



**ВІСНИК**  
**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО**  
**УНІВЕРСИТЕТУ**  
**«ХПІ»**

**37'2010**

**Харків**

# ВІСНИК

## НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХП»

Збірник наукових праць  
Тематичний випуск

37'2010

# «ДИНАМІКА І МІЦНІСТЬ МАШИН»

Видання засновано Національним технічним університетом  
«Харківський політехнічний інститут» у 2001 році

Державне видання  
Свідоцтво Держкомітету з інформаційної політики України  
КВ № 5256 від 2 липня 2001 року

### КООРДИНАЦІЙНА РАДА:

**Голова:** Л.Л.Товажнянський, д-р техн. наук, проф.

**Секретар:** К.О.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;	С.І.Кондрашов, д-р техн. наук, проф.;
Є.І.Сокол, д-р техн. наук, проф.;	В.М.Кошельник, д-р техн. наук, проф.;
Є.Є.Александров, д-р техн. наук, проф.;	В.І.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
Л.М.Бесов, д-р техн. наук, проф.;	Г.В.Лісачук, д-р техн. наук, проф.;
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;	В.С.Лупіков, д-р техн. наук, проф.;
Ф.Ф.Гладкий, д-р техн. наук, проф.;	О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.;
М.Д.Годлевський, д-р техн. наук, проф.;	В.І.Николаєнко, канд. іст. наук, проф.;
А.І.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;	П.Г.Перерва, д-р екон. наук, проф.;
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;	В.А.Пуляев, д-р техн. наук, проф.;
В.Д.Дмитриєнко, д-р техн. наук, проф.;	М.І.Рищенко, д-р техн. наук, проф.;
І.Ф.Домнін, д-р техн. наук, проф.;	В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;
В.В.Єпіфанов, канд. техн. наук, проф.;	Г.М.Сучков, д-р техн. наук, проф.;
Ю.І.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;	Ю.В.Тимофійев, д-р техн. наук, проф.;
П.О.Качанов, д-р техн. наук, проф.;	М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.
В.Б.Клепіков, д-р техн. наук, проф.;	

Харків 2010

**Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».** Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2010. – № 37. – 178 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

#### **РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:**

**Відповідальний редактор:** О.К.Морачковський, д-р техн. наук, проф.

**Відповідальний секретар:** А.Г.Андреев, канд. техн. наук, доц.

К.В.Аврамов	д-р техн. наук, проф.
Є.Є.Александров	д-р техн. наук, проф.
Д.В.Бреславський	д-р техн. наук, проф.
Ю.С.Воробйов	д-р техн. наук, проф.
А.П.Зиньковський	д-р техн. наук, проф.
Л.В.Курпа	д-р техн. наук, проф.
Г.І.Львов	д-р техн. наук, проф.
Ю.В.Міхлін	д-р фіз.-мат. наук, проф.
М.А.Ткачук	д-р техн. наук, проф.
Ю.М.Шевченко	академік НАНУ, д-р техн. наук, проф.

**АДРЕСА РЕДКОЛЕГІЇ:** 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ».  
Каф. ДММ, тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».  
Протокол № 7 від 1 жовтня 2010 р.

ISSN 2078-9130

© Національний технічний університет «ХПІ»

**В.В.МАТВЕЕВ**, академик НАН Украины, Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины;  
**А.П.ЗИНЬКОВСКИЙ**, д-р техн. наук, проф., Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины

## **Г.С.ПИСАРЕНКО – ОСНОВАТЕЛЬ УКРАИНСКОЙ ШКОЛЫ ПО КОЛЕБАНИЯМ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Стаття присвячена опису життєвого шляху й творчої спадщини видатного українського вченого – механіка, доктора технічних наук, професора Георгія Степановича Писаренка. Коротко викладені основні наукові результати, отримані Г.С.Писаренком в теорії механічних коливань.

The paper is devoted to the description of the life path and scientific heritage of the prominent Ukrainian scientist in Mechanics, doctor of technical sciences, professor Pisarenko Georg Stepanovich. The basic scientific results, were obtained by G.S.Pisarenko in the Theory of Mechanical Oscillations, are briefly presented.



12 ноября 2010 года исполняется 100 лет со дня рождения академика НАН Украины, лауреата Государственных премий Украины и Государственной премии СССР, Заслуженного деятеля науки Украины, доктора технических наук, профессора Георгия Степановича Писаренко.

Родился Г.С.Писаренко на Полтавщине (хутор Скрильники Кобелякского уезда) в казачьей семье. Свою трудовую деятельность начал семнадцатилетним юношей, работая вначале рабочим-ремонтником в г. Полтаве, а затем слесарем Нижегородского автомобильного завода. Настойчиво занимаясь самообразованием, в 1931 г. он поступил в Нижегородский механико-маши-

ностроительный институт, после окончания которого работал инженером-конструктором на заводе «Красное Сормово».

В 1937 г. Г.С.Писаренко был принят в аспирантуру Киевского политехнического института по специальности «Паровые турбины» и параллельно с 1939 г. начал работать по совместительству в Институте строительной механики (ныне – Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины). С этого времени его творческая деятельность была неразрывно связана с Нацио-

нальной академией наук Украины.

В феврале 1941 г. он защищает кандидатскую диссертацию, посвященную вопросам расчета на прочность диафрагм паровых турбин. В годы Великой отечественной войны работает над решением проблем повышения прочности и надежности авиационных двигателей сначала на Уфимском моторостроительном заводе, затем в Центральном институте авиационного моторостроения им. П.И.Баранова и по совместительству доцентом Уфимского авиационного института.

После войны Г.С.Писаренко продолжает работу в Институте строительной механики АН Украины, являясь с 1944 г. ученым секретарем института, и одновременно преподает в Киевском политехническом институте.

В 1948 г. Г.С.Писаренко защищает докторскую диссертацию, в которой обобщает результаты теоретических исследований нелинейных колебаний упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале.

С 1950 г. он работает в Институте металлокерамики и специальных сплавов АН УССР (ныне Институт проблем материаловедения им. И.Н.Францевича НАН Украины), возглавляя с 1951 г. отдел, затем сектор прочности института, а через некоторое время становится заместителем директора по научной работе. Вся дальнейшая научная деятельность Георгия Степановича посвящена формированию нового научного направления по исследованию прочности материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях. В 1966 г. по его инициативе был создан Институт проблем прочности НАН Украины, бессменным директором которого он был более 20 лет, а с 1988 г. до последнего дня жизни – почетным директором. Под руководством Георгия Степановича здесь получили решения актуальные проблемы прочности, обусловленные запросами атомной энергетики, газотурбостроения, авиационной и ракетно-космической техники и других важнейших отраслей машиностроения.

В 1957 году Г.С.Писаренко избирается членом-корреспондентом, а в 1964 – академиком АН Украины. За монографию «Прочность материалов при высоких температурах» и учебник «Сопrotивление материалов» он был удостоен Государственных премий Украины (1969, 1980) в области науки и техники, а за фундаментальную двухтомную монографию «Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях» – Государственной премии СССР (1982).

Характерной особенностью творческой деятельности ученого является постоянная забота о воспитании молодого поколения ученых. С 1939 г. Г.С.Писаренко непрерывно вел педагогическую работу в Киевском политехническом институте, возглавлял кафедру сопротивления материалов (1952-1984), был проректором института по научной работе (1952-1956). По его инициативе была организована подготовка инженеров-механиков-исследователей по динамике и прочности машин. Он был членом методического совета

по сопротивлению материалов и строительной механике ГК СССР по народному образованию и председателем аналогичного совета при МВ и ССО УССР. При его руководстве и консультациях подготовлено 185 кандидатов и 49 докторов наук.

Много сил и энергии Георгий Степанович отдавал научно-организационной работе. Он был Главным ученым секретарем (1962-1966), вице-президентом (1970-1978), председателем Северо-западного научного центра (1981-1988), советником Президиума НАН Украины (с 1988 г.). С 1973 г. по 1984 г. он возглавлял Комиссию космических исследований при Президиуме АН Украины, а с 1974 г. являлся бессменным председателем Научного совета НАН Украины по проблеме «Механика деформируемого твердого тела». С 1982 по 1992 г.г. был членом Президиума Национального комитета СССР, с 1992 г. – членом Российского Национального комитета, а с 1993 г. – членом Президиума Национального Комитета Украины по теоретической и прикладной механике. Он был также членом экспертного совета ВАК при СМ СССР (1977-1988), членом Комитета по Государственным премиям Украины в области науки и техники при СМ УССР (1969-1989), основателем и главным редактором журнала «Проблемы прочности» 1969-1988), который издается в США под названием «Strength of Materials», главным редактором журнала «Доповіді АН УРСР» (1970-1978), зам. главного редактора журнала «Вісник АН УРСР» (1969-1974), председателем редакционной коллегии серии «Библиография ученых Украинской ССР» (1970-1978), членом редколлегии издающегося в Великобритании международного журнала в области усталости и разрушения материалов и элементов конструкций (1979-1987) и межведомственного научно-технического сборника «Динамика и прочность машин» со дня его основания (1965 г.).

Имя Г.С. Писаренко широко известно мировой научной общественности. Он был избран действительным членом Международной академии аэрокосмонавтики и членом Американского общества испытаний и материалов. Был удостоен Золотой медали Словацкой Академии наук и Золотой медали научно-технического общества Польши, а также был избран заслуженным Соросовским профессором.

Г.С.Писаренко постоянно заботился об увековечении памяти выдающихся ученых-механиков. Под его редакцией были изданы труды академиков А.Д.Коваленко (1976), Н.Н.Давиденкова (1981), С.В.Серенсена (1985). Он опубликовал «Воспоминания» (1993) всемирно известного ученого-механика С.П.Тимошенко и книги о его жизни и деятельности (1979, 1991), а также книгу о деятельности С.В.Серенсена (1993). В автобиографических книгах «Жизнь в науке» (1989) и «Воспоминания и размышления» (1993) Г.С. Писаренко уделил внимание научным традициям, истории и перспективам организации науки, проблемам подготовки научных кадров, деятельности своих учителей и учеников, многих известных ученых, с которыми он встречался на

своим жизненным пути.

С именем Г.С.Писаренко связаны выдающиеся достижения по исследованию различных аспектов прочности материалов и элементов конструкций с учетом факторов, имеющих место в реальных условиях, по разработке критериев предельного состояния и обоснованию возможности использования в технике новых классов конструкционных материалов.

Особое место в творческом наследии Г.С.Писаренко занимают результаты теоретических исследований по разработке методов расчета колебаний механических систем с учетом диссипации энергии в нелинейной постановке, по изучению демпфирующих свойств механических систем и разработке методов повышения вибрационной надежности высоконапряженных элементов машин. Поэтому он по праву считается основоположником украинской школы ученых-механиков по изучению колебаний неконсервативных механических систем.

Интерес к этой проблеме возник у молодого ученого вначале его научной деятельности в конце 30-х годов прошлого столетия после ознакомления с фундаментальными научными достижениями академиков АН УССР С.В.Серенсена и Н.Н.Давиденкова.

С.В.Серенсен при изучении циклической прочности лопаток турбомашин обратил внимание на проблему снижения уровня их динамической напряженности за счет демпфирования колебаний. В этот период (1938 г.) в журнале «Техническая физика» была опубликована статья Н.Н.Давиденкова «О рассеянии энергии при вибрациях». Именно эти два обстоятельства и определили дальнейшую направленность научных исследований Г.С.Писаренко, которые, как показывает анализ его творческого наследия, представляют неразрывное сочетание разработки теоретических подходов к описанию колебаний неконсервативных механических систем и экспериментального их подтверждения.

С использованием метода асимптотических разложений нелинейной механики Крылова-Боголюбова им были разработаны алгоритмы расчета колебаний системы с одной степенью свободы и изгибных колебаний стержней постоянного и переменного поперечных сечений с учетом гистерезисных потерь в циклически деформируемом материале. Одновременно для экспериментального изучения рассеяния энергии в материале им впервые в мировой практике был предложен метод подвески на тонких длинных струнах колебательной системы в узлах колебаний для исключения нежелательных потерь энергии.

Результаты выполненных теоретических и экспериментальных исследований были обобщены в докторской диссертации, которая получила положительные отзывы таких выдающихся ученых, как Н.Н.Давиденков, Н.Н.Боголюбов, Г.И.Савин и другие.

Важной вехой в развитии теории колебаний неконсервативных механи-

ческих систем стало издание в 1955 году монографии Г.С.Писаренко «Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале», которая в 1962 году была переиздана в США. В предисловии к монографии академик Н.Н.Боголюбов написал: «...следует приветствовать появление труда Г.С.Писаренко, ... Ввиду нелинейности получающихся при этом дифференциальных уравнений автор воспользовался идеями теории асимптотических разложений нелинейной механики и разработал оригинальную методику расчета резонансных кривых, оказавшуюся весьма эффективной. С помощью этой методики автором решен ряд практически важных вопросов, связанных, в частности, с вибрацией турбинных лопаток. ...». За цикл работ в области нелинейной механики, посвященных исследованию колебаний упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале Г.С.Писаренко в 1968 году была присуждена премия им. Н.М.Крылова АН УССР.

Таким образом, Г.С.Писаренко заложил основы научной школы в теории колебаний неконсервативных механических систем и исследовании демпфирующих свойств материалов и элементов конструкций, которые в последующие годы получили свое развитие как в его трудах, так и многочисленных его учеников, ставшими впоследствии видными учеными в области теории колебаний и прочности конструкций. Основными научными направлениями исследований в этой области, которые развиваются и в настоящее время в Институте, стали:

- разработка методов определения характеристик демпфирования колебаний механических систем, определение диссипативных свойств конструкционных материалов с учетом конструктивно-технологических и эксплуатационных факторов;
- оценка демпфирующей способности и вибронпряженности конструктивных элементов с учетом эксплуатационных факторов и разработка методов расчета колебаний упругих тел с учетом диссипативных свойств их материала, сочленений и взаимодействия с обтекающим потоком.

Г.С.Писаренко с учениками были развиты как так называемые прямые методы определения относительного рассеяния энергии в материале, так и косвенные методы, основанные на фиксировании тех или иных параметров колебательного процесса. Среди прямых методов наибольшее развитие получили метод динамической петли гистерезиса при низкочастотном циклическом деформировании (В.Т.Трощенко, Л.А.Хамаза), калометрический метод и метод определения скорости разогрева и охлаждения при высокочастотных колебаниях (В.А.Кузьменко, Г.Г.Писаренко). При этом, метод динамической петли гистерезиса использовался при уровне циклических напряжений, соответствующих многоциклового усталости, а полученные результаты исследований послужили основой для разработки деформационных и энергетических критериев усталостного повреждения металлов (В.Т.Трощенко,

Л.А.Хамаза, Г.В.Цыбанев, Ю.И.Коваль, В.В.Матвеев и др.). Получил также развитие на уровне изобретений метод динамической петли деформационно-го гистерезиса (В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский).

Известные расчетные зависимости косвенных методов основывались на несоответствующих конструкционным материалам предположениях о пропорциональности сил неупругого сопротивления скорости деформирования и независимости относительного рассеяния энергии от амплитуды деформации. В связи с этим на основе анализа колебаний нелинейных систем гистерезисного типа было проведено уточнение существующих и на уровне изобретений предложены новые косвенные методы определения характеристик демпфирования колебательных систем по параметрам свободных и резонансных колебаний (Г.С.Писаренко, В.В.Матвеев, А.П.Яковлев, И.М.Васинюк, А.П.Зиньковский). При этом, большое внимание было уделено вопросу автоматизации определения характеристик демпфирования по параметрам свободных и резонансных колебаний (В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский, А.П.Яковлев, Б.С.Чайковский, Н.Л.Позен, Р.К.Иващенко).

Бурное развитие во второй половине XX века новейших областей техники предъявило особое требование к материалу элементов конструкций в части обеспечения его работоспособности в существенно усложняющихся условиях эксплуатации. Это обусловило, в частности, необходимость организации и проведения комплекса исследований демпфирующих свойств широкого круга конструкционных материалов с учетом технологии их изготовления, вида и уровня напряженного состояния, температуры, частоты циклического нагружения, а также разработки высокодемпфирующих сплавов. При этом, в силу специфики изучаемого явления рассеяния энергии в циклически деформируемом материале особое внимание было уделено разработке методик экспериментального исследования, обеспечивающих создание требуемых параметров эксплуатационных условий и исключаящих или сводящих к минимуму все другие потери энергии в колебательной системе кроме рассеяния энергии в материале исследуемого образца.

На основе заложенных Г.С.Писаренко основ методики исследования рассеяния энергии в материале была разработана и создана целая серия оригинальных экспериментальных установок для определения диссипативных свойств конструкционных материалов при изгибных, продольных и крутильных колебаниях в условиях нормальной, повышенных и высоких (до 1700К) температур в диапазоне частот колебаний от нескольких герц до 20 кГц. Одна из установок была удостоена золотой медали Лейпцигской Международной ярмарки.

Исследовались материалы самых различных групп и классов: чугуны, армо-железо, нелегированные, низко- и среднелегированные стали; нержавеющие, жаростойкие стали и сплавы; тугоплавкие металлы; алюминий, магний, титан, медь и их сплавы, а также квазислоистые стали, металлокерами-

ческие материалы, пьезокерамика, пластмассы, стеклопластики и другие. Были установлены зависимости их диссипативных свойств от амплитуды деформации (напряжения), вида напряженного состояния, масштабного и технологического факторов, частоты деформирования и температуры. Было показано, что амплитуднозависимое рассеяние энергии в основном обуславливается микропластическими деформациями, связанными с перемещениями дислокаций, и магнитомеханическим гистерезисом, связанным с перемещением доменов. В этих исследованиях, проводимых под непосредственным руководством Г.С.Писаренко принимало участие большое число его учеников.

Наиболее сложные и оригинальные исследования касались изучения влияния вида напряженного состояния (Н.В.Новиков, В.В.Хильчевский, В.В.Матвеев, О.Е.Богинич, В.Г.Дубенец, В.Г.Тимошенко), наличия статической напряженности, в т.ч. важного для оценки демпфирующей способности турболопаточных материалов совместного влияния температуры и поля центробежных сил (В.В.Хильчевский, В.В.Матвеев, И.Г.Токарь, Б.С.Чайковский, Д.Е.Шпак, А.Я.Адаменко), влияния высоких (до 1470 °К) и низких (до 83 °К) температур (А.П.Яковлев, Л.А.Бочарова, Г.Е.Визерская), влияния бигармоничности деформирования материала (В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский), влияния масштабного фактора и роли поверхностных слоев материала (В.В.Матвеев, Н.М.Мухин, О.Т.Башта). Определенное внимание было уделено исследованию и разработке высокодемпфирующих сплавов (В.В.Матвеев, Б.С.Чайковский).

Следует также отметить, что Г.С.Писаренко вместе с А.П.Яковлевым и В.В.Матвеевым впервые в мировой практике обобщили методики и результаты экспериментальных исследований демпфирующих свойств более 100 типов конструкционных материалов при продольных, крутильных и поперечных колебаниях в условиях нормальных и высоких температур, издав справочник, который, затем был переиздан за рубежом.

Анализ роли диссипативных свойств поверхностных слоев материала показал целесообразность исследования и возможность повышения демпфирующей способности тонколистовых элементов конструкций за счет нанесения различного типа покрытий, а также использования клеевых соединений в панелях самолетных обшивок (Г.С.Писаренко, В.В.Матвеев, А.П.Яковлев, А.П.Зиньковский, И.Г.Токарь, А.А.Шемеган, Р.К.Иващенко).

В плане практической реализации научных результатов следует особо отметить серьезное внимание к разработке методик и исследованию демпфирующей способности наиболее ответственных элементов конструкций с учетом основных определяющих конструктивно-технологических и эксплуатационных факторов. Так, важнейшими объектами исследований явились рабочие лопатки современных газотурбинных двигателей, демпфирующая способность которых определяется рассеянием энергии в материале, конструк-

ционным гистерезисом в замковых и бандажных соединениях (В.В.Матвеев, Б.А.Грязнов, А.П.Зиньковский, И.Г.Токарь, А.Я.Адаменко, Ю.С.Налимов, Б.С.Чайковский, а также аэродинамическим сопротивлением обтекающего потока (А.А.Каминер, А.Л.Стельмах, В.А.Цимбалюк). Были созданы уникальные экспериментальные установки для исследования колебаний натуральных рабочих лопаток АГТД в поле центробежных сил, определения нестационарных аэродинамических нагрузок при колебаниях лопаточных профилей в составе решетки, находящейся в рабочей части созданной аэродинамической трубы.

Особый интерес представила также разработка расчетных методик и изучение связанных колебаний регулярных упругих систем с учетом реально возможного различия частотных и диссипативных характеристик их подсистем, а также особенностей упруго-диссипативной связанности последних и амплитудной зависимости демпфирующей способности (А.П.Зиньковский, В.В.Матвеев, И.Н.Бусленко, М.В.Васильев, А.В.Побережников).

При этом, в первую очередь предметом исследования явились лопаточные венцы современных авиационных газотурбинных двигателей, где необходимо было учитывать также аэродинамическую связанность лопаток и оценивать их динамическую устойчивость в потоке. Были разработаны расчетно-экспериментальные методики оценки границы устойчивости к флаттеру лопаточных венцов (А.П.Зиньковский, А.Л.Стельмах, В.А.Цимбалюк).

Серьезное внимание было уделено вопросам изучения демпфирующей способности композитных материалов и конструктивных элементов (слоистых пластин, оболочек). На базе полученных результатов были разработаны математические основы создания высокодемпфирующих композитных конструкций (В.Г.Дубенец, В.В.Хильчевский, Е.В.Савченко).

В последние годы получили развитие исследования по оценке возможного изменения вибрационного состояния элементов конструкций в процессе их длительной эксплуатации вследствие появления усталостной трещины, обуславливающего существенную нелинейность колебательной системы и возможность возникновения опасных супер- и субгармонических резонансов. В результате проведенного цикла аналитических, численных и экспериментальных исследований установлены закономерности зависимости параметров колебательного процесса при указанных резонансах от параметров усталостного повреждения и демпфирующей способности колебательной системы (В.В.Матвеев, А.П.Бовсуновский, О.А.Бовсуновский, О.Е.Богинич, А.П.Яковлев).

Большое внимание было уделено выбору и обоснованию физически нелинейных гистерезисных зависимостей между напряжениями и деформациями при циклическом деформировании материала, определяющих характер нелинейности уравнений колебаний (Г.С.Писаренко, В.Г.Писаренко, В.В.Хильчевский, Н.В.Василенко, В.В.Матвеев, В.Г.Дубенец).

Дальнейшее развитие получила разработанная Г.С.Писаренко теория расчета колебаний слабонелинейных упругих систем гистерезисного типа с использованием асимптотических методов нелинейной механики Крылова-Боголюбова. Это нашло отражение в последующих работах Г.С.Писаренко и его учеников по распространению методов расчета на решение новых, более сложных и практически важных задач строительной механики и расчета колебаний таких ответственных элементов машин как турбинные лопатки при использовании обобщенных гистерезисных зависимостей (Н.В.Василенко, В.В.Хильчевский, В.Г.Дубенец, О.Е.Богинич, В.В.Матвеев).

Следует отметить, что проводимые исследования быстро приобрели приоритетное всесоюзное значение и начиная с 1956 г. Г.С.Писаренко организовал проведение тематических совещаний и конференций по вопросам рассеяния энергии при колебаниях механических, по материалам которых по 1992г. издавались сборники трудов. Совместно с Центральным институтом авиационного моторостроения проводились также Всесоюзные конференции по аэроупругости турбомашин. В последние годы вопросы исследования колебаний диссипативных систем включаются в организуемые Институтом проблем прочности международные научно-технические конференции по вопросам динамики и прочности машин и конструкций.

Результаты исследований Г.С.Писаренко и его учеников нашли отражение в более чем 800 научных публикациях, в том числе более 50 монографиях, книгах, учебниках и справочниках, многие из которых были переизданы за рубежом, а также 50 авторских свидетельств на новые экспериментальные установки и методы исследований.

За заслуги в развитии науки и техники, в подготовке научных и инженерных кадров он был награжден тремя орденами СССР, орденом Украины «За заслуги» 2 степени, ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Украины».

Умер Г.С.Писаренко 9 января 2001 года и похоронен на Зверинецком кладбище в г. Киеве.

В память о выдающемся ученом-механике и крупном организаторе науки Постановлением Президиума НАН Украины Институту проблем прочности НАН Украины присвоено имя Георгия Степановича Писаренко, установлена премия его имени за выдающиеся научные работы в области прочности материалов и конструкций.

*Поступила в редколлегию 30.03.2010*

*А.О.ЛАРИН*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХП»

## **ВАСИЛЬ ЄВДОКИМОВИЧ БРЕСЛАВСЬКИЙ - ВИДАТНИЙ ВЧЕНИЙ - МЕХАНІК (ДО 90-РІЧЧЯ З ДНЯ НАРОДЖЕННЯ)**

Стаття присвячена опису життєвого шляху й творчої спадщини видатного українського вченого – механіка, доктора технічних наук, професора Василя Євдокимовича Бреславського. Коротко викладені основні наукові результати, отримані В.С.Бреславським в теорії механічних коливань стосовно оболонкових конструкцій.

The paper is devoted to the description of the life path and scientific heritage of the prominent Ukrainian scientist in Mechanics, doctor of technical sciences, professor Breslavsky Vasyl' Evdokimovich. The basic scientific results, were obtained by V.E.Breslavsky in the Theory of Mechanical Oscillations of thin-walled structures, are briefly presented.



Минає час, проходять роки, але у людській пам'яті залишаються спогади про видатних сучасників, які жили та працювали поряд з ними. Нажаль, молодому поколінню часто вже невідомі велетні постаті, що визначали розвиток науки якихось двадцять – тридцять років тому. Знання ж про них є вкрай необхідним для формування світогляду молодого вченого, що тільки вступає на нелегкий шлях пошуку нових знань: наслідування найкращих взірців, творче використання надбань та методів наукового пошуку є запорукою кваліфікованої наукової праці.

Короткий нарис, що запропоновано до уваги читачів, присвячено творчому шляху в механіці видатного вченого, одного з перших фахівців з теорії коливань тонких оболонок, доктора технічних наук, професора Василя Євдокимовича Бреславського. Його перші роботи у галузі теоретичного та експериментального опису динамічної поведінки тонкостінних конструкцій склали необхідне підґрунтя для бурхливого розвитку авіаційної та ракетної техніки в 50-60 х роках минулого сторіччя.

Василь Євдокимович Бреславський народився 1 січня 1920 р. в малоземельній селянській родині на Херсонщині. За кілька років до того, його батьки, Євдоким Романович та Парасковія Петрівна, намагаючись вирватись з злиденного існування, вирішили скористатись можливостями, що надав тоді уряд П.А.Століпіна, та переселитись на нові землі у південному Сибіру. Пе-

реселення почалось ще до початку Першої світової війни, але внаслідок громадянської війни завершилось тільки к 1924 року, коли вже вся родина з шістьма дітьми остаточно залишила рідну Михайлівку та переїхала в селище Сосновка Азовського району Омської області [1, 2].

1927 року молодий хлопець іде до школи, де добре навчається та цікавиться математикою, а згодом - фізикою та технікою, яка тільки почала приходити в новостворені радгоспи та машинно-тракторні станції. Як пригадують близькі Василя Євдокимовича, він, – простий селянський хлопець, був настільки вражений можливостями тогочасних автомобілів та тракторів, що вирішив самотужки створити двигун у себе на подвір'ї. Зрозуміло, що ні можливостей, ні вмінь для цього не було, й після відливання декількох поршнів він з великим жалем припинив цю роботу.

Після завершення навчання в восьмирічній школі в 1936 році Василь Бреславський поступає на четвертий, останній курс робітничого факультету Омського педагогічного інституту. Такі факультети, створені для надання можливостей талановитій молоді підготуватись до вступу в вищі навчальні заклади, були дуже поширені того часу. З початку молодий студент-робфаківець мріяв про інженерну освіту для роботи на транспорті чи у сільському господарстві, але за час навчання, під впливом викладачів та товаришів, які бачили його неабиякі математичні здібності, змінює намір.

В 1937 році, після закінчення робітничого факультету, він переїжджає до Свердловська (так тоді називався Єкатеринбург), успішно складає вступні іспити та стає студентом першого курсу фізико-математичного факультету Свердловського державного університету за спеціальністю «механіка».

В Свердловському (тепер Уральському) університеті, заснованому у 1920 р., в той час працювало багато відомих вчених, які після перипетій громадянської війни та репресій 30-х років опинились на Уралі. Серед них були всесвітньо відомий фізик професор Д.Д.Іваненко, автор протон-нейтронної моделі атомного ядра, П.Г.Конторович, відомий математик –алгебраїст, фахівець з теорії груп, астроном А.О.Яковкін, астроном та фахівець з точної механіки й оптики С.В.Муратов, засновник школи з теорії стійкості руху та нелінійних коливань в Уральському університеті професор І.Г.Малкін [3] та багато інших. Саме І.Г.Малкін й став першим вчителем В.Бреславського, як викладач основних курсів та куратор групи механіків. На старших курсах вони почали працювати разом в рамках студентської наукової роботи.

У зв'язку з початком Великої Вітчизняної війни урядом приймається рішення про достроковий випуск студентів фізико-математичних факультетів та призов найбільш обдарованих з них до вищих військових навчальних закладів. У серпні 1941 р. В.Є.Бреславський отримує диплом університету з спеціальності «механіка», а з вересня він стає слухачем першого курсу Військово - повітряної інженерної академії (ВПА) ВПС РСЧА ім. М.Є.Жуковського, яку у цей час було евакуйовано з Москви до Свердловська.

Навчання слухачів – колишніх студентів відбувалось протягом трьох з половиною років безперервно, без канікул та відпусток, по вісім годин занять та по чотири години самопідготовки щоденно. Викладання забезпечувалось висококваліфікованим професорсько-викладацьким складом. Лекції читали досвідчені викладачі та науковці, які зробили в подальшому великий внесок в розвиток авіаційної науки і техніки: академики Б.Н.Юр'єв, В.С.Кулебакін, М.Г.Бруєвіч и Б.С.Стечкін, професори Д.А.Вентцель, Н.В.Гевелинг, Т.М.Мелькумов, В.С.Пугачов, А.С.Ястржембський та інші. До керівництва дипломним проектуванням запрошувались видатні авіаконструктори С.В.Іл'юшин, С.К.Туманський, В.Ф.Болховитинов, А.І.Путілов [4].

Після двох з половиною років навчання в Академії, в березні 1944 р. лейтенант В.Є.Бреславський направляєтся на стажування до діючої армії, де три з половиною місяці служить старшим техніком ескадрильї літаків Іл-2 в 766-му штурмовому авіаційному полку 1-го Прибалтійського фронту. Після повернення з фронту до Москви, куди перебазувалась Академія, В.Є.Бреславський знов продовжує навчання. В квітні 1945 р., після випуску з Академії, капітан Бреславський направляєтся на роботу викладачем в 2-е Оренбурзьке авіаційне училище.

Після двох з половиною років викладання в Оренбурзі, восени 1947 р. В.Є.Бреславський успішно складає іспити, поступає та впродовж трьох наступних років навчається в ад'юнктурі кафедри конструкції авіаційних двигунів ВПА ім. М.Є.Жуковського у Москві. Його науковим керівником стає доктор технічних наук, професор А.А.Уманський, відомий фахівець з будівельної механіки літаків.

Для дисертаційних досліджень В.Є.Бреславський обирає зовсім новий для тих часів напрямок: коливання тонких оболонок. Вже на цьому етапі він демонструє наполегливість у відстоюванні теми, яку багато фахівців, в тому числі й його науковий керівник, не рекомендували обирати як дуже складну та не зовсім теоретично зрозумілу. Того часу відбувається перехід авіації на реактивні двигуни, в яких тонкостінні оболонки є важливими конструктивними елементами. В.Є.Бреславський одним з перших зрозумів необхідність аналізу вібрацій оболонок, що можуть відбуватись як внаслідок горіння палива, так й від інших факторів.

У сорокових роках минулого сторіччя теорія коливань тонких оболонок ще знаходилась у стадії створювання: були відомі деякі роботи А.Лява, В.Флюгге, Е.Л.Николаї, В.З.Власова та А.П.Филиппова, які містили переважно теоретичні викладки та розв'язки осесиметричних задач. Дослідження коливань оболонок в загальній постановці були відсутні.

В період навчання в ад'юнктурі В.Є.Бреславський виконує загальну математичну постановку задачі згинних коливань циліндричної оболонки та вперше в світі знаходить аналітичний розв'язок задачі її власних коливань. Крім того, він, як талановитий інженер-механік, конструює та виготовляє

експериментальну установку для досліджень коливань оболонки, виконує на ній унікальні експерименти з визначення форм та частот коливань моделей жарових труб реактивних двигунів [5].

В січні 1951 року В.Є.Бреславський блискуче захищає кандидатську дисертацію у Вченій Раді Академії ім. Жуковського. Його опонент, видатний вчений – механік М.І.Безухов у відгуку наголошував на науковій цінності теоретичних та експериментальних результатів роботи, а також відмітив високу кваліфікацію молодого вченого.

На жаль, в світі довгі часи вважалось, що перший розв'язок задачі коливань циліндричних оболонок типу згинних належить англійським вченим Р.Н.Арнольду та Д.Б.Ворбартону, стаття яких на цю тему вийшла в 1949 р. [6]. В ній автори застосовували приблизний, енергетичний метод, а В.Є.Бреславський надав точний розв'язок, який ще й порівняв з експериментом. У зв'язку з хворобою В.Є.Бреславського та особливостями радянської військової наукової системи надрукувати основні результати дисертаційної роботи стало можливим лише у 1952 – 1953 рр.[7, 8], але вони також були отримані В.Є.Бреславським в 1948-1949 рр., а в дисертації були викладені в 1950 р. [5]. Як це часто буває в науці, декілька дослідників одночасно вирішили одну проблему, яка до того ж була досить важливою для тогочасної авіаційної та ракетної техніки. Таким чином. справедливість вимагає вважати засновниками такого розділу теорії коливань, як неосесиметричні коливання оболонок, Арнольда, Бреславського та Ворбартона.

Після захисту кандидатської дисертації В.Є.Бреславський мав бути направленим для роботи в одне з вищих авіаційних училищ тогочасного СРСР. Командування Академії пропонувало йому Ризьке авіаційне, дуже привабливе для інших, але він прагнув жити на Україні, тому й обрав Харківське вище авіаційне інженерне військове училище (ХВАІВУ).

Воно було створене після закінчення другої світової війни, кадри вищої кваліфікації було направлено з Московської Академії ім. Жуковського та Ленінградського Військового інституту ім. Можайського. В березні 1951 р. майор В.Є.Бреславський, разом з декількома випускниками ад'юнктури, прибуває до Харкова та займає посаду викладача кафедри авіаційних двигунів ХВАІВУ [9].

Під час роботи в училищі проявляються його найкращі якості педагога та вченого. Він багато працює в напрямку теоретичних та експериментальних досліджень коливань оболонкових конструкцій авіаційних та ракетних двигунів, публікується у центральних виданнях та «Працях училища», виступає з доповідями на Всесоюзних конференціях. Його роботи цього часу, опубліковані в «Известиях» Академії наук СРСР, таких, як «Инженерный сборник», «Известия АН СССР. Отдел технических наук», присвячені коливанням циліндричних оболонок під дією комбінованого статичного навантаження, гідростатичного тиску, увійшли до списку класичних робіт та завжди включались

в огляди базових публікацій, що містять важливі результати в механіці оболонок (див., наприклад, класичну монографію відомого американського вченого А.Лісса «Коливання оболонки» [10]) В підсумковій науковій праці «Механіка в СРСР за 50 лет» [11, с. 248] наголошується значний внесок В.Є.Бреславського у розв'язання самих перших задач динаміки оболонки, а в подальшому – у дослідження впливу отворів та статичного навантаження на їх власні частоти.

З листопаду 1957 р. В.Є.Бреславський переводиться на посаду старшого викладача тієї ж кафедри ХВАІВУ. Цього ж року Василь Євдокимович одружується. Його жінка, Олена Пилипівна, також приймала участь у Великій Вітчизняній війні у партизанському загоні в Білорусі, після війни закінчила Харківський університет та все життя працювала викладачем історії в Харківському інституті інженерів комунального господарства (ХІККС). В 1960 році у них народився син Дмитро.

У зв'язку з швидким розвитком в 1950-60 рр. двадцятого сторіччя ракетної техніки, в першу чергу військової, в Радянському Союзі проводиться реорганізація низки навчальних закладів. З початку 60х років Харківське авіаційне училище перетворюється на Вище інженерне училище ракетних військ (ХВІУРВ). В.Є.Бреславський продовжує роботу в ньому на кафедрі реактивних двигунів. До цього часу відносяться його піонерські роботи, присвячені коливанням оболонки, які підкріплені ребрами, наповнених рідиною, сполучених з пружним наповнювачем та інші. Переважну більшість своїх робіт він виконує одноосібно, самостійно проводить розрахунки та експериментальні дослідження.

Більш ніж п'ятнадцятирічна наукова робота В.Є.Бреславського у 1967 році завершується захистом докторської дисертації. В 1968 році йому присуджено вчене звання професора за кафедрою реактивних двигунів.

Полковник Бреславський продовжує свою службу у ХВАІУРВ до 1974 року, коли виходить у відставку. За роки військової служби в Харкові ним підготовлено сім підручників та навчальних посібників з актуальних питань конструкції двигунів, міцності та коливань оболонкових елементів авіаційних та реактивних літальних апаратів, надруковано монографію. Серед них «Розрахунок оболонки авіадвигуна», «Технічний опис двигуна» (в співавторстві з зав. кафедри В.І.Кириченко), «Розрахунок ракетних двигунів» (в співавторстві Г.А.Багмутом, М.Г.Полтавцем, В.П.Русановим та Ю.С.Ендекою) та інші. До цих часів відноситься захист кандидатської дисертації першим ад'юнктом В.Є.Бреславського В.К.Терещенковим,

За службу у Збройних силах у воєнні та післявоєнні роки В.Є.Бреславський був нагороджений орденами Червоної зірки, Вітчизняної війни II ступеня та багатьма медалями.

У 1974 – 1976 рр. професор Бреславський очолює кафедру будівельної механіки ХВАІУРВ, викладає курси опору матеріалів та будівельної механіки

літальних апаратів. За ці два роки ним підготовлено підручник «Основи будівельної механіки пластин та оболонок» для курсантів вищих військових навчальних закладів. Після чергової реорганізації училища, в 1976 році за запрошенням ректора ХПКСу професора Л.М.Шутенка В.Є.Бреславський переходить на посаду завідувача кафедрою теоретичної механіки цього інституту [1].

На новому місті Василю Євдокимовичу довелося практично заново створювати кафедру та знаходити фахівців відповідного рівня. Він залучає до роботи викладачів з ХВАІУРВ, запрошує до викладання видатного вченого - начальника відділу Інституту проблем машинобудування АН УРСР, доктора технічних наук, професора Б.Я.Кантора, а головне – організує аспірантуру на кафедрі, куди невдовзі поступають випускники механіко-математичних факультетів університетів та інженерно-фізичного факультету Харківського політехнічного інституту (ХПІ).

Викладання теоретичної механіки було поставлено В.Є.Бреславським на рівні кращих вишів країни. Він щорічно приймає участь у Всесоюзних та республіканських нарадах – семінарах з теоретичної механіки, та впроваджує у навчальний процес найкращі методичні розробки. За перші роки роботи на кафедрі створюється необхідне методичне забезпечення для проведення практичних та лабораторних занять.

На кафедрі професор Бреславський розгортає й наукову роботу. Він починає десятирічне наукове співробітництво з харківським КБ «Електроприладобудування» (зараз НВП «ХАРТРОН - АРКОС»). Розпочаті наукові дослідження було пов'язано з аналізом спектру частот, стійкості та напружено-деформованого стану оболонкових конструкцій реактивних літальних апаратів для визначення рівня навантаженості приладів, що встановлено на них. Дослідження, які було виконано за 1976-1981 рр., включали створення методів розрахунку конструктивно - ортотропних оболонок з приєднаними масами при імпульсному навантаженні та при дії випадкових навантажень. Також було розроблено методи визначення механічних навантажень на корпуси приладів, встановлених на літальних апаратах. Варто відмітити, що як й в попередніх своїх роботах, Василь Євдокимович намагається створювати аналітичні розв'язки складних задач механіки оболонок, які дозволяють виконувати якісний аналіз проблеми [2].

Велику увагу В.Є.Бреславський приділяє й експериментальним дослідженням. За його ініціативою на кафедрі приймають висококваліфікованих робітників та науковців, закупається обладнання для досліджень динамічних процесів в машинах та спорудах. Незабаром група експериментальних досліджень виконує складні роботи з визначення переміщень маси, що знаходиться на деформованій циліндричній оболонці, комплексні дослідження властивостей полімерів тощо.

В середині 1980-х років В.Є.Бреславський разом зі своєю науковою групою працює над проблемами взаємодії тонких деформованих оболонок з за-

повнювачами. На кафедрі проведено дослідження у напрямку моделювання їхніх властивостей за моделями в'язко – пружного тіла. Створюються методи розрахунку оболонок з заповнювачем при дії раптово прикладених та випадкових навантажень.

Саме цього часу В.Є.Бреславський активно співпрацює з аспірантами, які виконують дослідження в його науковій групі та захищають кандидатські дисертації протягом 1980-1990 рр. Разом з С.М.Мордовцевим їм розв'язано задачі нестационарної динаміки оболонок, що поєднано з пружним наповнювачем. Кандидатська дисертація Ю.В.Скоробогатка була пов'язана з розрахунками динамічної поведінки приладів, встановлених на пружних конструкціях літальних апаратів.

Спільно з аспірантами А.І.Рубаненко та Г.С.Дик В.Є.Бреславським математично сформульовано та розв'язано цикл важливих задач, пов'язаних з аналізом динамічної поведінки тонкостінних конструкцій при кінематичному навантаженні при транспортуванні.

Після проведення комплексних досліджень оболонкових конструкцій з приєднаннями до них приладами В.Є.Бреславським з учнями розв'язано важливе завдання створення методики звичайних та прискорених випробувань навігаційної апаратури літальних апаратів в лабораторно-заводських умовах. Методика, яка передбачала випробування при дії динамічних та випадкових навантажень, була з успіхом впроваджена в КБ «Електроприладобудування».

В 80-ті роки на кафедрі теоретичної механіки також виконуються науково-дослідні роботи, пов'язані з розрахунками оболонкових конструкцій за замовленнями конструкторських організацій Харкова, Ленінграда, Одеси, Белгорода та інших.

В 1988 році, у зв'язку з ліквідацією в ХПКСі кафедри деталей машин та технології металів на кафедрі, якій завідує В.Є.Бреславський, передається відповідне навчальне навантаження та переходить декілька викладачів. Кафедра одержує назву «Теоретична та прикладна механіка». Колектив кафедри під керівництвом професора Бреславського у короткий термін розробляє навчально-методичне забезпечення для аудиторних занять та курсового проектування.

Добрі творчі стосунки поєднували професора Бреславського з Харківським політехнічним інститутом. Він був членом спеціалізованої вченої ради з захисту докторських дисертацій за спеціальністю динаміка та міцність машин, приладів та апаратури. Випускники ХПІ А.І.Рубаненко, В.М.Бурлаєнко та О.О.Чупринін стали його аспірантами.

У зв'язку з т.зв. перебудовою, розвалом Радянського Союзу та проголошенням незалежності України перед інститутом, що отримує назву інституту інженерів міського господарства, постають непрості завдання. За дорученням ректора в цей час професором Бреславським підготовлено документ «Розробка системи освіти в ХПМГ», в якому надано план роботи та завдання освітян у ці часи. Також у 1991 році Василем Євдокимовичем підготовлено російсько-

український словник термінів теоретичної механіки. Невдовзі він починає викладати теоретичну механіку українською мовою. Спільно з М.С.Золотовим Василь Євдокимович створює та в 1996 році видає навчальний посібник «Теоретична механіка». Незважаючи на скрутний економічний стан, завдяки зусиллям завідувача у 90-х роках збережено основний контингент викладачів, на кафедрі продовжувалась наукова робота. В цей час аспіранти В.Є.Бреславського, В.М.Бурлаєнко та О.О.Чупринін працюють в рамках спільних досліджень разом з видатним вченим, доктором технічних наук, професором, завідувачем кафедри теоретичної механіки ХПІ О.К.Морачковським. Незважаючи на тяжку хворобу, Василь Євдокимович до останніх днів свого життя не припиняв читати лекції, займатись наукою та керувати кафедрою. Роботи аспірантів, пов'язані з деформуванням циклічно навантажених пластин та оболонок, завершуються захистом дисертацій вже після смерті керівника у 1997 році.

За відгуками колег та студентів, професор В.Є.Бреславський був блискучим лектором, який поєднував педагогічний такт з притаманними йому строгістю та лаконічністю викладання, глибокою науковою ерудицією, які допомагали донести до студентів найскладніші питання механіки [1].

Василь Євдокимович був не тільки видатним вченим та педагогом, але й всебічно обдарованою людиною. Він досконало знав німецьку та англійську мови, самоосвітою досяг рівня професійних знань у музиці, живопису та літературі. У молоді роки він мав спортивні розряди з легкої атлетики, волейболу, боксу, займався альпінізмом. У зрілі роки він захоплюється гірськими лижами та великим тенісом. Як пригадують близькі та колеги, він також був справжнім мисливцем та рибалкою, ремонтував автомобіль на рівні професійного автомеханіка.

Пам'ять про видатного вченого та педагога, професора В.Є.Бреславського, зберігається в усіх його колег та учнів. Його життя та творчий шлях завжди залишаться прикладом для нових поколінь вчених.

**Список літератури:** 1. Выдающиеся педагоги высшей школы г. Харькова. Биографический словарь. – Харьков: Глобус, 1998. – 736 с. 2. Енциклопедія сучасної України. – 2004. – Т. 3. – С. 422–350 с. 3. Годовщина смерти профессора И. Г. Малкина // Изв. вузов. Матем. – 1959. – № 5. – С. 223–224 4. Академия имени Жуковского / Под общей редакцией В.Я.Кремлева. – М.: Воениздат, 1990. – 350 с. 5. *Бреславский В.Е.* К вопросу о вибрациях камер сгорания реактивных двигателей/ дис. ... канд. техн. наук / Василий Евдокимович Бреславский. – М.: ВВИА им. Н.Е.Жуковского, 1950. – 111 с. 6. *R.N.Arnold, G.B.Warburton* Flexural Vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells Having Freely Supported Ends // Proc. Royal Society (London). – Series A, 197. – 1949. – P. 238-256 7. *В.Е.Бреславский* Колебания тонких цилиндрических оболочек. – Харьков: Труды ХВАИВУ, 1952. – Вып. 14. – 32 с. 8. *В.Е.Бреславский.* О колебаниях цилиндрических оболочек // Инженерный сборник АН СССР. – 1953. – №16. – С.109-118. 9. Харьковскому высшему военному командно-инженерному училищу ракетных войск им. маршала Н.И.Крылова 50 лет. Краткий исторический очерк. Под общ. ред. ген.-майора В.Б.Толубко. – Харьков, ХВВКИУРВ, 1991. – 140 с. 10. *A.Leissa.* Vibration of shells. – Columbus, ASA, 1973. – 428 p. 11. Механика в СРСР за пятьдесят лет. – М.: Наука, 1972. – Т. 3. – 480 с.

Надійшла до редколегії 30.12.2009

**К.В.АВРАМОВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**А.В.БОРИСЮК**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## **БИСТАБИЛЬНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ОДНОДИСКОВОГО УПРУГОГО РОТОРА В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ**

Отримано математичну модель коливань несимметричного одно дискового ротору на нелінійних підшипниках ковзання. Для моделювання масляного шару використовується аналітичний розв'язок рівняння Рейнольдса для коротких підшипників. Автоколивання у роторі виникають не при кутовій швидкості, коли спостерігається бифуркація Хопфа, а при значно менших кутових швидкостях. Такі режими автоколивання виникають внаслідок сідло-вузлових бифуркацій в системі. Розв'язки, що отримані методом гармонічного аналізу, добре збігаються з результатами чисельного моделювання.

The model of nonlinear vibrations of one disk rotor supported by two journal bearing is obtained. The fluid film in journal bearing is described by the Reynolds' equation. Self vibrations of the rotor are occurred not with angular velocity, when there is Hopf bifurcation, but at much lower angular velocities. These self vibrations modes arise as the result of saddle-node bifurcations. Solutions obtained by harmonic balance method are in good agreement with numerical simulation of the system.

**Введение.** Автоколебания в роторных системах могут возникать вследствие взаимодействия масляной пленки подшипника скольжения с цапфой ротора. Такие колебания привели к разрушению ряда роторных систем [1]. В настоящее время для исследования колебаний роторов применяются современные аналитические и численные методы нелинейной динамики [2]. Много предпринято усилий для исследования автоколебаний роторных систем, что объясняется важностью этой задачи в инженерном деле. Позняк [3] получил аналитически давления в масляной пленки подшипников скольжения. Используя вариационный подход, Олимпиев [4] получил асимптотическое решение уравнения Рейнольдса. Устойчивость цапфы в подшипнике скольжения рассматривается в монографии [5]. Каринцев, Шульженко [6] получили модель давлений в масляном слое коротких подшипников скольжения. Они исследовали влияние инерции масляного слоя на величины давлений. Филиппов, Шульженко [7] применяют асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах. Овчарова, Голоскоков [8] анализируют вынужденные колебания ротора с учетом масляного слоя в коротких подшипниках скольжения. Они описали динамику ротора расчетной схемой, состоящей из упругого вала с тремя дискретными массами.

В этой статье выводятся уравнения нелинейных колебаний однодисковых роторов в коротких подшипниках скольжения. В усилиях, действующих на цапфы ротора со стороны масляного слоя, учитываются нелинейные члены вплоть до кубических слагаемых относительно обобщенных координат и

их скоростей. Для исследования автоколебаний в полученной системе применяется метод гармонического баланса.

**Уравнения движения системы.** Рассматривается динамика жесткого диска, который крепится к вращающемуся упругому валу. Края вала закреплены в коротких подшипниках скольжения. Цапфы вала А и В в процессе движения так же колеблются. Обобщенные координаты  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  описывают движение цапф. В подшипнике возникают силы, действующие на цапфы вала. Проекция этих сил на оси  $x$  и  $y$  обозначим через  $F_x(x_i, y_i)$ ,  $F_y(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, 2}$ , соответственно. Расчетная схема однодискового ротора представлена на рис. 1.

