



ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
«ХПІ»

68'2010

Харків

ВІСНИК

НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«Харківський політехнічний інститут»

Збірник наукових праць
Тематичний випуск

68'2010

«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ТЕХНІЦІ ТА ТЕХНОЛОГІЯХ»

Видання засновано Національним технічним університетом
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання

Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

Голова: Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

Секретар: К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;
Л.М.Бесов, д-р техн. наук, проф.;
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;
А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;
В.В.Спіфанов, канд. техн. наук, проф.;
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;
В.Б.Клепіков, д-р техн. наук, проф.;

С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;
В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;
О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;
В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;
П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В.А.Пуляєв, д-р техн. наук, проф.;
М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;
Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю.В.Тимофіїв, д-р техн. наук, проф.;
М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.

Харків 2010

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 68. – 167 с.

У збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Відповідальний редактор: В. А. Ванін, д-р. техн. наук, проф.

Заступник відповідального редактора: Ю. В. Міхлін, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Відповідальний секретар: С. І. Кулик, канд. фіз.-мат. наук, ст. викл.

Ю. В. Гандель,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Ю. Л. Геворкян,	канд. фіз.-мат. наук, проф.;
О. Л. Григор'єв,	д-р техн. наук, проф.;
В. К. Дубовий,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. В. Курпа,	д-р техн. наук, проф.;
О. С. Куценко,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Литвин,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
Л. М. Любчик,	д-р техн. наук, проф.;
О. Г. Ніколаєв	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
М. В. Новожилова,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
А. Г. Руткас,	д-р фіз.-мат. наук, проф.;
В. П. Северин,	д-р техн. наук, проф.;
О. М. Шелковий,	д-р техн. наук, проф.;
Є. Г. Янютін,	д-р техн. наук, проф.

АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПІ».
Каф. ВМ, тел. (057) 707-60-35, (057) 707-60-87. E-mail: kpi_mmtt@mail.ru

Рекомендовано до друку вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 11 від 28 грудня 2010 р.

Т.А. БАРАНОВА, асист., НТУ «ХП», Харків
О.М. ЛИТВИН, д.ф.-м.н., проф., УПА, Харків

ОПТИМАЛЬНІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ В МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В статті пропонуються методи знаходження оптимальних базисних координатних функцій в методі скінченних елементів. З кожним вузлом розбиття пов'язана своя система координатних функцій. Розглянуто наближений та аналітичний розв'язки.

In article methods of a finding of optimal basis coordinate functions in the finite-element method are offered. The system of coordinate functions is connected to each node of a partition. The approximate and analytical solutions are considered.

Історія питання. Метод скінченних елементів (МСЕ) здобув загальне визнання як ефективний метод розв'язання найрізноманітніших задач математичної фізики. Одна з основних ідей МСЕ – спеціальний вибір координатних функцій та застосування варіаційних методів.

Широке розповсюдження методу скінченних елементів (МСЕ) визвало чисельні дослідження з побудови повних систем координатних функцій, які забезпечують:

- 1) потрібний клас диференційовності шуканого наближеного розв'язку в області інтегрування;
- 2) необхідний порядок збіжності наближеного розв'язку до точного;
- 3) точне задовільнення граничним умовам.

При цьому в залежності від способів розбиття області інтегрування на елементи (прямокутні і т.п.) при побудови повних систем одержали розповсюдження кусково-ермітові інтерполянти Р.Варга, Ж.Деклу, Г.И.Марчук, С.Г.Міхлін, Л.А.Оганесян та Л.А.Руховець, С.Б.Стечкін та Ю.Н.Суботін, Г.Стренг та Д.Фікс; Ф.С'ярле; Г.Біркгофф, М.Шульц, Р.Варга; Ю.Н.Суботін), багатоточкові формули Тейлора (О.М.Литвин та В.Л.Рвачов), атомарні функції (В.Л.Рвачов та В.А.Рвачов) та інші (М.Зламал, А.Женішек, А.Мітчел та Д.Маршал, А.Діас, Н.Кікухі, Ж.Тейлор, В.Г.Корнеєв).

Така велика кількість методів побудови координатних функцій методу скінченних елементів наводить на думку, що для кожної задачі існує оптимальна система координатних функцій (в деякому сенсі), яка відповідає вибраному способу розбиття області інтегрування на елементи та диференціальному операторові граничної задачі.

Вперше метод скінченних елементів з оптимальними базисними функціями, тобто оптимальний метод скінченних елементів (ОМСЕ), був викладений в 1978 році О. М. Литвином в роботі [1].

Постановка задачі. Викладемо ОМСЕ на прикладі тестової задачі: для самоспряженого еліптичного оператора другого порядку:

$$Au(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \overline{G} \quad (2)$$

де
$$Au(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + cu.$$

У варіаційній постановці задача (1)-(2) еквівалентна знаходженню мінімуму функціоналу

$$J(u) = \iint_G \left(p_1(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p_2(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 - 2fu \right) dx dy \quad (3)$$

на класі функцій $W_2^1(G)$, що задовольняють граничній умові (2).

У цій роботі вважаємо, що область G складена з прямокутних елементів, $G \subset W = [0, a] \times [0, b]$. Введемо таку сітку:

$$\left\{ (x_k, y_l) \in G : x_k = \frac{ak}{M}, y_l = \frac{bl}{N}, k = \overline{0, M}, l = \overline{0, N} \right\}$$

$\Pi_{kl} = \{(x, y) : x_k \leq x \leq x_{k+1}; y_l \leq y \leq y_{l+1}\}$ - елемент розбиття. Будемо шукати наближений розв'язок задачі у вигляді:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{S}} u_{kl} h_{kl}(x) H_{kl}(y) \quad (4)$$

де u_{kl} - невідомі сталі, $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ -- невідомі функції з властивостями:

$$h_{kl}(x_i) = \delta_{ik}, \quad H_{kl}(y_j) = \delta_{jl}, \quad \text{а} \quad \mathfrak{S} = \{(k, l) | (x_k, y_l) \in G\} \subset \{k = \overline{1, M-1}, l = \overline{1, N-1}\}.$$

Інтерполяційні властивості (4): $\tilde{u}(x_k, y_l) = u_{kl}$. Якщо покласти $\tilde{u}(x_k, y_l) = 0, (x_k, y_l) \in \partial G$, то $\ddot{u}(x, y)$ задовольняє граничній умові (2)

Методи розв'язку.

Для спрощення викладу матеріалу розглянемо випадок, коли $p_1(x, y) = 1, p_2(x, y) = 1, c = 0$, задача (1)-(2) має вигляд

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \overline{G},$$

та у варіаційній постановці еквівалентна знаходженню мінімуму функціоналу

$$J(u) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right) dx dy.$$

В роботі О.М.Литвина [1], див. також [2, с.306-307], коли вважається, що $h_{kl}(t) = H_{kl}(t) = h(t)$, тобто з усіма вузлами розбиття зв'язується одна базисна координатна функція, знайдено явний вигляд цієї функції ($f(x, y) = -2$):

$$h(t) = \frac{1 - 2\gamma}{2} \frac{ch\mu(t - 0.5)}{ch0.5\mu} - \frac{sh\lambda(t - 0.5)}{sh0.5\lambda} + \gamma,$$

яка є розв'язком симетрично-граничної задачі:

$$R_1 h''(t) + R_2 h''(1-t) - R_3 h(t) - R_4 h(1-t) = g, \quad 0 < t < 1, \quad h(0) = 1, \quad h(1) = 0,$$

де $\gamma = \frac{-g}{R_3 + R_4}$, а числа λ, μ знаходяться із системи $(R_1 + R_2)\mu^2 - (R_3 + R_4) = 0$,

$$(R_1 - R_2)\lambda^2 - (R_3 - R_4) = 0, \quad R_1, R_2, R_3, R_4 \text{ функціонали, що залежать від } \int_0^1 (h^{(s)}(t))^2 dt, \int_0^1 h^{(s)}(t)h^{(s)}(1-t)dt, \quad s=0,1 \text{ та невідомих } C_{ij}.$$

Далі розглянемо розв'язок задачі, коли $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ – різні невідомі функції.

1. Базисні координатні функції у вигляді кусково-лінійних сплайнів.

В даній статті використовується випадок (див. [3]), коли $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ симетричні в околі точки (x_k, y_l) (в загальному випадку $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ не симетричні). $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ мають такі властивості: $h_{kl}(0) = 1$, $h_{kl}(1) = 0$, $H_{kl}(0) = 1$, $H_{kl}(1) = 0$.

Будемо шукати $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ у вигляді:

$$h_{k,l}(x) = \left(\left(-\frac{MR}{a} x + r + 1 + (k-1)R \right) h_{k,l,r} + \left(\frac{MR}{a} x - r - (k-1)R \right) h_{k,l,r+1} \right), \\ x \in [x_{k-1,r}, x_{k-1,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, M-1};$$

$$h_{kl}(x) = \left(\left(-\frac{MR}{a} x + r + 1 + kR \right) h_{k,l,R-r} + \left(\frac{MR}{a} x - r - kR \right) h_{k,l,R-r-1} \right), \\ x \in [x_{k,r}, x_{k,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, M-1};$$

$$H_{kl}(y) = \left(\left(-\frac{NR}{b} y + r + 1 + (l-1)R \right) H_{k,l,r} + \left(\frac{NR}{b} y - r - (l-1)R \right) H_{k,l,r+1} \right), \\ y \in [y_{l-1,r}, y_{l-1,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, N-1}.$$

$$H_{kl}(y) = \left(\left(-\frac{NR}{b} y + r + 1 + lR \right) H_{k,l,R-r} + \left(\frac{NR}{b} y - r - lR \right) H_{k,l,R-r-1} \right),$$

$$y \in [y_{lr}, y_{l,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, N-1}.$$

де $x_{k,r} = x_k + \frac{ar}{MR}$, $y_{l,r} = y_l + \frac{br}{NR}$. На першому етапі $h_{klr} = \frac{r}{R}$, $H_{klr} = \frac{r}{R}$, $r = \overline{0, R}$. Таким чином, наші базисні функції - це сплайни степеня 1. Невідомі u_{kl} , h_{klr} і H_{klr} пропонується знаходити ітераційними методами за схемою:

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{kl}} = 0, \quad (h_{klr} \text{ і } H_{klr} - \text{відомі}), \quad \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{klr}} = 0, \quad (u_{kl} \text{ і } H_{klr} - \text{відомі}),$$

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial H_{klr}} = 0, \quad (u_{kl} \text{ і } h_{klr} - \text{відомі}), \quad k = \overline{1, M-1}, \quad l = \overline{1, N-1}, \quad r = \overline{1, R-1}.$$

Тобто, в даному випадку система Ритця є системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Результати роботи обчислювальних програм, складених за даними алгоритмами, свідчать, що для досягнення похибки розв'язку порядку $o(\varepsilon^4)$ потрібно набагато менше елементів розбиття.

Таблиця 1

Характеристики функції для випадку $N=M=2$ на квадраті $G = \{[0, a] \times [0, a]\}$ для розв'язку задачі (1)-(2) ($a = 1$, $f(x, y) = -2$).

	$\tilde{u}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$	$\iint_G u(x, y) dx dy$	$\tau_x(G\theta) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	Значення R
Наближений ОМСЕ	0.147395	0.069189	0.599352	5
Точний розв'язок	0.147355	0.070319	0.675314	

Таблиця 2

Кількість вузлів сітки (N) та похибка (ε) при розв'язанні задачі (1) – (2) для кута $G = \{[0, a] \times [0, a]\} \setminus \{[c, a] \times [c, a]\}$.

a/c	N		ε	Кількість ітерацій
	МСЕ	Наближений ОМСЕ	Похибка	
2	261	9	$4 \cdot 10^{-3}$	10
2.5	351	16	$2 \cdot 10^{-3}$	12
3	897	25	$8 \cdot 10^{-4}$	16
4	2125	49	$2 \cdot 10^{-4}$	20

2. Аналітичний вигляд оптимальних базисних координатних функцій.

Знову розглянемо випадок (див.[4]), коли область G складена з прямокутників $\Pi_{kl} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$, отриманих розбиттям області G прямими $x = x_i, i = \overline{0, m}; y = y_j, j = \overline{0, n}$.

Шукаємо оптимальні базисні функції у вигляді

$$\tilde{h}_{ij}(x) = \begin{cases} h_{0,i,j}(x), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ h_{1,i,j}(x), & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}, \quad \tilde{H}_{ij}(y) = \begin{cases} H_{0,i,j}(y), & y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ H_{1,i,j}(y), & y_j \leq y \leq y_{j+1} \\ 0, & y \notin [y_{j-1}, y_{j+1}] \end{cases}.$$

Вважаючи $\tilde{h}_{i,j}(x), \tilde{H}_{i,j}(y)$ відомими, знаходимо невідомі $u_{i,j}$ із системи

Рітця.
$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_{i,j}} = 0, \quad (i, j) \in \mathfrak{Z}.$$

Для знаходження невідомих функцій розв'язуємо систему інтегро-диференційних рівнянь

$$\delta_{h_{p,y}(x)} J(u) = 0, \quad (u_{i,j} \text{ і } \tilde{H}_{i,j}(y) - \text{відомі}), \quad p = 0, 1,$$

$$\delta_{H_{q,y}(y)} J(u) = 0, \quad (u_{i,j} \text{ і } \tilde{h}_{i,j}(x) - \text{відомі}), \quad q = 0, 1.$$

Якщо введемо позначення
$$A_{ijkl} = u_{i,j} \int_{a_2}^{b_2} \tilde{H}_{i,j}(y) \tilde{H}_{k,l}(y) dy,$$

$$B_{ijkl} = u_{i,j} \int_{a_2}^{b_2} \tilde{H}'_{i,j}(y) \tilde{H}'_{k,l}(y) dy, \quad F_{ij}(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \tilde{H}_{i,j}(y) dy, \quad k = \overline{i-1, i+1},$$

$l = \overline{j-1, j+1}$ то система інтегро-диференційних рівнянь прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial h_{1,ij}(x)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial h'_{1,ij}(x)} &= (h_{1,ij}(x) B_{ijkl} + h_{0,i+1,j}(x) B_{i+1,jkl} + h_{1,i,j+1}(x) B_{ij+1kl} + \\ &+ h_{0,i+1,j+1}(x) B_{i+1,j+1kl} + h_{1,i,j-1}(x) B_{ij-1kl} + h_{1,i+1,j-1}(x) B_{i+1,j-1kl}) + F_{i,j}(x) - \\ &-(h''_{1,i,j}(x) A_{ijkl} + h''_{0,i+1,j}(x) A_{i+1,jkl} + h''_{1,i,j+1}(x) A_{ij+1kl} + h''_{0,i+1,j+1}(x) A_{i+1,j+1kl} + \\ &+ h''_{1,i,j-1}(x) A_{ij-1kl} + h''_{1,i+1,j-1}(x) A_{i+1,j-1kl}) = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial h_{0,ij}(x)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial h'_{0,ij}(x)} &= (h_{1,i,j}(x) B_{ijkl} + h_{0,i-1,j}(x) B_{i-1,jkl} + h_{1,i-1,j+1}(x) B_{i-1,j+1kl} + \\ &+ h_{0,i,j+1}(x) B_{ij+1kl} + h_{1,i,j-1}(x) B_{ij-1kl} + h_{1,i-1,j-1}(x) B_{i-1,j-1kl}) + F_{i,j}(x) - \\ &-(h''_{1,i,j} A_{ijkl} + h''_{0,i-1,j}(x) A_{i-1,jkl} + h''_{1,i-1,j+1}(x) A_{i-1,j+1kl} + h''_{0,i,j+1}(x) A_{ij+1kl} + \end{aligned}$$

$$+h''_{1,i,j-1}(x)A_{ij-1kl} + h''_{1,i-1,j-1}(x)A_{i-1j-1kl} = 0.$$

Якщо функції $h_{p,i,j}(x)$, $p = 0, 1$, $i = 1 \dots N-1$, $j = 1 \dots N-1$ записати у вигляді вектора

$$\vec{h}(x) = (h_{0,11}(x), h_{0,12}(x), \dots, h_{0,1N-1}(x), h_{1,11}(x), \dots, h_{1,1N-1}(x), \dots, h_{1,N-1N-1}(x))^T$$

та відповідно перенумерувати коефіцієнти A_{ijkl} , B_{ijkl} та $F_{ij}(x)$, то систему рівнянь можна записати у матричному вигляді:

$$\delta_{h_{p,ij}(x)} J(h) = 0, \quad A_1 \vec{h}''(x) - B_1 \vec{h}(x) = \vec{F}_1(x),$$

$$\delta_{H_{q,ij}(y)} J(H) = 0, \quad A_2 \vec{H}''(y) - B_2 \vec{H}(y) = \vec{F}_2(y),$$

Хай λ_k, \vec{C}_k , $k = 1, (M-1)(N-1)$ -- власні числа та власні вектори задачі $(A\lambda^2 - B)\vec{C} = 0$. Базисні функції мають вигляд

$$\vec{h}(x) = \sum_{k=1}^{(M-1)(N-1)} (\alpha_k ch\lambda_k x + \beta_k sh\lambda_k x) \vec{C}_k + \vec{h}_{част}(x),$$

$$\vec{H}(y) = \sum_{k=1}^{(M-1)(N-1)} (\gamma_k ch\lambda_k y + \varepsilon_k sh\lambda_k y) \vec{C}_k + \vec{H}_{част}(y).$$

Сталі $\alpha_k, \beta_k, \gamma_l, \varepsilon_l$ знаходимо з граничних умов.

На першому кроці функції $\tilde{h}_{i,j}(x)$, $\tilde{H}_{i,j}(y)$ вважаємо кусково-лінійними, як в класичному методі скінченних елементів. Точність розв'язку порівнюємо з аналітичним розв'язком у вигляді функціонального ряду.

Список літератури: 1. *Литвин О.Н.* Оптимальные схемы МКЭ. // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. Киев, 1978. С.160-165. 2. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ, Наукова думка, 2005. 332 с. 3. *Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В.* Про чисельну реалізацію оптимального методу скінченних елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи. // Вісн. Львів. Політех., 1998, №337, Т. 2, С. 294--297. 4. *Баранова Т.А.* Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінченних елементів // Праці міжнародного симпозіуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)”, присвяченої 50-річчю створення Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007, С. 34-35.

Надійшла до редколегії 02.09.2010

И.С. БЕЛОВ, канд. физ.-мат. наук, доц., НТУ «ХПИ», Харьков

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Розглянуто систему алгебраїчних рівнянь другого порядку, що виникає в теорії невід'ємних тригонометричних многочленів. Подані умови збіжності деяких лінійних функцій від розбіжних ітерацій метода Ньютона рішення цієї системи...

The system of the algebraic equations of the second order, arising in the theory of nonnegative trigonometrical polynomials is considered. Conditions of convergence of some linear functions from iterations of Newtons method of the decision of this system are given.

1. Введение. Существуют различные причины интереса к проблеме конструирования и изучения свойств неотрицательных тригонометрических многочленов. Среди них поведение средних Чебыре, явление Гиббса для рядов Фурье, теория аппроксимации, унвалентные функции и многочлены, положительные суммы многочленов Якоби, ортогональные многочлены в единичном круге, области, свободные от нулей дзета – функции Римана и т.д.. Фейер и Рисс в 1915г. (6) доказали, что имеет место следующее представление неотрицательных тригонометрических многочленов: Для каждого неотрицательного тригонометрического многочлена

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \quad (1)$$

существует алгебраический многочлен $R(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k z^k$ степени n такой,

что $T(\theta) = |R(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$. Обратное, для каждого алгебраического многочлена

$R(z)$ степени n многочлен $T(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$ является неотрицательным тригонометрическим многочленом. Сеге в 1926г. (6) заметил, что в представлении Фейера – Рисса неотрицательного многочлена по косинусам параметры c_k могут быть выбраны вещественными. Точнее, справедлива следующая теорема. Пусть $C_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$ – косинус – многочлен порядка n , неотрицательный для каждого действительного θ . Тогда

существует алгебраический многочлен $R(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k z^k$ с действительными

коэффициентами степени n такой, что $C_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$ – косинус – многочлен порядка n , неотрицательный для каждого действительного θ . Тогда

существует алгебраический многочлен $R(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k z^k$ с действительными

коэффициентами степени n такой, что $C_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$ – косинус – многочлен порядка n , неотрицательный для каждого действительного θ . Тогда

существует алгебраический многочлен $R(z) = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k z^k$ с действительными коэффициентами степени n такой, что $C_n(\theta) = |R(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$. Отсюда

следует, что косинус – многочлен $C_n(\theta)$ неотрицателен тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа c_k $k = 0, 1, \dots, n$, такие, что

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i^2 = a_0 \\ \sum_{i=0}^n (c_{i-k} + c_{i+k}) c_i = a_k \quad (1 \leq k \leq n) \end{cases} \quad (2)$$

2. Постановка задачи. Необходимые и достаточные условия разрешимости системы (2) и явный вид решений можно выписать только для начальных значений $n \leq 2$, поэтому представляют интерес, например, итерационные методы ее решения. Приближенному решению систем алгебраических уравнений вида (2) $F(\vec{x}) = \vec{\gamma}$ посвящена обширная литература [1, гл.20], [2, гл.8]. В частности, при использовании метода Ньютона рассматриваются итерации $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - [F'(\vec{x}_n)]^{-1} F(\vec{x}_n)$. Если оператор $T = E - [F']^{-1} F$ в окрестности начального приближения \vec{x}_0 является сжимающим или выпуклым, то эти итерации быстро сходятся. Однако нахождение такого начального приближения для конкретного оператора F весьма сложно [3. с.156]. Положение может упроститься, если рассматривать слабую сходимость итераций (\vec{x}_n) . Пусть $F(\vec{a}) = \vec{\gamma}$ - система (1), записанная в векторной форме, тогда итерации метода Ньютона определяются соотношениями

$$F(\vec{a} + \vec{h}) \approx F(\vec{a}) + F'(\vec{a})\vec{h} = \vec{\gamma}, \quad \vec{h} = [F'(\vec{a})]^{-1} (\vec{\gamma} - F(\vec{a})) \quad (3)$$

Так как отображение F не является выпуклым, обычные теоремы выпуклого анализа о сходимости ньютоновых итераций [1, § 20] здесь неприменимы. Однако при определенных условиях несложно доказать сходимость двух линейных форм от итераций (3).

3. Решение задачи.

Систему (2) $n+1$ алгебраических уравнений второй степени с $n+1$ неизвестными, удобно записать в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i^2 = \gamma_0 \\ \sum_{i=0}^n (a_{i-k} + a_{i+k}) a_i = \gamma_k \quad (1 \leq k \leq n) \end{cases}, \quad (4)$$

считая, что неизвестные $a_i = 0$ при $i < 0$ и $i > n$.

Заметим, что если $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ – решение системы (4), то

$$\left(\sum_{u=0}^m a_i \right)^2 = \sum_{u=0}^m \gamma_i, \quad \left(\sum_{u=0}^m (-1)^i a_i \right)^2 = \sum_{u=0}^m (-1)^i \gamma_i.$$

Поэтому для разрешимости системы (4) необходимо выполнение условий

$$\sum_{u=0}^m \gamma_i \geq 0, \quad \sum_{u=0}^m (-1)^i \gamma_i \geq 0. \quad (5)$$

Обозначим в этом случае

$$s_0 = \left(\sum_{u=0}^m \gamma_i \right)^{\frac{1}{2}}, \quad s_1 = \left(\sum_{u=0}^m (-1)^i \gamma_i \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = \frac{s_0 + s_1}{2}, \quad \nu = \frac{s_0 - s_1}{2}.$$

Справедливы следующие утверждения. Пусть $\bar{a}^{(m)} = (a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})$ – решение системы (4), построенное на m -том шаге итераций (3), и

$$s_0^{(m)} = \sum_{i=0}^n a_i^{(m)} \quad s_1^{(m)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)}$$

Теорема 1. Если $\sum_{i=0}^n \gamma_i > 0$, и $s_0^{(0)} > 0$, то $s_0^{(m)} \rightarrow s_0$ ($m > 0$) монотонно убывая; если же $s_0^{(0)} < 0$, то $s_0^{(m)} \rightarrow -s_0$ ($m > 0$) монотонно возрастая. При этом $s_0^{(m)}$ сходится к s_0 квадратично.

Теорема 1а. Если $\sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma_i > 0$ и $s_1^{(0)} > 0$, то $s_1^{(m)} \rightarrow s_1$ ($m > 0$) монотонно убывая; если же $s_1^{(0)} < 0$, то $s_1^{(m)} \rightarrow -s_1$ ($m > 0$) монотонно возрастая. При этом $s_1^{(m)}$ сходится к s_1 квадратично.

В то же время, основные итерации $\bar{a}^{(m)}$ могут, конечно, расходиться. Доказательство состоит из последовательности параллельно доказываемых лемм.

Лемма 1.

$$F'_{0,l}(\bar{a}) = 2a_l, \quad F'_{k,l}(\bar{a}) = 2(a_{l-k} + a_{l+k}), \quad (1 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq n).$$

Пусть $\bar{V}(v_0, v_1, \dots, v_n)$ - вектор невязок для системы (1) в точке \bar{a}

$$v_0 = \gamma_0 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad v_k = \gamma_k - \sum_{i=0}^n (a_{i-k} + a_{i+k}) a_i \quad (1 \leq k \leq n).$$

Тогда по лемме 1 система линейных уравнений (3) для определения поправки $\bar{h}(h_0, h_1, \dots, h_n)$ имеет вид

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=0}^n a_i h_i = v_0, \\ 2 \sum_{i=0}^n (a_{i-k} + a_{i+k}) h_i = v_k \quad (1 \leq k \leq n). \end{cases}$$

Лемма 2.

$$2 \left(\sum_{u=0}^m a_u \right) \left(\sum_{u=0}^m h_u \right) = \left(\sum_{u=0}^m v_u \right).$$

Лемма 2а.

$$2 \left(\sum_{u=0}^m (-1)^u a_u \right) \left(\sum_{u=0}^m (-1)^u h_u \right) = \left(\sum_{u=0}^m (-1)^u v_u \right).$$

Докажем, для определенности, лемму 2а.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k v_k \right) &= 2 \left(\sum_{i=0}^n a_i h_i + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{i=0}^n (a_{i-k} + a_{i+k}) h_i \right) = \\ &= 2 \sum_{i=0}^n h_i \left(a_i + \sum_{k=1}^n (-1)^k (a_{i-k} + a_{i+k}) \right) = 2 \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \right) \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \right). \end{aligned}$$

Лемма 3.

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \gamma_k - \left(\sum_{i=0}^n a_i^{(m)} \right)^2.$$

Лемма 3а.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k v_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k - \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)} \right)^2.$$

Докажем, для определенности, лемму 3а.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^k v_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k - \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{i=0}^n (a_{i-k} + a_{i+k}) a_i = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k - \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^n (-1)^k (a_{i-k} + a_{i+k}) = \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k - \sum_{i=0}^n a_i (-1)^i \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k - \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^m \right)^2.
\end{aligned}$$

Лемма 4.

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i^{(m+1)} \right)^2 \geq \sum_{i=0}^n \gamma_i.$$

Лемма 4а.

$$\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m+1)} \right)^2 \geq \sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma_i.$$

Докажем, для определенности, лемму 4а

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m+1)} \right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i (a_i^{(m)} + h_i) \right)^2 = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \right)^2 \\
&+ 2 \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)} \right) \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \right) = [\text{лемма}2a] = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)} \right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \right)^2 \\
&+ \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i v_i \right) = [\text{лемма}3a] = \sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma_i + \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \right)^2 \geq \sum_{i=0}^n (-1)^i \gamma_i.
\end{aligned}$$

Лемма 5. Если $s_0^{(0)} > 0$, то $s_0^{(m)} \rightarrow s_0$ монотонно убывая ($m > 0$); если же $s_0^{(0)} < 0$, то $s_0^{(m)} \rightarrow s_0$ монотонно возрастающая ($m > 0$).

Лемма 5а. Если $s_1^{(0)} > 0$, то $s_1^{(m)} \rightarrow s_1$ монотонно убывая ($m > 0$); если же $s_1^{(0)} < 0$, то $s_1^{(m)} \rightarrow s_1$ монотонно возрастающая ($m > 0$).

Докажем, для определенности, лемму 5а. Имеем

$$\begin{aligned}
s_1^{(m)} - s_1^{(m+1)} &= - \sum_{i=0}^n (-1)^i h_i = \\
&= - \frac{\sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k - \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)} \right)^2}{2 \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m)}} = \frac{s_1^{(m)2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k}{2s_1^{(m)}}, \tag{6},
\end{aligned}$$

откуда $2s_1^{(m)}s_1^{(m+1)} = s_1^{(m)2} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k \geq 0$ в силу предположенной неотрицательности

$\sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k$. Следовательно, $s_1^{(m)}$ сохраняет знак. Поэтому из леммы 4а и (4) вытекает, что при $s_1^{(0)} > 0$ $s_1^{(m)} \rightarrow s_1'$ монотонно возрастая ($m > 0$).

Переходя в (5) к пределу получаем $s_1^2 = s_1'^2$, откуда из $s' \geq 0$ следует $s_1 = s'$. Случай $s_1^{(0)} < 0$ рассматривается аналогично.

Лемма 6. $s_0^{(m)}$ сходится к s_0 квадратично. Лемма 6а. $s_1^{(m)}$ сходится к s_1 квадратично. Докажем, для определенности, лемму 6а. Имеем из доказательства леммы 4а

$$\left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m+1)} \right)^2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \gamma_k + \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i \right)^2,$$

откуда в силу леммы 2а

$$2 \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^{(m+1)} \right) \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i^{(m+1)} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \nu_k^{(m+1)} = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i h_i^{(m)} \right)^2,$$

что и означает квадратичную сходимость $s_1^{(m)}$. Теоремы 1 и 1а полностью доказаны.

Выводы. В работе рассмотрена линейные функции $s_0^{(m)}, s_1^{(m)}$ от итераций (\bar{x}_n) метода Ньютона решения системы (1). Даны необходимые и достаточные условия их сходимости (3), которые удобны при проверке.

Список литературы: 1. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика.– М.Мир, 1969, 447с. 2. Бабенко К.И. Основы численного анализа.–М.Физматгиз, 1986.–741с. 3. Магарип-Иляев Г.Г, Тихомиров В.М. Метод Ньютона, дифференциальные уравнения и принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума, Труды МиАН 2008г., т.262, с. 156–177. 4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т.2.–М.Мир,1965.–615с. 5. Г.Полиа, Г.Сеге Задачи и теоремы из анализа, ч.2.– М.: ГИТТИ, 1956.–432с. 6. Dimitar K. Dimitrov, Extremal Positive Trigonometric Polynomials, Approximation theory, A volume dedicated to Blagovest Sendov 2002, p. 1-24.

Поступила в редколлегию 28.09.2010

В.А. ВАНИН, д-р. техн. наук, ИПМаш им. А.М.Подгорного НАНУ, Харьков
А.В. ГОЛОВЧЕНКО, канд. физ.-мат. наук, НАУ им. Н.Е.Жуковского, Харьков
Е.В. САМОТОЙ, асп., ИПМаш им. А.М.Подгорного НАНУ, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Запропоновані алгоритми побудови різницевих схем підвищеного порядку слабкої апроксимації на основі їх інтегральних представлень. Чисельно досліджуються порядки класичної і слабкої збіжності різницевого розв'язку для нелінійного скалярного закону збереження і одновимірної нестационарної системи рівнянь газової динаміки.

The algorithms of construction of difference networks of the heightened order of gentle approximating are tendered on the basis of their integral representation. The orders of classic and gentle convergence of the incremental solution for a non-linear scalar conservation law and one-dimensional non-steady set of equations of gas dynamics numerically are investigated.

1. Введение и постановка задачи. Нелинейные нестационарные системы уравнений в частных производных гиперболического типа, возникают при исследовании различных физических процессов и отражают характерные для них фундаментальные физические законы сохранения. Численное их исследование приводит к необходимости существенно модифицировать известные классические численные методы и разрабатывать новые, ориентированные на получение разрывных решений таких систем. Построения разностных схем повышенного порядка аппроксимации для них происходило, в основном, на основе понятия классической аппроксимации. Для определения ее порядка используется разложение в ряды Тейлора, справедливое в областях достаточной гладкости решений. Принималось, что разрывные решения должны удовлетворять дифференциальным уравнениям в этих областях, а на разрывах – соотношениям, следующим из интегральных уравнений, определяющих слабое решение. Известные эквивалентные формы записи таких уравнений приведены в [1]. В вычислительном эксперименте [2] выяснилось, что определением слабого решения в нестационарных задачах необходимо пользоваться и в той части расчетной области, где «побывала» подвижная ударная волна. Некоторые результаты анализа особенностей определений классической и слабой аппроксимации разностных схем и их конструктивные реализации для нелинейного уравнения переноса приведены в [3-11].

Для построения разностных схем с повышенным порядком слабой аппроксимации предлагаются алгоритмы, использующие следствия исходной системы законов сохранения, записанной в интегральной форме. Такой подход дал положительные результаты при теоретическом рассмотрении извест-

ных разностных схем и сравнении порядков их классической и слабой аппроксимации [3-11]. Предлагаемое развитие методов построения разностных схем представляет собой обобщение метода дифференциального представления разностных схем на не дифференцируемые функции с использованием интегральных представлений.

2. Классическая и слабая аппроксимация разностных схем. Рассмотрим построение разностной схемы повышенного порядка слабой аппроксимации для задачи

$$D_{11}(u) = \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Слабое решение этой задачи находится из соотношения

$$I_{11}(v, g) = \iint_{\Omega} (v \partial_t g + f(v) \partial_x g) dx dt = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где $\Omega = \text{sup } g$, $g \in C^\infty(D)$.

Пусть разностная схема k -того порядка классической аппроксимации для (1) имеет вид

$$\Lambda_h(v_h) = 0. \quad (3)$$

Классическая аппроксимация на решениях (1) определяется из соотношения

$$\Lambda_h(u) = O(h^k). \quad (4)$$

Определение 1: Слабая аппроксимация разностного оператора Λ_h k -того порядка на решениях (2), определяется условием

$$\iint_D \Lambda_h[v] g dx dt = O(h^k). \quad (5)$$

Определение 2: Порядок слабой аппроксимации разностного оператора Λ_h на решениях (3) находится из соотношения

$$I_{11}(v_h, g) = \iint_D (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dx dt = O(h^k).$$

Известная схема Лакса-Вендроффа для (1)

$$\Lambda_h(v_h) = \frac{\delta_t^+ u_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} \varphi_2(v_h) = 0, \quad (6)$$

где $\varphi_i(u) = \int (\partial_u f)^i du$, на гладких решениях (1) имеет второй порядок классической аппроксимации по (4)

$$\Lambda_h(u) = O(h^2),$$

и первый порядок слабой аппроксимации (5) на негладких решениях удовлетворяющих (2)

$$\iint_D \Lambda_h[v] g dx dt = O(h).$$

Изменим в схеме (6) разностный оператор и запишем разностную схему в виде [10]

$$\begin{aligned}
S\Lambda_h(v_h) &= \frac{\delta_t^+ v_h}{\tau} + \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} f(v_h) - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_x^+ \delta_x^-}{h^2} f(v_h) + \\
&+ \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\delta_t^+ + \delta_t^-}{2\tau} \cdot \frac{\delta_x^+ + \delta_x^-}{2h} (f(v_h) - v_h) = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Легко проверить, что схема (7) имеет второй порядок классической аппроксимации на решениях (1) (с использованием дифференциальных следствий)

$$S\Lambda_h(u) = O(h^2)$$

и такой же порядок слабой аппроксимации на решениях (2) (с использованием интегральных следствий)

$$\iint_D S\Lambda_h(v)g(x,t)dxdt = O(h^2)$$

Однако чтобы учесть эффекты численного «размазывания» разностного решения необходимо проверять слабую аппроксимацию разностной схемы на ее собственных решениях (9) по соотношению (6). Для этого рассмотрим оценку порядка слабой аппроксимации для указанной разностной схемы по определению 2

$$\begin{aligned}
0 &= \iint_D S\Lambda_h(v_h)g(x,t)dxdt = \\
&- \left(\iint_D (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dxdt - \frac{\tau}{2} \iint_D (v_h \partial_t^2 g + f(v_h) \partial_t \partial_x g) dxdt + \right. \\
&+ \frac{\tau}{2} \iint_D (v_h \partial_t \partial_x g + f(v_h) \partial_x^2 g) dxdt + \frac{h^2}{3!} \iint_D \left(\frac{\tau^2}{h^2} v_h \partial_t^3 g + f(v_h) \partial_x^3 g \right) dxdt + \\
&+ \frac{h^3}{12} \iint_D \left(-\frac{\tau^3}{2h^3} v_h \partial_t^4 g + \frac{\tau}{2h} f(v_h) \partial_x^4 g - \frac{\tau}{h} [f(v_h) - v_h] \partial_t \partial_x^3 g \right) dxdt - \\
&\left. - \frac{h^3}{12} \iint_D \left(\frac{\tau^3}{h^3} [f(v_h) - v_h] \partial_t^3 \partial_x g \right) dxdt \right) + \dots
\end{aligned} \tag{8}$$

Полученное выражение (8) назовем **интегральным представлением разностной схемы** (7) на ее решениях. Ограничивая число слагаемых в интегральном представлении будем получать интегральные приближения различных порядков. Так, обозначив через $I_{11}(v_h, g) = \left(\iint_D (v_h \partial_t g + f(v_h) \partial_x g) dxdt \right)$, запишем (8) в виде

$$I_{11}(v_h, g) = h(\theta_{21} I_{21}(v_h, g) + \theta_{22} I_{22}(v_h, g)) + h^2 I_3(v_h, g) + O(h^3).$$

Учитывая, что $I_{21}(v_h, g) = I_{11}(v_h, \partial_x g)$ и $I_{22}(v_h, g) = I_{11}(v_h, \partial_t g)$ имеем

$$I_{11}(v_h, g) = O(h^2).$$

Такой процесс последовательного исключения слагаемых в интегральном представлении разностной схемы аналогичен построению Γ - и Π -форм диф-

ференциальных представлений. Непосредственное преобразование дифференциального приближения в интегральную форму приводит к соотношению отличному от интегрального представления для нелинейных задач.

3. Результаты численных исследований. Часто, точное разрывное решение (1) заранее неизвестно. В этом случае для приближенного определения порядка слабой сходимости применяют правило Рунге, выполняя экспериментальную проверку скорости сходимости первых интегралов от получаемого разностного решения, взятых по различным областям, содержащим особенности точного решения.

Ниже приведены результаты анализа расчета по схеме «крест» для (1) ($f(u) = u^2/2$) с начальным распределением в виде $u(x,0) = 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(x/2)$.

Распределение порядков классической и слабой сходимости приведены на Рис.1, Рис.2.

Из практически одинакового распределения порядков локальной и сильной сходимости подтверждается экспериментально обнаруженный факт [2] наличия разной погрешности у инвариантов проходящих через ударную волну и приходящих на нее. В рассмотренной одномерной задаче присутствует только приходящий на разрыв инвариант.

Численное исследование распада произвольного разрыва на неоднородном фоне, заданным соотношением

$$p(x) = r(x)^k, \quad r(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(-\frac{\pi}{2} + 10x\right), \quad u(x) = 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(-\frac{\pi}{2} + 50x\right),$$

проведено для одномерных нестационарных уравнений газовой динамики на интервале [0,1]. В расчетах использовалась монотонная разностная схема второго порядка классической и первого слабой точности. Монотонизация схемы осуществлялась на основе реконструкции предраспадных величин с использованием L-функций [13] в интерполяционных полиномах Ньютона

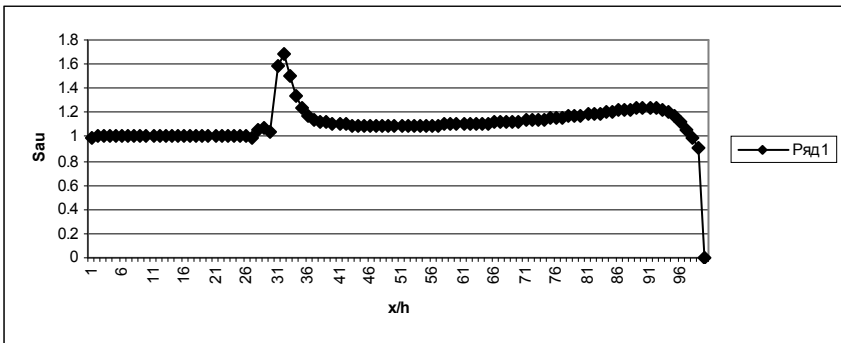


Рисунок 1 – Распределение порядка слабой сходимости.

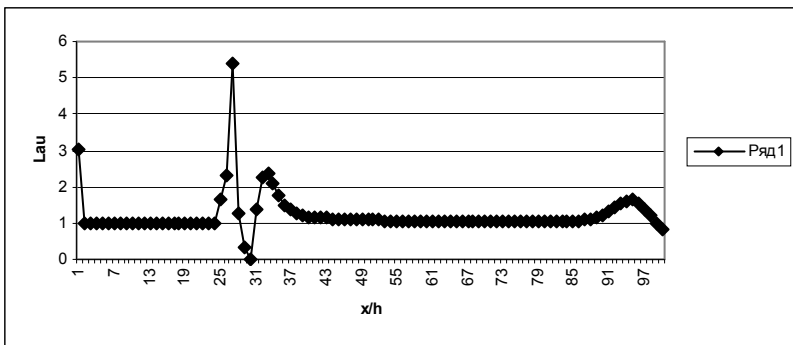


Рисунок 2 – Распределение порядка локальной (классической) сходимости.

Анализируемое распределение газодинамических параметров в некоторый момент времени представлено на Рис.3 в виде распространяющейся по неоднородному фону ударной волны. Распределение порядков локальной и слабой сходимости для давления плотности и скорости приведены на Рис.4-Рис.9. Видно, что порядок слабой сходимости сохраняется в окрестности разрыва и за ним, а порядок классической сходимости не определяется за разрывом.

Аппроксимация «мягкого» граничного условия порождает погрешность первого порядка и нерегулярное поведение порядка локальной сходимости на концах интервала.

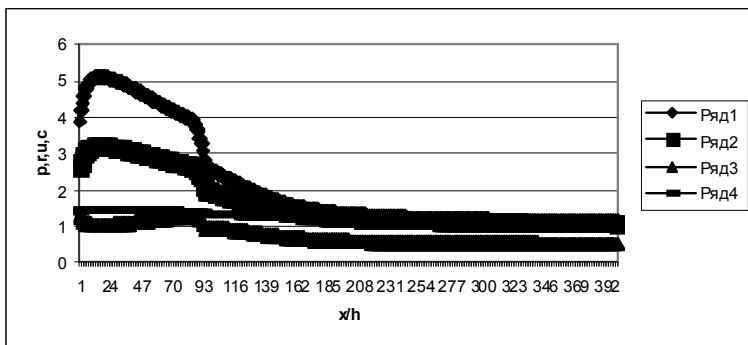


Рисунок 3 – Анализируемое распределение газодинамических параметров.

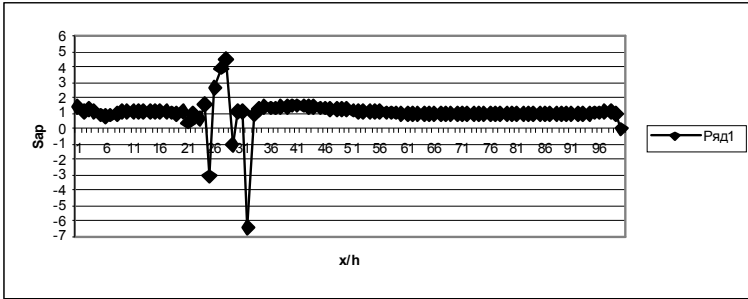


Рисунок 4 – Распределение порядка слабой сходимости для давления.

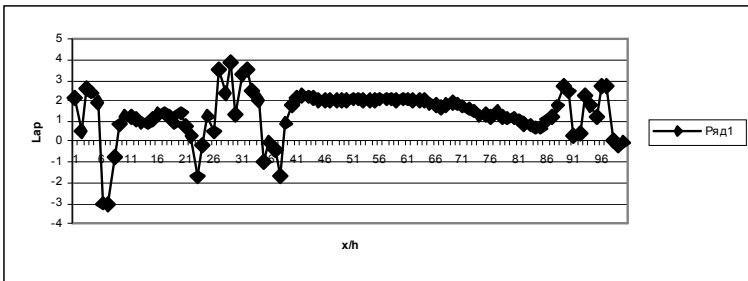


Рисунок 5 – Распределение порядка локальной сходимости для давления.

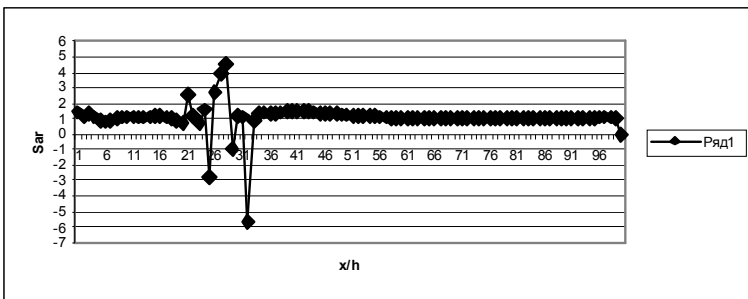


Рисунок 6 – Распределение порядка слабой сходимости для плотности.

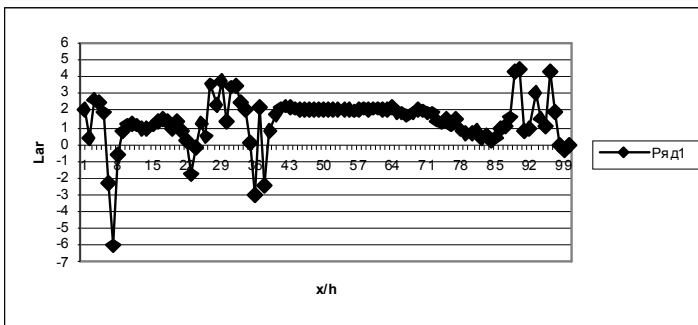


Рисунок 7 – Распределение порядка классической сходимости для плотности.

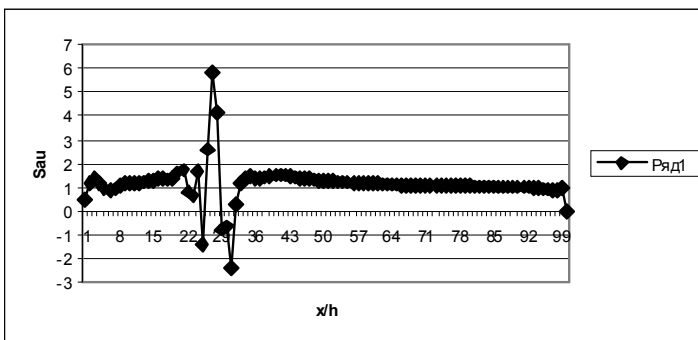


Рисунок 8 – Распределение порядка слабой сходимости для скорости.

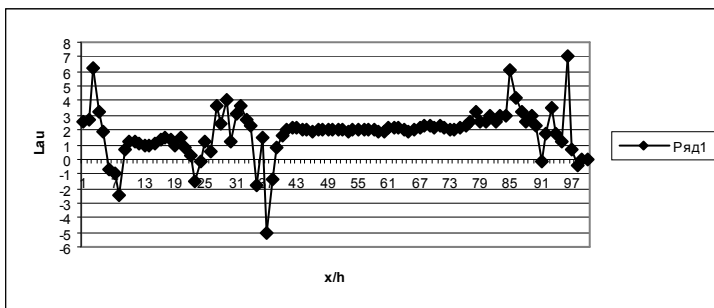


Рисунок 9 – Распределение порядка классической сходимости для скорости.

4. Выводы. Интегральное представление разностной схемы, следуя аналогии дифференциального представления для гладких решений, занимает промежуточное по информативности положение между исходной интегральной математической моделью процесса и аппроксимирующей слабо ее разностной схемой. Использование свойств интегрального представления и интегральных приближений разностных схем на негладких решениях разностного уравнения позволит более полно исследовать разрывные решения.

