НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
1885
«ХПІ»

ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»

42'2009

Харьков

ВЕСТНИК
НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»

Сборник научных трудов
Тематический выпуск

42'2009

«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Издание основано Национальным техническим университетом «Харьковский политехнический институт» в 2001 году

Государственное издание
Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины
КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

Харьков 2009

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2009. – № 42. – 216 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

АДРЕС РЕДКОЛЛЕГИИ: 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПИ».
Каф. ДПМ, тел. (057) 707-68-79. E-mail: andreev@kpi.kharkov.ua

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 11 від 30 листопада 2009 р.

УДК 539.3

Ю.С.ВОРОБЬЕВ, докт.техн.наук, проф., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
А.А.ЛАРИН, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

АКАДЕМИК АНАТОЛИЙ ПЕТРОВИЧ ФИЛИППОВ – ЛИДЕР НАУЧНОЙ ШКОЛЫ В ОБЛАСТИ ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ МАШИН (К 110-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

У статті представлений творчий шлях відомого українського вченого академіка АН УРСР, доктора технічних наук, професори А.П.Філіппова. Присвячується 110-річчю з дня народження.

In article the career of the known Ukrainian scientist – academic, doctor of technical science professors Philippov A.P. is submitted. It is devoted to the 110-anniversary from birthday.

29 ноября 2009 года исполняется 110 лет со дня рождения известного украинского ученого в области механики, академика АН УССР, лауреата Государственной премии Украины в области науки и техники, профессора, доктора технических наук, заслуженного деятеля науки и техники **Анатолия Петровича Филиппова**.

А.П.Филиппов родился 29 ноября 1899 года в селе Глуховцы (ныне Винницкая обл.) в семье железнодорожного служащего. До 1915 г. учился в Изюмском реальном училище, а затем в Харьковском реальном училище № 1, которое окончил в 1917 г. В том же году он поступил на механический факультет Харьковского технологического института (ХТИ)[1]. Учеба Анатолия Петровича пришлась на тяжелейшие годы революции и гражданской войны. Власть в городе постоянно менялась, но, несмотря на это, Филиппов продолжал учебу. Окончив с отличием институт в 1920 г., он решил получить кроме инженерного, и математическое образование и поступил на физико-математический факультет Института народного образования – так после революции назывался Харьковский университет, носящий сейчас имя В.Н.Каразина. В 1922 г. Анатолий Петрович успешно завершил учебу и там.

Инженерная деятельность А.П.Филиппова началась в 1920 г. с работы старшим конструктором на Харьковском паровозостроительном заводе (ХПЗ). Основанный в 1885 г., это был первый в России специализированный паровозостроительный завод, но с 1911 г. на нем было организовано также и производство дизелей – новой важнейшей отрасли машиностроения. В годы Граж-

[1] В 1929 г. ХТИ был переименован в Харьковский политехнический институт (ХПИ), в настоящее время Национальный технический университет «ХПИ»

данской войны производство паровозов и дизелей на заводе было прекращено. Восстановление началось в 1920-е гг. и Анатолий Петрович принял в нем деятельное участие. Он проработал на ХПЗ до 1925 г., спроектировав при этом ряд оригинальных конструкций.

Затем А.П.Филиппов работал в Управлении по строительству электростанций (1925-1926 гг.), а позже в тресте «Тепло и сила» (1928-1931 гг.). Одновременно он начал вести научную работу, поступив в 1922 г. в аспирантуру кафедры гидравлики и авиации ХТИ, которую возглавлял видный советский ученый в области механики и машиностроения, академик АН УССР Г.Ф.Проскура. После А.П.Филиппов также обучался в аспирантуре на кафедре прикладной математики Института народного образования, а затем Украинского института математики у одного из самых крупных математиков XX века - академика С.Н.Бернштейна. Эту аспирантуру он окончил в 1928 г. Учеба у таких видных ученых, конечно же, самым благотворным способом повлияла на всю дальнейшую деятельность Анатолия Петровича.

С 1930 года А.П.Филиппов переходит на научно-исследовательскую работу в Украинский НИИ сооружений, где до 1937 г. руководит группой по теории колебаний. В 1937-1940 гг. он возглавляет отдел динамики и прочности Центрального НИИ стройматериалов. С 1940 г. ученый работает в Центральной научно-исследовательской лаборатории по строительству (в 1944 г. лаборатория реорганизована в Южный научно-исследовательский институт по строительству). По совместительству в 1937-1938 гг. А.П.Филиппов работает в Институте математики и механики при Харьковском университете. В этот период в печати, главным образом в изданиях АН СССР, появляются его научные публикации, посвященные деформациям, колебаниям и устойчивости стержней, пластинок и рамных конструкций. Работы А.П.Филиппова с самого начала его научной деятельности отличаются широким использованием математических методов и высоким научным уровнем. Уже в 1932 году впервые в нашей стране им создается инструкция по расчету фундаментов под турбоагрегаты [1]. Интересно, что статья А.П.Филиппова, посвященная важнейшему для турбостроения того времени вопросу - учету затухания при вынужденных поперечных колебаниях стержней [2] была представлена в Известия АН СССР в 1935 г. академиком А.Н.Крыловым. В 1937 г. выходит первая монография А.П.Филиппова, посвященная колебаниям перекрытий и рамных каркасов [3]. В 1940-1941 гг. под его руководством в Харьковском отделении Теплоэлектропроекта была создана инструкция по расчету на колебания строительных конструкций главных корпусов теплоэлектроцентралей, которая до 1956 года была единственным нормативным документом в этой области. В 1941 году в Госстройиздате выходит его монография «Методы расчета сооружений на колебания» [4], которая представляла фундаментальный труд в этом важном развивающемся направлении. С 1938 г. появляются публикации А.П.Филиппова, посвященные удару по пластинам на упругом основании.

В этот период А.П.Филиппов проявил себя как крупный специалист в области динамической прочности механических систем и строительной механики. Его работы по колебаниям конструкций и поведению их при действии динамических нагрузок и сейчас представляют интерес, являясь составной частью классических исследований в этой области. Деятельность А.П.Филиппова была замечена научной общественностью еще в довоенный период. В 1932 г. он был избран действительным членом Института математики и механики, а в 1934 г. утвержден в этом звании квалификационной комиссией Наркомпроса Украины. В начале 1939 г. было принято постановление Совета Ленинградского индустриального института (университета) о присвоении А.П.Филиппову ученой степени доктора технических наук без защиты диссертации. В том же году он был утвержден Высшей аттестационной комиссией при Совнаркоме СССР в ученом звании профессора по специальности «Строительная механика». В 1945 г. своим постановлением Совет Московского инженерно-строительного института также присвоил А.П.Филиппову степень доктора технических наук, которую ВАК утвердила в 1948 г.

В 1942 г. А.П.Филиппов был в рядах Действующей армии под Туапсе, а затем был направлен Магнитогорск. Там во время работы в научно-исследовательской лаборатории по строительству А.П.Филиппов оказал ценную научную помощь в строительстве Магнитогорского металлургического комбината и других объектов, имеющих важное оборонное значение. С октября 1943 года до конца войны он принимал деятельное участие в восстановительных работах на Украине, в частности в Донбассе, за что был отмечен похвальным листом Наркома СССР по строительству.

В 1945 г. А.П.Филиппов за выдающиеся достижения в области механики был избран членом-корреспондентом АН УССР и перешел на работу в систему Академии наук УССР. В 1946 г. он становится руководителем отдела динамики и прочности Лаборатории проблем быстроходных машин и механизмов АН УССР, которая впоследствии реорганизуется в Лабораторию гидравлических машин АН УССР. Возглавлял эту лабораторию академик АН УССР Г.Ф.Проскура. С 1954 года Лабораторией руководит А.П.Филиппов. В 1964 г. на ее базе создан Харьковский филиал Института механики АН УССР, который в 1967 г. был преобразован в филиал Института технической теплофизики АН УССР.

Одновременно с 1948 по 1960 гг. Анатолий Петрович руководил кафедрой динамики и прочности машин Харьковского механико-машиностроительного института, вошедшего в 1950 г. в состав восстановленного политехнического института[1]. Затем он до 1967 г. работал профессором этой кафедры по совместительству. А.П.Филиппов уделял большое внимание подготовке кадров, им воспитано не одно поколение инженеров и ученых. Трудно переоценить роль А.П.Филиппова в подготовке кадров высшей квалификации. Десятки молодых ученых стали под его руководством кандидатами наук. Докторами наук стали его ученики – сотрудники ХПИ, профессора А.В.Бурлаков, С.И.Богомолов, Е.Г.Голоскоков, В.Б.Гринев. Среди учеников А.П.Филиппова также доктора технических наук: академик НАНУ А.Н.Подгорный, Ю.С.Воробьев, Б.Я.Кантор и Н.Г.Шульженко. Позже также защитили докторские диссертации ученики

[1] Согласно личного дела А.П.Филиппова (Архив НТУ «ХПИ» дело 54092) в 1948-1950 и 1955-1960-е гг. он работал заведующим кафедрой динамики и прочности машин ХПИ по совместительству, а в 1950-1955 гг. числился в штате института

А.П.Филиппова: С.С.Кохманюк, Е.Г.Янютин и В.П.Ольшанский. В городе Сумы работает докт.техн.наук В.А.Марцинковский, в Ереване – докт.физ.-мат.наук Л.А.Мовсисян, которые также были в свое время его учениками.

Прекрасно осознавая возросшую роль энергетики, А.П.Филиппов принимает участие в создании в 1967 г. Отделения физико-технических проблем энергетики АН УССР. В 1972 г. после создания в Харькове Института проблем машиностроения (ИПМаш) АН УССР А.П.Филиппов руководит в нем отделом нестационарных механических процессов. В этот период Анатолий Петрович проявил себя как выдающийся ученый, создавший и возглавивший научное направление, связанное с оценкой прочности элементов современных конструкций в условиях интенсивных статических и динамических нагрузок при учете высокотемпературных полей и воздействия среды. Все его работы этого направления имеют высокий научный уровень и большое практическое значение.

Общеизвестен его выдающийся вклад в развитие прикладной теории колебаний. В его работах даны решения большого числа сложных задач теории колебаний, внесших значительный вклад в развитие машиностроения, строительного дела и других отраслей техники. Основные результаты отражены в монографиях, которые представляют самые фундаментальные труды, посвященные колебаниям механических систем [5, 6, 7].

Среди вынужденных колебаний особое место занимают нестационарные колебания, возникающие при переходе от одного установившегося режима работы машины к другому. Проблемы этих колебаний были подробно рассмотрены в двух монографиях А.П.Филиппова, написанных совместно с одним из известнейших его учеников профессором Е.Г.Голоскоковым [8, 9]. В 1971 г. в Берлине, в Германской демократической республике была издана еще одна их книга, посвященная нестационарным колебаниям [10].

А.П.Филиппов был одним из пионеров широкого использования вычислительной техники для решения задач динамики и прочности в машиностроении и строительстве. В соавторстве с В.И.Булгаковым, Ю.С.Воробьевым, Б.Я.Кантором и Г.А.Марченко им были изданы одни из первых книг, посвященных применению ЭВМ в механике [11, 12].

Проблема деформаций и напряжений в конструкциях, возникающих под действием подвижных нагрузок нашла отражение в книге [13], изданной в 1967 г. совместно с С.С.Кохманюком. Большую роль сыграли работы А.П.Филиппова для развития исследований напряженно-деформированного состояния конструкций при ударных, импульсных и нестационарных нагрузках. Они отражены как в упомянутых уже работах, так и в монографиях, опубликованных совместно с Ю.С.Воробьевым, С.С.Кохманюком и Е.Г.Янютиным [14, 15].

А.П.Филиппову принадлежит заслуга в развитии проблемы оптимизации конструкций по прочностным и вибрационным характеристикам, что нашло отражение в монографиях [16, 17], написанных совместно с его учеником В.Б.Гриневым. Несмотря на болезнь, в последние годы жизни он не прекращал интенсивной научной деятельности. Так, уже после смерти в 1984 г. вышел в свет раздел «Справочника проектировщика», подготовленный А.П.Филипповым.

В 1967 г. Анатолий Петрович избирается действительным членом АН УССР, а в 1968 г. ему присваивают звание заслуженного деятеля науки и техники УССР. А.П.Филиппов выполнял большую научно-общественную и общественную работу. С 1959 по 1962 гг. он член экспертной комиссии ВАК, с 1957 г. – руководитель секции «Теория колебаний и устойчивость» научного совета по проблеме «Научные основы прочности» при Отделении механики и процессов управления АН СССР, член Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике. А.П.Филиппов неоднократно избирался депутатом Харьковского городского Совета депутатов трудящихся.

Научные работы А.П.Филиппова пользуются известностью во всем мире. Он много сделал для завоевания признания достижений украинских ученых-механиков за рубежом. По свидетельству академика Чехословацкой академии наук Яна Гонды, А.П.Филиппов был первым украинским и советским ученым-механиком, который участвовал в международных конференциях по динамике машин в Чехословакии и являлся основоположником контактов механиков этих стран.

Многогранная самоотверженная научная и педагогическая деятельность А.П.Филиппова была отмечена правительственными наградами, в том числе орденом Трудового Красного Знамени. Уже после смерти он в числе других ученых ИПМаша и ХПИ стал лауреатом Государственной премии УССР в области науки и техники за 1984 г.

Академик АН УССР А.П.Филиппов умер 23 апреля 1978 г. в Харькове. В его лице украинская и мировая наука понесли большую утрату. В сердцах всех, кто его знал, сохранится светлая память о выдающемся ученом, принципиальном и доброжелательном человеке, учителе и старшем товарище.

Список литературы: **1.** *Филиппов А. П.* Инструкция по расчету фундамента под турбоагрегаты // Бюл. Укр. комплекс. НИИ сооружений. – 1932, №3. – 10 с. **2.** *Филиппов А. П.* Вынужденные поперечные колебания стержней при учете затухания. – Изв. АН СССР, ОТН. – 1935, №7:4. - С. 637-649 **3.** *Филиппов А. П.* Колебания перекрытий и рамных каркасов. – Харьков: Гостехиздат УССР, 1937. – 50 с. **4.** *Филиппов А. П.* Методы расчета сооружений на колебания.– М.-Л.: Госстройиздат, 1941. – 251 с. **5.** *Филиппов А. П.* Колебания упругих систем. – К.: Изд-во АН УССР, 1956. – 340 с. **6.** *Филиппов А. П.* Колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1965. – 716 с. **7.** *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с. **8.** *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания механических систем. – К.: Наукова думка, 1966. – 334 с. **9.** *Голоскоков Е. Г., Филиппов А. П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – К.: Наукова думка, 1977. – 336 с. **10.** Einstationäre Schwingungen mechanischer Systeme / G.Goloskokov; A.P.Filippov. – Academie –Verlag, Berlin. – 1971. – 352 s. **11.** Численные методы в прикладной теории упругости Филиппов А.П., Булгаков В. И., Воробьев Ю. С., Кантор Б. Я., Марченко Г. А. – К.: Наукова думка, 1968. – 252 с. **12.** *Филиппов А. П., Воробьев Ю. С.* Расчеты на колебания с использованием электронно-вычислительной техники. – М.: Машиностроение, 1971. – 68 с. **13.** Филиппов А.П., Кохманюк С. С. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни. – К.: Наукова думка, 1967. – 132 с. **14.** *Филиппов А.П., Кохманюк С. С., Воробьев Ю. С.* Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. – К.: Наукова думка, 1974. – 176 с. **15.** *Филиппов А.П., Кохманюк С. С., Янютин Е. Г.* Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – К.: Наукова думка, 1978. – 184 с. **16.** *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. – К.: Наукова думка, 1975. – 295 с. **17.** *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация стержней по спектру собственных частот. – К.: Наукова думка, 1975. – 212 с.

Поступила в редколлегию 29.10.2009

УДК 539.3

Ю.П.АНАЦКИЙ, наук.сотр., НТУ «ХПИ»;
Ю.А.ЗЕНКЕВИЧ, асп, НТУ «ХПИ»;
В.В.ОВЧАРЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Э.А.СИМСОН, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
М.В.ТРОХМАН, асп., НТУ «ХПИ»

ОПТИМИЗАЦИЯ БОРТОВ КОЛЕЦ И ТОРЦЕВОЙ ПОВЕРХНОСТИ РОЛИКА ПОДШИПНИКА КАЧЕНИЯ

Розглянуто питання збіжності контактної задачі. Здійснена перевірка достовірності розрахункової моделі для різних значень величини скосу. Проведена оптимізація бічної поверхні тіл кочення та відповідних їм поверхонь внутрішнього й зовнішнього кілець роликового підшипника при варійованому параметрі – куті бічної поверхні ролика і кілець α. Запропонована оптимальна модель із опуклою поверхню борта кільця й плоскою торцевою поверхнею ролика.

The question of contact task convergence is lighted up. Calculation model verification is carried out for the different values of scarf size. The end surface and surfaces of internal and external rings optimization is performd at the varied parameter – inclination of roller and rings lateral surface α. An optimum model is offered.

Введение. Современные тенденции в транспортном машиностроении свидетельствуют о постоянном стремлении к росту долговечности узлов, в том числе подшипниковых узлов железнодорожного вагонного состава и локомотивов. Они сводятся к постоянному усовершенствованию традиционных буксовых подшипников качения и их комбинаций для увеличения срока службы и снижения материалоемкости. Проектирование таких узлов требует решения контактной задачи расчета механических напряжений.

Вопрос сходимости. Численное решение контактной задачи, как и для многих других нелинейных задач, выполняется итерационно. В итерационном процессе решения задачи важнейшим аспектом является сходимость. Расходящийся итерационный процесс решения означает, что задача не имеет решения, либо решение не может быть найдено при заданных параметрах итерационного процесса.

Корректная постановка задачи совсем не обязательно приводит к сходимости итерационного процесса решения. Так при решении контактной задачи о взаимодействии ролика и кольца подшипника под действием радиальной нагрузки сходимость достигается автоматически, без дополнительных методологических шагов по обеспечению сходимости, а при решении контактной задачи под воздействием осевой нагрузки итерационный процесс решения расходится.

Для обеспечения сходимости на первом этапе решается задача с незначительным осевым перемещением (сближением) контактирующих тел без приложения осевой нагрузки, в полученном решении образуется некоторое исходное пятно контакта. Затем граничные условия осевого перемещения снимаются и прикладывается рабочая осевая нагрузка. Задача решается снова. Результат повторного решения – общее решение контактной задачи. Величина осевого перемещения задаваемого на первом шаге не влияет на результат решения, однако влияет на скорость и характер сходимости итерационного процесса повторного решения задачи.

Проверка достоверности расчетной модели. Перед исследованием влияния угла наклона боковой поверхности ролика и колец α, для проверки достоверности расчетной модели были проведены расчеты НДС и интенсивности работы сил трения при α = 0° и для различных значений величины скоса. Из опыта эксплуатации данных подшипников на российских и украинских железных дорогах известно, что наибольшую долговечность имеют подшипники с величиной скоса 20 мкм, что соответствует ГОСТу. Расчеты показали, что данная величина скоса обеспечивает минимальное интегральное значение интенсивности работы сил трения.

Поиск оптимальной модели. В основной серии расчетов изучалось влияние угла наклона α боковой поверхности ролика и ответной поверхности колец. Оптимальный угол наклона с точки зрения минимизации интенсивности работы сил трения оказался меньше гостированного При дальнейшем росте этого угла наблюдался устойчивый рост максимальных напряжений.

С целью уточнения полученных данных были проведены дополнительные расчеты при различных углах наклона α.

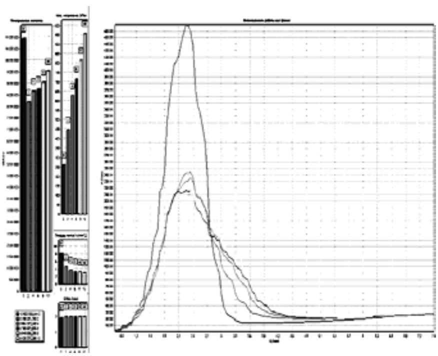


Рисунок 1 – Характеристики НДС и интенсивности работы сил трения при различных углах наклона

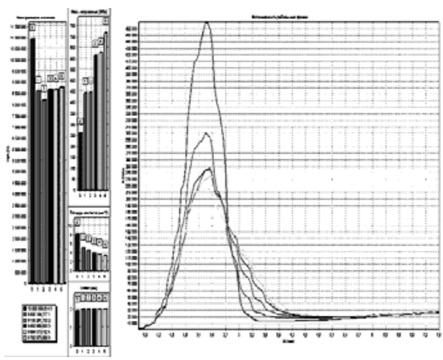


Рисунок 2 – Характеристики НДС и интенсивности работы сил трения при углах наклона α от 0° до 10°

Распределение интенсивности напряжений для оптимального угла наклона приведено на рис. 3.

Проведена серия вариантных расчетов с изменением радиуса кривизны образующей борта от 5 до 50 метров и высоты центра кривизны над верхней точкой выточки от -3 мм до +5 мм. По результатам вариантных расчетов оценены наиболее рациональные диапазоны исследования изменения радиуса кривизны образующей (2 – 20 м) и высоты центра кривизны (от +1 до +4 мм).

Выполнена задача оптимизации максимальных контактных напряжений при двух варьируемых параметрах, обеспечивающих кривизну борта внутреннего кольца:

– различной выпуклости (варьирование радиусом);
– различного направления входа в контакт (варьирование ординатой центра кривизны).

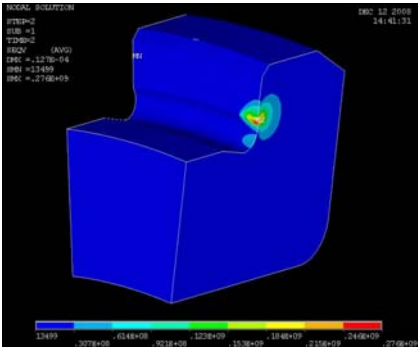


Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений на боковой поверхности кольца

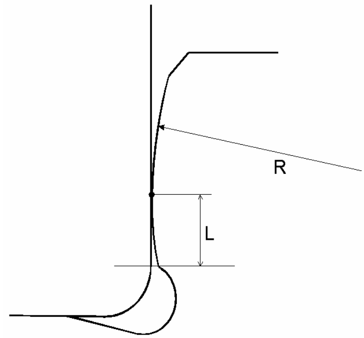


Рисунок 4 – Схема моделирования для выпуклого торца борта (плоский торчик)

При сохранении существующей плоской поверхности ролика вместо скошенного (плоского) борта кольца предлагается выпуклая поверхность, образованная вращением дуги окружности (рис. 4). Высота линии центра дуги образующей боковой поверхности кольца практически определяет высоту точки контакта двух поверхностей в данном случае.

Преимуществом рассматриваемого конструктивного варианта является тот факт, что лишь одна из контактирующих поверхностей (борт кольца) является относительно сложной; вторая поверхность (торчик) — плоская.

График интенсивности работы сил трения для найденного варианта и распределение контактных напряжений показаны на рис. 5 и 6.

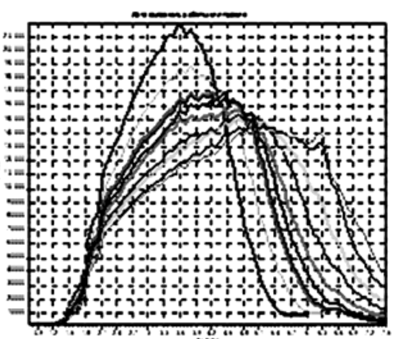


Рисунок 5 – Интенсивность работы сил трения для разных радиусов кривизны торца борта (плоский ролик)

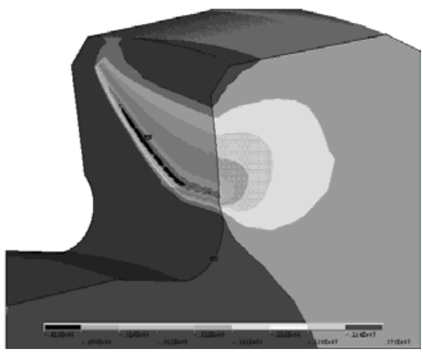


Рисунок 6 – Контактные напряжения

Выводы. За счет перехода к более сложной поверхности борта кольца удается снизить максимальную интенсивность работы сил трения по сравнению с базовым вариантом (уклон борта) примерно в 3,2 раза и по сравнению с проектами без применения выпуклости — в 1,67 раза.

Список литературы: **1.** ГОСТ 25.504-82. Расчет и испытание на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. **2.** *Перель Л.Я., Филатов А.А.* Подшипники качения. Расчет, проектирование и обслуживание опор: Справочник 2-е изд., перераб.и доп. – М.: Машиностроение, 1992. – 608 с. **3.** *Леликов О.П.* Валы и опоры с подшипниками качения. Конструирование и расчет: Справочник. – М.: Машиностроение, 2006. – 640 с. **4.** *Родзевич Н.Н., Волков Н.Н.* Подшипники качения колесных пар вагонов и локомотивов. – М.: Машиностроение, 1972. **5.** *Родзевич Н.В.* Выбор и расчет оптимальной формы роликов для подшипников // Вестник машиностроения. – 1970. – № 7. **6.** *Kotzalas M.* Power transmissions component failure and rolling contact fatigue progression. – Pennsylvania State Univ. 1999. **7.** *Mitchel J.* Machinery analysis and monitoring. – Penn Well, Tulsa, 1981. **8.** *Perely L.Y.* Handbook of Rolling Bearings. – Machinery, 1983. **9.** *Tedric A. Harris, Michael N. Kotzalas* Essential Concepts of Bearing Technology. – Taylor & Francis Group, 2007. **10.** *Avraham Harnoy* Bearing Design in Machinery. – Marcel Dekker Inc, 2003.

Поступила в редколлегию 11.10.2009

УДК 593.3

С.В.БОНДАРЬ, канд.техн.наук, ст.науч.сотр., НТУ «ХПИ»;
Д.В.ЛАВИНСКИЙ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ДАВЛЕНИЯ В УГЛАХ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ЛИСТОВЫХ ЗАГОТОВОК

Представлено нову схему магнітно-імпульсного штампування у кутах листової заготовки. За допомогою перетворення Лапласу розв’язані диференційні рівняння Максвела. Знайдені розподіли напруженостей магнітного поля та магнітного тиску на заготовку.

The new scheme of pulse-magnetic stamping of sheet slug corners was presented. The differential equations of Maxwell was solved by Laplas method. The distribution of magnetic field components and magnetic pressure were presented.

Актуальность проблемы. Реализация ряда технологических операций при плоской штамповке листовых металлов требует концентрации сил давления для «заполнения углов» соответственно требуемой форме готового изделия. Практически, это означает получение достаточно четких углов с допустимым по условиям производственной операции уровнем скруглений [1,2]. Формовка углов в изгибах не ограничивается исключительно вышеуказанной производственной операцией, на самом деле силовое воздействие на листовые металлы в зонах их изгиба присутствует как составляющая довольно широкого класса штамповочных технологий. Одним из важнейших вопросов при разработке новых операций магнитно-импульсных методов является вопрос о целенаправленном силовом воздействии на область заготовки, подлежащую деформированию в соответствии с производственным заданием. Здесь необходимы оригинальные предложения по конструкциям инструментов метода в сочетании с анализом электродинамических процессов в системе «индуктор-заготовка» и последующими рекомендациями по их практическому исполнению и взаимному расположению.

Постановка задачи. Рассмотрим вопросы определения магнитного давления при деформировании угловой зоны листовой заготовки. Сконцентрировать и направить силы точно в угол можно, если применять индукторную систему, предложенную на рис. 1. Здесь токопроводы расположены симметрично относительно биссектрисы угла изогнутого металлического листа. При решении полагаем: угол в зоне изгиба плоского металлического листа приближается к $\pi/2$; приемлема декартова прямоугольная система координат; одновитковый соленоид прямоугольной формы выполнен из достаточно тонкого проводника и обладает достаточно большой протяженностью в измерении, соответствующем оси OX, так что $\dfrac{\partial}{\partial x} = 0$; электропроводность обрабатываемого металла довольно высока, так что допустимо приближение резкого поверхностного эффекта; по токопроводам витка, параллельным оси OX, протекает один и тот же ток $I_x(t) = I(t)$ (t – время в сек.), но в токопроводе с координатами (ℓ,h) его направление совпадает с положительным направлением оси OX, а в токопроводе с координатами (L,H) и (R,G) наоборот.

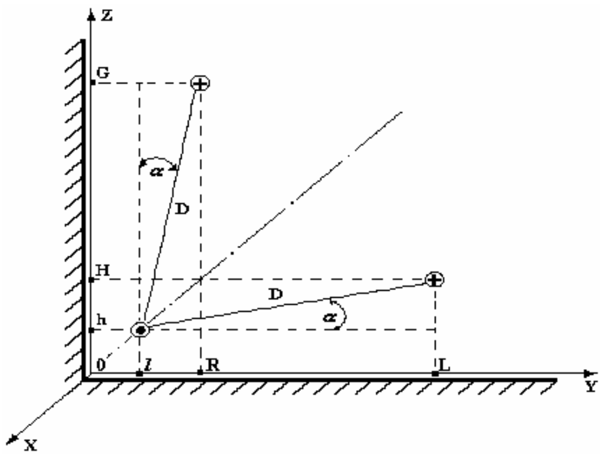


Рисунок 1 – Расчетная схема

Уравнения Максвелла для нетривиальных составляющих напряженности электромагнитного поля, преобразованных по Лапласу с учетом нулевых начальных условий, в пространстве между взаимно ортогональными плоскостями металлического листа ($y \geq 0$, $z \geq 0$) имеют вид:

$$\frac{\partial H_z(p,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(p,y,z)}{\partial z} = j_x(p,y,z)\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\, E_x(p,y,z)}{\partial z} = -\,p\mu_0 H_y(p,y,z)\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\, E_x(p,y,z)}{\partial y} = p\mu_0 H_z(p,y,z)\,, \tag{3}$$

где p – параметр интегрального преобразования Лапласа, $j_x(p,y,z)$ – плотность стороннего тока – тока в токопроводе,

$$j_x(p,y,z) = I(p)\cdot\left[\delta(z-h)\cdot\delta(y-\ell) - \delta(z-H)\cdot\delta(y-L)\right],\quad I(p) = L\{I(t)\},$$

$\delta(z)$, $\delta(y)$ – дельта-функции Дирака,

$$E_x(p,y,z) = L\{E_x(t,y,z)\}, H_{y,z}(p,y,z) = L\{H_{y,z}(t,y,z)\}\ .$$

При условии резкого поверхностного эффекта выражения для сил магнитного давления на проводящие плоскости $z = 0$ и $y = 0$ записываются в виде:

а) горизонтальная плоскость,

$$P_z^0(y,z=0) = \left(\ H_y^0(y,z=0)\ \right)^2, \tag{4}$$

где $P_z^0(y,z=0)$ – относительное давление,

$$P_z^0(y,z=0) = \frac{\left(\dfrac{\mu_0 H_y^2(t,y,z=0)}{2}\right)}{\left(\dfrac{\mu_0 H_m^2(t)}{2}\right)}, \qquad H_m(t) = \frac{I\,(t)}{(\pi\cdot h)}\,, \tag{5}$$

б) вертикальная плоскость,

$$P_y^0(y=0,z) = \left(\ H_z^0(y=0,z)\ \right)^2, \tag{6}$$

где $P_y^0(y=0,z)$ – относительное давление,

$$P_y^0(y=0,z) = \frac{\left(\dfrac{\mu_0 H_z^2(t,y=0,z)}{2}\right)}{\left(\dfrac{\mu_0 H_m^2(t)}{2}\right)}. \tag{7}$$

Анализ полученных результатов и выводы. Далее остановимся более подробно на результатах распределения магнитного давления, приведенных на рис. 2. Как следует из результатов расчета, в данной индукторной системе на поверхность вблизи углового изгиба металлического листа будут действовать одинаковые по величине силы магнитного давления. Их равнодействующая будет направлена строго в центр угла, а ее амплитуда превышает амплитуду координатной составляющей в $\sqrt{2}$ раз. Таким образом, предложенный вариант индукторной системы с двумя витками прямоугольной формы, позволяет максимально сконцентрировать силы магнитного давления в центре угла изогнутого металлического листа и одновременно разгрузить удаленные области деформируемой заготовки.

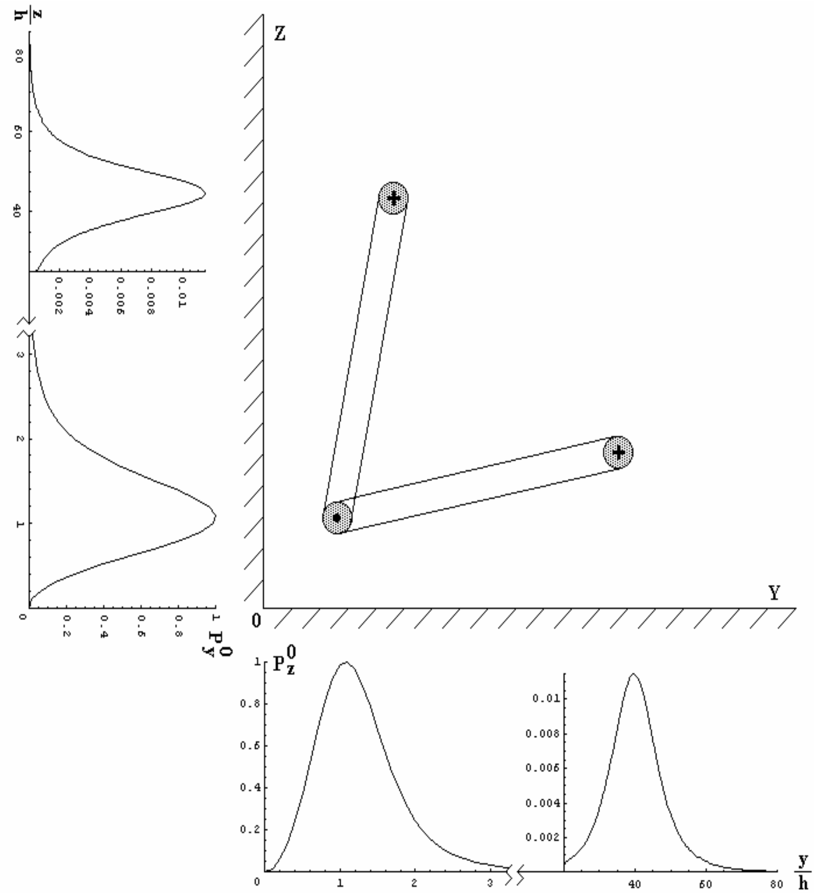


Рисунок 2 – Распределение сил магнитного давления вдоль поверхностей углового изгиба листовой заготовки

Список литературы: 1. Proceedings of the 1-st International Conference on High Speed Metal Forming. March 31 / April 1. 2004. Dortmund, Germany. **2**. *Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т.* Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков: Вища школа. 1977. – 189 с.

Поступила в редакцию 11.11.2009

УДК 669.018

Д.В.БРЕСЛАВСЬКИЙ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПІ»;
О.О.БРЕСЛАВСЬКА, канд.техн.наук, науч.сотр., НТУ «ХПІ»

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЗУЧОСТІ ТА ДОВГОТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ В РЕЖИМІ ON-LINE

Стаття присвячена методиці використання спеціалізованого Інтернет–сайту, призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу й обробки даних про властивості металевих конструкційних матеріалів, в задачах проектування машинобудівних конструкцій з урахуванням повзучості та руйнування.

The paper is devoted to the procedure of using the specialized Internet - site made for organization, saving, quick access and data processing of metal properties in design of engineering structures with consideration of creep-damage processes

Постановка та аналіз стану проблеми. Проектування та створення нової техніки, яка працює при підвищених температурах в авіаційній, енергетичній, хімічній промисловості, зазвичай є дуже складним та тривалим. Одним з важливих чинників, що обмежує швидкість цих процесів, є необхідність проведення експериментальних досліджень довготривалих властивостей матеріалів, які передбачається застосовувати при виготовленні високотемпературних конструктивних елементів.

Експериментальні дослідження високотемпературних властивостей матеріалів почались у перші десятиліття минулого сторіччя. За цей час науковцями накопичено великі обсяги експериментальних даних про найбільш поширені конструктивні матеріали. Багато результатів цих експериментів надруковано в наукових статтях, монографіях та довідниках. На жаль, своєчасно не було запропоновано єдиного стандартизованого підходу до проведення таких експериментів, особливо у частині реєстрації дослідних даних. У зв’язку з цим задача проектувальників, що планують використовувати результати вже проведених експериментів для розрахунків повзучості та довготривалої міцності, є ускладненою: необхідні дані дуже важко знайти в великій кількості публікацій, до того ж зроблених різними мовами в різних країнах. Проведення власних досліджень завдяки їхній великій вартості є можливим лише в обмеженій кількості випадків, при створення дуже відповідальної техніки.

У зв’язку з цим, у теперішній час, що характеризується бурхливим розвитком інформаційних технологій, виникає потреба в розробці та впровадженні спеціалізованої бази даних та програми її керування для зберігання та використання даних високотемпературних властивостей конструкційних матеріалів, насамперед сталей та сплавів.

Аналіз розвитку сучасних ІТ – тенденцій свідчить, що майбутнє за програмними продуктами вільного доступу, які розміщені у світовій мережі Інтернет: практично неможливо групі науковців чи навіть науковому інституту зібрати усі дані унікальних експериментів за останні сто років. Необхідно оперативне додавання, оновлення та контроль інформації, що може бути зроблено тільки загалом користувачів.

На сьогодні основною on-line базою даних конструкційних матеріалів є розроблена у США програма *MatWeb* (www.matweb.com), створена фірмою цієї ж назви, яка є підрозділом *Automation Creation, Inc*. Однак дані з властивостей повзучості та довготривалої міцності матеріалів в переліку їхніх сервісів відсутні.

Автори мають певний досвід у напрямку створення та підтримки баз даних конструкційних матеріалів: з 2003 року успішно працює та посідає місця в першій десятці російськомовних програм з чорної металургії створений ними Інтернет–портал «Марочник сталей та сплавів» [1-2]. В перших версіях «Марочнику» (www.splav.kharkov.com) для багатьох сталей та жароміцних сплавів вже були частково надані залежності їхніх фізико-механічних властивостей від температури. Тепер, для завдання побудови кривих повзучості та пошкоджуваності створено додаткове програмне забезпечення.

Мета роботи. Метою проведених робіт було створення в рамках спеціалізованого Інтернет–сайту «Марочник сталей та сплавів» нового сервісу, призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу й обробки даних щодо властивостей повзучості та пошкоджуваності внаслідок повзучості металевих конструкційних матеріалів. Створене програмне забезпечення (www.splav.kharkov.com/graf_creep_form.php) може бути застосоване інженерами, конструкторами, технологами, які працюють над створенням нової високотемпературної техніки.

Опис реалізованої методики та програмної розробки. Створене програмне забезпечення є фрагментом web-портала «Марочник сталей та сплавів», який створено за. допомогою серверної мови створення сценаріїв - PHP 4 зі вбудованої підтримкою системи управління та розробки баз даних (СУРБД) MySQL. Для програмування машинної графіки застосовано спеціалізовану бібліотеку GD. Операційна система – Windows 98 та вище чи Linux. Сервер-Apache.

Коротко опишемо основні співвідношення, що використані в розділі.

При простому напруженому стані, який реалізується в одновісних зразках, що використовується у дослідженнях повзучості та довготривалої міцності, рівняння стану приймають у відомій формі рівнянь Бейлі-Нортона й Работнова-Качанова:

$$\dot{c} = B\frac{(\sigma)^n}{(1-\omega)^k}\,, \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = D\frac{(\sigma)^m}{(1-\omega)^l}\,; \tag{2}$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = 1$$

де c – деформація повзучості, ω – параметр пошкоджуваності; B, D, n, m, l, k – константи, що визначаються за експериментальними даними про повзучість та руйнування матеріалу при заданій температурі.

Коротко наведемо методику визначення констант в законі повзучості (1) та кінетичному рівнянні для параметра пошкоджуваності (2). Використовуються набори дослідних результатів, які отримані при заданій температурі та різних напруженнях.

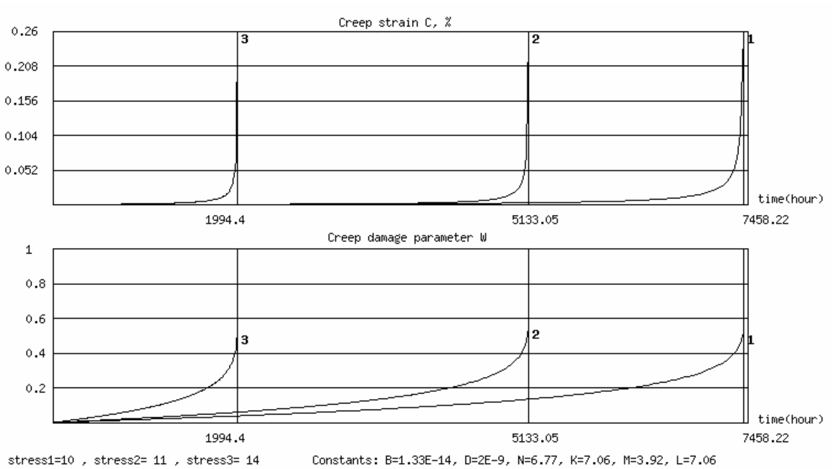
Часто властивості матеріалів виявляються такими, що потребують меншої кількості матеріальних сталих. Наприклад, у випадку, що досить часто зустрічається, для визначення 4-х констант B, D, n и m (n = k, m = l), які входять у визначальні співвідношення (1, 2), необхідно мати результати наборів дослідів на повзучість зразків до руйнування при трьох різних навантаженнях. Також для визначення констант, які входять до рівняння (2), можливо застосування кривих довготривалої міцності. Два досліди необхідні для отримання констант, а третій – для перевірки достовірності знайдених констант.

Для знаходження матеріальних констант B, n в законі повзучості (1) використовують два значення деформації у визначені моменти часу, одержані з кривих повзучості при двох різних напруженнях. Далі розв’язують диференційне рівняння (1), підставляють до нього наведені експериментально визначені значення, та визначають константи B и n.

Для знаходження констант у кінетичному рівнянні для параметра пошкоджуваності використовуються криві довготривалої міцності. Розв’язують спільно рівняння (1, 2), підставляють значення часу до руйнування й руйнівної деформації при двох різних напруженнях, та визначають константи D и m.

Далі, використовуючи знайдені константи, будують розрахункові криві залежності деформації та параметру пошкоджуваності від часу, криві довготривалої міцності за допомогою рівнянь стану (1, 2) для трьох значений напружень. Виконується порівняння розрахункових кривих та експериментальних даних. Якщо відносна похибка не перевищує заданого значення (наприклад, 10 %), тоді знайдені матеріальні константи вважаються вірними.

В новоствореному розділі web-порталу «Марочник сталей та сплавів» «Повзучість» передбачено можливість додавання даних про значення констант B, D, n, m, l, k, визначених при заданій температурі, що входять до законів типу (1-2), які описують деформування й руйнування матеріалів при повзучості.



Криві повзучості та пошкоджуваності

На теперішній час в базі даних наведено феноменологічний опис рівнянь стану повзучості та пошкоджуваності для жароміцних сталей та сплавів, вуглецевих сталей, алюмінієвих сплавів. Є можливість завдання користувачем значень констант для матеріалу, що їм вивчається.

В програмі передбачено побудову трьох кривих, що відображають залежності деформацій повзучості та параметру пошкоджуваності від часу, відповідно для трьох значень напружень, що діють. Приклад наведено на рисунку, де відповідні криві побудовані для жароміцного сплаву ЭИ867 (ХН62МВКЮ), що випробувався при 900 °С.

Шляхом оперативної побудови кривих за допомогою створеного програмного забезпечення, та аналізу властивостей процесів повзучості руйнування, інженер-проектувальник отримує можливість вибору найкращого з точки зору опору повзучості матеріалу.

Висновки. У статті наведено опис спеціалізованого розділу «Повзучість» Інтернет–порталу «Марочник сталей і сплавів», призначеного для моделювання повзучості та пошкоджуваності металевих матеріалів.

Список літератури: 1. *Бреславська О.О., Бреславський Д.В.*. Комп'ютерна програма «Марочник сталей та сплавів» // ОБ Державного Департаменту інтелектуальної власності МОН України «Авторське право і суміжні права». Свід. № 7533, Україна, 08.05.2003. – Київ, 2003. – № 3. – С. 317. **2.** *Бреславський Д.В., Бреславська О.О.* Спеціалізований програмний засіб для моделювання повзучості та довготривалої міцності в режимі on-line // Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров'я. Матеріали XVII міжнар. наук. - практ. конфер., 20-22 травня 2009р., Харків: у 2 ч. – Ч. 1. – Харків, НТУ «ХПІ», 2009. – С. 47.

Надійшла до редколегії 10.11.2009

УДК 669.018

Д.В.БРЕСЛАВСЬКИЙ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПІ»;
Ю.М.КОРИТКО, асп., НТУ «ХПІ»

РОЗРАХУНКОВЕ ОЦІНЮВАННЯ ДОВГОТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ ЛОПАТОК ГАЗОТУРБИННИХ ДВИГУНІВ ПРИ ЦИКЛІЧНИХ ТЕПЛОЗМІНАХ

У статті описані постановка задачі, метод розв'язання та результати розрахунків повзучості й тривалої міцності лопаток газотурбінних двигунів, які перебувають під дією термосилових навантажень, що циклічно змінюються. Для верифікації методу використані результати експериментального вивчення моделей лопаток. Наводяться результати розрахунків.

The problem statement, method of solution and numerical results of creep – damage simulation of gas turbine blades, which are cyclically loaded by thermal and mechanical loading, are described in the paper. The results of experimental studying of blade models had been used for the method verification. The numerical results are presented.

Аналіз стану проблеми. Умови роботи великої кількості елементів конструкцій сучасного енергетичного та хімічного машинобудування характеризуються істотним впливом температурних та силових полів. Часто температурно-силове навантажене є циклічним, що обумовлено повторно-змінним характером роботи енергетичних та хімічних установок. Є добре відомим, що навантаження металевих матеріалів при підвищених температурах призводить до суттєвого зростання незворотних деформацій повзучості та накопичення прихованої пошкоджуваності. Циклічне прикладення напружень та циклічна зміна температури зазвичай прискорюють ці процеси [1]. Це необхідно враховувати при розрахунках, необхідних при проектуванні нової техніки, а також при визначенні остаточного ресурсу.

Як відомо [2], моделювання складних фізико-механічних процесів, що відбуваються в конструктивних елементах, потребує формулювання відповідних рівнянь стану та подальшої їхньої перевірки з залученням експериментальних даних. Сучасний стан розвитку теоретичного опису фізичних залежностей теорії повзучості та руйнування циклічно навантажених тіл забезпечено суттєвим внеском таких вчених, як Ю.М.Работнов, Л.М.Качанов, Ю.М.Шевченко, Г.С.Писаренко, Ж.Леметр, Ж.-Л.Шабош, Дж.Хейхерст, М.Хжановскі, М.С.Можаровський, М.І.Бобир та багатьох інших. Багато робіт присвячено циклічній повзучості та руйнуванню матеріалів при дії напружень, що істотно перевершують границю пропорційності. Між іншим, велика кількість елементів машин та конструкцій проектується виходячи з того, що початкові пластичні деформації мають бути відсутніми, хоча розвиток деформацій повзучості та пов’язаної з нею пошкоджуваності запобігти не вдається. Таким чином, актуальним та практично важливим є створення рівнянь стану повзучості та пошкоджуваності матеріалів при циклічному навантаженні.

На сьогоднішній час вже майже стандартним стало розрахункове оцінювання деформування та руйнування конструкцій за допомогою методів аналізу, що використовують метод скінчених елементів (МСЕ) для розв’язання крайових задач.

Отже, сучасний метод розрахунку повзучості та руйнування відповідальних конструктивних елементів машин, які знаходяться під впливом циклічно змінного теплового та силового навантаження має базуватись на точних рівняннях стану, що є придатними до моделювання в розрахунках при складному напруженому стані, та на чисельних методах скінчених елементів для крайових задач та різницевому для початкових.

Постановка задачі та метод розв’язку. В роботах [3, 4] наведено математичну постановку задачі повзучості та руйнування під дією циклічно прикладених силових та температурних навантажень. Для довільного тіла записано повну систему рівнянь теорії повзучості. Зовнішні об’ємні сили вважаються незмінюваними у часі, а поверхневі сили у загальному випадку мають постійну та циклічно змінювану складові. Припускається, що змінювання температури за часом також є циклічним. Поверхневі сили та функції змінювання температури за часом представлено у вигляді рядів Фур’є. Фізичні рівняння побудовані на базі рівнянь Бейлі-Нортона, Работнова-Качанова та експоненціальній залежності швидкості деформацій повзучості від температури.

Для одержання співвідношень методу розрахунку застосовано метод багатьох масштабів часу, згідно якого основні невідомі представлено розкладанням у ряд за ступенями малого параметру, який введено як відношення періоду циклу навантаження до часу до руйнування тіла, що розглядається. Після перетворень, з застосуванням осереднення отриманих рівнянь на періоді циклу, з базової системи рівнянь отримують дві. Перша описує рух системи у масштабі «повільного» часу, а друга – «швидкого» [4]. Отримані системи не є незалежними, бо до першої з них входять значення інваріантів тензорів амплітудних напружень, визначених за розв'язком другої задачі. Ці інваріанти використовуються в рівняннях стану повзучості з урахуванням пошкоджуваності при циклічному температурно-силовому навантаженні.

За останні роки такі рівняння стану створено для випадку частот навантаження, які відповідають вимушеним коливанням, з урахуванням пошкоджуваності внаслідок динамічної повзучості, що відбувається при цьому, та пошкоджуваності внаслідок багатоциклової втоми [5], а також для випадку повільного, квазістатичного змінювання напружень та температур у циклі, що характерно для процесів, які відбуваються у двигунах, енергетичному та хімічному обладнанні при їхньому виході на робочий режим, довгій роботі, її припиненні та деякому очікуванні нового циклу [4, 6]. Запропоновано також спосіб оцінювання спільної дії багато- та малоциклових процесів повзучості та накопичення пошкоджуваності в матеріалах при циклічному навантаженні.

В цій роботі застосовано другий варіант рівнянь стану, процеси динамічної повзучості та багатоциклової втоми не розглядаються. Таке припущення спрямовано на виявлення характерних рис тих фізичних явищ, що відбуваються в конструктивних елементах при складному напруженому стані при циклічному змінюванні температури та пов'язаному з цим циклічному змінюванні напружень.

Розглядаються двовимірні задачі теорії повзучості, які представляють досить вагомий клас розрахункових схем елементів конструкцій сучасного машинобудування. З застосуванням відомих підходів, що залучають МСЕ до розв'язання фізично нелінійних задач [8], отримуємо основні співвідношення методу. Скінчено-елементне формулювання задачі розрахунку повзучості з урахуванням накопичення пошкоджуваності при циклічному навантажені отримуємо у наступному вигляді:

$$[K]\{\dot{u}\} = \{\dot{F}\} + \{\dot{F}^C\}; \tag{1}$$

$$\{\dot{F}\} = \sum_{N_\beta} \int_{S_3^e} [N^p]^T \{\dot{p}\} dS \Bigg|_{t=0} + \sum_{N_\beta} \int_{V_\beta} [N^p]^T \{\dot{P}\} dV \Bigg|_{t=0} + \sum_{N_\beta} \int_{V_\beta} [\overline{B}]^T [C] \{\dot{\varepsilon}^T\} dV;$$

$$\{\dot{F}^c\} = \sum_{N_\beta} \int_{V_\beta} [\overline{B}]^T \cdot [C] \cdot \{\dot{c}\} dV;$$

$$\{\dot{c}\} = \frac{3}{2} \frac{B(\sigma_i)^{n-1} g_n g_n^T}{(1-\omega)^k} [\hat{C}] \{\sigma\}; \tag{2}$$

$$\dot{\omega} = D g_r g_r^T \frac{(\sigma_e)^r}{(1-\omega)^k}, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega(t_*) = \omega_* . \qquad (3)$$

Тут K – матриця жорсткості; u – глобальний вектор вузлових переміщень; F – вектор вузлових навантажень, що містить поверхневі й об'ємні сили; F^C – сили, обумовлені деформаціями повзучості; $\overline{B}$ – матриця деформування; C – матриця пружних констант; N – матриця форм; p и P – поверхневі й об'ємні навантаження відповідно; c – незворотні деформації повзучості; ε^T – температурні деформації; β – номер скінченого елементу; V_β – об'єм скінченого елементу; $\sum\limits_{N_\beta}$ – підсумовування за всіма скінченими елементами; S – площа поверхні скінченого елементу, який знаходиться під дією розподіленого навантаження; ω – параметр пошкоджуваності; t_* – час до завершення прихованого руйнування; σ_i – еквівалентне напруження Мізесу (інтенсивність напружень); σ_e – еквівалентне напруження, що визначається за залученим критерієм руйнування; g_n, g_r – функції коефіцієнтів амплітуди циклічного навантаження; $g^T{}_n$, $g^T{}_r$ – функції коефіцієнтів амплітуди циклічного нагріву, які описано в роботі [4]; B, D, n, r, l, k – константи, що визначаються за експериментальними даними про повзучість та руйнування матеріалу при заданій температурі. Розподіл температури за часом та об'ємом визначається розв'язанням задачі нестаціонарної теплопровідності.

Зауважимо, що рівняння стану (2)- (3) побудовано для випадку циклічної дії навантажень та температур, але завдяки застосуванню при їхньому одержані асимптотичних методів та осереднення на періоді циклу вони переформульовані для виконання розрахунків виключно при дії незмінних навантажень при фіксованій температурі. Вплив циклічності навантаження та нагріву / охолодження відбивається завдяки наявності в рівняннях стану функцій коефіцієнтів амплітуди.

Система диференційних рівнянь (1)-(3) розв'язується з застосуванням різницевого методу прогнозу-корекції третього порядку. Інтегрування проводиться доти, доки параметр пошкоджуваності не прийме свого критичного значення ω_*.

Створений метод розрахунку дозволяє проводити набагато більш швидке чисельне дослідження різних варіантів, ніж при прямому інтегруванні часто дуже великої кількості циклів напружень та температури, що є вкрай необхідним при проектуванні.

Розрахункове дослідження моделі лопатки ГТД. Дослідження циклічної міцності виконано для одного з найпоширеніших типів конструктивних елементів енергетичного обладнання – лопаток газотурбінних двигунів (ГТД). Причина їхнього руйнування – екстремальні умови термічного та механічного навантаження. Лопатки безпосередньо знаходяться у змінному температурному полі газового потоку при різних режимах роботи двигуна. На довговічності соплових лопаток відбиваються усі нерівномірності температури газового потоку. Робочі лопатки, крім теплозмін, піддаються значним механічним навантаженням внаслідок дії відцентрових сил.

Проблема не є новою, вона здавна привертала увагу інженерів-проектувальників та вчених-механіків [7]. Проводилась велика кількість експериментів для матеріалів при простому та складному напруженому станах, а також деякі дослідження натурних моделей. В даній роботі результати одного з таких унікальних експериментів, проведених на моделях лопаток ГТД [7], залучено до верифікаційних досліджень розв'язків, які отримують за допомогою створеного розрахункового методу та програмного комплексу.

В монографії [7] описано серію експериментів, в яких осьове навантаження розтягом було відсутнє. В зв'язку з цим, задачу визначення напружено-деформованого стану лопатки розв'язано за допомогою постановки задачі, що використовує схему плоскої деформації.

Для отримання констант, які входять до рівнянь стану (2)-(3), застосовано дані експериментальних досліджень, описаних в роботі [7]. Для зразків зі жароміцного сплаву ЭИ826 при температурі 1073 °К отримано: $B = 4{,}94 \cdot 10^{-10}$ $(\text{МПа})^{-n}/\text{с}$; $n = r = 2{,}048$; $D = 2{,}11 \cdot 10^{-10}$ $(\text{МПа})^{-n}/\text{с}$; $k = 3{,}1$. За допомогою отриманого авторами в роботі [4] кінетичного рівняння для параметра пошкоджуваності (3) визначено значення числа циклів до руйнування зразків зі сплаву, що розглядається, при температурі 973, 1073 та 1173 °К. Отримані результати порівнювались з розрахунковими даними роботи [7], при цьому було відмічено цілком достатня ступінь збіжності (до 5 %).

В експериментах моделі лопаток зі сплаву ЭИ826 навантажувались при режимі циклічної зміни температури металу вхідної кромки моделі лопатки в діапазоні 723-1073 °К (5 с нагрів, 10 с охолодження).

Розрахункові дослідження циклічної термоповзучості та пов'язаної з нею пошкоджуваності лопатки ГТД виконано за допомогою розробленого авторами програмного комплексу [9].

На рис. 1 наведено основні геометричні характеристики перерізу лопатки та її скінченоелементна модель, що складається з 1389 трикутних елементів та 770 вузлів.

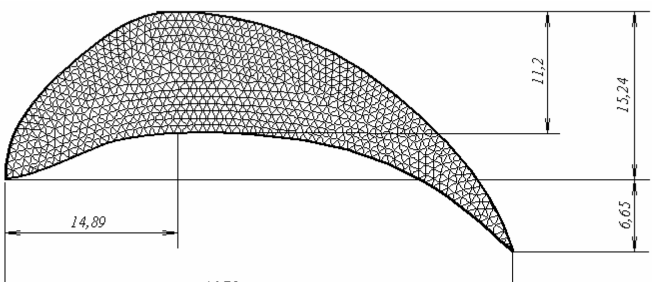


Рисунок 1 – Скінченноелементна модель перерізу лопатки

В розрахунках приймалося, що лопатка знаходиться в циклічно змінному температурному полі з періодом 15 с: 5 с поле є неоднорідним, температура змінюється від 1073 °К на вхідній кромці до 973 °К на вихідній. Останні 10 с циклу лопатка знаходиться в однорідному полі з Т = 723 °К. Вважаємо, що нагрів та охолодження відбуваються миттєво. Тиск від газового потоку на вхідній кромці прийнятий рівним 0,65 МПа.

Розрахунками визначені поля температур та напружень, що відповідають термопружним задачам зі знайденим розподілом температур. Отримані розподіли напружень прийнято як початкові умови при інтегруванні задачі циклічної термоповзучості.

За допомогою чисельного моделювання визначені розподіли переміщень, напружень, деформацій та параметру пошкоджуваності для різних значень числа циклів нагріву-охолодження, а також число циклів, що призводить до руйнування лопатки (виникнення макротріщини). Воно складає 21840 циклів. Для моменту закінчення прихованого руйнування розподіл параметру пошкоджуваності за перерізом лопатки наведено на рис. 2. Руйнування, як видно з рисунку, відбувається в районі стику вхідної та вихідної кромок лопатки. На рис. 3 наведено графік залежності параметру пошкоджуваності від часу, побудованої для елементу, в якому відбувається руйнування.

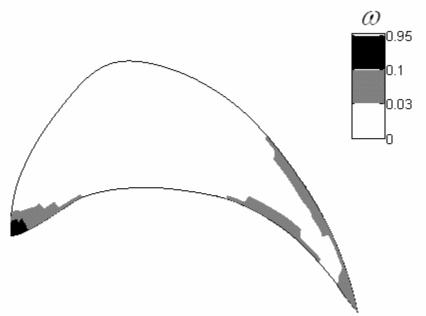


Рисунок 2 – Розподіл параметру пошкоджуваності за перерізом лопатки в момент закінчення прихованого руйнування

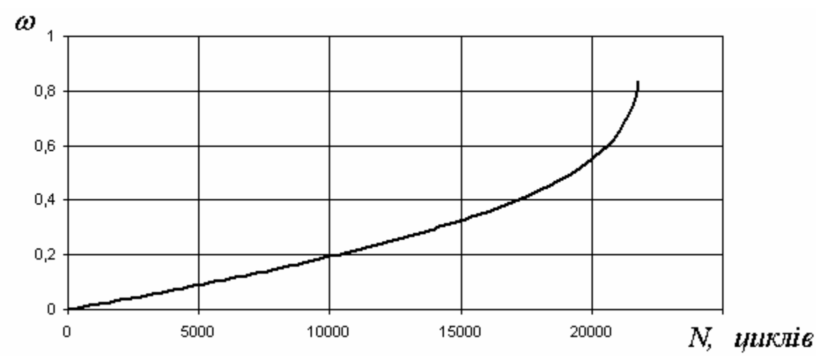


Рисунок 3 – Залежність параметру пошкоджуваності від часу

В монографії [7] наведено експериментально визначене число циклів до руйнування при термоциклічному навантаженню даної лопатки, що дорівнює 22 500 циклів. Отже, порівняння розрахунку та натурного експерименту дає різницю в 5 відсотків, що може вважатись цілком задовільним в інженерних розрахунках. Наголосимо, що такої збіжності вдалося досягнути застосуванням ретельної обробки експериментальних даних, що отримані на зразках з того ж матеріалу та тієї ж партії постачання, що й моделі лопаток. Отже, при розрахунках лопаток, що випускаються серійно, слід намагатись отримати експериментальні дані для матеріалу тієї ж партії, що й буде застосовуватись при виробництві.

Висновки. У статті наголошено на актуальності створення методу розрахунку довготривалої міцності елементів конструкцій, які працюють в умовах циклічних навантажень та теплозмін. Описано постановку двовимірних задач розрахунку повзучості та пошкоджуваності та метод їхнього розв'язання, який базується на застосуванні осереднених рівнянь стану циклічних процесів, методі скінчених елементів та різницевих методах інтегрування за часом. Метод веріфіковано на задачі термоціклічного деформування лопаток ГТД.

Список літератури: 1. *Тайра С., Отани Р.* Теория высокотемпературной прочности материалов. – М.: Металлургия, 1986. – 280 с. **2.** *Lemaitre J., Chaboche J.-L.* Mechanics of solid materials. – Cambridge: University press, 1994. – 556 p. **3.** *Бреславский Д.В., Корытко Ю.Н.* Ползучесть тел вращения при циклических теплосменах // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. Збірник наук. праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. – Вип. 10. – С. 41-47. **4.** *Бреславський Д.В., Коритко Ю.М., Морачковський О.К., Татарінова О.А.* Повзучість та пошкоджуваність елементів конструкцій при високотемпературному циклічному навантаженні // Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування. Праці Міжнародної науково-технічної конференції, 21-24 вересня 2009 р., Тернопіль (Україна). – Тернопіль: Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя, 2009. – С. 40-46. **5.** *Breslavsky D., Morachkovsky O.* Cyclic creep constitutive equations with consideration of creep - fatigue interaction // Proc. of 1st International Conference on Mechanics of Time Dependent Materials. – Bethel: SEM. – 1995. – P. 61-66. **6.** *Бреславский Д. В., Морачковский О. К. Уварова О. А.* Метод асимптотических разложений в задачах мало- и многоцикловой ползучести материалов // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2004. – № 19. – С. 149-152. **7.** *Третьяченко Г.Н., Карпинос Б.С., Барило В.Г.* Разрушение материалов при циклических нагревах. – Киев: Наукова думка, 1993. – 287 с. **8.** *Breslavsky D., Morachkovsky O.* Dynamic creep continuum damage mechanics: FEM-based design analysis // Computational Plasticity: Fundamentals and Applications. Proc. of the Fifth International Conference on Computational Plasticity held in Barselona, Spain, 17-20 March 1997. – Barselona: IMNE. – 1997. – Part 1. – P. 1071-1076. **9.** *Бреславский Д.В, Корытко Ю.Н., Лисак П.Н.* Программные средства для конечноэлементного моделирования двумерных задач теории ползучести // Вісник НТУ «ХПІ» – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – № 38. – С. 24-29.

Надійшла до редколегії 11.11.2009

УДК 669.018

Д.В.БРЕСЛАВСЬКИЙ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПІ»;
І.В.НАУМОВ, асп., НТУ «ХПІ»

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУЙНУВАННЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Стаття містить короткий опис обладнання, призначеного для проведення експериментальних досліджень руйнування тонких пластин при ударі. Описані досліди по ударному вантаженню аж до руйнування, проведені на зразках і тонких пластинах, виготовлених із легованої сталі. Приведені результати експериментів.

The paper contains the brief description of the equipment for experimental investigations on thin plate's fracture under impact loading. The impact loading fracture tests, which were carried on specimens and thin plates made from alloy steel, are described. The experimental results are presented.

Аналіз стану проблеми. Питання ударного навантаження та руйнування тонкостінних конструкцій здавна привертають увагу дослідників [1]. Це пов'язано з критичністю питань ударної міцності для багатьох відповідальних конструктивних елементів у космічному, авіаційному, енергетичному, хімічному та транспортному машинобудуванні. Дослідження процесів ударного навантаження дуже інтенсивно проводяться й в теперішній час [2, 3], що пов'язано з великою складністю їхнього теоретичного опису та чисельного моделювання, а також з необхідністю отримання експериментальних даних з властивостей опору удару сучасних конструкційних матеріалів.

Одним з напрямків досліджень поведінки тонкостінних елементів конструкцій при ударному навантаженні, що є менш вивченим на теперішній час, є аналіз циклічної ударної міцності. Дослідження, виконані авторами в цьому напрямі, роблять, на наш погляд, невеликий внесок до вирішення питань з'ясування закономірностей процесів, що розглядаються. Дану статтю присвячено викладенню результатів досліджень малоциклової ударної втоми пластин, які виготовлені з легованої сталі 12Х18Н10Т.

Постановка завдання та опис експериментального обладнання. Завданням експериментального дослідження є вивчення руйнування тонких квадратних шарнірно опертих пластин, а також знаходження характеристик малоциклової ударної втоми матеріалу, з якого вони виготовлені. Як завжди в механіці деформованого твердого тіла, результати проведених тестів мають бути застосовані при визначенні достовірності чисельних та чисельно-аналітичних методів, що далі застосовуватимуться для розрахунків деформування та руйнування пластин.

До проведення експериментів залучено інформаційно-вимірювальний комплекс, розроблений на кафедрі систем і процесів управління НТУ «ХПІ» [4]. Його призначено для реєстрації деформацій при тестуванні тонких ударно навантажених пластин. Комплекс складається з сукупності тензорезисторів, блоку формування сигналів датчиків, блоку спрягання та захисту, плати АЦП

ADA-1406 та персонального комп’ютеру.

Цифрові дані, що отримані з плати АЦП, надходять до комп’ютеру та обробляються там за допомогою спеціального програмного забезпечення. Воно дозволяє записати сигнал, визначити значення вимірюваних параметрів, спектри сигналів, час затухання коливань [4].

Комплекс входив до складу лабораторної тестово-вимірювальної системи (ЛТВС), що додатково ще включає пристрій фіксації пластин з реалізованим шарнірним закріпленням (рис. 1) та пристрій навантаження (рис. 2), який працює за допомогою електромеханічного імпульсного перетворювача. Розгін ударника проводиться магнітним полем індуктора. Застосовано циліндричний ударник діаметром 4 мм, шлях його руху складав 5 мм.

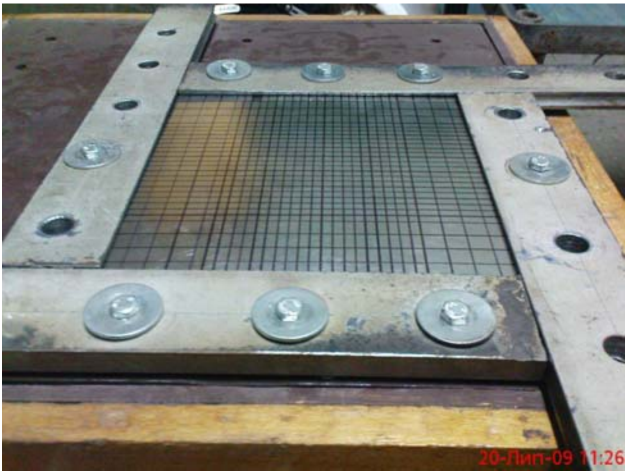


Рисунок 1 – Пристрій фіксації пластин

На пластини наноситься прямокутна сітка, яка призначена для відображення поточного стану деформування. Після кожного блоку навантажень відбувається сканування сітки. Отримані зображення зберігаються в форматі .psd. Цей формат дозволяє створювати багатошарові зображення, для того, щоб у подальшому сумістити сітки, отримані на різних етапах досліду. Також проводились відеозаписи експериментів з метою визначення швидкості руху ударника.

Проведення експерименту потребувало виконання низки заходів, спрямованих на боротьбу з перешкодами, що створюються магнітним полем електромеханічного імпульсного перетворювача.

Для проведення одновісних ударних випробувань зразків, виготовлених з того же матеріалу, що й пластини, які досліджувались, ЛТВС було модифіковано шляхом заміни пристрою фіксації на інший.

Опис проведених експериментів. Цикл проведених випробувань складався з чотирьох серій експериментів: 1) визначення числа циклів до руйнування при одновісному навантаженні; 2) статичне навантаження пластин; 3) ударне навантаження, при якому реалізовувались лише пружні деформації пластини; 4) ударне малоциклове руйнування пластин.

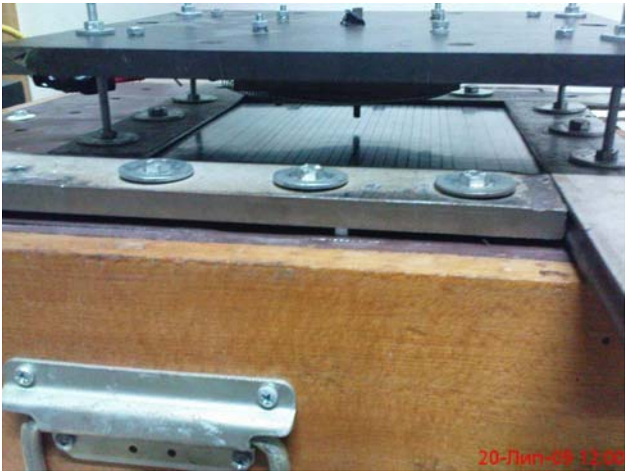


Рисунок 2 – Пристрій навантаження

До випробувань залучено квадратні пластини зі стороною 180 мм, виготовлені з листів легованої сталі 12Х18Н10Т товщиною 1.5 мм. Зразки для одновісних випробувань виготовлялись з цих же листів. Всього було протестовано 6 зразків (по 3 для двох рівнів напружень) та 3 пластини.

В результаті проведених на зразках іспитів визначено середні значення числа циклів до руйнування. Для першої групи воно склало 146 циклів, а для другої – приблизно 39 циклів. На рис. 3 наведено три зразки, сфотографовані після досліджень: зліва направо – два зразки з другої групи, один з першої. Тут же наведено число циклів до руйнування для кожного з них.

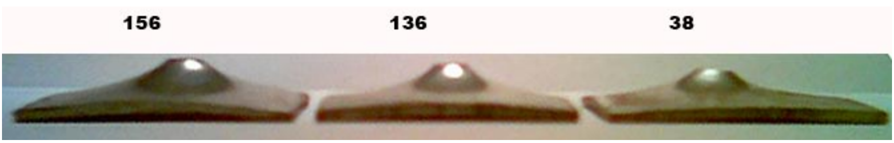


Рисунок 3 – Зруйновані зразки

Експерименти другої та третьої серії були виконані для тарирування створеної ЛТВС. Завдяки статичним експериментам при їхньому порівнянні з аналітичним розв’язком задачі про напружено-деформований стан шарнірно-закріпленої пластини було визначено співвідношення між результатами вимірювань змін електричних напружень в тензодатчиках та значеннями деформацій в пластинах. Після цього виконувалось ударне навантаження пластин сферичним та циліндричним ударниками. Вони були застосовані для порівняння отриманих в результаті проведених експериментів залежностей деформацій від часу з результатами чисельно-аналітичного моделювання удару по пластині за методикою, наведеною в роботі [5].