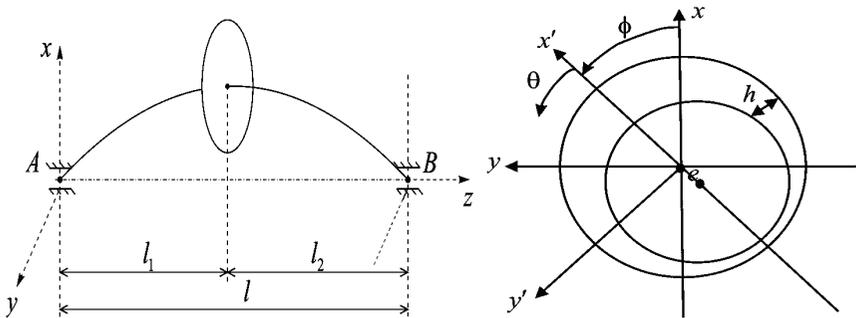


Рисунок 1 – Расчетная схема однодискового ротора

Ротор вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$ ; угловую скорость диска запишем в следующем виде:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3; \quad \omega_1 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3; \\ \omega_2 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3; \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2. \quad (1)$$

Угловую скорость  $\Omega$  представим так:  $\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$ . Тогда кинетическую энергию системы представим так:

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где  $x, y$  – обобщенные координаты описывают перемещения точек крепления диска к валу;  $I_e, I_p$  – экваториальный и полярный моменты инерции диска. Потенциальная энергия системы записывается так:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} \left[ (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1)^2 + (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2)^2 \right] + \\ + \frac{1}{2} c_{22} \left[ \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \quad (3)$$

$$+ c_{12} \left[ (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) - (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right],$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{22}$  – элементы матрицы жесткости;  $\varsigma_1 = \frac{l_1}{l}$ ;  $\varsigma_2 = \frac{l_2}{l}$ . Используя уравнения Лагранжа II рода, запишем уравнения движения системы так:

$$m \ddot{x} + c_{11}(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + c_{12} \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = -m g;$$

$$m \ddot{y} + c_{11}(y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) - c_{12} \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = 0;$$

$$I_e \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \\ - \frac{I_p}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 + I_p \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + c_{22} \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \\ - c_{12}(y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = 0;$$

$$I_e \ddot{\theta}_2 + \frac{I_e}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) - I_p \Omega \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + c_{22} \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + \\ + c_{12}(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) = 0;$$

Уравнения равновесия цапф ротора принимают следующий вид:

$$\left( \frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2 c_{11} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + \left( \frac{c_{22}}{l} - \varsigma_2 c_{12} \right) \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = F_x(x_1, y_1); \\ \left( \frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2 c_{11} \right) (y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) + \left( \varsigma_2 c_{12} - \frac{c_{22}}{l} \right) \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = F_y(x_1, y_1); \\ \left( \varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + \left( \frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left( \theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = -F_x(x_2, y_2); \\ \left( \frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left( \theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \left( \varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = F_y(x_2, y_2). \quad (4)$$

Под действием силы тяжести ротор занимает некоторое состояние равновесия, которое определяется следующими значениями обобщенных координат:  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ . Эти координаты состояния равновесия удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$F_x(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = mg \frac{l_2}{l}; \quad F_x(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = mg \frac{l_1}{l}; \quad F_y(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0; \quad F_y(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0. \quad (5)$$

Обобщенные координаты состояния равновесия диска определяются из следующих уравнений:

$$\bar{x} = \varsigma_1 \bar{x}_2 + \varsigma_2 \bar{x}_1 - \frac{mgc_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \quad \bar{y} = \varsigma_2 \bar{y}_1 + \varsigma_1 \bar{y}_2; \quad (6)$$

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l}; \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} + \frac{mgc_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}.$$

Теперь движения механической системы рассматриваются относительно положения равновесия (5, 6); введем следующую замену переменных:

$$(x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{\theta}_1 + \theta_1, \bar{\theta}_2 + \theta_2, \bar{x}_1 + x_1, \bar{y}_1 + y_1, \bar{x}_2 + x_2, \bar{y}_2 + y_2). \quad (7)$$

С учетом замены переменных (7) динамическая система (4) принимает следующий вид:

$$m \ddot{x} = R_X^{(1)}; I_e \ddot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + R_X^{(2)} = 0; m \ddot{y} = R_Y^{(1)}; I_e \ddot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 - R_Y^{(2)} = 0, \quad (8)$$

где  $R_Y^{(1)} = \tilde{F}_Y(x_1, y_1) + \tilde{F}_Y(x_2, y_2); R_X^{(1)} = \tilde{F}_X(x_2, y_2) + \tilde{F}_X(x_1, y_1);$

$$R_Y^{(2)} = l_1 \tilde{F}_Y(x_1, y_1) - l_2 \tilde{F}_Y(x_2, y_2); R_X^{(2)} = l_1 \tilde{F}_X(x_1, y_1) - l_2 \tilde{F}_X(x_2, y_2).$$

Силы, действующие на цапфы со стороны масляного слоя, представим так:

$$F_x = - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\cos(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz; \quad F_y = - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\sin(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz. \quad (9)$$

где  $L_B$  – длина короткого подшипника;  $\phi$  – угол линии центров. Предполагается, что масляный слой занимает область  $\theta \in [0; \pi]$ . Давление, действующее на цапфу со стороны масляного слоя  $p(z_1, \theta)$ , определяется из уравнения Рейнольдса [4]. Решение уравнения Рейнольдса для короткого подшипника запишем в следующем виде:

$$p = \frac{3\mu}{h^3} \left[ \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] z_1 (z_1 - L_b), \quad (10)$$

где  $\mu$  – вязкость масла;  $z_1$  – продольная локальная координата подшипника скольжения. Величину  $h$  представим следующим образом:

$$h = c + e \cos \theta = c - x \cos(\theta + \phi) - y \sin(\theta + \phi),$$

где  $c$  – величина зазора между цапфой и подшипником (рис. 1). Подставляя решение (10) в выражения для сил (9), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - y \cos(\theta + \phi)) + \\ &+ 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta; \\ F_y &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - y \cos(\theta + \phi)) + \\ &+ 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}; \quad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}; \quad H = \frac{h}{c}; \quad \tau = \Omega t. \quad (12)$$

Теперь определим положение равновесия ротора под действием сил тяжести. Если ротор не совершает колебаний, то уравнение (10) представим так:  $p = -\frac{3\mu\Omega\epsilon\sin\theta}{(c + \epsilon\cos\theta)^3} z_1(z_1 - L_B)$ . Уравнения равновесия цапфы запишем так:

$$F_{X'} = G \cos\phi_e; \quad F_{Y'} = -G \sin\phi_e, \quad (13)$$

где  $F_{X'}, F_{Y'}$  – проекции сил в направлении осей  $x', y'$ ;  $\phi_e$  – угол линии центров для равновесного состояния цапфы;  $G$  – значение вертикальной силы в подшипнике. Для цапф А и В сила  $G$  принимает следующие значения:  $G = mg \frac{l_2}{l}; G = mg \frac{l_1}{l}$ . Тогда статические силы можно записать в следующем

виде:

$$F_{X'} = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \epsilon^2}{c^2 (1 - \epsilon^2)^2}; \quad F_{Y'} = -\frac{\pi L_B^3 \mu \Omega R \epsilon}{4c^2 (1 - \epsilon^2)^{3/2}}; \quad \epsilon = \frac{e}{c}. \quad (14)$$

Из выражений (13, 14) получаем уравнение для определения эксцентриситета  $\epsilon$ :  $G = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \epsilon}{4c^2 (1 - \epsilon^2)^2} \sqrt{16\epsilon^2 + \pi^2 (1 - \epsilon^2)}$ . Тогда координаты равновесия цапфы А определяются так:

$$\tilde{x}_{1,0} = \bar{x}_1 c^{-1} = -\epsilon_1 \cos\phi_{e1}; \quad \tilde{y}_{1,0} = \bar{y}_1 c^{-1} = -\epsilon_1 \sin\phi_{e1}; \quad tg\phi_{e1} = \pi \sqrt{1 - \epsilon_1^2} / (4\epsilon_1). \quad (15)$$

Индекс  $I$  у величин  $\epsilon$  и  $\phi_e$  обозначает, что эти параметры описывают равновесие цапфы А. Рассмотрим динамику ротора относительно положений равновесия. Для этого введем следующую замену переменных:  $\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i,0}$ ,  $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i,0}$ ,  $i = 1, 2$ . Введем следующие обозначения:

$$\vartheta = \theta + \phi_e; \quad \gamma = \frac{R\mu L_b^3 \Omega}{2c^2}; \quad J_1 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta; \quad J_2 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\sin^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta;$$

$$J_3 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta; \quad H_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = 1 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0})\cos\vartheta - (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0})\sin\vartheta.$$

Силы, действующие со стороны масляного слоя, можно записать в следующем виде:

$$F_X = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}_1')J_3 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_1;$$

$$F_Y = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}_1')J_2 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_3. \quad (16)$$

Нелинейные силы  $F_X, F_Y$  представим в виде степенного ряда по обоб-

щенным перемещениям  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1$  и скоростям  $\tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$ . Выражение для величины  $H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$  запишем в следующем виде:

$$H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = A_0(\vartheta) + A_1(\vartheta)\tilde{x}_1 + A_2(\vartheta)\tilde{y}_1 + A_3(\vartheta)\tilde{x}_1^2 + \dots \quad (17)$$

Подставляя разложение (17) в выражения для сил (16) получим следующие разложения сил  $F_X, F_Y$  в степенные ряды:

$$\begin{aligned} F_X &= F_{X,0} + F_{X,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots; \\ F_Y &= F_{Y,0} + F_{Y,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $F_{X,0}, F_{Y,0}$  – постоянные составляющие силы;  $F_{X,1}, F_{Y,1}$  – линейные части сил относительно  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$ ;  $F_{X,2}, F_{Y,2}, F_{X,3}, F_{Y,3}$  – нелинейные составляющие силы второго и третьего порядка. Линейные части сил масляного слоя представим следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{X,1} &= \gamma[(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_1 - (\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_2 - 3\varepsilon \tilde{x}I_3 - 3\varepsilon \tilde{y}I_4]; \\ F_{Y,1} &= \gamma[(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_5 - (\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_1 - 3\varepsilon \tilde{x}I_4 - 3\varepsilon \tilde{y}I_6]. \end{aligned} \quad (19)$$

Квадратичная составляющая сил (18) записывается в виде:

$$\begin{aligned} F_{X,2} &= \gamma\left\{3(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}' - 2\tilde{y}\tilde{x}')I_7 - 3\tilde{x}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_8 + 3\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_9 - \right. \\ &\quad \left. - 6\varepsilon \tilde{x}^2I_{10} - 6\varepsilon \tilde{y}^2I_{11} - 12\varepsilon \tilde{x}\tilde{y}I_{12}\right\}; \\ F_{Y,2} &= \gamma\left\{3(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}' - 2\tilde{y}\tilde{x}')I_9 - 3\tilde{x}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_7 + 3\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{13} - \right. \\ &\quad \left. - 6\varepsilon \tilde{x}^2I_{12} - 6\varepsilon \tilde{y}^2I_{14} - 12\varepsilon \tilde{x}\tilde{y}I_{11}\right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Кубическая составляющая сил (18) описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} F_{X,3} &= \gamma\left\{6[\tilde{x}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - 2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{15} + 6[2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - \tilde{y}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{16} + \right. \\ &\quad + 6\tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{17} - 6\tilde{x}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_{18} - 20\varepsilon\tilde{x}^3I_{19} - 20\varepsilon\tilde{y}^3I_{20} - 60\varepsilon\tilde{x}^2\tilde{y}I_{21} - \\ &\quad \left. - 60\varepsilon\tilde{x}\tilde{y}^2I_{21}\right\}; \\ F_{Y,3} &= \gamma\left\{6[\tilde{x}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - 2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{16} + 6[2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - \tilde{y}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{17} + \right. \\ &\quad + 6\tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{23} - 6\tilde{x}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_{15} - 20\varepsilon\tilde{x}^3I_{21} - 20\varepsilon\tilde{y}^3I_{24} - 60\varepsilon\tilde{x}^2\tilde{y}I_{22} - \\ &\quad \left. - 60\varepsilon\tilde{x}\tilde{y}^2I_{20}\right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $I_1, \dots, I_{24}$  – интегралы, которые берутся в элементарных функциях и не приводятся для краткости изложения.

Подставляя выражения для сил (18) в уравнения движения (8) получаем следующее матричное уравнение:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q'_1), \quad (22)$$

где  $W(q_1, q'_1)$  – вектор нелинейных составляющих сил, которые имеют следующий вид:

$$w_1 = F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{X,0};$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= l_1 F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) - l_2 F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + (l_1 - l_2) F_{Y,0}; \\
w_3 &= F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{Y,0}; \\
w_4 &= l_2 F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) - l_1 F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + (l_2 - l_1) F_{X,0}.
\end{aligned}$$

Окончательно, систему (22) можно представить так:

$$\ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}), \quad (23)$$

где  $\tilde{W}(q, \dot{q}) = [M]^{-1}W(q_1, \dot{q}'_1) = [M]^{-1}W(q_1, \Omega^{-1}\dot{q}'_1) = [M]^{-1}W(\tilde{D}^{-1}Rq, \Omega^{-1}\tilde{D}^{-1}R\dot{q})$ .

В численном анализе уравнений (23) учитывались как квадратичные, так и кубические слагаемые нелинейных сил, действующих со стороны масляного слоя (18).

**Применение метода гармонического баланса к анализу автоколебаний.** Для исследования автоколебаний воспользуемся методом гармонического баланса; движения системы (23) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x &= A_0 + \tilde{A}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_1); \theta_1 = B_0 + \tilde{B}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_2); \\
y &= C_0 + \tilde{C}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_3); \theta_2 = D_0 + \tilde{D}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_4).
\end{aligned} \quad (24)$$

Система (23) является автономной, поэтому она инвариантна относительно преобразования времени  $\tau = t + t_*$ , где  $t_*$  выберем так:  $t_* = -\varphi_1/\omega$ . Тогда решение (24) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
x &= A_0 + A_1 \cos(\omega t); \theta_1 = B_0 + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t); \\
y &= C_0 + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t); \theta_2 = D_0 + D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t),
\end{aligned} \quad (25)$$

где  $A_0, A_1, \dots, D_2$  - подлежащие определению параметры. Подставляя (25) в выражения для сил (18) и в уравнения движения (8) и приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем систему из 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно  $A_0, A_1, \dots, D_2, \omega$ . Эта система решается численно при различных значениях частоты вращения ротора  $\Omega$ . Результаты расчета представляются на амплитудно-частотной характеристике.

Для анализа устойчивости полученных периодических движений системы (23) представим так:

$$\dot{z} = f(z), \quad (26)$$

где  $z = [q; \dot{q}]^T$ ;  $f(z)$  - нелинейная вектор-функция.

Запишем следующую систему уравнений в вариациях:

$$\dot{u} = Df(z^*) \cdot u, \quad (27)$$

где  $u(t)$  - вектор-функция, описывающая малые отклонения от состояния равновесия;  $Df(z^*)$  - матрица Якоби вектор-функции правых частей системы (26);  $z^*$  - периодическое движение (25).

Для оценки устойчивости рассчитывается фундаментальная матрица системы (27) и определяются мультипликаторы.

**Численный анализ колебаний.** Колебания ротора исследовались при следующих численных значениях параметров:

$$R = 0,057 \text{ м}; \quad \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad L_B = 28,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad c = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad m = 374 \text{ кг};$$

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 0,648 \text{ м}; \quad I_p = 28,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_e = 14,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$J = 8,29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

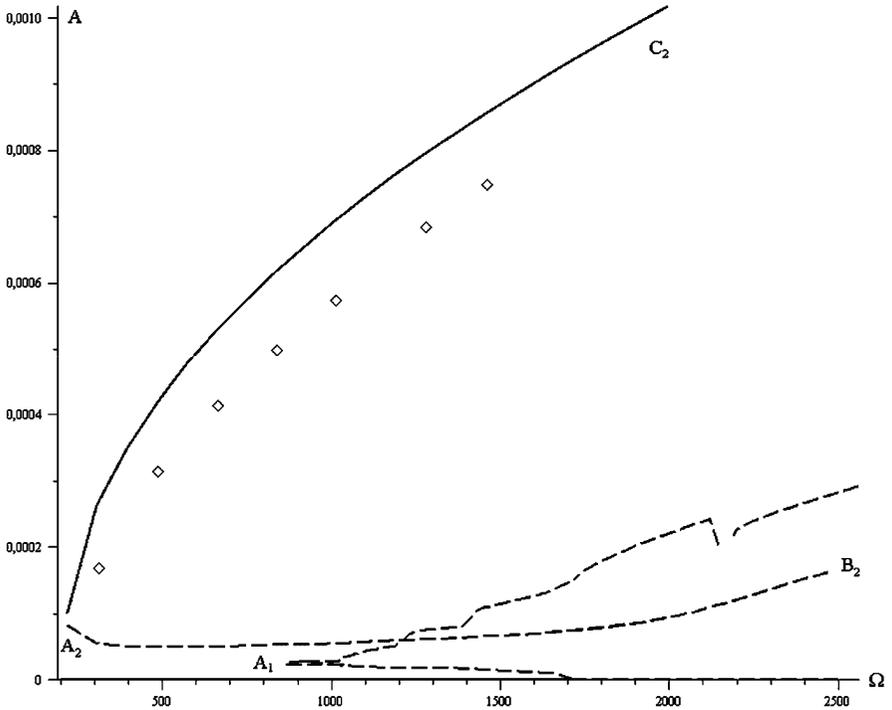


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика колебаний

Для нахождения критической частоты вращения ротора анализировались собственные значения линеаризованной системы (22). Частота вращения ротора, при которой он теряет устойчивость равномерного вращения, составляет  $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$ . Для исследования автоколебаний ротора численно решалась система 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд автоколебаний при квазистатическом изменении частоты вращения ротора  $\Omega$ . Результаты расчета представлены на амплитудно-частотной характеристике (рис. 2). При  $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$  наблюдается бифуркация Хопфа. В результате этой бифуркации возникают неустойчивые предельные циклы, ко-

торы претерпевают седло-узловую бифуркацию в точке  $A_1$ . После этой бифуркации предельные циклы являются неустойчивыми. Подчеркнем, что в системе была найдена еще одна ветка автоколебаний, которая обозначена ( $C_2A_2B_2$ ). Участок ( $C_2A_2$ ) этой ветви описывает устойчивые предельные циклы, которые в точке седло-узловой бифуркации  $A_2$  преобразуются в неустойчивые движения.

Для подтверждения результатов, полученных методом гармонического баланса, проводилось прямое численное интегрирование системы (22) методом Рунге-Кутты. Начальные условия для интегрирования выбирались из результатов метода гармонического баланса. Результаты расчета приводятся на рис. 2 точками. Между результатами, полученными двумя различными методами, наблюдается довольно хорошее совпадение. Сплошной линией на рисунке обозначены устойчивые режимы автоколебаний, пунктирной линией – неустойчивые.

**Выводы.** В статье получена математическая модель несимметричного однодискового ротора на нелинейных подшипниках скольжения. Получены области устойчивости движений. Для исследования колебаний использовался метод гармонического баланса. Исследована устойчивость периодических движения. Рассмотрена бистабильность автоколебаний ротора. В диапазоне  $\Omega \in [300; 1700]$  рад/с наблюдается два вида установившихся движений. К первому виду, относятся состояния равновесия, которые описывают равномерное вращение ротора. Ко второму типу движений относятся автоколебания, которые возникают вследствие седло-узловой бифуркации  $A_2$ . Отметим, что в зависимости от величины начальных условий в системе будет реализовываться один из полученных режимов. Проведено численное интегрирование системы. Результаты численного интегрирования хорошо совпадают с результатами полученными методом гармонического анализа.

**Список литературы:** 1. Zhang X. Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200MW stream turbine generator systems // Power Industry. – 1992. – № 12. – P. 32-37. 2. Legrand M. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – № 10. – P. 319-335. 3. Позняк Э. Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения // Сб. «Динамика гибких роторов». – М.: Наука, 1972. – С. 22-29. 4. Олмшцев В. И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения // Изд. АН СССР, ОТН. – 1960. – № 3. – С. 24-29. 5. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 386 с. 6. Каринцев И.Б. Статические и динамические характеристики масляной пленки коротких подшипников скольжения / И.Б. Каринцев, Н.Г. Шульженко // Динамика и прочность машин. – Изд-во Харьковск. ун-та, 1972. – Вып. 16. – С. 14-18. 7. Филиппов А.П. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения / А.П. Филиппов, Н.Г. Шульженко // Машиноведение. – 1973. – № 4. – С. 21-28. 8. Овчарова Д.К. Вынужденные колебания ротора на подшипниках скольжения / Д.К. Овчарова, Е.Г. Голоскоков // Прикладная механика. – 1975. – № 11. – С. 95-99.

Поступила в редколлегию 13.04.2010

*Л.В.АВТОНОМОВА*, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
*С.В.БОНДАРЬ*, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
*Б.Н.КИРКАЧ*, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
*А.В.СТЕПУК*, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»;  
*Ю.М.ШМЫГАРЕВ*, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **УТОЧНЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ОБМОТКИ**

Запропонована уточнена математична модель розрахунку термонапруженого стану з урахуванням контактної взаємодії шарів в багатокомпонентній електромагнітній обмотці електрофізичних установок, яка знаходиться під дією полів різної фізичної природи.

An enhanced mathematical model of stress state calculations is suggested. It takes into account the contact interaction of layers in multicomponent electromagnetic winding of electro-physical devices, used under the various physical fields

**1. Введение.** Многие элементы объектов из разных областей техники, на которые при эксплуатации воздействуют физико-механические поля различной природы, могут рассматриваться как структурно связанные механические системы (ССМС). Такие системы включают в себя деформируемые тела с неоднородными свойствами; нагружение их и механизмы взаимодействия составляющих структурных элементов моделируются в виде объемных и поверхностных полей различной физико-механической природы. Специфической особенностью этих систем является взаимодействие структурных неоднородных элементов при их контактном деформировании в условиях действия тепловых, электромагнитных и силовых воздействий. Необходимая точность расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) таких элементов структурно связанных механических систем позволяет достоверно оценить прочность и жесткость ССМС, отвечающим реальным конструкциям новой техники.

**2. Формулировка проблемы.** Так катушка электромагнитной системы энергетических электрофизических установок является примером такой структурно связанной механической системы. Определенный интерес представляет анализ напряженно-деформированного состояния обмотки (катушек) электромагнитной системы при действии значительных объемно-распределенных пондеромоторных сил. Катушки ЭМС состоит из набора медных проводников, изолированных друг от друга. Для обеспечения высоких жесткостных характеристик обмотки компандированный пакет помеща-

ется в стальной корпус. Нормальное поперечное сечение катушки ЭМС имеет симметричную регулярную структуру, включающую медные включения (проводники) и изоляционные слои из эпоксидного компаунда, и приведено на рис. 1. В первом приближении из-за сложности численной реализации для анализа напряженно-деформированного состояния в целом обмотки можно ввести допущение, что многокомпонентное сечение стержня можно рассматривать как монолитное с приведенными эквивалентными жесткостями в рамках стержневой расчетной схемы. Однако, учитывая, что взаимодействие между отдельными элементами обмотки имеет сложный характер при воздействии на них пондеромоторных сил и наличие объемного температурного поля приводит к необходимости рассматривать обмотку как структурно связанную механическую систему.

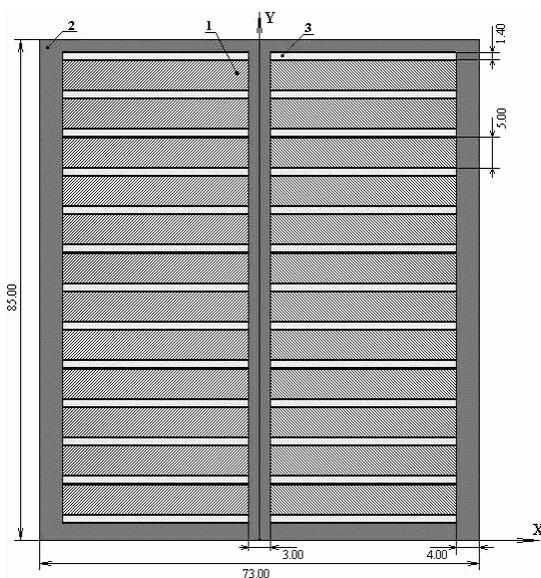


Рисунок 1 – Сечение обмотки: 1 – медные шины; 2 – стальной корпус; 3 – изоляционные слои

**3. Математическая модель.** В рамках уточненной модели ССМС расчетная схема представляется в виде неоднородной структуры объемных медных шин, упруго контактирующих с соответствующими слоями изоляции и стальным корпусом. Медные шины и корпус находятся под воздействием объемных пондеромоторных сил, а температурное поле, вызванное протеканием мощных токов по обмотке, принято однородным.

Принимая во внимание длительность импульса тока и анализируя режимы работы электромагнитной системы энергетических электрофизических

установок считаем:

- электромагнитные процессы квазистатическими  $\omega l/c \ll 1$ , где  $\omega$  – рабочая частота установки,  $c$  – скорость света,
- $\mathbf{j} = \beta \mathbf{E}_e$ , где  $\mathbf{j}$  – вектор плотности тока,  $\beta$  – коэффициент электропроводности,  $\mathbf{E}_e$  – вектор напряженности электрического поля;
- равенство нулю плотности поверхностных зарядов  $\rho_e = 0$ .

Тогда основные соотношения электромагнитного поля [1] принимают следующий вид:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) / (\beta_0 \mu_0^2) = 0; \quad \Delta \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

где  $\nabla = \partial i / \partial x + \partial j / \partial y + \partial k / \partial z$  – оператор Лапласа в декартовых координатах;  $\mathbf{H}$  – вектор магнитной напряженности;  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции;  $\mathbf{j}$  – вектор плотности тока;  $\beta_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная проницаемость среды.

Из уравнения (1) определяются локальные характеристики вектора магнитной индукции и вектора напряженности магнитного поля и интегральные характеристики – магнитоэлектрические силы:

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu; \quad \mathbf{F} = \int [(\mathbf{H}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}))] d\mathbf{S} / 2.$$

В рамках модели связанной задачи электромагнитотермоупругости, которая учитывает действие электромагнитного поля на термомеханическое состояние тела, в уравнениях равновесия учитываются пондеромоторные силы а также тепловыделение из-за наличия джоулевых источников тепла.

Для определения теплового состояния ССМС используется уравнение теплопроводности:

$$\rho c_v \partial T / \partial t = \text{div} \lambda \text{ grad} T + j^2 / \sigma(T), \quad (3)$$

основные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние, имеют вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) / 2; \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\varepsilon}_v \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций;  $\mathbf{u} \{u_x, u_y, u_z\}$  – вектор перемещений;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\mu$  и  $\lambda$  – постоянные Ламе;  $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$  – первый инвариант деформаций;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор, причем постоянные Ламе в данном случае зависят от температуры, то есть нелинейны. Для численного решения используются уравнения в перемещениях:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) / \mu_0 = 0. \quad (5)$$

Граничные условия при решении задачи:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_e, \quad (6)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}_0$  – заданные напряжения на поверхности;  $\mathbf{u}_0$  – заданные перемещения на поверхности;  $\mathbf{B}_e$  – составляющая магнитного поля воздуха.

При решении задачи теплопроводности граничные условия на поверхности обмотки выбираются как условия конвективного теплообмена с воздухом.

Рассматриваемая обмотка может быть представлена объединением объемных контактирующих подобластей  $V^m$  ( $m = 1, n$ ), границы которых включают и зоны контакта  $S_k$ . Условия сопряжения контактирующих подобластей

могут быть сформулированы в виде неравенств:

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m \leq 0; \quad \sigma_{mn}^m \leq 0,$$

где  $u_n^{m-1}$ ,  $u_n^{m+1}$ ,  $\delta_{on}^m$  – нормальные перемещения точек поверхностей подобластей и начальный зазор,  $\sigma_{mn}^m$  – нормальное напряжение на контактирующих поверхностях.

Условия фрикционного взаимодействия на  $S_k$  принимаются в форме закона Кулона:

$$|\sigma_{nr}| = f_{mn} \sigma_{nn},$$

где  $f_{mn}$  – коэффициент трения скольжения, зависящий от материалов контактирующих тел, которые можно представить кусочно-однородными средами с различными физико-механическими свойствами.

Для численной реализации поставленной задачи, описывающей связанные электромагнитные, тепловые и механические процессы в многокомпонентной электромагнитной обмотке ЭМС, был применен метод конечных элементов.

На рис. 1 представлен вид сложного поперечного сечения стержневой обмотки ЭМС. Стальной корпус с перегородкой содержит 12 медных шин с изоляционными слоями, симметрично расположенных.

Физико-механические характеристики материалов: для медных проводников – модуль упругости  $E_m = 109,1$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,33$ ; для стального корпуса – модуль упругости  $E_s = 196,2$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,27$ ; для изоляционного материала – модуль упругости  $E_i = 24,525$  ГПа, значение которого уменьшается вдвое по нелинейному закону [2]; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ .

Задача решалась программным комплексом ANSYS.

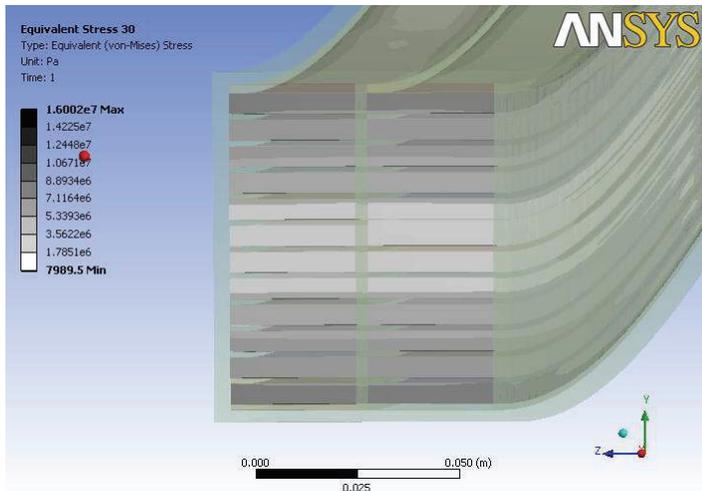


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных напряжений в сечении при  $T = 20$  °С

**4. Результаты расчетов.** В трехмерной постановке был проведен расчет НДС обмотки с учетом контактного взаимодействия подобластей системы при действии пондеромоторных объемных сил и температурного поля с учетом нелинейной зависимости коэффициентов Ламе от температуры. На рис. 2 и рис. 3 представлено распределение эквивалентных напряжений в сечении при  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$  и нагреве обмотки до  $T = 120\text{ }^{\circ}\text{C}$  в наиболее нагруженном сечении пакета. Следует отметить, что учет влияния джоулевых источников тепла и соответствующего температурного поля вызывает изменение максимальных эквивалентных напряжений, которые соответствуют уровню предела прочности материала изоляции. В связи с большой разностью температур и коэффициентов линейного расширения медных шин и стального корпуса составляющие температурных напряжений превышают напряжения, вызванные пондеромоторными силами. Поэтому происходит перераспределение поля напряжений и наблюдается повышенный уровень эквивалентных напряжений в центральных слоях пакета.

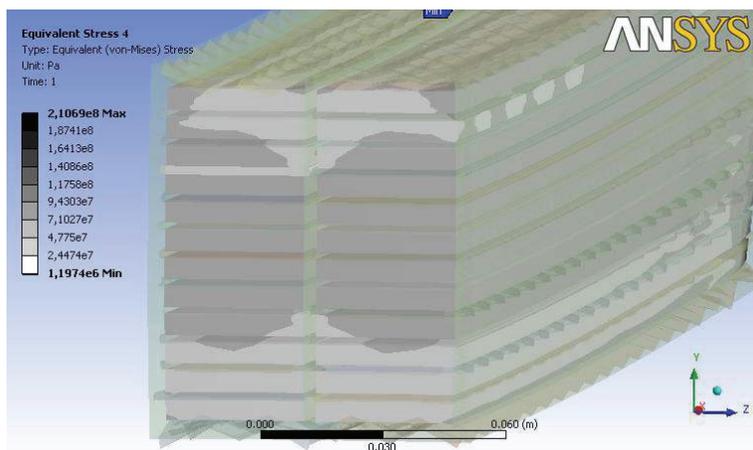


Рисунок 3 – Распределение эквивалентных напряжений в сечении при  $T=120^{\circ}\text{C}$

На рис. 4 представлены графики распределения деформаций  $\epsilon_z$  в многокомпонентном сечении обмотки: пунктирная прямая соответствует расчетной схеме монолитного бруса с приведенными эквивалентными жесткостями в рамках стержневой задачи; сплошная кривая – уточненной модели с учетом контактного взаимодействия медных шин с соответствующими слоями изоляции. Линейный закон распределения деформаций по высоте пакета демонстрирует совместность деформирования слоев проводников и изоляции. В такой упрощенной постановке не рассматривается контактная задача, решение которой позволяет учитывать эффект возможного проскальзывания в зонах контактов, а также задача термоупругого состояния обмотки при действии

джоулевых объемных источников тепла.

**Вывод.** Из результатов следует, что при расчете на прочность многокомпонентных электромагнитных обмоток необходимо учитывать взаимное влияние действующих электромагнитных, температурных и механических полей в подобных структурно связанных механических системах.. В дальнейшем при исследовании напряженно-деформированного состояния изоляционных слоев требуется учитывать в математической модели анизотропные свойства изоляционного материала.

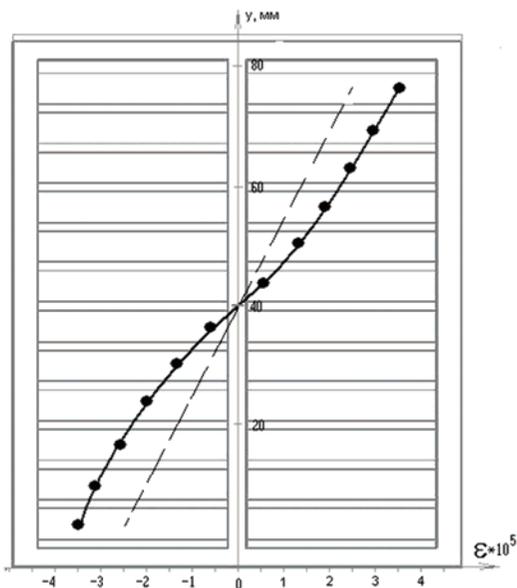


Рисунок 4 – График распределения деформации  $\epsilon_z$  в сечении

**Список литературы:** 1. Я.С.Подстригач Магнетотермоупругость проводящих тел / Я.С.Подстригач, Я.И.Бурак, В.Ф.Кондрат. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. 2. В.В.Васильев Композиционные материалы / В.В.Васильев, В.Д.Протасов, В.В.Болотин, В.Ф.Кондрат. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с. 3. Л.И.Седов Математические методы для создания новых моделей сплошной среды / Л.И.Седов. – Усп. Мат. Наук, 20, № 5.

Поступила в редколлегию 10.09.2010

**А.Г.АНДРЕЄВ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;  
**В.О.БЕЛОСТОЦЬКИЙ**, канд. техн. наук, доц., Харківський національний технічний університет сільського господарства;  
**О.В.ЩЕПКИН**, наук. співр., НТУ «ХПІ»

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГАЙКИ ЗІ СТОПОРНИМ ПОСАДОЧНИМ КІЛЬЦЕМ

Стаття присвячена дослідженню напружено-деформованого стану самостопорної гайки в умовах експлуатації при посадці її на вал з натягом, що тягне за собою переміщення в сполучних точках й може негативно впливати на надійність стопоріння при динамічних навантаженнях.

The given article is devoted probe of the is intense-deformed condition of a self-stopped nut at maintenance with a condition of its landing to the shaft with a tightness that involves migrations to the inter-faced points and can negatively affect reliability of latching at dynamic loads.

Гайка зі стопорним посадочним кільцем [1] застосовується в різьбових з'єднаннях для безступінчатого затягування або регулювання деталей, забезпечуючи тим самим високу надійність стопорення при динамічних навантаженнях.

Перед загвинчуванням стопорне кільце нагрівається і після охолодження виявляється посадженим на вал з натягом. Можливе також складання та розбирання таких з'єднань в холодному стані. Подібне з'єднання призводить до виникнення моменту пружних сил, які діють на посадочне кільце і викликають його поворотну деформацію.

Досліджувався напружено-деформований стан гайки зі стопорним посадочним кільцем типу М42-50-2,5, із зовнішнім діаметром кільця 50 мм, товщиною циліндрової перемички 2,5 мм, діаметром посадки 36 мм, натягом стандартної посадки  $30 \cdot 10^{-6} \dots 144 \cdot 10^{-6}$  м (рис. 1). Дія закріплюваною за допомогою гайки деталі імітується силою  $F$ .

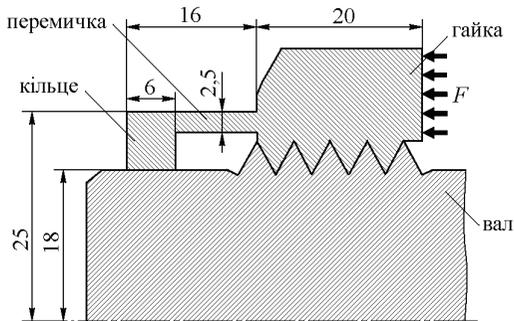


Рисунок 1 – Гайка зі стопорним посадочним кільцем

Конструкція розглядається як тіло обертання. Для розрахунку напружено-деформованого стану й розв'язання температурної задачі був застосований метод скінчених елементів [2-4]. Конструкція апроксимується тороїдальними скінченими елементами трикутного поперечного перерізу з трьома вузлами. Дослідження процесу у деталях перерозподілу тепла вимагає розв'язання нестационарної температурної задачі, яка описується рівнянням

$$[C] \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + [K] \vec{T} = \vec{F},$$

де  $\vec{T}$  – вектор температур,  $t$  – час,  $[C]$  – матриця демпфування тіла,  $[K]$  – матриця теплопровідності,  $\vec{F}$  – вектор зовнішніх навантажень.

При розв'язанні нестационарної задачі частинна похідна за часом замінюється її кінцево-різницевим аналогом із застосуванням центральної різницевої схеми

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{\vec{T}^{(1)} - \vec{T}^{(0)}}{\Delta t},$$

звідки

$$\left( [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \vec{T}^{(1)} = \left( \frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \vec{T}^{(0)} + \vec{F}^{(0)} + \vec{F}^{(1)},$$

де  $\Delta t = t^{(1)} - t^{(0)}$  – крок за часом,  $\vec{T}^{(0)}$ ,  $\vec{F}^{(0)}$ ,  $\vec{T}^{(1)}$ ,  $\vec{F}^{(1)}$  – вектори-стовпці температурних полів і правих частин рівняння у момент часу  $t^{(0)}$  і  $t^{(1)}$  відповідно.

Для дослідження контактної взаємодії деталей у процесі складання використовуються контактні елементи, які з'єднують вузли контактуючих деталей і моделюють стан сила-зсув або зазор, а також теплопередачу в зоні контакту. Контактний елемент містить 2 вузли з однаковими координатами, що належать до суміжних контактуючих тіл, і має довжину  $L$  уздовж лінії контакту в площині поперечного перерізу (вся область, де можливий контакт, має бути «розподілена» між контактними елементами).

Зону діючого контакту й величину прослизання або зазору знаходять ітераційним шляхом, на кожній ітерації після визначення НДС уточнюється стан кожного з контактних елементів. Контактний термічний опір  $R$  залежить чистоти обробки дотичних поверхонь, температури, тиску  $\sigma$  в зоні контакту або величини зазору  $B_G$ . Термічний контактний опір зручно оцінювати величиною еквівалентної товщини матеріалу  $B$ , температурний перепад на якій відповідає температурному стрибку в зоні контакту (рис. 2).

Характеристики матеріалу конструкції: модуль пружності  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,33$ ; коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>; щільність  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>; питома теплоємність  $c = 460$  Дж/кг · град.; коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 80$  Вт/м · град.; коефіцієнт тертя в зоні контакту  $f = 0,15$ ; термічний опір у зоні контакту  $R = 176 \cdot 10^{-3}$ ;  $84 \cdot 10^{-3}$ ;  $15 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup> · град/Вт (при стискаючій напрузі, яка дорівнює 0, 10, 100 МПа відповідно) [5].

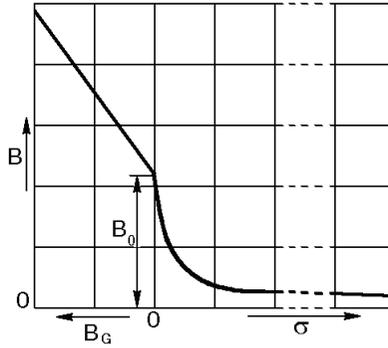


Рисунок 2 – Залежність еквівалентної товщини  $B$  контактного елемента від стану зони контакту

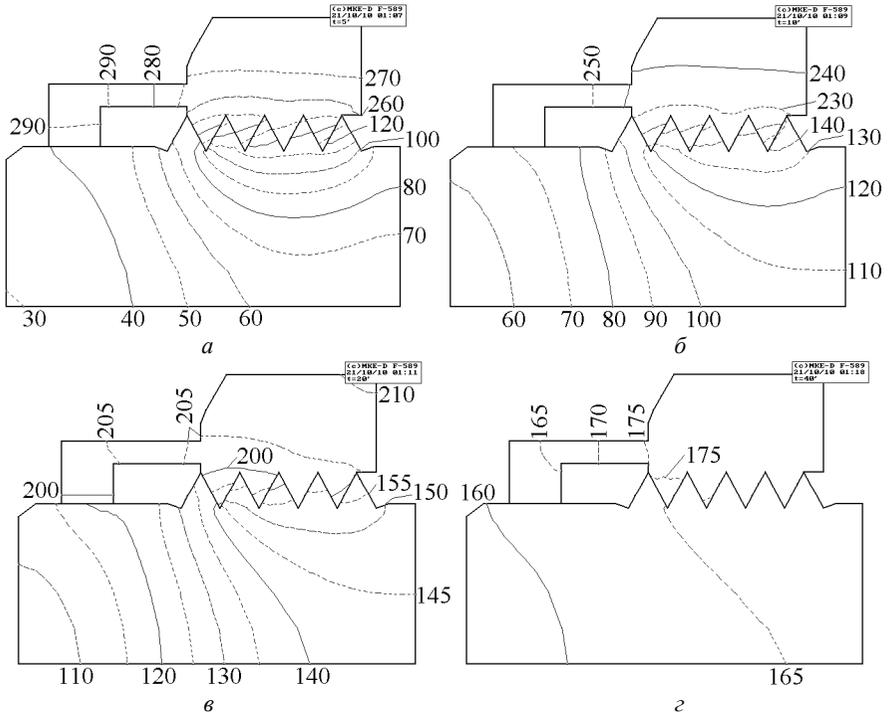


Рисунок 3 – Розподіл температури в гайці та у валу у моменти часу 5 с (*a*), 10 с (*б*), 20 с (*в*) і 40 с (*г*) з початку з'єднання деталей

На рис. 3 показаний процес теплопередачі після загвинчування на вал гайки, нагрітої до температури  $320\text{ }^{\circ}\text{C}$ , величина діаметрального натягу прийнята  $30 \cdot 10^{-6}\text{ м}$ .

На рис. 4 представлений розподіл напружень в зоні контакту стопорного кільця з валом. З'єднання деталей без нагріву призводить до часткового розкриття посадки вал-стопорне кільце (рис. 5, а) – стопорне кільце повертається, розкриваючи посадку назустріч валу, що входить, а надалі повертається в іншому напрямі (рис. 5, б).

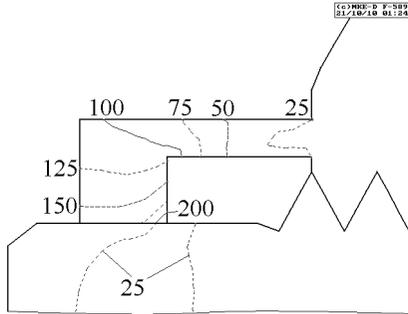


Рисунок 4 – Розподіл еквівалентних напружень в зоні контакту стопорного кільця гайки з валом після остигання, МПа

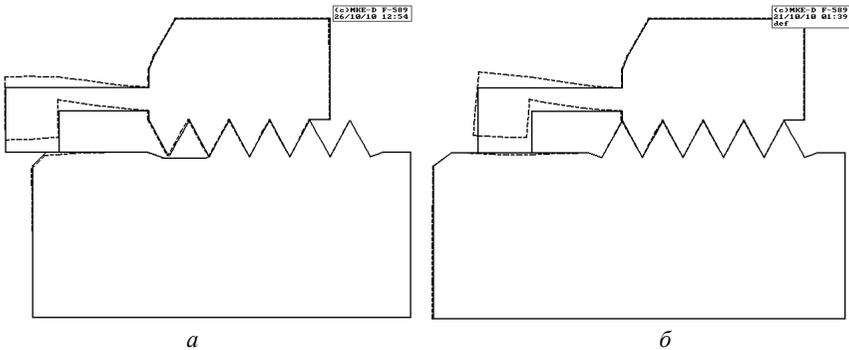


Рисунок 5 – Схема деформування з'єднання валу з гайкою при загвинчуванні без нагріву

На рис. 6 показаний розподіл напружень і схема деформування в деталі при навантаженні гайки силою  $F$  величиною 1 т (див. рис. 1), яка імітує вплив деталі, яка закріплена гайкою. Найбільші напруги виникають на внутрішньому торці стопорного елемента.

Дослідження процесу складання з'єднання з використанням стопорної гайки дозволяє зробити наступні висновки: час вирівнювання температури нагрітої гайки і вала після складання становить приблизно 1 хв; нагрів гайки до  $320\text{ }^{\circ}\text{C}$  дозволяє проводити теплову посадку, якщо натяг не більший  $60 \cdot 10^{-6}$  м; при збільшенні натягу більше  $60 \cdot 10^{-6}$  м на внутрішньому торці стопорного елемента з'являються пластичні деформації.

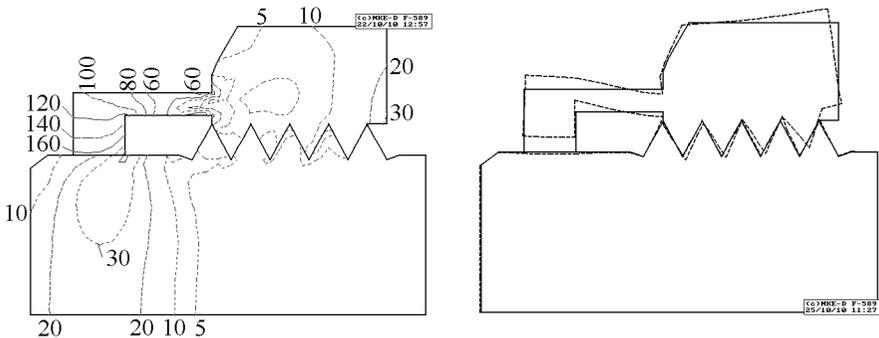


Рисунок 6 – Розподіл еквівалентних напружень і схема деформування в стопорній гайці при її навантаженні силою  $I$  т, яка імітує вплив закріпленої деталі

**Список літератури:** 1. А.с. № 179556 СССР. Самостопорящаяся гайка / Г.Я.Андреев, В.А.Белостоцкий, Н.М.Лактионов, Б.М.Арпентьев, В.И.Кушаков // Бюл. изобрет. – 1966. – № 5. 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с. 3. Сегерлинд Р. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с. 4. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смлюк А.Ф. ANSYS для инженеров: справочное пособие. – М.: Машиностроение, 2004. – 512 с. 5. Миллер В.С. Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Киев: Наукова думка, 1966. – 164 с.

Надійшла до редколегії 14.09.2010

УДК 539.374

**В.Г.БАБАДЖАНОВА**, Сумгаитский государственный университет,  
Азербайджан

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ НЕСВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Пов'язані і не пов'язані задачі про термомеханічний ударі по в'язкопружних тілу досліджені багатьма авторами в конкретних ядрах. Залежність властивості матеріалу від температури, тобто залежність функцій релаксації і повзучості від температури істотно ускладнюють зазначені завдання. У статті вирішується одновимірне незв'язане завдання термов'язкоупругості за допомогою інтегрального перетворення Лапласа і методом малого параметра для довільних спадкових ядер.

Related and unrelated tasks on thermomechanical impact on the viscoelastic body studied by many authors in specific nuclei. The dependence of material properties on temperature, ie dependence of relaxation and creep functions of the temperature significantly complicate the task. Article solved one-dimensional unrelated tasks thermoviscoelasticity using the integral Laplace transform and the method of small parameter for arbitrary hereditary kernels.

Связанные и несвязанные задачи о термомеханическом ударе по вязкоупругому телу исследованы многими авторами в конкретных ядрах. Зависимость свойства материала от температуры, т.е. зависимость функций релаксации и ползучести от температуры, существенно усложняют указанные задачи.

В статье решается одномерная несвязанная задача ТВУ с помощью интегрального преобразования Лапласа и методом малого параметра для произвольных наследственных ядер.

Рассмотрим задачу о термомеханическом продольном ударе по полубесконечному вязкоупругому стержню, когда свойства материала стержня зависят от температуры. Будем считать, что уравнение притока тепла определяется отделением из общей системы уравнений ТВУ и решается самостоятельно, то есть рассматривается случай невязанной ТВУ. Математическая задача сводится к интегрированию уравнения движения и теплопроводности:

$$\sigma_{ij,j} - \rho F_i = \rho \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\text{ж} \frac{\partial^2 \Theta(x,t)}{\partial x^2} = \varphi \frac{\partial \Theta(x,t)}{\partial t};$$

при начальных и граничных условиях.

$$\Theta(x,0) = 0; \quad u(x,0) = \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0;$$

$$\Theta(+0,t) = A\psi(t); \quad \sigma(0,t) = \sigma^0 \varphi(t); \quad (2)$$

$$\Theta \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$x = \aleph/c \cdot p.$$

Здесь  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  – заданные функции,  $\sigma_0$ ,  $A$  – некоторые постоянные,  $\Theta(x,0) = T(x,t) - T_0$ ,  $T_0$  – исходная температура,  $\chi$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – удельная теплоемкость при постоянной деформации,  $\rho$  – плотность материала.

Связь между напряжением – деформацией -временем и температурой берем в виде

$$\sigma(x,t) = \int_0^t R(t' - \tau') d[e(x,\tau) - \alpha \Theta(x,\tau)] \quad (3)$$

где  $R(t')$  – функция релаксации,  $t'$  – приведенное время, которое дается формулой

$$t' = \int_0^t \frac{d\xi}{\alpha_T(T(x,\xi))}. \quad (4)$$

Функция температурно-временной редукции  $\alpha_T(T)$  для терморологически простых материалов выражается формулой Вильямса-Ландера-Ферри

(ВЛФ), тогда

$$f(x, t) = \alpha_T^{-1}(T) = \exp\left\{\frac{b_0}{T} \frac{\Theta(x, t)}{T_0} \frac{1}{1 + \Theta(x, t)/T_0}\right\}, \quad (5)$$

где  $b_0$  – константа материала. Из (1), (2) легко найти, что

$$\Theta(x, t) = \frac{Ax}{2} \sqrt{\frac{c}{\alpha \pi}} \int_0^t \psi(t-s) s^{-3/2} e^{\frac{cx^2}{4s\alpha}} ds, \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Theta(x, t) = A \cdot \Psi(t).$$

При  $|\Theta(x, t)/T_0| \ll 1$  функцию  $f(x, t)$  разлагаем в ряд по степеням  $\Theta(x, t)/T_0$

$$f(x, t) = 1 + \frac{b_0 \Theta}{T_0} - \frac{b_0}{T_0^3} \left(1 - \frac{b_0}{T_0}\right) \Theta^2 + \frac{b_0}{T_0^4} \left(1 - \frac{2b_0}{T_0} + \frac{b_0^2}{T_0^2}\right) \Theta^3 -$$

$$- \frac{b_0}{T_0^5} \left(1 - \frac{3b_0}{T_0} + \frac{3b_0^2}{T_0^2}\right) \Theta^4 + \frac{b_0 \Theta^5}{T_0^6} \left(1 - \frac{4b_0}{T_0} + \frac{6b_0^2}{T_0^2}\right) + \dots \quad (7)$$

Обозначим  $\sup |\Theta(x, t)| = \Theta_0$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $t \in [0, \infty)$  и примем  $\lambda = b_0 \Theta_0 / T_0^2$  в качестве малого параметра.

Тогда учитывая (7) в (4), получаем

$$t' = t + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \omega_k(x, t) \quad (8)$$

где

$$\omega_1(x, t) = \frac{1}{\Theta_0} \int_0^t \Theta(x, \xi) d\xi;$$

$$\omega_2(x, t) = \left(1 - \frac{T_0}{b_0}\right) \frac{1}{\Theta_0^2} \int_0^t \Theta^2(x, \xi) d\xi;$$

$$\omega_3(x, t) = \left(\frac{T_0^2}{b_0^2} - \frac{2T_0}{b_0}\right) \frac{1}{\Theta_0^3} \int_0^t \Theta^3(x, \xi) d\xi;$$

С учетом (8) функцию  $R(t')$  разлагаем в ряд по степеням  $\lambda$ , где

$$R(t') = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k R_k(x, t); \quad (9)$$

$$R_0(t) = R(t); \quad R_1(x, t) = \dot{R}(t) \omega_1(x, t);$$

$$R_2(x, t) = \dot{R}(t) \omega_2(x, t) + \frac{1}{2} \ddot{R}(t) \omega_1^2(x, t);$$

$$R_3(x, t) = \frac{1}{6} \ddot{R}(t) \omega_1^3(x, t) + \frac{1}{2} \ddot{R}(t) \omega_1(x, t) \cdot \omega_2(x, t) + \frac{1}{6} \dot{R}(t) \omega_3(x, t);$$

формулы (7 – 9) справедливы при небольших изменениях температуры, которые имеют место в переходных волновых процессах. Дадим некоторое улучшение этих формул. Пусть  $\Theta_1(t) = \sup|\Theta(x,t)|$   $x \in [0, \infty)$  тогда нетрудно получить (из формулы ВЛФ)

$$f(x,t) = \exp\left[T_0\left(1 - \frac{b_0}{b_0 + \Theta_1} \frac{1}{1-z}\right)\right], \quad z = \frac{\Theta_1 - \Theta}{\Theta_1 + b_0};$$

$$T_0 = c_1^g; \quad b_0 = c_2^g.$$

Учитывая, что  $|z| < 1$ , экспоненциальную функцию разлагаем в ряд по степеням  $z$ ; в итоге получаем

$$f(x,t) = f_0(t) \left\{ 1 - \frac{T_0 b_0}{(b_0 + \Theta_1)^2} (\Theta_1 + \Theta) + \frac{T_0 b_0 (\Theta_1 + \Theta)^2}{(\Theta_1 + b_0)^2} \left(\frac{\Theta_1 - \Theta}{\Theta_1 + \Theta}\right)^2 + \dots \right\}.$$

Функция  $b_0 T_0 (\Theta_1 + \Theta) / (\Theta_1 + b_0)^2$  в некотором диапазоне температур является ограниченной единицей, поэтому величину  $\lambda = \sup|(\Theta_1 - \Theta) / (\Theta_1 + \Theta)|$  можно принять как малый параметр. При этом

$$f(x,t) = f_0(t) + \lambda f_1(x,t) + \lambda^2 f_2(x,t) + \dots;$$

$$f_0(x,t) = \exp\left[T_0\left(1 - \frac{b_0}{b_0 + \Theta_1}\right)\right],$$

$$f_1(x,t) = -f_0(t) \cdot \frac{T_0 b_0 (\Theta_1 + \Theta)}{(b_0 + \Theta_1)^2};$$

$$f_2(x,t) = f_0(t) \cdot \frac{T_0 b_0 (\Theta_1 + \Theta)^2}{(b_0 + \Theta_1)^3};$$

.....

Приведенное время выражается формулой:

$$t' = \omega_0(t) + \lambda \omega_1(x,t) + \lambda^2 \omega_2(x,t) + \dots \quad (10)$$

где

$$\omega_k(x,t) = \int_0^t f_k(x,\xi) d\xi; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Разлагая  $R(t')$  в ряд по степеням  $\lambda$ , находим:

$$R(t') = R_0(t) + \lambda R_1(x,t) + \lambda^2 R_2(x,t) + \dots;$$

$$R_0(t) = R[\omega_0(t)];$$

$$R_1(x,t) = \dot{R}[\omega_0(t)] \omega_1(x,t); \quad (11)$$

$$+ \frac{1}{2} \ddot{R}[\omega_0(t)] R_2(x,t) = \dot{R}[\omega_0(t)] \omega_2(x,t) \omega_1^2(x,t);$$

.....

Формулы (10), (11) отличаются от (8), (9) тем, что здесь в начальном приближении температура стержня считается равной,  $T_0 + \Theta_1(t)$  то есть свойства материала стержня уже считаются измененными.

Решение задач (1), (3), (4) представляем в виде ряда по степеням  $\lambda$

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sigma_n(x, t); \\ u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).\end{aligned}\quad (12)$$

Учитывая (11), (12) в формуле (3) получим

$$\begin{aligned}\sigma_0(x, t) &= \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial x} - \alpha \Theta(x, \tau)\right); \\ \sigma_1(x, t) &= \int_0^t R_1(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial x} - \alpha \Theta(x, \tau)\right) + \\ &\quad + \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial u_1(x, \tau)}{\partial x}\right); \\ \sigma_2(x, t) &= \int_0^t R_2(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial x} - \alpha \Theta(x, \tau)\right) + \\ &\quad + \int_0^t R_1(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial x}\right) + \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial u_2(x, \tau)}{\partial x}\right); \\ &\quad \dots \dots \dots \\ \sigma_n(x, t) &= \int_0^t R_n(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial u_0(x, \tau)}{\partial x} - \alpha \Theta(x, \tau)\right) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_0^t R_{n-k}(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial u_k(x, \tau)}{\partial x}\right).\end{aligned}\quad (13)$$

Учитывая (12) и (13) в уравнении движения (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получаем:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right); \\ \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + \int_0^t R_1(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial R_1(x, t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \alpha \Theta\right); \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \int_0^t R_0(t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + \int_0^t \frac{\partial R_1(x, t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) +\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t R_1(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) + \int_0^t R_2(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \\
& \quad + \int_0^t \frac{\partial R_2(x, t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \alpha \Theta\right); \\
& \dots\dots\dots \\
& \rho \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = \int_0^t R_n(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \\
& \quad + \int_0^t \frac{\partial R_n(x, t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - \alpha \Theta\right) + \\
& \quad + \sum_{m=1}^n \int_0^t \frac{\partial R_{n-m}(x, t-\tau)}{\partial x} d\left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right) + \sum_{m=1}^n \int_0^t R_{n-m}(x, t-\tau) d\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}\right). \\
& \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Уравнения (13), (14) решаются при следующих начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned}
u_n(x, 0) &= \left. \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{t=0}, & (n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots); \\
\sigma_n &\rightarrow 0; \quad x \rightarrow \infty; \quad \sigma_0(0, t) = \sigma^0 \varphi(t); \\
\sigma_n(0, t) &= 0, & (n = 1, 2, 3, \dots\dots\dots).
\end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что для определения нулевого приближения  $u_0(x, t)$  решается исходная задача с изменной и независимой от координаты  $x$  функцией релаксации  $R_0(t)$ . Последующие приближения определяются из того же уравнения с некоторыми «фиктивными силами» определенными через решения предыдущих приближений.