Список литературы: 1. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. М.: Физматлит.– 2003.– 416с. 2. *Русанов В.В., Безменов И.В., Нажесткина Э.И.* Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений // Численное моделирование в аэрогидродинамике.–М.:Наука.– 1986.– С.174 – 186. 3.*Годунов С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики// *Мат.сб.–1959.–т.47(89), №3.–С.271–306.* 4. *Годунов С.К.* Воспоминания о разностных схемах. Доклад на Международном симпозиуме «Метод Годунова в газовой динамике», Мичиганский университет (США), май, 1997. – Новосибирск: Науч. книга.– 1997.– 40с. 5. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws// *Communs Pure and Appl. Math.* – 1960. – v.13. – P.217 – 237. 6. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений.–М.: Физматлит, 2001.– 608с. 7. *Остапенко В.В.* О повышении порядка слабой аппроксимации законов сохранения на разрывных решениях // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.–1996.–т.36, №10.–С. 146–157.* 8. *Остапенко В.В.* О слабой сходимости на разрывных решениях TVD- схемы Хартена второго порядка аппроксимации // *Вычислительные технологии.– 1997.–т.2,№5.–С.57-65.* 9. *Остапенко В.В.* О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн// *Журн. вычислит. математики и мат. физики.–2000.–т.40, №12.–С. 1857–1874.* 10. *Ванин В.А.* Вычислительные алгоритмы повышенного порядка слабой аппроксимации для задач газовой динамики // *Вісті Академії інженерних наук України, машинобудування та прогресивні технології.* –2007.–№3(33).–С.185–191. 11. *Крупа В.Г.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для гиперболических уравнений // *Журн. вычислит. математики и мат. физики.–1998.–т.38, №1.–С. 85–98.* 12. *Русанов В.В., Безменов И.В., Нажесткина Э.И.* Вычислительные погрешности разностных схем для расчета разрывных решений // Численное моделирование в аэрогидродинамике.–М.:Наука.– 1986.– С.174 – 186. 13. *Ванин В.А.* Вычислительные схемы с L-функциями для задач газовой динамики // *Проблемы машиностроения.–2004.–т.7,№4.–С.36-42*

Поступила в редколлегию 07.09.2010

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ», Харьков
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ», Харьков

ИЗОМОРФИЗМ ГРУПП ПРОДОЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОГО СТЕРЖНЯ

Проаналізовано прикладні та гносеологічні аспекти симетрії рівнянь, що моделюють повздовжні і поперечні коливання гвинтового стрижня. Досліджені форми гармонічних коливань, що використовуються при синтезі гвинтових хвиль трансляції. Показано, що у хвиль середнього частотного діапазону відношення кручення і кривизни пропорційно частоті, і це є передумовою їх квантування. Сформульовані обмеження амплітуд коливань виходячи із умов міцності стрижня.

The applied and the gynecological aspect of the symmetry of the equitation are modeling the longitudinal and the cross – section oscillations of the screw rod are analyzed. The forms of the harmonic oscillations used by the synthesis of the spiral repeater waves are examined. It is shown that the waves of the middle frequency range have an equal degree of the torsion and the curvature towards the frequency and that is the basis of their quantization. The restrictions of the oscillations amplitude caused by the conditions of the rod's strength are defined

Введение и постановка задачи. Статья продолжает цикл публикаций [1-3], в которых рассматриваются новые аспекты решения актуальной фундаментальной и прикладной проблемы генерирования винтовых волн трансляции (фононов, рис. 1), распространяющихся по активной вибрирующей среде, наделённой упругими и пластическими свойствами. Но результаты статьи имеют и гносеологическое значение. Уже давно не секрет, что помимо материального в нашем мире существует информационное поле; оно использует энергию материального поля и, взамен, отдаёт ему информацию. Считается, что между этими полями существует неразрывная взаимодополняющая связь, и главный философский вопрос – «Что первично, материя или сознание?» – является некорректным.

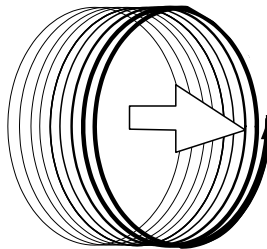


Рисунок 1 – Фонон, аналог фотона.

Современная наука исходит из того, что сознание способно понять и объяснить мир. Следовательно, информационное поле должно быть во многом похоже на материальное (математики используют термин **изоморфно**). На возможность и природу этого изоморфизма указывал *Анри Пуанкаре* [4]. Он считал, что пусть природа и не боится аналитических трудностей, но для всех проблем умеет находить простые решения. Известные уравнения колебаний сплошной упругой среды (смотри учебник [5] и его обозначения):

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div} \vec{u} - G \cdot \text{rot rot} \vec{u} + \vec{F} \quad (1)$$

представляют эту среду как бесконечно делимую и описывают поле линейных смещений $\vec{u}(M, t)$ её точек M в момент времени t . Но если считать эту среду зернистой (например, состоящей из кристаллов малого, но конечного размера), то наряду с перемещениями нужно учитывать угловые колебания зёрен. В результате, наряду с полем $\vec{u}(M, t)$ возникает поле угловых смещений $\vec{\alpha}(M, t)$, и эти поля, пусть и слабо, взаимодействуют друг с другом. Пуанкаре считал, что если поле $\vec{u}(M, t)$ отвечает эффектам материального мира, то поле $\vec{\alpha}(M, t)$ – нашим ощущениям, то есть, говоря языком современной науки, является **информационным полем**.

Далее в статье мы приведём уравнения этих полей, но для простейшей (одномерной) модели упругой среды, описывающей колебания цилиндрического тонкого винтового стержня (рис.2), навитого с малым углом подъёма δ винтовой линии. Мы изучим характер взаимосвязи полей, после чего, используя ту же модель, исследуем моногармонические колебания стержня, что ляжет в основу дальнейшей работы по синтезу винтовых фононов.

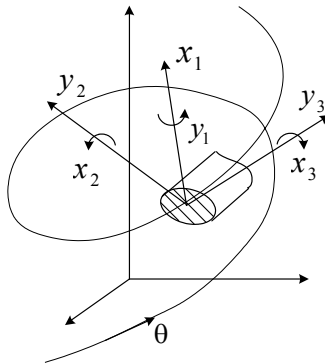


Рисунок 2 – Координаты поперечного сечения.

Матричные уравнения стержня. Для 6-ти координат сечения θ винтового стержня (трёх перемещений и трёх углов поворота) примем обозначения рис.2, и объединим эти координаты, скорости их изменения и отвечающие им упругие силы Qx_1, Qx_2, \dots, Qx_3 в векторы – столбцы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = Vx = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{Y} = Vy = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}, \quad Qx = \begin{bmatrix} Qx_1 \\ Qx_2 \\ Qx_3 \end{bmatrix}, \quad Qy = \begin{bmatrix} Qy_1 \\ Qy_2 \\ Qy_3 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, составим из 6-ти инерционных коэффициентов сечения mx_1, mx_2, \dots, my_3 (это масса или момент инерции), а также из 6-ти коэффициентов упругой податливости сечения cx_1, cx_2, \dots, cy_3 диагональные матрицы третьего порядка Mx, My, Cx, Cy . Тогда полученные в работе [1] векторные уравнения связанных колебаний стержня:

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{Q} + \bar{p} \times \bar{\omega}; & \rho J \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{M} + (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \times \bar{Q} + \bar{j} \times \bar{\omega} \\ cQ \cdot \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{v} + (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}) \times \bar{\omega}; & cM \cdot \frac{\partial \bar{M}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} + \bar{\chi} \times \bar{\omega} \end{aligned} \right\}$$

после перехода к безразмерным физическим величинам и допустимого для целей данного исследования упрощения примут следующий матричный вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Delta \\ \Delta & -B^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & \Delta^T \\ \Delta^T & -B \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -tg\delta - cx_3 \cdot Qx_3 & 0 \\ tg\delta + cx_3 \cdot Qx_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$

матрицы линейной и нелинейной связи координат. Для стержня, изготовленного из проволоки круглого поперечного сечения, диагональные элементы матриц Mx, \dots, Cy вычисляются по формулам $mx_1, my_2, my_3, cx_2, cy_1 = 1,$

$$mx_2, my_1, cy_3 = \frac{1}{4z^2}, cx_3 = 1 + \mu, mx_3 = \frac{1}{2z^2}, cx_1, cy_2 = \frac{1 + \mu}{2z^2},$$

где μ – коэффициент Пуассона; z – индекс навивки стержня (пружины).

Если принять $\Delta = 0$, то система (2) распадается на независимые системы

$$\begin{cases} Mx \cdot \partial Vx / \partial t = \partial Qx / \partial \theta - B \cdot Qx \\ Cx \cdot \partial Qx / \partial t = \partial Vx / \partial \theta + B^T \cdot Qx \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} My \cdot \partial Vy / \partial t = \partial Qy / \partial \theta + B^T \cdot Qy \\ Cy \cdot \partial Qy / \partial t = \partial Vy / \partial \theta - B \cdot Qy \end{cases}.$$

Согласно терминологии, используемой при динамическом анализе винтовых цилиндрических стержней (пружин), первая система описывает продольные, а вторая – поперечные колебания; при этом система (2) описывала связанные колебания стержня.

Симметрия уравнений и изоморфизм колебаний. Полученный выше результат матричной факторизации уравнений наглядно демонстрирует поразительную симметрию, найденную и реализованную на практике самой природой. Каждое из независимых колебаний объединяет группу из трёх координат – два смещения и один угол или одно смещение и два угла. Если мы сравним это с тем, что предсказывал Пуанкаре, то в количественном отношении получим совпадение, но по составу групп есть различие (у него смещения и углы составляли отдельные группы колебаний). Однако это различие с лихвой перекрывается глубиной достигнутого изоморфизма.

Если в уравнениях для продольных колебаний выполнить замены $Vx \rightarrow Qy, Qx \rightarrow Vy, Mx \rightarrow Cy, Cx \rightarrow My$,

то есть поменять местами скорости и упругие силы, то мы получим уравнение для группы поперечных колебаний. Кроме того стоит заметить, что для винтового стержня, имеющего малую относительную кривизну (то есть большое значение индекса z), выполняются приближённые равенства

$$Mx \approx Cy, Cx \approx My,$$

и это обстоятельство дополнительно усиливает отмеченное сходство.

Получается, что «мир» поперечных колебаний стержня является зеркальным отражением «мира» продольных колебаний, а при коэффициентах связи $\delta \neq 0$ он становится его зеркальным продолжением.

Поясним, что это означает. Предположим, мы сжимаем цилиндрическую пружину по некоторому периодическому закону и, тем самым, возбуждаем в ней интенсивные продольные колебания витков, обладающие определённой энергией и дискретным спектром частот. Коэффициент связи δ мал, но он не равен 0, и поэтому малая часть этой энергии будет передана в другую группу и возбудит там слабые поперечные колебания, являющиеся продолжением (и «отражением») продольных. Обратный поток энергии в силу

малости δ – это уже бесконечно малая величина второго порядка, и им, как правило, можно пренебречь. Но из этого правила существует исключение. Предположим, что одна из частот возбужденных поперечных колебаний оказывается резонансной. Тогда обратный («информационный») поток энергии усиливается настолько, что становится определяющим и для продольных колебаний.

Таким образом, уравнения (2) являются простейшей математической моделью, которая предоставляет возможность предметного изучения информационно – энергетического обмена. Как будет выглядеть обобщение уравнений (2) на трёхмерный случай точно не известно. Но главное, на наш взгляд, в этих уравнениях «схвачено» правильно – интенсивный обмен имеет два ключа доступа: с одной стороны – высокая потенциальная энергия, вызывающая значительное искривление пространства, с другой – высокая кинетическая энергия резонансных колебаний.

Частоты моногармонических колебаний стержня. Уравнения (2) являются нелинейными, но если в матрице Δ пренебречь изменением кручения $\chi_3 = cx_3 \cdot Qx_3$, они становятся линейными. Решение линеаризованной системы (2) будем искать в форме простой волны, то есть

$$Vx, Vy, Qx, Qy \sim \exp(i \cdot (\omega \tau + \lambda \theta)) ;$$

если ω и λ – вещественные числа, то волна является гармонической и бегущей. Круговую частоту ω и круговое волновое число λ связывает так называемое дисперсионное уравнение модели (2),

$$\det \begin{bmatrix} i\omega \cdot Mx & \Theta & i\lambda \cdot I + B & -\Delta \\ \Theta & i\omega \cdot My & -\Delta & i\lambda \cdot I - B^T \\ i\lambda \cdot I + B^T & \Delta & i\omega \cdot Cx & \Theta \\ \Delta & i\lambda \cdot I - B & \Theta & i\omega \cdot Cy \end{bmatrix} = 0,$$

решения которого представлены на рис.3. Корни ω^2 вычислялись как собст-

венные собственные числа матрицы 6-го порядка $K = \begin{bmatrix} Mx^{-1}A_{11} & Mx^{-1}A_{12} \\ My^{-1}A_{21} & My^{-1}A_{22} \end{bmatrix}$,

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= -(i\lambda I - Bx) \cdot Cx^{-1} \cdot (i\lambda I - B)^* - \Delta \cdot Cy^{-1} \cdot \Delta, \\ A_{22} &= -(i\lambda I - B)^* \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B) - \Delta \cdot Cx^{-1} \cdot \Delta, \\ A_{12} &= \Delta \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B) + (i\lambda I - B) \cdot Cx^{-1} \cdot \Delta, \quad A_{21} = A_{12}^*, \end{aligned}$$

для чего использовалась стандартная программа диалоговой среды MathCAD.

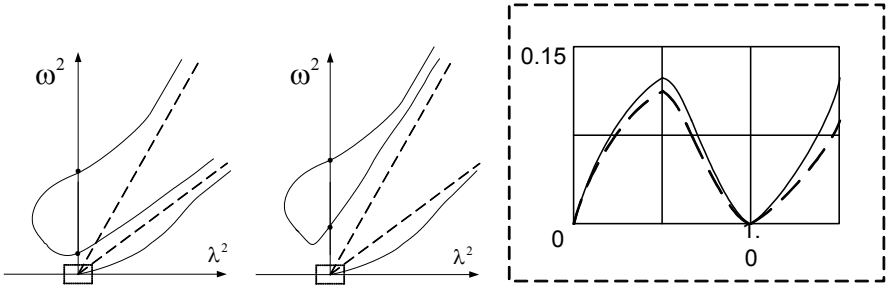


Рисунок 3 – Зависимость частоты ω от волнового числа λ для продольных (а) и поперечных (б) колебаний (позиция **в** – нижние ветви для малых частот).

В разрыве между ветвями величина ω^2 комплексная.

Средним ветвям на этих дисперсионных диаграммах соответствуют смещённые из начала координат наклонные прямые линии

$$\omega^2 = a_1^2 \cdot \lambda^2 + \omega_1^2, \quad \omega^2 = a_2^2 \cdot \lambda^2 + \omega_2^2, \quad (3)$$

где $a_{1,2}$ – скорости распространения вдоль прямого стержня волн крутильной и продольной деформации, $a_1/a_2 = 1/\sqrt{2(1+\mu)}$; $\omega_{1,2}$ – круговые частоты соответствующих синфазных колебаний (на синфазной частоте весь стержень колеблется в одной фазе, и, как следствие, отсутствует внутреннее трение).

Равенства (3) являются дисперсионными для уравнений

$$a_{1,2}^{-2} \cdot \partial^2 u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2 - \omega_{1,2}^2 / a_{1,2}^2; \quad (4)$$

уравнения Клейна – Гордона (4) хорошо известны в квантовой физике (смотри [6]), где они используются для моделирования свободных нерелятивистских частиц (например, электронов, не связанных с ядром атома).

Формы колебаний для диапазона средних частот. Проанализировано изменение формы гармонического колебания при увеличении частоты вдоль средних ветвей; эти колебания используются при синтезе фононов. Описанное выше алгебраическое преобразование позволило применить для этого анализа стандартные программы пакета MathCAD нахождения собственных векторов матрицы K 6-го порядка. Оказалось, что для одной ветви при всех частотах наблюдается кручение, а для второй – синфазное радиальное перемещение сменяется несинфазным рысканием (качанием и пропорциональным тангенциальным перемещением).

Показательно распределение энергии по видам деформации, рис.4,5. На графиках используется приведенное волновое число $\alpha = \tilde{\lambda} = \lambda/(2\pi)$, значение $\alpha = 1$ соответствует длине волны, равной длине одного витка стержня.

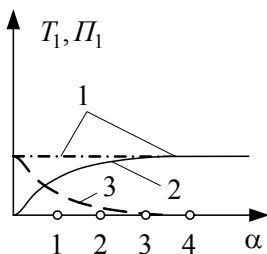


Рисунок 4 – Составляющие энергии «продольной» волны: 1 – вращение; 2, 3 – деформации кручения и изгиба.

Для первой ветви диаграммы плотности кинетической энергии T и потенциальной энергии Π определяются формулами:

$$T_1 = 0.5(Mx \cdot vx, vx) + 0.5(My \cdot vy, vy) \approx 0.5(Mx \cdot vx, vx),$$

$$\Pi_1 = 0.5(Cx \cdot qx, qx) + 0.5(Cy \cdot qy, qy) \approx 0.5(Cx \cdot qx, qx),$$

для второй ветви – формулами:

$$T_2 = 0.5(Mx \cdot vx, vx) + 0.5(My \cdot vy, vy) \approx 0.5(My \cdot vy, vy),$$

$$\Pi_2 = 0.5(Cx \cdot qx, qx) + 0.5(Cy \cdot qy, qy) \approx 0.5(Cy \cdot qy, qy),$$

где vx, vy, qx, qy – соответствующие блоки, составленные из компонент собственного вектора, имеющего единичную норму.

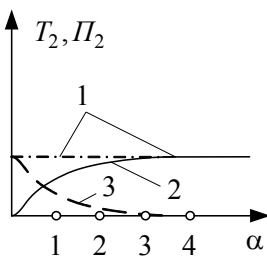


Рисунок 5 – Составляющие энергии «поперечной» волны: 1 – деформация сжатия, 2, 3 – тангенциальное и радиальное смещение.

Оказалось, что для первой ветви выполняются условия $T_1 + \Pi_1 = const$, и $T_1 = \Pi_1$, причём T_1 – это, в основном, энергия вращения вокруг винтовой оси с угловой скоростью νx_3 , а потенциальная энергия Π_1 для начальных частот ветви определяется деформацией изгиба qx_2 , а затем её замещает деформация кручения qx_3 (рис. 4).

Для второй ветви диаграммы равенство плотностей энергий $T_2 = \Pi_2$ и постоянство суммы $T_2 + \Pi_2$ также сохраняются, но на начальных частотах кинетическая энергия T_2 определяется радиальной скоростью νy_2 , а затем её замещает тангенциальная скорость νy_3 (рис. 5).

Для дальнейшего важным является следующее обстоятельство. Оказалось, что на первой ветви вместе с угловой скоростью вращения νx_3 изменяется в одной фазе упругие силы qx_1 , qx_3 и скорость продольного смещения νx_1 , причём эти четыре компоненты собственного вектора не зависят от длины волны. Остальные две величины отстают на четверть или три четверти периода, принимают малые значения и убывают пропорционально длине волны.

На второй ветви наблюдается аналогичная картина: значения компонентов $\nu y_1, \nu y_3, qy_1, qy_3$ в области $\alpha > 2$ стабилизируются, и соответствующие колебания имеют одинаковую фазу, остальные две компоненты смещены на четверть или три четверти периода, но они убывают пропорционально длине волны, а их значения малы.

Данное обстоятельство означает, что:

- указанные четыре компоненты описываются одной гармонической функцией (синусом или косинусом),
- колебания пропорциональны одному из них, **ведущему** (для одной ветви это угловая скорость νx_3 , другой – сила qy_3), причём коэффициенты пропорциональности не зависят от длины волны.

Для стержня, имеющего круглое поперечное сечение, на первой и второй ветви при условии $\alpha > 2$ выполняются следующие приближённые равенства:

$$\begin{pmatrix} \nu x_1 \\ \nu x_3 \\ qx_1 \\ qx_3 \end{pmatrix} = \nu x_3 \cdot \begin{pmatrix} (1 + \mu/2) \cdot z^{-2} \\ 1 \\ (2 + \mu) \cdot z^{-1} / \sqrt{2 \cdot (1 + \mu)} \\ z^{-1} / \sqrt{2 \cdot (1 + \mu)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu y_1 \\ \nu y_3 \\ qy_1 \\ qy_3 \end{pmatrix} = qy_3 \cdot \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0.5 \cdot z^{-1} \\ 0.5 \cdot z^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Изгиб и момент изгиба для всех длин волн, а также радиальное смещение и отвечающая ему сила (при волновых числах $\alpha > 2$) для колебаний средних ветвей имеют малую амплитуду, убывающую пропорционально периоду колебаний:

$$\begin{pmatrix} vx_2 \\ qx_2 \end{pmatrix} = -vx_3 \cdot i \cdot \begin{pmatrix} (1 + \mu/2)\sqrt{2(1 + \mu)} \cdot z^{-1} \cdot \lambda^{-1} \\ -\lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} vy_2 \\ qy_2 \end{pmatrix} = -qy_3 \cdot i \cdot \begin{pmatrix} z^{-1} \cdot \lambda^{-1} \\ -z^{-2} \cdot \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

В этих и многих других формулах статьи можно увидеть конкретное проявление симметрии, связанной с изоморфизмом групп колебаний.

Алгебраическая предпосылка квантования. Важно подчеркнуть, что кривизна $\chi_2 = cx_2 \cdot qx_2$, кручение $\chi_3 = cx_3 \cdot qx_3$ и угловая скорость vx_3 вдоль первой ветви в области $\alpha > 2$ находятся в следующих отношениях:

$$\chi_3 \div \chi_2 = \omega \div (2 \cdot z), \quad vx_3 \div \chi_2 = \omega, \quad (5)$$

то есть при постоянной проекции χ_2 вектора кривизны на направление бинормали величины кручения χ_3 и угловой скорости vx_3 изменяются пропорционально частоте ω . В дальнейших публикациях этого цикла будет показано, что условие (5) способно обеспечить квантование амплитуды фона и известную пропорциональность между его энергией и частотой.

Выясним, какое свойство модели «ответственно» за выполнение этого условия. Равенства (5) являются следствием дифференциальных уравнений

$$cx_2 \cdot \partial qx_2 / \partial \tau = \partial vx_2 / \partial \theta + vx_3, \quad cx_3 \cdot \partial qx_3 / \partial \tau = \partial vx_3 / \partial \theta - vx_2, \quad (6)$$

в которых обоснованно пренебрегли влиянием группы поперечных колебаний, и могут быть получены в предположении, что скорость деформации изгиба vx_2 мала, и в этих уравнениях ею можно пренебречь.

Форма этих уравнений и возможность их дополнительного упрощения вытекают из вида матрицы линейной связи координат B , «зашифрована» в её структуре. В статье [7] на основе общих представлений о симметрии уравнений механических колебаний винтового стержня было показано, что эта матрица отличается от общего случая тем, что элемент $B_{1,2}$ равен 0. В этом частном случае нормаль после навивки стержня перпендикулярна оси витка. Такое условие для цилиндрической пружины, навитой с постоянным шагом, является естественным, но для конической или другой фасонной пружины может не выполняться. При условии $B_{1,2} \neq 0$ изменяется вид уравнений (6), и

величина vx_2 не является малой. Но, как показали результаты компьютерного моделирования, пропорции (5) и в этом случае не нарушаются.

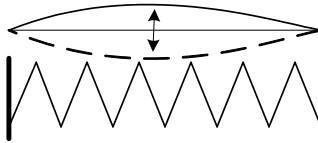


Рисунок 6 – Форма низкочастотной стоячей волны.

Формы низкочастотных колебаний. При использовании описанных выше аналитических методов и компьютерных программ были получены и изучены формы моногармонических низкочастотных колебаний для длинной пружины, а также (смотри далее) формы синфазных колебаний. Все эти колебания, априори, способны передать фону (или другой автоколебательной волне) накопленную в них энергию и обеспечить стабильность автоколебаний.

Низкочастотная стоячая длинная волна в пружине с числом витков $i_g \gg 10$ располагается на восходящей части нижней ветви дисперсионного уравнения (рис.3, позиция в, вблизи начала координат), соответствует основной частоте пружины и описывается следующими формулами (рис.6):

$$\begin{aligned} \text{продольная} - (vx, qx) &= Ax \cdot ((1 \ 0 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 1)^T) \cdot \sin(\omega x \cdot t) \cdot \sin(\alpha x \cdot \theta), \\ \text{поперечная} - (vy, qy) &= Ay \cdot ((1 \ 0 \ 1)^T, (1 \ 0 \ 0)^T) \cdot \sin(\omega y \cdot t) \cdot \sin(\alpha y \cdot \theta), \end{aligned}$$

где Ax, Ay – амплитуды этих волн; $\omega x, \omega y \approx 0, \alpha x, \alpha y = 1/i_g$ – их круговые частоты и волновые числа. Максимальное значение амплитуды одиночной волны определяется из условия прочности при кручении и изгибе (смотри справочник [8]) и с учётом нормировки сил принимает вид:

$$Ax, Ay \leq 0.005 \cdot z, \tag{9}$$

где коэффициент 0.005 примерно соответствует отношению предельно допустимого напряжения изгиба τ_u и модуля упругости E (для стали).

Аналогичные формы имеют **бегущие низкочастотные волны**, возникающие, например, при перемещении одной из опор пружины:

продольная – $(vx, qx) = Ax \cdot ((1 \ 0 \ 0)^T, (1 \ 0 \ 1)^T) \cdot \sin(\omega x \cdot t - \alpha x \cdot \theta)$,

поперечная – $(vy, qy) = Ay \cdot ((1 \ 0 \ 1)^T, (1 \ 0 \ 0)^T) \cdot \sin(\omega y \cdot t - \alpha y \cdot \theta)$.

Заметим, что если обе опоры движутся в одну сторону, то при интерференции двух бегущих волн скорости складываются, а силы – вычитаются. Поэтому амплитуды этих волн могут быть очень большими, и они не обязаны удовлетворять неравенствам (9). Другая возможность ослабить ограничение (9) заключается в суммировании бегущей волны и результата предварительной деформации. Анализ уравнений (2) показывает, что у винтового стержня существует два типа статической деформации, приводящие к появлению только перерезывающей силы qx_1 (как при работе пружины растяжения – сжатия) или только изгибающего момента qy_1 (как для пружины кручения).

Низкочастотная стоячая короткая волна в длинной пружине располагается на нижней ветви характеристического уравнения (рис.3, позиция в, вблизи точки возврата) и описывается следующими формулами:

$$(vx, qx) = Ax \cdot ((-1 \ i \ 1)^T, (0 \ i \ 1)^T) \cdot \exp[i(\omega x \cdot t + \alpha x \cdot \theta)],$$

$$(vy, qy) = Ay \cdot ((0 \ i \ 1)^T, \pm\sqrt{2}(1 \ -i \ -1)^T) \cdot \exp[i(\omega y \cdot t + \alpha y \cdot \theta)],$$

где $\omega x, \omega y \approx 0$, $\alpha x, \alpha y \approx 1$ – круговые частоты волн и их волновые числа; знаки плюс и минус соответствует восходящей или нисходящей части этой ветви (то есть условиям $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$).

Для энергетической поддержки фононов используются поперечные волны. Ограничение их амплитуды оказывается примерно таким же, как в (9):

$$Ay \leq 0.0035 \cdot z. \quad (10)$$

Однако его можно обойти, если использовать пакет из двух колебаний почти одинаковой частоты. В статье [9] указано на существование в спектре пружины очень близких собственных частот, называемых **кластерами**. В частности, если использовать жёсткое закрепление опорных витков, то:

- кластер возникает между первой и второй основной частотой,
- волновые числа располагаются на нижней ветви дисперсионной диаграммы по обе стороны от числа $\alpha = 1$.

Кластер фактически описывает колебания цилиндра, боковая поверхность которого имеет ту же инерционность и жёсткость, что и пружина; эти колебания происходят в двух перпендикулярных осевых сечениях (рис.7). Если число витков и индекс пружины велики, то эти две частоты обязаны мало различаться между собой, что проявляется в расчётах и экспериментах. Поскольку при движении вдоль сечения цилиндра смещение по координате

y_2 заменяется смещением по координате y_3 , и наоборот, то амплитуды колебаний модулированы в пределах одного витка.

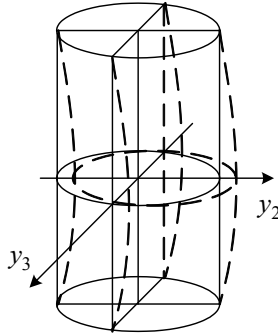


Рисунок 7 – Форма колебания на частотах кластера.

Для длинной пружины расхождение собственных частот в первом кластере наблюдается на уровне шестой значащей цифры или даже менее того. Кроме того, величина этих частот мала, а длины волн очень близки к длине витка. Поэтому в результате интерференции упругие силы становятся пренебрежимо малыми, и для средней части пружины приходим к формуле

$$(v_y, q_y) = Ay \cdot ((0 \ \sin \theta \ \cos \theta)^T, (0 \ 0 \ 0)^T) \cdot \sin(\omega y \cdot t).$$

Колебания кластера, как показывает эта формула, могут быть очень большими по амплитуде, но они имеют недостаток, существенный для стабилизации фононов, – малая длина волны.

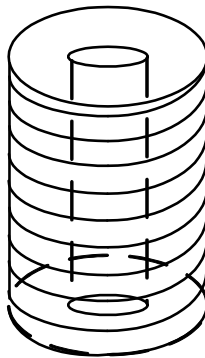


Рисунок 8 – Эквивалентная модель.

Формы синфазных колебаний. Если витки пружины сжать до соприкосновения, то получим цилиндрический отрезок трубы (рис.8), имеющий 4-е формы синфазной деформации; эти же деформации соответствуют синфазным колебаниям пружины:

осевое смещение наружной поверхности относительно внутренней; эквивалентно продольным колебаниям на нижней синфазной частоте, участвуют угловая скорость νx_3 кручения стержня и момент изгиба qx_2 ;

осевое сжатие приводит к изменению угла подъёма винтовой канавки; эквивалентно продольным колебаниям верхней синфазной частоты, участвуют скорость изгиба νx_2 и перерезывающая сила qx_1 ;

радиальные колебания трубы эквивалентны поперечным колебаниям пружины на нижней синфазной частоте, участвуют скорость радиального смещения νy_2 и осевая сила qy_3 ;

прокручивание внешней поверхности трубы относительно внутренней приводит к деформации сдвига в направлении нормали; эквивалентно продольным колебаниям на верхней синфазной частоте, участвуют угловая скорость изгиба νy_1 и перерезывающая сила qy_2 .

Синфазные колебания нижних частот описываются формулами:

$$\begin{aligned} (\nu x, qx) &= Ax \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cos(\omega x \cdot t); \begin{pmatrix} 0 & 1/(2z) & 0 \end{pmatrix}^T \sin(\omega x \cdot t) \right), \\ (\nu y, qy) &= Ay \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cos(\omega y \cdot t); \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2z \end{pmatrix}^T \sin(\omega y \cdot t) \right), \end{aligned}$$

где $\omega x = 1/\sqrt{mx_3 \cdot cx_2}$, $\omega y = 1/\sqrt{cy_3 \cdot my_2}$ – круговые частоты колебаний.

Амплитуды колебаний лимитируются прочностью стержня при сдвиге (продольная) и сжатии (поперечная волна), что приводит к неравенствам:

$$Ax \leq 0.01 \cdot z^2, \quad Ay \leq 0.02 \cdot z.$$

Синфазные колебания верхних частот описываются формулами:

$$\begin{aligned} Vx &= Ax \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cos(\omega x \cdot t); \quad Qx = \frac{Ax}{\sqrt{2 \cdot (1 + \mu)}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4z^2} \end{pmatrix}^T \sin(\omega x \cdot t), \\ Vy &= Ay \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4z^2} \end{pmatrix}^T \cos(\omega y \cdot t); \quad Qy = \frac{Ay}{\sqrt{2 \cdot (1 + \mu)}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \sin(\omega y \cdot t), \end{aligned}$$

где $\omega x = \sqrt{(cx_1^{-1} + cx_3^{-1})/mx_2}$, $\omega y = \sqrt{(my_1^{-1} + my_3^{-1})/cy_2}$ – круговые частоты

колебаний. Амплитуды лимитируются условиями прочности при сдвиге:

$$Ax \leq 0.04 \cdot z^2, \quad Ay \leq (0.005/0.627) \cdot 2z^2 \approx (z/7)^2. \quad (11)$$

Неравенство (11) свидетельствует, что при индексе $z \gg 10$ поперечные синфазные колебания могут иметь высокую угловую скорость изгиба, и это позволяет рассчитывать на эффективную стабилизацию фононов.

В завершение вопроса укажем на существование ещё одного вида колебаний стержня, которые можно считать **квазисинфазными**. Этим колебаниям отвечает продолжение средней ветви диаграммы в область $\alpha^2 < 0$ (рис.9); они не являются гармоническими и по пространственной координате

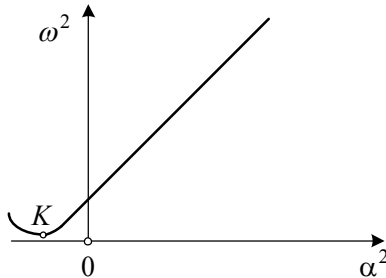


Рисунок 9 – Квазисинфазные решения дисперсионного уравнения.

описываются гиперболическими функциями $sh(|\alpha|\theta)$, $ch(|\alpha|\theta)$.

Компьютерное моделирование дисперсионной диаграммы показало, что её средние ветви остаются практически прямолинейными вплоть до точки K , имеющей координаты $\alpha^2 \approx -1.5$, $\omega^2 \approx 15$. Значение частоты для этой точки примерно в z раз меньше соответствующей синфазной частоты ωx .

Средние ветви пересекаются в точке K_0 (рис.10), её координаты составляют:

$$\alpha^2 = -(1 + \mu)/(1 + 2\mu) \approx -0.8, \quad \omega^2 = 4z^2 \mu/(1 + 2\mu) \approx 0.6z^2.$$

Сдвиг начала координат в точку K_0 приведёт к тому, что указанные ветви будут дисперсионными диаграммами для волновых уравнений

$$a_{1,2}^{-2} \cdot \partial^2 u / \partial t_*^2 = \partial^2 u / \partial x_*^2$$

(как у фотонов, смотри учебник [6]), причём, и это также полностью корреспондируется с волновой квантовой механикой, «частоты» ω_* и «волновые

числа» α_* станут ограниченными снизу. Прояснить физический смысл соответствующего (интегрального) преобразования для координаты x_* и времени t_* пока не удалось, поэтому далее в этом направлении теория не развивалась.

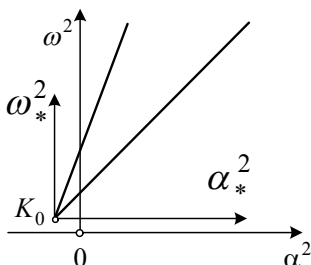


Рисунок 10 – Перенос осей на дисперсионной диаграмме.

Выводы. Выявлена и проанализирована (в прикладном и гносеологическом аспектах) симметрия уравнений, моделирующих группы продольных и поперечных колебаний цилиндрического винтового стержня.

Исследованы формы гармонических колебаний, используемых при синтезе винтовых волн трансляции. Показано, что для продольных колебаний среднего частотного диапазона отношение кручения и кривизны стержня изменяется пропорционально частоте. Сформулированы ограничения амплитуд колебаний исходя из условий прочности винтового стержня.

Список литературы: 1. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 2. Ванин В.А., Григорьев А.А. Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С.20-30. 3. Ванин В.А., Григорьев А.А. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 4. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 6. Вихман Э. Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. 7. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Операторные уравнения для определения частот собственных колебаний цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ», 2001. – Вип. 1 (4). – С. 111-119. 8. Справочник машиностроителя. В 3 томах. Под ред. Е.А. Чудакова. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. 9. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ», 2004.– Вип. 2 (9).– С.257-264.

Поступила в редколлегию 02.09.2010

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ», Харьков
И.В. ТЮПА, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПИ», Харьков
Л.В. ГЛЕБОВА, аспирант, НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЕМКОСТНОГО МЕТОДА ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГИХ СРЕДАХ

Запропоновано теоретичну модель збудження акустичних коливань за допомогою ємнісного перетворювача. Отримано основні співвідношення для розрахунку акустичних коливань зміщення на поверхні металевого зразка. Побудовано графічні залежності розподілу амплітуди акустичних коливань від амплітуди збуджувального тиску та геометричних розмірів ємнісного перетворювача.

In this work the theoretical model of excitation of acoustic vibrations is offered by a capacity transformer. The main calculations for displacement of longitudinal acoustic rippling on the surface of metal sample are received. Graphic dependences of damps of acoustic rippling from damps of stimulation pressure and geometrical parameters of capacitor transmitter are built.

Введение и постановка задачи. В статье рассматриваются теоретические основы нового метода неразрушающего контроля поверхности детали, изготовленной из металла или другого токопроводящего материала. При этом методе в детали возбуждаются акустические колебания высокой частоты, и измеряется их амплитуда на поверхности детали, что, в частности, позволяет оценить качество обработки этой поверхности. Способ возбуждения акустических колебаний в упругой среде использует эффект воздействия на объект контроля электрическим полем [1,2]. В качестве источника поля выступает емкостный преобразователь, конструкция которого показана на рис. 1.

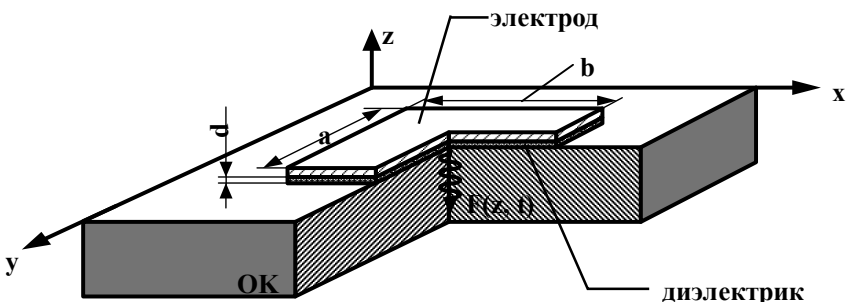


Рисунок 1 – Модель ультразвукового емкостного преобразователя.

При практической реализации способа параллельно одной из торцевых проводящих поверхностей объекта располагается электропроводящая пластина D (электрод); на рис.1 электрод имеет прямоугольную форму, но в

общем случае его форма может быть произвольной.

Акустические колебания в упругом объёме возбуждаются силами взаимодействия электрических зарядов, приходящих на электропроводящую поверхность после подачи поляризующего напряжения. При этом электрод и объект контроля будут представлять собой плоский конденсатор, на нижней обкладке которого возникает и изменяется по определённому закону избыточный электрический заряд. Этот заряд взаимодействует с ионами кристаллической решётки, пытаясь расширить или сжать материал. В результате в тонком поверхностном слое образца, контактирующем с диэлектриком, создаётся упругое давление, распространяющееся внутрь тела.

Размеры пластины малы по сравнению с размерами образца, поэтому в этой задаче тело допустимо считать неограниченным упругим полупространством. В пределах пластины упругое давление, возбуждающее колебания, принимается равномерно распределённым; за пределами пластины упругое давление на поверхности образца считается равным нулю.

Возбуждение колебаний производится по некоторому периодическому закону, причём указанное давление представляется суммой двух – трёх гармоник, имеющих кратные частоты. Процесс колебаний считается установившимся; при этом силой вязкого (или гистерезисного) трения в колеблющемся материале пренебрегаем.

Известный ёмкостный способ приёма акустической волны [1] позволяет зарегистрировать перемещение поверхности образца, происходящее в направлении её нормали. Исходя из этого, необходимо получить расчётный метод определения амплитуды указанных колебаний поверхности.

Основные уравнения модели и общая схема их решения. Обычно (смотри, например, [3]), при решении сходных проблем методами теории упругости рассматривается *контактная задача* для уравнения

$$\lambda \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K_0 \cdot \text{div grad } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{A},$$

и поле упругих смещений $\vec{u}(M, t)$ описывается в виде суммы двух слагаемых – потенциального и вихревого:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{A}, \quad (1)$$

где $\varphi(M, t)$ – скалярный потенциал, $\vec{A}(M, t)$ – векторный потенциал поля; λ, G – плотность материала и его модуль упругости; K_0 – модуль всестороннего сжатия,

$$K_0 = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu))G;$$

μ – коэффициент Пуассона.

При этом на свободной поверхности полупространства (когда координа-

та $z = 0$) рассматривается однородная система граничных условий:

$$\text{def } u_{xz} = 0, \text{ def } u_{yz} = 0, \text{ def } u_{zz} + (2\mu/(1-2\mu)) \text{div} u = 0,$$

где x, y, z – декартовы координаты точки. Здесь первые два условия означают отсутствие касательных напряжений, а третье – нормального давления. На нагруженной части поверхности последнее условие заменяют равенством

$$\text{def } u_{zz} + (2\mu/(1-2\mu)) \text{div} u = p/G,$$

где $p(x, y, t)$ – контактное давление, G – модуль сдвига.

В исследуемом случае, в силу особенностей возбуждения колебаний, девиаторная составляющая поля отсутствует не только в граничных условиях, но и во всём объёме исследуемого образца, и равенство (1) принимает вид:

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi. \quad (2)$$

Уравнению (2) отвечает граничное условие для упругого давления

$$P(x, y, 0, t) = \begin{cases} p(t), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in D, \end{cases}$$

где $p(t)$ – давление на поверхности пластины, причём скалярное поле давления и векторное поле смещений связаны известным равенством:

$$P = -K_0 \cdot \text{div} \bar{u}. \quad (3)$$

Распределение давления в упругой среде описывается волновым уравнением:

$$\Delta P = a^{-2} \cdot \partial^2 P / \partial t^2, \quad (4)$$

где a – скорость звука для продольных колебаний среды, $a^2 = \lambda / K_0$, Δ – оператор Лапласа.

Известно, что плотность λ и модуль K_0 зависят от давления, но при моделировании акустических колебаний, имеющих малую амплитуду, этой зависимостью пренебрегают. В результате все уравнения модели становятся линейными, и это позволяет предложить эффективный метод их решения.

Описанный ниже метод включает следующие основные этапы:

- находится статическое распределение давления, отвечающее точечному стационарному источнику на поверхности детали;
- находится аналитическая зависимость амплитуды колебаний давления от частоты и амплитуды колебаний точечного моногармонического источника на поверхности детали;

- по известному распределению давления восстанавливается поле смещения точек поверхности; эта задача, как и задачи двух предыдущих этапов, получает аналитическое решение;
- используется принцип линейной суперпозиции, и результаты предыдущего этапа обобщаются на случай распределённого источника моногармонических колебаний;
- при использовании известного принципа наложения решений производится суммирование волновых полей, отвечающих различным гармоникам.

Для пластины сложной (несимметричной) формы последние два этапа выполняются численно при использовании методов визуализации решения на дисплее компьютера.

Статическое поле упругого давления в объёме образца. Заметим, что искомое давление зависит от времени t и характера изменения прикладываемого напряжения, то есть является решением некоторой динамической задачи, связанной с интегрированием уравнений в частных производных. Однако, в соответствии с известным подходом к решению подобных задач (смотри, например, [4]), сначала рассматривается и решается **вспомогательная статическая задача**.

Найдем величину давления P в произвольной точке $M(x_0, y_0, z_0)$ полупространства $R^3, z \geq 0$, на поверхности которого действует известное постоянное давление P_0 , сосредоточенное в пределах малой площадки ΔD поверхности, которая расположена вблизи начала системы координат.

Воспользовавшись результатами работы [5], запишем **функцию источника** для искомого давления в точке $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$P(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2)^{3/2}} f(x, y) dx dy. \quad (5)$$

где функция $f(x, y)$ описывает распределение возбуждающего давления P_0 на поверхности полупространства (то есть, при условии $z = 0$).

Используем граничное условие

$$f(x, y) = \begin{cases} P_0, & (x, y) \in \Delta D, \\ 0, & (x, y) \notin \Delta D, \end{cases}$$

и, проинтегрировав правую часть равенства (5), получим следующее выражение для искомого давления:

$$P(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi[(x_0)^2 + (y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}} \cdot (P_0 \cdot \Delta S),$$

где ΔS – площадь фигуры ΔD .

Амплитуда волнового поля давления. Перейдём к решению динамической задачи. Пусть возбуждающее давление P_0 изменяется по закону

$$P_0 = A \sin \omega t,$$

где A – амплитуда давления на площади ΔS , ω – круговая частота.

Поскольку возбуждающее давление имеет гармонический характер, в полупространстве $z \geq 0$ будут присутствовать как вынужденные, так и сопровождающие гармонические колебания одинаковой частоты и фазы; появление сопровождающих колебаний связано с необходимостью удовлетворения сформулированного выше граничного условия

$$P(x_0, y_0, 0) = 0 \quad \text{при} \quad P(x_0, y_0, 0) \notin \Delta D.$$

В таком случае, выражение для искомого давления можно представить в виде:

$$P(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{z}{2\pi(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}} \cdot A \sin \omega t + W(x_0, y_0, z_0) \sin \omega t, \quad (6)$$

где $W(x_0, y_0, z_0)$ – неизвестная амплитудная функция, описывающая сопровождающие колебания.

Подставим выражение для искомого давления $P(M)$ в формулу (4) и получим следующее уравнение для функции $W(M)$:

$$\Delta W + \frac{1}{a^2} W = -\frac{\omega^2}{a^2} \frac{1}{2\pi} \frac{z \cdot A}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Равенство (7) является *неоднородным уравнением Гельмгольца*.

В нашей задаче это уравнение решается при однородном граничном условии $W(x, y, 0) \equiv 0$, которое должно выполняться на всей плоскости $z = 0$, в том числе, и для точки $O(0, 0, 0)$ начала координат.

Уравнение (7) имеет очевидное частное решение вида:

$$W_{\text{ч}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{z A}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{3/2}},$$

или, в сферических координатах ρ, θ, φ ,

$$W_u(\rho, \theta) = -\frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2}. \quad (8)$$

Решение (8) при $\rho \rightarrow 0$ стремится к ∞ . При нахождении окончательного решения **необходимо устранить указанную особенность**.

Для этого рассмотрим *однородное уравнение Гельмгольца*

$$\Delta W + \frac{\omega^2}{a^2} W = 0.$$

После учёта цилиндрической симметрии решаемой задачи, в сферической системе координат данное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial W}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\omega^2}{a^2} W = 0. \quad (9)$$

Применив метод Фурье [4,5], выполним разделение переменных и найдем решение уравнения (9) в виде:

$$W = R(\rho) \cdot \Psi(\theta),$$

где функции $R(\rho)$ и $\Psi(\theta)$ зависят только от одной указанной координаты.

Подставим такое решение в выражение (9):

$$\frac{(\rho^2 \cdot R'(\rho))'}{\rho^2} \Psi(\theta) + \frac{(\sin \theta \cdot \Psi'(\theta))'}{\sin \theta} \cdot \frac{R(\rho)}{\rho^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \cdot \Psi(\theta) \cdot R(\rho) = 0.$$

и разделим левую и правую часть равенства на произведение $\Psi(\theta) \cdot R(\rho)$:

$$\frac{(\rho^2 R'(\rho))'}{\rho^2 R(\rho)} + \frac{\omega^2}{a^2} + \frac{(\sin \theta \cdot \Psi'(\theta))'}{\rho^2 \sin \theta \cdot \Psi(\theta)} = 0. \quad (10)$$

Пусть функция $\Psi(\theta) = \cos \theta$, что отвечает частному решению (8). Тогда последнее слагаемое левой части можно вычислить:

$$\frac{(\sin \theta \cdot \Psi'(\theta))'}{\rho^2 \sin \theta \cdot \Psi(\theta)} = \frac{(\sin \theta \cdot (\cos \theta)')'}{\rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta} = -\frac{2}{\rho^2}.$$

Подставим полученное значение в равенство (10) и, после очевидных преобразований, получим:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0,$$

то есть,

$$R'' + \frac{2}{\rho} R' + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - \frac{2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

Приведем данное уравнение к стандартному виду, выполнив замену $\rho \cdot \omega / a = \alpha$ и помножив левую и правую части на выражение $a/(\omega\rho)$:

$$R''_{\alpha\alpha} + \frac{2}{\alpha} R'_{\alpha} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \right) R = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) часто встречается в математической физике; его фундаментальные решения имеют вид

$$R_1(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\alpha^2}, \quad R_2(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Потребуем, чтобы решение имело необходимое асимптотическое поведение при условии $\rho \rightarrow 0$, и получим:

$$R(\rho) = \frac{\cos(\rho \cdot \omega / a)}{(\rho \cdot \omega / a)^2} + \frac{\sin(\rho \cdot \omega / a)}{\rho \cdot \omega / a}.$$

Следовательно, искомая функция W имеет следующий вид:

$$W = \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot [\cos(\rho \cdot \omega / a) + (\rho \cdot \omega / a) \cdot \sin(\rho \cdot \omega / a)] \cdot C, \quad (12)$$

где C – произвольная константа.

Таким образом, имея частное решение (8) и общее решение (12), можно представить решение неоднородного уравнения Гельмгольца (7) в виде:

$$W = -\frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2} + \frac{\cos \theta}{\rho^2} \cdot [\cos(\omega \cdot \rho / a) + (\omega \cdot \rho / a) \sin(\omega \cdot \rho / a)] \cdot C.$$

Приравняв правую часть данного выражения нулю при условии $\rho \rightarrow 0$,

найдем значение константы $C = A/(2\pi)$. В результате искомая функция, опи-

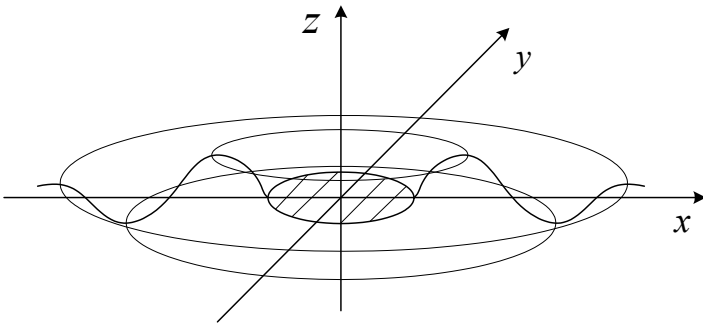


Рисунок 2 – Симметричное поле смещений поверхности.