Опишемо експериментальне дослідження з малоциклового руйнування пластин. Пластини розміщувались у пристрої фіксації та піддавались повторному ударному навантаженню доти, доки не відбувалось повного руйнування з вильотом пробки, що мала діаметр ударника. Швидкість руху ударнику складала 0.0625 м/с при електричному напруженні 360 В на конденсаторі перетворювача ємністю 4700 мкФ. Середнє значення числа циклів до руйнування склало 79 ударів, розкид не перевищував 16 %.

Наголосимо на досить локальному характері пластичних деформацій в районі дії ударнику (рис. 4), що не перевершує 6 % від загальної площі поверхні пластини.

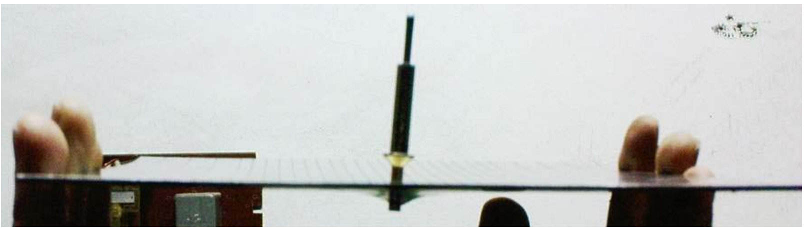


Рисунок 4 – Зруйнована пластина

Висновки.. В статті наведено опис експериментів, спрямованих на вивчення процесів ударного малоциклового навантаження тонких пластин. Визначено основні параметри лабораторної тестово-вимірювальної системи, серед яких швидкість руху ударника, значення електричного напруження на конденсаторі перетворювача. Створено методику експерименту, що дозволяє проводити тестування розрахункових методів для оцінки деформованого стану за допомогою послідовного запису характеристик сіток, які нанесені на поверхню пластини та змінюються при кожному циклі навантаження, та числа циклів до руйнування.

Список літератури: **1**. *Гольдсмит В.* Ударная теория и физические свойства соударяемых тел. – М., 1965. – 451 с. **2.** *G. Ben-Dor, A.Dubinsky, T.Elperin*. Ballistic Impact: Recent Advances in Analytical Modeling of Plate Penetration Dynamics–a Review // Applied Mechanics Reviews, November 2005. – Vol. 58. – P. 355-371. **3.** *J.E. Field* Review of experimental techniques for high rate deformation and shock studies // Int. J. Imp. Eng.– Vol. 30. – 2004. – P. 725-775. **4**. *Д.В.Бреславский, И.В.Наумов, А.В.Онищенко*. Экспериментальное исследование процессов ударного нагружения тонких пластин // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, НТУ «ХПІ». – 2007. – № 38. – С. 30-35. 5. *Д.В.Бреславский, А.В.Онищенко*. Удар сферического тела по ортотропной пластине // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, НТУ «ХПІ». – 2003. – № 8, т. 2. – С. 3-10.

Надійшла до редколегії 12. 11. 2009

УДК 539.1

В.А.ВАНИН, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А.ГРИГОРЬЕВ, асп., НТУ «ХПИ»;
А.И.ДЕРИЕНКО, канд.техн.наук, доц., КГУ им. М.Остроградского, Кременчуг

ВНУТРЕННИЕ СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ПЕРЕНОСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

За допомогою лінійної теорії пружності та потенціалів Герца вивчаються експоненціальні хвилі переносу, що розповсюджуються по циліндричному стрижню. Підтверджені та уточнені результати застосування класичної теорії тонких стрижнів. Отримані хвилі переносу імпульсу, що не описуються класичною теорією.

At use of the linear theory of elasticity and Hertz potentials the exponential waves of translation extended on a cylindrical core are investigated. The results of the use of the classical theory of thin cores are confirmed and specified. The waves of the impulse transfer which are not described by the classical theory are gained.

Введение и постановка задачи. Исследуются новые аспекты актуальной проблемы генерирования уединенных гармонических волн переноса (фононов), движущихся в активной упругой среде по траекториям винтовой формы (рис. 1). Считается, что винтовой фонон (механический аналог фотона) представляет собой устойчивый волновой пакет, в котором присутствуют связанные бегущие волны других типов (солитон, экспоненциальные волны).

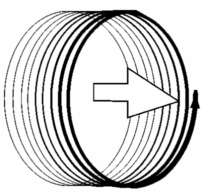


Рисунок 1 – Форма траектории винтового фонона

В работах [1,2], где исследуются связанные нелинейные колебания винтового цилиндрического стержня, использована обычная для динамики стержней гипотеза о равномерной деформации поперечного сечения (смотри, например, монографию [3]). Однако когда протяженность волны становится соизмеримой с диаметром стержня, эта гипотеза требует обоснования. Кроме того, здесь, априори, могут наблюдаться колебания, сопровождающиеся сложной формой деформации сечения (рис. 2, 3). Известным аналогом для этих процессов являются колебания электромагнитного поля внутри полого цилиндрического волновода [4]. Такие колебания далее будем называть ***зональными***. В данной работе будет показано, что зональные колебания, как правило, являются ***внутренними колебаниями*** стержня, поскольку они сводятся к перераспределению энергии внутри сечения и не влияют на средние (по сечению) геометрические и силовые характеристики процесса колебаний (такие, как линейные и угловые скорости, силы и моменты, рассматриваемые в работах [1-3]). Но, как оказалось, из этого правила существуют исключения, и эти исключения важны для теории связанных колебаний. Чтобы пояснить их значение, обратимся к рис. 4, где сплошными линиями изображены решения характеристического (другое название дисперсионного) уравнения для модели винтового

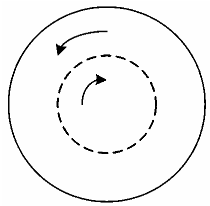


Рисунок 2 – Радиальная зональная деформация сечения

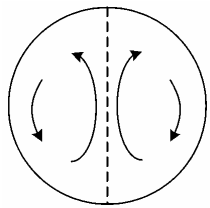


Рисунок 3 – Секторальная зональная деформация сечения

стержня из работы [1]. Каждой точке на графике соответствует некоторая простая волна вида

$$\vec{X} \cdot \exp(i(\omega t - \lambda z)),$$

где $\vec{X}$ – ее форма; λ – волновое число; ω – частота, причем точкам из первого квадранта отвечают гармонические волны, второго квадранта – затухающие волны и третьего квадранта – экспоненциальные волны. Гармонические и экспоненциальные волны являются волнами переноса. Наклонная пунктирная прямая пересекает эти ветви в четырех точках, и соответствующие этим точкам волны, которые имеют одинаковые фазовые скорости, могут быть объединены в ***волновой пакет***.

Единица длины отвечает радиусу кривизны стержня R_1, единица времени – промежутку распространения волны поперечной деформации по стержню длины R_1.

Устойчивость волнового пакета и диссипация его энергии во многом определяется теми условиями, которые возникают на фронте волны, в частности, требованиями к непрерывности и гладкости динамических характеристик, и чем больше волн объединяются в пакет, тем проще обеспечить эту гладкость.

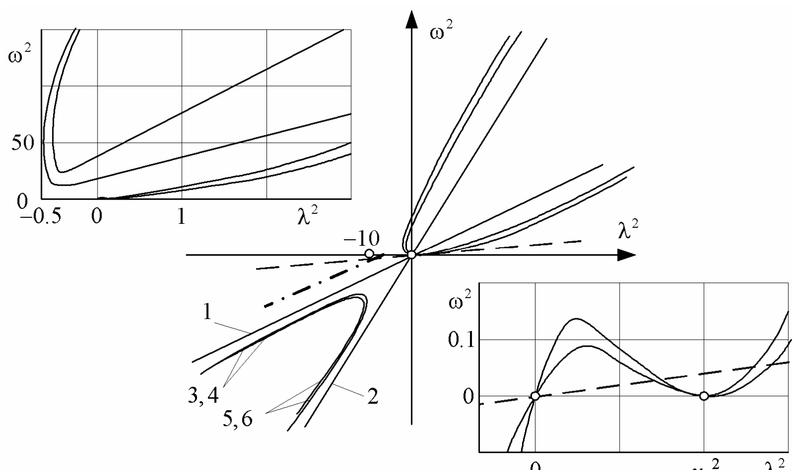


Рисунок 4 – Решения дисперсионного уравнения (формы деформации сечения: 1 – кручение; 2 – осевое сжатие; 3, 4 – поперечный сдвиг; 5, 6 – изгиб, в двух плоскостях; χ_1 – относительная кривизна стержня; χ_1^{-1} – индекс винтового стержня, $\chi_1 = R_1/R$)

В связи с этим была поставлена следующая задача: найти экспоненциальные волны переноса, которые не описываются моделью работы [1], но могли бы использоваться при образовании волновых пакетов. Соответствующие этим волнам точки на рис. 4 отмечены штрих-пунктиром; как видно, они расположены в области волн малой протяженности, где гипотеза о равномерном деформировании сечения может не выполняться.

Выбор математической модели. Крутильные и продольные колебания **прямого стержня** в рамках гипотезы о равномерном деформировании сечения описываются волновыми уравнениями, имеющими следующие факторизации (рис. 5):

$$\begin{cases} \rho I_3\, \ddot{\gamma}_3 = \partial M_3 / \partial z \\ c\gamma_3\, M_3 = \partial x_3 / \partial z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho S\, \ddot{x}_3 = \partial Q_3 / \partial z \\ cx_3\, Q_3 = \partial x_3 / \partial z \end{cases} \tag{1}$$

остальные характеристики и участвуют в поперечных (изгибно-сдвиговых) колебаниях прямого бруса, происходящих в 2-ух перпендикулярных плоскостях:

$$\begin{cases} \rho S\, \ddot{x}_1 = \partial Q_1 / \partial z \\ \rho I_2\, \ddot{\gamma}_2 = \partial M_2 / \partial z - Q_1 \\ cx_1\, Q_1 = \partial x_1 / \partial z + \gamma_2 \\ c\gamma_2\, M_2 = \partial \gamma_2 / \partial z \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho I_1\, \ddot{\gamma}_1 = \partial M_1 / \partial z + Q_2 \\ \rho S\, \ddot{x}_2 = \partial Q_2 / \partial z \\ c\gamma_1\, M_1 = \partial \gamma_1 / \partial z \\ cx_2\, Q_2 = \partial x_2 / \partial z - \gamma_1 \end{cases} \tag{2}$$

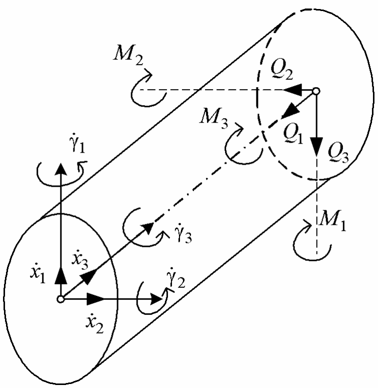


Рисунок 5 – Скорости смещения сечения прямого стержня и действующие в нем силы

В уравнениях (1), (2) ρ обозначает плотность материала, S – площадь сечения, I_1, I_2, I_3 – его моменты инерции относительно соответствующих осей; $cx_1 \ldots c\gamma_3$ – коэффициенты податливости сечения при поперечном сдвиге, сжатии, кручении или изгибе; конкретные формулы для этих коэффициентов в зависимости от формы сечения можно найти в работах [1, 5].

Для систем (1), (2) были составлены характеристические уравнения, а их решения (рис. 6) сопоставлены с представленными на рис. 4. Оказалось, что если стержень имеет круглое сечение радиуса R, то при условии $|\lambda R| > \chi_1^{-1}$ в третьем квадранте решения дисперсионных уравнений для прямого и винтового стержня практически совпадают. Это означает, что кривизна и кручение оси винтового стержня для исследуемых волн не играют существенной роли, и ими допустимо пренебречь.

Для решения поставленной задачи были использованы известные уравнения линейной теории упругости [4]. Запишем дифференциальное уравнение свободных колебаний для упругих смещений $\vec{u}(r, \varphi, z, t)$ точек цилиндрического стержня, считая материал стержня однородным и изотропным:

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - G \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}\,, \tag{1}$$

где r, φ, z – цилиндрические координаты точки; t – время; K – модуль объемного сжатия; $K = 3\mu/(1-2\mu)G$; G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона. Известно, что уравнение (1) имеет решение вида

$$\vec{u} = \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad}\psi\ , \qquad (2)$$

причем потенциалы $\psi(r,\varphi,z,t)$ и $\vec{A}(r,\varphi,z,t)$ удовлетворяют волновым уравнениям

$$a_{пр}^{-2}\cdot\partial^2\psi/\partial t^2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi\ , \qquad (3)$$

$$a_{поп}^{-2}\cdot\partial^2\vec{A}/\partial t^2 = \Delta[\vec{A}]\ , \qquad (4)$$

где $\Delta\left[\vec{A}\right] = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$ – оператор Лапласа; $a_{пр} = \sqrt{K/\rho}$ – скорость звука для продольных колебаний; $a_{поп} = \sqrt{G/\rho}$ – скорость звука для поперечных колебаний.

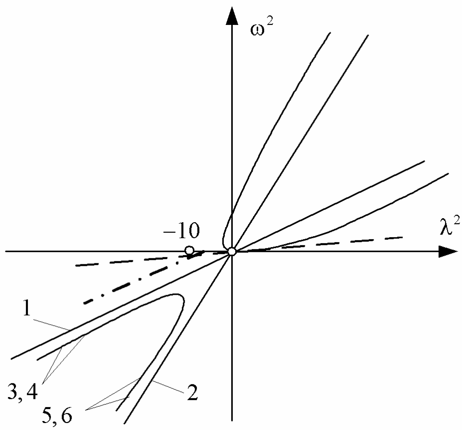


Рисунок 6 – Решения дисперсионного уравнения для классической модели прямого стержня (обозначения те же, что и на рис.4; принято $R_1 = 1$)

На внешней границе стержня (при $r = R$) рассматривались стандартные для механики твердого тела условия равенства нулю нормального давления и скалывающих напряжений:

$$\operatorname{def}\vec{u}_{rr} + \frac{\mu}{1-2\mu}\operatorname{div}\vec{u} = 0\ , \qquad (5)$$

$$\operatorname{def}\vec{u}_{rz} = 0\ ; \qquad (6)$$

$$\operatorname{def}\vec{u}_{r\varphi} = 0\ ; \qquad (7)$$

на оси стержня все напряжения должны быть ограничены.

Все преобразования проводились в криволинейных цилиндрических координатах; формулы для компонент тензора деформации, записанных в этих координатах, приведены, например, в [6].

Заметим, что задача (4), (6), (7) фактически рассматривалась в [4], когда искали бегущие электромагнитные волны внутри цилиндрического волновода. Мы сможем воспользоваться полученным там решением, но нужно учесть три отличия новой задачи от известной:

– решение обязано удовлетворять дополнительному условию (5);
– решение может использовать не только векторный потенциал $\vec{A}$, но и скалярный потенциал ψ;
– в отличие от электромагнитного поля, скалярный и векторный потенциалы в упругой среде имеют разные скорости распространения.

Осесимметричные волны переноса для потенциалов. Следуя методу, изложенному в [4] для волноводов, будем искать решение уравнений (3) и (4) в форме осесимметричных экспоненциальных волн переноса

$$\psi(r,z,t)=\Phi(r)\cdot\exp(\omega t-\lambda z) \quad \text{и} \quad \vec{A}_{1,2}(r,z,t)=\vec{\Phi}_{1,2}(r)\cdot\exp(\omega t-\lambda z),$$

где $\omega t \le \lambda z$, а амплитудные функции векторных потенциалов имеют следующий вид:

$$\vec{\Phi}_1(r)=\{0,0,\Pi_1(r)\}, \quad \vec{\Phi}_2(r)=rot\{0,0,\Pi_2(r)\}.$$

Векторная функция $\{0,0,\Pi_2(r)\}\cdot\exp(\omega t-\lambda z)$, как известно, в теории электромагнитных волн называется *бегущим потенциалом Герца*. Кроме того, следуя традиции, заложенной Дираком, величина $\lambda < 0$ называется «*отрицательным волновым числом*», а величина $\omega < 0$ – «*отрицательной частотой*». При таком выборе этих величин экспоненциальная волна движется со скоростью $v = \omega/\lambda$ в положительном направлении оси z и очень быстро (с экспоненциальной скоростью) затухает по своей длине. Дирак, создавший волновую модель электрона, в последние годы жизни предлагал использовать экспоненциальные волны и «отрицательные частоты» для описания ядер движущихся элементарных частиц, но довести задуманное до логического конца не успел.

Тогда величины $\lambda^2 > 0$, $\omega^2 > 0$, а функции $\Phi(r)$, $\Pi_{1,2}(r)$ должны удовлетворять уравнениям Бесселя нулевого порядка

$$\Phi''+\Phi'/r+(\lambda^2-\omega^2/a_{пр}^2)\Phi=0, \quad \Pi''_{1,2}+\Pi'_{1,2}/r+(\lambda^2-\omega^2/a_{поп}^2)\Pi_{1,2}=0,$$

и, с учетом ограниченности этих функций при $r = 0$, получаем, что

$$\Pi_{1,2}(r)=J_0(\beta_1 r), \quad \Phi(r)=J_0(\beta_2 r),$$

где $\beta_1=\sqrt{\lambda^2-\omega^2/a_{поп}^2}$, $\beta_2=\sqrt{\lambda^2-\omega^2/a_{пр}^2}$.

Это означает, что смещение в волне переноса описывается формулой

$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3=C_1\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}_1+C_2\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}_2+C_3\cdot\mathrm{grad}\,\psi$, то есть

$$\vec{u}=[C_1\{0;\beta_1 J_1(\beta_1 r);0\}-C_2\{\lambda\beta_1 J_1(\beta_1 r);0;\beta_1^2 J_0(\beta_1 r)\}-C_3\{\beta_2 J_1(\beta_2 r);0;\lambda J_0(\beta_2 r)\}]e^{\omega t-\lambda z}, \quad (8)$$

где C_1, C_2, C_3 – некоторые константы, выбор которых подчинен удовлетворению граничных условий (5), (6), (7).

Анализ этих условий показывает, что волна $\vec{u}_1$ и сумма волн $\vec{u}_2+\vec{u}_3$ в цилиндрическом стержне не связаны между собой, и могут распространяться отдельно. В результате мы приходим к частным случаям, анализируемым в следующих двух пунктах.

Вращения поперечного сечения стержня. Для волны

$$\vec{u}_1=\{0;\ \beta_1 J_1(\beta_1 r);\ 0\}\,e^{\omega t-\lambda z}$$

условия (5), (6) не актуальны, а условие (7) после учета тождества

$$J_1'(\beta_1 r)\beta_1-J_1(\beta_1 r)/r=-\beta_1 J_2(\beta_1 r)$$

приводит к уравнению $J_2(\beta_1 R)=0$, то есть

$$\lambda^2-\omega^2/a_{поп}^2=\upsilon_{2.j}^2/R^2,$$

где $\upsilon_{2.j}$ – j-тый корень функции Бесселя $J_2(x)$.

При условии $j = 0$ имеем вырожденный случай $\beta_1 = 0$ и $\Pi(r) \equiv 1$, который соответствует равномерному вращению сечения вокруг его оси, описываемому классической моделью стержня. На рис. 7 этому вращению соответствует прямая линия, проходящая через начало координат. При $j = 1$ получаем простейшее зональное вращение стержня, соответствующее рис. 2; на рис. 7 ему отвечает смещенная прямая линия. Если $j > 0$, то число «колец», имеющих разное направление вращения, становится большим двух (оно равняется $j + 1$).

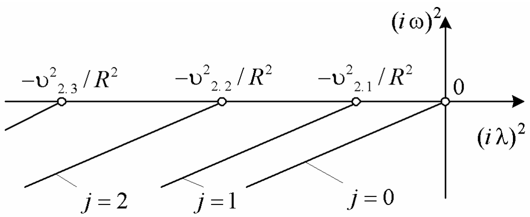


Рисунок 7 – Решения дисперсионного уравнения для равномерного ($j = 0$) и зонального ($j > 0$) вращения сечения стержня

Характерным является то, что в силу известного тождества $\int_0^{\upsilon_{2.j}} J_1(r)\,rdr = 0$ любое зональное вращение имеет момент количества движения, равный 0, то есть соответствующее колебание стержня является внутренним и использоваться при образовании волнового пакета не может. Независимое обоснование этого факта можно найти в общей теории соответствующей краевой задачи, изложенной, например, в [4]: формы колебаний, отвечающие разным собственным частотам, ортогональны, и поскольку среди этих форм содержится равномерное вращение, то для остальных форм среднее по сечению вращение обязано равняться 0.

Продольные осесимметричные деформации стержня. Для волны

$$\vec{u}_2 + \vec{u}_3 = -\{C_2\lambda\beta_1 J_1(\beta_1 r) + C_3\beta_2 J_1(\beta_2 r);\quad 0;\quad C_2\beta_1^2 J_0(\beta_1 r) + C_3\lambda J_0(\beta_2 r)\}\, e^{\lambda z - \omega t}$$

условие (7) не является актуальным, а выполнение условий (5), (6) эквивалентно следующей однородной системе уравнений:

$$\begin{cases} (-\lambda\beta_1^2 J_1'(\beta_1 R))\,C_2 + (-\beta_2^2 J_1'(\beta_2 R) + a_{np}^{-2}\cdot(\mu/(1-2\mu))J_0(\beta_2 R))C_3 = 0; \\ (\lambda^2+\beta_1^2)\beta_1 J_1(\beta_1 R)\cdot C_2 + 2\lambda\beta_2 J_1(\beta_2 R)\cdot C_3 = 0, \end{cases}$$

которая имеет нетривиальные решения в случае равенства нулю ее определителя:

$$\Delta(\lambda,\omega) = \det\begin{pmatrix} -\lambda\beta_1 J_1'(\beta_1 R) & -\beta_2^2 J_1'(\beta_2 R) + a_{np}^{-2}\cdot(\mu/(1-2\mu))J_0(\beta_2 R) \\ (\lambda^2+\beta_1^2)J_1(\beta_1 R) & 2\lambda\beta_2 J_1(\beta_2 R) \end{pmatrix} = 0\,, \quad (9)$$

где, как и ранее, $\beta_1 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2/a_{пoп}^2}$, $\beta_2 = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2/a_{np}^2}$.

Заметим, что определитель (9) остается вещественным и в тех случаях, когда число β_1 или оба числа $\beta_{1,2}$ становятся мнимыми; при этом в определителе используются функции Бесселя с мнимым аргументом, а в решении (8) – модифицированные функции Бесселя.

Уравнение (9) решалось численно, для чего частота ω фиксировалась на постоянном уровне $\omega = \omega_0$, а волновое число λ варьировалось. Решения показаны на рис. 8. Оказалось, что часть этих решений близки к тем, которые получаются в рамках классической модели стержня, а именно при малых волновых числах λ (участок 1' на кривой 1) они практически точно ложатся на наклонную прямую $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (E/\rho)$, отвечающую равномерной продольной деформации стержня, где $E = G \cdot 2 \cdot (1 + \mu)$ – модуль упругости стержня. Но для коротких волн наклон кривой 1 определяется не модулем E, а модулем K объемного сжатия.

В области коротких экспоненциальных волн кроме наклонной линии появляются ветви гиперболы с асимптотой $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (E/\rho)$ и другие решения (рис. 8).

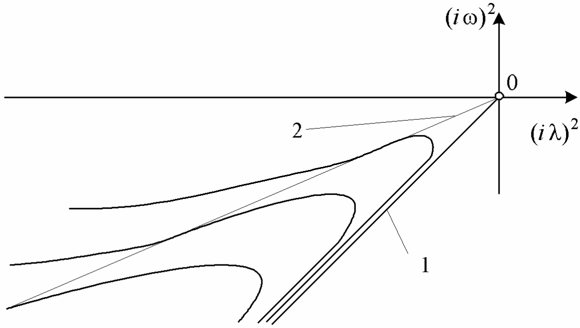


Рисунок 8 – Решения дисперсионного уравнения для равномерной (участок 1' кривой 1) и неравномерной продольной деформации стержня. Пунктирная прямая 2 соединяет точки перегиба графиков и удовлетворяет уравнению $\omega^2 = a_{пол}^2 \cdot \lambda^2$

Секторальные волны переноса для потенциалов. Пусть функции $\Phi(r)$, $\Pi_{1,2}(r)$ удовлетворяют уравнениям Бесселя m-го порядка

$$\Phi'' + \Phi'/r + (\lambda^2 - \omega^2/a_{пр}^2 - m^2/r^2)\Phi = 0\,,$$

$$\Pi_{1,2}'' + \Pi_{1,2}'/r + (\lambda^2 - \omega^2/a_{пол}^2 - m^2/r^2)\Pi_{1,2} = 0\,,$$

где m – целое положительное число. Тогда $\Pi_{1,2}(r) = J_m(\beta_1 r)$, $\Phi(r) = J_m(\beta_2 r)$, и выражения

$$\psi(r,\varphi,z,t) = \Phi(r)\cdot\exp(\omega t - \lambda z + i\,m\varphi)\,,\ \vec{A}_{1,2}(r,z,t) = \vec{\Phi}_{1,2}(r)\cdot\exp(\omega t - \lambda z + i\,m\varphi)\,, \quad (10)$$

где $\vec{\Phi}_1(r) = \{0,0,\Pi_1(r)\}$, $\vec{\Phi}_2(r) = rot\{0,0,\Pi_2(r)\}$, также являются скалярными и векторными потенциалами для искомой волны переноса.

Целям нашего исследования может отвечать только случай $m = 1$, который, например, соответствует повороту сечения вокруг его диаметра; при $m \geq 2$ колебания стержня по понятным причинам окажутся внутренними.

Волны поперечного сдвига сечения. Для сокращения записей далее будем считать, что радиус поперечного сечения $R = 1$. Учтем, что каждому из комплексных потенциалов (10) отвечает пара вещественных потенциалов, например,

$$\psi(r,\varphi,z,t) = \Phi(r)\cdot\exp(\omega t - \lambda z)\cdot\cos\varphi \quad \text{и} \quad \psi(r,\varphi,z,t) = \Phi(r)\cdot\exp(\omega t - \lambda z)\cdot\sin\varphi\,,$$

а для выполнения условий (5)-(7) необходимо, чтобы каждая компонента поля смещений $\vec{u}$ содержала только одну тригонометрическую функцию, что накладывает ограничения на выбор потенциалов. Поэтому, не умаляя общности, образуем сумму

$$\vec{u} = C_1\vec{u}_1 + C_2\vec{u}_2 + C_3\vec{u}_3$$

следующих трех волн переноса:

$$\vec{u}_1 = \mathrm{rot}\{0;0;J_1(\beta_1 r)\sin\varphi\cdot e^{\omega t-\lambda z}\} = \{(J_1(\beta_1 r)/r)\cos\varphi; -\beta_1 J_1'(\beta_1 r)\sin\varphi; 0\}e^{\omega t-\lambda z},$$

$$\vec{u}_2 = rot\,rot\{0;0;J_1(\beta_1 r)\cos\varphi\cdot e^{\omega t-\lambda z}\} =$$

$$= \{(-\lambda\beta_1 J_1'(\beta_1 r))\cos\varphi; \lambda(J_1(\beta_1 r)/r)\sin\varphi; \beta_1^2 J_1(\beta_1 r)\cos\varphi\}e^{\omega t-\lambda z},$$

$$\vec{u}_3 = grad(J_1(\beta_2 r)\cos\varphi\cdot e^{\omega t-\lambda z}) =$$

$$\{\beta_2 J_1'(\beta_2 r)\cos\varphi; -(J_1(\beta_2 r)/r)\sin\varphi; -\lambda J_1(\beta_2 r)\cos\varphi\}e^{\omega t-\lambda z}.$$

В данном случае граничные условия (5)-(7) связывают три волны, и выполнение этих условий возможно при равенстве нулю соответствующего определителя системы:

$$\Delta(\lambda,\omega) = \det\begin{pmatrix} -J_2(\beta_1) & -\lambda\beta_1 J_1''(\beta_1) & \beta_2^2 J_1''(\beta_2) + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\dfrac{\omega^2}{a_{np}^2} J_1(\beta_2) \\ -\lambda J_1(\beta_1)/\beta_1 & (\lambda^2+\beta_1^2)J_1'(\beta_1) & -2\lambda\beta_2 J_1'(\beta_2) \\ \beta_1 J_1(\beta_1) - 2J_2(\beta_1) & -2\lambda J_2(\beta_1) & 2\beta_2 J_2(\beta_2) \end{pmatrix} = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) решалось тем же способом, что и уравнение (9). Оказалось, что его корни образуют сетку из смещенных влево линий, показанных на рис. 9. Наклон этих линий близок к наклону асимптоты $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (G/\rho)$, соответствующей колебаниям стержня при чистом сдвиге, а величина смещения в основном определяется расположением корней уравнения $J'_2(x) = 0$, но, как и наклон, корректируется в зависимости от величины коэффициента Пуассона. Наибольший интерес для целей нашего исследования представляет первая линия этого семейства, определяемая равенством:

$$\omega^2 = (\lambda^2 - \lambda_0^2)\cdot(G/\rho)(1+\mu/3), \quad (12)$$

где $\lambda_0 R = -2,65 - 0,5\mu$. Анализ соответствующих деформаций показал, центр сечения смещается по направлению полярного угла $\varphi = 0$ на величину

$$u_0 = 0,5(C_1 - C_2\lambda)\beta_1 + 0,5C_3\beta_2,$$

а среднее смещение точек сечения в этом направлении пропорционально интегралу

$$\frac{1}{\pi}\iint_{r\in[0,1],\,\varphi\in[0,2\pi]} \vec{u}(r,\varphi,z,t)\cdot\{\cos\varphi, -\sin\varphi, 0\}\; r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_0^1 [(C_1 - C_2\lambda)(J_1(\beta_1 r) + \beta_1 J_1'(\beta_1 r)) + C_3(J_1(\beta_2 r) + \beta_2 J_1'(\beta_2 r))]\,dr,$$ то есть

$$u_{cp} = (C_1 - C_2\lambda)J_1(\beta_1) + C_3 J_1(\beta_2), \quad (13)$$

где коэффициенты $C_{1,2,3}$ получены при решении однородной системы с определителем (11). Как следует из анализа этого решения, сумма (13) имеет тот же знак, что и u_0, и указанный сдвиг обладает ненулевым импульсом.

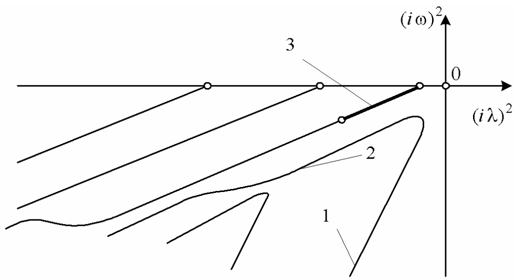


Рисунок 9 – Решения дисперсионного уравнения для случая m = 1.
Кривые 1, 2 отвечают равномерной изгибно-сдвиговой деформации (1 – преимущественного изгиба, 2 – преимущественно поперечного сдвига); прямая 3 – неравномерной деформации сдвига.

Кроме импульса эта деформация обладает незначительным моментом количества движения сечения вокруг оси $\varphi = \pi/2$; указанная величина пропорциональна интегралу

$$\iint\limits_{r\in[0,1],\varphi\in[0,2\pi]} [C_2\beta_1^2 J_1(\beta_1 r) - C_3\lambda J_1(\beta_2 r)]\, r^2 \cos^2\varphi\, dr\, d\varphi =$$

$$\pi[C_2\beta_1 J_2(\beta_1) - C_3\lambda J_2(\beta_2)/\beta_2)].$$

Однако колебания изгибающего момента в цилиндрическом стержне при больших частотах отвечают условию $\omega^2 = \lambda^2 \cdot (E/\rho)$, и поскольку модуль E в $2(1 + \mu)$ раза больше модуля G, то становится ясно, что влияние качания сечения на фазовую скорость данной волны мало ($\mu/(6(1+\mu)) \approx 0,05$), и этой формой деформации здесь допустимо пренебречь. Следовательно, исследуемые волны описывают деформации неравномерного поперечного сдвига сечения.

Форма неравномерной деформации сечения для частного случая. Рассмотрим винтовой стержень, имеющий малую относительную кривизну; пусть, например, его индекс $\chi_1^{-1} = 10$. В волновом пакете винтового фонона обязана содержаться длинная гармоническая волна, поэтому пунктирная линия на рис. 4 оказывается близка к касательной, проведенной к нижней ветви дисперсионного уравнения в начале координат. Это означает, что скорость фонона ν составляет малую долю скорости a_{non}:

$$v \approx (\chi_1/\sqrt{1+\mu})\, a_{non} \approx 0,08\, a_{non}\,,$$

а для параметров волны неравномерного поперечного сдвига с учетом (12) выполняются следующие соотношения

$$\omega^2 << a_{non}^2\lambda^2,\ \beta_{1,2} \approx -\lambda \approx -\lambda_0\,. \tag{14}$$

Наличие таких соотношений упрощает анализ полученного решения. В частности, имеет место зависимость

$$u_{cp} \approx (2J_1(\lambda_0)/\lambda_0)u_0 \approx (1/3)u_0.$$

На рис. 10 приведены графики поперечного сдвига для точек сечения. Смещение точек соответствует показанному на рис. 3.

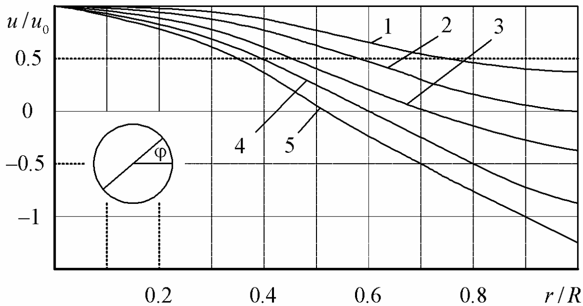


Рисунок 10 – Величина поперечного сдвига для точек сечения стержня: кривая 1 отвечает значению угла φ = 0°, кривая 2 – φ = ±30°, кривая 3 – φ = ±45°, кривая 4 – φ = ±60°, кривая 5 – φ = ±90°

Выводы.

При использовании трехмерной модели линейной теории упругости решена задача о распространении экспоненциальных волн переноса по цилиндрическому стержню. Решения используют бегущие скалярные и векторные потенциалы, в том числе потенциалы Герца, связанные граничными условиями на боковой поверхности стержня.

Полученные решения подтвердили, а в случае коротких волн – уточнили, результаты применения для этой же задачи классической теории тонких стержней, использующей гипотезу о равномерном деформировании сечения.

Кроме известных решений получены волны переноса импульса (поперечного неравномерного сдвига сечения), не описываемые классической теорией.

Список литературы: 1. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2008. – № 47. – С.92-104. **2.** *Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В.* Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование. – Т. 2. – 1990. – № 8. – С. 21-30. **3.** *Светлицкий В.А., Нарайкин О.С.*. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. **4.** *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. **5.** *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2009. – № 30. – С. 20-30. **6.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

Поступила в редколлегию 04.11.2009

УДК 539.3

А.С.ВЛАСЮК, студент, НТУ «ХПИ»;
В.Г.СУКИАСОВ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПОСЛЕДСТВИЙ ПЛАСТИНЧАТОГО ОСТЕОСИНТЕЗА БОЛЬШОЙ БЕРЦОВОЙ КОСТИ СРЕДСТВАМИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОГО АНАЛИЗА

Наведено результати моделювання і статичного аналізу великої гомілкової кістки, що синтезована фіксатором при наявності поперечного перелому. Виконано зіставлення двох способів фіксації з точки зору сприйняття фізіологічних навантажень.

Results of modeling and static analysis of shinbone synthesized by fixer at presence of transversal fracture are submitted. Comparison of two ways of fixing is executed from the viewpoint of accepting the physiological loads.

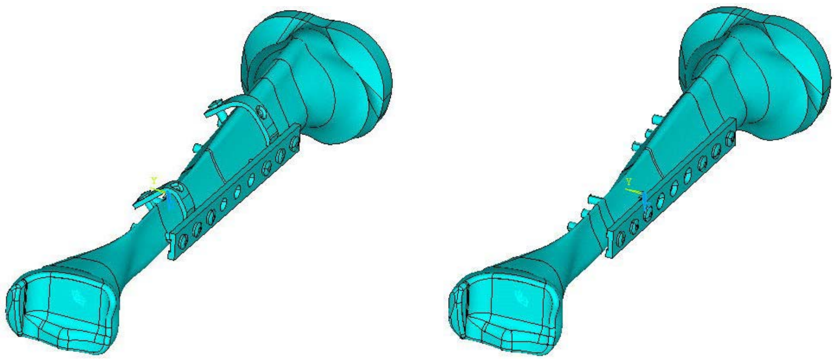
Фиксация переломов конечностей с помощью металлических приспособлений показала высокую клиническую эффективность и нашла широкое распространение в практической хирургии [1, 2]. Эффективность фиксации определяется целым рядом факторов, среди которых важными являются габариты и масса фиксатора, его прочностные и жесткостные качества, простота установки и снятия, а также степень травматичности для кости. Наличие разнообразных технических решений и постоянное появление новых порождает естественный вопрос о преимуществах и недостатках отдельных вариантов, что требует изучения статистики клинического применения при большом количестве наблюдений в течение продолжительного периода. С другой стороны, современные средства компьютерного моделирования и анализа позволяют решать этот вопрос теоретически, в частности, прогнозировать последствия фиксации в плане восприятия физиологических нагрузок и на этой основе делать выводы об эффективности конкретного приспособления. В этой связи стоит отметить публикации [3, 4], хотя в целом проблема еще весьма далека от всестороннего рассмотрения. Развитию данного направления посвящена и настоящая работа.

Предметом исследования является пластинчатый остеосинтез перелома большой берцовой кости с несущим элементом в виде металлической планки. Традиционным способом является полноконтактная фиксация, при которой планка непосредственно крепится на кость с помощью шурупов, расположенных в одной плоскости. Альтернативный способ (многоплоскостная фиксация) состоит в установке на кость фиксирующей планки посредством промежуточных элементов в виде полукольцевых захватов, при этом шурупы, скрепляющие с костью как захваты, так и собственно планку, располагаются в разных плоскостях. Полукольца крепятся к планке с помощью винтов. Ставится задача теоретического сопоставления двух указанных способов с позиций механических аспектов фиксации, путем анализа реакции синтезированной фиксатором кости на действие физиологических нагрузок. Количественной оценке подлежит подвижность фрагментов сломанной кости, а также уровень напряженного состояния фиксатора и кости.

Эффективным средством численного анализа статического деформирования тел и конструкций сложной геометрии является метод конечных элементов. При этом одной из возможных технологий подготовки расчетной схемы является создание объемной модели средствами твердотельного моделирования с последующей дискретизацией на конечные элементы. Трехмерная модель большой берцовой кости представлена на рис. 1. Рассматривается случай поперечного перелома в центральной части кости.

а) б)

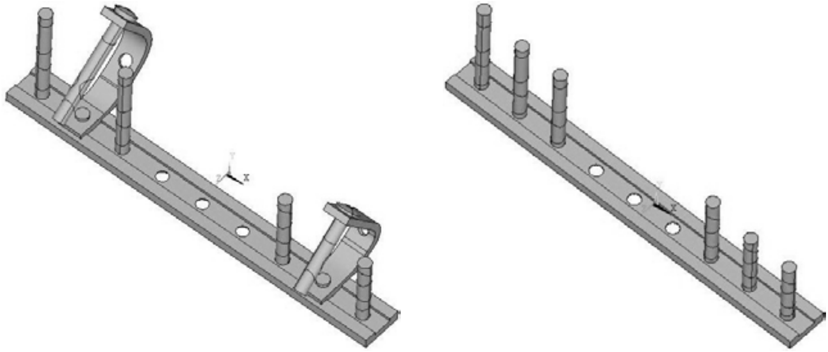
Рисунок 1 – Модель кости (а – целиком, б – в разрезе)



а) б)

Рисунок 2 – Модели остеосинтеза (а – многоплоскостная фиксация, б – полноконтактная фиксация)

Модели, имитирующие сломанную кость с установленными фиксаторами двух модификаций, показаны на рис. 2. Осевой зазор между торцевыми поверхностями фрагментов в месте перелома составляет 1,5 мм. Требование сопоставимости двух вариантов фиксации предполагает идентичность моделей, в том числе размеров планки и ее расположения относительно места перелома, а также числа крепежных деталей. В частности, предусмотрено крепление фиксатора тремя шурупами с каждой стороны перелома, в том числе по одному шурупу – для стыковки с костью полукольцевых захватов при многоплоскостной фиксации. Модели фиксаторов вместе с крепежными деталями изображены на рис. 3.



а) б)

Рисунок 3 – Модели фиксаторов (а – многоплоскостного, б – полноконтактного)

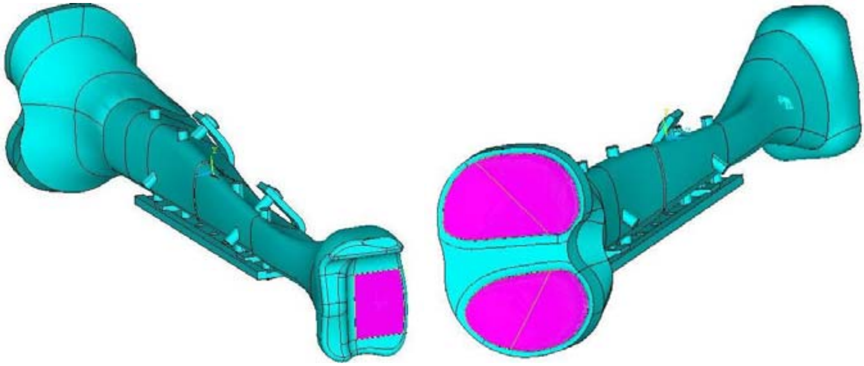
Дискретизация объемов выполнена 10-узловыми тетраэдральными элементами. Количественные данные о разбиении изучаемых моделей и их отдельных частей приведены в табл. 1 и свидетельствуют о сопоставимости густоты конечноэлементных сеток.

Таблица 1

способ фиксации	многоплоскостная		полноконтактная	
категория	число элементов	число узлов	число элементов	число узлов
планка	14655	26041	12143	22609
шурупы	20468	32975	22820	36156
полукольца	4206	8606	–	–
винты	2584	4171	–	–
верхний фрагмент кости	67408	100839	61319	92218
нижний фрагмент кости	34444	55073	32078	51444
вся модель	143765	221166	128360	196929

Материал фиксатора и крепежных деталей – сталь с модулем упругости $E = 2\cdot10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$. Предел текучести составляет $1\cdot10^9$ Па. Имеющиеся в настоящее время сведения о механических характеристиках костной ткани носят довольно отрывочный характер, при этом неоспоримым фактом является значительный разброс экспериментальных данных и их существенная зависимость от возрастных особенностей и других факторов [5 – 8]. На основе изучения публикаций для большой берцовой кости приняты значения упругих свойств $E = 1\cdot10^{10}$ Па и $\nu = 0{,}36$ в центральной части, а в зоне коленного и голеностопного суставов $E = 9\cdot10^9$ Па, $\nu = 0{,}38$. Наибольшая неоднозначность характерна для свойств в области суставов. С учетом этого обстоятельства наряду с упомянутым выше значением модуля упругости принималось также $E = 5\cdot10^8$ Па. Сравнение полученных при этом результатов обнаружило их весьма незначительные различия, что позволяет считать влияние данной характеристики малосущественным. Предел прочности кости составляет $1{,}7 \cdot 10^8$ Па в центральной части и ориентировочно $2 \cdot 10^7$ Па в области суставов [7]. В целом необходимо отметить, что сама по себе абсолютная достоверность задаваемых механических характеристик кости не имеет принципиального значения в контексте сформулированной выше основной задачи данной работы – сопоставления двух способов фиксации перелома при условии максимальной идентичности расчетных моделей.

Для представленных моделей выполнена серия расчетов, в которых выделенная на рис. 4, а часть поверхности голеностопа считается закрепленной, а внешняя силовая нагрузка прикладывается со стороны бедренной кости и равномерно распределяется по поверхностям двух мыщелков коленного сустава, как показано на рис. 4, б, при этом на каждый из них приходится ровно половина нагрузки. Обе рассматриваемые модели рассчитывалась при трех вариантах силового воздействия, имитирующих физиологические нагрузки: осевом сжатии силой F_x, поперечном нагружении силой F_y (изгиб перпендикулярно плоскости планки) и действии поперечной силы F_z (изгиб в плоскости планки). Каждая из названных сил представляет собой равнодействующую упомянутой выше распределенной нагрузки; нижний индекс указывает направление относительно правой декартовой системы координат (см. рис. 3).



а) б)

Рисунок 4 – Схема закрепления и нагружения модели

Под действием относительно небольших внешних сил фрагменты кости не вступают в соприкосновение между собой в месте перелома. В таком случае задача об упругом статическом деформировании конструкции, состоящей из двух фрагментов кости и фиксатора вместе с крепежными деталями, является линейной и решается за один шаг нагружения. При этом решение системы линейных алгебраических уравнений для отыскания узловых неизвестных осуществляется методом сопряженных градиентов. Обоснование достоверности решений таких задач выполнено путем сопоставления результатов, полученных на конечноэлементных сетках различной густоты.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов для случаев осевого сжатия силой $F_x = 800$ Н и поперечного нагружения силой $F_y = 100$ Н. При таких внешних нагрузках фрагменты сломанной кости вступают в соприкосновение в месте перелома, что требует постановки и решения конструктивно нелинейной контактной задачи. Для численного решения задачи об одностороннем контакте взаимодействующих тел используется расширенный метод Лагранжа, представляющий собой последовательность уточнений штрафных функций в процессе отыскания неопределенных множителей. Роль неопределенных множителей Лагранжа играют контактные реакции (нормальная и тангенциальные составляющие), подсчитываемые итерационно в каждом элементе. Трение в области контакта описывается законом Кулона. Для поиска узловых неизвестных применяется итерационная процедура Ньютона-Рафсона. При этом нагружение разбивается на несколько последовательных шагов. Постановка контактной задачи требует создания контактных пар, включающих специализированные конечные элементы для имитации взаимодействия двух деформируемых тел. В связи с этим на торцах фрагментов кости в месте перелома созданы контактные пары типа «поверхность-поверхность».

Полученные в результате решения распределения контактных давлений оказались весьма схожими для двух сопоставляемых моделей. Для варианта многоплоскостной фиксации они показаны на рис. 5 при осевом сжатии и на рис. 6 – при поперечном нагружении.

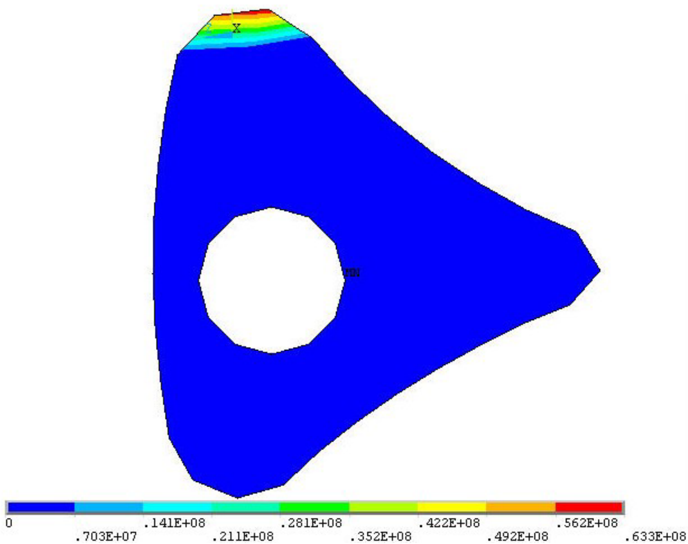


Рисунок 5 – Контактное давление при осевом сжатии, многоплоскостная фиксация

Уровень напряженного состояния фиксатора и фрагментов кости оценивался по величине интенсивности напряжений, подсчитываемой по координатным компонентам согласно формуле

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \,. \qquad (1)$$

Поля интенсивностей напряжений в планке при осевом сжатии для двух способов фиксации представлены на рис.7 и 8.

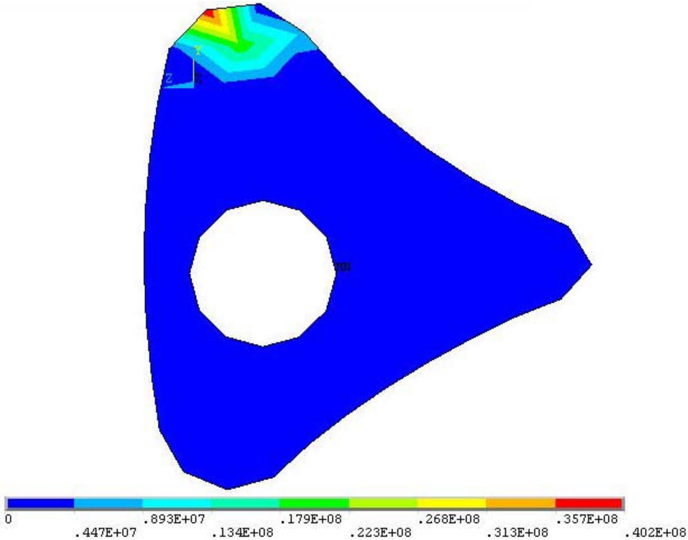


Рисунок 6 – Контактное давление при поперечном нагружении, многоплоскостная фиксация

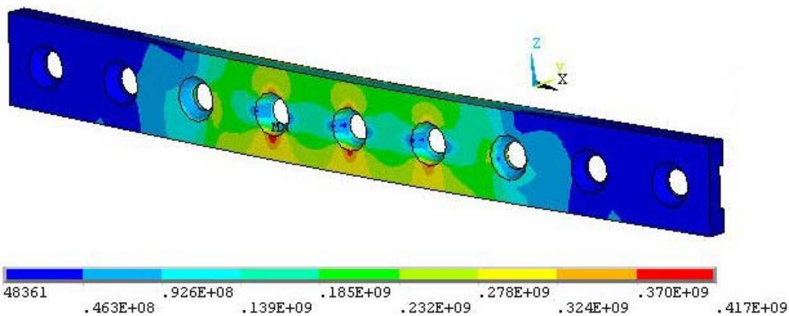


Рисунок 7 – Напряженное состояние планки при осевом сжатии для случая многоплоскостной фиксации

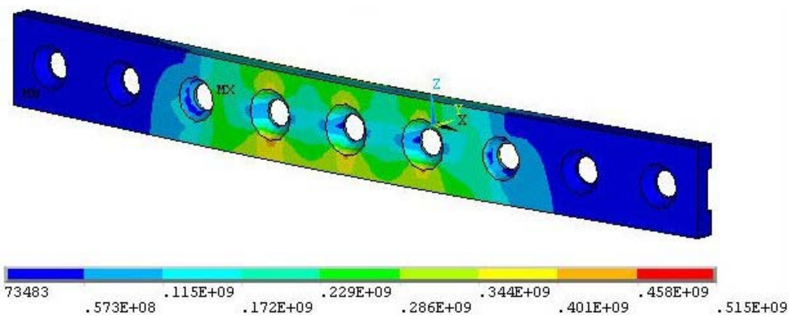


Рисунок 8 – Напряженное состояние планки при осевом сжатии для случая полноконтактной фиксации

Максимальные значения интенсивности напряжений в отдельных частях конструкции приведены в табл. 2.

Как следует из таблицы, многоплоскостная фиксация обеспечивает более равномерное распределение нагрузки в фиксаторе (в частности, планка испытывает меньшие напряжения) и меньший (на 17 %) уровень напряженного состояния кости.

Таблица 2

расчетная характеристика	$\sigma_{i\,\max}$, Па	
способ фиксации	многоплоскостная	полноконтактная
планка	$0{,}41673 \cdot 10^9$	$0{,}51532 \cdot 10^9$
шурупы	$0{,}30276 \cdot 10^9$	$0{,}28691 \cdot 10^9$
полукольца	$0{,}15162 \cdot 10^9$	–
винты	$0{,}35339 \cdot 10^8$	–
центральная зона кости	$0{,}12037 \cdot 10^9$	$0{,}14053 \cdot 10^9$
краевые зоны кости	$0{,}11473 \cdot 10^8$	$0{,}84838 \cdot 10^7$

Для оценки подвижности зафиксированной кости в месте перелома рассматриваются значения компонент перемещений в характерных точках торцевых поверхностей фрагментов. Расположение упомянутых точек иллюстрирует рис. 9. Относительные перемещения подсчитываются как разности соответствующих компонент для верхнего и нижнего торцов и характеризуют взаимное смещение фрагментов:

$$\Delta u_x = u_x^{(верх)} - u_x^{(низ)};$$
$$\Delta u_y = u_y^{(верх)} - u_y^{(низ)}; \qquad (2)$$
$$\Delta u_z = u_z^{(верх)} - u_z^{(низ)}.$$

Эти величины для случая осевого сжатия представлены в табл. 3.

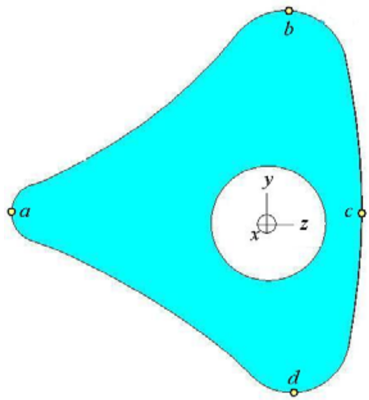


Рисунок 9 – Контрольные точки в месте перелома

Таблица 3

точка	многоплоскостная фиксация			полноконтактная фиксация		
	Δu_x, мм	Δu_y, мм	Δu_z, мм	Δu_x, мм	Δu_y, мм	Δu_z, мм
a	0,8471	0,1524	0,0216	0,7842	0,1329	0,0218
b	1,5409	0,1327	0,0322	1,5421	0,1089	0,0348
c	0,8967	0,1390	0,0230	0,8360	0,1141	0,0230
d	0,2648	0,1422	0,0153	0,1571	0,1182	0,0127

Согласно данным таблицы, многоплоскостная фиксация обеспечивает в основном большую подвижность фрагментов кости по сравнению с полноконтактной, что считается благоприятным фактором в ходе восстановительного периода.

С точки зрения напряженно-деформированного состояния наиболее неблагоприятным случаем внешнего силового воздействия является изгиб поперечной нагрузкой перпендикулярно плоскости планки. Распределение интенсивности напряжений в планке при действии на синтезированную кость поперечной силы F_y = 100 Н для двух способов фиксации иллюстрируют рис. 10 и 11.

Данные о максимальных напряжениях в отдельных частях конструкции при поперечной нагрузке приведены в табл. 4.

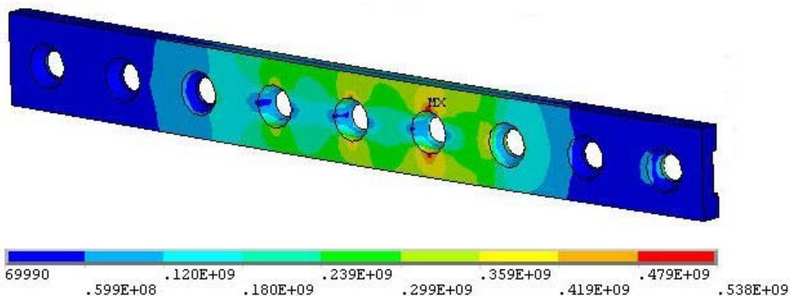


Рисунок 10 – Напряженное состояние планки при поперечном нагружении для случая многоплоскостной фиксации

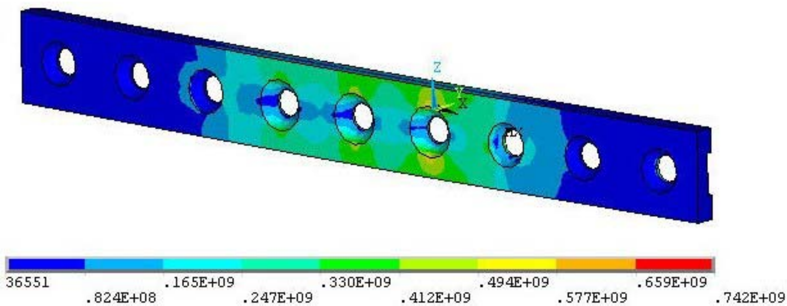


Рисунок 11 – Напряженное состояние планки при поперечном нагружении для случая полноконтактной фиксации

Таблица 4

расчетная характеристика	$\sigma_{i\,\max}$, Па	
способ фиксации	многоплоскостная	полноконтактная
планка	$0{,}53843 \cdot 10^9$	$0{,}74160 \cdot 10^9$
шурупы	$0{,}33934 \cdot 10^9$	$0{,}41003 \cdot 10^9$
полукольца	$0{,}10440 \cdot 10^9$	–
винты	$0{,}55308 \cdot 10^8$	–
центральная зона кости	$0{,}16209 \cdot 10^9$	$0{,}12950 \cdot 10^9$
краевые зоны кости	$0{,}17456 \cdot 10^8$	$0{,}18759 \cdot 10^8$

Как видно из таблицы, в рассматриваемом случае при полноконтактной фиксации планка и крепежные детали подвержены значительно большей нагрузке по сравнению с многоплоскостной фиксацией, притом, что кость испытывает относительно меньшие напряжения.

Значения относительных перемещений контрольных точек в месте перелома при поперечной нагрузке содержатся в табл. 5.

Таблица 5

точка	многоплоскостная фиксация			полноконтактная фиксация		
	Δu_x, мм	Δu_y, мм	Δu_z, мм	Δu_x, мм	Δu_y, мм	Δu_z, мм
a	0,9317	0,3969	-0,0477	0,8790	0,3994	-0,0439
b	1,6281	0,4449	-0,0899	1,6366	0,4453	-0,0865
c	0,8937	0,4782	-0,0436	0,8425	0,4806	-0,0398
d	0,2466	0,4642	-0,0052	0,1403	0,4667	-0,0015

Согласно приведенным данным, бóльшая взаимная подвижность фрагментов вдоль осей *x* и *z* имеет место в основном при многоплоскостной фиксации; в направлении *y* такая фиксация обнаруживает относительно бóльшую жесткость.

Обобщая результаты сравнительных теоретических исследований, следует отметить, что многоплоскостной фиксатор в подавляющем большинстве случаев обнаруживает преимущество перед традиционным полноконтактным в отношении микроподвижности фрагментов кости. Что касается напряженного состояния, то, несмотря на отсутствие однозначного соотношения, и здесь несколько предпочтительнее выглядит многоплоскостная фиксация.

Важным обстоятельством в практическом применении является возможность широкого маневра, который обеспечивает многоплоскостная фиксация для адаптации к конкретному клиническому случаю за счет варьирования конструктивного решения путем изменения положения и количества полуколец и шурупов. Кроме этого, недостатком полноконтактного фиксатора следует признать необходимость, как правило, большего количества шурупов для его установки, что дополнительно травмирует кость. Все это свидетельствует о перспективности применения многоплоскостных фиксаторов.

Список литературы: **1**. *Halder S.* The Gamma Locking Nail for peritrochanteric fractures // J. of Bone Joint Surgery. – 1992. – 74B. – P. 340-344. **2**. *Gardner T.N., Simpson H., Kenwright J.* Rapid application fracture fixators – an evaluation of mechanical performance // Clinical Biomechanics. – 2001. – 16.– P. 151-159. **3.** *Simpson H., Gardner T.N., Evans M., Kenwright J.* Stiffness, strength and healing assessment in different bone fractures – a simple mathematical model // Injury, Int. J. Care Injured. – 2000. – 31. – P. 777–781. **4.** Gardner T.N., Weemaes M. A mathematical stiffness matrix for characterising mechanical performance of the Orthofix DAF // Medical Engineering & Physics. – 1999. – 21. – P. 65-71. **5.** *Weiner S., Traub W., Wagner H.D.* Lamellar Bone: Structure–Function Relations. – J. of Struct. Biology. – 1999. – 126. – P. 241-255. **6.** *Choi K., Kuhn J.L., Ciarelli M.J., Goldstein S.A.* The elastic moduli of human subchondral, trabecular, and cortical bone tissue and the size-dependency of cortical bone modulus // J. Biomech. – 1990. – 23(11). – P. 1103-1113. **7.** http://matinmed.ru/. **8**. *Березовский В.А., Колотилов Н.П.* Биофизические характеристики тканей человека. – К.: Наукова думка, 1990. – 224 с.

Поступила в редколлегию 20.10.2009

УДК 539.3.534:621.22.011

Н.Н.ЕВДОКИМОВ, асп., Университет Мартина Лютера, Галле, Германия;
А.С.СТЕПЧЕНКО, канд.техн.наук, ст.науч.сотр, НТУ «ХПИ»;
А.И.ТРУБАЕВ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАН-НОГО СОСТОЯНИЯ БОЛТОВОГО СОЕДИНЕНИЯ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ГИДРОТУРБИНЫ НА ОСНОВЕ 3D МОДЕЛИ

Розроблено методику аналізу напружено-деформованого стану болтових з'єднань робочих коліс гідротурбін на основі моделювання циклічно симетричної частини конструкції. Проведено аналіз параметрів напружено-деформованого стану з урахуванням всіх навантажень, що виникають у процесі монтажу і експлуатації гідротурбіни. Наведені результати розрахунку для різних температурних режимах термозатягування болтів.

In the work it has been developed the technique of the analysis of the stress-strain state of bolted connections of hydraulic turbine driving wheel on the basis of simulation cyclically a symmetric part of a construction. The analysis of the stress-strain state parameters taking into account assembling and exploitation loadings arising in hydraulic turbine is carried out. Results of calculation for different temperature conditions of a thermo-inhaling of bolts are introduced.

Введение. В последнее время при эксплуатации гидротурбин на днепровском каскаде (Днепровская ГЭС-II, Киевская ГЭС и др.) произошел ряд аварий связанных с разрушением болтовых соединений ротора гидротурбины и корпуса рабочего колеса. При этом номинальный ресурс болтовых соединений не был исчерпан. Эти аварии поставили вопрос о достоверности расчетных методик, которые были использованы при проектировании болтовых соединений.

Объектом исследования в данной работе является болтовое соединение рабочего колеса турбины ПЛ-40-В-680, установленной на Днепровской ГЭС. Во время эксплуатации данных турбин наблюдается разрушение болтовых соединений в виде образования трещин под головкой болта и в области первого витка резьбового соединения. Это требует проведения уточненных теоретических исследований НДС болтового соединения рабочего колеса гидротурбины и ротора, поскольку решение, полученное при помощи упрощенных инженерных методов на стадии проектирования [1], как показала практика эксплуатации турбин, дает недостоверные результаты.

В связи с вышесказанным, настоящая работа предусматривает создание расчетной методики для оценки НДС болтовых соединений на основе современных подходов, базирующихся на методе конечных элементов [2].

1. Постановка задачи. Целью работы является построение модели для исследования напряженно-деформированного состояния болтового соединения гидротурбины. В основу предлагается положить математическое моделирование исследуемых объектов как трехмерных тел и применить метод конечных элементов. Также предлагается разработать алгоритм детального моделирования контактного взаимодействия с целью анализа напряжений в области головки болта (именно здесь наблюдалось разрушение при авариях).

В рамках предложенного подхода необходимо:

– построить ряд конечно-элементных моделей, позволяющих детально смоделировать напряженно-деформированное состояние болтового соединения, с учетом всех нагружающих факторов;
– провести анализ напряженно-деформированного состояния болтового соединения рабочего колеса турбины ПЛ-40-В-680, установленной на Днепровской ГЭС-II.

2. Методика решения задачи о НДС рабочего колеса гидротурбины и болтового соединения. Конструкция гидротурбины в трехмерном виде, разработанная в пакете геометрического моделирования, представлена на рис. 1, а, где корпус гидротурбины и коническая часть ротора соединены 32-мя болтами (поз. 1).

а) б)
Рисунок 1 — Конструкция колеса гидротурбины с ротором:
а) целая часть, б) циклически симметричная часть

На НДС гидротурбины в целом и болтового соединения в частности определяющее влияние оказывают такие факторы:
– на рабочее колесо гидротурбины действует гравитационное поле Земли и центробежные силы;
– статическое и динамическое нагружение конструкции постоянными и переменными составляющими потока воды;
– крепеж болтовых соединений осуществляется с использованием термозатяжки;
– контактное взаимодействие в болтовых соединениях в месте крепления вала к колесу.

Моделирование болтового соединения из 32 болтов на полной модели гидротурбины при учете всех этих факторов методом конечных элементов практически невозможно, поскольку приведет к решению нелинейной задачи чрезмерно высокой размерности [3]. Поэтому предлагается разбить задачу на ряд этапов – подзадач, используя то, что контактное взаимодействие оказывает влияние на НДС только в небольшой окрестности болтового соединения [3,4]. Поставленную задачу можно реализовать по следующему алгоритму:

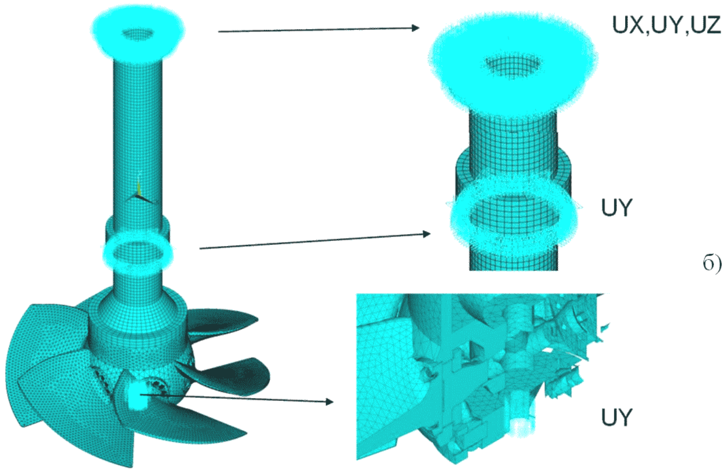
1) определение перемещений всей конструкции при воздействии на нее гравитационного поля и центробежных сил, без учета контактных взаимодействий;
2) определение температурных перемещений на модели одного болта;
3) приложение перемещений найденных на шаге 2 на детальную модель одного болтового соединения и определение НДС при термозатяжке.
4) определение напряженно-деформированного состояния болта на детальной модели одного болтового соединения с приложенными к ней перемещениями, найденными на этапах 1 и 2.

При моделировании гидротурбины в целом предлагается пренебречь болтовыми соединениями, которые имеют разное число болтов по окружности корпус турбины – ротор, ротор – генератор и рассматривать конструкцию в этих местах как единое целое. Тогда конструкция является циклически симметричной относительно оси вращение турбины (рис. 1, а). Поэтому можно моделировать только один сектор, который составляет угол в 60 градусов и содержит часть колеса и одну лопасть. На предложенной модели необходимо определить усилия и перемещения в районе болтового соединения при действии следующих силовых факторов на рабочее колесо гидротурбины: гравитационное поле Земли; действие центробежных сил; статическое нагружение лопастей постоянной составляющей давления потока воды (динамическая составляющая не учитывается).

Расчетная модель для определения статического напряженно-деформированного состояния для всей конструкции без учета болтового соединения представлена на рис. 1, б.

В качестве краевых условий выступает закрепление по всем степеням свободы в верхней части конструкции и ограничение перемещений в области опирания подшипника (рис. 2, а,б). Также в связи с тем, что работу всего поворотно-лопастного механизма регулирует крестовина, для данной детали конструкции необходимо также применить ограничения перемещений. Поэтому было проведено детальное моделирование поворотно-лопастного механизма (рис. 2, в). Крестовина крепится к штоку, который на основе перемещения масляного поршня в верхней части корпуса рабочего колеса управляет посредством поворотно-лопастного механизма углом поворота лопастей. Пренебрегая вертикальными перемещениями штока, в связи с его высокой жесткостью, было смоделировано такое взаимодействие частей конструкции путем наложения связей на контактирующие участки деталей, которое обеспечило полное запрещение перемещений в вертикальном направлении на поверхности крестовины в области крепления ее к штоку (рис. 2, в).

Для расчета температурных перемещений была создана модель болта, соединяющего корпус гидротурбины и ротор, геометрия которого представлена на рис. 3, а. При этом резьба не моделировалась, так как она не влияет на температурные деформации болта в целом. Технология термозатяжки болтового соединения предполагает предварительный нагрев детали до определенной температуры специальным термоэлементом. Предполагается, что температура принимает постоянные значения по всему объему болта. При построении конечно-элементной модели было получено около 13 тысяч конечных элементов тетраэдрической формы (рис. 3, б).



а) в)

Рисунок 2 – Конечно-элементная модель колеса гидротурбины с ротором:
а) общий вид; б) участок ротора с подшипником;
в) вид на разрез в области поворотного механизма лопасти

а) б)

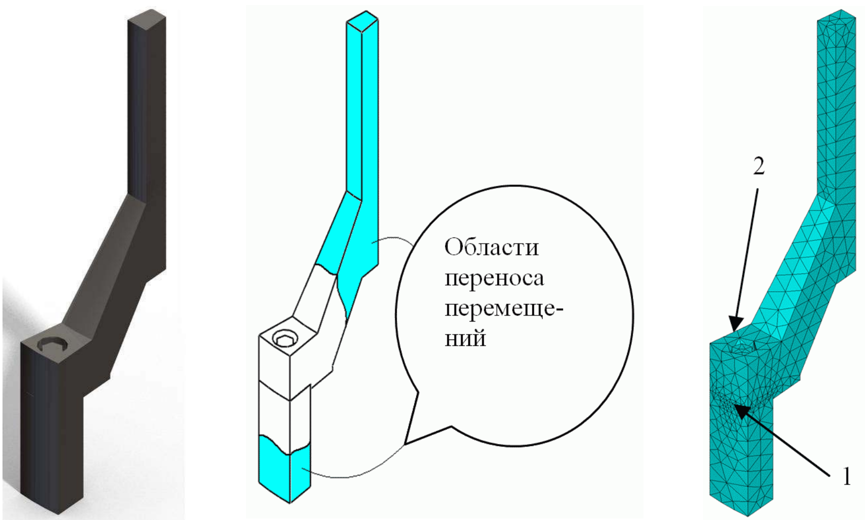
Рисунок 3 – 3D-модели болта: а) геометрическая; б) – конечно-элементная

Моделирование НДС болтового соединения проводилось при следующих предположениях:

– НДС гидротурбины носит циклосимметричный характер и одинаково для каждого из 32 болтовых соединений;
– контактные напряжения от термозатяжки болта значительно превыша-

ют напряжения от других силовых факторов.

На основании этих предположений была взята циклически симметричная 1/32 часть фланцевого соединения корпуса турбины и ротора с одним болтом. При этом моделировалась небольшая часть корпуса турбины и ротора охватывающая болтовое соединение, исходя из гипотезы Сен-Венана [4] о незначительном влиянии краевых эффектов на распределение напряжений в местах концентрации. Решение данной задачи будет корректно при приложении перемещений полученных в результате анализа НДС всей конструкции гидротурбины на модель болтового соединения [3]. Геометрическая модель болтового соединения приведена на рис. 4, а.