Применяя преобразование Лапласа к первому уравнению (14) находим для определения  $\bar{u}_0(x, p)$

$$\frac{d^2 \bar{u}_0(x, p)}{dx^2} - \frac{\rho p}{R_0(p)} \bar{u}_0(x, p) = -\alpha A \bar{\phi}(p) \sqrt{\frac{cp}{\chi}} e^{-x \sqrt{\frac{cp}{\chi}}} \quad (15)$$

при  $\frac{cp}{\chi} \neq \frac{\rho p}{R_0(p)}$ .

Решение этого уравнения, ограниченное при  $x \rightarrow \infty$ , будет

$$\bar{u}_0(x, p) = \bar{c}(p) e^{-x \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}} + \frac{\alpha A R_0 \bar{\phi} \sqrt{c \chi}}{\sqrt{p(\rho \chi - c R_0)}} e^{-x \sqrt{\frac{cp}{\chi}}}.$$

Коэффициент  $\bar{c}(p)$  определяется из граничного условия

$$\bar{\sigma}_0(0, p) = \sigma^0 \bar{\varphi}(p).$$

Окончательно получаем:

$$\bar{u}_0(x, p) = \frac{\alpha A \bar{R}_0 \bar{\phi} \sqrt{c \chi}}{\sqrt{p}(\rho \chi - c \bar{R}_0)} e^{-x \sqrt{\frac{cp}{\chi}}} - \frac{\bar{R}_0}{\rho p} \left( \frac{\sigma_0 \bar{\phi}}{p \bar{R}_0} + \frac{\alpha A c \rho \bar{\phi}}{\rho \chi - c \bar{R}_0} \right) e^{-x \sqrt{\frac{pp}{R_0}}} \quad (16)$$

В преобразованиях Лапласа уравнение для определения  $\bar{u}_1(x, p)$  записывается в виде

$$\frac{d^2 \bar{u}_1(x, p)}{dx^2} - \frac{\rho p}{\bar{R}_0(p)} \bar{u}_1(x, p) = -\bar{\Psi}_1(x, p) \quad (17)$$

где

$$\bar{\Psi}_1(x, p) = \frac{d}{dx} \left[ \frac{\bar{R}_1(x, p)}{\bar{R}_0(p)} \left( \frac{d\bar{u}_0(x, p)}{dx} - \alpha \bar{\Theta}(x, p) \right) \right].$$

Учитывая здесь выражения (6) и (16), находим

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, p) &= \bar{F}_1(p) \left[ \frac{d\bar{R}_1(x, p)}{dx} - \bar{R}_1(x, p) \sqrt{\frac{cp}{\chi}} \right] \times e^{-x \sqrt{\frac{cp}{\chi}}} + \\ &+ \bar{F}_2(p) \left[ \frac{d\bar{R}_1(x, p)}{dx} - \bar{R}_1(x, p) \sqrt{\frac{pp}{R_0}} \right] \times e^{-x \sqrt{\frac{pp}{R_0}}}; \\ \bar{F}_1(p) &= \left( 1 / \bar{R}_0 \right) \frac{\alpha A \bar{\phi} \rho c}{\rho \chi - c \bar{R}_0}; \\ \bar{F}_2(p) &= \frac{\sigma^0 \bar{\phi}(p)}{p \bar{R}_0^2} + \bar{F}_1(p). \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (17) будет

$$\bar{u}_1(x, p) = \bar{B}(p) e^{-\sqrt{\rho p / \bar{R}_0} x} + \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} e^{-\sqrt{\rho p / \bar{R}_0} x} \int \bar{\Psi}_1(x, p) e^{-\sqrt{\rho p / \bar{R}_0} x} dx \quad (18)$$

Здесь  $\bar{B}(p)$  определяется из граничного условия  $\bar{\sigma}_1(0, p) = 0$  и выражается формулой

$$\bar{B}(p) = \frac{\sigma^0 \bar{\phi} \bar{R}_1(0, p)}{\sqrt{\rho} (p \bar{R}_0)^{3/2}} - \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} \bar{F}_3(0, p) + \bar{F}'_3(0, p) \frac{\bar{R}_0}{\rho p}, \quad (19)$$

где обозначены:

$$\begin{aligned} \bar{F}'_3(0, p) &= \bar{\Psi}_1(0, p); \\ \bar{F}_3(x, p) &= \int \bar{\Psi}_1(x, p) e^{-\sqrt{\rho p / \bar{R}_0} x} dx. \end{aligned}$$

С учетом выражения функции  $\bar{\Psi}_1(x, p)$  функцию  $\bar{F}_3(x, p)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{F}_3(x, p) &= \bar{F}_1(p)\bar{J}_1(x, p) + \bar{F}_2(p)[\bar{J}_2(x, p) - \bar{R}_1(x, p)]; \\ \bar{J}_1(x, p) &= \int \left[ \frac{d\bar{R}_1(x, p)}{dx} - \sqrt{\frac{cp}{\chi}} \bar{R}_1(x, p) \right] \times \exp \left[ -x \left( \sqrt{\frac{cp}{\chi}} - \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \right) \right] dx; \\ \bar{J}_2(x, p) &= \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \int \bar{R}_1(x, p) dx.\end{aligned}$$

Для определения  $u_2(x, p)$  имеем уравнение,

где

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{\rho p}{R_0} \bar{u}_2 &= \bar{\Psi}_2(x, p); \\ \bar{\Psi}_2(x, p) &= -\frac{d}{dx} \left( \frac{\bar{R}_1}{R_0} \frac{d\bar{u}_1}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\bar{R}_2(x, p)}{R_0(p)} \left( \frac{d\bar{u}_0}{dx} - \alpha \bar{\Theta} \right) \right].\end{aligned}$$

Общее решение этого уравнения находится аналогично предыдущему

$$\bar{u}_2(x, p) = \bar{D}(p) e^{-x \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}} - \sqrt{\frac{R_0}{\rho p}} e^{-x \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}} \int \bar{\Psi}_2(x, p) e^{-\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} x} dx.$$

Функция  $\bar{D}(p)$  определяется из условия  $\bar{\sigma}_2(0, p) = 0$  и выражается формулой

$$\bar{D}(p) = \sqrt{\frac{R_0}{\rho p}} \frac{1}{p \bar{R}_0^2} \left[ \bar{R}_2(0, p) - \frac{\bar{R}_1^2(0, p)}{R_0} \right] \sigma^0 \bar{\varphi} + \sqrt{\frac{R_0}{\rho p}} \times \left[ \bar{F}_4(0, p) - \sqrt{\frac{R_0}{\rho p}} \bar{F}_4'(0, p) \right],$$

где

$$\begin{aligned}\bar{F}_4(x, p) &= \int \bar{\Psi}_2(x, p) \exp \left( x \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \right) dx; \\ \bar{F}_4'(x, p) &= \bar{\Psi}_2(x, p).\end{aligned}$$

Вычислим  $\bar{F}_4(x, p)$ . Для этого предварительно вычислим функцию  $\bar{\Psi}_2(x, p)$ .

Учитывая (6), (16), (18), (19) в выражении для  $\bar{\Psi}_2(x, p)$ , после некоторых операций получаем:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_2(x, p) &= \exp \left( -x \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \right) \cdot \left( \frac{1}{R_0} \right) \left[ \frac{d\bar{R}_1}{dx} - \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \bar{R}_1 \right] \times \\ &\times \left[ \bar{B}(p) \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} + \bar{F}_3(x, p) \right] - \sqrt{\frac{R_0}{\rho p}} \frac{\bar{R}_1}{R_0} \frac{d\bar{\Psi}_1(x, p)}{dx} - \\ &- \bar{\Psi}_1(x, p) \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{R_0}{\rho p}} \left[ \frac{d\bar{R}_1}{dx} - \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \bar{R}_1 \right] + \bar{F}_1(p) \left[ \frac{d\bar{R}_2}{dx} - \bar{R}_2 \sqrt{\frac{cp}{\chi}} \right]\end{aligned}$$

$$\times \exp\left(-x\sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right) - F_2(p)\left[\frac{d\bar{R}_2}{dx} - \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}\bar{R}_2\right] \times \exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}\right).$$

Тогда функция  $\bar{F}_4(x, p)$  будет:

$$\begin{aligned} \bar{F}_4(x, p) = & \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \bar{B}(p) \bar{R}_1 + \frac{1}{R_0} \int \left[ \frac{d\bar{R}_1(x, p)}{dx} \bar{F}_3(x, p) \right] dx - \\ & - \frac{\rho p}{R_0^2} \bar{B}(p) \int \bar{R}_1(x, p) dx - \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \int [\bar{R}_1(x, p) \bar{F}_3(x, p)] dx - \\ & - \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} \int \bar{R}_1(x, p) \bar{\Psi}_1'(x, p) e^{x\sqrt{\rho p/\bar{R}_0}} dx + \\ & + \frac{1}{R_0} \int \bar{R}_1(x, p) \bar{\Psi}_1(x, p) e^{x\sqrt{\rho p/\bar{R}_0}} dx - \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} \int \bar{R}_1(x, p) \bar{\Psi}_1(x, p) e^{x\sqrt{\rho p/\bar{R}_0}} dx + \\ & + \bar{F}_1(p) \int \bar{R}'_2(x, p) e^{x\left(\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} - \sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right)} dx - \bar{F}_1(p) \int \bar{R}_2(x, p) \sqrt{\frac{cp}{\chi}} e^{x\left(\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} - \sqrt{\frac{cp}{\chi}}\right)} dx - \\ & - \bar{F}_2(p) \bar{R}_2(x, p) + \bar{F}_2(p) \sqrt{\frac{\rho p}{R_0}} \int \bar{R}_2(x, p) dx. \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{B}(p)$  выражается формулой (19).

Функция  $\bar{u}_2(x, p)$  будет в виде:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x, p) = & \left\{ \frac{1}{pR_0^2} \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} \left[ \bar{R}_2(0, p) - \frac{\bar{R}_1^2(0, p)}{R_0} \right] \sigma^0 \bar{\varphi} + \right. \\ & + \frac{\bar{B}(p)}{R_0} \bar{R}_1 + \frac{\bar{J}_3(0, p)}{R_0} \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} - \frac{\bar{J}_4(0, p)}{R_0} - \frac{\bar{J}_5(0, p)}{\rho p} + \\ & + \frac{\bar{J}_6(0, p)}{R_0} \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} - \frac{\bar{J}_7(0, p)}{R_0} + \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} \times \\ & \times \left[ \bar{F}_1(p) \bar{J}_8(0, p) - \bar{F}(p) \bar{J}_9(0, p) \sqrt{\frac{cp}{\chi_1}} \right] - \bar{F}_2(p) [\bar{R}_2(0, p) + \bar{J}_{10}(0, p)] - \\ & \left. - \bar{F}'_4(0, p) \sqrt{\frac{\bar{R}_0}{\rho p}} \bar{F}'_4(x, p) \right\} \times \exp\left(-x\sqrt{\frac{\rho p}{R_0}}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

где обозначены:

$$\bar{J}_3(0, p) = \left[ \int \bar{R}'(s, p) \bar{F}_3(s, p) ds \right]_{s=0};$$

$$\begin{aligned}
\bar{J}_4(0, p) &= \left[ \int \bar{R}_1(s, p) \bar{F}_3(s, p) ds \right]_{s=0}; \\
\bar{J}_5(0, p) &= \left[ \int \bar{R}_1(s, p) \bar{\Psi}'(s, p) e^{x\sqrt{\rho p / \bar{R}_0}} ds_1 \right]_{s=0}; \\
\bar{J}_6(0, p) &= \left[ \int \bar{R}_1(s, p) \bar{\Psi}(s, p) e^{x\sqrt{\rho p / \bar{R}_0}} ds_1 \right]_{s=0}; \\
\bar{J}_7(0, p) &= \left[ \int \bar{R}'(s, p) \bar{\Psi}_1(s, p) e^{x\sqrt{\rho p / \bar{R}_0}} ds_1 \right]_{s=0}; \\
\bar{J}_8(0, p) &= \left[ \int \bar{R}'_2(s, p) \exp\left(s\left(\sqrt{\rho p / \bar{R}_0} - \sqrt{cp / \chi}\right)\right) ds \right]_{s=0}; \\
\bar{J}_9(0, p) &= \left[ \int \bar{R}_2(s, p) \exp\left(s\left(\sqrt{\rho p / \bar{R}_0} - \sqrt{cp / \chi}\right)\right) ds \right]_{s=0}; \\
\bar{J}_{10}(0, p) &= \left[ \int \bar{R}_2(s, p) ds \right]_{s=0}.
\end{aligned}$$

Таким образом, окончательное решение поставленной задачи приведено к вычислению обратных преобразований Лапласа функций (16), (18) и (20).

Оригиналом выражения (16) является

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= \alpha A \sqrt{c\chi} \phi(t) \cdot R_0(t) \cdot L_1(t) \cdot (1/\pi t) \exp\left(-\frac{cx^2}{4\chi t}\right) - \\
&\quad - \left[ \sigma^0 \phi(t) \cdot \dot{\Pi}_0(t) + \alpha A \rho c \phi(t) \cdot L_1(t) \right] \cdot L_2(x, t). \quad (21)
\end{aligned}$$

где  $\Pi_0(t) = (\rho \bar{R}_0)^{-1}$  является нулевым приближением, звездочка означает обычную свертку функций:

$$f(t) \cdot g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau,$$

а через  $L_1(t)$  и  $L_2(x, t)$  обозначены

$$L_1(x, t) \doteq \frac{1}{\rho\chi - c\bar{R}_0}; \quad L_2(x, t) \doteq \int_x^\infty \dot{W}\left(t, \frac{\tau}{c_0}\right) d\tau,$$

где точкой сверху обозначена производная по времени

$$\begin{aligned}
W\left(t, \frac{x}{c_0}\right) &= \delta\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \frac{\varepsilon x}{2c_0} M_1\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \dots \\
&+ \dots + \frac{\varepsilon^n}{2^{2n} n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)!}{k!(n-k-1)!} \times \left(\frac{2x}{c_0}\right)^{k+1} M_N^{(k)}\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \dots; \\
M_0(t) &= \delta(t); \quad M_1(t) = E_0 \Pi(t) - k(t); \quad M_2(t) = M_1(t) \cdot M_0(t)
\end{aligned}$$

$$M_n(t) = M_1(t) \cdot M_{n-1}(t).$$

Восстановление оригинала  $L_1(t)$  не вызывает затруднений. Представляя  $R_0(p)$  в виде:

$$\bar{R}_0(p) = R_0(0)(1 - \varepsilon \bar{\Gamma}_0),$$

где  $\varepsilon > 0$  – некоторый малый параметр, а  $|\bar{\Gamma}_0(p)| < 1$  и учитывая, что при больших  $|p|$ ,

$$|\varepsilon c R_0(0) \bar{\Gamma}_0(p) [\rho \chi p - c \bar{R}_0(0)]^{-1}| < 1$$

находим

$$L_1(t) = \left[ \frac{\delta(t)}{\rho \chi} + \frac{c R_0(0)}{\rho^2 \chi^2} e^{-\frac{c R_0(0)}{\rho \chi} H(t)} \right] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\varepsilon c R_0(0)}{\rho \chi} \right)^n A_n(t),$$

где

$$A_0(t) = \delta(t); \quad A_1(t) = \Gamma(t) \cdot \exp(-t R_0(0) c / \rho \chi); \\ A_n(t) = A_1(t) \cdot A_{n-1}(t).$$

Нахождение оригинала функций  $u_1(x, p)$  и  $\bar{u}_2(x, p)$  вычисляются аналогично и не представляет трудности.

Рассмотрим пример определения функций  $\omega_1(x, t)$  и  $R_i(x, t)$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) когда

$$\phi(t) = \delta(t); \quad R(t) = B \exp(-lt),$$

где  $B$  и  $l$  – постоянные. Тогда

$$\Theta(x, t) = \frac{Ax}{2t\sqrt{t}} \sqrt{\frac{c}{\chi\pi}} e^{-\frac{cx^2}{4\chi t}} \quad \text{и} \quad \Theta_0 = \frac{A}{2} \sqrt{\frac{c}{\chi\pi}}$$

В формулах (10), (11) вместо  $\Theta_1(t)$  подставляя  $\Theta_0$ , легко находим

$$\omega_0(t) = A_0 t; \quad A_0 = \exp[(b_0 / T_0)(1 - T_0 / (T_0 + \Theta_0))]; \\ \omega_1(x, t) = -\frac{A_0 \Theta_0 b_0 t}{\lambda(T_0 + \Theta_0)^2} \left[ \frac{x}{t} \sqrt{\frac{c}{\chi\pi}} \left( \frac{cx^2}{4\chi t} \right)^{-3/2} \times \Gamma\left( \frac{3}{2}, \frac{cx^2}{4\chi t} \right) - 1 \right]; \\ \omega_2(x, t) = -\frac{A_0 \Theta_0 b_0}{\lambda^2(T_0 + \Theta_0)^3} \left( \frac{b_0}{2(T_0 + \Theta_0)} - 1 \right) \times \\ \times \left[ \Theta_0 t - \frac{8\chi T_0}{\sqrt{\pi} cx^2} \Gamma\left( 2, \frac{cx^2}{4\chi t} \right) \times \frac{\chi T_0^2}{c \Theta_0 x^2 \pi} \Gamma\left( 2, \frac{cx^2}{4\chi t} \right) \right]; \\ R_0(t) = R(\omega_0(t)) = B \exp(-A_0 l t); \\ R_1(x, t) = -A_0 B l (\omega_1(x, t) \exp(-A l t));$$

$$R_2(x,t) = A_0 Bl \left( \frac{A_0 l}{2} \omega_1^2(x,t) - \omega_2(x,t) \right) \exp(-A_0 l t)$$

.....  
 Здесь  $\Gamma(y,z)$  – неполная гамма-функция. По схеме (7 – 9) эти функции будут

$$\begin{aligned} \omega_0(t) &= t; & \omega_1(x,t) &= \frac{4\chi T_0}{cx^2 \Theta_0} \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{cx^2}{4\chi t}\right); \\ \omega_2(x,t) &= \frac{4\chi T_0}{cx^2 \pi \Theta_0^2} \left(1 - \frac{T_0}{b_0}\right) \Gamma\left(2, \frac{cx^2}{4\chi t}\right); \\ R_0(t) &= B \exp(-lt); & R_1(x,t) &= Bl \exp(-lt) \omega_1(x,t); \\ R_2(x,t) &= Bl \left(\frac{l}{2} \omega_1^2(x,t) - \omega_2(x,t)\right) \exp(-lt). \end{aligned}$$

Если на торце стержня действует периодически изменяющаяся температура, то при  $\psi(t) = \sin \omega t$ , выражение (6) примет вид

$$\Theta(x,t) = A e^{-x\sqrt{c\omega/2\chi}} \sin(\omega t - x\sqrt{c\omega/2\chi}) - (A/\pi) \int_0^\infty e^{-tr} \frac{\omega}{\omega^2 + r^2} \sin x \sqrt{\frac{cr}{\chi}} dr.$$

Интеграл, входящий в правую часть этой формулы представляет собой интеграл Лапласа, только в нем  $p$  заменено на  $t$ , а  $t$  на  $r$ . При  $t \rightarrow \infty$  он стремится к нулю, следовательно, изображает затухающий с увеличением времени переходный процесс.

Таким образом, функция  $\Theta(x,t)$  определяется в основном своим первым членом, который показывает, что температура в точке  $x > 0$  колеблется так же, как температура на границе  $x = 0$ , но со сдвигом фазы на  $x\sqrt{c\omega/2\chi}$  и с амплитудой равной  $e^{-x\sqrt{c\omega/2\chi}}$ .

**Список литературы:** 1. *Ильющин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М., Наука, 1970. 2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с. 3. *Суворова Ю.В.* О применении интегральных преобразований в одномерных волновых задачах наследственной вязкоупругости / В сб: Механика деформируемых тел и конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – С. 47-56. 4. *Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г.* Определяющие соотношения для терморологически сложных вязкоупругих материалов // Актуальные проблемы современной науки. – М.: 2009. – № 2. – С. 90-96. 5. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наукова думка, 1982. – 260 с.

*Поступила в редколлегию 21.01.2010*

**В.И.БЕЛЫХ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;

**О.Ф.ПОЛИЩУК**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;

**К.Б.МЯГКОХЛЕБ**, канд. техн. наук, науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

## **МЕТОД ОЦЕНКИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ АГРЕГАТОВ И КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ КОМПЛЕКСНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВНЕСЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ДОПОЛНЕНИЙ И ВИБРОУСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ**

Запропоновано новий метод оцінки довговічності агрегатів і конструкцій, в основу якого покладена ідея внесення конструктивних доповнень в досліджуваний об'єкт для накопичення експлуатаційних пошкоджень з подальшим проведенням стендових випробувань. Результати досліджень можуть бути використані для вироблення конструкторських і технологічних рекомендацій з підвищення втомного ресурсу виробів, які експлуатуються в умовах динамічного вантаження.

A new method of assessing durability of components and structures, which is based on the idea of making structural additions to the object being studied for the accumulation of operational damage, followed by bench testing. The research results can be used to develop design and technological recommendations for improving the fatigue resource products which are operated under dynamic loading.

**Введение.** Важнейшей задачей в области энергетического машиностроения и в энергетике в целом является увеличение срока эксплуатации оборудования с сохранением основных показателей его надежности.

Большое значение при решении задачи повышения надежности и работоспособности машин, а также при прогнозировании динамической прочности и ресурса энергетического оборудования, работающего в условиях динамического нагружения (действия вибраций и ударов) имеет использование результатов стендовых испытаний и диагностики.

**Постановка проблемы.** Методы расчета долговечности при нерегулярном нагружении основываются на гипотезах накопления усталостных повреждений [1,2]. Чаще всего используется линейная гипотеза суммирования, предполагающая, что, независимо от последовательности действия циклов напряжений разных уровней, вносимые ими повреждения суммируются линейным образом и определяются в относительном виде по обычной кривой усталости

$$\sum_{i=1}^L \frac{n_i}{N_i} = P_i, \quad (1)$$

где  $n_i$  – число циклов данного уровня напряжений;  $N_i$  – разрушающее число

циклов при действии напряжений данного уровня;  $L$  – количество уровней напряжений;  $P_i$  – степень повреждения. Предполагается, что мера повреждения в момент разрушения не зависит от истории нагружения, а суммарное относительное повреждение  $P_i = 1$ .

Традиционным методом расчетной оценки долговечности агрегатов и конструкций является метод тензометрирования [3,4], в результате которого производится запись эксплуатационных вибраций в течении времени  $T_э$ , рассчитывается согласно (1) накопленное повреждение  $P_э$  и в соответствии с пропорцией  $T_э$  соответствует  $P_э$ , а общая долговечность  $T$  соответствует 1, получают

$$T = \frac{T_э}{P_э}. \quad (2)$$

Недостатком данного метода является невозможность его применения для некоторых условий эксплуатации объектов, а также малая достоверность (длительность обрабатываемых осциллограмм составляет несколько минут) при оценке агрегатов с заложенным ресурсом несколько лет.

Суть предлагаемого метода заключается в том, что в зонах возможных поломок агрегата или конструкции, где в силу эксплуатационных особенностей невозможно установить какой-либо датчик, приваривается или укрепляется болтами несколько контрольных образцов материала конструкции, осуществляют заданный цикл нагружения в условиях эксплуатации. Затем образцы изымают и в лабораторных условиях на вибростенде доводят до разрушения с заданной последовательностью. Количество контролируемых образцов выбирается в соответствии с требованиями достоверности проводимых экспериментов. По данным экспериментальных исследований строят систему из  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными и по результатам их решения делают выводы по оценке надежности контролируемого оборудования. Выбор цикла нагружения образцов в условиях эксплуатации определяется заданной достоверностью.

Рассмотрим теоретические аспекты возможности применения внесения конструктивных дополнений, в частности приварки нескольких образцов в зонах действия максимальных эксплуатационных нагрузок с последующим проведением усталостных испытаний, для оценки долговечности.

Кривую усталости материала можно с достаточной точностью описать математическим выражением, например, для стали – степенным уравнением [3]

$$\sigma^m N = \sigma_{-1}^m N_0 = A, \quad (3)$$

где  $\sigma$  – действующие напряжения;  $\sigma_{-1}$  – предел выносливости;  $N$  – число циклов до разрушения;  $N_0$  – базовое число циклов;  $m, A$  – параметры уравнения.

Согласно линейной гипотезе суммирования повреждений, сумму накопленных повреждений в опасной зоне можно представить в виде  $\sum n_i/N_i$  или, исходя из выбранного уравнения кривой усталости (3),

$$n_1 \frac{\sigma_1^m}{A} + n_2 \frac{\sigma_2^m}{A} + \dots + n_i \frac{\sigma_i^m}{A} = 1 \quad (4)$$

в месте первоначальной усталостной поломки.

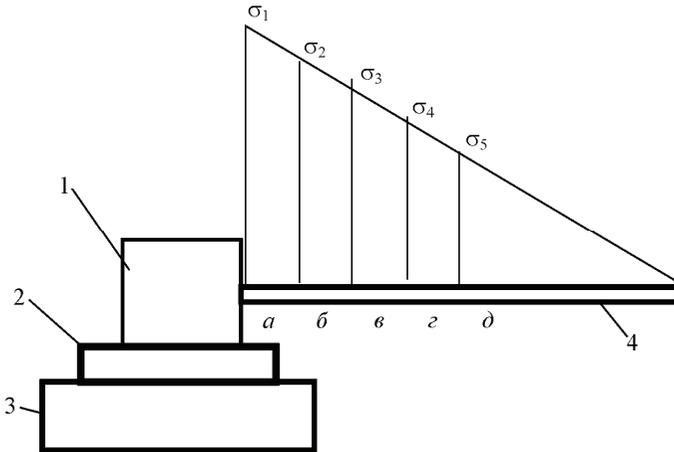


Схема нагружения образца:

1 – крепление; 2 – Подвижная платформа вибростенда; 3 – вибростенд; 4 – образец,  $a, b, v, z, d$  – точки по длине образца, соответствующие напряжениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$

Согласно приведенной выше сути предложенного метода внесение конструктивных дополнений осуществляется привариванием или крепежом болтами несколько контрольных образцов из материала конструкции, в зоне максимальных напряжений, определяемой, например, расчетным путем или другими доступными методами, а затем осуществляют заданный цикл нагружения образцов в условиях эксплуатации.

Поскольку в выражении (4)  $\Delta\sigma$  выбирается самими исследователями, то в данном случае предлагается привязать его к длине образца как показано на рисунке. Здесь рассматривается случай построения системы уравнений для определения значений  $n_i$  при  $i = 5$ .

После извлечения образцов из условий эксплуатации, первый образец закрепляют на вибростенде в точке  $a$  и при  $\sigma_{a1}$  за время  $T_{a1}$  доводят до разрушения. Для этого случая выражение (4) примет вид

$$n_{11} \frac{\sigma_1^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_2^m}{A} + \dots + n_{51} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{a1} \frac{\sigma_{a1}^m}{A} = 1. \quad (5)$$

Значение  $n_{li}$  вычисляют исходя из времени до поломки и частоты нагружения  $f$  согласно выражения

$$n_{li} = T_{li} \cdot f. \quad (6)$$

Затем закрепляют второй образец в точке  $b$  и при  $\sigma_{b1}$  за время  $T_{b2}$  дово-

дят до разрушения. Для этого случая выражение (4) примет вид

$$n_{11} \frac{\sigma_2^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_3^m}{A} + \dots + n_{51} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\lambda 2} \frac{\sigma_{\lambda 1}^m}{A} = 1. \quad (7)$$

Затем закрепляют третий образец в точке  $\nu$  и при  $\sigma_{\lambda 1}$  за время  $T_{\lambda 3}$  доводят до разрушения. Для этого случая выражение (4) примет вид

$$n_{11} \frac{\sigma_3^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_4^m}{A} + n_{31} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\lambda 3} \frac{\sigma_{\lambda 1}^m}{A} = 1. \quad (8)$$

Затем закрепляют четвертый образец в точке  $\zeta$  и при  $\sigma_{\lambda 1}$  за время  $T_{\lambda 4}$  доводят до разрушения. Для этого случая выражение (4) примет вид

$$n_{11} \frac{\sigma_4^m}{A} + n_{21} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\lambda 4} \frac{\sigma_{\lambda 1}^m}{A} = 1. \quad (9)$$

Затем закрепляют пятый образец в точке  $\delta$  и при  $\sigma_{\lambda 1}$  за время  $T_{\lambda 5}$  доводят до разрушения. Для этого случая выражение (4) примет вид

$$n_{11} \frac{\sigma_5^m}{A} + n_{\lambda 5} \frac{\sigma_{\lambda 1}^m}{A} = 1. \quad (10)$$

Уравнения (5), (7) - (10) можно объединить в систему уравнений, из которой определяются  $n_{ji}$ , а затем для них сформировать уравнение вида (1)

$$\frac{n_{11}}{N_{11}} + \frac{n_{21}}{N_{21}} + \frac{n_{31}}{N_{31}} + \frac{n_{41}}{N_{41}} + \frac{n_{51}}{N_{51}} = P_9, \quad (11)$$

что соответствует накопленному повреждению исследуемого объекта за время  $T_9$  (то есть за время, когда образцы были жестко связаны с объектом).

Подставляя значения  $T_9$  и  $P_9$  из (11) в выражение (2) получаем общую долговечность исследуемого объекта.

**Выводы.** Предложенный в работе метод оценки долговечности агрегатов и конструкций может быть использован в случае наличия агрессивных сред и дает более достоверную информацию по сравнению с тензометрированием.

**Список литературы:** 1. Кузьменко В.А., Васинюк И.М., Круг Б.З. Многоцикловая усталость при переменных амплитудах нагружения. – Киев: Наукова думка, 1986. – 284 с. 2. Божко А.Е., Федоров А.И., Ляшенко В.И. Циклическая прочность и долговечность стальных сварных соединений осевых вентиляторов. – Проблемы машиностроения. – 1992 г. Вып. 37 – С. 27 – 32. 3. Божко А.Е., Бельых В.И., Федоров А.И., Ляшенко В.И. Оценка влияния конструктивных и технологических изменений на циклическую прочность элементов конструкций. – Проблемы машиностроения. – 2000. – Т. 3, № 1-2. – С. 37 – 41. 4. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с.

*Поступила в редколлегию 13.09.2010*

**С.В.БОНДАРЬ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **АНАЛИЗ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА, ОПИРАЮЩЕГОСЯ НА РАДИАЛЬНОЕ КОЛЬЦО**

Представлено результати аналізу пластичного деформування тонкостінного циліндру, що спирається на радіальне кільце. Розглянуті різні варіанти виконання профілів кільця. Задача розв'язувалась чисельно. Метода розв'язання базується на стандартних схемах методу скінчених елементів (МСЕ), реалізованих у окремому модулі програмного комплексу SPACE-T. Наведені рекомендації щодо розробки відповідної технологічної операції

Analysis results of plastic deformation of the thin-walled cylinder hinged on a radial ring are presented. Various variants of rings structures design are considered. The problem was solved numerically. The method of the decision is based on standard schemes of a finite-elements method (FEM), realized in the separate module of program complex SPACE-T. Recommendations on development of corresponding technological operation are adduced.

**Актуальность проблемы.** Развитие машиностроения на современном этапе невозможно без применения новых прогрессивных технологий. При этом материальные затраты необходимо компенсировать повышением экономичности изделий и технологии должны быть экологически чистыми. Совершенствование современного обрабатывающего производства происходит преимущественно с использованием безотходных технологий. К таким технологиям относится магнитно-импульсная штамповка (МИШ) – одно из перспективных направлений обработки. Преимущества МИШ по сравнению с традиционными методами обработки металлов давлением заключаются в отсутствии пуансона (бесконтактное воздействие на заготовку) и в возможности моделирования различных законов изменения давления в пространстве [1]. Данный факт свидетельствует о том, что МИШ с успехом может применяться в тех случаях, когда необходимо получать пластическое деформирование в зонах, размеры которых малы по сравнению с характерными размерами всей конструкции. К таким задачам может быть отнесена задача получения окружных гофров на тонкостенных цилиндрах, а также задача соединения цилиндра с радиальным кольцом. В терминологии традиционной магнитно-импульсной обработки металлов (МИОМ) подобные технологические операция классифицируются как операции «раздачи» [1]. Подобные операции основаны на способности большинства традиционных конструкционных материалов к пластическому деформированию. Таким образом анализ процессов пластического деформирования является весьма важной и актуальной задачей при разработке подобных технологических операций.

**Постановка задачи.** В работах [2-4] определены пространственно-временные зависимости магнитного давления при раздаче тонкостенной трубы на оправку, предложен метод анализа прочности и жесткости системы (рис. 1), включающей тонкостенную трубу (заготовка) и радиальные кольца (оправка). Предложенный метод базируется на схемах метода конечных элементов и позволяет решать вопросы упруго-пластического контактного взаимодействия. Решены вопросы выбора условий закрепления заготовки (предпочтительно – свободное опирание торцов), выбора пространственных распределений магнитного давления (предпочтительно – приложение давления в локальных областях контакта трубы с оправкой), определены оптимальные размеры колец-оправок, удовлетворяющие условиям технологической операции (ширина оправки не должна превышать толщину более чем в 4 раза).

Теперь для схемы представленной на рис. 1 проведем анализ пластического деформирования непосредственно в зоне контакта.

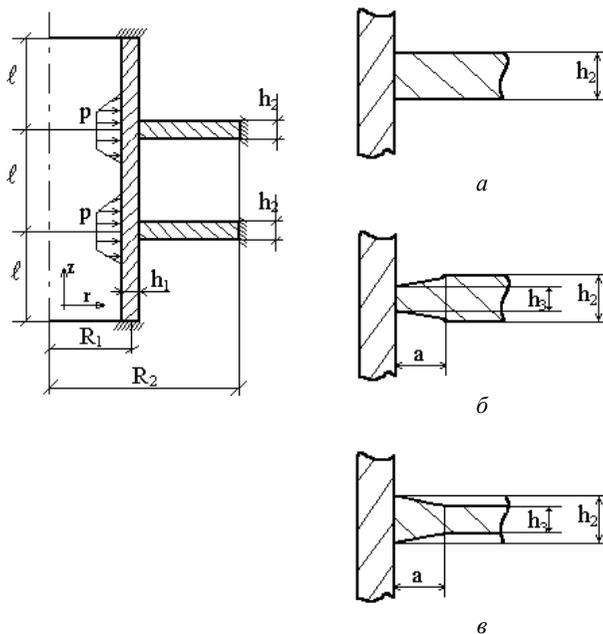


Рисунок 1 – Расчетная схема

Анализ проводился средствами программного комплекса SPACE-T [1]. Система «заготовка – матрица» рассматривалась в единой схеме, контактные явления учитывались путем введения слоя специальных контактных конечных элементов. Свойства материала заготовки моделировались в рамках теории

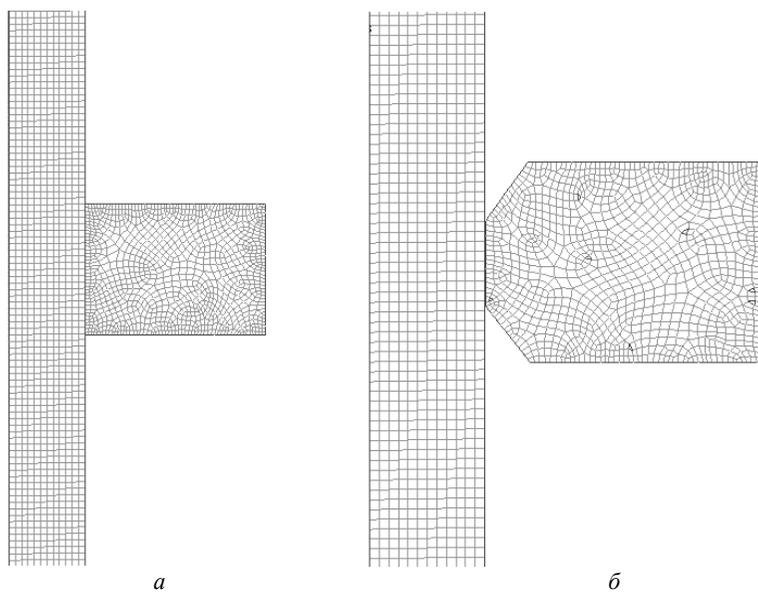


Рисунок 2 – КЭ-модели в области контакта заготовки с оправкой

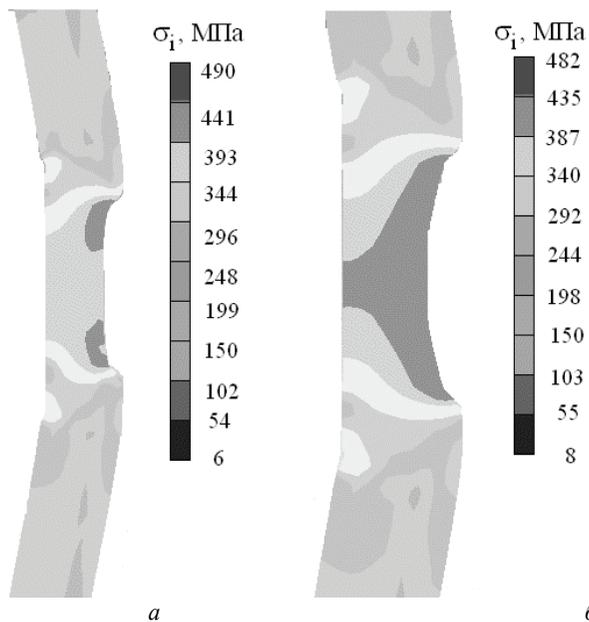


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений в заготовке для первого (а) и второго (б) вариантов профиля оправки

малых упруго-пластических деформаций. Решение производилось при помощи метода переменных параметров упругости, что позволяет учитывать нелинейное поведение материала и контактные явления в рамках единой итерационной схемы.

**Анализ полученных результатов и выводы.** Остановимся на основных результатах расчетов. Следует отметить, что пластические деформации появляются в материале заготовки при величине давления порядка 30 МПа – при этом для схемы рис. 1, б зона пластического деформирования практически совпадает с зоной контакта, для схем рис. 1, а и рис. 1, в – пластическое деформирование сконцентрировано в окрестности угловых точек. Дальнейшее увеличение величины внешнего давления до 45 – 55 МПа не привело к изменению качественного характера деформирования. Для схемы рис. 1, б характерно, что практически весь материал заготовки в зоне контакта перешел в состояние пластичности, а для схем рис. 1, а и рис. 1, в – продолжалось увеличение значений напряжений в окрестностях угловых точек. Таким образом, можно сделать следующие выводы: при величине внешнего давления порядка 55 МПа, приложенного локально в зоне контакта заготовки с матрицей, в материале заготовки наблюдаются интенсивные пластические деформации для всех трех типов профилей сечений матрицы; если целью технологической операции является получение окружного гофра, то наиболее выгодно использовать второй тип профиля (рис. 1, б); если в результате деформирования необходимо получить соединение трубы с кольцом – то предпочтительнее использовать первый (рис. 1, а) и третий (рис. 1, в) типы профилей.

**Список литературы:** 1. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: НТУ «ХПИ», – 2001. – 283 с. 2. Лавинский Д.В., Лавинский В.И. Электродинамические и механические процессы при магнитно-импульсной «раздаче» тонкостенных труб // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». - Харків: НТУ «ХПИ». - 2003. - № 11. - С. 76-81. 3. Егурнов О.Р., Лавинский Д.В. Особенности моделирования магнитно-импульсной «раздачи» тонкостенных труб // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПИ», 2003. – № 47. – С. 58-61. 4. Бондарь С.В., Лавинской Д.В. Магнитно-импульсная штамповка тонкостенных цилиндрических заготовок // Автомобильный транспорт, сб. научных трудов. – Вып. 25. – Харьков: ХНАДУ, 2009. – С. 204–207. 5. Бондарь С.В., Зубатый С.С., Киркач Б.Н., Лавинский В.И. Программный комплекс SPACE-T для решения термоупругопластических контактных задач // Динамика и прочность машин. - Харків: НТУ «ХПИ». – 2000. – № 57. – С. 24-34.

*Поступила в редколлегию 20.05.2010*

**В.А.ВАНИН**, доктор техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»;  
**А.А.ГРИГОРЬЕВ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## ВЕКТОР ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ СМЕЩЕНИЯХ УПРУГОЙ СРЕДЫ

На основі аналогії рівнянь лінійної теорії пружності і електромагнітного поля виконане узагальнення теореми Умова – Пойтінга і отримана формула для вектора переносу енергії при поперечних зсувах пружного середовища. Представлена нова модель активного механічного середовища та вивчені особливості переносу енергії в гвинтовій хвилі трансляції, що рухається по ньому.

On the basis of the analogy of the equation of the linear theory of elasticity and an electromagnetic field the Poyting's theorem generalization is executed and the formula for the vector of transferring the energy at a cross – section displacement of the elastic environment is obtained. A new model of an active mechanical environment is presented and the singularities of the transferring the energy in a spiral re-peater wave which in its turn spreads along this environment are examined.

**Введение и постановка задачи.** Публикация продолжает цикл статей [1–3], в которых исследуются новые аспекты актуальной проблемы генерирования уединенных гармонических волн переноса (винтовых фононов), движущихся в активной упругой среде. Известно [4,5], что уравнения свободных или вынужденных механических колебаний упругой среды базируются на законе Гука о пропорциональности между деформациями и напряжениями, а этот закон в современной физике выводится из уравнений Максвелла [6] для электромагнитного поля, которые имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \cdot q; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}; & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{E}(M)$ ,  $\vec{H}(M)$  – напряженности электрического и магнитного поля,  $q(M)$  – плотность электрического заряда в точке  $M$ ,  $\vec{J}(M)$  – плотность тока, созданного движением свободных зарядов;  $c$  – скорость света. В этой статье мы решим обратную задачу, и покажем, что уравнениям поперечных смещений упругой среды можно придать форму уравнений Максвелла. Это позволит открыть дорогу для применения в фундаментальных и прикладных задачах анализа сплошной упругой среды известных методов электродинамического расчета. В частности, будет получен результат, аналогичный теореме Умова – Пойтінга [7] о векторе переноса энергии в электромагнитном поле.

Многочисленные попытки дать механическую интерпретацию уравнениям Максвелла и потенциалам электромагнитного поля продолжают уже более 100 лет; с одной из современных трактовок можно, например, познакомиться в [8]. Еще во времена Пуанкаре (смотри [9]) было известно, что эта

задача имеет неединственное решение. Уравнения, полученные в данной статье, решают эту задачу частично (они не координированы с формулой для силы Лоренца), и авторы не считают, что использованная в ней интерпретация напряженностей  $\vec{E}(M)$ ,  $\vec{H}(M)$  отражает существо дела. Более того, в дальнейших публикациях цикла мы используем и подробно изучим новую модель активной механической среды, силовые поля которой также описываются уравнениями вида (1), но при другой физической трактовке напряженностей, и там сходство уравнений не будет формальным. Краткое описание модели, необходимое для понимания физической сущности решаемого примера, приводится в заключительной части статьи.

**Уравнение поперечных смещений упругой среды в потенциалах.** Запишем дифференциальное уравнение для малых упругих смещений  $\vec{u}(M, t)$  сплошной однородной (например, поликристаллической) среды [10]:

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{u} + \vec{F}, \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность среды;  $G$  – модуль сдвига;  $K$  – модуль Ламэ объемного сжатия,  $K = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu)) \cdot G$ ;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\vec{F}$  – известное поле плотностей внешних (массовых) сил.

В учебнике [10] показано, что если поле внешних сил имеет потенциалы  $U$  и  $\vec{L}$ ,

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{L} + \text{grad } U,$$

то и уравнение (2) имеет решение такого же вида:

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{A} + \text{grad } \varphi, \quad (3)$$

причем потенциалы  $\varphi(M, t)$  и  $\vec{A}(M, t)$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$a_{np}^{-2} \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = \text{div grad } \varphi + U / K, \quad (4)$$

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = \Delta \vec{A} + \vec{L} / G, \quad (5)$$

где  $a_{np} = \sqrt{K / \rho}$  – скорость звука для продольных колебаний;  $a_{non} = \sqrt{G / \rho}$  – скорость звука для поперечных колебаний;  $\Delta$  – дифференциальный оператор Лапласа,

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}.$$

В правой части равенства (3) первое слагаемое определяет поперечные смещения среды (они не сопровождаются сжимаемостью,  $\text{div rot } \vec{A} = 0$ ), второе – продольные смещения. Нас в этой статье будут интересовать только поперечные смещения (как известно, это «родная среда» для электромагнитных волн).

Заметим, что в силу известного тождества  $\text{rot grad } \zeta \equiv 0$  потенциал  $\vec{L}$  можно считать соленоидальным; тогда  $\text{div } \vec{A} = 0$ , и вместо уравнения (5) можно использовать равенство

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \bar{A} / \partial t^2 = -rot rot \bar{A} + \bar{L} / G . \quad (5 \text{ a})$$

Однако при решении задач из приложений обеспечить выполнение условия  $div \bar{L} = 0$  сложно, поэтому мы будем пользоваться равенством (5). При этом нужно учитывать, что потенциальная часть функций  $\bar{L}$  и  $\bar{A}$  приближает теорию поперечных механических колебаний к теории электромагнитного поля, но, с другой стороны, – носит чисто формальный характер.

**Факторизация уравнения поперечных смещений.** Имея целью получить факторизацию уравнения второго порядка (5) в виде системы уравнений первого порядка, вычислим от обеих его частей ротор:

$$rot[a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \bar{A} / \partial t^2] = rot grad div \bar{A} - rot rot rot \bar{A} + rot \bar{L} / G ,$$

что эквивалентно

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 (rot \bar{A}) / \partial t^2 = -rot rot rot \bar{A} + rot \bar{L} / G , \quad (6)$$

и обозначим

$$\bar{u}_{non} = rot \bar{A} ; \quad \bar{F}_{non} = rot \bar{L} .$$

В результате равенство (6) примет следующий вид:

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \bar{u}_{non} / \partial t^2 = -rot rot \bar{u}_{non} + \bar{F}_{non} / G . \quad (7)$$

В этом равенстве величина  $\bar{u}_{non}$  имеет размерность и физический смысл смещения точки среды, а  $\bar{F}_{non}$  – это плотность внешней массовой «поперечной» силы.

Обозначим скорость смещения среды  $\bar{v}_{non} = \partial \bar{u}_{non} / \partial t$  и определим поле упругих касательных напряжений равенством

$$\bar{q}_{non} = G \cdot rot \bar{u}_{non} - \bar{L} .$$

Тогда, как это несложно проверить, система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{non}^{-1} \cdot \partial \bar{q}_{non} / \partial t &= rot (G \cdot \bar{v}_{non} / a_{non}) - a_{non}^{-1} \cdot \partial \bar{L} / \partial t \\ a_{non}^{-1} \cdot \partial (G \cdot \bar{v}_{non} / a_{non}) / \partial t &= -rot \bar{q}_{non} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

оказывается эквивалентной уравнению второго порядка (5). Кроме того, мы получаем еще два очевидных соотношения:

$$div \bar{v}_{non} = 0 ; \quad div \bar{q}_{non} = -div \bar{L} \quad \} . \quad (9)$$

Пусть в полученных равенствах величина  $-div \bar{L} / (4\pi)$  определяет «плотность зарядов»  $q$ , а величина  $(\partial \bar{L} / \partial t) / (4\pi)$  определяет «плотность токов», то есть

$$q = -div \bar{L} / (4\pi) , \quad \bar{J} = (\partial \bar{L} / \partial t) / (4\pi) .$$

Далее вектор  $\bar{q}_{non}$  будем обозначать как напряженность  $\bar{E}$  электрического

поля, а вектор  $G \cdot \vec{v}_{non} / a_{non}$ , имеющий ту же физическую размерность, что и  $\vec{E}$ , – как вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Тогда, как несложно проверить, систему равенств (8) и (9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -a_{non}^{-1} \partial \vec{H} / \partial t; & \text{div } \vec{E} = 4\pi \cdot q; \\ \text{rot } \vec{H} = a_{non}^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / a_{non}) \vec{J}; & \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Сравнивая с равенствами (1), отмечаем, что мы получили систему уравнений Максвелла. Кроме того, прямым следствием принятых обозначений является равенство

$$\text{div } \vec{J} + \partial q / \partial t = 0;$$

напомним, что в электрофизике подобное равенство – это дифференциальная формулировка **закона сохранения заряда**, а в механике аналогичную форму имеет закон сохранения массы и уравнение неразрывности сплошной среды.

Таким образом, произвольное поперечное смещение упругой среды удовлетворяет уравнениям Максвелла, в которых роль скорости света  $c$  играет скорость звука  $a_{non}$ . В завершении этого пункта заметим, что, поскольку уравнения упругости выводятся на основе теории электромагнитного поля, полученный результат не удивляет. Но физический смысл уравнений и скорость волн изменяются кардинально (величина скорости – на пять порядков).

**Динамические потенциалы поперечных смещений среды.** Как следует из проведенного вывода, поле напряжений  $\vec{H}$  является соленоидальным и имеет векторный потенциал  $\vec{A}_H = G \cdot (\partial \vec{A} / \partial t) / a_{non}$ , где векторная функция  $\vec{A}$  является решением волнового уравнения (5). Продифференцируем это уравнение по времени,

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^3 \vec{A} / \partial t^3 = \Delta (\partial \vec{A} / \partial t) + (\partial \vec{L} / \partial t) / G,$$

откуда

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A}_H / \partial t^2 = \Delta \vec{A}_H + 4\pi \cdot \vec{J} / a_{non}. \quad (11)$$

Таким образом, векторный потенциал  $\vec{A}_H$  удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (11).

Далее запишем тождество  $\vec{H} \equiv \text{rot } \vec{A}_H$  и подставим его в первое уравнение системы (10):

$$\text{rot } \vec{E} = -a_{non}^{-1} (\partial / \partial t) (\text{rot } \vec{A}_H), \text{ или } \text{rot} \left( -a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t - \vec{E} \right) = 0.$$

Следовательно, поле  $\vec{a} = -a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t - \vec{E}$  является потенциальным, и

$$-a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t - \vec{E} \equiv \text{grad } \Phi,$$

где  $\Phi(M)$  – его скалярный потенциал.

Таким образом, мы получили представление для поля напряжений  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} \equiv -grad \Phi - a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t . \quad (12)$$

Заметим, что векторный потенциал  $\vec{A}_H$  в решаемой задаче не является единственным, и его выбор можно было, например, подчинить дополнительному условию  $div \vec{A}_H = 0$ , что и делают в некоторых теориях сплошной среды. Но, решая аналогичную задачу для электромагнитного поля, Лоренц предложил другое условие калибровки потенциалов, которое теперь называют **условием Лоренца**:

$$div \vec{A}_H + a_{non}^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial t = 0 . \quad (13)$$

Покажем, что при выполнении этого условия скалярный потенциал  $\Phi(M)$  также удовлетворяет неоднородному волновому уравнению. Для этого подставим замену (12) в уравнение Максвелла  $div \vec{E} = 4\pi \cdot q$  и получим:

$$div(-grad \Phi - a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t) = 4\pi \cdot q ,$$

то есть,

$$-\Delta \Phi - a_{non}^{-1} \cdot \partial (div \vec{A}_H) / \partial t = 4\pi \cdot q , \quad \text{или,} \quad -\Delta \Phi + a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 4\pi \cdot q .$$

Итак,

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = \Delta \Phi + 4\pi \cdot q . \quad (14)$$

Покажем, что уравнения (11) и (14) не противоречат друг другу. Для этого обе части уравнения (14) умножим на коэффициент  $a_{non}^{-1}$  и продифференцируем по времени,

$$a_{non}^{-2} \partial^2 (a_{non}^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial t) / \partial t^2 = \Delta (a_{non}^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial t) + 4\pi \cdot a_{non}^{-1} \cdot \partial q / \partial t ,$$

а от обеих частей уравнения (11) вычислим дивергенцию:

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 div \vec{A}_H / \partial t^2 = \Delta div \vec{A}_H + (4\pi / c) div \vec{J} .$$

Складывая эти равенства, учтем условие Лоренца (13) и получим:

$$\partial q / \partial t + div \vec{J} = 0 ,$$

что отвечает закону сохранения заряда.

Таким образом, благодаря использованию условия Лоренца поперечные смещения среды удалось представить как колебания векторного и скалярного потенциалов. В отличие от связанных колебаний упругой среды, где имелись две скорости звука – для продольных и для поперечных потенциалов, динамические потенциалы  $\vec{A}_H$  и  $\Phi$  распространяются по среде с одинаковой скоростью  $a_{non}$ .

**Вектор энергии.** В той области, где «заряды» и «токи» отсутствуют, уравнения для динамических потенциалов становятся однородными,

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = \Delta \Phi , \quad a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A}_H / \partial t^2 = \Delta \vec{A}_H , \quad (15)$$

а система уравнений Максвелла (10) принимает вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -a_{non}^{-1} \partial \vec{H} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = a_{non}^{-1} \partial \vec{E} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

и соответствует известным уравнениям электромагнитного поля в вакууме [7].

Учтем, что напряженность  $\vec{H}$  пропорциональна скорости смещения среды,

$$\vec{H} = G \cdot \vec{v}_{non} / a_{non} = \sqrt{G \cdot \rho} \cdot \vec{v}_{non},$$

тогда система (16) примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\rho \cdot \partial \vec{v}_{non} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{v}_{non} = G^{-1} \cdot \partial \vec{E} / \partial t, & \operatorname{div} \vec{v}_{non} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, плотность  $w$  полной механической энергии поперечных смещений описывается формулой

$$w = k \cdot (\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2),$$

где  $k \cdot G^2 \cdot a_{non}^{-2} = \rho$ , то есть  $k = G^{-1}$ .

Пусть  $T$  – это некоторый объем среды, ограниченный поверхностью  $\Omega$  (рис. 1). Полная энергия  $W$  поля поперечных смещений, заполняющего этот объем, вычисляется по формуле:

$$W = G^{-1} \cdot \iiint_T (\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2) dV.$$

С течением времени эта энергия может изменяться; пусть  $P(t) = \partial W / \partial t$  обозначает мощность, протекающую в момент времени  $t$  через границу  $\Omega$ . Покажем, что указанная мощность равняется потоку вектора

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \cdot G}} [\vec{E}, \vec{H}] = [\vec{E}, \vec{v}_{non}]$$

через поверхность  $\Omega$ .