сывающая сопровождающие колебания давления упругой среды, примет вид:

$$W = -\frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) - \frac{\omega}{a} \rho \sin\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) \right].$$

Подставив полученный результат в формулу (6), запишем выражения для давления $P(\rho, \theta, t)$:

$$P(\rho, \theta, t) = \frac{A \cos \theta}{2\pi \rho^2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) - \frac{\omega}{a} \rho \cdot \sin\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) \right] \cdot \sin \omega t. \quad (13)$$

Восстановление поля смещения по его дивергенции. Перейдем от полученного поля давлений $P(\rho, \theta, t)$ к интересующему нас полю смещений $\vec{u}(M, t)$, воспользовавшись известным соотношением (3):

$$P = -K_0 \cdot \text{div} \vec{u}.$$

Подставив в равенство (3) выражение (13) для давления, получим формулу для дивергенции:

$$-\text{div} \vec{u} = \frac{1}{K_0} P = \frac{A \cos \theta}{2\pi K_0 \rho^2} \left[\cos \frac{\omega}{a} \rho - \frac{\omega}{a} \rho \sin\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) \right] \sin \omega t.$$

Известно [6], что скалярное потенциальное поле восстанавливается по своей дивергенции соотношением

$$\bar{u}(M) = \iiint_R \frac{-\operatorname{div} \bar{u}(P)}{4\pi |\overline{PM}|^3} \overline{PM} dV,$$

где вектор \overline{PM} соединяет произвольную точку среды с точкой наблюдения $M(x_0, y_0, z_0)$. Учитывая (3), получаем:

$$\bar{u}(M) = -\frac{1}{4\pi K_0} \iiint_{z \geq 0} \frac{P(x, y, z, t)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\right)^3} dx dy dz.$$

В настоящей работе мы ограничились исследованиями колебаний поверхности детали, то есть интересующая нас точка M будет иметь координату $z_0 = 0$. Кроме того, примем, что и координата $y_0 = 0$, то есть будем рассматривать акустическую волну, распространяющуюся от центра электрода вдоль координаты x . Тогда выражение для смещения точек поверхности по направлению оси Oz примет вид:

$$U_z(x_0, 0, 0, t) = \frac{-1}{4\pi K_0} \iiint_{z \geq 0} \frac{z \cdot P(x, y, z, t)}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}\right)^3} dx dy dz, \quad (14)$$

где $P(x, y, z, t)$ – распределение давления в объеме образца.

Воспользуемся симметрией задачи (рис.2) и перейдем в интеграле (14) к сферическим координатам:

$$U_z(x_0, t) = -\frac{1}{4\pi K_0} \int_0^\infty d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos \theta \cdot P(\rho, \theta, t) \cdot \rho^2 \sin \theta}{(\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi.$$

Далее, используя формулу (13), получим:

$$U_z(x_0, t) = -\frac{A \sin \omega t}{8\pi^2 K_0} \int_0^\infty \left[\cos \frac{\omega \rho}{a} + \frac{\omega \rho}{a} \sin \frac{\omega \rho}{a} \right] \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta d\rho}{(\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}}$$

Чтобы облегчить дальнейшие преобразования, выполним замену пере-

менных $\rho = x_0 \cdot \xi$ и представим это равенство в следующем виде:

$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{16\pi^2 K_0 x_0} \int_0^\infty \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) + \left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \sin\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \right] \cdot f(\xi) \cdot \xi d\xi, \quad (15)$$

где функция $f(\xi)$ – это значение двойного интеграла,

$$f(\xi) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{(1 + \xi^2 - 2\xi \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi d\theta, \quad (16)$$

Проведем исследование интеграла (16). Заметим, что сходные интегралы возникают при описании решения волнового уравнения для внутренности сферы, где их называют *интегралами Пуассона* [5,7].

$$\text{Найдем значение } f(0) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{1} d\varphi d\theta = -2\pi \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi.$$

Несложно проверить, что $f'(0) = 0$ и $f''(0) = 0$. Численное исследование этого интеграла показало, что на интервале $0 \leq \xi \leq 1$ значение функции $f(\xi)$ остаётся постоянным, $f(\xi) = 4\pi/3$.

Найдем значение функции $f(\xi)$ для интервала $\xi > 1$:

$$f(\xi) = \frac{1}{\xi^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta}{(\xi^{-2} + 1 - 2\xi^{-1} \sin \theta \cos \varphi)^{3/2}} = \frac{1}{\xi^3} \cdot \frac{4}{3} \pi.$$

Таким образом, исследуемый интеграл принимает следующие значения:

$$f(\xi) = \begin{cases} (4\pi/3), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 4\pi/(3\xi^3), & 0 > \xi > 1. \end{cases}$$

Подставим полученные значения функции $f(\xi)$ в выражение (15):

$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{12\pi^2 k_0 x_0} \int_0^1 \xi \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) + \left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \sin\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \right] d\xi - \\ - \frac{A \sin \omega t}{12\pi^2 k_0 x_0} \int_1^\infty \frac{1}{\xi^2} \left[\cos\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) + \left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \sin\left(\frac{\omega}{a} x_0 \xi\right) \right] d\xi.$$

Введем безразмерный коэффициент $k = \omega \cdot x_0 / a$ и, интегрируя по частям, найдем значения интегралов из правой части полученного равенства:

$$\int_0^1 x(\cos kx + xk \sin kx) dx = 3 \frac{\sin k}{k} - \frac{3}{k^2}(1 - \cos k) - \cos k,$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}(\cos kx + xk \sin kx) dx = \cos k.$$

Следовательно,
$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{4\pi k_0 x_0} \left[\frac{\sin k}{k} - \frac{1 - \cos k}{k^2} \right].$$

Подставив вместо коэффициента k физические параметры среды и частоту возбуждающего давления, получим:

$$U_z(x_0) = -\frac{A \sin \omega t}{4\pi k_0 x_0} \left[\frac{\sin(\omega \cdot x_0 / a)}{(\omega \cdot x_0 / a)} - \frac{1 - \cos(\omega \cdot x_0 / a)}{(\omega \cdot x_0 / a)^2} \right].$$

Смещение поверхности при распределённом давлении. Пусть зондирующее давление имеет круговую частоту ω , амплитуду P_0 и действует на фигуру D произвольной формы. Тогда, в точке $M(x_0, y_0)$ искомого смещение поверхности в направлении её нормали будет определяться равенством:

$$U_z(M, t) = -\frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \iint_D \frac{\sin \left[\frac{\omega}{a} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]}{\frac{\omega}{a} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} dx dy +$$

$$+ \frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \iint_D \frac{1 - \cos \left[\frac{\omega}{a} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \right]}{\frac{\omega}{a} \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right)} dx dy. \quad (17)$$

При стремлении точки M к границе области D интегралы (17) становятся несобственными интегралами второго рода, и, как показал опыт использования этой формулы, численное интегрирование средствами диалогового пакета MathCAD приводит к существенной погрешности. Этой проблеме удалось избежать после перехода в формуле (17) от двойных интегралов к повторным. Пример такого перехода будет показан далее в этой статье.

Расчёт смещения для электрода прямоугольной формы. Рассмотрим в качестве электрода плоскую прямоугольную пластину размером $2a \times 2b$. Точка наблюдения акустического смещения расположена на оси Ox на рас-

стоянии R от начала координат. Воспользовавшись предыдущей формулой, запишем выражение для смещения в следующем виде:

$$U_z(R, t) = -\frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{\sin \left[k\sqrt{(x-R)^2 + y^2} \right] - 1 - \cos \left[k\sqrt{(x-R)^2 + y^2} \right]}{k\sqrt{(x-R)^2 + y^2} \sqrt{(x-R)^2 + y^2}} dx dy,$$

где K_0 – модуль сжимаемости; $k = \omega / a$ – волновое число.

Заметим, что изменив пределы интегрирования и подынтегральную функцию, можно получить аналогичное выражение для точек, попадающих на ось Oy , поскольку задача симметрична относительно осей координат.

После перехода от двойного интеграла к повторному интегралу в полярных координатах и вычисления внутренних интегралов, получаем:

$$U_z(R, t) = \frac{P_0 \sin \omega t}{2\pi K_0 \cdot k^2} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{1}{a-R} \cdot \int_0^{\arctg(b/(a-R))} \left(1 - \cos \frac{k(a-R)}{\cos \psi} \right) \cos \psi d\psi + \\ & + \frac{1}{b} \cdot \int_{\arctg(b/(a-R))}^{\pi - \arctg(b/(a+R))} \left(1 - \cos \frac{kb}{\sin \psi} \right) \sin \psi d\psi - \\ & - \frac{1}{a+R} \cdot \int_{\pi - \arctg(b/(a+R))}^{\pi} \left(1 - \cos \frac{k(a+R)}{\cos \psi} \right) \cos \psi d\psi \end{aligned} \right], \quad (18)$$

где выполнены условия $b \leq a$, $R \leq a$, то есть здесь рассматриваются точки, находящиеся под пластиной конденсатора.

Аналогичный, но несколько другой по форме результат соответствует внешней по отношению к пластине части плоскости.

Дальнейшее интегрирование производится численно при использовании соответствующих программ комплекса MathCAD. Чтобы убедиться в правильности такого подхода был изменён порядок интегрирования; оказалось, что результаты интегрирования во всех точках поверхности, в том числе и в точках границы прямоугольника, от выбора порядка не зависят.

Квазистатический предел. Если в формуле (18) устремить волновое число $k \rightarrow 0$, то мы получим квазистатическое колебание поверхности детали, отвечающее малой частоте возбуждающего давления:

$$U_z(R, t) = \frac{P_0 \sin \omega t}{4\pi K_0} \cdot \left[\int_0^{\arctg(b/(a-R))} \frac{a-R}{\cos \psi} d\psi + \int_{\arctg(b/(a-R))}^{\pi - \arctg(b/(a+R))} \frac{b}{\sin \psi} d\psi - \int_{\pi - \arctg(b/(a+R))}^{\pi} \frac{a+R}{\cos \psi} d\psi \right]. \quad (19)$$

Анализ результатов показал, что можно пользоваться более простой формулой (19) вместо формулы (18) при выполнении условия

$$k \cdot a < 0.1,$$

где k – волновое число, a – размер конденсатора. С учётом характерных размеров конденсатора, расхождение между динамической и квазистатической моделью становится существенным только лишь для частот возбуждения из ультразвукового диапазона, а также из диапазона радиочастот.

Результаты расчёта и их обсуждение. В качестве конкретного примера на рис. 3 показан график амплитудной функции $U(R)$ колебаний поверхности для электрода размером 20x20 мм. Частота возбуждения $\nu = 2 \text{ МГц}$, длина волны – 2.5 мм. Образец – стальная плита квадратной формы, имеющая размер 500x500 мм, что значительно превосходит размер пластины.

Заметим, что при столь высокой частоте результат динамического расчёта коренным образом отличается от того, который предсказывает квазистатическая модель. Анализируя графическую зависимость, можно сделать вывод, что происходит вытеснение волны на край пластины.

Следует особо подчеркнуть, что наблюдаемая на графике «складка» – это не дефект метода расчёта, а следствие разрыва граничного условия.

Можно сохранить расчётную процедуру, разработанную для прямоугольной пластины, и сгладить разрыв давления, заменив один скачок на 5 – 10 одинаковых скачков, которые происходят в приграничном слое, ширина которого соизмерима с длиной волны. При этом граница пластины заменяется системой из 5 – 10 вложенных прямоугольников. Для учёта нового граничного условия описанная выше расчётная процедура используется для каждого прямоугольника, а получающиеся решения суммируются. В результате «складка» на графике амплитуды колебаний существенно сглаживается.

Как показало расчётное исследование, поверхность, размещённая под внутренней частью пластины, испытывает относительно низкие по амплитуде колебания, софазные возбуждающему давлению. Максимальная амплитуда наблюдается вблизи границы электрода, где фаза колебаний изменяется. На расстоянии a от края пластины происходит практически полное затухание колебаний, что создаёт существенные трудности для их приёма.

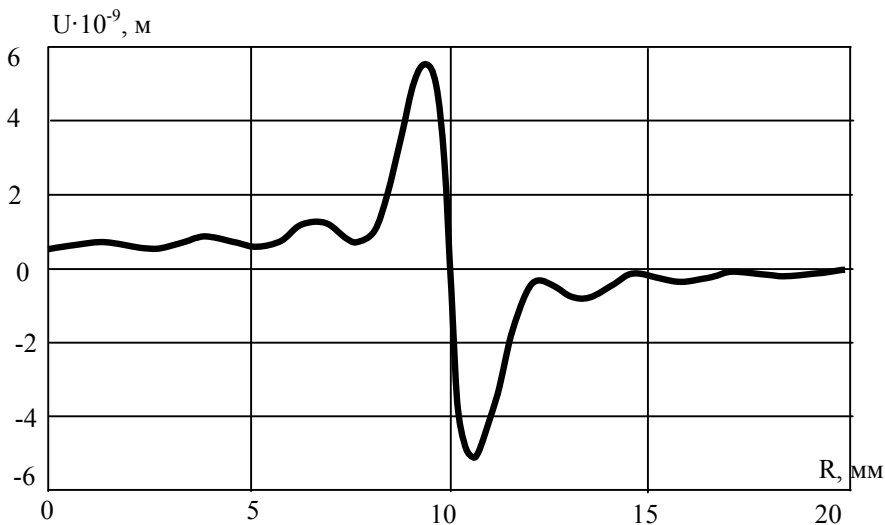


Рисунок 3 – Амплитуда упругой волны смещения на поверхности образца.

Выводы.

Составлена математическая модель для метода возбуждения акустических колебаний, основанного на использовании ёмкостного преобразователя.

Разработан метод расчёта акустических колебаний поверхности детали.

Список литературы: 1. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. В.В. Клюева. Т.3: Ультразвуковой контроль / И.Н. Ермолов, Ю.В. Ланге. – М.: Машиностроение, 2004. 2. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. – Л.: Энергия, 1969. 3. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 4. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных сотрудников и инженеров. – М.: Мир, 1985. 5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Самарский. – М.: Наука, 1972. 6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных сотрудников и инженеров). – М.: Наука, 1972. 7. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.

Поступила в редколлегию 02.09.2010

Ю.Г. ГУЦАЛЕНКО, с.н.с., НТУ «ХПИ», Харьков

**ПРОГНОЗ СЕМИКАРБИДА ВОЛЬФРАМА В
ВОЛЬФРАМОКЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТАХ ГОРЯЧЕГО
ПРЕССОВАНИЯ С ЭЛЕКТРОКОНСОЛИДАЦИЕЙ
ПОРОШКОВ НА МОНОКАРБИДНОЙ ОСНОВЕ**

Актуалізація уваги до семікарбїду вольфраму (карбїду дївольфраму) W_2C у вольфрамокерамічних композитах пояснюється виявленням тенденції збільшення вмісту W_2C за результатами швидкісного спікання щільних керамічних структур на основі карбїду (монокарбїду) вольфраму WC з нанопорошків у технологіях електроконсолїдації під тиском. У зв'язку з цим представлено модель масового прогнозу і деякі аспекти ролевого прогнозу підвищеної присутності W_2C у таких структурах.

Actualization of attention to tungsten semicarbide (ditungsten carbide) W_2C in tungstenous-ceramic composites is explained of uncovered tendency of W_2C content gain after rapid sintering of compact ceramic structures on the base of tungsten carbide (monocarbide) WC from nanopowders technology-based on electroconsolidation under pressure. Model of mass forecast of W_2C heightened presence in this structures is presented in connection with that.

Введение. Высокие износостойкость, сопротивляемость термоудару и устойчивость к окислению составляют основу уникального комплекса эксплуатационных свойств карбида вольфрама [1-3]. Он является самым твердым бинарным карбидом, сохраняющим эффективный уровень свойств при температурах порядка 1000 °С. Поэтому вольфрамокарбидная основа остается объектом повышенного внимания в современном развитии наноматериалов инструментального назначения.

Полиморфизм W_2C_x , известный сопутствием практическим реализациям монокарбидных WC технологий, достаточно изучен. Свойства семікарбїда W_2C и их сопоставление со свойствами основного монокарбїда WC нашли свое отражение в фундаментальных исследованиях, например [4-7]. Однако ставшее привычным относительно небольшое присутствие W_2C в керметах на вольфрамокарбидной основе (как правило, менее 3 мас. %), хотя и находит свое отражение в научно-технической литературе в связи с эксплуатационными свойствами керметов [1, 7, 8], но практически вне должного внимания в учебной литературе последнего десятилетия [3, 9], тем более вовсе вне предметного анализа как потенциального резерва управления свойствами конечных продуктов, в особенности инструментального назначения, в регулируемых процессах спекания, в особенности с многопараметрическим комбинированным воздействием механического давления и электрического тока [10-13].

Осознание современной актуализации и следующей из нее необходимости исследований в этом направлении и явилось побудительным мотивом, подвигнувшим автора к этой работе.

Постановка и актуализация проблемы. Согласно обобщению [14], плотность нанокристаллических материалов, полученных разными методами компактирования нанопорошков, составляет от 70-80 до 95-97 % от теоретической. Как известно [15, 16], обеспечение высокоплотных высокодисперсных структур является основной задачей современного наноструктурного материаловедения, в том числе в производстве инструментальной керамики.

Исследованиями, выполняющимися в последние годы в Харькове совместными усилиями специалистов УкрГАЗТ, ХНУ, НТУ «ХПИ» под руководством профессора Э.С.Геворкяна [13], развивается прогрессивный метод горячего прессования порошковых сред с прямым токоподводом к ним. Практические реализации этого метода особенно эффективны в получении высокоплотных керамических структур в субмикро- и наноразмерном диапазоне [17-22].

На смену представлениям о межкристаллитных структурах в наноматериалах, как о разупорядоченных, не имеющих не только дальнего, но и ближнего порядка размещения атомов, а потому даже получивших название газоподобных (*gas-like structure*, [23-25]), пришло подтвержденное современными методами исследования, в том числе электронной микроскопией высокого разрешения [26], анализом экспериментальных данных по рентгеновской дифракции и рентгеновской абсорбционной спектроскопии [27, 28], представление об аналогичной обычным поликристаллам картине подчинения атомов границ раздела влиянию только двух соседних кристаллитов. При этом в консолидированных продуктах поры обнаруживались только в тройных стыках (зоны τ_2 по рис. 1), а не по всей протяженности границ раздела; плотность атомов в межкристаллитных границах оказалась практически такой же, как в кристаллитах.

Методом структурных исследований по аннигиляции позитронов (продлению времени их жизни захватом вакансиями, вакансионными скоплениями (нанопорами) или порами, рис. 1, по сравнению с пребыванием в бездефектных структурах) [29] определены три типа свободных объемов как дефектов внутренней структуры неплотно компактированных нанокристаллических материалов: отдельные вакансии; вакансионные агломераты или нанопоры, образующиеся в тройных стыках кристаллитов; большие поры на месте отсутствующих кристаллитов.

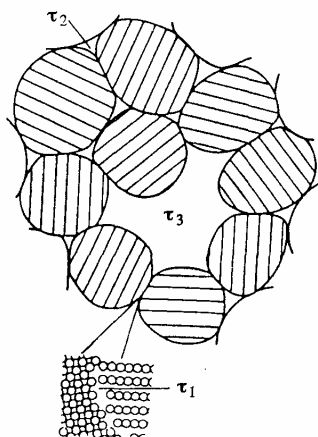


Рисунок 1 – Двумерная модель нанокристаллического материала с микроскопически свободными объемами, обнаруживаемыми методом аннигиляции позитронов [30]: вакансии в границе раздела (время жизни позитрона τ_1); вакансионный агломерат (нанопора) в тройном стыке кристаллитов (τ_2) и большая пора (τ_3) на месте отсутствующего кристаллита [14].

Это позволяет рассматривать неплотные консолидаты (в том числе с участием исходных порошков различной зернистости в микро-, субмикро- и нанодиапазоне) с позиций единого представления о типичных дефектах, моделировать их и априорно выстраивать пути развития наноматериалов и нанотехнологий из соответствующих имитационных подходов. В поддержку подобных рассмотрений свидетельствуют, например, данные [31], также полученные методом аннигиляции позитронов в компактированных средах и подтверждающие сходство микроstructures нано- и субмикрокристаллических материалов, в частности, наличие в них свободных объемов одинакового типа.

При этом очевидно, что обнаруживаемые в тройных стыках поры (уже упоминавшиеся выше зоны τ_2 по рис. 1) являются наследием исходной несплошности спекаемой насыпки, трансформирующейся в поры неплотного конечного продукта.

В предыдущих работах с участием автора предпринимались (и продолжают предприниматься) попытки уменьшить эффект исходной несплошности (а с ним или неплотность конечного продукта, или время достижения ранее обеспечиваемой плотности) введением в консолидируемую порошковую смесь порошковых добавок уже присутствующих в ней химических составов, но меньшей зернистости.

При этом объемно-геометрические решения принимаются из определенных представлений о геометрии зерен исходного порошка (равноразмерных сферических или, в общем случае, подчиняющихся заданным форморазмерным распределениям).

Первые результаты формирования керамических композитов инструментального назначения на основе монокарбида вольфрама WC с использованием изложенного выше принципа, полученные с участием автора, оказались положительными и притом соответствующими априорной логистике. Однако проявился и незапланированный эффект повышенного содержания семикарбида W_2C в конечном продукте, увеличение которого (мас. %) оказалось примерно соответствующим увеличению площади межзеренных границ в исходной порошковой смеси, включающей частичное замещение ее относительно крупнозернистого участника его химически идентичным относительно мелкозернистым аналогом. При этом частицы каждой зернистости рассматриваются как равноразмерные сферы. Электрофизикохимическому феномену увеличения присутствия семикарбида вольфрама W_2C в конечном продукте на основе монокарбида вольфрама, получаемом электроспеканием под давлением [13, 17-22], предполагается уделить отдельное внимание. Здесь же, по результатам предыдущих исследований, позволивших установить определенную связь генезиса экспансии W_2C в основанных на WC керамических продуктах электроконсолидации под давлением, будет, во-первых, предложена расчетная схема прогноза экспансии W_2C в таких технологиях. Во-вторых, в связи с повышением ролевого участия W_2C в результирующих свойствах системы WC– W_2C , – выполнено сопоставление свойств с выделением наиболее значимых механических, тепловых и электрических контрастов в свойствах моно- и семиформного участников рассматриваемого вольфрамокарбидного симбиоза.

Массовый прогноз. Процессы электроконсолидации порошковых сред под давлением по своей природе, в значительной мере определяемой электроразрядной спецификой, особенно чувствительны к изменению площади зеренных границ консолидируемых порошков, являющихся как бы подмостками в театре электроразрядных действий, на которых эти действия собственно и происходят. В предположении прямой пропорциональности выхода фаз W_2C_x от суммарной площади зеренных границ консолидируемой порошковой смеси можно рассмотреть приближенную модель влияния исходного привнесения нанодобавок в обычные порошковые среды, подготавливаемые для электроконсолидации (в общем случае – привнесения группировки частиц меньшего размера, например, в субмикронном диапазоне, к основному порошку большего размерного уровня, например микронного).

Определим далее в качестве оценки такого влияния коэффициент изменения (вариации) количественного присутствия фаз W_2C_x , который иденти-

фицируем как $k_{\text{var}} W_2 C_x$. Очевидно, что в контексте выдвинутого предположения о прямой пропорциональности можем записать:

$$k_{\text{var}} W_2 C_x = m k_s + (1 - m), \quad (1)$$

где m – концентрация добавки в химически идентичной насыпке; $0 < m < 1$ в нетривиальных случаях (ненулевых в смысле участия добавки, $m \neq 0$, и в смысле присутствия в насыпке основного порошка, $m \neq 1$);

k_s – коэффициент изменения площади поверхности зерен в единице массы или объема, причем объема – в чистом безвоздушном измерении, обеспечивая тем самым индифферентность выбора ввиду равнозначности

$$k_{\text{var}} W_2 C_x^{(\text{мас.})} = k_{\text{var}} W_2 C_x^{(\text{об.})}.$$

Из преобразования (1) к более удобному виду

$$k_{\text{var}} W_2 C_x = 1 + m(k_s - 1) \quad (2)$$

следует, что в интервале $0 < m < 1$ $k_{\text{var}} W_2 C_x > 1$ при $k_s > 1$, т. е. в рассматриваемом нами случае нанодобавок следует ожидать увеличения выхода $W_2 C_x$ в конечном продукте.

Именно такой результат и был получен нами в опытной практике, когда выход фаз $W_2 C_x$ составил примерно 5-8 мас. % по сравнению с выходом в размере 2-3 мас. % тех же структур при спекании традиционного сплава ВК8.

Исходя, например, далее из простой и максимально энергетически устойчивой сферической (строго говоря, в кристаллографических описаниях, квазисферической) модели элементарного зерна порошка, при имитации зерен равноразмерными сферами:

$$k_s = d_{1-m} / d_m, \quad (3)$$

где d_{1-m} и d_m – диаметры зерен основного порошка (d_{1-m}) и добавки (d_m).

Подстановкой (3) в (2) получаем:

$$k_{\text{var}} W_2 C_x = 1 + m \left(\frac{d_{1-m}}{d_m} - 1 \right), \quad (4)$$

или, в частном случае, когда зерна вводимой добавки на один порядок (в 10 раз) меньшего размера, чем зерна основного порошка, как это имело место как раз в приведенной выше для примера опытной практике,

$$k_{\text{var}} W_2 C_x = 1 + 9m \quad (5)$$

Тогда, приближенно оценивая привнесенные 15 мас. % нанокарбида WC в основную рецептуру BK8 как 1/6 всего содержания карбида вольфрама в ней, как это имело место в той же, приведенной выше практике, в контексте представленных выкладок из (5) следовало бы ожидать $k_{\text{var } W_2C_x} = 2,5$, что при базовом значении 2-3 мас. % фаз W_2C_x в реализации основной технологии означает ожидание 5-7,5 мас. % фаз W_2C_x в рассматриваемой экспериментальной, что практически идентично объявленным выше 5-8 мас. %, установленным рентгенографически.

Очевидно, что предложенная расчетная зависимость (4), рис. 2, нуждается в дополнительных проверках в широком диапазоне варьирования управляющими воздействиями в параметрическом технологическом базисе электроконсолидации под давлением, абсолютными значениями d , а также соотношением d_{1-m} / d_m .

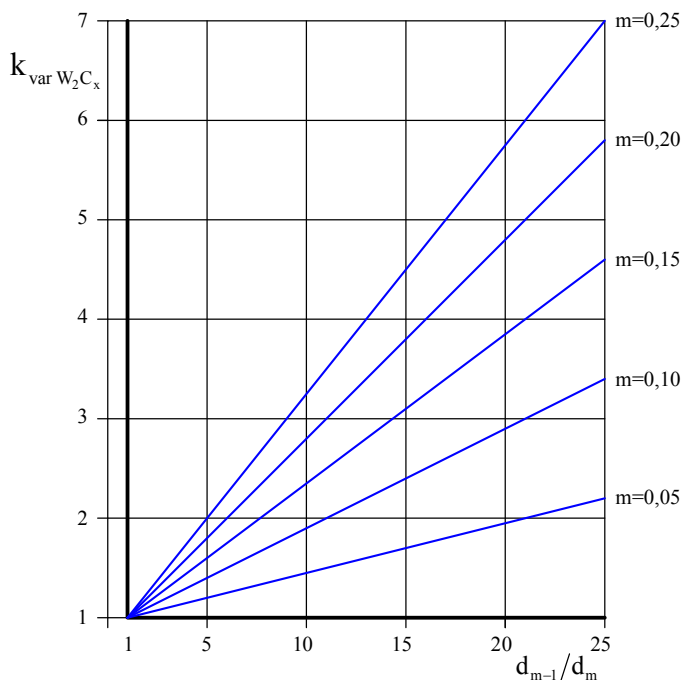


Рисунок 2 – Прогностические прямые $k_{\text{var } W_2C_x}$ увеличения присутствия фаз W_2C_x в системе WC– W_2C с увеличением присутствия фракции зернистости $d_m < d_{1-m}$ в зависимости от концентрации m .

Кроме этого, в перспективной работе с наноразмерными порошками, зерна которых характеризуются d порядка ~ 10 нм и менее, следует учитывать вероятность вовлечения в электроразрядную наследственность большей части или даже всего объема зерна, что приводит к заметному локальному деформированию относительной равномерности распределения фаз W_2C (и, соответственно, свойств) в общей системе $WC - W_2C$. Все большего значения и влияния на межкристаллитные взаимодействия, в том числе и электроразрядные, с уменьшением размеров зерен, особенно до тех же d порядка ~ 10 нм и менее, следует, по-видимому, ожидать от состояния межкристаллитных (межзеренных) границ. Как известно, их ширина в плотных структурах, определяемая разными методами на различных нанокристаллических материалах, практически индифферентна размеру кристаллита и составляет от 0,4 до 1,0 нм [32-35]. При этом значимым является не только наличие или отсутствие пор в межкристаллитных границах, но и их чистота, поскольку ее нарушения в определенных ситуациях применения электроконсолидации под давлением признаются провокаторами и объектами электроразрядных воздействий [36, 37], в самом процессе взаимного скольжения друг по другу в ходе компактирования, по-видимому, реализующихся по типу искровых разрядов в диэлектриках [38], по границе раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью [39] или электроэрозийных скользящих электрических контактов [40] в токопроводящих порошках, в том числе оксидированных диэлектрической пленкой [41].

Ролевой прогноз. Присутствие вольфрама в составе металлосодержащих материалов контактных поверхностей, особенно повышенное, привычно ассоциируется с повышенной твердостью и износостойкостью. Широко известны его применения в качестве основы твердых сплавов, а также в технологиях износостойких наплавочных покрытий на металлические поверхности (в частности, в виде сплава W и W_2C) [42-45].

Однако двухвольфрамовый карбид W_2C , несмотря на вольфрамовую доминанту и 10 %-ную прибавку в плотности, не только не превосходит монокарбид WC по твердости, а даже несколько уступает ему, табл. 1.

Из данных натурного исследования и данных объемной стехиометрии по сумме атомных объемов компонентов, по рекомендации [4] в аналитических расчетных приближениях карбидов вольфрама включающей данные по углероду в более плотной, соответствующей гранцентрированной кубической (алмазной) системной модификации, в реальности молекулярный объем семикарбида W_2C уступает расчетному (номинальному) ожиданию в большей степени (на 2,3 %), чем в случае монокрбида WC (на 1,2 %), табл. 2, что солидаризируется с данными энциклопедического источника [46] о величине теплового эффекта экзотермических реакций: в термодинамической системе образования α - W_2C в относительном W_2C - WC сопоставлении он заметно

больший, примерно в соотношении 4:3 (47,2 кДж/моль у α - W_2C против 35,2 кДж/моль у α - WC , табл. 1).

Таблица 1

Некоторые свойства α -карбидов вольфрама [46]

Показатель	$\alpha - W_2C$	$\alpha - WC$
Параметры гексагональной кристаллической решётки, нм:	a	0,2992
	c	0,4722
Плотность, г/см ³	17,2	15,6
Твёрдость по Роквеллу, МПа	800	810
Модуль Юнга, ГПа	428	720
Теплота (стандартная энтальпия) образования ($\Delta H_{обр}^0$), кДж/моль	-47,2	-35,2
Стандартная энтропия (S_{298}^0), Дж/(моль•К)	11,70	8,98
Термический коэффициент линейного расширения, 10 ⁻⁶ /К	1,2	3,9
Теплопроводность, Вт/(м•К)	29,3	29,3
Электрическое удельное сопротивление, 10 ⁻⁷ Ом/м	7,6	1,92
Температурный коэффициент электрического сопротивления, 10 ⁻³ /К	1,95	0,495

Таблица 2

Некоторые линейные и объёмные характеристики карбидов вольфрама [4]

Показатель		W_2C	WC	
Параметры гексагональной кристаллической решётки	a	0,299	0,294	
	c	0,472	0,286	
Плотность, г/см ³		17,15	15,52	
Молекулярный объём, 10 ⁻³ нм ³	Фактический		22,1	12,94
	Номинальный (расчёт)	W	9,53	9,53
		C (алмаз)	3,57	3,57
		n	2	1
		$nW + C$	22,63	13,1
Кратчайшие межатомные расстояния, нм		$W - C$	0,215	0,222
		$W - W$	0,278	0,286
		$C - C$	0,299	0,286

Отметим, что использование по [4] в расчетах молекулярных объемов W_2C и WC данных в части углерода, соответствующих его наиболее плотной кубической аллотропной модификации, сочетаются с рассмотрением в целом параметров гексагональной α -формы кристаллической решетки карбида вольфрама. Кубическая β -форма из очевидных практических соображений здесь в расчет не принимается, поскольку температурный порог устойчивости этой формы ограничивается снизу далекой от практических применений температурой $2525^\circ C$ [42].

В линейных характеристиках кратчайших межатомных расстояний [4] привлекают внимание выделенные здесь два обобщающих момента.

Первый заключается в наблюдаемых в W_2C более коротких внутриатомных связях $W-C$ и $W-W$, чем это имеет место в WC . Казалось бы, следует ожидать повышенных физико-механических характеристик, например, большей твердости, к тому же от более плотного, как уже отмечалось выше, W_2C . Однако, по-видимому, в этом конкурентном $WC - W_2C$ противостоянии определяющей является теснота межмолекулярных связей. По приводимому [4] кратчайшему $C-C$ межатомному расстоянию оно выше как раз у W_2C (табл. 2), по твердости не превосходящего WC , а по прочности сильно ему уступающему (табл. 1).

Второй момент состоит в том, что интервал рассеивания кратчайших межатомных расстояний, приводимых [4] ($W-C$, $W-W$, $C-C$; табл. 2), у WC заметно меньше (от 0,222 до 0,286 нм, т. е. 64 нм), чем у W_2C (84 нм). По-видимому, это обстоятельство послужило в пользу большей прочности WC , причем это увеличение прочности в оценке соотношением модулей Юнга (720/428, табл. 1) примерно соответствует обратному соотношению квадратов приведенных диапазонов рассеяний ($84^2/64^2$).

Таким образом, с точки зрения формирования основных физико-механических свойств твердого тела, характеристики архитектуры кристаллической решетки монокарбида WC оказались более гармоничными, чем архитектурный рисунок семикарбида W_2C . По-видимому поэтому с появлением и повышением содержания семикарбида W_2C от инструментальных материалов на основе карбида вольфрама WC не приходится ожидать облегчения эксплуатационных трудностей в прочностном направлении.

С другой стороны, больший уровень энтропии определенного состояния одной и той же системы, как известно [38], свидетельствует о большем уровне ее термодинамической устойчивости в этом состоянии. В этом плане в системе $W-C$ семикарбид W_2C несколько выигрывает у монокарбида WC ; в стандартных условиях ($T=298^\circ K$, $P=0,1$ МПа) – примерно на 30% (табл. 1).

Чтобы читатель имел возможность самостоятельно оценить правомерность используемого здесь обращения к данным более чем восьмидесятилетней давности [4], которые с точки зрения автора являются весьма полезными для сопоставительного WC–W₂C анализа свойств, в табл. 1 и 2 намеренно приводятся разделенные более чем полувековой дистанцией представления о параметрах гексагональной кристаллической решетки и плотности в интерпретациях [4] (1929 г.) и [46] (1988 г.). Разночтения после адекватно значимых приближений наблюдаем в отношении половины из этих численных оценок, но они не превышают 0,6-1,0%. А ведь если вернуться в атмосферу материаловедческой литературы старого света к концу 1928 года, вошедшей в обзор [4], то в ней еще, например, обсуждается объявленное (Ruff and Wunsch), но не подтвержденное рентгенографическими исследованиями существование трехвольфрамового карбида... Тем большую ценность представляет используемый здесь как дополнительный источник, аккуратный своей ответственностью обобщающий справочный труд М. Нейбургера в русскоязычном переводе [4], впервые опубликованный в 1929 году в Штутгарте ("Röntgenographie der metalle und ihrer legierung"), в котором отдельное и весьма подробное внимание уделено автором системе вольфрам–углерод.

В подтверждение неизбежности некоторого разброса приводимых здесь по [4] и [46] экспериментальных данных, а с тем и основательности М. Нейбургера [4] (см. табл. 2), без комментариев представим здесь для дополнительного сопоставления данные, как наиболее достоверные по их мнению, приведенные Р. Киффером (Австрия) и П. Шварцкопфом (США) в совместном фундаментальном исследовании, используемом здесь в переводе с немецкого [5] оригинальной монографии "Hartstoffe und Hartmetalle" (R. Kieffer und P. Schwarzkopf), почти одновременно вышедшей в свет летом 1953 г. в Германии и США. Соответственно для WC и W₂C: $a=0,2900$ и $0,298$ нм, $c=0,2831$ и $0,471$ нм, действительная плотность $15,5 - 15,7$ и $17,2$ г/см³.

Следует заметить, что отмеченная выше относительная прочностная несостоятельность семикарбида W₂C в сравнении с монокарбидом WC (по модулю продольной упругости α -W₂C уступает α -WC почти в 1,7 раза [46]) является лишь одним из весьма заметных возмущений равномерности в системе физико-механических, тепло-, электрофизических и других свойств в объеме вольфрамовой карбидной керамики с изменением ее структуры от монокарбида WC к поликарбидной композиции WC – W₂C, табл. 1.

W₂C и WC, как это следует из данных об их теплопроводности по табл. 1, при нормальных условиях находятся в состоянии абсолютного теплофизического паритета. Однако при термических нагружениях, например,

сопровождающих механические в инструментальных применениях, наблюдаемая из табл. 1 значительная разница в термических коэффициентах линейного расширения может выступать самостоятельным фактором, провоцирующим трещинообразование, проявляющимся тем значительней, чем больше содержание W_2C в общем $WC - W_2C$ объеме. Наблюдаемое формирование повышенного содержания W_2C в продуктах спекания нанопорошков WC электроконсолидацией под давлением следует поэтому оценивать и, соответственно, управлять этим формированием, с особым вниманием с позиций возможных эксплуатационных последствий.

В электрофизическом плане следует обратить внимание, что семикарбид W_2C вчетверо превосходит свой монокарбидный WC -аналог и по электрическому удельному сопротивлению в нормальных условиях, и по температурному коэффициенту электрического сопротивления, т. е. в темпе роста сопротивления в термических нагрузениях. Поэтому повышенное содержание W_2C обещает значительное ослабление электропроводности, особенно при повышенных температурах эксплуатации композитов на вольфрамокарбидной основе.

Заключение. Карбидные соединения W_2C_x с повышенным содержанием вольфрама против монокарбида WC , как это следует из выполненного сопоставительного анализа свойств в паре карбидов вольфрама $WC - W_2C$, вносят определенный диссонанс в прогностические характеристики поведения конечных продуктов нанопорошкового WC -спекания, основанные на свойствах монокарбида WC . Наиболее значимы отличия W_2C от WC по прочности (W_2C существенно проигрывает), тепловому расширению (W_2C заметно отстает) и электрическому сопротивлению (W_2C намного превосходит, особенно с ростом температуры). Выделенные прочностной, тепловой и электрический факторы влияния ограничивают эксплуатационные возможности инструментальных керметов на основе монокарбида WC с повышенным содержанием W_2C : прочностной – механическое нагружение, тепловой – термическое нагружение, электрический – применение электротехнологий с токоподводом в зону обработки. Определение численных характеристик показателей твердотельного спеченного объединения $WC - W_2C$ в зависимости от содержания в нем W_2C требует специальных исследований. Целесообразность проведения таких исследований определится из весомости экономической подоплеки проведения ускоренного спекания электроконсолидацией под давлением, электрофизикохимические особенности и эффекты которого приводят к повышенному присутствию W_2C в конечном продукте.

Важным ресурсом обеспечения приемлемого паритета экономических интересов производителя и потребителя инструментальной керамики на основе WC в связи с этим остается продолжение исследований процесса спекания нанопорошков электроконсолидацией под давлением, поиск рациональных сочетаний ступенчатых циклограмм по току, температуре и давлению в управляемом цикле спекания, с маневром исходной зернистостью порошка, его чистотой, вольт-амперной и частотной характеристиками токоподвода, средой в камере спекания и т. д.

Список литературы: 1. Самсонов Г.В., Упадхая Г.Ш., Нейшор В.С. Физическое материаловедение карбидов. – К.: Наук. думка, 1974. – 455 с. 2. Болгар А.С., Турчанин А.Г., Фесенко В.В. Термодинамические свойства карбидов. – К.: Наук. думка, 1973. – 270 с. 3. Панов В.С., Чувилин А.М. Технология и свойства спеченных твердых сплавов и изделий из них: Учеб. для вузов. – М.: МИСИС, 2001. – 428 с. 4. Нейбургер М. Рентгенография металлов и сплавов / Пер. с нем. – Л.: Госхимтехиздат, Ленингр. отд-ние, 1932. – 223 с. 5. Киффер Р., Шварцкопф П. Твердые сплавы / Пер. с нем. – М.: Металлургиздат, 1957. – 664 с. 6. Самсонов Г.В., Уманский Я.С. Твердые соединения тугоплавких металлов. – Изд-во лит. по чер. и цв. металлургии, 1957. – 388 с. 7. Третьяков В.И. Основы металловедения и технологии производства спеченных твердых сплавов. – М.: Металлургия, 1976. – 527 с. 8. Чапорова И.Н., Чернявский К.С. Структура спеченных твердых сплавов. – М.: Металлургия, 1975. – 248 с. 9. Либенсон Г.А. Производство порошковых изделий: Учеб. для техникумов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Металлургия, 1990. – 240 с. 10. Groza J.R. Field Assisted Sintering // Powder Metallurgy. – 1998. – Vol.7. – №2. – PP. 583-589. 11. Tokita M. Mechanism of Spark Plasma Sintering // J. Material Science. – 2004. – Vol.5. – №45. – PP. 78-82. 12. Dense nanostructured materials obtained by Spark Plasma Sintering and Field Activated Pressure Assisted Synthesis starting from mechanically activated powder mixtures/F. Bernhard, S. Le Gallet, N. Spinassou et al. // Science of Sintering. – 2004. – №36. – PP. 155-164. 13. Геворкян Е.С. Щільні та поруваті конструкційні матеріали з нано- та субмікронних порошоків WC, Al₂O₃ і SiC поліфункціонального призначення: дис. ... д-ра техн. наук: 05.17.11 – Технологія тугоплавких неметалічних матеріалів. – Харків, 2008. – 289 с. 14. Гусев А.И., Ремпель А.А. Нанокристаллические материалы: методы получения и свойства. – Екатеринбург: УрО РАН, 1998. – 199 с. 15. Гусев А.И., Ремпель А.А. Нанокристаллические материалы. – М.: Физматлит, 2001. – 224 с. 16. Nanostructured Materials: Processing, Properties and Potential Applications / Ed. by C.C. Koch. – Norwich, N.Y., U.S.A.: Noyes Publications, William Andrew Publishing, 2002. – 612 p. 17. Sintering of Al₂O₃ and WC powders activated by electric field / E.S. Gevorkyan, Yu.G. Gutsalenko, V.A. Chishkala, A.P. Khrishtal // Proceedings of the 5-th International Conference "Research and Development in Mechanical Industry" RaDMI 2005 4-7 Sept. 2005, Vrnjacka Banja, Serbia and Montenegro. – PP. 694-696. 18. Активоване електричним полем спікання порошкової кераміки Al₂O₃ і WC / С.С. Геворкян. Ю.Г. Гуцаленко, В.О. Чушчала, А.П. Хришталь // Высокие технологии: тенденции развития. Материалы XIV междунар. науч.-техн. семинара, 12-17 сент. 2005 г. – Харьков-Алушта: НТУ „ХПИ“, 2005. – С. 31-32. 19. Gevorkyan E.S., Gutsalenko Yu.G. Electrically activated hot pressing behavior of Al₂O₃ and WC nanopowders // 8-th International Conference "Research and Development in Mechanical Industry" RaDMI 2008 14-17 Sept. 2008, Uzice, Serbia: Proceedings on CD-ROM. – PP. 198-201. – ISBN 978-86-83803-24. 20. Геворкян Э.С., Гуцаленко Ю.Г. Особенности формирования тугоплавкой керамики из нанопорошков Al₂O₃ и WC прессованием с прямым электронагревом // Физические и компьютерные технологии: Тр. 14-й Междунар. науч.-техн. конф., 24-25 сент. 2008 г. – Харьков: ХНПК „ФЭД“, 2008. – С. 174-178. 21. Геворкян Э.С., Гуца-

ленко Ю.Г. Некоторые закономерности горячего прессования нанопорошков монокристаллического вольфрама // Вісн. Нац. техн. ун-ту "Харк. політехн. ін-т". Темат. вип.: Технології в машинобудуванні. – 2008. – №35. – С. 44-48. **22.** Геворкян Э.С., Гуцаленко Ю.Г. Подбор оптимальных режимов горячего прессования нанопорошковых смесей $Al_2O_3 - WC$ для инструментальных применений / Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2010. – №5/1(47). – С. 13-18. **23.** Birringer R., Gleiter H. // Encyclopedia of Material Science and Engineering Suppl. V.1 / Ed. R.W.Cahn. Oxford, 1988. P. 339. **24.** Gleiter H. // Progr. Mater. Sci. 1989. V.33, No.4. P. 233. **25.** Zhu X., Birringer R., Herr U., Gleiter H. // Phys. Rev. B. 1987. V.35, No.17. P. 9085. **26.** Ishida Y., Ichinose H., Kizuka T., Suenaga K. // Nanostruct. Mater. 1995. V.6, No.1-4. P. 115. **27.** Loffler J., Weissmuller J., Gleiter H. // Nanostruct. Mater. 1995. V.6, No.5-8. P. 567. **28.** Weissmuller J., Loffler J., Kleber M. // Nanostruct. Mater. 1995. V.6, No.1-4. P. 105. **29.** Лановок В.Н., Новиков В.И., Свирида С.В. и др. // ФТТ. – 1983. – Т.25, №6. – С. 1846. **30.** Schaefer H.-E. // Mechanical Properties and Deformation Behaviour of Materials Having Ultrafine Microstructure / Ed. M.A.Nastasi. Netherlands, Dordrecht, 1993. P. 81. **31.** Wurschum R., Greiner W., Valiev R.Z. et al. // Scripta Metall. Mater. 1991. V.25, No.11. P. 2451. **32.** Wunderlich W., Ishida Y., Maurer R. // Scripta Metall. Mater. 1990. V.24, No.2. P. 403. **33.** Tomas G.J., Siegel R.W., Eastmen J.A. // Scripta Metall. Mater. 1990. V.24, No.1. P. 201. **34.** Mutschele T., Kirchheim R. // Scripta Met. 1987. V.21, No.2. P. 135. **35.** Schaefer H.-E., Kisker H., Kronmuller H., Wurschum R. // Nanostruct. Mater. 1992. V.1, No.6. P. 523. **36.** Anderson K.R., Groza J.R. Surface Oxide Debonding in Field Assisted Powder Sintering // Mater. Sci. Engin. – 1990. – №27. – PP. 278-282. **37.** Guicciardi S. Composition Dependence of Mechanical and Wear Properties of Electroconductive Ceramics // Порошковая металлургия. – 1999. – №3-4. – С. 32-41. **38.** Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 928 с. **39.** Особенности скользящего разряда по границе раздела диэлектриков с различной диэлектрической проницаемостью / В.К. Бакин, Г.П. Кузьмин, И.М. Минаев, А.А. Рухадзе, Н.Б. Тимофеев // Прикладная физика. – 2005. – № 6. – С. 54-59. **40.** Намитоков К.К. Электроэрозионные явления. – М.: Энергия, 1978. – 456 с. **41.** Иванов В.А., Копышев М.Е., Сахаров А.С. Возбуждение микроплазменных разрядов на металлах с диэлектрической пленкой // Прикладная физика. – 2006. – №6. – С. 114-121. **42.** Химический энциклопедический словарь / Гл. ред. И.Л. Кнунянц. – М.: Сов. энциклопедия, 1983. – 792 с. **43.** Самсонов Г.В., Винницкий И.М. Тугоплавкие соединения: Справочник. – М.: Металлургия, 1976. – 560 с. **44.** Креймер Г.С. Прочность твердых сплавов. – М.: Металлургия, 1971. – 247 с. **45.** Рыжов Э.В., Клименко С.А., Гуцаленко О.Г. Технологическое обеспечение качества деталей с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1994. – 180 с. **46.** Вольфрама карбиды / А.Н.Пилянкевич // Химическая энциклопедия: В 5 т.: т.1. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – С. 420-421.

Поступила в редколлегию 15.09.2010

С. Д. ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО, ст. преп., НТУ «ХПИ», Харьков

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ L-ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КАК НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

В роботі розглянуто абстрактні функції, задані на групі зі значеннями в просторі Фреше. Введено визначення абстрактної L – майже періодичної функції, котра не обов'язково є неперервною. Сформульоване узагальнення теореми А. Вейля для таких функцій. Доведено, що будь яка L – майже періодична функція неперервна на групі у спеціальній топології, та що будь яка функція, котра неперервна у цій топології, є такою. Така спеціальна топологія існує для нескінченної множини указаних функцій.

The abstract (vector-valued) functions defined over a group with values in Freshet space were considered. A definition of vector-valued L -almost periodic function, that are not obligatory continuous has been introduced. Generalization of theorem A. Weyl for L -almost periodic functions with rang in a Freshet space is formulated. It is proven that any L -almost periodic function is continuous over the group in special topology and any function which is continuous in this special topology is L -almost periodic function. This special topology exists for infinite set of L -almost periodic functions.