а) б) с)

Рисунок 4 – Модель болтового соединения:
а) геометрическая модель, б) схема переноса перемещений от гидротурбины на область болтового соединения, в) конечно-элементная модель болтового соединения

В болтовом соединении были заданы следующие граничные условия:

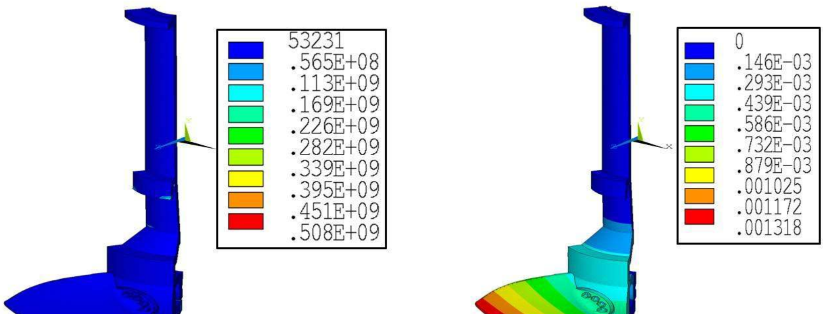
– геометрические граничные условия на части сектора соответствующей корпусу гидротурбины и ротору, приложенные путем переноса снятых с предварительно посчитанной модели (рис. 2) перемещений конструкции в места пересечений геометрических объемов, согласно схеме приведенной на рис. 4, б, при этом на область непосредственно прилежащую к болтовому соединению перемещения не переносятся;
– расстояние между участком резьбы и головкой болта уменьшается на величину температурного расширения, полученного при решении температурной задачи, и тем самым создается зазор отрицательной величины (что соответствует физически натягу) для моделирования контакта;
– по поверхности резьбового соединения накладываются условия полно-

го сочленения болта и корпуса;
– накладываются условия контакта между фланцами корпуса гидротурбины и ротора.

Конечно-элементная модель болтового соединения изображена на рис. 4, в. При разбиении исходной модели было получено около 150 тысяч конечных элементов. Данная модель включает в себя два контактных взаимодействия: область соприкосновения фланцев корпуса гидротурбины и ротора и область касания шляпки болта с поверхностью фланца ротора, которым соответствуют позициям 1 и 2 на рис. 4, в соответственно.

3. Анализ НДС рабочего колеса гидротурбины и болтового соединения. Задача определения НДС состояния рабочего колеса гидротурбины решалась на основе модели сектора рабочего колеса 60 градусов. На рис. 5, а представлены значения эквивалентных напряжений по Мизесу [3] при действии нагрузки от собственного веса, центробежной нагрузки и давления водяного столба, а на рис. 5, б приведены суммарные перемещения при той же нагрузке.

Как видно из рис. 5, б максимальные перемещения наблюдаются на кромке лопасти рабочего колеса гидротурбины и не превышают 1,5 мм, в районе фланцевого соединения ротора и корпуса гидротурбины перемещения менее 0,5 мм. Максимальные напряжения наблюдаются в районе второго подшипника ротора (рис. 5, а) и не превышают предел текучести. В районе фланцевого соединения ротора и корпуса напряжении незначительны – менее 60 МПа.

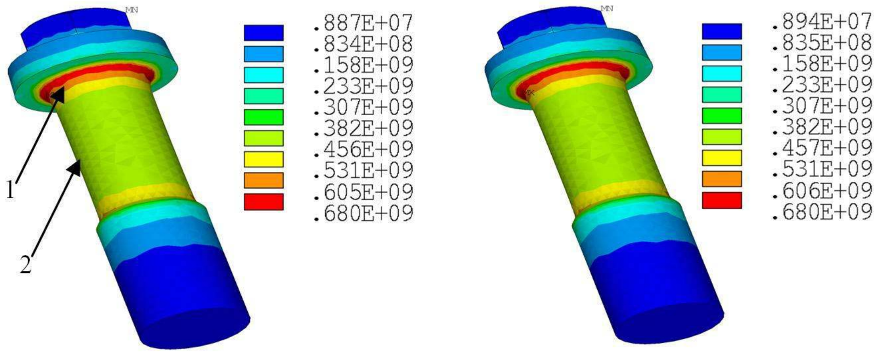


а) б)

Рисунок 5 – Напряжения и перемещения гидротурбины:
а) эквивалентные напряжения; б)перемещения

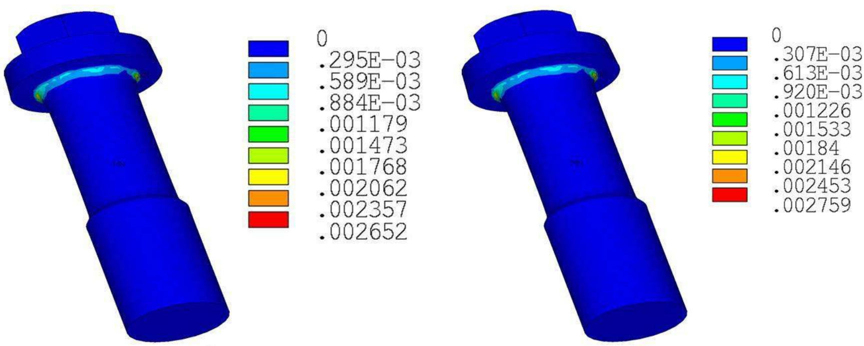
При анализе НДС болтового соединения, первоначально, в соответствии с предложенным алгоритмом была рассчитана температурная деформация болта при нагреве до Т = 350 °С и получены перемещения всех узлов данной конечно-элементной модели. Температурное удлинение части болта от области шляпки до первого витка резьбового соединения равно $\delta = 0{,}69$ мм.

Расчет НДС болтового соединения проводился на двух моделях. Первая модель – с учетом только перемещений от термозатяжки болта с граничными условиями: закрепление по концевым сечениям сектора болтового соединения. Вторая модель – с учетом перемещений от термозатяжки болта и наложением перемещений, полученных для гидротурбины в целом на области участков ротора и корпуса гидротурбины болтового соединения (см. рис. 4, б). В этих моделях учитывалось пластическое деформирование по гипотезе изотропного билинейного упрочнения (критерий Мизеса перехода в пластическое состояние). Результаты расчета напряжений и деформаций приведены на рис. 6 и 7 соответственно.



а) б)

Рисунок 6 – Напряжения по Мизесу в болте: а) 1-я модель, б) 2-я модель



а) б)

Рисунок 7 – Пластические деформации в болте: а) 1-я модель, б) 2-я модель

Как видно из результатов приведенных на рис. 6, 7:

– напряжения в двух моделях практически совпадают (отличие менее 1 %), то есть напряжения от термозатяжки значительно превышают напряжения от других нагрузок;
– максимальные напряжения наблюдаются на галтели под головкой болта, также есть некоторое повышение напряжений на галтели около резьбы;
– максимальная величина эквивалентного напряжения по Мизесу превышает предел текучести (680 МПа), то есть имеют место

пластические деформации;
– пластические деформации в болте наблюдаются на галтели под головкой болта.

Также были проведены расчеты НДС при варьировании температурой затяжки от 220 °С до 350 °С. Характер распределения НДС не отличается от результатов приведеных на рис. 6-7. Только при Т = 220 °С отсутствуют пластические деформации. Зависимость эквивалентных напряжений от температуры приведена на рис. 8. Величины напряжений брались в точках максимума (поз. 1 рис. 6) и в среднем сечании болта (поз. 2 рис. 6).

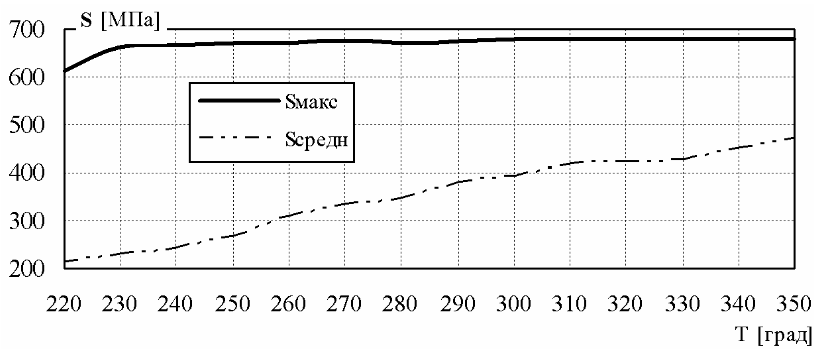


Рисунок 8 – Зависимость эквивалентные напряжений по Мизесу в болте от температуры затяжки

Выводы. По результатам расчетов НДС болтового соединения можно сделать следующие выводы:

1) При расчете НДС гидротурбины без учета термозатяжки в болтовом соединении, получено, что в районе фланцевого соединения ротора и корпуса напряжении незначительны - менее 60 МПа.
2) Анализ результатов полученных при расчете НДС болтового соединения показал, что напряжения от термозатяжки при температурах от 230 °С до 350 °С значительно превышают напряжения от других нагрузок и превышают предел текучести, что создает условия для возникновения трещины под головкой болта.
3) Температура термозатяжки при которой отсутствуют пластические деформации Т = 220 °С.

Список литературы: 1. Расчет на прочность деталей машин: Справочник / *И.А.Биргер, Б.Ф.Шорр, Г.Б.Иосилевич.* – 3-е изд. перераб. и доп. – М: Машиностроение, 1979. – 702 с. **2.** Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. **3.** *Туренко А.Н., Богомолов В.А., Степченко А.С. и др.* Компьютерное проектирование и расчет на прочность деталей автомобиля: Учебное пособие. – Харьков: ХНАДУ, 2003. – 336 с. **4.** *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. - М.: Наука, 1979. – 560 с.

Поступила в редколлегию 9.11.2009

УДК 62-192.624.041

$\boxed{\text{***В.А.ЖОВДАК***}}$, докт.техн.наук., проф., НТУ «ХПИ»;
Л.Ф.ТАРАСОВА, науч.сотр., НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ ПРИ УСТАЛОСТНЫХ ОТКАЗАХ

Запропоновано методику прогнозування надійності елементів конструкцій на основі використання кінетичних рівнянь для опису міри пошкодження і математичного апарату теорії марковських процесів. У результаті визначаються найбільш інформаційні показники надійності – ймовірність безвідмовної роботи й щільність імовірності відмовлень.

The approach of the construction element's reliability prediction, based on the use of kinetic equations for description of the measure of damage and the mathematical tool for Markoff's process theory is proposed. As the result, the most informative reliability characteristics, such as no-failure operation probability and probability density of failures, are determined.,

В данной работе предлагается подход к прогнозированию надежности элементов конструкций при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов.

Постановка задачи. Предполагается, что процесс нагружения $y(t)$ является узкополосным случайным процессом с огибающей $\lambda(t)$ и несущей частотой ω. Введем меру накопления повреждений $z(t)$ в элементах конструкций при случайном воздействии и постепенных отказах, происходящих в результате накопления различного рода повреждений. Для нахождения текущего значения $z(t)$ используется кинетическое уравнение повреждаемости в виде [1, 2]

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z(t), \lambda(t), y_m, R(t)], \tag{1}$$

здесь $z(t)$ – мера повреждений ($z_0 \le z(t) \le z_{np}$, равенство $z(t) = z_{np}$ является условием разрушения, z_0 – начальное повреждение), $F[\ldots]$ – детерминированная неотрицательная для кумулятивных моделей отказов скалярная линейная или нелинейная функция, $\lambda(t)$ – амплитудное значение параметров напряженно-деформированного состояния при гармоническом нагружении, y_m – среднее значение, $R(t)$ – вектор характеристик конструкционной прочности.

Для элементов машиностроительных конструкций, в которых имеет место случайное нагружение и постепенные отказы различной физической природы, можно записать кинетические уравнения соответственно для меры повреждений $z(t)$ и уравнения фильтра для определяющего эти уравнения параметра $\lambda(t)$

$$\begin{cases} dz(t)/dt = F\left[z(t), \lambda(t), R(t)\right] \\ d\lambda(t)/dt = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)n(t) \end{cases}, \tag{2}$$

где $n(t)$ – нормальный белый шум; $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ – детерминированные функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Рассматривая совместно уравнения (2), можно утверждать, что $[z(t), \lambda(t)]$ будет представлять двумерный марковский процесс, одномерная плотность вероятности которого $f(z,\lambda,t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial f(\lambda,z,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\lambda}[A_1(\lambda)f(\lambda,z,t)]-\frac{\partial}{\partial z}[A_2(\lambda,z)f(\lambda,z,t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}[B(\lambda)f(\lambda,z,t)]. \quad (3)$$

Граничные и начальные условия для уравнения (3) формулируются исходя из физической сущности задачи и общих свойств плотности вероятности [8]:

– граничные условия:

$$\lim_{z,\lambda\to 0,\infty} f(z,\lambda,t)=0\,; \quad (4)$$

– начальные условия:

$$\lim_{t\to 0} f(z,\lambda,t)=f(z)f_0(\lambda)\,, \quad (5)$$

здесь $f_0(z)$, $f_0(\lambda)$ – соответственно начальное значение плотности меры повреждений и плотность вероятности огибающей. Таким образом, предполагается, что $\lambda(t)$ и $z(t)$ в начальный момент времени $t = 0$ стохастически независимы.

В соответствии с общей теорией марковских процессов существует взаимнооднозначное соответствие между коэффициентами уравнения (3) и коэффициентами стохастических дифференциальных уравнений (2) [5, 7]

$$A_1(\lambda)=\Phi_1(\lambda)+\frac{N_0}{4}\Phi_2(\lambda)\cdot d\Phi_2(\lambda)/d\lambda;$$

$$A_2(\lambda,z)=F\left[\lambda,z,y_m,R\right]; \quad (6)$$

$$B(\lambda)=\frac{N_0}{2}\Phi^2(\lambda).$$

Для конкретизации соотношений (6) синтезируется стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение фильтра) первого порядка для огибающей, описывающее одномерный марковский процесс. Синтез формирующих фильтров осуществляется на основе системы распределений Пирсона [3], согласно которой плотность вероятности $f(\lambda)$ аппроксимируется системой стационарных плотностей вероятности, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\lambda-a}{b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2}f(\lambda)\,. \quad (7)$$

Коэффициенты a и b в уравнении полностью задают систему распределений Пирсона, в зависимости от их значений в качестве решения (7) получаются 12 типов кривых. От характера корней λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 < \lambda_2$) характеристического уравнения $b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2=0$ зависит интервал на оси $\lambda \geq 0$, на котором задано распределение, и вне которого оно принимает нулевые значения.

Проведенные исследования показали, что корни уравнения λ_1 и λ_2 являются вещественными и различными по знаку. По классификации Пирсона это отвечает 1-му типу распределения или β-распределению [7] и уравнения соответствия для коэффициентов $A_1(\lambda)$ и $B(\lambda)$ имеют вид [3]

$$A_1(\lambda) = -\frac{\beta}{2(p-1)}\left[q-(p+1)\lambda\right];$$

$$B(\lambda) = \beta(\lambda^2-\lambda)/(p-1). \quad (8)$$

где β, q, p – параметры β – распределения.

Таким образом, получены коэффициенты уравнения (3) – $A_1(\lambda)$ и $B(\lambda)$, конкретный вид коэффициента $A_2(\lambda,z)$ определяется принятой гипотезой накопления повреждений.

Из решения уравнения (3) можно определить одномерную плотность вероятности меры повреждений, по которой определяются все основные показатели надежности для кумулятивных моделей накопления повреждений:

– вероятность безотказной работы (ВБР)

$$P(t) = \int_0^{z_{пр}} f(z,t)dz, \quad (9)$$

– плотность вероятности отказов (ПВО)

$$q(t) = -\frac{dP(t)}{dt}, \quad (10)$$

– среднее и дисперсия времени до разрушения

$$m_T = \int_0^\infty tq(t)dt, \qquad \sigma_T^2 = \int_0^\infty t^2 q(t)dt - m_T^2. \quad (11)$$

Метод решения. Решение уравнения (3) представляется в виде [6], позволяющем добиться совпадения одномерных плотностей $\lambda(t)$ и $z(t)$, корреляционного момента, а также математических ожиданий и дисперсий

$$f(\lambda,z,t) = f(\lambda)f(z,t)\left[1+R(t)(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\right], \quad (12)$$

где $f(\lambda)$, $f(z,t)$ – одномерные плотности вероятности соответственно λ, z; $R(t) = \mu_{\lambda z}/\sigma_\lambda\sigma_z$ – коэффициент корреляции, $\mu_{\lambda z}$ – смешанный момент; m_z, σ^2_z – соответственно математическое ожидание и дисперсия меры повреждений; m_λ, σ^2_λ – соответственно математическое ожидание и дисперсия огибающей.

Получим уравнение для одномерной плотности вероятности меры повреждений $f(z,t)$. Для этого проинтегрируем уравнение (3) по λ в пределах $[0,\infty]$, в результате получим

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -A_1 f(\lambda,z,t)\Big|_0^\infty - \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_0^\infty A_2 f(\lambda,z,t)d\lambda\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[Bf(\lambda,z,t)\right]\Big|_0^\infty. \quad (13)$$

При удовлетворении граничных условий (4) первое и третье слагаемые полученного соотношения обращаются в нуль, тогда

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\int_0^\infty A_2(\lambda,z)f(\lambda,z,t)d\lambda\right]. \quad (14)$$

Подставляя решение (12) в полученное соотношение (14), имеем

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty A_2 f(\lambda) f(z,t)\left[1+R(t)(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\right]d\lambda =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z} f(z,t)\left[\int_0^\infty A_2 f(\lambda)d\lambda + R(t)(z-m_z)\int_0^\infty A_2 f(\lambda)(\lambda-m_\lambda)d\lambda\right], \qquad (15)$$

или

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{f(z,t)\left[\alpha_1(z)+R(t)(z-m_z)(\alpha_2(z)-m_\lambda\alpha_1(z))\right]\right\}, \qquad (16)$$

где

$$\alpha_1(z) = \int_0^\infty A_2(\lambda,z) f(\lambda)d\lambda;$$
$$\alpha_2(z) = \int_0^\infty \lambda A_2(\lambda,z) f(\lambda)d\lambda. \qquad (17)$$

Вводя обозначение

$$a^*(z,t) = \alpha_1(z)+R(t)(z-m_z)(\alpha_2(z)-m_\lambda\alpha_1(z)), \qquad (18)$$

уравнение (14) можно представить следующим образом

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{a^*(z,t) f(z,t)\right\}. \qquad (19)$$

Для решения уравнения (19) применяется метод характеристических функций [8], который сводится к определению характеристической функции $\Theta(\omega,t)$, связанной с одномерной плотностью вероятности соотношением

$$\Theta(i\omega,t) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\varpi z} f(z,t)dz. \qquad (20)$$

В соответствии с используемым методом умножим соотношение (19) на $e^{i\varpi z}$ и проинтегрируем по z в пределах $[0,\infty)$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty f(z,t)e^{i\varpi z}dz = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z}\left\{f(z,t)a^*(z,t)\right\}e^{i\omega z}dz. \qquad (21)$$

Учитывая определение характеристической функции (20) и произведя интегрирование по частям в правой части полученного уравнения, получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega,t)}{\partial t} = -e^{i\omega z} f(z,t)a^*(z,t)\Big|_0^\infty + i\omega\int_0^\infty f(z,t)a^*(z,t)e^{i\omega z}dz. \qquad (22)$$

При удовлетворении граничных условий (4) первое слагаемое соотношения (22) обращаются в нуль. Учитывая, что плотность вероятности отлична от 0 на коечном интервале $[0,\Delta]$, в уравнении (22) верхний предел можно заменить на Δ и воспользоваться представлением плотности вероятности через значения характеристической функции в дискретных точках для конечного интервала Δ [4]

$$f(z,t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{n=-N}^{N}\Theta(\omega_n,t)\exp(iz\omega_n), \qquad \omega_n = 2\pi n/\Delta. \qquad (23)$$

Подставляя (23) в (22), получим

$$\frac{\partial\Theta(\omega,t)}{\partial t}=i\omega\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-N}^{N}\Theta(\omega_n,t)\int_0^{\Delta}a^*(z,t)e^{iz(\omega-\omega_n)}dz \qquad (24)$$

или

$$\frac{\partial\Theta(\omega,t)}{\partial t}=i\omega\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-N}^{N}d_n(\omega,t)\Theta(\omega_n,t)\,, \qquad (25)$$

где

$$d_n(\omega,t)=\int_0^{\infty}a^*(z,t)e^{iz(\omega-\omega_n)}dz\,. \qquad (26)$$

Для любого конкретного значения ω_k $k=(\overline{-N,N})$ можно записать уравнение (25), то есть

$$\frac{\partial\Theta(\omega_k,t)}{\partial t}=i\omega_k\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-N}^{N}d_n(\omega_k,t)\Theta(\omega_n,t)\,. \qquad (27)$$

При варьировании $k=\overline{-N,N}$, получим $2N+1$ дифференциальных уравнений с $2N+1+3$ неизвестными.

Помимо $2N+1$ неизвестных значений характеристической функции $\Theta(\omega_n,t)$ в дискретных точках ω_n, ($n=\overline{-N,N}$), неизвестными также являются: смешанный момент $\mu_{\lambda z}$, математическое ожидание m_z и дисперсия σ^2_z. Для полноты системы уравнений получим дополнительно три уравнения для указанных моментов.

Для получения уравнения для смешанного момента умножим исходное уравнение (3) на $(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)$ и проинтегрируем по λ и по z в пределах $[0,\infty)$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{\partial f}{\partial t}d\lambda dz=-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{\partial}{\partial\lambda}[A_1f]d\lambda dz-$$

$$-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{\partial}{\partial z}[A_2f]d\lambda dz+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}[Bf]d\lambda dz\,. \qquad (28)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое полученного уравнения. В левой части имеем производную от смешанного момента

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{\partial f}{\partial t}d\lambda dz=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)fd\lambda dz=\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt}\,. \qquad (29)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения после интегрирования по частям с учетом граничных условий (4), примет следующий вид

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{\partial}{\partial\lambda}[A_1(\lambda)f]d\lambda dz=-\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(z-m_z)A_1(\lambda)fd\lambda dz\,. \qquad (30)$$

Второе слагаемое правой части после аналогичных выкладок будет следующим

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\frac{\partial}{\partial z}[A_2(\lambda,z)f]d\lambda dz=-\int_0^{\infty}(\lambda-m_\lambda)\int_0^{\infty}A_2(\lambda,z)fdzd\lambda\,. \qquad (31)$$

Третье слагаемое правой части после интегрирования по частям с учетом граничных условий (4) и общих свойств плотности вероятности обращается в ноль.

В результате имеем следующее дифференциальное уравнение для смешанного момента $\mu_{\lambda z}$ [6]

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty (z - m_z) A_1(\lambda) f(\lambda, z, t) dz d\lambda + \int_0^\infty (\lambda - m_\lambda) \int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda . \quad (32)$$

Аналогичные выкладки можно проделать для получения дифференциальных уравнений для математического ожидания m_z и дисперсии σ^2_z. Однако в рамках метода характеристических функций можно воспользоваться соотношениями, для определения первых двух начальных моментов через значения характеристической функции в дискретном ряде точек [4]. Используя вышеупомянутые соотношения, запишем

$$m_z(t) = \Delta \left[\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^{N} \frac{1}{\alpha_k} \Theta(\omega_k, t) \right], \quad (33)$$

$$\sigma_z^2(t) = \Delta^2 \left[\frac{1}{3} + \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^{N} \frac{\alpha_k - 2}{\alpha_k^2} \Theta(\omega_k, t) \right] - m_z^2(t) . \quad (34)$$

здесь $\alpha_k = -i\Delta\omega_k = -i2\pi k$.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (27), (32), (33), (34) для определения характеристической функции в дискретном ряде точек. Далее на основе соотношения (23) получаем плотность вероятности меры повреждений $f(z,t)$ и соответственно основные показатели надежности.

Численные исследования. Для конкретизации рассмотрим линейную модель накопления повреждений, описывающую отказы в результате многоцикловой усталости

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[\lambda] = C\lambda^r, \qquad \lambda \geq \sigma_{-1} , \quad (35)$$

где $C = \dfrac{\omega}{2\pi N_0 \sigma_{-1}^r}$; N_0, σ^r_{-1}, r – константы, определяемые по кривой Веллера.

Соответственно в этом случае A_2 не зависит от меры повреждений и определяется следующим соотношением

$$A_2 = C\lambda^r . \quad (36)$$

Получим соотношения для коэффициентов $d_n(\omega,t)$ разрешающей системы дифференциальных уравнения (25) в случае линейной модели накопления повреждений. Подставляя (36) в (17), получим коэффициенты α_1, α_2 не зависящие от z

$$\alpha_1 = \int_0^\infty C\lambda^r f(\lambda) d\lambda = Cm_\lambda^r , \qquad \alpha_2 = \int_0^\infty C\lambda^{r+1} f(\lambda) d\lambda = Cm_\lambda^{r+1} , \quad (37)$$

здесь m_λ^r, m_λ^{r+1} – начальные моменты λ r-го и $(r+1)$-го порядков соответственно.

Соотношения (26) с учетом (18), (37) примут следующий вид

$$d_n(\omega,t)=\int_0^\infty\left[Cm_\lambda^r+R(z-m_z)(Cm_\lambda^{r+1}-m_\lambda Cm_\lambda^r)\right]e^{iz(\omega-\omega_n)}dz\,. \tag{38}$$

Произведя интегрирование по частям, получим

$$d_n(\omega,t)=\frac{e^{iz(\omega-\omega_n)}}{i(\omega-\omega_n)}\left[Cm_\lambda^r+R(Cm_\lambda^{r+1}-Cm_z m_\lambda^r)(z-\frac{1}{i(\omega-\omega_n)}-m_z)\right]\Bigg|_0^\Delta,\ \omega\neq\omega_n; \tag{39}$$

$$d_n(\omega,t)=\Delta\left[Cm_\lambda^r+R(Cm_\lambda^{r+1}-Cm_z m_\lambda^r)(\Delta/2-m_z)\right],\qquad \omega=\omega_n. \tag{40}$$

Далее получим конкретный вид уравнения для смешанного момента $\mu_{\lambda z}$ в случае линейной модели накопления повреждений. Рассмотрим первое слагаемое в правой части уравнения (32). Подставляя соотношения (8) и (12), получим

$$\int_0^\infty\int_0^\infty(z-m_z)A_1(\lambda)f(\lambda,z,t)dzd\lambda=$$

$$=-\int_0^\infty\int_0^\infty(z-m_z)\frac{\beta}{2(p-1)}\left[q-(p+1)\lambda\right]f(\lambda)f(z,t)\left[1+R(t)(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\right]dzd\lambda\,. \tag{41}$$

Разделяя переменные и производя интегрирование по переменной z с учетом определения начального момента второго порядка $m^2{}_z$, имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty(z-m_z)\frac{\beta}{2(p-1)}\left[q-(p+1)\lambda\right]f(\lambda)f(z,t)\left[1+R(t)(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\right]dzd\lambda=\\&=\frac{\beta}{2(p-1)}\int_0^\infty\left[q-(p+1)\lambda\right]R(t)(\lambda-m_\lambda)m_z^2 f(\lambda)d\lambda.\end{aligned} \tag{42}$$

Производя интегрирование по переменной λ с учетом определения начального момента второго порядка $m^2{}_z$ после преобразований, получим

$$\frac{\beta}{2(p-1)}\int_0^\infty\left[q-(p+1)\lambda\right]R(t)(\lambda-m_\lambda)m_z^2 f(\lambda)d\lambda=-\frac{\beta}{2}R(t)m_\lambda^2 m_z^2\,. \tag{43}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части уравнения (32). Подставляя соотношения (36) и (12), получим

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty(\lambda-m_\lambda)\int_0^\infty A_2(\lambda,z)f(\lambda,z,t)dzd\lambda=\\&=C\int_0^\infty\lambda^r(\lambda-m_\lambda).f(\lambda)\int_0^\infty f(z,t)\left[1+R(t)(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\right]dzd\lambda.\end{aligned} \tag{44}$$

Интеграл по переменной z с учетом определения математического ожидания превращается в единицу и тогда учитывая определения начальных моментов r-го и $(r+1)$-го порядков – m_λ^r, m_λ^{r+1}, получим

$$C\int_0^\infty(\lambda-m_\lambda)\lambda^r f(\lambda)\int_0^\infty f(z,t)\left[1+R(t)(\lambda-m_\lambda)(z-m_z)\right]dzd\lambda=$$

$$C\int_0^\infty(\lambda-m_\lambda)\lambda^r f(\lambda)d\lambda=C(m_\lambda^{r+1}-m_\lambda m_\lambda^r). \quad (45)$$

В итоге имеем окончательный вид уравнения для смешанного момента в случае линейной модели накопления повреждений

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt}=\frac{\beta}{2}R(t)M_\lambda^2M_z^2+C(m_\lambda^{r+1}-m_\lambda m_\lambda^r)\ . \quad (46)$$

Таким образом, для случая линейной модели накопления повреждений имеем систему $2N+1$ дифференциальных уравнений (25), коэффициенты которой задаются соотношениями (39), (40), дифференциальное уравнение (32), и уравнения (33), (34) для определения характеристической функции в дискретном ряде точек. Далее на основе соотношений (23), (9), (10) получаем плотность вероятности меры повреждений и соответственно основные показатели надежности.

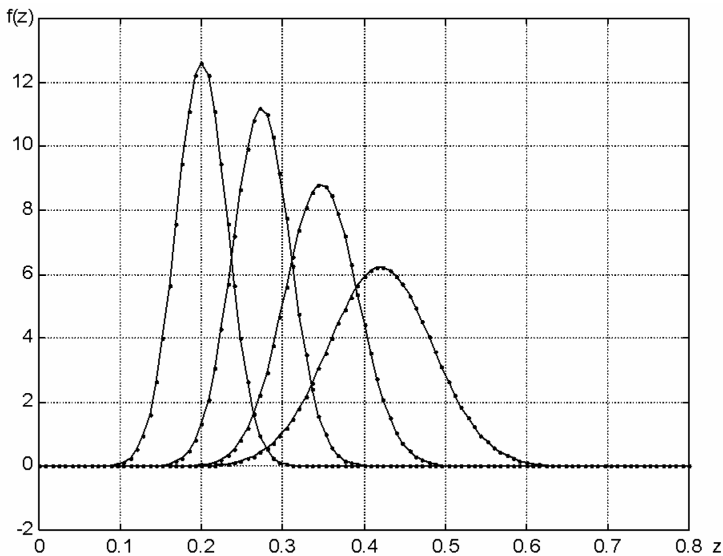


Рисунок 1 – Плотности вероятности меры повреждений в различные моменты времени

Дальнейший алгоритм реализован численно в системе MATLAB 5.2. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге-Кутта. В результате получены плотности вероятности меры повреждений при различных значениях времени, ВБР и ПВО. На рис. 1-3 приведены результаты решения задачи в случае линейной модели накопления повреждений. На рис. 1 приведены плотности вероятности меры повреждений полученные методом характеристических функций (сплошная линия) и точное решение (точки) представляющие нормальный закон распределения в различные моменты времени. ВБР и ПВО, построенные по известным значениям плотности вероятности меры повреждений приведены на рис. 2, 3.

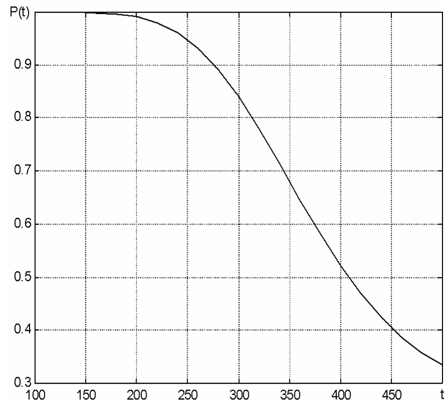


Рисунок 2 – ВБР

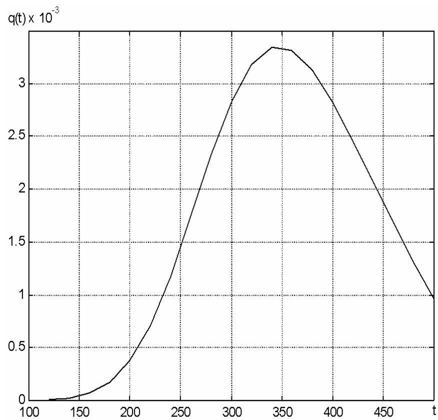


Рисунок 3 – ПВО

Выводы. Решена задача прогнозирования надежности при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Предложенная методика позволяет получить наиболее информационные показатели надежности – вероятность безотказной работы и плотность вероятности отказов.

Список литературы: **1.** *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М., Машиностроение, 1984. – 312 с. **2.** *Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М., Машиностроение, 1989. – 248 с. **3.** *Жовдак В.А., Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкции с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 120 с. **4.** *Жовдак В.А., Тарасова Л.Ф.* Прогнозирование надежности механических систем. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 107 с. **5.** *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1985. – 560 с. **6.** *Росин М.Ф., Булыгин В.С.* Статистическая динамика и теория эффективности систем управления. – М.: Машиностроение, 1981. – 312 с. **7.** *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М., Радио и связь, 1982. – 624 с. **8.** *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М., Сов. радио, 1977. – 488 с.

Поступила в редколлегию 19.11.09.

УДК 531.539.3.62.752(031)

Е.М.ИВАНОВ, канд.техн.наук, доц., ХНАДУ «ХАДИ»

НОВЫЙ ПОДХОД В ИССЛЕДОВАНИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ ВИБРАЦИЙ И УДАРОВ

Розкрито ефект реструктуризації механічних систем, на які діють полігармонічні вібрації або удари, які при розкладі у ряд Фур'є є еквівалентами полігармонійних вібрацій.

The effect of restructuring of the mechanical systems, on which harmonic vibrations or shots which at a time-table in the row of Fur'e are equivalents which of harmonious vibrations operate on, is exposed.

На транспортных средствах, авиационных и космических объектах, судах, различного рода машинах, агрегатах и т.п. действие вибраций и ударов вызывает опасение усталостного разрушения входящих в эти объекты деталей, узлов, конструкций.

Исходя из этого, при проектировании механических и других систем, работающих в условиях действия вибраций и ударов, имеется стремление увеличить запас прочности на основе увеличения, например, площадей сечения деталей. Однако, данное мероприятие при проектировании отчасти может быть несколько излишним. Доказательством этому служит выявленный эффект реструктуризации механических систем, на которые действуют полигармонические вибрации или удары, также являющиеся при разложении в ряд Фурье, эквивалентами полигармонических вибраций. Поясним существо данного эффекта. Его выявление связано с эффектом реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при входных полигармонических сигналах [2]. Известно, что при исследовании механических колебательных систем можно пользоваться электродинамическими налогами первого и второго родов [1,4]. В этом случае массы, коэффициенты демпфирования и жесткости могут заменяться такими величинами как емкости, индуктивности и резисторы, то есть в электродинамических аналогах присутствуют реактивные элементы. И если колебательная механическая система работает под действием полигармонических внешних вибраций, то в схеме аналог на входе имеется полигармонический входной сигнал. А так как в электрической цепи с реактивными элементами, в частности в схеме аналога, при полигармоническом входном сигнале происходит реструктуризация, то, переходя к рассмотрению механической колебательной системы (МКС), выявляем также эффект автоматической реструктуризации. При этом заметим, что, вооружившись мыслью о наличии рассматриваемого эффекта, можно непосредственно его выявить при решении дифференциальных уравнений движения МКС.

Действительно возьмем линейную МКС с одной степенью свободы (рис. 1), в которой m, b, c, F, x – масса, коэффициенты демпфирования, жесткости, внешнее воздействие и перемещение соответственно.

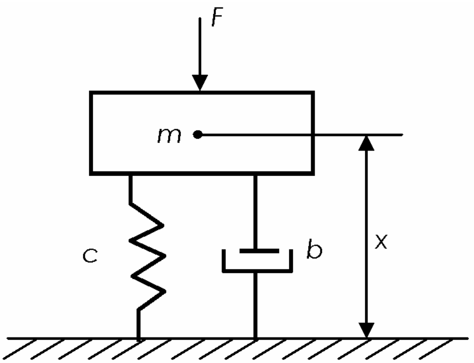


Рисунок 1

Пусть воздействующая сила F является полигармонической, то есть

$$\mathrm{F} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{F}_{\mathrm{ak}} \sin\left(\omega_k t - \varphi_k\right), \qquad (1)$$

где F_{ak}, ω_k, φ_k, $k = \overline{1,n}$ – амплитуда, круговая частота, фазовый угол k-й гармоники воздействия соответственно; t – время.

К данной МКС применим принцип суперпозиции.

Уравнений движения МКС в этом случае будет n и каждое k-е из этого числа имеет вид

$$m\frac{d^2x}{dt} + b\frac{dx}{dt} + cx = \underset{k=\overline{1,n}}{U_{ak}} \sin\left(\omega_k t - \varphi_k\right). \qquad (2)$$

Если обозначить $p = \dfrac{d}{dt}$ и $p_k = j\omega_k, j = \sqrt{-1}$, то для каждой k-й гармоники МКС$_k$ имеет следующую передаточную функцию

$$\underset{k=\overline{1,n}}{W_k\left(p_k\right)} = \frac{1}{mp_k^2 + bp_k + c} = \frac{1}{-m\omega_k^2 + j\omega_k b + c}. \qquad (3)$$

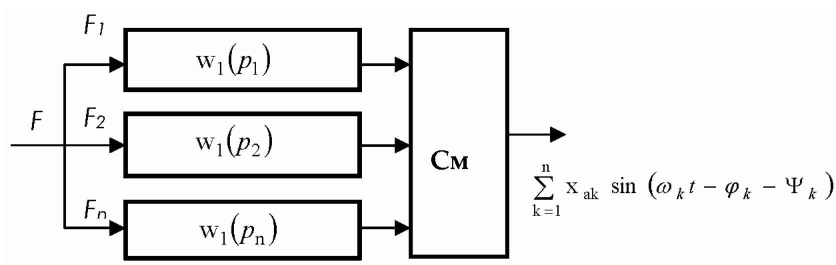


Рисунок 2

Структура всей МКС представляется в виде, изображенном на рис. 2, где $F = \sum_{k=1}^{n} F_k$; $F_k = F_{ak} \sin\left(\omega_k t - \varphi_k\right), \quad k = \overline{1,n}$; x_{ak} – амплитуда перемещения МКС k-й гармоники; Ψ_k – угол сдвига между F_k и x_k; См – сумматор.

Из рис. 2 видно автоматическое расслоение МКС на индивидуальные МКС$_k$, $k = \overline{1,n}$.

Величины x_{ak} и Ψ_k выражаются формулами [3]

$$\left.\begin{aligned} x_{ak} &= \frac{F_{ak}}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_k^2\right)^2+4h^2\omega_k^2}};\\ \Psi_k &= arctg\frac{2h\omega_k}{\omega_0^2-\omega_k^2};\\ k &= \overline{1,n};\ \mathrm{h}=\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{m}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из выражений (4) следуют выводы:

1. амплитуды гармоник x_{ak} уменьшаются с увеличением частоты;
2. фазовые углы Ψ_k изменяются в сторону 180°, то есть перемещения x_k отстают от действующей k-й силы на угол Ψ_k, все более приближаясь к 180°.

Эти факты известны, но при полигармоническом или ударном воздействии данный эффект проявляется одновременно и в МКС каждая сила F_k встречает индивидуальные k-е силы сопротивления, что влечет появление индивидуальных величин $x_k = x_{ak}\sin\left(\omega_k t-\varphi_k-\Psi_k\right)$.

Причем, как видно из (4), силы сопротивления увеличиваются с повышением $\omega_k, k=\overline{1,n}$, что, в свою очередь, напрашивается вывод о том, что с увеличением частоты ω_k, даже при одинаковых амплитудах F_{ak}, МКС будет работать в более облегченном режиме, чем при низких частотах.

Если рассматривать внешнее воздействие на МКС в виде удара, то в этом случае выявлен следующий факт. Ударное воздействие F, как известно можно разложить в ряд Фурье, то есть представить в виде

$$\mathrm{F}=\mathrm{F}_0+\sum_{k=1}^{n}F_{ak}\sin\left(\omega_k t-\varphi_k\right), \tag{5}$$

где F_0 – постоянная составляющая; F_{ak}, ω_k, φ_k – те же величины, что в схеме, изображенной на рис. 2.

Как было отмечено, от каждого МКС возникают перемещения $x_k = x_{ak}\sin\left(\omega_k t-\varphi_k-\Psi_k\right)$, имеющие углы сдвига Ψ_k, $\mathrm{k}=\overline{1,\mathrm{n}}$. Так как все гармоники удара действуют на МКС одновременно, то сразу же образуются и x_k и φ_k разные по величине. Запомнив этот факт, делаем заключение, что из-за разных углов Ψ_k невозможно воспроизвести с помощью вибростендов или других механических систем форму удара, непосредственно подавая задающее воздействие на возбудитель удара. На наш взгляд, в этом случае необходимо включать в систему управления ряд устройств – экстраполяторов, упреждающих и компенсирующих углы Ψ_k. Такое включение неординарное, требующее досконального знания составляющих гармоник, их количества и параметров испытательных виброударовозбудителей.

Список литературы: **1.** *Божко А.Е.* Воспроизведение вибраций. – Киев: Наукова думка, 1975. – 191 с. **2.** *Божко А.Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Доповіді НАНУ, 2002. – № 11. – С. 101-

103. **3.** *Божко А.Е., Голуб Н.М.* Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – 188 с. **4.** Случайные колебания: пер. с англ. / Под ред. *С. Кренделла*. – М.: Мир, 1967. – 356 с.

Поступила в редколлегию 25.10.2009

УДК 539.3

В.И.КОНОХОВ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Д.Б.ПИВОВАРОВ, студент, НТУ «ХПИ»;
В.Л.ХАВИН, канд.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТВОЛА ГИДРОПУШКИ ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

У статті досліджений вплив подовжньо – поперечного навантаження на статичні переміщення стовбура гідрогармати. Для вибору достовірної моделі розглядалися три варіанти розрахункової схеми, відмінних рівнем складності математичної моделі. На основі обчислювальних експериментів запропонований найраціональніший і достатньо точніший варіант розрахункової схеми.

Influencing longitudinally is explored in the article – transversal loading on the static moving of trunk of gydropushky. For the choice of reliable model three variants of calculation chart were examined, different by the level of complication of mathematical model. On the basis of calculable experiments the most rational and exact enough variant of calculation chart is offered.

1. Введение. В процессе эксплуатации гидропушек, используемых для размывания породы на стенах карьеров, под воздействием высокого давления в гидросистеме (более 100 МПа) и большой длине ствола, через который выбрасывается технологическая жидкость, равной 10 – 12 метров, торец ствола совершает колебательные движения. Амплитуда колебаний ствола существенно влияет на эффективность работы гидропушки. Наличие больших прогибов, вызываемых низкой изгибной жесткостью ствола гидропушки, также влияет на безопасность ее эксплуатации. Особенностью данной конструкции является также наличие продольной следящей силы, действующей в концевом сечении, где происходит истечение технологической жидкости, что существенно влияет на изгибные деформации штанги.

Ранее был проведен анализ поведения подобной конструкции только под действием горизонтальной продольной силы [1]. Известны также расчеты для гибких стержней, учитывающие нелинейность для деформированного стержня [1]. Учет же реальных видов нагружения гибкого ствола в большинстве случаев делает предложенные в [1] методы определения изгибных перемещений неточными.

Цель работы – исследование влияния продольно-поперечного нагружения на статические перемещения концевого сечения ствола гидропушки и выбор достоверной модели для их определения.

2. Постановка задачи. Для разработки рекомендаций по выбору модели, описывающей деформирование ствола гидропушки, рассматривались три последовательных варианта расчетной схемы, отличающиеся исходными гипотезами, и, соответственно, уровнем сложности математической модели.

Расчетная схема гидропушки представляет собой двухопорную балку с консольной частью. Ось гидропушки располагается под углом α к горизонту. Внешнее нагружение представляет собой равномерно распределенное усилие от собственного веса q и гидродинамическую следящую силу P (рис. 1). Значения всех величин приведены в табл. 1, где знак «–» означает противоположное направление усилия.

Таблица 1 – Исходные данные

Продольная сила	P, кН	278
Распределенное усилие (вес)	q, кН/м	-0,944
Продольная составляющая распределенного усилия	q_Z, кН/м	-0,838
Поперечная составляющая распределенного усилия	q_Y, кН/м	-0,484
Длина балки	L, м	10,915
Длина пролета	ℓ, м	1,765
Длина консоли	a, м	9,15
Экваториальный (осевой) момент инерции сечения	I_X, мм^4	$0{,}246 \cdot 10^{-4}$
Модуль упругости	E, МПа	$2{,}1 \cdot 10^5$

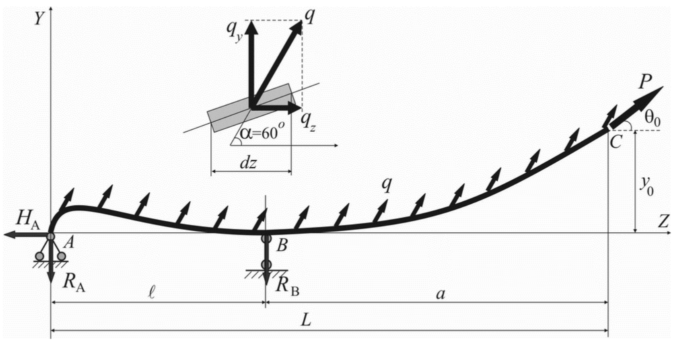


Рисунок 1 –Расчетная схема

Рассматривались следующие модели расчета перемещений гидропушки:

Модель 1. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения ($q_y \neq 0$; $P = 0$; $q_Z = 0$).

Модель 2. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_Z = 0$).

Модель 3. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях с учетом влияния продольной составляющей равномерного нагружения ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_Z \neq 0$).

2.1. Модель 1. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения.

Деформированное состояние системы определяется на основе суперпозиции двух решений:

1. Изгиб балки равномерно распределенной нагрузкой q_Z при малых перемещениях и углах поворота.

2. Изгиб балки сосредоточенной следящей силой P, возникающей за счет наличия прогиба y_0 и угла поворота θ_0 сечения, в котором приложена следящая сила. В силу малости величины углов поворота, считаем $\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta \approx 1$.

Для получения первого решения (изгиб усилием q_y) интегрировалось приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки постоянной жесткости, рассмотренное в [2], при $P = 0$

$$EI_x \frac{d^2 y}{dz^2} = M_x(z) \tag{1}$$

с граничными условиями для функции прогиба $y(z)$:

$$y(0) = 0; \quad y(\ell) = 0 \tag{2}$$

и уравнениями изгибающего момента $M_x(z)$:

$$M(z) = -R_A\, z + q_y \frac{z^2}{2} \qquad \text{при} \quad 0 \le z \le \ell \tag{3}$$

$$M(z) = -R_A z - R_B(z-\ell) + q_y \frac{z^2}{2} \qquad \text{при} \quad \ell \le z \le L$$

где реакции опор $\quad R_A = q_y \dfrac{\ell^2 - a^2}{2\ell}$; $\quad R_B = q_y \dfrac{L^2}{2\ell}$.

Полученные уравнения для прогибов и углов поворота имеют вид:

$0 \le z \le \ell$:

$$EI_x y = 0{,}04167\, q_y\, z^4 + 0{,}0833 \frac{q_y L(L-2\ell)}{\ell} z^3 - 0{,}04167 q_y \ell\left(2L^2 - 4\ell L + \ell^2\right) z;$$

$$EI_x \theta = 0{,}16667\, q_y\, z^3 + 0{,}25 \frac{q_y L(L-2\ell)}{\ell} z^2 - 0{,}04167 q_y \ell\left(2L^2 - 4\ell L + \ell^2\right),$$

$\ell \le z \le L$: $\qquad (4)$

$$EI_x y = 0{,}04167\, q_y z^4 - 0{,}16667\, q_y L z^3 + 0{,}25\, q_y L^2 z^2 -$$
$$- 0{,}04167\, q_y\, \ell\left(8L^2 - 4\ell L + \ell^2\right) z + 0{,}08333\, q_y\, L^2 \ell^2;$$

$$EI_x \theta = 0{,}16667\, q_y z^3 - 0{,}5\, q_y L z^2 + 0{,}5\, q_y L^2 z - 0{,}04167 q_y \ell\left(8L^2 - 4\ell L + \ell^2\right),$$

что позволяет определить угол поворота и прогиб в концевом сечении ($z = L$):

$$y_0 = 0{,}103 \text{ м.} \quad \theta_0 = 0{,}0142 \text{ рад.}$$

Второе решение (изгиб следящей силой P) определялось также интегрированием уравнения изогнутой оси (1) с граничными условиями (2) с правой частью (изгибающим моментом $M_x(z)$), возникающим из-за изгибного перемещения точки приложения силы *P;*

$$M(z) = -R_A z + H_A y \qquad \text{при } 0 \le z \le \ell;$$

$$M(z) = -R_A z - R_B(z-\ell) + H_A y \qquad \text{при } \ell \le z \le L$$

где реакции опор $H_A \cong P$; $R_A = \frac{P}{\ell}(y_0 - \theta_0 a)$; $R_B = \frac{P}{\ell}(\theta_0 L - y_0)$.

Полученные уравнения для прогибов и углов поворота имеют вид

$$\begin{aligned}
&0 \le z \le \ell: \\
&y = C_1\, e^{(\chi z)} + C_2\, e^{(-\chi z)} + \frac{R_A}{P} z; \\
&\theta = C_1\, \chi\, e^{(\chi z)} - C_2 \chi\, e^{(-\chi z)} + \frac{R_A}{P}, \\
&\ell \le z \le L: \\
&y = C_3\, e^{(\chi z)} + C_4\, e^{(-\chi z)} + \frac{(R_A + R_B)}{P} z - \frac{R_B}{P}\ell; \\
&\theta = C_3\, \chi\, e^{(\chi z)} - C_4\, \chi\, e^{(-\chi z)} + \frac{(R_A + R_B)}{P},
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\chi^2 = \frac{P}{E I_x}$.

Константы интегрирования ($C_1 \div C_4$) находятся из граничных условий (2) и условий сопряжения $y\big|_{(\ell-0)} = y\big|_{(\ell+0)}$; $\frac{dy}{dx}\big|_{(\ell-0)} = \frac{dy}{dx}\big|_{(\ell+0)}$.

После подстановки решения в (2) и в условия сопряжения получаем СЛАУ относительно неизвестных констант, решая которую, например, методом, изложенным в [3], находим:

$$C_1 = -3{,}249\,10^{-2} \text{ м}; \qquad C_2 = 3{,}249\,10^{-2} \text{ м};$$

$$C_3 = -6{,}406\,10^{-2} \text{ м}; \qquad C_4 = 1{,}008\,10^{-2} \text{ м}.$$

Окончательно, решение задачи представляет собой суперпозицию решений (4) и (5) (рис. 2). Представленный на рис. 2 график функции прогиба, мало соответствует действительной форме изогнутой оси стержня. Поэтому полученное решение можно рассматривать в качестве некоторого первого приближения

Для уточнения прогиба от силы *P*, очевидно, необходимо построить итерационный процесс, в котором в цикле решается уравнение (1). Для этого используется алгоритм метода «простых итераций», приведенный в [3]. Программная реализация алгоритма производилась с помощью средств математического пакета MATLAB, изложенных в [4] и [5]. На каждой итерации вычисляется прогиб и угол поворота концевого сечения. При этом в начале каждого цикла, заново формируется уравнение (1). Правая часть уравнения формируется в каждом цикле с учетом отклонений концевого сечения стержня, полученного на предыдущей итерации. Полученный в i-ом цикле результат есть, таким образом, исходное приближение для i+1-ой итерации. Условием выхода из цикла является равенство результатов двух последних приближений.

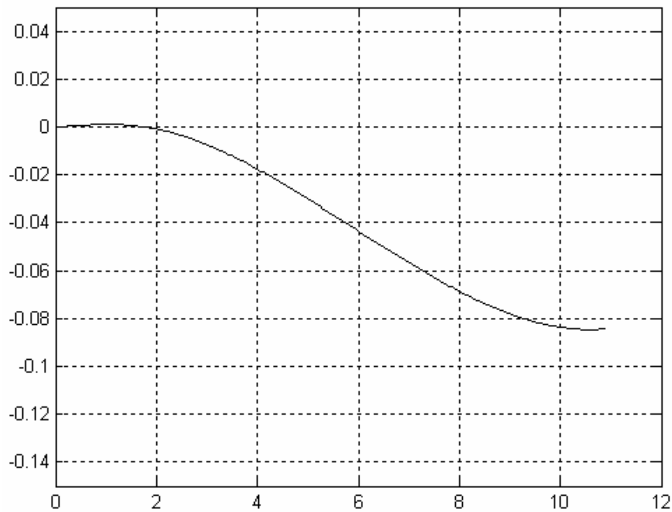


Рисунок 2 – Суперпозиция функций прогибов (первое приближение)

Данный итерационный процесс сходится к тривиальному решению $y = 0$, а суперпозиция решений представляет собой функцию перемещений оси стержня под действием исключительно поперечного распределенного усилия (кривая 1 на рис. 3). Это свидетельствует о некорректности математической модели – метод суперпозиции при данных больших прогибах некорректен.

Объяснить результат, полученный с помощью итерационного процесса, можно обратившись к физическому смыслу задачи. Задача о нахождении прогиба от следящей нагрузки эквивалентна задаче о нахождении положения равновесия растянутого стержня, получившего начальное отклонение.

Корректно определить перемещения в рассматриваемой системе можно лишь с учетом совместного действия продольных и поперечных усилий.

2.2. Модель 2. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях без учета влияния продольной составляющей равномерного нагружения.

В предлагаемой постановке задача сводится к решению дифференциального уравнения (1) с правыми частями вида:

$$\begin{aligned} &M_x(z) = -R_A z + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} && \text{при} \quad 0 \le z \le \ell; \\ &M_x(z) = -R_A z - R_B(z-\ell) + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} && \text{при} \quad \ell \le z \le L, \end{aligned} \tag{6}$$

где $H_A \cong P$, $R_A = q_y \dfrac{\ell^2 - a^2}{2\ell} + \dfrac{P}{\ell}(y_0 - \theta_0 a)$, $R_B = q_y \dfrac{L^2}{2\ell} + \dfrac{P}{\ell}(\theta_0 L - y_0)$

и условиях

$$y_1(0) = 0,\ \ y_1(\ell) = 0,\ \ y_2(\ell) = 0,\ \ y'_1(\ell) = y'_2(\ell),\ \ y_2(L) = y_0,\ \ y'_2(L) = \theta_0, \tag{7}$$

где y_1 и y_2 – решения уравнения (1) для интервалов $0 \le z \le \ell$ и $\ell \le z \le L$ соответственно и имеющие вид

$$\begin{aligned} y_1 &= C_{11}\, e^{\chi z} + C_{12}\, e^{-\chi z} + \left(y_0 - a\theta_0 + \frac{q_y(\ell^2 - a^2)}{2P} \right) \frac{z}{\ell} - \frac{q_y}{P}\left(\frac{z^2}{2} + \frac{EI_x}{P} \right); \\ y_2 &= C_{21}\, e^{\chi z} + C_{22}\, e^{-\chi z} + \left(\frac{q_y L}{P} + \theta_0 \right) z - \frac{q_y}{P}\left(\frac{z^2}{2} + \frac{EI_x}{P} + \frac{L^2}{2} \right) + y_0 - \theta_0 L. \end{aligned} \tag{8}$$

Подчиняя решение (8) условиям (7) получаем систему нелинейных уравнений для определения констант C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, y_0, θ_0:

$$\begin{cases} C_{11} + C_{12} - q_y \dfrac{EI_x}{P^2} = 0; \\ C_{11}\, e^{\chi\ell} + C_{12}\, e^{-\chi\ell} - \dfrac{q_y}{P}\left(\dfrac{EI_x}{P} + \dfrac{a^2}{2} \right) - \left(y_0 + a\,\theta_0 \right) = 0; \\ C_{21}\, e^{\chi\ell} + C_{22}\, e^{-\chi\ell} - \dfrac{q_y}{P}\left(\dfrac{EI_x}{P} + \dfrac{a^2}{2} \right) + \left(y_0 - a\,\theta_0 \right) = 0; \\ C_{11}e^{\chi\ell} - C_{12}e^{-\chi\ell} - C_{21}e^{\chi\ell} + C_{22}e^{-\chi\ell} + \dfrac{1}{\chi}\left\{ \dfrac{q_y}{P}\left(\dfrac{(\ell^2 - a^2)}{2\ell} - L \right) - \left[y_0 - (\ell - a)\theta_0 \right] \dfrac{1}{\ell} \right\} = 0; \\ C_{21}\, e^{\chi L} + C_{22}\, e^{-\chi L} - q_y \dfrac{EI_x}{P^2} = 0; \\ C_{21}\, e^{\chi L} - C_{22}\, e^{-\chi L} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Система нелинейных уравнений (9) относительно неизвестных C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, y_0, θ_0 решалась методом минимизации невязок при помощи математического пакета MATLAB. Были получены следующие значения констант:

$$C_{11} = -0{,}13736 \text{ м}; \qquad C_{12} = 0{,}10499 \text{ м};$$

$$C_{21} = -0{,}12862\ 10^{-2} \text{ м}; \qquad C_{22} = -0{,}20359 \text{ м}.$$

и значения перемещений в концевом сечении $y_0 = -0{,}1349828$ м, $\theta_0 = -0{,}0182326$ рад, которые оказались значительно больше, чем при учете только поперечной нагрузки q_y. Следует также отметить, что угловые перемещения сечений $\theta(z)$ малы, так например, $|\theta_0| = 1{,}82 \cdot 10^{-2}$ рад, что подтверждает корректность применения приближенного линеаризованного уравнения изогнутой оси (1) для решения поставленной задачи.

2.3. Модель 3. Продольно-поперечный изгиб балки при малых деформациях и больших перемещениях с учетом влияния продольной составляющей равномерного нагружения.

Решение данной задачи для рассматриваемой системы сводится к интегрированию уравнения (1) с условиями (7), а изгибающий момент $M_x(z)$ (правая часть) задается в виде:

$$
\begin{aligned}
&0 \le z \le \ell \qquad M_x(z) = -R_A z + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} + M_0(z);\\
&\ell \le z \le L \qquad M_x(z) = -R_A z - R_B(z-\ell) + H_A y + q_y \frac{z^2}{2} + M_0(z),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $M_0 = q_z\left(zy(z) - \int\limits_0^Z y(\xi)d\xi\right)$, а выражения для реакций примут вид:

$$
H_A = P + q_z L\,, \qquad R_A = q_y \frac{\ell^2 - a^2}{2\ell} + \frac{P}{\ell}(y_0 - \theta_0\ a) + \frac{q_z}{\ell}\int\limits_0^L y(z)dz\,,
$$

$$
R_B = q_y \frac{L^2}{2\ell} - \frac{P}{\ell}(y_0 - \theta_0\ L) - \frac{q_z}{\ell}\int\limits_0^L y(z)dz\,.
$$

Уравнения (1) с правой частью (10) не имеет решения в элементарных функциях, поэтому уравнение для численного интегрирования было приведено к системе дифференциальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dz} = \theta;\\
\dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{M_x(z)}{EI_x};\\
\dfrac{dM_0}{dz} = -q_z\theta\ z.
\end{cases}
\tag{11}
$$

Система дифференциальных уравнений (11) решалась методом Рунге-Кутта, реализованном в программном пакете MATLAB, при начальном условии $y(0) = 0$ на участке $0 \le z \le \ell$. Начальное условие для функции θ определялось при помощи итерационного процесса методом «стрельбы» из условия $y(\ell) = 0$, начальное значение M_0 принято равным нулю. На участке $\ell \le z \le L$ интегрирование велось при начальных условиях $y(\ell) = 0$, $\theta = \theta(\ell)$ и $M_0 = M_0(\ell)$, которые определялось из решения на первом участке ($0 \le z \le \ell$).

Скорость решения весьма сильно зависит от значений y_0, θ_0, которые в свою очередь, являются решением задачи в концевом сечении ($z = L$). Вследствие этого был построен итерационный процесс, заключающийся в том, что изначально, в первом приближении, y_0 и θ_0 задаются из вышеприведенного решения (п. 2.2), а затем на каждом последующем i-ом интегрировании системы (11) в итерационном режиме подставляются решения $y_0^{(i-1)}$ и $\theta_0^{(i-1)}$, найденные на предыдущем шаге. Так как выяснилось, что простые итерации не дают сходимости, было введено дополнительное условие. Как оказалось, изгибающий момент в концевом сечении на каждой итерации не обращался в нуль, а его модуль пропорционален отклонению $y_0^{(i)}$ и $\theta_0^{(i)}$ от действительных, искомых значений. Вследствие этого накладывалось дополнительное условие вида:

$$M_x(L) = -R_A L - R_B(L-\ell) + H_A y_0 + q_y \frac{L^2}{2} + q_z y_0 L - q_z \int_0^L y(\xi) d\xi = 0 ,$$

которое позволило добиться быстрой сходимости процесса.

Решение для y_0 и θ_0, полученное с точностью до 5 значащих цифр, имело вид:

$$y_0 = -0{,}13815 \text{ м};$$
$$\theta_0 = -1{,}8651 \cdot 10^{-2} \text{ рад} .$$

3. Результаты расчетов. Для сравнения, в табл. 2 приведены полученные для трех моделей величины прогибов и углов поворота в концевом сечении штанги. В пункте 2.1 приводятся значения прогибов и углов поворота при действии только поперечной распределенной нагрузки – решение, к которому сходится итерационный процесс.

Таблица 2 – Результаты расчетов

	модель 2.1	модель 2.2	модель 2.3
Прогиб y_0, м	-0,103	-0,1350	-0,1382
Угол поворота θ_0, рад	-0,0142	-0,01823	-0,01865

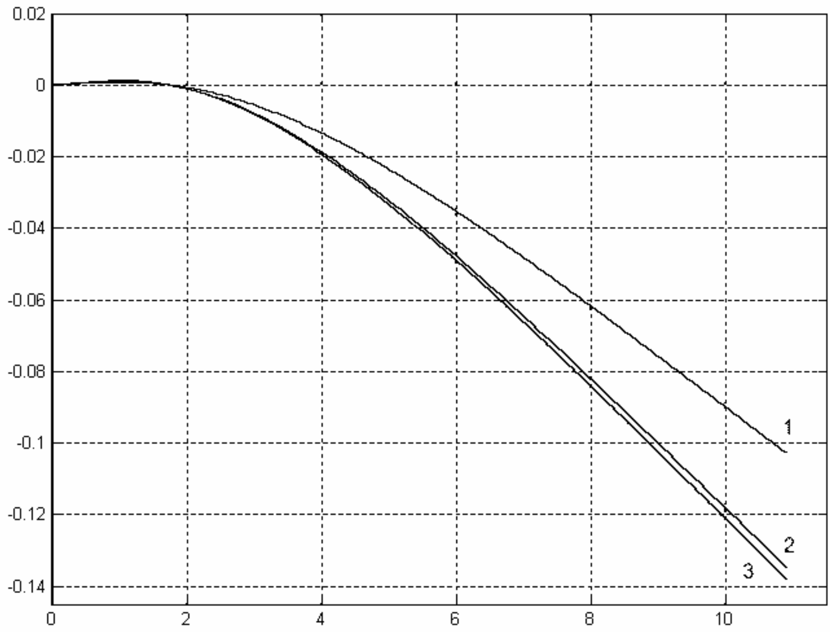


Рисунок 3 – Функция прогиба

На рис. 3 показаны зависимости, полученные для функции прогибов $y(z)$ для трех рассмотренных моделей:

1 – прогиб под действием распределенной поперечной нагрузки ($q_y \neq 0$; $P = 0$; $q_Z = 0$) (модель 1).

2 – прогиб при совместном действии распределенной поперечной нагрузки и сосредоточенного продольного усилия ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_Z = 0$) (модель 2).

3 – прогиб при совместном действии распределенной поперечной, продольной нагрузки и продольного сосредоточенного усилия ($q_y \neq 0$; $P \neq 0$; $q_Z \neq 0$) (модель 3).

4. Выводы. Использование метода суперпозиции перемещений в данной задаче некорректно, так как, в виду больших прогибов, математическая модель не отражает реального воздействия продольных усилий при продольно-поперечном изгибе. Наиболее точным является решение с учетом всех компонент внешнего нагружения, но оно связано с рядом чисто технических проблем, возникающих в связи с особенностями граничных условий и использованием методов численной математики. Это решение нерационально и громоздко, и в итоге учет продольного распределенного усилия дает незначительную поправку, которая практического интереса не представляет. Дальнейшие вычисления с учетом нелинейности деформирования стержня и привлечением точного дифференциального уравнения изогнутой оси балки можно не проводить, так как углы поворота во всех случаях оказались малыми величинами (не более $|\theta_0| = 1{,}87 \cdot 10^{-2}$ то есть $(\theta)^{\frac{3}{2}} << 1$) и принятые упрощения оправданы. Наиболее рациональным и достаточно точным является решение без учета продольного распределенного усилия. В этом случае возможно получения аналитического выражения для функций прогиба и углов поворота сечения, минимальное привлечение численных методов, удовлетворение любых граничных условий без внесения заметных поправок в алгоритм расчета.

Список литературы: **1.** *Шевченко Ф.Л.* Механика упругих деформируемых систем. Часть 1 напряженно-деформированное состояние стержней / *Шевченко Ф.Л.* – ДонНТУ, 2006. – 293 с. **2.** *Любошиц М.И.* Справочник по сопротивлению материалов / *Любошиц М.И. Ицкович Г.М.* – Минск, Вышэйшая школа, 1969. – 462 с. **3.** *Калиткин Н.Н.* Численные методы / *Калиткин Н.Н.* – М.: Наука, 1978. – 512 с. **4.** *Иглин С.П.* Математические расчеты на базе MATLAB / *Иглин С.П.* – БХВ Санкт-Петербург, 2005. – 640 с. **5.** *Дьяконов В.П.* MATLAB 6: Учебный Курс / *Дьяконов В.П.* – СПб.: Питер, 2001. – 592 с.

Поступила в редколлегию 18.10.2009

УДК 519:539:534

С.В.КРАСНІКОВ, канд.техн.наук, ст.наук.співр., НТУ «ХПІ»;
О.О. ЛАРІН, ас., НТУ «ХПІ»;
О.О.ОГОРОДНІК, студент, НТУ «ХПІ»

МОДЕЛЮВАННЯ ВІБРАЦІЙНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАТО-СТРИЖНЕВОЇ СИСТЕМИ

Розглядаються питання, що пов'язані з відбудуванням від резонансу корпусів роторних машин. Проведені дослідження вібраційного стану на моделі корпусу циліндру низького тиску парової турбіни. Досліджено вплив товщини стінок корпуса на вібраційні характеристики системи.

The questions related to the detuning from the resonance housings rotating machinery. Investigation of vibrational states on the model lower pressure case of the steam turbine are completed. The influence of shell thickness on the vibration characteristics of the system.

Вступ. Серед машинобудівних конструкцій широко поширеними є пластинчато-стрижневі системи. У роторних машинах вони використовуються в якості корпусів для агрегатів та вузлів. При цьому вібраційні характеристики корпусів значно впливають на працездатність всієї конструкції. Особливо це стосується корпусів роторних машин з убудованими опорами. Типовим прикладом таких систем є корпус циліндра низького тиску вітчизняної парової турбіни. Для подібних роторних машин однією з ключових проблем є створення вібраційного стану, щодо забезпечення максимального діапазону поблизу робочої частоти без наявності власних частот конструкції. Це завдання щодо неприпустимості резонансу є важливим й актуальним при проектуванні нових конструкцій роторних машин та при їх модернізації.

Мета роботи. Дослідження залежності вібраційного стану корпуса циліндра низького тиску сучасної вітчизняної парової турбіни, як типової пластинчато-стрижневої системи роторної машини, від товщини стінок.

Моделювання конструкції виконувалось в 2 етапи:
– геометричне моделювання;
– побудова скінченно-елементної моделі.

Більшість корпусів турбін мають 2 площини симетрії. Розглянута конструкція не є виключенням, тому моделювалася його 1/4 частина. Створені геометричні моделі показані на рис. 1. Цифрами позначені основні стінки корпуса. З рисунка 1 видно, що конструкція корпуса є пластинчато-стрижневою системою. Оскільки корпус має рознімні верхні та нижні частини, то вони моделювалися окремо. У корпус установлюються ротор і обойма, які мають кілька фіксованих місць обпирання. До низу корпуса приварюється конденсатор. Сам корпус вільно лежить на залізобетонному фундаменті.

Найбільш розвинутим та поширеним методом з дослідження складних просторових конструкцій є метод скінчених елементів. Тому він був обраний для проведення чисельних розрахунків. Створення скінченно-елементної моделі системи проводилося за методикою [1-4], що багаторазово апробовано на корпусах різних турбін. Основні елементи моделювалися пластинчато-оболонковими та стрижневими скінченими елементами. Вплив ротора, обійми та конденсатора враховувалося масовими елементами. Обпирання на фундамент моделювалося за допомогою системи жорсткостей з усередненими значеннями. Урахування симетрії зроблено за допомогою граничних умов. Параметри побудованої моделі 4744 вузлів, 5010 скінченних елементів, 27715 ступенів волі.

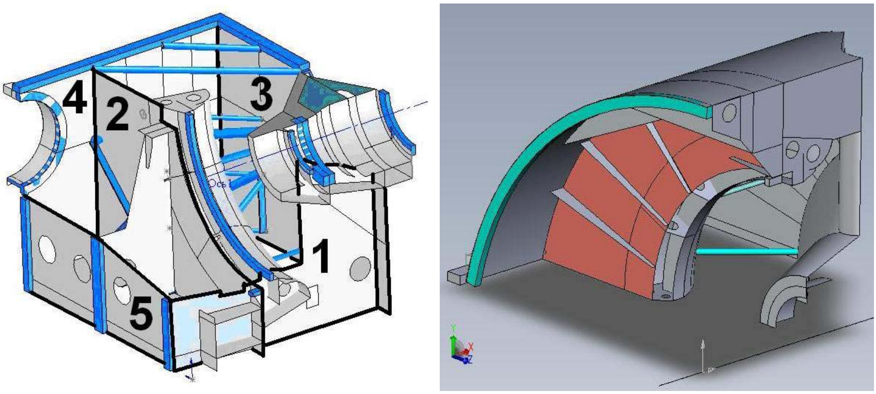


Рисунок 1 – Геометрична модель корпусу турбіни

Аналіз вібраційного стану. За допомогою методу ітерацій у підпросторі проведені розрахунки власних коливань на вихідній і модифікованій моделях. Розрахунок вихідної моделі показав, що в діапазоні 0-55 Гц знаходиться 8 власних частот, з яких найбільш близькими до робочої частоти 50 Гц є 7-а (49,1 Гц) та 8-а (53,7 Гц). У модифікованих моделях варіювалися товщини стінок 1-5 (рис.1).

