагона і приймаючої рейки в зоні стику викликає додаткові дії ударів на агрегати вагона, а також призводить до дефектів колії, що обумовлюють її загальний технічний стан і ресурс. Також залишкова і пружна деформація баластового шару в цій зоні служить причиною виникаючих осідань, перекосів, виплесків, що, у свою чергу, ще більш збільшують рівень динамічного впливу з боку колії на вагон. Досвід експлуатації свідчить, що проблему взаємодії транспортного засобу і колії необхідно розв'язувати комплексно, а саме, з позицій взаємодії в системі «вагон, як багатомірна дискретна механічна система – верхня будова колії, як континуальна система».

В роботі дослідження побудовані на базі розрахункової схеми на рис. 1, що і описує нестационарні процеси ударної взаємодії колісної пари, яка включає підресорену масу вагона, із приймаючою рейкою. Рейка встановлена на баластовому шарі колії через опори, що моделюють його пружні характеристики.

Метою роботи є розв'язання задачі визначення умов ортогональності форм коливань задля отримання невідомих констант загального розв'язку руху механічної дискретно-континуальної системи, що розглядається. Прийняті наступні припущення, що не суперечать результатам робіт [1-3]: після фази балістичного руху коливання колісної пари і головки рейки відбуваються в безвідривному режимі; прогини рейки реалізуються без порушення суцільності баластового шару; демпфіруючі властивості баластового шару не враховуються, оскільки прогин рейки розглядається лише на першій за часом фазі його зростання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми. У роботах [4,5], присвячених питанням взаємодії транспортного засобу і балкових конструкцій на пружній основі, показано, що дослідження процесів прогинів зазначених «нескінченних» рейок вимагає урахування декількох форм коливань. При цьому, однак, не вказується їхня кількість, а також не враховуються комплексно питання впливу на прогини приймаючої рейки жорсткості накладок стикового зазору і найважливіша характе-

ристка стикового зазору – жорсткість приймаючої рейки. Тому отримані в роботах [4,5] результати досліджень, будучи аналітичними, не можуть бути використані для розв’язання поставленої в даній роботі конкретної задачі дослідження прогинів приймаючої рейки під першою шпалою з урахуванням експлуатаційних, конструктивних і механічних параметрів транспортного засобу, рейкової колії і функціонуючих накладок в обсязі перших п’яти форм коливань приймаючої рейки.

Підресорена маса вагона представлена двомасовою дискретною механічною системою «колісна пара-вагон» на фазі балістичного руху, а ділянка рейкової колії – у вигляді стику типу «зазор-ступінь вниз». Даний тип нерівності на практиці зустрічається досить часто [1], співвідношення її параметрів (ширина стику і його висота) варіюється в широких межах, а особливості їхнього виникнення розглянуті в роботах [1,2].

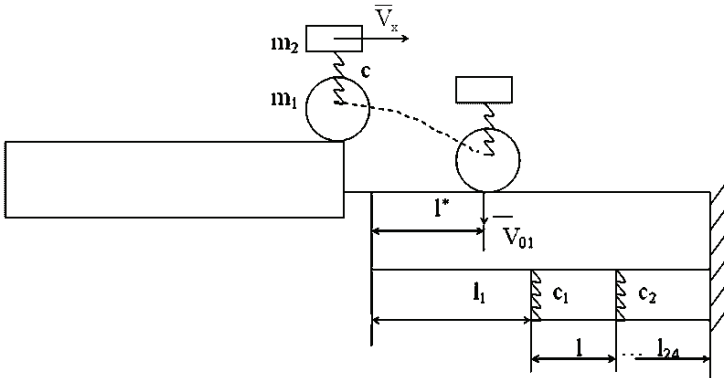


Рисунок 1 – Модель системи «підресорена маса вагона-колесо-рейка»

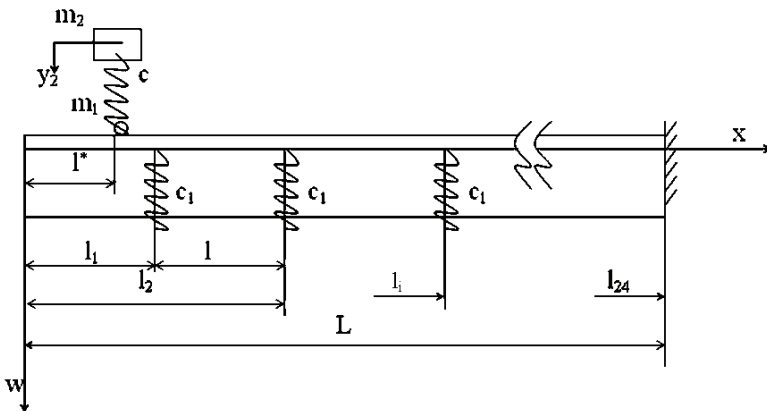


Рисунок 2 – Система «вагон – рейка на проміжних пружних опорах»

У роботі [6] досліджується умова ортогональності форм коливань для ба-

гатопрогінних балок та її застосування для вимушених механічних коливань двопрогінної балки.