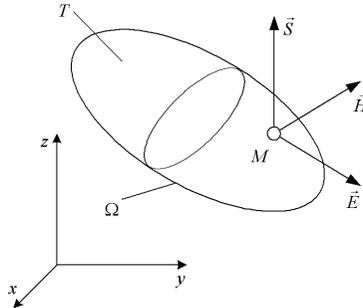


Рисунок 1

Вектор  $\vec{S}_* = [\vec{E}, \vec{H}]$  в теории электромагнитного поля называется **вектором энергии** (в научной литературе используются также названия **вектор Пойтинга** или **вектор Умова – Пойтинга**).

Для проверки высказанного утверждения вычислим дивергенцию этого вектора,

$$\operatorname{div} \vec{S}_* = \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}),$$

далее умножаем обе части первого уравнения системы (16) скалярно на вектор  $\vec{H}$ ,

$$(\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) = -a_{\text{non}}^{-1} (\vec{H}, \partial \vec{H} / \partial t)$$

третьего уравнения этой системы – умножим на вектор  $\vec{E}$ ,

$$(\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) = a_{\text{non}}^{-1} (\vec{E}, \partial \vec{E} / \partial t)$$

и полученные результаты вычтем в указанном ниже порядке:

$$\begin{aligned} (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) &= a_{\text{non}}^{-1} (\vec{E}, \partial \vec{E} / \partial t) + a_{\text{non}}^{-1} (\vec{H}, \partial \vec{H} / \partial t) = \\ &= a_{\text{non}}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2] \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{S}_* = a_{\text{non}}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2].$$

Для вычисления потока вектора энергии через поверхность  $\Omega$  воспользуемся известной формулой Гаусса – Остроградского и получим:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Omega}(\vec{S}_*) &= \iint_{\Omega} (\vec{S}_*, \vec{n}_0) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{S}_* dV = a_{\text{non}}^{-1} \cdot \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2] dV = \\ &= a_{\text{non}}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2] dV = a_{\text{non}}^{-1} \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial t} W(t) = \sqrt{\rho \cdot G} \cdot P(t). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Pi_{\Omega}(\vec{S}) = P(t)$ , что и требовалось показать. Аналогичное утверждение в электродинамике называют **теоремой Умова – Пойтинга** [9].

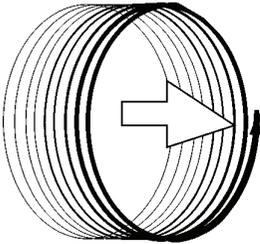


Рисунок 2

**Винтовая волна трансляции в активной механической среде.** Применим эту теорию для исследования винтовых фононов. Считается (смотри работу [3]), что фонон (механический аналог фотона) объединяет устойчивый волновой пакет, движущийся по траектории винтовой формы, и плоскую волну крутильной деформации, распространяющуюся внутри образующейся винтовой цилиндрической оболочки (рис. 2).

Движение фонона происходит по материалу, испытывавшему в прошлом упруго – пластическую деформацию (смотри, например, работу [11]) и находящемуся в точке  $M_0$  (рис. 3) гистерезисной кривой. На винтовой траектории материал находится в состоянии  $M_1$ , отвечающем тому же давлению  $p_0$ , но

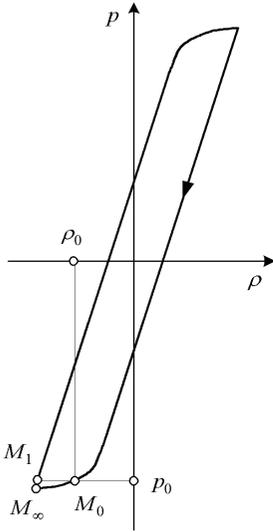


Рисунок 3

меньшей плотности  $\rho$ ,  $\rho_1 < \rho_0$ . Переход материала из состояния  $M_1$  в состояние  $M_1$  происходит на головном участке волны; при этом количество выделенной кинетической энергии на участке  $M_\infty \rightarrow M_1$  превосходит ее затраты на совершение перехода  $M_0 \rightarrow M_\infty$ , поэтому описываемая **механическая среда является активной**. И, что особенно важно для понимания природы рассматриваемого волнового тандема, после указанного перехода материал приобретает значительно большую жесткость, что отражено в изменении наклона гистерезисной кривой. Поэтому внешняя и внутренняя волна тандема являются слабо связанными.

Для описания движения такого объекта можно использовать модели цилиндрического винтового стержня (описанные, например, в [1,2]), сопряженные с известными трехмерными моделями колебаний упругой среды (в статье [3] были описаны их решения, обладающие цилиндрической симметрией).

Так, матричные уравнения свободных колебаний винтового стержня, приведенные в [1], оказываются нагруженными внешними силами или моментами сил  $F_x, F_y$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Omega xy + \Delta & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Fx \\ Fy \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & \Omega yx^T - \Delta \\ \Omega yx^T - \Delta & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix}, \end{aligned} \right.$$

в результате чего эти колебания становятся связанными с колебаниями среды (использованные в этих равенствах обозначения повторяют обозначения статьи [1]).

Внутренняя волна является гармонической затухающей волной трансляции, и в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  смещение среды  $\vec{u}$  описывается формулой

$$\vec{u} = \Delta u \cdot \{0; r; 0\} \cdot e^{-f \cdot (\omega t - \lambda z)} \cdot \sin(\omega t - \lambda z), \quad \omega t - \lambda z \geq 0,$$

где  $\Delta u$  – амплитудный коэффициент,  $\omega, \lambda, f$  – круговая частота, волновое число и логарифмический декремент затухания колебаний (рис. 4).

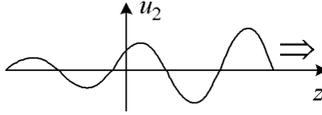


Рисунок 4

**Энергетический обмен в волне трансляции.** Вычислим следующие характеристики внутренней волны:

$$\vec{v}_{non} = \partial \vec{u} / \partial t = \Delta u \cdot \omega \cdot \{0; r; 0\} \cdot e^{-f \cdot (\omega t - \lambda z)} \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \cdot \sin(\omega t - \lambda z));$$

$$\vec{E} = G \cdot \text{rot} \vec{u}_{non} = G \cdot \Delta u \times$$

$$\times \{-\lambda \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \sin(\omega t - \lambda z)); 0; 2 \cdot \sin(\omega t - \lambda z)\} \cdot e^{-f \cdot (\omega t - \lambda z)};$$

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{v}_{non}] = G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot r \cdot e^{-2f \cdot (\omega t - \lambda z)} \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \cdot \sin(\omega t - \lambda z)) \cdot$$

$$\cdot \{2 \cdot \sin(\omega t - \lambda z); 0; \lambda \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \sin(\omega t - \lambda z))\}.$$

Следовательно, на фронте волны

$$\vec{S} = G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot \lambda \cdot r \cdot \{0, 0, 1\},$$

то есть, здесь энергия распространяется параллельно движению плоской волны, и переносимая мощность составляет

$$P_{\phi p} = (2\pi R^3 / 3) \cdot G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot \lambda = (2\pi R^3 / 3) \cdot G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega^2 / a_{non},$$

где  $R$  – радиус цилиндра.

Плотность потока энергии через боковую поверхность цилиндра описывается равенством

$$P_{\phi}(l) = 2 \cdot G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot R \cdot e^{-2f \cdot \lambda \cdot l} \cdot (\cos \lambda l - f \cdot \sin \lambda l) \cdot \sin \lambda l,$$

где  $l$  – расстояние до фронта волны (рис. 5). Вблизи от фронта эта плотность положительная, то есть здесь энергия передается от плоской волны к винтовой.

Суммарная мощность, передаваемая через боковую поверхность цилиндра, определяется формулой

$$P_{\phi} = G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot R \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} [e^{-2f \cdot \lambda \cdot z} \cdot \sin(\lambda z) \cdot (\cos(\lambda z) - f \sin(\lambda z))] dz,$$

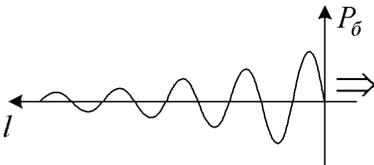


Рисунок 5

и, как показывает интегрирование, равняется нулю. Таким образом, при движении фонона происходит обратимый обмен энергией между внутренней плоской волной крутильной деформации и внешней винтовой волной, распространяющейся по цилиндрической спирали, причем на головном участке фонона внешняя волна получает энергию от внутренней.

## **Выводы.**

Выявлена формальная аналогия между уравнениями трехмерной модели линейной теории упругости и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. На основе этой аналогии получены интегральные и дифференциальные формулы, описывающие перенос энергии при поперечных смещениях сплошной упругой среды.

Выполнена краткая презентация новой модели активной механической среды, базирующейся на закономерностях упруго – пластической деформации материала. Исследованы особенности энергетического обмена в винтовой волне трансляции, распространяющейся по активной механической среде.

**Список литературы:** 1. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С. 92-104. 2. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С. 29-38. 4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.–Л.: ОНТИ, 1935. 5. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 6. *Максвелл Дж.* Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х томах. – М.: Наука, 1989. 7. *Никольский В.В.* Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1964. 8. *Сидоренков В.В.* Обобщение физических представлений о векторных потенциалах в классической электродинамике // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2006. – № 1. – С. 28-37. 9. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. 10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 11. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974.

*Поступила в редколлегию 03.09.2010*

УДК 539.3

**С. ДАРЯЗАДЕ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНАХ ИЗ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ**

Робота присвячена дослідженню концентрації напружень в пластинах із композиційних матеріалів. Ефективні пружні постійні односпрямованих композитів розраховані для склопластиків та вуглепластиків з різними коефіцієнтами наповнення. Для визначення максимальних напружень на контурі отвору використане рішення плоскої задачі для ортотропного матеріалу. Проведені розрахунки для розтягнення під різноманітними кутами до головних напрямків ортотропії.

Work is devoted to the research of stress concentration in plates made from composite materials. Effective elastic constants of the unidirectional composites are combed for glass-plastics and coal-plastics with various filling factors. For definition of the maximal stress around of an hole it is used decisions for

orthotropic flat problem. Calculations for a stretching under various corners to the main directions of orthotropic material are executed.

Тонкостенные элементы конструкции из композиционных материалов широко используются в различных отраслях современной техники. По конструктивным или технологическим требованиям такие элементы ослабляются круговыми отверстиями, вокруг которых возникает концентрация напряжений. Локальное повышение напряжений оказывает существенное влияние на прочность всей конструкции.

Для пластин из изотропных материалов коэффициент концентрации зависит от условий нагружения вдали от отверстий и их взаимное расположение [1]. Для ортотропных материалов на концентраций напряжений оказывает влияние и направление главных осе ортотропии [11].

В пластинах из композиционных материалов коэффициенты концентрации зависят также от структуры композита, что определяет актуальность исследований напряженного состояние вокруг отверстий с учетом всех факторов определяющих в итоге прочностные свойства конструкций.

В настоящей работе проводится исследование концентрации напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных волокнистых композитов в зависимости от структуры, свойств матрицы и наполнителя, условий нагружения [1-5].

Настоящие исследование включает гомогенизацию и определение эффективных упругих характеристик для эквивалентного ортотропного материала, решение задач о концентрации напряжений в ортотропных пластинах и анализ основных факторов определяющих уровень концентрации напряжений.

### **1. Эффективные упругие постоянные однонаправленного композита.**

При исследовании концентрации напряжений в композитных пластинах с отверстиями предполагается, что толщина пластины существенно меньше радиуса отверстия. Это позволяет проводить исследовании в рамках плоской задачи теории упругости.

Характерные размеры внутренней структуры композита радиус волокон и параметры представительской ячейки значительно меньше толщины пластины.

Материал пластины рассматривается как гомогенное ортотропное упругое тело.

В настоящее время существуют различные подходы к решению проблемы гомогенизации однонаправленного композита [1].

При всем их многообразии результатом являются эффективные упругие постоянные, которые связывают осредненные напряжения и деформации в ортотропном теле:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = a_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Если координатные плоскости выбранной системы координат парал-

лельны плоскостям симметрии упругих ортотропного материала, то закон Гука имеет вид [5]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

Для случае плоского напряженного состояние физические соотношения физические гомогенного материала можно записать следующий образом:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

В технических приложениях часто используются следующие обозначены:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{12}}. \quad (4)$$

**2 Определение эффективных упругих постоянных для ортотропной пластинки.** Для решения задач плоского напряженного состояние упругие свойства ортотропного тела определяются 4-я независимыми постоянными.

Для их определения использована методика решения плоских двоякопериодических задач с использованием функций комплексного переменного. Решение задач о продольно – поперечном растяжении и продольно – поперечном сдвиге позволяет получить в явном виде зависимости осредненных упругих постоянных композита от свойств материалов матрицы и волокон для различных схем армирования [3].

$$\begin{aligned} G_{12} &= G_m \frac{1-\xi + (1-\xi) \cdot G_m / G_b}{1-\xi + (1+\xi) \cdot G_m / G_b}; \\ v_{21} &= v_m - \frac{(\chi_m + 1)(v_m - v_b)\xi}{2-\xi + \chi_m \xi + (1-\xi)(\chi_b - 1) \cdot G_m / G_b}; \\ E_1 &= \xi E_b + (1-\xi)E_m + \frac{8 \cdot G_m \xi (1-\xi)(v_b - v_m)}{2-\xi + \chi_m \xi + (1-\xi)(\chi_b - 1) \cdot G_m / G_b}; \\ \frac{1}{E_2} &= \frac{(v_{21})^2}{E_1} + \frac{1}{8G} \left[ \frac{2(1-\xi)(\chi_m - 1) + (\chi_b - 1)(\chi_m - 1 + 2\xi) \cdot G_m / G_b}{2-\xi + \chi_m \xi + (1-\xi)(\chi_b - 1) \cdot G_m / G_b} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\chi_m (1-\xi) + (1+\xi)\chi_m \cdot G_m / G_b}{\chi_m + \xi + (1-\xi) \cdot G_m / G_b} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

И равенством

$$\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1};$$

где

$$\chi_m = 3 - 4\nu_m; \quad \chi_b = 3 - 4\nu_b, \quad (6)$$

где  $E_1, E_2, G, \nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  – осредненные упругие постоянные,  $E_m, G_m, \nu_m$  и  $E_b, G_b, \nu_b$  – упругие постоянные волокна и матрицы.

Все величины, относящиеся к волокну, отмечаются индексом « $b$ », к матрице – индексом « $m$ ».

Для оценки пределов изменения упругих характеристик композиционных материалов находится предельное объемное содержание волокон в представительском элементе композиционного материала для двоякопериодических структур.

Рассмотрим геометрию простейших регулярных упаковок для однонаправленных волокнистых композитов. Представительская ячейка в поперечном сечении среды ограничена векторами  $w_1$  и  $w_2 = w_1 b e^{i\alpha}$ .

Относительное объемное содержание волокон с радиусом « $a$ » будет

$$\xi = \frac{\pi \cdot a^2}{w_1^2 \cdot b \cdot \sin \alpha}. \quad (7)$$

Известно [3], что в гексагональной структуре можно поместить при плотной упаковке на 15 % больше волокон, чем при тетрагональной упаковке.

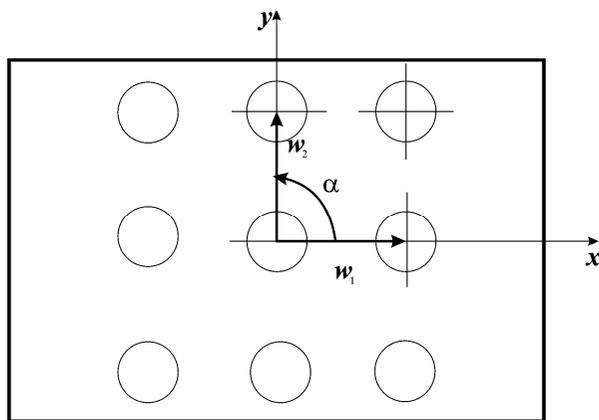


Рисунок 1 – Вид тетрагональной структуры

**3 Общие выражение для функции напряжений плоской задачи теории упругости.** Для получения аналитических решений плоских задач теории упругости эффективным является применение функций комплексного переменного [8]. Решение для ортотропного материала сводится к определению в

области «S» на плоскости «ху» [9], функции напряжений  $F(x,y)$ , удовлетворяющий дифференциальному уравнению [7]

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (8)$$

Введением обобщенных комплексных переменных  $x + \mu_k \cdot y$  решение уравнения (8) представляется в следующем виде:

$$F = F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y) + F_3(x + \bar{\mu}_1 y) + F_4(x + \bar{\mu}_2 y). \quad (9)$$

Здесь  $F_1, F_2$  – произвольные функции комплексных переменных  $x + \mu_k \cdot y$  или  $x + \bar{\mu}_k \cdot y$ .

Комплексные параметры  $\mu_k$  зависят от упругих постоянных анизотропного тела. В случае ортотропной пластинки при совмещении осей системы координат с главными направлениями упругих свойств эти параметры удовлетворяют уравнению

$$\mu^4 + \left( \frac{E_1}{G} - 2 \cdot \nu_1 \right) \cdot \mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0. \quad (10)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения (10).

В зависимости от соотношений упругих постоянных возможны следующие три случая комплексных параметров. Чаще всего для реальных композиционных материалов реализуется случай различных комплексных параметров. В таком случае функция напряжений представляется в виде

$$F = 2 \cdot \text{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad (11)$$

где  $Z_k = x + \mu_k \cdot y$  – обобщенные комплексные переменные.

Компоненты тензора напряжений выражаются через введенные функции следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \cdot \text{Re} \left[ \mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2) \right]; \\ \sigma_y &= 2 \cdot \text{Re} \left[ \Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) \right]; \\ \tau_{xy} &= -2 \cdot \text{Re} \left[ \mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где введены обозначения для производных от функций комплексных переменных

$$\Phi_1(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1}; \quad \Phi_2(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2}; \quad \Phi_1'(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1}; \quad \Phi_2'(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2}. \quad (13)$$

При заданных внешних усилиях  $X_n, Y_n$  на контурах отверстий граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Re} [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] &= \pm \int_0^s Y_n ds + c_1 = 0; \\ 2 \cdot \text{Re} [\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)] &= \pm \int_0^s X_n ds + c_2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

**4 Распределение напряжений в плоских ортотропных областях с круговым отверстием.** Рассмотрены случаи распределение напряжений в бесконечной ортотропной пластинке ослабленной круговым отверстием радиуса «а». Наибольшие напряжения возникают на контуре отверстия. Для оценки концентрации напряжений целесообразно представить результаты в полярной системе координат. Окружная координата  $\theta$  отсчитывается от оси X. Для компактного представления результатов вводятся обозначения:

$$m = \frac{E_1}{G} - 2\nu_1; \quad k = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad n = \sqrt{2k + m}, \quad (15)$$

где  $E_\theta$  – Модуль Юнга для направлений касательных к контуру отверстия

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_2}. \quad (16)$$

В случае растяжения под углом  $\psi$  к направлению оси X окружное напряжение на контуре отверстия [7], представляется в виде

$$\sigma_\theta = P \cdot f(\theta),$$

где

$$f(\theta) = \frac{E_\theta}{E_1} \left\{ - \left[ \cos^2 \psi + (k+n) \sin^2 \psi \right] k \cos^2 \theta + \left[ (1+n) \cos^2 \psi - k \sin^2 \psi \right] \sin^2 \theta - n(1+k+n) \sin \psi \cos \psi \sin \theta \cos \theta \right\}. \quad (17)$$

**5 Результаты вычислений.** Численные результаты получены для двух видов композиционных материалов – стеклопластика и углепластика.

1 Стеклопластик. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами  $E_m = 4200$  МПа;  $G_m = 1500$  Мпа и  $\nu_m = 0,4$ .

Армирующий элемент композиции имеет механические характеристики стекловолокна  $E_m = 74800$  МПа;  $G_m = 31000$  Мпа и  $\nu_m = 0,2$ .

2 Углепластик. Для армирующего элемента – углеволокна приняты следующие упругие постоянные  $E_m = 235000$  МПа;  $G_m = 90400$  Мпа и  $\nu_m = 0,3$ . Упругие характеристики связующего равны  $E_m = 3500$  МПа;  $G_m = 1320$  Мпа и  $\nu_m = 0,32$ .

Таблица 1 – характеристики стеклопластика гексагональной структуры

$\xi$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\xi_{\max} 0,92$	69,07	47,8	0,72	0,21	0,12I	9,7I
0,573	44,4	13,55	1,33	0,28	0,32I	5,7I
0,227	20	6,8	1,4	0,34	0,48I	3,58I
0,142	14	5,8	1,47	0,36	0,53I	2,92I
0,0574	8,2	4,9	1,49	0,38	0,62I	2,08I

Результаты получены для двух видов структур при растяжении на бесконечности напряжением  $P = 100$  МПа в направлениях осей симметрии упругих свойств ортотропного материала.

Таблица 2 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для стеклопластика гексагональной структуры

$\xi$	$\sigma_{\theta\max} (\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max} (\psi = 90)$
$\xi_{\max} 0,92$	1100	910
0,573	700	440
0,227	510	340
0,142	440	320
0,0574	380	310

Таблица 3 – характеристики стеклопластика тетрагональной структуры

$\xi$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\xi_{\max} 0,78$	59	24,4	1,13	0,4	0,211	7,191
0,488	38,6	11,1	1,38	0,4	0,361	5,201
0,196	18	6,4	1,47	0,4	0,51	3,351
0,1225	12,8	5,6	1,48	0,4	0,551	2,751
0,049	7,6	4,8	1,49	0,4	0,631	1,981

Таблица 4 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для стеклопластика тетрагональной структуры

$\xi$	$\sigma_{\theta\max} (\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max} (\psi = 90)$
$\xi_{\max} 0,78$	850	575
0,488	660	400
0,196	490	350
0,1225	440	310
0,049	360	305

Таблица 5 – характеристики углепластика гексагональной структуры

$\xi$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\xi_{\max} 0,92$	216	57	0,99	0,3	0,1321	14,751
0,573	136	11,3	1,27	0,3	0,341	10,311
0,227	56	5,5	1,3	0,31	0,491	6,481
0,142	36	4,78	1,3	0,31	0,531	5,171
0,0574	16,8	4,1	1,3	0,31	0,5881	3,431

Таблица 6 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для углепластика гексагональной структуры

$\xi$	$\sigma_{\theta\max} (\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max} (\psi = 90)$
$\xi_{\max}$ 0,92	1590	860
0,573	1180	410
0,227	790	320
0,142	660	305
0,0574	500	300

Таблица 7 – характеристики углепластика тетрагональной структуры

$\xi$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\xi_{\max}$ 0,78	184	23	1,19	0,3	0,23I	12,37I
0,488	116	9,2	1,28	0,3	0,37I	9,5I
0,196	48,85	5,2	1,31	0,31	0,5I	6,0I
0,1225	31,8	4,6	1,31	0,31	0,54I	4,8I
0,049	14,8	4,06	1,32	0,32	0,6I	3,2I

Таблица 8 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для углепластика тетрагональной структуры

$\xi$	$\sigma_{\theta\max} (\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max} (\psi = 90)$
$\xi_{\max}$ 0,78	1350	540
0,488	1100	380
0,196	760	320
0,1225	650	305
0,049	480	290

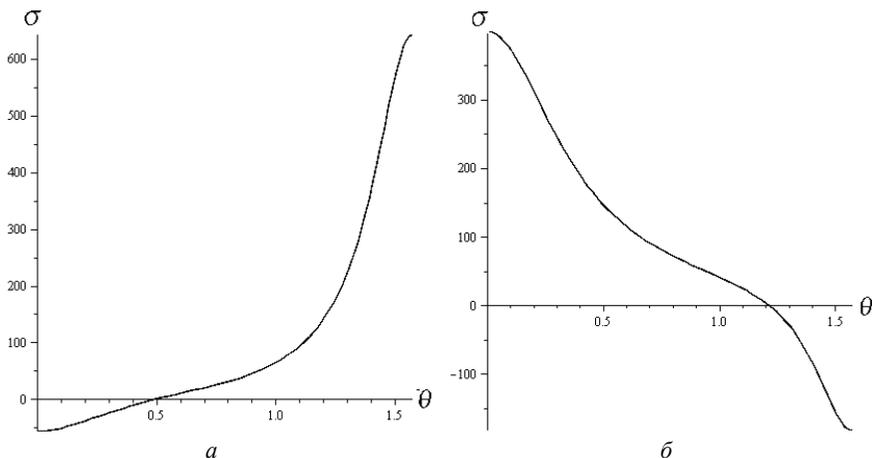


Рисунок 2 – распределение напряжений для стеклопластика гексагональной структуры (а – при  $\psi = 0$ ; б – при  $\psi = 90$ )

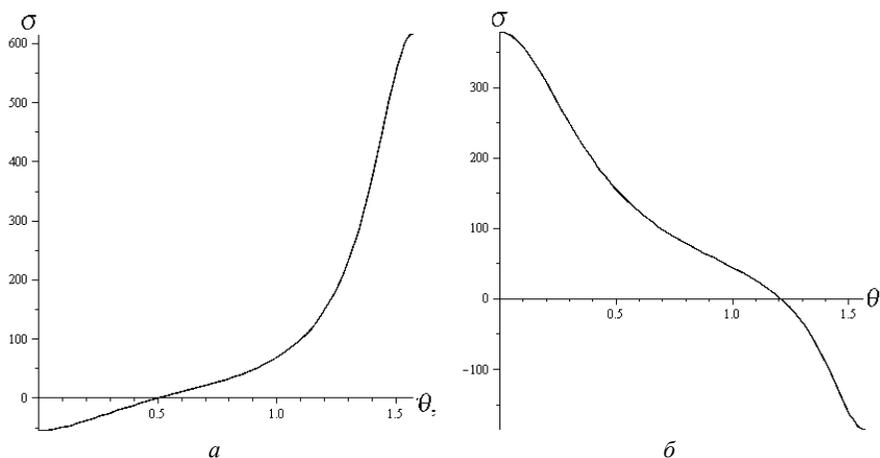


Рисунок 3 – распределение напряжений для стеклопластика тетрагональной структуры (*a* – при  $\psi = 0$ ; *b* – при  $\psi = 90$ )

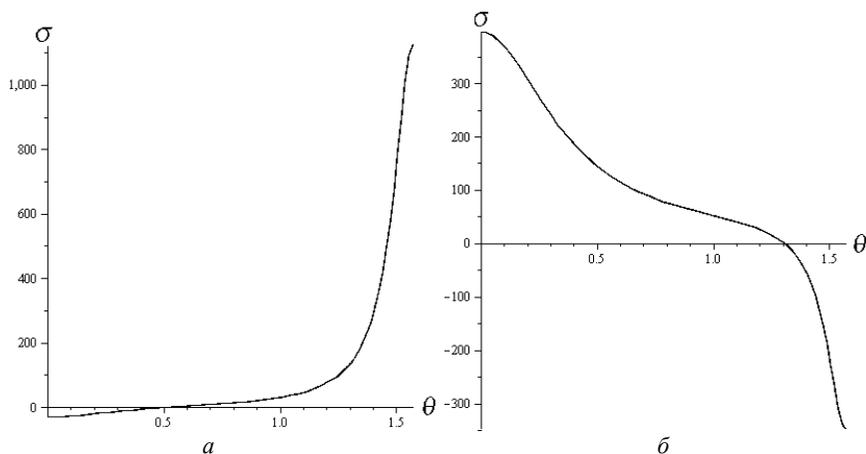


Рисунок 4 – распределение напряжений для углепластика гексагональной структуры (*a* – при  $\psi = 0$ ; *b* – при  $\psi = 90$ )

В табл. 1-8 приведены упругие характеристики, корни характеристического уравнения и максимальные напряжения на контуре отверстия для гексагональной и тетрагональной структур при различных значениях относительного объемного содержания волокон.

Распределение окружных напряжений на контуре отверстия показано на рис. 2-5 для относительного объемного содержания волокон гексагональной  $\zeta = 0,573$  и тетрагональной структур  $\zeta = 0,488$ .

Для проверки достоверности результатов решения по изложенной мето-

дике выполнен расчет по методу конечных элементов с помощью программного комплекса ANSYS[9].

Использован конечный элемент Plane 2, который содержит 6 узлов и две степени свободы в каждом узле (перемещения вдоль осей  $x$ ,  $y$ ). В силу симметрии задачи вычисления проведены для четверти пластины (рис. 6).

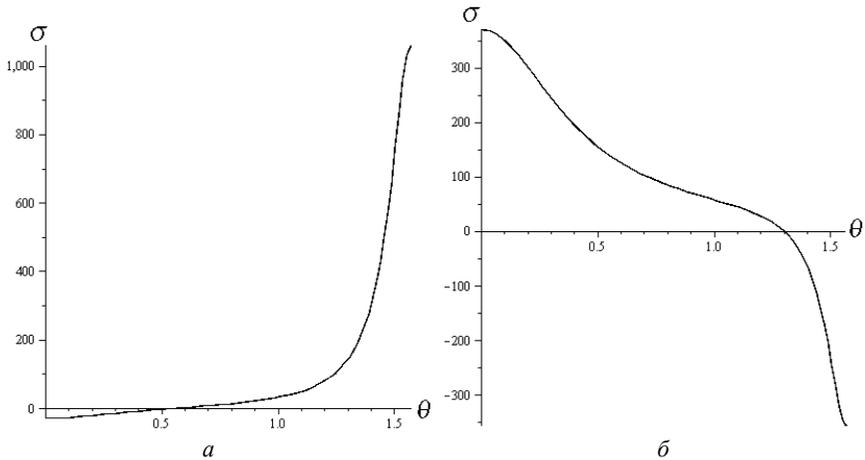


Рисунок 5 – распределение напряжений для углепластика тетрагональной структуры ( $a$  – при  $\psi = 0$ ;  $b$  – при  $\psi = 90$ )

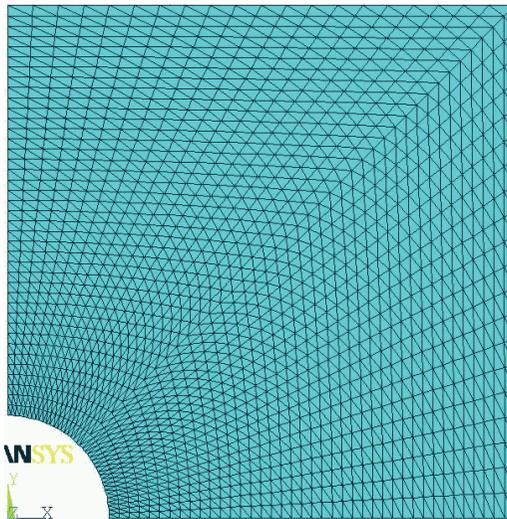


Рисунок 6 – Сетка конечных элементов

SEQV (AVG)  
DMX = .238E-07  
SMN =2.901  
SMX =650.966

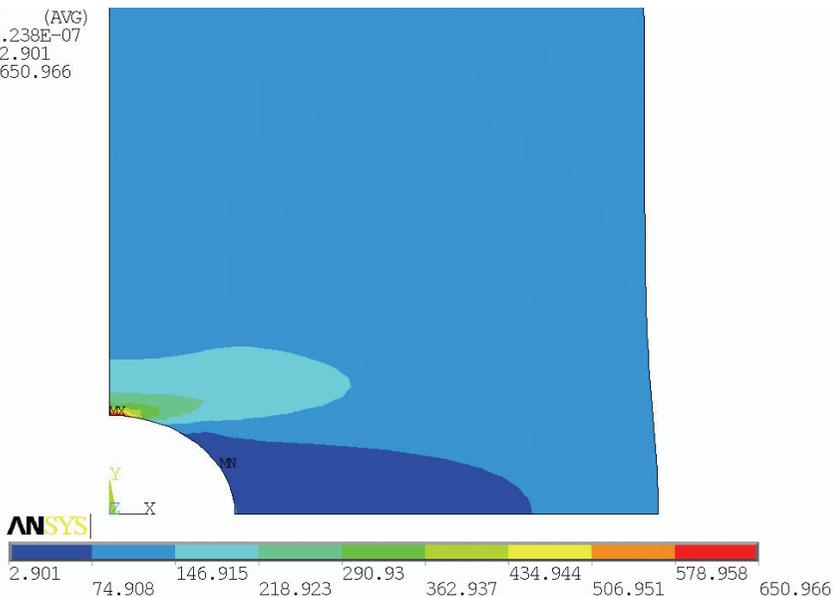


Рисунок 7 – Распределение эквивалентных напряжений для стеклопластика гексагональной структуры при  $\psi = 0$

SEQV (AVG)  
DMX = .515E-07  
SMN =6.943  
SMX =423.086

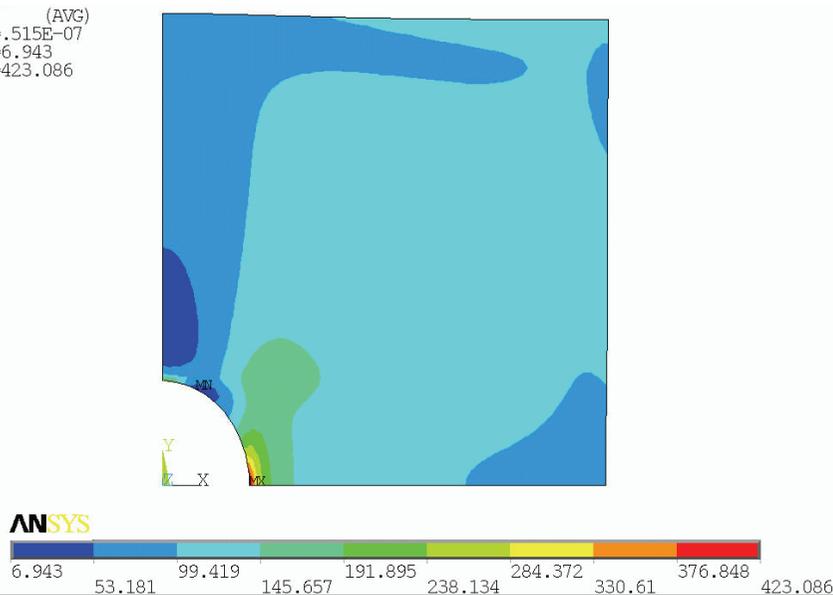


Рисунок 8 – Распределение эквивалентных напряжений для стеклопластика гексагональной структуры при  $\psi = 0$

**Вывод:** Предложенная методика позволяет эффективно рассчитывать концентрацию напряжений вокруг отверстий в пластинах из композиционных материалов. Сравнение с численными результатами, полученными методом конечных элементов показывает, что максимальное расхождение результатов по двум методикам не превышает 4 %. Это свидетельствует о достаточной для практического применения точности предложенной методики.

**Список литературы:** 1. Алфутов Н.А., Зиновьев, Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин оболочек из композиционных материалов. – М: Машиностроение, 1984. – 264 с. 2. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 3. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – К. Наукова думка, 1971. – 304 с. 4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с. 5. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с. 6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с. 7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с. 8. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с. 9. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с. 10. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с. 11. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.

*Поступила в редколлегию 13.09.2010.*

УДК 539.3

*Д.А.ЖИГИЛИЙ*, ассистент, СумГУ, Сумы

## **КОНСТРУКЦИОННАЯ ПРОЧНОСТЬ КОМБИНИРОВАННЫХ БАЛЛОНОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ**

На основі дискретно-структурної теорії багатощарових оболонок надана методика визначення несівної здатності двох типів балонів високого тиску із композиційних матеріалів. Запропонована нова конструкція комбінованого балону циліндричної форми. Балон включає внутрішню несівну склопластикову оболонку і зовнішню захисну металеву обшивку. Зазор між склопластиковою оболонкою і обшивкою заповнюється м'яким матеріалом, який дозволяє регулювати контактний тиск, який передається від склопластикової оболонки на обшивку.

Two types of composite cylindrical high-pressure vessels load-carrying capacity design procedure based on the discrete - structural theory are considered in this paper. The new design of the combined cylindrical vessel is offered. The cylinder includes an internal bearing fiberglass shell and an external protective metal cover. The vacancy between a fiberglass shell and a covering is filled with a soft material that allows to regulate contact pressure which is transferred from a fiberglass shell to a metal covering.

Вследствие ограниченности большей части доступных источников нефти мировые производители транспортных средств, всегда проявляли и проявляют интерес к исследованиям по использованию нетрадиционных моторных топлив – природный газ, биотопливо, водород и т.д. Широкое использование природного газа обусловлено тем, что его производство не требует глубокой химической переработки первичного сырья, а подготовку к применению проводят физическими методами, такими, как: сжатие или сжижение. Благодаря этому в большинстве стран мира стоимость газовых моторных топлив для потребителей ниже стоимости жидкостных. Перевод на газовое топливо не требует конструктивной переделки двигателя: достаточно поставить газобаллонное оборудование. Повышается надежность топливной системы автомобиля, так как газовая установка дублирует оригинальную бензиновую.

За последние годы на автомобильном транспорте многих государств растут показатели использования сжиженного природного газа (СПГ) как моторного топлива. Украина также заинтересована в переоборудовании автомобилей для работы на природном газе. Этому способствует развитая газотранспортная система, наличие ресурсов природного газа и шахтного метана, сеть действующих автомобильных газонаполнительных компрессорных станций. По количеству работающих на СПГ автомобилей, Украина занимает девятое место в мире и является лидером среди стран СНГ в использовании альтернативных видов топлива.

При поставках газа в стальных баллонах, широко используемых в настоящее время, объем поставляемого газа лимитирован грузоподъемностью транспортного средства. Применение легких композитных баллонов позволит увеличить объем перевозимого газа, а уменьшение стоимости баллона приводит к уменьшению стоимости транспортировки газа.

Классификацию цилиндрических баллонов высокого давления для хранения природного газа дает международный стандарт ISO 11439-2003 [1] и ГОСТ Р 51753-2001 [2]. Основное преимущество баллонов, изготовленных с применением композиционных материалов, – меньшая масса. По сравнению с цельнометаллическим удельный вес баллона из композиционных материалов снижается в 2-3 раза [3]. Однако из-за высокой стоимости композиционных материалов и трудоемкой технологии изготовления стоимость таких баллонов выше.

Для снабжения топливом одного двигателя внутреннего сгорания требуется от 2-3 баллонов для легковых автомобилей до 10 и более для грузовых автомобилей, тракторов или тепловозов. Габариты существующих транспортных средств ограничивают размеры баллонов. Кроме того, газовые баллоны заметно снижают грузоподъемность автомобилей и требуют тем больших затрат топлива на собственную перевозку, чем они массивнее. При этом они работают в условиях циклических термомеханических нагрузок.

В этой связи создание новых конструкций газовых баллонов простыми и высокотехнологичными способами из современных материалов, по-

прежнему, остается актуальной задачей. Наиболее очевидный путь совершенствования – уменьшение количества металла в конструкции баллона путем замены его альтернативными материалами с лучшими конструктивными характеристиками.

Металлопластиковые баллоны высокого давления с армирующей оболочкой по цилиндрической части – следующий шаг к решению проблемы производства экономичных, простых в изготовлении и надежных сосудов высокого давления. Данная проблема решается путем применения комбинированных баллонов, в которых герметичная металлическая оболочка объединяется с силовой оболочкой из композиционных материалов. Кроме того, в конструкцию баллона могут вводиться дополнительные слои, выполняющие защитную и другие функции. Таким образом, баллон образовывается соединением слоев с разным функциональным назначением.

В соответствии с требованиями международного стандарта ISO 11439-2003 [1] и ГОСТ Р 51753-2001 [2], расчетное давление разрушения баллонов, изготавливаемых с использованием полимерных композиционных материалов, должно определяться на основании анализа напряжений, действующих в волокне. Требование по запасу прочности баллонов возрастает в ряду: углеродное волокно, органическое волокно, стеклянное волокно. Для баллонов на основе органических и стеклянных волокон требование по запасу прочности возрастает по мере увеличения доли композита в конструкции. Только для баллонов на основе углеродных волокон требование по запасу прочности практически постоянно для всех типов конструкций, включая цельнометаллические баллоны. Расчетное давление разрушения баллонов всех типов должно быть не менее  $2,6 P$  ( $P$  – рабочее давление).

При проектировании конструкций из композиционных материалов имеет место достаточно большое количество возможных вариантов и схем армирования. Поэтому теоретическая задача определения оптимальных деформационных и прочностных свойств таких материалов при минимальных затратах на эксперимент представляется актуальной.

В композиционном материале с регулярной структурой, как правило, присутствуют повторяющиеся элементы в виде однонаправленных слоев. Пренебрегая неоднородностью структуры на микроуровне каждого слоя, можно найти эффективные характеристики отдельных слоев на макроуровне. При этом деформационная модель материала имеет квазиоднородную структуру, составленную из различных слоев.

Для оболочки вращения, которая включает в себя  $n$  слоев с соосными поверхностями вращения, в [4] получена разрешающая система уравнений в частных производных имеет вид

$$\frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} = D_o^{(k)} \bar{Y}^{(k)} + D_1^{(k)} \frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} + D_2^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)}^2 \partial \alpha_2^{(k)2}} + \bar{f}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $\bar{Y}^{(k)} = \{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}^T$ ,  $\bar{f}^{(k)} = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{14}^{(k)}\}$ ,  $D_0^{(k)}, D_1^{(k)}, D_2^{(k)}$  – квадратные матрицы 14-го порядка. В качестве основных неизвестных функций принимаются величины, которые определяют граничные условия на контуре  $l^{(k)}$ .

Кинематические и статические условия идеального контакта отдельных слоев тонкостенных элементов по лицевым сопряженным поверхностям записываются:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \phi^{(k+1)} \left( \frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \phi^{(k-1)} \left( \frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)},$$

$$(i = 1, 2); \quad (2)$$

$$2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)},$$

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+} \quad (i = 1, 2);$$

$$\sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (3)$$

Выполняя кинематические (2) и статические (3) условия контакта по лицевым сопряженным поверхностям при помощи метода штрафных функций [4], составляется полная система разрешающих уравнений (1) для решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Решение представленной задачи получается при помощи метода ортогональной прогонки С.К.Годунова [5]. Установив однозначную зависимость между краевыми усилиями на торцах  $m$ -го оболочечного элемента и краевыми перемещениями этих торцов, на основе метода перемещений составляются уравнения равновесия для каждого узлового элемента и получается система линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных перемещений узлов многослойной оболочечной конструкции. Когда перемещения узлов конструкции известно, из решения обратной задачи метода перемещений определяется напряженно-деформированное состояние всей конструкции в целом.

На основе предложенных расчетных моделей, а также разработанных методов расчета такого класса задач, на языке программирования ФОРТРАН создан пакет прикладных программ. В качестве объекта исследования выбран комбинированный газовый баллон.

Вначале была рассмотрена стеклопластиковая оболочка, которая состоит из цилиндрической части длиной  $l = 2,163$  м и радиуса  $R = 0,188$  м, а также днищ, выполненных в виде полусфер. Полезный объем баллона равен  $V = 0,2$  м<sup>3</sup>. Оболочка изготавливается методом намотки однонаправленной стеклоленты со следующими характеристиками:  $E_1 = 5,486 \cdot 10^4$  МПа;  $E_2 = 1,252 \cdot 10^4$  МПа;  $E_3 = 1,431 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu_{12} = 0,058$ ;  $\nu_{13} = 0,394$ ;  $\nu_{23} = 0,394$ ;  $G_{12} = 3,925 \cdot 10^3$  МПа;  $G_{23} = 2,683 \cdot 10^3$  МПа;  $G_{13} = 4,293 \cdot 10^3$  МПа. В целом

такой баллон включает двадцать однонаправленных слоев, двенадцать из которых наматываются в кольцевом направлении и восемь – перекрестно армированных спиральных слоев. Угол намотки спиральных слоев составляет  $\pm 24^\circ$ . Толщина слоя составляет  $\delta = 0,005$  м. При помощи методики [6] определялись технические постоянные всего пакета слоев стеклопластика как композиционного материала с одной плоскостью упругой симметрии:  $E_1 = 2,358 \cdot 10^4$  МПа;  $E_2 = 3,747 \cdot 10^4$  МПа;  $E_3 = 1,550 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu_{12} = 0,092$ ;  $\nu_{13} = 0,367$ ;  $\nu_{23} = 0,352$ ;  $G_{12} = 6,702 \cdot 10^3$  МПа;  $G_{23} = 3,756 \cdot 10^3$  МПа;  $G_{13} = 3,220 \cdot 10^3$  МПа.

Напряженное состояние точек внутренней поверхности баллона при интенсивности внутреннего давления  $q = 20$  МПа показано на рис. 1. Следует отметить, что на границе соединения сферических днищ и цилиндрической оболочки имеет место краевой эффект. Наблюдается значительное увеличение касательных напряжений поперечного сдвига  $\sigma_{13}$  в точках срединной поверхности баллона (рис. 2).

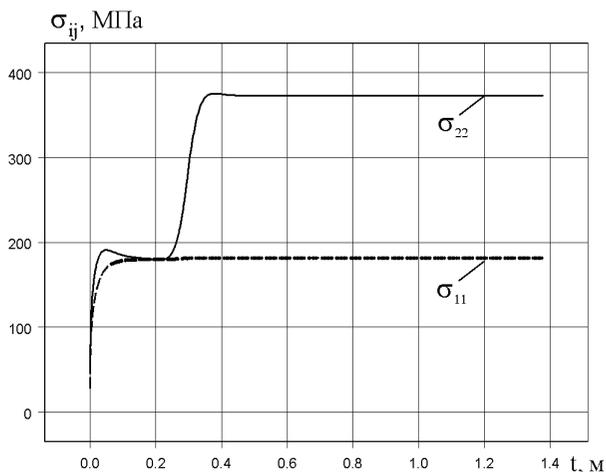


Рисунок 1 – Изменение меридиональных  $\sigma_{11}$  и окружных напряжений  $\sigma_{22}$  по длине стеклопластиковой оболочки

Для выбора оптимальной конструкции исследуется два типа баллонов из композиционных материалов (табл. 1).

Расчетная модель комбинированного баллона высокого давления представлена на рис. 3. В целом баллон состоит из двух частей: внутренняя часть – из стеклопластика, внешняя – металлическая. Комбинированные баллоны взаимно эквивалентны друг другу по массе (№ 4 – №7, табл. 1).

Толщина стеклопластиковых оболочек составляет  $h_1 = 0,0275$  м;  $h_2 = 0,033$  м для первого типоразмера и  $h_3 = 0,041$  м для второго. Технические постоянные всего пакета слоев стеклопластика как композиционного мате-

риала с одной плоскостью упругой симметрии равны:  $E_1 = 2,358 \cdot 10^4$  МПа;  $E_2 = 3,747 \cdot 10^4$  МПа;  $E_3 = 1,550 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu_{12} = 0,092$ ;  $\nu_{13} = 0,367$ ;  $\nu_{23} = 0,352$ ;  $G_{12} = 6,702 \cdot 10^3$  МПа;  $G_{23} = 3,756 \cdot 10^3$  МПа;  $G_{13} = 3,220 \cdot 10^3$  МПа.

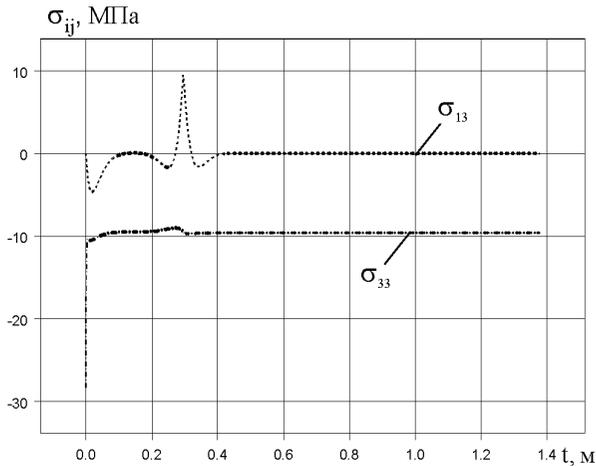


Рисунок 2 – Изменение напряжений поперечного сдвига  $\sigma_{13}$  и трансверсального обжатия  $\sigma_{33}$  по длине стеклопластиковой оболочки

Металлическая часть выполнена из дюралюминия В–95:  $E = 70000$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $\sigma_B = 500$  МПа. Задача решается в осесимметричной постановке. Баллон рассматривается как оболочка вращения.

Для исключения контакта стеклопластиковой оболочки с металлической обшивкой предусмотрен зазор, который заполняется изотропным материалом низкой плотности, например, пеновинилпластом со следующими техническими параметрами:  $E = 83$  МПа;  $\nu = 0,33$ .

При исследовании несущей способности баллона рассматривалось два этапа разрушения армированной оболочки. На первом этапе определялась величина давления, когда происходит разрушение связующего. Для этого использовался модифицированный полиномиальный критерий прочности, включающий поперечные касательные  $\sigma_{i3}$  ( $i = 1,2$ ) и напряжения  $\sigma_{33}$   $\sigma_{33}$  :

$$R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + R_{33}\sigma_{33} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + R_{3333}\sigma_{33}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + 4R_{1313}\sigma_{13}^2 + 4R_{2323}\sigma_{23}^2 + 2R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2R_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2R_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} = 1. \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения (4) определяются с использованием экспериментально установленных предельных характеристик прочности  $\sigma_{ij}^+$ ,  $\sigma_{ij}^-$  ( $i, j = 1,2,3$ ). Индекс «+» означает, что данная компонента – предельное напряжение при растяжении, индексом «-» обозначено предельное напряжение при сжатии.

Таблица 1

№ типораз- мера	Длина ци- линдри- ческой час- ти, м	Внешний радиус ци- линдра и сферы $R$ , м	Толщина оболочки из стеклопла- стика $h_C$ , м	Толщина за- зора $h_{зс}$ , м	Толщина обшивки баллона $h_{М5}$ м	Масса изде- лия, кг
1	2,163	0,188	0,0275	0	0	160
2	2,163	0,188	0,033	0	0	188
3*)	0,886	0,257	0,041	0	0	175
4	2,163	0,188	0,02	0,002	0,004	154,5
5	2,163	0,188	0,02	0,004	0,004	160
6	0,886	0,257	0,035	0,004	0,004	180
7	0,886	0,257	0,03	0,004	0,006	165

\*) – продукция ОАО КАЗАНСКОЕ ОПЫТНОЕ КОНСТРУКТОРСКОЕ БЮРО «СОЮЗ» (Сертификат соответствия требованиям ИСО 9001-2001 № 00107/RU от 19.01.04г).

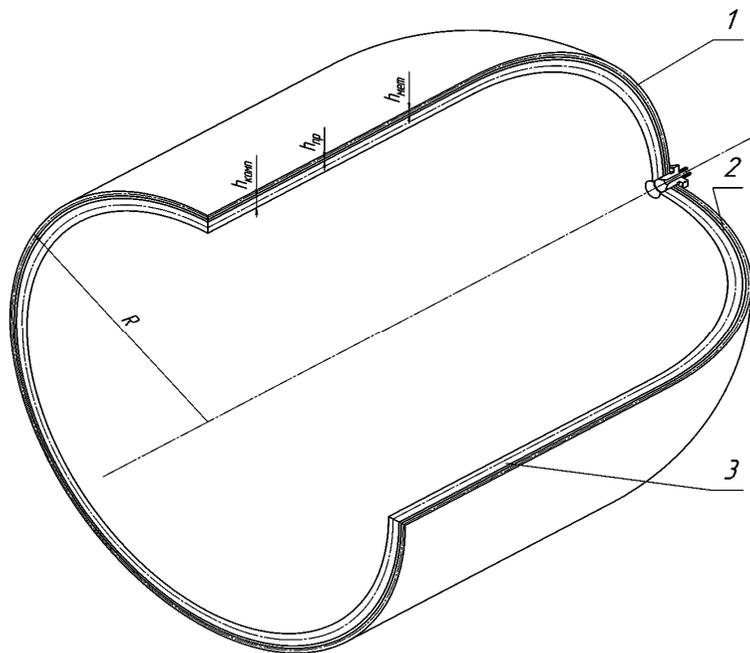


Рис. 3. Расчетная схема комбинированного баллона высокого давления:

- 1 – защитная металлическая оболочка (материал дюралюминий В-95);  
2 – регулирующая податливая прослойка; 3 – несущая стеклопластиковая оболочка

Для коэффициентов уравнения (4) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{\sigma_{11}^- - \sigma_{11}^+}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}; & R_{22} &= \frac{\sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}; & R_{33} &= \frac{\sigma_{33}^- - \sigma_{33}^+}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}; & R_{12} &= \frac{\sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}; \\
 R_{1111} &= \frac{1}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}; & R_{2222} &= \frac{1}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}; & R_{3333} &= \frac{1}{\sigma_{33}^- \sigma_{33}^+}; & 4R_{1313} &= \frac{1}{\sigma_{13}^- \sigma_{13}^+}; \\
 4R_{2323} &= \frac{1}{\sigma_{23}^- \sigma_{23}^+}; & 4R_{1212} &= \frac{1}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}; \\
 2R_{1122} &= \frac{R_{11} - R_{22}}{\sigma_{12}^-} + R_{1111} + R_{2222} + \frac{1}{(\sigma_{12}^-)^2}; \\
 2R_{1133} &= \frac{R_{11} - R_{33}}{\sigma_{13}^-} + R_{1111} + R_{3333} + \frac{1}{(\sigma_{13}^-)^2}; \\
 2R_{2233} &= \frac{R_{22} - R_{33}}{\sigma_{23}^-} + R_{2222} + R_{3333} + \frac{1}{(\sigma_{23}^-)^2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

При этом считается, что прочность материала на сдвиг не зависит от знака предельных значений касательных напряжений  $\sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+$  и поперечных касательных напряжений, то есть  $\sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-$ ,  $\sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^-$ .

Для рассматриваемой структуры стеклопластика были приняты следующие значения предельных характеристик прочности материала:  $\sigma_{11}^+ = 290$  МПа;  $\sigma_{22}^+ = 490$  МПа;  $\sigma_{11}^- = 250$  МПа;  $\sigma_{22}^- = 390$  МПа;  $\sigma_{33}^+ = 50$  МПа;  $\sigma_{33}^- = 150$  МПа;  $\sigma_{12}^+ = 110$  МПа;  $\sigma_{13}^+ = \sigma_{23}^+ = 55$  МПа. Дальнейший расчет несущей способности проводился на основе второй расчетной модели оболочки. На втором этапе фиксировалось предельное давление, при котором происходило разрушение стеклопластика в точках внутренней поверхности цилиндрической оболочки. При этом вместо (1) использовался критерий прочности для случая плоского напряженного состояния в точке.