Введение. Анри Вейль [8] показал, что на любой группе G можно ввести топологию τ так, чтобы множество числовых почти периодических функций /п.п.ф./ на группе совпадало с множеством сужений на G непрерывных на компактификации \overline{G}_τ функций. Кроме того, для данной почти периодической функции f на G можно ввести метризуемую топологию τ_1 на G так, чтобы f была сужением на G некоторой непрерывной на компактификации \overline{G}_{τ_1} функции; при этом сужение на G любой непрерывной на \overline{G}_{τ_1} функции является почти периодической функцией на G .

В 1938 году Б. М. Левитан [2,3] вводит новый класс числовых комплекснозначных почти периодических функций, определенных на числовой оси. В. А. Марченко [4] заметил, что L -почти периодические функции представляют собой все непрерывные функции на некотором хаусдорфовом пространстве, полученном введением на числовой оси особой топологии.

Б. Я. Левин [1] привел новое определение L -почти периодических функций, заданных на произвольной σ -компактной группе и доказал основные положения теории почти периодических функций. В частности, он показал, что на аддитивной группе вещественных чисел R можно ввести топологию более слабую, чем евклидова так, что эта группа плотно вкладывается в компактную группу (G, Z) со следующим свойством: множество L - почти периодических функций на R совпадает с сужением на R множества непрерывных

функций на G . Таким образом, было получено обобщение теоремы Анри Вейля.

А. Райх [6] ввел новое определение числовой комплекснозначной L -почти периодической функции, определенной на топологической группе, обобщил теорему А. Вейля, успел найти связь между L -почти периодическими и почти автоморфными функциями.

Целью настоящей статьи является обобщение теоремы Вейля на абстрактные L -почти периодические функции со значениями в пространстве Фреше Y . Вместе с этим покажем, что любая функция, непрерывная в специальной топологии, является L -почти периодической функцией. Данная статья является продолжением работы автора [5] об обобщении теоремы А. Вейля для абстрактных почти периодических функций.

Элемент h группы G будем называть периодом функции $f(t): G \rightarrow Y$, если выполняется следующее условие

$$f(saha^{-1}t) = f(st), \quad \forall s, t \in G, \quad \forall a \in G.$$

Множество периодов функции образует нормальную подгруппу H группы G . Поэтому функцию в дальнейшем можно рассматривать как функцию без периодов, иначе ее можно рассматривать как определенную на факторгруппе G/H .

Множество U называется относительно плотным множеством на группе G , если существует n элементов x_1, x_2, \dots, x_n таких, что

$$G = \bigcup_{i=1}^n x_i U,$$

и m элементов x'_1, x'_2, \dots, x'_m , что

$$G = \bigcup_{i=1}^m U x'_i.$$

1. Вспомогательные утверждения и определения. Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений и определений.

Определение 1.¹ Функция $f(t): G \rightarrow Y$ называется L -почти периодической (L -п.п.), если $\forall \varepsilon > 0$ и конечного множества $N \subset G$, существует отно-

¹ Это определение- модификация определение Райха[6].

сительно плотное множество $E \subset G$ такое, что $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$, где

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) \right\} < \varepsilon.$$

Лемма 1. Если множество E относительно плотно, то множество $E^{-1}E$ симметрично и относительно плотно.

Доказательство. Если $x \in E^{-1}E$, то $x = \sigma^{-1}\tau$, $\sigma, \tau \in E$ и $x^{-1} = \tau^{-1}\sigma \in E^{-1}E$. Значит, множество $E^{-1}E$ симметрично. Из относительной плотности E следует существование конечного числа элементов $\{a_k\}_{k=1}^m$, $a_k \in G$ таких, что $G = \bigcup_{k=1}^m Ea_k$. Пусть $\gamma \in E$. Тогда множество EE^{-1} относительно плотно

$$\bigcup_{k=1}^m EE^{-1}(\gamma a_k) \supset \bigcup_{k=1}^m E\gamma^{-1}(\gamma a_k) = \bigcup_{k=1}^m Ea_k = G,$$

$$\bigcup_{k=1}^m EE^{-1}(\gamma a_k) = G.$$

Из симметричности множества $E^{-1}E$ следует, что и $E^{-1}E$ относительно плотно.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$ обладает свойством (А), если: для каждого конечного множества $N \subset G$ и для каждой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ из существования предела

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(sx_i x_j^{-1}t) = g(sx_j^{-1}t), \quad \forall s, t \in N, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

следует существование подпоследовательности $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} g(sy_j^{-1}t) = f(st), \quad \forall s, t \in N.$$

Замечание 1. Легко видеть, что если функция обладает свойством (А) на всей группе, то она обладает этим свойством и на ее подгруппе.

Свойство (А) введено Райхом [6], оно соответствует лемме 1.3.1. В. Вича [7] и близко к понятию почти автоморфности по Бохнеру.

Лемма 2. Если $\forall \varepsilon > 0$ и конечного множества $N \subset G$, существует относительно плотное множество $E \subset G$ такое, что $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$, где

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) \right\} < \varepsilon,$$

то функция $f(t): G \rightarrow Y$ обладает свойством (A).

Доказательство. Допустим противное, т.е., существуют $\varepsilon > 0$, последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(f(sx_j^{-1}x_i t), g(sx_j^{-1}t)) = 0, \quad \forall s, t \in N$$

и

$$\rho(g(sx_j^{-1}t), f(st)) > \varepsilon, \quad j=1, 2, 3, \dots, \quad \forall s, t \in N.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\rho(f(sx_j^{-1}x_i t), g(sx_j^{-1}t)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad i, j=1, 2, 3, \dots, \quad \forall s, t \in N \quad (1)$$

$$\rho(g(sx_j^{-1}t), f(st)) > \varepsilon, \quad \forall s, t \in N, \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Условия леммы показывают, что функция f L-почти периодична. Для множества $B_{N, f, \frac{\varepsilon}{2}}$ согласно определению 1 существует относительно плотное

множество $E \left(G = \bigcup_{k=1}^n h_k E \right)$ такое, что $B_{N, f, \frac{\varepsilon}{2}} \supset E^{-1}E$. Каждый элемент x_i

можно представить в виде: $x_i = h_{k(i)}\eta_i$, $\eta_i \in E$. Так как количество элементов h_k конечно, а количество элементов x_i бесконечно, то существует индекс k_0 - общий для бесконечного числа элементов x_m так, что

$$x_m = h_{k_0}\eta_m, \quad m=1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Обозначим через $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ ту подпоследовательность последовательности $x^{-1} \in M_{k+1}$, которая выполняет равенство (3).

Тогда для подпоследовательности $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$

$$y_m^{-1}y_n = \eta_m^{-1}h_{k_0}^{-1}h_{k_0}\eta_n = \eta_m^{-1}\eta_n \in E^{-1}E \subset B_{N, f, \frac{\varepsilon}{2}}, \quad m, n=1, 2, 3, \dots$$

и

$$\begin{aligned} \varepsilon < \rho(g(sy_m^{-1}t), f(st)) &\leq \rho(g(sy_m^{-1}t), f(sy_m^{-1}y_n t)) + \\ &+ \rho(f(sy_m^{-1}y_n t), f(st)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. Если функция $f(x)$ обладает свойством (A), то для любого множества $B_{N, f, \varepsilon}$ существуют положительное число δ , конечное множество M элементов из группы G такие, что

$$B_{N,f,\varepsilon} \supset B_{M,f,\delta}^{-1} B_{M,f,\delta}.$$

Доказательство является модификацией доказательства В. Вича (лемма 2.1.2 [7]), (см. также [6], стр. 221, лемма 2).

Лемма 4. Множества $B_{N,f,\varepsilon,\alpha}$ задают базу окрестностей единицы e группы G и имеют следующие свойства:

1. Для каждой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ существует окрестность $B_{M,f,\delta}$ такая, что $B_{M,f,\delta} B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$;
2. Для каждой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ существует окрестность $B_{M,f,\delta}$ такая, что $B_{M,f,\delta}^{-1} \subset B_{N,f,\varepsilon}$;
3. Для каждой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ и $\forall a \in G$ существует окрестность $B_{M,f,\delta}$ такая, что $B_{M,f,\delta} \subset a.B_{N,f,\varepsilon}.a^{-1}$;
4. Для любых двух окрестностей B_{N,f,ε_1} и B_{M,f,ε_2} существует окрестность $B_{K,f,\delta}$ такая, что $B_{K,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon_1} \cap B_{M,f,\varepsilon_2}$;
5. Каждая окрестность $B_{N,f,\varepsilon}$ – открытое множество;
6. Пересечение всех окрестностей содержит лишь единицу;
7. Каждая окрестность является относительно плотным множеством.

Доказательство.

Докажем свойство 1. Из леммы 3 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и конечного множества N существует число $\delta > 0$ и конечное множество M такие, что

$$B_{M,f,\delta}^{-1} B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon}$$

По числу $\delta > 0$ и конечному множеству M выбираем конечное множество K и число $\mu > 0$ такие, что

$$B_{K,f,\mu}^{-1} B_{K,f,\mu} \subset B_{M,f,\delta}$$

Отсюда сразу следует, что

$$B_{K,f,\mu} \subset B_{M,f,\delta} \quad \text{и} \quad B_{K,f,\mu}^{-1} \subset B_{M,f,\delta}, \quad \text{т.е.} \quad B_{K,f,\mu}^{\pm 1} \subset B_{M,f,\delta}.$$

Следовательно,

$$B_{K,f,\mu} B_{K,f,\mu} \subset B_{N,f,\varepsilon}.$$

Свойство 2. Из вышеизложенных рассуждений вытекает, что свойство 2 выполнено.

Свойство 3. Для любой окрестности $B_{N,f,\varepsilon}$ и любого элемента $a \in G$ существует конечное множество $M = Na^{-1} \cup aN$ такое, что

$$\max_{s,t \in N} \rho(f(sa^{-1}at), f(st)) = \max_{u,v \in M} \rho(f(uv), f(uv))$$

Из этого равенства следует, что если $\tau \in B_{M,f,\varepsilon}$, то $a^{-1}ta \in B_{N,f,\varepsilon}$ или

$$a^{-1}B_{M,f,\varepsilon}a \subset B_{N,f,\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$B_{M,f,\varepsilon} \subset aB_{N,f,\varepsilon}a^{-1}.$$

Свойство 4. Оно следует из выполнения включения

$$B_{K,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon_1} \cap B_{M,f,\varepsilon_2}$$

где $\delta = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $K = N \cup M$.

Свойство 5. Пусть $x_0 \in B_{N,f,\varepsilon}$ и

$$\mu = \max_{s,t \in M} \rho(f(sx_0t), f(st)), \quad \mu < \varepsilon.$$

Тогда для $\delta = \varepsilon - \mu > 0$, $M = Nx_0$ и $\tau \in B_{M,f,\delta}$. Таким образом,

$$x_0B_{M,f,\delta} \subset B_{N,f,\varepsilon},$$

что непосредственно вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} \max_{s,t \in N} \rho(f(sx_0t), f(st)) &\leq \max_{s,t \in N} \rho(f(sx_0t), f(sx_0t)) + \max_{s,t \in N} \rho(f(sx_0t), f(st)) \leq \\ \max_{s_1,t \in M} \rho(f(s_1t), f(s_1t)) + \max_{s,t \in N} \rho(f(sx_0t), f(st)) &< \delta + \mu = \varepsilon - \mu + \mu = \varepsilon. \end{aligned}$$

Свойство 6. Рассматриваемые функции не имеют периодов. Значит, единственным общим элементом всех окрестностей является единица.

Свойство 7. Оно непосредственно следует из определения 1 и леммы 1. Лемма доказана.

2. Основные результаты.

Теорема 1. Любая L -почти периодическая функция $f(x)$ непрерывна на группе G в топологии, определенной множествами

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) \right\} < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ и конечного множества $N \subset G$, существует относительно плотное множество $E \subset G$ такое, что $E^{-1}E \subset B_{N,f,\varepsilon}$, где

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) \right\} < \varepsilon.$$

На группе G можно ввести топологию \mathfrak{T}_f множествами $B_{N,f,\varepsilon}$ согласно лемме 4. Действительно, по лемме 1 множество $E^{-1}E$ относительно плотно и множество $B_{N,f,\varepsilon}$ относительно плотно. По лемме 2 следует, что функция f обладает свойством (A). По лемме 4 на группе G можно задать базу окрестностей топологии \mathfrak{T}_f группы G множествами $B_{N,f,\varepsilon}$. Из определения топологии \mathfrak{T}_f следует непрерывность функции f . Теорема доказана.

Теорема 2 (критерий L-почти периодичности). Пусть задана L-почти периодическая функция $f(t): G \rightarrow Y$ и по ней введена топология \mathfrak{T}_f множествами $B_{N,f,\varepsilon}$ на группе G . Любая функция $g(x): G \rightarrow Y$, которая непрерывна в топологии \mathfrak{T}_f , является L-почти периодической функцией.

Доказательство. На группе G введем топологию \mathfrak{T}_f множествами

$$B_{N,f,\varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Если функция $g(t)$ непрерывна в этой топологии, то для любого $\varepsilon > 0$ и элементов $a, b \in G$ существует окрестность $B_{N,f,\varepsilon}$ такая, что

$$B_{N,f,\varepsilon} \subset \left\{ \tau \in G : \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon \right\}$$

Отметим, что окрестность $B_{N,f,\varepsilon}$, вообще говоря, зависит от выбора точки a, b и поэтому, обозначим эту зависимость $B_{N,f,\varepsilon}(a, b)$. Если возьмем конечное множество N элементов группы G , то

$$\bigcap_{a,b \in N} B_{N,f,\varepsilon}(a, b) \subset \left\{ \tau \in G : \sup_{a,b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Согласно лемме 4 конечное пересечение окрестностей топологии \mathfrak{T}_f содержит окрестность вида $B_{M,f,\delta}$ и

$$B_{M,f,\delta} \subset \bigcap_{a,b \in N} B_{N,f,\varepsilon}(a, b) \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Так как функция f L-почти периодическая, то согласно определению 1 окрестность $B_{M,f,\delta}$ содержит множество $E^{-1}E$, где E относительно плотное множество, т.е.

$$E^{-1}E \subset B_{M,f,\delta} \subset \bigcap_{a,b \in N} B_{N,f,\varepsilon}(a, b) \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Это и означает, что функция $g(t)$ L-почти периодическая. Теорема доказана.

Рассмотрим несколько основных свойств L-почти периодических функций, заданных на группе G со значениями в пространстве Фреше Y .

Утверждение 1. Сумма двух L -почти периодических функций снова L -почти периодическая функция.

Доказательство. Пусть заданы L -почти периодические функции $f(t) : (G, \mathfrak{S}) \rightarrow Y$, $g(t) : (G, \mathfrak{S}) \rightarrow Y$. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и конечное число элементов $N \in G$, $h(t) = f(t) + g(t)$. Согласно определению 1 для каждой из функций $f(t)$ и $g(t)$ находим множество $B_{M_1, f, \delta}$, $B_{M_2, g, \gamma}$ так, что

$$(B_{M_1, f, \delta})^{-1} B_{M_1, f, \delta} \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad (4)$$

$$(B_{M_2, g, \gamma})^{-1} B_{M_2, g, \gamma} \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (5)$$

Из L -почти периодичности функций f и g следует существование относительно плотных множеств $E_{1, f}$ и $E_{2, g}$, таких что

$$(E_{1, f})^{-1} E_{1, f} \subset B_{M_1, f, \delta}, \quad (E_{2, g})^{-1} E_{2, g} \subset B_{M_2, g, \gamma}. \quad (6)$$

Согласно лемме 3 работы А. Райха ([6], стр. 223) множество W

$$W = (E_{1, f})^{-1} E_{1, f} \cap (E_{2, g})^{-1} E_{2, g}$$

относительно плотно и симметрично. Тогда множество $W^{-1}W$ относительно плотно и

$$W^{-1}W \subset (E_{1, f})^{-1} E_{1, f} (E_{1, f})^{-1} E_{1, f}, \quad W^{-1}W \subset (E_{2, g})^{-1} E_{2, g} (E_{2, g})^{-1} E_{2, g} \quad (7)$$

Из включений (4)-(7) получим:

$$W^{-1}W \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) < \frac{\varepsilon}{2} \right\} \quad (8)$$

$$W^{-1}W \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab)) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (9)$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\max_{a, b \in N} \rho(h(a\tau b), h(ab)) \leq \max_{a, b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) + \max_{a, b \in N} \rho(g(a\tau b), g(ab)),$$

из неравенств (8), (9) следует:

$$W^{-1}W \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \rho(h(a\tau b), h(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Таким образом, по определению 1 сумма двух L -почти периодических функций также является L -почти периодической функцией.

Утверждение 2. Конечномерный вектор, все координаты которого L -почти периодические функции, также является L -почти периодической функцией.

Доказательство. Не ограничивая общности, доказательство утверждения рассмотрим для случая двумерного вектора. Пусть заданы L-почти периодические функции $f(t): G \rightarrow Y$, $g(t): G \rightarrow Y$ и вектор $F = \{f(t), g(t)\}$, $t \in G$, $F \in Y \times Y$. В пространстве $Y \times Y$ метрика задана следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{dis}(x, y) &= \max\{\rho(x_1, y_1); \rho(x_2, y_2)\}, \\ x &= \{x_1; x_2\}, \quad y = \{y_1; y_2\} \\ \rho(\cdot) &- \text{метрика в } Y, \quad x_1, y_1 \in Y, \quad x_2, y_2 \in Y. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} B_{N, F, \varepsilon} &= \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \text{dis}(F(a\tau b), F(ab)) < \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \left(\rho(f(a\tau b), f(ab)); \rho(g(a\tau b), g(ab)) \right) < \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ \tau \in G : \max_{a, b \in N} \left(\max \rho(f(a\tau b), f(ab)); \max \rho(g(a\tau b), g(ab)) \right) < \varepsilon \right\} = U_{N, f, \varepsilon} \cap U_{N, g, \varepsilon} \end{aligned}$$

Используя неравенства (8) и (9) утверждения 2 получаем, что существует относительно плотное множество W такое, что

$$W^{-1}W \subset U_{N, f, \varepsilon}, \quad W^{-1}W \subset U_{N, g, \varepsilon}$$

Следовательно,

$$W^{-1}W \subset U_{N, f, \varepsilon} \cap U_{N, g, \varepsilon}.$$

Это доказывает L-почти периодичность вектора.

Утверждение 3. *Равномерный предел L-почти периодических функций также L-почти периодическая функция.*

Доказательство. Покажем, что равномерная сходимость не выводит из класса L-почти периодических функций.

Пусть существует равномерный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in G.$$

Согласно равномерной сходимости по числу $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ выбираем число K такое, что при $n > K$ выполнены неравенства

$$\rho(f_n(ab), f(ab)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad a, b \in G \quad (10)$$

$$\rho(f_n(a\tau b), f(a\tau b)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad a, b, \tau \in G. \quad (11)$$

Фиксируем n так, чтобы выполнялись неравенства (10), (11) и по L-почти периодической функции f_n для числа $\frac{\varepsilon}{3}$, конечного множества

$N \subset G$, согласно определению 1 существует относительно плотное множество E :

$$E^{-1}E \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(f_n(a\tau b), f_n(ab)) < \frac{\varepsilon}{3} \right\}. \quad (12)$$

Тогда по неравенству треугольника

$$\begin{aligned} \max_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) &\leq \max_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f_n(a\tau b)) + \max_{a,b \in N} \rho(f_n(a\tau b), f_n(ab)) \leq \\ &\leq \max_{a,b \in N} p_\alpha(f_n(a\tau b) - f_n(ab)) \end{aligned}$$

из неравенств (10)-(12) следует:

$$E^{-1}E \subset \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(f(a\tau b), f(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Таким образом, по определению 1 равномерный предел L -почти периодических функций также является L -почти периодической функцией.

Теорема 3. Если на группе G задано семейство L -почти периодических функций $f_\lambda(t)$, $\lambda \in A$ со значениями в пространстве Фреше Y , то существует топология на группе G , в которой непрерывны все функции этого семейства и любая функция $g(x)$, которая непрерывна в этой топологии, является L -почти периодической на группе G .

Доказательство. Пусть задано семейство $f_\lambda(t)$, $\lambda \in A$ L -почти периодических функций на группе G , где A – некоторое множество индексов. На группе G введем новую топологию \mathfrak{T}_N при помощи окрестностей

$$B_{N, f, \varepsilon, \sigma} = \left\{ \tau \in G : \max_{\lambda \in \sigma} \max_{a,b \in N} \rho(f_\lambda(a\tau b), f_\lambda(ab)) < \varepsilon \right\},$$

где N, σ произвольные конечные множества, $N \subset G$, $\sigma \subset A$.

Множества $B_{N, f, \varepsilon, \sigma}$ являются конечными пересечениями множеств вида

$$B_{N, f_\lambda, \varepsilon} = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \rho(f_\lambda(a\tau b), f_\lambda(ab)) < \varepsilon \right\}.$$

Если функция $f_\lambda(t)$ фиксирована, множества $B_{N, f_\lambda, \varepsilon}$ выполняют все свойства леммы 4.

Пусть заданы две функции $f, g: G \rightarrow Y$. Рассмотрим функцию $F = \{f, g\}: G \rightarrow Y \times Y$. В пространстве $Y \times Y$ метрика задана следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{dis}(x, y) &= \max\{\rho(x_1, y_1); \rho(x_2, y_2)\}, \quad x = \{x_1; x_2\}, y = \{y_1; y_2\} \\ \rho(\cdot) &- \text{метрика в } Y, x_1, y_1 \in Y, x_2, y_2 \in Y. \end{aligned}$$

Если каждая из функций f и g L -почти периодична, то функция $F = \{f, g\}$ L -почти периодична по утверждению 3. Множество

$$U_{N, \varepsilon}(f, g) = \left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \text{dis}(F(a\tau b), F(ab)) < \varepsilon \right\} =$$

$$\left\{ \tau \in G : \max_{a,b \in N} \max (\rho(f(atb), f(ab)); \rho(g(atb), g(ab))) < \varepsilon \right\} =$$

$$\left\{ \tau \in G : \max \left(\max_{a,b \in N} \rho(f(atb), f(ab)); \max_{a,b \in N} \rho(g(atb), g(ab)) \right) < \varepsilon \right\} = U_{N,f,\varepsilon} \cap U_{N,g,\varepsilon}$$

удовлетворяет свойствам леммы 4.

В случае окрестностей вида $U_{N,f,\varepsilon}$ для функции f и $U_{M,g,\varepsilon}$ для функции g используем включение

$$U_{NUM,f,\varepsilon} \cap U_{MUN,g,\varepsilon} \subset U_{NUM,\varepsilon}(f,g) = U_{N,f,\varepsilon_1} \cap U_{M,g,\varepsilon_2}, \quad \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}.$$

Таким образом, множества вида $U_{N,f,\varepsilon}$, $U_{M,g,\varepsilon}$ являются окрестностями некоторой топологии, в которой непрерывны функции f и g .

Таким образом, все конечные пересечения множеств вида $B_{N,f,\varepsilon,\sigma}$ являются окрестностями некоторой топологии \mathfrak{A}_A , в которой непрерывны все функции f_λ , $\lambda \in A$.

Пусть функция g непрерывна в топологии \mathfrak{A}_A . Тогда согласно теореме 2. она L-почти периодическая.

3. Выводы: Введено определение абстрактной L-почти периодической функции, в котором не требуется непрерывность и поэтому функции заданы на произвольной группе. Не требуется задания топологии на группе.

Сформулировано обобщение теоремы Вейля для абстрактных L-почти периодических функций. Доказано, что любая L-почти периодическая функция непрерывна на группе в специальной топологии, и что любая функция, которая непрерывна в этой специальной топологии – L-почти периодическая. Показано, что такая специальная топология существует для бесконечного множества L-почти периодических функций.

Список литературы: 1. Левин Б.Я. О почти периодических функциях Левитана// УМЖ. Т.1, № 1. 1949, С. 49-101. 2. Левитан Б. М. Новое обобщение почти периодических функций Н. Вогта// Зап. Харьк. ин-та матем. и матем. о-ва, XV, №2, 1938. 3. Левитан Б. М., Некоторые вопросы теории почти периодических функций// УМЖ, II, В.6, 1947, с.174-214. 4. Марченко В. А. Обобщенные почти-периодические функции.//ДАН СССР, 1950, Т.XXIV, №4, С. 893. 5. Dimitrova-Burlayenko S.D., On Continuity Properties of Almost-Periodic Functions, Euromech Colloquium 498, Conference Proceedings, p. 150-153. 6. Reich A. Präkompakte Gruppen und Fastperiodizität// Math. Z.,116, p.216-234. 7. Veech W. A. Almost automorphic functions on groups// Amer. J. Math., 87, №3, 1965, p.719-751. 8. Weyl A. Sur les fonctions Presque periodiques de von Neuman// C. R. Acad. Sci. Paris, 200, 1935, p.38-40.

Поступила в редколлегию 08.10.2010

С.В. ДУХОПЕЛЬНИКОВ, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АНТЕННС ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

В роботі для випадку випромінювання циліндричної хвилі з подовжніх щілин побудовані дискретні математичні моделі на базі гіперсингулярних та сингулярних інтегральних рівнянь чисельними методами дискретних особливостей, при цьому використані квадратурні формули інтерполяційного типу, які зведені до систем алгебраїчних рівнянь.

In this work for the case of cylindrical wave radiation from longitudinal slits discrete mathematic models are built on the basis of hypersingular and singular integral equations with numerical methods of discrete peculiarities, by using quadrature formulae of interpolation type that are reduced to the systems of linear algebraic equations.

Введение. Математическая модель резонаторной апертурной антенны – цилиндрическая антенна с конечным числом продольных щелей, которая возбуждается линейным источником, расположенным на оси цилиндра. Такие электродинамические структуры используются в антенной технике для авиации и ракетостроения и как зеркальные антенны СВЧ.

В работах Goldstone L. O., Oliner A. A., W.A. Johnson и R.W. Ziolkowski, J. Brian Grant, Носича А.И., Назарчука З.Т. [1-5] и других ученых построены методы позволяющие провести расчеты структур с одной неоднородностью – продольной щелью. В тоже время интерес вызывают структуры имеющие конечное число продольных щелей. Модель позволяющая рассчитывать характеристики для структур с несколькими щелями дает возможность подбирать параметры в более широком диапазоне: количество, размеры и взаимное расположение щелей. Это дает возможность расширить круг решаемых задач.

В работе краевая задача для уравнения Гельмгольца сведена к граничным гиперсингулярным и сингулярным интегральным уравнениям. Полученные интегральные уравнения сведены к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при помощи метода дискретных особенностей. Данный метод, применяемый в работах Ганделя Ю.В. и его учеников [6-7], для решения электродинамических задач с конечным числом неоднородностей показал свою эффективность.

Математическая модель. В работе рассмотрен случай излучения цилиндрической волны, зависимость от времени $e^{-i\omega t}$. Вмещающая среда однородна и изотропна. На оси цилиндра источник, создающий поле. Известно, что электромагнитное поле внутри и вне рассматриваемой электродинамической структуры удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Задачу излучения цилиндрической волны из продольных щелей цилиндрической антенны сводим к краевой задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца с границей, изображенной на рис. 1.

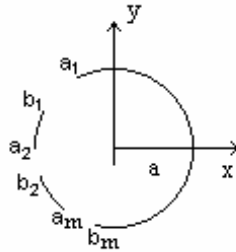


Рисунок 1 – Поперечное сечение цилиндрической поверхности с m щелями.

Введем обозначения: пусть щели – дуги (a_q, b_q) , $q = 1, \dots, m$ окружности S_a . $a_q = a\alpha_q$, $b_q = a\beta_q$, $\phi \in (\alpha_q, \beta_q)$, $L \equiv \bigcup_{q=1}^m (\alpha_q, \beta_q)$, а $CL = [-\pi, \pi] \setminus L$. Следы щелей в перпендикулярном сечении (L) будем называть «основными интервалами», а следы металлических лент (CL) – «дополнительными интервалами».

Искомая функция $u(r, \phi)$, описывающая поле во всем пространстве $u(r, \phi) = E_z(r, \phi)$, удовлетворяет следующим условиям:

–уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(r, \phi) + k^2 u(r, \phi) = 0, \tag{1}$$

в области $R^2 \setminus \left(S_a \setminus \bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i) \right)$ – внешность замкнутых дуг окружности S_a , оставшихся после удаления щелей.

–граничному условию

$$u(r, \phi)|_{r=a} = -u_0(r, \phi)|_{r=a}, \quad \phi \in CL, \quad (2)$$

где $u_0(r, \phi) = H_0^{(1)}(kr) - CH_0^{(2)}(kr)$, $C = \frac{H_0^{(1)}(ka)}{H_0^{(2)}(ka)}$, так что функция

$$u_0(r, \phi)|_{r=a} \equiv 0.$$

Предполагается, что на оси цилиндра источник, создающий поле, $u^{ism}(r, \phi) = H_0^{(1)}(kr)$.

- условиям излучения Зоммерфельда;
- условие Майкснера на ребре.

Ограничения искомой функции $u(r, \phi)$ обозначим на круг $r < a$ и внешность круга $r > a$, соответственно $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$. Если функции $u^+(r, \phi)$, $r < a$ и $u^-(r, \phi)$, $r > a$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца и выполнены т.н. «условия сопряжения»,

$$u^+(r, \phi)|_{r=a} = u^-(r, \phi)|_{r=a}; \quad \frac{\partial u^+(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial u^-(r, \phi)}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad \phi \in CL, \quad (3)$$

то существует функция $u(r, \phi)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца во всем пространстве без объединения дуг $\bigcup_{q=1}^m [a_q, b_q]$ окружности S_a , причем $u(r, \phi) = u^+(r, \phi)$, $r < a$ и $u(r, \phi) = u^-(r, \phi)$, $r > a$.

Представления для функций $u^+(r, \phi)$ и $u^-(r, \phi)$, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца (5) при $r \neq a$, ищем в виде обобщенных рядов Фурье

$$u^+(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^+ J_n(kr) e^{in\phi}, \quad r < a,$$

$$u^-(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^- H_n^{(1)}(kr) e^{in\phi}, \quad r > a,$$

Используя условия сопряжения (3) и граничное условие (2), получим парный ряд Фурье:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} kC_n \Gamma_n e^{in\phi} = -\partial_r u_0 \Big|_{r=a}, \quad \phi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in CL \end{array} \right. , \quad (4)$$

где введено обозначение: $\Gamma_n = \left[\frac{J_n'(ka)}{J_n(ka)} - \frac{H_n^{(1)'}(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \right]$,

$$C_n^+ J_n(ka) = C_n^- H_n^{(1)}(ka) \equiv C_n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Вывод сингулярного интегрального уравнения на «дополнительных интервалах». В случае вычисления поля, излученного из щелей малых размеров, удобно располагать точки интерполяции не в щелях структуры, а на металле. Для этого сделаем в парном ряде (4) замену:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_n = \frac{B_n}{\Gamma_n}, \quad n \neq 0 \\ C_0 = \frac{B_0}{\Gamma_0} - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a} \end{array} \right. .$$

С учетом замены парное уравнение (4) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi} = 0, \quad \phi \in L \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{B_n e^{in\phi}}{\Gamma_n} = \frac{\partial_r u_0}{k\Gamma_0} \Big|_{r=a}, \quad \phi \in CL \end{array} \right. , \quad (5)$$

Проводя рассуждения, как и в работе [8], сводим парное уравнение (5) к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с дополнительным условием. Для этого введем в рассмотрение неизвестную функцию

$$v(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{in\phi}.$$

Удовлетворяя условие Майкснера на ребре и сделав замену переменных, переходим от интервала (α_q, β_q) к стандартному интервалу $(-1, 1)$:

$$g_q : (-1, 1) \rightarrow (\alpha_q, \beta_q) : t \mapsto \theta = \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} t + \frac{\beta_q + \alpha_q}{2},$$

$$v(\phi)|_{(\alpha_q, \beta_q)} \equiv \frac{2}{\beta_q - \alpha_q} \frac{\gamma_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Запишем систему СИУ на стандартном интервале:

$$\frac{B}{\pi} \text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_q(t)}{t-t_0} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 G_{pq}(t, t_0) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad q=1, \dots, m, \quad (6)$$

$$\text{где } G_{pq}(t, t_0) = \frac{B}{2} \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \left[\text{ctg} \frac{g_p(t) - g_q(t)}{2} - \frac{2}{g_p(t) - g_q(t)} \right] + \\ + (1 - \delta_{pq}) B \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \frac{1}{g_p(t) - g_q(t)} + K_{pq}(t, t_0)$$

$$K_{pq}(t, t_0) = \frac{b_q - a_q}{2} \sum n \left(\Gamma_n - B \frac{1}{n} \right) \sin \left(n (g_p(t) - g_q(t_0)) \right), \quad p=1, \dots, m$$

и дополнительные условия:

$$\frac{B}{\pi} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \int_{-1}^1 \gamma_q(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} - \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^m \int_{-1}^1 Q_{pq}(t) \gamma_p(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\Gamma_0} \pi \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a}, \quad q=1, \dots, m. \quad (7)$$

$$\text{где } Q_{pq}(t) = -(1 - \delta_{pq}) B \int_{-1}^1 \ln |g_p(t) - g_q(t_0)| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} - \frac{\Gamma_0}{2} -$$

$$-B \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{\sin \frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}}{\frac{g_p(t) - g_q(t_0)}{2}} \right| \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}} + \int_{-1}^1 H_{pq}(t, t_0) \frac{dt_0}{\sqrt{1-t_0^2}};$$

$$H_{pq}(t, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - B \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(g_p(t) - g_q(t_0))).$$

Заменяя в (6), (7) неизвестную функцию $\gamma_p(t)$ интерполяционными полиномами и используя для дискретизации квадратурные формулы интерполяционного типа, а входящие в уравнение интегралы – интерполяционными квадратурными формулами, предварительно заменив ядра уравнений их интерполяционными полиномами с теми же узлами, получаем СЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{N_q} \sum_{i=1}^{N_q} \frac{\gamma_q(t_i^{N_q})}{t_i^{N_q} - t_{0j}^{N_q}} + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} G_{pq}(t_i^{N_p}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = 0 \\ \frac{B}{N_q} \left(\pi \ln 2 - \ln \left| \frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right| \right) \sum_{i=1}^{N_q} \gamma_q(t_i^{N_q}) + \\ + \sum_{p=1}^m \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} Q_{pq}(t_i^{N_p}) \gamma_p(t_i^{N_p}) = \frac{1}{\Gamma_0} \pi \frac{\partial_r u_0}{k} \Big|_{r=a} \end{array} \right. , \quad (8)$$

где $j = 1, \dots, N_q - 1$, $q = 1, \dots, m$,

Вывод граничного гиперсингулярного интегрального уравнения на «основных интервалах». Применяя параметрические представления интегральных операторов [8] с гиперсингулярным и гладким ядром к парному ряду (4), запишем гиперсингулярное интегральное уравнение (ГСИУ) на системе отрезков в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{A_0}{2\pi} a.f.p. \int_L \frac{v(\theta)}{2 \sin^2 \frac{\theta - \phi}{2}} d\theta - \frac{A_1}{\pi} \int_L v(\theta) \ln \left| \sin \frac{\theta - \phi}{2} \right| d\theta - \frac{A_1 \ln 2}{\pi} \int_L v(\theta) d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_L K(\theta, \phi) v(\theta) d\theta + \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L v(\theta) d\theta = f(\phi), \end{aligned} \quad (9)$$

где $K(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Gamma_n - A_0 |n| - A_1 \frac{1}{|n|} \right] \cos(n(\phi - \theta))$;

$$-\frac{\partial_r u_0(r, \phi)}{k} \Big|_{r=a} = f(\phi).$$

Используя метод дискретных особенностей сводим ГСИУ (9) к СЛАУ:

$$\begin{aligned} & \frac{B_1}{N_p} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_p-1} \gamma_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) \left(1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \frac{1 - (-1)^{j+k}}{(t_{0j}^{N_p} - t_{0k}^{N_p})^2} - B_1 \frac{N_p}{2} \gamma_p^{N_p-2}(t_{0j}^{N_p}) - \frac{B_2}{N_p} \left(\frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \right)^2 * \\ & * \sum_{k=1}^{N_p-1} \gamma_p^{N_p-2}(t_{0k}^{N_p}) \left(1 - (t_{0k}^{N_p})^2 \right) \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{N_p-1} \frac{1}{r} T_r(t_{0k}^{N_p}) T_r(t_{0j}^{N_p}) + \frac{(-1)^{k+j}}{2N_p} \right] - \\ & - \sum_{q=1}^m \left(\frac{\beta_q - \alpha_q}{2} \right)^2 \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q-1} \gamma_q(t_{0k}^{N_q}) \left(1 - (t_{0k}^{N_q})^2 \right) K_{pq}(\mathbf{g}_p(t_{0j}^{N_p}), \mathbf{g}_q(t_{0k}^{N_q})) = \\ & = -\tilde{f}_p(t_{0j}^{N_p-2}), \quad j = 1, \dots, N_p - 1, \quad p = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Для построения диаграммы направленности, используем формулу:

$$D_E(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{e^{-i\frac{\pi n}{2}}}{H_n^{(1)}(ka)} e^{in\phi}. \quad (11)$$

Вывод граничного сингулярного интегрального уравнения на «основных интервалах». Сведем задачу (1-3) к сингулярному интегральному уравнению. Вывод парного ряда Фурье, описанный выше, остается без изменений. Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию:

$$F(\phi) = v'(\phi) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} in C_n e^{in\phi}.$$

Используя параметрическое представление для интегрального оператора с ядром котангенс сводим парное уравнение (4), к сингулярному интегральному уравнению с ядром котангенс на системе отрезков в виде:

$$-\frac{A_0}{2\pi} \mathbf{v.p.} \int_L F(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \phi}{2} d\theta - \frac{\Gamma_0}{2\pi} \int_L \theta F(\theta) d\theta +$$

$$+ \sum_{n=0} \left((\Gamma_n - A_0 |n|) e^{in\phi} \right) \frac{1}{2\pi} \int_L F(\theta) \frac{e^{-in\theta}}{in} d\theta = f(\phi). \quad (12)$$

Переходя на стандартный интервал $(-1;1)$ и применяя метод дискретных особенностей, сводим СИУ (12) к СЛАУ.

$$\begin{aligned} & - \frac{2A_0}{(\beta_p - \alpha_p) N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \frac{\gamma_p^{N_p}(t_k^{N_p})}{(t_k^{N_p} - t_{0j}^{N_p})} + \sum_{q=1}^m \frac{1}{N_q} \sum_{k=1}^{N_q} K_{pq}(t_k^{N_q}, t_{0j}^{N_q}) \gamma_q^{N_q}(t_k^{N_q}) = \\ & = \tilde{f}_p(t_{0j}^N), \quad j=1, \dots, N_p - 1, \quad p=1, \dots, m, \end{aligned} \quad (13)$$

и дополнительное условие

$$\sum_{k=1}^{N_q} \gamma_q^{N_q}(t_k^{N_q}) = 0, \quad q=1, \dots, m. \quad (14)$$

где $K_{pq}(t_k^{N_q}, t_{0j}^{N_q})$ известное гладкое ядро.

Результаты численного анализа. На основе построенных дискретных математических моделей (8), (10), (13-14) были разработаны компьютерные алгоритмы. С использованием компьютерного продукта был проведен численный анализ.

Сравнение результатов для задачи излучения цилиндрической волны из щелей цилиндра, которые были получены используя построенные дискретные математические модели, представлены в табл. 1. В табл. 1 приведены нормы коэффициентов прохождения, а также время, затраченное на их вычисление (параметры структуры $ka=4$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $R=1$, структура с одной щелью).

Данные приведенные в таблице 1 показывают, что математические модели дают одинаковый результат для одинаковой структуры. Кроме этого контроль точности результатов можно производить внутри одного метода, для этого необходимо сгущать сетку узлов интерполяции, т.к. методы сходятся. Также из таблицы видно, что для нахождения результата лучше использовать модель, основанную на гиперсингулярном интегральном уравнении, так как она имеет лучшую скорость сходимости и меньшую затрату ма-

шинного времени для получения результата при одинаковом числе узлов интерполяции. Исходя из этого, все дальнейшие результаты получены с использованием модели на основе ГСИУ.

Таблица 1

Нормы коэффициентов прохождения					
	СИУ		ГСИУ		СИУ (доп. инт.)
	N=10				
C ₀	7.272020e-002	1.05	7.276056e-002	0.109	
C ₁	6.745604e-002		6.749474e-002		
C ₂	5.325068e-002		5.328422e-002		
	N=50				N=150
C ₀	7.270561e-002	21.1	7.270586e-002	2.218	7.272575e-002
C ₁	6.743969e-002		6.743994e-002		6.746361e-002
C ₂	5.322914e-002		5.322938e-002		5.326162e-002
	N=100				N=200
C ₀	7.270586e-002	84.4	7.270586e-002	16.65	7.272580e-002
C ₁	6.743995e-002		6.743994e-002		6.746444e-002
C ₂	5.322942e-002		5.322939e-002		5.324868e-002

Важной электродинамической характеристикой является норма коэффициентов прохождения. На рис.2. приведены расчеты модуля коэффициента прохождения в зависимости от волнового числа, в случае трех щелей в цилиндрической поверхности $\alpha_1 = 0^0$, $\beta_1 = 5^0$, $\alpha_2 = 87.5^0$, $\beta_2 = 92.5^0$, $\alpha_3 = 175^0$, $\beta_3 = 180^0$.

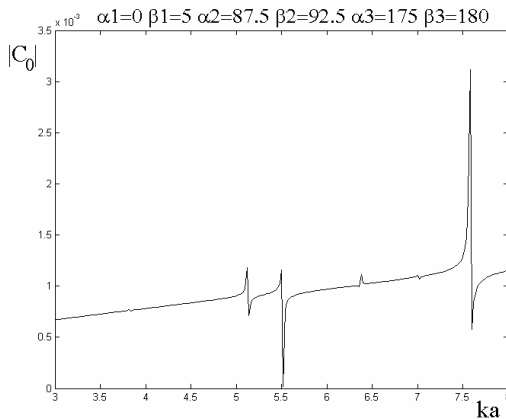


Рисунок 2 – Норма коэффициента прохождения $|C_0|$ для различных параметров волнового числа ka в случае трех щелей.

На рис.3 – диаграмма направленности в дальней зоне (11), отвечающая локальному максимуму коэффициента прохождения $ka = 5.5$, изображенного на рис.2.

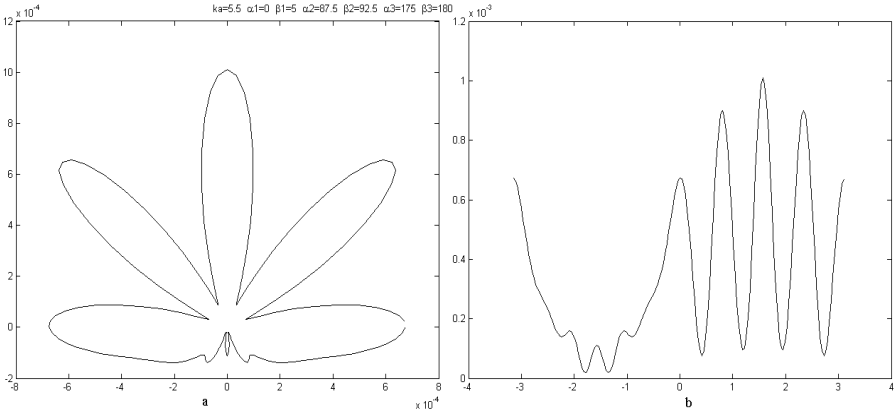


Рисунок 3 – Диаграмма направленности поля в дальней зоне, излучение из трех щелей (компонента E_z), (a – полярные координаты, b – декартовы координаты).

Анализ диаграмм направленности показывает, что для случая $ka = 5.5$ (рис. 3) уровень боковых лепестков равен

$$\frac{|D_E(\phi_{1,2})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.89 \quad \text{и} \quad \frac{|D_E(\phi_{3,4})|}{|D_E(\phi_0)|} \approx 0.66 .$$

При этом ширина «по нулям» главного лепестка равна $2\theta_0 = 44^\circ$.

Используя разработанные компьютерные алгоритмы могут быть построены поля в ближней зоне. Расчет полей в дальней и ближней зонах представляет большой интерес для разработчиков антенн, особенно мобильной связи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Ахиезера.

Выводы. В работе построены математические модели, адекватные соответствующей физической задаче. Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла с границей – цилиндрической поверхностью с продольными

щелями, сведены к гиперсингулярным и сингулярным интегральным уравнениям на системе отрезков. На базе этих граничных интегральных уравнений построены дискретные математические модели для приближенного (с контролируемой точностью) решения рассмотренных краевых задач. На базе построенных дискретных математических моделей реализовано программное обеспечение, проведены расчеты технических характеристик (диаграмм направленностей, полей в ближней зоне) для антенных структур с конечным числом неоднородностей.

Список литературы: 1. *Goldstone L. O.* Leaky wave antennas II: Circular waveguides / *L. O. Goldstone, A. A. Oliner* // IRE Trans. Antennas Propagat. – 1961. – Vol. 9, № 3. – P. 280–290. 2. *Johnson W. A.* The scattering of an H-polarized plane wave from an axially slotted infinite cylinder: a dual series approach / *W. A. Johnson and R. W. Ziolkowski* // Radio Sci. – 1984. – vol. 19, № 1. – P. 275–291. 3. *Richard W. Ziolkowski* Scattering from Cavity-Backed Apertures: The Generalized Dual Series Solution of the Concentrically Loaded E-Pol Slit Cylinder Problem / *Richard W. Ziolkowski, J. Brian Grant* // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1987. – Vol. 35, № 5. – P. 504–528. 4. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / *З. Т. Назарчук*. – К. : Изд-во Наукова Думка, 1989. – 256 с. 5. *Носич А. И.* Свободные и вынужденные электромагнитные колебания кругового цилиндра с продольной щелью / *Носич А. И., Шестопалов В. П.* – Харьков : ИРЭ АН УССР, 1977. – 52 с. (Препринт / АН Украины, Институт радиофизики и электроники ; №78). 6. *Гандель Ю. В.* Математические модели некоторых аксиально-симметричных задач волноводной дифракции / *Ю. В. Гандель, С. А. Стещенко* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2002. – Т. 7, № 6, – С. 12–31. 7. *Гандель Ю. В.* Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения / *Ю. В. Гандель, А. С. Кононенко* // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 9. – С. 1256–1262. 8. *Гандель Ю. В.* Краевые задачи для уравнений Гельмгольца и Максвелла на многощелевых цилиндрических структурах и граничные интегральные уравнения на системе отрезков / *Ю. В. Гандель, С. В. Духопельников* // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : Зб. наук. праць. – Чернівці : Прут, 2008. – Вип. 16. – С. 264–293.

Поступила в редколлегию 01.10.2010

О.В. ЄФІМОВ, д-р техн. наук, НТУ «ХПІ», Харків
Т.В. ПОТАНІНА, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХПІ», Харків

МЕТОДИ АВТОМАТИЗАЦІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ПРИ УПРАВЛІННІ ПЛАНУВАННЯМ РЕМОНТІВ ОБЛАДНАННЯ ЕНЕРГОБЛОКІВ ТЕС І АЕС

У статті досліджено принципи побудови системи автоматизованої діагностики обладнання енергоблоків електростанцій і планування ремонтів з врахуванням фактичного технічного стану обладнання в процесі експлуатації. Порівнюються теоретико-імовірнісна модель діагностичних функцій та модель, побудована на основі статистики інтервальних даних.

В статье исследованы принципы построения системы автоматизированной диагностики оборудования энергоблоков электростанций и планирования ремонтов с учетом фактического технического состояния оборудования в процессе эксплуатации. Сравниваются теоретико-вероятностная модель диагностических функций и модель, построенная на основе статистики интервальных данных.

In article principles of automated diagnostics system construction of the power units equipment and planning of repairs are investigated. The probability-theoretic model and the model constructed on the basis of interval data statistics of diagnostic functions are compared.

Вступ. Серед найбільш важливих й актуальних проблем енергетики особливе місце займають задачі планування й організації ремонтних робіт на енергоблоках електростанцій. Існуюча система планово-попереджувальних ремонтів при проведенні технічного обслуговування і ремонту (ТОіР) базується на обов'язкових видах та періодичності робіт (поточний, середній і капітальний ремонт), які регламентуються середньостатистичними даними по галузі. Але ці дані, в ряді випадків, не відображають фактичної потреби в технічному обслуговуванні та ремонті обладнання, і тому планові роботи часто не виконуються у відповідності з тим, як того вимагає реальний технічний стан обладнання, що експлуатується. Запровадження в експлуатаційну практику ремонтів за технічним станом обладнання залежить від встановлення достатнього для прийняття рішень обсягу діагностичних ознак і методів їх обробки. В процесі експлуатації системи й обладнання енергоблоків піддаються впливу значної кількості факторів, найчастіше випадкових за своєю природою, відбувається розсіювання параметрів технічного стану об'єкту, має місце фактор невизначеності. Адекватність діагностичних моделей, прийняття рішень про виведення обладнання в ремонт и визначення оптимальної тривалості міжремонтного періоду залежать від врахування нечіткої інформації про стан обладнання, сумарної невизначеності, яка накопичується під час експлуатації.