Виклад основного матеріалу дослідження. У момент зіткнення колеса з рейкою на відстані l^* від краю рейки колесо має вертикальну швидкість V_{01} . Тут уведені наступні позначення: m_1, m_2 – приведені маси колеса і вагона відповідно; c – жорсткість ресорної підвіски, c_1, c_2, \dots, c_n – жорсткість баластового шару під шпалами, приймаємо $c_1 = c_2 = \dots = c_n$, l_1, l_2, \dots, l_n – відстані від краю рейки до першої і останньої шпали, l – відстань між шпалами.

Схема механічної дискретно-континуальної системи для дослідження процесів післяударних прогинів системи «вагон-колесо-рейка» в координатах $x-w$, з урахуванням граничних умов закріплення приймаючої рейки, приведена на рис. 2. Тут y_2 – переміщення приведені маси вагона m_2 ; c – жорсткість ресори; c_1 – жорсткості баластового шару з урахуванням геометричних параметрів шпали; l_i – координати пружних елементів рейки.

Диференціальні рівняння руху даної механічної системи [1,3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^{IV} w(t, x)}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ} \cdot \frac{\partial^{II} w(t, x)}{\partial t^2} = \frac{c(y_2 - w(t, l^*))\delta(x - l^*)}{EJ} - \\ - \sum_{i=1}^j \frac{c_1 w(t, l_i)\delta(x - l_i)}{EJ} - \frac{m_1}{EJ} \frac{\partial^{II} w(t, l^*)\delta(x - l^*)}{\partial t^2}, \quad j = 1 \div 23; \\ m_2 \ddot{y}_2 + c(y_2 - w(t, l^*)) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де w – прогин рейки;

l^* – відстань від краю рейки до колеса в момент зіткнення;

ρ, E – щільність і модуль пружності матеріалу рейки;

J – момент інерції перерізу рейки відносно нейтральної осі;

$\delta(x - x_0)$ – імпульсна функція.

Рішення системи (1) знайдемо з застосуванням методу Фур'є поділу перемінних, а також методів теорії операційного числення Лапласа-Карсона [1,3]:

$$\begin{cases} w(t, x) = z(x)\sin(\omega t + \alpha); \\ y(t) = \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{cases}$$

де ω – власна частота системи;

$z(x)$ – власна форма прогину рейки;

λ_2 – власна форма для координати y_2 .

Задача про коливання механічної системи, що розглядається, зводиться до суперпозиції власних форм. Для перших п'яти форм коливань рішення одержимо у вигляді:

$$W(t, x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x)(D_j \sin \omega_j t + M_j \cos \omega_j t);$$

$$\begin{aligned}
y_1(t, 1^*) &= W(t, x = 1^*) = \sum_{j=1}^5 z^j(l^*) (D_j \sin \omega_j t + M_j \cos \omega_j t) = \\
&= \sum_{j=1}^5 (\lambda_1^j D_j \sin \omega_j t + \lambda_1^j M_j \cos \omega_j t); \\
y_2(t) &= \sum_{j=1}^5 (\lambda_2^j D_j \sin \omega_j t + \lambda_2^j M_j \cos \omega_j t),
\end{aligned} \tag{2}$$

де $\lambda_1 = z(l^*)$.

Невідомі константи в (2) визначимо з початкових умов: $w(0, x) = 0$; $\dot{w}(0, x) = 0|_{x \neq 1^*}$; $\dot{w}(0, 1^*) = V_1$; $y_2(0) = 0$; $\dot{y}_2(0) = V_{02}$, де початкові швидкості V_1 , V_{02} мас m_1 , m_2 визначаються з загального рішення руху двовимірної дискретної системи на фазі балістичного руху.