В случае плоского напряженного состояния уравнение (1) изображает предельную поверхность (эллипсоид) в трехмерном пространстве напряжений

$$\begin{aligned}
 R_{11}\sigma_{11} + R_{22}\sigma_{22} + 2R_{12}\sigma_{12} + R_{1111}\sigma_{11}^2 + R_{2222}\sigma_{22}^2 + 4R_{1212}\sigma_{12}^2 + \\
 62R_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4R_{1112}\sigma_{11}\sigma_{12} + 4R_{2212}\sigma_{22}\sigma_{12} = 1.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для коэффициентов уравнения (6) предложены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \frac{\sigma_{11}^- - \sigma_{11}^+}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}; & R_{22} &= \frac{\sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}; & R_{12} &= \frac{\sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+}; & R_{1111} &= \frac{1}{\sigma_{11}^- \sigma_{11}^+}; \\
 R_{2222} &= \frac{1}{\sigma_{22}^- \sigma_{22}^+}; & 4R_{1212} &= \frac{1}{\sigma_{12}^- \sigma_{12}^+};
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$2R_{1122} = \frac{R_{11} - R_{22}}{\sigma_{12}^-} + R_{1111} + R_{2222} + \frac{1}{(\sigma_{12}^-)^2}$$

Следует отметить, что прочность материала не зависит от знака предельных значений касательных напряжений, то есть  $\sigma_{12}^- = \sigma_{12}^+$ . Кроме того, для ортотропного материала в осях симметрии справедливо тождество  $R_{1112} = R_{2212} = 0$ .

Расчетные значения внутреннего давления, при котором на первом этапе происходит разрушение связующего стеклопластиковой оболочки, а на втором этапе разрушение конструкции в целом, приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ типоразмера	Давление разрушения связующего стеклопластика $p_1$ , МПа	Давление разрушения волокон стеклопластика $p_2$ , МПа	Давление разрушения металлической обшивки по III теории прочности $p_{III}$ , МПа	Давление разрушения металлической обшивки по IV теории прочности $p_{IV}$ , МПа
1	27,90±0,05	58,32±0,005	-	-
2	29,45±0,05	61,93±0,005	-	-
3	28,60±0,05	64,03±0,005	-	-
4	28,10±0,05	58,70±0,005	42,50±0,05	52,00±0,05
5	27,80±0,05	55,36±0,005	54,80±0,05	58,00±0,05
6	29,10±0,05	65,85±0,005	58,05±0,05	62,50±0,05
7	28,60±0,05	62,07±0,005	58,65±0,05	62,55±0,05

Таблица 3

№ типоразмера	Осевое удлинение баллона, мм	
	при рабочем давлении 20 МПа	при давлении разрушения связующего стеклопластика $p_1$ , МПа
1	5,96262	8,33476
2	4,83020	7,12792
3	3,30364	4,72836
4	4,80960	6,77318
5	4,65378	6,48584
6	2,71664	3,95952
7	2,60558	3,73440

Варьируя жесткостью стеклопластиковой оболочки, а также, вводя мягкий наполнитель между внутренней частью и обшивкой, удастся достичь условий равнопрочной работы материала такой конструкции (комбинирован-

ный баллон). Деформативность несущей стеклопластиковой оболочки в продольном направлении устраняется достаточно жесткой вдоль оси баллона металлической защитной оболочкой.

Величины осевого удлинения рассматриваемых типов баллонов даны в табл. 3.

С увеличением интенсивности давления внутренняя стеклопластиковая оболочка (модуль упругости стеклопластика в три раза ниже модуля упругости дюралюминия) практически передает большую часть нагрузки на более жесткую внешнюю металлическую оболочку. Начало разрушения, рассматриваемого варианта комбинированного баллона, происходило в зоне краевого эффекта металлической обшивки. Теоретическое значение давления, при котором происходило разрушение металлической обшивки определялось на основе третьей (гипотеза наибольших касательных напряжений) и четвертой (гипотеза Губера-Мизеса) теориям прочности.

**Вывод.** Сравнение стеклопластиковых и комбинированных баллонов (табл. 2, 3) по их несущей способности показало, что последние имеют ряд преимуществ – они менее деформативны, более надежны в эксплуатации и выигрывают в плане теплоизоляционных свойств. Вводя мягкий наполнитель между внутренней частью и обшивкой, удается достичь условий равнопрочной работы материала такой конструкции (комбинированный баллон).

**Список литературы:** 1. Gas cylinders — High pressure cylinders for the on-board storage of natural gas as a fuel for automotive vehicles: ISO 11439-2003. – [First edition 2000-09-15]. – ISO, 2003. – 80 p. (International Standard). 2. Баллоны высокого давления для сжатого природного газа, используемого в качестве моторного топлива на автомобильных транспортных средствах. Общие технические условия: ГОСТ Р 51753-2001. – [Введен в действие 2001-05-29]. - М.: Гостстандарт России, 2001. – 20 с. (Государственный стандарт Российской Федерации). 3. Павлов Н.В. Создание авторецепиентов для хранения, транспортирования и выдачи сжатого водорода / Н.В. Павлов // Технические газы. – 2008. – № 2. – С. 43-47. 4. Верещака С.М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / С.М. Верещака – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с. 5. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи мат. наук. – 1961. – 16, № 3. – С. 171-174. 6. Верещака С.М. Упругие постоянные и обобщенные характеристики жесткости материала слоистой структуры / С.М. Верещака // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 29-40.

*Поступила в редколлегию 07.06.2010*

**С.В.КРАСНИКОВ**, канд. техн. наук, ст. наук. співр., НТУ «ХПІ»;  
**А.А.КАРПЕНКО**, студент, НТУ «ХПІ»

## **ІНТЕГРОВАНА КОМП'ЮТЕРНА СИСТЕМА ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦІЇ РОЗРАХУНКІВ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Розглядаються особливості автоматизації проведення досліджень динаміки складних машинобудівних конструкцій. Розроблено спеціалізований інтегрований програмний засіб щодо автоматизації проведення необхідних серій розрахунків. За допомогою розробленого програмного забезпечення проведено дослідження власного спектру багатокорпусної турбіни.

The problems of automation research dynamics of complex engineering designs are considered. A specialized integrated software tool to automate the necessary series of calculations are designed. Developed software for the research spectrum of turbine own vibration was used.

**Вступ.** Технічні задачі, що доводиться опрацьовувати дослідникам і інженерам, часто не мають аналітичного рішення та вимагають значних витрат на експериментальну реалізацію. У цих випадках застосовують чисельні методи, які мають багато реалізацій у програмних комплексах [1, 2]. Актуальним є подальший розвиток цих методів і їхніх програмних реалізацій для поліпшення автоматизації розрахунків і параметризації моделей з метою підвищення ефективності проведення інженерних досліджень механіки складних машинобудівних конструкцій.

**Мета роботи.** Розробка програмного засобу для автоматизації дослідження спектра власних частот складної машинобудівної конструкції при варіюванні конструктивних параметрів.

Наявним об'єктом дослідження є турбоагрегат К-500-65/3000 з 4 гнучкими корпусами циліндрів низького тиску та твердим циліндром високого тиску. Змінними параметрами є товщини основних несучих стінок гнучких корпусів.

Кожний корпус циліндрів низького тиску турбіни є складною пластинчато-стрижневою системою. Всі корпуси встановлюються на залізобетонний фундамент і мають єдиний валопровід. Докладний опис об'єкта дослідження та його скінчено-елементної моделі наведено в статті [3].

**Архітектура програмної системи.** Популярні програмні комплекси для проведення розрахунків власних коливань на основі методу скінчених елементів (ANSYS, COSMOS) не підтримують COM і OLE технології взаємодії між програмами. Основою для інтеграції прикладних додатків з подібними програмними комплексами є можливість використання вхідних і вихідних фай-

лів. Крім того, може здійснюватися збереження ряду даних у вигляді текстових і графічних файлів. Тому діаграма компонентів комплексу має звичайний вигляд системи без використання програмних інтерфейсів [4, с.71].

Відповідно діаграмі послідовність подій (алгоритм) роботи програмного комплексу реалізовано у такий спосіб:

- 1 завантаження моделі (відображення геометрії) і вихідних даних із зазначеного каталогу;
- 2 проведення модального аналізу при кожному кроці із заданою товщиною стінки корпусу й відображення заданої власної форми;
- 3 на основі отриманих результатів будуються графіки зміни власних частот від товщини, кількість яких задає користувач;
- 4 всі результати, вихідні дані, файл моделі й результату розрахунку зберігаються в зазначений користувачем каталог.

**Опис інтерфейсу.** Керуючий модуль програмного комплексу має одно-віконний інтерфейс із двома вкладками: розрахунок і графіки (рис. 1).

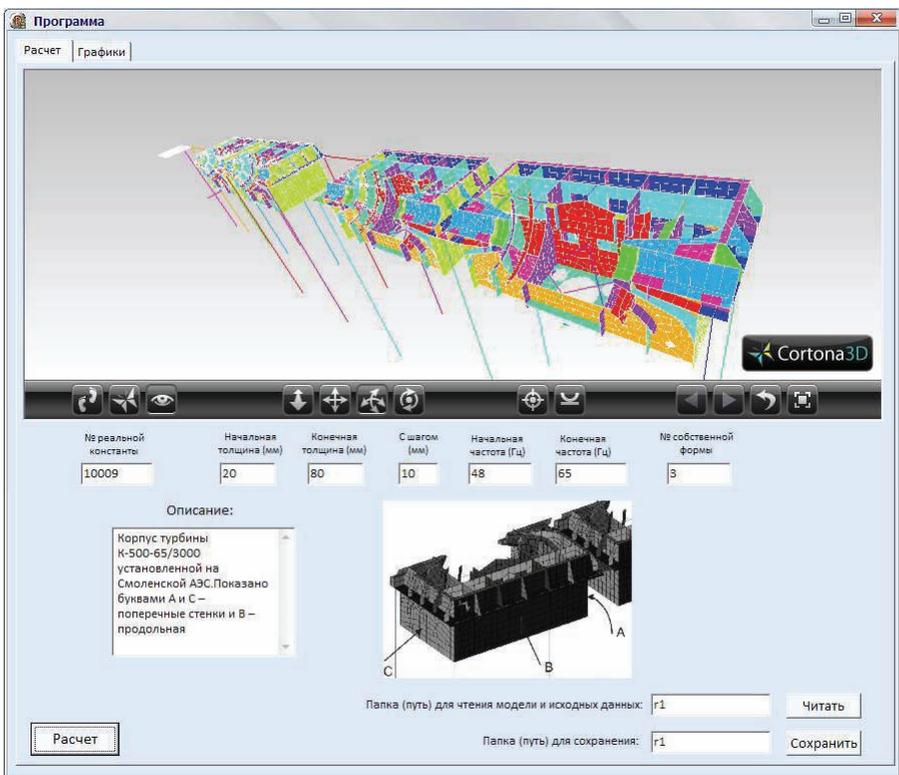


Рисунок 1 – Интерфейс програмної системи після завантаження вихідних даних

Вкладка «розрахунок» містить:

- тривимірне відображення скінченно-елементної моделі;
- параметри для проведення серії розрахунків;
- коротка інформація про модель (текстовий опис і малюнок).

Параметри для проведення серії розрахунків наступні:

- номер реальної константи;
- початкова, кінцева товщина й крок нарощування;
- діапазон частот.

Тривимірне відображення скінченно-елементної моделі реалізовано шляхом інтеграції із програмою Cortona3d. Контейнер відображає вихідну модель до розрахунків і обрану власну форму коливань після одержання результатів.

Параметри розрахунків і дані моделі об'єкта зберігаються в окремій папці. За замовчуванням у цій же папці зберігаються результати розрахунків, є можливість вказівки іншої папки для результатів.

Коротка інформація про модель містить пояснення у вигляді текстового опису та малюнка.

Друга вкладка містить вікно для відображення графіків залежностей власних частот від змінного параметра.

**Чисельні дослідження.** У якості вихідних даних необхідно мати побудовану скінченно-елементну модель [3], малюнок, тестовий опис і параметри розрахунків.

Після запуску розрахункового модуля необхідно вказати шлях для читання вихідних даних для розрахунку, моделі, текстового опису, малюнка й завантажити їх. Вікно програми з уведеної в неї параметрами має вигляд показаний на рис. 1.

Після цього при необхідності змінюємо параметри варіювання товщини стінки, саму стінку, що задається номером реальної константи. У нашій випадку варіюємо стінку «В» з номером константи 10009. Також указуємо початкову й кінцеву частоту й власну форму яка буде виводитися для начального подання. Потім проводиться розрахунок. Тривалість серії розрахунків залежить від завдання початкової й кінцевої частоти, і області варіювання. У цьому випадку із зазначеними вихідними параметрами на сучасному комп'ютері розрахунок триває близько 20 хвилин. Після розрахунку в основному вікні виводиться власна форма коливань (рис. 2.) і на другій вкладці графіки (рис. 3). Кількість виведених на графік власних частот можна змінювати.

З результатів дослідження (рис. 3) видно, що зменшення товщини обраної стінки приводить до збільшення безрезонансного діапазону біля робочої частоти 50 Гц. Це поліпшує вібраційний стан турбіни, але зменшення жорсткості може зробити протилежну дію. Для кінцевої рекомендації необхідне проведення додаткових досліджень.

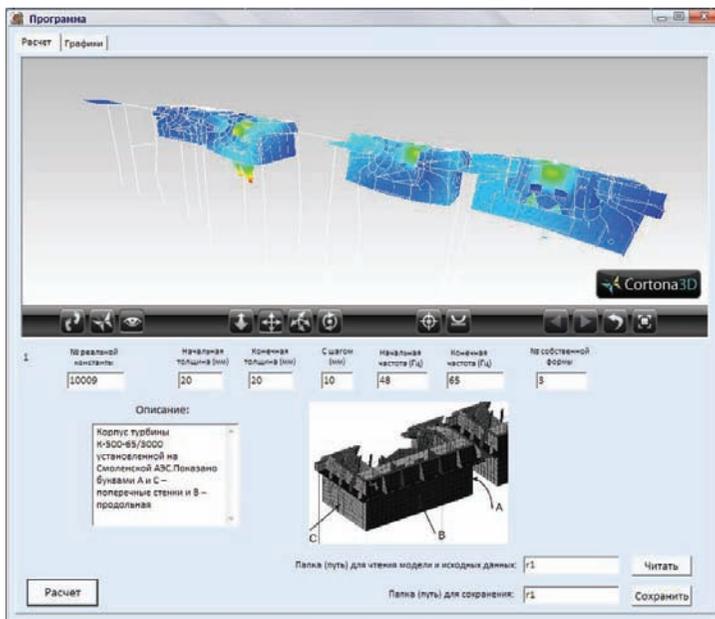


Рисунок 2 – Видяг програмної системи після проведення розрахунків

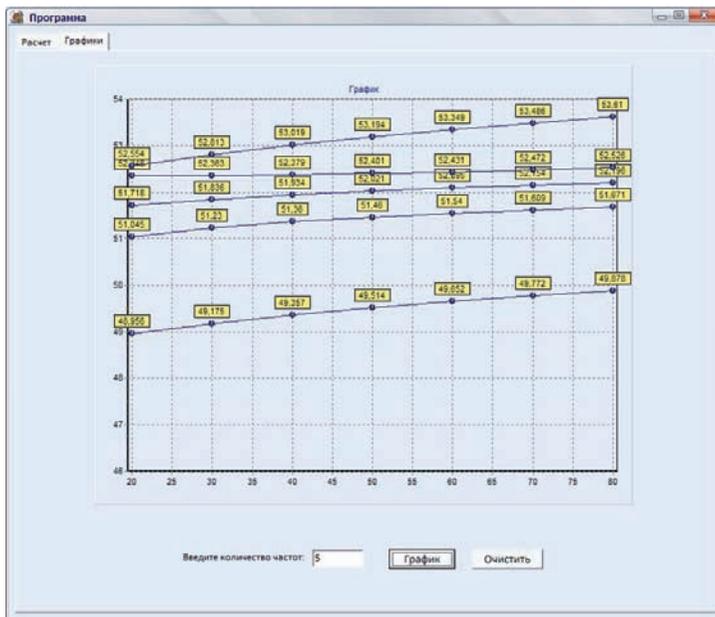


Рисунок 3 – Графіки залежності власних частот від товщини стінки

**Висновки.** Створено інтегровану програмну систему для проведення серії розрахунків власних частот і форм складної машинобудівної конструкції при варіюванні параметрів. Проведено дослідження частотного спектра корпусів турбіни при варіюванні опорної стінки. Результати розрахунків дозволяють зробити рекомендації для поліпшення її вібраційного стану.

**Список літератури:** 1. Гореткина Е. Перспективы развития САПР // PC Week/RE. – 2007. – № 35 (593). 2. Тернюк Н.Э., Гранин В. Ю., Гурова О.С., Тюрина М. Л., Булыгин А. В. Направления интеллектуализации САПР в машиностроении // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ». – 2008. – № 39. – С. 14-27. 3. Красніков С.В., Степченко О.С., Торянік А.В. Комп'ютерне моделювання багатокорпусного турбоагрегату та аналіз його вібраційних характеристик // Машинознавство. – Львів: Кінпатрі, 2009. – № 2. – С. 27-33. 4. Красніков С.В. Розробка інтегрованих програмних засобів з автоматизації розрахунків динамічних характеристик конструкцій // Вісник НТУ «ХП». – Харків: НТУ «ХП», 2009. – № 30. – С. 68-72.

*Надійшла до редколегії 12.07.2010*

УДК 539.374

**Н.Т.КУРБАНОВ**, канд. физ.-мат. наук, доцент, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан;

**У.С.АЛИЕВА**, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ**

У статті досліджується задача про коливання в'язкопружних циліндричних оболонок при малій в'язкості. Задача вирішується методом інтегрального перетворення Лапласа і рішення отримано у вигляді ряду, оригіналом перший члена якого є рішення аналогічної задачі, яке отримано методом усереднення. Отримане рішення досліджено для ядра Ржанітсіна і показано вплив подальших членів на рішення.

The paper investigates the problem of vibration of viscoelastic cylindrical shells with low viscosity. The problem is solved by the method of integral Laplace transform and the solution is obtained in a series, the original of the first member of which is to solve a similar problem, which is obtained by averaging. The resulting solution is investigated for the kernel Rzhaniitsina and shows the effect of subsequent terms of the decision.

Развитие современной техники требует широкое применение полимерных, композитных и других материалов с ярко выраженными реологическими свойствами. Изучение физико-механических свойств этих материалов и анализ их применения в промышленности показали необходимость использова-

ния в расчетах на прочность конструкции методов теории вязкоупругости.

Отсутствие единого метода пригодного для произвольных наследственных ядер является причиной того, что не были решены важные практические задачи.

В данной работе предлагается новый подход к решению указанной проблемы для малой вязкости пригодных как для решения нестационарных задач, так и задач колебаний линейных вязкоупругих систем.

Рассмотрим задачу о свободном колебании цилиндрической оболочки, который описывается уравнениями в перемещениях

$$L_k[U_1, U_2, U_3] = \rho h \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (k = \overline{1, 3}) \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $h$  – толщина оболочки,  $U_k$  – перемещение.

Зависимость между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  принимается в виде:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G \left[ \varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right]; \\ \sigma(t) &= k \left[ \theta(t) - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Gamma(t) = -\frac{1}{2G} R'(t)$ ;  $\Gamma_1(t) = -\frac{1}{k} R_1'(t)$ .

$R(t)$  и  $R_1(t)$  называются функциями сдвиговой и объемной релаксации соответственно,  $G$  – мгновенный модуль сдвига,  $K$  – мгновенный модуль объемного сжатия. Перепишем соотношения (2) в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) &= s_{ij} + \sigma = 2G \left[ \varepsilon_{ij} - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right] + \\ &+ \frac{3k-2G}{3} \left[ \theta(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right] \delta_{ij} + \\ &+ k \delta_{ij} \int_0^t [\Gamma(t-\tau) - \Gamma_1(t-\tau)] \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть

$$\int_0^t [\Gamma(t-\tau) - \Gamma_1(t-\tau)] \theta(\tau) d\tau = 0,$$

тогда

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} E^*(\varepsilon_{ij}) + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} E^*(\theta) \delta_{ij}, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, а оператор  $E^*(z)$  задается формулой

$$E^*(z) = z - \int_0^t \Gamma(t-\tau)z(\tau)d\tau. \quad (5)$$

Предполагаем, что выполняется гипотеза Кирхгофа-Лява и изотропия материала сохраняется. Тогда при  $\sigma_{33} = 0$

$$E^*(\varepsilon_{33}) = -\frac{\nu}{1-\nu} E^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (6)$$

и уравнение (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_{11}) + \nu E^*(\varepsilon_{22})]; \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_{22}) + \nu E^*(\varepsilon_{11})]; \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} E^*(\varepsilon_{12}). \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в уравнениях для моментов и перерезывающих сил, получаем:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_1) + \nu E^*(\varepsilon_2)]; \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_2) + \nu E^*(\varepsilon_1)]; \\ T_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} E^*(\omega); \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [E^*(\varkappa_1) + \nu E^*(\varkappa_2)]; \quad (7) \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [E^*(\varkappa_2) + \nu E^*(\varkappa_1)]; \quad M_{21} = M_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} E^*(\tau). \end{aligned}$$

Поэтому из уравнения (1) для вязкоупругой оболочки получаем:

$$L_k [E^*(U_1), E^*(U_2), E^*(U_3)] = \rho h \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Отметим что, к уравнению (8), описывающему уравнения колебаний вязкоупругой оболочки, следует присоединить начальные и граничные условия.

Граничные условия могут быть заданы различным образом, а начальные условия принимаем в виде:

$$U|_{t=0} = T(t)|_{t=0} = T_0; \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = T'(t)|_{t=0} = T_1' \quad (9)$$

Во многих практических задачах исследование колебаний вязкоупругих систем сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений, которые получаются из уравнений (8) либо методом разделения переменных, либо методом Бубнова-Галеркина. При этом из уравнения (8) получаем:

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = \varepsilon \lambda^2 \int_0^t \omega(t-\tau)T(\tau)d\tau, \quad (10)$$

где  $\Gamma(t) = \varepsilon \omega(t)$ ,  $\varepsilon = \Gamma(t_0)$ ,  $0 \leq \omega(t) \leq 1$ .

Отсюда видно, что решение поставленной задачи сводится к решению уравнения (10) при условии (9).

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  к уравнению (10), получаем:

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T'_0}{p^2 + \lambda^2 - \varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}. \quad (11)$$

Здесь неравенство

$$0 \leq \varepsilon \int_0^t \omega(\tau) d\tau \ll 1, \quad \varepsilon \omega(t) \geq 0,$$

установленное А.А. Ильюшиным, справедливо. Из этого неравенства следует, что

$$\left| \frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} \right| < 1$$

удовлетворяется.

При этих предположениях правую часть равенства (11) разлагаем в ряд:

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T'_0}{p^2 + \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} \right)^n. \quad (12)$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} &= \varepsilon \lambda \int_0^t \sin \lambda(t - \tau) \omega(\tau) d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda \int_0^t [\sin \lambda t \cos \lambda \tau - \cos \lambda t \sin \lambda \tau] \omega(\tau) d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_0^t \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_0^t \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau = \\ &= \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_0^{\infty} \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_0^{\infty} \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau - \\ &\quad - \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_t^{\infty} \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau + \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_t^{\infty} \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau. \end{aligned}$$

Тогда находим

$$\frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} = \varepsilon \lambda \omega_c \sin \lambda t - \varepsilon \lambda \omega_s \cos \lambda t - \varepsilon \lambda B(t).$$

В правой части последней формулы, переходя к преобразованию Лапласа, определяем

$$\frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} = \frac{\varepsilon \lambda^2 \omega_c - \varepsilon \lambda p \omega_s - \varepsilon \lambda (p^2 + \lambda^2) \bar{B}(p)}{p^2 + \lambda^2} \quad (13)$$

где

$$\omega_s = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau ; \quad \omega_c = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau ;$$

$$B(t) = \sin \lambda t \int_t^{\infty} \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \cos \lambda t \int_t^{\infty} \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau,$$

учитывая эту формулу в (12) и суммируя ряды, получаем

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T_0'}{a(p) - \varepsilon \lambda^2 \bar{b}(p)} ; \quad (14)$$

здесь:

$$\bar{a}(p) = \left( p + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda \right)^2 + \lambda^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)^2,$$

$$\bar{b}(p) = \bar{\omega}(p) + \omega_s \frac{p}{\lambda} + \omega_c + \frac{\varepsilon}{4} (\omega_s^2 + \omega_c^2).$$

Аналогично вышеприведенному, при тех же значениях параметра  $p$  и следовательно времени  $t$ , можно показать что, справедливо неравенство

$$\left| \frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right| < 1.$$

Поэтому формулу (14) можем написать в виде:

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T_0'}{\bar{a}(p)} \left[ 1 + \varepsilon \lambda^2 \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} + \varepsilon^2 \lambda^4 \frac{\bar{b}^2(p)}{\bar{a}^2(p)} + \dots \right]. \quad (15)$$

Оригинал первого члена этого ряда имеет вид:

$$T_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda t\right) \times \left[ T_0 \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t + \right. \\ \left. + \frac{T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right)} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right]. \quad (16)$$

Это есть известное решение поставленной задачи, полученное методом усреднения. Оригинал второго члена ряда (15) вычисляется с помощью свертки функции в виде:

$$T_1(t) = \varepsilon \lambda^2 T_0(t) * L^{-1} \left[ \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right], \quad (17)$$

где  $L^{-1}$  – оператор обратного преобразования Лапласа, а звездочка обозначает свертку функций

$$g(t) \cdot \varphi(t) = \int_0^t g(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

С этой целью представляем отношение  $\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}$  в виде:

$$\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} = \frac{\bar{\omega}(p)}{\bar{a}(p)} + \frac{\omega_s}{\lambda} \cdot \frac{p+d}{\bar{a}(p)}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right] &= \omega(t) \cdot \exp \left( -\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda t \right) \times \\ &\times \frac{\sin \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t}{\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)} + \frac{\omega_s}{\lambda} \exp \left( -\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda t \right) \times \\ &\times \left[ \cos \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t + \frac{d - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda}{\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)} \sin \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$d = \frac{\omega_c}{\omega_s} \lambda + \frac{\varepsilon \lambda}{4 \omega_s} (\omega_s^2 + \omega_c^2).$$

Отсюда видно, что восстановление оригиналов следующих приближений ряда (15) не представляет труда. Из уравнений (17) и (18) следует, что в силу вязкости материала с течением времени колебания затухают по экспоненциальному закону, а коэффициент затухания равен  $\left( -\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda \right)$ .

Для вычисления влияния члена (17) на решение

$$T(t) = T_0(t) + T_1(t),$$

где  $T_0(t)$  и  $T_1(t)$  определяются по формулам (16) и (18) соответственно, рассмотрим ядро Ржаницина, который имеет вид:

$$\omega(t) = \varepsilon t^{\alpha-1} \exp(\beta t),$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta$  – постоянная,  $\varepsilon$  – некоторый малый параметр. Для этого ядра из (17) находим:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \exp \left( -\frac{1}{2} \varepsilon \lambda \omega_s t \right) \times \\ &\times \left\{ \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \cos \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t + \frac{\varepsilon A_4}{2} \sin \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \exp(-\beta \tau) \tau^{\alpha-1} \sin 2\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) \tau d\tau + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t \right] \times \\
& \times \int_0^t \exp(-\beta \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau - \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t \right] \times \\
& \times \int_0^t \exp(-\beta \tau) \tau^{\alpha-1} \cos 2\lambda \left( 1 - \varepsilon \omega_c \right) \tau d\tau + \frac{t}{2} (A_2 - A_6) \cos \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t + \\
& + \left[ \frac{A_2 + A_6}{2\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)} + \frac{t}{2} (A_3 + A_5) \right] \times \sin \lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right) t \Big\}.
\end{aligned}$$

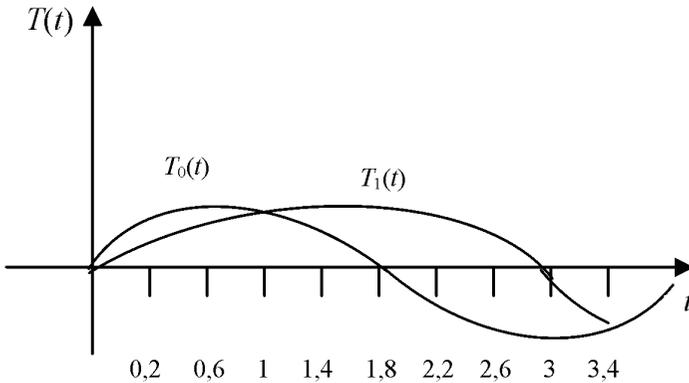
где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма функция Эйлера.

$$\omega_s = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{\alpha}{2}} \sin[\alpha \operatorname{arctg}(\lambda/\beta)];$$

$$\omega_c = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos[\alpha \operatorname{arctg}(\lambda/\beta)];$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon \lambda T_0}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c}; \quad A_2 = \varepsilon \lambda T_0 \omega_s;$$

$$A_3 = \frac{\varepsilon \omega_s T_0 \left( d - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda \right)}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c}; \quad A_4 = \frac{\varepsilon \left( T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s T_0 \right)}{\left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)^2};$$



$$A_5 = \frac{\varepsilon \omega_s \left( T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda T_0 \right)}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c}; \quad A_6 = \frac{\varepsilon \omega_s \left( T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s T_0 \right) \left( d - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \omega_s \right)}{\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)^2}.$$

Здесь для полипропилена при  $\alpha = 0,1$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,09$ ;  $\lambda = 1$ ;  $T_0 = 1$ ;  $T_0' = 0$  построены графики функций  $T_0(t)$  и  $T_1(t)$ .

Из рисунка видно, что учет последующих членов ряда улучшает точность решения, и амплитуды всех членов ряда с течением времени уменьшаются по экспоненциальному закону, а фазы сдвинуты.

**Список литературы:** 1. *Ильясов М.Х., Курбанов Н.Т.* К решению интегро-дифференциального уравнения динамических задач линейной вязкоупругости // ДАН. Азерб. ССР. – 1984. – № 5. 2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. 3. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. 4. *Ларионов Г.С.* Исследование колебаний релакстрирующих систем методом усреднения // Механика полимеров. – 1969. – № 5. – С. 806-813. 5. *Ларионов Г.С.* Решение некоторых динамических задач теории вязкоупругости методом усреднения // Механика полимеров. – 1970. – № 2. 6. *Блутштейн Ю.М., Мешков С.И., Чебан В.Г., Чекаррев А.В.* Распространение волн в вязкоупругих средах. – Кишинев, Штеница, 1977. 7. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. – М.: Изд-во МГУ, 1975.

*Поступила в редколлегию 28.01.2010*

УДК 593.3

**Д.В.ЛАВИНСКИЙ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

### **АНАЛИЗ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОПЕРАЦИИ «ЗАПОЛНЕНИЯ УГЛОВ». ЧАСТЬ 1.**

Представлено результати аналізу пружно-пластичного деформування тонкої гнutoї сталевої заготовки з ціллю «заповнення кута». Розглянуто різні варіанти закріплення заготовки. Задача розв'язувалась чисельно в рамках плоскої деформації за допомогою методу скінченних елементів. Поведінка матеріалу заготовки моделювалась в рамках теорії малих пружно-пластичних деформацій. Зроблені рекомендації про подальше удосконалення умов технологічної операції.

Results of the analysis of elastic-plastic deformation thin bended steel slug with the purpose «infill a corner» are presented. Various variants of fastening of preparation are examined. The task was solved numerically within the limits of flat deformation by means of a method of finite elements. The behavior of a material of preparation was modeled within the limits of the theory of small elastic-plastic deformations. Recommendations for the further improvement of conditions of technological operation are made.

**Актуальность проблемы.** В настоящее время процессы обработки заготовок и изготовления готовых изделий, основанные на способности материалов пластически деформироваться находят все более широкое применение в промышленности. К достоинствам данных методов можно отнести практически безотходность, экологичность и возможность получать изделия практически конечной формы и размеров. Отдельный класс технологических операций направлен на получение изделий из тонких листовых заготовок путем сгибания. Практика показывает, что в результате сгибания в зонах углов появляются скругления, размеры которых являются недопустимыми с точки зрения технологии. Задача исправления подобных скруглений в практике обработки материалов известна как задача «заполнения углов» [1]. Ключевым моментом при создании технологической операции является разработка схемы приложения давления непосредственно в угловой зоне. В работе [2] обсуждался вопрос использования магнитно-импульсного воздействия на заготовку с целью «заполнения угла». Было показано, что возможно получить силу магнитного давления, равнодействующая которой направлена по биссектрисе угла, причем воздействие происходит только в угловой зоне. Теперь рассмотрим процесс деформирования в данном случае с целью выработки общих рекомендаций для создания подобных технологических операций.

**Постановка задачи.** Необходимо исправить скругление радиуса  $R$ , возникшее в результате изгиба на угол  $\pi/2$  тонкой листовой заготовки, до допустимого радиуса  $r$ , при этом следует определить оптимальные условия закрепления заготовки. Будем считать, что заготовка является достаточно протяженной вдоль ребра угла по сравнению со сторонами угла. Тогда, предполагая, что равнодействующая прикладываемого давления перпендикулярна к ребру угла, первоначально задача может быть рассмотрена в рамках задачи плоской деформации [3]. На рис. 1 представлена расчетная схема, штриховыми линиями показана требуемая конфигурация угла. Давление прикладывается только в зоне скругления с внутренней стороны угла.

Рассмотрим различные способы закрепления заготовки:

– закрепление торцов сторон угла

$$\begin{cases} u_x(L, y) = 0; \\ u_y(L, y) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(x, L) = 0; \\ u_y(x, L) = 0. \end{cases}$$

– закрепление сторон угла полностью, в этом случае можно рассмотреть деформирование только скругленной части закрепленной на торцах

$$\begin{cases} u_x(R, y) = 0; \\ u_y(R, y) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} u_x(x, R) = 0; \\ u_y(x, R) = 0. \end{cases}$$

Задача решалась численно с использованием схемы метода конечных элементов, реализованной в виде отдельного модуля для программного ком-

плекса SPACE-T [4]. Использовался плоский четырех узловой конечный элемент с билинейной аппроксимацией перемещений. Поведение материала заготовки моделировалось в рамках теории малых упруго-пластических деформаций, при этом константы материала были преобразованы в соответствии с зависимостями характерными для плоской деформации [3].

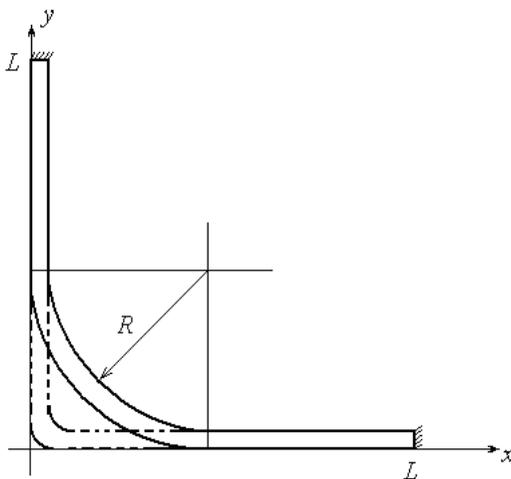


Рисунок 1 – Расчетная схема

**Анализ полученных результатов и выводы.** Задача была решена для следующих размеров заготовки: радиус первоначального скругления 3мм, толщина заготовки 1 мм, длина стороны угла 10 мм, допускаемый радиус скругления 1 мм, материал сталь Ст 10.

Следует отметить, что ни первая ни вторая схема закрепления не удовлетворяют цели технологической операции. На рис.2 приведено наложение деформированного состояния заготовки на первоначальную форму при первом варианте закрепления.

Видно, что стороны угла потеряли прямолинейную форму. Радиус скругления не уменьшился. Зоны максимальной интенсивности напряжений наблюдаются не только непосредственно в области скругления, но и в области закрепления, что может привести к возникновению пластических деформаций в областях, удаленных от скругления, что является недопустимым. Подобные же результаты наблюдаются и при втором варианте закрепления.

Таким образом, главный вывод заключается в следующем: подобная технологическая операция невозможна без использования матрицы, которая бы предавала заготовке требуемую форму и размеры. Один из вариантов подобной матрицы представлен на рис.3. Но, очевидно, в данном случае задачу

необходимо решать для заготовки и матрицы в рамках единой схемы, с учетом контактного взаимодействия между заготовкой и матрицей. По результатам решения этой задачи должны быть сформулированы рекомендации о допустимых размерах матрицы, о способах закрепления заготовки, а также определены величины давлений обеспечивающих переход материала заготовки в пластическое состояние.

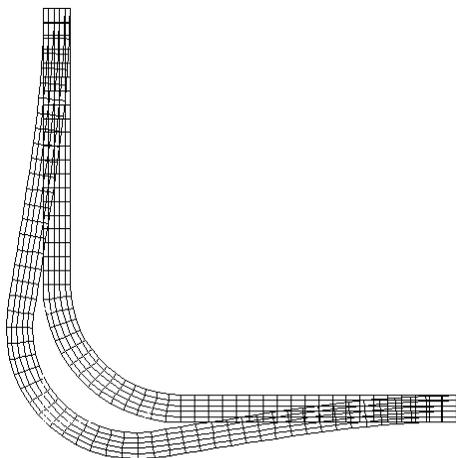


Рисунок 2 – Деформированное состояние при первом варианте закрепления

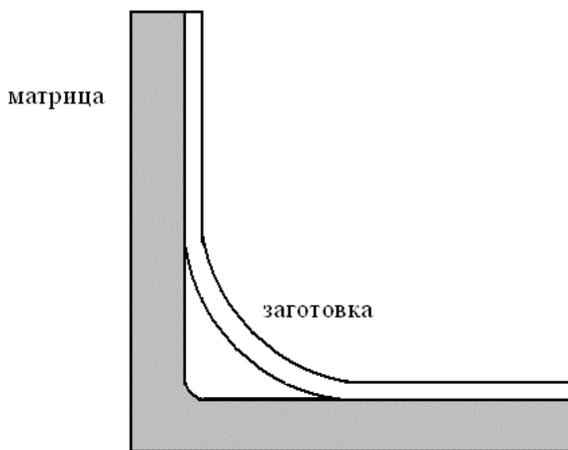


Рисунок 3 – Предлагаемая схема

**Список литературы:** 1. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2001. – 283 с. 2. Бондарь С.В., Лавинской Д.В. Определение магнитного давления в углах при деформировании листовых заготовок // Вісник

Национального технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – № 42. – С. 11-14. 3. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с. 4. *Бондарь С.В., Зубатый С.С., Киркач Б.Н., Лавинский В.И.* Программный комплекс SPACE-T для решения термоупругопластических контактных задач // Динамика и прочность машин. - Харків: НТУ «ХПІ». – 2000. – № 57. – С. 24-34.

*Поступила в редколлегию 13.05.2010*

УДК 539.4:621.6

**В.А.ЛЕВАШОВ**, канд. техн. наук, зав. отд., ОАО «Сумское  
НПО им. М.В. Фрунзе»;

**Л.В.РОЗОВА**, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

### **АВТОМАТИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАБОЧИХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТОРЦОВЫХ УПЛОТНЕНИЙ РОТОРОВ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ КОМПРЕССОРОВ**

Розроблено алгоритм та програмний комплекс розрахунку газодинамічних торцевих ущільнень роторів відцентрових компресорів, що складається з сумісного вирішення зв'язаних задач газодинаміки, теплопровідності та термопружності. Вірогідність чисельних розрахунків підтверджується експериментальними дослідженнями.

The analysis' algorithm and solution programs for the dry gas seals of the centrifugal compressors have been created. This analysis' algorithm consists of iteration solution of the interrelated heat transfer, thermoelasticity, power warping and gas dynamics tasks for the gas seals. The verification of numerical calculations has been justified by comparison with the results of experimental investigations.

Важнейшей системой компрессора, определяющей его работоспособность являются концевые уплотнения. Главным техническим направлением последних лет стала технология замены гидродинамических концевых уплотнений в центробежных компрессорах на уплотнения с газовой смазкой. В настоящее время газодинамическими торцевыми уплотнениями оснащено более 90 % компрессоров в виду их преимуществ перед масляными.

Замена гидравлических торцевых уплотнений на газодинамические в центробежных компрессорах высокого давления обуславливается повышением экономичности эксплуатации компрессора за счет уменьшения утечек газа, потерь мощности на трение в уплотнительных узлах, отказа от достаточно дорогостоящей маслосистемы для уплотнений. Однако конструирование такого типа уплотнения является достаточно наукоемким и трудоемким, что и объясняет их высокую стоимость. Кроме того, газодинамические уплотнения требуют высокого уровня обслуживания и монтажа.

Для того, чтобы наладить серийный выпуск уплотнений различных типоразмеров, потребуются десятки лет на получения опыта изготовления и эксплуатации, поэтому необходимо перенести удельный вес с экспериментально-доводочных работ на расчетно-вариантное проектирование. Но серьезным препятствием здесь является отсутствие в литературе уточненных расчетных методик, с помощью которых можно было бы сократить количество альтернативных вариантов конструкции при доводке.

В настоящее время на ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе» освоено серийное производство безсмазочных центробежных компрессоров для газовой промышленности с применением газодинамических торцовых уплотнений и электромагнитных подшипников [1].

Успешное создание турбомашин с применением газодинамических уплотнений стало возможным благодаря разработки специалистами ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе» и НТУ «ХПИ» методики расчета и программного комплекса автоматизированного проектирования конструкции уплотнения. Применительно к центробежным компрессорам газовой и нефтяной промышленности с широким диапазоном температур и давлений, потребовалось создание новых методов оценки газодинамических, теплофизических и прочностных характеристик уплотнений.

Главным компонентом рассматриваемого газодинамического торцового уплотнения является уплотнительная пара, состоящая из вращающегося и аксиально-подвижного колец (рис. 1). Рабочий зазор между кольцами уплотнения составляет 3-4 мкм. На уплотнительной поверхности вращающегося кольца нанесены динамические микроканавки (рис. 1), которые создают и поддерживают газодинамическое давление в зазоре, что обеспечивает саморегулирование зазора в рабочем состоянии.

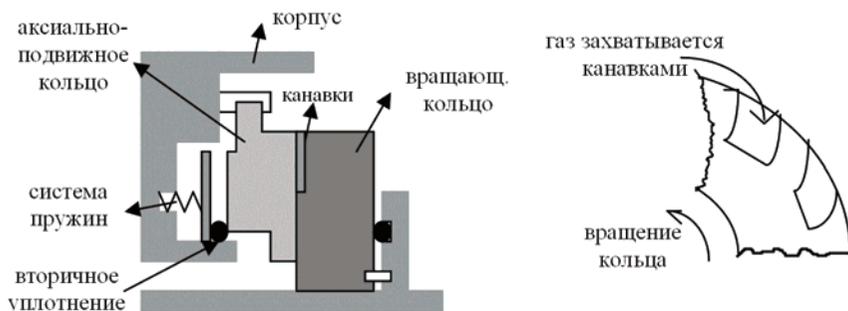


Рисунок 1 – Схема газодинамического торцового уплотнения

При установившейся работе уплотнения, когда вал компрессора выходит на рабочие обороты вращения, кольца газодинамического уплотнения подвергаются деформированию от действия давления газа, неравномерного на-

грева колец, выделения тепла в газовом слое. Соизмеримые с величиной рабочего зазора деформации колец уплотнения вызывают существенное изменение конфигурации и величины зазора. В силу того, что рабочий зазор в уплотнении составляет 3-4 мкм, любое его изменение даже на 0,5 мкм существенно меняет картину распределения газодинамического давления, действующего на кольца уплотнения в зазоре, тепловыделение в газовом слое. Поэтому задачи расчета газодинамического уплотнения имеют сильную связанность и не могут решаться каждая в отдельности [2, 3]. Уточненный расчет газодинамического торцового уплотнения включает в себя совместное решение взаимосвязанных задач газодинамики, теплопроводности, термоупругости и силового деформирования при установившейся работе уплотнения. Рассмотрение нестационарных режимов работы газодинамического уплотнения актуально в основном для переходных процессов, возникающих в момент пуска-остановки компрессора. Такие режимы возникают крайне редко. На стационарных режимах правильно спроектированное уплотнение ведет себя достаточно устойчиво. Поэтому будем рассматривать установившуюся работу данного уплотнения.

Двумерное распределение давления газа в зазоре между кольцами уплотнения описывается нелинейным уравнением газовой смазки, учитывающим изменение температуры газового слоя [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\mu T_{cp}} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} - 12\mu h \omega \sqrt{p} z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\mu T_{cp}} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} + 12\mu h \omega \sqrt{p} x \right) \right] = 0, \quad (1)$$

где  $\mu$  – динамическая вязкость газа;  $T_{cp} = T_{cp}(x, z)$  – среднеинтегральная функция изменения температуры газа по толщине зазора (по координате  $y$ );  $h$  – толщина газового слоя;  $p = P^2$  – квадрат давления газа;  $\omega$  – угловая скорость вращения одного из колец.

Распределение температуры в газовом слое в зазоре описывается уравнением теплопроводности, учитывающим выделение тепла в газовом слое за счет вязкости и конвективного переноса тепла [2]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k_T \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ k_T \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k_T \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{PC_v}{RT} \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $k_T$  – коэффициент теплопроводности газового слоя;  $T = T(x, y, z)$  – температура газа;  $v_x$  и  $v_z$  – составляющие скорости газа вдоль зазора;  $C_v$  – коэффициент удельной теплоемкости газа при постоянном объеме;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Краевыми условиями для уравнений (1,2) являются значения температуры и давления заданным значениям на входе и выходе из уплотнения.

Распределение температуры в рабочих кольцах имеет вид:

$$\nabla(k_{T_{1,2}} \nabla T) = 0, \quad (3)$$

где  $k_{T_1}$  и  $k_{T_2}$  – коэффициенты теплопроводности вращающегося и аксиально-подвижного колец уплотнения. Снаружи рабочие кольца уплотнения омываются газом известной температуры и скорости, действуют граничные условия третьего рода (конвективный теплообмен с окружающей средой). Коэффициенты теплоотдачи на внешних поверхностях колец определяются при помощи известных в литературе критериальных уравнений обтекания цилиндра, трубы и пластины. Однако определение коэффициентов теплоотдачи на уплотнительных поверхностях колец в зазоре оказывается затруднительным и поэтому целесообразно решать совместную задачу теплопроводности для газового слоя и рабочих колец уплотнений.

Решив уравнения (1-3) можно получить силовые и температурные нагрузки, действующие на кольца уплотнения и определить деформированное состояние рабочих колец уплотнения. Однако нелинейность задач расчета газодинамических уплотнений и их сильная связанность значительно усложняет решение. Необходимо также учесть тот факт, что решение каждой из вышеперечисленных задач в отдельности составляет большие трудности. Особенно это касается задачи газодинамики. Для ее решения был разработан алгоритм, основанный на применении метода Бубнова-Галеркина в сочетании с методом конечных элементов. Подробное описание алгоритма приводится в работе [4]. Для решения задачи теплопроводности и деформационной задачи применяется метод конечных элементов в вариационной постановке.

Для совместного решения вышеперечисленных задач газодинамики, теплопроводности и термоупругости разработан специальный итерационный алгоритм их совместного решения, с учетом некоторых изменений предложенных в работе [3]. В нем на каждой глобальной итерации, когда методом простых итераций решаются задачи газодинамики и теплопроводности, устанавливается поле давлений газа в зазоре и температур в зазоре и в рабочих кольцах сначала при плоскопараллельном зазоре. После этого итерационным путем решается деформационная задача и газодинамическая для каждого кольца в отдельности при установившемся поле температур. При этом устанавливается конфигурация рабочего зазора сначала с учетом деформаций вращающегося кольца, потом устанавливается конфигурация рабочего зазора от деформаций аксиально-подвижного кольца с учетом установившихся деформаций вращающегося кольца.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока с заданной степенью точности не уравниваются усилия от внешнего давления, действующего на рабочую пару, и газодинамического давления, возникающего в рабочем зазоре между кольцами уплотнения

Программная реализация предложенного итерационного алгоритма решения проходила в несколько этапов (см. рис. 2). Необходимо отметить, что

получить решение газодинамической задачи для рассматриваемых уплотнений с помощью существующих универсальных программных комплексов оказалось затруднительно в виду ее специфичности. Поэтому сотрудниками ОАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе» и Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» был разработан программный комплекс газодинамического расчета «сухих» торцовых уплотнений [4]. Данный программный комплекс успешно используется в отделе газодинамики и прочности ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе» при проектировании новых типоразмеров торцовых уплотнений.

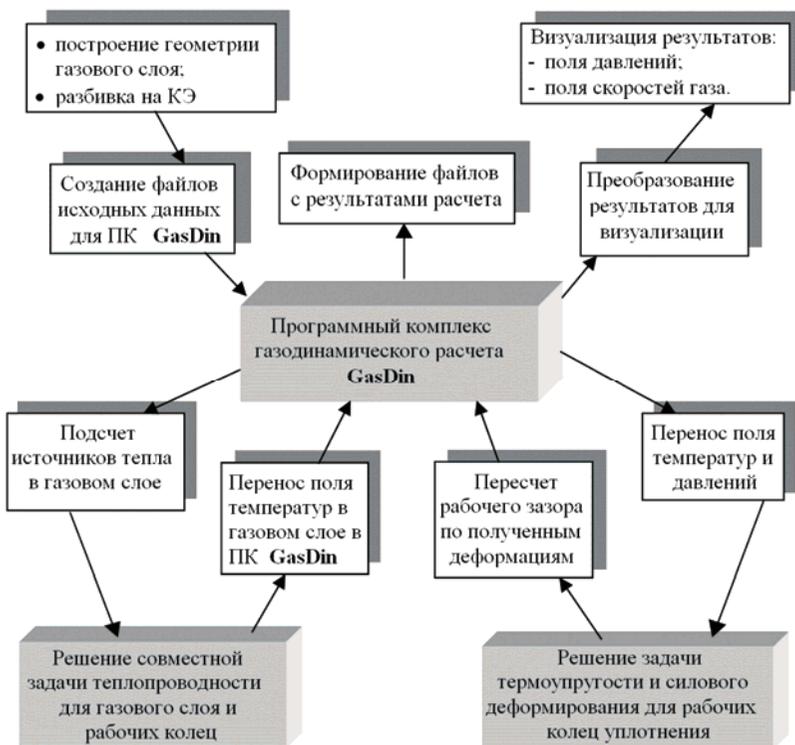


Рисунок 2 – Блок-схема программной реализации алгоритма решения

Программный комплекс GasDin позволяет проводить два вида газодинамических расчетов: при постоянной температуре газового слоя, и с учетом выделения тепла, и изменения температуры в газовом слое, при этом решается нелинейное дифференциальное уравнение газовой смазки (1). В качестве исходных данных для газодинамического расчета задается давление газа на входе и выходе из уплотнения  $P_2$  и  $P_0$ , внешний и внутренний радиусы облас-

ти течения  $r_2$  и  $r_0$ , величина рабочего зазора  $\delta$ , глубина канавок, удельная теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_v$ , универсальная газовая постоянная  $R$ , температура газа на входе и выходе из уплотнения  $T_2$  и  $T_0$ , угловая скорость вращения, величина результирующего газостатического усилия  $F_{гст}$ , действующего на внешней стороне аксиально-подвижного кольца, точность газодинамического расчета.

В результате газодинамического расчета с помощью созданного программного комплекса можно получить двумерное распределение давления газа, скорости газа в зазоре, а также расход газа через уплотнение, согласно интегрального соотношения для массового расхода газа:

$$Q_r = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12\mu RT} h^3 P \frac{\partial P}{\partial r} d\varphi. \quad (4)$$

При определении расхода газа через уплотнение учитывается изменение конфигурации рабочего зазора при деформировании колец уплотнения.

Решение задач теплопроводности и термоупругости происходит с помощью универсального конечного-элементного программного комплекса. Обмен данными между программными комплексами осуществляется модулями программного комплекса GasDin согласно блок-схеме, приведенной на рис. 2.

Автоматическая реализация итерационного процесса решения совместной задачи также управляется модулями программного комплекса.

Тестирование разработанного итерационного алгоритма решения и созданного программного комплекса проводилось для работающих конструкций газодинамических торцовых уплотнений, используемых на ОАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе». Приведем результаты расчета для одной из таких конструкций уплотнений со спиральными канавками. Геометрические и рабочие параметры уплотнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

$r_0$ , мм	$r_1$ , мм	$R_2$ , мм	$P_0$ , атм	$P_2$ , атм	Глубина канавки, мкм	$F_{гст}$ , Н	$\varepsilon$
101	112,1	125	1,3	60,8	7	88347,9	$1 \cdot 10^{-5}$

Здесь  $\varepsilon$  – точность определения давления газа при решении газодинамической задачи.

Угловая скорость вращения кольца уплотнения  $\omega = 5300$  об/мин. Вращающееся кольцо уплотнения изготовлено из карбида вольфрама, аксиально-подвижное – из углерадита. Физические свойства материала приведены в табл. 2.

Сходимость итерационного процесса для рассматриваемого газодинамического торцового уплотнения достигается за 4 глобальных итерации и 24 подитерации.

Таблица 2

Вид материала	$E$ , Па	$\alpha$ , 1/К	$K_T$ , Вт/(м·К)
Карбид вольфрама	$7 \cdot 10^{11}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	50,2
Углеродистый графит	$0,11 \cdot 10^{11}$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	23

В результате деформирования рабочих колец уплотнения от действия давления газа и неравномерного нагрева существенно меняется конфигурация рабочего зазора (рис. 3).

Необходимо отметить, что на ОАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе» для предварительной проверки работы газодинамических торцовых уплотнений и их исследования используется специально созданный экспериментальный стенд.

В процессе испытания уплотнений выполняется контроль их основных параметров: входного и выходного давления в уплотнениях, температуры аксиально-подвижного кольца, температуры газа на входе и выходе из уплотнения, и расходные характеристики уплотнений. Экспериментальные исследования для рассматриваемой конструкции уплотнения показали, что нагрев газа в зазоре происходит в среднем до 40-50 °С, при отсутствии контакта поверхностей. В результате расчетных исследований газ на выходе из рассматриваемого уплотнения нагревается до 46 °С, что согласовывается с экспериментальными данными.

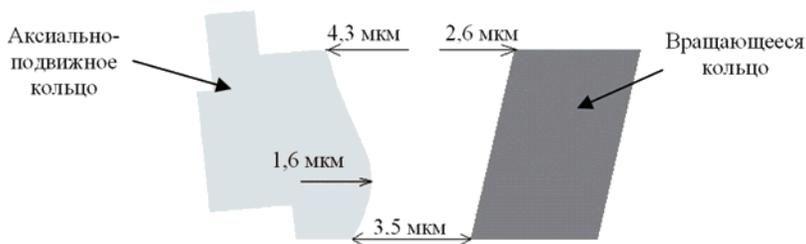


Рисунок 3 – Схематическое изображение установившегося вида рабочего зазора в результате итерационного процесса в среднем

Полученный в результате решения совместной задачи расход газа через рассматриваемое газодинамическое торцовое уплотнение составил  $1,03 \cdot 10^{-3}$  кг/сек. При определении расхода газа через уплотнение учитывается изменение рабочего зазора вследствие деформации колец уплотнения. Расчетная величина расхода газа отличается от экспериментальной для данной конструкции уплотнения на 9 %.