Постановка задачі. Технічний стан обладнання енергоблоку в період експлуатації визначається значеннями множини діагностичних ознак (функцій) $D(W)$, які є мірами якості його функціонування в момент часу $\tau_j, \tau_j \in [\tau_0, \tau]$. Автоматизовану діагностику технічного стану обладнання енергоблоку ТЕС або АЕС можна проводити за допомогою математичних моделей технологічних процесів, що відбуваються в обладнанні, і які об'єднані в імітаційну модель енергоблоку [1-2]. Зазначимо, що імітаційна модель енергоблоку, організована у вигляді логіко-числових операторів розрахунку параметрів технологічних процесів дозволяє визначати техніко-економічні показники роботи енергоблоку та взаємний вплив параметрів обладнання.

Серед критеріїв, за якими здійснюється проведення ремонтів за технічним станом, важливим показником є вплив на ефективність виробітку електроенергії змін параметрів систем та обладнання та їх відмова. Визначивши за інтегральними експлуатаційними характеристиками енергоблоків [3] темп спадання (відносно середнього рівня) показників ефективності функціонування систем та обладнання, можна встановити оптимальні строки служби, прогнозувати тривалість міжремонтних періодів і термін економічно необхідного виведення в ремонт. При прогнозуванні техніко-економічного рівня стану обладнання енергоблоків аналіз його поведінки, в конкретних умовах експлуатації, дозволяє виділити: найбільш суттєві (інформативні), сталі й змінні параметри, сформулювати характеристики прогнозного фона і отримати, таким чином, достатній обсяг діагностичних ознак. За допомогою експлуатаційних характеристик можна упорядкувати параметри за мірою їх впливу на стан систем й обладнання енергоблоків.

Розв'язання задачі. Процес автоматизованої діагностики технічного стану обладнання можна представити наступною процедурою:

1. Планування й організація серії перевірок $\Pi = \{\pi_1, \dots, \pi_l\}$, які є експериментами $A_k, k = \overline{1, l}$ на імітаційній моделі енергоблоку для усього обладнання, яке підлягає діагностиці.

2. Визначення в процесі експлуатації на основі показань контрольно-вимірювальних пристроїв системи теплової автоматики та вимірювань енергоблоку значення вхідного впливу $Y_k, k = \overline{1, l}$ – початкових даних, що потрапляють в імітаційну модель, і відгуку моделі на цей вплив, як значення діагностичної функції $D(W(Y_k))$ (результат перевірки). З цією метою попередньо розв'язується задача оптимізації вибору перевірок, що визначають технічний стан обладнання енергоблоку: загальна кількість перевірок повинна бути мі-

німальною, а кожна перевірка містить максимально можливу кількість інформації.

3. Зіставлення значень діагностичних функцій $D(W(Y_k))$, отриманих в результаті імітаційного експерименту, з їхніми вимірними і нормативними значеннями з метою діагностичного висновку про причини і фактори змін технічного стану обладнання та визначення часу, що залишається до його відмови.

В загальному випадку, при діагностиці технічного стану обладнання енергоблоку за допомогою імітаційної моделі діагностичною функцією є багатопараметрична функція $W = W(\vec{X}(\tau))$. Вона характеризує вплив змін з часом t вектора параметрів обладнання $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$, які відображають погіршення експлуатаційних характеристик в міжремонтний період, на ефективність функціонування енергоблоку. Імітаційна модель енергоблоку дозволяє отримати залежності, котрі прогнозують вплив змін кожного з параметрів X_r на W з часом t : $W_r = W_r(X_r(\tau))$, $r = \overline{1, m}$.

Оскільки прогнозовані процеси змін експлуатаційних характеристик обладнання енергоблоку в міжремонтний період – випадкові функції часу, для їх зображення можна застосувати апарат теорії випадкових процесів. В такому випадку для фіксованого моменту часу $\tau_j, \tau_j \in [\tau_0, \tau]$, випадковий процес $\xi^r(\tau)$ – випадкова величина, що характеризується одновимірною щільністю розподілу $f(x_r, \tau_j)$.

Результатом імовірнісного прогнозування змін параметрів обладнання енергоблоку є обчислена для нього ймовірність працездатного стану

$$P_{r \text{ work}}(\xi^r(\tau_j) < g_r) = \int_{x_{r \text{ min}}}^{x_{r \text{ max}}} f(x_r, \tau_j) dx_r, \quad r = \overline{1, m}, \quad \text{де } f(x_r, \tau_j) \text{ – відома щільність}$$

ймовірностей перерізу випадкового процесу в момент τ_j ; g_r – припустиме значення x_r .

Імітаційна модель енергоблоку дозволяє визначити сукупний вплив змін з часом k параметрів обладнання енергоблоку на показники його працездатності:

$$W_\Sigma = \sum_{i=1}^k W_i(X_i(\tau_j)), \quad k \leq m. \quad \text{Ймовірність такого впливу складає}$$

$$P_\Sigma = \prod_{i=1}^k P_{i \text{ work}}.$$

Вимірювання технологічних параметрів за допомогою контрольно-вимірювальних пристроїв в процесі експлуатації енергоблоку здійснюється

звично в умовах різних випадкових перешкод і похибок. Враховуючи це, результати вимірювань багатопараметричної діагностичної функції W в фіксований момент часу τ_j на працюючому обладнанні можна вважати інтервальним оцінюванням, тобто як інтервал між статистиками, які містять з певною ймовірністю дійсне значення W . Таким чином, вимірювану функцію W можна вважати випадковою величиною з вибірки n вимірювань з невідомим середнім μ . В імовірнісній теорії математичної статистики вибірка – набір незалежних в сукупності однаково розподілених випадкових величин [4]. Однак ретельний аналіз більшості реальних задач показує, що відомою є не вибірка W_i^l , а величини $W_i^{l*} = W_i^l + \varepsilon^l$, де ε^l – певні похибки вимірювань, спостережень, аналізу, експериментів, досліджень (наприклад, інструментальні похибки). Одна з причин – запис результатів спостережень зі скінченною кількістю значущих цифр. І, таким чином, важливим при побудові статистики, на якій базуються статистичні висновки і яка застосовується для оцінювання параметрів і характеристик розподілу, перевірки гіпотез, є дотримання принципу, що відомим є значення статистики від змінної W_i^* , а ні W_i . Якщо похибки задовольняють умові $\forall l: |\varepsilon^l| \leq \Delta$, то початкові дані зображуються у вигляді інтервалів $[W_i^l - \Delta; W_i^l + \Delta]$, причому обмеження на похибки можна задавати різними способами – окрім абсолютних застосовуються відносні, а також інші показники відмінності між W_i^* і W_i .

Виходячи з положень класичної статистики, можна стверджувати наступне. Мінімальне й максимальне значення функції W у вибірці можна взяти як нижню та верхню межі довірчого інтервалу $W_{\min} \leq W \leq W_{\max}$, а величину $(1 - \alpha)$ – вважати довірчою ймовірністю (α – прийнятий рівень значущості).

Якщо відомо, що розподіл W є нормальним, то величина $\frac{(\bar{W} - \mu)\sqrt{n}}{S}$ підлягає t -розподілу Стюдента з $(n - 1)$ ступенями вільності [5]. Тут \bar{W} – вибіркове середнє значення результатів вимірювань багатопараметричної функції W , тобто $\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n W_v$, а S – вибіркова дисперсія й $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{v=1}^n (W_v - \bar{W})^2$.

Слід додати, що за невеликою кількістю спостережень неможна надійно встановити нормальність, а зі збільшенням об'єму вибірки квантилі розподілу Стюдента наближаються до квантилів нормального розподілу.

Тоді відсотковий довірчий інтервал для діагностичної функції W приймає вигляд $\mu = \bar{W} \mp t_{n-1}^{1-\alpha/2} S / \sqrt{n}$, де $t_{n-1}^{1-\alpha/2}$ – квантиль t – розподілу Стьюдента з $(n-1)$ числом ступенів вільності рівня $1 - \alpha/2$.

Це положення застосовується для побудови за результатами вимірювань цілої серії довірчих інтервалів діагностичної функції W , що відрізняються один від одного ймовірністю визначення значень цієї функції в кожному з

$$\text{інтервалів } P_W \left(-t_{n-1}^{1-\alpha/2} < \frac{(\bar{W} - \mu)\sqrt{n}}{S} < t_{n-1}^{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha .$$

Застосування методів інтервальної статистики визначає інший довірчий інтервал для математичного очікування μ для заданої довірчої ймовірності

$$(1 - \alpha) : \left[\mu - \Delta - u(\alpha - 1) \frac{S}{\sqrt{n}} ; \mu + \Delta + u(\alpha - 1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right], \text{ де } u(\alpha - 1) - \text{квантиль по-}$$

рядку $\frac{\alpha + 1}{2}$ стандартного нормального розподілу з нульовим математичним

очікуванням та одиничною дисперсією. Тобто при збільшенні об'єму вибірки довжина довірчого інтервалу не може бути меншою $2C \cdot \Delta$, де C – певна стала для оцінки нотни $N(\varphi(W_i)) = \sup_{\varepsilon} |\varphi(W_i) - \varphi(W_i^*)|$, φ – статистика. Але важливою перевагою оцінки μ таким способом не є лише поширення інтервалу і врахування таким чином похибок спостережень, але те, що розподіли результатів спостережень в багатьох практичних задачах найчастіше відрізняються від нормальних.

В процесі діагностики проводиться порівняння осередненого результату вимірювань діагностичної функції $\bar{W}_{\text{изм}}$ і значення цієї ж функції W_{Σ} , обчисленого за допомогою імітаційної моделі енергоблоку, яке є сумою впливів окремих можливих причин (позитивний результат перевірки π_k) в момент часу τ_j , що відповідає проведенню вимірюванням. Для цього застосовується статистична теорія перевірки альтернативних гіпотез

$$\begin{cases} H_0 : W_{\Sigma} = \bar{W}_{\text{изм}}, \\ H_1 : W_{\Sigma} \neq \bar{W}_{\text{изм}}. \end{cases}$$

Гіпотезу H_0 відхиляють, якщо абсолютне значення статистики

$$|t_0| = \left| \frac{W_{\Sigma} - \bar{W}_{\text{изм}}}{S / \sqrt{n}} \right| > t_{n-1}^{1-\alpha/2}. \text{ В цьому випадку в процесі діагностики приходять до}$$

висновку, що $W_{\Sigma} \neq \overline{W}_{\text{изм}}$, а величина $|W_{\Sigma} - \overline{W}_{\text{изм}}| = \Delta W$ застосовується для прийняття рішення щодо причин, які вплинули на технічний стан обладнання. Чим менше ΔW , тим більше ймовірність того, що власне ці причини змінили стан обладнання. Більш ймовірними будуть ті причини, за яких W_{Σ} потрапляє у межі довірчого інтервалу $\delta = \mp t_{n-1}^{1-\alpha/2} S / \sqrt{n}$, де ймовірність можливої похибки α мінімальна. Ймовірність прийняття рішення в результаті діагностики дорівнює $P = (1 - \alpha) \prod_{i=1}^k P_{i \text{ work}}$. При виконанні гіпотези H_0 , тобто якщо $W_{\Sigma} = \overline{W}_{\text{изм}}$, ймовірність прийняття рішення буде максимальною (через те, що ймовірність похибки дорівнює нулю): $P = \prod_{i=1}^k P_{i \text{ work}}$.

Підхід статистики інтервальних даних до визначення «дійсного» значення порогу C при перевірці гіпотез і який відповідає реально застосованому критерію знаходиться на інтервалі довжиною дві нотни. Значення порогу доцільно замінити на величину більшу на одну нотну. Це гарантує, що ймовірність відхилити нульову гіпотезу, якщо вона є вірною, не більше α .

Для визначення залежностей, які описують зміну технічного стану й надійність працездатності обладнання, а також часу, що залишився до його відмови, з метою планування строків і тривалості ремонтів і обчислення коефіцієнта готовності енергоблоків пропонуємо наступний підхід.

На прогнозованім часовім інтервалі експлуатації енергоблоку параметри його обладнання $X_r, r = \overline{1, m}$ підлягають еволюції в результаті зміни технічного стану обладнання. Внаслідок стійкості фізико-хімічних процесів, які викликають ці зміни, вони є неперервними й монотонними функціями часу τ , які можна вважати напівмарківськими залежностями з відомими апроксимаціями їх реалізацій [6].

Ці апроксимації можна зображувати різними функціями. Для таких, що найчастіше зустрічаються в практиці експлуатації обладнання енергоблоків ТЕС і АЕС, це лінійні й експоненціальні функції [7], вони записуються відповідно $x_r(\tau) = \alpha_r + \beta_r \cdot \tau$ або $x_r(\tau) = c_r \cdot e^{r \cdot \tau}$, де $r = \overline{1, m}$.

З початком експлуатації обладнання в момент часу $\tau_0 = 0$, за допомогою штатної або спеціальної системи контрольно-вимірювальних пристроїв енергоблоку та його імітаційної моделі запропонованим методом здійснюється діагностика технічного стану обладнання в усім часовім інтервалі експлуатації $\delta\tau = \tau - \tau_0$, таким чином, послідовно спостерігаються реалізації функцій $x_r(\tau), r = \overline{1, m}$ до кінця прогнозованого інтервалу експлуатації τ . За

отриманими в процесі спостережень в точках $\tau_j, \tau_j \in [\tau_0, \tau]$ дискретними значеннями реалізацій, будуються найкращі екстраполяційні криві $x_r(\tau), r = \overline{1, m}$, тобто обчислюються коефіцієнти α_r, β_r або c_r, γ_r залежностей, причому кожні нові значення реалізацій, що спостережено, уточнюють криві прогнозу $x_r(\tau), r = \overline{1, m}$. Точка перетину функції $x_r(\tau), r = \overline{1, m}$, яка описує зміну технічного стану обладнання, для якого проводиться діагностика, з заданою межею $g_r, r = \overline{1, m}$, що визначає граничне значення цієї функції, виходячи з техніко-економічних показників енергоблоку або надійності його роботи, інтерпретується як наробіток обладнання до відмови. Це дозволяє визначити час $\Delta\tau = \tau^* - \tau_j$, який залишається до моменту необхідного ремонту обладнання (до його відмови) τ^* від моменту діагностики технічного стану τ_j .

Залежності $x_r(\tau), r = \overline{1, m}$, побудовані для усієї сукупності обладнання, яке знаходиться в експлуатації, складають базу даних еволюцій параметрів стану і надійності обладнання для конкретних типів енергоблоків ТЕС і АЕС та умов їх експлуатації. Така база може бути застосована на різних етапах життєвого циклу енергоблоків, в тому числі для планування тривалості ремонтних робіт на електростанціях і визначення коефіцієнта використання встановленої потужності, коефіцієнта готовності.

Висновки. Запропоновані в роботі методи дозволяють підвищити адекватність діагностичних моделей, на основі яких можливо забезпечення прийняття рішення щодо визначення оптимальної періодичності проведення ремонтів з врахуванням фактичного стану обладнання енергоблоків електростанцій.

Список літератури: 1. Палагин А. А. Моделирование функционального состояния и диагностика турбоустановок / А.А. Палагин, А.В. Ефимов, Е.Д. Меньшикова. – К.: Нак. думка, 1991. – 201 с. 2. Ефимов А. В. Разработка имитационной модели энергоблока АЭС с ВВЭР-1000 для решения задач анализа, управления и диагностики / А. В. Ефимов, Т. В. Потанина // Энергетика: економіка, технології, екологія. – НТУУ «КПІ». – 2006. – № 2. – С. 5-9. 3. Potanina T. Problem of optimal load distribution between power units on the power stations / T. Potanina, A. Efimov // MOTROL – Lublin. – 2009. – Vol. 11A. – С. 25-30. 4. Орлов А. И. Прикладная статистика / А. И. Орлов. – М.: Экзамен, 2004. – 656 с. 5. Монтгомери Д. Планирование эксперимента и анализ данных / Д. Монтгомери. – Л.: Судостроение, 1980. – 383 с. 6. Ефимов А.В. Оценка эффективности тепловых схем энергоблоков по параметрам состояния и надежности оборудования / А.В. Ефимов, Т.А. Гаркуша // Интегровані технології та енергозбереження. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2006. – № 1. – С. 103-108. 7. Острейковский В.А. Вероятностное прогнозирование работоспособности элементов ЯЭУ / В.А. Острейковский, Н.Л. Сальников. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 416 с.

Надійшла до редколегії 28.09.2010

А.Г. КОШОВИЙ, аспірант НАУ «ХАІ» ім. М.С.Жуковського, Харків
В.А. ВАНІН, д-р. техн. наук, ПІМаш ім. А.М.Підгорного НАНУ, Харків

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ ДОФРАКТАЛЬНОГО РОЗСІЮВАЧА З ЕКРАНОМ

Розглянуто розсіювач акустичної хвилі у вигляді дофрактальної системи циліндричних стрічок та розібрано його взаємодію із еліптичним екраном. Обґрунтовано застосування прямих чисельних методів для такого класу задач.

The scattering problem of the acoustic wave by pre-fractal system of cylindrical curvilinear strips has been formulated and solved for induced currents densities. The direct numerical method of mechanical quadratures (MQ-method) has been used successfully to find currents densities distribution on the strips in the case of the CSA – fractal's generator.

1. Вступ. Розглядається дофрактальна система циліндричних стрічок, що збуджується плоскою акустичною хвилею. Стрічки вважаються абсолютно м'якими, але в загальному вигляді їх напрямні є сегментами гладких дуг. З математичної точки зору задача розсіювання може бути сформульована у вигляді задачі Діріхле для двовимірного рівняння Гельмгольца. Така постановка задачі є класикою і розглядалася багатьма дослідниками ще в минулому столітті.

У даній статті класична теорія розсіювання буде поєднуватись з новою теорією фракталів, яку започаткував Бенуа Мендельброт, узагальнюючи роботи своїх попередників: Пуанкаре, Кантора, Хаусдорфа та ін.[1]. Вказане поєднання полягає у тому, що напрямні системи стрічок утворюють певну стадію побудови самоподібного фракталу (СПФ) зі змінною розмірністю Хаусдорфа(РХ).[2]. Окрім дофрактальних систем стрічок розглядається стрічка, напрямна якої є дуга кола. Вона відіграє роль екрана, що може посилювати, чи послабляти акустичні властивості дофрактального розсіювача.

2. Постановка задачі. На систему з певної кількості абсолютно тонких циліндричних стрічок з паралельними краями набігає плоска акустична хвиля. Розташування стрічок у системі має бути строго впорядкованим у відповідності з різними математичними законами побудови СПФ та самі стрічки можуть бути криволінійними. Тому слід деталізувати постановку задачі з відображенням вказаної нової математичної впорядкованості розташування стрічок та їх криволінійності. На малюнку зображено напрямні екранованої дофрактальної системи стрічок, що відповідає утворювачу СПФ зі змінною

РХ. Тут використовуються вихідні змінні $x_1^1(t) = -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t$, $x_2^1(t) = \frac{1}{5}t$ та $x_3^1(t) = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}t$, де $t \in [-1, 1]$ що відповідають першій стадії побудови СПФ. Також слід зазначити, що ординати є різними: $y_1^1(t) = (t^3 - t)(t - \frac{2}{5})$, $y_2^1(t) = (t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{4})$ та $y_3^1(t) = (t^3 - t)(t + \frac{2}{5})$. Напрямна екрану визначається формулою $x(t) = 3 \sin \frac{\pi}{4}t$, $y(t) = 3 \cos \frac{\pi}{4}t$, $t \in [-1, 1]$.

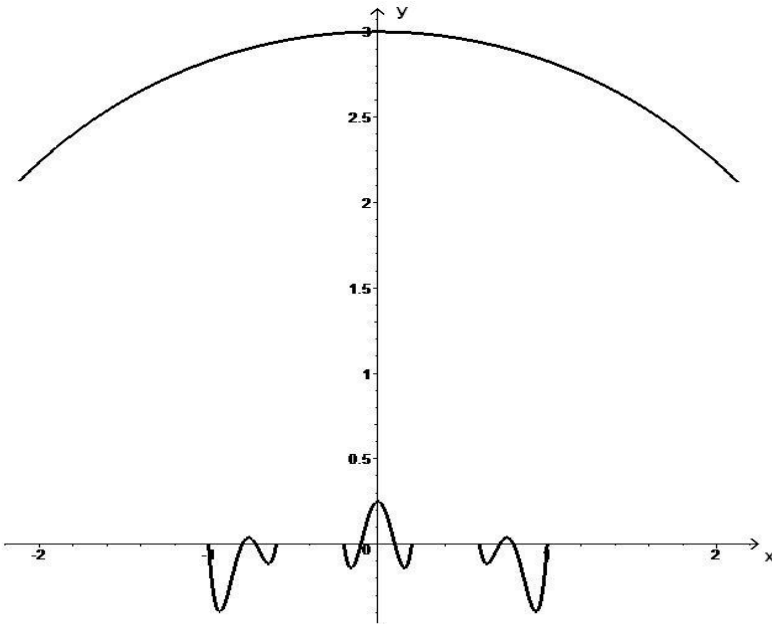


Рисунок 1– Поперечний переріз розсіювача акустичних хвиль з екраном.

Щоб отримати другу стадію побудови СПФ, треба першу його стадію зменшити у п'ять разів та замінити нею елементи першої стадії. Таким чином отримаємо дев'ять дуг в якості напрямних розсіювача, а екран залишається без змін. Коли цей процес продовжувати до нескінченності, то утвориться фрактальний об'єкт, який ми назвемо множиною дуг Кантора (МДК). Якщо у

цьому процесі використовувати сегменти, то ця побудова призведе до структури схожої з класичною множиною Кантора, яку назвемо множиною сегментів Кантора утвореною за п'ятірним принципом (МСК5). Як відомо, класична множина Кантора є досконалою множиною з нульовою топологічною

розмірністю. У той же час її розмірність Хаусдорфа дорівнює $d_x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ і є

строго додатною. У нашому випадку, як не важко довести, подібно до класичної теорії, топологічна розмірність для МСК5 також дорівнює нулю, а от

розмірність Хаусдорфа $d_x = \frac{\ln 3}{\ln 5}$. Процес творення самоподібних фракталів

можна змінювати як за рахунок кількості дуг утворювача, так і за рахунок їх форми.

На стрічках, де шукані функції мають розрив, рівняння акустики не виконуються. Граничним переходом до нескінченно тонкого шару з великими градієнтами ρ і \tilde{c} до поверхні отримуємо граничні умови, що пов'язують їх значення по різні боки згаданої поверхні. У акустиці зручно розглядати два ідеалізовані середовища в які акустичні коливання не проникають, і в яких $p = 0, v = 0$. Існують реальні середовища, властивості яких близькі до властивостей ідеалізованих середовищ і на них ми будемо в подальшому спиратись, як на можливі варіанти практичного застосування, але для конкретності розглядаємо лише випадок абсолютно м'яких стрічок. Абсолютно м'яким називають тіло, в якому $\rho\tilde{c} = 0$ на поверхні такого тіла $p|_s = 0$. [3] Таким чином маємо задачу Діріхле для двовимірного рівняння Гельмгольца.

3. Перетворення інтегральних рівнянь. Для розв'язання задачі Діріхле застосовуємо метод інтегральних рівнянь, що дозволяє зводити зовнішню крайову задачу до інтегральних рівнянь меншої вимірності на обмеженій кількості дуг. При його застосуванні використовується фундаментальний розв'язок двовимірного рівняння Гельмгольца

$$G(u) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|u|)$$

тут $H_0^{(1)}(z)$ є функцією Ханкеля.

Окрім рівняння Гельмгольца ця функція задовольняє умови випромінювання і дає можливість інтегрального подання шуканої функції $p(\bar{r})$:

$$p(\bar{r}) = \int_{\gamma} G(k|\bar{r}' - \bar{r}|) J(\bar{r}') dl', \bar{r} \in R^2 \setminus \gamma, \gamma = \bigcup_m \gamma_m.$$

Отже, замість $p(\bar{r})$ слід знайти функцію $J(\bar{r})$, що визначена на системі дуг γ_m . Для цього використаємо крайові умови і отримаємо систему інтегральних рівнянь (СІР)

$$\int_{\gamma} G(k|\bar{r}' - \bar{r}|)J(\bar{r}')dl' = p_0(\bar{r}), \quad \bar{r} \in \gamma.$$

Щоб перейти від криволінійних до звичайних інтегралів скористаємось параметричною формою задавання системи дуг $\gamma_m : \bar{r}_m(t) = (x_m(t), y_m(t)), |t| \leq 1$. В результаті виникне загальна математична модель взаємодії акустичної хвилі з екранованим дофрактальним абсолютно м'яким та нескінченно тонким розсіювачем, що має вигляд наступної системи інтегральних рівнянь (СІР):

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 j_e(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_e(t) - \bar{r}_e(\tau)|)dt + \\ & + \sum_{p=1}^{3^n} \int_{-1}^1 j_p(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_p(t) - \bar{r}_e(\tau)|)dt = \frac{2i}{\pi} e^{ik\bar{q}_e(\tau)} \int_{-1}^1 j_e(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_e(t) - \bar{r}_m(\tau)|)dt + \\ & \sum_{p=1}^{3^n} \int_{-1}^1 j_p(t)H_0^{(1)}(k|\bar{r}_p(t) - \bar{r}_m(\tau)|)dt = \frac{2i}{\pi} e^{ik\bar{q}_m(\tau)} \end{aligned}$$

$$|\tau| \leq 1, \quad m = 1, \dots, 3^n.$$

Перше рівняння пов'язане з екраном, тому маємо наступну параметризацію

$\bar{r}_e(\tau) = R(\sin \gamma\tau, \cos \gamma\tau)$, а решта рівнянь визначені на дофрактальній системі напрямних дуг $\bar{r}_k^{(n)} = (x_k^{(n)}(\tau), y_k^{(n)}(\tau))$.

Тут n вказує на номер стадії побудови СПФ, а, відповідно, $x_k^{(n)}(\tau)$ вихідні змінні геометричної моделі процесу побудови СПФ зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Функція $y^{(n)}(\tau)$ задає форму напрямної дуги. Будемо вважати ці дуги однаковими і симетричними, наприклад $y(\tau) = c(1 - \tau^2)$. Зокрема, коли $c = 0$ отримаємо звичайну прямолінійну дифракційну ґратку, яку можна використовувати в генераторі дифракційного випромінювання.[4]

Розглянемо детальніше аргументи у функції Ханкеля, що визначає ядра даної системи. Зупинимось для простоти на утворювачі МСК фракталу, зображеному на першому малюнку. Тут маємо три дуги та екран, то і система має чотири рівняння і чотири шукані функції. Коли підставимо параметризовані радіуси-вектори до аргументів діагональних ядер, то отримаємо:

$$k|\bar{r}_e(\tau) - \bar{r}_e(t)| = kR\sqrt{2 - 2\cos \gamma(\tau - t)}, \quad k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)| = \chi_1 |\tau - t| \sqrt{1 + \varepsilon^2 w_m^2(\tau, t)},$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \chi_1 = \frac{ka}{3}, \quad w_m(\tau, t) = \frac{y_m(\tau) - y_m(t)}{\tau - t} = \tau^2 + \tau \cdot t + t^2 + (-1)^m \frac{1}{2}(\tau - t) - 1.$$

А у випадку розсіювача, що вказано на малюнку аргументи діагональних ядер починаючи з другого будуть мати вигляд $k|\bar{r}_1(\tau) - \bar{r}_1(t)| = k\alpha_1|\tau - t|$, а перший залишається таким же самим: $k|\bar{r}_e(\tau) - \bar{r}_e(t)| = kR\sqrt{2 + 2\cos\gamma(\tau - t)}$, де R - радіус кола, частина якого виступає, в даному випадку, екраном.

Отже стає очевидним, що СІР є сингулярною, бо діагональні ядра містять логарифмічну особливість, яку можна досить просто виділити користуючись відомим розвиненням функції Ханкеля:

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi} \left[\ln \frac{\gamma z}{2i} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m} \left(\ln \frac{\gamma z}{2i} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right) \right].$$

В результаті отримуємо систему

$$\int_{-1}^1 j_j(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{m=1}^{3^j+1} \int_{-1}^1 j_m(t) R_{lm}(\tau, t) dt = e^{ik\bar{q}_j(\tau)}, |\tau| < 1.$$

Тут $R_{km}(\tau, t)$ є регулярними ядрами:

$$R_{km}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_k(\tau) - \bar{r}_m(t)|), \kappa \neq m$$

$$R_{mm}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(k|\bar{r}_m(\tau) - \bar{r}_m(t)|) - \ln|\tau - t|$$

Подібним чином здійснюється виділення особливості “у чистому вигляді”, що є важливим для використання чисельних та чисельно-аналітичних методів розв’язку СІР, у випадку будь-якого утворювача для вказаного класу МСК. Більше того, це можна успішно робити для будь-якої стадії творення МСК, та більшості відомих узагальнень. Хоча при цьому і збільшується кількість рівнянь у системі та кількість інтегралів у рівняннях, але також, відбувається зменшення частотного параметру, що приводить до зменшення, наприклад, квадратурних вузлів для досягнення необхідної точності.

Остання система є повністю підготовленою до застосування прямого чисельного методу механічних квадратур(МК), який був розроблений і обґрунтований у монографії[6]. Він також себе добре зарекомендував і у випадку криволінійних стрічок вказаного класу. Іншим, не менш ефективним, методом є чисельно-аналітичний метод регуляризації, що використовує формулу обернення Т.Карлемана і був свого часу обґрунтований И.Н.Векуа, цей метод

дозволяє отримати явний асимптотичний розв'язок, що є важливим для граничного переходу при можливому дослідженні фракталів. Також до останньої системи можна застосувати метод дискретних особливостей, що дає можливість порівняння результатів, отриманих методом МК, не лише з асимптотичними розв'язками, а і з результатами іншого чисельного методу, що дозволяє отримати більш загальну картину процесів взаємодії екрана та розсіювача акустичних хвиль.

4. Висновки. У даній роботі було розглянуто задачу взаємодії розсіювача акустичних хвиль, представленого у вигляді системи циліндричних стрічок, які у перерізі представляють собою першу стадію творення фрактала об'єкту, з екраном, що являє собою сегмент кола. Надалі можливі розширення досліджень можна реалізовувати переходячи до інших стадій творення фрактала, також можна розглядати екрани іншої форми, зокрема дуги гіперболи чи параболи. Ще можливі варіанти переходу до абсолютно жорстких систем стрічок чи, навіть, використовувати граничну умову третього роду. Абсолютно жорсткими називаються тіла, для яких $\rho\tilde{c} = \infty$, на його поверхні $v_N|_S = 0$. В акустиці інколи розглядаються граничні умови третього роду для p : $p + w \frac{\partial p}{\partial N} = 0$. Поверхня, на якій ця умова виконується називається імпедансною. Коли $w = 0$ маємо граничну умову першого роду, що відповідає абсолютно м'якому тілу, коли ж $w = \infty$, то маємо граничну умову другого роду, що відповідає абсолютно жорсткому тілу.[3]

Список літератури: 1. Мендельброт Б. Фрактальна геометрія природи. М., ИКИ, 2002, 655с. 2. Кошевой Г.И. Некоторые классы самоподобных фракталов и их использование в радиофизике. // ЭВЭС, том 12, №11, 2007, с. 28-32. 3. Ваганов Б., Каценельбаум Б.З. Основы теории дифракции. М., Наука, 1982г., 272с. 4. Шестапов В.П., Литвиненко Л.Н. и др. Дифракция волн на решетках. Изд-во Харьковского университета, 1973, 287с. 5. Кошовий Г.І., Головченко О.В., Кошовий А.Г. Чисельно-аналітичне дослідження перед-фрактальних розсіювачів електромагнітних хвиль. // Радіоелектронні і комп'ютерні системи, 2006. №4 .-С. 133-137 . 6.Ланасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярних інтегральних уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев. Наук. Думка, 1984, 343с.

Надійшла до редколегії 04.10.2010

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків
А.І. ДРОБОТЯ, канд. техн. наук, доц. БДПУ, Бердянськ
С.І. КУЛИК, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач НТУ «ХПІ», Харків
О.О. ЛИТВИН, канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співробітник, УПА, Харків

СТВОРЕННЯ ГРАФІЧНОГО СТЕГОФАЙЛУ НА ЗОБРАЖЕННІ-КОНТЕЙНЕРІ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЕЙВЛЕТІВ

В статті запропоновано метод створення графічного стегоповідомлення на основі статичного зображення та вейвлетів. На конкретному прикладі (передача секретного графічного повідомлення) розглянуто роботу розробленого алгоритму, наведено результати роботи програми та аналіз результатів проведеного обчислювального експерименту. Також розглянуто перспективи подальших досліджень.

The article suggests a method of creating graphical steganomessage based on static images, and wavelets. In a specific example (transmission of the confidential picture message), we reviewed the work of the algorithm, cited the results of the program and quoted the analysis results of the experiments. Also we consider some recommendations for further research.

1. Вступ. Використання зображень, звукових чи відео-файлів в ролі контейнерів для передачі стегоповідомлення відкриває досить широкі можливості з огляду на значний об'єм наявної інформації.

2. Аналіз останніх досліджень. Незначна змінюваність первинних образів після “вживлення” стегоповідомлення, що не провокує підозр щодо наявності в них сторонньої інформації розглядалася в роботах [1-3]. Ідеальними для такої ролі є зображення, оскільки вони вже піддані стисненню, достатньо великі за обсягом і добре скривають конфіденційну інформацію [4-5]. Якщо стеганографічна процедура виконує свою роботу добре, розходження в рівневій якості зображення після змін, які відбулися для того, щоб сховати повідомлення, не привернуть увагу стороннього спостерігача. Враховуючи викладене вище, актуальною є задача побудови технологічно зручної процедури вживлення секретної графічної інформації в інформацію зображення-контейнера та вилучення його звіди.

3. Постановка задачі. Зображення мають значні переваги перед іншими носіями в ролі контейнерів [5]. Задача шифрування полягає у непомітному вкрапленні конфіденційної інформації шляхом застосування вейвлет-перетворення до матриці зображення-контейнера як функції двох змінних $f(x, y)$ та «приклеюванні» цілочислових значень інтенсивності білого кольору (або інших значень) у кожному пікселі прихованого графічного повідомлення до мантиси обраного вейвлет-коефіцієнта і подальшому застосуванні оберненого вейвлет-перетворення до матриці «спотворених» вейвлет-коефіцієнтів.

Задача дешифрування полягає у вилученні цілочислових значень інтенсивності білого кольору у кожному пікселі зашифрованого повідомлення шляхом застосування прямого вейвлет-перетворення отриманої матриці «спотвореного» зображення та порівняння з матрицею вейвлет-перетворення використovanого еталонного зображення. Слід підкреслити, що розміри зображення-контейнера не перевищують розмірів зображення секретного графічного повідомлення. Якщо ж зображення-контейнер має більші розміри ніж саме приховане повідомлення, то вибір послідовності коефіцієнтів матриці вейвлет-перетворення для «приклеювання» надає досить широкі можливості додаткового ускладнення ситуації проти спроб атаки стегоповідомлення. Окремим випадком є ситуація, коли розміри зображення-контейнера є меншими, ніж розміри зображення-повідомлення. В цьому разі з'являється можливість додаткового ускладнення атаки на стегофайл, якщо створити додатковий алгоритм «стиснення» прихованого графічного повідомлення. Залишаємо поза обговоренням те, що саме графічне повідомлення може бути оброблено якимось криптографічним алгоритмом [6] або попередньо піддане якомусь іншому вейвлет-перетворенню.

4. Основні результати. Перейдемо до особи, яка передає секретне графічне повідомлення. Отже, будемо розглядати підготовче перетворення еталонного зображення для створення файлу-контейнера використовуючи вейвлет-перетворення Добеші четвертого порядку. Викладемо етапи роботи алгоритму за кроками, обмежуючись лише зображенням у «градациях сірого». Безумовно, використання повної гами кольорів надає додаткові можливості захисту конфіденційного повідомлення, запобігаючи успішності атаки на стего-файл. Наприклад, зображення у стандартах RGB або CMY мають три складники, за рахунок яких можна поглибити рівень шифрування або збільшити розмір повідомлення, що підлягає передачі.

Нехай еталонне зображення містить $M \times N$ точок-пікселів. Зручно вибрати розмір так, щоб кожне з чисел M та N було степенем двійки ($M = 2^p$, $N = 2^q$). Тоді зображення можна подати у вигляді матриці, елементи якої $f(x, y)$, $x = \overline{0, M-1}$, $y = \overline{0, N-1}$ - значення функції двох змінних є інтенсивності білого кольору, числові значення якої в межах від 0 до 255. Слід зауважити, що в системі комп'ютерної математики (СКМ) MathCad зображення можна подати у вигляді матриці $A_{x,j}$, $i = \overline{0, M-1}$, $j = \overline{0, N-1}$, кожен елемент a_{ij} якої містить згадуване значення інтенсивності білого. Таким чином, робота із функцією $f(x, y)$ в системі комп'ютерної математики MathCad зводиться до роботи з матрицею A . На рис. 1 бачимо еталонне зображення «Lena» (512×512 пікселів) та матрицю L , що йому відповідає.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	162	162	162	161	162	157	163	161	166	162
1	162	162	162	161	162	157	163	161	166	162
2	162	162	162	161	162	157	163	161	166	162
3	162	162	162	161	162	157	163	161	166	162
4	162	162	162	161	162	157	163	161	166	162
5	164	164	158	155	161	159	159	160	161	160
6	160	160	163	158	160	162	159	156	159	163
7	159	159	155	157	158	159	156	157	159	162
8	155	155	158	158	159	160	157	157	163	157
9	155	155	157	158	155	154	155	157	161	155
10	156	156	156	160	156	155	155	152	159	159
11	156	156	156	159	159	155	150	148	160	159
12	158	158	157	156	157	153	159	156	161	158
13	157	157	157	157	160	157	156	156	159	155
14	158	158	159	155	155	158	158	156	157	156
15	158	158	159	157	155	158	157	154	158	158

Рисунок 1 – Еталонне зображення «Lena» та матриця, що йому відповідає.

Відмітимо загальновідомий факт, що у 1987 Інґрид Добеші сконструювала ортонормований базис вейвлетів, що залишається ключовим і сьогодні для багатьох вейвлет-додатків [7].

Для створення стегофайлу з прихованим повідомленням потрібно виконати таку послідовність дій.

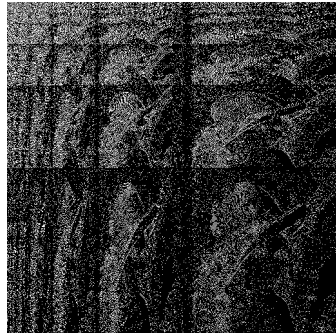
1. Попередня обробка зображення полягає у застосуванні двовимірного вейвлет-перетворення Добеші четвертого порядку W до функції $f(x, y)$, яка відповідає матриці L . Отримаємо

$$f'(x, y) = W[f(x, y)], \text{ або } f(x, y) \xrightarrow{W} f'(x, y).$$

В пакеті MathCAD вейвлет-перетворення Добеші четвертого порядку представлено функціями *wave* та *iwave* – відповідно пряме та обернене перетворення. Причому аргументами даних функцій повинні бути дійсні числа, а їх кількість повинна дорівнювати 2^m , де m – ціле число. Оскільки аргументом функцій *wave* та *iwave* є вектор-стовпчик або вектор-рядок даних, то обробка (двовимірне вейвлет-перетворення) всього зображення відбувається за рядками, а потім за стовпчиками – по чергово. В результаті отримаємо матрицю коефіцієнтів вейвлет-перетворення Добеші A'_{x_j} тієї ж вимірності та розміру, що і початкове зображення. На рис.2 бачимо матрицю PP отриманих вейвлет-коефіцієнтів Добеші та зображення, що їй відповідає.

2. Підготовлене певне зображення X (відповідає функції $z(x, y)$), яке підлягає передачі в умовах конфіденційності може містити кількість пікселів не більшу, ніж кількість коефіцієнтів матриці (інші можливі випадки обговорювались вище). Воно може бути, безумовно, попередньо закодоване якимось з криптоалгоритмів або стиснуте тощо. Основними вимогами до таких «перетворень», що виконуються над прихованим зображенням, є наступні: по-перше, результат застосування такого перетворення (прямого і

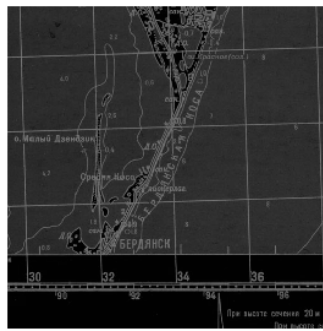
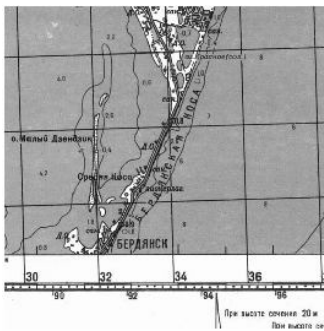
	0	1	2
0	32303.1969654389	33406.3869510251	-2190.87693360257
1	27765.3892149918	33552.6987435441	-3572.11667124146
2	5052.34154727903	-1693.21283446563	-1436.14229764542
3	-2709.39288649274	1597.94799814568	-22.9987701658558
4	446.936774257886	121.358247993831	1368.08334300313
5	885.89290480263	1728.63744213491	177.885593661272
6	447.5963010323	-81.7814902798186	-1243.12926729109
7	-600.975683771808	561.626504950556	-285.919808996274
8	200.516958490733	1061.63902225991	780.698714364885
9	93.3408951083257	-1281.74815154822	-74.2194214826491
10	1079.73811367982	1107.50313158297	-974.757134304225
11	-697.436430939079	6.77743454508286	659.712310221857
12	74.0734939022542	-532.666632078289	45.0665883419464
13	466.099339931431	451.789665624498	-436.153172378604
14	-94.8346787613225	-766.661771080127	569.10781705403
15	-502.88250430985	-280.990857988019	-276.218359924434



$\frac{PP}{7}$

Рисунок 2 – Матриця отриманих вейвлет-коефіцієнтів Добеші та відповідне їй зображення.

йому оберненого) не повинен істотно змінювати приховане повідомлення, тобо має бути перетворенням «без втрат»; по-друге, в результаті застосування такого прямого перетворення матриця зображення прихованого повідомлення повинна перетворитись на таку, що містить числа, які складаються із невеликої кількості цифр (бажано не більше трьох). Це дозволяє позбутися запису надлишкової інформації до зображення-контейнера і, таким чином, вносить мінімальні спотворення до сформованого стегофайлу. Не порушуючи загальності, і для простоти викладу виконаємо наступне перетворення P матриці секретного зображення. Оскільки матриця прихованого зображення містить переважно елементи більші ніж 150 (відповідає світло-сірому), змінимо ці значення на менші, віднявши їх значення від максимального (255) і поділивши результат на 2. Такими діями ми досягли зменшення значень елементів матриці прихованого зображення. На рисунку 3 бачимо секретне зображення X і його аналог Xp після виконання перетворення.



X

Xp

Рисунок 3 – Приховане графічне повідомлення X – задане спочатку і після застосування перетворення P – Xp .

3. На третьому етапі виконуємо «приклеювання» елементів перетвореної матриці Xp секретного графічного повідомлення X до коефіцієнтів Добеші матриці PP (відповідає функції $f'(x, y)$) перетвореного зображення-контейнера, шляхом звичайного додавання цих матриць. З метою усунення значного спотворення зображення, внаслідок зміни коефіцієнтів Добеші, «приклеювати» (додавати) числа, що є кодами символів приховуваного повідомлення, будемо до мантиси коефіцієнтів (наприклад, починаючи з 9 знаку після коми). Позначимо через d функцію домовленості, яка визначає розташування «приклеюваних» елементів перетвореної матриці Xp секретного графічного повідомлення X до коефіцієнтів Добеші. Можливості варіювати «приклеювання» досить широкі: можна починати додавання за елементами діагоналей, за рядками чи стовпчиками, випадковим чином, за домовленим порядком тощо. Функція d може бути, наприклад, функцією, що залежить від часу. В результаті отримаємо:

$$g(x, y) = f'(x, y) + S(x, y), \quad (1)$$

де $S(x, y) = d[z'(x, y)]$, $z'(x, y) = P[z(x, y)]$, або $z(x, y) \xrightarrow{P} z'(x, y)$.

Для спрощення теоретичних викладок, але не порушуючи загальності, в нашому прикладі, додамо елементи перетвореної матриці секретного графічного повідомлення до відповідних елементів матриці коефіцієнтів вейвлет-перетворення зображення-контейнера (рис. 4).

	0	1	2
0	32303.1969656029	33406.3869511891	-2190.87693343957
1	27765.3892151558	33552.6987437081	-3572.11667107846
2	5052.34154743603	-1693.21283430563	-1436.14229748242
3	-2709.39288634274	1597.94799830168	-22.9987700028558
4	446.936774414886	121.358248153831	1368.08334316613
5	885.89290495963	1728.63744229391	177.885593822272
6	447.5963011943	-81.7814901168186	-1243.12926712809
PPzminen= 7	-600.975683604808	561.626505117556	-285.919808829274
8	200.516958655733	1061.63902242391	780.698714528885
9	93.3408952683257	-1281.74815139022	-74.2194213256491
10	1079.73811384182	1107.50313174197	-974.757134147225
11	-697.436430770079	6.77743471008286	659.712310383857
12	74.0734940782542	-532.666631908289	45.0665885069464
13	466.099340105431	451.789665792498	-436.153172214604
14	-94.8346785923225	-766.661770915127	569.10781721603
15	-502.88250414485	-280.990857826019	-276.218359764434



Рисунок 4 – Матриця $PPzminen$ і відповідне їй зображення змінених вейвлет-коефіцієнтів.

4. Четвертий етап полягає у відтворенні «спотвореного» зображення. Звідси зрозуміло, що зображення мусить бути достатньо різноманітним у деталях. «Спотворене» зображення отримуємо шляхом застосування оберненого вейвлет-перетворення IW до вже змінених сторонньою (прихованою) інформацією коефіцієнтів Добеші $g(x, y)$.

$$\bar{g}(x, y) = IW[g(x, y)] \text{ або } g(x, y) \xrightarrow{IW} \bar{g}(x, y).$$

На рис. 5 наведено еталонне зображення L і «спотворене» зображення Q . Залишається передати «спотворене» зображення Q з повідомленням (відповідає функції $\bar{g}(x, y)$) адресатові.



Рисунок 5 – Візуальне порівняння еталонного зображення L і «спотвореного» зображення Q .

Як бачимо, еталонне і «спотворене» зображення візуально не відрізняються. Отже, у стороннього спостерігача не виникне підозр щодо наявності у зображенні прихованої інформації.

5. Далі відбувається передача сформованого стегофайлу Q адресатові, який має еталонне зображення L або серію (добірку) таких зображень, які вибираються за певною домовленістю; має функцію d та знає алгоритм дешифрування (обернене перетворення IP) графічного стегоповідомлення.

Для вилучення секретного повідомлення адресатові належить виконати послідовність таких дій:

1. Вибрати відповідне еталонне зображення $f(x, y)$ з набору.

2. Виконати пряме вейвлет-перетворення Добеші еталонного зображення та отриманого стегофайлу, діставши

$$f'(x, y) = Wf(x, y) \text{ або } f(x, y) \xrightarrow{W} f'(x, y),$$

$$g(x, y) = W\bar{g}(x, y) \text{ або } \bar{g}(x, y) \xrightarrow{W} g(x, y).$$

3. Порівняти функції $g(x, y)$ та $f'(x, y)$. Тобто, маючи $g(x, y)$ та $f'(x, y)$, з рівності (1) отримаємо функцію $S(x, y)$, що містить приховану інформацію, яка розміщена у певному порядку d :

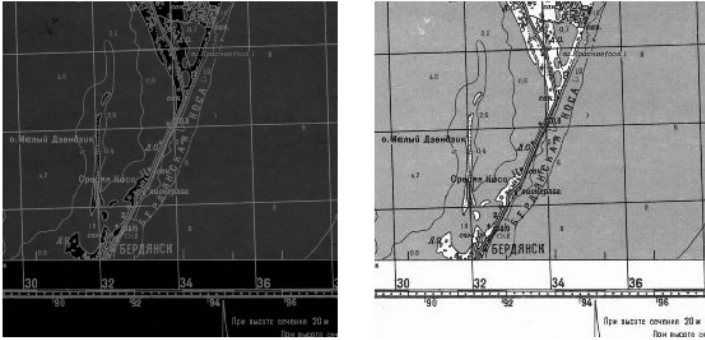
$$S(x, y) = g(x, y) - f'(x, y).$$

4. Знаючи функцію d , вилучити змінене секретне графічне повідомлення $z(x, y)$ здійснивши зворотні дії:

$$z'(x, y) = d^{-1}[S(x, y)], \quad (2)$$

$$z(x, y) = IP[z'(x, y)] \text{ або } z'(x, y) \xrightarrow{IP} z(x, y). \quad (3)$$

На рис.6 показано успішний результат роботи програми з вилучення графічного повідомлення із стегофайлу.

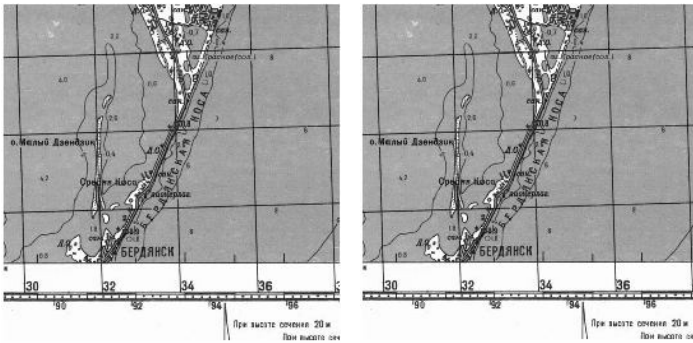


Riznytsya

255 – Riznytsya 2

Рисунок 6 – Результат роботи програми з вилучення прихованого графічного повідомлення із отриманого стегофайлу відповідно до формули (2) і формули (3).