Для j -тої частоти диференціальні рівняння власних форм коливань системи мають вид:

$$\begin{cases}
z^{jIV}(x) - \kappa_1^{j4} z^j(x) - [\kappa_2^{j4} z^j(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^j - \lambda_1^j)] \delta(x - l^*) + \\
+ \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^j(l_i) \delta(x - l_i) = 0, \quad j = 1 \div 5; \\
-m_2 \lambda_2^j \omega_j^2 + c (\lambda_2^j - \lambda_1^j) = 0,
\end{cases} \tag{3}$$

де $\kappa_1^4 = \frac{\rho F}{EI} \omega^2$, $\kappa_2^4 = \frac{m_1}{EJ} \omega^2$.

Необхідною умовою розв'язання систем рівнянь (1), (3) є умови ортогональності власних форм коливань [1,3]. Отримаємо його.

Візьмемо тому перше рівняння системи (3) для j -тої частоти і помножимо його на s -ту форму коливань. Далі це ж рівняння системи для s -тої частоти помножимо на j -ту форму коливань. Необхідною умовою ортогональності є нульове значення інтеграла по довжині рейки для отриманих добутоків:

$$\begin{cases}
\int_0^L z^{jIV}(x) z^s(x) dx - \kappa_1^{j4} \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx - [\kappa_2^{j4} z^j(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^j - \lambda_1^j)] z^s(l^*) \\
+ \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^s(l_i) z^j(l_i) = 0; \\
\int_0^L z^{sIV}(x) z^j(x) dx - \kappa_1^{s4} \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx - [\kappa_2^{s4} z^s(l^*) + \frac{c}{EJ} (\lambda_2^s - \lambda_1^s)] z^j(l^*) \\
+ \frac{c_1}{EJ} \sum_{i=1}^{23} z^j(l_i) z^s(l_i) = 0.
\end{cases} \tag{4}$$

Зробимо перетворення і введемо наступні позначення:

$$\int_0^L z^{jIV} z^s dx = z^{j''''} z^s \left| \int_0^L z^{j''''} z^{s'} dx = [z^{j''} z^s \right| \int_0^L z^{j''} z^{s''} dx] = \int_0^L z^{j''} z^{s''} dx;$$

$$\int_0^L z^{sIV} z^j dx = \int_0^L z^{s''} z^{j''} dx,$$

$$1_1^j = z^j(1^*); \quad 1_1^s = z^s(1^*).$$

Віднявши з другого рівняння системи (4) перше, одержимо умову ортогональності у виді:

$$\rho F(\omega_j^2 - \omega_s^2) \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1(\omega_j^2 - \omega_s^2) \lambda_1^j \lambda_1^s + c(\lambda_2^j \lambda_1^s - \lambda_2^s \lambda_1^j) = 0. \quad (5)$$

Аналогічним чином зробимо з другим рівнянням системи (4):

$$m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s (\omega_j^2 - \omega_s^2) + c(\lambda_1^j \lambda_2^s - \lambda_1^s \lambda_2^j) = 0. \quad (6)$$

Склавши рівняння (5) і (6), одержимо умову ортогональності у виді

$$(\omega_j^2 - \omega_s^2) [\rho F \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1 \lambda_1^s \lambda_1^j + m_2 \cdot \lambda_2^j \cdot \lambda_2^s] = 0$$

чи остаточно:

$$\rho F \int_0^L z^s(x) z^j(x) dx + m_1 \lambda_1^s \lambda_1^j + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s = \delta^{js} \left(\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right),$$

де $\delta^{js} = 0 \Big|_{j \neq s}$, $\delta^{js} = 0 \Big|_{j=s}$.

Визначимо далі початкові умови системи з урахуванням розв'язку (2):

$$w(0, x) = \Phi_1(x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x) M_j; \quad \rho F z^s(x) \Big|_0^L; \quad y_1(0, 1^*) = \Phi_1(1^*) = \sum_{j=1}^5 M_j \lambda_1^j; \quad m_1 \lambda_1^s;$$

$$w(0, x) = \Phi_2(x) = \sum_{j=1}^5 z^j(x) D_j \omega_j; \quad \rho F z^s(x) \Big|_0^L; \quad \dot{y}(0, 1^*) = \Phi_2(1^*) = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \lambda_2^j; \quad m_1 \lambda_1^s;$$

$$y_2(0) = y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j \lambda_2^j; \quad m_2 \lambda_2^s; \quad \dot{y}_2(0) = \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \lambda_2^j; \quad m_2 \lambda_2^s;$$

$$\Phi_2(x) = V_1 \delta(x-1^*); \quad \dot{y}_{10} = V_1; \quad y_{20} = 0; \quad \dot{y}_{20} = V_{01}.$$