**Список литературы:** 1. Бухолдин Ю.С. Разработка и исследование турбокомпрессоров углеводородного газа с газотурбинным приводом / Ю.С.Бухолдин, А.В.Смирнов, В.П.Парафейник, В.А.Левашиов, В.Г.Гадяка // Вісник НТУ «ХП». – 2010. – № 2. – С. 49-58. 2. Роговой Е.Д. Постановка связанной задачи газодинамики и теплопроводности для расчета рабочих пар «сухих» тор-

цовых уплотнений / *Е.Д. Роговой Е.Д., В.А.Левашов, Л.В.Розова* // Вісник Сумського державного університету. Серія технічні науки. – 2003. – № 3. – С. 90-94. 3. *Роговой Е.Д.* Разработка итерационного алгоритма расчета газодинамических торцовых уплотнений с меньшим количеством итерационных циклов / *Е.Д.Роговой, В.А.Левашов, М.М.Смирнов, Л.В.Розова* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2005. – № 22. – С. 15-20. 4. *Роговой Е.Д.* Создание специализированного программного комплекса для расчета газодинамических торцовых уплотнений в среде Visual C++ / *Е.Д.Роговой, В.А.Левашов, Л.В.Розова, А.М.Киселев* // Вісник НТУ «ХПІ». – 2002. – Т. 9, № 9. – С. 23-26.

*Поступила в редколлегию 13.09.2010*

УДК 539.3

*А.МОВАГГАР*, аспирант, НТУ «ХПІ»;  
*Г.И.ЛЬВОВ*, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

## **ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

У даній статті запропонована енергетична модель для прогнозування втомної міцності й оцінки накопичених пошкоджень в умовах плоского напруженого стану в композиційних матеріалах. Розроблена методика ідентифікації параметрів моделі на основі мінімального необхідного набору експериментальних даних. Виконаний аналіз теорії для різних умов вантаження і проведено порівняння теоретичних результатів із експериментальними даними.

The paper proposes an energy model for fatigue life prediction and estimation of accumulated fatigue damage under plane stress conditions in composite materials. Method for identifying the proposed model parameters is based on the minimum necessary set of experimental data. The analysis of conclusions of the theory for various loading conditions was carried out and performed comparison of theoretical results with experimental data.

**1 Введение.** Композиционные материалы получают все возрастающее применение в современной промышленности, особенно в тех отраслях, где критически важно обеспечивать прочность и жесткость элементов конструкций при минимальном весе [1].

Вследствие высокой удельной жесткости и прочности армированных волокнами композиционных материалов, они часто используются для критических по отношению к весу конструктивных применений. Однако существующие несовершенства методов оценки прочности этих материалов часто приводят к тому, что в расчетных методиках принимаются большие коэффициенты безопасности. Поэтому изделия с применением композиционных материалов часто конструируются с чрезмерным запасом прочности, что снижает эффективность их использования.

Эти соображения в полной мере относятся к методам оценки усталост-

ной прочности композиционных материалов.

Рациональный выбор модели накопления повреждений позволяет привести к более эффективному использованию этих материалов [1]. При циклических нагружениях композиционных материалов, накопление повреждаемости может проявляться в изменении интегральных свойств.

Различными методами неразрушающего контроля может быть обнаружено изменение модуля упругости, электрической проводимости, коэффициента демпфирования. Повреждаемость может сопровождаться волновыми эффектами и распознаваться методом акустической эмиссии.

Хотя технология композиционных материалов развивается быстро, их применение в реальных конструкциях затрудняется из-за отсутствия доступных данных по усталости, которые являются главными параметрами в эксплуатации. Усталость конструкций из композиционных материалов – весьма сложное явление. Анализ напряженного состояния при переменных нагрузках требует учета анизотропии осредненных упругих свойств композита.

В отличие от металлов, композиционные материалы являются существенно неоднородными и анизотропными. Накопление повреждений происходит не в локализованном виде, а разрушение не всегда происходит в результате распространения единственной макроскопической трещины. Микроструктурные механизмы накопления повреждений, включая волоконный излом и матричное разрушение, волокноно-матричное расщепление и расслоение, происходят иногда независимо.

При низких уровнях циклического нагружения или в начальной части срока долговечности большинство типов композитов накапливают рассеянные повреждения. Эти повреждения распределены повсюду по напряженной зоне, и постепенно уменьшают прочность и жесткость композита.

В поздних стадиях срока долговечности количество накопленных повреждений в некоторой области композита может быть достаточно большим. Это приводит к тому, что остаточная прочность композита той области падает до уровня максимального напряжения в циклическом нагружении. В результате происходит разрушение, которое схематично иллюстрируется [2] рис. 1.

Вследствие разнообразия структур композиционных материалов и механизмов накопления повреждаемости при циклических нагружениях невозможно построение универсальной теории усталости композитов. Хотя усталостное поведение армированных волокном композиционных материалов существенно отличается от поведения металлов, множество моделей были разработаны на основе известных  $S - N$  кривых.

Эти модели составляют первый класс так называемых «моделей усталостной прочности». Такой подход требует больших экспериментальных исследований и не принимает во внимание реальные механизмы повреждения, такие как матричные разрушения и разрывы волокон [3].

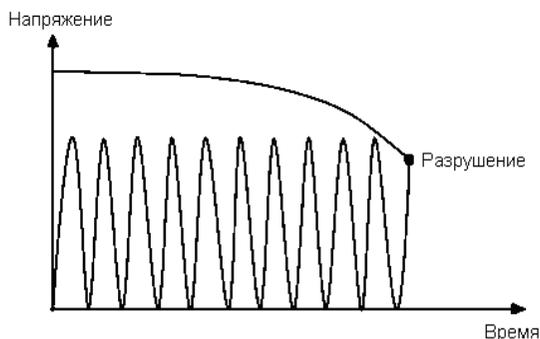


Рисунок 1 – Уменьшение прочности композита при циклических нагружениях

Второй класс включает феноменологические модели для многоциклового усталости. Эти модели предлагают эволюционный закон, который описывает постепенную деградацию прочности или жесткости композиционного образца исходя из макроскопических свойств.

В последнее время развиваются модели на основе концепций континуальной механики разрушения. В моделях этого типа повреждаемость количественно описывается некоторыми внутренними параметрами материала. Развитие повреждаемости определяется эволюционными кинетическими уравнениями, отражающими необратимый характер повреждаемости [3].

Континуальные модели повреждения вводят скалярные, векторные или тензорные параметры повреждения, которые описывают деградацию всего композиционного материала или для компонентов структуры. Эти модели основаны на физическом моделировании основных механизмов повреждения, которые приводят к макроскопически заметной деградации механических свойств [4].

Главным результатом всех усталостных моделей является предсказание усталостной долговечности, и каждая из этих трех категорий использует свой собственный критерий для того, чтобы определить условие разрушения и, как следствие, усталостную долговечность композиционного материала.

В настоящей работе рассматривается континуальная модель накопления усталостных повреждений, основанная на предположении о том, что скорость роста параметра повреждения зависит от максимального значения удельной энергии упругого деформирования композита.

**2 Концепция эффективных напряжений.** При континуальном подходе к анализу напряженного состояния и усталости изделий из композитов, материал рассматривается как гомогенная анизотропная упругая среда [5]. При построении модели предполагается, что имеют место малые упругие деформации. Функционал энергии упругой деформации является квадратичным и

существует линейная зависимость между тензором напряжений  $\sigma$  и тензором деформации  $\varepsilon$ .

В отличие от механики хрупкого разрушения, которая рассматривает процесс равновесного состояния или рост макротрещин, континуальная механика повреждений использует непрерывные внутренние переменные, которые связаны с плотностью микродефектов.

Предлагаемая модель основана на концепции эффективного напряжения и интегрально отражает различные типы повреждения на микро масштабном уровне такие, как образование и рост микротрещин матрицы, обрывы волокон, расслоения и другие микроскопические дефекты [6].

Сложность и разнообразие механизмов накопления усталостных повреждений и деградации прочностных свойств композита делают оправданным использование скалярной внутренней переменной для количественного описания повреждаемости.

Параметр поврежденности  $D$  ассоциируется с уменьшением эффективной площадью любого поперечного сечения в окрестности данной точки тела и определяется следующей формулой:

$$D = \frac{A - \bar{A}}{A}, \quad (1)$$

где  $A$  – номинальная, неповрежденная площадь поперечного сечения,  $\bar{A}$  – суммарная площадь поперечного сечения всех дефектов на данной площадке.

По определению теоретическое значение  $D$  должно быть в пределах  $0 \leq D \leq 1$ . Тензор эффективных напряжений в случае изотропного повреждения вводится следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - D}. \quad (2)$$

Для более детального отражения механизма усталостной повреждаемости композитов используются тензорные меры повреждаемости. Это позволяет учесть направленный, анизотропный характер накопления усталостных дефектов.

Модели анизотропного повреждения существенно сложнее изотропного в теоретическом отношении при обеспечении совместимости с термодинамическими принципами механики сплошной среды.

Для идентификации параметров моделей анизотропной повреждаемости требуется проводить значительное число экспериментов при сложных программах испытаний, дающих возможность выявить направленный характер усталостных повреждений.

Линейное преобразование тензора напряжений  $\sigma$  в эффективный тензор напряжения  $\tilde{\sigma}$  может быть осуществлено с помощью тензора четвертого ранга:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \cdot \sigma_{kl}. \quad (3)$$

При рассмотрении геометрической интерпретации анизотропной повре-

ждаемости вводится тензор повреждения второго ранга. По физическим соображениям он является симметричным. Обобщения зависимости (2) на случай тензора повреждаемости второго ранга симметричную форму эффективных напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}$  можно получить следующим образом [6]:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sigma_{ik} \cdot (\delta_{kj} - D_{kj})^{-1} + (\delta_{il} - D_{il})^{-1} \cdot \sigma_{lj} \right], \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  – дельта Кроникера и  $D_{ij}$  – тензор повреждения второго ранга.

С введением эффективного напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - D)$  при изотропной повреждаемости и принципом эквивалентности деформации [7], потенциал Гельмгольца можно написать как:

$$\psi = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1 - D), \quad (5)$$

где  $a_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных,  $\varepsilon_{ij}^e$  – тензор упругих деформаций.

При этом физические соотношения упругого деформирования с учетом повреждаемости для изотермического процесса имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e (1 - D). \quad (6)$$

Термодинамика необратимых процессов определяет сопряженную с повреждаемостью переменную  $Y$ , таким образом, что произведение  $Y \cdot \dot{D}$  определяет энергию, рассеянную в процессе повреждения. Сопряженная с повреждаемостью переменная  $Y$  определяется из условия положительности рассеянной энергии для изотермических процессов [7]:

$$Y = - \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{W_e}{1 - D}, \quad (7)$$

где  $dW_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e$  удельная энергия упругой деформации.

$$W_e = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1 - D). \quad (8)$$

**3 Определяющие соотношения развития повреждаемости композита.** Введение скалярной меры поврежденности определяет и выбор математической модели для описания процесса накопления повреждаемости. В условиях сложного напряженного состояния скорость накопления поврежденности должна зависеть от совместных инвариантов тензоров напряжений и тензоров, характеризующих механические свойства композита. В качестве такой характеристики принимается удельная энергия упругого деформирования  $W_e$ .

Изменение отдельных компонентов тензора напряжений в пределах цикла теоретически может происходить по различным зависимостям от времени.

Стремление отразить характеристики циклов для каждого компонента тензора напряжений приводит к чрезмерному усложнению теоретических моделей. Реалистичным подходом к таким ситуациям является введение параметра цикла для характерного инварианта напряженного состояния.

В качестве такого параметра может быть принято отношение минимальной и максимальной за цикл величины первого главного напряжения.

$$R = \frac{\sigma_1^{\min}}{\sigma_1^{\max}}. \quad (9)$$

Скалярная мера повреждаемости  $D$  рассматривается как функционал, зависящий от максимального за цикл значения энергии упругого деформирования  $W_e$ , числа циклов нагружения  $N$ , параметра цикла  $R$ , температуры  $T$ , свойства материала и других аргументов, влияющих на усталость материала:

$$D = D(W_e, N, E_{ijkl}, R, T, \dots). \quad (10)$$

Установление функциональной зависимости усталостной прочности от параметра цикла и температуры является сложной проблемой даже для однородных материалов. При построении моделей усталости металлов наибольшее распространение получил подход, при котором материальные константы определяются из экспериментов при фиксированных значениях параметра цикла и температуры, а эти характеристики не включаются в уравнения усталостной повреждаемости.

В предложенной модели принимается гипотеза о том, что скорость накопления повреждений зависит от энергии деформации  $W_e$ , отношения минимального напряжения к максимальному  $R$  и от текущего уровня повреждения  $D$ , тогда:

$$\frac{dD}{dN} = f(R, D, W_e). \quad (11)$$

Вид функции  $f$ , определяющей скорость накопления повреждений, должен устанавливаться по результатам экспериментов на усталостную прочность. В соответствии с концепцией континуальной механики повреждаемости параметр  $D$  теоретически можно контролировать со временем (числом циклов нагружения) по изменению модуль упругости. Для практического использования теории более предпочтительным является идентификация функциональной зависимости (11) на основе результатов усталостной прочности по  $S - N$  кривым Веллера [8].

Если предположить, что существует степенная зависимость между энергией деформации и скоростью накопления повреждаемости, то кинетическое уравнение для параметра повреждаемости можно представить в виде:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot (W_e)_{\max}^n, \quad (12)$$

где  $W_e$  – удельная энергия упругого деформирования и  $k(R)$  – функция кото-

рая, зависит от параметра цикла.

Согласно принципу эквивалентной деформации [8] удельная энергия упругого деформирования может быть выражена через эффективные напряжения  $\tilde{\sigma}_{ij}$  и закон развития повреждаемости представлен в форме:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} \right)_{\max}^n. \quad (13)$$

Если удельную энергию выразить через напряжения, то:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2(1-D)} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \right)_{\max}^n, \quad (14)$$

где  $C_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных неповрежденного композита. Можно также представить закон развития повреждаемости через деформации, тогда этот закон принимает вид:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1-D) \right)_{\max}^n, \quad (15)$$

где  $a_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных.

Число циклов, за которое повреждаемость накапливается с величины  $D_1$  до значения  $D_2$  определяется интегрированием кинетического уравнения (11):

$$N = \int_{D_1}^{D_2} \frac{dD}{f(R, D, W_e)}. \quad (16)$$

В случае одноосного напряженного состояния при стационарном цикле изменения напряжений зависимость параметра повреждаемости от количества циклов имеет вид:

$$D = 1 - \left( - \frac{(n+1) \cdot m \cdot k(R) \cdot \sigma^{2n}}{2^n \cdot E^n} \cdot N + 1 \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad (17)$$

где  $E$  – модуль упругости соответствующего направления.

Геометрическая трактовка параметра повреждаемости при  $D = 1$  соответствует случаю полного заполнения микротрещинами поперечного сечения материала. Практически материал становится нестабильным и разрушается, когда повреждение достигает некоторого критического значения, меньшего единицы.

В силу значительной нелинейности зависимости параметра повреждаемости от числа циклов, на стадии предшествующей разрушению скорость роста увеличивается и устремляется к бесконечности. Поэтому интервал изменения параметра повреждаемости близкий к единице,  $0,9 < D < 1$  соответствует незначительному числу циклов. Это позволяет определять  $S - N$  зависимость интегрируя соотношение (11) в пределах от 0 до 1

$$\sigma = \left( \frac{2^n \cdot E^n}{(n+1) \cdot m \cdot k(R)} \cdot \frac{1}{N_f} \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (18)$$

где  $N_f$  – соответствует числу циклов до разрушения и  $E$  – модуль упругости соответствующего направления.

Базовыми экспериментами для определения характеристик усталости композиционных материалов являются опыты по циклическому нагружению в условиях одноосного напряженного состояния. Из-за существенного разброса экспериментальных данных для построения  $S-N$  кривых необходимо проводить испытания большого количества образцов на различных уровнях напряжения.

Возможности предложенной модели изучены на примере четырехслойного композита со стеклянными волокнами и матрицей из полиэстера [9]. Образцы с различными схемами армирования были тестированы при симметричном цикле растяжения-сжатия вдоль направления  $[0_2]_S$ . Упругие характеристики композитов представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Механические свойства композиционного материала [9].

Схема армирования	$E_1$ , (ГПА)	$E_2$ , (ГПА)	$E_3$ , (ГПА)	$G_{12}$ , (ГПА)	$G_{13}$ , (ГПА)	$G_{23}$ , (ГПА)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
$[0]_S$	18,04	3,74	3,74	1,57	1,57	1,49	0,34	0,34	0,25
$[-45/45]_S$	5,03	5,03	6,75	4,93	1,53	1,53	0,21	0,15	0,15
$[0/90]_S$	11,04	11,04	6,75	1,57	1,53	1,53	0,12	0,32	0,32

Экспериментальные данные по усталостному разрушению образцов трех видов армирования, приведенные в работах [8, 10], были обработаны по методу наименьших квадратов для определения параметров  $m$  и  $n$  кинетического уравнения (12). Результаты обработки приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Параметры кинетического уравнения.

Схема армирования	$m$	$n$
$[0_2]_S$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	0,847
$[-45/45]_S$	$1,039 \cdot 10^{-4}$	0,766
$[0/90]_S$	$2,463 \cdot 10^{-3}$	2,166

Теоретические усталостные  $S-N$  диаграммы, соответствующие найденным параметрам кинетического уравнения повреждаемости, приведены на рис. 2. Там же для сравнения показаны точками экспериментальные данные из работы [11].

После определения параметров в предложенной модели, она может быть использована для предсказания усталостной прочности композитов в услови-

ях сложного напряженного состояния. Ниже приводятся результаты такого анализа для однонаправленного композита (схема армирования  $[0_2]_S$ ) в условиях плоского напряженного состояния.

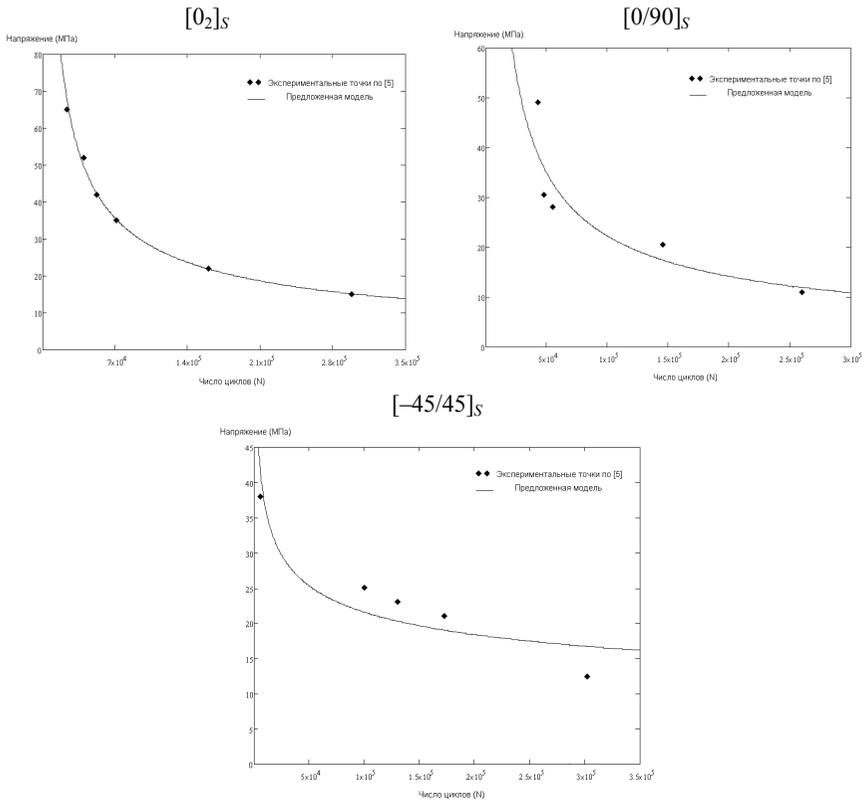


Рисунок 2 – Результаты усталостных испытаний [5] и  $S - N$  кривая предложенной модели

На рис. 3 приведены  $S - N$  диаграммы для симметричного цикла двухосного растяжения  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$ ;  $\tau_{12} = 0$  – кривая 1, для растяжения в направлении перпендикулярном волокнам  $\sigma_2 \neq 0$ ;  $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$  – кривая 2, и в условиях чистого сдвига  $\tau_{12} \neq 0$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  – кривая 3.

Процесс развития повреждаемости композита зависит от направления главных осей тензора напряжений в отношении к плоскостям симметрии механических свойств композита [12]. На рис. 4 приведены графики роста параметра повреждаемости в зависимости от числа циклов для различных схем нагружения. Кривые построены интегрированием кинетического уравнения (17) при одинаковом значении амплитудного напряжения  $\sigma = 20$  МПа.

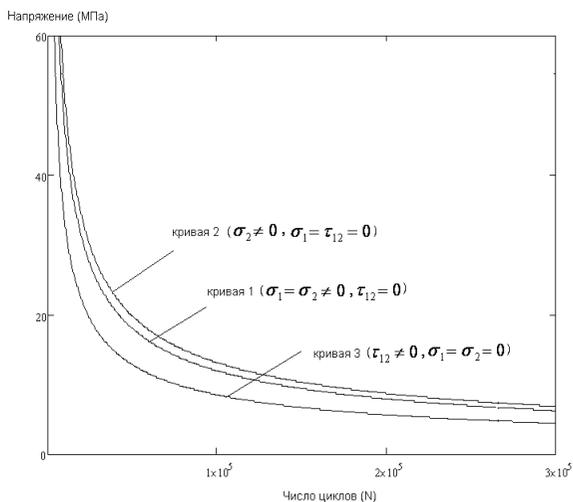


Рисунок 3 –  $S-N$  диаграммы для различных схем нагружения

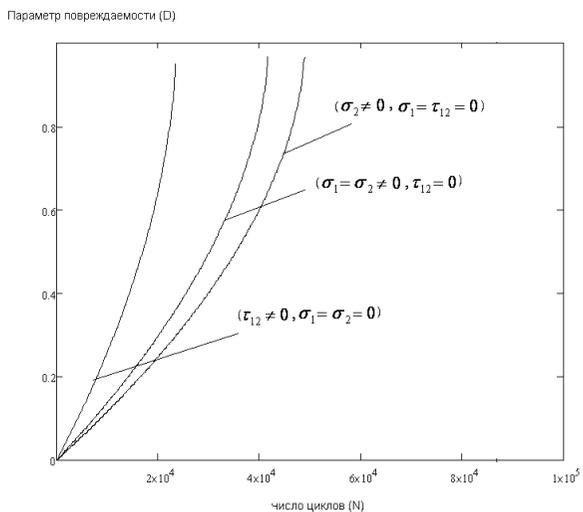


Рисунок 4 – Графики роста параметра повреждаемости для различных схем нагружения

Статистическая обработка результатов эксперимента позволяет получить распределение усталостной долговечности. При фиксированном значении параметра цикла  $k(R) = 1$  для симметричного цикла двухосного растяжения  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0; \tau_{12} = 0$  качественный характер семейства  $\sigma - N$  кривых показан на рис. 5.

При сложном напряженном состоянии в пространстве напряжений при фиксированном значении параметра цикла  $k(R) = 1$  и фиксированном значении числа цикла  $N = 1,5 \cdot 10^5$  для симметричного цикла нагружения предельная поверхность принимает вид как на рис. 6.

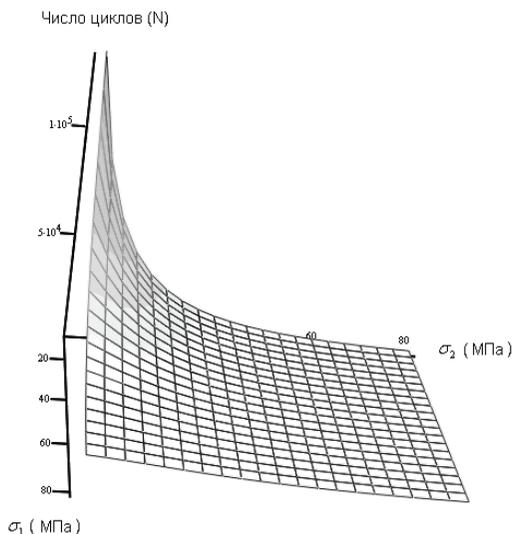


Рисунок 5 – Качественный характер семейства  $\sigma - N$  кривых

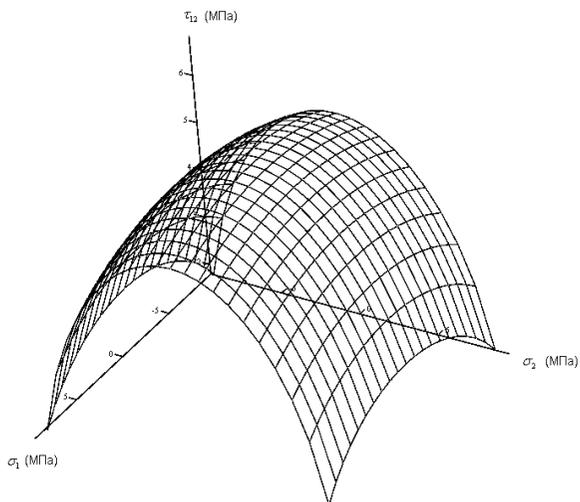


Рисунок 6 – Предельная поверхность при сложном напряженном состоянии

**4. Заключение.** Предложена энергетическая модель для количественной оценки повреждаемости композиционных материалов в условиях плоского напряженного состояния.

Разработанная модель позволяет прогнозировать усталостную прочность с учетом влияния ориентации главных направлений тензора напряжений относительно плоскостей упругой симметрии материала.

В модели используются подходы, основанные на современной континуальной механике повреждаемости, и разработана методика идентификации параметров этой модели на основе минимально необходимого набора экспериментальных данных.

Установлены критериальные характеристики разрушения в композите и их зависимость от параметра вида напряженного состояния. Выполнен проверочный анализ для разных композитов при различных условиях нагружения и проведено сравнение результатов с экспериментальными данными.

**Список литературы:** 1. *Van Paeppegem W., Degrieck J.* Fatigue Damage Modelling of Fiber-reinforced Composite Materials // Review, 2000, Applied Mechanics Reviews. – 54(4). – PP. 279-300. 2. *Harris B.* Fatigue in Composites // CRC Press, Boca Raton. – 2003. – PP. 10-68. 3. *Hashin Z., Rotem A.* A fatigue criterion for fibre reinforced composite materials // *J composite mat.* – 1973. – № 7. – PP. 448-464. 4. *Hashin Z.* Culmulative damage theory for composite materials: residual life and residual strength methods // *Composite Sci Tech.* – 1985. – № 23. – PP. 1-19. 5. *Lemaitre J., ed.,* Handbook of Materials Behavior Models. – San Diego: Academic Press, 2001. 6. *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 1996. 7. *Kattan P. I., Voyiadjis G. Z.* Damage Mechanics With Finite Elements. – Springer 2001. 8. *Hayder Al-Shukri, Muhannad Khelifa* Fatigue study of E-glass fiber reinforced polyester composite under fully reversed loading and spectrum loading // *Eng. & Technology.* – Vol. 26, № 10. – 2008. 9. *Hader Al-Shukri* Experimental and theoretical investigation into some mechanical properties of E-glass polyester composite under static and dynamic loads // MSc thesis, Engineering electromechanics department, University of technology, 2007. 10. *Rita R., Bose N. R.* Behaviour of E-glass fiber reinforced vinylester resin composites under fatigue condition // *Bull. Mater. Sci.* – April 2001. – Vol. 24, № 2. – PP. 137-142. 11. *Philippidis T. P., Vassilopoulos A. P.* Fatigue design allowables of GRP laminates based on stiffness degradation measurements // *Compos Sci and Tech.* – 2000. – 60(15). – PP. 2819–2828. 12. *Philippidis T. P., Vassilopoulos A. P.* Complex stress state effect on fatigue life of GRP laminates. Part I, experimental // *Int J Fatigue.* – 2002. – № 24. – PP. 813–823.

*Поступила в редколлегию 13.05.2010.*

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, асп., НТУ «ХПИ»

## **К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ**

Використовуючи аналогію течій вібророзрідженої зернової суміші та в'язкої рідини, отримано формули для розрахунку коливань швидкості шару зерна на нахиленому решеті з урахуванням нелінійної зміни кінематичного коефіцієнта вібров'язкості суміші то товщини шару. Отримано аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки в елементарних функціях. Приведено чисельні приклади.

Using analogy of currents vibroliquefaction of a grain mix and viscous liquid, the formulas for account fluctuations of velocity of motion a layer of grain on the inclined sieve are received in view of nonlinear change of a kinematical factor vibroviscosity of a mix on thickness of a layer. The analytical solution of a regional problem of hydrodynamics in elementary functions is received. The numerical examples are given.

**Постановка проблемы.** Вибрации интенсифицируют сепарирование зерна. Для адекватного моделирования процесса разделения зернового материала на фракции виброрешетом важно знать как далеко передаются вибрации от решета в слой смеси и как они влияют на неравномерность потока сыпучей среды. Для изучения распространения вибраций вглубь зерновой массы используют различные теоретические модели. Достаточно известно направление, где движение зерновой смеси в условиях вибраций описывают уравнениями течения однородной вязкой жидкости. Дальнейшее развитие этого направления видится в переходе к уравнениям динамики неоднородной жидкости. Ведь эксперименты показывают, что вибровязкость псевдооживленной зерновой смеси возрастает с удалением от свободной поверхности слоя. Поэтому, разрабатывая уточненные модели движения смеси по виброрешету, желательно учитывать изменение вибровязкости по толщине движущегося слоя. Итак, в рамках выделенного выше направления моделирования, возникает проблема получения и анализа решений динамических краевых задач течения неоднородной вязкой жидкости, которые описывают поток слоя зерна по виброрешету.

**Краткий анализ последних публикаций.** Из работ, в которых определение скорости движения слоя зерна по виброрешету, сводится к расчету течения неоднородной вязкой жидкости, отметим [1], [2]. В [2] изменение вибровязкости по толщине псевдооживленного слоя аппроксимируется линейной функцией поперечной координаты. Решение краевой задачи о колебаниях скорости движения зерна, вызванных продольными вибрациями решета в его плоскости, представлено с помощью затабулированных функций Кельвина.

Но использованная аппроксимация кинематического коэффициента вибровязкости не учитывает нелинейного изменения его от декартовой координаты, что наблюдается в экспериментах [3], [4]. К тому же, согласно принятой аппроксимации, вибровязкость смеси у свободной поверхности равна нулю, что не согласуется с конечной дисперсностью зерновой массы. Поэтому здесь, вместо линейного, предлагается вариант квадратичного (нелинейного) изменения вибровязкости по толщине слоя с отличной от нуля вибровязкостью у свободной поверхности.

**Целью работы** является получение и апробация расчетами формул для определения колебаний скорости движения зернового слоя по наклонному плоскому решету, когда изменение вибровязкости смеси по толщине слоя подчиняется нелинейной (квадратичной) зависимости.

**Основная часть работы.** По аналогии с публикацией [2] колебания скорости потока зерновой смеси по решету в установившемся режиме работы определим, решив дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2)  $u = u(y, t)$  – скорость потока слоя зерна вдоль решета, зависящая от декартовой координаты  $y$  и времени  $t$ ;  $v(y)$  – коэффициент кинематической вибровязкости, зависящий от  $y$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\theta$  – угол наклона решета к горизонту, показанный на рис. 1;  $h$  – толщина движущегося слоя;  $A^*$ ,  $\omega$  – амплитуда и круговая частота продольных колебаний решета в его плоскости.

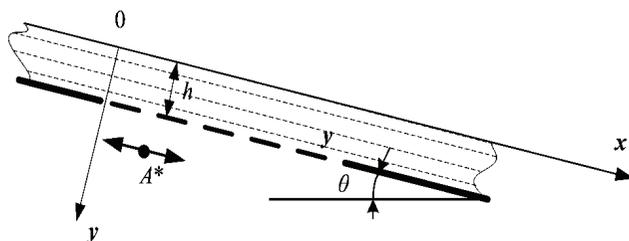


Рисунок 1 – Расчетная схема

Изменение вибровязкости по координате  $y$  аппроксимируем параболической зависимостью

$$v(y) = v_0 \xi^2, \quad (3)$$

в которой  $v_0 = v(0)$ ;  $\xi = 1 + \alpha y$ ;  $\alpha$  – положительная константа.

Согласно (3), при увеличении  $y$  нелинейно возрастает  $v(y)$ .

Решение краевой задачи, представленной выражениями (1), (2), ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (4)$$

слагаемые которой удовлетворяют граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = 0; \quad u_1(h) = 0; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u_2(h, t) = A * \omega \sin(\omega t), \quad (6)$$

вытекающим из (2).

Подставив (4) в (1), с учетом (3), получаем два уравнения:

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{du_1}{d\xi} \right) = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \alpha^2}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi^2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{v_0 \alpha^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0.$$

Первое из них решаем при граничных условиях (5), а второе – при условиях (6).

Решением краевой задачи для первого уравнения в (7) является

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{\alpha^2 v_0} \left[ \ln \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha y} - \frac{\alpha(h - y)}{(1 + \alpha h)(1 + \alpha y)} \right]. \quad (8)$$

К нему приводит двукратное интегрирование (7) с определением констант интегрирования с помощью (5).

Решение второго уравнения в (7) представляем суммой

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (9)$$

где комплексная функция вещественного аргумента  $w(y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\xi^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega}{v_0 \alpha^2} w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (10)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{y=0} = \operatorname{Im} \left. \frac{dw}{d\xi} \right|_{y=0} = 0; \quad (11)$$

$$\operatorname{Im} w(h) = 0; \quad \operatorname{Re} w(h) = A * \omega, \quad (12)$$

вытекающим из (6).

Подставив в (10) степенную функцию

$$w = \xi^\lambda,$$

приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{i\omega}{v_0\alpha^2} = 0,$$

которое имеет комплексные корни:

$$\lambda_1 = a + i\beta; \quad \lambda_2 = b - i\beta.$$

Здесь

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}; \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}};$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{c} - \frac{1}{4}}; \quad c = \frac{1}{16} + \frac{\omega^2}{v_0^2\alpha^4}.$$

Поскольку

$$\xi^{\pm i\beta} = \cos(\beta \ln \xi) \pm i \sin(\beta \ln \xi),$$

то общим решением уравнения Эйлера (10) является

$$w(y) = (c_1 + ic_2)\xi^a [\cos(\beta \ln \xi) + i \sin(\beta \ln \xi)] +$$

$$+ (c_3 + ic_4)\xi^b [\cos(\beta \ln \xi) - i \sin(\beta \ln \xi)]. \quad (13)$$

Для определения произвольных констант  $c_1, c_2, c_3, c_4$  продифференцируем (13) по  $\xi$  и подставим в (11). Такое действие приводит к системе двух уравнений

$$c_1 a - c_2 \beta + c_3 b + c_4 \beta = 0;$$

$$c_1 \beta + c_2 a - c_3 \beta + c_4 b = 0.$$

Из нее следует, что

$$c_3 = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2; \quad c_4 = -c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1, \quad (14)$$

причем

$$\delta_1 = \frac{\beta^2 - ab}{\beta^2 + b^2}; \quad \delta_2 = \frac{\beta(a+b)}{\beta^2 + b^2}. \quad (15)$$

Учитывая (14) и (15), выражение (13) сводим к виду

$$w(y) = c_1 f(\xi) - c_2 \varphi(\xi) + i[c_1 \varphi(\xi) + c_2 f(\xi)], \quad (16)$$

где

$$f(\xi) = (\xi^a + \delta_1 \xi^b) \cos(\beta \ln \xi) - \delta_2 \xi^b \sin(\beta \ln \xi);$$

$$\varphi(\xi) = (\xi^a - \delta_1 \xi^b) \sin(\beta \ln \xi) - \delta_2 \xi^b \cos(\beta \ln \xi).$$

Подставив (16) в (12), получаем систему относительно неизвестных  $c_1$  и  $c_2$ :

$$c_1 f(\eta) - c_2 \varphi(\eta) = A^* \omega;$$

$$c_1 \varphi(\eta) + c_2 f(\eta) = 0.$$

Здесь  $\eta = 1 + \alpha h$ .

Решив систему, находим постоянные:

$$c_1 = \frac{A^* \omega f(\eta)}{f^2(\eta) + \varphi^2(\eta)}; \quad c_2 = -\frac{A^* \omega \varphi(\eta)}{f^2(\eta) + \varphi^2(\eta)}. \quad (17)$$

Учитывая (4), (8), (9), (14), (16) и (17), решение рассматриваемой краевой задачи сводим к виду

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\alpha^2 \nu_0} \left[ \ln \frac{1 + \alpha h}{1 + \alpha y} - \frac{\alpha(h - y)}{(1 + \alpha h)(1 + \alpha y)} \right] + [c_1 f(\xi) - c_2 \varphi(\xi)] \sin(\omega t) + [c_1 \varphi(\xi) + c_2 f(\xi)] \cos(\omega t). \quad (18)$$

Оно выражается в элементарных функциях, несмотря на переменность коэффициентов решаемого дифференциального уравнения.

Заметим, что предельный переход  $\alpha \rightarrow 0$  в (18) приводит к известному решению краевой задачи о колебаниях однородного слоя зерновой смеси на виброрешете. Действительно, в этом предельном случае:

$$\begin{aligned} a \rightarrow -b \rightarrow \beta \rightarrow \frac{\gamma}{\alpha}; \quad \delta_1 \rightarrow 1; \quad \delta_2 \rightarrow 0; \quad \beta \ln \xi \rightarrow \gamma y; \\ f(\xi) \rightarrow 2ch(\gamma y) \cos(\gamma y); \quad \varphi(\xi) \rightarrow 2sh(\gamma y) \sin(\gamma y); \\ c_1 \rightarrow \frac{A^* \omega \cdot chz \cdot \cos z}{\cos^2 z + sh^2 z}; \quad c_2 \rightarrow -\frac{A^* \omega \cdot shz \cdot \sin z}{\cos^2 z + sh^2 z}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu_0}}; \quad z = \gamma h. \end{aligned}$$

Поэтому выражение (18) принимает вид

$$\begin{aligned} u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{2\nu_0} (h^2 - y^2) + \frac{A^* \omega}{\cos^2 z + sh^2 z} \{ [chz \cos z ch(\gamma y) \times \\ \times \cos(\gamma y) + shz \sin z sh(\gamma y) \sin(\gamma y)] \sin(\omega t) + [chz \cos z \times \\ \times sh(\gamma y) \sin(\gamma y) - shz \sin z ch(\gamma y) \cos(\gamma y)] \cos(\omega t) \}. \end{aligned}$$

Такое решение было получено в [5] другим способом.

Используя табличные интегралы [6]

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin(\beta x) dx &= \frac{e^{ax} (a \sin(\beta x) - \beta \cos(\beta x))}{a^2 + \beta^2}, \\ \int e^{ax} \cos(\beta x) dx &= \frac{e^{ax} (a \cos(\beta x) + \beta \sin(\beta x))}{a^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

несложно проинтегрировать выражение (18) по  $y$  и найти удельную производительность решета  $\bar{Q}(t)$ . Указанное преобразование приводит к формуле

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{\nu_0 \alpha^3} \left[ \alpha h + \frac{\alpha h}{1 + \alpha h} - 2 \ln(1 + \alpha h) \right] + \frac{1}{\alpha} (c_1 \Phi_1 - c_2 \times \\ \times \Phi_2) \sin(\omega t) + \frac{1}{\alpha} (c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1) \cos(\omega t). \end{aligned}$$

В ней

$$\Phi_1 = \int_1^\eta f(\xi) d\xi = \frac{\eta^{a+1}}{(a+1)^2 + \beta^2} [(a+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - a - 1] +$$

$$+ \frac{\delta_1 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} [(b+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - b - 1] - \frac{\delta_2 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times [(b+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta];$$

$$\Phi_2 = \int_1^\eta \varphi(\xi) d\xi = \frac{\eta^{a+1}}{(a+1)^2 + \beta^2} [(a+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta] +$$

$$+ \frac{(-1)\delta_1 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} [(b+1)\sin(\beta \ln \eta) - \beta \cos(\beta \ln \eta) + \beta] - \frac{\delta_2 \eta^{b+1}}{(b+1)^2 + \beta^2} \times$$

$$\times [(b+1)\cos(\beta \ln \eta) + \beta \sin(\beta \ln \eta) - b - 1].$$

Эти выражения позволяют рассчитать колебания удельной производительности решета, что происходит с частотой продольных вибраций решета и некоторым смещением по фазе.

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $f = 0,47$ ;  $M = 0,00004 \text{ кг}$ ;  $r_0 = 0,001825 \text{ м}$ ;  $h = 0,008 \text{ м}$ ;  $v_0 = 5,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ ;  $\alpha = 51,78 \text{ м}^{-1}$ , которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Работу решета характеризовали параметрами:  $\theta = 5^\circ$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$ .

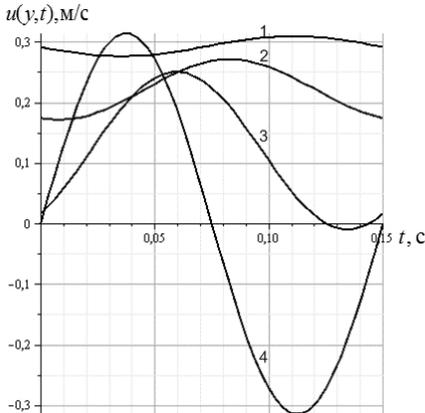


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1, 2, 3, 4 –  $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

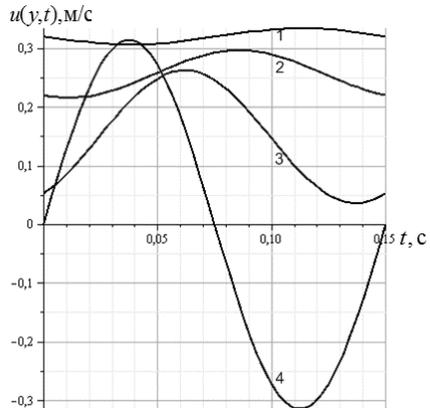


Рисунок 3 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте однородного слоя: 1, 2, 3, 4 –  $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

Вычисленные по (18) значения  $u(y,t)$  при  $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$  и различных  $y$  графически показаны на рис. 2, где цифрами 1,2,3,4 отмечены линии, соответствующие  $y/h^{-1} = 0,25; 0,5; 0,75; 1$ . С ростом  $y$  (увеличение глубины частицы в слое) уменьшается скорость движения, но возрастает амплитуда ее колебаний. У поверхности решета ( $y \rightarrow h$ ) в некоторые моменты времени появляются обратные точки, характеризующие отрицательными значениями скорости. Результаты аналогичных расчетов, соответствующие  $\alpha = 0$ , представлены графически на рис. 3. Здесь также соблюдаются отмеченные выше закономерности течения смеси.

**Выводы.** Изложенная теория позволяет учитывать увеличение вязкости смеси с удалением от свободной поверхности. В области рассмотренных частот продольных вибраций решета полученные по этой теории численные результаты подтверждают быстрое затухание колебаний скорости потока по высоте движущегося слоя зерна.

**Список литературы:** 1. *Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В.* К расчету движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 77. – С. 238-244. 2. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 174 с. 3. *Тищенко Л.Н., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В.* Исследование закономерностей вибровязкости зерновых смесей при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решетами // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв: Вісник ХНТУСГ. Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 88. – С. 34-44. 4. *Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В. и др.* Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харьков: Міськдрук, 2010 – 360с. 5. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчету движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологях. – 2009. – №1. – С. 109-113. 6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.

*Поступила в редакцію 16.07.2010*

**Э.С.ОСТЕРНИК**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,  
ГП завод «Электротяжмаш», Харьков

## МОДЕЛИРУЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ ОТ $N$ -ПЕРЕМЕННЫХ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Розглянуто квадратичну апроксимацію дискретно заданої функції  $n$ -змінних за допомогою алгебраїчних поліномів. Доведено існування та єдиність найкращого у середньому квадратичному полінома. При постійному кроку аргументів матрицю системи нормальних рівнянь можна зробити квазидіагональною. Для ряду задач статички та динаміки, включаючи вібрацію турбогенератора, алгоритм реалізовано на ЕОМ.

The quadratic approximation of the discretely designed function of  $n$ -variables is analyzed using algebraic polynomials. The existence and uniqueness of the best polynomial in the quadratic mean has been proved. The matrix of the standard equations system may be made quasi-diagonal at the constant step of arguments. The algorithm used in a number of tasks of the statics and dynamics, including vibration of the turbogenerator, has been implemented on the basis of the electronic computer.

**Постановка задачи.** Эффективность таких средств конструктивной математики, как сплайны [1], атомарные [2] и целые функции экспоненциального типа [3], не снимает потребности в алгебраических полиномах, хорошо приближающих достаточно гладкие функции. В работе [4] дан алгоритм и описано применение аппроксимации эмпирических данных многомерными алгебраическими полиномами.

Аппроксимирующая функция отыскивалась в виде алгебраического полинома, наилучшего в среднем квадратичном, так как:

- интерполирование при том же уровне точности дает полином более высокой степени;
- минимизация по среднему квадратичному оправдывается теоретико-вероятностными соображениями [5];
- система нормальных уравнений для нахождения коэффициентов аппроксимирующего полинома – линейная;
- выбор алгебраических полиномов связан с предварительным исследованием однопараметрических зависимостей.

В этой статье подробно описан алгоритм, дано обоснование метода и приведены его обобщения.

**Алгоритм моделирования.** Ограниченная функция  $n$  переменных  $\{x_j\}_1^n$ , заданная значениями  $\{y_i^{(0)}\}_1^m$ , аппроксимируется полиномом одинаковой для всех переменных степени  $r$

$$y_i = \sum_{S=1}^k b_S \prod_{j=1}^n x_{ij}^{s_j}, \quad S = \|s_j\|_1^n. \quad (1)$$

При  $s_j \in [0, r]$

$$\sum_{j=1}^n s_j \leq r, \quad (2)$$

число членов полинома  $\lambda_{rn} = C_{r+n}^n$  [6]. Чтобы построить полином по (1), (2), последовательность десятичных чисел  $\psi_{10} = 0, 1 \dots \psi_{\max}$ , где  $\psi_{\max} = r(r+1)^{n-1}$ , преобразуется в последовательность  $n$ -разрядных чисел  $\psi_{r+1}$ . Их можно рассматривать как матрицы  $S' = \|s'_j\|_1^n$ . Отбросив  $S'$ , не подчиняющиеся условию (2), получаем множество  $H$  матриц  $S$ .

Обобщим формулы (1), (2). Если снять ограничение (2), то число членов дополненного таким образом полинома  $\lambda'_{rn} = (r+1)^n$ .

Зачастую однопараметрические зависимости  $y^{(0)}(x_j)$  характеризуются различными степенями  $r_j$ . Тогда при  $s_j \in [0, r_j]$  получаем  $\lambda'_{rn} = \prod_{j=1}^n (r_j + 1)$ .

При высоких значениях  $\lambda_{rn}$  резко растут вычислительные трудности. После их преодоления оказывается, что некоторые члены полинома малы. Учитывая физику явления, иногда удается априорно определить множество  $H$  и соответствующее  $\lambda$ .

В дальнейшем рассмотрении обобщены некоторые результаты для  $n = 1$  [5, 7, 8]. Условие экстремальности квадратичной погрешности  $E_\lambda = \sum_{i=1}^m [y_i^{(0)} - y_i]^2$  приводит к системе нормальных уравнений

$$DB = F \quad (3)$$

с симметричной матрицей  $D = \|d_{ST}\|$ ,

$$d_{ST} = \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\beta_j}; \quad f_T = \sum_{i=1}^m y_i^{(0)} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{t_j}; \quad \beta_j = s_j + t_j. \quad (4)$$

Из экстремальности  $E_\lambda$  следует аналогично [5] контрольное соотношение  $E_\lambda = E_\lambda^{(\bar{1})}$ ;  $E_\lambda^{(\bar{1})} = \sum_{i=1}^m [y_i^{(0)}]^2 - \sum_{i=1}^m y_i^2$ .

Оценка средней квадратичной погрешности:

$$\Delta = \sqrt{E_\lambda / (m - \lambda)}, \quad (5)$$

контрольная оценка  $\delta_E = \left| E_\lambda - \left| E_\lambda^{(\bar{1})} \right| \right| / E_\lambda$ .

Если экспериментальные данные в разных точках  $x_{ij}$  обладают различным весом  $p_i$ , то квадратичная погрешность определяется по формуле

$$\tilde{E}_\lambda = \sum_{i=1}^m p_i [y_i^{(0)} - y_i]^2.$$

Действуя аналогично (3), (4), получим

$$\tilde{d}_{ST} = \sum_{i=1}^m p_i \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\beta_j}; \quad \tilde{f}_T = \sum_{i=1}^m p_i y_i^{(0)} \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\alpha_j}.$$

При постоянном шаге  $\Delta x_j$  аргументов, заданных  $a_j$  раз, преобразуем их аналогично [7]:

$$X_{ij}^{(+)} = 2 \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\Delta x_j}; \quad a_j = 2\omega; \quad \omega = 0, 1, \dots$$

$$X_{ij}^{(-)} = 2 \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\Delta x_j}; \quad a_j = 2\omega + 1; \quad \bar{x}_j = (x_{1j} + x_{a_j j})/2.$$

Тогда (при  $p_i \equiv 1$ )

$$d_{ST} = 2^n \prod_{j=1}^n \delta_j \sum_{X_j=1}^{A_j} X_{ij}^{\beta_j}, \quad (6)$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \beta_j = 2\omega; & A_j^{(+)} = a_j - 1; \\ 0 & \beta_j = 2\omega + 1; & A_j^{(-)} = (a_j - 1)/2. \end{cases}$$

Ввиду (6) матрицы  $D$  и следовательно  $D^{-1}$  всегда можно сделать квази-диагональными, соответственно расположив члены в (1). Сопоставим множеству  $H$  той же мощности множеству  $G$  матриц  $h = \|h_j\|_1^n$  так, что

$$h_j = \begin{cases} 1 & s_j = 2\omega + 1; \\ 0 & s_j = 2\omega. \end{cases}$$

Если рассмотреть  $h$  как  $n$ -разрядные двоичные числа, то соответствующие  $h_{10}$  будут номерами подмножеств  $G_h$  и  $H_h$ , которыми генерируются диагональные блоки матрицы  $D$ .

Легко показать, что диагональные блоки матрицы  $D^{-1}$  обратны соответствующим блокам матрицы  $D$ . Например, при  $n = r = 4; \lambda = 20$ ;

$$|D| = \Delta_1 \cdot \Delta_2^3 \cdot d_{022}^3 \cdot d_{222},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_{000} & d_{002} & d_{002} & d_{002} \\ d_{002} & d_{004} & d_{022} & d_{022} \\ d_{002} & d_{022} & d_{004} & d_{022} \\ d_{002} & d_{022} & d_{022} & d_{004} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} d_{002} & d_{004} & d_{022} & d_{022} \\ d_{004} & d_{006} & d_{024} & d_{024} \\ d_{022} & d_{024} & d_{024} & d_{222} \\ d_{022} & d_{024} & d_{222} & d_{024} \end{vmatrix}.$$

Система 20-ти нормальных уравнений (3) распадается на независимые подсистемы не более, чем 4-х уравнений.

**Обоснование метода.** Докажем существование и единственность наилучшего в среднем квадратичном полинома (1). Рассмотрим, когда выполняется соответствующее (3) условие

$$|D| \neq 0. \quad (7)$$

Введем понятие обобщенного определителя Вандермонда

$$W_\lambda = (\xi_1 \dots \xi_\tau \dots \xi_n) = |z_{\tau S}|^\lambda, \quad z_{\tau S} = \prod_{j=1}^n \xi_{\tau j}^{S_j}. \quad (8)$$

Докажем, что

$$|D| = \frac{1}{\lambda!} \sum_{i=1}^m [W_i(\xi_{\tau j})]^2; \quad \xi_{\tau j} = x_{1j} \dots x_{ij} \dots x_{mj}. \quad (9)$$

По известному свойству определителей

$$[W_i(\xi_{\tau j})]^2 = W_i(\xi_{\tau j}) \sum_{v=1}^{\lambda!} (-1)^l \prod_{S=1}^{\lambda} z_{\tau S}^{Q_v}. \quad (10)$$

Здесь  $Q_v$  – строчная матрица с номером  $v$ , состоящая из  $\lambda$  чисел, значения которых принимает  $\tau$  при изменении  $S$  от 1 до  $\lambda$ ;  $l$  – число инверсий в  $Q_v$ . При инверсии большое число стоит перед меньшим.

Рассмотрим член  $\prod_{S=1}^{\lambda} z_{SS}$  из  $\sum_{v=1}^{\lambda!}$ , соответствующий матрице  $Q_1$  с  $l=0$ .

Умножим 1-й столбец определителя (8) на  $z_{11}$ , 2-й – на  $z_{22}$  и т.д. Суммируя по всем значениям  $\xi_{\tau j}$  ( $\tau, j = 1 \dots n$ ), получим  $|D|$ . Обратимся к  $v$ -му члену суммы и выполним  $v$ -ю перестановку столбцов в (8). При этом множитель  $(-1)^l$  войдет в квадрат, определитель (8), как и при  $v=1$ , после суммирования по индексу  $i$  приведет к  $|D|$ . Отсюда следует (9).

Докажем, что из (9) следует (7) и, более того,  $|D| > 0$ . Для возможности подсчета  $\Delta$  по (5) требуется, чтобы

$$\lambda < m. \quad (11)$$

Значит, среди определителей  $W_{i_s}$ , входящих в (9), есть и такие, у которых среди аргументов нет равных:

$$x_{ij} \neq x_{i+\zeta, j}, \quad j, \zeta = 1 \dots n. \quad (12)$$

Докажем, что такие

$$W_i \neq 0. \quad (13)$$

Раскрывая  $W_\lambda$  согласно (8) по последнему столбцу и отбрасывая первый индекс  $\lambda$ , придем к полиному

$$W_\lambda = \varphi(x_1 \dots x_n) = \sum_{S=1}^{\lambda} k_S \prod_{j=1}^n x_j^{S_j},$$

где  $k_S = |z_{\kappa p}|$ ;  $\kappa = 1, 2, \dots, \lambda - 1$ ;  $p = 1, 2, \dots, S - 1, S + 1, \dots, \lambda$ . Учитывая [7], получим формулу Лагранжа для интерполяции по  $n$  переменным

$$\varphi(x_1 \dots x_n) = \Phi \prod_{j=1}^n \prod_{q=1}^{a_j} (x_j - x_{qj}),$$

$$\Phi = \sum_{\beta_n=1}^{a_n} \dots \sum_{\beta_1=1}^{a_1} \frac{y^{(0)}(x_{\beta_1 1} \dots x_{\beta_n n})}{\prod_{j=1}^n (x_j - x_{\beta_j j}) \prod_{j=1}^n \frac{\partial \left[ \prod_{\beta_j=1}^{a_j} (x_j - x_{\beta_j j}) \right]}{\partial x_j}}.$$

Выведем (13) из этого разложения полинома. Ввиду нетривиальности задачи аппроксимации для некоторых  $i$   $y_i^{(0)} \neq 0$ . Область задания  $y^{(0)}$  конечна, так что

$$\prod_{j=1}^n (x_j - x_{\beta_j j}) \leq K ;$$

$$\prod_{j=1}^n \frac{\partial \left[ \prod_{\beta_j=1}^{a_j} (x_j - x_{\beta_j j}) \right]}{\partial x_j} = \prod_{j=1}^n \sum_{\sigma_j=1}^{a_j} \prod_{\beta_j=1}^{a_j} (x_j - x_{\beta_j j}) \leq L ,$$

где  $K, L$  – конечные величины. Отсюда  $\Phi \neq 0$ .