Варіювання 1-ї стінки конструкції. Стінка є внутрішньої, розташована паралельно осі обертання ротора і є опорою картера, у якому перебуває підшипник ротора. Виходячи з результатів розрахунків (рис.2) видно, що можна одержати розширення безпечного діапазону шляхом зменшення товщини стінки у два рази. При цьому зменшення верхньої частоти не значно, а нижня частота падає майже на 2 Гц і приймає значення 47,6 Гц. Але слід зазначити, що зменшення або збільшення товщини стінок в 2 рази є гранично припустимими значеннями з точки зору жорсткості системи. Тому потребують додаткових досліджень з статичного деформування та вимушених коливань системи.

Варіювання 2-ї стінки конструкції. Ця стінка також є внутрішньої, але розташована перпендикулярно осі обертання ротора. На неї передається маса ротора й обойми. Порівнюючи результати розрахунків з 2-й стінкою (рис.3) з попередніми (рис. 2) видно, що результати варіювання якісно збігаються та кількісно близькі.

Варіювання 3-ї стінки конструкції. Стінка є зовнішньої, розташована перпендикулярно осі обертання ротора. До неї приварено картер з підшипником ротору. З результатів розрахунків (рис. 4) видно, що при варіюванні товщини стінок значення 7 і 8 власних частот максимально змінюються до 4 та 7 Гц відповідно. Однак при зменшенні або збільшенні товщини стінок значення однієї з власних частот наближається до 50Гц, що приводить до зменшення безпечного діапазону поблизу робочої частоти.

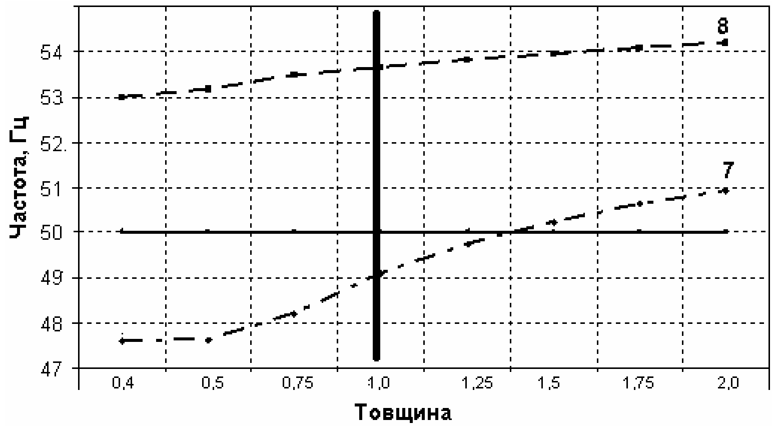


Рисунок 2 – Вібраційний стан при варіюванні 1-ї стінки конструкції

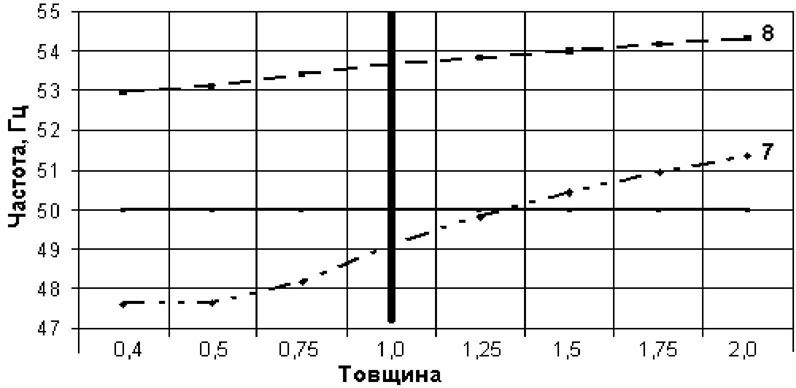


Рисунок 3 – Вібраційний стан при варіюванні 2-ї стінки конструкції

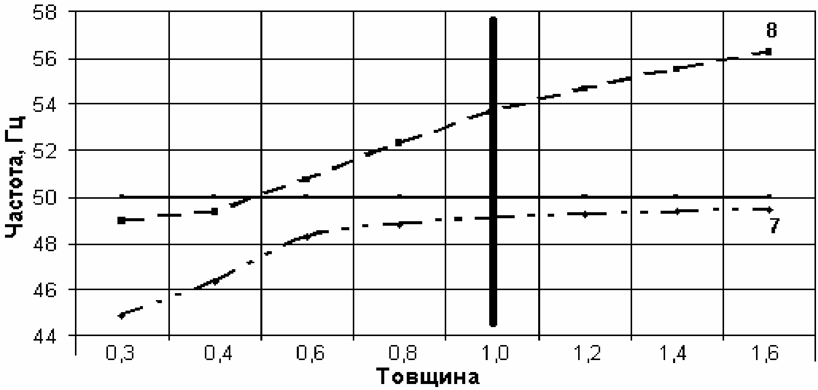


Рисунок 4 – Вібраційний стан при варіюванні 3-ї стінки конструкції

Варіювання 4-ї стінки конструкції. Стінка є зовнішньою й розташована перпендикулярно осі обертання ротора. Результати розрахунків (рис.5) вказують на значний вплив товщини 4-й стінки на власні частоти, але при цьому збільшення безпечного діапазону не відбувається.

Варіювання 5-ї стінки конструкції. Стінка є внутрішньою, розташована перпендикулярно осі обертання ротора. Результати розрахунків (рис. 6) показали, що товщина цієї стінки не робить істотного впливу на власні частоти системи, що розглядається.

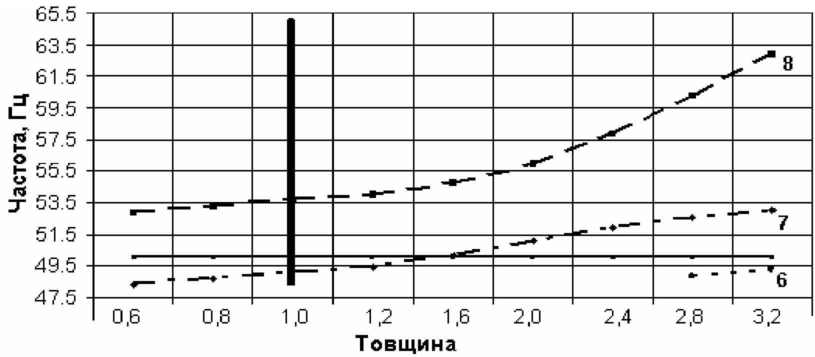


Рисунок 5 – Вібраційний стан при варіюванні 4-ї стінки конструкції

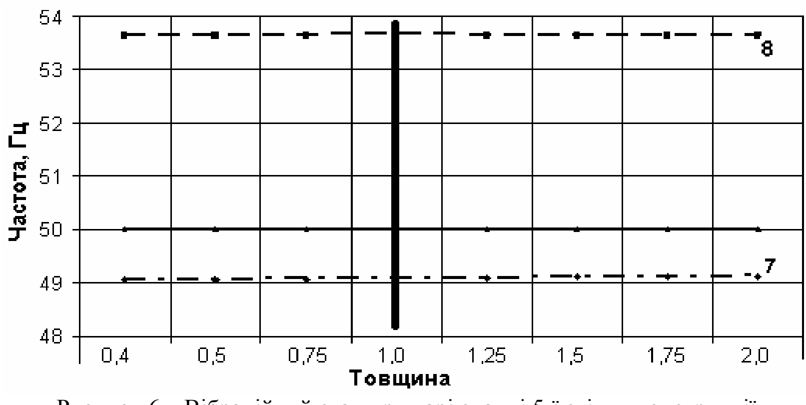


Рисунок 6 – Вібраційний стан при варіюванні 5-ї стінки конструкції

Висновки. Підсумовуючи вищенаведене можна зазначити наступне:

– найбільший вплив на власні частоти роблять зміни товщини 1, 2 та 3-ї стінок;
– збільшення товщини стінок не приводить до збільшення безпечного діапазону біля робочої частоти;
– збільшити безпечний діапазон на 1 Гц можливо при зменшенні товщини 1 і 2 стінок в 2 рази, що автоматично призводить до зменшення жорсткості всієї системи, тому потребує додаткових досліджень.

Список літератури: **1.** *Степченко А.С.* Численные исследования динамических характеристик системы турбоагрегат-фундамент // Дисс. на соиск. ученой степени канд. техн. наук .Харьк. Гос. полит. ун-тет. 1994 г. – 194 с. **2.** *Жовдак В.А., Кабанов А.Ф., Красников С.В., Степченко А.С.* Исследование динамики статорных частей турбин К-300-240 и К-325-23,5 ХТГЗ // Проблемы машиностроения. – Харьков: Контраст. – 2001. – Т. 4, № 3-4. – С. 4-12. **3.** *Красников С.В.* Колебания и надежность системы турбоагрегат-фундамент-основание с учетом случайности параметров // Дисс. на соиск. ученой степени канд. техн. наук . НТУ «ХПИ», 2003 г. – 140 с. **4.** *Жовдак В.А., Красников С.В., Степченко А.С.* Решение задачи статистической динамики машиностроительных конструкций с учетом случайного изменения параметров // Проблемы машиностроения. – Харьков: Контраст. – 2004. – Т. 7, № 3. – С.39-47.

Надійшла до редколегії 10.11.2009

УДК 593.3

И.Г.ЛЬВОВ, магистрант, НТУ «ХПИ»;
О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

АНИЗОТРОПНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОПЕРЕЧНО НАГРУЖЕННЫХ ПЛИТ ИЗ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Запропоновано розрахунковий метод визначення матеріальних характеристик закону повзучості композитних матеріалів на основі усереднювання на представницькому об'ємі гетерогенної середи. Наведені результати розрахунків на повзучість пластин з волокнистих композитів із застосуванням рівнянь стану початково-анізотропній повзучості гомогенних матеріалів. Метод ілюструється на прикладі повзучості плити під поперечним тиском.

The method of calculations of material characteristics in law of creep of composites materials are proposed on the base of averaging representative volume of creeping heterogeneous medium. Results of calculations of creeping plates which are made from fibrous composites are given by use of the equations of condition the creeping initial - anisotropic homogeneous materials. The method is illustrated on an example of bending plates under transverse pressure.

Постановка и актуальность проблемы. Композиционные материалы представляют собой металлические и неметаллические матрицы (основы) с распределенными в них включениями (волокна, дисперсные частицы и др.), что позволяет эффективно использовать индивидуальные свойства составляющих композиции для придания необходимых свойств материалам [1-6]. Сплавы с направленной кристаллизацией эвтектических структур также представляют собой композиционные материалы [6].

Комбинируя объемное содержание компонентов, можно, в зависимости от назначения, получать композиционные материалы с требуемыми свойствами прочности, жаропрочности, жесткости, абразивной стойкости, а также создавать композиционные материалы с необходимыми магнитными, диэлектрическими, радиопоглощающими и другими специальными свойствами.

Области применения композиционных материалов многочисленны, например, авиационно-космическая, ракетная техника, энергетическое турбостроение и двигателестроение, оборудование химической промышленности.

Расчеты на прочность, ползучесть и долговечность элементов конструкций из композиционных материалов актуальны для решения прикладных задач проектирования такой техники. Однако, исследования в этой области ограничены полимерными композитами с вязкоупругими свойствами. Ползучесть металлических композитов мало исследована из-за сложности возникающих при этом проблем.

В данной работе конкретизированы уравнения состояния анизотропной ползучести материалов, для которых методом гомогенизации свойств гетерогенной среды определены коэффициенты матриц материальных постоянных упругости и ползучести волокнистых композитов. Рассмотрены конечно-элементные расчеты в ПК ANSYS анизотропной ползучести плит из композитных материалов. Приведены расчетные данные ползучести поперечно нагруженных плит из однонаправленных волокнистых композитных материалов.

Анализ известных подходов. В немногочисленных публикациях по методам расчетов элементов конструкций из композитных материалов в основном используется подход, основанный на принципе гомогенизации гетерогенных структурно неоднородных материалов, позволяющий учесть неоднородность композитов. Характеристики структурно-неоднородных сред можно изучить на основе подходов механики сплошных сред, в которых малый объем рассматривается как сплошное однородное тело.

Использованный в данной работе принцип гомогенизации композитов был изложен в работах в применении к задачам упругости и пластичности [1-5]. Гомогенный материал эквивалентный волокнистому композиту – ортотропный. Теория ползучести ортотропных материалов рассмотрена в [6,7].

Принцип эффективной гомогенизации. В микро- и мезо - масштабе все материалы гетерогенные, однако многие их свойства можно определить в рамках континуальной модели с привлечением принципа эффективной гомогенизации. Согласно этому принципу для гетерогенной среды предполагается существование представительного объема с характерным размером неоднородности, в пределах которого свойства можно усреднить. Масштаб представительного объема усреднения должен быть значительно больше характерного размера неоднородности и мал по сравнению с характерным размером тела. При этих условиях гетерогенный материал можно идеализировать, рассматривая его как эквивалентный гомогенному материалу с усредненными на представительном объеме свойствами. Задачи деформирования тел из композитного материала решают с использованием усредненных свойств.

Уравнения состояния ползучести гомогенных материалов. Принимая принцип эффективной гомогенизации, определим материальные характеристики свойств ползучести, используя усреднение законов ползучести по представительному объему гетерогенной среды композитных материалов.

Рассмотрим соотношения закона ползучести ортотропных материалов в виде:

$$\underline{\dot{c}} = \frac{\dot{D}}{\sigma_V}\left(\underline{a} + \frac{1}{\sigma_2}\left[B\right]\underline{\sigma}\right), \tag{1}$$

где

$$\underline{\dot{c}} = \left(\dot{c}_{11}, \dot{c}_{22}, \dot{c}_{33}, \dot{c}_{12}, \dot{c}_{23}, \dot{c}_{31}\right)^T, \ \underline{\sigma} = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, 2\sigma_{12}, 2\sigma_{23}, 2\sigma_{31}\right)^T$$

– векторы, составленные по компонентам тензоров напряжений и деформаций ползучести; $\sigma_V = \sigma_1 + \sigma_2$, $\sigma_1 = \underline{\sigma}^T \underline{a}$, $\sigma_2 = \sqrt{\underline{\sigma}^T [B] \underline{\sigma}}$ – эквивалентные напряжения; $\dot{D} = \sigma_{ij}\dot{c}_{ij} = \underline{\sigma}^T \underline{\dot{c}}$ – удельная мощность диссипации вследствие ползучести; $\underline{a} = \left(a_{11}, a_{22}, a_{33}, 0, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}$,

$$[B] = \begin{vmatrix} b_{1111} & b_{1122} & b_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ b_{1122} & b_{2222} & b_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ b_{1133} & b_{2233} & b_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{3131} \end{vmatrix}$$

– вектор и матрица материальных постоянных свойств ползучести, которые введены для учета разносопротивляемости и исходной ортотропии гомогенного материала.

Рассмотрим сечение представительного объема композитного трансверсально-изотропного материала, показанное на рис. 1.

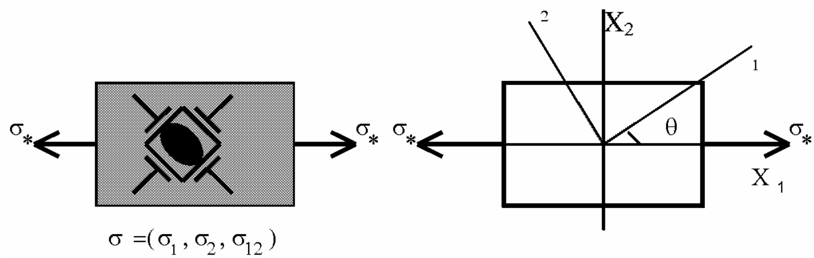


Рисунок 1 – Сечение объема композита и главные оси анизотропии материала

Примем плоскость X_1, X_2 плоскостью с анизотропией свойств материала, а плоскость, ей перпендикулярную - плоскостью изотропии свойств материала.

Преобразуем (1) с учетом условий симметрии трансверсально-изотропного материала. Дополнительно примем условие несжимаемости материала при ползучести, что позволит получить следующие равенства:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, \ b_{1111} + b_{1122} + b_{1133} = 0,$$

$$b_{1122} + b_{2222} + b_{2233} = 0, \ b_{1133} + b_{2233} + b_{3333} = 0.$$

Для трансверсально-изотропного материала с плоскостью изотропии X_2, X_3 получаем: $a_{22} = a_{33}$, $b_{2222} = b_{3333}$, $b_{1122} = b_{1133}$, $b_{1313} = b_{2323}$, что с учетом предыдущих равенств сокращает количество независимых материальных постоянных.

Если $a_{11}, b_{1111}, b_{2222}, b_{2233}, b_{1212}, b_{1313}$ принять независимыми постоянными, тогда легко определить, что $b_{1122} = -0,5b_{1111}$; $b_{1133} = -0,5b_{1111}$; $a_{22} = a_{33} = -0,5a_{11}$.

Далее для определенности будем рассматривать плоское напряженное состояние, когда $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. В этом случае закон ползучести (1) для трансверсально-изотропных материалов преобразуется к виду:

$$\dot{c}_{11} = \frac{\dot{D}}{\bar{\sigma}_V}(\alpha_{11} + \frac{\sigma_{11} + \beta_{12}\sigma_{22}}{\bar{\sigma}_2}),\ \dot{c}_{22} = \frac{\dot{D}}{\bar{\sigma}_V}(\alpha_{22} + \frac{\beta_{12}\sigma_{11} + \beta_{22}\sigma_{22}}{\bar{\sigma}_2}),$$

$$2\dot{c}_{12} = \frac{\dot{D}}{\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_V}4\beta\sigma_{12}, \qquad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha_{11} = \frac{a_{11}}{\sqrt{b_{1111}}},\ \alpha_{22} = \frac{a_{22}}{\sqrt{b_{1111}}} = -\frac{1}{2}\alpha_{11},$$

$$\beta_{12} = \frac{b_{1122}}{b_{1111}} = -\frac{1}{2},\ \beta_{22} = \frac{b_{2222}}{b_{1111}},\ \beta = \frac{b_{1212}}{b_{1111}},$$

$$\bar{\sigma}_1 = \alpha_{11}\left(\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{22}\right), \quad \bar{\sigma}_2^2 = \sigma_{11}^2 + 2\beta_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + \beta_{22}\sigma_{22}^2 + 4\beta\sigma_{12}^2.$$

В матрично-векторной форме уравнения закона ползучести для трансверсально-изотропного материала при плоском напряженном состоянии теперь можно записать так:

$$\underline{\dot{c}} = \frac{\dot{D}}{\bar{\sigma}_V}\left(\underline{\alpha} + \frac{1}{\bar{\sigma}_2}[B]\underline{\sigma}\right), \qquad (3)$$

где

$$\underline{\dot{c}} = \left(\dot{c}_{11}, \dot{c}_{22}, 2\dot{c}_{12}\right)^T,\ \underline{\sigma} = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\right)^T,\ \underline{\alpha} = \left(\alpha_{11}, \alpha_{22}, 0\right)^T,$$

$$[B] = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 4\beta \end{pmatrix},$$

$$\bar{\sigma}_V = \bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}^T\bar{\alpha}, \quad \bar{\sigma}_2 = \sqrt{\bar{\sigma}^T[B]\bar{\sigma}}.$$

Если асимметрия свойств не наблюдается: $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0,\ \bar{\sigma}_1 = 0,\ \bar{\sigma}_V = \bar{\sigma}_2$, то уравнения состояния для ползучести преобразуется к виду

$$\underline{\dot{c}} = \frac{\dot{D}}{\bar{\sigma}_2^2}[B]\underline{\sigma}. \qquad (4)$$

Для установившейся ползучести в уравнениях состояния (3-4) можно принять

$$\dot{D} = \sigma_2^{N+1} = b_{1111}^{(N+1)/2}\bar{\sigma}_2^{N+1},$$

где N – показатель степени в законе ползучести.

Уравнения состояния (4) для средних напряжений и деформаций принимают следующий вид:

$$\langle \underline{\dot{c}} \rangle = b_{1111}^{\frac{N+1}{2}} \langle \bar{\sigma} \rangle_2^{N-1} [B] \langle \underline{\sigma} \rangle,\ \langle \underline{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma} dv,\ \langle \underline{c} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{c} dv\ . \tag{5}$$

При растяжении выбранного объема композита в направлении оси X_1 заданным напряжением $\langle \underline{\sigma} \rangle$, в сечении с нормалью, которая образует с осью X_1 угол θ, напряжения будут равны ($m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$):

$$\sigma_{11} = \langle \underline{\sigma} \rangle \cos^2\theta = \langle \underline{\sigma} \rangle m^2,$$

$$\sigma_{22} = \langle \underline{\sigma} \rangle \sin^2\theta = \langle \underline{\sigma} \rangle n^2,\ \sigma_{12} = \langle \underline{\sigma} \rangle \cos\theta \sin\theta = \langle \underline{\sigma} \rangle mn\ .$$

Скорость деформации образца в направлении θ будет равна:

$$\dot{c} = \dot{c}_{11} \cos^2\theta + 2\dot{c}_{12} \sin\theta \cos\theta + \dot{c}_{22} \sin^2\theta.$$

В этом случае с использованием уравнений (5) будем иметь:

$$\dot{c} = b_{1111}^{\frac{n+1}{2}} F(\theta)^{\frac{n+1}{2}} \langle \underline{\sigma} \rangle^n, \tag{6}$$

$$F(\theta) = m^4 + 2\beta_{12} m^2 n^2 + \beta_{22} n^4 + 4\beta m^2 n^2,\ \bar{\sigma}_2 = \sqrt{F(\theta)} \langle \underline{\sigma} \rangle .$$

Ориентируя малые представительные объемы гетерогенного материала под разными углами (рис. 2), численно, используя МКЭ, найдем усредненные кривые установившейся ползучести при заданном одноосном растяжении, которые, опишем зависимостями:

$$\dot{c}_i = A_i \sigma^{n_i},\ i = 1, 2, 3\ , \tag{7}$$

где нижним индексом обозначены направления деформации: $i = 1$ ($\theta = 0°$), $i = 2$ ($\theta = 90°$), $i = 3$ ($\theta = 45°$).

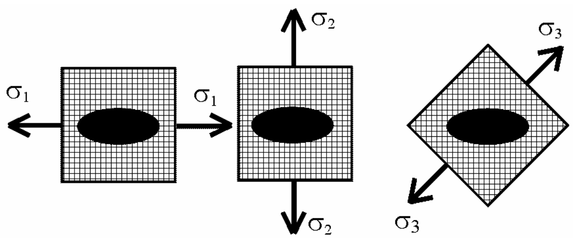


Рисунок 2 – Ориентация гетерогенных областей

Сопоставив зависимости (7) с теми, что следуют из (6) для каждого значения угла θ (принимаем, что $n_1 = n_2 = n_3 = N$), получаем следующие равенства:

$$b_{1111} = A_1^{2/N+1},\ \beta_{22} = (A_2 / A_1)^{\frac{2}{N+1}},$$

$$\beta = \frac{1}{4}[(A_3 / A_1)^{\frac{2}{N+1}} / \cos^4(\pi/4) - (A_2 / A_1)^{\frac{2}{N+1}}].$$

Эти равенства позволяют окончательно установить значения постоянных, входящих в уравнения состояния (5) по данным (7):

$$b_{1111} = A_1^{\frac{2}{N+1}},\ b_{1122} = -\frac{1}{2} A_1^{\frac{2}{N+1}},\ b_{2222} = A_2^{\frac{2}{N+1}},$$

$$b_{1212}=\frac{1}{4}[A_3^{\frac{2}{N+1}}/\cos^4\left(\pi/4\right)-(A_2/A_1)^{\frac{2}{N+1}}]. \qquad (8)$$

Для ползучести металлического композитного эвтектического сплава с направленной кристаллизацией Co-Cr-C при Т = 825 °С [1]:

$$\dot{c}=aF^{\frac{N+1}{2}}\left(\theta\right)\sigma^N,\ F\left(\theta\right)=\lambda m^4+\left(\nu-\lambda\right)m^2n^2+\mu n^4.$$

Эти зависимости точно совпадают с (6) при

$$b_{1111}=\lambda a^{\frac{2}{N+1}},\quad \beta_{12}=-\frac{1}{2},\quad \beta_{22}=\frac{\mu}{\lambda},\quad 4\beta=\frac{\nu}{\lambda}. \qquad (9)$$

По полученным расчетным данным: $N = 5{,}5$; $\lambda = 0{,}556$; $\mu = 5{,}85$; $\nu = 11{,}2$; $a = 3{,}16\cdot 10^{-17}$, МПа$^{-N}$/ч, можно определить материальные постоянные, входящие в (5). Отметим, что при сопоставлении экспериментальных [1] и расчетных кривых ползучести образцов, вырезанных из композитной заготовки под различными углами ($\theta = 0\ldots90°$) к главному направлению с минимальной скоростью ползучести, установлено весьма удовлетворительное их соответствие.

Метод определения характеристик ползучести волокнистых композитов. Предположим, что материалы матрицы и волокон деформируются совместно, их свойства однородны и изотропны, а характеристики упругости и ползучести известны.

Выберем в композите представительный объем $\boldsymbol{V}$ (прямоугольник со сторонами $a\times b\times c$), в матрице которого в определенных направлениях уложены волокна.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние при ползучести выбранного объема композита при растяжении нормальными напряжениями, приложенными на граничных поверхностях с нормалями направленными по осям X_i, $i = 1,2,3$.

Результаты расчетов усредняются согласно (5), и для установившихся значений напряжений $\left\langle\sigma_{ii}\right\rangle$, $i = 1,2,3$ находятся скорости установившейся ползучести $\left\langle\dot{c}_{ii}\right\rangle$, что с использованием (5) позволит записать:

$$\left\langle\dot{c}_{11}\right\rangle=b_{1111}^{\frac{n+1}{2}}\left\langle\sigma_{11}^n\right\rangle,\ \left\langle\dot{c}_{22}\right\rangle=b_{2222}^{\frac{n+1}{2}}\left\langle\sigma_{22}^n\right\rangle,\ \left\langle\dot{c}_{33}\right\rangle=b_{3333}^{\frac{n+1}{2}}\left\langle\sigma_{33}^n\right\rangle, \qquad (10)$$

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние при ползучести выбранного объема композита при сдвиге касательными напряжениями, приложенными на граничных координатных плоскостях $X_i X_j$, $ij = 12, 23, 31$.

Как и в предыдущем случае, результаты расчетов после усреднения с использованием (5), позволят записать:

$$\left\langle\dot{c}_{12}\right\rangle=b_{1212}^{\frac{n+1}{2}}\left\langle\sigma_{12}^n\right\rangle,\ \left\langle\dot{c}_{23}\right\rangle=b_{2323}^{\frac{n+1}{2}}\left\langle\sigma_{23}^n\right\rangle,\ \left\langle\dot{c}_{31}\right\rangle=b_{3131}^{\frac{n+1}{2}}\left\langle\sigma_{31}^n\right\rangle, \qquad (11)$$

Последовательно, рассматривая ползучесть представительного объема структурно-неоднородного композита под приложенными на его противоположных сторонах осевыми напряжениями, расчетами определяем распределения полей напряженно-деформированного состояния, и после их усреднения устанавливаем законы изменения во времени средних значений деформаций ползучести и напряжений в осевых направлениях.

Аналогично, проводим расчеты сдвиговой ползучести принятого представительного объема КМ, и устанавливаем законы изменения во времени средних значений сдвиговых деформаций ползучести и касательных напряжений в координатных плоскостях.

Отметим, что зависимости (10), (11) отвечают усредненным кривым установившейся ползучести КМ при растяжении в координатных направлениях X_i, $i = 1,2,3$, и сдвиге в координатных плоскостях $X_i\, X_j$, $ij = 12,23,31$.

Далее, после обработки участков установившейся ползучести усредненных расчетных кривых для двух уровней приложенных к сторонам объема осевых и сдвиговых напряжений, можно определить:

$$n = \frac{\lg\left\langle \dot{c}_{ii}^{I} \right\rangle - \lg\left\langle \dot{c}_{ii}^{II} \right\rangle}{\lg\left\langle \sigma_{ii}^{I} \right\rangle - \lg\left\langle \sigma_{ii}^{II} \right\rangle},\ ii = 11, 22, 33\,,$$

$$b_{1111} = \left(\frac{\left\langle \dot{c}_{11} \right\rangle}{\left\langle \sigma_{11}^{n} \right\rangle} \right)^{\frac{2}{n+1}},\ b_{2222} = \left(\frac{\left\langle \dot{c}_{22} \right\rangle}{\left\langle \sigma_{22}^{n} \right\rangle} \right)^{\frac{2}{n+1}},\ b_{3333} = \left(\frac{\left\langle \dot{c}_{33} \right\rangle}{\left\langle \sigma_{33}^{n} \right\rangle} \right)^{\frac{2}{n+1}}, \qquad (12)$$

$$b_{1212} = \left(\frac{\left\langle \dot{\gamma}_{12} \right\rangle}{\left\langle \sigma_{12}^{n} \right\rangle} \right)^{\frac{2}{n+1}},\ b_{2323} = \left(\frac{\left\langle \dot{\gamma}_{23} \right\rangle}{\left\langle \sigma_{23}^{n} \right\rangle} \right)^{\frac{2}{n+1}},\ b_{3131} = \left(\frac{\left\langle \dot{\gamma}_{31} \right\rangle}{\left\langle \sigma_{31}^{n} \right\rangle} \right)^{\frac{2}{n+1}}. \qquad (13)$$

Расчет характеристик ползучести однонаправленного композита. Рассмотрим периодически однонаправленный волокнистый композит (ВК), для которого известны характеристики упругости и закон ползучести материала волокна и матрицы:

$$E_v = 2\cdot 10^5,\ \text{МПа}\ ;\ \nu_v = 0{,}3\ ;\ \dot{c}_v = 2\cdot 10^{-11}\sigma^3,\ c^{-1}\ ;$$

$$E_м = 2\cdot 10^4,\ \text{МПа}\ ;\ \nu_м = 0{,}17\ ;\ \dot{c}_м = 1\cdot 10^{-11}\sigma^2, c^{-1}\ .$$

Приведем ВК к гомогенному трансверсально-изотропному материалу с плоскостью симметрии свойств – 12, нормальной к оси волокна – 3.

Решением задач об упругом деформировании представительного объема ВК при растяжении в осевых направлениях – 1, 2, 3 и сдвиге в координатных плоскостях – 12, 23, 31, найдены средние значения характеристик упругости:

$$E_1 = E_2 = 1{,}013\cdot 10^5,\ МПа\ ;\ E_3 = 1{,}608\cdot 10^5,\ МПа\ ;\ G_{12} = 3{,}88\cdot 10^4,\ МПа\ ;$$

$$G_{23} = G_{31} = 4{,}514\cdot 10^4,\ МПа\ ;\ \nu_{12} = 0{,}15\ ;\ \nu_{23} = \nu_{31} = 0{,}18\ .$$

Решением задач деформирования при ползучести представительного объема ВК при растяжении в осевых направлениях – 1, 2, 3 и сдвиге в координатных плоскостях – 12, 23, 31, найдены средние значения характеристик закона ползучести ВК:

$$n = 3;$$

$$b_{1111} = b_{2222} = 3\cdot 10^{-9},\ b_{3333} = 1{,}8\cdot 10^{-9},\ \text{Па}^{-\frac{2n}{n+1}}\text{с}^{-\frac{2}{n+1}}\ ;$$

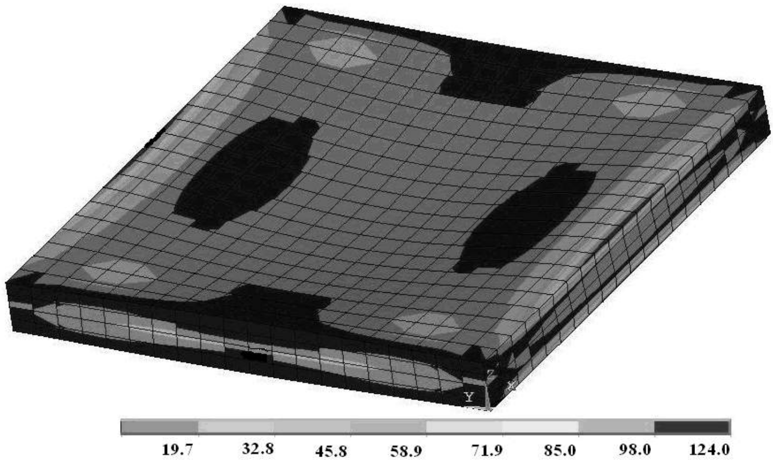
$$b_{1212} = 7,7 \cdot 10^{-8},\ b_{2323} = b_{3131} = 6,68 \cdot 10^{-8},\text{Па}^{-\frac{2n}{n+1}}\text{с}^{-\frac{2}{n+1}};$$

$$b_{1122} = -6,3 \cdot 10^{-8},\ b_{1133} = b_{2233} = -5,2 \cdot 10^{-8},\ \text{Па}^{-\frac{2n}{n+1}}\text{с}^{-\frac{2}{n+1}}.$$

Ползучесть пластин из однонаправленных волокнистых композитных материалов при поперечном изгибе. В качестве примера рассмотрим ползучесть квадратной плиты $a \times b \times h = 1 \times 1 \times 0{,}1$, м^3, изготовленной из рассмотренного выше ВКМ, при поперечном изгибе под действием равномерного поперечного давления – 2 МПа.

Используя ПК ANSYS и два типа конечных элементов: SOLID 186 (1600 КЭ) и SHELL 181 (400 КЭ), расчеты анизотропной ползучести выполнены для плиты, два противоположных края которой закреплены шарнирно, а два других – жестко.

На рис. 3 представлено распределение интенсивности напряжений в плите через час ползучести.



σ_v, МПа

Рисунок 3 – Поле интенсивности напряжений в плите через час ползучести

Выводы. В работе предложен подход к расчетам на ползучесть тел из композитных материалов, основанный на принципе гомогенизации структурно-неоднородных материалов. Конкретизированы уравнения состояния анизотропной ползучести композитных материалов, приведенных к гомогенным ортотропным материалам.

Материальные постоянные в уравнениях состояния получены усреднением кривых ползучести композита на представительном объеме с характерным размером структурной неоднородности.

Расчетами определены материальные характеристики свойств упругости и ползучести однонаправленных волокнистых композитов. Рассмотрены конечно-элементные расчеты в ПК ANSYS анизотропной ползучести плит из композитных материалов. Приведены расчетные данные ползучести при поперечном изгибе пластин из однонаправленных волокнистых композитных материалов.

В дальнейшем, в рамках предложенного подхода, следует учесть повреждаемость вследствие ползучести композитных материалов и получить оценки долговечности разных элементов конструкций из композитных материалов, эксплуатирующихся в условиях ползучести.

Список литературы: **1.** *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наукова думка, 1985. – 304 с. **2.** *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с. **3.** *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 336 с. **4.** *Макарова И.С., Сараев Л.А.* Теория упругопластического деформирования произвольно армированных композитов // Прикладная механика и техническая физика. – 5. – 1991 – 120 с. **5.** *Аношкин А.Н.* Неупругое деформирование однонаправленных композитов при продольном сдвиге // Математическое моделирование систем и процессов. – № 3. – 1995. – С. 4-10. **6.** *Johnson A.F.* Creep characterization of eutectic composites // Comportement mecanique des solides anisotropes / Colloques interreetionaux du CNRS. – 295. – 1982. – P. 775-788. **7.** *Морачковский О.К., Львов И.Г.* Метод определения гомогенных свойств анизотропной ползучести композитных материалов / Труды 14-й Международной научно-технической конференции «Физические и компьютерные технологии». – Харьков: ХНПК "ФЕД". – 2008. – С. 112-116. **8**. *Морачковский О.К., Пасынок М.А.* Исследование влияния на ползучесть материалов приобретенной анизотропии вследствие предварительной ползучести // Вестник ХГПУ. – Харьков: ХГПУ. – Вып. 27. – 1998. – С. 197-203.

Поступила в редколлегию 30.11.2009

УДК 539.3

А.А. ЛАРИН, асс., НТУ «ХПИ»;
В.А. ЖОВДАК, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНЫХ АППАРАТОВ СО СЛУЧАЙНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ РАССТРОЙКОЙ ПО МОДЕЛИ ОДНОГО СЕКТОРА

Розроблено метод для аналізу рівня вимушених коливань випадково розлагоджених облопачених дисків. Метод базується на підході конденсації стохастичного базису та надає можливість проводити аналіз на основі моделі одного сектору. Метод придатний для випадків локально розташованого технологічного розладу. На основі методу отримані та представлені числові дослідження з усталених вимушених коливань лопаткового апарату 3-го ступеня циліндру низького тику (ЦНТ) парової турбіни з випадковим технологічним розладом.

A method has been developed for analysis of forced response levels for randomly mistuned bladed discs. The method is based on stochastic reduced basis approach and gives an essential possibility to make an analysis using 1 sector model. The method applicable to cases of locally distributed technological mistuning and allows for this case to use of industrial-size sector models of bladings for analysis of forced vibrations of randomly mistuned system. The numerical researches of steady forced vibrations of technologically mistuned bladed disk of a 3-rd stage low pressure cylinder (LPC) of a steam turbine have been done.

Введение. Вибрационная прочность современных турбомашин во многом определяется напряженно деформированным состоянием рабочих колес, которые, несмотря на свое многообразие, обладают общим свойством циклической симметрии. Ее наличие определяет технологичность производства и монтажа лопаточного аппарата, а также формирует особенности динамических характеристик. Известно, что в спектре собственных колебаний таких конструкции присутствуют кратные частоты, а также формируются группы взаимосвязанных частот собственные формы, которых обладают фиксированным числом волн деформаций. Кроме отмеченных особенностей наличие симметрии дает существенные преимущества с расчетной точки зрения и позволяет свести задачу к анализу по модели одного сектора с наложенными условиями цикличности.

Вместе с тем следует отметить, что реальные условия производства, технологии монтажа, а также эксплуатация вызывают отклонения от строгой симметрии и приводят к расстройке. Причем необходимо отметить, что даже в малом она может привести к целому ряду явлений, многие из которых способны отразиться негативным образом на динамической прочности и надежности конструкции.

Современная инженерная практика основывается на использования подробных конечно-элементных моделей, которые учитывают все ее конструктивные особенности. Это приводит к необходимости учитывать расстройку не интегрально, а проводить ее предварительное моделирование.

Вместе с тем следует отметить, что на этапе проектирования для инженера-исследователя или конструктора расстройка не является количественно и априорно известной. Как правило, существует лишь некоторая статистика возможных разбросов технологических или производственных отклонений. Таким образом, важным вопросом является оценка возможных разбросов реализаций АЧХ для подобных систем. Это приводит к необходимости считать параметры рассройки случайными величинами и проводить анализ в вероятностном смысле.

Кроме того наличие расстройки разрушает первоначальную симметрию конструкции и требует выполнять анализ для всего рабочего колеса, что существенно увеличивает вычислительную дороговизну, а для подробных КЭ моделей может вообще привести к не преодолимым вычислительным трудностям.

Естественным путем решения этой проблемы является использование методов прямого статистической симуляции типа Монте-Карло. Применимость, которого определяется скоростью расчета соответствующей детерминированной задачи для реализации расстройки. Несмотря на существующие достаточно эффективные способы конденсации детерминированных задач (разложение в ряд по собственным формам симметричной системы [1,2], метод синтеза форм колебаний [3,4] и использование формулы Шермона-Моррисона-Вудбари [6]), для систем с большим числом секторов (например, лопаточные аппараты рабочих колес паровых и газовых турбин) вычислительная дороговизна прямых статистических подходов является решающим фактором и не позволяет применять.

Это обстоятельство определило развитие большого числа работ в которых получили развитие приближенные методы определения вероятностных показателей отклика системы. Это подходы, основанные на анализе чувствительности исследуемых параметров объекта от расстройки [7,8], разложение отклика системы в полиномиальный хаос [9], а также работы [10] посвященные непараметрическому вероятностному анализу с конденсацией размерности задачи по методике синтеза форм колебаний.

В данной работе был построен метод, который базируется на подходе конденсации стохастического базиса описанного в работах [11,12]. Согласно, которому решение отыскивается в виде разложения по базисным векторам пространства Крылова. При этом базисные векторы представляют собой компоненты ряда Тейлора по степеням параметра расстройки, а неопределенные коэффициенты в разложении определяются по схеме Галеркина в среднем, т.е. равенства нулю математического ожидания от скалярного произведения базисных векторов с вектором невязки.

Уравнения движения. В общем виде система уравнений движения для амплитуд перемещений при гармонических вынужденных колебаниях дискретной модели конструкции с расстройкой представляются в виде:

$$\left([K(\alpha)]-\omega^2\cdot[M(\alpha)]+i\cdot[D(\alpha,\mu)]\right)\cdot q=[Z(\omega,\alpha)]q=f\ , \tag{1}$$

где $[K]$, $[M]$ и $[D]$ – матрицы жесткости, масс и демпфирования соответственно; $[Z(\omega)]$ – матрица динамической жесткости; ω – частота возмущения; μ – коэффициент демпфирования, q – амплитуды перемещений; f – вектор амплитуд вынужденной силы, а $\alpha=[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]^{\mathrm{T}}$ – вектор параметров технологических отклонений.

В уравнении (1) целесообразно выделить отдельно компоненты системы со строгой симметрией и те которые зависят от случайных параметров технологических отклорнений:

$$\left([Z_0(\omega)]+[\Delta Z(\alpha,\omega)]\right)\cdot q=f\ , \tag{2}$$

где $[\Delta Z(\alpha,\omega)]$ – матрица расстройки, которая определяет случайное отклонение системы от циклической симметрии, и обращается в ноль вместе с параметрами расстройки.

Построение приближенного решения. Для решение матричного уравнения (2) построим апроксимирующую стохастическую поверхность отклика, согласно методу конденсации стохастического базиса (КСБ).

В рамках КСБ поверхность отклика представляется стохастическими базисными векторами с весовыми коэффициентами. В качестве базисных векторов выступают компоненты ряда Тейлора по степеням параметра расстройки, а производные от вектора амплитуд колебаний рассчитаны в значениях математических ожиданий случайных параметров.

Таким образом, решение системы представляется в виде:

$$q=[\Psi(\alpha)]\xi=\sum_{k=0}^{K}\psi_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)\xi_k\ , \tag{3}$$

$$\psi_k(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)=\sum_{i=1}^{N}\ldots\sum_{j=1}^{N}\left.\frac{\partial^k q}{\partial\alpha_i\ldots\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=M[\alpha]}(\alpha_i-M[\alpha_i])\cdot\ldots\cdot(\alpha_j-M[\alpha_j]), \tag{4}$$

где $M[\ldots]$ – оператор взятия математического ожидания, N – количество случайных параметров.

Не теряя общности рассуждений будем считать, что математические ожидания параметров расстройки являются нулевыми

$$M[a_i]=0, \forall i=\overline{1,N}\,. \tag{5}$$

В этом случае, ограничиваясь тремя базисными векторами разложения, получим:

$$\psi_0=[Z(\alpha=0)]^{-1}f=[A_0]f=q_0\,; \tag{6}$$

$$\psi_1=\sum_{i=1}^{N}\left.\frac{\partial q}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}\alpha_i\,,\qquad \psi_2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left.\frac{\partial^2 q}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\right|_{\alpha=0}\alpha_i\alpha_j\,, \tag{7}$$

где $[A_0]$ – матрица динамической податливости, а q_0 – вектор амплитуд колебаний циклически симметричной системы.

Для получения производных запишем непосредственное решение выражения (2)

$$q=([Z_0(\omega)]+[\Delta Z(\omega,\alpha)])^{-1}\cdot f\,. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) вокруг математических ожиданий параметров расстройки и с учетом (6) получим:

$$\frac{\partial q}{\partial\alpha_i}=-[A_0]\frac{\partial[\Delta Z]}{\partial\alpha_i}q_0\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}=[A_0]\cdot\left(-\frac{\partial[\Delta Z]}{\partial\alpha_i}\frac{\partial q}{\partial\alpha_j}+\frac{\partial^2[\Delta Z]}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\cdot q_0-\frac{\partial[\Delta Z]}{\partial\alpha_j}\frac{\partial q}{\partial\alpha_i}\right). \tag{10}$$

Таким образом, аппроксимирующая поверхность (3) определяется матрицей динамической податливости циклически симметричной системы и производными от матрицы расстройки по случайным параметрам рассчитанные вокруг их нулевых значений (математических ожиданий). Компоненты матрицы динамической податливости эффективно могут быть определены виде разложений по собственным формам колебаний циклически симметричной системы, которая представлена моделью сектора с наложенными условиями циклической симметрии [6]:

$$[A_0]=\begin{bmatrix}[A]_{11} & \cdots & [A]_{1N_s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ [A]_{N_s1} & \cdots & [A]_{N_sN_s}\end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$[A(\omega)]_{jl}=\sum_{k=-N_s/2}^{N_s/2}\sum_{r=1}^{m}u_r^k\cdot\left(\overline{u}_r^k\right)^T\cdot H(i\omega,\mu)_r^{(k)}e^{-i\cdot\beta\cdot k\cdot(j-l)}\,,\qquad \beta=2\pi/N_s, \tag{12}$$

где u_r^k -r-ая собственная форма колебаний с индексом цикличности k (количество волн деформаций), $H(i\omega,\mu)$ – передаточная функция, которая определяется моделью демпфирования, β – угол сектора, N_s – количество секторов в системе, чертой сверху обозначено комплексное сопряжение.

Для задач с расстройкой, которая обусловлена отклонениями при технологических операциях сборки лопаточного аппарата, можно считать, что матрица расстройки осуществляется по жесткости и приложена в каждом секторе (лопатке) локально, то есть в местах, где имели место технологические операции (как правило, это межлопаточные соединения). Это обстоятельство позволяет моделировать расстройку для каждого сектора отдельно и ввести гипотезу [13], о том, что ее матрица может быт представлена, как линейная комбинация матриц определенных по отдельным секторам. Кроме того в силу малости реальной расстройки ограничимся в рассмотрении только линейной составляющей зависимости матрицы расстройки от параметров технологических отклонений:

$$[\Delta Z(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)] = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j [\Delta Z_j], \tag{13}$$

$$[\Delta Z_j] = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & [\widetilde{Z}_j] & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Тогда производные от матрицы расстройки вследствие введенной гипотезы, имеют вид:

$$\frac{\partial [\Delta Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)]}{\partial \alpha_i} = [\widetilde{Z}_j], \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 [\Delta Z(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)]}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0\,. \tag{16}$$

Последние выражения, будут точными в случае моделирования расстройки путем введения сосредоточенных элементов массы или жесткости.

Для определения неизвестных весовых коэффициентов в аппроксимации (3) выполнить процедуру Галеркина в среднем, то есть из требования ортогональности стохастического базиса и невязки приближенного решения

$$M\Big[[\Psi(\alpha)]^* \cdot R(\alpha)\Big] = 0\,, \tag{17}$$

где

$$R(\alpha) = [Z(\alpha)]q(\alpha) - f = [Z(\alpha)][\Psi(\alpha)]\xi - f\,. \tag{18}$$

Отсюда определяется система линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных компонент:

$$M\Big[[\Psi(\alpha)]^* \cdot [Z(\alpha)] \cdot [\Psi(\alpha)]\Big]\xi = M\Big[[\Psi(\alpha)]^* f\Big]. \tag{19}$$

В выражении (22) присутствует матрица жесткости всей расстроенной системы, ее получение и использование сопряжено с серьезными вычислительными трудностями (для моделей с подробными КЭ сетками секторов), т.к. требует построение полной модели. В этой связи целесообразно преобразовать это уравнение выделив отдельно из базисных векторов матрицу динамической податливости циклически симметричной системы.

$$[\Psi(\alpha)] = [A_0]\left[\widetilde{\Psi}(\alpha)\right], \tag{20}$$

где

$$\widetilde{\psi}_0 = f\ , \quad \widetilde{\psi}_1 = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial[\Delta Z_i]}{\partial \alpha_i} q_0 \cdot \alpha_i\ , \tag{21}$$

$$\widetilde{\psi}_2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2[\Delta Z_i]}{\partial \alpha_i^2}\delta_{ij}\cdot q_0 - \frac{\partial[\Delta Z_i]}{\partial \alpha_i}\frac{\partial q}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial[\Delta Z_j]}{\partial \alpha_j}\frac{\partial q}{\partial \alpha_i}\right)\cdot \alpha_i \alpha_j\ , \tag{22}$$

Подставляя (23) в (22) получим систему детерминированных уравнений размерности 3х3 компоненты, которой определяются: вектором амплитуд нагрузки, матрицей динамической податливости и вектором амплитуд колебаний циклически симметричной системы, а также матрицей расстройки и производными от нее

$$M\left[[A_0]^*\left[\widetilde{\Psi}\right]^*\left[\widetilde{\Psi}\right] + [A_0]^*[\Psi]^*[\Delta Z][A_0]\left[\widetilde{\Psi}\right]\right]\xi = M\left[[A_0]^*\left[\widetilde{\Psi}\right]^* f\right]. \tag{23}$$

Таким образом, рассмотренный метод позволяет получить приближенное решение (3) системы со случайной расстройкой, используя модель только одного сектора системы. Это дает существенные преимущества особенно для систем с большим числом секторов (лопаточные аппараты паровых и газовых турбин) и позволяет использовать подробные КЭ модели лопаток с учетом всех их конструктивных элементов.

Используя это решение легко получить вероятностные характеристики отклика системы со случайной расстройкой

$$M[q] = M[[\Psi]\xi] = \xi_0 q_0 + \xi_2 \sigma_\alpha^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha_i^2}\ ; \tag{24}$$

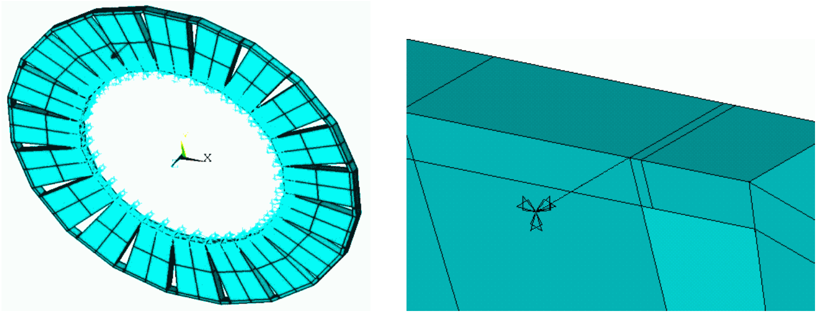
$$\sigma_q^2 = \mathrm{diag}\left(M\left[q\cdot q^*\right]\right) = \mathrm{diag}\left(M\left[[\Psi]\xi[\Psi]^*\xi^*\right]\right). \tag{25}$$

Результаты тестовых расчетов. Этот метод был протестирован на конечно-элементной модели малой расстройки (рис. 1), которая позволяет провести непосредственный анализ методом Монте-Карло.

При этом было рассмотрено несколько вариантов модели расстройки. Вектор случайных параметров расстройки:

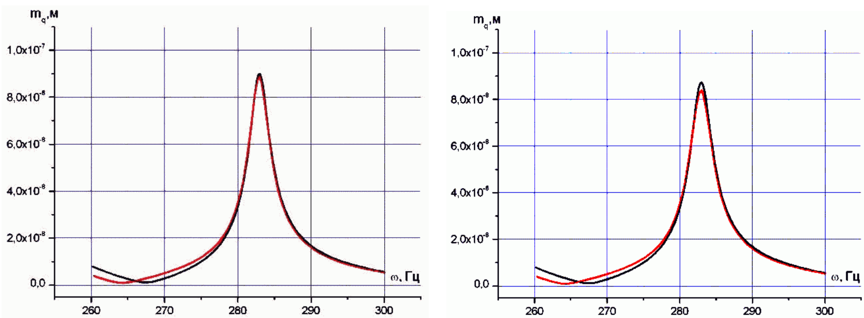
– представляет собой введенный в системы сосредоточенный жесткостной элемент добавленный в 1 сектор системы (рис. 1, б);
– представляет собой введенные в каждый сектор системы сосредоточенные жесткостные элементы.

Расстройка задавалась как центрированная нормальная величина Гаусса с разными значениями СКО. Результаты по вероятностным характеристикам амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для диапазона частот вокруг четвертой собственной частоты (соответствующая форма колебаний имеет 3 узловых диаметра) приведены на рис. 2, 3.



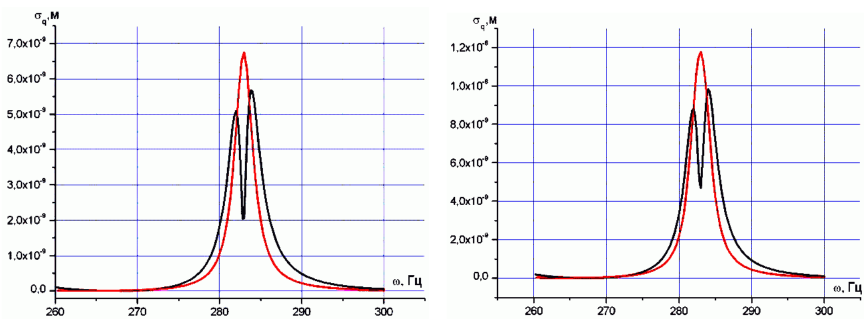
а) б)

Рисунок 1 – КЭ тестовые модели



а) (±7,5 %) б) (±15 %)

Рисунок 2 – Математическое ожидание АЧХ



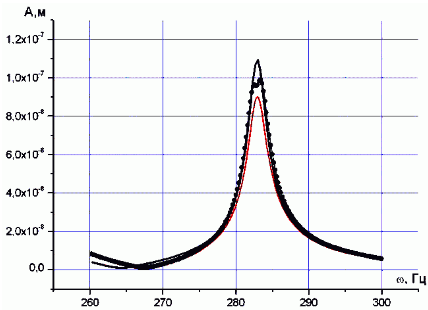
а) (±7,5 %) б) (±15 %)

Рисунок 3 – Среднеквадратичное отклонение АЧХ

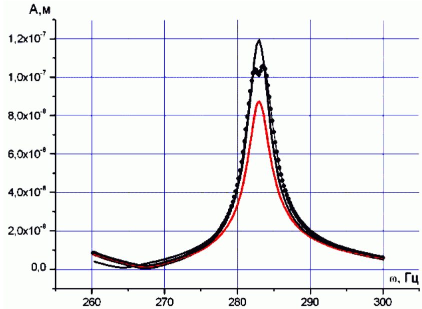
Представленные результаты показывают, что наличие отклонений – при этом наблюдается некоторое занижение математических ожиданий и завышение по среднеквадратическим отклонениям АЧХ. Подобная погрешность есть закономерной вследствие определения весовых коэффициентов из невязки в среднем.

Однако данная погрешность заметно нивелируется при определении огибающей возможных разбросов реализаций АЧХ. На рис. 4 результаты определ определения огибающей по правилу 3 сигм (точками результаты полученные методом Монте-Карло для всей системе).

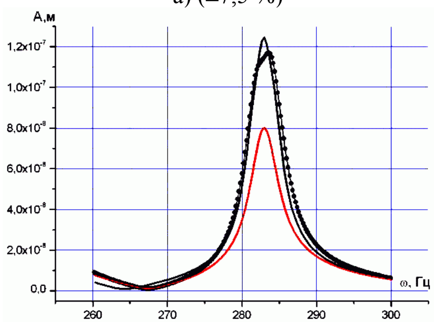
Аналогичное тестирование было проведено и для системы со случайной расстройкой по всем секторам. Результаты представлены на рис. 5.



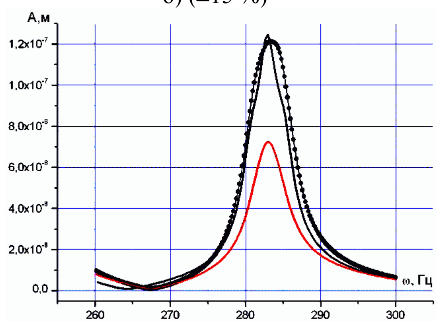
а) (±7,5 %)



б) (±15 %)

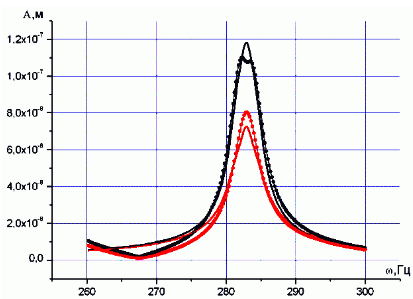


в) (±30 %)

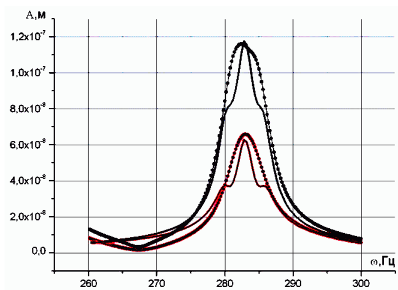


г) (±45 %)

Рисунок 4 – Огибающая возможных реализаций АЧХ



а) (±7,5 %)



б) (±15 %)

Рисунок 5 – Огибающая возможных реализаций АЧХ
и ее математическое ожидание (расстройка задана по всем секторам)

Результаты исследований колебаний лопаточного аппарата паровой турбины со случайной технологической расстройкой. Рассмотренный метод и программное обеспечение было использовано при исследовании формирования АЧХ лопаточного аппарата 3 ступени ЦНД паровой турбины со случайной трассстрокой параметров бандажной связи вызванной технологическими отклонениями при сборке рабочего колеса. На рис. 6 приведена КЭ модель лопатки, а в таблице рядом основные ее характеристики.

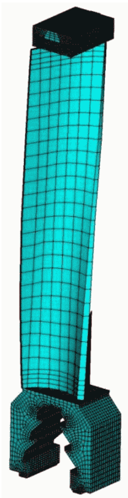


Рисунок 6 – КЭ модель лопатки

Рисунок 7 – Фото бандажной полки 3 ступени ЦНД

Особенностью этой лопатки является наличие разъемных элементов в бандажном соединении: в бандаже присутствует паз, в который согласно технологии сборки помещаются вставка и впоследствии прикатывается (рис. 7). Вообще говоря, жесткость этого соединения априори не известна, так как будет определяться плотностью контакта вставки и бандажной полки в поле центробежных сил [14,15,16].

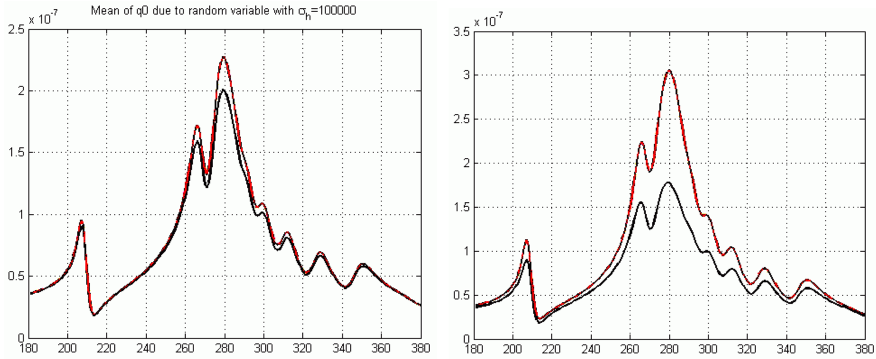
Анализ характера контактного взаимодействия показывает, что в соединении раскрывается щель по дну паза бандажной полки, то есть вставка контактирует с полкой по только своим боковым поверхностям. Вместе с тем контакт является достаточно плотным, что свидетельствует о не возможности его динамического изменения при малых колебаниях лопаточного аппарата. В этой связи целесообразно заменить нелинейные условия контакта на кинематические граничные условия совместности перемещений по узлам, в которых наблюдается плотный статический контакт.

Следует отметить, что производственная практика показывает, что технология сборки имеет ряд вариаций. Во-первых, это наличие зазоров или плотного контакта между торцевыми поверхностями бандажных полок, во-вторых, процедура глубокой закатки, которая может привести к плотному прилеганию вставки с дном паза.

Очевидным является то, что отмеченные ранее технологические отклонения не будут одинаковыми для всех лопаток рабочего колеса, а значит, приведет к его расстройке.

При этом были рассмотрены различные допуски разбросов зазора от 0,5мм и до 2 мм. Результаты приведены на рис. 8.

Огибающая возможных реализаций АЧХ имеет существенные превышения только на 2, 3 и 4 частотах спектра. В этот диапазон попадает только одно резонансное значение, соответствующее 6 гармонике нагружения. При этом в случае больших допусков на зазор на 6 гармонике возможное увеличение амплитуд превышает 40 %.



а) б)

Рисунок 8 – Математическое ожидание и огибающая возможный реализаций АЧХ лопаточного аппрата 3-й ступени ЦНД

Выводы. В работе разработано и обосновано метод решения задачи установившихся вынужденных колебаний систем со случайной расстройкой на основе модели одного сектора системы. Рассмотрены вопросы влияния технологических особенностей и отклонений в бандажном соединении лопаточного аппарата 3 ступени ЦНД паровой турбины. Проведено соответствующее исследование по определению вероятностных характеристик АЧХ этого рабочего колеса на основе разработанной теории и программного обеспечения.

Список литературы: **1.** *Griffin J.H.* A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes / *J.H.Griffin, M.-T.Yang* // Trans. of the ASME. J. of Engin. for Gas Turb. and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 893-900. **2.** *Griffin J.H.* A fundamental model of mistuning for a single family of modes / *J.H.Griffin, D.M.Feiner* // Trans. of the ASME. J. of Turbomach. – 2002. – Vol. 124. – P. 597-605 **3.** *Pierre C.* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – part I: theoretical models / *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* // Trans. of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 89-99. **4.** *Pierre C.* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – part II: application / *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* // Trans. of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 100-108. **5.** *Pierre C.* A compact, generalized component mode mistuning representation for modelling bladed disk vibration / *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier, S-H.Lim* // Proc. of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Norfolk, Virginia. – 2003. – P. 1-22. **6.** *Ewins D.J.* A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems / *E.P.Petrov, D.J.Ewins, K.Y.Sanliturk* // Trans. of the ASME. J. of Engin. for Gas Turb. and Power. – 2002. – Vol. 124. – P. 586-597. **7.** *Griffin J.H.* Forced response of turbine engine bladed disks and sensitivity to harmonic mistuning / *J.H.Griffin, J.A.Kenyon* // Trans. of the ASME. J. of Turbomach. – 2003. – Vol. 125. – P. 113-120. **8.** *Petrov E.P.* A sensitivity-based method for direct stochastic analysis of nonlinear forced response for bladed disks with friction interfaces / *E.P.Petrov* // Proc. of GT2007 ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air, Montreal, Canada. – 2007. – P. 24-35. **9.** *Sinha A.* Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos / *A.Sinha* // Trans. of the ASME. J. of Vibration and Acoustics. – 2006. – Vol. 128. – P. 449-457. **10.** *Soize C.* Nonparametric modelling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks / *C.Soize, E.Capiez-Lernout* // Trans. of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2004. – Vol. 126. – P. 610 -618. **11.** *Nair P.B.* Stochastic reduced basis method / *P.B.Nair, A.J.Keane* // American Institute of Aeronautics and Astronautics J. – 2001. – Vol. 32. – P. 212-225. **12.** *Nair P.B.* Forced response statistics of mistuned bladed disks: a stochastic reduced basis approach / *M.T.Bah, P.B.Nair, A.Bhaskar, A.J.Keane* // J. of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 263. – P. 377–397.

13. *Ларін О.* Розв'язок задачі вимушених випадкових коливань лопаткового апарату з розладом на основі моделі одного сектору / *Ларін О., Жовдак В.* // Машинознавство. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2008. – № 10 (136). – С. 12-16. **14.** *Ларин А.А.* Собственные колебания циклически-симметричных систем с расстройкой // Системи обробки інформації. – № 7 (47). – 2005. – С. 91-95. **15.** *Жовдак В.А.* Исследование влияния бандажного соединения на статические и динамические характеристики лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей / *Жовдак В.А., Кабанов А.Ф., Ларин А.А., Степченко А.С.* // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, НТУ «ХПІ», 2005. – № 21. – С. 35-43. **16.** *Жовдак В.А.* Исследование влияния технологических отклонений в бандажном соединении на спектр собственных частот лопаточного аппарата / *Жовдак В.А , Демуз Я.Д., Кабанов А.Ф., Ларин А.А., Степченко А.С.* // Надійність і довговічність машин і споруд. – Київ: Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, 2006. – Вип. 26. – С. 59-67.

Поступила в редколлегию 13.11.2009

УДК 621.11

Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;
Ю.В.СОЛЯННИКОВА, асп., НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ РАЗВИТИЯ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК И ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ И ПРОЧНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

У роботі проведено огляд розвитку вітроенергетики на теперішній час. Розглянуто типи вітроенергетичних установок, їх особливості, переваги та недоліки. Також розглянуто проблеми динаміки та міцності конструктивних елементів та напрямки їх вирішення.

The article deals with the question of wind energy development. Types of windmills, their structural features, advantages and defects were considered. Also in the work researches problems dynamics and strength of constructions and offers decision their solutions.

В XXI столетии развитыми будут те страны, где интенсивно развивается ветроэнергетика (Программа ООН развития мировой энергетики).

Введение. Неравномерный нагрев лучами солнца земной поверхности и воздушных масс, находящихся над ней, вызывает постоянные перемещения воздуха из более холодных мест в более теплые. Таким образом, воздушные массы все время перемешиваются и перемещаются как в вертикальном направлении, так и параллельно земной поверхности. Постоянные перемещения воздушных масс в горизонтальных направлениях называются ветром. Ветер обладает определенным запасом кинетической энергии и характеризуется скоростью и направлением [1]. Преобразование кинетической энергии ветра в электрическую осуществляется при помощи ветроэнергетических установок (ВЭУ).

Существует множество способов прогнозирования скорости ветра. На ветровые ресурсы влияет рельеф Земли и наличие препятствий, расположенных на высоте до 100 метров. На высоте 100 метров и выше рельеф практически не влияет на скорость ветра и происходит увеличение ламинарных воздушных потоков [2]. Энергия ветра также подчинена сезонным изменениям погоды: более эффективная работа ВЭУ зимой и менее – в летние жаркие месяцы. Сила ветра формируется под действием ряда факторов, таких как атмосферное давление, циркуляционные процессы атмосферы, формы рельефа и другие. Количество энергии, произведенной при помощи использования силы ветра, зависит от плотности воздуха, от площади, охваченной лопастями ветротурбины при вращении, и пропорционально скорости ветра в 3 степени.

Прогнозирование скорости ветра является крайне важным фактором, способствующим долгосрочной и эффективной работе ВЭУ. Поэтому множество погрешностей при расчете показателей ветра, наряду с неблагоприятными погодными условиями (песок, снег, дождь, лед, внезапные порывы ветра), снижают долговечность ветровых установок. Существуют специальные безопасные стандарты (такие как International Electrotechnical Commission – IEC), гарантирующие надежную работу ветровой установки. Стандарты определяют нагрузки, используемые в проектных расчетах для обеспечения безопасной работы ВЭУ, такие как внезапные сильные порывы ветра, действие молнии.

Наибольший ветровой потенциал наблюдается на морских побережьях, на возвышенностях и в горах.

Человечество издавна использует энергию ветра. Изначально ветродвигатели применялись для подъема воды, размола зерна и приведения в движение различных станков [3]. Наибольшее развитие ветроэнергетике пришлось на конец XIX ст., именно в это время начинается усовершенствование ветровых установок для производства электроэнергии. Энергия ветра является экологически чистой и относится к альтернативным источникам энергии. Актуальность и развитие ветроэнергетики обусловлено, в первую очередь, истощением нефтегазовых ресурсов планеты. Существует множество фирм занимающихся производством и монтажом ветровых установок. Ведущие страны мира в области ветроэнергетики: Германия, Дания, Великобритания, США, Франция. Лидером мирового производства и использования ВЭУ является Европа (61%), однако наблюдается рост ветроэнергетики и в странах Азии [4]. Распределение производства ВЭУ в мире изображено на рис. 1.

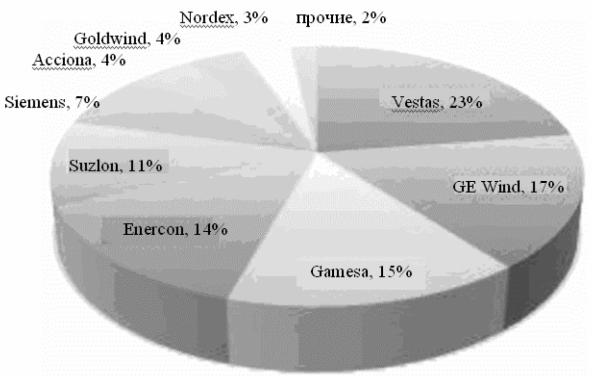


Рисунок 1 – Распределение производства ВЭУ между ведущими фирмами ветроэнергетики

На этом рисунке указаны фирмы производители и тот объем рынка, который они охватывают. Это Nordex (Германия), Goldwind (Китай), Acciona (Испания), Siemens (Германия), Suzlon (Индия), Enercon (Германия), Gamesa (Испания), GE Wind (США), Vestas (Германия).

Вопросами ветроэнергетики занимаются во всем мире. В Советском Союзе уделялось значительное внимание исследованиям и разработкам новых типов ветродвигателей, составлялся кадастр ветровых ресурсов СССР. Этим вопросом занимались такие известные ученые, как Г.Х.Сабинин, Ю.В.Кондратюк и многие другие. Н.Е. Жуковским была разработана теория ветроколеса, который доказал, что максимальный аэродинамический коэффициент (он же КИЭВ, о котором будет сказано дальше) Ср равен 0,593 . То есть при таком значении коэффициента наблюдается наиболее эффективная работа ВЭУ [5]. Впоследствии профессором Г.Х.Сабининым была разработана теория реальной ВЭУ [6]. Первая в Украине ветроэлектростанция (ВЭС) была сооружена в Крыму (около Балаклавы) в 1931 году. ВЭС – несколько ВЭУ, собранных в одном месте и объединенные в одну сеть.

Наибольшее развитие работы по ветроэнергетике получили в Великобритании, Дании, ФРГ и США. Среди иностранных ученых, занимающихся ветроэнергетикой можно выделить Е.Гольдинга (Великобритания), который ввел два коэффициента поправки скорости ветра [7], Б.Кетцольда (ФРГ), который осуществил попытку стандартизации ветроэнергетических характеристик пунктов наблюдений, Ю.Юля (Дания) и многих других.

Нельзя не отметить закон Бетца: ветер перед турбиной имеет более высокую скорость, чем за турбиной, таким образом, ротор забирает часть энергии на вращение. Масса воздуха остается неизменной [3]. Распределение воздушных масс изображено на рис. 2.

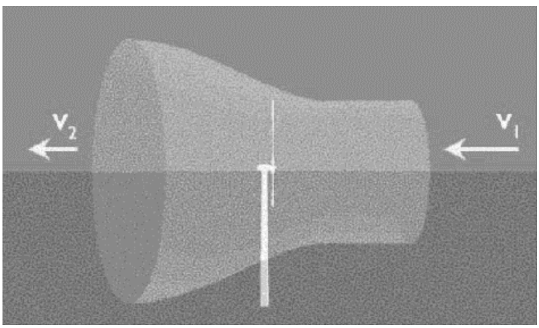


Рисунок 2 – Распределение воздушных масс перед и за ВЭУ

В середине 50-х годов прошлого века рост ветроэнергетики приостановился. Это было обусловлено активным развитием тепловой и атомной энергетики. После нефтяных кризисов 1973 и 1979 годов множество европейских стран стремилось снизить свою зависимость от импорта нефти [8]. Вследствие чего вторичное развитие ветроэнергетики в Европе пришлось на начало 80-х годов прошлого века.