Або:

$$\left[\begin{array}{l} \rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx = \sum_{j=1}^5 M_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx \right]; \\ \rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx \right]; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \lambda_1^s y_{10} = \sum_{j=1}^5 M_j m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s; \\ m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j m_1 \lambda_1^j \lambda_1^s; \\ m_2 \lambda_2^s y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s; \\ m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s. \end{array} \right. \quad (7)$$

Склавши в (7) рівняння перше, третє і п'яте, потім друге, четверте і шосте одержимо наступні формули для визначення невідомих констант:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s y_{10} + m_2 \lambda_2^s y_{20} = \sum_{j=1}^5 M_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx + \right. \\ \left. + m_1 \lambda_1^j \lambda_2^s + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s \right]; \\ \rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} + m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \sum_{j=1}^5 D_j \omega_j \left[\rho F \int_0^L z^j(x) z^s(x) dx + \right. \\ \left. + m_1 \lambda_1^j \lambda_2^s + m_2 \lambda_2^j \lambda_2^s \right], \end{array} \right.$$

які з урахуванням умови ортогональності приймуть вид:

$$\rho F \int_0^L \Phi_1(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s y_{10} + m_2 \lambda_2^s y_{20} = \delta^{js} \sum_{s=1}^5 M_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right];$$

$$\rho F \int_0^L \Phi_2(x) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s \dot{y}_{10} + m_2 \lambda_2^s \dot{y}_{20} = \delta^{js} \sum_{s=1}^5 D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right].$$

З урахуванням початкових умов при $x \neq l^*$ і $j = s$ перетворимо останні рівняння до виду

$$M_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = 0;$$

$$D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}.$$

При $x = l^*$ і $j = s$ виконується

$$D_s \omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right] = \rho F \int_0^L \Phi_2(l^*) z^s(x) dx + m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}.$$

Звідси отримаємо

$$M_s = 0;$$

$$D_s = \frac{m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}}{\omega_s \left[\rho F \int_0^L z^{s^2}(x) dx + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2} \right]}, \text{ при } x \neq l^*;$$

$$D_s = \frac{\rho F V_1 z^s(l^*) + m_1 \lambda_1^s V_1 + m_2 \lambda_2^s V_{01}}{\omega_s [\rho F z^{s^2}(l^*) + m_1 \lambda_1^{s^2} + m_2 \lambda_2^{s^2}]}, \text{ при } x = l^*.$$

У результаті прогин рейки з урахуванням підресореної маси вагона і нульових початкових умов визначається вираженням:

$$w(t, x) = \sum_{s=1}^5 z^s(x) D_s \sin \omega_s t.$$

Висновки з даного дослідження. Результати досліджень використовуються на практиці при дослідженні параметрів динамічної ударної взаємодії контактуючої пари «вагон-колесо-рейка» з урахуванням конструктивної швидкості руху і завантаження вагона, а також геометричних параметрів стику. На їхній основі розв'язується задача впливу механічних і конструктивних параметрів транспортного засобу на прогини віддаючої і приймаючої рейок. Також використовуються при дослідженні і аналізі залежності пружного осідання першої шпали приймаючої рейки для різних типів взаємодії і граничних умов її закріплення.

Список літератури: 1. Сتيкова динамика трамвая / Шпачук В.П., Далека В.Х., Коваленко А.В. – Харків: ХНАМГ, 2008. – 205 с. 2. Вериго М.Ф., Коган А.Я. Взаимодействие пути и подвижного состава / Под ред. М.Ф. Вериго. – М.: Транспорт, 1986. – 559 с. 3. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 691 с. 4. Дмитриев А.С. Вопросы взаимодействия балочных конструкций с движущейся сосредоточенной нагрузкой // Проблемы машиностроения. – 1986. – № 25. – С. 43-50. 5. Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. – К.: Наукова думка, 1978. – 176 с. 6. Yozo Mikata Orthogonality condition for a multi-span beam, and its application to transient vibration of a two-span beam // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol. 314, issues 3-5. – P. 851-866.

Поступила в редколлегию 08.11.2010

ПОРЯДОК ПОДАЧІ СТАТЕЙ ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ У ВІСНИКУ НТУ «ХПІ»

Для опублікування статті у Віснику НТУ «ХПІ» необхідно подати у тематичну редколегію такі документи:

1 Заявку підписану всіма авторами:

«Прошу прийняти статтю [прізвища авторів, назва статті] на ... сторінках [указати кількість сторінок] для опублікування у Віснику НТУ «ХПІ». Оплату гарантуємо. Відомості про авторів: [прізвище, ім'я, по-батькові кожного автора, наукове звання, посада, місце роботи, контактний телефон].