Ввиду ограниченности  $y^{(0)}$  и (12)

$$\prod_{j=1}^n (x_j - x_{\beta_j j}) \neq 0 ; \quad \prod_{j=1}^n \frac{\partial \left[ \prod_{\beta_j=1}^{a_j} (x_j - x_{\beta_j j}) \right]}{\partial x_j} \neq 0 ;$$

$$\Phi \leq M ; \quad \prod_{j=1}^n \prod_{q=1}^{a_j} (x_j - x_{qj}) \neq 0 ; \quad \prod_{j=1}^n \prod_{q=1}^{a_j} (x_j - x_{qj}) \leq N ,$$

где  $M, N$  – конечные величины. Поэтому  $\varphi(x_1 \dots x_n) = W_\lambda \neq 0$ ;  $|D| > 0$ , условие (7) выполнено. Доказано, что  $W_\lambda \leq R$ ;  $R = MN$  – см. также (10).

Покажем минимизирующее свойство полинома (1). Решение системы (3) для  $E_\lambda(B)$  соответствует единственной стационарной точке. Функция  $E_\lambda(B)$  – неотрицательная, второй степени; при  $\lambda = 1$  это эллипс, гипербола или парабола. Из-за однозначности  $E_1(B)$  эллипс невозможен; ось симметрии параболы параллельна оси  $E_1$ , которая составляет острый и тупой углы с асимптотами гиперболы (только верхняя ветвь, что следует также из неотрицательности  $E_\lambda$ ). Поэтому реализуется минимум  $E_1$ . Обобщение на  $\lambda > 1$  выполняется по индукции [9].

Итерационный процесс аппроксимации  $y^{(0)}$  ограничен по росту  $r$  неравенствами (11) и  $\Delta^{(r)} \leq \Delta_0$ , где  $\Delta_0$  – средняя квадратичная погрешность  $y^{(0)}$ .

**Объекты исследования.** Путем многомерных аппроксимаций моделировался ряд задач динамики и прочности машин. Сюда относятся турбогенераторы (корпус, средняя и торцевая зоны сердечника статора, генераторная зона фундамента и валопровод турбоагрегата), полоса в стане горячего проката и лопасть гидротурбины. Исследовалась также зависимость стоимости турбогенератора от его мощности. В этих проблемах не всегда удается адекватно поставить краевые задачи математической физики. Дополнительно к аппроксимации проводились также прогнозирование для новых конструкторских разработок [4].

Тестовой задачей была аппроксимация вынужденных колебаний под-

крепленной цилиндрической оболочки корпуса статора турбогенератора полиномом (1) при  $m = 36$ ;  $n = 2$ ;  $y_0 = 22,0$  мкм.

Оценка аппроксимации колебаний турбогенератора с ростом степени полинома  $r$

$r$	1	2	3	4	5	6
$\Delta$ , мкм	11,6	9,2	5,8	4,2	3,3	2,9

Итерации равномерно сходятся, оценка  $\Delta^{(6)} = 2,9$  мкм ниже погрешности эксперимента.

Массив  $YX$  банка данных по вибрации лобовых частей обмотки (торцевой зоны статора) составлен по серийным турбогенераторам мощностью от 200 до 500 МВт. В него входят строки вида  $y_i^{(0)} = y_i^{(0)}(x_{ij})$ ;  $i \in [1, 1493]$ . Для моделирования этого массива достаточен квадратичный полином ( $\lambda = 55$ ;  $n = 9$ ). Девятимерная модель удовлетворяет физическим закономерностям. Прогнозные оценки вибрации торцевой зоны подтверждены экспериментально для головного образца турбогенератора нового типа мощностью 320 МВт [4].

**Выводы.** Получен алгоритм аппроксимации дискретно заданной функции  $n$ -переменных с помощью алгебраических полиномов различного типа. Доказано существование и единственность полинома, наилучшего в среднем квадратичном. При постоянном шаге аргументов матрицу системы можно сделать квазидиагональной. Алгоритм моделирования и последующего прогнозирования реализован для ряда задач динамики и прочности в машиностроении.

Перспективы данного направления распространяются на моделирование задач стохастического характера, включая социально-экономические. Полученные эмпирические зависимости могут быть использованы для выбора координатных функций при расчетах прямыми, в том числе энергетическими методами.

**Список литературы:** 1. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплаины в вычислительной математике. – М., 1976. – 248 с. 2. *Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* Атомарные функции в математической физике. – В кн.: Математизация знаний и научно-технический прогресс. – К., 1975. 3. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., 1977. – 456 с. 4. *Остерник Э.С.* Моделирование деформационных полей в электромашиностроении с помощью функций  $N$ -переменных // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 29-42. 5. *Микеладзе Ш.Е.* Численные методы математического анализа. – М., 1953. – 528 с. 6. *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры. – М., 1965. – 552 с. 7. *Уорсинг А., Геффнер Дж.* Методы обработки экспериментальных данных. – М., 1953. – 348 с. 8. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М., 1954. – 372 с. 9. *Остерник Э.С.* Вопросы обоснования эмпирических функций, описывающих колебания электрических машин. – 14 с. Рукопись деп. в «Информэлектро» 11.09.91. – № 64. – эт. 91.

Поступила в редколлегию 20.01.2010

**С.Ю.САЕНКО**, канд. техн. наук, нач. отдела, ННЦ «ХФТИ», Харьков;  
**О.К.МОРАЧКОВСКИЙ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**Д.В.ЛАВИНСКИЙ**, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;  
**В.Н.СОБОЛЬ**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

## **АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОГО И УДАРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КЕРАМИЧЕСКОГО КОНТЕЙНЕРА ДЛЯ РАДИОАКТИВНЫХ ОТХОДОВ**

Проведено аналіз статичного і ударного деформування керамічного контейнера для транспортування й захоронення радіоактивних матеріалів, з метою оцінювання міцності й герметичності за умов нормативних вимог щодо проектів таких об'єктів. Одержані оцінки міцності та герметичності проекту контейнера, що на відміну від існуючих, виготовлено з кераміки типу ZrO<sub>2</sub> [1]. Представлено комплексні результати аналізу, які отримано на базі методу скінчених елементів, програмних комплексів COSMOS/ANSYS та КІДИМ.

The static and impact deformation analysis of the ceramic container for transporting and burial of radioactive materials have been done. The strength and tightness estimations taking into account normative standards for designing of such objects are given. Such estimations have been given for container, which unlike to existing ones, made from ceramic type ZrO<sub>2</sub> [1]. The comprehensive results of analysis, obtained on the basis of finite elements method by using COSMOS / ANSYS and KIDYM software, are presented.

**Актуальность и состояние проблемы.** В Украине при эксплуатации атомных электростанций накоплено значительное количество опасных радиоактивных отходов (РАО) – более 50 тыс. м<sup>3</sup>. Для реакторов ВВЭР-1000, которыми в основном оснащены украинские АЭС, количество РАО постоянно возрастает и составляет сотни кубометров в год. В настоящее время такие отходы в основной своей массе хранятся на промышленных площадках атомных станций в спецхранилищах с использованием бетонных упаковок емкостью от 40 до 200 литров. Наиболее вероятным событием, связанным с радиационной опасностью при хранении РАО является угроза отказа в штатном режиме использования бетонных упаковок хранения, за счет их механического разрушения под действием облучения и агрессивной среды. В Украине, как и во многих других странах в настоящее время актуальны вопросы снижения радиационной опасности существующих критически важных объектов, таких как хранилища радиоактивных отходов. Одним из вариантов достижения этого является разработка новых защитных материалов и конструкций на их основе для создания контейнеров для хранения РАО, отличающихся повышенной прочностью, по сравнению с традиционными – бетонными. Этим обусловлена актуальность темы работы [1,2].

**Постановка задач и метод их решения.** Общий вид рассматриваемого

в работе керамического контейнера и размеры его элементов деталей представлены на рис. 1.

Массы и физико-механические характеристики свойств материалов деталей контейнера приведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно.

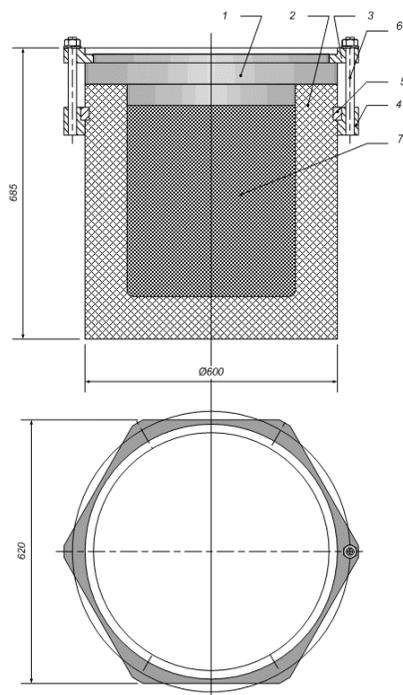


Рисунок 1 – Сборочный чертеж контейнера-упаковки

1 – крышка, 2 – корпус, 3 – фланец, 4 – фланец,  
5 – кольцо разрезное, 6 – шпилька, 7 – радиоактивный материал

Таблица 1 – Масса деталей керамического контейнера

№ п/п	Наименование	м, кг
1	Крышка	149,544
2	Корпус	626,923
3	Фланец	17,0683
4	Фланец	19,13
5	Кольцо разрезное	6,45
6	Шпилька	0,337
7	Радиоактивный материал	141,37

Всего: 962,5

Таблица 2 – Физико-механические характеристики свойств материалов

Свойства материалов	Сталь 30X13	Керамика $ZrO_2$
Прочность при сжатии $(\sigma_B)_c$ , МПа		1400
Прочность при изгибе $(\sigma_B)_b$ , МПа		750
Модуль упругости $E$ , ГПа	210	200
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3	0,28-0,36
Ударная прочность $a_u$ , ГПа		4,2 - 7
Массовая плотность $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	7,8	5,8-6
Коэффициент трения		0,2-0,3

В расчетах приняты физико-механические характеристики спеченной керамики состава ( $ZrO_2 + 3\% Y_2O_3$ ), плотность радиоактивных отходов – 2,5 г/см<sup>3</sup>.

В работе проведен анализ статического и ударного деформирования керамического контейнера для транспортировки и захоронения радиоактивных материалов с целью оценки прочности и герметичности по нормативным требованиям к новым проектам таких объектов. Получены оценки прочности и герметичности проекта контейнера, в отличие от существующих, изготовленного из керамики типа  $ZrO_2$  [1]. Результаты анализа получены на основе метода конечных элементов, на базе современных компьютерных программных комплексов программных комплексов COSMOS / ANSYS и КИДИМ. Геометрическая конечно-элементная схема контейнера представлена на рис. 2.

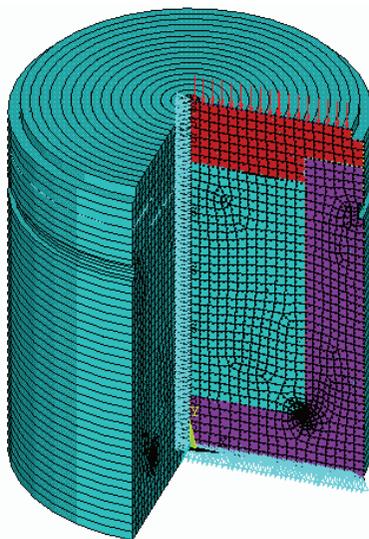


Рисунок 2 – КЭ схема керамического контейнера с отходами

### Оценки прочности и герметичности проектируемого контейнера.

Рассмотрим статическое упругое деформирование контейнера при штабелировании. На внешнюю поверхность крышки действует давление  $p_1$ , моделирующее нагрузку при штабелировании. Влияние содержимого контейнера на НДС конструкции учитывается заданием гидростатического давления на внутренней поверхности корпуса (максимальное значение  $p_0 = \rho gh$ , здесь  $\rho$  – массовая плотность содержимого контейнера,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h$  – высота полости корпуса). Ниже приводятся результаты расчетов при различных значениях величины затяжки ( $u_{\text{зат}}$ ) с учетом внутреннего гидростатического давления и давления моделирующего пятикратную массу при штабелировании.

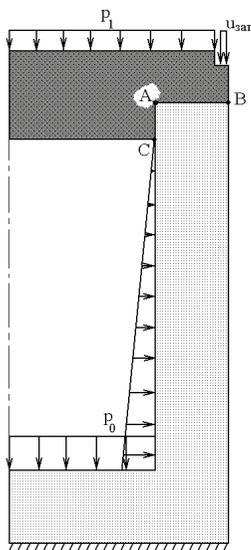


Рисунок 3 – Расчетная схема

Средствами ПК ANSYS выполнено геометрическое моделирование контейнера, согласно рис. 1, и принятом конечно-элементном разбиении. Геометрия и условия соединения элементов конструкции, представленные на рис.1 позволяют рассматривать задачу в осесимметричной постановке. При этом в расчетной схеме (рис. 3) непосредственно рассматриваются только крышка (1) и корпус (2). Крышка и корпус находятся в условиях контактного взаимодействия по линиям АВ и АС. Нижний торец корпуса в расчетах при статической нагрузке считается неподвижным. В точках выступа крышки считается заданным вертикальное перемещение  $u_{\text{зат}}$ , которое возникает вследствие затяжки шпилечных соединений.

В расчетах базовым был выбран осесимметричный 8-узловой конечный элемент PLANE82. Явления контактного взаимодействия моделировались путем введения между крышкой и корпусом слоев контактных элементов CONTA172. и TARGE169. Задавая специальным образом свойства этих контактных элементов, были смоделированы особенности взаимодействия между крышкой и корпусом на горизонтальной поверхности (линия АВ – рис. 3) и на вертикальной поверхности (линия АС – рис. 3). Особенности взаимодействия на горизонтальной поверхности заключаются в том, что крышка не может перемещаться по отношению к корпусу, в противном случае можно говорить о разрушении шпилечного соединения. Для горизонтального слоя контактных элементов необходимо задавать сдвиго-

вую жесткость, по крайней мере, на порядок большую, чем у взаимодействующих элементов конструкции [3].

**Анализ динамических процессов деформирования.** Далее рассмотрим результаты решения задач ударного взаимодействия контейнера с жестким основанием при вертикальном его падении с высоты 0.5 м. Предварительными расчетами в программном комплексе КИДИМ [4] определены величины и распределения нормальных сил-реакций, векторов ускорений и скоростей элементов контейнера в интервале ударного взаимодействия. Для оценки прочности элементов конструкции и герметичности проектируемого контейнера, изготовленного из керамики (КК), эти данные используются для кинестатического расчета методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния в момент времени, когда ударный импульс принимает максимальное значение в интервале времени ударного взаимодействия – 0,3...0,35 сек. Численное значение максимального ускорения контейнера составило  $21700 \text{ м/с}^2$ . Геометрическая конечно-элементная модель и условия закрепления контейнера реализованы в ПК ANSYS и сохранены теми же, что и при исследованиях статического нагружения. Условия нагружения приняты, отвечающими весу и силам инерции, распределенным по объему конструкции, подсчитанным по максимальному ускорению из интервала времени взаимодействия днища контейнера с основанием. Учтено действие нагрузок при величине затяжки шпилек для прижатия крышки фланцами равной 1 мм. Эти данные заданы в программном комплексе ANSYS. Данные о напряженно-деформированном состоянии контейнера получены в ПК ANSYS для оценки прочности и герметичности проектируемого КК. В максимально напряженных местах конструкции эквивалентные напряжения вычислены по теориям прочности Губера – Генки – Мизеса и по теории прочности Мора. Результаты расчета представлены на рис. 4 в виде распределения интенсивности напряжений. Следует отметить, что максимальное значение интенсивности напряжений ниже по сравнению с предыдущим случаем (без учета действия инерционных сил) и составляет 856 МПа. На рис. 5 приведены распределения контактных давлений.

**Выводы.** На базе метода конечных элементов, с использованием компьютерных комплексов COSMOS и ANSYS, представлено комплексное решение прикладной задачи моделирования статических и ударных процессов деформирования керамического контейнера, Установлено, что оценки прочности контейнера по теориям прочности Губера – Хенки – Мизеса и по теории прочности Мора не превышают предельных значений, соответствуют нормативными требованиям.

NODAL SOLUTION

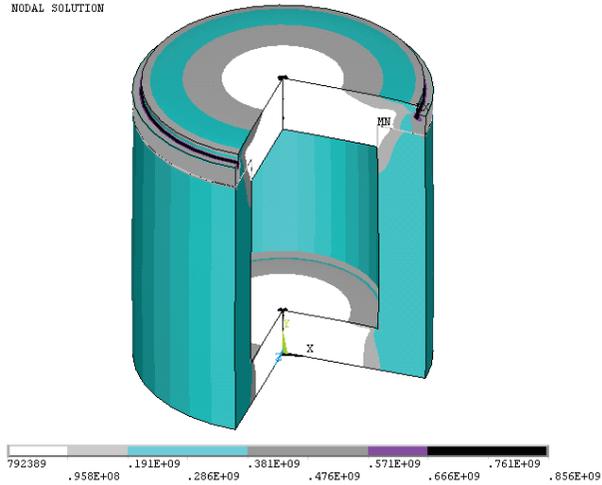


Рисунок 4 – Распределение интенсивности напряжений, Па (затяжка 1 мм)

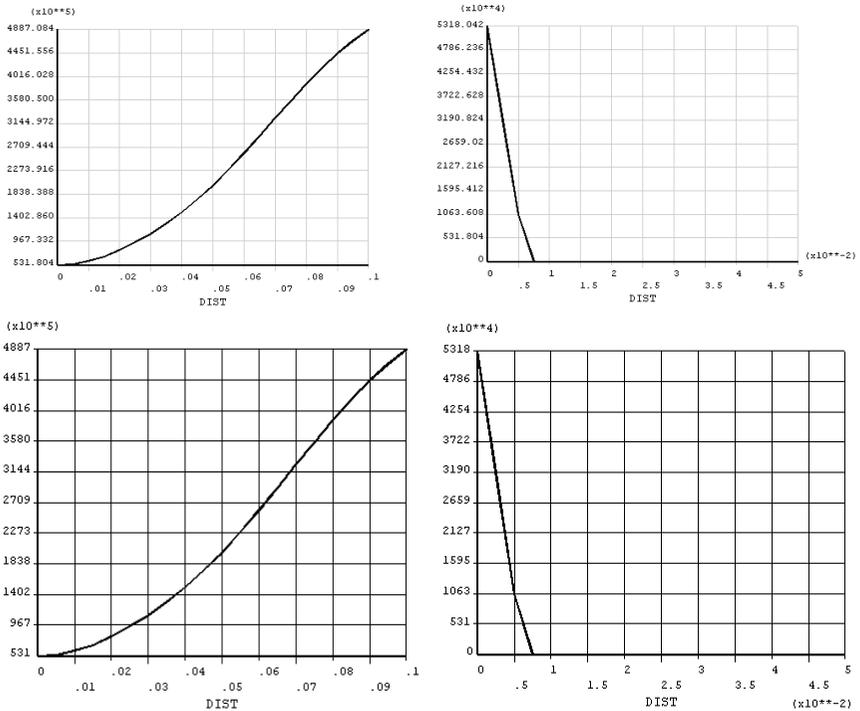


Рисунок 5 – Распределение контактного давления, Па:  
слева – горизонтальная поверхность, справа – вертикальная поверхность контакта

**Список литературы:** 1. Саенко С.Ю. Технологические подходы для обеспечения безопасности при обращении с радиоактивными отходами // Энергетика, экономика, технологии, экология. – 2007. – № 2 (21). – С. 27-35. 2. Неклюдов И.М., Морачковский О.К., Андреев Ю.М., Саенко С.Ю., Бирюков О.В. Динамическое моделирование по испытанию на прочность контейнеров-упаковок для высокоактивных отходов атомных станций // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – № 6/4 (30) – 2007. – С.4-7. 3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 4. Андреев Ю.М., Ларин А.О. Морачковский О.К. Система компьютерной алгебры для досліджень механіки машин // Машинознавство. – 2005. – № 7 (95). – С. 3-8.

*Поступила в редколлегию 09.07.2010*

УДК 621.822.8

**Э.А.СИМСОН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**В.В.ОВЧАРЕНКО**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
**Ю.А.ШЕВЧУК**, асп., НТУ «ХПИ»

## **РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЕПАРАТОРА ПОДШИПНИКА КАЧЕНИЯ**

Виходячи з основних причин руйнування сепаратора підшипника качення, проведено розрахунок його напружено-деформованого стану. Проведено оптимізацію геометрії вікон сепаратора, завдяки варіюванню розмірами їх виїмок. Запропоновано нову модель, що дозволить знизити максимальну інтенсивність напруження на 20 %. Наведено шляхи подальшої оптимізації.

On the basis of main failure reasons of rolling bearing's separator, deflected mode has been found. Geometry optimization of separator has been solved. A new model which allows a 20% reduction of maximal stress intensity has been offered. The ways of subsequent optimization have been suggested.

**Введение.** Сепаратор – один из компонентов современных подшипников качения, используемый для равномерного распределения тел качения по рабочей области, предотвращения непосредственного контакта между ними. Основные причины повреждения сепараторов: заклинивание, вибрации, чрезмерно высокие частоты вращения. Заклинивание возможно между сепаратором и телами качения в результате попадания выкрошенных частиц материала подшипника или внешнего загрязнения, также оно может происходить между телами качения и другими деталями подшипника.

В данной работе рассматривается взаимодействие заклинившего о борт кольца ролика и сепаратора, так как такой вид заклинивания считается наиболее опасным для последнего. Изучается напряженно-деформированное состояние сепаратора.

Геометрическая модель представляет собой совокупность двух тел:

фрагмента сепаратора и заклинившего ролика. Кольцо, о которое произошло заклинивание, моделируется ограничением степеней свободы на заклинившей поверхности ролика. Принимаются во внимание действия двух сил: движущей силы – для критического случая она полагается полностью приложенной к перегородке сепаратора, и силы, прижимающей ролик к кольцу. Конечно-элементная модель составлена из гексаэдральных элементов, размер которых для сепаратора задан 1 мм, для контактных зон – 0,5 мм.

Конечно-элементная модель представлена на рис. 1, модель нагружения – на рис. 2.

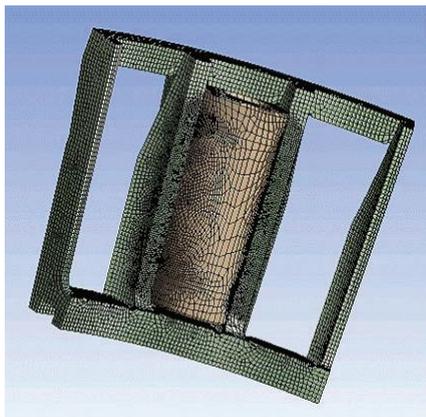


Рисунок 1 – Конечно-элементная модель

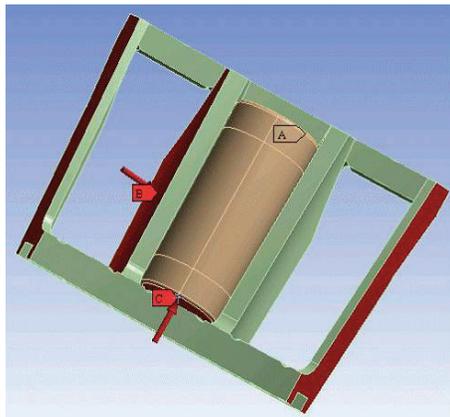


Рисунок 2 – Модель нагружения

Проверка адекватности конечно-элементной модели осуществлена с помощью расчета на более мелкой сетке: размер конечного элемента сепаратора принят 0,5 мм, контактного конечного элемента – 0,25мм. В ходе расчета установлено, что результаты при более мелкой сетке отличаются в рамках 5 % допустимых.

В ходе расчета получены значения интенсивности напряжений сепаратора. Общая картина представлена на рисунке 3.

Максимальные интенсивности напряжений возникают в углах окон сепаратора. В исходном варианте для их снижения предусмотрены выемки, заданные радиусом и высотой углубления. Одним из направлений оптимального проектирования может быть варьирование размерами этих выемок.

Выемку, примыкающую к поверхности, контактирующей с меньшим торцом ролика, для удобства будем считать первой, с большим – второй. Исходные размеры первой выемки: радиус – 1,1 мм, высота – 0,7 мм, варьирование радиусом от 1,1 мм до 2 мм, высотой от 0,7 мм до 1 мм; размеры второй: радиус – 1 мм, высота 0,7 мм; варьирование радиусом от 1 мм до 2 мм, высотой от 0,7 мм до 1 мм.

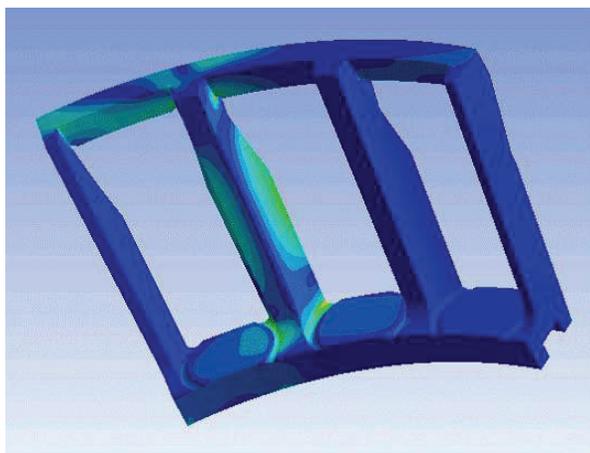


Рисунок 3 – Общий вид распределения интенсивности напряжений

Оптимизация проводится по критерию минимизации максимальных интенсивностей напряжений. Распределение ее в наиболее напряженном углу окна сепаратора для полученного оптимального варианта приведено на рис. 5.

Как видно из рис. 4-5 благодаря применению новой геометрии удалось снизить максимальные интенсивности напряжений путем перераспределения их по сепаратору. Картина нагружения представляется в этом случае более равномерной.

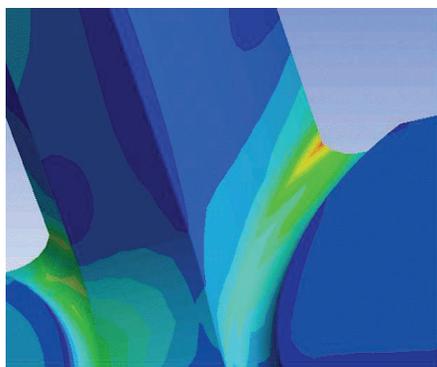


Рисунок 4 – Распределение интенсивности напряжений в углу окна сепаратора исходный вариант

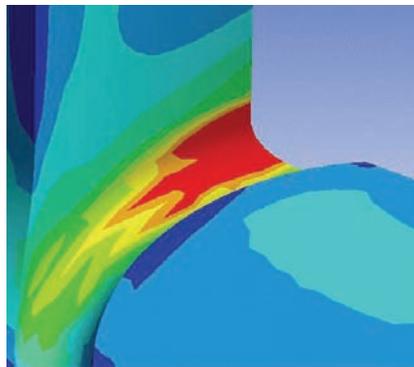


Рисунок 5 – Распределение интенсивности напряжений в углу окна сепаратора оптимальный вариант

**Выводы.** В ходе решения задачи расчета и оптимального проектирования сепаратора подшипника TBU 150x250 получена новая геометрия, позволяющая снизить максимальные интенсивности напряжений на 20 %, чем зна-

чительно сократить вероятность преждевременного повреждения сепаратора и выхода из строя подшипникового узла. Такое снижение достигнуто за счет перераспределения интенсивностей, выравнивания их значений по сепаратору. Однако достичь окончательного устранения концентрации их максимальных значений в углах окон сепаратора при заданной постановке задачи и заданных ограничениях на проектные переменные не представляется возможным.

Одним из путей дальнейшего снижения максимальных значений интенсивностей напряжения может быть как варьирование формой окон сепаратора в целом, так и выемок в их углах.

**Список литературы:** 1. Старостин В.Ф., Лазаренко Ю.А. Проскальзывание и износ контактирующих поверхностей деталей подшипников // Труды ВНИИП. – 1981. – № 2. – С. 55-61. 2. Evans R. Nanocomposite tribological coatings for rolling element bearings // Mat. Res. Soc. Symp. Proc. – 2003. – PP. 407-417. 3. Doll G., Ribaudo C., Evans R. Engineered surfaces for steel rolling element bearings and gears // Materials Science and Technology. – 2004. – Vol. 2. – PP. 367-374. 4. SKF, General Catalog 4000US, 2<sup>nd</sup> ed., 1997-2001. 5. SKF, General Catalog 4000, 2004.

*Поступила в редколлегию 17.09.2010*

УДК 534.014.4

*А.С.СТЕПЧЕНКО*, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»"

## **АЛГОРИТМ СТРУКТУРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ТУРБОАГРЕГАТ – ФУНДАМЕНТ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ**

У даній статті пропонується алгоритм структурної оптимізації системи турбоагрегат- фундамент для забезпечення припустимого рівня вібрацій вбудованих опор ротора низького тиску. На основі проведеного аналізу взаємозалежних коливань фундаменту і корпусів низького тиску показана можливість роздільної оптимізації на моделях симетричних частин фундаменту та корпусу турбіни шляхом вбудовування нових стрижневих елементів.

In given paper the algorithm of structural optimisation of system the turbine-base for guarantee of an allowance of vibrations of offset bearing support of a low pressure rotor is offered. On the basis of the conducted analysis of interdependent vibrations of the base and casies of low pressure the capability of separate optimisation on models of symmetric parts of the base and the turbine casing by embedding of new beam elements is displayed.

### **1 Введение**

Обеспечение допустимых вибрационных характеристик системы турбоагрегат-фундамент-основание (ТФО) на атомных и тепловых электростанци-

ях по-прежнему является актуальной задачей. Установка все более мощных турбин с пониженной материалоемкостью и улучшенными аэродинамическими характеристиками на рамные фундаменты приводит к повышению податливости цилиндров низкого давления (ЦНД). В результате в системе ТФО возникает густой спектр частот в рабочем диапазоне, а для многокорпусных турбин мощностью свыше 500Мвт ситуация ухудшается за счет расстройки частот ЦНД [1-3]. При этом параметрическая конструкционная оптимизация (то есть ужесточение существующих элементов корпуса ЦНД и фундамента) хотя и приводит к некоторому снижению уровня вибраций, принципиально не убирает резонансные частоты из рабочего диапазона [2,4]. Поэтому актуальной становится задача структурной оптимизации – оптимальный подбор дополнительных структурных элементов встраиваемых в конструкцию, которые значительно меняют жесткостные характеристики системы в целом и принципиально устраняют резонансные частоты в рабочем диапазоне. Несмотря на наличие множество исследований в области оптимизации формы конструкции [5,6], задача структурной оптимизации не имеет общего подхода и разработанного алгоритма решения из-за неопределенности выбора места присоединения дополнительных структурных элементов и их формы.

## **2 Постановка задачи**

Для системы ТФО необходимо разработать эффективный алгоритм оптимального выбора дополнительных структурных связей в виде стержней с целью отстройки от резонанса в рабочем диапазоне частот.

Особенностью системы ТФО является то, что элементы системы – турбоагрегат и фундамент представляют собой сложные пластинчато-оболочечно-стержневые конструкции. Для достоверного определения собственных частот таких систем необходимо использовать только современные системы инженерного анализа с хорошим интерфейсом (CAE), которые обеспечивают точное моделирование геометрии конструкции, но требуют много времени для расчета. Так как при оптимизации необходимо многократно решать задачу анализа, то для сокращения времени счета предлагается использовать суперэлементный подход.

Особенностью задачи оптимального выбора новых структурных связей является, то, что частотные характеристики системы ТФО в этом случае изменяются случайным образом. Поэтому необходимо определить принципы, на основе которых будут выбираться места наложения связей и логика их перебора. При этом необходимо учесть технологические, конструкционные и аэродинамические ограничения на места наложения стержневых связей.

## **3 Анализ динамического взаимодействия фундамента и паровой турбины в системе ТФО**

Система турбоагрегат-фундамент включает паровую турбину, генератор, возбудитель генератора и рамный фундамент. Паровая турбина состоит из ци-

линдров низкого (ЦНД), среднего (ЦСД) и высокого (ЦВД) давления, причем ЦНД может быть несколько. Так турбина К-500-65/3000, модель которой приведена на рис. 1, включает 4 ЦНД. Система ТФО имеет одну плоскость симметрии, поэтому для исследования колебаний достаточно смоделировать симметричную часть системы [1]. Конечно-элементная модель симметричной части рамного фундамента под турбину К-560-23,5 представлена на рис. 2, а симметричной  $\frac{1}{4}$  части одного из двух ЦНД данной турбины представлена на рис. 3.

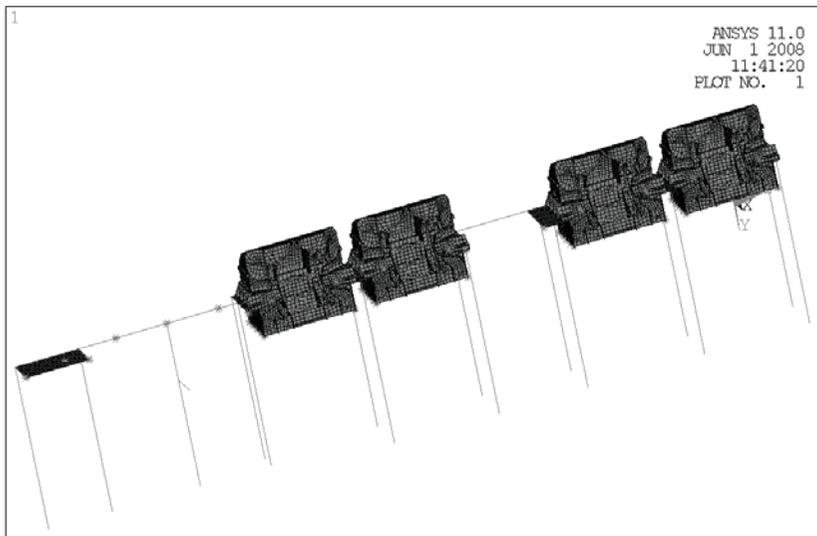


Рисунок 1 – Конечно-элементная модель системы турбоагрегат-фундамент

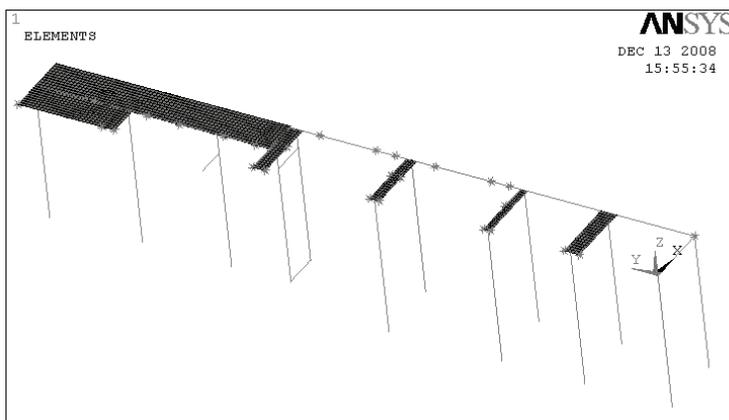
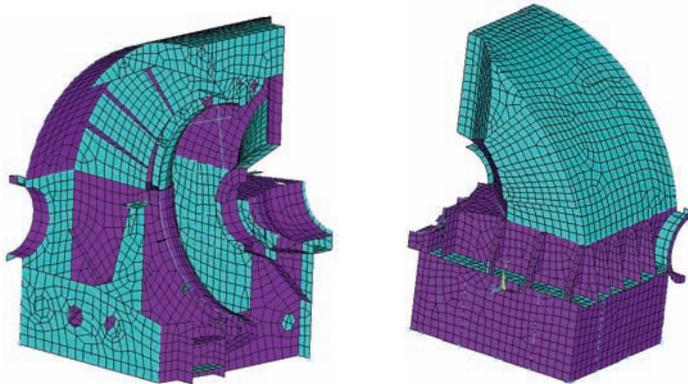


Рисунок 2 – Конечно-элементная модель фундамента



а б  
Рисунок 3 – Конечно-элементная модель ¼ ЦНД  
а – вид изнутри, б – вид снаружи

Тиражированием модели ¼ ЦНД легко получить четыре либо две половины ЦНД и соединить с моделью фундамента. При этом передаваемая на ЦНД масса конденсатора, обоймы и ротора учитывается как сосредоточенные массы. Так как остальное оборудование либо очень жесткое (ЦВД, возбуждатель генератора), либо его жесткость не влияет на колебания ЦНД, его можно заменить сосредоточенными массами в местах опирания на фундамент [1]. В построенных конечно-элементных моделях симметричной части системы турбоагрегат-фундамент использованы конечные элементы массы, стержня и оболочки [1].

Анализ частотного спектра и собственных форм колебаний системы ТФО для многокорпусных турбоагрегатов [2,3] показал, что формы колебаний можно разделить на:

- чисто фундаментные, которые определяются колебаниями фундамента, корпуса ЦНД турбины не колеблются;
- чисто корпусные, фундамент не колеблется;
- смешанные, совместные колебания фундамента и корпусов ЦНД.

При этом также наблюдается расстройка, то есть по одной форме колебаний возбуждаются разные ЦНД на близких частотах.

Данные особенности форм колебаний системы ТФО, позволяют поставить вопрос – нельзя ли оценить частоты системы ТФО в целом по частотам ее составляющих? То есть рассмотреть частотный спектр ТФО как сумму частотных спектров отдельного фундамента и отдельного корпуса ЦНД. Подобный анализ позволит не только значительно сократить размерность задачи, но выявить причинно-следственные связи возбудимости опасных частот.

Для такого анализа были взяты модели фундамента с массами оборудования (рис. 2) и корпуса с упругими связями в местах крепления на фунда-

мент (рис. 3) для турбины К-560-23,5. Величина упругой связи была взята равной средней величине динамической податливости фундамента в точках опирания ЦНД. Первые двадцать собственных частот ТФО К-560-23,5 приведены в табл. 1. Также в табл. 1 приведены собственные частоты отдельного фундамента и отдельного ЦНД, собственные формы которых совпадают с собственными формами системы ТФО. Как видно из табл. 1 большая часть частот практически совпадает с частотами отдельного фундамента, и эти частоты соответствуют чисто фундаментным собственным формам. Одна частота (пятая), соответствующая корпусной форме, близка к частоте отдельного ЦНД, разницу можно объяснить завышением жесткости упругих связей в местах крепления. Особый интерес представляют 1-я, 8-я и 9-я собственные частоты – они соответствуют смешанным формам колебаний. Особенностью их является то, что соответствующие этим формам частоты отдельного фундамента и отдельного ЦНД близки между собой. При этом возбуждение смешанной формы ТФО происходит на новой частоте лежащей выше, чем частоты отдельных структурных элементов системы. Кроме этого, в этом случае, максимальные амплитуды на форме отдельного фундамента соответствуют тем участкам, на которые опирается ЦНД. Такая же взаимосвязь наблюдается и для остального спектра частот в рабочем диапазоне частот 0-50 Гц.

На рис. 4 и рис. 5 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) вертикальных податливостей в наиболее важной точке – опоре подшипника ЦНД на фундамент для двух моделей: ТФО и отдельный фундамент, соответственно многокорпусных турбин К-560-23,5 и К-500-65/3000.

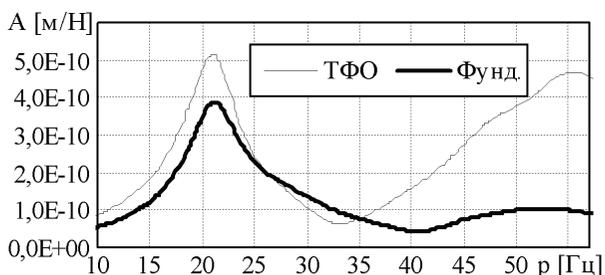


Рисунок 4 – АЧХ в месте опоры подшипника для моделей ТФО и фундамента турбины К-560-23,5

В первом случае ЦНД турбины К-560-23,5 (рис. 4) в районе рабочей частоты 50 Гц имеет две собственные частоты (49,3 Гц и 52,4 Гц), во втором случае (рис. 5) ЦНД турбины К-500-65/3000 в районе рабочей частоты собственных частот не имеет. Однако во втором случае есть собственные частоты фундамента. Это и приводит к повышенным вибрациям опор подшипников на рабочей частоте 50 Гц в обоих случаях.

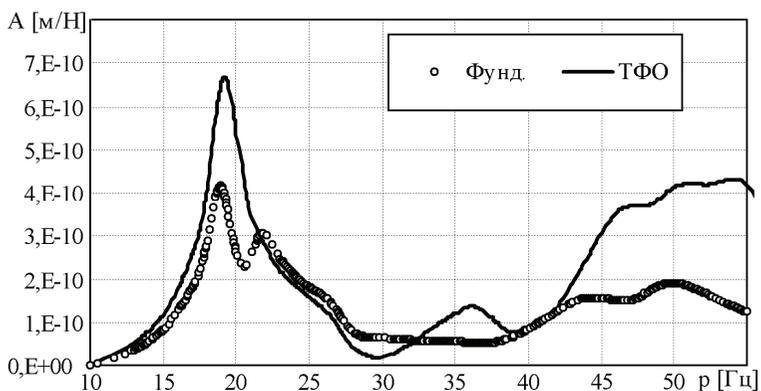


Рисунок 5 – АЧХ в месте опоры подшипника для моделей ТФО и фундамента турбины К-500-65/3000

Таблица 1 – Собственные частоты системы ТФО, фундамента и ЦНД

№	Частота (Гц)		
	ТФО	Фундамент	ЦНД
1	5,740	3,29	5,12
2	8,891	10,57	-
3	10,830	10,79	-
4	10,859	10,85	-
5	14,277	-	15,62
6	15,328	15,31	-
7	15,802	15,87	-
8	18,607	16,66	15,62
9	18,693	16,66	15,62
10	19,056	19,34	-
11	19,446	19,39	-
12	20,518	-	-
13	21,124	21,08	-
14	21,571	21,26	-
15	21,662	21,44	-
16	21,740	21,73	-
17	21,790	21,91	-
18	24,357	23,10	-
19	26,158	26,38	-
20	26,544	26,96	-

Из проведенного анализа можно утверждать, что если для моделей фундамента с массами оборудования и ЦНД на упругих опорах отдельно полу-

чить спектры собственных частот такие, что в рабочем диапазоне 40-55 Гц не будет собственных частот, то и для системы ТФО в целом резонансных частот в рабочем диапазоне тоже не будет.

#### 4 Алгоритм структурной оптимизации системы ТФО

На основании проведенного в разделе 3 анализа предложен алгоритм структурной оптимизации системы турбоагрегат-фундамент - основание для обеспечения заданной динамической податливости выносных опор подшипников ЦНД, представленный на рис. 6.

Для блоков построения моделей фундамента, ЦНД и системы ТФО в целом, а также для определения собственных частот предполагается использовать комплексы инженерного анализа на основе МКЭ.

Отдельную проблему представляет алгоритм блока структурной оптимизации на схеме рис. 6, то есть поиск оптимального места и вида новой структурной связи в конструкции. Для построения его предлагается воспользоваться следующими теоретическими положениями:

- теоремой о наложении связей [7], которая говорит, что наложение жестких дополнительных связей в системе с конечным числом степеней свободы повышает ее собственные частоты;
- тем, что жесткость стержней на растяжение-сжатие на два порядка выше жесткости на изгиб, поэтому необходимо выбирать направление стержня (связи) таким образом, чтобы новая стержневая связь работала на растяжение-сжатие.

В первом приближение алгоритм поиска оптимального положения стержневой связи следующий:

- анализ движения конструкции для отстраиваемой формы колебаний;
- выбор точек с минимальной амплитудой колебаний (жестких точек);
- выбор точек с максимальной амплитудой колебаний (податливых точек);
- создание наборов пар точек в модели, наложение продольной связей между которыми максимально препятствовало главному (превалирующему) колебательному движению формы колебаний;
- наложение абсолютно жесткой связи между ними –  $u_{x1} = u_{x2}$ .
- выбор наиболее чувствительных пар точек на основе анализа спектра частот модели с жесткими связями;
- наложение стержневой связи на чувствительные пары точек с жесткостью реальных стержней;
- подбор параметров стержней на основе параметрической оптимизации.

Если оптимизация односвязанными стержнями не дает результат, то предполагается модифицировать данный алгоритм структурными связями типа стержневых ферм (треугольник, трапеция, крест и т.п.).

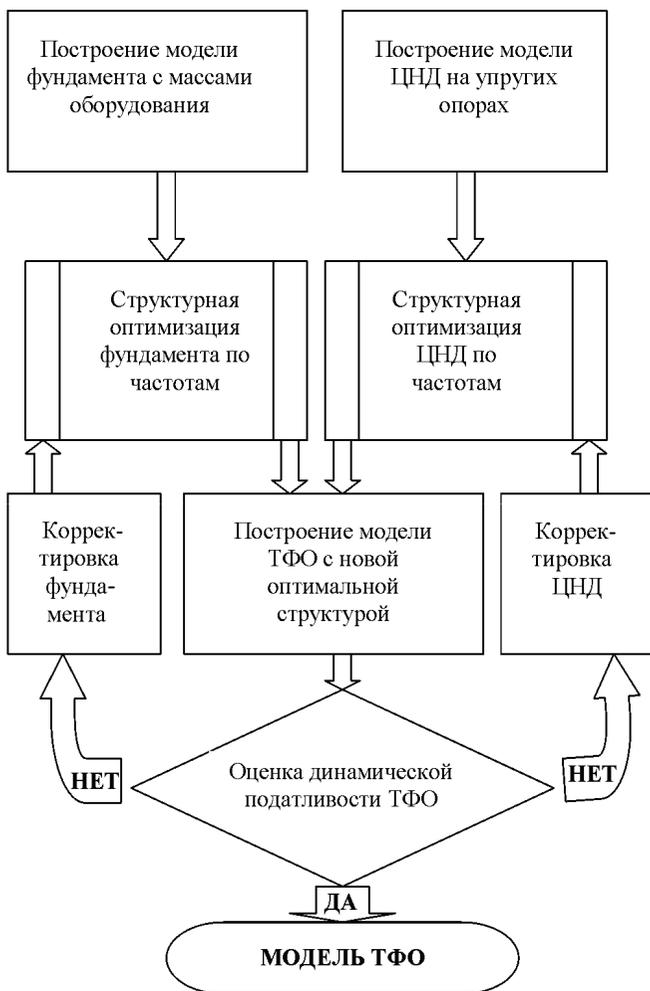


Рисунок 6 – Схема алгоритма структурной оптимизации системы ТФО

### Выводы

- 1 Проведен анализ динамического взаимодействия фундамента и корпусов ЦНД в системе ТФО для многокорпусных турбоагрегатов.
- 2 Предложен алгоритм оптимизации динамических характеристик системы ТФО на основе раздельной оптимизации структурных элементов системы.
- 3 Предложен алгоритм оптимального поиска структурной связи стержневого вида.

**Список литературы:** 1. *Степченко А.С.* Численные исследования динамических характеристик системы турбоагрегат-фундамент // Дисс. на соиск. ученой степени канд. техн. наук. – Харьков. Гос. политех. ун-тет, 1994. – 194 с. 2. *Жовдак В.А., Красников С.В., Степченко А.С., Торяник А.В.* Исследование явления расстройки в многокорпусных турбоагрегатах на основе компьютерной модели // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХП», 2008. – № 47. – С. 70-79. 3. *Степченко О.С., Красніков С.В., Торянік О.В.* Комп'ютерне моделювання багатокорпусного турбоагрегата у системі турбоагрегат – фундамент – основа // Машинознавство. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2009. – № 2 (140). – С. 27-33. 4. *Красніков С.В., Ларін О.О., Огороднік О.О.* Моделювання вібраційного стану пластинчато-стрижневої системи // Вісник НТУ «ХП». Тем. випуск «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХП», 2009. – № 42. – С. 77-81. 5. *Гринев В.Б., Филиппов А.П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. – К.: Наукова думка, 1975. – 542 с. 6. *Ізлін С.П.* Оптимізація форми елементів конструкцій. – Харків: НТУ «ХП», 2009. – 240 с. 7. *Бабаків І.М.* Теорія коливаний. – М.: Наука, 1968. – 640 с.

*Поступила в редколлегию 15.09.2010*

УДК 534.1

**А.Д.ШАМРОВСКИЙ**, д-р техн. наук, проф., Запорожская государственная инженерная академия;  
**М.А.ШАМРОВСКИЙ**, инженер, Запорожский национальный технический университет;  
**А.С.БЕЗНОС**, асп., Запорожская государственная инженерная академия

## **РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ**

У даній роботі запропоновано метод розв'язання динамічних задач для твердих тіл з пружними зв'язками. Проводиться тестування запропонованого метода на конкретній задачі механіки про зміщення шліфувальної бабки металообробного станка. Наводиться також обґрунтування використання саме таких підходів для розв'язання динамічних задач механіки і створення нових методів розв'язання динамічних задач механіки. Запропонований метод орієнтовано для використання ЕОМ, він є надійним та простим у реалізації.

The approach for solving dynamic problems with rigid bodies and spring linkage being proposed in this article. The testing of proposed approach at concrete mechanical application about displacement of wheelhead of metal-working machine-tool was carried out. The substantiation of using and creating such approaches for solution of dynamic problems is adduced. The approach is oriented for implementation using ECM and it is reliable and can be implemented with ease.

### **Вступление**

При проектировании металлорежущих станков требуется знать жесткости ответственных узлов станков с целью правильного определения погрешностей, которые могут вноситься в размеры обрабатываемых деталей при не-

достаточной жесткости этих узлов. Такая задача весьма специфична и для ее решения может потребоваться специализированный подход. В работе рассматривается подход к расчету на жесткость некоторых узлов металлообрабатывающего станка при помощи создания специализированных расчетных схем и упрощенных методов расчетов. Такой подход сочетает в себе достаточную степень надежности получаемых результатов с высокой простотой и наглядностью процедуры их получения.

### Материалы и методика исследований

В работах [1], [2] представлен метод решения задач о движении материальных точек, с упругими связями. В данной работе этот метод развивается для более сложных задач о плоском движении твердых тел. Продемонстрировано применение метода для решения практических задач.

### Теория и анализ полученных результатов

Рассмотрим конструкцию, состоящую из твердого тела, прикрепленного произвольным количеством  $n$  упругих стержней к неподвижному основанию (см. рис. 1).

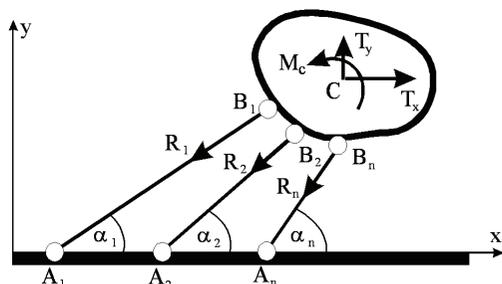


Рисунок 1 – Твердое тело, прикрепленное стержнями к неподвижному основанию

Концы стержней прикреплены к телу и основанию шарнирно. Нагрузки, действующие на тело, приведены к его центру масс  $C$  в виде составляющих  $T_x, T_y$  главного вектора действующих на тело сил и главного момента  $M_c$  этих сил. Требуется изучить плоскопараллельное движение твердого тела при произвольных начальных условиях. Рассмотрим два метода решения этой задачи.

**Первый метод.** Составим уравнения движения тела в виде:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_C}{dt^2} &= \sum F_x ; \\ m \frac{d^2 v_C}{dt^2} &= \sum F_y ; \end{aligned} \quad (1)$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_C .$$

Здесь первые два уравнения описывают поступательное движение тела вместе с центром масс; третье – вращательное движение относительно оси, проходящей через центр масс. Используются следующие обозначения:  $u_C, v_C$  – смещения центра масс тела из положения, в котором находится тело при отсутствии нагрузки и реакций стержней, то есть из недеформированного состояния системы;  $\varphi$  – угол поворота тела;  $m$  – масса тела;  $J$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; в правых частях первых двух уравнений (1) стоят суммы проекций всех сил, действующих на тело, на оси  $x$  и  $y$  соответственно; в правой части третьего уравнения стоит сумма моментов всех этих сил относительно центра масс.

Запишем выражения для правых частей уравнений, считая все стержни растянутыми (см. рис. 1):

$$\sum F_x = T_x - \sum_{i=1}^n R_i \cos \alpha_i ; \quad (2)$$

$$\sum F_y = T_y - \sum_{i=1}^n R_i \sin \alpha_i ;$$

$$\sum m_C = M_C + \sum_{i=1}^n [R_i (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i - R_i (y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i] .$$

При нахождении моментов реакций используется стандартный прием вычисления моментов отдельно для вертикальной и горизонтальной составляющих этих реакций. Величины  $x_C, y_C, x_{B_i}, y_{B_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) задают координаты соответствующих точек в недеформированном состоянии системы.

Выразим реакции через величины  $x_C, y_C, \varphi$ . Запишем следующие формулы для перемещений вдоль осей  $x$  и  $y$  точек крепления стержней к телу:

$$u_{B_i} = u_C + (y_C - y_{B_i})\varphi; \quad v_{B_i} = v_C + (x_C - x_{B_i})\varphi \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Выразим через эти перемещения деформации стержней:

$$\Delta_i = u_{B_i} \cos \alpha_i + v_{B_i} \sin \alpha_i . \quad (4)$$

Для реакций стержней имеем:

$$R_i = D_i \Delta_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Жесткости стержней  $D_i$  вычисляются по формулам:

$$D_i = \frac{E_i S_i}{L_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6)$$

где  $E_i$  – модули упругости,  $S_i$  – площади поперечных сечений,  $L_i$  – длины соответствующих стержней.

Подставляя (3) в (4) и результат в (5), получаем:

$$R_i = D_i \left\{ u_C \cos \alpha_i + v_C \sin \alpha_i + [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i] \varphi \right\} \quad (7)$$

( $i = 1, \dots, n$ ).