На рис.7 для візуального порівняння наведено результат, отриманий в ході роботи програми дешифрування і оригінал секретного графічного повідомлення, що вводився на початку програми зі створення графічного стегофайлу.



255 – Riznytsya 2

X

Рисунок 7 – Візуальне порівняння результату роботи програми з вилучення прихованого графічного повідомлення із отриманого стегофайлу (зліва) і оригінала секретного графічного повідомлення (справа).

5. Висновки. Таким чином, у даній роботі успішно реалізовано алгоритм створення стегофайлу на стандартному зображенні-контейнері – «Lena», що представлено у «градациях сірого» з використанням вейвлетів Добеші 4 порядку. Про це свідчить візуальне порівняння еталонного зображення L і зображення Q отриманого стегофайлу – рис. 5. А також успішно реалізовано алгоритм вилучення секретного графічного повідомлення із отриманого зображення – стегофайлу Q , про що свідчить візуальне порівняння результату роботи програми дешифрування (зображення «255 – Riznytsya · 2») і оригінала секретного графічного повідомлення (зображення « X ») на рис. 7.

Зауважимо, що для роботи запропонованого алгоритму можна використовувати й інші вейвлет-перетворення (Морле, Хаара тощо). Також у якості контейнера можна застосовувати кольорові зображення RGB чи CMY, що дає змогу поглиблювати рівень шифрування або збільшувати розмір секретного графічного повідомлення, яке підлягає передачі.

Слід також зауважити те, що переданим може бути не зображення, а матриця коефіцієнтів. Це також утруднює атаку стегано-файлу – на якому носіїві-зображенні йде повідомлення. Вибір носія-зображення може бути оголошеним в останню мить. Безперечно, що при дефіциті часу, особливо коли цінність конфіденційного повідомлення з часом стає нульовою, дешифрування повідомлення буде досить проблематичним.

6. Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективними напрямки досліджень, пов'язані зі створенням стегоконтейнерів, що містять приховану графічну інформацію на основі рухомих зображень, що є відео-файлами (неперервний потік кодованої інформації), та вейвлетів. Також важливим є дослідження алгоритмів такого типу за обчислювальною складністю, пропускну здатністю каналу та стеганостійкістю [3].

Список літератури: 1. *Задірака В.К., Мельникова С.С., Бородавка Н.В.* Спектральні алгоритми комп'ютерної стеганографії //Искусственный интеллект. - 2002. - № 3.- С.532 - 541. 2. *Бородавка Н.В., Задірака В.К.* Стеганоалгоритми на базі теореми о свертке // Кибернетика и системный анализ.-2004.-№1.-С. 139- 144. 3. *Задірака В.К., Мельникова С.С., Кошкіна Н.В.* Ефективні алгоритми побудови стегоконтейнерів з використанням швидкого перетворення Фур'є. Праці Міжнародної конференції «Питання оптимізації обчислень (ПОО XXXII)», присвяченої пам'яті академіка В.С. Михалевича. – Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2005. – С. 78-79. 4. *Яценко В. В.* Введение в криптографию. – М.: МЦНМО – ЧеРо, 1999. – 186 с. 5. *Шмаев В. Б.* Современная стеганография. Принципы, основные носители и методы противодействия. <http://www.re.mipt.ru/infsec> 6. *Доробота А. І., Манжула О. В., Кулик С. І.* Шифрування зображень з використанням алгоритму RSA та вейвлетів Добеші. Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – № 3. – Бердянськ: БДПУ, 2005. – С. 189-197. 7. *Добеші И.* Десять лекцій по вейвлетам. – М.: Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. - 464 с.

Надійшла до редколегії 06.10.2010

В.П. ЛЯШЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, КНУ ім. М.Остроградського, Кременчук
В.А. ВАНИН, д-р. техн. наук, ПІМАШ ім. А.М.Підгорного,
проф. НТУ “ХПІ”, Харків

ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ПОРОШКОВІЙ МЕТАЛУРГІЇ

Із єдиної точки зору розглянуті математичні моделі теплових процесів, які протікають під час спікання, пресування, відпалу і виробництва проволочи методами порошкової металургії. В якості математичних моделей використовуються початково-крайові для лінійного або нелінійного рівнянь теплопровідності. При розв'язанні задач по визначенню параметрів управління нагріванням розглядається нелокальна інтегральна умова. Запропоновані алгоритми розв'язання таких задач.

From the single point of view the mathematical models of thermal processes, which flow during sintering, pressing, annealing and wire production the methods of powder metallurgy, are considered. In basis of mathematical models nonlinear initially boundary problems are examined for linear or nonlinear equation of heat conductivity. At the problems for determination of actuating error heating a nonlocal integral condition is examined. The algorithms of solution of the formulated problems are offered.

1. Вступ. У порошковій металургії під час виробництва дроту та виробів іншого призначення широке застосування знаходять технологічні процеси термічної обробки рухомих та нерухомих об'єктів. Термічна обробка тут використовується як самостійна операція, так і в комплексі з пластичною деформацією [1-5]. Це викликано вимогами до якості кінцевого продукту. Тому поряд з пластичною деформацією застосовуються різні види термічної обробки як зовнішніми так і внутрішніми джерелами тепла [4,5]. Особливо важливе значення має термічна обробка, яка дозволяє формувати певні фізико-механічні властивості металів та композитних матеріалів. Окрім звичайних методів термічної обробки тут застосовується термоциклічна та імпульсна обробка, яка особливо ефективна під час отримання надтонкого дроту із застосуванням технології електропластичного деформування [4,5].

2. Аналіз публікацій по темі дослідження. У роботах [7-14] проведені дослідження теплових процесів, що відбуваються під час спікання порошкових матеріалів, різних видів їх термічної обробки, а також теплових процесів, що протікають під час волочіння дроту. Тут запропоновані математичні моделі, що описують температурні розподіли під час обробки рухомого дроту та виробів циліндричної форми. У якості математичних моделей розглядаються початково-крайові задачі для лінійного та квазілінійного рівняння теплопровідності у циліндричній системі координат (r, z, φ, t) . Особливостями таких моделей є те, що задачі, які лежать у їх основі, описують теплові про-

цеси рухомого та нерухомого середовища за допомогою різних видів рівняння теплопровідності .

З математичної точки зору дослідження температурних розподілів рухомих та нерухомих осесиметричних об'єктів можна вести розглядаючи різні початково-крайові задачі для одного лінійного або нелінійного рівняння теплопровідності, уводячи певні обмеження у рівняння та залучаючи відповідні крайові умови, що характеризують фізичні особливості процесу нагрівання. Оскільки більшість температурних розподілів, що виникають під час нагрівання виробів циліндричної форми не залежать від координати φ , то частиною похідною у рівнянні теплопровідності по цій змінній можна знехтувати. Дріт та інші вироби циліндричної форми розглядаються у вигляді рухомого або нерухомого циліндричного ізотропного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками та параметрами з довжиною зони нагрівання L . При цьому досліджуються математичні моделі температурних полів у яких діють як зовнішні так і внутрішні джерела тепла. Внутрішні джерела тепла $W(z, t, T)$ спричинені дією електричного струму, що пропускається через середовище або індукується у ньому, а зовнішні спричиняються теплообміном з навколишнім середовищем за законами Ньютона та Стефана-Больцмана. У математичній моделі – рівнянні теплопровідності – внутрішні джерела тепла зображаються у вигляді фінітної функції $W(z, t, T)$, а зовнішні – у вигляді граничних умов першого, другого або третього роду.

Розглядався вплив нелінійностей у крайових умовах на температурний розподіл.

3. Мета дослідження. Метою дослідження є зведення математичних моделей, що описують температурні поля під час спікання виробів, різних видів їх термічної обробки до дослідження початково-крайових задач для одного виду рівняння теплопровідності, у циліндричній області з діючими внутрішніми або зовнішніми джерелами тепла та відповідними крайовими умовами, а також з залученням нелокальної інтегральної умови.

4. Основна частина. Математична модель температурного поля циліндричної області $\Omega \times t : \{0 < r < r_0, 0 < z < L, t > 0\}$, має вигляд однієї із крайових задач для наступного неоднорідного нестационарного нелінійного рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + v(t) \frac{\partial T}{\partial z} - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T) \quad (1)$$

Якщо коефіцієнт теплопровідності $\lambda(T)$ лінійно залежить від температури, то нелінійне рівняння (1) перетворенням Кирхгофа [6] можна звести до лінійного. Подальше спрощення рівняння, шляхом застосування інтегрального перетворення (усереднення по радіусу), можна проводити коли температурне поле не залежить від зміни радіуса r та розглядається друга або третя крайова задача по радіусу [8-11]. Таке інтегральне перетворення дозволяє зменшити розмірність рівняння. Якщо задача стаціонарна або квазістаціонарна, то ми приходимо до лінійної або нелінійної крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку. У першому випадку задача допускає аналітичний розв'язок, а у другому розв'язок знаходиться чисельними методами.

Якщо досліджується температура поле для рухомого середовища, що розігрівається постійно діючими внутрішніми джерелами тепла, то до рівняння (1) додаються наступні крайові умови

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (2)$$

$$T(r, 0, t) = T_1(t), \quad T(r, L, t) = T_2(t) \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \pm \left[\alpha f_2^i(t)(T_c - T) + \varepsilon \sigma f_2^i(t)(T_c^4 - T^4) \right] \quad (4)$$

де $\alpha, \varepsilon, \sigma$ – коефіцієнт тепловіддачі, степінь чорноти та постійна Стефана-Больцмана, r_0 – радіус, $T_c > T_0$, функція $W(z, t, T) = f_1(T) f_2^i(t)$, $f_1(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$, $f_2^i(t) = 1$ [11-13]. У граничній умові (4) слід розглядати перед квадратними дужками знак мінус.

Коли ж рухоме середовище розігрівається одночасно постійно діючими внутрішніми та зовнішніми джерелами тепла, то в умові (4) перед квадратними дужками слід розглядати знак плюс.

Математична модель, що описує температурне поле надтонкого дроту під час електропластичної обробки [11-13] відрізняється у своїй постановці від задачі (1)-(4) функцією $W(z, t, T)$ у рівнянні (1). Тут функції $f_1(T)$ та $f_2^i(t)$ мають вигляд

$$f_1(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4},$$

$$f_2^i(z) = \begin{cases} m\frac{z}{l_0} - mn, & nl_0 \leq z \leq \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 \\ 0, & \left(n + \frac{1}{m}\right)l_0 \leq z \leq (n+1)l_0, z < 0 \end{cases}, f_2^i(t) = \begin{cases} m\frac{t}{t_0} - mn, & nt_0 \leq t \leq \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 \\ 0, & \left(n + \frac{1}{m}\right)t_0 \leq t \leq (n+1)t_0, t < 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Аналітичні розв'язки спрощених задач та чисельні розв'язки задач (1)-(4), (5) отримано у роботі [12]. Побудовано графіки температурних розподілів.

У математичних моделях температурного поля нерухомої циліндричної області рівняння (1) не містить доданка з $\frac{\partial T}{\partial z}$. Тут $v(t) = 0$. Тоді для процесу одноциклового відпалу з внутрішніми джерелами тепла маємо рівняння у області $\Omega \times t : \{0 < r < r_0, 0 < z < L, t > 0\}$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - c \rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(z, t, T), \quad (6)$$

у якому $W(z, t, T) = f_1(T) f_2^i(t)$, $f_1(T) = \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T)}{\pi^2 r_0^4}$, $f_2^i(t) = 1$.

Умови (2)-(4), що долучаються до цього рівняння відображають взаємодію поверхні нерухомого циліндра з навколишнім середовищем. Коли бічна поверхня циліндра втрачає тепло з поверхні, то у правій частині умови (4) слід поставити знак мінус.

Коли розглядається математична модель одноциклової термічної обробки зовнішніми джерелами тепла, то у рівнянні (1) слід покласти $v(t) = 0$, $W(z, t, T) = 0$. Циліндрична поверхня розігрівається за рахунок теплообміну через бічну поверхню. В умові (4), у правій частині слід поставити знак плюс перед квадратними дужками. Отримана крайова задача розв'язується чисельними методами з залученням однієї з неявних різницевих схем [15].

Окрім одноциклових відпалів застосовуються багаточиклові, так звана термоциклічна обробка [7,9]. Тут у крайових задачах, що відображають відповідні математичні моделі, функції $f_2^i(t)$ мають вигляд

$$f_2^3(t) = 0,5 \left(1 - \cos \frac{t}{t_0} \right), \quad f_2^4(t) = \left| \sin \left(\frac{t}{t_0} \right) \right|,$$

$$f_2^5(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_0} - 2n, & 2nt_0 < t < (2n+1)t_0, \\ -\frac{t}{t_0} + 2(n+1), & (2n+1)t_0 < t < (2n+2)t_0, \end{cases} \quad (7)$$

t_0 – час одного термоциклу.

Розв'язки крайових задач, що моделюють процеси термоциклічної обробки навіть після застосування інтегрального перетворення по одній із координат можна отримати лише чисельними методами. Найбільш ефективним чисельним методом розв'язку таких задач є застосування неявних різницевих схем, зокрема схеми Кранка-Ніколсона [15].

Після усереднення по радіусу задача для рівняння (6) розв'язується чисельним методом в скінченно мірному сепарабельному просторі з нормою $\|u(z,t)\|_U = \max_{z,t \in \Omega} |u(z,t)|$. Кінцево-різницева схема Кранка-Ніколсона для рівняння (6) у області $\Omega \times t : \{0 < z < L, t > 0\}$ після введення рівномірної сітки по координатам z та t має вигляд системи нелінійних алгебраїчних рівнянь для сіткової функції $u_{i,j}$.

$$c\rho_n \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\lambda}{2h^2} (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + F(u_{i,j}, t)$$

Отримана система розв'язується ітераційним методом.

У роботах [9,11] проведені чисельні розрахунки температурних розподілів для одноциклової та термоциклічної обробки виробів циліндричної форми.

Особливе місце при побудові математичних моделей теплових процесів під час спікання та термічної обробки має залучення до крайової задачі замість однієї із крайових умов або додатково нелокальної інтегральної умови

$$a_1 \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^{r_0} [T(z,t) - T_0] dr dz d\varphi + a_2 \int_0^{2\pi} \int_0^L [T(r,z) - T_c] dz d\varphi = a_3 \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_0^{r_0} [1 + \beta T(z,t)] dr dz d\varphi, \quad (8)$$

де $a_1, a_2, a_3 - const$.

Ця умова визначає баланс енергії зони нагрівання. Ліва частина співвідношення (8) визначає кількість тепла, яке пішло на підвищення температури області та втрач через поверхню, а права частина – кількість виділеного дже-

релами тепла в області Ω . Якщо всі параметри математичної моделі вірно відображають фізичний процес, то масмо теплову рівновагу (ліва частина рівняння (8) буде дорівнювати правій), а якщо один із параметрів визначено або закладено у модель невірно, то будемо мати нерівність. Ця нерівність визначає нев'язку між реально існуючим температурним розподілом та визначеним за допомогою аналітичного або чисельного розрахунку температурного розподілу зони нагрівання. За величиною нев'язки визначається параметр керування температурним полем, що встановлює термодинамічну рівновагу між виділеною та затраченою енергією.

5. Висновки. Запропоновані математичні моделі можуть знайти широке застосування під час розрахунків температурних полів у зоні нагрівання рухомих та нерухомих осесиметричних середовищ. Аналіз отриманих моделей дозволяє визначати параметри керування температурними полями та проектувати системи управління ними. Залучення нелокальної інтегральної умови дозволяє з енергетичної точки зору більш точно ніж розв'язки крайових задач оцінювати температурні розподіли та відповідність розрахункових розподілів реально існуючим вимірам значень температур інструментальними методами.

Список літератури: 1. *Кинарисов С.С.* Порошковая металлургия / *С.С. Кинарисов, Г.А. Либенсон.* – М.: Металлургия, 1972. – 527 с. 2. *Крутин А.В., Соловьев В.Я.* Пластическая деформация тугоплавких металлов. – М.: Металлургия, 1971. – 350 с. 3. *Новиков И.И.* Теория термической обработки металлов. – М.: Металлургия, 1978. – 392 с. 4. *Федюкин В.К., Смагоринский М.Е.* Термоциклическая обработка металлов и деталей машин. – Л.: Машиностроение. Ленинград. отд-ние, 1989. – 255 с. 5. *Спицын В.И.* Электропластическая деформация металлов / *В.И. Спицын, О.А. Троицкий.* – М.: Наука, 1985. – 160 с. 6. *Березовский А.А.* Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики Ч.1,2. – К.: Наукова думка, 1976. – 292 с. 7. *Ляшенко В.П.* Математическое моделирование процессов твердо-фазного спекания и отжига // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Вісник 6/2002(17). – С. 30-33. 8. *Ляшенко В.П., Кирилах Н.Г. и др.* Modeling and automation of temperature processes in powder metallurgy // Вестник национального технического университета «ХПИ». – Вып. 6/2007. – Харьков: ХПИ, 2007. – С. 35-41. 9. *Ляшенко В.П., Григорова Т.А.* Моделивання процесів пресування та спікання порошкових матеріалів // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фіз.-мат. науки №1. – Запоріжжя, 2008. – С. 124-130. 10. *Троицкий О.А., Ляшенко В.П. и др.* Электропластическая деформация вольфрама // М.: ДАН СССР, 1987. – Т. 295, №5. – С. 251-255. 11. *Григорова Т.А.* Чисельні алгоритми розв'язку крайової задачі для рівняння теплопровідності // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. – Вісник 6/2009(59), ч.1. – С. 11-14. 12. *Ляшенко В.П., Кобильська О.Б.* Математична модель температурного поля рухомого ізотропного середовища // Вісник Запорізького державного університету. Сер. Фіз.-мат. науки, 2008. – №1. – С. 130-136. 13. *Ляшенко В.П., Кобильська О.Б.* Дослідження температурних розподілів рухомого середовища з імпульсними джерелами тепла // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. – Вип. 13. – №890. – 2010. – С. 115-121. 14. *Троицкий О.А.* Ультразвуковое электропластическое плавление металла / *О.А. Троицкий* // Вестник научно-технического развития. – М., 2009. – № 10 (26). – С. 42-49. 15. *Андерсон Д., Таннехилл Дж. и др.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

Надійшла до редколегії 06.09.2010

Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач, НТУ «ХПІ», Харків

ВІДНОВЛЕННЯ ОБ'ЄКТІВ, ЩО МАЮТЬ РІЗНУ ЩІЛЬНІСТЬ

В роботі запропонований загальний метод побудови розривних інтерлінаційних поліноміальних сплайнів, які як частинний випадок включають в себе розривні та неперервно-диференційовні сплайни. Сформульовані та доведені теореми про інтерлінаційні та апроксимаційні властивості таких розривних конструкцій.

In work the general method of construction explosive interlineational polinomial splines which as a special case include explosive and is continuous-differentiated splines is developed. Theorems about intarlineational and approximalational properties such explosive designs are formulated and proved.

1. Вступ. Задачі двовимірної, тривимірної та чотиривимірної комп'ютерної томографії були розглянуті детально в роботах [1,2]. Були проведені обчислювальні експерименти на прикладі головного мозку людини та рухомого серця людини. В якості вхідних даних виступали томограми, які поступають з реально діючого комп'ютерного томографу. Але в розроблених методах вважалося, що ми маємо справу з неперервними об'єктами. Насправді в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин, підшлункова залоза має свою форму та щільність тканин, хребет має свою щільність тощо). Тобто маємо справу з розривними об'єктами.

На даний час основна увага в теорії наближення функцій багатьох змінних сплайнами приділена наближенню неперервних і диференційованих функцій неперервними та диференційованими сплайнами. В той же час практика показує, що серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується розривними функціями. В роботі [3] запропоновано використовувати для більш точного опису внутрішньої структури 3D тіла апріорну інформацію про його частини за допомогою відповідних функцій трьох змінних, які входять у рівняння $W_k(x, y, z) = 0, k = \overline{1, M}$, що описують M - кількість об'єктів внутрішньої структури тіла з метою більш якісного їх відновлення методами комп'ютерної томографії. Тобто в цьому методі пропонується використовувати інформацію про внутрішню структуру тіла у вигляді розривної функції трьох змінних, яка має розриви в точках поверхонь, що відділяють сусідні підобласті.

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про

те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Наприклад, в роботі [4] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структуру тіла.

Крім того, наведемо наступний приклад. В механіці твердого тіла однією із складних задач є задача дослідження тріщин у внутрішніх точках тіла, тобто таких включень у внутрішніх точках тіла, в яких відсутній матеріал, з якого складається тіло. Можна сказати, що таке тіло має щільність, яка є розривною: за межами тріщини одна щільність, в області, обмеженою стінками тріщини – інша щільність.

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

Перший крок до розв'язання цієї задачі був зроблений в роботі [5], в якій був розроблений метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, використовуючи метод мінімакса.

Дана робота присвячена узагальненню результатів роботи [5] на випадок наближення розривної функції двох змінних за допомогою розривних сплайнів двох змінних для випадку, коли розриви першого роду наближуваної функції та розриви першого роду наближуючих сплайнів розміщені в точках прямих, паралельних осям координат. Будемо вважати, що область наближення повністю розміщена в квадраті $D = [0,1] \times [0,1]$.

2. Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області D . Припустимо, що область D розбивається прямими $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ на прямокутні елементи $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Функція $f(x, y)$ та її похідні до $\rho - 1$ порядку мають розриви першого роду на границі між цими прямокутними елементами (не обов'язково між всіма елементами). Потрібно побудувати розривний сплайн такий, щоб виконувалися інтерплінаційні та апроксимативні властивості.

3. Опис методу наближення. Введемо позначення $\phi 1_i^+(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y)$, $\phi 1_i^-(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y)$ – сліди функції $f(x, y)$ на прямих $x = x_i, i = \overline{1, m}$. Якщо $\phi 1_i^+(y) = \phi 1_i^-(y)$, то функція $f(x, y)$ є неперервною на лінії $x = x_i$, в протилежному випадку, вона має розрив на заданій лінії.

Розглянемо елемент $\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Означення. Будемо називати розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в області D відповідним заданому розбиттю на підобласті Π_{ij} наступну функцію:

$$S(x, y) = S_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij},$$

$$S_{ij}(x, y) = S1_{ij}(x, y) + S2_{ij}(x, y) - S12_{ij}(x, y), \quad (x, y) \in \Pi_{ij} \subset D, \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} S1_{ij}(x, y) &= S1_{ij}(x, y; \{\varphi1_{i-1,s}(y)\}; \{\varphi1_{i,s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}) = \\ &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi1_{i-1,s}^+(y) \cdot h1_{i-1,s}(x) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi1_{i,s}^-(y) \cdot h1_{i,s}(x); \\ S2_{ij}(x, y) &= S2_{ij}(x, y; \{\varphi2_{j-1,p}(x)\}; \{\varphi2_{j,p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \\ &= \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi2_{j-1,p}^+(x) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi2_{j,p}^-(x) \cdot h2_{j,p}(y); \\ S12_{ij}(x, y) &= S12_{ij}(x, y; \{\varphi1_{i-1,s}(y)\}; \{\varphi1_{i,s}(y)\}, s = \overline{0, \rho-1}, \\ &\quad \{\varphi2_{j-1,p}(x)\}; \{\varphi2_{j,p}(x)\}, p = \overline{0, \rho-1}) = \\ &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} h1_{i-1,s}(x) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} h1_{i-1,s}(x) h2_{j,p}(y) + \\ &\quad + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} h1_{i,s}(x) h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} h1_{i,s}(x) h2_{j,p}(y), \end{aligned}$$

$h1_{k,s}(x), h2_{l,p}(y)$ - базисні поліноми Ерміта степеня $2\rho-1$ з властивостями:

$$\begin{aligned} h1_{k,s}^{(s')}(\mathbf{x}_{k'}) &= \delta_{k,k'} \delta_{s,s'}, \quad k, k' \in \{i-1, i\}, \quad s, s' \in \{0, \rho-1\} \\ h2_{l,p}^{(p')}(\mathbf{y}_{l'}) &= \delta_{l,l'} \delta_{p,p'}, \quad l, l' \in \{j-1, j\}, \quad p, p' \in \{0, \rho-1\} \end{aligned}$$

Теорема 1. Якщо

$$\begin{aligned} (\varphi1_{i,s}^+(y_j))^{(p)} &= (\varphi2_{j,p}^+(x_i))^{(s)} = C^{++}_{ijsp}, \\ (\varphi1_{i,s}^-(y_j))^{(p)} &= (\varphi2_{j,p}^+(x_i))^{(s)} = C^{-+}_{ijsp}, \quad (\varphi1_{i,s}^-(y_j))^{(p)} = (\varphi2_{j,p}^-(x_i))^{(s)} = C^{--}_{ijsp}, \\ (\varphi1_{i,s}^+(y_j))^{(p)} &= (\varphi2_{j,p}^-(x_i))^{(s)} = C^{+-}_{ijsp}, \end{aligned}$$

то на границі прямокутника Π_{ij} функція $S_{ij}(x, y)$ задовольняє наступним співвідношенням

$$\left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_{i-1}} = \varphi 1_{i-1, s'}^+(y), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \varphi 1_{i, s'}^-(y), \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad s' = \overline{0, \rho-1}$$

$$\left. \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_{j-1}} = \varphi 2_{j-1, p'}^+(x), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^{p'} S_{ij}(x, y)}{\partial y^{p'}} \right|_{y=y_j} = \varphi 2_{j, p'}^-(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad p' = \overline{0, \rho-1}$$

Доведення. Підставимо у формулу (1) $x = x_{i-1}$. В результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} S_{ij}(x_{i-1}, y) &= S1_{ij}(x_{i-1}, y) + S2_{ij}(x_{i-1}, y) - S12_{ij}(x_{i-1}, y), = \\ &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1, s}^+(y) \cdot h1_{i-1, s}(x_{i-1}) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i, s}^-(y) \cdot h1_{i, s}(x_{i-1}) + \\ &+ \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1, p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1, p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j, p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j, p}(y) - \\ &- \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1, j-1, s, p}^{++} h1_{i-1, s}(x_{i-1}) h2_{j-1, p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1, j, s, p}^{+-} h1_{i-1, s}(x_{i-1}) h2_{j, p}(y) + \\ &+ \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i, j-1, s, p}^{-+} h1_{i, s}(x_{i-1}) h2_{j-1, p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i, j, s, p}^{--} h1_{i, s}(x_{i-1}) h2_{j, p}(y) = \\ &= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1, s}^+(y) \cdot \delta_{i-1, i-1} \delta_{s, 0} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i, s}^-(y) \cdot \delta_{i, i-1} \delta_{s, 0} + \\ &+ \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1, p}^+(x_{i-1}) \cdot h2_{j-1, p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j, p}^-(x_{i-1}) \cdot h2_{j, p}(y) - \\ &- \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1, j-1, s, p}^{++} \delta_{i-1, i-1} \delta_{s, 0} h2_{j-1, p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1, j, s, p}^{+-} \delta_{i-1, i-1} \delta_{s, 0} h2_{j, p}(y) + \\ &+ \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i, j-1, s, p}^{-+} \delta_{i, i-1} \delta_{s, 0} h2_{j-1, p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i, j, s, p}^{--} \delta_{i, i-1} \delta_{s, 0} h2_{j, p}(y) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi 1^+_{i-1,0}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^+_{j-1,p}(x_{i-1}) \cdot h 2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^-_{j,p}(x_{i-1}) \cdot h 2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,0,p}^{++} h 2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,0,p}^{+-} h 2_{j,p}(y) = \\
&\quad = \left| \begin{array}{l} C_{i-1,j-1,0,p}^{++} = \varphi 2^+_{j-1,p}(x_{i-1}) \\ C_{i-1,j,0,p}^{+-} = \varphi 2^-_{j,p}(x_{i-1}) \end{array} \right| = \\
&= \varphi 1^+_{i-1,0}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^+_{j-1,p}(x_{i-1}) \cdot h 2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^-_{j,p}(x_{i-1}) \cdot h 2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^+_{j-1,p}(x_{i-1}) h 2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2^-_{j,p}(x_{i-1}) h 2_{j,p}(y) = \varphi 1^+_{i-1,0}(y)
\end{aligned}$$

Таким чином, ми довели, що

$$S_{i,j}(x_{i-1}, y) = \varphi 1^+_{i-1,0}(y), \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j.$$

Аналогічно доводяться рівності, коли у формулу (1) підставляємо $x = x_i$, $y = y_{j-1}$, $y = y_j$.

Припустимо, що $1 \leq s' \leq \rho - 1$. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned}
&\left. \frac{\partial^{s'} S_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \left. \frac{\partial^{s'} S 1_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} + \left. \frac{\partial^{s'} S 2_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} - \left. \frac{\partial^{s'} S 12_{ij}(x, y)}{\partial x^{s'}} \right|_{x=x_i} = \\
&= \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^+_{i-1,s}(y) \cdot \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h 1_{i-1,s}(x) \right|_{x=x_{j-1}} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1^-_{i,s}(y) \cdot \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h 1_{i,s}(x) \right|_{x=x_{j-1}} + \\
&\quad \sum_{p=0}^{\rho-1} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} \varphi 2^+_{j-1,p}(x) \right|_{x=x_{j-1}} \cdot h 2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} \varphi 2^-_{j,p}(x) \right|_{x=x_{j-1}} \cdot h 2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h 1_{i-1,s}(x) \right|_{x=x_{j-1}} h 2_{j-1,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h 1_{i-1,s}(x) \right|_{x=x_{j-1}} h 2_{j,p}(y) - \\
&\quad - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{+-} \left. \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h 1_{i,s}(x) \right|_{x=x_{j-1}} h 2_{j-1,p}(y) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \frac{\partial^{s'}}{\partial x^{s'}} h1_{i,s}(x) \Big|_{x=x_{i-1}} h2_{j,p}(y) = \\
& = \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i-1,s}^+(y) \cdot \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} + \sum_{s=0}^{\rho-1} \varphi 1_{i,s}^-(y) \cdot \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} + \\
& + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j-1,p}^{+(s')} (x_{i-1}) \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} \varphi 2_{j,p}^{-(s')} (x_{i-1}) \cdot h2_{j,p}(y) - \\
& - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s,p}^{++} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s,p}^{+-} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j,p}(y) - \\
& - \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j-1,s,p}^{-+} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j-1,p}(y) + \sum_{s=0}^{\rho-1} \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i,j,s,p}^{--} \delta_{i-1,i-1} \delta_{s',s} h2_{j,p}(y) = \\
& = \left| C_{i-1,j-1,s',p}^{++} = \varphi 2_{j-1,p}^{+(s')} (x_{i-1}) \right| = \\
& = \varphi 1_{i-1,s'}^+(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s',p}^{++} \cdot h2_{j-1,p}(y) + \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s',p}^{-+} \cdot h2_{j,p}(y) - \\
& - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j-1,s',p}^{++} h2_{j-1,p}(y) - \sum_{p=0}^{\rho-1} C_{i-1,j,s',p}^{-+} h2_{j,p}(y) = \varphi 1_{i-1,s'}^+(y) .
\end{aligned}$$

Аналогічно доводяться властивості (2) при $x = x_i$ та властивості (3).

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо

$$\varphi 1_{i,s}^-(y) = \varphi 1_{i,s}^+(y) = \varphi 1_{i,s}(y), \quad s = \overline{0, \mu}, 0 \leq \mu \leq \rho - 1,$$

$$\varphi 2_{j,p}^-(x) = \varphi 2_{j,p}^+(x) = \varphi 2_{j,p}(x), \quad p = \overline{0, \nu}, 0 \leq \nu \leq \rho - 1,$$

то функція $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$, $(x, y) \in \Pi_{ij}$ буде мати такі властивості:

$$S(x, y) \in C^{\mu, \nu}(D).$$

$$\frac{\partial^{s'} S(x, y)}{\partial x^{s'}} \Big|_{x=x_i} = \varphi 1_{i,s'}(y), \quad i = \overline{1, m}, \quad s' = \overline{0, \mu}, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^{p'} S(x, y)}{\partial y^{p'}} \Big|_{y=y_j} = \varphi 2_{j,p'}(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad p' = \overline{0, \nu}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (5)$$

Доведення витікає з того, що якщо функції $\varphi 1_{i,s}(y) \in C^{\rho-1}[x_{i-1}, x_i]$, $\varphi 2_{j,p}(x) \in C^{\rho-1}[y_{j-1}, y_j]$, то в кожному елементі Π_{ij} функція $S_{ij}(x, y)$ буде належати класові $C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{ij})$. Таким чином функція $S(x, y)$ в кожному з елементів Π_{ij} належить до класу $C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{ij})$ і на

границі між сусідніми з Π_{ij} елементами зберігає неперервність похідних до порядків μ, ν відповідно, оскільки доведення властивостей (4), (5) проводиться по аналогії з доведенням властивостей в в теоремі 1.

Теорема 2 доведена.

Зауваження 1. Таким чином, якщо умови теореми 2 виконуються, то функція $S(x, y)$ має розривні частинні похідні порядків більших, ніж μ по x та більших, ніж ν по y відповідно.

Зауваження 2. В принципі припускається, що розриви функції $S(x, y)$ та її частинних похідних до відповідних порядків можуть існувати лише на границях одного або декількох елементів.

Теорема 3. Якщо функції $\varphi 1_{i,s}^+(y), \varphi 1_{i,s}^-(y)$ є поліномами (взагалі кажучи, різними) степеня $Q \geq 2\rho - 1$ і функції $\varphi 2_{j,p}^+(x), \varphi 2_{j,p}^-(x)$ є поліномами (взагалі кажучи, різними) степеня $Q \geq 2\rho - 1$, то функція $S(x, y)$ буде кусково-поліноміальним розривним сплайном, який є поліномом від двох змінних на кожному прямокутнику $\Pi_{ij} \subset D$. Зокрема, якщо $Q = 2\rho - 1$, то $S(x, y)$ буде розривним кусково-поліноміальним сплайном від (x, y) степеня $2\rho - 1$ по кожній змінній.

Доведення витікає з того, що функції $S_{ij}(x, y)$ використовують поліноміальні базисні функції Ерміта і у припущеннях теореми 3 будуть поліномами. Якщо $Q = 2\rho - 1$, то $S_{ij}(x, y)$ буде поліномом степеня $2\rho - 1$ за кожною змінною. Якщо при цьому не виконуються умови теореми 2, то така функція $S_{ij}(x, y)$ буде мати розриви між різними елементами.

Теорема 3 доведена.

Зауваження 3. Ще раз підкреслимо, що ці розриви не обов'язково можуть бути на границі між всіма елементами. Більш того, не вимагається, щоб на всіх чотирьох сторонах кожного елемента сплайн мав розривні похідні порядків $\mu + 1, \mu + 2, \dots, \rho - 1$ та $\nu + 1, \nu + 2, \dots, \rho - 1$ по x та y відповідно.

Теорема 4. Припустимо, що наближувана функція $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$ і $\varphi 1_{i-1,s}^+(y) \neq \varphi 1_{i,s}^-(y), \varphi 2_{j-1,p}^+(x) \neq \varphi 2_{j,p}^-(x), s, p = \overline{0, \rho - 1}$. Тоді, якщо у $S(x, y)$ покласти

$$\begin{aligned} \varphi 1_{i,s}^-(y) &= \varphi 1_{i,s}^+(y) = f^{(s',0)}(x_{i'}, y), \quad i' \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad i' \neq i-1, \quad i' \neq i, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ \varphi 2_{j',p}^-(x) &= \varphi 2_{j',p}^+(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j'}), \quad j' \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad j' \neq j-1, \quad j' \neq j, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi 1_{i-1,s}^-(y) &= \varphi 1_{i-1,s}^+(y) = f^{(s,0)}(x_{i-1}, y), \quad 0 \leq y \leq y_{j-1} \quad \text{або} \quad y_j \leq y \leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi 2_{j-1,p}^{-}(x) &= \varphi 2_{j-1,p}^{+}(x) = f^{(0,p)}(x, y_{j-1}), \quad 0 \leq x \leq x_{i-1} \text{ або } x_i \leq x \leq 1, \\
\varphi 1_{i-1,s}^{+}(y) &= f^{(s,0)}(x_{i-1} + 0, y), \quad \varphi 1_{i,s}^{-}(y) = f^{(s,0)}(x_i - 0, y) \\
\varphi 1_{i-1,s}^{-}(y) &= f^{(s,0)}(x_{i-1} - 0, y), \quad \varphi 1_{i,s}^{+}(y) = f^{(s,0)}(x_i + 0, y)^{\prime} \\
\varphi 2_{j-1,p}^{+}(x) &= f^{(0,p)}(x, y_{j-1} + 0), \quad \varphi 2_{j,p}^{-}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j - 0) \\
\varphi 2_{j-1,p}^{-}(x) &= f^{(0,p)}(x, y_{j-1} - 0), \quad \varphi 2_{j,p}^{+}(x) = f^{(0,p)}(x, y_j + 0)^{\prime}
\end{aligned}$$

то отримана функція $S(x, y)$ буде належати до класу $C^{\rho-1, \rho-1}(D)$ і буде розривною разом із своїми похідними до порядку $\rho-1$ за кожною змінною лише на границі елемента Π_{ij} .

Доведення витікає з того, що на границі між всіма елементами (за виключенням елемента Π_{ij}) функція $S(x, y)$ буде мати неперервні похідні до порядку $\rho-1$ включно і лише на границі елемента Π_{ij} може бути розривною разом із своїми частинними похідними. Тобто така функція буде належати класу $S(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(D \setminus \overline{\Pi_{kl}})$.

Теорема 4 доведена.

Теорема 5. Якщо виконуються умови теореми 4, то для похибки наближення такої розривної функції $f(x, y)$ відповідним розривним інтерлінаційним сплайном $S(x, y)$ буде виконуватись співвідношення:

$$\begin{aligned}
|f(x, y) - S(x, y)| &= O(\Delta 1^{2\rho} \Delta 2^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{kl} \neq \Pi_{i,j}, \\
\Delta 1 &= \max_k(x_k - x_{k-1}), \quad \Delta 2 = \max_l(y_l - y_{l-1}) \\
|f(x, y) - S(x, y)| &= O(\Delta i^{2\rho} \Delta j^{2\rho}), \quad (x, y) \in \Pi_{i,j}, \\
\Delta i &= x_i - x_{i-1}, \quad \Delta j = y_j - y_{j-1}, \quad (i, j) \neq (k, l)
\end{aligned}$$

при умові, що $f(x, y) \in C^{\rho-1, \rho-1}(\Pi_{i,j})$.

Доведення. Оператор $S_{ij}(x, y) = S_{ij}f(x, y)$ згідно з означенням 1 може бути записаний у вигляді

$$S_{ij}f(x, y) = S1_{ij}f(x, y) + S2_{ij}f(x, y) - S12_{ij}f(x, y).$$

Згідно з теоремою 3.2.1 роботи [3] залишок наближення формулами інтерлінації виражається як операторний добуток залишків наближення функції $f(x, y)$ операторами $S1_{ij}f(x, y)$ та $S2_{ij}f(x, y)$

$$\begin{aligned}
RS_{ij}f(x, y) &= (f(x, y) - S_{ij}f(x, y)) = \\
&= (f(x, y) - S1_{ij}f(x, y) - S2_{ij}f(x, y) + S12_{ij}f(x, y)) = \\
&= (f(x, y) - S1_{ij}f(x, y))(f(x, y) - S2_{ij}f(x, y)) = RS1_{ij}f(x, y)RS2_{ij}f(x, y).
\end{aligned}$$

В цьому випадку оцінка похибки витікає з наслідку 3 до теореми 3.2.2 роботи [3].

Теорема 5 доведена.

Приклад. Нехай $\rho = 1, m = 2, n = 2$. Задамо вузли: $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, y_0 = 0, y_1 = 0.5, y_2 = 1$.

Тобто область визначення наближуючої функції (рис.1) складається з чотирьох прямокутних елементів, які задаються наступним чином:

$$\Pi_{11} = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}, \quad \Pi_{12} = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y_1 < y < y_2\},$$

$$\Pi_{21} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_0 < y < y_1\}, \quad \Pi_{22} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

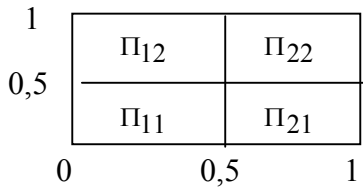


Рисунок 1 – Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$.

Задамо функцію $f(x, y)$ в кутових точках елементів Π_{ij} наступним чином:

$$\Pi_{11} : f^{+,+}(0;0) = f(0+0;0+0) = 1$$

$$f^{+,-}(0;0.5) = f(0+0;0.5-0) = 2$$

$$f^{-,-}(0.5;0.5) = f(0.5-0;0.5-0) = 1$$

$$f^{-,+}(0.5;0) = f(0.5-0;0+0) = 2$$

$$\Pi_{12} : f^{+,+}(0;0.5) = f(0+0;0.5+0) = 1$$

$$f^{+,-}(0;1) = f(0+0;1-0) = 2$$

$$f^{-,-}(0.5;1) = f(0.5-0;1-0) = 1$$

$$f^{-,+}(0.5;0.5) = f(0.5-0;0.5+0) = 2$$

$$\Pi_{22} : f^{+,+}(0.5;0.5) = f(0.5+0;0.5+0) = 3$$

$$f^{+,-}(0.5;1) = f(0.5+0;1-0) = 4$$

$$f^{-,-}(1;1) = f(1-0;1-0) = 3$$

$$f^{-,+}(1;0.5) = f(1-0;0.5+0) = 4$$

$$\Pi_{21} : f^{+,+}(0.5; 0) = f(0.5+0; 0+0) = 3$$

$$f^{+,-}(0.5; 0.5) = f(0.5+0; 0.5-0) = 4$$

$$f^{-,-}(1; 0.5) = f(1-0; 0.5-0) = 3$$

$$f^{-,+}(1; 0) = f(1-0; 0+0) = 4$$

Розривний сплайн будемо будувати у вигляді:

$$S(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} f^{+,+}(0; 0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(0.5; 0) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0; 0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + \\ + f^{-,-}(0.5; 0.5) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (x, y) \in \Pi_{11} \\ \\ f^{+,+}(0; 0.5) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(0.5; 0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0; 1) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + \\ + f^{-,-}(0.5; 1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad (x, y) \in \Pi_{12} \\ \\ f^{+,+}(0.5; 0) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + f^{-,+}(1; 0) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_0-y_1} + \\ + f^{+,-}(0.5; 0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_0}{y_1-y_0} + \\ + f^{-,-}(1; 0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_0}{y_1-y_0}, \quad (x, y) \in \Pi_{21} \\ \\ f^{+,+}(0.5; 0.5) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + f^{-,+}(1; 0.5) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_2}{y_1-y_2} + \\ + f^{+,-}(0.5; 1) \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \frac{y-y_1}{y_2-y_1} + \\ + f^{-,-}(1; 1) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad (x, y) \in \Pi_{22} \end{array} \right. =$$

$$\begin{aligned}
 S(x, y) &= \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll}
 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y}{0.5} + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y}{0.5}, & (x, y) \in \Pi_{11} \\
 1 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 2 \cdot \frac{x-0.5}{-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5} + \\
 \quad + 1 \cdot \frac{x}{0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x, y) \in \Pi_{12} \\
 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{-0.5} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y}{0.5} + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y}{0.5}, & (x, y) \in \Pi_{21} \\
 3 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-1}{0.5-1} + 4 \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \frac{y-0.5}{1-0.5} + \\
 \quad + 3 \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \frac{y-0.5}{1-0.5}, & (x, y) \in \Pi_{22}
 \end{array} \right. =
 \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll}
 4 \cdot (x-0.5)(y-0.5) - 8 \cdot x(y-0.5) - 8(x-0.5)y + 4xy, & (x, y) \in \Pi_{11} \\
 4(x-0.5)(y-1) + 8(x-1)(y-1) - 8(x-0.5)(y-0.5) + 4x(y-0.5), & (x, y) \in \Pi_{12} \\
 12(x-1)(y-0.5) - 16(x-0.5)(y-0.5) - 12(x-1)y + 12(x-0.5)y, & (x, y) \in \Pi_{21} \\
 12(x-1)(y-1) - 16(x-0.5)(y-1) - 16(x-1)(y-0.5) + \\
 \quad + 12(x-0.5)(y-0.5), & (x, y) \in \Pi_{22}
 \end{array} \right. =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll}
 2x + 2y - 8xy + 1, & (x, y) \in \Pi_{11} \\
 -10x - 6y + 8 + 8xy, & (x, y) \in \Pi_{12} \\
 -4xy + 2x + 2y + 2, & (x, y) \in \Pi_{21} \\
 -8xy + 6x + 6y - 1, & (x, y) \in \Pi_{22}
 \end{array} \right. .$$

Як бачимо, функція $S(x, y)$ на границі між елементами Π_{11} і Π_{21} при $x < x_1$ буде мати наступні сліди:

$$\begin{aligned}
 S(x, y) &= S(x_1 - 0, y) = S_{11}(x_1, y) = \\
 &= f^{-,+}(0.5; 0) \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} + f^{-,-}(0.5; 0.5) \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1 .
 \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned}
 S(x, y) &= S(x_1 + 0, y) = S_{21}(x_1, y) = \\
 &= f^{+,+}(0.5; 0) \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} + f^{+,-}(0.5; 0.5) \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}, \quad y_0 \leq y \leq y_1 .
 \end{aligned}$$

Тобто якщо $f^{-+}(0.5, 0) \neq f^{++}(0.5, 0)$, то в точці $(0.5; 0)$ такий сплайн буде розривним. Крім того, якщо в точці $f^{++}(0.5; 0.5) \neq f^{+-}(0.5; 0.5)$, то сплайн буде розривним на всій лінії $x = 0.5$, $y_0 \leq y \leq y_1$.

Задамо наближувану функцію у вигляді

$$f(x, y) = S_{ij}(x, y) + \frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)(y - y_{j-1})(y_j - y)}{4}, (x, y) \in \Pi_{i,j}, i, j = 1, 2.$$

Таким чином, в кожному з чотирьох елементів задання наближувана функція має частинну похідну $f^{(2,2)}(x, y) \equiv 1$, $\forall (x, y) \in \Pi_{ij}$. Тому, згідно з теорією, похибка наближення такої розривної функції, написаним вище розривним сплайном, буде задовольняти нерівності:

$$\max_{(x,y) \in \Pi_{ij}} |f(x, y) - S_{ij}(x, y)| \leq f^{(2,2)}(\xi, \eta) \cdot \frac{\Delta i^2 \Delta j^2}{2! 2!} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2! 2!} = \frac{1}{64} \approx 0.016$$

4. Висновки. Таким чином, в даній статті запропоновано загальний метод побудови розривних сплайн-інтерліантів, які як частинний випадок включають в себе розривні сплайни та неперервно-диференційовні до порядку за кожною змінною сплайни. Сформульовано і доведено теореми про інтерліанційні властивості таких розривних конструкцій та апроксимативні їх властивості. Зокрема, з цих властивостей витікає наступна точка зору: розривні в деяких точках або на деяких лініях функції від двох змінних краще наближувати розривними сплайн-інтерліантами. При цьому можна отримати однаково високі оцінки похибки наближення в кожному елементі розбиття, притаманні неперервно-диференційовним сплайн-інтерліантам.

Наступним кроком планується розробка теорії розривних сплайн-інтерліантів на областях складної форми, обмежених дугами відомих кривих.

Список літератури: 1. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням інтерфлетації функцій. Монографія. – Харків: ХНУРЕ, 2008.–160с.; 2. *Першина Ю.І.* 4D математична модель 3D тіла в комп'ютерній томографії // Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXV): Праці міжнародного симпозіуму (24-29 вересня 2009р.). – Київ: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2009. – Т.2. – С.188 – 193; 3. *Литвин О.М., Литвин О.О.* Про один метод розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії // Тезиси докладів Международной конференції АППММ'06. – Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. – 2006. – С.18; 4. *Литвин О.М.* Інтерліанція функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 504с.; 5. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів. – Інформатика та системні науки (ІСН-2010): матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції 18-20 березня 2010р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. Ємця О.О.– Полтава, -2010р. – С.111-113.

Надійшла до редколегії 06.10.2010

М.С. СТЕПАНОВ, докт. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ», Харьков
С.А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ», Харьков
В.А. СТЕПУНИН, НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Розглядаються проблемні питання, що виникають при розробці на єдиній комплексній науково-методологічній основі математичних моделей елементів машин з урахуванням реального характеру зовнішнього навантаження різної фізичної природи. Розглядається задача математичного моделювання золотникового електрогидравлічного перетворювача.

General approaches of decision nonlinear coupled-field analyses are grounded. The common scheme of interaction between structural elements was elaborated. New schemes for solving formulated problems are proposed. Analyses of the case one- cascade the hydroallocator the settlement are researched.