Підписи авторів.»

2 Текст статті на аркушах формату А4.

3 Акт експертизи про можливість опублікування матеріалів у відкритому друку.

4 Рецензію на статтю з місця роботи, підписану доктором або кандидатом наук.

5 Рецензію на статтю від одного з членів редколегії.

6 Електронну версію статті на дискеті 3,5", лазерному диску, USB- диску або іншому носії інформації.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ, ПОДАВАНИХ ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ У ВІСНИКУ НТУ «ХПІ»

Стаття повинна бути виконана з використанням редактора Word без нумерації сторінок. Переноси допускаються лише автоматичні або «м'які» (клавіша Ctrl+«-»). Розмір паперу: А4; орієнтація – альбомна; усі поля по 1,5 см; по 2 сторінки на аркуші [у термінології Word – 2 колонки на аркуші], поле між ними 3 см. Інтервал між рядками по всій статті – одинарний, шрифт Times New Roman (для текстів комп'ютерних програм – шрифт Arial або Courier), розмір (там, де не зазначено інакше) – 10 пт, звичайний.

Заголовок статті містить:

1 Код УДК. Друкується без відступу, вирівнювання по лівому краю.

2 Ініціали і прізвища авторів. Друкується через один порожній рядок після УДК. Вирівнювання по лівому краю, відступ 0,75 см. Ініціали й прізвища пишуться великими літерами; шрифт курсив напівжирний. Слідом за прізвищем через кому вказується наукове звання, (канд. техн. наук; д-р фіз.-мат. наук; академік та ін.); посада (студент, асп., наук. співр., доц., проф.); назва організації (НТУ «ХПІ»; ІПМаш НАН України, Харків; ЗАТ НІГідропривод, Харків; БелГАСМ, Белгород, Росія) шрифт звичайний; дані на кожного автора закінчуються знаком «;». Назву міста не треба вказувати для НТУ «ХПІ» або якщо вона міститься у назві організації (Сумське НВО ім. Фрунзе). Кожне прізвище пишеться з нового рядка.

3 Назва статті. Друкується великими літерами через один порожній рядок після інформації про авторів. Шрифт – прямий, напівжирний; відступ 0,75 см; вирівнювання по лівому краю.

4 Анотація українською мовою довжиною 4...10 рядків. Друкується через один порожній рядок після назви статті. Шрифт – 8 пт; без відступу; вирівнювання по ширині.

5. Анотація англійською мовою. Друкується через один порожній рядок після анотації на українському, оформлення аналогічне.

Основний текст починається через один порожній рядок після заголовка. Вирівнювання по ширині, відступ нового рядка 0,75 см. Посилання в тексті на малюнки, таблиці, формули, літературу мають вигляд: див. рис. 1, a ; у табл. 2; у (3); у рівнянні (4); див. формули (5)-(7) або див. формули (5)...(7); у [14, 16]; [11, с. 5]. У тексті рекомендується використовувати тире середньої довжини (клавіша «Ctrl + Gray»). Текст може бути розділений на розділи з заголовками вигляду:

1 Математична модель. Використовується метод ...

Висновки. У результаті отримано...

Перед заголовком пропускається один рядок.

Формули створюються у вигляді об'єктів редактором формул Equation, центруються. Нумерація, якщо вона необхідна, ставиться праворуч у дужках; вирівнюється по правому краю. Невеликі формули можна розміщати не в окремому рядку, а прямо в тексті. Після формул потрібно ставити розділові знаки, якщо цього вимагає орфографія; одна від іншої формули відокремлюються точкою з комою. Якщо формула міститься у середині речення, то продовження речення у наступному за формулою рядку не має відступу.

Не рекомендується використовувати в редакторі формул літери кирилиці. Нескладні формули можна набирати в Word без використання редактора формул, наприклад: $R = \beta \cdot r; a^2 + b_1/c$. Розміри шрифту в Equation слід встановлювати такі: звичайний – 10 пт, великий індекс – 6 пт, малий – 5 пт, великий символ – 15 пт, малий – 10 пт. Шрифти: Times New Roman і Symbol, стиль прямиий або курсив.