Европа имеет значительный ветровой потенциал. Большинство стран Северной Европы обладает большими территориями мелководья, расположенными недалеко от береговой линии. Известно, что морские ветры более сильные и продолжительные по сравнению с ветрами, дующими на суше. Именно это послужило развитию оффшорной ветроэнергетики (ВЭС, установленные на прибрежном шельфе незамерзающих морей) [4]. Морская ветроэнергетика способствует сохранению значительных земельных территорий, что немаловажно для густонаселенной Европы и Юго-Восточной Азии. Не смотря на очевидные преимущества, оффшорная ветроэнергетика имеет ряд недостатков. К ним относятся сложность проведения работ в морских условиях, высокая цена на ветротурбины, а также отсутствие четкой правительственной поддержки и большие затраты по подключению оффшорных ветропарков к энергосети [4]. Однако производство энергии на оффшорных ветряках существенно выше. Лидером оффшорной ветроэнергетики является Дания.

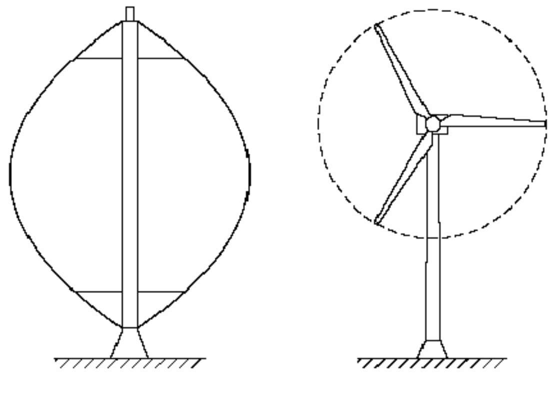
1 Цель исследования. Целью данной работы является обзор состояния ветроэнергетики в мире; выделение преимуществ и недостатков различных типов ВЭУ; определение вопросов, связанных со статической и динамической прочностью ветроустановок, а также определение способов повышения статической и динамической прочности, надежности и безопасности эксплуатации ВЭУ.

2 Типы ветрогенераторных установок. Современные ветрогенераторные установки – это машины, которые преобразуют энергию ветра в механическую энергию вращающегося ветроколеса, с последующим ее преобразованием в электрическую энергию. Поэтому их главная цель – получение как можно больше энергии из ветра. Рабочие характеристики ветровой турбины характеризуются тремя главными показателями: мощностью, крутящим моментом и осевой нагрузкой.

По конструктивным особенностям ветровые установки делятся на ВЭУ с горизонтальной и вертикальной осями вращения. Расположение ведущего вала ротора – части турбины соединяющей лопасти с генератором – считается осью машины [9]. Типы ВЭУ схематически приведены ниже на рис. 3.

Выходная мощность горизонтально–осевых ветрогенераторов зависит от размеров конструкционных элементов, формы и размеров лопастей. Чем больше диаметр ветроколеса, тем больший воздушный поток оно захватывает и тем больше энергии вырабатывает агрегат [3]. Зависимость мощности ВЭУ от диаметра ветроколеса (ВК) изображена на рис. 4.

Однако длина лопаток ограничена действием центробежных и изгибающих сил, переменных по величине и направлению. Все это существенно снижает надежность ВЭУ и сокращает сроки их эксплуатации. Обычно поломка механизма вызвана неисправной системой управления, чрезвычайными ветровыми условиями, усталостными трещинами или дефектами системы безопасности, например механизма торможения ротора, молниезащиты [10]. Таким образом, срок службы ВЭУ зависит от условий эксплуатации (средний срок службы – 20 лет).



а) б)

Рисунок 3 – Типы ветрогенераторных установок
(а – вертикально-осевые; б – горизонтально-осевые)

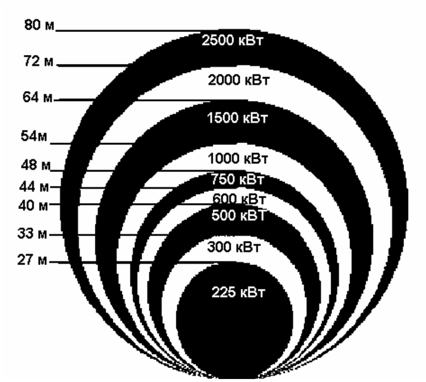


Рисунок 4 – Зависимость мощности ВЭУ от диаметра ветроколеса

При проектировании ВЭУ необходимо также учитывать такое явление как сдвиг ветра. Оно описывает процесс уменьшения скорости вихревых потоков по мере их приближения к поверхности земли. Если ветроэнергетическая установка имеет большой диаметр ротора, но высота ее башни незначительна, то в результате разницы давления ветра, воздействующего на концы лопастей, возможно разрушение ветрогенераторных установок, так как нагрузка на ВК неравномерна в окружном направлении [2].

По способу взаимодействия с ветром ВЭУ делятся на установки с жестко закрепленными лопастями без регулирования и на агрегаты, с изменяющимся углом лопастей. Последние имеют более высокую эффективность использования ветра и вырабатывают больше электроэнергии. Однако они должны быть оснащены специальными подшипниками, которые часто являются причиной выхода из строя агрегатов. ВЭУ с жестко закрепленными лопастями более просты в обслуживании, но их эффективность использования ветрового потока ниже.

2 Преимущества и недостатки ВЭУ. Критерием эффективности ВЭУ являются коэффициент полезного действия (КПД) и коэффициент использования энергии ветра (КИЭВ). КИЭВ – это число, которое показывает, какая часть воздушного потока используется ветроколесом. Однако часто критерием эффективности является КПД, так как часть вырабатываемой энергии уходит на механические потери, трение в подшипниках, неудачный монтаж всей установки и т.д. [12].

Крыльчатые ВЭУ (горизонтально-осевые) имеют высокий КИЭВ – 43% и составляют 90 % всех ветроустановок. Наибольшая эффективность их работы достигается при действии потока воздуха перпендикулярно к плоскости вращения лопастей-крыльев, поэтому у них предусмотрено специальное устройство для автоматического поворота оси вращения, так называемое крылостабилизатор. В целом, крыльчатые ВЭУ имеют высокую сложность конструкции отдельных элементов, что является их недостатком. Главным недочетом является большая стоимость и значительные эксплуатационные расходы [2].

К преимуществам горизонтально-осевых ВЭУ относится высокая скорость вращения. Кроме того, они оснащены тормозным устройством и системой управления. Тормозное устройство используется для защиты от поломок при сильных порывах ветра и ураганах. Почти все ВЭУ большой мощности автоматически останавливаются, если скорость ветра превышает предельную величину (25 м/с). ВЭУ данного типа в неработающем режиме способна выдержать силу ветра до 50 м/с.

Управление ВК предусматривает процесс ориентации оси ротора ветродвигателя по направлению ветра. Различают несколько типов системы ориентации:

1. Флюгер (хвост) – отличается большой точностью, простотой конструкции, но имеет повышенную скорость поворачивания головки, увеличивает ее вес, усложняет уравновешивание.
2. Виндрозы – небольшие ветроколеса, расположенные перпендикулярно к плоскости вращения основного ветроколеса. Принцип работы состоит в том, что при действии ветра, направленного под углом к оси ВК, виндрозы начинают вращаться. Вследствие чего они поворачивают ВК перпендикулярно ветру.
3. Расположение ВД за вертикальной осью его поворота (вращающееся ВК играет роль флюгера, специальный механизм ориентации ветра отсутствует) [11].

К преимуществам вертикально-осевых установок (карусельных ВЭУ, ветроустановки Дарье или роторные) относятся нечувствительность к направлению ветра, возможность значительного упрощения конструкции установки (отсутствие поворотных устройств и систем). При работе вертикально-осевых установок реализуются более низкие уровни аэродинамических и инфрашумов, меньшие теле- и радиопомехи. Вертикально-осевые ВЭУ более надежные за счет значительного упрощения конструкции, снижения уровня требований к изготовлению трансмиссий, улучшения условий монтажа и эксплуатации.

Крыльчатые ВЭУ используют подъемную силу, карусельные ВЭУ используют силу давления ветра.

ВЭУ подвергаются различным видам нагрузок, к которым относятся:

1. Аэродинамические (возникают вследствие действия воздушного потока, проходящего через лопатки и башню конструкции);
2. Гравитационные (вызванные гравитационным полем земли);
3. Инерционные;
4. Центробежные силы;
5. Гироскопические моменты;
6. Возмущающие силы, вызванные неравномерностью потока воздуха;
7. Рабочие (эксплуатационные) нагрузки, возникают вследствие различных режимов работы системы контроля (т. е поворот в горизонтальной плоскости, регулирование шага лопаток, различные рабочие режимы генератора) [13].

Для наиболее эффективной работы ВЭУ ее лопасти должны максимально взаимодействовать с ветровым потоком, проходящим через площадь вращения ВК. ВЭУ с большим количеством лопастей менее эффективны, чем ветрогенераторы с двумя или тремя лопастями, так как лопасти создают помехи (затененность) друг другу. Наибольшее распространение в мире получила конструкция ветрогенератора с тремя лопастями и горизонтальной осью вращения, поэтому в дальнейшем более подробно остановимся на этом типе ВЭУ. Наиболее применимым является асинхронный генератор, поскольку он имеет малую чувствительность к короткому замыканию и высокую степень защиты от внешнего воздействия. Однако применяют и другие типы генераторов, например, асинхронные.

3 Конструкционные особенности ВЭУ с горизонтальной осью вращения. Современные ветрогенераторы этого типа обычно состоят из следующих основных компонентов: лопасти, гондола, ротор, трансмиссия, генератор, система управления, башня. Схематическое изображение ВЭУ и ее конструкционных элементов изображено на рис. 5.

Существует несколько видов передачи ветровой мощности потребителю (гидравлическая, механическая, пневматическая, аэродинамическая). Около 90% ВЭУ используют механическую передачу энергии вращающегося ВК генератору. Этот выбор обусловлен простой конструктивной особенностью и наиболее высоким КПД (0,85-0,95). Однако механическая передача имеет ряд недостатков: наличие мультипликатора и как следствие, передача колебаний ветрового потока на вал ВЭУ [11]. Мультипликатор (повышающий редуктор) – промежуточное звено между ветроколесом и электрогенератором, обеспечивает согласование с оборотами генератора. Исключение составляют ВЭУ малой мощности со специальными генераторами на постоянных магнитах, например установки фирмы Enercon [4]. Один из вариантов механической передачи приведен на рис. 6.

На башню ВЭУ приходятся большие нагрузки от веса гондолы и ветроколеса (ВК). Для обеспечения устойчивости башни и для облегчения сборки ВЭУ составные части гондолы (коробка передач, генератор) могут размещать в основании башни, как показано на рис. 7 [12].

ВК ветровой турбины с горизонтальной осью вращения находится (вращается) в непосредственной близости от башни. Аэродинамический поток вокруг башни влияет на ротор, поэтому стараются придерживаться минимальных расстояний между ВК и башней (настолько близко, насколько позволяет длина гондолы) [14].

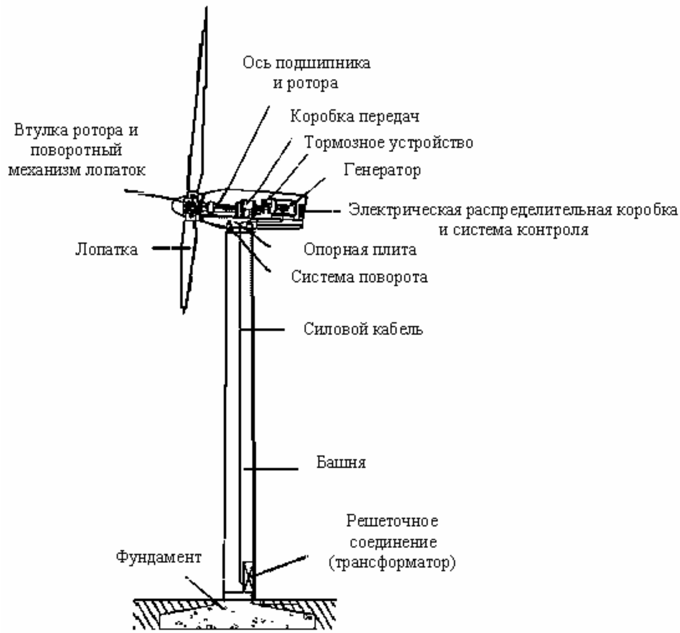


Рисунок 5 – Основные конструктивные элементы ВЭУ

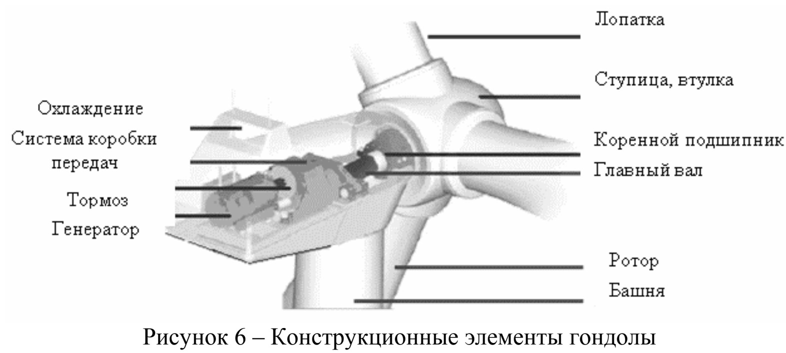


Рисунок 6 – Конструкционные элементы гондолы

Лопатки являются наиболее нагруженным и опасным элементом ВЭУ. Зафиксированы случаи их отрыва и относа на расстояние нескольких сот метров. Это обусловлено внезапными порывами ветра и преждевременным износом. Они испытывают ветровые нагрузки, силу тяжести, инерционные нагрузки. Для их изготовления применяются различные материалы (стеклопластик, сталь, алюминий). Выбор зависит от многих факторов, таких как вес, жесткость, цена и требуемая усталостная прочность. Чаще всего используют стеклопластик. Для упрочнения и ужесточения лопатки между двумя оболочками наклеивается так называемая перегородка, прежде чем они связываются. Поскольку лопатка может иметь несколько перегородок, такая конструкция называется коробчатой. Она является главной частью лопатки, действующая как главная балка, которая связывает тонкую оболочку и определяет геометрию лопатки [14]. Коробчатая структура лопатки изображена на рис. 8.

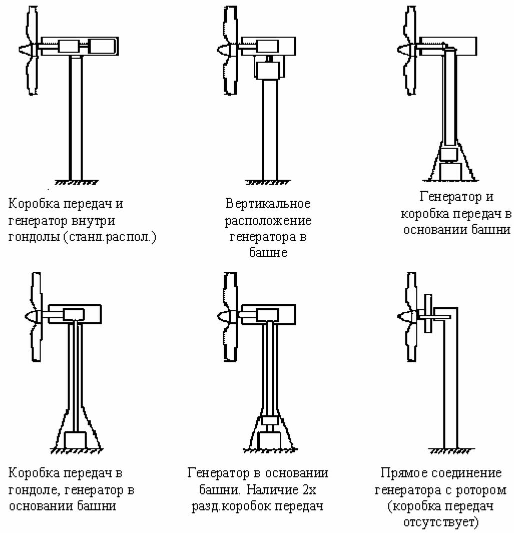


Рисунок 7 – Схематическое расположение конструкционных элементов гондолы

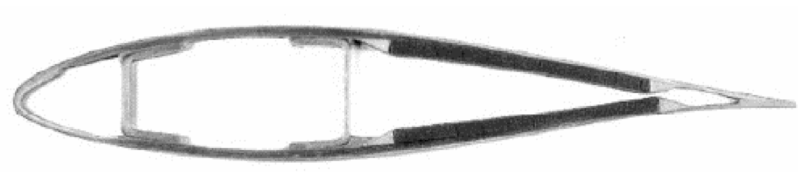


Рисунок 8 – Коробчатая структура лопатки

Для изготовления гондолы используют различные материалы. Ранее применялась стальная структура. В более современных ВЭУ гондолы изготавливаются из стекловолокнистого композиционного армированного материала. Такой выбор материала обусловлен хорошей звукоизоляцией и защитой от перепада температур.

Затраты на изготовление башни составляют примерно 20 % стоимости всей ВЭУ. При увеличении длины лопаток возрастает высота башни и, соответственно, выходная мощность ВЭУ[4]. Чем выше башня, тем большим нагрузкам она подвергается. Прочность башни зависит от материала изготовления, для ее производства применяют сталь или бетон.

4 Вопросы, связанные со статической и динамической прочностью конструкционных элементов ВЭУ. Нагрузки, которые испытывают элементы ВЭУ можно разделить на статические и динамические (изменяющиеся во времени). К первым можно отнести весовые нагрузки. К динамическим относятся нагрузки от дисбаланса ротора, моменты аэродинамических сил на ротор, вибрации, колебания узлов, элементов.

Причинами колебаний ВЭУ являются действия давления ветра, неравномерно распределенного в окружном направлении, динамическая неуравновешенность ВК и вала, на котором оно размещено, а также сейсмические и другие природные воздействия.

Существенное значение с точки зрения динамической (усталостной) прочности могут иметь резонансные и околорезонансные колебания отдельных узлов ВЭУ (особенно для ВЭУ с переменной частотой вращения ветроколеса).

Вибрации могут приводить к поломкам и преждевременному износу частей ВЭУ. Воздействуя на башню, они передаются на фундамент и основание. В результате чего возможно возникновение усталостных трещин в сварных швах, в металле конструктивных элементов, снижение степени затяжки болтов в узлах сопряжения элементов и анкерных болтах. Как следствие, для фундаментов будет их преждевременный износ – растрескивание и разрушение [16].

Кроме того, колебания таких элементов ВЭУ как гондола, ступица ВК, лопасти и башня приводят к возникновению акустического шума. Акустический шум – совокупность различных по силе и частоте звуков, возникающих в результате колебательного движения частиц в упругих средах (твердых, жидких, газообразных).

Шумовое воздействие можно разделить на механическое и аэродинамическое. Источником аэродинамического шума является взаимодействие лопатки с воздушными потоками (шум усиливается при прохождении лопасти мимо башни ветроустановки). Источниками механического шума являются работающие механизмы (генератор, мультипликатор, опорные узлы) [11].

Помимо акустического шума вокруг ВЭУ возникает опасный инфразвук частотой 6-7 Гц. Его источниками являются колебания ВК, воздушные полости секций башни, а также поток, обтекающий лопасти. Инфразвук воздействует на центральную нервную систему (ЦНС) человека, вызывает тревогу, страх [17]. Инфразвуковая частота вихревого звука, генерируемого при обтекании лопастей воздушным потоком, составляет примерно 0,6 Гц. Снижение шумов ВЭУ остается актуальным, так как за рубежом принят допустимый уровень шумов от ВЭУ величиной 45 дБ на расстоянии 100 – 400 м, в Украине же нормой считается уровень шума 85 дБ [17].

Следует отметить, что ВЭУ отрицательно воздействуют на экологию. Это гибель птиц, эксплуатация больших земельных территорий, помехи прохождения радиоволн (чаще всего вызываются металлическими молниеотводами лопастей генератора). Также существует субъективный фактор визуального воздействия.

Однако, известны способы решения этих проблем: чтобы птицы не попадали под вращающиеся лопасти, ветроколеса стали ограждать сетчатым кожухом; для избегания помех радиосигналам устанавливаются ретрансляторы. Для улучшения внешнего вида ветряных установок во многих крупных фирмах работают профессиональные дизайнеры.

ВЭУ оказывают и положительное влияние на экологию – они играют роль своеобразной защиты, препятствующей ветровой эрозии почвы [18].

Заключение. Ветроэнергетика является наиболее развивающейся отраслью промышленности. Средний показатель роста мирового ветроэнергетического сектора в год составляет более 26 % [4].

Существует ряд проблем, связанных с конструктивными элементами ВЭУ, приводящих к возникновению аварийных ситуаций (отрыв лопастей, вероятность возгорания гондолы). Пожары происходят по двум основным причинам: удар молнии или технические ошибки и неисправности. При технологических неисправностях возгорания возникают от перегрева и искрения, однако имеет место и человеческий фактор. В обоих случаях горят смазочные материалы, масла, трансмиссионные горючие жидкости и оболочка гондолы [15].

Немаловажными проблемами также являются производимый шум и излучение инфразвуковых волн, губительных для любых живых организмов.

Также на основании приведенных фактов можно сделать вывод, что при работе ВЭУ наблюдаются вибрации, колебания узлов, элементов, которые могут приводить к поломкам и преждевременному износу.

К наиболее эффективным способам борьбы с вибрацией относится применение виброизоляционных прокладок из упругих материалов, динамических гасителей колебаний и демпферов, которые могут размещаться непосредственно между ветроагрегатом и основанием башни [16]. Снижение вибраций и шума зубчатых передач может быть достигнуто несколькими способами: изменением формы зубьев, фланкированием профилей зубьев, заменой в зубчатой паре материала колеса [19].

Повышение надежности эксплуатации ВЭУ на этапе проектирования и доводки конструкции может быть достигнуто при помощи новых математических и расчетных моделей, позволяющих адекватно отразить динамическое поведение, как отдельных ее элементов, так и ВЭУ как единой механической системы с учетом всего спектра действующих на нее нагрузок (с выделением расчетных случаев, соответствующих некоторым критическим состояниям). Это позволит снизить уровень вибраций и повысить динамическую устойчивость системы.

Список литературы: **1**. *Шефтер Я.И., Рождественский И.В.* Изобретателю о ветродвигателях и ветроустановках. – М.: Министерство сельск. хозяйства СССР, 1957. – 142 с. **2**. www/URL: http://teplonasos.com/wind2009ru.html/ – Энергия ветра. – Загл. с экрана. **3.** *Tony Burton, David Sharpe.* Wind energy handbook. – John Wiley & Sons Ltd, 2001. – 490 p. **4**. *Сокут Л.Д.* Состояние и перспективы развития ветроэнергетики в мире и на Украине // Строительство и техногенная безопасность. – 2009. – № 27. – С. 93-105. **5**. *Жуковский Н.Е.* Вихревая теория гребного винта. – М.: Научно-техн. издательство, 1937. – (ОНТИ НКТП СССР, полное собрание сочинений; том VI). **6**. *Сабинин Г.Х.* Теория и аэродинамический расчет ветряных двигателей. – М.: Научно-техн. издательство, 1931. – (Труды ЦАГИ, вып. №4). **7**. *Golding E.* The generation of electricity from the wind. – Spon, 1955. **8.** *Коваленко В.М.* Исследования по ветроэнергетике в Сумском государственном университете // Вісник Сумського державного університету. – 1994. – № 1. – С. 84-89. **9.** *Thomas*

Ackermann Wind power in power systems. – John Wiley & Sons Ltd, 2005. – 691 p. **10.** *Fernando DE. Bianchi.* Wind turbine control systems. – Springer, 2006. – 499 p. **11.** *Янсон Р.Я.* Ветроустановки. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. – 36 с. **12**. *Андрианов Н.В., Быстрицкий Д.Н.* Ветроэлектрические станции. – М.: Энергия, 1960. – 320 с. **13.** *Martin O.L. Hansen* Aerodynamics of Wind Turbines. – Earthscan, 2008. – 181 p. **14.** *Erih Hau* Wind turbines Fundamentals, Technologies, Applications, Economics. – Springer, 2006. – 783 p. **15.** *Дмитриев Г.С.* Как уберечься от пожаров на ветроэнергетических установках. – М.: Энергия, 2006. – № 4. – С. 35-39. **16.** *Горохов Е.В., Бусько М.В.* Оценка влияния резиноармированных опорных частей на динамическое поведение башенной конструкции // Вестник ДонГАСА. – 2001. – С. 145–152. **17.** *Сокол Г.И.* Инфразвук – экологический вредный фактор в ветроэнергетике // Праці симпозіуму Консонанс, 2005. – С. 283-290. **18.** *Тупикин С.Н., Орлова Н.С.* Ветроэнергетические ресурсы. – Калининград: КГУ, 1998. – 31 с. **19**. *Духанин Ю.А., Акулин Д.Ф.* Техника безопасности и противопожарная техника в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1973. – 304 с.

Поступила в редколлегию 10.11.2009

УДК 629.423.2.027.43.002.237

И.Л.ОБОРСКИЙ, канд.техн.наук, доц., Киевский национальный университет технологий и дизайна;
А.Г.АНДРЕЕВ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;
А.В.ЩЕПКИН, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;
В.Н.ДВОРЖАК, канд.техн.наук, доц., Киевский национальный университет технологий и дизайна

РАЗРАБОТКА ТЕХНОЛОГИИ СБОРКИ И УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ СОСТАВНОГО КОЛЕСА ЭЛЕКТРОВАГОНА

На основі проведеного аналізу технологій складання деталей з натягом, конструкцій складених коліс залізничного транспорту та виконаного дослідження міцності та пружно-деформованого стану запропоновано технологію виготовлення та удосконалену конструкцію колеса електровагона.

On the basis of analysis of details assembly technologies with a tightness, designs of railway bandage wheels and the executed research of durability and the stressedly-deformed condition the technologies of advanced design of electrocar wheel are offered.

Постановка проблемы. Актуальной задачей для железнодорожного транспорта является создание подвижного состава, обеспечивающего повышенные качественные показатели надежности и безопасности [1-5]. Эти показатели существенным образом зависят от конструкции составных спицевых колес и технологии их изготовления. В ряде случаев повышение надежности колес может быть обеспечено использованием сборки с нагревом охватывающих и низкотемпературным охлаждением охватываемых деталей.

Анализ предыдущих исследований. Ряд составных колес имеют выточки в бандаже под бандажное стопорное кольцо, что ослабляет конструкцию бандажа и надежность крепления деталей колеса. Как показал опыт эксплуатации колесных пар, в отдельных случаях возможны трещины спиц колес в зоне перехода от обода центра к спице. Технологическим недостатком является использование закатывания бандажа после установки бандажного кольца, что приводит к снижению прочности посадки бандаж-центр [5,6].

В работах [7-8] проведено исследование технологического процесса сборки соединений с натягом, осуществляемого с использованием нагрева и низкотемпературного охлаждения, разработаны направления повышения их качества и автоматизации процесса, выполнена оценка отдельных основных показателей.

Целью работы является повышение эксплуатационных показателей электропоездов и локомотивов за счет усовершенствования конструкции и технологии производства моторно-колесных пар [2-6]. Для этого необходимо разработать методологию выбора рациональных нормативных технологических и конструктивных сборочных параметров, обеспечивающих высококачественную и экономически целесообразную технологию сборки соединений с натягом, осуществляемых с термовоздействием.

В настоящее время при сборке соединений с натягом термическими методами широкое применяются режимы неравномерного нагревания и низкотемпературного охлаждения сопрягаемых деталей. Для реализации процесса сборки предварительно определяют необходимую величину расширения при нагреве и сжатия при охлаждении, что обеспечивает заданный временной сборочный зазор, исключающий повреждение сопрягаемых поверхностей [3-6].

Результаты проведенных исследований. Специалисты Киевского национального университета технологий и дизайна в содружестве с производственниками ОАО «Киевский электровагоноремонтный завод», специалистами Украинской инженерно-педагогической академии (Харьков) и Национального технического университета «ХПИ» разработали конструкцию (рис. 1) и технологию производства колес без бандажного кольца, в которых зубчатый венец соединен заклепками с фланцем ступицы, а также провели их эксплуатационные испытания. Новизна разработок защищена патентами Украины [1-7].

Разработанная конструкция соединения бандажа с центром имеет внутри посадочного отверстия бандажа дополнительный упорный буртик [1, 4]. На основании расчетных и экспериментальных исследований разработана модель [4] для определения высоты дополнительного буртика для разных типов бандажей колес.

При сборке колеса с помощью нагревания бандажа и охлаждения центра изменение разности диаметров Δd посадочных поверхностей вычисляем по формуле

$$\Delta d = d_п\,(\alpha' \cdot \Delta t_н + \alpha'' \cdot \Delta t_о),$$

где $d_п$ – диаметр посадки; α' – коэффициент линейного расширения материала бандажа; $\Delta t_н$ – температура нагревания бандажа; α'' – коэффициент линейного сжатия материала центра при его низкотемпературном охлаждении; $\Delta t_о$ – температура низкотемпературного охлаждения центра.

Термовоздействие выполняется нагреванием бандажа до 50…320 °С с помощью индукционно-нагревательного устройства или комбинированно (КТСС) с дополнительным охлаждением центра до –50…–195,6 °С в специальной холодильной камере. Затраты времени для установления центра в отверстие бандажа составляют 5…10 с.

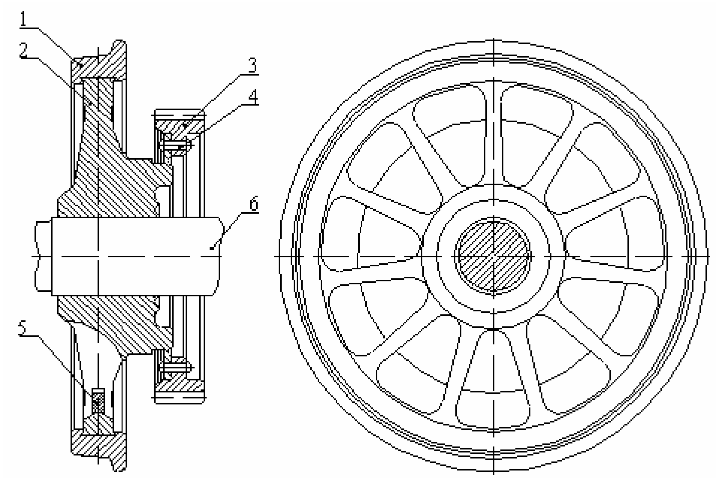


Рисунок 1 – Колесо электровагона с зубчатым венцом, соединенным заклепками с фланцем ступицы: 1 – бандаж; 2 – центр; 3 – венец зубчатый; 4 – заклепка; 5 –пластина упрочняющая; 6 – ось

Таблица 1 – Сравнительная прочность соединений бандаж-центр в зависимости от конструкции и технологии осуществления

	Метод сборки	Конструкция соединения	Сравнительная прочность Ср, %
1.	Механическая запрессовка	С бандажным стопорным кольцом	100,0
2.	Нагревание бандажа до 50…250 °C	С бандажным стопорным кольцом	198,8
3.	Нагревание бандажа до 50…250 °C и охлаждение центра до –50…–195,6 °C	С дополнительным вторым упорным буртиком	215,6
4.		С дополнительным вторым упорным буртиком и прослойкой с жидким стеклом и медным порошком	268,2
5.		С дополнительным вторым упорным буртиком и прослойкой из медной фольги толщиной 0,015…0,025 мм	477,6
6.		С дополнительным вторым упорным буртиком и прослойкой с гальвано-покрытием медью толщиной 0,015…0,025 мм	478,7

Для повышения прочности и теплопроводности соединения на посадочной поверхности целесообразно размещать прослойку из теплопроводного пластичного материала толщиной 0,015…0,030 мм, в качестве которой может быть применена фольга, композиция из теплопроводного порошка с жидким стеклом, гальваническое покрытие из одного или нескольких теплопроводных однородных или разнородных материалов и др. (табл. 1).

Как видно, наибольшей прочностью обладает соединение с дополнительным вторым буртиком и прослойкой из медной фольги или гальванопокрытия медью толщиной 0,015…0,025 мм, которые формировались КТСС.

Предлагается также способ усиления конструкции колеса электровагона путем установки упрочняющих пластин разной конфигурации и толщины между спицами колесного центра. Для этого выбиралась оптимальная конструкция пластин с использованием расчетного метода МКЕ для исследования напряженно-деформированного состояния элементов колеса [7, 8]. Был проведен расчет напряженно-деформированного состояния спицевого колеса на оси, натяг в соединении бандаж- колесный центр составил 1,2 мм, колесо-ось – 0,2 мм.

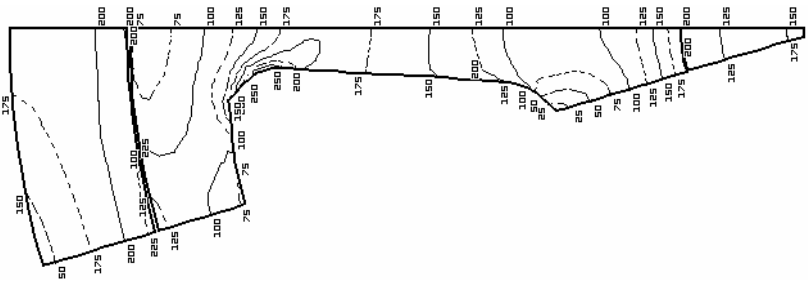


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных напряжений σ_e в колесе без упрочняющей пластинки

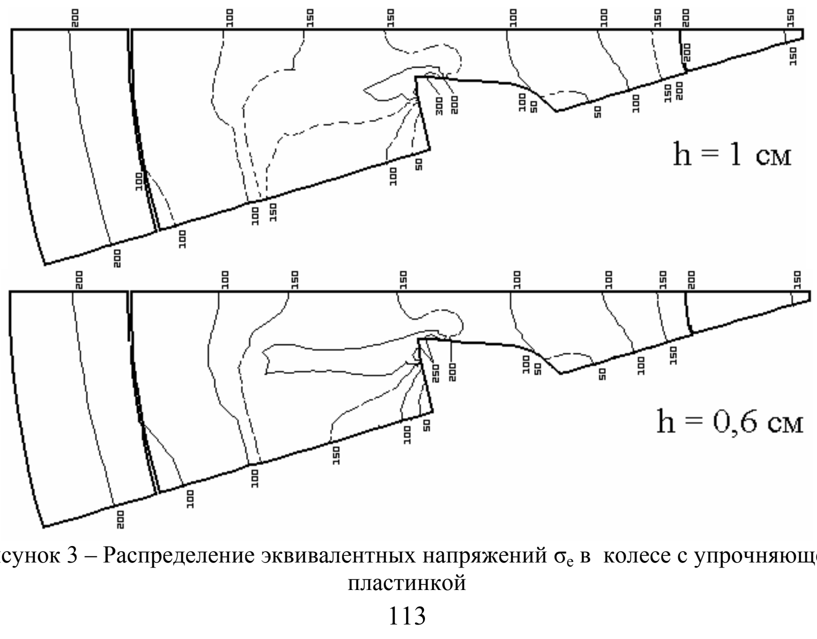
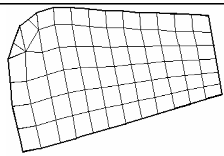
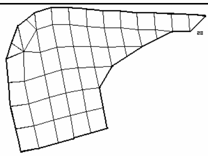
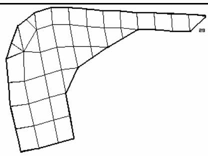
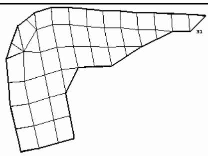
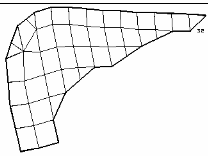
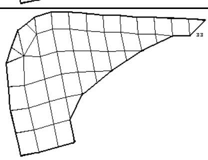


Рисунок 3 – Распределение эквивалентных напряжений σ_e в колесе с упрочняющей пластинкой

На рис. 2 показано распределение эквивалентных напряжений σ_e в колесе без пластинки, которое используется на предприятиях. Соответственно расчету, максимальные напряжения σ_e в колесном центре составляют 315 МПа, в бандаже – 243 МПа, в оси – 171 МПа. На рис. 3 показано распределение напряжений σе в колесе с пластинкой с прямым краем (табл. 2, вариант 1), применяемой при ремонте колесных пар.

Таблица 2 – Схемы упрочняющих пластин, их толщина и напряжения σ_e в деталях

№	Схема пластинки	h = 1 см	h = 0,6 см
1		σ_{ec} = 314 МПа σ_{ep} = 305 МПа	σ_{ec} = 287 МПа σ_{ep} = 325 МПа
2		σ_{ec} = 269 МПа σ_{ep} = 278 МПа	σ_{ec} = 281 МПа σ_{ep} = 306 МПа
3		σ_{ec} = 278МПа σ_{ep} = 309 МПа	σ_{ec} = 288 МПа σ_{ep} = 328 МПа
4		σ_{ec} = 274 МПа σ_{ep} = 277 МПа	σ_{ec} = 285 МПа σ_{ep} = 311 МПа
5		σ_{ec} = 274 МПа σ_{ep} = 272 МПа	σ_{ec} = 285 МПа σ_{ep} = 304 МПа
6		σ_{ec} = 271 МПа σ_{ep} = 276 МПа	σ_{ec} = 283 МПа σ_{ep} = 291 МПа

Как показал расчет, применение упрочняющей пластины снижает уровень максимальных напряжений в колесном центре. В табл. 2 приведены данные выполненных исследований об уровнях напряжений в колесном центре σ_{ec} и в пластине σ_{ep} для спицевого колеса с упрочняющей пластиной разной формы толщиной h = 1см и 0,6 см .

На заключительном этапе работ была выполнена сборка новых колес по комбинированной технологии (КТСС) и проведены их эксплуатационные испытания.

ВЫВОДЫ

1. Подтверждена целесообразность использования новой конструкции колес и технологии их изготовления.

2. Разработано методическое обеспечение процесса проектирования колес, необходимое при разработке и внедрении новой конструкции колес подвижного состава.

3. Ликвидация трещин в зоне перехода от спицы к ободу центра колеса возможна при использовании специальных упрочняющих пластин, которые позволят снизить до 15 % уровень напряжений в колесном центре.

4. Технико-экономические расчеты подтверждают преимущества предлагаемых конструкций колес, технологии их изготовления и автоматизации процесса. Экономическая эффективность разработок будет составлять 55,3 грн. на 1 колесо и срок окупаемости 0,5…1,0 года.

5. Выполненный комплекс работ подтверждает целесообразность разработки новой конструкции колеса и технологии сборки соединений термическим способом.

6. Для организации промышленного производства и применения разработанных колес целесообразно осуществить изготовление и квалификационные испытания промышленных партий колесных пар подвижного состава и локомотивов, что требует государственной поддержки.

Список литературы: **1.** *Оборський І.Л.* Нова конструкція і технологія з'єднання бандаж-центр колеса електровагона // Залізничний транспорт України. – 2003. – № 5. – С. 9-10. **2.** Патент України № 46548 А, МПК7 В23 Р 19/02, МПК7 В23 Р 11/02. З'єднання деталей з натягом і спосіб його здійснення. / *С.В.Кулюкін, В.Г.Кантур, І.Л.Оборський, Б.М.Арпент'єв, А.С.Зєнкін* та інші. – Опубл. 15.06.2002; Бюл. № 5. **3.** Патент України № 47163 А, МПК7 В23 Р 19/02, МПК7 В23 Р 11/02. З'єднання деталей та спосіб його здійснення. / *С.В.Кулюкін, В.Г.Кантур, І.Л.Оборський, В.С.Носік* та інші. – Опубл. 17.06.2002; Бюл. № 6. **4.** Патент України №59676 А, МПК7 В60В17/00. Бандаж колеса. / *І.Л.Оборський* – Опубл. 15.09.2003; Бюл. № 9. **5.** *Зенкин А.С., Кантур В.Г., Алтухов* Ремонт электроподвижного состава железнодорожного транспорта. – К.: Техніка. - 1983. – 200 с. **6.** А. С. СРСР №672561, МКИ2 G 01 N 29/04. Способ неразрушающего контроля качества соединений. / *В.Г.Кантур, А.С.Зенкин, А.И.Разинков* и др. – Опубл. 05.07.1979; Бюл. № 25. **7.** Исследование напряженно-деформированного состояния спицевого колеса электровагона при сборке комбинированным термическим способом / *И.Л.Оборский, А.Г.Андреев, А.В.Щепкин, А.С.Зенкин* // Сборка в машиностроении, приборостроении. – М.: Машиностроение, 2002. – № 8. – С. 14-16. **8.** Исследование НДС спицевого колеса электровагона с упрочняющими ребрами. / *А.Г.Андреев, И.Л.Оборский, А.В.Щепкин* // Вестник Национального технического университета «ХПИ»: Сборник научных работ. Тематический выпуск: Технологии в машиностроении. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 1. – С. 14 – 19.

Поступила в редколлегию 25.10.2009

УДК 531

В.П.ОЛЬШАНСЬКИЙ, докт.фіз.-мат.наук, проф., ХНТУСГ;
С.В.ОЛЬШАНСЬКИЙ, асп., НТУ «ХПІ»

ПРО ШВИДКІСТЬ ПАДІННЯ КУЛІ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ ТА ЗМІНЮЄ МАСУ ЗА ПОКАЗНИКОВИМ ЗАКОНОМ

Знайдена розв'язка рівняння падіння однорідної кулі змінного радіусу із вертикальною віссю обертання з урахуванням лінійного опору зовнішнього середовища. При показовому законі зміни радіусу кулі в часі перші інтеграли рівнянь руху виражені в елементарних і відомих спеціальних функціях, а також досліджені особливості швидкості польоту при дії сили Магнуса.

The equations of fall of a homogeneous sphere of variable radius with a vertical axis of rotation are solved in view of linear resistance of external environment. At the indicative law of change radius of a sphere in time the first integrals of the equations of motion are expressed in elementary and known special functions, and also the features of velocity of flight are investigated at action of Magnus force.

Актуальність теми та постановка задачі. Рух тіл змінної маси, окрім ракетодинаміки, має місце в різноманітних технологічних процесах. Це політ часток рідких та твердих палив, що згорають [1,2], рух крапель диспергованих вогнегасних рідин, які випаровуються у високотемпературному середовищі [3], падіння коагулюючих часток в атмосфері [4,5]. Тому вивчення балістичних властивостей тіл, які зменшують або збільшують свої розміри і масу при польоті, є актуальною задачею, на що в свій час звертав увагу І.В.Мещерский [6]. Обертання тіл при польоті їх у газовому чи рідинному середовищі супроводжується дією сили Магнуса [7]. Ця сила викривляє траєкторію руху. Тому частка, що обертається, не може в загальному випадку рухатися прямолінійно навіть при падінні її в гравітаційному полі. Від дії сили Магнуса залежить швидкість руху. Її вплив на процес польоту досліджено переважно для тіла сталих розмірів і маси [8]. Менш вивченим залишається вплив названої сили на рух тіл змінних розмірів, чим змотивована мета цього дослідження.

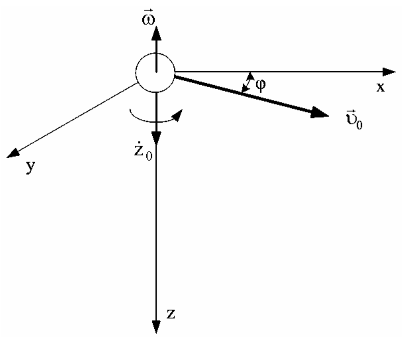


Рисунок 1 – Розрахункова схема

Метою дослідження є вивчення впливу сили Магнуса на кінематичні характеристики польоту однорідної сферичної частки змінного радіуса в часі.

Розв'яжемо задачу з урахування сил лінійного опору зовнішнього середовища. Такій підхід дозволяє знайти аналітичні розв'язки, які з прийнятною точністю моделюють рух сферичних тіл, які швидко обертаються, в нерухомому газовому середовищі.

Вісь обертання сферичного тіла вважаємо вертикальною та спрямованою проти вісі $\boldsymbol{OZ}$ координатної системи, що показана на рис. 1.

За вказаної орієнтації вісі обертання проекції сили Магнуса на вісі координат можна обчислити за формулами

$$F_{mx} = \frac{8\pi}{3}\delta r^3 \omega \dot{y}\,; \quad F_{my} = -\frac{8\pi}{3}\delta r^3 \omega \dot{x}\,; \quad F_{mz} = 0,$$

де δ – питома маса газового середовища; ω – кутова швидкість обертання кулі радіуса $r = r(t)$; t – час; $\dot{x}, \dot{y}$ – проекції лінійної швидкості руху центру мас кулі на вісі ox і oy відповідно.

З урахуванням лінійного опору середовища, в однорідному полі гравітації, рух тіла маси $m = m(t)$ описується рівняннями

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{mx} - \mu\dot{x}\dot{m} - k\pi r^2 \dot{x}\,; \\ m\ddot{y} &= F_{my} - \mu\dot{y}\dot{m} - k\pi r^2 \dot{y}\,; \\ m\ddot{z} &= F_{mz} - \mu\dot{z}\dot{m} - k\pi r^2 \dot{z} + mg. \end{aligned} \tag{1}$$

Тут коефіцієнт $0 < \mu < 1$, корегує величину реактивної сили, зумовленої зростанням маси; g – прискорення вільного падіння; k – коефіцієнт лінійного опору середовища; крапка над символом означає похідну за часом t.

Зростання радіуса кулі підпорядковуємо експонентній залежності

$$r = r(t) = r_0 \exp(\lambda t)\,, \tag{2}$$

в якій $r_0 = r(0)$; стала $\lambda > 0$ – характеризує темп зростання.

Оскільки маса однорідної кулі, у якої питома маса ρ, пропорційна кубу радіуса

$$m = \frac{4}{3}\pi\rho r^3\,,$$

то на підставі (2)

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = 3\frac{\dot{r}}{r} = 3\lambda.. \tag{3}$$

З урахуванням (3) і проекцій сили Магнуса рівняння руху (1) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{2\delta\omega(t)}{\rho}\dot{y} - 3\mu\lambda\dot{x} - \frac{\alpha}{r}\dot{x}\,, \\ \ddot{y} &= -\frac{2\delta\omega(t)}{\rho}\dot{x} - 3\mu\lambda\dot{y} - \frac{\alpha}{r}\dot{y}, \\ \ddot{z} &= g - 3\mu\lambda\dot{z} - \frac{\alpha}{r}\dot{z}, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\alpha = \frac{3}{4}\frac{k}{\rho}$.

Підкреслимо, що доданки з множником ω визначають дію сили Магнуса, з множником μ – дію реактивної сили, а з множником α – дію сили лінійного опору середовища.

Рівняння (4) будемо розв'язувати при початкових умовах:

$$\dot{x}(0) = \upsilon_0 \cos\varphi\,; \quad \dot{y}(0) = \upsilon_0 \sin\varphi\,; \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0\,; \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0. \tag{5}$$

де $\vec{\upsilon}_0$ – проекція стартової швидкості центру мас кулі на горизонтальну площину; φ – кут, який ця проекція складає з віссю ox; $\dot{z}_0$ – проекція стартової швидкості на вертикальну вісь.

Дослідження руху кулі, маса якої зростає. Для знаходження першого інтегралу третього рівняння системи (4) введемо нову змінну $u = \dot{z}(t)$. Тоді рівняння для вертикальної проекції швидкості набуває вигляду

$$\dot{u} + \left(3\mu\lambda + \frac{\alpha}{r_0} e^{-\lambda t}\right) u = g. \tag{6}$$

Його окремим розв'язком, при початковій умові (5), є вираз

$$\dot{z}(t) = \exp\{p[\exp(-\lambda t) - 1] - 3\mu\lambda t\} \times$$
$$\times \left\{\dot{z}_0 + \frac{g}{\lambda} p^{3\mu} \exp(p)\left[\Gamma\left(-3\mu, pe^{-\lambda t}\right) - \Gamma(-3\mu, p)\right]\right\}, \tag{7}$$

де $p = \dfrac{\alpha}{r_0 \lambda}$, $\Gamma(-3\mu, pe^{-\lambda t})$ – неповна Гамма-функция.

Розглянемо окремі випадки:

1) Коли $\mu = 0$, то

$$\dot{z}(t) = \exp\{p\,[\exp(-\lambda t) - 1]\}\left\{\dot{z}_0 + \frac{g}{\lambda} \exp(p)\left[Ei(-p) - Ei\left(-pe^{-\lambda t}\right)\right]\right\},$$

тобто вертикальна проекція швидкості виражається через інтегральну показникову функцію.

2) Якщо $\alpha \to 0$, $p \to 0$ то

$$\Gamma\left(-3\mu, pe^{-\lambda t}\right) - \Gamma(-3\mu, p) \sim \frac{p^{-3\mu}}{3\mu}\left(e^{3\mu\lambda t} - 1\right)$$

і замість (7) маємо

$$\dot{z}(t) = \left(\dot{z}_0 - \frac{g}{3\mu\lambda}\right) \exp(-3\mu\lambda t) + \frac{g}{3\mu\lambda}.$$

У цьому випадку легко обчислити вертикальне переміщення центру мас, бо

$$z(t) = \frac{1}{3\mu\lambda}\left(\dot{z}_0 - \frac{g}{3\mu\lambda}\right)[1 - \exp(-3\mu\lambda t)] + \frac{gt}{3\mu\lambda}.$$

Загальний розв'язок перших двох рівнянь системи (4) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\left(c_1 \sin\theta + c_2 \cos\theta\right); \\ \dot{y} &= f\left(c_1 \cos\theta - c_2 \sin\theta\right), \end{aligned} \tag{8}$$

де $f(t)$, $\theta(t)$ – невідомі функції часу; c_1, c_2 – довільні сталі.

Підставивши вирази (8) у систему (4), після прирівнювання відповідних доданків, одержуємо рівняння

$$\dot{f} = -\frac{3\mu\dot{r} + \alpha}{r(t)} f; \quad \dot{\theta} = \frac{2\delta}{\rho}\omega. \tag{9}$$

Інтегрування рівнянь (9) приводить до квадратур

$$f=\exp\left(-\int\frac{3\mu\dot{r}(t)+\alpha}{r(t)}dt\right);\quad \theta=\frac{2\delta}{\rho}\int\omega(t)dt. \qquad (10)$$

Для знаходження $\omega(t)$, без урахування опору середовища обертанню кулі, скористаємось законом збереження кінетичного моменту у вигляді

$$r^5\dot{\omega}+\nu 5r^4\dot{r}\omega=0\ . \qquad (11)$$

Тут $0<\nu<1$ корегує величину реактивного моменту, зумовленого збільшенням радіуса кулі.

Із (2) і (11) випливає, що

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega}=-5\lambda.. \qquad (12)$$

Тому

$$\omega(t)=\omega_0\exp(-5\nu\lambda t), \qquad (13)$$

де ω_0 – початкова швидкість обертання кулі.

Знайшовши інтеграли (10), маємо вирази для проекцій швидкості

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=e^{\phi}\left[c_1\sin(\theta)+c_2\cos(\theta)\right];\\ \dot{y}(t)&=e^{\phi}\left[c_1\cos(\theta)-c_2\sin(\theta)\right],\end{aligned} \qquad (14)$$

у яких $\phi=\dfrac{\alpha}{r_0\lambda}e^{-\lambda t}-3\mu\lambda t,\ \ \theta=-\dfrac{2}{5}\dfrac{\delta\omega_0}{\rho\nu\lambda}e^{-5\nu\lambda t}.$ (15)

Константи інтегрування c_1 та c_2 знаходимо з початкових умов (5)

$$c_1=\frac{\upsilon_0}{e^{\phi_0}}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta_0}-\cos(\varphi+\theta_0)ctg\theta_0\right),\quad c_2=\frac{\upsilon_0}{e^{\phi_0}}\cos(\varphi+\theta_0).$$

Тут $\phi_0=\dfrac{\alpha}{r_0\lambda},\ \ \theta_0=-\dfrac{2}{5}\dfrac{\delta\omega_0}{\rho\nu\lambda}.$

Якщо врахувати опір, який чинить середовище обертанню кулі, то кутову швидкість доводиться знаходити інтегруванням рівняння

$$\frac{\rho r^2}{15}\frac{d\omega}{dt}+\frac{1}{3}\rho r\nu\frac{dr}{dt}\omega+\mu_b\omega=0,$$

у якому $\mu_в$ – коефіцієнт динамічної в'язкості повітря або газу, в якому обертається тіло.

Із нього при $r=r_0\exp(\lambda t)$; $\omega(0)=\omega_0$ випливає, що

$$\omega(t)=\omega_0\exp(-q)\exp(-5\nu\lambda t)\exp\left[q\exp(-2\lambda t)\right], \qquad (16)$$

де $q=\dfrac{15\mu_b}{2\rho\lambda r_0^2}.$

При такій зміні кутової швидкості маємо

$$\theta(t)=-\frac{2\delta\omega_0\exp(-q)}{5\nu\lambda\rho}\exp(-5\nu\lambda t)\Phi\left(\frac{5\nu}{2};\frac{5\nu}{2}+1;q\exp(-2\lambda t)\right). \qquad (17)$$

Значення $\theta(t)$ залежить від значень виродженої гіпергеометричної функції.

Оскільки

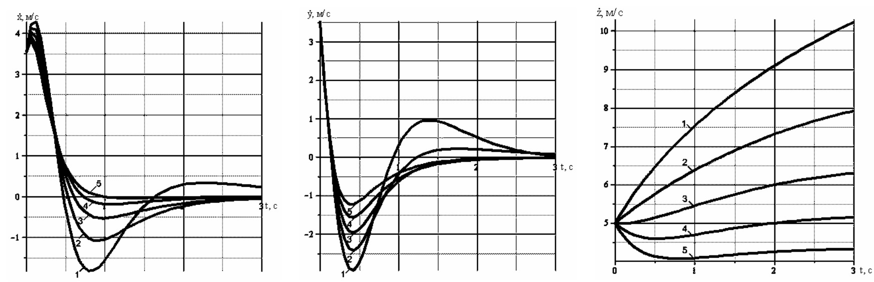
$$\exp(0) = 1;\ \Phi\left(\frac{5\nu}{2}; \frac{5\nu}{2} + 1; 0\right) = 1,$$

то при $\mu_b = 0$ ($q = 0$) вираз (16) переходить в (13), а вираз (17) – в (15).

Результати розрахунків та їх аналіз. Вивчимо вплив коефіцієнту λ, який характеризує швидкість збільшення маси, на проекції швидкості руху центру мас тіла за теорію, де враховується опір обертанню кулі. Для цього приймаємо такі вихідні дані $r_0 = 0{,}002$ м; $\rho = 1000$ кг/м^3; $\delta = 1$ кг/м^3; $\varphi = 45°$; $\omega_0 = 3000$ с$^{-1}$; $\upsilon_0 = 5$ м/с; $\dot{z}_0 = 5$ м/с; $\mu = 0{,}5$; $\mu_b = 1{,}85 \cdot 10^{-5}$ Па · с; $\nu = 0{,}3$ та різні α і λ.

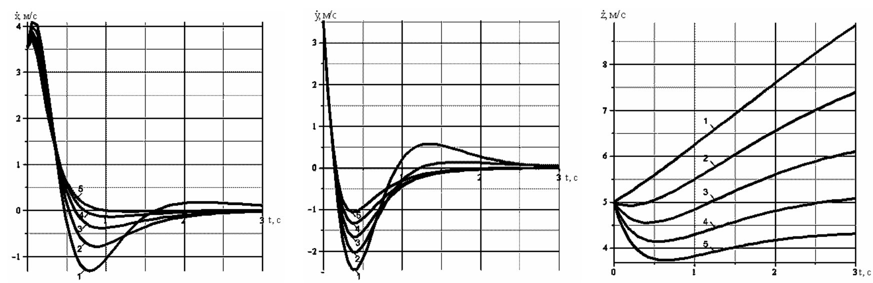
На рис. 2 та 3 зображені залежності від часу проекцій швидкості центру мас кулі, отримані при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с відповідно. Цифрам 1, 2, 3, 4, 5 відповідають значення $\lambda = 0{,}5; 0{,}75; 1; 1{,}25; 1{,}5$ с$^{-1}$. При більшій інтенсивності зростання радіуса (маси) кулі маємо більше спадання швидкості руху її центру мас. Внаслідок подвійного збільшення аеродинамічного опору ($\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, рис. 3) спостерігається зменшення проекцій швидкості руху, що відповідає фізичному протіканню процесу.

Внаслідок зростання радіуса кулі, що обертається, швидкість руху її центру мас має екстремум (мінімум) (рис. 4). Для швидкості руху тіла зростаючих розмірів без врахування дії сили Магнуса цей ефект було описано раніше в [9].



а) б) в)

Рисунок 2 – Залежність проекцій швидкості від часу при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda > 0$



а) б) в)

Рисунок 3 – Залежність проекцій швидкості від часу при $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda > 0$

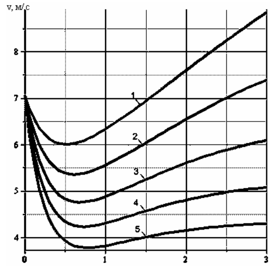


Рисунок 4 – Залежність швидкості руху від часу при $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda > 0$

Дослідження руху кулі, маса якої зменшується. При зменшенні радіуса та маси приймаємо залежність

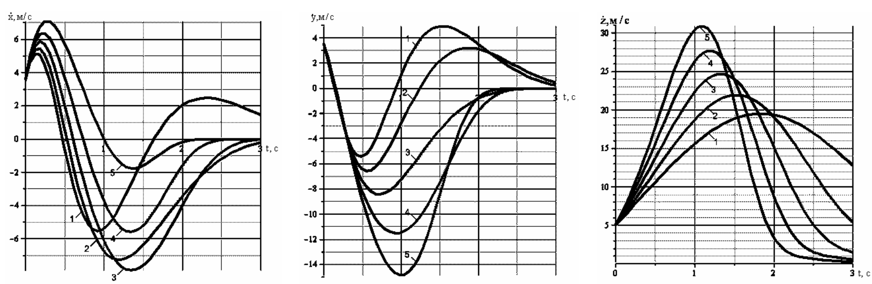
$$r = r(t) = r_0 \exp(-\lambda t).$$

В такому випадку маємо такі ж розв'язки, як і в попередньому пункті, тільки в них зміниться знак перед λ.

Результати розрахунків та їх аналіз. Вивчимо вплив коефіцієнту, який характеризує інтенсивність зменшення маси λ на проекції швидкості руху центру мас тіла за теорію, де враховується опір обертанню кулі. Для цього приймаємо такі вихідні дані: $r_0 = 0{,}002$ м; $\rho = 1000$ кг/м^3; $\delta = 1$ кг/м^3; $\varphi = 45°$; $\omega_0 = 3000$ с$^{-1}$; $\upsilon_0 = 5$ м/с; $\dot{z}_0 = 5$ м/с; $\mu = 0{,}5$; $\mu_b = 1{,}85 \cdot 10^{-5}$ Па · с; $\nu = 0{,}3$ та різні α і λ.

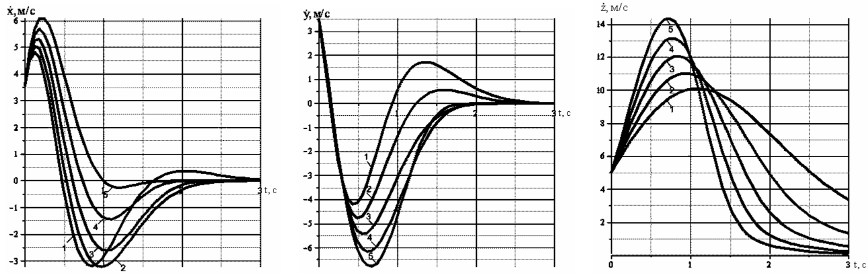
На рис. 5 та 6 зображено залежності від часу проекцій швидкості центру мас кулі, отримані при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с відповідно. Цифри 1, 2, 3, 4, 5 відповідають значенням $\lambda = 0{,}5; 0{,}75; 1; 1{,}25; 1{,}5$ с$^{-1}$. Подвійне збільшення аеродинамічного опору ($\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с, рис. 5) привело до зменшення проекцій швидкості руху, що відповідає фізичному протіканню процесу.

На відміну від випадку зростання радіуса, швидкість руху центру мас кулі, що зменшує радіус, має максимум, а не мінімум [10]. Це відображено графіками на рис. 7.



а) б) в)

Рисунок 5 – Залежність проекцій швидкості від часу при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та різних $\lambda < 0$



а) б) в)

Рисунок 6 – Залежність проекцій швидкості від часу при $\alpha = 10^{-3}$ м/с та різних λ

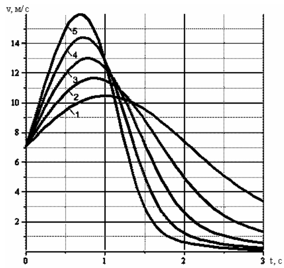


Рисунок 7 – Залежність швидкості руху від часу при $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ м/с та різних λ

Висновки. При експонентному законі збільшення радіуса кулі в часі та обертанні її навколо вертикальної вісі, з урахування сили лінійного опору середовища, перші інтеграли рівнянь руху виражаються через елементарні та відомі спеціальні функції. Сила Магнуса викривляє траєкторію падіння кулі в просторову лінію, але не змінює екстремальних властивостей швидкості падіння.

Список літератури: 1. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: Машиностроение, 1977. – 277 с. **2.** *Абрамчук Ф.И., Марченко А.П., Разлейцев Н.Ф. и др.* Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. – Киев: Техника, 1992. – 272 с. **3.** *Кучеренко С.І., Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М.* Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. **4.** *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – 751 с. **5.** *Хргиан А.Х.* Физика атмосферы. – Л., Гидрометеоиздат, 1969. – 320 с. **6.** *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. **7.** *Прандтль Л.* Эффект Магнуса и ветряной корабль // Успехи физических наук. – 1925. – Т. V, вып. 1-2. – С. 1-27. **8.** *Сагитов М.Н.* О движении вращающегося шара постоянной и переменной массы: автореферат дис. на соискание науч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.01 «Теоретическая механика». – Алма-Ата, 1965. – 14 с. **9.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Об экстремумах скорости падения сферического тела переменной массы // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – Вып. 22. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – С. 147-152. **10.** *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* О максимуме скорости при вертикальном падении однородного шара с показательным законом изменения радиуса // Инженерно-физический журнал. – 2009. – Т. 82. № 4. – С. 732-736.

Надійшла до редколегії 18.10.2009

УДК 539.3:621.313

Э.С.ОСТЕРНИК, канд.техн.наук, завод «Электротяжмаш», Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ СХЕМ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В МОЩНЫХ ЭЛЕКТРОМАШИНАХ

Виконано натурні дослідження напруг у сердечнику статора турбогенератора. Їх мета - контроль та рівномірний розподіл зусиль поміж призм сердечника. Розроблено моделюючу схему для ряду тензоприладів. Зажадано оцінку похибки їх лінеаризованих шкал.

The scope of works undertaken includes natural studies of stress in the stator core of turbogenerators. These studies were aimed to monitor and evenly distribute forces between the prisms of the core. Along with that, we have developed an analog circuit for a number of strain-gauge instruments. This necessarily required estimation of error of linearized scales of these instruments.

На значительном числе турбогенераторов производства различных фирм в процессе длительной эксплуатации наблюдаются обрывы резьбовых хвостовиков на стяжных призмах (шпильках) сердечников статоров. Такие аварии требуют останова турбоблоков на капремонт турбогенераторов по специальной технологии и в ряде случаев приводят к выходу генераторов из строя [1].

Во избежание таких явлений на турбогенераторах завода "Электротяжмаш" выполняется статическая тензометрия стяжных призм в процессе шихтовки и финишной прессовки сердечника статора. Это позволило отрегулировать затяжку призм так, чтобы обеспечить равномерное распределение между призмами усилий отдачи пакетов из листов активной стали сердечника. Такая отдача возникает после снятия давления пресса.

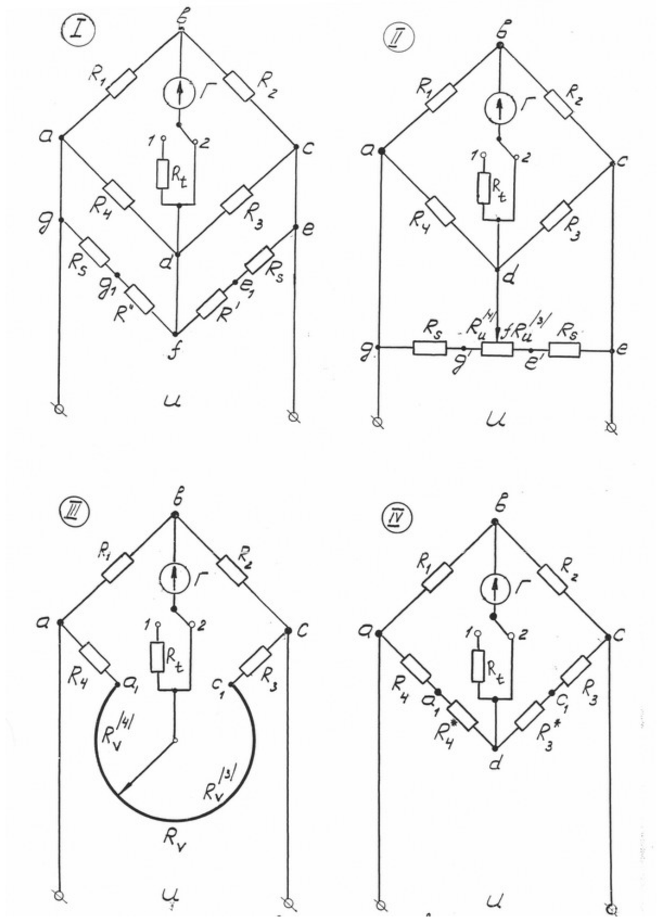
На тех же призмах установлены специальные тензорезисторы (ТР) с соответствующей экранированной проводкой, герметично выведенной из генератора через специальную муфту. По этим преобразователям проведена динамическая тензометрия в порядке приемочных испытаний.

Целью работы является контроль плотности прессовки сердечника при его изготовлении. Для этого требовалось определить фактические усилия отдачи сердечника статора после финишной прессовки. При этом исследовать равномерность распределения этих усилий по окружности сердечника и определить коэффициент отдачи сердечника. Поскольку ставится задача снижения разброса между усилиями отдачи в многочисленных призмах, особенно важны оценка и минимизация погрешности тензоаппаратуры.

Измерение усилий отдачи выполнено путем тензометрии стяжных призм с помощью наклеенных на их шейки тензомостов, исключающих деформацию изгиба. Тензомосты были подключены по парной схеме к измерителю статических деформаций. В приборе используется уравновешенная мостовая схема на реохорде с измерением нулевым методом. Непосредственная тарировка тензомостов на стяжных призмах практически невозможна. Были протарированы отдельные ТР на тарировочной балке. Определение коэффициентов усиления тензомоста потребовало разработки отдельной теории.

Далее проводится анализ широко распространенных тензомостов на постоянном токе с нулевым способом уравновешивания (реохорд, потенциометр, магазины сопротивления). Дана общая методика анализа с помощью моделирующей (эквивалентной) схемы. Получены рабочие формулы для расчета статических напряжений и деформаций по данным тензометрии, а также оценка погрешности этих формул.

Анализируются известные виды тензомостов (I, II, III)- см.рисунок.



На рисунке введены следующие обозначения:

I – тензомост на магазинах сопротивления;

II – тензомост на потенциометре;

III – тензомост на реохорде;

IV – эквивалентный тензомост;

Г – гальванометр постоянного тока;

R_1, R_2, R_3, R_4 – тензорезисторы (рабочие или компенсационные) или магазины сопротивления;
R_s – добавочные резисторы, предохраняющие мост от закорачивания плеч;
R_t – резистор, предохраняющий гальванометр от перегрузки при грубой балансировке (положение I ключа);
R^{I} и R^{II} – магазины сопротивления, служащие для балансировки;
R_u – сопротивление потенциометра (делится на $R_n^{(3)}$ и $R_n^{(4)}$);
R_v – сопротивление реохорда (делится на $R_v^{(3)}$ и $R_v^{(4)}$);
R_3^* и R_4^* – эквиваленты.

Расчет схемы I проведен в работе [2]. Введем схему IV, эквивалентную всем этим видам I- III. Эквиваленты R_3^* и R_4^* выбраны из условия:

$$R_3^* + R_3 = R_{cd}; \qquad R_4^* + R_4 = R_{ad}.$$

R_{cd} и R_{ad} – сопротивления плеч мостов I- III, замещаемых по схеме IV, между электротехническими точками $c(e)$ и $d(f)$; $a(g)$ и $d(f)$ соответственно.

Отсюда следуют формулы перехода от схем I- III к эквивалентной схеме IV, сведенные в табл. 1.

Таблица 1 – Расчет эквивалентов R_3^* и R_4^*

№ схемы	R_3^*	R_4^*	Особые условия
I	$-\dfrac{R_3^2}{R_3 + R_д + R'}$	$-\dfrac{R_4^2}{R_4 + R_д + R''}$	Магазин R' балансирует мост в исх. состоянии, а R" – в состоянии детали, подлежащем измерениям.
II	$-\dfrac{R_3^2}{R_3 + R_д + R_n^{(3)}}$	$-\dfrac{R_4^2}{R_4 + R_д + R_n^{(4)}}$	$R_n^{(3)} + R_n^{(4)} = R_n$
III	$R_p^{(3)}$	$R_p^{(4)}$	$R_p^{(3)} + R_p^{(4)} = R_p$

Выполним анализ эквивалентной схемы IV. Примем при выборе номинальных сопротивлений, входящих в мост: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$;

$$R_3^* << R; \qquad R_4^* << R. \tag{1}$$

Примем также, что тензорезисторы в каждом плече соединены последовательно, номинальное сопротивление и тензочувствительность каждого ТР одинаковы и равны соответственно r и k. Исследуются малые деформации.

Уравнение равновесия моста IV:

$$R_1(R_3 + R_3^*) = R_2(R_4 + R_4^*).$$

Отсюда, после логарифмирования и дифференцирования, получим:

$$\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} + \frac{dR_3}{R_3 + R_3^*} - \frac{dR_4}{R_4 + R_4^*} = \frac{dR_4^*}{R_4 + R_4^*} - \frac{dR_3^*}{R_3 + R_3^*}$$

или:

$$\sum_{j=1}^{4} (-1)^j \delta_j \frac{dR_j}{R_j} = \delta_3 \frac{dR_3^*}{R_3} - \delta_4 \frac{dR_4^*}{R_4}. \tag{2}$$

Здесь:

$$\delta_1 = \delta_2 = 1; \quad \delta_3 = \frac{R_3}{R_3 + R_3^*}; \quad \delta_4 = \frac{R_4}{R_4 + R_4^*}. \tag{3}$$

Проведем анализ в первом приближении. Для этого, исходя из (1,3), примем

$$\delta_3 = \delta_4 = 1. \tag{4}$$

Кроме того, ввиду малости деформаций, примем дополнительно к (1), что и в процессе деформации в знаменателях дробей из (2) можно положить:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R.$$

Аналогично $r_{ij} = r$. Тогда из (2) получим:

$$\sum_{j=1}^{4} (-1)^j \, dR_j = dR_3^* - dR_4^* . \tag{5}$$

По определению тензочувствительность

$$k = \frac{dr_{ij}}{r_{ij}} / \frac{dl_{ij}}{l_{ij}} . \tag{6}$$

Здесь i, j – индексы i-ого тензорезистора в j-ом плече моста;

$$R = pr, \qquad dR_j = \sum_{i=1}^{p} dr_{ij.} \tag{7}$$

Далее, истинная относительная деформация вдоль базы i-ого тензорезистора в j-ом плече согласно [3] определяется формулой:

$$\varepsilon_{ij} = \int_{l^{(0)}}^{l} \frac{dl_{ij}}{l_{ij}} . \tag{8}$$

Здесь индекс "0" относится к исходному состоянию тензометрируемой детали. Подставляя (6, 7) в (5), получим:

$$kr \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{p} (-1)^j \frac{dl_{ij}}{l_{ij}} = dR_3^* - dR_4^*,$$

или, интегрируя по диапазону измеряемой деформации,

$$kr \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{p} (-1)^j \varepsilon_{ij} = \Delta R_3^* - \Delta R_4^*. \tag{9}$$

Здесь $\Delta R_3^* = R_3^* - R_3^{(0)*}$ и т.д. В работе [2] показаны различные типы тензомостов А, В…К применительно к схеме 1, служащие для измерения деформаций различных деталей и напряжений в прямых стержнях постоянного сечения. При этом напряжение, подлежащее измерению, отделено от других напряжений.