Введение. Необходимость комплексного предсказательного моделирования сложных составных конструкций машин, создания достоверной цифровой модели прототипов и проведения виртуальных испытаний (Virtual Product Development); внутренняя логика интеграции различных научных дисциплин определяют потребность в создании совершенных моделей, унифицированных для различных объектов техники законченностей, уравнений состояния [1, 2]. При разработке современных машин привлекаются специалисты из различных областей знаний, которые сталкиваются с необходимостью проведения больших объемов расчетных и экспериментальных работ по отработке функционирования многих модификаций изделий в различных эксплуатационных режимах; в том числе разработки и расширения возможностей платформ для интеграции различных CAE-систем при решении междисциплинарных проблем [3, 4]. Увеличение вычислительной мощности компьютеров, повышение эффективности вычислений (за счет сетевых Internet-технологий, многопроцессорности и параллелизации) способствовало интеграции соответствующих CAE-технологий для имитационного моделирования и инженерного анализа виртуальных испытаний (Simulation & Analysis – S&A) [5, 6]. CAE-программы высокого уровня (ANSYS, COSMOS, NASTRAN, ASTRAN, Star CD, Fluent и т.д.) позволяют решать на конечно-элементных сетках комплексные задачи, объединяющие в различных вариантах тепловые, диффузионные, прочностные, электромагнитные, газодинамические проблемы [6, 7].

Изложение общей методики исследований. Современные машины создаются и функционируют как комбинация множества взаимодействующих между собой и с внешней средой конструктивных элементов. Для адекватного

моделирования их расчетные схемы нуждаются в представлении уточненными математическими моделями с взаимодействующими элементами разной мерности многокомпонентной структуры и сложной формы в условиях действия внешних полей разной физической природы. Модели, состоящие из связанных между собой подсистем различного уровня, в том числе разнородных по физическим принципам, формируются поэтапно: модели отдельных узлов, подсистем, системы в целом с учетом структуры связей подсистем (рис. 1).

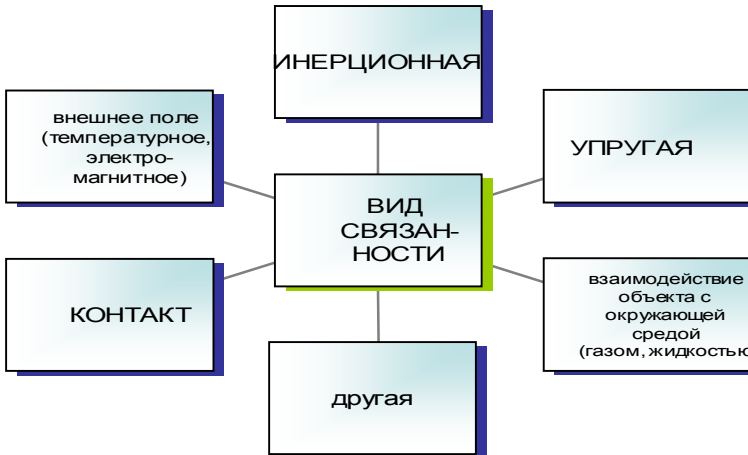


Рисунок 1 – Основные виды связанности.

Задача анализа, как правило, сводится к решению систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Обобщенное уравнение движения различных математических моделей элементов машин (от одномерной до трехмерной) запишем следующим образом

$$A[\vec{V}] + D[\vec{V}] + C[\vec{V}] - \vec{f} = 0, \quad (1)$$

где \vec{x} - координатный вектор, $\vec{V}(\vec{x}, t)$ - обобщенный вектор перемещений (может определять перемещения, температуры, потенциалы электрического поля и другое), A - оператор приведенных «жесткостных» характеристик; D - приведенный «инерционный» оператор; t - время; C - оператор диссипативных сил; $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ - нагрузки. Структуру уравнений определяет тип исследуемого процесса, состав системы; условия сопряжения; граничные и начальные условия. Конкретный вид оператора диссипативных сил C зависит от принятой модели трения: линейной, амплитудно - и частотно- независимой, амплитудно-зависимой гистерезисной. Причины и физическая природа рассеяния энергии при колебаниях механических систем чрезвычайно разно-

образны. Как правило, их можно отнести к одной из двух групп. К первой относятся внешние сопротивления: трение в опорах, гидро - и аэродемпфирование, конструктивные демпферы; ко второй - внутренние неупругие сопротивления: несовершенная упругость материала, контактное трение в сочленениях. Реальные эксплуатационные режимы моделируются нагрузками $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, которые зависят от характера взаимодействия объекта с окружающей средой (газом, жидкостью) или с внешним полем (температурное, электромагнитное), а также от возможного контакта с другими элементами в структуре машины. Когда для исследования оказываются важными внешние связи рассматриваемой системы, то можно перейти к изучению более широкой системы, в которой эти связи становятся внутренними, но и для данной более широкой системы необходимо выполнение условия физической замкнутости.

Причинами нелинейных эффектов являются проявление упругих нелинейных свойств отдельных узлов: зазор, изменение натяга, посадок деталей, пятна контакта и т.д.. В зависимости от условий решаемой задачи объект может описываться как линейными, так и нелинейными уравнениями. По возможности необходимо решать по крайней мере в первом приближении линейное (линеаризованное) уравнение. Для упругого тела можно записать

$A[\vec{V}] = K\vec{V}$, $D[\vec{V}] = M \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial t^2}$, где K , M - линейные положительно определенные матричные операторы.

На базе использования методов и принципов системного и объектно-ориентированного анализа можно осуществить декомпозицию абстрактной модели на составляющие и связи между ними, а также реализовать их формальное описание и сведение различных по физической природе процессов к единой унифицированной схеме моделирования. Операция декомпозиции позволяет корректно выделить совокупность разрозненных подмоделей из общей модели. Принцип декомпозиции на подсистемы может быть различным: функциональный, конструктивный, организационный.

Возможности классических методов, базирующихся на решении системы уравнений в частных производных (1), определяющих краевые задачи математической физики, весьма ограничены. Краевая задача может быть приведена к вариационной форме при помощи умножения уравнения (1) на произвольный виртуальный z из пространства Z гладких «обобщенных» перемещений, удовлетворяющих краевым условиям, и последующего интегрирования по частям. Вариационные методы приводят к матричной алгебраической проблеме и служат удобной основой для построения теоретически обоснованных расчетных схем. Задачи теории поля (теплопроводность, гидромеханика, расчет электрических или магнитных полей и т.д.) сводятся к системе уравнений, аналогичной соотношениям метода конечных элементов (МКЭ)

для задач механики деформируемого твердого тела, являющегося наиболее мощным, универсальным и распространенным методом расчета.

С точки зрения формальной логики все многообразие расчетных вариантов совокупностей и структур специфических связей элементов машин в условиях действия физических полей разной природы можно классифицировать следующим образом. Рассмотрим двухуровневые, которые являются комбинацией различных по физической природе процессов и, как следствие, расчетных схем взаимодействия модели с учетом их взаимного влияния. Введем следующие виды степеней связанности структурных элементов системы (для примера взята стационарная конечно-элементная модель):

- последовательная (при одностороннем действии)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22}(\bar{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2(\bar{y}_1) \end{Bmatrix};$$

- сильная (полная)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix};$$

- слабая с учетом обратных связей (при двустороннем взаимодействии)

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\bar{y}_2) & 0 \\ 0 & K_{22}(\bar{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1(\bar{y}_2) \\ \bar{F}_2(\bar{y}_1) \end{Bmatrix},$$

где K_{11} , K_{21} , K_{22} - обобщенные матрицы жесткости; \bar{y}_1 и \bar{y}_2 - обобщенные векторы узловых переменных состояния, \bar{F}_1 и \bar{F}_2 - обобщенные векторы нагрузок. Основным отличием моделей с последовательной (слабой) степенью связанности от сильной является отсутствие недиагональных блоков в глобальных матрицах K_{21} . Недостатком моделей сильной связанности является увеличение размерности и ширины ленты системы разрешающих уравнений, преимуществом - возможность достижения решения за одну итерацию. Разбиение на подпункты носит условный методологический смысл, поскольку физический процесс может иметь комплексный и взаимовлияющий характер. Предполагается, что связь между подмоделями однозначна, алгоритмизируема и корректна. Такая трактовка дает возможность формализовать процесс и распространить традиционный инструментарий анализа и синтеза.

Моделирование структурными уравнениями, ориентированными на конкретный класс объектов, может включать большое количество методов из различных областей с применением апробированных CAD/CAM/CAE-систем. Это может быть осуществлено как в ручном режиме, так и путем создания специализированных автоматизированных систем. Использование единой расчетной модели для мультифизического моделирования позволяет минимизировать время, обычно затрачиваемое на подготовку множества расчетных моделей, преобразование и передачу данных от одной расчетной мо-

дели в одной системе к другой модели в другой системе. При этом необходимо или использование единой информационной базы для всех этапов жизненного цикла, или разработка специальных процедур согласования структур данных на различных этапах.

Практическое применение. Рассмотрим однокаскадный золотниковый гидрораспределитель (рис.2), представляющий собой электрогидравлический усилитель, преобразующий входной электрический сигнал в изменение расхода рабочей жидкости через дросселирующее окно золотника.

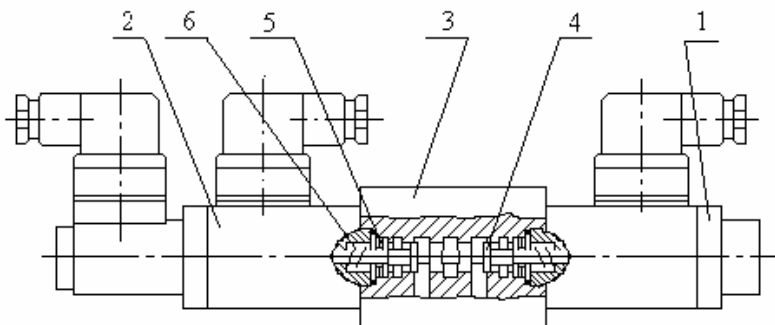


Рисунок 2 – Конструктивная схема гидрораспределителя.

Для распределителей с пропорциональным управлением, например типа РП-6, сохраняется однозначная аналоговая зависимость между электрическим входным сигналом и расходом через золотник, для обычных однокаскадных гидрораспределителей, например типа ВЕ-6, зависимость имеет релейный характер, т.е. изменяется скачком при достижении входным электрическим сигналом определенного значения. Распределитель состоит из корпуса 1, электромагнитов управления 2, плунжера золотника 3, возвратных пружин 4. В плунжере золотника выполнены круговые пазы, образующие кромки дросселирующих окон, площадь открытия которых определяет расход рабочей жидкости. Электромагниты с пропорциональным управлением 1 и 2 обеспечивают определенное положение золотника 4 относительно кромок во втулке, образованных проточками в корпусе 3 гидрораспределителя в соответствии с законом изменения тока в обмотках. Золотник центрируется пружинами 6 упирающимися в его торцы 5.

Для удобства построения полной математической модели однокаскадного гидрораспределителя с электрическим управлением можно выделить электрическую, механическую и гидравлическую части.

Горизонтальное отверстие в корпусе гидрораспределителя образует втулку цилиндрического золотника. Во втулку открываются каналы, подводящие жидкость из гидросистемы и отводящие ее к полостям исполнительно-

го гидроузла. В связи с этим втулка подвержена действию давлению жидкости разных величин и направлений, что влечет за собой изменения величин проходных щелей, следовательно, и расхода жидкости. Высокий уровень давления в корпусе может привести к деформациям выше критических, приводит к перекосу разделяющих перегородок втулки, отделяющих полости с разным давлением, что увеличивает перетечки жидкости между полостями и способствует возникновению жесткого контакта поверхностей втулки и золотника, приводя его к заклиниванию. Максимальные эквивалентные напряжения по Мизесу не должны превышать допустимых. Исключить это можно оптимальным выбором зазора в золотнике, основанным на достоверном расчете деформационной картины втулки и корпуса гидрораспределителя в целом.

Изменения зазоров и размеров могут прогнозироваться с помощью теории размерных цепей путем анализа варьирования составляющих их звеньев на каждом этапе цикла работы машины.

Для построения полной 3-х мерной твердотельной модели однокаскадного гидрораспределителя используется САД-система компьютерного моделирования среднего уровня SolidWorks (рис. 3).

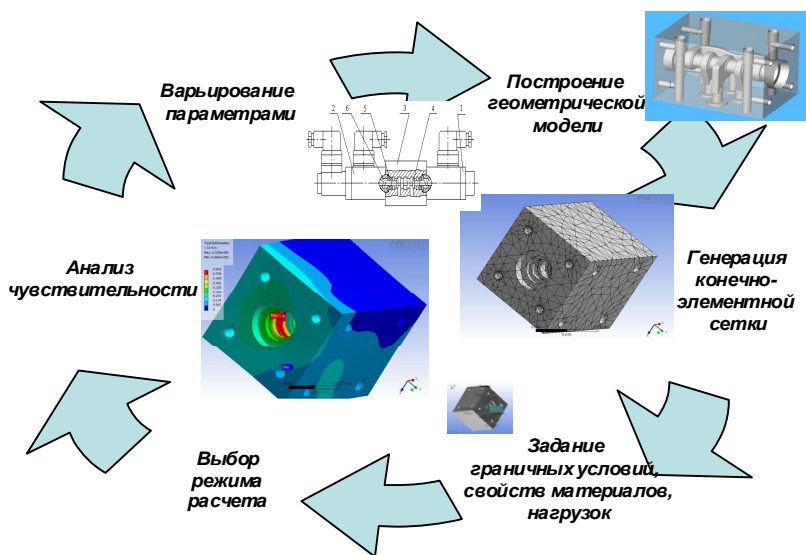


Рисунок 3 – Основные шаги анализа однокаскадного гидрораспределителя с электрическим управлением.

Расчет по МКЭ начинается с дискретизации расчетной схемы с высокой степенью адекватности реальному объекту. Каждый КЭ сохраняет все физические и геометрические свойства исходной среды. На границе области заданы граничные условия, т.е. компоненты сил или перемещений. Выбор типа конечного элемента является важным шагом, во многом определяющим эффективность расчета.

Разбивка конструкции деталей на конечные элементы должно обеспечить хорошую передачу основных геометрических форм. Для моделирования конструкции используются два семейства конечных элементов: тетраэдры и шестигранные призмы с плоскими или с криволинейными гранями. Используемые пространственные модели МКЭ позволяют:

- учесть сложные формы поверхности и граничного контура, условия закрепления, законы распределения нагрузки и неоднородных физико-механических свойств материала;
- независимо уточнить переменные состояния (перемещения, напряжения и т.д.) и проектирования (геометрические параметры) в различных зонах и направлениях.

Заключение. Данное исследование позволило провести классификацию задач анализа мультифизических конечноэлементных моделей элементов машин различной степени связанности, позволяющую построить схему для декомпозиции комплексной проблемы на ряд отдельных подзадач. Анализ структуры и типов связей между отдельными задачами служит основой схемы последовательности решения общей проблемы. Классификация может служить основой последующей унификации и стандартизации подходов. Рассмотрены основные шаги анализа на примере однокаскадного гидрораспределителя с электрическим управлением.

Список литературы: 1. *Kan D.* Manifesting multiphysics // *Machine Design*. 2008. Vol. 80. Issue 5. P. 90-95. 2. *Тимофеев Ю.В., Фадеев В.А., Степанов М.С., Назаренко С.А.* Обобщенная структура жизненного цикла машиностроительного производства и его изделий // *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*. – Харків, НТУ «ХПІ», 2009. - Вип. 1. С. 86-95. 3. *Thilmany J.* Multiphysics: all at once // *Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 132. Issue 2. P. 39-41. 4. *Fingerman S.* Multiphysics modeling using COMSOL; a first principle approach // *Sci-Tech News*. 2010. Vol. 64. Issue 2. P. 50-56. 5. *Назаренко С.А.* Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы // *Вестник НТУ «ХПИ»*. - 2006. - № 32. - С. 119-122. 6. *Flager F., Welle B., Bansal P., Soremekun G., Haymaker J.* [Multidisciplinary process integration and design optimization of a classroom building](#) // *Journal of Information Technology in Construction(ITcon)* (2009) Vol. 14, pp. 595-612. 7. *Bhatia K.K.* FE software targets complex multiphysics // *Machine Design*. 2007. Vol. 79. Issue 6. P. 85-87.

Поступила в редколлегию 06.10.2010

Е.Ю. ТАРСИС, канд. техн. наук, ст. преп., НТУ «ХПИ», Харьков

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ В МЕТОДЕ R – ФУНКЦИЙ ДЛЯ СОСТАВНЫХ ТЕЛ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Вплив геометричних параметрів на напружено-деформований стан двошарового пружного тіла з неідеальним контактом між шарами, аналізується за допомогою метода R-функцій на базі варіаційного принципу Рейснера з врахуванням точних розв'язків.

Influence of geometrical parameters on the stress-strain state of two-layered elastic body with nonideal contact between layers is analyzed by using R-function method based on variational Reissner's principle. The structures of solutions with using of exact solutions are build.

Цель исследований и постановка задачи. Целью данной работы является анализ напряженно-деформированного состояния, возникающего при контактно-взаимодействии упругих частей составного тела конечных размеров, соединенных посредством натяга при изменении их геометрических параметров. Решение контактной задачи осуществляется в рамках метода R-функций на базе вариационного принципа Рейснера [1] с использованием точных решений для бесконечной внешней области. Методика построения структурной модели приведена в работе [2]. Построенные структуры точно удовлетворяют всем граничным и контактными условиям задачи. Напомним, что методика предусматривает суперпозицию двух решений. Первое из них является решением этой же задачи для бесконечной внешней области, второе – отвечает телу конечных размеров. При этом на внешнем контуре задаются нагрузки, которые компенсируют напряжения первого решения, а натяг на внутреннем контуре отсутствует.

В данной работе рассмотрены два варианта конечных геометрических форм внешней границы $\partial\Omega_{(2)}$ (см. рис. 1). Для описания геометрии контактирующих областей введем следующие опорные области:

$$\Omega_1 = \left[f_1 = \frac{f_1^*}{\sqrt{(f_1^*)^2 + |\nabla f_1^*|^2}} \geq 0 \right], \text{ где } f_1^* = -x^2 - y^2 + R^p \text{ для варианта 1,}$$

$$\Omega_1 = \left[f_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0 \right]; \Omega_2 = \left[f_2 = \frac{b^2 - y^2}{2b} \geq 0 \right] \text{ для варианта 2 и}$$

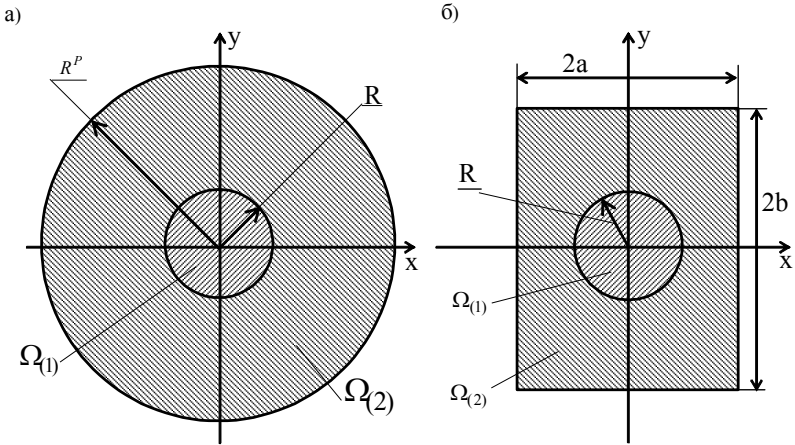


Рисунок 1 – Варианты форм внешней границы: а – вариант 1, б – вариант 2.

$$\Omega_3 = \left[f_3 = \frac{f_3^*}{\sqrt{(f_3^*)^2 + |\nabla f_3^*|^2}} \geq 0 \right], \text{ где } f_3^* = -x^2 - y^2 + R^2 \text{ для обоих ва-}$$

риантов. Для варианта 2 дополнительно вводятся опорные области:
 $\Omega_4 = [f_4 = -y + b \geq 0]$; $\Omega_5 = [f_5 = y + b \geq 0]$; $\Omega_6 = [f_6 = -x + a \geq 0]$;
 $\Omega_7 = [f_7 = x + a \geq 0]$.

В качестве структур решения используются структуры работы [2]:

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x^{uu} + u_x^{(1)o}, u_y^{(1)} = u_y^{uu} + u_y^{(1)o}, \sigma_x^{(1)} = \sigma_x^{uu} + \sigma_x^{(1)o}, \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{uu} + \sigma_y^{(1)o}, \\ \sigma_{xy}^{(1)} &= \sigma_{xy}^{uu} + \sigma_{xy}^{(1)o}, u_x^{(2)} = u_x^{pp} + u_x^{(2)o}, u_y^{(2)} = u_y^{pp} + u_y^{(2)o}, \sigma_x^{(2)} = \sigma_x^{pp} + \sigma_x^{(2)o}, \\ \sigma_y^{(2)} &= \sigma_y^{pp} + \sigma_y^{(2)o}, \sigma_{xy}^{(2)} = \sigma_{xy}^{pp} + \sigma_{xy}^{(2)o}. \end{aligned}$$

В этих структурах для варианта 1 компенсирующие напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^k &= \frac{4\varepsilon^* \mu R^2}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right] R^{p2}} \cdot \left((l_{(2)}^\sigma)^2 - (m_{(2)}^\sigma)^2 \right); \\ \sigma_y^k &= - \frac{4\varepsilon^* \mu R^2}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right] R^{p2}} \cdot \left((l_{(2)}^\sigma)^2 - (m_{(2)}^\sigma)^2 \right); \end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^k = 2 \cdot \frac{4\varepsilon^* \mu R^2}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right] R^{p2}} \cdot l_{(2)}^\sigma m_{(2)}^\sigma, \quad \omega_{(1,2)} = f_3; \quad \omega_{(2)}^\sigma = f_1,$$

а для варианта 2 –

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(2)o} &= \sigma_x^k \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_2}}{\omega_{(2)}^{\sigma_1} + \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_2}} + \left[\left(l_{(1,2)} \right)^2 - \left(m_{(1,2)} \right)^2 \right] \Phi_8 + \left(m_{(1,2)} \right)^2 \Phi_9 \left] \frac{\omega_{(2)}^\sigma}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \right. \\ &+ \Phi_{10} \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_1}; \\ \sigma_{xy}^{(2)o} &= \sigma_{xy}^{k1} \cdot \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_2} \omega_{(2)}^7}{\omega_{(2)}^6 + \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_2} \omega_{(2)}^7} + \sigma_{xy}^{k2} \cdot \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_2} \omega_{(2)}^6}{\omega_{(2)}^7 + \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_2} \omega_{(2)}^6} + \\ &+ \sigma_{xy}^{k3} \cdot \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_1} \omega_{(2)}^5}{\omega_{(2)}^4 + \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_1} \omega_{(2)}^5} + \sigma_{xy}^{k4} \cdot \frac{\omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_1} \omega_{(2)}^4}{\omega_{(2)}^5 + \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^{\sigma_1} \omega_{(2)}^4} + \\ &+ l_{(1,2)} m_{(1,2)} \left(2\Phi_8 - \Phi_9 \right) \frac{\omega_{(2)}^\sigma}{\omega_{(2)}^\sigma + \omega_{(1,2)}} + \Phi_{12} \omega_{(1,2)} \omega_{(2)}^\sigma, \end{aligned}$$

компенсирующие напряжения имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^k &= \frac{4\varepsilon^* \mu}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right]} \cdot \frac{R^2 (a^2 - y^2)}{(a^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y^k &= \frac{4\varepsilon^* \mu}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right]} \cdot \frac{R^2 (b^2 - x^2)}{(x^2 + b^2)^2}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^k = \left\{ \sigma_{xy}^{k1} \text{ на } \omega_{(2)}^6; \sigma_{xy}^{k2} \text{ на } \omega_{(2)}^7; \sigma_{xy}^{k3} \text{ на } \omega_{(2)}^4; \sigma_{xy}^{k4} \text{ на } \omega_{(2)}^5 \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{k1} &= \frac{8\varepsilon^* \mu}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right]} \cdot \frac{R^2 ay}{(a^2 + y^2)^2}, \quad \sigma_{xy}^{k2} = - \frac{8\varepsilon^* \mu}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right]} \cdot \frac{R^2 ay}{(a^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{xy}^{k3} &= \frac{8\varepsilon^* \mu}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right]} \cdot \frac{R^2 xb}{(x^2 + b^2)^2}, \quad \sigma_{xy}^{k4} = - \frac{8\varepsilon^* \mu}{R \left[\frac{\mu}{\mu_1} (\chi_1 - 1) + 2 \right]} \cdot \frac{R^2 xb}{(x^2 + b^2)^2}, \end{aligned}$$

Φ_i ($i = \overline{8,12}$) – неопределенные компоненты, $\omega_{(1,2)} = f_3$, $\omega_{(2)}^4 = f_4$, $\omega_{(2)}^5 = f_5$, $\omega_{(2)}^6 = f_6$, $\omega_{(2)}^7 = f_7$, $\omega_{(2)}^{\sigma_1} = f_1$, $\omega_{(2)}^{\sigma_2} = f_2$, $\omega_{(2)}^\sigma = \omega_{(2)}^{\sigma_1} \cdot \omega_{(2)}^{\sigma_2}$.

В этих выражениях $\varepsilon^* = -\delta_{0n}^{1,2}$ (малая величина порядка упругих перемещений),

$$\mu = \frac{E^{(2)}}{2(1+\nu^{(2)})}; \mu_1 = \frac{E^{(1)}}{2(1+\nu^{(1)})}; \chi_1 = \frac{3-\nu^{(1)}}{1+\nu^{(1)}}.$$

Неопределенные компоненты структур (для варианта 1 их количество составляет 17, а для варианта 2 – 16) представляются в виде разложений по полиномам Чебышева, а коэффициенты в этих разложениях определяются методом Ритца из условия стационарности функционала Рейсснера [3].

Результаты расчетных исследований. Исследовалось влияние размеров внешней границы на различия между результатами точного решения для бесконечной области и приближенного для конечной. С этой целью для вариантов 1 и 2 были проведены расчеты при следующих исходных данных. Упругие характеристики составного тела принимались равными $E^{(1)} = E^{(2)} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$, радиус отверстия – $R = 5 \text{ см}$, величина натяга – 0.1 см . Параметры внешней границы для варианта 1 принимались для первого расчета $R^p = 7.5 \text{ см}$ и $R^p = 20 \text{ см}$ для второго расчета, а для варианта 2 $a = b = 7.5 \text{ см}$ для первого расчета, $a = b = 10 \text{ см}$ для второго расчета и $a = b = 20 \text{ см}$ для третьего расчета.

Для варианта 1 значения контактных напряжений оказались в обоих расчетах постоянными по контуру, что обусловлено симметрией задачи, и составили: для $R^p = 7.5 \text{ см}$ – $0.67 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, а для $R^p = 20 \text{ см}$ – $0.97 \cdot 10^3 \text{ МПа}$. Распределения нормальных напряжений в сечении $x = 0$ для указанных расчетов и для точного решения приведены на рис. 2.

Для варианта 2 распределение контактных напряжений по контуру отверстия для указанных расчетов и для точного решения приведено на рис.3, а нормальных напряжений для внешнего тела в сечении $x = 0$ на рис. 4.

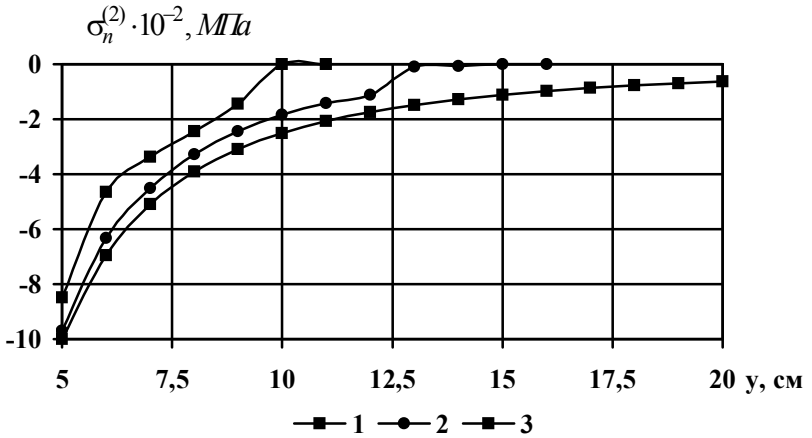


Рисунок 2 – Нормальные напряжения для внешнего тела в сечении $x = 0$: 1,2 – номера расчетов, 3 – точное решение.

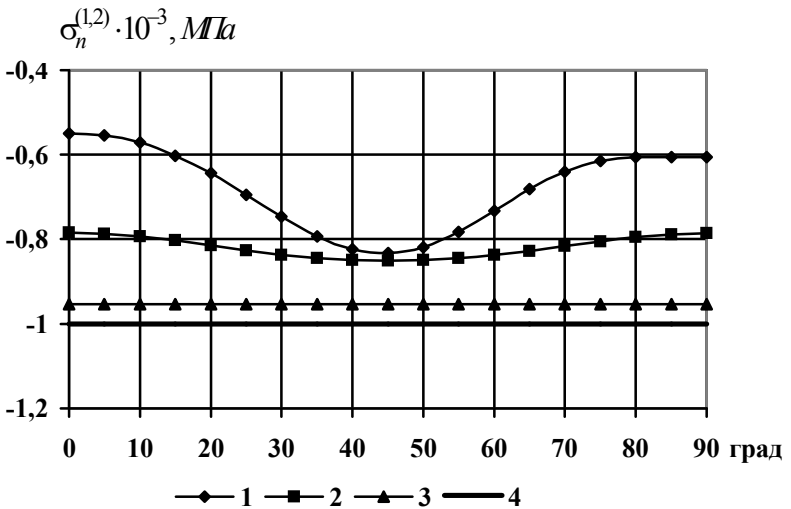


Рисунок 3 – Контактные напряжения на контуре отверстия: 1,2,3 – номера расчетов, 4 – точное решение.

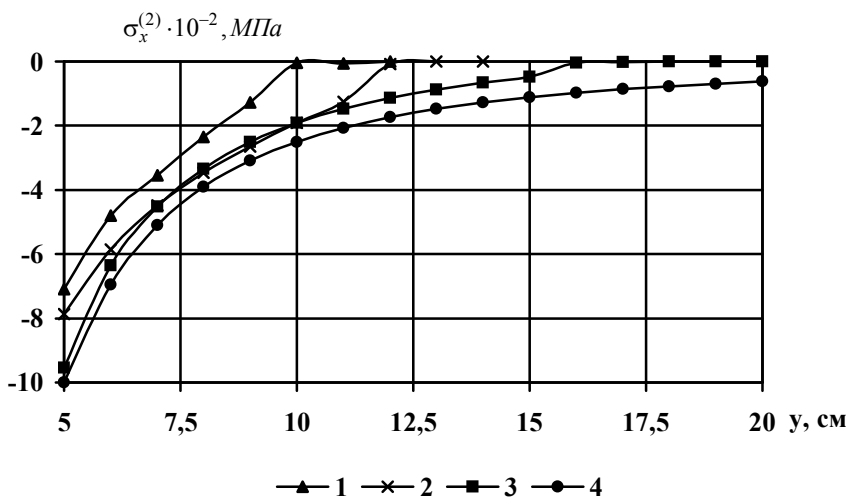


Рисунок 4 – Нормальные напряжения для внешнего тела в сечении $x = 0$: 1,2,3 – номера расчетов, 4 – точное решение.

Выводы. Из полученных результатов следует:

- 1) при увеличении размеров внешних границ контактные напряжения, соответствующие приближенному решению для конечной внешней области по значениям и характеру их распределения приближаются к контактным напряжениям точного решения для бесконечной;
- 2) с уменьшением размеров внешних границ различия становятся существенными, что ограничивает пределы применимости точного решения;
- 3) использование точных решений в указанной постановке повышает эффективность и точность расчетных исследований.

Список литературы: 1. Тарсис Е.Ю. Структурная модель неидеального контакта упругих тел на основе метода R-функций. – Вісник Інженерної академії України. – 2002.-КВ№2635.- С.641–644. 2. Тарсис Е.Ю. Смешанный вариационный подход к решению задач для составного тела на основе метода R-функций // Пробл. машиностроения.-2002.-т.4.-№3-4.-С.116-123. 3. Тарсис Е.Ю. Метод R-функций для решения задач теории упругости составных тел на основе смешанных вариационных принципов // Доповіді НАН України.-2002.-№1.-С.63-69.

Поступила в редколлегию 06.10.2010

Н.В. ЧЕРЕМСЬКА, канд. техн. наук, ст. викладач, НТУ «ХПІ», Харків

УРАХУВАННЯ ФЛУКТУАЦІЙ ПРИ РОЗРАХУНКАХ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ СОНЯЧНИХ БАТАРЕЙ

У статті досліджено теплові режими з метою визначення загальних закономірностей керування просторово-часовими змінами температурного поля у складній системі при урахуванні впливу різних конструктивних та фізичних параметрів, одержано наближені розрахункові формули для середнього температурного поля та його дисперсії, що враховують флуктуаційні процеси при розрахунку теплових режимів сонячних батарей, які дозволяють внести відповідні поправки при теоретичних розрахунках.

The representation for correlation function of the solution of thermal conduction equation describing thermal mode in a final rectangular plate which is under effect of exterior statistically non-stationary sources is obtained. The numerical analysis of a dispersion depending on spatial coordinate and time is given. The obtained results can be used at calculation of thermal modes of radio equipment which is under effect of exterior non-stationary fluctuations.

1. Загальна постановка задачі та її актуальність.

При роботі радіоапаратури, яка входить до системи космічних апаратів, у космічному просторі часто виникають температурні флуктуації через нагрівання поверхні космічних апаратів та сонячних батарей за рахунок взаємодії з космічними середовищем, нагрівання від випромінювання Сонця, планет і працюючих двигунів [1]. При відсутності сонячних променів температура космічних апаратів різко знижується. Зміна процесу переохолодження процесом нагрівання від сонячного випромінювання приводить до того, що конструкції й апаратура, які розташовані на зовнішній поверхні космічних апаратів зазнають циклічний вплив температур. Такий вплив температур є загрозою для матеріалів та виробів, які входять до складу апаратури і сонячних батарей, може привести до спотворення сигналів на виході апарата та навіть до поломки виробу.

Отже, для забезпечення нормального теплового режиму апаратури і визначення характеристик системи терморегулювання необхідно проводити теплове тестування приборів.

При роботі радіоапаратури систем космічних апаратів в космічному просторі також виникають і неконтролюємі температурні флуктуації, які пов'язані, зокрема, з нестационарними неконтролюєміми процесами, які відбуваються на Сонці, попаданням космічних об'єктів у хмари космічних часток плазми сонячного вітру і таке інше, які частіш за все відбуваються на скінченному інтервалі часу і є локалізованими у просторі, і тому, в принципі не можуть бути змодельованими стаціонарними випадковими процесами або однорідними випадковими полями.

Тому виникає необхідність у розрахунках теплових режимів, які мають

статистично нестационарний або неоднорідний характер.

2. Постановка задачі.

Викликає зацікавленість наступний випадок: температура середовища, яке оточує апарат, змінюється з часом; необхідно визначити температурне поле апарата.

Розглянемо наступну стохастичну задачу розповсюдження тепла в пластині скінченних розмірів.

У випадку, коли «поперечні розміри» пластини порівнянні з її «довжиною», необхідно досліджувати імовірнісні властивості розв'язку рівняння теплопровідності для пластини скінчених розмірів.

Така модель заснована на природному припущенні про те, що, наприклад, для сонячної батареї потік сонячної енергії через поверхню є більш істотним, ніж через бічні межі. Відзначимо ще одну особливість досліджуваної моделі: не враховується товщина сонячної батареї, підставою для цього служить та обставина, що площа основ значно більше ніж площа бічних граней і відповідно відносяться теплові потоки.

3. Розв'язання.

Вихідної є наступна початково-крайова задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = k^2 \Delta U + f(x, y, t), \\ U|_{t=0} = U_0(x, y), \\ U|_{x=0} = U|_{x=a} = U|_{y=0} = U|_{y=b} = T_0, \end{cases} \quad (1)$$

де T_0 , $U_0(x, y)$ – детерміновані, а $f(x, y, t)$ – випадкове поле, що враховує флуктуації потоку сонячної енергії.

Шукатимемо розв'язок (1) у вигляді $U=V+T_0$, де для V одержимо наступну задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = k^2 \Delta V + f(x, y, t), \\ V|_{t=0} = U_0(x, y) - T_0 = V_0(x, y), \\ V|_{x=0} = V|_{x=a} = V|_{y=0} = V|_{y=b} = 0, \end{cases}$$

яку вирішуємо стандартним методом поділу змінних [3]:

$$\begin{aligned} V(x, y, t) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} V_{n,m}(t) \varphi_n(x) \psi_m(y), \\ f(x, y, t) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} f_{n,m}(t) \varphi_n(x) \psi_m(y), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x$, $\psi_n(y) = \sin \frac{m\pi}{b}y$.

Тоді для $V_{n,m}(t)$ отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dV_{n,m}(t)}{dt} + \lambda_{nm}V_{nm} = f_{nm}(t), \\ V_{nm}(t) = V_{nm}^0, \end{cases} \quad (3)$$

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad V_0(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} V_{nm}^0 \varphi_n(x) \psi_m(y),$$

$$V_{nm}^0 = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_0(x, y) \varphi_n(x) \psi_m(y) dx dy, \quad f_{nm}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y, t) \varphi_n(x) \psi_m(y) dx dy.$$

Розв'язок (3) набуває вигляду

$$V_{nm}(t) = V_{nm}^0 \cdot e^{-\lambda_{nm}t} \varphi_n(x) \psi_m(y) + \int_0^t \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} f_{nm}(\tau) d\tau \varphi_n(x) \psi_m(y)$$

для $U(x, y, t)$ одержуємо зображення

$$\begin{aligned} U(x, y, t) = T_0 + \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{nm}^0 e^{-\lambda_{nm}t} \varphi_n(x) \psi_m(y) - T_0 \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\lambda_{nm}t} \varphi_n(x) \psi_m(y) + \\ + \sum_{n,m=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} f_{nm}(\tau) d\tau \varphi_n(x) \psi_m(y), \end{aligned} \quad (4)$$

яке і є вихідним для підрахунку імовірнісної характеристики. Вираз (4) не придатний для конкретних застосувань через його громіздкість. Тому зробимо ряд припущень, що спрощують цей вираз.

Спрощення 1. Нехай

$$f(x, y, t) = f(x, y) \xi(t), \quad (5)$$

де $f(x, y)$ детермінована функція, тоді

$$f_{nm} = g_{nm} \cdot \xi(t), \quad g_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \varphi_n(x) \psi_m(y) dx dy.$$

Припущення (4) можна обґрунтувати на підставі принципу суперпозиції для задачі (1) і розкладу Лозва-Каруна:

$$f(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \varphi_k(x, y, t), \quad (6)$$

де $\varphi_k(x, y, t)$ – власні функції інтегрального оператора K :

$$K\varphi = \int_a^b K(x_1, y_1, x_2, y_2, t) \overline{\varphi(x_2, y_2, t)} dx_2 dy_2,$$

де $K(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = Mf(x_1, y_1, t) \overline{f(x_2, y_2, t)}$ - кореляційна функція теплового поля зовнішніх джерел.

У випадку, коли $\xi(x, t)$ має властивість статистичної стаціонарності по t , тобто $K(x, y, t)$ не залежить від t , а отже і власні значення і власні функції теж не залежать від t .

У силу лінійності вихідної задачі достатньо досліджувати в першу чергу випадок одного доданка в (6).

Спрощення 2. Нехай $n = m = 1$, тоді

$$U(x, y, t) = T_0 + U_{11}^0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y) - T_0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y) + \int_0^t e^{-\lambda_{11}(t-\tau)} g_{11} \xi(\tau) d\tau \varphi_1(x) \psi_1(y).$$

$$MU(x, y, t) = T_0 + U_{11}^0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y) - T_0 e^{-\lambda_{11} t} \varphi_1(x) \psi_1(y). \quad (M\xi(t) \equiv 0).$$

Для кореляційної функції температурного поля в пластині маємо:

$$\begin{aligned} K(x_1, y_1, x_2, y_2, t, s) &= MU(x_1, y_1, t)U(x_2, y_2, s) = \\ &= |g_{11}|^2 \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_{11}[(t-\tau_1)+(s-\tau_2)]} K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_1(x_2)} \psi_1(y_1) \psi_1(y_2), \end{aligned} \quad (7)$$

або $K(x_1, y_1, x_2, y_2, t, s) =$

$$|g_{11}|^2 \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_1(x_2)} \psi_1(y_1) \psi_1(y_2) \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_{11}[(t-\tau_1)+(s-\tau_2)]} K_\xi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

При фіксованих значеннях x_1, y_1, x_2, y_2 та $t = s$, отримуємо

$$K(t, t) = |C_1|^2 e^{-2\lambda_{11}t} \int_0^t \int_0^t e^{\lambda_{11}\tau_1} \varphi(\tau_1 + \tau) d\tau_1 \Big| d\tau,$$

де $|C_1|^2 = |g_{11}|^2 \varphi_1(x_1) \overline{\varphi_1(x_2)} \psi_1(y_1) \psi_1(y_2)$.

Нехай $\varphi(t) = C_1 e^{i\mu t}$, де $\mu = \alpha_1 + \frac{i\beta_1^2}{2}$ одна точка нестационарного спектру першої кратності, яка розташована у верхній півплощині. Тоді

$$K(t, t) \sim |C_1|^2 e^{-2\lambda_{11}t} \frac{1}{\beta_1^2} \frac{e^{-\beta_1^2 t} + e^{-2\lambda_{11}t} - 2e^{-\left(\lambda_{11} + \frac{\beta_1^2}{2}\right)t}}{\left(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2}\right)^2 + \alpha_1^2} \cos \alpha_1 t \quad (8)$$

Залежність $K(t, t)$ від t показана на рис. 1. та 2.

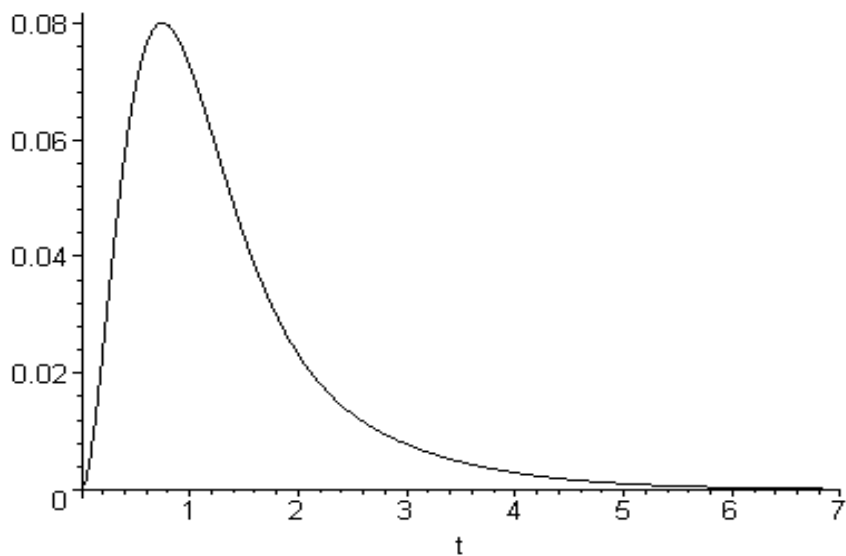


Рисунок 1 – Залежність функції $K(t,t)$ від t при $\beta_1^2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\lambda_{11} = 2 > 1$.

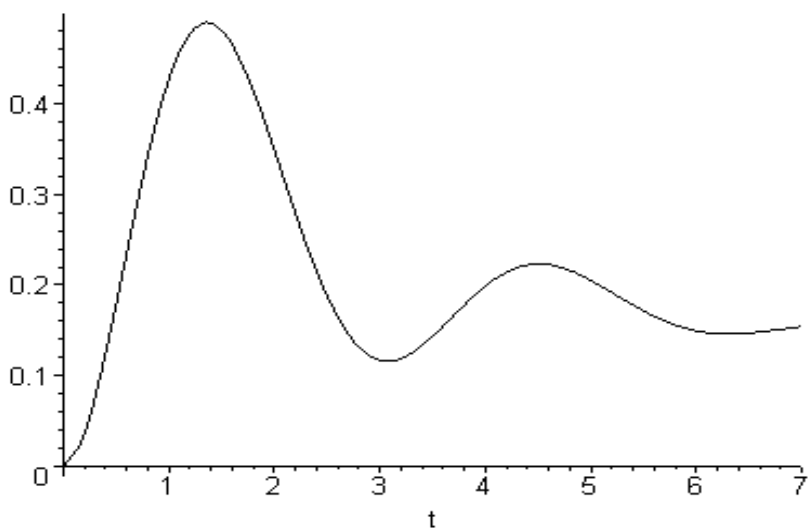


Рисунок 2 – Залежність функції $K(t,t)$ від t при $\beta_1^2 = 3$, $\alpha_1 = 7$, $\lambda_{11} = 0.03 < 1$.

Розглянемо випадок „резонансу” коли $\lambda_{11} = \frac{\beta_1^2}{2}$. Тоді

$$K(t, t) \sim |C_1|^2 \frac{2(1 - \cos \alpha_1 t) e^{-2\lambda_{11}t}}{\beta_1^2 \alpha_1^2} = |C_1|^2 \frac{2(1 - \cos \alpha_1 t) e^{-\beta_1^2 t}}{\beta_1^2 \alpha_1^2}.$$

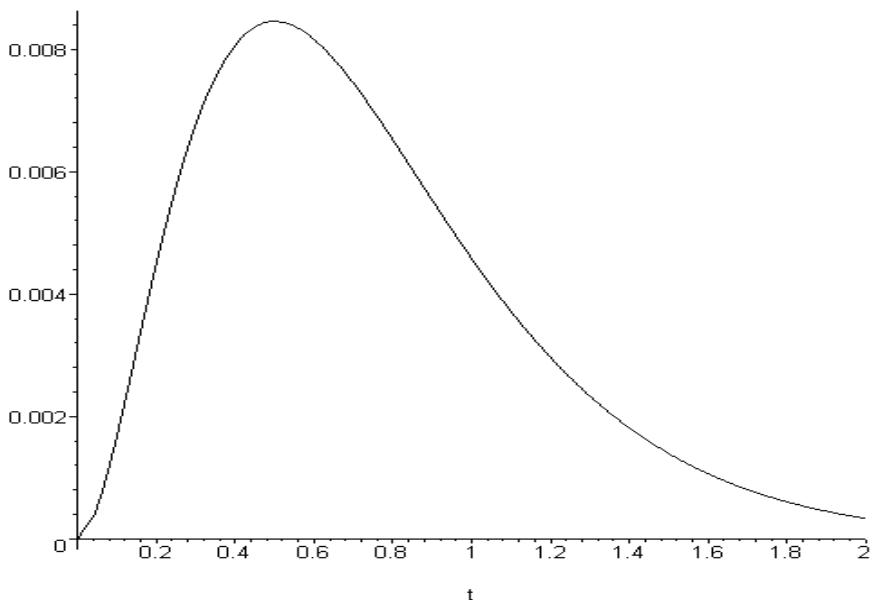


Рисунок 3 – Випадок «резонансу».

Отримаємо з (7) зображення для кореляційної функції у випадку, коли спектр нестационарної флуктуації складається з однієї точки першої кратності, яка міститься у верхній півплощині. У цьому випадку залежність $K_\xi(\tau_1, \tau_2)$ температурного поля має вигляд [2]

$$K_\xi(\tau_1, \tau_2) = |b_1|^2 \frac{e^{-\frac{\beta_1^2}{2}(\tau_1 + \tau_2) + i\alpha_1(\tau_1 - \tau_2)}}{\beta_1^2}$$

та відповідно для кореляційної функції теп-

лового поля маємо:

$$\begin{aligned}
K(x_1, y_1, x_2, y_2, t, s) &= \frac{|g_{11}|^2 |b_1|^2}{\beta_1^2} \int_0^t \int_0^s e^{-\lambda_{11}[(t-\tau_1)+(s-\tau_2)] - \frac{\beta_1^2}{2}(\tau_1 + \tau_2) + i\alpha_1(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \times \\
&\quad \times \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) = \\
&= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{(e^{(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2} + i\alpha_1)t} - 1)(e^{(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2} - i\alpha_1)s} - 1)}{\left(\lambda_{11} - \frac{\beta_1^2}{2}\right)^2 + \alpha_1^2}.
\end{aligned}$$

Легко бачити, що $K(t, s) \rightarrow 0$ при $t, s \rightarrow \infty$ тільки за умовою $\beta_1^2 > 2\lambda_{11}$. Якщо має місце „резонанс”, тобто $\beta_1^2 = 2\lambda_{11}$, то

$$K(t, s) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{e^{i\alpha_1(t-s)} - e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 s} + 1}{\alpha_1^2} = K_1(t, s) + K_2(t, s),$$

де

$$\begin{aligned}
K_1(t-s) &= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{e^{i\alpha_1(t-s)} + 1}{\alpha_1^2}, \\
K_2(t, s) &= \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2)\psi_1(y_1)\psi_1(y_2) \frac{-e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 s}}{\alpha_1^2}.
\end{aligned}$$

Знайдемо ранг нестационарності випадкового процесу з кореляційною функцією $K_2(t, s)$.

$$W(t, s) = -(\partial_t + \partial_s)K_2(t, s) = \frac{i}{\alpha_1} (e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 s}) = \sum_{p, q=1}^2 \varphi_p(t) J_{pq} \overline{\varphi_q(s)},$$

де $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1|}}$, $\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_1|}} e^{i\alpha_1 t}$, $J_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & \text{sign}\alpha_1 i \\ -\text{sign}\alpha_1 i & 0 \end{pmatrix}$ – інволютивна матриця.