Латинські літери набирають курсивом, прямим шрифтом – функції (sin, tg та ін.), числа подібності (Bi, Pr та ін.), математичні скорочення (max, lim, exp та ін.), хімічні формули (Cl, H₂O та ін.). Прямим шрифтом набирають у формулах літери кирилиці, одиниці вимірювання (МПа, кДж/м² та ін.). Не можна застосовувати у тексті знаки (+, >, =, №, %, 0, °C, Ø [діаметр], sin та ін.) окремо без числових або літерних значень.

Грецькі літери рекомендується набирати прямим шрифтом.

Рисунок повинен бути оформлений як окремий об'єкт у тексті статті, розташування поверх тексту не допускається; рисунок відокремлюється від тексту зверху і знизу порожнім рядком. Рекомендуються використовувати чорнобілу палітру, якість відтворення рисунків кольорової палітри не гарантується. Якщо рисунків декілька, то вони нумеруються. В підписунокних підписах: Рисунок 1; Рисунок 2 – ... ; назва (якщо є) ставиться після тире, центрується, шрифт – 9 пт. Для растрових малюнків шириною на всю сторінку рекомендо-

вана кількість пікселів по горизонталі від 1000 до 3000.

Символи на рисунку повинні бути близькими за розміром до основного тексту. Частини рисунка позначаються під рисунком літерами *a*, *b* без дужки. Написи на рисунку, позначення елементів на рисунку (1, 2, 3) пишуть курсивом. Посилання у тексті, у підрисуючих підписах на частини рисунків (див. рис. 1, *a*, *b*), на його елементи (1, 2, 3) пишуть курсивом.

Таблиця відокремлюється від тексту зверху і знизу порожнім рядком; використовується шрифт – 9 пт. Якщо таблиць декілька, вони нумеруються. Заголовок містить номер таблиці та назву (якщо вона є) і може бути оформлений у вигляді складової частини таблиці з невидимою сіткою. Заголовок має вигляд: Таблиця 1; Продовження таблиці 1; Таблиця 2 – [назва]. Заголовок вирівнюється вліво з відступом 0,75 см; якщо таблиця має назву – заголовок центрується. Назва (якщо є) ставиться після тире.

Через один порожній рядок після основного тексту статті друкується список літератури. Розмір шрифту – 8 пт; без відступу; вирівнювання по ширині. Список літератури починається з набраних напівжирним шрифтом слів «**Список літератури:**», слідом за якими ставиться двокрапка. Сам список літератури набирається суцільним текстом з виділенням прізвищ і ініціалів авторів курсивом, номер позиції виділяється жирним шрифтом. Якщо авторів більше трьох, то після прізвищ перших трьох авторів можна вказувати «і ін.». Ініціали і прізвище не повинні бути у різних рядках, їх можна з'єднати «нерозривним пробілом» (клавіша «Ctrl + Shift + Space»).

Розділові знаки в списку – відповідно до вимог ВАК України. Розділові знаки «:», «;», «—», «/» та «//» відокремлені від тексту пробілами як зліва, так і справа; знаки «.» та «.» не відокремлюються від тексту пробілом зліва.

Після списку літератури у наступному рядку вказується дата надходження статті в редколегію. Після слів «*Надійшла до редколегії*» ставиться число, місяць і рік через крапку у форматі *00.00.0000*. Розмір шрифту – 8 пт; курсив; вирівнювання по правому краю.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ ЛІТЕРАТУРИ:

(у статті список літератури набирається суцільним текстом)

Один автор

1 *Коренівський Д. Г.* Ефект параметричного білого шуму в неперервних системах : посібник / *Д. Г. Коренівський*. – К. : Вища школа, 2006. – 111 с.

Два автори

2 *Ромовська З. В.* Сімейне законодавство України / *З. В. Ромовська, Ю. В. Черняк*. – Х. : Основа, 2006. – 93 с.

Три автори

3 *Гвоздєв О. В.* Механізація агропромислового комплексу : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / *О. В. Гвоздєв, Т. В. Бондар, О. Г. Карпенко* ; за ред. *Т. В. Бондара*. – 2-ге вид., випр. і доп. – К. : Наук. думка, 2005. – 157 с.

П'ять авторів і більше

4 *Психология менеджмента* / *П. К. Власов, А. В. Лепницкий, И. М. Лицихина* и др. – Х. : Прапор, 2007. – 300 с.

Перекладні видання

5 *Акофф Р. Ф.* Создание будущего организации / *Р. Ф. Акофф, Д. Магитсон, Г. Д. Здисон* ; пер. с англ. *Ф. П. Тарасенко*. – Днепропетровск : Бизнес, 2007. – 223 с.