Из (9) получим рабочие формулы применительно к тензомостам из таблицы [2]. Для расчета деформаций (мост типа А) получим:

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{kr}\left(\Delta R_4^* - \Delta R_3^*\right). \tag{10}$$

Индекс (1) означает, что анализ проводится в первом приближении. Для расчета напряжений вводится коэффициент передачи деформации по формуле

$$\alpha_{ij} = \frac{E\varepsilon_{ij}}{\sigma}, \tag{11}$$

где E – модуль продольной упругости; σ – напряжение, подлежащее измерению. Подставляя (11) в (9) и вводя коэффициент усиления тензомоста по формуле:

$$\gamma = -\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{j}\alpha_{ij}, \tag{12}$$

получим:

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{kr\gamma}\left(\Delta R_4^* - \Delta R_3^*\right). \tag{13}$$

Для перехода в таблице из работы [2] к моделирующей схеме IV следует принять $\beta = \gamma$, кроме типов B и D, где $\gamma_B = 2$; $\gamma_D = 2(1+\nu)$.

Коэффициенты α_{ij} и γ определяются на основании известного из теории упругости обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right].$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона.

Методику расчета коэффициента γ покажем на примере моста типа E. В прямом стержне постоянного сечения требуется определить напряжение растяжения или сжатия σ с исключением σ_b (изгиба).

Из теории расчета стержней получим:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma}{E} - \frac{|\sigma_b|_{\max}}{E}; \qquad \varepsilon_{13} = \frac{\sigma}{E} + \frac{|\sigma_b|_{\max}}{E};$$

$$\varepsilon_{12} = -\nu\frac{\sigma}{E} + \nu\frac{|\sigma_b|_{\max}}{E}; \quad \varepsilon_{14} = -\nu\frac{\sigma}{E} - \nu\frac{|\sigma_b|_{\max}}{E}.$$

Отсюда, согласно (11) и (12),

$$\gamma = (-1)^1\left[1 - \frac{|\sigma_b|_{\max}}{\sigma}\right] + (-1)^2\left[-\nu + \nu\frac{|\sigma_b|_{\max}}{\sigma}\right] +$$

$$+ (-1)^3\left[1 + \frac{|\sigma_b|_{\max}}{\sigma}\right] + (-1)^4\left[\nu - \nu\frac{|\sigma_b|_{\max}}{\sigma}\right] = 2(1+\nu).$$

Наконец, если тензомост подвергался предварительной градуировке на самом тензометрируемом стержне, напряжения вычисляются по формуле:

$$\sigma^{(1)} = \frac{E}{rk_g}(\Delta R_4^* - \Delta R_3^*),$$

где k_g – коэффициент чувствительности моста, полученный в результате предварительной градуировки.

Для различных видов тензомостов 1-III из формул (10), (13) и табл. 1 получим:

– для деформаций:

$$\varepsilon^{(1)} = a_s L_s; \tag{14}$$

– для напряжений:

$$\sigma^{(1)} = A_s L_s; \tag{15}$$

– для напряжений в градуируемых стержнях:

$$\sigma^{(1)} = B_s L_s. \tag{16}$$

Здесь S – номер вида тензомоста. Значения величин, входящих в (14 – 16), даны в табл. 2.

Далее займемся оценкой погрешности формул первого приближения (14-16). Для этого проведем анализ эквивалентной схемы IV во втором приближении, отказавшись от упрощения (4). Вместо этого примем:

$$\delta_3 = \delta_3^{(0)} = \text{const}; \quad \delta_4 = \delta_4^{(0)} = \text{const}.$$

Тогда из (2) и (6 – 8) получим после интегрирования:

$$kr\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{p}(-1)^j \delta_j \varepsilon_{ij} = \delta_3 \Delta R_3^* - \delta_4 \Delta R_4^* .$$

Отсюда следуют формулы второго приближения:

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{kr}\left(\delta_4 \Delta R_4^* - \delta_3 \Delta R_3^*\right); \tag{17}$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{E}{kr\lambda}\left(\delta_4 \Delta R_4^* - \delta_3 \Delta R_3^*\right). \tag{18}$$

Здесь

$$\lambda = -\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{p}(-1)^j \delta_j \alpha_{ij} .$$

Теперь главную часть относительной погрешности формул первого приближения определим путем сравнения с формулами второго приближения:

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}}{\varepsilon^{(1)}}; \qquad \Delta_\sigma = \frac{\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)}}{\sigma^{(1)}}. \tag{19}$$

Подставляя формулы (10, 13, 17, 18) в (19), получим

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\xi_4 \Delta R_4^* - \xi_3 \Delta R_3^*}{\Delta R_4^* - \Delta R_3^*}; \quad \Delta_\sigma = \frac{\rho_4 \Delta R_4^* - \rho_3 \Delta R_3^*}{\Delta R_4^* - \Delta R_3^*}. \tag{20}$$

Здесь:

$$\xi_3 = 1 - \delta_3; \qquad \xi_4 = 1 - \delta_4;$$

$$\rho_3 = 1 - \frac{\gamma}{\lambda}\delta_3; \quad \rho_4 = 1 - \frac{\gamma}{\lambda}\delta_4.$$

Для отдельных видов тензомостов 1-III формулы (20) упростятся. Соответствующие значения Δ_ε и Δ_σ приведены в табл. 2. При этом вводились обозначения:

$$R^{(4,0)} = R + R_{\partial} + R_{u}^{(4,0)} ;$$

$$\overline{R}^{(4,0)} = R + R_{\partial} + R_{u} - R_{u}^{(4,0)} .$$

Формулы для Δ_{ε} и Δ_{σ} по табл. 2 следует учитывать при синтезе тензомостов, выбирая их параметры по допустимой погрешности измерения. Тогда расчет отсчетных шкал тензомостов можно проводить по формулам первого приближения – ср.[4,5].

Применение описанной методики позволило снизить погрешность тензоизмерений до 0,7 %. Разброс измеренных статических усилий отдачи активной стали в призмах до регулирования их затяжки достигал 37 %, после выравнивания не превысил 8,4 %. При этом запас по текучести составил n_y = 2,86.

Таблица 2 – Константы к формулам (14-16, 19,20)

S	a_s	A_s	B_s	L_s	Δ_{ε}	Δ_{σ}
I	$\frac{r}{k}$	$a_1 = \frac{Ep^2}{\gamma}$	$\frac{Er}{k_g}$	$\frac{\Delta R''}{\left(R+R\partial+R''\right)\left(R+R\partial+R''^{(0)}\right)}$	ξ_4	ρ_4
II	a_1	A_1	B_1	$\Delta R_{II}^{4}\left[\frac{1}{R^{(4)}R^{(4,0)}}+\frac{1}{\overline{R}^{(4,0)}R^{(4,0)}}\right]$	$\frac{\xi_4\left[\overline{R}^{(4,0)}\right]^2-\xi_3\left[R^{(4,0)}\right]^2}{\left[\overline{R}^{(4,0)}\right]^2-\left[R^{(4,0)}\right]^2}$	$\frac{\rho_4\left[\overline{R}^{(4,0)}\right]^2-\rho_3\left[R^{(4,0)}\right]^2}{\left[\overline{R}^{(4,0)}\right]^2-\left[R^{(4,0)}\right]^2}$
III	$\frac{2}{kr}$	$a_3 = \frac{E}{\gamma}$	$\frac{2E}{rk_g}$	$\Delta R_v^{(4)}$	$\frac{\xi_3+\xi_4}{2}$	$\frac{\rho_3+\rho_4}{2}$

Выводы. С помощью промышленных испытаний методами тензометрии повышена механическая надежность мощных турбогенераторов за счет равномерного распределения усилий отдачи между стяжными призмами сердечника статора.

Разработана моделирующая (эквивалентная) схема для ряда широко применяемых тензоприборов, выполнена оценка погрешности их линеаризованных шкал.

Перспективы дальнейшего развития данного направления распространяются на тензодиагностику в процессе эксплуатации турбогенераторов и, соответственно, на тензоаппаратуру с неравноплечими и неуравновешенными мостами, а также со схемами на переменном токе. Такая тензометрия с применением ранее разработанных схем компьютеризации представляет собой дополнительное средство контроля торцевых зон статора, особенно в маневренных режимах.

Список литературы: **1**. *Остерник Э.С.* Моделирование деформационных полей в электромашиностроении с помощью функций *N* – переменных // Вестник НТУ «ХПИ», Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 29-42. **2.** *Остерник Э.С.* Тензомост на магазинах сопротивления // Измерительная техника. – 1982. – № 10. – С.27-29. **3**. *Шапошников Н.А*. Механические испытания металлов. – М., Машгиз, 1954. – 443 с. **4.** *Хорна О.* Тензометрические мосты. – М.-Л., 1962. – 336 с. **5**. Экспериментальная механика. Книга 1 / Под ред. *А.Кобаяси*. – М., 1990. – 616 с.

Поступила в редколлегию 11.10.2009

УДК 539.376

Я.В.ПАВЛЮК, асп., інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

ДО РОЗРАХУНКУ ОБЕРНЕНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЗУЧОСТІ НЕЛІНІЙНО В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПОЛІМЕРІВ ЗА УМОВ ПОВНОГО РОЗВАНТАЖЕННЯ

Розглянуто задачу визначення деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів у режимі стаціонарного навантаження та повного розвантаження. Розв'язок отримано на підставі гіпотези єдиної діаграми деформування виходячи із подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування. Режими навантаження задаються за допомогою функцій Хевісайда. Результати розрахунків апробовано експериментально на задачах розрахунку деформацій нестаціонарної повзучості нейлону та фторопласту.

The problem of the calculation of creep strains of nonlinearly-viscoelastic materials under stationary loading and full unloading is considered. The solution is obtained based on the hypothesis of the unified deformation diagram proceeding from the similarity of isochronous creep diagrams and a stress-strain diagram. The nonstationary loading regimes are given by the Hevyside's function. The calculation results have been approved experimentally on the problems of nonstationary creep strains calculation of nylon and polytetrafluorethylene.

Велика міцність, висока хімічна стійкість, хороша адгезія, мала вага та ряд інших переваг зумовили широке використання полімерних матеріалів у машинобудуванні та авіації, для виготовлення конструктивно складних і відповідальних деталей машин і механізмів, що піддаються тривалій дії змінних навантажень. Експериментально встановлено, що для більшості полімерів при тривалій дії розтягуючих і стискаючих напружень проявляються властивості нелінійного в'язкопружного деформування. Що зумовило інтенсивне дослідження процесів довготривалого деформування так, як воно дозволяє визначати терміни експлуатації, як елементів так і конструкції в цілому.

Для задання залежності між деформаціями, напруженнями і часом широкого поширення отримали теорії повзучості спадкового типу, що дозволяють врахувати історію навантаження [1-4]. Основні складності, що виникають при використанні спадкової теорії, пов'язані із вибором ядра інтегрального рівняння, пошуком відповідної резольвенти та визначення параметрів ядра. На даний час опубліковано багато робіт, присвячених побудові нелінійних моделей спадкового типу. Деякі із цих моделей, а також отримані на їх основі результати обговорюються в [5-8]. Більш перспективною вважається нелінійна модель основне рівняння якої побудоване виходячи із умови подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування, як ізохрони для нульового моменту часу. На основі цієї моделі розв'язується задача із розрахунку деформацій нелінійної повзучості нелінійно в'язкопружних полімерних матеріалів при стаціонарному навантаженні та повному розвантаженні.

1 Постановка задачі дослідження. Об'єкт дослідження. Визначальне рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу не лінійністю задається інтегральним рівнянням [9,10]

$$\varphi_0\big(\varepsilon(t)\big) = \sigma(t) + \lambda\int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau \tag{1.1}$$

де $\varepsilon(t)$ – повна деформація, що включає пружну складову ε^e і деформацію повзучості $\varepsilon^c(t)$ в моменти часу t; $\sigma(t)$ – діюче напруження в моменти часу t; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування, $K(t-\tau)$ – ядро повзучості; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); t – час спостереження; τ – час, що передує моменту спостереження.

Функція $\varphi_0(\cdot)$ визначає вид нелінійності в (1.1), задається одночленною степеневою апроксимацією

$$\varphi_0(\varepsilon) = \frac{H}{q}(\varepsilon)^q, \tag{1.2}$$

Дробово-експоненційне ядро запропоноване в [2] задається співвідношенням

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n(t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma\big[(1+\alpha)(1+n)\big]}, \tag{1.3}$$

для випадку повзучості. Де α і β – параметри дробово-експоненційного ядра причому $-1 < \alpha < 0$, а $\beta > 0$.

Параметри α і β дробово-експоненційного ядра, а також реологічний параметр λ у рівнянні (1.1) визначаються по результатах обробки експериментальних даних на одновісну повзучість при фіксованій температурі і при декількох рівнях постійних напружень. В цьому випадку величина напруження $\sigma(t)$ задається співвідношенням

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k h(t-\tau_k), \tag{1.4}$$

де $h(t-\tau_k)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t) = 0$ при $t < \tau_k$ і $h(t) = 1$ при $t \ge \tau_k$), а $\sigma_k = \text{const}$.

В роботі в рамках рівняння (1.1) розв‘язується задача із розрахунку деформацій повзучості для нейлонових волокон FM 10001 і фторопласту-4. Результати розрахунку порівнюються з експериментальними даними, запозиченими із [11,12]. Задача включає визначення параметрів дробово-експоненційних ядер спадковості та експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях та при повному розвантаженні.

2 Обґрунтування виду нелінійності вихідної моделі. Інтегральне визначальне рівняння (1.1) встановлює зв’язок між деформацією і напруженням для нелінійно-в’язкопружних матеріалів із незалежною від часу нелінійністю. Нелінійність процесу повзучості визначається, як видно нелінійністю діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\cdot)$ і випливає із умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування. Єдина ізохронна діаграма відображає подібність ізохронних діаграм повзучості $\varphi_t(\varepsilon_i(t_j))$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i(0))$.

Узагальнена умова подібності ізохронних діаграм повзучості, включаючи і діаграму миттєвого деформування, як ізохрону для моменту часу $t = 0$, записується у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i(0)) = [1 + G(t_j)]\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \tag{2.1}$$

що задає подібність у площині (φ,ε) для кожного із фіксованих рівнів деформацій $\varepsilon_i(t)$ в інтервалі $i = \overline{1, \ell}$ по параметру t_j. Де $1 + G(t_j)$ $(j = \overline{1, n})$ – функція подібності, що визначається для кожної ізохронної діаграми повзучості; $\varphi_0(\cdot)$, $\varphi_t(\cdot)$ – функції, що задають напруження σ_i по діаграмі миттєвого деформування і по ізохронних діаграмах повзучості для кожного із моментів часу t_j.

Існування єдиної ізохронної діаграми деформування у відповідності із (2.1) може бути обґрунтовано поведінкою вихідних ізохронних діаграм повзучості до діаграми миттєвого деформування за допомогою усередненої функції подібності $\overline{1 + G(t_j)}$. Приведені ізохронні діаграми повзучості показані пунктирними лініями. Вважається, що єдина ізохронна діаграма деформування обґрунтована із похибкою δ, якщо приведені ізохронні діаграми не виходять за межі інтервалу, обмеженого величиною δ по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина δ прийнята рівною ±5 %.

Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ визначається із співвідношення

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{l} (\varphi_0(\varepsilon_i, 0)\varphi_t(\varepsilon_i, t_j)}{\sum_{i=1}^{l} (\varphi_t(\varepsilon_i, t_j))^2}, \tag{2.2}$$

котре усереднює функцію подібності $1 + G(t_j)$, знайдене для кожної j-ї ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розраховувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

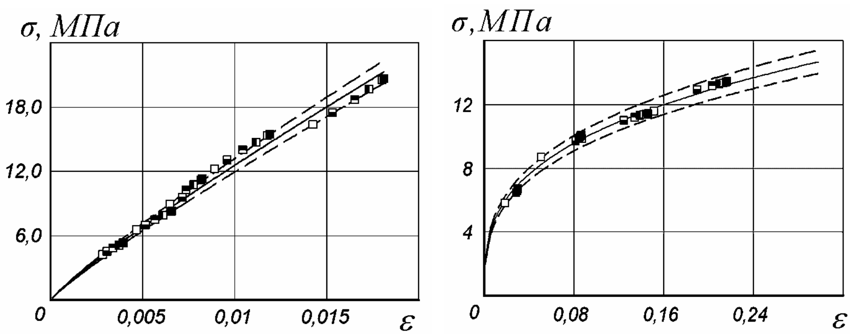


Рисунок 1

Існування єдиної ізохронної діаграми деформування підтверджується на рис. 1 для нейлонових волокон FM 10001(а) і фторопласту-4 (б). Вихідні ізохронні діаграми повзучості задані квадратиками, товстими суцільним лініями показані діаграми миттєвого дефомування $\varphi_0(\varepsilon)$. Приведені до діаграми миттевого деформування (товста суцільна лінія) за допомогою усередненої функції подібності (2.2) вихідні ізохронні діаграми повзучості не виходять, як видно за межі інтервалу, обмеженого величиною похибки $\delta = \pm 5$ % (штрихові лінії). Дискретні значення вихідних і приведених ізохронних діаграм повзучості нанесені квадратиками. Для нейлонових волокон FM 10001(а) точки відповідають моментам часу $t_j = 1{,}5$ (□),36 (⬓), 105 (⬒),340 (◧), 840(◨),960 (■) годин, для фторопласту-4 (б) точки відповідають моментам часу $t_j = 234$ (□),1849 (⬓), 4362 (⬒),6517 (◧), 8491(◨),10646(◩),13518 (■) хвилин.

3 Визначення параметрів ядра. В роботі невідомі параметри α, β і λ визначаються із даних отриманих із умови існування єдиної ізохронної діаграми миттєвого деформування і представлених у вигляді усередненої функції подібності $\overline{1+G(t_j)}$.

В якості критерію найкращого узгодження функції подібності (2.2) із експериментальними даними використовується умова мінімізації квадратичного відхилення розрахункових даних із експериментальними даними усередненої функції подібності $(\overline{1+G(t_j)})_{\exp}$.Задача зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

$$F(\alpha,\beta,\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{N}\left\{(\overline{1+G(t_j)})_{\exp}-\left[1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma\left[1+(1+n)(1+\alpha)\right]}\right]\right\}^2. \qquad (3.1)$$

Мінімізація функціоналу (3.1) здійснюється із використанням ітераційного методу Лівенберга-Маркардта [13]. Значення знайдених таким чином параметрів α, β і λ для досліджуваних матеріалів приведені в табл. 1. Також тут приведені значення значення коефіцієнтів q і H у рівнянні (1.2), що задає діаграму миттєвого деформування $\varphi_0(\cdot)$

Таблиця 1

В'язкопружні матеріали	Параметри ядра			Параметри діаграми миттєвого деформування	
	α	β, год$^{-(1+\alpha)}$	λ, год$^{-(1+\alpha)}$	Н, МПа	q
Нейлон FM 10001	-0,815	-0,127	0,254	665,24	0,8878
фторопласт-4	-0,703	-0,13	0,062	21,806	0,3264

4 Повзучість при постійних напруженнях. Найпростіша перевірка застосування дробово-експоненційного ядра (1.3) і параметрів ядра знайдених по значеннях усередненої функції подібності для розв'язку задач нелінійної теорії в'язкопружності може бути здійснена на прикладі розрахунку деформацій повзучості при постійних напруженнях.

Умова навантаження постійними у часі напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t)=\sigma_k h(t)\ \ (k=\overline{1,m}), \qquad (4.1)$$

де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t)=0$ при $t<0$ и $h(t)=1$ при $t>0$), $\sigma_k = \text{const}$.

Розв’язавши рівняння (1.1) із врахуванням (1.2) і (4.1) відносно $\varepsilon(t)$, підставляючи ядро повзучості (1.3), отримуємо рівняння

$$\varepsilon(t)=\left(\frac{q\sigma_k}{H}\right)^{\frac{1}{q}}\left(1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma\left[1+(1+\alpha)(1+n)\right]}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.2}$$

де прийнято, що $\tau = 0$, $t-\tau = t$, а $h(0) = 1$.

Значення деформацій повзучості $\varepsilon(t)$ нелінійно в‘язкопружних матеріалів розрахованих по рівнянню (4.2) із використанням значень параметрів α, β і λ, приведених у табл. 1, співставлені на рис. 2 із експериментальними даними для нейлонових волокон (а) і фторопласту-4 (б). Результати розрахунку нанесені штриховими лініями, а експериментальні дані показані точками. Експериментальні значення повзучості для нейлонових волокон FM 10001 отримані із даних випробувань на повзучість при напруженнях σ_k = 3,2 (○), 4,96 (◒), 6,7 (◓), 9,27 (◐), 12,41 (●)МПа і для при напруженнях σ_k = 3,2 (○), 4,96 (◒), 6,7 (◓), 9,27 (◐), 12,41 (●)МПа і для фторопласту – 4 – при напруженнях σ_k = 5 (○), 7,5 (◒), 8,5 (◓), 10 (●).

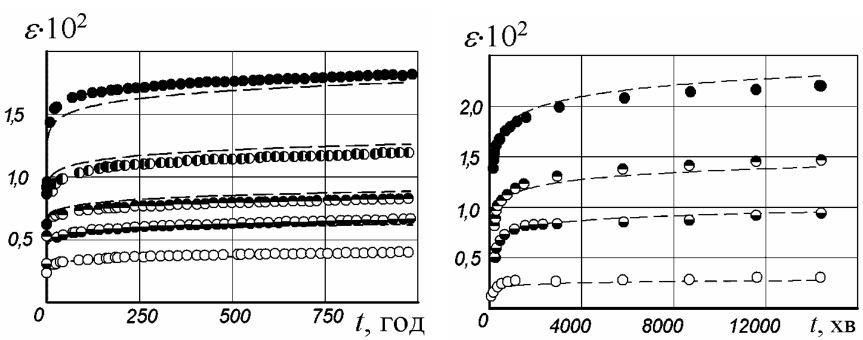


Рисунок 2

Експериментальні дані запозичені із [11] і [12]. Максимальна похибка між результатами розрахунку і експериментальними даними склала 7,5 % і отримана для нейлонових волокон FM 10001.

6 Зворотня повзучість при повному розвантаженні. Процес зворотньої повзучості пов’язаний із зменшенням у часі деформацій повзучості, накопиченої до моменту розвантаження.

Умова навантаження (1.4) при реалізації режиму повного розвантаження записується у вигляді

$$\sigma(t)=\sigma_1 h(t)-\sigma_1 h(t-t_1), \tag{6.1}$$

де σ_1 – напруження, прикладене в момент часу $\tau = 0$; t_1 – момент повного розвантаження, $h(\cdot)$ – функція Хевісайда.

Розв’язуючи рівняння (1.1) із врахуванням (1.2) і (6.1) відносно $\varepsilon(t)$, підставляючи ядро повзучості (1.3), отримуємо рівняння

$$\varepsilon(t)=\left[\frac{q\sigma_1 h(t)}{H}\left\{1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]}\right\}-\right.$$
$$\left.-\frac{q\sigma_1 h(t-t_1)}{H}\left\{1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n (t-t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(1+n)]}\right\}\right]^{1/q}, \tag{6.2}$$

де всі позначення співпадають із прийнятими в (1.1), (1.3), (6.1).

Значення деформацій зворотної повзучості $\varepsilon(t)$, розрахованих по рівнянню (6.2) із використанням параметрів ядра (1.3), приведених в табл. 1, співставлені на рис. 3 для нейлонових волокон FM 10001 (а) і для фторопласту – 4 (б). Режим навантаження для нейлонових волокон FM 10001 включав навантаження із початковим напруженням σ_1 = 6,2 (○) і 12,4 (●) МПа і повне розвантаження в момент часу t_1 = 1 година, а для фторопласту – 4 початковим напруженням σ_1 = 5 МПа (○) (б) і повне розвантаження в момент часу t_1 = 14400 хвилин. Значне розходження експериментальних даних із розрахунковими для нейлонових волокон FM 10001 пов'язані із тим, що експеримент на розвантаження проводився на іншому обладнанні ніж базовий експеримент на повзучість. Тому для перевірки доцільності застосування нелінійної моделі для розрахунку деформацій повзучості при повному розвантаженні параметри для моделі визначались по кривих повзучості із експерименту на розвантаження. В табл. 2 представлені значення параметрів ядра та параметрів діаграми q і H. На рис. 4 представлено співставлення результатів розрахунку деформацій зворотної повзучості із експериментальними даними. У випадку фторопласту, як видно із рис. 3, результати розрахунків не узгоджуються. Це може пояснюватись тим, що матеріал є неповністю в'язкопружним. Після розвантаження виникають залишкові деформації, котрі нелінійною моделлю (1.1) не враховуються.

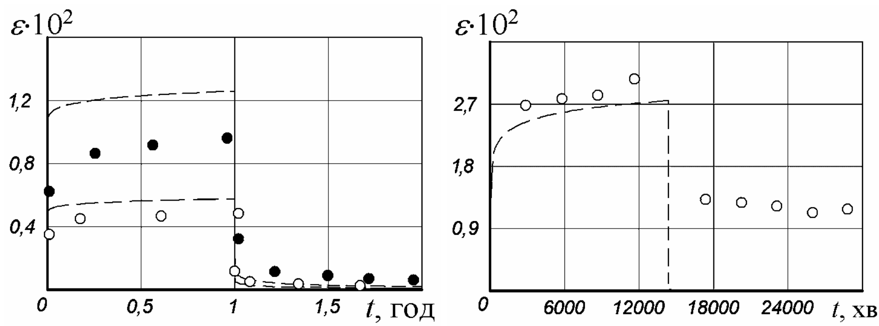


Рисунок 3

Таблиця 2

В'язкопружні матеріали	Параметри ядра			Параметри діаграми миттєвого деформування	
	α	β, год$^{-(1+\alpha)}$	λ, год$^{-(1+\alpha)}$	H, МПа	q
Нейлон FM 10001	-0,999	-1,007	0,146	954,58	0,8678

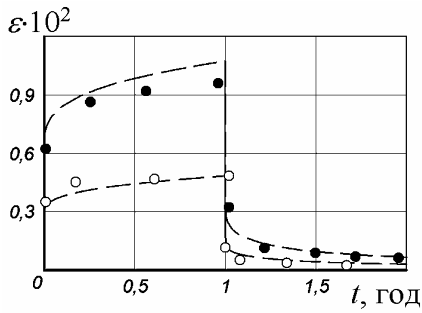


Рисунок 4

Висновки. Як видно із результатів розрахунку на рис. 2 отримано задовільне узгодження експериментальних даних із розрахунковими. Що підтверджує доцільність застосування нелінійної моделі, яка будується на підставі гіпотези єдиної діаграми деформування виходячи із подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування, для розрахунку деформацій повзучості при стаціонарному навантажені та при повному розвантаженні. Найбільша похибка була отримана для фторопласту – 4 в режимі повного розвантаження. Значна похибка зумовлена тим, що матеріал не є повністю в'язкопружним, а відповідно після розвантаження в нього виникають залишкові деформації, тому при прогнозуванні процесів довготривалого деформування при нестаціонарних режимах навантаження, крім базового експерименту на повзучість потрібно проводити експеримент на повне розвантаження для визначення, чи є він повністю в'язкопружним.

Список літератури: **1.***Кристенсен Р.М.* Введение в теорию вязкоупругости: пер. с англ. под ред. Г.С.Шапиро. – М.: Мир, 1974. – 340 с. **2.***Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с. **3.** *Golub V.P, Romanov A.V., Romanova N.V.* Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 9. – P. 459-470. **4**. *Khoroshun L.P* Fundamentals of viscoelastoplasticity and hardening theory revisited // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44, № 2. – P. 121-134. **5.** *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* К вопросу о нелинейной теории вязкоупругости // В сб.: Прочность и пластичность. – М.: Наука, 1971. – С. 270-276. **6.** *Каминский А.А., Гаврилов Г.В.* Механика разрушения полимеров. – К.: Наукова думка, 1988. – 224 с. **7**. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 278 с. **8**. *Колтунов М.А., Николаевский А.С.*К вопросу исследования одномерной задачи нелинейной ползучести // Механика полимеров. – 1966. – № 5. – С. 678-687**. 9.** *Голуб В.П.* Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении // Вісн. Донец. ун-ту. Серія А, Природ. науки. – 2006. – Вип. 1, ч. 1. – С. 97-101. **10.** *Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В.* Нелинейная ползучесть волокнистых однонаправленных композитов при растяжении в направлении армирования // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 20-34. **11**. *Marin J., Webber A.C., Weissmann G.F.* Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion // Proc. ASTM. – 1954. – Vol. 54. – P. 1313-1343. **12.** *Павлов П.А., Кондакова О.Н., Белан-Гайко В.Н.* Ползучесть полиэтилена при плоском напряженном состоянии в условиях нестационарного нагружения // Механика композитных материалов. – 1980. – № 5. – С. 793-801**. 13.** J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstrom, More J.J. Users guide to minipack // Argone National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – 238 p.

Надійшла до редколегії 18.11.2009

УДК 629.7.05:531.1

Ю.А.ПЛАКСИЙ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

РАЗЛОЖЕНИЕ 5-ГО ПОРЯДКА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КВАТЕРНИОНАХ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ КАЖУЩИХСЯ ПОВОРОТОВ

За допомогою методу обернення степеневих рядів для компонент вектору лінійного повороту на інтервалі $[0,\Delta t]$ отримане розкладання часткового рішення кінематичного рівняння в кватерніонах у степеневий ряд по позірним поворотам. Цей ряд для векторної частини кавтерніона повороту містить члени, що залежать від динамічних характеристик твердого тіла у вигляді співвідношень головних моментів інерції. Приведене розкладання може бути застосоване для отримання алгоритмів визначення орієнтації твердого тіла по позірним поворотам до четвертого порядку включно.

By means of a method of the inversion of degree series for a components of the vector of linear turn on an interval $[0,\Delta t]$ decomposition of the particular solution of the kinematic equation in quaternions in the degree series of seeming turns is received. The degree series for a vector part quaternion turn contains members who depend on dynamic characteristics of a rigid body in the form of correlations of the main moments of inertia. The obtained decomposition can be used for construction of algorithms of definition of a rigid body orientation to the fourth order inclusive.

Решение задачи определения ориентации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) основано на применении алгоритмов определения поворота, использующих первичную информацию о вращении твердого тела на такте $[t_{n-1},t_n]$ в виде приращений интегралов от проекций вектора абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ на связанные оси (кажущихся поворотов) [1]

$$\theta^*_{n,i} = \int\limits_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \qquad i = 1,2,3. \tag{1}$$

При этом общее решение кинематического уравнения

$$\dot{\Lambda} = 0{,}5\Lambda \circ \vec{\omega} \tag{2}$$

представляется в виде формулы сложения поворотов

$$\Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ \Delta\Lambda_n , \tag{3}$$

где $\Lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^{\mathrm{T}}$ – кватернион ориентации, $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\Lambda_n = \Lambda(t_n)$, $\Lambda_{n-1} = \Lambda(t_{n-1})$, $\Delta\Lambda_n$ – частное решение уравнения (2) с начальным условием $\Lambda(0) = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, $\circ$ – знак кватернионного умножения.

Существующие алгоритмы определения поворота, как правило, являются результатом формальных разложений частного решения $\Delta\Lambda_n$ в ряд, содержащий конечные разности «назад» вектора кажущегося поворота $\vec{\theta}^*_n = (\theta^*_{n1}, \theta^*_{n2}, \theta^*_{n3})^{\mathrm{T}}$ различного порядка [1]. При этом не учитывается тот факт, что ω_i являются решениями соответствующих динамических уравнений.

Получим разложение частного решения $\Delta\Lambda$ кинематического уравнения (2) на интервале $[0,\Delta t]$ в виде степенного ряда в терминах кажущихся поворотов (1) с учетом динамических уравнений Эйлера

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3 + m_1 , \ (1,2,3) \tag{4}$$

с начальными условиями

$$\omega_i(0) = \omega_{i0}, \quad i = 1,2,3, \tag{5}$$

где $a_1 = (I_2 - I_3)/I_1$ – динамический коэффициент, I_1, I_2, I_3 – главные моменты инерции твердого тела ($I_1 \geq I_2 \geq I_3$), $m_1 = M_1/I_1$, M_1, M_2, M_3 – проекции вектора главного момента $\vec{M}$ на связанные оси, (1,2,3) – символ круговой перестановки индексов.

Примем, что на такте съема первичной информации (1) приведенные моменты m_i постоянны $m_i = m_i(t_{n-1})$ и ограничены по величине:

$$\left|m_i\right| = O(\omega^2), \ i = 1,2,3, \tag{6}$$

где $\omega = \max\limits_{t \in [t_{n-1}, t_n]} \left|\vec{\omega}(t)\right|$.

Интегрируя уравнение (4) на такте $[0,t]$, получим интегральное уравнение

$$\omega_1(t) = \omega_{10} + \int\limits_0^t (a_1\omega_2\omega_3 + m_1)d\tau, \quad (1,2,3), \tag{7}$$

решение которого $\omega_1(t)$ удовлетворяет динамическому уравнению (4) с начальным условием (5). Применим к уравнению (7) метод последовательных приближений Пикара, получим:

$$\omega_1 = \omega_{10} + (a_1\omega_{20}\omega_{30} + m_1)t + \frac{1}{2}a_1(\omega_{10}(a_2\omega_{30}^2 + a_3\omega_{20}^2) + m_2\omega_{30} + m_3\omega_{20})t^2 +$$

$$+\frac{1}{6}a_1(4a_2a_3\omega_{10}^2\omega_{20}^2 + (a_1\omega_{20}\omega_{30} + m_1)(a_2\omega_{30}^2 + a_3\omega_{20}^2) + 3\omega_{10}(a_2m_3\omega_{30} +$$

$$+ a_3m_2\omega_{20}) + 2m_2m_3)t^3 + O(t^4). \tag{8}$$

Введем вектор линейного поворота на интервале $[0,\Delta t]$:

$$\vec{\theta}_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})^T \Delta t = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T. \tag{9}$$

Проинтегрируем выражение (8) на промежутке $[0,\Delta t]$, получим

$$\theta_1^* = \int\limits_0^{\Delta t} \omega_1(t)d\tau = \theta_{01} + \frac{1}{2}(a_1\theta_{02}\theta_{03} + \mu_1) + \frac{1}{6}a_1(\theta_{03}(a_2\theta_{01}\theta_{03} + \mu_2) +$$

$$+\theta_{02}(a_3\theta_{01}\theta_{03} + \mu_3)) + \frac{1}{24}a_1(4a_2a_3\theta_{01}^2\theta_{02}\theta_{03} + (a_1\theta_{02}\theta_{03} + \mu_1)(a_2\theta_{03}^2 + a_3\theta_{02}^2) +$$

$$+3\theta_{01}(a_2\mu_3\theta_{030} + a_3\mu_2\theta_{02}) + 2\mu_2\mu_3) + O(\theta_0^5), \tag{10}$$

где обозначено $\mu_i = m_i(\Delta t)^2$, $i = 1,2,3$.

Нетрудно видеть, что в условиях дополнительных ограничений на μ_i

$$\mu_1 \leq \theta_0^2 - a_1\theta_{02}\theta_{03}, \quad (1,2,3) \tag{11}$$

ряд (10) мажорируется рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\theta_0^k}{k}$, который сходится при $\theta_0 \leq 1$, где $\theta_0 = \left|\vec{\theta}_0\right| = (\theta_{01}^2 + \theta_{02}^2 + \theta_{03}^2)^{1/2}$.

Перепишем ряд (10) в виде

$$\theta_{01}=\theta_{01}^{*}-\frac{1}{2}(a_1\theta_{02}\theta_{03}+\mu_1)-\frac{1}{6}a_1(\theta_{01}(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)+(\mu_2\theta_{03}+\mu_3\theta_{02}))-$$
$$-\frac{1}{24}a_1(4a_2a_3\theta_{01}^2\theta_{02}\theta_{03}+(a_1\theta_{02}\theta_{03}+\mu_1)(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)+3\theta_{01}(a_2\mu_3\theta_{03}+$$
$$+a_3\mu_2\theta_{02})+2\mu_2\mu_3)+O(\theta_0^5)\qquad(1,2,3)$$

и применим к нему процедуру метода последовательных приближений, полагая в качестве начального приближения $\theta_{01}=\theta^{*}_{01}$, получим:

$$\theta_{01}=\theta_{01}^{*}-\frac{1}{2}(a_1\theta_2^{*}\theta_3^{*}+\mu_1)+\frac{1}{12}a_1(\theta_1^{*}(a_2\theta_3^{*2}+a_3\theta_2^{*})+(\mu_2\theta_3^{*}+\mu_3\theta_2^{*}))-$$
$$-\frac{1}{24}a_1(\theta_1^{*}(a_2a_3\theta_1^{*}\theta_2^{*}\theta_3^{*}+a_2\mu_3\theta_3^{*}+a_3\mu_2\theta_2^{*})+\mu_2\mu_3)+O(\theta^{*5}),\quad(1,2,3)\quad(12)$$

В условиях принятых допущений (6), (11) ряд (12) сходится при любых θ^{*}_{i}, поскольку сходится его мажорантный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\theta^{*k}}{k!}$.

Воспользуемся полученными разложениями для ω_i(8), θ^{*}_{i}(10) и θ_{0i} (12) и представлением частного решения кинематического уравнения (2) в виде ряда Пеано [1]:

$$\Delta\Lambda=1+\frac{1}{2}\vec{\theta}^{*}+\frac{1}{4}\int_0^{\Delta t}A_1dt+\frac{1}{8}\int_0^{\Delta t}A_2dt+\frac{1}{16}\int_0^{\Delta t}A_3dt+...+\frac{1}{2^{k+1}}\int_0^{\Delta t}A_kdt+...,\qquad(13)$$

где $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_k$ – кватернионы, для которых, начиная с $k=2$ имеет место рекуррентная формула $A_{k+1}=\int_0^{\Delta t}A_kdt\circ\vec{\omega}$, $A_1=\vec{\theta}^{*}\times\vec{\omega}-\vec{\theta}^{*}\vec{\omega}$.

Подстановка в формулу (13) выражений для θ^{*}_{i} и ω_i в виде рядов (8), (10) позволяет представить подынтегральные выражения в виде функций от времени, что дает возможность взять аналитически все интегралы и получить представление частного решения уравнения (2) на интервале $[0,\Delta t]$ в виде ряда по степеням компонент вектора линейного поворота $\vec{\theta}_0$ (9):

$$\Delta\lambda_0=1-\tfrac{1}{8}\theta_0^2-\frac{1}{8}(a_1+a_2+a_3)\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}-\frac{1}{8}(\mu_1\theta_{01}+\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-$$
$$-\frac{1}{24}(a_1+a_2+a_3)(a_1\theta_{02}^2\theta_{03}^2+a_2\theta_{01}^2\theta_{03}^2+a_3\theta_{01}^2\theta_{02}^2+\mu_1\theta_{02}\theta_{03}+\mu_2\theta_{01}\theta_{03}+$$
$$+\mu_3\theta_{01}\theta_{02})+\frac{1}{96}(a_1^2\theta_{02}^2\theta_{03}^2+a_2^2\theta_{01}^2\theta_{03}^2+a_3^2\theta_{01}^2\theta_{02}^2)-\frac{1}{48}(a_1\mu_1\theta_{02}\theta_{03}+$$
$$+a_2\mu_2\theta_{01}\theta_{03}+a_3\mu_3\theta_{01}\theta_{02})-\frac{1}{32}(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)-\frac{1}{32}\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_0^2(a_1+a_2+a_3+$$
$$+\frac{1}{3}a_1a_2a_3)-\frac{1}{96}a_1\theta_{02}\theta_{03}(2a_1+3a_2+3a_3)(\mu_2\theta_{03}+\mu_3\theta_{02})-\frac{1}{96}a_2\theta_{01}\theta_{03}(3a_1+$$

$$+2a_2+3a_3)(\mu_1\theta_{03}+\mu_3\theta_{01})-\frac{1}{96}a_3\theta_{01}\theta_{02}(3a_1+3a_2+2a_3)(\mu_1\theta_{02}+\mu_2\theta_{01})-$$

$$-\frac{1}{48}(a_1+a_2+a_3)(\mu_2\mu_3\theta_{01}+\mu_1\mu_2\theta_{03}+\mu_1\mu_3\theta_{02})+\frac{1}{384}\theta_0^4+\frac{1}{192}\theta_0^2(\mu_1\theta_{01}+$$

$$+\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})+\frac{1}{192}(a_1+a_2+a_3)\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_0^2+O(\theta_0^5);$$

$$\Delta\lambda_1=\frac{1}{2}\theta_1^*+\frac{1}{24}(\mu_3\theta_{02}-\mu_2\theta_{03})+\frac{1}{24}\theta_{01}(a_3\theta_{02}^2-a_2\theta_{03}^2)-\frac{1}{48}\theta_{01}\theta_0^2+$$

$$+\frac{1}{48}a_1\theta_{02}\theta_{03}(a_3\theta_{02}^2-a_2\theta_{03}^2)-\frac{1}{64}\theta_{02}\theta_{03}(\theta_{01}^2(a_1+a_2+a_3)+\theta_0^2)-$$

$$-\frac{1}{192}\theta_{02}\theta_{03}(\theta_{01}^2(a_1+a_2+a_3)-a_1\theta_0^2)+\frac{1}{48}\mu_1(a_3\theta_{02}^2-a_2\theta_{03}^2)-\frac{1}{96}\mu_1\theta_0^2+$$

$$+\frac{1}{48}\theta_{01}(a_3\mu_2\theta_{02}-a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{48}\mu_1\theta_{01}^2-\frac{1}{48}\theta_{01}(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})+$$

$$+\frac{1}{160}a_1\theta_{01}(a_3^2\theta_{02}^4-a_2^2\theta_{03}^4)-\frac{1}{240}a_1\theta_{01}(a_3\theta_{02}^4+a_2\theta_{03}^4)+\frac{1}{960}\theta_{01}(a_2\theta_{03}^4-$$

$$-a_3\theta_{02}^4)+\frac{1}{480}a_2a_3\theta_{01}^3(a_3\theta_{02}^2-a_2\theta_{03}^2)+\frac{1}{960}a_1\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)-$$

$$-\frac{7}{960}a_3\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2+a_3\theta_{02}^2)-\frac{1}{160}a_2a_3\theta_{01}^3\theta_0^2+\frac{1}{160}a_2a_3\theta_{01}^5+\frac{1}{960}\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2-$$

$$-a_3\theta_{02}^2)-\frac{1}{64}a_1^2\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2-\frac{3}{160}a_1(a_2+a_3)\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2+\frac{1}{960}(a_2-a_3)\times$$

$$\times\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2+\frac{1}{3840}\theta_{01}\theta_0^4-\frac{1}{32}a_1\mu_1\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}+\frac{7}{480}(a_2+a_3)\mu_1\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}+$$

$$+\frac{11}{480}a_1\theta_{02}\theta_{03}(a_3\mu_2\theta_{02}-a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{160}a_1(a_2\mu_2\theta_{03}^2-a_3\mu_3\theta_{02}^2)+\frac{1}{480}a_2a_3\theta_{01}^3\times$$

$$\times(\mu_3\theta_{02}-\mu_2\theta_{03})-\frac{1}{80}a_1\theta_{02}\theta_{03}(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{240}a_1(\mu_2\theta_{03}^3+\mu_3\theta_{02}^3)-$$

$$-\frac{1}{96}a_1\theta_{01}^2(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{48}\theta_{01}^2(a_3\mu_2\theta_{02}+a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{960}\theta_0^2(\mu_3\theta_{02}-$$

$$-\mu_2\theta_{03})+\frac{1}{60}\mu_1(a_3\mu_2\theta_{02}-a_2\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{120}\mu_1(\mu_2\theta_{02}+\mu_3\theta_{03})-\frac{1}{64}\mu_1^2\theta_{01}^2+$$

$$+\frac{1}{240}\theta_{01}(a_2\mu_3^2-a_3\mu_2^2)-\frac{7}{960}\theta_{01}(\mu_2^2+\mu_3^2)+O(\theta_0^6),\ (1,2,3) \qquad (14)$$

Теперь можно сделать обратный переход к величинам θ^*_i, используя полученный ряд (12). В результате найдем выражения для компонент кватерниона поворота $\Delta\Lambda=(\Delta\lambda_0,\Delta\lambda_1,\Delta\lambda_2,\Delta\lambda_3)^{\mathrm{T}}$ на интервале $[0,\Delta t]$:

$$\Delta\lambda_0=1-\frac{1}{8}\theta^{*2}+\frac{1}{384}\theta^{*4}+O(\theta^{*5});$$

$$\Delta\lambda_1 = \frac{1}{2}\theta_1^*(1 - \frac{1}{24}\theta^{*2} - \frac{1}{12}b_1) - \frac{1}{24}\eta_1 + \frac{1}{3840}\theta_1^*\theta^{*4} + \frac{1}{1440}\theta_1^*(a_1 b_1(a_2\theta_3^{*2} +$$

$$a_3\theta_2^{*2}) + a_2 b_2\theta_3^{*2} - a_3 b_3\theta_2^{*2}) + \frac{1}{720}a_2 a_3 b_1\theta_1^{*3} + \frac{1}{480}\theta_1^*(a_2 b_3\theta_3^{*2} - a_3 b_2\theta_2^{*2}) +$$

$$+ \frac{1}{960}b_1\theta_1^*\theta^{*2} + \frac{1}{1440}(b_2\mu_2\theta_3^* - b_3\mu_3\theta_2^* + \theta_1^*(a_3\mu_2^2 - a_2\mu_3^2) + a_1(a_2\mu_2\theta_3^{*2} -$$

$$-a_3\mu_3\theta_2^{*2})) + \frac{1}{960}\eta_1\theta^{*2} + \frac{1}{720}a_1\rho_1\theta_2^*\theta_3^* + \frac{1}{480}(\mu_1\rho_1 - a_1\gamma_1 - a_2 a_3\eta_1 - \theta_1^*(\mu_2^2 +$$

$$+\mu_3^2)) + \frac{1}{360}\mu_1((a_2 + a_3)\theta_1^*\theta_2^*\theta_3^* - \gamma_1) - \frac{1}{240}\theta_1^{*2}(a_2\mu_2\theta_3^* + a_3\mu_2\theta_2^*) + O(\theta^{*6}),$$

$$(1,2,3) \qquad (15)$$

где обозначено $\theta^{*2} = \theta_1^{*2} + \theta_2^{*2} + \theta_3^{*2}$,

$$b_1 = a_2\theta_3^{*2} - a_3\theta_2^{*2}, \eta_1 = \mu_2\theta_3^* - \mu_3\theta_2^*,\ \gamma_1 = a_2\mu_3\theta_3^* - a_3\mu_2\theta_2^*,$$

$$\rho_1 = \mu_2\theta_2^* + \mu_3\theta_3^*, \quad (1,2,3). \qquad (16)$$

Полученное разложение частного решения кинематического уравнения (2) имеет пятый порядок по θ^* и представлено в виде степенного ряда в терминах кажущихся поворотов (1), относящихся только к одному такту измерений, и содержит члены, зависящие от динамических коэффициентов a_1, a_2, a_3, причем минимальный порядок этих членов по θ^* равен трем. В практическом плане это решение может быть использовано для исследования влияния динамических характеристик на процессы ориентации твердого тела и полагаться в основу построения алгоритмов определения поворота, имеющих порядок до четвертого включительно, а также для получения аналитических локальных оценок точности.

Сравнение формул (15) с разложениями компонент кватерниона поворота $\Delta\Lambda$ в ряды по степеням компонент вектора истинного поворота $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ на интервале $[0,\Delta t]$

$$\Delta\lambda_0 = \cos(\theta/2) = 1 - \tfrac{1}{8}\theta^2 + \tfrac{1}{384}\theta^4 + O(\theta^5),$$

$$\Delta\lambda_1 = \tfrac{\theta_1}{\theta}\sin(\tfrac{\theta}{2}) = \tfrac{1}{2}\theta_1(1 - \tfrac{1}{24}\theta^2 + \tfrac{1}{1920}\theta^4) + O(\theta^6), \quad (1,2,3), \qquad (17)$$

где $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$, позволяет сделать вывод, что соответствующие кватернионы поворота (15) и (17) в пределах рассматриваемого пятого порядка имеют сходную структуру для скалярной части и отличаются только векторными частями. В силу этого механическая подстановка в (17) вместо θ_i значений кажущихся поворотов θ^*_i приводит прежде всего к искажению векторной части кватерниона поворота.

Список литературы: **1.** *В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. Наука, 1973. – 320 с.

Поступила в редколлегию 12.11.2009

УДК 536.26

В.О.ПОВГОРОДНИЙ, канд.техн.наук, мл.науч.сотр.,
ИПМаш НАН Украины, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРГОСТИ

Застосування сучасних інформаційних технологій до проектування й створення різних технічних об'єктів нерідко призводить до необхідності кількісного аналізу процесів, що протікають в системах із розподіленими параметрами (у континуальних системах). Замість того, щоб намагатися отримувати аналітичну розв’язку рівняння можна скористатися числовим підходом. Ці питання й розглядаються в даній статті.

The application of the modern technologies to project of the technical objects are necessary to digital analyses in system with distributional parameters (in the coollontitual systems. Instead of algebrial differences are use the digital method of thr boundary elements. These questions are examine in this article.

Применение современных информационных технологий к проектированию и созданию различных технических объектов нередко приводит к необходимости количественного анализа процессов, протекающих в системах с распределенными параметрами (в континуальных системах). Вместо того, чтобы пытаться получить аналитическое решение уравнения для частного вида геометрии и граничных условий, выполним необходимое сведение исходного уравнения в алгебраическую сумму уравнений, чтобы можно было воспользоваться численным подходом. Этот подход, как правило, состоит из следующих этапов: граница Γ разбивается на ряд элементов, внутри которых предполагается, что потенциал и его нормальная производная изменяются в соответствии с выбранными интерполирующими функциями. Эти элементы можно образовать с помощью прямых линий, круговых дуг, парабол и т.п.; используется метод коллокаций, согласно которому для отдельных узловых точек, распределенных внутри каждого элемента, записывается дискретная форма уравнения, связывающего значение потенциала и его нормальных производных в каждом узле; интегралы по каждому элементу вычисляются с помощью одной из схем численного интегрирования; путем наложения заданных граничных условий получается система линейных алгебраических уравнений, решение этой системы уравнений, которое может быть выполнено с помощью прямого или итерационного методов, дает остальные значения неизвестной функции на границе.

При необходимости значения функции в произвольной внутренней точке могут быть найдены по известным значениям на границе с помощью численного интегрирования выражения ( ). Аналогично, численным интегрированием выражения ( ) можно найти производные функции в произвольной внутренней точке. Приближенные решения граничных уравнений можно использовать вместе с граничными элементами. Практический интерес к этому возникает тогда, когда фундаментальное решение трудно получить или оно слишком громоздкое, чтобы им можно было воспользоваться.Кроме того, при этом уменьшается размерность результирующих матриц, поскольку граничные узлы теперь оказываются связанными не со всеми, а только с соседними узлами.

Информация о распределении в пространстве и изменении во времени температуры, перемещений и деформаций, механических напряжений, скорости и давления жидкости или газа, электрического потенциала, напряженности электрического или магнитного поля и других параметров важна при разработке и оптимизации технологических процессов и рабочих процессов в энергетических установках, при анализе процессов деформирования и динамики конструкций и процессов взаимодействия среды с электромагнитными полями в приборных устройствах. Эта информация может быть получена путем вычислительного эксперимента с использованием математических моделей таких процессов. Эти модели описываются, как правило, дифференциальными уравнениями с частными производными, решение которых может быть проведено методом конечных разностей (МКР) [2]. Но наряду с МКР для количественного анализа таких моделей перспективен метод граничных элементов (МГЭ) [3] или его сочетание с методом конечных элементов (МКЭ) [4]. Для применения МГЭ математическую модель процесса необходимо предварительно привести к форме, содержащей граничные интегральные уравнения с неизвестными распределениями искомых параметров на границе области, в которой протекает рассматриваемый процесс [1]. Такая модификация математической модели позволяет понизить размерность задачи и тем самым дает возможность сэкономить вычислительные ресурсы. Однако в случае нелинейных процессов неизвестные величины обычно входят не только в интегралы по границе области, но и в интеграл по самой области. В таком случае МГЭ целесообразно сочетать с процедурой последовательных приближений, задаваясь ожидаемым распределением искомых параметров в области и последовательно его уточняя по найденным распределениям этих параметров на ее границе.

Метод граничных элементов (МГЭ) – это метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных, появившийся в результате сочетания идей теории потенциала с методами теории аппроксимации. МГЭ, с точки зрения теории аппроксимации, имеет много общих черт с широко известным методом конечных элементов (МКЭ), но отличается от него существенным преимуществом: дискретизация осуществляется, как правило, не внутри области, в которой ищется решение, а на ее границе. Такое упрощение достигается путем точного удовлетворения исходным дифференциальным уравнениям с помощью представлений решения в виде, характерном для теории потенциала. Указанные представления могут быть использованы в рамках МГЭ лишь в том случае, когда известны в явном виде (точно или приближенно) фундаментальные решения (или функции Грина) для рассматриваемых дифференциальных уравнений и исследованы граничные свойства соответствующих потенциалов. Путем предельного перехода на границу в формулах представления решения получаются граничные интегральные уравнения (ГИУ), которые являются основным объектом аппроксимации в МГЭ. Этим объясняется еще одно (более раннее) название МГЭ – метод граничных интегральных уравнений. Заметим, что возникающие в теории упругости и вдругих разделах механики деформируемого твердого тела ГИУ часто являются сингулярными интегральными уравнениями, методы аппроксимации которых далеко не тривиальны.

Возьмем следующими уравнениями:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega;$$

$u = \overline{u}$ на Γ_1;

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \overline{q} \quad \text{на } \Gamma_2,$$

где u – потенциальная функция, $\overline{u}$ и $\overline{q}$ – заданные значения, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ – контур области Ω, а $\overline{n}$ – единичный внешний нормальный вектор к поверхности Γ.

Применение современных информационных технологий к проектированию и созданию различных технических объектов нередко приводит к необходимости количественного анализа процессов, протекающих в системах с распределенными параметрами (в континуальных системах) [1]. Информация о распределении в пространстве и изменении во времени температуры, перемещений и деформаций, механических напряжений, скорости и давления жидкости или газа, электрического потенциала, напряженности электрического или магнитного поля и других параметров важна при разработке и оптимизации технологических процессов и рабочих процессов в энергетических установках, при анализе процессов деформирования и динамики конструкций и процессов взаимодействия среды с электромагнитными полями в приборных устройствах. Эта информация может быть получена путем вычислительного эксперимента с использованием математических моделей таких процессов.

Эти модели описываются, как правило, дифференциальными уравнениями с частными производными, решение которых может быть проведено методом конечных разностей (МКР) [2]. Но наряду с МКР для количественного анализа таких моделей перспективен метод граничных элементов (МГЭ) [3] или его сочетание с методом конечных элементов (МКЭ) [4]. Для применения МГЭ математическую модель процесса необходимо предварительно привести к форме, содержащей граничные интегральные уравнения с неизвестными распределениями искомых параметров на границе области, в которой протекает рассматриваемый процесс [1]. Такая модификация математической модели позволяет понизить размерность задачи и тем самым дает возможность сэкономить вычислительные ресурсы. Однако в случае нелинейных процессов неизвестные величины обычно входят не только в интегралы по границе области, но и в интеграл по самой области. В таком случае МГЭ целесообразно сочетать с процедурой последовательных приближений, задаваясь ожидаемым распределением искомых параметров в области и последовательно его уточняя по найденным распределениям этих параметров на ее границе.

Рассмотрим возможности МГЭ применительно к анализу некоторых типовых математических моделей. Начнем с достаточно простой, но широко используемой на практике модели установившегося процесса в произвольной по конфигурации области V с границей F, в котором пространственное распределение некоторой скалярной величины $u(M)$ описывается уравнением Пуассона

$$\nabla^2 u(M) + f(M) = 0, \tag{1}$$

где $f(M)$ – заданная функция положения точки – дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа. Например, если в однородном теле с постоянным коэффициентом теплопроводности λ произведение $\lambda f(M)$ задает распределение объемной мощности энерговыделения, то уравнение (1) описывает установившееся распределение в этом теле температуры $u(M)$. Если же в однородной среде с постоянной диэлектрической проницаемостью ε произведение $\varepsilon f(M)$ характеризует объемную плотность электрических зарядов, то уравнению (1) будет удовлетворять распределение в области V потенциала $u(M)$ электрического поля. Этими примерами далеко не исчерпываются приложения (1) к инженерным задачам. Функция $u(M)$, удовлетворяющая уравнению (1), будет удовлетворять и интегральному соотношению

$$\int_V \left(\nabla^2 u(M) + f(M)\right) w(M_0, M)\, dV(M) = 0. \tag{2}$$

Функцию $w(M_0, M)$ выберем так, чтобы в случае пространственной (трехмерной) задачи она удовлетворяла уравнению

$$\nabla^2 w(M_0, M) + 4\pi\delta(M_0, M) = 0, \tag{3}$$

где $\delta(M_0, M)$ – дельта-функция Дирака, равная нулю в любой точке M, не совпадающей с точкой M_0. При совпадении этих точек дельта-функция неограниченно возрастает, так что для непрерывной функции $f(M)$

$$4\pi \int_V f(M)\delta(M_0, M)\, dV(M) = \Omega(M_0) f(M_0), \tag{4}$$

причем $\Omega(M_0) = 4\pi$, если , если точка M_0 лежит на гладком участке границы F; $\Omega(M_0) = 0$, если (точка M_0 лежит за пределами области V и ее границы F). Если точка M_0 совпадает с угловой точкой границы F области V, то $\Omega(M_0)$ – телесный угол с вершиной в точке M_0, под которым «видна» из точки M_0 внутренность области V. В случае плоской (двумерной) задачи в уравнении (3) вместо 4π будет множитель 2π, а в уравнении (4) $\Omega(M_0) = 2\pi$, если точка M_0 лежит на гладком участке контура F; $\Omega(M_0) = 0$, если, и, наконец, $\Omega(M_0)$ равна внутреннему углу между касательными к контуру в точке M_0, если она является угловой точкой контура. Пусть $r(M_0, M)$ – расстояние между точками M_0 и M. Тогда функции $w(M_0, M) = 1/r(M_0, M)$ (в случае трехмерной задачи) и $w(M_0, M) = -1nr(M_0, M)$ (в случае двумерной задачи) будут удовлетворять уравнению (3), описывая, например, потенциал электрического поля заряда $1/\varepsilon$ или температурное поле источника тепла мощностью $1/\lambda$, помещенных в точке M_0.

Используя вторую формулу Грина и соотношения (2)-(4), получим граничное интегральное уравнение

$$\Omega(M_0) u(M_0) = \int_V f(M) w(M_0, M)\, dV(M) + \int_F \left[q(P) w(M_0, P) - u(P) p(M_0, P)\right] dF(P), \tag{5}$$

где – единичный вектор внешней нормали к границе F в точке . Правую часть уравнения (5) можно вычислить, если известны распределения $u(P)$и $q(P)$ на границей области V. Но корректная постановка задачи может содержать в виде граничных условий в каждой точке информацию либо о значениях $u(P)$, либо о значениях $q(P)$, либо о комбинации их значений, то есть

$$\alpha u(P)+\beta q(P)=g(P), \quad P\in F, \quad \alpha^2+\beta^2\neq 0\,. \tag{6}$$

Таким образом, исходная информация о граничных значениях $u(P)$ и $q(P)$ недостаточна для непосредственного использования уравнения (5).

Недостающие граничные значения $u(P)$ и $q(P)$ можно определить приближенно. Для этого на границе области следует выделить N узлов , аппроксимировать распределения $u(P)$ и $q(P)$ через узловые значения $u_n = u(P_n)$ и $q_n = q(P_n)$ и решить относительно неизвестных N узловых значений систему из N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую можно получить из (5) и (6), если в (5) вместо M_0 последовательно полагать P_n. Эта процедура и составляет существо МГЭ (точнее, его прямого варианта), причем (в отличие от МКЭ и МКР) матрица СЛАУ для МГЭ является полностью заполненной. После вычисления всех узловых значений u_n и q_n на границе F из уравнения (5) нетрудно численным интегрированием найти значение $u(M_0)$ в любой внутренней точке области V. Численное интегрирование удобно проводить с использованием процедур МКЭ, представив область V системой конечных элементов. В случае осесимметричной задачи вместо области V достаточно рассматривать половину ее осевого сечения, а вместо границы F – контур этого сечения в координатной плоскости $0rz$, где r и z – радиальная и осевая координаты цилиндрической системы координат. Тогда задача становится двумерной, а в уравнении (5) $w(M_0, M) = 4K(k)/r_*(M_0\ M)$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем $k^2 = 4r(M_0)/r(M)/r^2(M_0,M)$ и $r^2{}_*(M_0, M) = (r(M_0) + r(M))^2 + (z(M_q) - z(M))^2$. Ясно, что в этом случае число N узловых точек на контуре, а значит, и порядок СЛАУ могут быть существенно уменьшены.Если рассматриваемый процесс является нестационарным, то (1) переходит в уравнение вида

$$\nabla^2 u(M,t)+f(M,t)=u(M,t)/a\ , \tag{7}$$

где точкой над символом обозначена производная по времени t, а параметр a характеризует скорость выравнивания распределения $u(M, t)$ в области при отсутствии внешних воздействий. Для перехода к математической модели нестационарного процесса в форме, содержащей граничное интегральное уравнение, можно использовать функцию источника [4], однако более гибким является подход, связанный с предварительным переходом в уравнении (7) к конечным разностям по времени. Тогда для момента времени t_k в конце k-го интервала получим

$$\nabla^2 u_k(M)-u_k(M)/(a\Delta t_k)+f_k(M)=0\ ,$$

где $u_k(M) = u(M, t_k)$ и $f_k(M) = f(M, t_k) + u(M, t_{k\text{-}1})/(a\Delta t_k)$ а в (5) для момента времени t_k надо $w(M_0, M)$ заменить в случае трехмерной задачи на

$$w_k(M_0,M)=\exp\left[-r(M_0,M)/\sqrt{a\Delta t_k}\right]/r(M_0,M)$$

и в случае двумерной задачи на

$$w_k(M_0, M) = -K_0\left(r(M_0, M)\Big/\sqrt{a\Delta t_k}\right),$$

где символом K_0 обозначена модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Отметим, что на первом интервале времени ($k = 1$) функция $u_0(M)$ является заданным начальным распределением искомой функции в области V.

Наконец, рассмотрим путь использования МГЭ для моделирования нелинейного нестационарного процесса в неоднородной среде, описываемого уравнением

$$\nabla(\lambda(M,u)\nabla u(M,t)) + f(M,u,t) = c(M,u)\dot{u}(M,t), \tag{8}$$

в котором параметры среды λ и c, характеризующие ее свойства проводимости и емкости, зависят не только от положения точки , но и от искомой функции $u(M, t)$. Аппроксимируя в уравнении (8) производную по времени конечными разностями, в конце k-го интервала времени получим

$$\nabla^2 u_k(M) + h_k(M, u_k(M)) = 0\ ,$$

где

$$h_k(M,u_k(M)) = \frac{f_k(M,u_k(M)) - c(M,u_k)(u_k(M) - u_{k-1}(M))/\Delta t_k + \psi(M,u_k(M))}{\lambda(M,u_k(M))};$$

$$\psi(M,u_k(M)) = \left(\nabla\lambda(M,u_k(M)) + \left.\frac{\partial\lambda(M,u)}{\partial u}\right|_{u=u_k(M)} \nabla u_k(M)\right)\nabla u_k(M).$$

Тогда для момента времени t_k будет справедливо уравнение (5), но в интеграл по области V вместо $f(M)$ будет входить функция $h_k(M, u_k, (M))$, зависящая от искомого распределения $u_k(M) = u(M, t_k)$, что, казалось бы, лишает смысла применение МГЭ в случае нелинейного процесса. Однако сочетание процедуры МГЭ с последовательными приближениями на каждом интервале времени позволяет использовать положительные стороны МГЭ, связанные с понижением размерности задачи. Более того, благодаря полностью заполненной матрице СЛАУ для определения неизвестных граничных значений $u_k(P)$ и , влияние изменения значений искомых величин распространяется на каждой итерации сразу на всю область, что при условии сходимости последовательных приближений существенно сокращает общее число итераций. Во всех рассмотренных случаях существенным моментом для применения МГЭ была возможность в представляющем математическую модель дифференциальном уравнении выделить в явном виде дифференциальный оператор Лапласа. Это позволяет даже при моделировании нелинейного нестационарного процесса построить достаточно простой алгоритм последовательных приближений, базирующийся на использовании удовлетворяющей уравнению (3) функции $w(M_0, M)$. Отметим, что в общем случае искомая функция, описывающая процесс в континуальной системе, может быть векторной или тензорной, как, например, при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния конструкций [5]. Тогда для применения МГЭ исходную математическую модель необходимо преобразовать к форме, содержащей систему граничных интегральных уравнений, число которых должно совпадать с числом координатных функций, представляющих искомую векторную или тензорную функцию. В этом случае функция $w(M_0, M)$ также будет векторной или тензорной, удовлетворяющей, как правило, уравнению с более сложным, чем в (3) дифференциальным оператором [4], [5].

Решим самую простую задачу. Тонкостенные конструкции наилучшим образом отвечают требованиям экономичности при обеспечении надлежащих прочности и жесткости. Этим объясняется их широкое применение в различных областях техники – машиностроении, строительстве, авиации и т.д. Расчет тонкостенных систем методами теории оболочек сложен и далеко не всегда оправдан. Теории расчета тонкостенных стержней, созданные В.З.Власовым [2], А.А.Уманским [4], и развитые целым рядом их учеников и последователей упрощают задачу, но и здесь возникают проблемы при расчете сложных несимметричных систем. Весьма эффективным оказывается использование численных методов.

В качестве объекта исследования выбрана двутавровая балка, имеющая составленное из трех прямоугольников поперечное сечение (рис. 1).

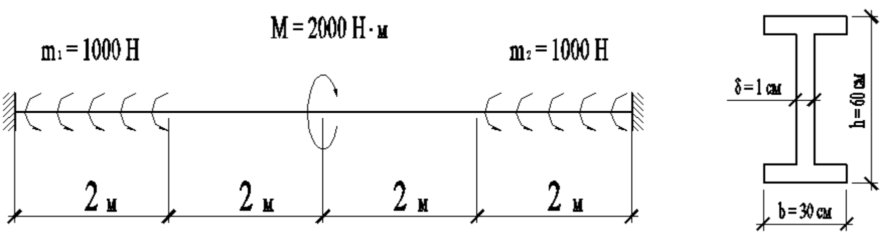


Рисунок 1

Расчет по методу граничных элементов

Уравнение стесненного кручения тонкостенного стержня имеет вид [2]

$$\theta^4(x)-k^2\theta(x)=\frac{m(x)}{EI_w}, \tag{9}$$

где k – изгибно-крутильная характеристика поперечного сечения

$$k=\sqrt{\frac{GI_d}{EI_w}}; \tag{10}$$

EI_w – секториальная жесткость; GI_d – жесткость при чистом кручении; θ – угол закручивания.

Уравнение (1) дополняется начальными параметрами:

– кинематические:
  $GI_d\theta(0)$ – угол закручивания в масштабе жесткости; $GI_d\theta'(0)$ – производная угла закручивания (имеет механический смысл крутящего момента);

– статические: (11)
  $B_w(0) = -GI_d\theta''(0)$ – бимомент; $M_w(0) = -GI_d\theta'''(0)$ – изгибно-крутящий момент.

Отметим, что при стесненном кручении кинематический параметр $\theta'(0)$ имеет механический смысл статической величины – крутящего момента, а статические параметры $B_w(x)$ и $M_w(x)$ не определяются из уравнений статики.

Уравнение (1) и начальные условия (3) образуют задачу Коши стесненного кручения тонкостенного стержня. По стандартному алгоритму ее решение удобно представить в матричной форме [1]

$$\begin{array}{|c|}\hline GI_d\theta(x) \\ \hline GI_d\theta'(x) \\ \hline B_w(x) \\ \hline M_w(x) \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & 1 & A_{23} & -A_{13} \\ \hline & & A_{33} & A_{34} \\ \hline & & A_{33} & A_{33} \\ \hline\end{array} \; \begin{array}{|c|}\hline GI_d\theta(0) \\ \hline GI_d\theta'(0) \\ \hline B_w(0) \\ \hline M_w(0) \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|}\hline B_{11}(x) \\ \hline B_{21}(x) \\ \hline -B_{13}(x) \\ \hline -B_{41}(x) \\ \hline\end{array}, \qquad (12)$$

где фундаментальные ортонормированные функции и слагаемые от внешней нагрузки имеют вид

$$A_{13} = \mathrm{ch}\, kx - 1; \quad A_{14} = \frac{\mathrm{sh}kx - kx}{k}; \quad A_{33} = \mathrm{ch}\, kx; \quad A_{34} = \frac{\mathrm{sh}kx}{k};$$

$$B_{11} = M \times A_{14}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{13}(x - a_B)_+ + m\left[A_{15}(x - a_H) - A_{15}(x - a_K)_+\right];$$

$$B_{21} = M \times A_{13}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{23}(x - a_B)_+ + m\left[A_{14}(x - a_H)_+ - A_{14}(x - a_K)_+\right]; \quad (13)$$

$$B_{31} = M \times A_{34}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{33}(x - a_B)_+ + m\left[A_{13}(x - a_H)_+ - A_{13}(x - a_K)_+\right] \div k^2;$$

$$B_{41} = M \times A_{33}(x - a_M)_+ + B_w \times A_{23}(x - a_B)_+ + m\left[A_{34}(x - a_H)_+ - A_{34}(x - a_K)_+ - A_{34}(x - a_K)_+\right];$$

$$A_{15} = \frac{chkx - H(x)}{k^2} - \frac{x^2}{2};$$

M – сосредоточенный крутящий момент; B_w – сосредоточенный бимомент; m – распределенный крутящий момент; a_M, a_B, a_H, a_K – координаты внешней нагрузки.

Для определения неизвестных начальных параметров в уравнении (13) составляется и решается система линейных алгебраических уравнений по схеме (при $x = l$)

$$Y(l) = A(l) \times X(0) + B(l) \to A(l) \times X(0) - Y(l) = -B(l) \to A_*(l) \times X_*(l,0) = -B(l); \qquad (14)$$

Из уравнения (6) определяются неизвестные начальные параметры, а напряженное деформированное состояние во всех внутренних точках стержня определяется по уравнению (4).