Таким чином, у розглянутому випадку ранг нестационарності дорівнює двом, а $K_{\frac{z\bar{z}}{z\bar{z}}}(t, s)$ є кореляційною функцією випадкового процесу першого рангу нестационарності.

Висновки.

Досліджено теплові режими з метою визначення загальних закономірностей керування просторово-часовими змінами температурного поля у складній системі при урахуванні впливу різних конструктивних та фізичних параметрів.

Одержано наближені розрахункові формули для середнього температурного поля та його дисперсії, що враховують флуктуаційні процеси при розрахунку теплових режимів сонячних батарей, які дозволяють внести відповідні поправки при теоретичних розрахунках.

Отримано зображення для кореляційної функції розв'язку нестационарного рівняння теплопровідності для пластини скінчених розмірів, яка знаходиться під впливом зовнішніх статистично нестационарних джерел.

Аналогічне зображення для кореляційної функції можна отримати для елементів радіоапаратури, які мають форму шайби, і використовуючи спектральні розклади нестационарних випадкових процесів, отримати спектральне зображення розв'язку, яке відповідає початково-крайовій задачі для рівняння теплопровідності.

Аналіз теплових режимів різноманітних радіоелектронних апаратів може бути використано в процесі проектування для вибору оптимальної системи їх охолодження та розміщення певним чином окремих частин апарата відносно одна одної.

Список літератури: 1. *Малинский В.Д.* Испытания аппаратуры и средств измерений на воздействии внешних факторов: Справочник / В.Д. Малинский, В.Х. Бегларян, Л.Г. Дубицкий // Под ред. В.Д. Малинского – М.: Машиностроение, 1993. – 576 с. 2. *Петрова А.Ю., Черемская Н.В., Климова Л.В., Проценко М.А.* Об одной вероятностной модели тепловых режимов радиоаппаратуры // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Сер. „Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматичні системи управління”.– Харків, 2006. – №733. – Вип. 6. – С.160-165. 3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики / М.: Наука, 1977. – 736с.

Надійшла до редколегії 06.10.2010

Т.В. ШМАТКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В статті пропонується метод дослідження динамічної стійкості нелінійних форм коливань пластин та пологих оболонок зі складною формою плану. Математична постановка задачі здійснена в рамках уточненої теорії першого порядку. Запропонований підхід базується на використанні теорії R-функцій, варіаційних методів, «обмеженого критерію стійкості за Ляпуновим» та методу Рунге-Куты. Наведені чисельні результати для пологих оболонок складної форми, які знаходяться під дією поперечного навантаження.

Research method of the dynamic stability of the geometrically nonlinear vibration modes of plates and shallow shells is considered. Mathematical statement of the problem is carried out in framework of reinforced theory shells of the first order. The proposed method is based on the R-functions theory, variational methods, “limited stability criterion”, obtained from the definition stability by Lyapunov and method by Runge-Kutta. Numerical results for shells with complex form under transverse periodic load can be received using the realized software of designed numerically-analytical approach.

1. Введение. Многослойные пологие оболочки широко применяются в качестве основных элементов многих современных конструкций в различных промышленных областях: в машиностроении, авиапромышленности, кораблестроении и других отраслях. Анализ динамической неустойчивости многослойных пологих пластин и оболочек, нагруженных периодической поперечной нагрузкой, был выполнен во многих работах [1,2,3,4]. Однако большинство исследований проведены для пластин и оболочек достаточно простой формы. Существует ограниченный круг работ, в которых представлены результаты для многослойных пологих пластин и оболочек, имеющих форму, отличную от квадрата, окружности или эллипса. Это объясняется трудностями построения базисных функций в случае сложной геометрии области. С помощью этих функций удастся свести нелинейную систему дифференциальных уравнений с частными производными к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно времени. Одним из универсальных подходов, который используется для решения этой проблемы, является метод R-функций [5, 6]. Этот метод позволяет построить полную систему координатных функций для различных типов граничных условий. В данной статье теория R-функций вместе с вариационными методами и «ограниченным критерием устойчивости по-Ляпунову» [7] применяется как эффективный подход для исследования нелинейных форм колебаний многослойных пологих оболочек сложной формы.

2. Постановка задачи. Рассматриваются многослойные открытые пологие оболочки произвольной формы плана, состоящие из конечного числа ортотропных слоев N . В данной работе исследуются только симметричные по толщине оболочки. Согласно уточненной теории 1 порядка перемещения u и v в направлении осей Ox и Oy являются линейными функциями координаты z , а поперечное перемещение w является постоянной величиной по всей толщине оболочки. Учитывая эти предположения, перемещения представляются в следующем виде:

$$u' = u + z\psi_x, \quad v' = v + z\psi_y, \quad w' = w,$$

где u , v и w являются перемещениями в срединной поверхности,

ψ_x и ψ_y - это сдвиговые деформации срединной поверхности относительно осей Ox и Oy соответственно. Деформации растяжения определяются как

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= \varepsilon_{11} + zk_x, & \varepsilon'_{22} &= \varepsilon_{22} + zk_y, & \varepsilon'_{33} &= 0, \\ \varepsilon'_{12} &= \varepsilon_{12} + zk_{xy}, & \varepsilon'_{13} &= w_{,x} - uk_1 + \psi_x, & \varepsilon'_{23} &= w_{,y} - vk_2 + \psi_y, \\ \varepsilon'_{xz} &= \psi_x + w_{,x}, & \varepsilon'_{yz} &= \psi_y + w_{,y}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{,x} + k_1 w + \frac{1}{2} w_{,x}^2, & \varepsilon_{22} &= v_{,y} + k_2 w + \frac{1}{2} w_{,y}^2, & \varepsilon_{12} &= u_{,x} + v_{,y} + w_{,x} w_{,y}, \\ k_x &= \psi_{,x,x}, & k_y &= \psi_{,y,y}, & k_{xy} &= \psi_{,x,y} + \psi_{,y,x}. \end{aligned}$$

Здесь k_1 и k_2 - кривизны пологих оболочек.

Представим неизвестные функции в качестве компонентов следующего вектора $U = (u, v, w, \psi_x, \psi_y)^T$, тогда разрешающие уравнения могут быть записаны в виде:

$$LU = -NI(w) + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + P, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L &= [L_{ij}]_{i=1,5, j=1,5}, & NI(w) &= (NI_1(w), NI_2(w), NI_3(w), 0, 0)^T, \\ m &= (m_1, m_1, m_1, m_2, m_2)^T, & P &= (0, 0, q(x, y, t), 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Здесь L_{ij} - линейные операторы, которые могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_1^2 C_{55}, \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_2^2 C_{44}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{12} &= L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_1 k_2 C_{45}, \\
L_{13} &= -L_{31} = \left((k_1 C_{11} + k_2 C_{12} + k_1 C_{55}) \frac{\partial}{\partial x} + (k_1 C_{16} + k_2 C_{26} + k_1 C_{45}) \frac{\partial}{\partial y} \right), \\
L_{14} &= L_{41} = k_1 C_{55}, \quad L_{15} = L_{51} = k_2 C_{44}, \\
L_{23} &= -L_{32} = \left((k_1 C_{16} + k_2 C_{26} + k_2 C_{45}) \frac{\partial}{\partial x} + (k_1 C_{12} + k_2 C_{22} + k_2 C_{44}) \frac{\partial}{\partial y} \right), \\
L_{24} &= L_{42} = k_2 C_{45}, \quad L_{25} = L_{52} = k_2 C_{44}, \\
L_{33} &= C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (C_{11} k_1^2 + 2C_{12} k_1 k_2 + C_{22} k_2^2), \\
L_{34} &= L_{43} = C_{55} \frac{\partial}{\partial x} + C_{45} \frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{35} = -L_{53} = C_{45} \frac{\partial}{\partial x} + C_{44} \frac{\partial}{\partial y}, \\
L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{55}, \\
L_{45} &= L_{54} = \left(D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{44} \right), \\
L_{55} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{44}.
\end{aligned}$$

Правая часть уравнения (1), то есть, вектор $Nl(w)$, представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
Nl_1(w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
Nl_2(w) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\
Nl_3(u, v, w, \psi_x, \psi_y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (k_1 C_{16} + k_2 C_{26}) + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Коэффициенты C_{ij}, D_{ij} ($K_{ij} = 0$) и m_j , ($j = \overline{1,5}$) вычисляются по следующим формулам:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} B_{ij}^{(m)}(1, z^2) dz, \quad (i, j = 1, 2, 6),$$

$$C_{ij} = k_i^2 \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} B_{ij}^{(m)} dz, \quad (i, j = 4, 5),$$

$$m_j = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \rho_m dz, \quad (j = 1, 2, 3), \quad m_j = \sum_{m=1}^n \int_{h_m}^{h_{m+1}} \rho_m z^2 dz, \quad (j = 4, 5).$$

Здесь $B_{ij}^{(m)}$ - коэффициенты жесткости для m -го слоя, k_i ($i = 4, 5$) - коэффициенты сдвига.

3. Метод решения. Разложим неизвестные функции в ряд по собственным функциям $\vec{U}_i = (u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i})$, соответствующим линейной задаче колебаний.

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^2 y_i(t) w_i(x, y), \quad \psi_x = \sum_{i=1}^2 y_i(t) \psi_{x_i}(x, y), \quad \psi_y = \sum_{i=1}^2 y_i(t) \psi_{y_i}(x, y), \\ u &= \sum_{i=1}^2 y_i(t) u_i(x, y) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 y_i y_j u_{ij}, \quad v = \sum_{i=1}^2 y_i(t) v_i(x, y) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 y_i y_j v_{ij}. \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $u_i, v_i, w_i, \psi_{x_i}, \psi_{y_i}$ являются компонентами собственного вектора \vec{U}_i , и при этом функции u_{ij}, v_{ij} должны быть решениями следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} L_{11} u_{ij} + L_{12} v_{ij} = -N_1^{(2)}(w_i, w_j), \\ L_{21} u_{ij} + L_{22} v_{ij} = -N_2^{(2)}(w_i, w_j). \end{cases} \quad (3)$$

Правые части системы (3), обозначенные в виде операторов $N_k^{(2)}(w_i, w_j)$, ($k = 1, 2$), имеют следующий вид:

$$N_1^{(2)}(w_i, w_j) = \frac{\partial w_i}{\partial x} \left(C_{11} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial w_i}{\partial y} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right), \\
Nl_2^{(2)}(w_i, w_j) = & \frac{\partial w_i}{\partial x} \left(C_{16} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{\partial w_i}{\partial y} \left(C_{66} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что решение системы (3), дополненной соответствующими граничными условиями, а также решение задачи о линейных колебаниях выполняется с помощью метода R-функций [5,6].

Подставляя выражение (2) для неизвестных функций u, v, w, ψ_x, ψ_y в третье уравнение системы (1) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $y_1(t), y_2(t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
y_1'' + \alpha_0^{(1)} y_1 + \alpha_{11}^{(1)} y_1^2 + \alpha_{12}^{(1)} y_1 y_2 + \alpha_{22}^{(1)} y_2^2 + \gamma_{111}^{(1)} y_1^3 + \gamma_{112}^{(1)} y_1^2 y_2 + \gamma_{122}^{(1)} y_1 y_2^2 + \gamma_{222}^{(1)} y_2^3 = \alpha_r P(t), \\
y_2'' + \alpha_0^{(2)} y_2 + \alpha_{11}^{(2)} y_1^2 + \alpha_{12}^{(2)} y_1 y_2 + \alpha_{22}^{(2)} y_2^2 + \gamma_{111}^{(2)} y_1^3 + \gamma_{112}^{(2)} y_1^2 y_2 + \gamma_{122}^{(2)} y_1 y_2^2 + \gamma_{222}^{(2)} y_2^3 = 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Коэффициенты этих уравнений определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^{(m)} &= \omega_{mL}^2 \\
\alpha_{ij}^{(m)} &= -\frac{1}{m_1 \|w_m\|^2} \iint_{\Omega} \left(k_1 N_{11p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) + k_2 N_{22}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) + N_{11}^L(u_i, v_i, w_i) w_{i,xx} + \right. \\
& \quad \left. + N_{22}^L(u_i, v_i, w_i) w_{i,yy} + 2N_{12}^L(u_i, v_i, w_i) w_{i,xy} \right) d\Omega, \quad (m, i, j = 1, 2), \\
\gamma_{ijk}^{(m)} &= -\frac{1}{m_1 \|w_m\|^2} \iint_{\Omega} \left(k_1 N_{11p}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) w_{k,xx} + N_{22}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) w_{k,yy} + \right. \\
& \quad \left. + 2N_{12}^{(ND)}(u_{ij}, v_{ij}, w_i, w_j) w_{k,xx} \right) w_m d\Omega.
\end{aligned}$$

Полученная система (4) решается с помощью метода Рунге-Кутты и специального критерия устойчивости, который описывается в следующем разделе.

4. Исследование устойчивости нелинейных форм колебаний. Рассмотрим устойчивость второй периодической или хаотической формы колебаний $y_2(t) = 0$. Неустойчивость формы колебаний $y_2(t) = 0$ означает «перекачку» энергии из одной гармоники ряда Фурье в другую. Переменные $y_2(t)$ и $\dot{y}_2(t)$ рассматриваются в качестве вариаций. Значение вариации y_2 полагается существенно меньше, чем переменная y_1 в области устойчивости формы

колебаний $y_2(t) = 0$, как это принято в теории устойчивости. В работе [7] учитывается, что начальное значение переменной y не является сколь угодно малым и поэтому вводится связь между постоянной ε и величиной δ . Пусть переменная времени t изменяется от 0 до T . Тогда принимается следующий критерий устойчивости/неустойчивости рассматриваемой формы колебаний системы (4):

Неустойчивость формы колебаний $y_2(t) = 0$ фиксируется, если выполняется следующее условие

$$|y_2(t)| \geq \rho |y_2(0)|, \quad (0 \leq t \leq T). \quad (5)$$

Этот критерий устойчивости, полученный при условии, что величина δ не может быть сколь угодно малой, был назван как “ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову”.

Здесь величина ρ^{-1} – это мера малости начальных вариаций по отношению к максимально допустимым вариациям ε для любых $t \geq 0$. Увеличение значения параметра ρ означает, что допустимые начальные вариации уменьшаются. Существует некоторая произвольность в выборе значения ρ , так как с увеличением времени t в области неустойчивости вариации выходят за пределы начального решения ε -окрестности при любом выборе параметра ρ . Для определенности это значение было принято $\rho \leq 10$.

Для определения конечного значения параметра T численный эксперимент проводился в некоторых узловых точках выбранной сетки системы параметров при фиксированном значении T . Увеличение параметра T и соответствующие вычисления продолжались до тех пор, пока границы областей неустойчивости не стабилизировались в выбранном масштабе плоскости параметров.

5. Численные результаты. Найдем области неустойчивости нелинейных форм колебаний для заземленной трехслойной пологой сферической оболочки, представленной на Рис. 1(а) и опирающейся на план, изображенный на Рис. 1(б).

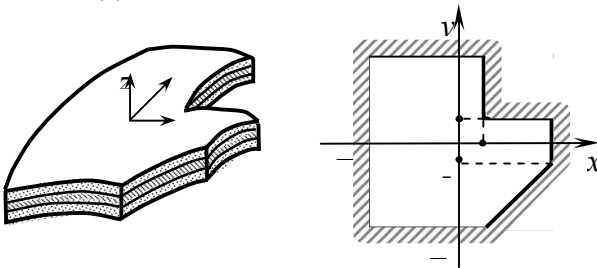


Рисунок 1(а,б) - План заземленной трехслойной оболочки.

Пусть оболочка нагружена поперечной периодической нагрузкой $P(t) = F \cos \Omega t$. Механические свойства оболочки следующие: $E = 25E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$. Коэффициенты сдвига приняты равными $k_4^2 = k_5^2 = 5/6$. Учитывались такие геометрические параметры оболочки:

$$b/a = 1, \quad c/(2a) = d/(2a) = 0.25, \quad 2a/R_x = 2a/R_y = 0.1, \quad h/(2a) = 0.1$$

Граничные условия для защемленного края представляются следующим образом:

$$w = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \psi_x = \psi_y = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

где $\partial\Omega$ обозначает всю границу области, уравнения которой могут быть построены с помощью теории R-функций в виде

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_5.$$

Функции $f_i, (i = \overline{1,5})$ определяются следующим образом:

$$f_1 = (b^2 - y^2)/(2b) \geq 0, \quad f_2 = (a^2 - x^2)/(2a) \geq 0, \quad f_3 = (c - x) \geq 0, \\ f_4 = (d - y) \geq 0, \quad f_5 = ((y + b)(a - c) - (x - c)(b - d)) \geq 0.$$

Выражения для R-операций \wedge_0, \vee_0 определяются согласно [5]. Соответствующие структурные формулы [5, 6] имеют вид:

$$u = \omega P_1, \quad v = \omega P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega P_4, \quad \psi_y = \omega P_5.$$

Здесь $P_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ - неопределенные компоненты построенной структуры решения, которые раскладываются в ряд в виде некоторой полной системы функций. Коэффициенты этого разложения отыскиваются из условия стационарности соответствующего функционала.

Величины безразмерных параметров собственной частоты для трехслойной ортогонально-армированной $(0^0, 90^0, 0^0)$ сферической оболочки, панели и пластины представлены в Таблице 1.

Таблица 1

Значения безразмерного частотного параметра $\Lambda_i = \lambda_i \frac{(2a)}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$

$(2a/R_x, 2a/R_y)$	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Λ_4
(0.1, 0.1)	18.851	29.139	36.113	43.113
(0, 0.1)	18.561	29.068	36.085	43.054
(0, 0)	18.453	29.035	36.069	43.031

Области неустойчивости представлены для ортогонально-армированной сферической оболочки на *Рис. 2*. Время стабилизации $T=1000$, то есть, временной параметр, при котором стабилизируются границы областей неустойчивости.

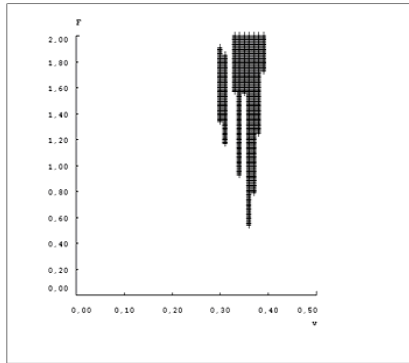


Рисунок 2 – Область неустойчивости для сферической оболочки.

Вычисления проводились в выбранной системе параметров (Ω, F) , при этом переменная Ω изменялась в пределах $0 \leq \Omega \leq 0.5$ и переменная F варьировалась $0 \leq F \leq 2$.

Полученные результаты показывают, что исследуемая оболочка может иметь неустойчивое поведение при следующих значениях параметров системы: $\Omega = 0.27$ и $F = 0.42$.

6. Заключение. Предложен эффективный подход для исследования динамической неустойчивости нелинейных форм колебаний многослойных пологих оболочек симметричного строения со сложной формой плана. Данный метод базируется на применении теории R-функций, вариационных методов, «ограниченного критерия устойчивости по Ляпунову» и методе Рунге-Кутты. Представлены численные результаты для защемленной трехслойной полой сферической оболочки.

Список литературы: 1. Abe A., Kobayashi Y., Yamada G. One-to-One Internal Resonance of Symmetric Cross-ply Laminated Shallow Shells // Journal of Applied mechanics № 68. 2001. PP. 40-649. 2. M.Ganapathi, T.K.Varadan, V.Balamurugan. Dynamic instability of laminated composite curved panels using finite element method // Computers and Structures № 53. 1994. PP. 335-342. 3. L.W.Chen, J.Y.Yang. Dynamical instability of laminated composite plates by the finite element method // Computers and Structures № 36. 1990. PP. 845-851. 4. C.W.Bert, V.Birman. Dynamic stability of shear deformable antisymmetric angle-ply plates // International Journal of Solids Structure № 24. 1987. PP. 233-238. 5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и ее приложения. К., 1982. 551 с. 6. Рвачев В.Л., Курна Л.В. R-функции в задачах теории пластин. К., 1987. 176 с. 7. Mikhlin Yu.V., Shmatko T.V. Stability of regular and chaotic modes in dynamical systems with more than one equilibrium positions // Problems of Machine-Building № 3-4. Vol.2. 1999. PP. 128-135.

Поступила в редколлегию 06.10.2010

Е.Г. ЯНЮТИН, докт. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ», Харьков
Н.И. ВОРОПАЙ, асп., ХНАДУ, Харьков

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНОГО ОБЖАТИЯ

Розглянута поведінка прямокутної пластини під дією імпульсного навантаження. Моделювання деформування пластини виконується на основі уточненої теорії з урахуванням поперечного обтиснення. Визначальна система рівнянь отримана за допомогою варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона. Представлені чисельні результати розв'язання прямих та обернених задач. При ідентифікації невідомих навантажень використано метод регуляризації А.М. Тихонова.

A behavior of the rectangular plate under impulse load is considered. The simulation of the plate deforming is based on refined theory with accounting a transverse compression. The determining system of equations is obtained by Ostrogradskiy-Hamilton's variation principle. Numerical results of solutions of direct and inverse problems are presented. The Tihonov's regularizing method is used at force determination.

1. Введение. Решение прямых и обратных задач механики твердого деформируемого тела является одним из средств исследования протекающих деформационных процессов. Пластины как конструкционные элементы являются часто встречающимися элементами различных машин и сооружений, поэтому оценка их напряженно-деформированного состояния позволяет создать достаточно надежные и прочные конструкции.

2. Анализ публикаций. Существует большое число работ [1, 2], посвященных исследованию динамике пластин, однако проблема создания соответствующих теорий, приближенных к трехмерным задачам теории упругости, и их эффективных методов расчета продолжает сохранять свою актуальность.

Целью настоящей работы является построение уточненной теории пластин на основе гипотезы о линейной зависимости перемещений от поперечной координаты, а также исследование напряженно-деформированного состояния упругой прямоугольной изотропной пластины средней толщины под воздействием сосредоточенных нестационарных нагрузок на основе полученной модели. Кроме того, предложена методика решения обратных задач, которая позволяет получить функции, характеризующие поведение пластины при воздействии на нее неизвестных нагрузок на основе их косвенных проявлений.

3. Постановка задачи. Исследуется деформирование прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины, отнесенной к декартовой системе координат xOy (рис. 1).

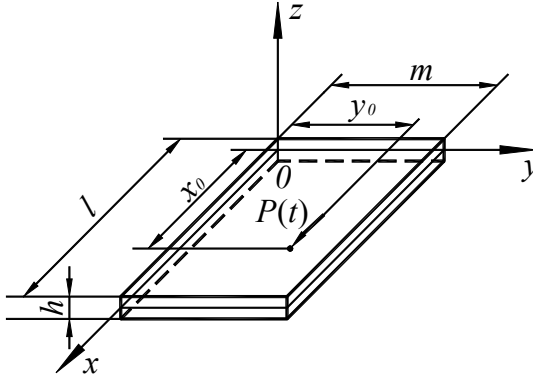


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины.

4. Уравнения динамики пластины. Уравнения движения, описывающие поведение пластины под воздействием внешних сил, основываются на уточненной теории, согласно которой во внимание принимаются влияние инерции вращения и сдвига, а также учитывается деформация поперечного обжатия. Принятая модель позволяет записать следующие кинематические гипотезы:

$$u^z = u + z \cdot \psi_x; v^z = v + z \cdot \psi_y; w^z = w + z \cdot \psi_z, \quad (1)$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ – перемещение точек срединной плоскости; $\psi_x(x, y, t)$, $\psi_y(x, y, t)$ – углы поворота нормали к срединной плоскости; $\psi_z(x, y, t)$ – линейная деформация поперечного обжатия; $z \in [-h/2, h/2]$, причем h – толщина пластины.

Деформации пластины определяются согласно уравнениям Коши, и они равны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \varepsilon_z = \psi_z; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right); \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

На основе закона Гука получим выражения, связывающие напряжения и деформации

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \psi_z \right] \right]; \\ \sigma_y &= 2G \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \psi_z \right] \right]; \\ \sigma_z &= 2G \cdot \left[\psi_z + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + \psi_z \right] \right]; \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= G \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \cdot \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right] \right]; \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G \cdot \left[\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right]; \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= G \cdot \left[\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right],\end{aligned}$$

где $G = E/2(1+\nu)$; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

Уравнения движения пластины и граничные условия получим исходя из энергетических предпосылок, а именно на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона [3]

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta' W) dt = 0. \quad (2)$$

Здесь δK – вариация кинетической энергии; $\delta \Pi$ – вариация потенциальной энергии; $\delta' W$ – величина, содержащая сумму элементарных работ внешних сил.

Поскольку исследуется прямоугольная пластина, ограниченная координатными линиями $x=0$, $x=l$, $y=0$, $y=m$, то выражение для кинетической энергии примет вид:

$$K = \frac{1}{2} \rho h \int_0^l \int_0^m \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала пластины.

Потенциальная энергия пластины определяется таким образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^m \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz. \quad (4)$$

Если в качестве внешних сил выбрать величины p_x, p_y, q , то их элементарную работу можно записать так:

$$\delta' W = \int_0^l \int_0^l (p_x \delta u + p_y \delta v + q \delta w) dx dy. \quad (5)$$

Здесь p_x, p_y, q – проекции вектора внешней силы на оси декартовой системы координат соответственно.

Уравнения, полученные на основе указанного принципа, имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_x; \\ Gh \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - p_y; \\ Gh(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q; \\ 2GI \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + GI \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + GI \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} - Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \\ GI \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2GI \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + GI \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}; \\ \left(\nabla^2 - 2h \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) G \psi_z - 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Система уравнений (6) в перемещениях позволяет исследовать деформационные процессы в рассматриваемом объекте.

Выпишем граничные условия для края пластины $x = const$ и отметим, что для края пластины $y = const$ граничные условия имеют аналогичный вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u^0 \text{ или } N_x = N_x^0; \\ v = v^0 \text{ или } T_{xy} = T_{xy}^0; \\ w = w^0 \text{ или } Q_x = Q_x^0; \\ \psi_x = \psi_x^0 \text{ или } M_x = M_x^0; \\ \psi_y = \psi_y^0 \text{ или } M_{xy} = M_{xy}^0; \\ \psi_z = \psi_z^0, \end{array} \right. \quad (7)$$

где N_x, N_y – нормальные усилия; T_{xy} – касательное усилие; Q_x, Q_y – поперечные силы; M_x, M_y – изгибающие моменты; M_{xy} – величина, соответствующая крутящему моменту.

Примем нулевые начальные условия

$$u|_{t=0} = v|_{t=0} = w|_{t=0} = \psi_x|_{t=0} = \psi_y|_{t=0} = \psi_z|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_x}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_y}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_z}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, динамика пластины описывается системой уравнений движения (6) с учетом начальных (8) и граничных условий (7).

Отметим, что в монографии [2] на основе гипотез (1) получена более сложная система уравнений нелинейной теории оболочек с учетом поперечных нормальных и сдвиговых деформаций.

5. Решение прямой задачи. Целью задачи является исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной шарнирно-опертой пластины размера $l \times m$ и толщиной h под действием известной нагрузки (рис. 1). Причем, будем рассматривать сосредоточенное нестационарное воздействие на пластину силы, которая касательна к ее срединной плоскости и приложена в точке (x_0, y_0) , а линия действия параллельна оси x (рис. 1). В этом случае выражение для нагрузки будет иметь вид:

$$p_x(x, y, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), \quad (9)$$

где $P(t)$ – некоторая заданная функция изменения силы во времени.

Задача о нестационарных колебаниях пластины сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Gh \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p_x; \\ Gh \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2Gh \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + Gh \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \psi_z}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \left(IV^2 - 2h \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) G\psi_z - 2Gh \cdot \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho I \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (10)$$

Приведенная система трех уравнений получена на основе системы уравнений (6) с учетом рассматриваемой нагрузки. Остальные три уравнения превращаются в тождества.

Решение системы уравнений (10) относительно неизвестных функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $\psi_z(x, y, t)$ строится с нулевыми начальными условиями (8) на основе разложения искомых функций в тригонометрические ряды по координатам x и y , согласно принятой схеме закрепления пластины, и применения преобразования Лапласа по времени t .

Выражения для определения продольных перемещений $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и деформации поперечного обжатия $\psi_z(x, y, t)$ имеют следующий вид:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Omega_{u_{ikn}} C_{kn} \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \omega_{ikn}(t - \tau) d\tau \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{m}; \quad (11)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Omega_{v_{ikn}} C_{kn} \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \omega_{ikn}(t - \tau) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}; \quad (12)$$

$$\psi_z(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \Omega_{\psi_{z_{ikn}}} C_{kn} \int_0^t P(\tau) \cdot \sin \omega_{ikn}(t - \tau) d\tau \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{m}, \quad (13)$$

где ω_{ikn} – частоты собственных колебаний;

$$C_{kn} = \frac{4}{lm} \cdot \frac{1}{\rho h} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right);$$

$$\Omega_{u_{ikn}} = \frac{\det^* A_{u_{ikn}}}{\Omega_{ikn}}; \quad \Omega_{v_{ikn}} = \frac{\det^* A_{v_{ikn}}}{\Omega_{ikn}}; \quad \Omega_{\psi_{z_{ikn}}} = \frac{\det^* A_{\psi_{z_{ikn}}}}{\Omega_{ikn}}.$$

В приведенных соотношениях

$$\begin{aligned} \det^* A_{u_{ikn}} &= \omega_{ikn}^4 - \omega_{ikn}^2 \cdot \left(c_1'^2 + c_1^2 \mu_n^2 + c_2^2 (2\lambda_k^2 + \mu_n^2) \right) + (\lambda_k^2 + \mu_n^2) \cdot (c_2^4 \lambda_k^2 + c_1^2 c_2^2 \mu_n^2) + \\ &\quad + c_1'^2 c_2^2 \lambda_k^2 + (c_1^2 c_1'^2 - c_4^2 c_4'^2) \mu_n^2; \\ \det^* A_{v_{ikn}} &= c_3^2 \lambda_k \mu_n \omega_{ikn}^2 + \lambda_k \mu_n \left(c_4^2 c_4'^2 - c_1'^2 c_3^2 - c_2^2 c_3^2 (\lambda_k^2 + \mu_n^2) \right); \\ \det^* A_{\psi_{z_{ikn}}} &= c_4'^2 \lambda_k \omega_{ikn}^2 + c_4'^2 (c_3^2 - c_1^2) \lambda_k \mu_n^2 - c_2^2 c_4'^2 \lambda_k^3; \\ \Omega_{ikn} &= \omega_{ikn} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{jkn}^2 - \omega_{ikn}^2). \end{aligned}$$

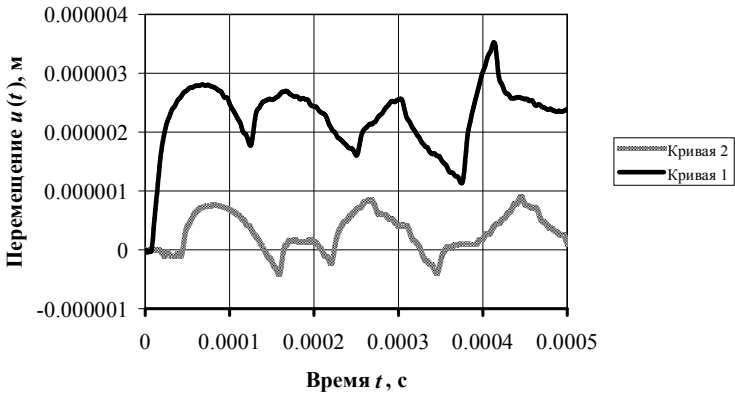
$$\begin{aligned} \text{Здесь } \lambda_k &= \frac{k\pi}{l}; \quad \mu_n = \frac{n\pi}{m}; \quad c_1^2 = \frac{2G}{\rho} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu}; \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}; \quad c_3^2 = \frac{G}{\rho} \cdot \frac{1}{1-2\nu}; \\ c_4^2 &= \frac{2G}{\rho} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu}; \quad c_1'^2 = \frac{2Gh}{\rho I} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu}; \quad c_4'^2 = \frac{2Gh}{\rho I} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu}. \end{aligned}$$

На базе полученных выражений (11)-(13) можно исследовать деформационные процессы упругой изотропной прямоугольной пластины под действием сосредоточенных нестационарных во времени нагрузок, которые приложены к срединной плоскости.

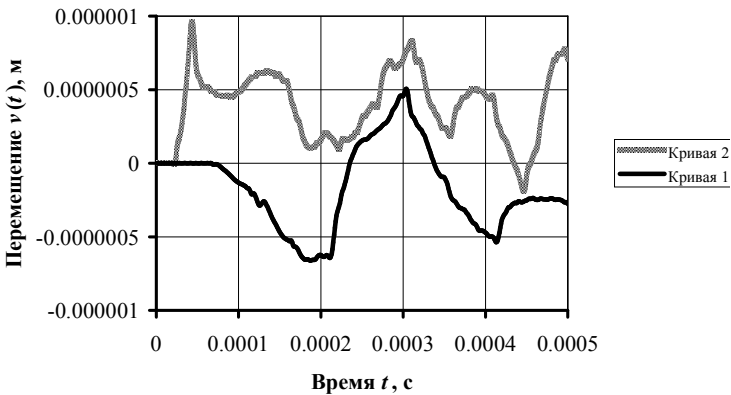
6. Численные результаты. Численные расчеты согласно формулам (11)-(13) будем проводить для пластины со следующими параметрами: $l = 0.8$ м; $m = 0.6$ м; $h = 0.08$ м; $E = 2.07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0.3$; $\rho = 7890$ кг/м³. Сила $P(t)$, прикладываемая в точке с координатами $x_0 = 0.5$ м, $y_0 = 0.4$ м,

изменяется во времени согласно функции Хевисайда: $P(t) = P_0 \cdot H(t)$, где $P_0 = 10^5$ Н – интенсивность действующей нагрузки. Бесконечные суммы в выражениях (11)-(13) были заменены конечным числом членов (\lim) в этих суммах. Число учитываемых членов в одном направлении и другом принималось равным между собой и составляло $\lim = 50$.

На рис. 2, а, б и 3 показаны кривые перемещения $u(t), v(t)$ и деформация поперечного обжатия $\psi_z(t)$ соответственно в точках с координатами $x_s = 0.55$ м, $y_s = 0.4$ м (точка вблизи приложенной нагрузки) – кривая 1; и $x_s = 0.4$ м, $y_s = 0.3$ м (точка в центре пластины) – кривая 2.



а



б

Рисунок 2 – Изменение перемещений $u(t)$ и $v(t)$ во времени.

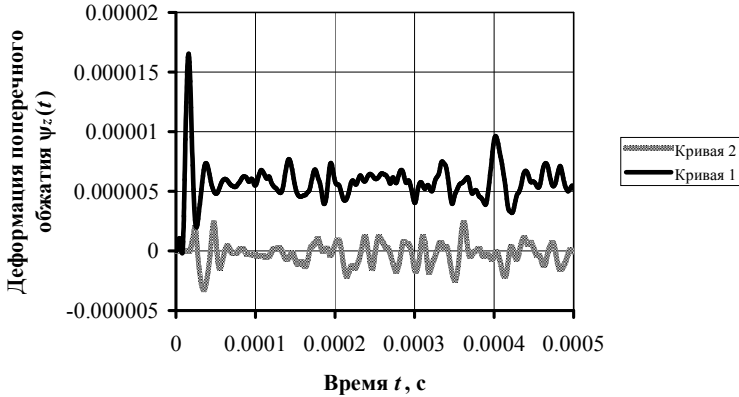


Рисунок 3 – Изменение деформации поперечного обжатия $\psi_z(t)$ во времени.

Система уравнений (6) такова, что на ее основе можно рассмотреть и более сложные законы нагружения упругого тела в виде прямоугольной пластины. Однако при этом существенно возрастет сложность исследования соответствующих задач.

7. Решение обратной задачи. В результате решения обратной задачи осуществляется определение воздействующих на пластину нагружений, которые предполагаются неизвестными, в предположении заданности закона ее колебаний в одной из точек. Аналогичные исследования для других объектов на основе существенно более простых теорий (безмоментная теория, классическая теория, теория типа С.П. Тимошенко) представлены в монографии [4, 5].

Задача идентификации нестационарной касательной нагрузки по заданным продольным перемещениям $\bar{u}(t)$ или $\bar{v}(t)$, воздействующей на прямоугольную пластину сводится к решению следующего уравнения:

$$\bar{u}(t) = \int_0^t P(\tau)K_u(t-\tau)d\tau; \text{ или } \bar{v}(t) = \int_0^t P(\tau)K_v(t-\tau)d\tau. \quad (14)$$

В соотношениях (14)

$$K_u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \cdot \sum_{i=1}^3 \Omega_{u_{ikn}} \sin \omega_{ikn}(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{m};$$

$$K_v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \cdot \sum_{i=1}^3 \Omega_{v_{ikn}} \sin \omega_{ikn}(t) \cdot \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}.$$

Выражения (14) являются интегральными уравнениями Вольтерра I рода и получены на основе уравнений (11) и (12) соответственно, при условии, что $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$ – заданные функции для конкретной точки (x_s, y_s) , а $P(t)$ – искомая функция.

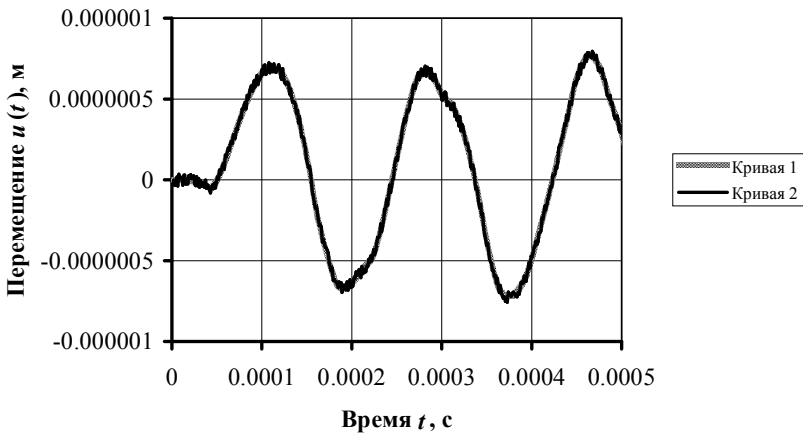
Известно, что непосредственное решение уравнений (14) с помощью метода квадратур не является устойчивым, поэтому здесь применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [6] который позволяет получить приближенное, но устойчивое решение.

Решение задачи сводится к анализу регуляризованного СЛАУ

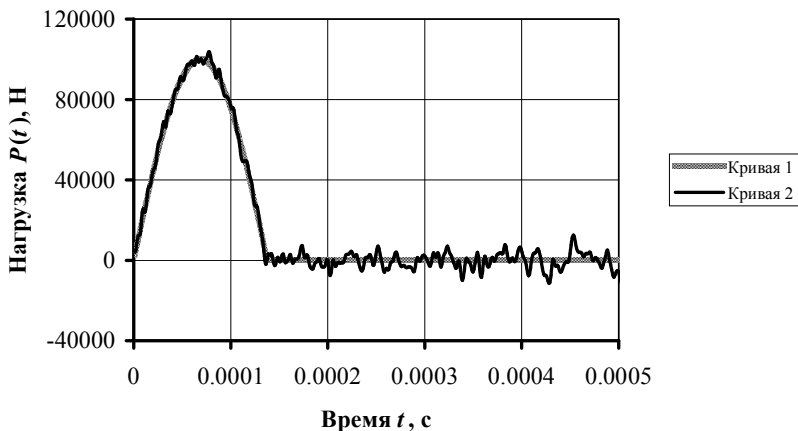
$$\left(A_u^T A_u + \alpha C \right) p = A_u^T u_\delta ; \text{ или } \left(A_v^T A_v + \alpha C \right) p = A_v^T v_\delta , \quad (15)$$

где A_d – матрица, элементы которой $a_{ij} = K_d [(i - j) \cdot \Delta t]$ ($d = u, v$); A_d^T – транспонированная матрица; α – параметр регуляризации; C – симметричная трехдиагональная матрица; p – вектор, который соответствует искомой функции $P(t)$; u_δ, v_δ – векторы исходных данных.

Численный расчет проводился согласно следующей методике: в результате решения прямой задачи определялись перемещения $u(t)$ или $v(t)$ в точке пластины $x_s = 0.4$ м, $y_s = 0.3$ м под действием импульсной нагрузки. На полученные значения функции перемещения накладывался «шум» с уровнем $\delta = 0.05$, моделирующий погрешность измерительных приборов. При решении обратной задачи по «зашумленной» функции перемещения идентифицировалась нестационарная нагрузка, воздействующая на прямоугольную пластину. Восстановление ее производилось при тех же исходных данных, которые применялись в пункте 6.



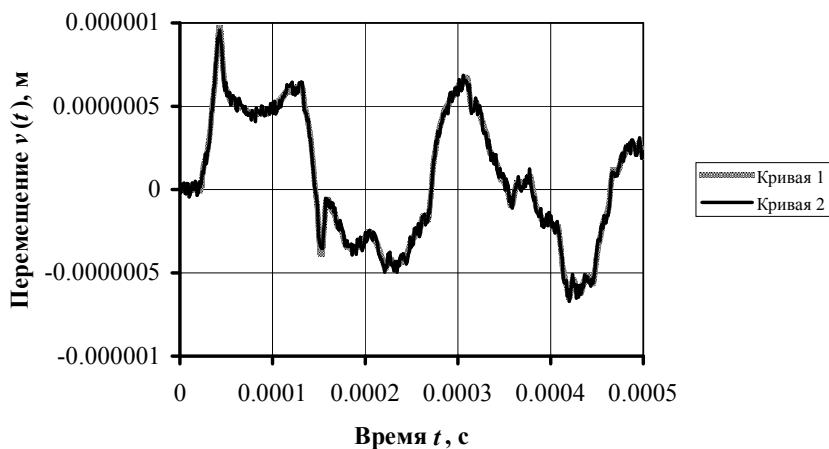
а



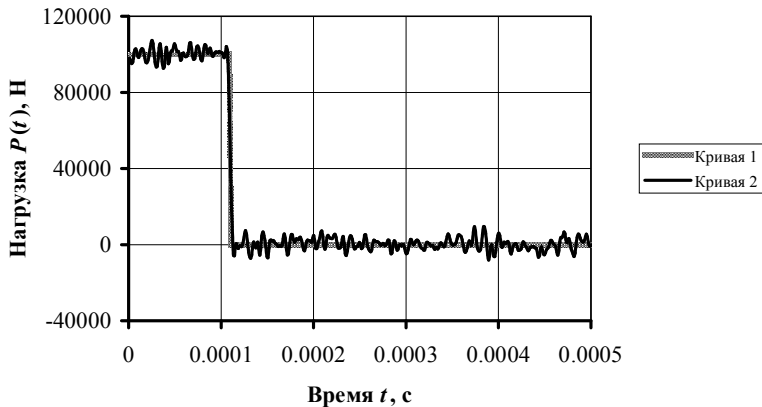
б

Рисунок 4 – Идентификация нагрузки по перемещению $u(t)$.

На рис. 4 и 5 представлены результаты решения обратной задачи о воздействии на пластину касательной к ее срединной плоскости нагрузки. Причем, на рис. 4 – кривые, идентифицированные по перемещению $u(t)$, а на рис. 5 – по перемещению $v(t)$.



а

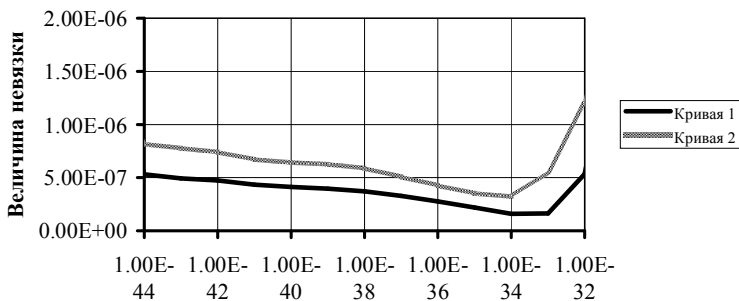


б

Рисунок 5 – Идентификация нагрузки по перемещению $v(t)$.

Рис. 4, а и 5, а (кривая 1) демонстрируют изменение перемещения во времени в результате воздействия нестационарной нагрузки – кривая 1 на рис. 4, б и 5, б соответственно. Кривая 2 на рис. 4, б и 5, б – нагрузка, идентифицированная по «зашумленному» перемещению (кривая 2 на рис. 4, а и 5, а соответственно), при $\alpha = 10^{-34}$.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что идентифицировать нагрузку во времени можно как по перемещению $u(t)$, так и по – $v(t)$, т.е. $u(t)$ и $v(t)$ являются равносильными исходными данными.



Параметр регуляризации α

Рисунок 6 – Изменение параметра регуляризации α от величины невязки.

Кривые, представленный на рис. 6, демонстрирует выбор рационального значения параметра регуляризации α . Отметим, что рациональное значение регуляризации α выбирался на основе метода невязки [7], заключающийся в следующем:

$$\|Ap^\alpha - \bar{u}\| \rightarrow 0. \quad (16)$$

В выражении (16) $u(t)$ – точно известная функция перемещения точки.

Кривая 1 на рис. 6 соответствует выбору параметра регуляризации α для восстановления нагрузки по перемещению $u(t)$, а кривая 2 – по перемещению $v(t)$.

Для перемещения $u(t)$ и для перемещения $v(t)$ параметр регуляризации α принимался равным $\alpha = 10^{-34}$ (рис. 6), который получался соответствующий требованию по выбору параметр регуляризации α в методе невязки (16).

8. Вывод. Использование регуляризирующего алгоритма А.Н. Тихонова дало возможность построить достаточно устойчивое решение для рассмотренных обратных задач динамики прямоугольной пластины даже при наложении «шума» с относительной погрешностью 5%.

Впервые в настоящей работе проведено решение обратных задач нестационарной динамики пластин на основе теории, включающей деформации поперечного обжатия.

Список литературы: 1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций: Монография. – К.: Издательско-полиграфический центр «Киевский университет», 2005. – 536 с. 3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 4. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Воропай Н.И., Гнатенко Г.А., Гришакин В.Т. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть I. – Харьков: ХНАДУ, 2010. – 180 с. 5. Янютин Е.Г., Воропай А.В., Поваляев С.И., Янчевский И.В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть II. – Харьков: ХНАДУ, 2010. – 212 с. 6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 7. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.

Поступила в редколлегию 17.09.2010

ЗМІСТ

БАРАНОВА Т. А., ЛИТВИН О. М. Оптимальні базисні функції в методі скінченних елементів	3
БЕЛОВ И. С. Об одной системе алгебраических уравнений	9
ВАНИН В. А., ГОЛОВЧЕНКО А. В., САМОТОЙ Е. В. Построение и исследование разностных схем повышенного порядка слабой аппроксимации для законов сохранения	15
ВАНИН В. А., ГРИГОРЬЕВ А. А. Изоморфизм групп продольных и поперечных колебаний винтового стержня	23
ГРИГОРЬЕВ А. Л., ТЮПА И. В., ГЛЕБОВА Л. В. Математическая модель емкостного метода возбуждения колебаний в упругих средах	38
ГУЦАЛЕНКО Ю. Г. Прогноз семикарбида вольфрама в вольфрамокерамических композитах горячего прессования с электроконсолидацией порошков на монокарбидной основе	52
ДИМИТРОВА-БУРЛАЕНКО С. Д. Представление L-почти периодических функций как непрерывные функции на топологической группе	65
ДУХОПЕЛЬНИКОВ С. В. Математические модели для расчета технических характеристик цилиндрических антенн с продольными щелями	76
ЄФІМОВ О. В., ПОТАНІНА Т. В. Методи автоматизації прийняття рішень при управлінні плануванням ремонтів обладнання енергоблоків ТЕС і АЕС	87
КОШОВИЙ А. Г., ВАНИН В. А. Математична модель взаємодії дофрактального розсіювача з екраном	94
ЛИТВИН О. М., ДРОБОТЯ А. І., КУЛИК С. І., ЛИТВИН О. О. Створення графічного стегафайлу на зображенні-контейнері з використанням вейвлетів	100
ЛЯШЕНКО В. П., ВАНИН В. А. Задачі для рівняння теплопровідності у порошковій металургії	108
ПЕРШИНА Ю. І. Відновлення об'єктів, що мають різну щільність	114
СТЕПАНОВ М. С., НАЗАРЕНКО С. А., СТЕПУНИН В. А. Математическое моделирование элементов машин при воздействии физических полей	126
ТАРСИС Е. Ю. Использование точного решения контактной задачи в методе r – функций для составных тел конечных размеров	133
ЧЕРЕМСЬКА Н. В. Урахування флуктуацій при розрахунках теплових режимів сонячних батарей	139
ШМАТКО Т. В. Исследование динамической неустойчивости нелинейных форм колебаний многослойных пластин и пологих оболочек	147
ЯНЮТИН Е. Г., ВОРОПАЙ Н. И. Постановка и решение динамических прямых и обратных задач для прямоугольной пластины с учетом поперечного обжатия	155

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
«Харківський політехнічний інститут»**

Тематичний випуск
«Математичне моделювання в техніці та технологіях»
Випуск 68

Науковий редактор: д-р техн. наук, проф. В.А. Ванін

Технічний редактор: С.Д. Нижник

Відповідальний за випуск: к.т.н., Г.Б. Обухова

Обл.вид. № 216-10

Підп. до друку 30.12.2010 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 9,4. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 0021. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, вул. Чичибабіна, 9