Багатотомні видання

6 *Бондаренко В. Г.* Економіка, менеджмент : у 2 т. Т. 1. Економіка промисловості / *В. Г. Бондаренко, І. П. Канівська*. – К. : НТУ «ХПІ», 2006. – 278 с.

7 *Ермолов И. Н.* Неразрушающий контроль : учеб. пособ. в 5 кн. / *И. Н. Ермолов, Н. П. Алешин, А. И. Потапов* ; под ред. *В. В. Сухорукова*. Кн. 2. Акустические методы контроля. – М. : Высш. шк., 1995. – 178 с.

Методичні вказівки

8 Методичні вказівки та завдання до контрольних робіт з курсу «Бухгалтерський облік та прийняття рішень» для студентів спеціальності 7.050106 «Облік і аудит» заочної форми навчання / уклад. *Л. В. Кузьменко*. – Х. : НТУ «ХПІ», 2009. – 55 с.

Періодичні видання

9 *Гранчак Т. В.* Технологічне забезпечення гвинтових конвеєрів / *Т. В. Гранчак, В. А. Горовий* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2008. – Т. 1, вип. 2. – С. 45-52.

Матеріали конференцій

10 *Дарова А. Т.* Кібернетика в сучасних економічних процесах / *А. Т. Дарова, В. П. Петрова* // Использование энергии в промышленности : междунар. науч.-техн. конф., 3-5 окт. 2008 г. : тезисы докл. – Х. : 2008. – С. 35-42.

11 *Пушков Ю. Г.* О нормировании качества жидких электратов / *Ю. Г. Пушков* // Научно-технический прогресс и оптимизация создания препаратов. – Х. : НТУ «ХПІ», 2008. – С. 30.

Автореферати дисертацій

12 *Новод І. Я.* Моделювання макроекономічних показників : автореф. дис. канд. техн. наук : 05.13.06 / *Новод Іван Якович*. – Х., 2008. – 20 с.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ:

УДК 658.012

Л.В.СОКОЛОВ, д-р техн. наук, проф., АО «Телеком», Киев;
В.С.КОВАЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., НТУ «ХПИ»;
В.Т.ШЕВЧЕНКО, студент, ХНУРЕ, Харьков

ВЫДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ГРУПП В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ СОЦИАЛЬНОГО ОПРОСА НАСЕЛЕНИЯ

В статті пропонуються методи обробки даних, здобутих у результаті соціологічного опиту населення про його відношення до тих чи інших партій у Харківській області. Зроблені висновки про верстви населення, на які спираються різні партії.

[Анотація англійською]

В ноябре-декабре 1997 года был проведен опрос населения, целью которого являлось выяснение отношения различных его слоев к тем или иным партиям, зарегистрированным и имеющим более или менее сильные позиции в Харьковской области. Применение математических методов...

Таблица 2 – Результат опроса населения по...

Сокращенное название	Полное название организации	Популярность, %
ААА	Альянс за...	3,5
БББ	Блок сторонников...	6,5
ВВВ	Все не так...	7,1

Полученные результаты доказывают адекватность модели и могут быть использованы при анализе социально-экономических данных.

Список литературы: 1 *Иванов Л. И.* Факторный анализ в социальных исследованиях / *Л. И. Иванов, В. Т. Смирнов.* – М. : Наука, 1996. – 352 с. 2 *Петров В. С.* Применение методов кластерного анализа при обработке данных экспертного опроса / *В. С. Петров* // Автоматика. – 1995. – № 3. – С. 15-18. 3 *Тишков В. Т.* Кластерный анализ в социальных исследованиях / *В. Т. Тишков* // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. – 1990. – № 260 : Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 10. – С. 5-7. 4 *Иванов Л. В.* Применение методов статистического анализа при обработке данных опроса населения / *Л. В. Иванов, В. С. Петров* // Статистический анализ социально-экономических данных ; под ред. *Р.В.Сидорова.* – К. : Наук. думка, 1997. – С. 57-65.