Рассмотрим на примере (рис. 1) расчетные соотношения по МГЭ [1]:

$$\begin{array}{|c|}\hline GI_d\theta(x) \\ \hline GI_d\theta'(x) \\ \hline B_w(x) \\ \hline M_w(x) \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & & -A_{23} & -A_{13} \\ \hline -1 & & A_{33} & A_{34} \\ \hline & -1 & A_{23} & A_{23} \\ \hline\end{array} \; \begin{array}{|c|}\hline B_w^{\,0-1}(l) \\ \hline M_w^{\,0-1}(l) \\ \hline B_w^{\,0-1}(0) \\ \hline M_w^{\,0-1}(0) \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline -B_{11}^{\,0-1}(l) \\ \hline -B_{21}^{\,0-1}(l) \\ \hline B_{31}^{\,0-1}(l) \\ \hline B_{41}^{\,0-1}(l) \\ \hline\end{array}, \qquad (15)$$

Для практической реализации (7) использована среда MATLAB. Определено НДС рассматриваемой конструкции, которое представлено на рис.2 в виде эпюр углов закручивания $GI_d\theta(x)$, крутящих моментов $GI_d\theta'(x)$, бимоментов $B_w(x)$ и изгибно-крутящих моментов $M_w(x)$.

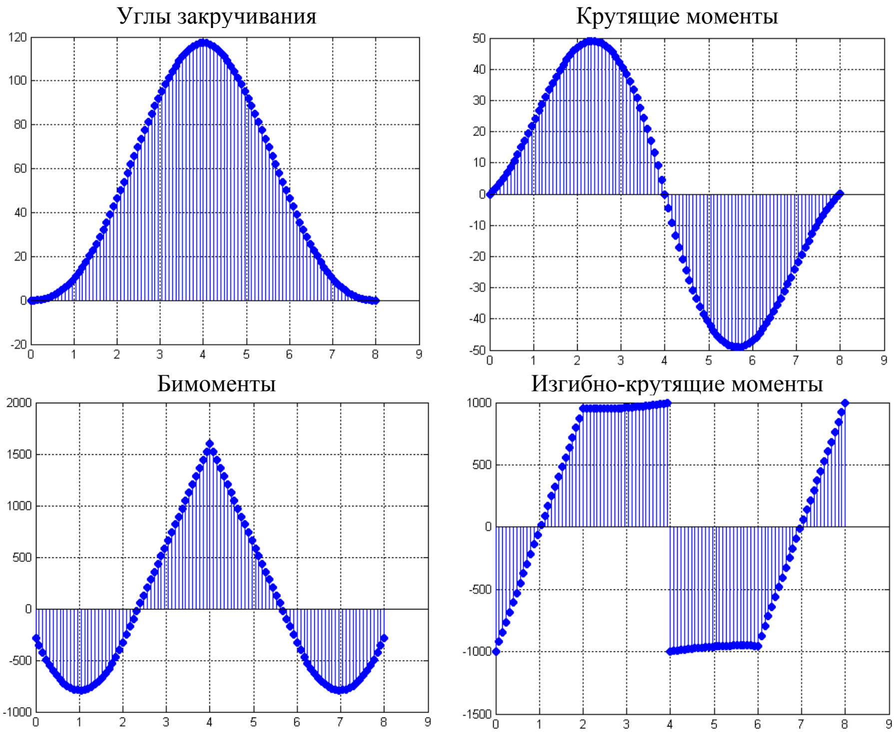


Рисунок 2

Выводы. В таблице представлены бимоменты, крутящие моменты и углы закручивания, вычисленные для ряда сечений стержня обоими численными методами. Заметим, однако, что при решении МГЭ пришлось решать 4 алгебраических уравнения, в то время как решение этой же задачи, например МКЭ, потребовало решения 160 алгебраических уравнений.

Список литературы: 1. *Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф.* Строительная механика специальный курс применение метода граничных элементов. – Одесса, «Астропринт», 2004. – 285 с. **2.** *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 568 с. **3.** *Уманский А.А.* Строительная механика самолета. – М.: Государственное научно-техническое издательство ОБОРОНГИЗ, 1961. – 529 с.

Поступила в редакцию 15.08.2009

УДК 593.3

В.Н.СОБОЛЬ, канд.техн.наук, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;
Ю.Л.ТАРСИС, канд.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТИЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ КОЛЕНА КОЛЕНЧАТОГО ВАЛА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Крутильна податливість коліна колінчастого вала, що необхідна для розрахунків крутильних коливань колінчатого вала й трансмісії, визначається методом скінчених елементів у тривимірній постановці й порівнюється з даними емпіричних методів, що традиційно використовуються.

Torsions flexibility of crankshaft is determined by the finite elements method in the three-dimensional problem statement. It is needed for the calculations of torsion vibrations of crankshaft and transmission. The results are compared with traditional empirical methods.

Одной из основных задач при проектировании современных двигателей внутреннего сгорания (ДВС) и трансмиссий есть обеспечение их динамической прочности, надежности и долговечности. В этой связи еще на стадии проектирования должны быть решены задачи отстройки от резонансных режимов в рабочем диапазоне угловых скоростей вращения коленчатого вала. Расчеты парциальных крутильных колебаний вала и трансмиссии представляют важную часть этой задачи. При этих расчетах в дискретной постановке используют приведенную схему вала и трансмиссии, включающую податливость на кручение. Для коленчатого вала определение податливости является нетривиальной задачей. Использование для этой цели стержневой рамной модели невозможно, так как конструкции коленчатых валов таковы, что, во-первых, поперечные и продольные размеры стержней соизмеримы, а чаще всего поперечные превосходят продольные, а во-вторых, значительная степень перекрытия шеек вала не позволяет выделить щеки как отдельные стрежни. Поэтому большое распространение получили различные эмпирические формулы, предложенные отдельными исследователями в прошлом столетии [1,2], и основанные на экспериментальных исследованиях существующих в то время конструкций. Однако эти методы не могут гарантировать достаточную практическую точность, особенно для современных конструкций, отличающихся от использованных ранее для получения указанных эмпирических зависимостей.

Вместе с тем, современные численные методы позволяют решить задачу определения податливости на кручение коленчатого вала непосредственно на основе модели колена, которое учитывает его основные конструктивные особенности. Таким методом, безусловно, есть метод конечных элементов (МКЭ), который ранее уже использовался для определения упругих характеристик коленчатого вала и идентификации стержневых параметров коленчатого вала для динамических расчетов[3]. Расчеты выполнены с помощью программного обеспечения, описанного в работе [3]. Рассмотрены модели колен двух коленчатых валов: дизеля промышленного трактора (MTU) и стационарного дизеля Д80, который спроектирован на ГП «Завод имени Малышева». Расчетные схемы колен приведены на рис. 1 и рис. 2. Там же приведены схемы разбивки на конечные элементы.

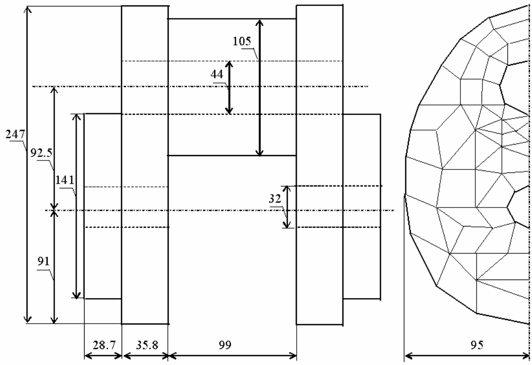


Рисунок 1 – Модель колена вала дизеля MTU

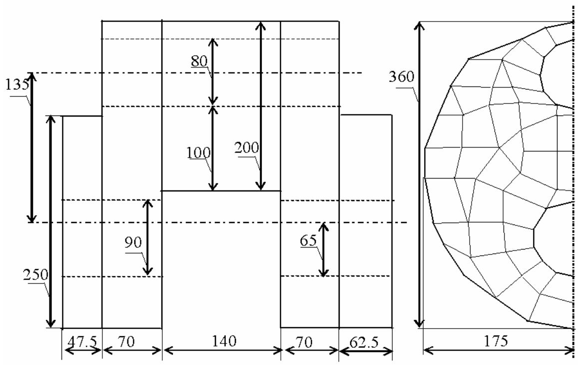


Рисунок 2 – Модель колена вала дизеля Д80

В качестве базисных конечных элементов использованы прямые треугольные призмы. Шестигранные конечные элементы состоят из двух призм. Модель колена дизеля (MTU), имела по одному слою элементов для коренных шеек и щек и три для шатунной шейки. Количество узлов 562, базисных элементов 632, степеней свободы 1686. Модель колена дизеля Д80 имела по одному слою для коренных шеек и щек и два для шатунной шейки. Количество узлов 554, базисных элементов 568, степеней свободы 1662.

Крутильная податливость колена определялась следующим образом. Колено выделялось из коленчатого вала средними сечениями коренных шеек. Узлы торцевого сечения правой коренной шейки полностью закреплялись от перемещений. В узлах, расположенных на двух взаимно перпендикулярных диаметрах торцевого сечения левой коренной шейки, прикладывались силы с линейным законом распределения. Далее подсчитывался суммарный крутящий момент и средний угол закручивания нагруженного сечения. Крутильная податливость колена определялась как отношение угла закручивания сечения коренной шейки к суммарному крутящему моменту в сечении. Следует отметить, что при принятом законе распределения нагрузки распределение перемещений по нагруженным узлам и в целом по сечению достаточно точно подчиняется линейному закону.

Наряду с расчетами, проведенными с помощью программного обеспечения, описанного в работе [1] аналогичные расчеты колена вала (MTU) выполнены с помощью комплекса ANSYS, который располагает большими возможностями как в области автоматизации построения трехмерных моделей, так и в выборе конечных элементов и степени дискретизации исследуемой области. В качестве базисного конечного элемента использовался трехмерный тетраэдрический 10-узловой элемент (SOLID92). Расчеты проведены для двух моделей, включающих 5446 (модель 1) и 26616 (модель 2) конечных элементов. Модели колен и нагрузка для второй модели приведены на рис. 3. Перемещения нагруженных узлов первой модели показаны на рис. 4, а второй – на рис. 5.

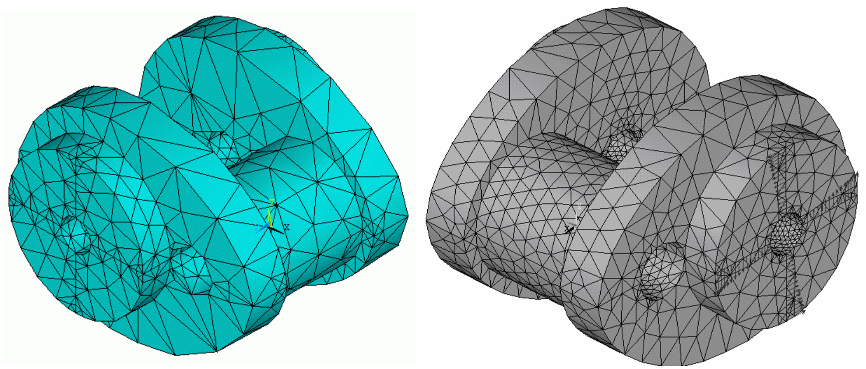


Рисунок 3 – Модели колена (слева-5446 КЭ – модель 1, справа - 26616 КЭ – модель 2)

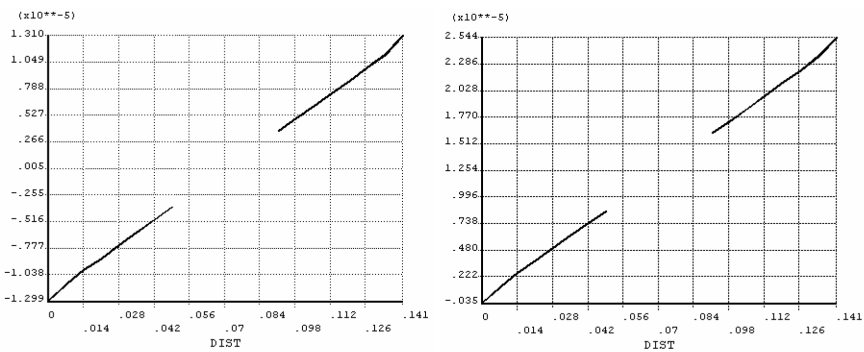


Рисунок 4 – Распределение перемещений нагруженных узлов U_x и U_y для модели 1

Для сравнения были выполнены расчеты по известным эмпирическим формулам [1,2]:

Формула Тимошенко

$$e = \frac{32}{\pi G}\left[\frac{l_1 + 0,9h}{d_1^4 - \delta_1^4} + \frac{0,433R}{hb_э^3} + \left(1 - \frac{m}{k}\right)\left(\frac{l_2 + 0,9h}{d_2^4 - \delta_2^4} + \frac{0,433R}{hb_э^3}\right)\right] \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1}, \quad (1)$$

где

$$k = 1 + \frac{0,144}{R^2} \cdot \frac{\dfrac{1,32 l_2}{d_2^4 - \delta_2^4} + \dfrac{R}{h^3 b_э^3}\left[(1,63 b_э^2 - R^2) h^2 + 1,22 (l_2 + h)^2 (b_э^2 + h^2)\right]}{\dfrac{l_2}{d_2^4 - \delta_2^4} + \dfrac{0,433 R}{h b_э^3}},$$

коэффициент $m = 0$ в предположении наличия больших зазоров в коренных подшипниках, и $m = 1$ в предположении отсутствия зазоров.

Формула Урванцева (Коломенский завод им. В.В. Куйбышева)

$$e = \frac{32}{\pi G}\left[\frac{l_1}{d_1^4 - \delta_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4 - \delta_2^4} + \frac{0,9R}{h b_э^3}\left(1 + \frac{0,64}{R^2}\sqrt[3]{\frac{(d_1^4 - \delta_1^4)(d_2^4 - \delta_2^4)}{R^2}}\right)\right] \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1}. \quad (2)$$

Формула Зиманенко

$$e = \frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_1 + 0,6h\dfrac{d_1}{l_1}}{d_1^4 - \delta_1^4} + \frac{0,8 l_2 + 0,2 b_0 \dfrac{d_1}{R}}{d_2^4 - \delta_2^4} + \frac{R}{h b_0^3}\sqrt{\frac{R}{d_2}}\right) \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1}. \quad (3)$$

Формула B.I.C.E.R.A.

$$e = \frac{32}{\pi G}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{d_1^4 - \delta_1^4} \times \\ \times\left[l_1 - r_1 + 0,1 d_1\left(1 + 0,1\dfrac{d_1}{h}\left(\dfrac{2p_1}{1,2d_1 + h - 2q_1} + \dfrac{q_1}{1,2d_1 + h - 2q_1}\right)\right)\right] + \\ \dfrac{1}{d_2^4 - \delta_2^4} \times \\ \times\left[l_2 - r_2 + 0,1 d_2\left(1 + 0,1\dfrac{d_2}{h}\left(\dfrac{2p_2}{1,2d_2 + h - 2q_2} + \dfrac{q_2}{1,2d_2 + h - 2q_2}\right)\right)\right] + \\ + \dfrac{k_1}{h b_э^3} + \dfrac{k_2 + k_3 + k_4}{d_1^3} \end{array}\right\} \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1} \quad (4)$$

Формула Терских-1

$$e = \frac{9,4}{G} \cdot \frac{H + 0,5R}{d_{ср}^4 - \delta_{ср}^4} \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1}. \quad (5)$$

Формула Терских-2

$$e = \frac{7,3}{G} \cdot \frac{H + 2,2R}{d_{ср}^4 - \delta_{ср}^4} \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1}. \quad (6)$$

Формула Картера

$$e = \frac{32}{\pi G}\left(\frac{l_1 + 0,8h}{d_1^4 - \delta_1^4} + \frac{0,75 l_2}{d_2^4 - \delta_2^4} + \frac{1,5R}{h b^3}\right) \text{ кГс}^{-1}\text{см}^{-1}. \quad (7)$$

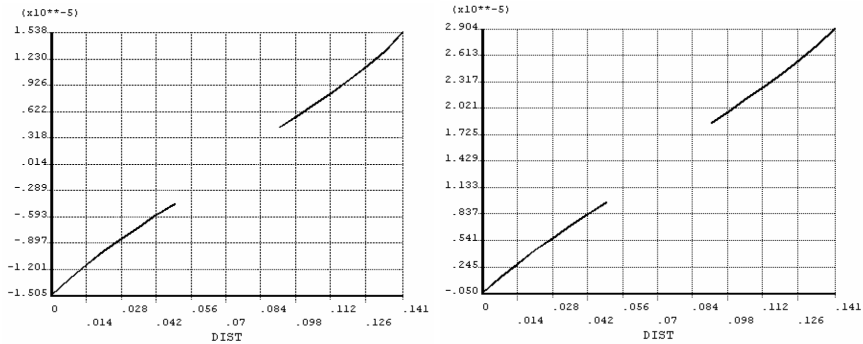


Рисунок 5 – Распределение перемещений нагруженных узлов U_x и U_y для модели 2

Все конструктивные параметры моделей колен, обозначения которых приведены в [3], определялись на основе рабочих чертежей. Результаты сравнения проведенных расчетов с расчетами по эмпирическим формулам приведены в таблице, а их иллюстрация на диаграммах (см. рис. 6, рис. 7).

Результаты расчетов крутильной податливости

Формула (метод)	MTU/10^{-8}	Д-80/10^{-9}
1. (m = 0)	2,253	3,652
1. (m = 1)	1,953	3,26
2.	2,596	4,954
3.	2,368	3,999
4.	2,219	3,539
5.	1,407	2,676
6.	1,719	3,121
7.	2,044	3,254
МКЭ-1	2,178	3,603
ANSYS (модель 1)	2,224	–
ANSYS (модель 2)	2,284	–

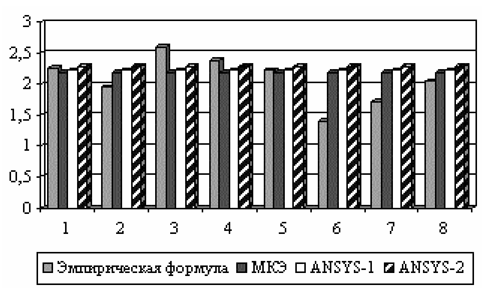


Рисунок 6 – Диаграмма сравнения эмпирических формул с МКЭ для MTU

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы. 1. Результаты расчетов крутильной податливости коленчатого вала по эмпирическим формулам дают существенный разброс для одних и тех же конструкций. Это основано на различии методов и экспериментальных данных. 2. Предложенная методика позволяет определять крутильную податливость коленчатых валов самых различных конструкций непосредственно на основании чертежей с учетом их конструктивных параметров. 3. Точность определения крутильной податливости с помощью МКЭ вполне приемлема для практического использования при сравнительно невысокой степени дискретизации модели.

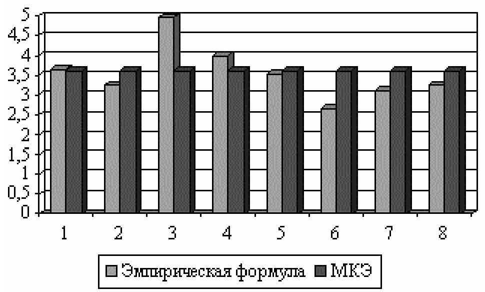


Рисунок 7 – Диаграмма сравнения эмпирических формул с МКЭ для Д – 80

Список литературы: **1.** *Терских В.П.* Крутильные колебания валопроводов силовых установок. Т.1. Элементы системы и возмущающие моменты. – Ленинград, Судостроение, 1969. – 206 с. **2.** *Байков Б.П., Ваншейдт В.А., Воронов И.П. и др.* Дизели. Справочник. – Ленинград. Машиностроение. Ленинградское отделение, 1977. – 479 с. **3.** *Тарсис Ю.Л., Тарсис Е.Ю.* Идентификация параметров дискретной модели коленчатого вала при динамических расчетах / Материалы 11- й международной научно-технической конференции «Физические и компьютерные технологии». – Харьков. – 2005. – С. 279-284.

Поступила в редколлегию 23.11.2009

УДК 539.3.534

А.С.СТЕПЧЕНКО, канд.техн.наук, ст.науч.сотр., НТУ «ХПИ»;
Е.Н. ДУДКИНА, асп., НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИПОВОГО РЯДА КОНСТРУКЦИЙ КОРПУСОВ ЦИЛИНДРА НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ МОЩНЫХ ПАРОВЫХ ТУРБИН: ЧАСТЬ I. КЛАССИФИКАЦИЯ И РАЗРАБОТКА СТРУКТУРНОЙ СХЕМЫ

Наведений аналіз основних типів корпусів циліндра низького тиску парових турбін, на підставі якого розроблена система принципових класів конструкцій, визначені і вичленовані змінювані елементи структури. Для кожного типу розроблена геометрична модель принципового класу.

The analysis of the basic types of the low pressure cylinder cases of steam turbines on the basis of which the steam of basis classes of designs is developed, changeable elements of structure a certain and isolated. The geometrical model of a basic class is developed for each type.

1 Введение. Современные турбоагрегаты ТЭС и АЭС состоят из нескольких корпусных конструкций называемых цилиндрами. В зависимости от параметров пара на входе в цилиндр их условно разделяют на цилиндры высокого давления (ЦВД), среднего давления (ЦСД) и низкого давления (ЦНД).

ЦНД современной турбины составляет более 80 % по габаритам и объему эксплуатационного обслуживания от всего турбоагрегата. С ростом единичной мощности турбоагрегатов и повышением начальных параметров пара количество ЦНД в одной турбине постепенно возрастало. В настоящее время большинство турбоагрегатов крупной единичной мощности имеет до трех ЦНД, а в некоторых турбинах, например К-500-65/3000 ОАО «Турбоатом», число ЦНД достигает четырех. С увеличением единичной мощности, соответственно, увеличиваются и размеры рабочих лопаток последних ступеней, что обусловливает изменение массогабаритных показателей элементов ЦНД турбины. В турбоагрегатах большой мощности металозатраты на изготовление статорной части цилиндра низкого давления достигают 70-75% от массы всей турбины. Поэтому оптимизация конструкций ЦНД при сохранении надежности является актуальной задачей создания более унифицированных и менее металлоемких корпусов ЦНД.

В первых исследования динамических характеристик ЦНД элементы системы турбоагрегат – фундамент – основание (ТФО) рассматривались отдельно по частям, но такой подход, основанный на раздельном рассмотрении динамических свойств валопровода, корпусных элементов и фундамента, дает неверные результаты [1,2]. Найденные без учета взаимного влияния собственные частоты отдельных элементов ТФО часто существенно отличаются от реальных значений [3]. Поэтому были предложены и апробированы модели, учитывающие взаимное влияние отдельных частей системы, т.е. рассматривать связанные колебания валопровода, статора и фундамента, что показало необходимость детального моделирования ЦНД как трехмерного тела [4].

Конструкции ЦНД разных турбоагрегатов однотипны по форме, но отличаются габаритными размерами и внутренними пропорциями в зависимости от мощности. При этом расчетные исследования и экспериментальные исследования показали, что динамические характеристики сильно изменяются в зависимости от конструкций ЦНД [5,6] . Поэтому задача систематизации типового ряда ЦНД и последующей оптимизации конструкции по частотному спектру актуальна.

2 Постановка задачи. Целью работы является систематизирование типового ряда ЦНД и построение параметрической модели для дальнейшей оптимизации их конструкции. Предлагается рассмотреть и классифицировать типичные модели крышек и корпусов ЦНД выпускаемых ОАО «Турбоатом», определить изменяемые и неизменяемые характеристики структурных элементов конструкций ЦНД и на основании этого построить параметрическую модель типового ряда конструкций ЦНД.

3 Анализ конструкции корпусов ЦНД. Основная характерная особенность ЦНД – большие габариты, и хотя перепад давлений на корпус ЦНД невелик, но его большие размеры обусловливают действие на него больших сил от перепада давления. Поэтому корпус должен иметь большое число ребер и подкосов, делающих его достаточно жестким.

Корпус ЦНД выполнен двухстенным. Он состоит из внутренней обоймы, в которой размещается двухпоточная проточная часть и наружного корпуса.

Внутренний корпус ЦНД имеет несколько способов крепления к наружному корпусу. Первый вариант, когда корпус состоит из сварной средней части, обойма и выходные патрубки представляют собой единое целое, поэтому деформация каждой из частей сказывается на деформации остальных. Данный вид корпусов встречается редко, поэтому в данной статье не рассматривается.

Во многих ЦНД используют корпус с внутренней обоймой. Обойма свободно устанавливается во внешнем корпусе, деформации которого практически не передаются на обойму. Обойма устанавливается во внешнем корпусе с помощью фланца нижней части обоймы, который подвешивается во внешнем корпусе на уровне горизонтального разъема с помощью четырех лапок. Таким образом, обойма может учитываться в форме сосредоточенных масс и кинематических ограничений.

Наружный корпус каждого ЦНД имеет горизонтальный разъем (А-А), делящий корпус на разъемные верхнюю и нижнюю части, и вертикальный (Б-Б) – технологический – разъем, делящий корпус на два выхлопных патрубка – стороны регулятора и стороны генератора, т.е. корпус имеет две плоскости симметрии.

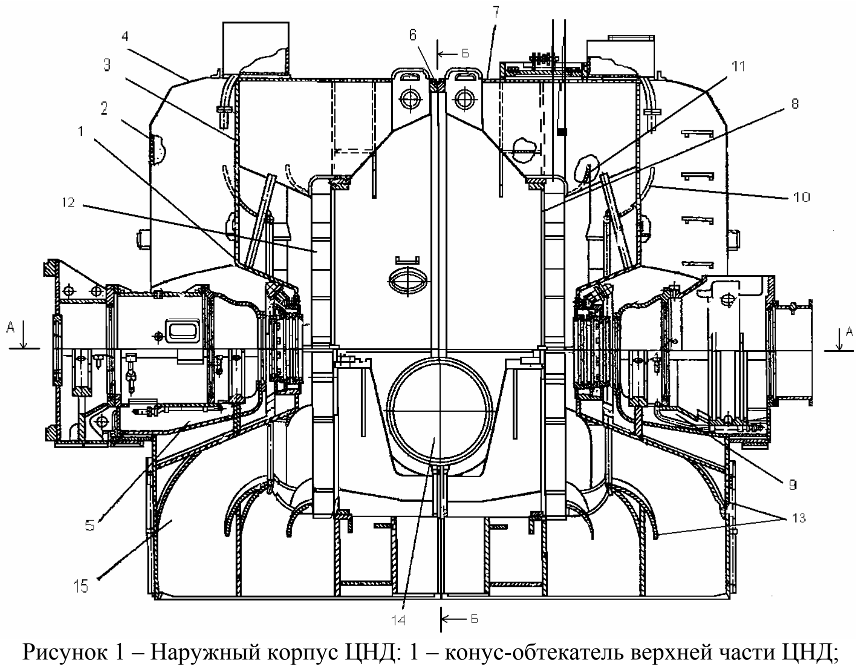


Рисунок 1 – Наружный корпус ЦНД: 1 – конус-обтекатель верхней части ЦНД; 2 – торцевой лист; 3 – лист проема; 4 – верхняя часть ЦНД; 5, 9 – картеры; 6 – вертикальный фланец; 7 – обечайка; 8 – поперечный лист; 10,12,13 – направляющие листы; 11 – козырек; 14 – отверстие-горловина для паровпуска; 15 – нижняя часть ЦНД.

Наружный корпус каждого ЦНД (рис. 1) включает: два выхлопных патрубка, имеющих верхние части 4 и нижние части 15 с вваренными в них картерами подшипников 5 и 9.

Верхняя часть ЦНД (стороны регулятора или стороны генератора) является частью герметичной пароприемной камеры и представляет собой крупногабаритную сварную конструкцию, в которой наружная оболочка - цилиндрического профиля обечайка 7. С одной стороны обечайка закрыта торцевыми листами 2, листом проема 3, конусом-обтекателем 1 и фланцем для крепления верхней части корпуса уплотнения. С другой, открытой, стороны к обечайке приварен вертикальный фланец — полукольцо 6, при помощи которого эту верхнюю часть соединяют со смежной верхней частью. Фланец 6, кроме того, увеличивает жесткость верхней части патрубка.

В середине верхней части ЦНД в качестве основного несущего элемента, воспринимающего усилие на обечайку от атмосферного давления при работе турбины, использован поперечный лист 8, отгораживающий секцию размещения обоймы диафрагм от секции проточной части.

Чтобы уменьшить изгибные напряжения и прогибы торцевых листов 2, к их средней по высоте части часто приварены короба из листового проката.

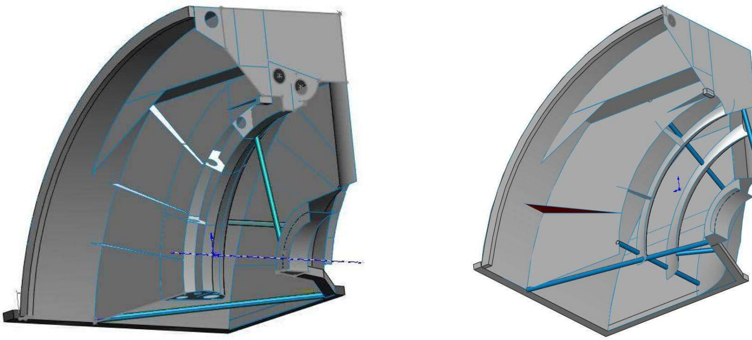
Нижняя часть ЦНД — крупногабаритный сборочный узел турбины - является частью пароприемной камеры отработавшего в ЦНД пара и представляет собой прямоугольную сварную конструкцию с тремя высокими сплошными стенками по периферии и четвертой - меньшей высоты — на вертикальном стыке двух нижних частей патрубков. К торцевой стенке внутрь ЦНД приварен картер 5 или 9 со встроенной опорой подшипника. Снаружи, по периметру, к сплошным стенкам приварен балкон, которым ЦНД опирается на фундамент.

Из-за наличия встроенной опоры подшипника нижняя часть выхлопного патрубка при работе турбины несет не только статическую нагрузку от атмосферного давления, собственного веса, веса ротора и веса обоймы с диафрагмами, но и динамическую. Динамическая нагрузка определяется неуравновешенностью ротора и силами, возникающими при вибрации вала (например, при динамической неустойчивости валопровода, при автоколебаниях вала).

4 Классификация наружных корпусов ЦНД. Как уже было отмечено выше, горизонтальный разъем делит корпус ЦНД на верхнюю и нижнюю части, поэтому можно сделать следующую классификацию внешнего корпуса: 1-верхняя половина (крышка), 2 - нижняя половина.

4.1 Анализ структуры крышки наружного корпуса ЦНД. Сложной частью корпуса ЦНД является крышка, которая представляет собой оболочечную конструкцию полуцилиндрической формы с боковыми стенками, как показано на рис. 2. Для обеспечения прочности и устойчивости крышка выполняется в виде двухстенной конструкции с продольными и поперечными перегородками и стержнями.

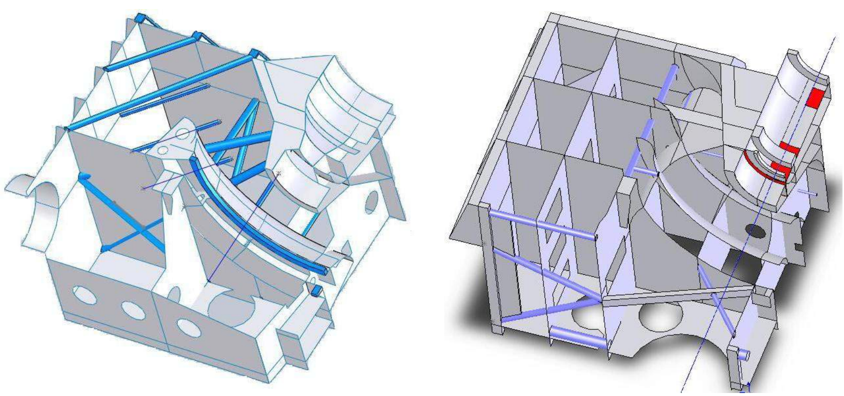
С целью дальнейшего совершенствования конструкций типовых ЦНД и так как показали результаты исследования [7], двухстенная модель имеет необоснованно большие запасы по прочности и устойчивости, поэтому был разработана конструкция второго типа крышки корпуса, которая при модернизации была существенно «облегчена». Старая двухстенная конструкция обечайки и торцевых стенок заменена на одностенную, что естественно понизило жесткость крышки. Такой переход на одностенную конструкцию с оребрением торцевых стенок и цилиндрической обечайки дает возможность снизить металлоемкость такой конструкции. Двухстенные конструкции верхних половин корпуса ЦНД в настоящее время не используются, поэтому в данной статье не рассматриваются.



а) б)

Рисунок 2 – Различные конструкции крышек ЦНД: а) К-310-23,5; б) К-500-65/3000

4.2 Анализ структуры нижней половины наружного корпуса ЦНД. Нижняя половина наружного корпуса ЦНД бывает двух типов: «сотового» и стержневого (рис. 3).



а) б)

Рисунок 3 – Нижняя половина наружного корпуса ЦНД:
а) «сотовая» конструкция; б) стержневая

В «сотовой» конструкции прочность стенок нижней половины корпуса обеспечивается силовой системой, представляющей собой набор продольных и поперечных ребер жесткости.

В первой половине 80-х годов ОАО «Турбоатом» приступил к выпуску ряда модификаций ЦНД, в которых с целью улучшения аэродинамического качества выхлопных патрубков вместо системы ребер жесткости в нижних половинах патрубков («сотовая» конструкция) применена система стержней («стержневая» конструкция). Главными преимуществами ЦНД «стержневой» конструкции по сравнению с традиционной «сотовой» конструкцией является наиболее низкий коэффициент потерь и сравнительно низкая удельная металлоемкость.

5 Разработка структурной модели наружного корпуса ЦНД. Весь модельный ряд выпускаемых турбин ОАО «Турбоатом» можно представить как различные комбинации вариантов конструкции крышек и корпусов, . представленных на рис.2 и рис.3 соответственно.

1 вариант. Одними из представителей комбинации двухстенной верхней половины и «сотового» корпуса является турбина К-500-240-2.

2 комбинированный вариант: Конструкция одностенной крышки с оребрением торцевых стенок и «сотовой» нижней половины используется при изготовлении ЦНД турбин К-500-65/3000.

Существующая концепция, принятая при проектировании корпусов ЦНД со встроенными опорами: жесткий низ – податливый верх в принципе верна. Однако, как показали исследования на Кольской АЭС [8], вероятность повышенных вибраций опор подшипника в таком корпусе выше, чем у более жесткого (1 вариант).

3 вариант: Еще одним вариантом является комбинация одностенной крышки и «стержневой» нижней половины. Основными представителями этого типа являются турбины К-320-23,5 и К-310-23,5.

В результате проведенного анализа типового ряда конструкций ЦНД, систематизируя его результаты, предлагается структурная схема семейства конструкций ЦНД (рис. 4.) с целью дальнейшего создания параметрической модели для каждого класса конструкций.

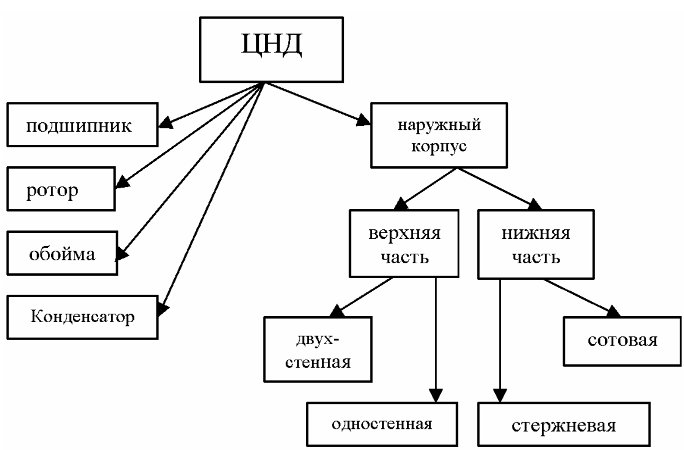


Рисунок 4 – Структурная схема элементов ЦНД

Анализируя динамические свойства структурных элементов приведенных на рис. 4. необходимо отметить, что подшипник, обойма и конденсатор жесткие массивные элементы конструкции и могут быть учтены как система при построении конечно-элементной модели как система сосредоточенных масс и кинематических ограничений. Ротор не имеет прямой кинематической связи с корпусом, так как опирается на корпус через подшипник скольжения, масляный слой которого обеспечивает упруго-демпферную связь. Поэтому ротор может быть учтен в виде сосредоточенной массы. Данная модель хорошо себя при анализе ряда корпусов ЦНД в системе ТФО [4-6]. Поэтому необходимо параметризировать только конструкцию наружного корпуса, классификация конструкций которого и сделана в данной работе.

Заключение. В работе проведен анализ типового ряда конструкций ЦНД выпускаемых ОАО «Турбоатом» для турбоагрегатов различной мощности и предложена классификация и систематизация конструкций корпусов ЦНД, на основании которой разработана структурная схема элементов ЦНД. Таким образом, в каждом классе конструкций ЦНД выделены общие для всех ЦНД структурные элементы – это является базой для разработки параметрической модели наружного корпуса ЦНД с дальнейшим вычленением изменяемых и неизменяемые характеристик структурных элементов конструкции. Предложена концепция построения конечно-элементных моделей классов ЦНД на основе суперэлементного подхода.

Стабильные, не превышающие нормы, уровни вибраций опор ротора ЦНД во всем диапазоне режимов работы гарантируют долговечность всего турбоагрегата в целом. Успешное решение этой задачи возможно только на основе применения современных методов параметрического моделирования конструкций ЦНД с дальнейшей оптимизацией их статических и динамических характеристик.

Список литературы: **1.** *Богомолов С.И. Журавлева А.М.* Колебания сложных механических систем. – Харьков: Вища школа А.М., 1978. – 136 с. **2.** *Воробьев Ю.С. Шульженко Н.Г.* Исследования колебаний системы элементов фундамента. – Киев: Наукова думка, 1978. – 135 с. **3.** *Амбросимов Н.А., Чихачев И.В.* Исследования динамической податливости системы «турбоашрегат-фундамент-основания» головного блока мощностью 1200МВт до укладки валопровода // Изв. ВНИИГ им. Веденеева 1984 г. – Вып. 173. – С. 12-20. **4.** *Степченко А.С.* Численные исследования динамических характеристик системы турбоагрегат-фундамент // Дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. – Харьков: ХГПУ, 1994 г. – 194 с. **5** *Жовдак В.О., Кабанов О.Ф., Степченко А.С., Красников С.В.* Исследование динамики статорных частей турбин К-300-240 и К-325-23,5 ХТГЗ // Проблемы машиностроения. – Харьков: Контраст, 2001. – Т .4, № 3-4. – С. 4-12 . **6.** *Жовдак В.О., Красников С.В., Степченко А.С., Торяник А.В.* Исследование явления расстройки в многокорпусных турбоагрегатах на основе компьютерной модели // Вісник НТУ «ХПІ». Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2008. – № 47. – С.70-79. **7.** *Виноградов Н.Н., Виноградова Л.Д., Герцберг Е.Я., Зидман А.П., Сачков Ю.С., Соколов Э.Н.* Исследование прочности и устойчивости корпусов ЦНД на металлических моделях // Труды ЦКТИ, Л. – Вып. 182. – 1980. **8.** *Рабинович Э.М., Виноградов Н.Н.* Исследование деформационного состояния ЦНД К-500-65/3000 в эксплуатации на ЛАЭС и ЦНД К-220-44-3 на Кольской АЭС. (Часть II. Кольской АЭС). Отчет ЦКТИ, Л., 1989 г.

Поступила в редколлегию 6.11.2009

УДК 620.171.3, 53.072.11

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд.физ.-мат.наук, доц., УГЗУ, Харьков

РАЗМЕРНОСТЬ ЗАДАЧИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ФОТОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пропонується метод зниження розмірності плоскій задачі методу кінцевих елементів, застосовуваних разом з методом фотопружності. Результати вимірювання методу фотопружності в цьому підході передбачаються абсолютно точними. Оцінено погрішність, пов'язана з таким припущенням.

The method of dimensionality reduction of plain problem of finite element method , with photoelasticity method is offered. The results of photoelasticity measurement in this approach are considered to be exact. The inaccuracy of the method is evaluated.

Введение. В работах [1-5] развивалась методология решения плоских и объемных задач метода конечных фотоупругих элементов. Эта методология направлена на решение проблемы, которая в теории метода фотоупругости имеет название проблемы «разделения нормальных напряжений». Дело в том, что относительно легко в методе фотоупругости определяются сдвиговые напряжения и разность нормальных напряжений. Задача решения проблемы «разделения нормальных напряжений» является неустойчивой. Нормальные значения напряжений при классическом методе решения находятся с неопределенной точностью (погрешность значительно превосходит размеры самих напряжений [6,7]). Для разделения нормальных напряжений используются либо предположения о напряженном состоянии, либо дополнительные экспериментальные данные, либо дополнительные сведения о напряженном состоянии, получаемые из уравнений динамики твердого деформируемого тела (граничных условий, условий равновесия). В рамках данного цикла работ [1-5] в качестве дополнительной информации используются граничные условия и условия равновесия. Учет этих условий привел к совместному использованию метода фотоупругости и метода конечных элементов (МКЭ). Этот метод автором для краткости называется МКФЭ.

1. Актуальность рассматриваемой проблемы. В работах [1-5] обсуждаются различные аспекты применения метода фотоупругости к исследованию напряжений в прозрачных пьезооптически активных телах. В этих работах обсуждались вопросы, связанные с совместным решением соотношений фотоупругости и уравнений динамики твердого деформируемого тела. В работах [1-3,5] методология метода фотоупругости рассматривалась совместно с методом конечных элементов (МКФЭ). В [4] метод фотоупругости рассматривается совместно с методом конечных разностей. В обоих случаях получаются новые методы, в которых уравнения фотоупругости и динамики твердого деформируемого тела решаются в едином алгоритме, как правило, относительно большого количества неизвестных. Большое число неизвестных представляет известные трудности для решения задач. Уменьшить количество неизвестных (понизить размерность задачи) является темой данной статьи.

2. Постановка задачи. Рассмотрим методологию МКФЭ, предложенную в [8,9] как метод МКЭ, дополненный уравнениями метода фотоупругости, применительно к плоской задаче. В этом случае естественно попробовать решить уравнения метода фотоупругости до применения методологии МКЭ. Методом фотоупругости с относительно хорошей точностью определяются сдвиговые компоненты напряжений и разность нормальных. Раздельное определение нормальных напряжений представляет собой неустойчивую задачу [1-5]. Если в МКЭ предполагать сдвиговые напряжения заранее определенными в узлах (методом фотоупругости), то размерность задачи падает на одну треть. Если дополнительно предположить известными разности нормальных, то размерность задачи падает на две трети. В настоящей статье предлагается и обсуждает именно этот подход к понижению размерности задачи фотоупругости.

3. Метод решения. Уравнения МКФЭ подробно описаны в [1,2 и др.]. Для плоского случая и треугольного элемента получаются следующие соотношения относительно узловых значений (вывод уравнение смотрите, например, в [1,8])

$$\sum_{\ell=1}^{3}\left(\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell}+\sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}\right)=0\,, \tag{1}$$

где $\sigma^{\ell}{}_{ij}$ – искомые величины напряжений в узлах конечных элементов, a_ℓ, b_ℓ, c_ℓ – коэффициенты линейного разложения функции формы, ℓ – номер узла в элементе. Уравнения (1) при известных сдвиговых компонентах и $i = 1$ преобразуются к виду

$$\sum_{\ell=1}^{3}\sigma_{11}^{\ell} b_{\ell}=B\,, \tag{2}$$

где $B=-\sum_{\ell=1}^{3}\sigma_{12}^{\ell} c_{\ell}$, $\sigma^{\ell}{}_{12}$ – определены методом фотоупругости.

Аналогично, уравнения (1) преобразуются для $i = 2$ и случая известных разностей нормальных напряжений.

4. Численный эксперимент. Были проделаны численные эксперименты на имитационной модели по определению точности определения всех компонент напряжений. В связи с тем, что их методология полностью совпадает с [1-5], в этой статье они обсуждаться не будут. Эксперименты проделывались для всех случаев, которые были рассмотрены в [1-3,5].

5. Обсуждение результатов. В ходе численных экспериментов не выявлено существенного увеличения или уменьшения точности определения напряжений.

Выводы. В рамках плоской задачи МКЭ единственными следствиями понижения размерности решения есть ускорение вычислительного процесса и экономия оперативной памяти компьютера.

Список литературы: **1.** *Тесленко А.А.* Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. **2.** *Тесленко А.А.* Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. **3.** *Тесленко А.А.* Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. **4.** *Тесленко А.А.* Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С. 169-171. **5.** *Тесленко А.А.* Определение точности метода фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170. **6.** *Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л.* и др. / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. **7.** *Тесленко А.А.* Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. **8.** *Тесленко А.А.* / Заводская лаборатория 2. – 1998. – Т. 64, № 8. – С. 42-44. **9.** *Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В.* / Функциональные материалы 2. – 1995. – № 4. – С. 543.

Поступила в редколлегию 11.09.2009

УДК 539.3

В.А.ФЕДОРОВ, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»;
С.В.РАДИОНОВА, инж.; НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И DELPHI-ПРОЕКТ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ ЗАРЯДА РДТТ ПРИ ЕГО ОХЛАЖДЕНИИ

В статті викладено математичну модель напружено-деформованого стану і паливного заряду ракетного двигуна твердого палива, а також короткий опис відповідного інтерактивного програмного продукту, розробленого в середовищі Delphi.

The mathematical model of the tensely-deformed state and strength of fuel charge of rocket engine of hard fuel, and also short description of the proper interactive programmatic product developed in the medium of Delphi, is expounded in the article.

Ракетные двигатели твердого топлива (РДТТ) применяются в различных областях техники. Вопросы прочности при их проектировании особенно актуальны, поскольку высокая энергоемкость и неуправляемый режим сгорания топливного заряда при разрушениях РДТТ приводят к серьезным авариям. Особенно опасны для прочности РДТТ условия глубокого охлаждения [1].

Наиболее распространенными являются РДТТ с трубчатыми скрепленными зарядами . В книге [1] изложена методика расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности такого заряда, заключенного в металлический корпус. Однако существует практическая необходимость разработки более совершенной математической модели, учитывающей наличие между зарядом и корпусом защитно-крепящего слоя, а также соответствующего программного приложения, позволяющего в интерактивном режиме оценивать НДС и прочность РДТТ.

1. Постановка задачи. Решается задача определения температурных напряжений и прочности скрепленного заряда РДТТ в условиях его охлаждения.

Рассматривается РДТТ с трубчатым топливным зарядом, защитно-крепящим слоем и металлическим корпусом [1-3]. Размеры следующие: a и b – внутренний и внешний радиус топливного заряда, h_z – толщина защитно-крепящего слоя, h_m – толщина металлического корпуса.

Известны термомеханические свойства топливного заряда: E_z – модуль упругости; v_z – коэффициент Пуассона; σ_{bz} – предел прочности на растяжение;

Термомеханические свойства защитно-крепящего слоя: E_s – модуль упругости; v_s – коэффициент Пуассона; α_s – коэффициенты линейного температурного расширения; σ_{bs} – предел прочности на растяжение.

Термоупругие свойства металлического корпуса: E_m – модуль упругости; v_m – коэффициент Пуассона; α_m – коэффициенты линейного температурного расширения.

Кроме того, заданы: σ_{azs} – прочность адгезии материалов топливного заряда и защитно-крепящего слоя.

Нагружение двигателя заключается в его охлаждении от температуры хранения до низкой температуры. Изменение температуры внешней среды – ΔT.

Необходимо разработать математическую модель, алгоритм и Delphi-программу расчета температурных напряжений в РДТТ и проверить прочность заряда и его адгезии с корпусом.

2 Математическая модель.

2.1 Общие гипотезы заимствуются из работы [1]:

1) температурное и силовое нагружение РДТТ осесимметрично и не зависит от продольной координаты x;

2) система корпус-заряд находится в условиях обобщенной плоской деформации (неизвестна продольная деформация $\varepsilon_x = \text{const}$ при отсутствующей продольной силе);

3) влиянием концевых эффектов пренебрегается.

В данной статье топливный заряд рассматривается как толстостенная труба, а защитно-крепящий слой и металлический корпус – как тонкие оболочки.

2.2 Механические свойства отдельных слоев корпуса РДТТ.

В общем случае корпус РДТТ является трехслойной тонкой упругой оболочкой. Каждый слой деформируется в соответствии с обобщенным законом Гука – Дюамеля – Неймана для двухосного напряженного состояния ($\sigma_r = 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_t + \alpha_1 \Delta T\ ; \\ \varepsilon_t &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_t + \alpha_2 \Delta T\ . \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь ε_x и ε_t – продольная и окружная деформации, σ_x и σ_t – продольное и окружное напряжения, ΔT – изменение температуры, a_{ij} – коэффициенты податливости, α_i – коэффициенты температурной деформации.

Для защитно-крепящего и металлического слоев

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E}; \qquad a_{12} = a_{21} = -\frac{\nu}{E}; \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha . \tag{2}$$

После обращения закон (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_t - \beta_1 \Delta T ; \\ \sigma_t &= c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_t - \beta_2 \Delta T , \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} c_{11} = \frac{a_{22}}{\Delta}; \qquad c_{22} = \frac{a_{11}}{\Delta}; \qquad c_{12} = c_{21} = -\frac{a_{12}}{\Delta} = -\frac{a_{21}}{\Delta}; \\ \beta_1 = \frac{\alpha_1 a_{22} - \alpha_2 a_{12}}{\Delta}; \qquad \beta_2 = \frac{\alpha_2 a_{11} - \alpha_1 a_{21}}{\Delta}; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \tag{5}$$

Соотношения (3) записываются в матричном виде

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{c}}\,\underline{\varepsilon} - \underline{\beta} T , \tag{6}$$

где $\underline{\sigma} = (\sigma_x \sigma_t)^T$, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_x \varepsilon_t)^T$ – матрицы-столбцы напряжений и деформаций, $\underline{\beta} = (\beta_1 \beta_2)^T$ – столбец коэффициентов температурных напряжений, $\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ – матрица жесткости материала.

2.3 Механические свойства корпуса РДТТ в целом

При исследовании тонких оболочек удобно использовать не напряжения, а погонные внутренние силы, которые выражаются через напряжения:

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_t \end{pmatrix} = \int_b^R (\underline{\sigma}) dr , \tag{7}$$

где

$$R = b + h_s + h_m. \tag{8}$$

После подстановки в равенство (7) закона (6) и интегрирования в пределах каждого слоя получим

$$\underline{N} = \int_b^R \underline{\underline{c}}\,\underline{\varepsilon} dr - \left(\int_b^R \underline{\beta} dr \right) T = \tag{9}$$

$$= \int_b^{b+h_s} \underline{\underline{c}}^{(s)} \underline{\varepsilon}\, dr + \int_{b+h_s}^{b+h_s+h_m} \underline{\underline{c}}^{(m)} \underline{\varepsilon}\, dr - \int_b^{b+h_s} \beta^{(s)}\, dr \Delta T - \int_{b+h_s}^{b+h_s+h_m} \beta^{(m)}\, dr \Delta T = \tag{10}$$

$$= \underline{\underline{c}}^{(s)} \int_b^{b+h_s} \underline{\varepsilon}\, dr + \underline{\underline{c}}^{(m)} \int_{b+h_s}^{b+h_s+h_m} \underline{\varepsilon}\, dr - \beta^{(s)} h_s \Delta T - \beta^{(m)} h_m \Delta T .$$

Подставив в зависимость (9) геометрическое соотношение

$$\varepsilon_t = \frac{W}{r} \tag{11}$$

и, считая, что в тонких оболочках защитно-крепящего слоя

$$r = \text{const} = R_s = b + h_s/2, \tag{12}$$

металлического слоя

$$r = \text{const} = R_m = b + h_m/2, \tag{13}$$

и радиальное перемещение w слоев корпуса равны

$$W_s = W_m = W_c = W_k, \tag{14}$$

получим физические соотношения в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Delta T \ . \tag{15}$$

Здесь коэффициенты жесткости корпуса РДТТ

$$\begin{gathered} B_{11} = c_{11}^{(s)} h_s + c_{11}^{(m)} h_m; \\ B_{12} = c_{12}^{(s)} h_s + c_{12}^{(m)} h_m; \\ B_{21} = c_{21}^{(s)} h_s + c_{21}^{(m)} h_m; \\ B_{22} = c_{22}^{(s)} h_s + c_{22}^{(m)} h_m \ . \end{gathered} \tag{16}$$

и коэффициенты температурных усилий корпуса РДТТ

$$\begin{gathered} \gamma_1 = \beta_1^{(s)} h_s + \beta_1^{(m)} h_m; \\ \gamma_2 = \beta_2^{(s)} h_s + \beta_2^{(m)} h_m. \end{gathered} \tag{17}$$

Физические соотношения для корпуса РДТТ (15) после их обращения принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \Delta T \ , \tag{18}$$

где коэффициенты податливости корпуса РДТТ

$$s_{11} = \frac{B_{22}}{\Delta}; \quad s_{22} = \frac{B_{11}}{\Delta}; \quad s_{12} = \frac{B_{21}}{\Delta}; \quad s_{21} = \frac{B_{12}}{\Delta}; \tag{19}$$

и коэффициенты температурного расширения

$$\delta_1 = \frac{\gamma_1 B_{22} - \gamma_2 B_{12}}{\Delta}; \quad \delta_2 = \frac{\gamma_2 B_{11} - \gamma_1 B_{21}}{\Delta}; \tag{20}$$

$$\Delta = B_{11} B_{22} - B_{12} B_{21} \ . \tag{21}$$

2.4 Математическая модель термоупругого деформирования РДТТ.

Математической моделью заряда является обобщение задачи Ляме о толстостенном цилиндре на случай термосилового нагружения при наличии продольной деформации $\acute{\varepsilon}_x \neq 0$.

Соотношения термоупругости [4]

$$\begin{gathered} \varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_x)] + \alpha \Delta T; \\ \varepsilon_t = \frac{1}{E}[\sigma_t - \nu(\sigma_x + \sigma_r)] + \alpha \Delta T; \\ \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_r + \sigma_t)] + \alpha \Delta T \end{gathered} \tag{22}$$

после исключения с помощью последнего уравнения

$$\sigma_x = v(\delta_r + \delta_t) - E\alpha\Delta T + E\varepsilon_x \tag{23}$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_*}(\delta_r - v_*\sigma)_t + \alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x; \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E_*}(\delta_t - v_*\sigma_r) + \alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$E_* = \frac{E}{1-v^2}; \qquad v_* = \frac{v}{1-v}; \qquad \alpha_* = (1+v)\alpha \ . \tag{25}$$

Решив уравнения (24) относительно напряжений, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_*}{1-v_*^2}[\varepsilon_r + v_*\varepsilon_t - (1+v_*)\alpha_*\Delta T + (1+v_*)v\varepsilon_x]; \\ \sigma_t &= \frac{E_*}{1-v_*^2}[\varepsilon_t + v_*\varepsilon_r - (1+v_*)\alpha_*\Delta T + (1+v_*)v\varepsilon_x]. \end{aligned} \tag{26}$$

Подставив в дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_r}{r} = 0 \tag{27}$$

физические соотношения (24) геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = \frac{dW}{dr}; \qquad \varepsilon_t = \frac{W}{r}, \tag{28}$$

где W – радиальные перемещения, получим разрешающее уравнение

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{dW}{dr} - \frac{W}{r^2} = (1+v_*)\left(\alpha_*\frac{d\Delta T}{dr} - v\frac{d^2x}{dr}\right), \tag{29}$$

которое имеет общее решение

$$W = (1+v_*)\frac{1}{r}\int_a^r(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x)rdr + c_1r + \frac{c_2}{r} \tag{30}$$

и для напряжений из (26)

$$\sigma_r = -\frac{E_x}{r^2}\int_a^r(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x)rdr + \frac{E_*}{1-v_*^2}[c_1\,(1+v_*) - c_2\,(1+v_*)\frac{1}{r^2}; \tag{31}$$

$$\sigma_t = -\frac{E_x}{r^2}\int_a^r(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x)rdr - E_*(\alpha_*T - v\varepsilon_x) + \frac{E_*}{1-v_*^2}[c_1\,(1+v_*) - c_2\,(1-v_*)\frac{1}{r^2}],$$

где c_1 и c_2 – неопределенные константы интегрирования.

При равномерном нагреве $\Delta T = \mathrm{const}$ и общее решение принимает вид

$$W = (1+v_*)(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x)\frac{r^2-a^2}{2r} + c_1r + \frac{c_2}{r};$$

$$\sigma_r = -E_*(\alpha_*\Delta T - v\varepsilon_x)\frac{r^2-a^2}{2r^2} + \frac{E_*}{1-v_*^2}[c_1\,(1+v_*) - c_2\,(1-v_*)\frac{1}{r^2}]; \tag{32}$$

$$\sigma_t = E_*(\alpha_*\Delta T - \nu\varepsilon_x)\left(\frac{r^2-a^2}{2r^2}-1\right)+\frac{E_*}{1-\nu_*^2}[c_1\ (1+\nu_*)+c_2\ (1-\nu_*)\frac{1}{r^2}]$$

и, согласно (23)

$$\sigma_x = (\nu^2 E_* + E)\varepsilon_x + \frac{2\nu E_*}{1-\nu_*}c_1 - (\nu E_*\alpha_* + E\alpha)\Delta T\ .$$

В формулах, описывающих напряженно-деформированное состояние корпуса и заряда РДТТ, неизвестные c_1, c_2 и $\acute{\varepsilon}_x$ должны определяться из граничного условия для заряда при $r = a$, условия сопряжения заряда с корпусом при $r = b$ и условия равновесия системы заряд-корпус.

3 Решение задачи охлаждения РДТТ. Решение задачи о соответствующем изменении напряженно-деформированного состояния описывается общим решением для корпуса и заряда РДТТ с граничным условием отсутствия нагрузки на внутреннюю поверхность заряда

$$\sigma_r(r = a) = 0 \tag{33}$$

и условиями сопряжения заряда с корпусом РДТТ: условием равенства окружных деформаций и, соответственно, радиальных перемещений в заряде и в корпусе

$$\varepsilon^{з}_{t}(r=b)=\varepsilon^{к}_{t}\ , \tag{34}$$

условием равновесия корпуса под действием радиального давления заряда

$$\sigma_r(r = b) = -N_t/R_m \tag{35}$$

и условием равенства нулю равнодействующей внутренней осевой силы в РДТТ

$$2\pi R_m N_x + \pi(b^2 - a^2)\sigma_x = 0\ . \tag{36}$$

В после подстановки общих решений для заряда и физических соотношений для корпуса эти условия запишутся как система четырех уравнений с четырьмя неизвестными $\varepsilon_x, \varepsilon_t^к, c_1, c_2$ позволяет после подстановки их в общее решение найти напряженное состояние заряда по формулам (32).

Для оценки прочности заряда и его сопряжения с корпусом необходимо вычислить запас прочности топливного заряда по критерию Мизеса:

$$k_z = \sigma_{bz} / \max\sigma_i\ , \tag{37}$$

где $\max \sigma_i$ – максимальная интенсивность напряжений в топливном заряде а также запас прочности соединения заряд – корпус

$$k_{zk} = \sigma_{bzk} / \sigma_r(r=b)\ , \tag{38}$$

где σ_{bzk} – прочность адгезии заряда с корпусом.

4 Программа расчета НДС и прочности топливного заряда РДТТ. Программа, разработанная в системе программирования Delphi, содержит две формы.

Главная форма (рис. 1) предназначена для ввода исходных данных и сохранения их вариантов. Основные ее элементы:

1) главное меню, позволяющее открыть ранее созданные, сохранить но-

вые варианты расчета, воспользоваться справкой по программе;

2) комментарий ко всему варианту расчета, идентифицирующий его среди других;

3) компоненты GroupBox с окнами редакторов для каждого материала, в которые вносятся

– маркировка материала;
– термомеханические свойства материалов слоев и свойства их адгезии;

4) компонент GroupBox с окнами редакторов для задания температур;

5) кнопка «Считать», которая инициирует расчет напряженно-деформированного состояния заряда и открытие формы с графиками результатов;

6) кнопка «Закончить», по которой происходит завершение работы программы.

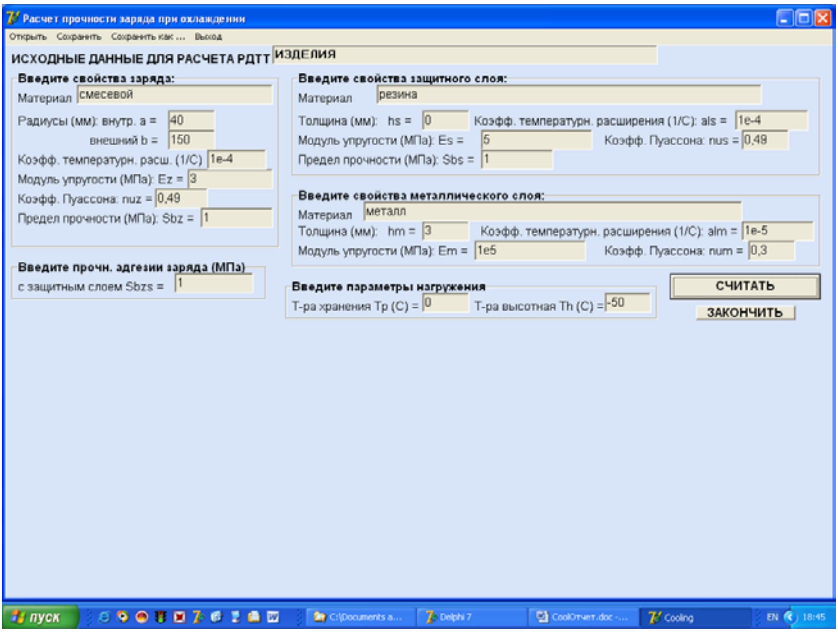


Рисунок 1 – Главная форма для исходных данных

Основные элементы другой формы (рис. 2), предназначенной для вывода результатов расчета:

1) рисунок «Напряженное состояние заряда» с графиками напряжений;

2) рисунок «Запасы прочности» с графиками запасов прочности для заряда и для соединения заряд – корпус;

3) компонентами Label, через которые программа дает качественную оценку о прочном или непрочном состоянии ракеты;

4) кнопка «Закрыть», закрывающая модальную форму.

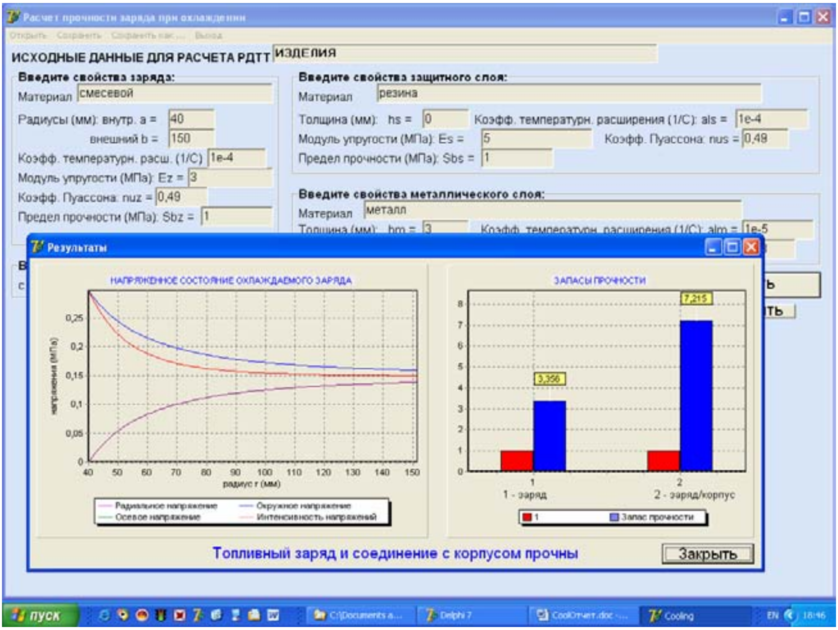


Рисунок 2 – Модальная форма для результатов расчета

Список литературы: 1. *Фахрутдинов И.Х., Котельников А.В.* Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. – М.: Машиностроение, 1987. – 328 с. **2.** Конструкция и отработка РДТТ / *А.М. Винницкий, В.Т. Волков, И.Г. Волковицкий и др.* – М.: Машиностроение, 1980. – 230 с. **3.** *Абугов Д.И., Бобылев В.М.* Теория и расчет ракетных двигателей твердого топлива. – М.: Машиностроение, 1987. – 272 с. **4**. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

Поступила в редколлегию 25.09.2009

УДК 621.774.7

В.Г.ФЕДОРЧЕНКО, канд.техн.наук, доц., ДГМА, Краматорск;
С.В.ПОДЛЕСНЫЙ, канд.техн.наук, доц., ДГМА, Краматорск;
А.Ю.ДЕНЬЩИКОВ, асс., ДГМА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ИНТЕРВАЛА ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАЗВАЛЬЦОВКЕ ТОНКОСТЕННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРУБ

Пропонуються залежності в графічній та аналітичній формах визначення температурного інтервалу пластичності з метою здобуття оптимальних енергосилових параметрів развальцовки тонкостінних труб довільного діаметру. Отримані аналітичні залежності показують задовільну збіжність з експериментальними даними, що приводяться в літературних джерелах.

Dependences are offered in the graphic and analytical forms of determination of temperature interval of plasticity with the purpose of receipt of optimum energypower parameters of enlarge pipes tehinly wall pipes of arbitrary diameter. Got analytical dependences show satisfactory convergence with experimental information which over are brought in literary sources.

Изделия из трубчатых заготовок, особенно из труб, применяют практически во всех отраслях народного хозяйства.

В работе [1] получено уравнение полной интенсивности внешних сил, необходимых для деформации цилиндрической оболочки:

$$q = 2\frac{h}{r}\sigma_T + j\frac{R-r}{2t^2}, \tag{1}$$

где q – полная интенсивность внешних сил; h – толщина цилиндрической оболочки; r – внутренний радиус цилиндра до деформации; R – внутренний радиус цилиндра после деформации; σ_T – предел текучести материала; j – удельная массовая плотность материала; t – время процесса деформации.

Уравнение содержит два слагаемых в правой его части.

Первое слагаемое учитывает интенсивность сил упругого сопротивления и сил сопротивления пластической деформации.

Второе слагаемое учитывает интенсивность сопротивления действия инерционных сил.

Для вычисления первого слагаемого возникает необходимость количественного определения предела текучести σ_T в зависимости от температурного интервала обработки, а также конкретного числового значения предела текучести при конкретной температуре внутри температурного интервала.

С этой целью принята попытка анализа соответствующих литературных источников.

Нагрев заготовок перед обработкой давлением [2], который производится с целью повышения пластичности металла, в результате чего сопротивление деформации значительно уменьшается (в 10-15 раз) по сравнению с обычным холодным состоянием (20 °С).

Для малоуглеродистой стали (Ст. 2) согласно [3] в обычном холодном состоянии предел текучести находится в пределах $\sigma_T = 220 \div 260$ МПа и предел прочности $\sigma_B = 340 \div 420$ МПа.

Сопоставление информации источников [2] и [3] указывает на то, что между пределами текучести стали в обычном холодном и нагретом состояниях существует связь, которую можно использовать для определения диапазона температур с максимальными пластическими свойствами стали.

Каждому сплаву соответствует определенная температура нагрева. Начальную температуру горячей обработки сплава определяют [2] по формуле:

$$t_н = at_{пл}, \tag{2}$$

где a – коэффициент понижения температуры , равный 0,85-0,95; $t_{пл}$ – температура плавления сплава, которая определяется с помощью диаграммы состояния; $t_н$ – начальная температура горячей обработки сплава.

Температура конца горячей обработки сталей в зависимости от содержания в них углерода определяется по формуле:

$$t_к = 0{,}7t_{пл}, \tag{3}$$

где $t_к$ – конечная температура горячей обработки сплава.

Применяя формулы (2) и (3) для определения наиболее энергосберегающего температурного порога горячей обработки сталей в зависимости от содержания в них углерода, для чего используем диаграмму железо-углерод [4], представленную на рис. 1 в сокращенном виде и относительно увеличенном масштабе.

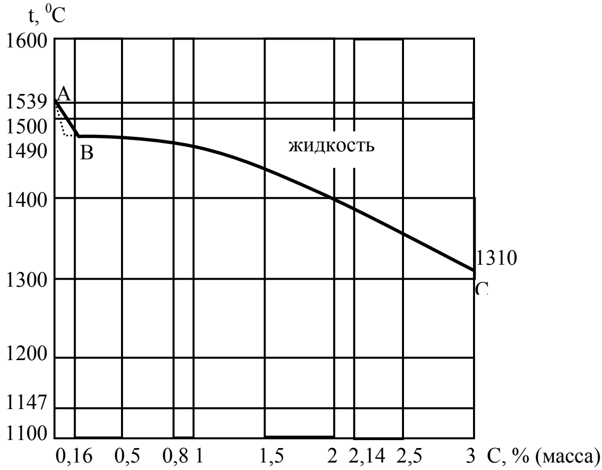


Рисунок 1 – Диаграмма железо-углерод: АВ – (линия ликвидус) показывает температуру начала кристаллизации δ-феррита из жидкого сплава; ВС – (линия ликвидус) соответствует температуре начала кристаллизации аустенита. Линии АВ соответствуют сплавы, содержащие 0,1-0,16 % С

С целью получения аналитических зависимостей криволинейных линий ВС и АВ на диаграмме железо-углерод смоделируем, например, самую протяженную кривую линию ВС траекторией движения материальной точки в вертикальной плоскости, показанной на рис. 2, под действием силы тяжести $\overline{P}$ с начальной горизонтальной скоростью $\overline{v}_0$.

Запишем поочередно дифференциальные уравнения движения точки М [5] и проинтегрируем их:

$$\ddot{x} = 0,$$

откуда

$$\dot{x} = C_1, \tag{4}$$

$$x = C_1 t + C_2. \tag{5}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования, которые определяются согласно начальным условиям: $t = 0; x = x_0 = 0; \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0$.

Подставив начальные условия в уравнения (4) и (5), получим $C_1 = v_0$; $C_2 = 0$, откуда

$$x = v_0 t; \tag{6}$$

$$\ddot{y} = -g,$$

откуда

$$\dot{y} = -gt + C_3\,; \tag{7}$$

$$y = C_3 t - g\frac{t^2}{2} + C_4\,; \tag{8}$$

где C_3, C_4 – постоянные интегрирования, которые определяются согласно начальным условиям: $t = 0, y = y_0, \dot{y} = \dot{y}_0 = 0$.