Подставляя (7) в (2) и результат в (1) имеем:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_C}{dt^2} + a_{11} u_C + a_{12} v_C + a_{13} \varphi &= T_x; \\ m \frac{d^2 v_C}{dt^2} + a_{21} u_C + a_{22} v_C + a_{23} \varphi &= T_y; \\ J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + a_{31} u_C + a_{32} v_C + a_{33} \varphi &= M_C, \end{aligned} \quad (8)$$

где:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{i=1}^n D_i \cos^2 \alpha_i; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n D_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i; \\ a_{13} &= a_{31} = \sum_{i=1}^n D_i [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i] \cos \alpha_i; \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^n D_i \sin^2 \alpha_i; \quad a_{23} = a_{32} = \sum_{i=1}^n D_i [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i] \sin \alpha_i; \\ a_{33} &= \sum_{i=1}^n D_i [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i]^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, решение поставленной задачи об изучении движения твердого тела сведено к решению системы дифференциальных уравнений (8). Выполним это решение. Вначале решим статические уравнения:

$$\begin{aligned} a_{11} u_C^* + a_{12} v_C^* + a_{13} \varphi^* &= T_x; \\ a_{21} u_C^* + a_{22} v_C^* + a_{23} \varphi^* &= T_y; \\ a_{31} u_C^* + a_{32} v_C^* + a_{33} \varphi^* &= M_C, \end{aligned} \quad (10)$$

отвечающие постоянным значениям искомых величин.

Затем делаем замену:

$$u_C = u_C^* + U; \quad v_C = v_C^* + V; \quad \varphi = \varphi^* + \Phi. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (8) получаем однородные уравнения:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 U}{dt^2} + a_{11} U + a_{12} V + a_{13} \Phi &= 0; \\ m \frac{d^2 V}{dt^2} + a_{21} U + a_{22} V + a_{23} \Phi &= 0; \\ J \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + a_{31} U + a_{32} V + a_{33} \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{m}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{m}; \quad b_{13} = \frac{a_{13}}{m}; \quad b_{21} = \frac{a_{21}}{m}; \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{m}; \quad b_{23} = \frac{a_{23}}{m}; \quad (13)$$

$$b_{31} = \frac{a_{31}}{J}; \quad b_{32} = \frac{a_{32}}{J}; \quad b_{33} = \frac{a_{33}}{J},$$

переходя к уравнениям:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + b_{11}U + b_{12}V + b_{13}\Phi = \mathbf{0}; \quad (14)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + b_{21}U + b_{22}V + b_{23}\Phi = \mathbf{0};$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + b_{31}U + b_{32}V + b_{33}\Phi = \mathbf{0}.$$

Разыскиваем решение уравнений (14) в виде:

$$U = A \sin(\omega t + \delta), \quad V = B \sin(\omega t + \delta), \quad \Phi = C \sin(\omega t + \delta). \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) приходим к системе алгебраических уравнений:

$$(b_{11} - \omega^2)A + b_{12}B + b_{13}C = 0; \quad (16)$$

$$b_{21}A + (b_{22} - \omega^2)B + b_{23}C = 0;$$

$$b_{31}A + b_{32}B + (b_{33} - \omega^2)C = 0.$$

Приравниваем к нулю определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} - \omega^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \omega^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Раскрывая этот определитель, получаем бикубическое уравнение относительно  $\omega$ :

$$\omega^6 - c_1\omega^4 + c_2\omega^2 - c_3 = 0. \quad (18)$$

Здесь:

$$c_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \quad (19)$$

$$= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32};$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{12}b_{23}b_{31} - \quad (20)$$

$$-b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{23}b_{32}b_{11}.$$

Решая уравнение (18) каким-либо численным методом, например, методом касательных Ньютона, находим три квадрата частоты:  $\omega_1^2$ ,  $\omega_2^2$ ,  $\omega_3^2$ , а затем три частоты:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3. \quad (21)$$

Возвращаясь к уравнениям (16) подставляем найденные частоты по очереди в первые два уравнения, обозначая соответствующими индексами и амплитуды:

$$(b_{11} - \omega_i^2)A_i + b_{12}B_i + B_{13}C_i = 0; \quad (22)$$

$$b_{21}A_i + (b_{22} - \omega_i^2)B_i + b_{23}C_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Решая эти уравнения, выражаем величины  $A_i$  и  $B_i$  через  $C_i$ :

$$A_i = \alpha_i C_i; \quad B_i = \beta_i C_i; \quad (23)$$

$$\alpha_i = \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}(b_{22} - \omega_i^2)}{(b_{11} - \omega_i^2)(b_{22} - \omega_i^2) - b_{12}b_{21}}; \quad \beta_i = \frac{b_{21}b_{13} - b_{23}(b_{11} - \omega_i^2)}{(b_{11} - \omega_i^2)(b_{22} - \omega_i^2) - b_{12}b_{21}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Общее решение уравнений (14) имеет вид:

$$U = \alpha_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \alpha_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \alpha_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3); \quad (24)$$

$$V = \beta_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \beta_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \beta_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3);$$

$$\Phi = C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3).$$

Из (11) получаем:

$$u_C = u_C^* + \alpha_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \alpha_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \alpha_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3); \quad (25)$$

$$v_C = v_C^* + \beta_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \beta_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \beta_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3);$$

$$\varphi = \varphi^* + C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3);$$

$$\dot{u}_C = \alpha_1 \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \alpha_2 \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \alpha_3 \omega_3 C_3 \cos(\omega_3 t + \delta_3);$$

$$\dot{v}_C = \beta_1 \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \beta_2 \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \beta_3 \omega_3 C_3 \cos(\omega_3 t + \delta_3);$$

$$\dot{\varphi} = \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \omega_3 C_3 \cos(\omega_3 t + \delta_3).$$

Для нахождения констант интегрирования  $C_1, C_2, C_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  используем начальные условия:

$$t_0 = 0; \quad u_{C0}, \quad v_{C0}, \quad \varphi_0, \quad \dot{u}_{C0}, \quad \dot{v}_{C0}, \quad \dot{\varphi}_0. \quad (26)$$

Из (25) имеем:

$$\alpha_1 C_1 \sin \delta_1 + \alpha_2 C_2 \sin \delta_2 + \alpha_3 C_3 \sin \delta_3 = u_{C0} - u_C^*; \quad (27)$$

$$\beta_1 C_1 \sin \delta_1 + \beta_2 C_2 \sin \delta_2 + \beta_3 C_3 \sin \delta_3 = v_{C0} - v_C^*;$$

$$C_1 \sin \delta_1 + C_2 \sin \delta_2 + C_3 \sin \delta_3 = \varphi_0 - \varphi^*;$$

$$\alpha_1 \omega_1 C_1 \cos \delta_1 + \alpha_2 \omega_2 C_2 \cos \delta_2 + \alpha_3 \omega_3 C_3 \cos \delta_3 = \dot{u}_{C0};$$

$$\beta_1 \omega_1 C_1 \cos \delta_1 + \beta_2 \omega_2 C_2 \cos \delta_2 + \beta_3 \omega_3 C_3 \cos \delta_3 = \dot{v}_{C0};$$

$$\omega_1 C_1 \cos \delta_1 + \omega_2 C_2 \cos \delta_2 + \omega_3 C_3 \cos \delta_3 = \dot{\varphi}_0.$$

Первые три из уравнений (27) решаем относительно величин:

$$C_{is} = C_i \sin \delta_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Последние три из этих уравнений решаем относительно величин:

$$C_{ic} = C_i \cos \delta_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (29)$$

После этого находим искомые величины:

$$C_i = \sqrt{C_{is}^2 + C_{ic}^2}; \quad \delta_i = \arctg \frac{C_{is}}{C_{ic}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (30)$$

Задача полностью решена.

### Программная реализация алгоритма

Рассмотрим применение полученных результатов к конкретному примеру из инженерной практики. На рис. 2 изображен чертеж Шлифовальной Бабки (ШБ), то есть узла шлифовального станка, предназначенного для крепления мотора, вращающего шлифовальный круг, и самого круга.

На современных станках с Числовым Программным Управлением (ЧПУ) ШБ совершает горизонтальные перемещения с достаточно большими ускорениями. Возникающие при этом силы инерции деформируют ШБ, что приводит к потере точности шлифовки. В связи с этим в процессе проектирования ШБ необходимо иметь возможность расчета деформаций с целью создания достаточно жесткой конструкции, для которой эти деформации не будут превышать некоторых допустимых значений.

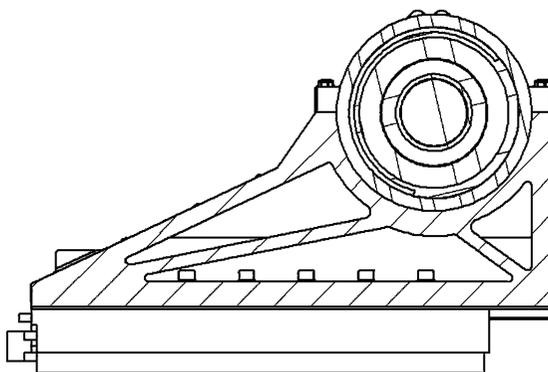


Рисунок 2 – Поперечный разрез шлифовальной бабки

На рис. 3 изображена упрощенная расчетная схема для данной конструкции. Для стержней жесткое крепление к обойме заменено на шарнирное.

Рассмотрим пример конкретного расчета. Зададим следующие характеристики стержней:

Первый стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A1} = 0$ ;  $y_{A1} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B1} = 354$  мм;  $y_{B1} = 225$  мм; площадь поперечного сечения:  $S_1 = 20 \times 500 = 10000 \text{ мм}^2$  (20 – толщина стержня, 500 – его размер в направлении, перпендикулярном рисунку); модуль упругости материала:  $E_1 = 66000 \text{ Н/мм}^2$ .

Второй стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A2} = 0$ ;  $y_{A1} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B2} = 450$  мм;  $y_{B2} = 225$  мм; площадь поперечного сечения:  $S_2 = 15 \times 500 = 7500$  мм<sup>2</sup>; модуль упругости материала:  $E_2 = 66000$  Н/мм<sup>2</sup>.

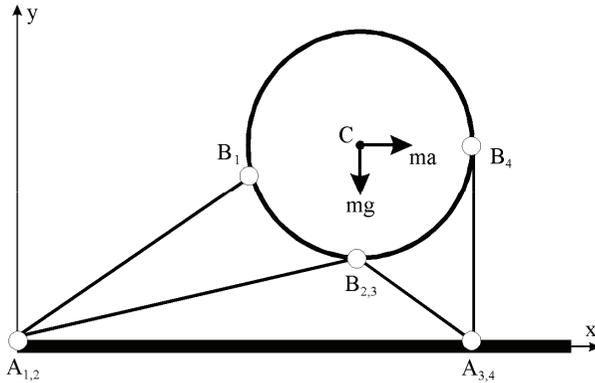


Рисунок 3 – Расчетная схема шлифбабки

Третий стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A3} = 625$  мм;  $y_{A3} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B3} = 450$  мм;  $y_{B3} = 111$  мм; площадь поперечного сечения:  $S_3 = 15 \times 500 = 7500$  мм<sup>2</sup>; модуль упругости материала:  $E_3 = 66000$  Н/мм<sup>2</sup>.

Четвертый стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A4} = 625$  мм;  $y_{A4} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B4} = 625$  мм;  $y_{B4} = 240$  мм; площадь поперечного сечения:  $S_4 = 25 \times 500 = 12500$  мм<sup>2</sup>; модуль упругости материала:  $E_3 = 66000$  Н/мм<sup>2</sup>.

Координаты центра масс:  $x_C = 471$  мм;  $y_C = 245$  мм; радиус тела:  $R = 134$  мм.

Масса тела:  $m = 350$  кг. Считая тело однородным кругом, вычисляем его момент инерции по формуле:

$$J = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} 350 \times 134^2 = 3142300 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что при задании размеров в миллиметрах единица силы равна:

$$1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 1000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (32)$$

Отсюда для модуля упругости имеем:

$$E = 66000000 \frac{\text{кг}}{\text{мм} \cdot \text{с}^2}. \quad (33)$$

Для всех стержней находим:

$$L_i = \sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{B_i} - y_{A_i})^2}; \quad (34)$$

$$\cos \alpha_i = \frac{x_{B_i} - x_{A_i}}{L_i}; \quad \sin \alpha_i = \frac{y_{B_i} - y_{A_i}}{L_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Таким образом получены все необходимые для расчетов параметры системы.

На тело действует его вес, равный:

$$mg \approx 350 \cdot 10000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2} = 3500000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (35)$$

Следовательно, имеем:

$$T_y = -mg = -3500000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (36)$$

При горизонтальном движении с ускорением  $a$ , которое достигает значения  $g$ , на тело действует горизонтальная сила инерции:

$$T_x = ma = 3500000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (37)$$

Момент в данной задаче равен нулю:  $M_c = 0$ .

Зададим начальные условия. Решая вначале уравнения (10) при  $T_x = 0$ , мы находим статические перемещения центра масс, которые и являются начальными координатами центра масс  $u_{C0}$ ,  $v_{C0}$  при нулевой начальной скорости  $\dot{u}_{C0} = 0$ ;  $\dot{v}_{C0} = 0$ .

Теперь все исходные данные для применения описанного алгоритма заданы. Выполняя соответствующие вычисления получаем изображенную на рис. 4 траекторию центра масс тела (сплошная линия) на некотором начальном промежутке времени. В процессе построения этой траектории мы можем найти максимальное горизонтальное отклонение центра масс. В данном случае имеем:  $u_{C \max} = 0,0000017909$  м. Это значение и является ключевым при проектировании ШБ.

**Метод Ньютона.** Проанализируем описанный выше аналитический метод решения задачи. Во-первых, при его реализации необходимо применять какие-то численные алгоритмы с реализацией на компьютере. Это касается, в первую очередь, вопроса поиска корней характеристического уравнения (18).

Во-вторых, этот метод является, в рамках решения большинства инженерных проблем, в частности, той, которая рассмотрена в примере, избыточным и достаточно сложным.

Рассмотрим другой метод [1], который опирается на исходные идеи Ньютона, примененные им при решении задач небесной механики [3]. Ньютон, фактически, рассматривал только движение материальных точек под действием постоянных сил, то есть равноускоренное движение. В случае переменных сил ре-

шение получалось как последовательность перемещений со скачкообразно изменяющимися значениями сил. Применим подобный подход и здесь.

На тело в его произвольном положении действуют некоторые суммарные нагрузки (2). В частности, эти нагрузки можно рассчитать и для начального момента времени  $t_0$ . С этой целью необходимо вычислить начальные значения реакций стержней при помощи выражений (7), подставляя в них значения  $u_C = u_{C0}$ ;  $v_C = v_{C0}$ ;  $\varphi = \varphi_0$ , а затем подставить найденные реакции в (2). Считая нагрузки постоянными на некотором небольшом промежутке времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$  запишем закон движения тела:

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C0} + \dot{u}_{C0}(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2m} \sum F_{x0}; \\ \dot{u}_C &= \dot{u}_{C0} + \frac{t-t_0}{m} \sum F_{x0}; \\ v_C &= v_{C0} + \dot{v}_{C0}(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2m} \sum F_{y0}; \\ \dot{v}_C &= \dot{v}_{C0} + \frac{t-t_0}{m} \sum F_{y0}; \\ \varphi &= \varphi_0 + \dot{\varphi}_0(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2J} \sum m_{C0}; \\ \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_0 + \frac{t-t_0}{J} \sum m_{C0}. \end{aligned} \quad (38)$$

Индекс 0 в выражениях для нагрузок показывает, что они вычислены в момент времени  $t_0$ .

Вычислим все искомые величины в момент времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$ :

$$\begin{aligned} u_{C1} &= u_{C0} + \dot{u}_{C0}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2m} \sum F_{x0}; & \dot{u}_{C1} &= \dot{u}_{C0} + \frac{\Delta t}{m} \sum F_{x0}; \\ v_{C1} &= v_{C0} + \dot{v}_{C0}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2m} \sum F_{y0}; & \dot{v}_{C1} &= \dot{v}_{C0} + \frac{\Delta t}{m} \sum F_{y0}; \\ \varphi_1 &= \varphi_0 + \dot{\varphi}_0\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2J} \sum m_{C0}; & \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}_0 + \frac{\Delta t}{J} \sum m_{C0}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя в (7) значения  $u_C = u_{C1}$ ;  $v_C = v_{C1}$ ;  $\varphi_C = \varphi_{C1}$  находим новые реакции стержней и, при помощи (2), новые суммарные нагрузки, действующие на тело  $\sum F_{x1}$ ;  $\sum F_{y1}$ ;  $\sum m_{C1}$ . Вычисляем приращения:

$$\Delta F_x = \sum F_{x1} - \sum F_{x0}; \quad \Delta F_y = \sum F_{y1} - \sum F_{y0}; \quad \Delta m_C = \sum m_{C1} - \sum m_{C0}. \quad (40)$$

Мы не учитывали изменение нагрузок на промежутке времени от  $t_0$  до  $t_1$ . Для компенсации накопившейся погрешности будем считать, что нагрузки в момент времени  $t_1$  изменились не на величины (40), а вдвое больше, получая:

$$\sum F_{x1} = \sum F_{x0} + 2\Delta F_x; \quad \sum F_{y1} = \sum F_{y0} + 2\Delta F_y; \quad \sum m_{C1} = \sum m_{C0} + 2\Delta m_C. \quad (41)$$

Выполняем замены:

$$t_0 = t_1; \quad u_{C0} = u_{C1}; \quad \dot{u}_{C0} = \dot{u}_{C1}; \quad v_{C0} = v_{C1}; \quad \dot{v}_{C0} = \dot{v}_{C1}; \quad \varphi_0 = \varphi_1; \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1. \quad (42)$$

$$\sum F_{x0} = \sum F_{x1}; \quad \sum F_{y0} = \sum F_{y1}; \quad \sum m_0 = \sum m_1.$$

повторяем вычисления, начиная с (39). Вычисления заканчиваются после достижения некоторого заданного конечного момента времени  $t_k$ .

В итоге мы получаем значения всех искомых величин на дискретном множестве значений времени  $t$  с шагом  $\Delta t$ . Достижение заданной точности достигается, как обычно при численном интегрировании, подбором достаточно малого значения шага.

Обратим внимание на следующие особенности предлагаемого метода. Хотя формально это метод численного интегрирования дифференциальных уравнений (8), но для его применения запись уравнений в явном виде не требуется, что значительно облегчает задачу. Метод обладает достаточной устойчивостью, что проверяется при помощи решения тестовых задач.

Применим его для решения той же задачи о динамических деформациях ШБ, которая была рассмотрена выше. Соответствующие результаты (кружочки) изображены на том же рис. 4, на котором приведены результаты, полученные аналитическим методом. Мы видим хорошее совпадение полученных результатов. Это показывает, что предлагаемый упрощенный метод является эффективным при решении инженерных задач.

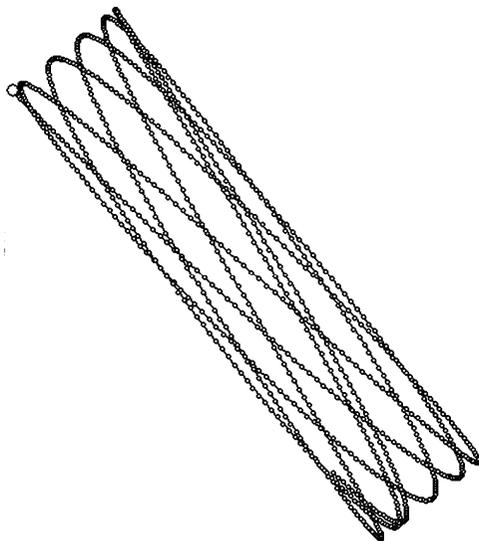


Рисунок 4 – Сравнение численного и аналитического методов. Решение численным методом отобразено непрерывной кривой, аналитическим методом – кружочками

Максимальное смещение от положения равновесия по оси ОХ составляет 0,0000017909 м, по оси ОУ – 0,0000017043 м. Соответствующие частоты (21) будут  $\omega_1 = 2464,21377$  Гц;  $\omega_2 = 7051,16538$  Гц;  $\omega_3 = 3532,83615$  Гц.

### **Выводы**

- 1 Разработан численный метод интегрирования, основанный на идеях Ньютона, подходящий для решения широкого круга задач.
- 2 Исследуется использование этого метода для решения задач механики сплошных сред.

**Список литературы:** 1. *Безнос А.С., Шамровский А.Д.* Решение динамических задач для плоских стержневых систем без использования аппарата дифференциальных уравнений при помощи подхода ньютона // Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2009. – № 2. – С. 124-128. 2. *Кривуляк В.В.* Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем // Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні. – 2008. – № 2. – С. 110-118. 3. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989. – 688 с.

*Поступила в редколлегию 06.05.2010.*

УДК 622.673

*Л.В.ШИПУЛИНА*, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;  
*Н.В.СЕРЕДА*, канд. техн. наук, доц., ХНАГХ

### **ДИНАМИКА УПРУГИХ СИСТЕМ МНОГОКАНАТНЫХ ШАХТНЫХ ПОДЪЕМНЫХ УСТАНОВОК**

У статті побудована й обґрунтована уточнена математична модель багатоканатної піднімальної установки й досліджені динамічні процеси, що виникають у всіх її елементах, з метою підвищення міцності й довговічності піднімальних канатів і канатів, що врівноважують. Приводяться результати розрахунків.

In article the specified mathematical model of multirope elevating installation is constructed and proved and the dynamic processes, arising in all its elements, for the purpose of increase of strength and durability of elevating and counterbalancing ropes are investigated. The numerical results are presented.

Шахтная подъемная установка представляет собой единую электромеханическую систему «электропривод – машина – канаты – концевые грузы», динамические процессы в которой зависят от упругих характеристик ее элементов и во многом определяются характером движущих сил электропривода [1, 2].

Динамические процессы в подъемной машине описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, учи-

тывающих продольно-крутильные колебания подъемных канатов и продольные колебания уравнивающих канатов [2, 3]:

$$\begin{cases} \frac{q_1}{g} \cdot \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial t^2} = E_1 F_1 \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial x^2} + k_1 E_1 F_1 \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_1}{g} (g \pm \dot{V}_c); \\ \frac{q_1 r_1^2}{g} \cdot \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} = k_1 E_1 F_1 \frac{\partial^2 U_i(x,t)}{\partial x^2} + (B + k_1^2 E_1 F_1) \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2}; \\ \frac{q_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 \omega_i(x,t)}{\partial t^2} = E_2 F_2 \frac{\partial^2 \omega_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q_2}{g} (g \pm \dot{V}_c); \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где  $U_i$ ,  $\theta_i$  – продольные и крутильные деформации подъемных канатов;  $\omega_i$  – продольная деформация уравнивающих канатов;  $q_1$ ,  $r_1$  – погонный вес и радиус инерции единицы длины подъемного каната;  $E_1 F_1$ ,  $E_2 F_2$  – жесткость соответственно подъемного и уравнивающего канатов при чистом растяжении;  $B$  – жесткость подъемного каната при чистом кручении;  $k_1$  – коэффициент взаимности крутящих и продольных деформаций подъемного каната;  $\dot{V}_c$  – ускорение точек обода шкива;  $g$  – ускорение свободного падения. Деформации, нагрузки, напряжения и другие обозначения, относящиеся к поднимающейся ветви подъемного каната, обозначены индексом 1, а для опускающейся ветви каната – индексом 2.

При описании движения перекинутого через шкив подъемного каната с двумя концевыми грузами  $Q_1$  и  $Q_2$ , расположенными в направляющих, использовались следующие граничные условия [2, 3]:

а) в поперечных сечениях ветвей каната  $x = l_i(t)$

$$U_i(l_i, t) = \int_0^l \frac{\partial U_i(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \quad \theta_i(l_i, t) = \int_0^l \frac{\partial \theta_i(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

б) в поперечном сечении каната при  $x = L_i$  граничным условием будет уравнения движения концевых грузов по жестким направляющим, которые исключают возможность раскручивания

$$\begin{aligned} U_i(L_i, t) &= \omega_i(L_i, t); & \theta_i(L_i, t) &= 0; \\ \frac{Q_i}{g} \cdot \frac{\partial^2 U_i(L_i, t)}{\partial t^2} + E_1 F_1 \frac{\partial U_i(L_i, t)}{\partial x} + k_1 E_1 F_1 \frac{\partial \theta_i(L_i, t)}{\partial x} - \\ - E_2 F_2 \frac{\partial \omega_i(L_i, t)}{\partial x} &= Q_i \left( 1 \pm \frac{\dot{V}_c}{g} \right); \end{aligned} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

в) в нижнем конце уравнивающего каната  $x = z_i + l_i(t)$

$$E_2 F_2 \frac{\partial \omega_i(z_i + l_i, t)}{\partial x} = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (4)$$

Начальные условия для определения функций  $U_i(x,t)$ ,  $\theta_i(x,t)$  и  $\omega_i(x,t)$  име-

ют вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} U_i(x,0) &= f_i(x); & \theta_i(x,0) &= \varphi_i(x); & \omega_i(x,0) &= p_i(x); \\ \frac{\partial U_i(x,0)}{\partial t} &= F_i(x); & \frac{\partial \theta_i(x,0)}{\partial t} &= \Phi_i(x); & \frac{\partial \omega_i(x,0)}{\partial t} &= P_i(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $f_i, \varphi_i, p_i, F_i, \Phi_i, P_i$  ( $i = 1, 2$ ) – известные функции  $x$ , найденные из условия статического равновесия подъемной установки при  $t = 0$ .

В целях преобразования уравнений в частных производных (1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений используется сначала переход к интегро-дифференциальным уравнениям путем прямого интегрирования системы (1) по геометрической координате и исключения граничных условий (2)-(4).

В случае, когда длина каната является функцией медленного времени  $\tau = \varepsilon t$ , где  $\varepsilon$  – малый параметр, целесообразно в полученной системе интегро-дифференциальных уравнений перейти к новым переменным  $V_1^{(i)}(x, t)$ ,  $V_2^{(i)}(x, t)$ ,  $V_3^{(i)}(x, t)$  ( $i = 1, 2$ ), связанных с  $U_i(x, t)$ ,  $\theta_i(x, t)$  и  $\omega_i(x, t)$  соотношением:

$$\begin{aligned} U_i(x, t) &= V_1^{(i)}(x, t) + \int_0^t \frac{\partial V_1^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt + \frac{k_1(x - l_i)}{L_i - l_i} \int_0^t \frac{\partial V_2^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \\ \theta_i(x, t) &= V_2^{(i)}(x, t) + \frac{L_i - x}{L_i - l_i} \int_0^t \frac{\partial V_2^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \\ \omega_i(x, t) &= V_3^{(i)}(x, t) + \int_0^t \frac{\partial V_1^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt + k_1 \int_0^t \frac{\partial V_2^{(i)}(l_i, t)}{\partial x} \dot{l}_i dt; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (6)$$

В новых переменных система интегро-дифференциальных уравнений принимает вид, удобный для использования асимптотических методов нелинейной механики для исследования этих уравнений. Решение уравнений найдено в виде асимптотических рядов по собственным формам колебаний:

$$V_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_n^{(k)}(x, l) [a_k \cos \psi_k + \varepsilon U_k^{(1)}(a, \psi, l) + \dots] + V_{ncm}(x, l); \quad (n = 1 \div 3) \quad (7)$$

в которых функции  $a_k(l)$  и фазы  $\psi_k(t)$  отдельных тонов колебаний определяются из системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \varepsilon A_k^{(1)}(a, \psi, l) + \dots; & \frac{d\psi_k}{dt} &= \lambda_k(l) + \varepsilon B_k^{(1)}(a, \psi, l) + \dots \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Здесь  $\lambda_k$  – собственные числа, а функции  $U_k^{(1)}(a, \psi, l)$  выражают слабую зависимость между отдельными тонами колебаний, появляющуюся при изменении длины колеблющегося каната. Определив первые собственные частоты и формы продольно-крутильных колебаний подъемных канатов и продольных колебаний уравновешивающих канатов и положив в (8)  $k = 1$ , найдем  $a_{1n}^{(m)}(t)$ ,  $\psi_{1n}^{(i)}(t)$  и подставив их в (7), получим окончательные формулы

для переменных  $V_n^{(i)}(x, t)$  и  $\psi_{1n}^{(i)}(t)$  ( $n = 1, 2, 3; i = 1, 2$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1^{(i)}(x, t) = a_{11}(t_0) a_{11}^{(1)}(t)(x - l_i) \cos(\psi_{11}^{(i)} + \gamma_{11}) + a_{12}(t_0) a_{12}^{(1)}(t)(x - l_i) \cdot \\ \cdot \cos(\psi_{12}^{(i)} + \gamma_{12}) + a_{13}(t_0) a_{13}^{(1)}(t)(x - l_i) \cos(\psi_{13}^{(i)} + \gamma_{13}) + V_{1cm}(x, l_i) \\ V_2^{(i)}(x, t) = a_{11}(t_0) a_{11}^{(2)}(t)(x - l_i)(L_i - x) \cos(\psi_{11}^{(i)} + \gamma_{11}) + a_{12}(t_0) a_{12}^{(2)}(t) \cdot \\ \cdot (x - l_i)(L_i - x) \cos(\psi_{12}^{(i)} + \gamma_{12}) + a_{13}(t_0) a_{13}^{(2)}(t)(x - l_i)(L_i - x) \cdot \\ \cdot \cos(\psi_{13}^{(i)} + \gamma_{13}) + V_{2cm}(x, l_i) \\ V_3^{(i)}(x, t) = a_{11}(t_0) a_{11}^{(3)}(t)(x + \beta_i) \cos(\psi_{11}^{(i)} + \gamma_{11}) + a_{12}(t_0) a_{12}^{(3)}(t)(x + \beta_i) \cdot \\ \cdot \cos(\psi_{12}^{(i)} + \gamma_{12}) + a_{13}(t_0) a_{13}^{(3)}(t)(x + \beta_i) \cos(\psi_{13}^{(i)} + \gamma_{13}) + V_{3cm}(x, l_i) \\ \frac{d\psi_{1n}^{(i)}}{dt} = \lambda_n(l_i) \end{array} \right. \quad (9)$$

Таким образом, в результате указанных преобразований система уравнений в частных производных (1) сведена к системе (9), состоящей из 6 алгебраических уравнений (3 для поднимающейся и 3 для опускающейся ветви каната) и 6 обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, причем коэффициенты  $a_{1n}^{(m)}(t)$  ( $m, n = 1, 2, 3$ ) определены из расчета собственных колебаний (как функции длины каната  $l_i$ ), а  $a_{1n}(t_0)$  и  $\gamma_{1n}$  из начальных условий (5).

Система уравнений (9) принята в качестве математической модели подъемной машины при исследовании динамических процессов. К ней нужно добавить уравнения, описывающие процессы в электроприводе:

- а) для подъемной установки с электроприводом по системе «тиристорный преобразователь – двигатель» (ТП-Д)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\mu \frac{dE_d}{dt} + E_d = U_{ax}; \\ ST_\mu \frac{dI_\mu}{dt} + SI_\mu + (1 - S) \omega_1 = E_d; \\ I_1 \omega_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = M_\mu I_\mu; \\ I_2 \omega_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = -R[P_1^{(1)}(x, t) - P_1^{(2)}(x, t)], \end{array} \right. \quad (10)$$

- б) для подъемной установки с асинхронным приводом

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \omega_1 + c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = M_{нач} - \beta \omega_1; \\ I_2 \omega_2 - c_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = -R[P_1^{(1)}(x, t) - P_1^{(2)}(x, t)], \end{array} \right. \quad (11)$$

где  $T_\mu$  – постоянная времени системы управления ТП-Д;  $E_d$  – э.д.с. преобразователя;  $U_{ax}$  – напряжение на входе системы управления;  $T_\mu$  и  $I_\mu$  – постоянная

времени и ток якорной цепи;  $S$  – скольжение;  $c_{12}$  – приведенная крутильная жесткость валопровода;  $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$  и  $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$  – угловые скорости вращения двигателя и ведущего шкива;  $R$  – радиус ведущего шкива;  $M_{нач} - \beta \omega_1$  – момент, развиваемый асинхронным двигателем с учетом переключения ступеней (за счет изменения  $\beta$ );  $P_1^{(1)}(x, t)$  и  $P_1^{(2)}(x, t)$  – усилия каната соответственно поднимающейся и опускающейся ветви.

Совокупность уравнений (9) и (10) или (9) и (11) представляют собой математическую модель подъемной установки как единой электромеханической системы «электропривод–машина–канаты–концевые грузы». При этом влияние процессов в канатах на электропривод определяется членом  $-R[P_1^{(1)}(x, t) - P_1^{(2)}(x, t)]$  в уравнениях (10) и (11), а влияние процессов в электроприводе и валопроводе на колебания в канатах проявляется в коэффициентах  $a_{in}^{(m)}(t)$ , являющимися функциями длины канатов  $l_i$ , где  $l_i$  определялось интегрированием уравнения  $\frac{dl_i}{dt} = \pm R \omega_i$ ; ( $i = 1, 2$ ).

Для исследования динамических усилий и эквивалентных напряжений в упругих элементах шахтной подъемной установки с помощью численного моделирования уравнений (9) и (10) или (9) и (11) рассматривались нормальные режимы: пуск, установившееся движение, торможение.

Установлено, что основное влияние на динамические усилия в упругих элементах подъемной установки в режиме пуска оказывают особенности внешнего силового воздействия, в частности, механические характеристики запуска двигателей. Так, при пуске асинхронного двигателя скачкообразное изменение пускового и движущего момента вызывают значительные колебания динамических усилий в валопроводе и в канатах подъемной машины, что не наблюдается в подъемных установках с тиристорным приводом, вследствие лучших регулировочных характеристик этого привода.

Характер динамических усилий, возникающих в упругих элементах подъемной установки с асинхронным двигателем, в режиме установившегося движения и торможения такой же, как и для подъемной установки с тиристорным двигателем; в этих режимах не наблюдается заметных колебаний динамических усилий.

В режиме торможения динамические усилия в канатах достигают максимального значения в первый период процесса предохранительного торможения, то есть до останова ведущего шкива.

В результате численного исследования получены данные о величинах наибольших продольных и крутильных деформаций и напряжений, возникающих в канатах.

Основным критерием, по которому можно судить о работоспособности каната, следует принимать характер распределения напряжений в его попе-

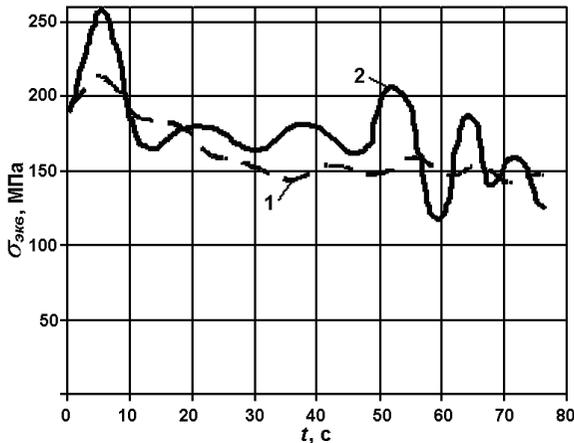
речном сечении. В связи с конструктивными особенностями каната как сложной механической системы, основными напряжениями, возникающими в проволоках каната, являются: нормальные напряжения от осевого растяжения  $\sigma_{раст}$ , изгибные нормальные напряжения  $\sigma_{изг}$ , касательные напряжения от кручения  $\tau_{кр}$  и эквивалентное напряжение

$$\sigma_{эkv} = \sqrt{(\sigma_{раст} + \sigma_{изг})^2 + 3\tau_{кр}^2} .$$

Расчет напряжений по всей длине каната показал, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в подъемных канатах груженой ветви в верхнем крайнем положении сосуда в стволе, а наименьшие эквивалентные напряжения возникают в разгруженной ветви каната при нахождении сосуда в нижнем крайнем положении. Общая картина распределения напряжений показывает, что разброс напряжений по длине каната увеличивается по мере уменьшения длины каната.

Аналогичная картина распределения напряжений по длине каната наблюдается в уравнивающих канатах; максимальные напряжения уравнивающий канат испытывает вблизи верхней приемной площадки.

На рисунке приведены значения напряжений, возникающих в поднимающейся ветви головного каната подъемной установки, полученные для двух типов приводов: тиристорного и асинхронного, что позволяет сравнить между собой эти приводы с позиций прочности механической части подъемной установки.



Напряжения в поднимающейся ветви головного каната подъемной установки с:  
1 – тиристорным приводом; 2 – асинхронным приводом

На основании полученных напряжений по кривым долговечности каната можно оценить, что срок службы канатов при переходе с асинхронного на тиристорный привод увеличивается в 1,6 раза.

**Список литературы:** 1. *Найденко И.С., Белый В.Д.* Шахтные многоканатные подъемные установки. – М.: Недра, 1979. – 391 с. 2. *Степанов А.Г.* Динамика шахтных подъемных установок. – М.: Наука, 1994. – 203 с. 3. *Степанов А.Г.* Динамика машин. – Екатеринбург: УрО РАН, 1999. – 304 с.

*Поступила в редколлегию 11.01.2010*

УДК 539.3

**Е.Г.ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»  
**Н.И.ВОРОПАЙ**, аспирант, ХНАДУ

### **УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**

Досліджено неосесиметричне деформування круглої пружної нескінченно довгої циліндричної оболонки під дією навантаження. Розглянуто керування прогином оболонки. Моделювання деформування оболонки виконується на основі уточненої теорії С.П. Тимошенка. При визначенні керуючої сили використано метод регуляризації А.М. Тихонова.

An asymmetric deformation of the cylindrical shell under impulse load is investigated. The shell is supposed to be round, elastic and infinitely long. The controlling of the shell deflection is considered. The simulation of the shell deforming is based on S.P. Timoshenko's refined theory. The Tihonov's regularizing method is used at determination control force.

В данной работе представлена постановка и решение задачи управления нестационарными колебаниями цилиндрической оболочки. Сущность указанной задачи в следующем: пусть на бесконечно длинную круглую упругую цилиндрическую оболочку воздействует нагрузка, закон изменения во времени которой известен и которая вызывает первичный нестационарный колебательный процесс. Предположим также, что на колебания оболочки налагается некоторое условие (критерий управления) в некоторой точке вдоль направляющей ее срединной поверхности. Для удовлетворения требуемого условия к цилиндрической оболочке прилагается управляющая сила в некоторой другой точке, закон изменения которой во времени подлежит определению.

Задача управления нестационарными колебаниями оболочки состоит в определении закона изменения управляющей силы во времени при условии задания конкретной точки приложения этой силы. Удовлетворение критерию колебаний реализует управление только в одной точке оболочки.

Рассмотрим математическую постановку задачи управления для цилиндрической оболочки (рис. 1). Пусть возмущающая сила  $Q(t^*)$  приложена в точке  $\theta_0$ ; точка, в которой требуется управлять колебаниями –  $\theta_s$ ;  $\theta_c$  – точка

приложения неизвестного управляющего воздействия  $G(t^*)$  (рис. 1).

Уравнения линейных колебаний цилиндрической оболочки с учетом инерции вращения и поперечного сдвига [1, 2] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial s} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ k_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{a} \right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} P - \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - k_1^2 \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \psi \right) - \gamma^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$ ,  $w$  – компоненты перемещения срединной поверхности оболочки в радиальном и окружном направлениях соответственно;  $\psi$  – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;  $a$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $\gamma^2 = \rho(1-\nu^2)/E$ ;  $k_1^2 = k^2(1-\nu)/2$  – коэффициент сдвига;  $s$  – окружная координата;  $P$  – нагрузка, которая описывается функцией, независимой от продольной координаты и является четной функцией угловой координаты.

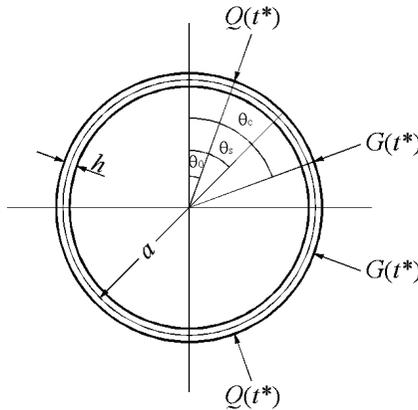


Рисунок 1 – Схема нагружения цилиндрической оболочки

Укажем, что нагрузка  $P(\theta, t^*) = Q(\theta, t^*) + G(\theta, t^*)$ , причем  $Q(\theta, t^*) = Q(t^*) \cdot \delta(\theta - \theta_0)$ ;  $G(\theta, t^*) = G(t^*) \cdot \delta(\theta - \theta_c)$ . Здесь  $t^* = t\sqrt{E}/(a\sqrt{\rho(1-\nu^2)})$  – безразмерное время,  $\theta = s/a$  – угловая координата.

Построение решения системы (1) при нулевых начальных условиях изложено в работе [1]. Отметим только, что оно ищется в виде разложений в ряды Фурье.

Для исследования управления колебаниями оболочки в сформулированной

постановке достаточно иметь выражения для прогиба  $w(\theta, t^*)$  и оно следующее:

$$w(\theta, t^*) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} P_0(\tau) \sin(t^* - \tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{(B_k - \omega_{ki}^2)(C_k - \omega_{ki}^2)}{\omega_{ki} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{kj}^2 - \omega_{ki}^2)} \int_0^{t^*} P_k(\tau) \sin \omega_{ki}(t^* - \tau) d\tau \cos k\theta. \quad (2)$$

На основе (2) рассмотрим выражение для точки цилиндрической оболочки, в которой необходимо выполнить условие управления

$$w(\theta_s, t^*) = \int_0^{t^*} Q(\tau) K_Q(t^* - \tau) d\tau + \int_0^{t^*} G(\tau) K_G(t^* - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $K_Q(t^*) = K_{Q0}(t^*) + K_{Qk}(t^*)$ ;  $K_G(t^*) = K_{G0}(t^*) + K_{Gk}(t^*)$ . Причем,

$$K_{Q0}(t^*) = \frac{(1 - \nu^2)a^2}{Eh} \cdot \theta_0 \cdot \sin(t^*); \quad K_{Qk}(t^*) = \sum_{k=1}^K \frac{2(1 - \nu^2)r^2}{Eh\pi k} \cdot \sin(k\theta_0) \cdot \cos(k\theta_s) \cdot \Omega_k;$$

$$K_{G0}(t^*) = \frac{(1 - \nu^2)a^2}{Eh} \cdot \theta_c \cdot \sin(t^*); \quad K_{Gk}(t^*) = \sum_{k=1}^K \frac{2(1 - \nu^2)r^2}{Eh\pi k} \cdot \sin(k\theta_c) \cdot \cos(k\theta_s) \cdot \Omega_k,$$

а выражение для величины  $\Omega_k$ , входящий в приведенные формулы, таково

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^3 \frac{(B_k - \omega_{ki}^2)(C_k - \omega_{ki}^2)}{\omega_{ki} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{kj}^2 - \omega_{ki}^2)} \cdot \sin(\omega_{ki} t^*).$$

Предположим, условием управления является полное устранение колебаний в точке  $\theta_s$ , то есть  $w(\theta_s, t^*) = 0$ . Тогда для нахождения управляющей силы необходимо решить следующее уравнение, вытекающее из (3)

$$\int_0^{t^*} Q(\tau) K_Q(t^* - \tau) d\tau = - \int_0^{t^*} G(\tau) K_G(t^* - \tau) d\tau, \quad (4)$$

которое является линейным интегральным уравнением Вольтерра I рода относительно функции  $G(t^*)$ .

В силу некорректности поставленной задачи [1, 3] получить точное решение уравнения (4) невозможно. Однако можно построить приближенное решение посредством применения регуляризирующего алгоритма, описанного подробно в [1] и основанного на введении сглаживающего функционала А.Н. Тихонова.

Запишем уравнение (4) в операторной форме:

$$A_Q \cdot Q = A_G \cdot G, \quad (5)$$

где  $A_Q$  – интегральный оператор, соответствующий ядру  $K_Q(t^* - \tau)$ ;  $A_G$  – ядру

$K_G(t^* - \tau)$ .

В матричной форме СЛАУ, из которой находится приближенное решение уравнения (5), на основе методики А.Н. Тихонова [1] можно записать так:

$$(\mathbf{A}_G^T \mathbf{A}_G + \alpha \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G} = -\mathbf{A}_G^T \mathbf{A}_Q \cdot \mathbf{Q}, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{C}$  – симметричная трехдиагональная матрица.

Численный расчет управляющей силы был выполнен при следующих параметрах:  $a = 0,3$  м;  $h = 0,04$  м;  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $k^2 = 5/6$ ;  $\theta_0 = 0,25$ ;  $\theta_s = 0,3$ ;  $\theta_c = 0,35$ ;  $\alpha = 10^{-21}$ .

Результаты решения СЛАУ (6) приведены на рис. 2, где на графике кривой 1 соответствует закон изменения во времени возмущающей силы, которая вызывает первичное деформирование, а кривой 2 – управляющей силы.

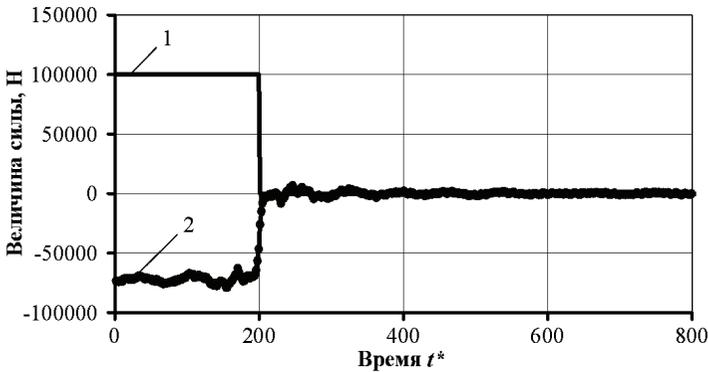


Рисунок 2 – Закон изменения возмущающей и управляющей сил во времени

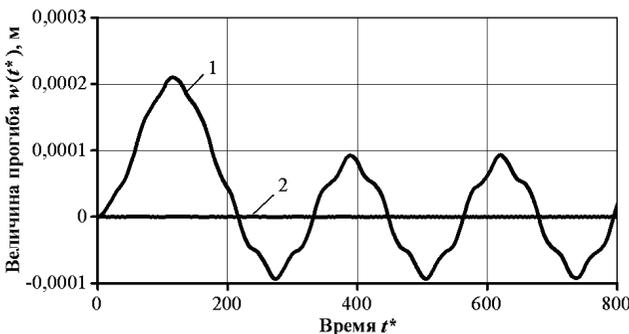


Рисунок 3 – Результаты решения задачи управления колебаниями цилиндрической оболочки

На рис. 3 показано изменение прогиба во времени цилиндрической обо-

лочки в точке управления. Кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, а кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление.

Далее рассмотрим вариант нагружения, когда в качестве критерия управления принимается не отсутствие колебаний в точке  $\theta_s$ , а реализация колебаний в этой точке, отвечающие изменению по закону синуса с некоторой частотой. Тогда уравнение для определения управляющей силы будет иметь следующий вид:

$$(\mathbf{A}_G^T \mathbf{A}_G + \alpha \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G} = \mathbf{w} - \mathbf{A}_G^T \mathbf{A}_Q \cdot \mathbf{Q}. \quad (7)$$

Для численного расчета управляющей силы  $G(\theta, t^*)$  используется выражение (7) и исходные данные, которые были использованы в первом рассмотренном примере, только теперь  $\theta_0 = 0,1744$ ;  $\theta_s = 0,3489$ ;  $\theta_c = 0,5233$ .

На рис. 4 представлен график изменения нагрузки во времени, причем, кривая 1 отвечает возмущающей (первичной) силе, а кривая 2 – найденной управляющей силе.

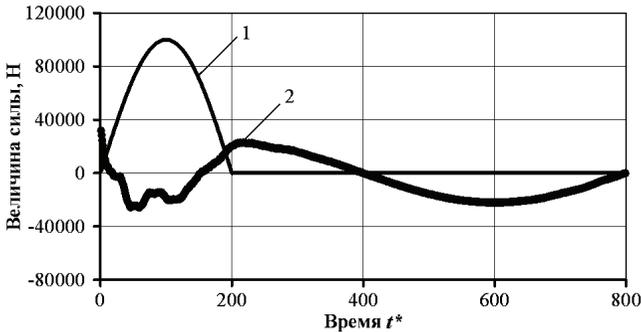


Рисунок 4 – Закон изменения возмущающей и управляющей сил во времени

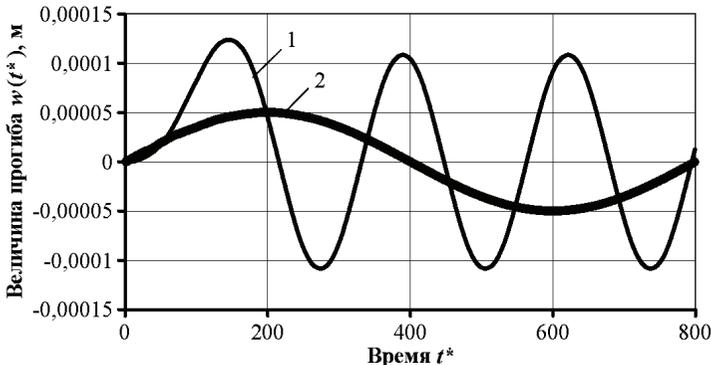


Рисунок 5 – Результаты решения задачи управления колебаниями цилиндрической оболочки

На рис. 5 изображено изменение нормальных перемещений во времени цилиндрической оболочки в точке управления, кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, а кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление. Кривую 2, как закон изменения нормального перемещения, которое отвечает выбранному в этом случае критерию управления, предполагалось получить. Задача управления и во втором примере решена полностью.

В данном подразделе представлена математическая постановка задачи управления, на уровне как это принято в задачах математической физики, и ее решение. Вопрос об энергетических затратах при реализации критерия управления не исследуется.

**Список литературы:** 1. Янютин *Е.Г.*, Янчевский *И.В.*, Воропай *А.В.*, Шарпанта *А.С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 2. Григолюк *Э. И.*, Селезов *И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 3. Верлань *А. Ф.*, Сизиков *В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.

*Поступила в редколлегию 14.01.2010*

## ЗМІСТ

<b>В.В.МАТВЕЕВ, А.П.ЗИНЬКОВСКИЙ</b> Г.С.Писаренко – основатель украинской школы по колебаниям неконсервативных механических систем . . . . .	3
<b>А.О.ЛАРИН</b> Василь Євдокимович Бреславський - видатний вчений – механік (до 90-річчя з дня народження) . . . . .	12
<b>К.В.АВРАМОВ, А.В.БОРИСЮК</b> Бистабильные автоколебания несимметричного однодискового упругого ротора в подшипниках скольжения . . . . .	20
<b>Л.В.АВТОНОМОВА, С.В.БОНДАРЬ, Б.Н.КИРКАЧ, А.В.СТЕПУК, Ю.М.ШМЫГАРЕВ</b> Уточненная математическая модель расчета термонапряженного состояния многокомпонентной электромагнитной обмотки . . . . .	29
<b>А.Г.АНДРЕЄВ, В.О.БЕЛОСТОЦЬКИЙ, О.В.ЩЕПКИН</b> Дослідження напружено-деформованого стану гайки зі стопорним посадочним кільцем . . . . .	35
<b>В.Г.БАБАДЖАНОВА</b> Исследование одномерной несвязанной задачи термовязкоупругости . . . . .	39
<b>В.И.БЕЛЫХ, О.Ф.ПОЛИЩУК, К.Б.МЯГКОХЛЕБ</b> Метод оценки долговечности агрегатов и конструкций на основе комплексного использования внесения конструктивных дополнений и виброусталостных испытаний . . . . .	51
<b>С.В.БОНДАРЬ</b> Анализ пластического деформирования тонкостенного цилиндра, опирающегося на радиальное кольцо . . . . .	55
<b>В.А.ВАНИН, А.А.ГРИГОРЬЕВ</b> Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды . . . . .	59
<b>С.ДАРЯЗАДЕ</b> Исследование концентрации напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных композитов . . . . .	68
<b>Д.А.ЖИГИЛИЙ</b> Конструкционная прочность комбинированных баллонов высокого давления . . . . .	79
<b>С.В.КРАСНИКОВ, А.А.КАРПЕНКО</b> Інтегрована комп'ютерна система для автоматизації розрахунків власних коливань машинобудівних конструкцій . . . . .	89
<b>Н.Т.КУРБАНОВ, У.С.АЛИЕВА</b> Исследование колебаний вязкоупругих цилиндрических оболочек при малой вязкости . . . . .	93

<b>Д.В.ЛАВИНСКИЙ</b> Анализ упруго-пластического деформирования при моделировании операции «заполнения углов». Часть 1 . . . . .	100
<b>В.А.ЛЕВАШОВ, Л.В.РОЗОВА</b> Автоматизация комплексного проектирования рабочих параметров газодинамических торцовых уплотнений роторов центробежных компрессоров . . . . .	104
<b>А.МОВАГГАР, Г.И.ЛЬВОВ</b> Энергетическая модель усталостной прочности композиционных материалов . . . . .	111
<b>В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, С.В.ОЛЬШАНСКИЙ</b> К расчету колебаний скорости движения зерновой смеси на плоском виброрешете . . . . .	123
<b>Э.С.ОСТЕРНИК</b> Моделирующие полиномы от N-переменных в машиностроении . . . . .	130
<b>С.Ю.САЕНКО, О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, Д.В.ЛАВИНСКИЙ, В.Н.СОБОЛЬ</b> Анализ статического и ударного деформирования керамического контейнера для радиоактивных отходов . . . . .	136
<b>Э.А.СИМСОН, В.В.ОВЧАРЕНКО, Ю.А.ШЕВЧУК</b> Расчет напряженно-деформированного состояния сепаратора подшипника качения . . . . .	142
<b>А.С.СТЕПЧЕНКО</b> Алгоритм структурной оптимизации системы турбоагрегат – фундамент по спектральным характеристикам . . . . .	145
<b>А.Д.ШАМРОВСКИЙ, М.А.ШАМРОВСКИЙ, А.С.БЕЗНОС</b> Решение динамических задач для твердых тел с упругими связями . . . . .	153
<b>Л.В.ШИПУЛИНА, Н.В.СЕРЕДА</b> Динамика упругих систем многосекционных шахтных подъемных установок нет должности . . . . .	164
<b>Е.Г.ЯНИУТИН, Н.И.ВОРОПАЙ</b> Управление нестационарными колебаниями бесконечно длинной цилиндрической оболочки . . . . .	170

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

**ВІСНИК**  
**НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО**  
**УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»**

Тематичний випуск  
«Динаміка і міцність машин»

Випуск № 37'2010

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор О.В.Щепкін

Відповідальний за випуск В.М.Луцьова

Обл.вид. № 152-10

Підп. до друку 27.10.2010 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 9,4. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 118. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Друкарня ВАТ «Цифра Прінт», Харків, вул. Культури, 20, в

---