Поступила в редколлегию 05.03.2007

ЗМІСТ

Л.В.АВТОНОМОВА, Ю.П.АНАЦКИЙ, А.В.СТЕПУК, Ю.М.ШМЫГАРЕВ Динамический анализ структурной системы корпуса ДВС	3
А.Г.АНДРЕЄВ, О.В.ЩЕПКИН Дослідження напружено-деформованого стану деяких типів профільних з'єднань з натягом	8
Н.В.БАБКОВА, И.В.ГАЛУЩАК, В.Я.ГОРБАТЕНКО, А.М.НИКИТИН Моделирование газового потока в области оребрения трубы	12
Е.О.БЕЗДЕТКО, А.А.ОСЕТРОВ Применение RFM к задачам о колебаниях пластин с разрезами при полиномиальной и сплайн- аппроксимации	18
В.И.БЕЛЫХ, О.Ф.ПОЛИЩУК, К.Б.МЯГКОХЛЕБ Расширение возможностей применения метода конструктивных дополнений при использовании образцов-свидетелей	27
С.В.БОНДАРЬ Особенности моделирования составных конструкций технологической оснастки на примере матриц для выдавливания	30
В.А.ВАНИН, А.А.ГРИГОРЬЕВ Волновые поля синфазных высокочастотных колебаний упругой среды	35
А.В.ВОРОПАЙ Управление нестационарными колебаниями сосредото- ченной массы, лежащей на пластине	46
С.ГЛАДКОВ, Р.СПАТЧЕК, И.ШТАЙНБАХ, Б.СВЕНДСЕН Конечно- элементное моделирование затвердевания бинарного сплава на мезо уровне	52
Б.Я.КАНТОР, С.А.АНДРЮЩЕНКО, С.Ю.МИСЮРА Исследование напряженно-деформированного состояния крышки гидротурбины и возможностей совершенствования ее конструкции	58
Р.Е.КОЧУРОВ, С.А.БЕЛОВ, К.В.АВРАМОВ, Л.В.РОЗОВА Динамическая прочность горизонтального сосуда под действием сейсмических нагрузок	67
А.А.ЛАРИН, Ю.В.АРЕФИН Компьютерное моделирование пневматической шины с учетом ее внутренней многослойной структуры и ортотропии механических свойств	72
В.В.ЛЕВЕНЕЦ, И.Л.РОЛИК Метод выражения специфических и неспецифических ингаляционных рисков в единых показателях	78

О.О.ОГОРОДНИК, Є.М.ГОРАШ Особливості розробки препроцесора до розв'язувача задач міцності за допомогою МСЕ	84
Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, Г.А.САЛЮК Создание интегрированного программного средства для численного определения силовых характеристик радиальных активных магнитных подшипников с учетом закона управления	91
В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, С.В.ОЛЬШАНСКИЙ Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси НА цилиндрическом виброрешете	100
Э.С.ОСТЕРНИК О зависимости вибрации турбогенераторов от режимных параметров	108
С.Ю.САЕНКО, О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, Д.В.ЛАВИНСКИЙ Анализ ударного деформирования керамического контейнера при пробивании металлическим стержнем и пулей	112
Э.А.СИМСОН, В.В.ОВЧАРЕНКО, Ю.А.ШЕВЧУК Поиск критерия оптимизации торцевой поверхности ролика и внутренней поверхности бортов колец подшипника качения	117
С.А.СОКОЛОВСКИЙ, Е.Н.ГРИНЧЕНКО, Н.И.МИСЮРА, Д.Л.СОКОЛОВ Сравнение виброзащитных свойств механических систем с прощелкиванием при использовании на транспортных средствах .	121
А.С.СТЕПЧЕНКО, А.А.ЛАРИН, С.Л.АРТЕМОВ Исследование динамических характеристик лопаточного аппарата с двухъярусным разъемным бандажированием	127
В.Г.СУКИАСОВ, В.П.ЧАПЛИНСКИЙ Анализ влияния конструктивных особенностей фиксатора и формы перелома на механические аспекты пластинчатого остеосинтеза	134
А.А.ТЕСЛЕНКО Применение метода конечных фотоупругих элементов к исследованию остаточных напряжений в монокристаллических пластинах, облученных ИК-лазером	142
В.В.ТКАЧЕНКО Колебания и устойчивость сжатых многослойных пластин сложной формы	146
С.В.УГРИМОВ, А.Н.ШУПИКОВ Моделирование низкоскоростного удара по слоистым ортотропным пластинам. Обобщенная теория	155
В.П.ШПАЧУК, Г.О.НІКІТІНА До умови ортогональності форм коливань механічної системи «підресорена маса вагона-колесо-рейка» .	164
Порядок подачі статей для опублікування у Віснику НТУ «ХП»	172

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ «ХП»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»

Випуск № 69'2010

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор О.В.Щепкін

Відповідальний за випуск канд. техн. наук І.Б.Обухова

Обл.вид. № 217-10

Підп. до друку 20.01.2011 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 9,4. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 118. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХП».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.

61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, вул. Чичибабіна, 9