Подставив начальные условия в уравнения (7)и (8), получим $C_3 = 0$, $C_4 = y_0$, откуда

$$y = y_0 - \frac{g}{2}t^2\,. \tag{9}$$

Решив совместно уравнения (6)и (9) получим:

$$y = y_0 - \frac{g}{2v_0^2}x^2\,. \tag{10}$$

Произведем замену переменных в формуле (10), полученной согласно рис. 2 на переменные согласно диаграмме железо-углерод (рис. 1)

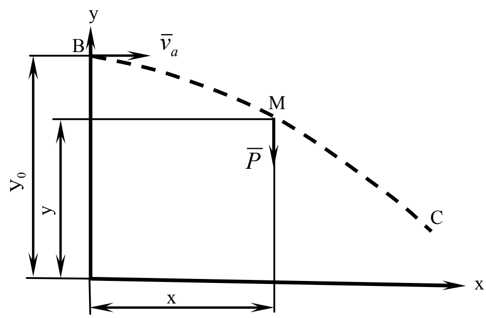


Рисунок 2 – Траектория точки А в вертикальной плоскости

Тогда

$$y_0 \to t_B, \tag{11}$$

где t_B – температура соответствующая точке В на диаграмме железо-углерод и количественно равная 1490 °С.

$$y \to t_{пл}, \tag{12}$$

где $t_{пл}$ – переменная температуры плавления по кривой ВС, зависящая от содержания углерода в сплаве.

$$\frac{g}{2v_0^2} \to a \text{ (постоянный коэффициент)} \tag{13}$$

$$x \to C \text{ м (углерод С, \%)} \tag{14}$$

Введя результаты (11)÷(14) в уравнение (10), получим предварительную формулу для определения температуры плавления железо-углеродного сплава (стали, чугуна) в зависимости от содержания углерода в процентах по массе:

$$t_{пл} = 1{,}490 - aC^2\,. \tag{15}$$

Для определения коэффициента a в формуле (15) подставим в нее известные по диаграмме железо-углерод значения абсцисс С = 3 % и ординаты

$t_{пл}$ = 1310 °C:

$$1310 = 1490 - 9a, \text{ откуда}$$

$$a = \frac{1490 - 1310}{9} = \frac{180}{9} = 20. \qquad (16)$$

Введя значение коэффициента (16) в уравнение (15), получим окончательное аналитическое выражение для вычисления температуры плавления железо-углеродистого сплава в зависимости от процентного по массе количества углерода в нем:

$$t_{пл} = 10(149 - 2C^2). \qquad (17)$$

Для определения точности аппроксимации графической диаграммы железо-углерод на участке от 0,16 до 3 % С (рис. 1) аналитическим выражением (17) подставим в него значение углерода С = 2 %. Тогда согласно формуле (17) получим значение температуры плавления $t_{пл}$ = 1410 °С. Согласно диаграмме (рис. 1) это значение соответствует 1400 °С.

Таким образом, погрешность аппроксимации составляет около 0,7 %.

Подставим значение $t_{пл}$ согласно (17) в формулы (2) и (3) согласно [2]. Тогда получим:

$$t_н = (8{,}5 \div 9{,}5)(149 - 2C^2); \qquad (18)$$

$$t_к = 7(149 - 2C^2). \qquad (19)$$

Анализ полученных результатов (18) и (19) с изменением содержания углерода в сплаве железо-углерод, показывает, что средняя разница между начальной температурой $t_н$ и конечной температурой $t_к$, то есть температурный интервал горячей обработки практически не изменяется с изменением углерода в сплавах и составляет около 270 °С.

Для определения энергосиловых параметров установок горячей обработки материалов, наряду с определением температурных интервалов, необходимо также иметь сведения о механических свойствах обрабатываемых материалов в заданном температурном интервале.

Согласно данным [6] и [7] построены диаграммы изменения пределов текучести сплавов железо-углерод в зависимости от температуры [6] на рис. 3.

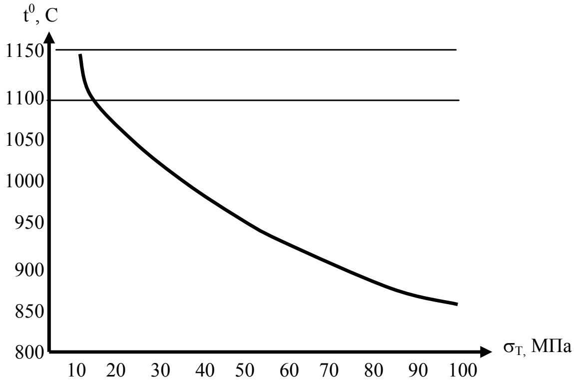


Рисунок 3 – Диаграмма зависимости предела текучести от температуры

Результаты исследований, приведенных на рис. 3, были получен с помощью высокотемпературного микроскопа НМ-4S (Япония) в нейтральной среде на полированных образцах с температурным интервалом 50 °С.

Анализ диаграммы, представленный на рис. 3 показывает, что скорость снижения пластических свойств сплава железо-углерод (Fe-C) с интервалами температур 100 °С имеет следующие значения:

1150 ÷1050 °С – 0,13 МПа/°С
1050 ÷ 950 °С – 0,3 МПа/°С
950 ÷ 850 °С – 0,44 МПа/°С

Таким образом, при более горячей обработке рассматриваемого материала, пластические его свойства при снижении температуры уменьшаются медленнее, чем при менее горячей его обработке.

В процессе обкатки с изменением температуры, скорости и степени деформации предел текучести металла [8] изменяется от 12,5 МПа в начале обкатки до 32 МПа в конце ее.

Температурный интервал, согласно диаграммы зависимости предела текучести от температуры (рис. 3), по данным [8], соответствует 1100 °С в начале обкатки и 1000 °С в конце ее, то есть составляет 100^0C.

Воспользовавшись формулами (18) и (19) можно определить процентный состав по углероду стали согласно [8], подставив в них исходные данные, полученные согласно диаграмме рис. 3 [6], и решив предварительно указанные уравнения относительно искомой величины.

Предварительно для уточнения плавающего коэффициента $a = 8{,}5 \div 9{,}5$ [2], который принят как неизвестное x, изменим уравнения (18) и (19):

$$t_н = x(149 - 2C^2); \tag{23}$$

$$t_к = 7(149 - 2C^2)\ . \tag{24}$$

Разделив уравнение (23) на уравнение (24), и решив полученное уравнение относительно неизвестной x, получим:

$$x = 7\frac{t_н}{t_к}\ . \tag{25}$$

Согласно литературным данным [2,8,9,10,11] все или почти все возможные температурные интервалы горячей обработки сталей с результатами значений х. определенных по формуле (25) приведены ниже:

$$\left.\begin{array}{l} 1.[2]1255 - 11000C,\ x = 8{,}0; \\ 2.[8]1100 - 10000C,\ x = 7{,}7; \\ 3.[9]1200 - 11500C,\ x = 7{,}3; \\ 4.[10]1200 - 11000C,\ x = 7{,}6; \\ 5.[11]1100 - 7600C,\ x = 10{,}2. \end{array}\right\} \tag{26}$$

Таким образом, плавающий коэффициент *а,* согласно [2] изменяется в пределах 8,5÷9,5, а согласно уточнению получены более широкие пределы 7,3÷10,2 и, кроме того, они зависят от температурного поля (интервала) горячей обработки (в данном случае стали).

Представим коэффициент *а* в порядке увеличения полученных результатов (26):

$$a = (7{,}6 \div 7{,}6 \div 7{,}7 \div 8{,}0 \div 10{,}2)\,. \qquad (27)$$

Введем переменное значение a согласно (27) в исходные уравнения (18) и (19):

$$t_н = (7{,}6 \div 7{,}6 \div 7{,}7 \div 8{,}0 \div 10{,}2)(149 - 2C^2); \qquad (28)$$

$$t_к = 7(149 - 2C^2). \qquad (29)$$

Полученные уравнения (28) и (29) дают возможность определять, как значения температурного интервала горячей обработки стали по процентному содержанию углерода в ней, так и по известному температурному интервалу определять процентное содержание углерода в металле.

Так, например, для температурного интервала 1100-1000 °С согласно уравнению (29):

$$C^2 = \frac{1043 - t_к}{14} = \frac{1043 - 1000}{14};$$

$$C = \sqrt{\frac{43}{14}} \text{ или } \mathrm{C} = 1{,}75\ \%.$$

Согласно [1] интенсивность необходимых для увеличения диаметра тонкостенных цилиндров по формуле (1) представляется как сумма трех составляющих:

$$q = q_1 + q_2 + q_3, \qquad (30)$$

где q_1 – интенсивность сил сопротивления пластической деформации; q_2 – интенсивность сил упругого сопротивления; q_3 – интенсивность действия инерционных сил.

В формуле (1) сумма первых двух слагаемых составляет

$$q_1 + q_2 = 2\frac{h}{r}\sigma_T\,. \qquad (31)$$

Первая часть уравнения (31) является первым слагаемым формулы (1).

Используя полученные результаты по определению температурного интервала горячей обработки нелегированных сталей и их пределов текучести в зависимости от содержания углерода в них, произведем числовое определение первого слагаемого (1) на примере трубчатой заготовки, удовлетворяющей условию тонкостенности при внутреннем радиусе ее $r = 100$ мм с толщиной стенки $h = 5$ мм в полученном (26) температурном интервале 1100-1000 °С.

Указанные условия соответствуют горячей обработке тонкостенных трубчатых заготовок.

Ранее было показано, что температурному интервалу 1100-1000 °С соответствуют пределы текучести 12,5-13 МПа.

Введем в формулу (31) все приведенные выше числовые значения:

$$q_1 + q_2 = 2\frac{h}{r}\sigma_T = 2\frac{10}{100}12{,}5 = 1{,}25\text{, МПа}; \qquad (32)$$

$$q_1 + q_2 = 2\frac{h}{r}\sigma_T = 2\frac{10}{100}32 = 3{,}2\text{, МПа}. \qquad (33)$$

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что с поижением температуры горячей обработки сталей, интенсивность внешних сил от первого слагаемого [1] в интервале рабочих температур 1100-1000 °C возрастает в 2,56 раза. Поэтому диапазон рабочих температур горячей обработки желательно уменьшать за счет интенсификации процесса обработки или в результате создания дополнительных условий для поддержания рабочей температуры обработки более постоянной.

Список литературы: **1.** *Федорченко В.Г. Подлесный С.В.*. Определение энергосиловых параметров развальцовки тонкостенных осесимметричных труб // Вісник Східноукраїнського національного університету імені В.Даля. – № 6 [124], ч. 2. – 2005. – С. 55-60. **2.** *Казаков Н.Ф., Осокин А.М., Шникова А.П.* Технология металлов и других конструкционных материалов. – М.: Металлургия, 1976. – 687 с. **3.** *Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С.* Сопротивление материалов. – Киев: Вища школа, 1986. –775 с. **4.** *Лахтин Ю.М.* Металловедение и термическая обработка металлов. – М.: Металлургия, 1969. – 359 с. **5.** *Добронравов .В.В., Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. – М. : Высшая школа, 1983. – 575 с. **6.** *Федорченко В.Г.* Исследование влияния металлургических и технологических факторов на образование горячих трещин в ковком чугуне. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.16.04. – М., 1973. – 220 с. **7.** *Алексеев Ю.Н.* Вопросы пластического течения металлов. – Харьков, ХГУ, 1958. – 187 с. **8.** *Капорович В.Г.* Поиск новых технологических решений в области обкатки трубчатых заготовок // Вестник машиностроения. – № 9. – 1983. – С. 26-32.

Поступила в редколлегию 09.10.2009

УДК 539.376

П.В.ФЕРНАТИ, канд.техн.наук, науч.сотр., Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

К РАСЧЕТУ ДЕФОРМАЦИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ ПОДОБИЯ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Розглянута задача розрахунку деформацій нелінійної повзучості нейлону FM 3001 і склопластику СВАМ за умов розтягу. Розв'язок задачі ґрунтується на моделі повзучості, побудованої виходячи з гіпотези подібності кривих повзучості. Гіпотеза подібності обґрунтована експериментально з використанням статистичних критеріїв. Вдосконалена методика визначення параметрів визначальних рівнянь моделі. Отримано задовільне узгодження результатів розрахунку деформацій повзучості з експериментальними даними.

The problem of the nonlinear creep strains calculation of nylon FM 3001 and glass-plastic CBAM under tension is considered. The problem is solved on the basis of a nonlinear creep model from hypothesis of the creep carves similarity. The hypothesis of the creep carves similarity is grounded experimentally with the use of statistical criteria. The method of determination of parameters of determining equalizations of model is improved. The calculations of deformations of creep are in good agreement with experimental data.

Среди современных перспективных конструкционных материалов широкое распространение получили полимеры и композиции на их основе. Применение их практически во всех отраслях промышленности и в быту послужило причиной интенсивного изучения их механических свойств, среди которых особый интерес заслуживают вязкоупругие свойства, которые у этих материалов обладают нелинейной природой и проявляются даже при комнатной температуре.

Для описания процессов нелинейного вязкоупругого деформирования широкого распространения получили упрощенные варианты обобщенной нелинейной модели наследственного типа Вольрера-Фреше [1,2]. Эти модели построены на основе гипотез и упрощающих предположений выдвинутых исходя из анализа особенностей вязкоупругого деформирования характерных для классов реальных материалов.

В данной работе рассматривается модель нелинейной ползучести, построенная на основе гипотезы подобия кривых ползучести [2,3,4,5,6]. Функция подобия в которой зависит от напряжения и не зависит от времени.

Анализ литературу показал, что работ, в которых решаются нелинейные задачи вязкоупругости с использованием данной модели очень мало. В работе [3] используется данная модель для расчета деформаций нелинейной ползучести полиэфирной смолы. Там же изложена методика по определению параметров ядер наследственности. Однако эта методика рассчитана на использование одной конкретной структуры ядра наследственности. Для других более перспективных структур ядер эта методика не подходит.

В данной работе решается задача экспериментального обоснования гипотезы подобия кривых ползучести, определения параметров модели, включающих и параметры дробно-экспоненциальных ядер наследственности и расчете деформаций нелинейной ползучести исследованных материалов для разных уровней растягивающих напряжений.

1. Постановка задачи исследования. Объект исследования. В одномерном случае связь между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ в соответствии с кратно-интегральным представлением Вольтера-Фреше задается соотношением

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)=&\frac{\sigma(t)}{E}+\frac{1}{E_1}\int_0^t K_1(t-\tau_1)\sigma(\tau_1)d\tau_1+\frac{1}{E_2}\int_0^t\int_0^t K_2(t-\tau_1,t-\tau_2)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\\&+\frac{1}{E_3}\int_0^t\int_0^t\int_0^t K_3(t-\tau_1,t-\tau_2,t-\tau_{32})\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)\sigma(\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3+\ldots,\end{aligned}\qquad(1.1)$$

где E – модуль упругости материала; $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$, $K_3(\cdot)$ – функции, которые являются характеристиками материала и интерпретируются как ядра ползучести; E_1, E_2, E_3 – постоянные.

Частным случаем обобщенного нелинейного уравнения (1.1) в работе рассматривается интегральное соотношение [3,4,5,6]

$$\varepsilon(t)=\psi\big(\sigma(t)\big)+\lambda\int_0^t K(t-\tau)f\big(\sigma(\tau)\big)d\tau\,,\qquad(1.2)$$

отражающие подобие первичных кривых ползучести «$\varepsilon - t$».

В качестве ядра интегрального оператора $K(t-\tau)$ в уравнении (1.2) используется дробно-экспоненциальное ядро [1,3,4]

$$K(t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n(t-\tau)^{\alpha+(1+\alpha)n}}{\Gamma\big[(1+\alpha)(1+n)\big]},\qquad(1.3)$$

где α, β – параметры ядра, подлежащие определению из экспериментов на ползучесть или на релаксацию ($1 > \alpha > 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функция.

Параметры α и β дробно-экспоненциального ядра (1.3), а также реологический параметр λ в уравнениях (1.2) определяются по результатам обработки экспериментальных данных на одноосную ползучесть при фиксированной температуре и нескольких уровнях постоянных напряжений. В этом случае величина напряжения $\sigma(t)$ задается соотношением

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \qquad (k = \overline{1,m}), \tag{1.4}$$

где $h(t)$ – единичная функция Хевисайда ($h(t) = 0$ при $t < 0$ и ($h(t) = 1$ при $t \geq 0$), а $\sigma_k = \text{const}$.

Функция $\psi(\sigma_k)$ определяющая величину начальной деформации при $t = 0$ задается одночленной степенной аппроксимацией

$$\psi(\sigma_k) = \frac{q}{H}(\sigma_k)^{1/q}, \tag{1.5}$$

где q, H – экспериментально определяемые коэффициенты.

Задача заключается в экспериментальном обосновании, с учетом статистического характера реологических свойств реальных материалов, гипотезы подобия кривых ползучести, определении материальных констант в определяющем уравнении нелинейной ползучести (1.2) и расчете деформаций ползучести исследованных материалов для разных уровней растягивающих напряжений.

Методы определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности в интегральном уравнении (1.2) апробируются в работе на примере нейлоновых волокон FM3001 и стеклопластика СВАМ. Экспериментальные данные заимствованы из работ [7,8]соответственно.

2. Обоснование подобия первичных кривых ползучести. Определяющее уравнение рассматриваемой модели (1.2) предполагает подобие кривых ползучести, которое в работе обосновывается путем анализа экспериментальных кривых ползучести.

Первичные кривые ползучести, построенные в координатах «деформация ε^r – время t» при разных уровнях напряжений σ_k считаются подобными, если в сходственных точках выполняется условие [3]

$$\varepsilon(\sigma_k, t_j) = \chi_k(\sigma_k)\varepsilon(\sigma_0, t_j) \Rightarrow \varepsilon(\sigma_0, t_j) = \frac{\varepsilon(\sigma_k, t_j)}{\chi_k(\sigma_k)}, \tag{2.1}$$

для любого момента времени t_j. Здесь $\chi_k(\sigma_k)$ – функция подобия; $\varepsilon(\sigma_k,t_j)$ – деформация, измеренная по кривой ползучести при напряжении σ_k; $\varepsilon(\sigma_0,t_j)$ – деформация измеренная по кривой ползучести при некотором базисном напряжении σ_0.

Дискретные значения функции подобия $\chi_k(\sigma_k)$ определяются из условия наилучшего согласования экспериментальных кривых ползучести, построенных для нескольких значений σ_k, с экспериментальной базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0,t_j)$ согласно условия подобия (2.1). Задача сводится к минимизации функционала

$$F(\chi_k(\sigma_k)) = \sum_{j=1}^{n}\left\{\varepsilon(\sigma_0, t_j) - \frac{\varepsilon(\sigma_k, t_j)}{\chi_k(\sigma_k)}\right\}^2, \tag{2.2}$$

откуда для функции подобия получаем соотношение

$$\chi_k(\sigma_k) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon(\sigma_k, t_j)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon(t_j, \sigma_0)\varepsilon(\sigma_k, t_j)}, \tag{2.3}$$

которое позволяет рассчитывать осредненные значения $\tilde{\chi}_k(\sigma_k)$.

Значения осредненной функции подобия $\tilde{\chi}_k(\sigma_k)$, рассчитанные на основе соотношения (2.3), используются в дальнейшем исходя из (2.1) для определения деформаций ползучести $\tilde{\varepsilon}(\sigma_k, t_j)$ приведенных к базисной кривой ползучести при напряжении σ_0.

Естественно рассчитанные с использованием соотношения (2.1) приведенные кривые ползучести лягут на кривую приведения $\varepsilon(\sigma_0, t_j)$ с некоторым разбросом. Это объясняется наличием статистического характера механических свойств материалов, отсутствием абсолютно точного подобия кривых ползучести, а также рядом других факторов. Для оценки существования подобия кривых ползучести воспользуемся следующей методикой, которая аналогична изложенной в [9].

Пусть $\tilde{\varepsilon}(\sigma_0, t_j)$ - истинное, а $\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j)$ – выборочное среднее значение единой приведенной кривой ползучести для t_j, $j = \overline{1, l}$ момента времени. Примем далее, что погрешность оценки единой приведенной кривой ползучести составляет δ по отношению к выборочному среднему значению. В этом случае считаем, что кривые ползучести подобны с погрешностью δ, если интервал

$$\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) - \delta\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) < \tilde{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) < \bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) + \delta\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) \tag{2.4}$$

накрывает истинное значение единой приведенной кривой ползучести с некоторой вероятностью P. С такой же вероятностью P величина $\tilde{\varepsilon}(\sigma_0, t_j))$ охватывается доверительным интервалом [10]

$$\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) - \frac{t_{\alpha,k} S_{\tilde{\varepsilon}}(t_j)}{\sqrt{n}} < \tilde{\varepsilon}(\sigma_0, t_j)) < \bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) + \frac{t_{\alpha,k} S_{\tilde{\varepsilon}}(t_j)}{\sqrt{n}}, \tag{2.5}$$

где $t_{\alpha,k}$ – значение квантиля статистики; $S_{\tilde{\varepsilon}^r}(t_j)$ – выборочное среднее квадратичное отклонение единой приведенной кривой ползучести $\tilde{\varepsilon}(\sigma_0, t_j)$.

Из совместного решения неравенств (2.4) и (2.5) для значения квантиля статистики $t_{\alpha,k}$ получаем соотношение

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j)\sqrt{n}}{S_{\tilde{\varepsilon}}(t_j)}. \tag{2.6}$$

Величина $\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j)$ определяется из уравнения

$$\bar{\varepsilon}(\sigma_0, t_j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\tilde{\psi}(\sigma_k) \cdot \varepsilon(\sigma_k, t_j)\right], \tag{2.7}$$

а величина $S_{\tilde{\varepsilon}}\left(t_j\right)$ – из уравнения

$$S_{\tilde{\varepsilon}}\left(t_j\right)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\overline{\psi}(\sigma_k)\cdot\varepsilon(\sigma_k,t_j)\right]-\overline{\varepsilon}(\sigma_0,t_j)\right)^2}\ . \qquad (2.8)$$

Будем считать, что кривые ползучести подобны, если при заданной погрешности δ = 0,05 вероятность попадания $\tilde{\varepsilon}(\sigma_0,t_j)$ в интервалы (2.4) и (2.5) будет не ниже 90 %.

Проверка выполнения условия подобия (2.6) осуществляется далее в следующей последовательности. Для вероятности P = 90 % и уровня значимости $k = n - 1$ по таблицам [10] находится критическое значение квантиля статистики $t^*_{\alpha,k}$. Расчетное значение квантиля статистики $t_{\alpha,k}$, найденное по формуле (2.6), сравнивается с величиной $t^*_{\alpha,k}$. Считается, что кривые ползучести подобны, если выполняется условие

$$t_{\alpha,k}=\frac{\delta\overline{\varepsilon}(\sigma_0,t_j)\sqrt{n}}{S_{\tilde{\varepsilon}}(t_j)}\geq t^*_{\alpha,k} \qquad (2.9)$$

в исследованном диапазоне напряжений и длительностей нагружения. Если условие (2.9) не выполняется, то есть $t_{\alpha,k} < t^*_{\alpha,k}$, то кривые ползучести не подобны.

В качестве базисных кривых ползучести выбраны кривые, соответствующие уровню напряжения σ_0 = 16,55 МПа для нейлона FM 3001 и σ_0 = 89,24 МПа для стеклопластика СВАМ.

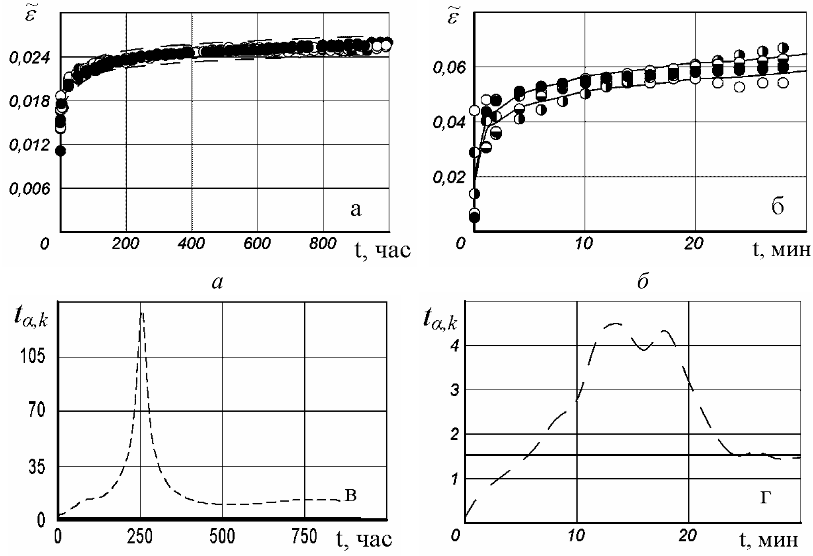
Значения коэффициента подобия $\chi_k(\sigma_k)$ найденного для нейлона FM 3001 и стеклопластика СВАМ по формуле (2.3) представлены в табл.1.

Таблица 1

Нейлон FM 3001					
σ_k МПа	3,2750	4,1368	8,2737	12,411	16,548
χ_k	0,1274	0,1625	0,4156	0,6804	1,0004
$\psi_{экс}(\sigma_k)$	0,0021	0,0026	0,0067	0,0109	0,0160
Стеклопластик СВАМ					
σ_k МПа	38,246	50,995	63,743	76,492	89,241
χ_k	0,0447	0,0992	0,2407	0,6556	1,0000
$\psi_{экс}(\sigma_k)$	0,0013	0,0028	0,0068	0,0185	0,0282

Значения приведенных деформаций $\tilde{\varepsilon}(\sigma_k,t_j)$, рассчитанных для исследуемых материалов по уравнению (2.1), нанесены точками на рис. 1, *а*, *б* соответственно для нейлона FM 3001 и стеклопластика СВАМ. Штриховыми линиями нанесены границы интервала, соответствующего величине максимальной погрешности δ_{max} = 10 % (±5 % от величины $\overline{\varepsilon}(\sigma_0,t_j)$).

Кривые подобия нейлона можно считать подобными, поскольку из данных, представленных на рис.1 а, в, видно, что расчетные значения приведенных деформаций ползучести, соответствующих различным уровням напряжений, располагаются в основном в пределах ±5-ти процентного интервала, а расчетные значения квантиля статистики $t_{\alpha,k}$, (пунктирная линия) больше их критических значений.



а *б* *в* *г*

Рисунок 1

Для стеклопластика СВАМ см. рис. 1, *б*, *г* на начальной и конечной стадии нагружения наблюдается значительное отклонение между приведенными и базисными кривыми ползучести, расчетное значение значения квантиля статистики $t_{\alpha,k}$, на начальной стадии меньше, а на конечной стадии граничат с критическими значениями. По этому условие подобие первичных кривых ползучести с заданной точностью у этого материала в целом не выполняется.

3. Методика определения параметров ядер наследственности. Определяющее уравнение (1.2) теории является частным случаем общей нелинейной теории вязкоупругости Вольтера-Фреше и содержит три функции, подлежащие определению из эксперимента. Методика идентификации неизвестных функций в (1.2) и определение их параметров реализуется следующим образом [3].

Пусть имеется серия подобных кривых ползучести $\varepsilon - t$ для разных уровней постоянных напряжений σ_k, заданных согласно (1.4). В этом случае определяющее уравнение (1.2) с учетом (1.4) запишется в виде

$$\varepsilon(\sigma_k, t) = \psi(\sigma_k)\left(1 + \lambda\int_0^t K(\tau)d\tau\right), \qquad (3.1)$$

где функция $\psi(\sigma_k)$ является функцией подобия описывающая в момент времени $t = 0$ величину начальной упругой деформации и которая задается уравнением (1.5).

Условие подобия первичных кривых ползучести задается, соотношением (2.1) которое позволяет, зная коэффициент подобия $\chi_k(\sigma_k)$ рассчитывать деформацию ползучести $\varepsilon(\sigma_k,t)$ при произвольном напряжении σ_k по характеристикам базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0,t)$. полученной при напряжении σ_0.

В качестве базисного напряжения σ_0 выбирается, как правило, наибольшее напряжение из ряда σ_k, для которого построена экспериментальная кривая ползучести. Для базисной кривой $\varepsilon(\sigma_0,t)$, решая совместно уравнения (3.1) и (2.1), получаем

$$\varepsilon(\sigma_0,t)=\chi_0(\sigma_0)\left(1+\lambda\int_0^t K(\tau)d\tau\right), \tag{3.2}$$

где принято

$$\chi_0(\sigma_0)=\frac{\psi(\sigma_k)}{\chi_k(\sigma_k)}\Rightarrow\psi(\sigma_k)=\chi_0(\sigma_0)\chi_k(\sigma_k). \tag{3.3}$$

Параметры ядра ползучести (1.3) и неизвестные коэффициенты в (3.2) определяются в два этапа. На первом этапе определяются реологические параметры α, β и λ, а также коэффициент подобия $\chi_0(\sigma_0)$. Эти параметры определяются по результатам аппроксимации экспериментальной базисной кривой ползучести $\varepsilon(\sigma_0,t)$ уравнением (3.2). Задача сводится к минимизации функционала

$$F(\chi_0(\sigma_0),p_i)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\varepsilon(\sigma_0,t_j)-\varepsilon(\sigma_0,t_j,\chi_0(\sigma_0),p_i)\right\}^2, \tag{3.4}$$

где p_i – неизвестные реологические параметры (i = 3).

На втором этапе определяются коэффициенты q и H уравнения (3.1). Используя найденные значения коэффициентов подобия $\chi_0(\sigma_0)$ и $\chi_k(\sigma_k)$, по уравнению (3.3) рассчитываются дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$. Значения коэффициентов q и H определяются по результатам аппроксимации дискретных значений функции $\psi(\sigma_k)$ уравнением (1.5), исходя из минимизации функционала

$$F(p_i)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\psi(\sigma_k)-\psi(\sigma_k,p_i)\right\}^2. \tag{3.5}$$

где i = 2, причем $p_1 = q$, а $p_2 = H$.

4. Определение параметров модели. Методика определения коэффициентов и параметров ядра наследственности в рассматриваемой нелинейной теории изложенной в разделе 3 построена исходя из условия подобия первичных кривых ползучести в плоскости (ε,t).

Реализация методики осуществляется на примере ползучести нейлоновых волокон FM 3001 и стеклопластика СВАМ.

Экспериментальные значения деформации ползучести $\varepsilon(\sigma_0,t_j)$, замеренные по базисной кривой ползучести, относительно которой обосновывается условие подобия (2.1), используется при определении реологического параметра λ, параметров ядра наследственности α и β, а также коэффициента подобия $\chi_0(\sigma_0)$. В этом случае функционал (3.4) конкретизируется с учетом (3.2) и (1.3) в виде

$$F\left(\alpha,\beta,\lambda,\chi_0(\sigma_0)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\varepsilon\left(\sigma_0,t_j\right)-\chi_0(\sigma_0)\left(1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma\left(1+(1+\alpha)(1+n)\right)}\right)\right\}^2, \qquad (4.1)$$

минимизируя который находим значения искомых параметров. Значения параметров α, β, λ и $\chi_0(\sigma_0)$ рассчитанных согласно (4.1) приведены для исследованных материалов в табл. 2. Процедура минимизации функционала (4.1) при определении параметров ядер ползучести решается с использованием итерационного метода Левенберга-Маркардта [11].

Таблица 2

Материал	α	β	λ	$\chi_0(\sigma_0)$	q	H
Нейлон FM 3001	-0,68028	0,10638 час$^{(1+\alpha)}$	0,12059 час$^{(1+\alpha)}$	0,01604	0,779	1,79·10^3 МПа
Стеклопластик СВАМ	-0,03096	0,30764 мин$^{(1+\alpha)}$	0,33007 мин$^{(1+\alpha)}$	0,02820	0,261	2,69·10^8 МПа

Используя значения функции подобия $\chi_k(\sigma_k)$ рассчитанные по уравнению (3.8) и значения коэффициентов подобия $\chi_0(\sigma_0)$ см. табл. 1, рассчитаем дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$, по уравнению (3.3). Их значения в зависимости от уровня напряжения представлены в табл. 1.

Дискретные значения функции $\psi(\sigma_k)$, приведенные в табл. 1, используются в дальнейшем для определения коэффициентов q и H . В этом случае функционал (3.5) конкретизируется с учетом (1.5) в виде

$$F(q,H)=\sum_{j=1}^{n}\left\{\psi(\sigma_k)-\frac{q}{H}(\sigma_k)^{1/q}\right\}^2, \qquad (4.2)$$

минимизируя который находим значения искомых коэффициентов. Значения коэффициентов q и H рассчитанных согласно (4.2) приведены для исследованных материалов в табл. 2.

5. Экспериментальная апробация теории. Простейшая экспериментальная проверка теории и параметров определяющих уравнений, построенных исходя из условия подобия первичных кривых ползучести, может быть осуществлена на примере расчета деформаций ползучести при постоянных напряжениях.

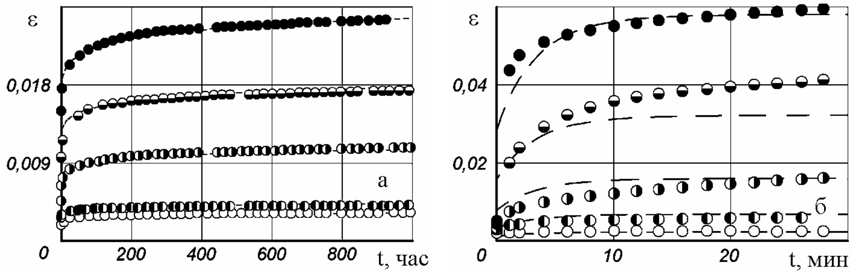
Зависимость деформации ползучести ε от времени t при нагружении постоянными напряжениями σ_k записывается исходя из (1.2) с учетом (1.3), (1.4) и (3.2) в виде

$$\varepsilon(\sigma_k,t)=\frac{q}{H}(\sigma_k)^{1/q}\left(1+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma\left[1+(1+\alpha)(1+n)\right]}\right), \qquad (5.1)$$

где принято $\tau=0$, $t-\tau=t$ и $h(t)=1$.

Значения деформации ползучести $\varepsilon(t)$, рассчитанных по уравнению (5.1) с использованием значений параметров α, β, λ, q и H приведенных в табл. 2, сопоставлены на рис. 2 с экспериментальными данными. Для нейлоновых волокон FM 3001 (a) при θ = 23 °C и σ_k = 3,3 (○), 4,1 (◒), 8,3 (◓), 12,4 (◐), 16,6 (●)

МПа и стеклопластика СВАМ (б) при θ = 23 °C и σ_k = 38,3 (○), 51,0 (◒), 63,7 (◓), 76,5 (◐), 89,2 (●) МПа. Результаты расчетов нанесены штриховыми линиями, а экспериментальные данные показаны точками.



а *б*

Рисунок 2

Заключение. Гипотеза подобия, заложенная в основу рассматриваемой модели, позволяет значительно упростить математический аппарат обобщенной нелинейной теории ползучести. Результаты расчетов, представленные на рис. 2 свидетельствуют об эффективности рассмотренной модели и методики определения параметров определяющих уравнений для решения задач нелинейной ползучести полимеров и композиций на их основе в случае выполнения условия подобия с достаточной точностью. О чем свидетельствует сопоставление результатов расчетов представленных на рис. 1, *а*, *в* и рис. 2, *а* из которых видно, что кривые ползучести нейлона FM 3001 подобны с высокой точностью. Погрешность расчета деформаций ползучести в этом случае не превысила 10 %. Погрешность расчета деформаций ползучести стеклопластика СВАМ на конечной стадии деформирования, где квантиль статистики $t_{\alpha,k}$ принимал критические значения составила 25 % и получена для σ_k = 76,5 МПа и времени t = 30 мин. На начальной стадии деформирования этого материала, где условие подобия вообще не выполнялось, погрешность достигала 500 %.

Список литературы. **1.** *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука. 1977. – 384 с. **2.** *Green A.E.* The mechanics of non-linear materials with memory / *A.E. Green, R.S. Rivlin* // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1957. – № 1. – P. 1-21. **3.** *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – Москва: Высшая школа, 1976. – 278 с. **4.** *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести // Прикладная математика и механика. – 1961. – Т. 25, № 4. – С. 26-35. **5.** *Leaderman H.* Elastic and creep properties of filaments materials and other high polymers // Washington: Textile Foundation, 1943. – 278 p. **6.** *Розовский М.И.* Ползучесть и длительное разрушение материалов // Журнал техн. физики. – 1951. – 21, № 11. – С. 1311-1318. **7.** *Marin J.* Creep-time relations for nylon in tension, compression, bending, and torsion / *J. Marin, A.C. Webber, G.F. Weissmann* // Proc. ASTM. – 1954. – Vol. 54, – P. 1313-1343. **8.** *Мартиросян М.М.* О кратковременной ползучести стеклопластика СВАМ // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 47-54. **9.** *Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В.* К расчету деформаций линейной ползучести вязкоупругих армирующих волокон при растяжении // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 97-106. **10.** *Степнов М.Н.* Статистическая обработка результатов механических испытаний. – Москва: Машиностроение. 1972. – 232 с. **11.** *More J.J.* Users guide to minipack / *J.J. More, B.S. Garbow, K.E. Hillstrom* // Argone National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – 238 p.

Поступила в редакцию 25.11.2009

УДК 534.1, 621.81 - 192

В.П.ШПАЧУК, докт.техн.наук, проф., ХНАМГ;
Г.О.НІКІТІНА, асп., ХНАМГ

СИНЕРГЕТИЧНИЙ ЕФЕКТ ОПС З НЕЛІНІЙНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ЖОРСТКОСТІ В УМОВАХ БАГАТОКООРДИНАТНОГО ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

В статті досліджено зміну динамічних характеристик об'єкта просторової структури при різних типах його завантаженості на базі теорії синергетичного ефекту. Визначено коефіцієнти синергізму у випадку нелінійних характеристик жорсткості пружних елементів підвіски об'єкта. Виконаний порівняльний аналіз вібраційної активності об'єкта, при різних типах багатокоординатного імпульсного навантаження.

The change of space structure object dynamical characteristics at different types of it's work-load on the base of synergistic effect theory is elucidated in the paper. Synergistic coefficients are definite in the case of nonlinear descriptions of inflexibility of resilient elements of object pendant. Comparative analysis of object vibration activity at different types of the multi-coordinate impulsive loading is pursued.

Постановка проблеми. Вузли більшості споруд, будівель та агрегатів являють собою систему просторово орієнтованих інерційних та пружних елементів, які мають різні характеристики жорсткості і по-різному кріпляться до корпусу. Вони відносяться до класу об'єктів просторової структури.

У процесі експлуатації зазначені об'єкти піддаються впливу знакозмінних зовнішніх і внутрішніх збуджуючих сил, дії яких змінюються в часі. Вузли і блоки виробів при цьому виконують складні просторові коливання, що визначаються сукупністю багатокоординатних вібрацій [1,2,3].

Задача випробувальної техніки полягає в тому, щоб максимально наблизити умови випробувань до умов експлуатації, кількісно і якісно визначити і проаналізувати можливі зміни в цих умовах основних властивостей, функцій і характеристик вузлів, блоків і їхніх матеріалів [4,5]. Тому при програмуванні рухів блоків і вузлів агрегатів необхідно враховувати взаємопідсилювальну та взаємопослаблювальну дію багатокоординатного силового, кінематичного або комбінованого детермінованого гармонійного, імпульсного та випадкового вібронавантажень. Зробити це можна за допомогою використання у процесі вібраційних досліджень моделювання та розрахунків теорії синергетичних ефектів стосовно динаміки ОПС при їх багатокоординатному навантаженні. Неврахування цієї синергетичної дії зовнішнього збудження призводить до непередбачених відмов об'єктів просторової структури в процесі експлуатації.

Актуальність досліджень синергетичних ефектів просторових вібрацій обумовлена необхідністю вирішення комплексу задач пов'язаних з підвищенням надійності експлуатації таких об'єктів: машинобудування, космічної, авіаційної техніки і комунального.

У роботі проведено аналіз впливу завантаженості ОПС на параметри його амплітудно-шпарувато-часових характеристик на базі теорії синергетичного ефекту.

Метою роботи є встановити для об'єкта просторової структури при різних типах його завантаженості, на базі теорії синергетичного ефекту величини коефіцієнтів синергизму, проаналізувати характер їхньої зміни для нелінійних характеристик жорсткості пружних елементів підвіски об'єкта при тривалості $\tau = Var$, періоду $T = Var$ імпульсного навантаження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання даної проблеми. У роботі [6] розглянуті вібраційні тестування різних об'єктів промисловості, як один з найважливіших засобів перевірки їхньої якості і надійності в експлуатації. Проте питання багатокоординатних тестувань не піднімається.

У роботах [7,8] досліджені основні особливості прояву синергетичних ефектів першого та другого родів в задачах випробувань об'єктів просторової структури на вібронадійність. Показано, що при цьому виключаються занижені оцінки показників вібраційної активності об'єктів, діагностуємих при стендових випробуваннях, а також непередбачені їхні відмови за вібронадійністю в експлуатації.

Фізичні і теоретичні аспекти взаємного впливу параметрів вібрації на прикладі коливань фундаментів споруд розглянуто в роботах [9,10,11,12] стосовно задачі сейсмодинаміки споруд. Термінологічно дане явище, з точки зору прикладної теорії коливань, визначено як подвійний фазочастотний резонанс коливальних систем. Вказане явище також може мати місце при вимушених коливаннях суцільних середовищ [13-15]. В цій роботі, а також в роботах [16-18], взаємопідсилювальна дія параметрів багатокоординатної вібрації, проаналізована стосовно задач вібронадійності багатомірних об'єктів і розглянута з позицій синергетичного ефекту першого роду.

У роботі [19] розглядаються просторові вібрації гіроскопів у випадку трикоординатного віброзбудження в залежності від розмірів гіроскопів. Показано, що розмір гіроскопів по-різному впливає на параметри вібрації у випадку лінійної і нелінійної моделі.

Особливості вібраційної динаміки вантажного залізничного вагону стосовно взаємодії колеса з рейкою досліджуються у роботі [20]. Проте для спрощення моделі розглядається тільки випадок лінійної характеристики жорсткості підвіски.

Виділення не розв'язаних раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття. У роботі Отримано, досліджено та узагальнено кількісні оцінки параметрів взаємопідсилювальної та взаємопослаблювальної дії параметрів збудження по кожній координаті стосовно абсолютних рухів об'єкту. Синергетичний ефект першого роду формалізовано через параметри багатокоординатного кінематичного імпульсного зовнішнього механічного навантаження, а також відповідних амплітудно-шпарувато-часових характеристик ОПС.

Виклад основного матеріалу дослідження У роботі розглянуто варіанти використання пружної підвіски об'єкту у вигляді нелінійних характеристик жорсткості за умов варіювання маси базового елемента, а також маси адитивного інерційного елемента.

Досліджуваним є об'єкт просторової структури, механічна схема якого приведена на рис. 1, де 1-4 – деталі, що моделюють корпус об'єкта; 5-8 – пружні елементи з коефіцієнтом жорсткості c і опору b, що моделюють блок пружної підвіски об'єкта; 9- конструктивний елемент, що моделює інерційні властивості об'єкта. Розглядається тривимірна модель ОПС. Об'єкт має три ступені вільності: можливість переміщатись уздовж осі Oy (координата y), осі Oz (координата z) і можливість обертатися навколо точки O (координата θ), тобто навколо центра мас [4,21,22].

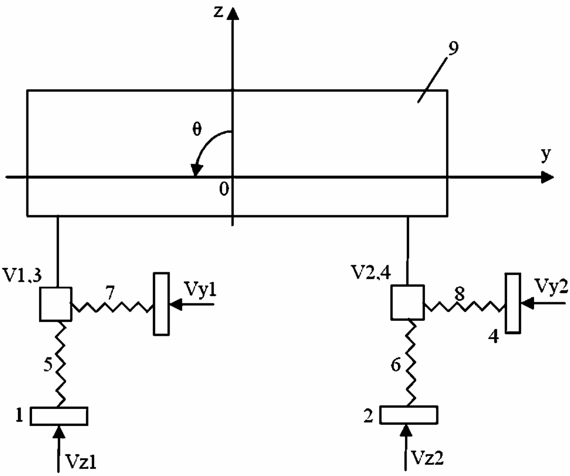


Рисунок 1 – Узагальнена механічна схема ОПС

При цьому в якості зовнішніх впливів, що збуджують, на об'єкт прийняті кінематичні впливи двох типів, які моделюються (рис.2) ударними імпульсами виду:

– перший варіант збудження:

$$V_{Z_1}(t)=\begin{cases} A, t\in[0,\tau] \\ 0, t\in(\tau,+\infty)\end{cases};\qquad V_{Z_2}(t)=\begin{cases} 0, t\in[0,T]\cup(T+\tau,+\infty) \\ A, t\in(T,T+\tau)\end{cases};$$

$$V_{y_1}(t)=V_{y_2}(t)=0\,;$$

– другий варіант збудження:

$$V_{Z_1}(t)=V_{Z_2}(t)=\begin{cases} A, t\in[0,\tau] \\ 0, t\in(\tau,+\infty)\end{cases};\qquad V_{y_1}=V_{y_2}=\begin{cases} 0, t\in(0,T)\cup(T+\tau,+\infty) \\ A, t\in[T,T+\tau]\end{cases},$$

де A, τ, T – амплітуда, тривалість і період імпульсного впливу.

Конструктивний елемент 9 на рис. 1, з ціллю надання результатам досліджень універсального механічного характеру, представлено у вигляді сукупності базового інерційного елемента і ізотропного інерційного адитивного елемента, який вкладається у базовий і надає узагальненому інерційному елементу властивостей параметричної нерегулярності динамічної моделі ОПС [1,4,23].

Основні параметри ОПС зведено у табл. 1.

Механічна схема узагальненого інерційного елемента представлено на рис. 3, де 1 – базовий інерційний елемент; 2 – інерційний адитивний елемент; 3

– основа, яка моделює зовнішні ударні впливи; $C_п$ – центр мас базового інерційного елемента; $C_а$ – центр мас адитивного інерційного елемента; К1, К2 – контрольні точки базового інерційного елемента [24,25].

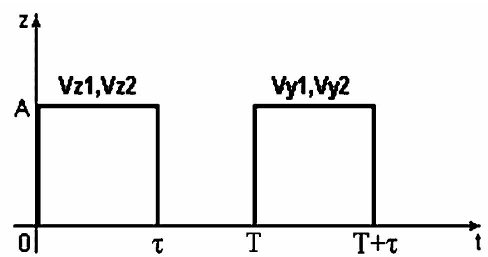


Рисунок 2 – Узагальнена схема імпульсного впливу

Таблиця 1 – Основні параметри ОПС першого та другого типів

№ п/п	Параметри ОПС	I тип	II тип
1	Маса базового інерційного елемента, кг	17000	
2	Маса адитивного елемента, кг	0	8050
3	Маса узагальненого інерційного елемента, кг	17000	25050
4	Координати центра мас базового елемента, м	$y_п = 0;\ z_п = 0,57$	$y_п = 0;\ z_п = 0,64$
5	Момент інерції узагальненого інерційного елемента, кг·м^2	250692,67	251589,33
6	Коефіцієнти опору пружин, паралельних осі Oz і осі Oy, Н·с/м	$24\cdot10^3$	
7	Коефіцієнт жорсткості пружин, паралельних осі Oy, Н/м	$0,475\cdot10^5$	
8	Коефіцієнти нелінійної жорсткості паралельних осі Oz пружних елементів, Н/м	$c1_z = c2_z = 5\cdot10^4\cdot\sqrt{6\cdot10^3\lvert z\rvert+1}$	
9	Координати точок закріплення пружних елементів, м	*V1,3* (-3,2; 1,12), *V2,4* (3,2;-1,12)	V1,3(-3,2; -1,19), V2,4 (3,2; -1,19)
10	Координати контрольних точок, м	*K1* (-3,2м; 2,0м); *K2* (-6,0м;0,5м)	K1(-3,2м;1,93м), K2(-6,0м; 0,43м)

В основу досліджень покладені фундаментальні рівняння коливань ОПС в частотній області, отримані методом комплексних амплітуд, а також в формі Коши методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

В якості міри синергетичного впливу параметрів амплітудно-шпарувато-часових характеристик на динамічний стан ОПС прийнято коефіцієнти синергізму, що визначаються по формулах [2,25,26]:

$$Ks_y = \frac{\max Y - \max Y^*}{\max Y^*}\cdot 100\%,\quad Ks_z = \frac{\max Z - \max Z^*}{\max Z^*}\cdot 100\%,$$

$$Ks_\theta = \frac{\max\theta - \max\theta^*}{\max\theta^*}\cdot 100\%,\ Ks_r = \frac{\max r - \max r^*}{\max r^*}\cdot 100\%.$$

де $\max Y$, $\max Z$, $\max\theta$, $\max r$ – максимальні значення функцій $\max|y(t)| = f_1(T,\tau)$, $\max|z(t)| = f_2(T,\tau)$, $\max|\theta(t)| = f_3(T,\tau)$, $\max|r_{K1,2}(t)| = f_4(T,\tau)$; r – радіус-вектор контрольної точки К1,2.

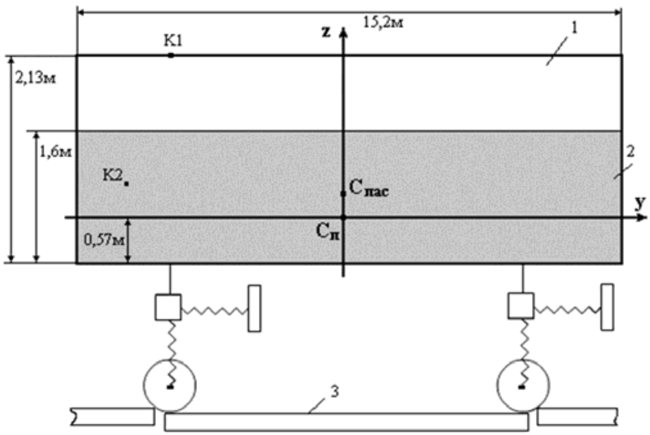
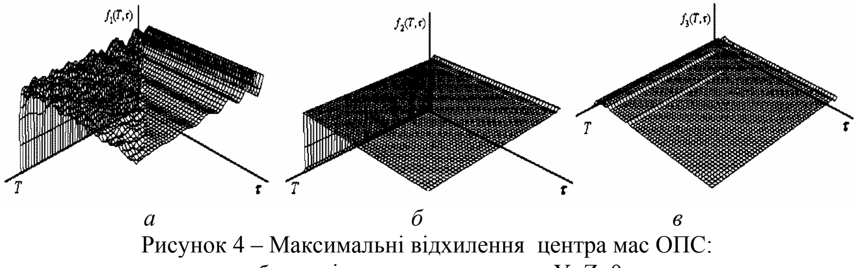


Рисунок 3 – Механічна схема узагальненого інерційного елемента

Величини $\max y^*$, $\max z^*$, $\max\theta^*$, $\max r^*$ обчислюються по формулах $\max y^* = f_1(5,1)$, $\max z^* = f_2(5,1)$, $\max\theta^* = f_3(5,1)$, $\max r = f_4(5,1)$. При цьому в якості $\max X_i^*$ приймаються максимальні значення підмодульної функції у випадку, коли ОПС встигає прийти у стан рівноваги до приходу наступних збуджень $Vz1$, $Vz2$. У нашому випадку це має місце при $\tau = 1$ с і $T = 5$ с. Коефіцієнти синергізму при дії зазначених впливів дорівнюють нулю.

В роботі синергетичний ефект виявляється в результаті накладення коливальних рухів об'єкта при послідовному в часі додатку збуджень при $T \leq 5c$. Такі випадки призводять до непередбачених відмов у роботі ОПС по стійкості функціонування і міцності, передчасному виходу з ладу техніки.

Результати досліджень амплітудно-шпарувато-часових характеристик ОПС представлено на рис. 4-7, а також у табл. 2, 3.

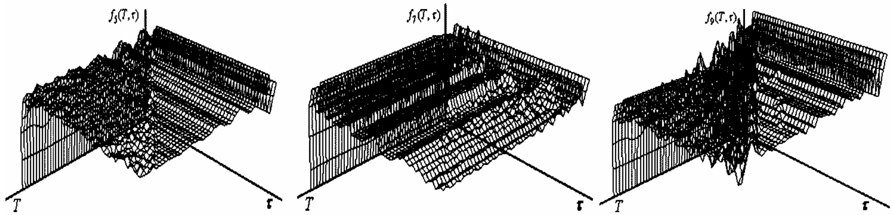


а *б* *в*

Рисунок 4 – Максимальні відхилення центра мас ОПС:
а, *б*, *в* – відхилення координат Y, Z, θ

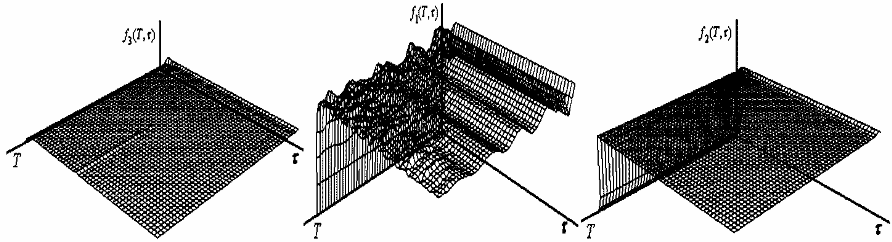
На рис.4-5 представлено графічні характеристики максимальних відхилень координат центра мас ОПС першого типу, контрольних точок К1 і К2 відповідно від стану рівноваги при варіюванні τ і T у межах від 0 до 5 с.

На рис. 6-7 представлено характеристики для ОПС другого типу.



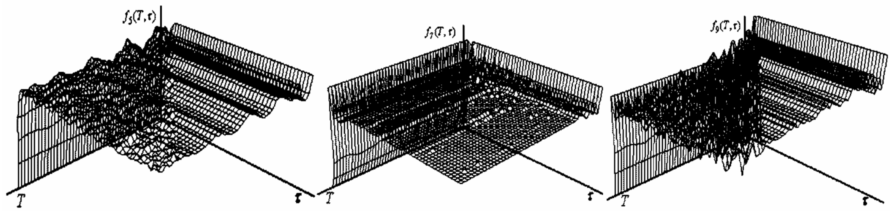
а *б* *в*

Рисунок 5 – Максимальні відхилення контрольної точки К2 ОПС:
а, *б*, *в* – відхилення координат Y, Z, θ



а *б* *в*

Рисунок 6 – Максимальні відхилення центра мас ОПС:
а, *б*, *в* – відхилення координат Y, Z, θ



а *б* *в*

Рисунок 7 – Максимальні відхилення контрольної точки К2 ОПС:
а, *б*, *в* – відхилення координат Y, Z, θ

У табл. 2 наведено значення основних параметрів амплітудно-шпарувато-часових характеристик для ОПС першого типу при нелінійних коефіцієнтах жорсткості, при цьому часові характеристики ударних імпульсів $Vz1$, $Vz2$ варіюються в межах від 0 до 5 с.

У табл. 3 наведено значення $\max X_i$, $\max X_i^*$, Ks_{Xi} для ОПС другого типу, де $\overline{X} = \{Y, Z, \theta\}$.

Таблиця 2 – Параметри амплітудно-шпарувато-часових характеристик для ОПС першого типу

Визначені параметри	Контрольні точки		
	Центр мас	K1 (–3,2; 1,93)	K2 (–6; 0,43)
max Y	0,007788 ($\tau = 1{,}10$; $T = 0{,}6$)	0,009322 ($\tau = 0{,}9$; $T = 0{,}9$)	0,007992 ($\tau = 0{,}9$; $T = 0{,}4$)
Ks_y	21,9 %	38,4 %	23,9 %
max Z	0,005188 ($\tau = 0{,}3$; $T = 0{,}4$)	0,005431 ($\tau = 0{,}6$; $T = 0{,}1$)	0,007956 ($\tau = 0{,}9$; $T = 1{,}3$)
Ks_z	5,3 %	0,6 %	35,2 %
max r	-	0,010034 ($\tau = 0{,}9$; $T = 0{,}4$)	0,010432 ($\tau = 1{,}9$; $T = 1{,}6$)
Ks_r	-	47 %	58,8 %
max θ	0,001263 ($\tau = 0{,}9$; $T = 1{,}3$)	-	-
Ks_θ	20,1 %	-	-

Таблиця 3 – Параметри амплітудно-шпарувато-часових характеристик для ОПС другого типу

Визначені параметри	Контрольні точки		
	Центр мас	K1 (–3,2; 2)	K2 (–6; 0,5)
max Y	0,007775 ($\tau = 0{,}7$; $T = 0{,}7$)	0,009012 ($\tau = 0{,}9$; $T = 0{,}7$)	0,007904 ($\tau = 0{,}9$; $T = 0{,}7$)
Ks_y	9,3 %	26,1 %	11,0 %
max Z	0,005246 ($\tau = 0{,}4$; $T = 0{,}2$)	0,005745 ($\tau = 0{,}3$; $T = 0{,}5$)	0,007900 ($\tau = 0{,}3$; $T = 0{,}5$)
Ks_z	3,7 %	6,2 %	25,4 %
max r	-	0,010055 ($\tau = 0{,}5$; $T = 0{,}1$)	0,010591 ($\tau = 0{,}5$; $T = 0{,}1$)
Ks_r	-	40,4 %	48,5 %
max θ	0,001267 ($\tau = 0{,}4$; $T = 0$)	-	-
Ks_θ	14,9 %	-	-

Висновки з даного дослідження. Таким чином, аналіз наведених в табл. 2, 3 результатів досліджень показав, що для розглянутого в роботі об'єкта просторової структури коефіцієнти синергізму при нелінійних коефіцієнтах жорсткості c1z, c2z пружних елементів змінюються в наступних межах:

1. об’єкт просторової структури першого типу:

   Ks_y = [21,9 %-38,4 %];
   Ks_z = [0,6 %-35,2 %];
   Ks_θ =[20,1 %];
   Ks_r = [47 %-58,8 %].

2. об’єкт просторової структури другого типу:

   Ks_y = [9,3 %-26,1 %];
   Ks_z = [3,7 %-25,4 %];
   Ks_θ = [14,9 %];
   Ks_r = [40,4 %-48,5 %].

Встановлено, що для нелінійних характеристик жорсткості найбільший коефіцієнт синергізму по координаті Y для об'єкта просторової структури першого типу дорівнює 38,4 % при наступних часових характеристиках імпульсних впливів: $\tau = 0{,}9$ с, $T = 0{,}9$ с.

По координаті Z для об'єкта просторової структури першого типу найбільший коефіцієнт синергізму дорівнює 35,2 % при наступних часових характеристиках імпульсних впливів: $\tau = 0{,}9$ с, $T = 1{,}3$ с (див. рис. 6, *б*).

Найбільший коефіцієнт синергізму дорівнює 58,8 % по координаті r для об'єкта просторової структури першого типу при наступних часових характеристиках імпульсних впливів: $\tau = 1{,}9$ с, $T = 1{,}6$ с (див. рис. 5, *в*).

По координаті θ для об'єкта просторової структури першого типу найбільший коефіцієнт синергізму дорівнює 20,1 % при наступних часових характеристиках імпульсних впливів: $\tau = 0{,}9$ с, $T = 1{,}3$ с.

Отримані дані необхідно враховувати при визначенні нормативного експлуатаційного режиму об'єкта. Ігнорування синергетичного ефекту у випадку багатокоординатноного навантаження призводить до зниження довговічності і надійності об'єкта в експлуатації. Тому дослідження і використання синергетичного ефекту стосовно задач механіки ОПС при їх багатокоординатному навантаженні є актуальними і мають широкий спектр застосування.

Список літератури: **1.** *Шпачук В.П.* К проблеме испытаний объектов пространственной структуры на вибронадежность, реализующих эффект синергизма // Прикладная механика. – 2005. – № 7. – С. 116-121. **2**. *Shpachuk V. P.* Problem of Vibration Testing of Space Structures // International Applied Mechanics, Springer US. – 2005. – Vol. 41, no.7. – P. 805-808. **3.** *Шпачук В.П.* К синтезу системы вибрационных испытаний объектов пространственной структуры на устойчивость функционирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. – 1993. – № 3. – С. 107-112. **4.** Пространственное вибровозбуждение / *Божко А.Е., Гноевой А.В., Шпачук В.П.* – Киев: Наукова думка, 1987. – 192 с. **5.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти тт. – М.: Машиностроение,1981. – Т. 5. Измерения и испытания / Под ред. *М.Д.Генкина.* – 1981. – 496 с. **6.** *Rao S.* Mechanical vibrations. – Massachusetts: Edition-Wesley publishing company, 2000. – 718 p. **7.** *Шпачук В.П.* К анализу особенностей многокоординатной вибрации объектов пространственной структуры // Прикладная механика. – 1994. – № 1. – С. 82-89. **8.** *Шпачук В.П.* К проблеме испытаний объектов пространственной структуры на вибронадежность, реализующих эффект синергизма // Прикладная механика. – 2005. – № 7. – С. 116-121. **9**. *Плахтиенко Н.П.* Деякі питання створення Міждержавних норм сейсмостійкого будівництва для країн СНД // Будівництво і стандартизація. – 2000. – № 1. – С. 2-8. **10**. *Плахтиенко Н.П.* Про розрахункове визначення коефіцієнтів допустимих пошкоджень та відповідальності споруд // Конструкции гражданских зданий: Сб. науч, тр. КиевЗНИИЭП. – К., 2003. – С. 103-113. **11**. *Skinner R.J., Robinson W.H., Vc. Verry G.H.* An introduction to seismic isolation. – John Willy and Sons, 1993. – 423 p. **12**. *Plakhtienko N.P.* Double Non-Stationary Phase-Frequency Resonance of Oscillatory Systems // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, № 1. – P. 135-141. **13**. *Shul'ga N.A., Bogdanov S.Yu.* Forced Axisymmetric Nonlinear Vibrations of Reinforced Conical shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 12. – P. 1447-1451. **14**. *Shenchenkov I.K., Zhuk Ya.A., Karnaukhov V.G.* Modeling the Thermomechanical Behavior of Physically Nonlinear Materials under Monoharmonic Loading // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 9. – P. 943-969. **15**. *Zhuk Ya.A., Shenchenkov I.K.* Resonance Vibrations and Dissipative Heating of Thin-Walled Laminated Elements Made of Physically Nonlinear Materials // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 7. – P. 794-802. **16**. *Шпачук В.П., Головченко М.О.* Пространственные колебания ОПС в условиях многокоординатного вибронагружения // Коммунальное хозяйство городов. – 1998. – № 16 – С. 137-141. **17**. *Шпачук В.П.* Особенности проявления синергетического эффекта в объектах пространственной структуры при многокоординатном вибронагружении // Прикладная механика. – 1999. – 35. № 10. – С. 108-112. **18**. *Шпачук В.П.* Головченко М.О. Про особливості взаємопідсилювальної дії багатокоординатної вібрації при випробуваннях на вібронадійність // Машинознавство. 2000. – № 6-7. – С. 15-17. **19.** *Chang Ch., Chou Ch.* Vibration of resonant gyroscopes. Application to the Gyros of Macro and Micro Sizes. IUTAM Symposium on Vibration Control of Nonlinear Mechanisms and Structures // J. Solid mechanics and its applications. – Vol. 130, Springer. – 2005. – P. 131-140. **20.** *True H., Trzepacz* L. On the dynamics of a railway freight wagon wheel set with dry friction damping. IUTAM Symposium on Chaotic Dynamics and Control of Systems and Processes in Mechanics // J. Solid mechanics and its applications. – Vol. 122, Springer. – 2003. – P. 159-168. **21.** *Ганиев Р.Ф.,Кононенко В.О*. Колебания твердых тел. – М.: Наука,1976. – 432 с. **22.** *Коловский М.З*. Нелинейная теория виброзащитных систем. – М.: Наука, 1966. – 317 с. **23.** Стикова динаміка трамвая / *Шпачук В.П., Далека В.Х., Коваленко А.В*. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 265 с. **24.** *Шпачук В.П., Головина Е.И.* К исследованию параметров вибрационной активности объектов пространственной структуры на базе амплитудно-скважностно-временных характеристик. – Киев, Техника, 2006. Научно-технический сборник «Коммунальное хозяйство городов» / Выпуск 72. – С. 226-234. **25.** *Шпачук В.П., Головина Е.И.* Синергетический эффект как мера взаимноусиливающегося действия компонент внешней многомерной вибрации объектов пространственной структуры. – Киев, Техника, 2007. Научно-технический сборник «Коммунальное хозяйство городов» / Выпуск 79. – С. 292-299. **26.** *Шпачук В.П.* К синтезу системы вибрационных испытаний объектов пространственной структуры на устойчивость функционирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. – 1993. – № 3. – С. 107-112.

Надійшла до редколегії 11.11.2009

УДК 534.1:539.3

И.В.ЯНЧЕВСКИЙ, канд.техн.наук, доц., ХНАДУ

УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ СЛОЙНО-СТУПЕНЧАТОГО БИМОРФА

Розглянута задача управління нестаціонарними коливаннями шарово-ступінчастої електропружної балки в припущенні, що механічне навантаження і область її прикладання відомі. Управління здійснюється за рахунок різниці потенціалів на електродах п'єзокерамічного шару. Цільова функція управління визначена як мінімізація інтеграла від прогину по довжині балки, при цьому задоволення критерію кількісно виражається ваговим коефіцієнтом. Рішення для функції прогину представлено у вигляді суми квазістатичної і динамічної складових. Графічний матеріал ілюструє ефективність алгоритму формування керуючого сигналу та вплив вагового коефіцієнта на характеристики напружено-деформівного стану балки при спільній дії механічного і електричного навантажень.

The problem of non-stationary vibration control for a step-layered electroelastic beam is considered on the assumption that the mechanical load and its application area are known. The control is realized due to a potential difference on electrodes of a piezoceramic layer. The objective control function is assigned as minimization of length integral from a beam deflection. Meeting the criterion is quantified by a weight factor. The deflection function solution is presented as the sum of quasi-static and dynamic components. The graphic material illustrates the developing algorithm efficiency for control signal formation and weight factor influence on characteristics of the beam's deflected mode at joint action of mechanical and electric loads.

Введение. Пьезокерамические элементы, обладающие свойством электромеханического преобразования энергии, используются в широком диапазоне технических приложений [1, 2]. Особенно эффективно их применение в устройствах для контроля и управления деформированным состоянием механических систем, снижения вибраций, проч. Варианты постановок задач управления и возможности управления за счет пьезоэлементов рассмотрены в работах [3–7]. Для подавления вибраций механических систем используется в основном управление с обратной связью, в котором управляющий электрический сигнал, подводимый к электродам пьезопривода, формируется на основе принятого алгоритма управления и информации, поступающей с интегрированного в систему пьезодатчика. Но несмотря на очевидную практическую значимость метода, при его натурной реализации остаются окончательно не решенными ряд проблем, связанных с математической формулировкой критерия управления, трудоемкостью вычислительного процесса обработки информации, необходимостью сложной техники для согласования регистрирующего и управляющего сигналов, проч.

Большей эффективностью и точностью отличается управление без обратной связи [6], которое осуществляться при независимой работе приводов и датчиков. В работах [6, 7] рассмотрены частные примеры управления деформированным состоянием стержневых систем при ненулевых начальных кинематических параметрах. Весьма немногочисленными являются исследования, посвященных управлению колебаниями механических систем при возбуждении импульсным механическим нагружением. В статье [8] решена задача управления для шарнирно-закрепленного асимметричного балочного биморфа. При этом управляющий электрический сигнал подводится к сплошным электродам пьезослоя, длина которого равна длине балки. Настоящая работа, в отличие от [8], посвящена управлению нестационарными колебаниями балки для более общего случая с несовпадающими длинами слоев при шарнирном закреплении упругого слоя. Предполагается, что механическая нагрузка, как функция времени, и область нагружения являются известными.

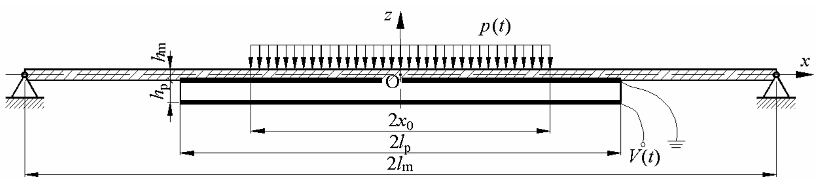


Рисунок 1 – Исследуемая механическая система

1. Постановка задачи. Исследуется балка прямоугольного поперечного сечения длиной $2l_m$, толщиной h_m и шириной b, которая шарнирно закреплена на торцах. На участке балки длиной $2 \cdot x_0$ приложена нестационарная равномерно распределенная механическая нагрузка $p(t)$. К слою жестко соединен поляризованный по толщине пьезокерамический элемент со сплошными электродированными покрытиями. Длина и толщина электроупругого слоя обозначены через $2l_p$ и h_p (здесь и далее индексы «m» и «p» указывают на принадлежность физических и геометрических параметров соответствующему слою). Внутренний электрод пьезоэлемента заземлен, а на внешнем обеспечивается потенциал $V(t)$, значение которого приближает состояние преобразователя к недеформированному. Предполагается также, что толщины электродов и клеевого соединения пренебрежимо малы, длина пьезоэлемента удовлетворяет соотношению $x_0 \le l_p < l_m$, а граничные условия, область приложения механической нагрузки и расположение пьезокерамического слоя симметричны относительно срединного сечения балки (рис. 1).

В соответствии с рассмотренной в настоящей работе постановкой задачи, функция $p(t)$ является заданной, а $V(t)$ – искомой функцией.

2. Уравнения движения биморфа. Используется декартовая система координат, ось Oz которой равноудалена от торцов балки и перпендикулярна плоскости контакта слоев, а ось Ox совпадает со срединной поверхностью металлической подложки.

При построении математической модели в качестве кинематической гипотезы принимается гипотеза Кирхгофа и также предполагается, что для пьезокерамического слоя справедлива гипотеза о линейном изменении нормальной компоненты напряженности электрического поля по толщине [9, 10]:

$$u^j(x,z,t)=u_0^j(x,t)-z\frac{\partial w^j(x,t)}{\partial x}; \qquad w^j(x,z,t)=w^j(x,t), \quad (j = I,II);$$
$$E_z(x,z,t)=\frac{V}{h_p}+\frac{12}{h_p^2}\left(z+\frac{h_m}{2}+\frac{h_p}{2}\right)\Phi(x,t), \tag{1}$$

где $u^j{}_0$ и w^j – продольное и нормальное перемещения точек поверхности приведения ($z = 0$) на соответствующих участках биморфа: $j = \mathrm{II}$ (двухслойный участок) – $0 \le x \le l_p$; $j = \mathrm{I}$ (однослойный участок) – $l_p < x \le l_m$; E_z – нормальная составляющая напряженности электрического поля (форма записи для E_z предусматривает равенство нулю потенциала электрического поля на внутреннем электроде); $\Phi(x,t)$ – неизвестная функция.

На основании уравнений состояния упругой среды и поляризованной керамики [11], обобщенного принципа Гамильтона и с учетом принятых ранее гипотез (1), уравнения, описывающие нестационарное деформирование балки в форме прогибов, имеют вид [9]:

$$\frac{\partial^4 w^{\mathrm{II}}}{\partial\chi^4}+\frac{\partial^2 w^{\mathrm{II}}}{\partial\tau^2}=\gamma_0 p^{\mathrm{II}};$$
$$\frac{\partial^4 w^{\mathrm{I}}}{\partial\chi^4}+\xi_0^4\frac{\partial^2 w^{\mathrm{I}}}{\partial\tau^2}=\psi_0 p^{\mathrm{I}}. \tag{2}$$

Здесь $\chi = x/l_p$; $\tau=t\Big/\sqrt{\rho_F l_p^4/c_J}$; $\gamma_0=l_p^4/c_J$; $\psi_0=\gamma_0/\xi_1$; $\rho_F=\rho_p F_p+\rho_m F_m$; $\xi_1=c_{11}^m J_{m0}/c_J$; $c_J=c_{11}^p J_p+c_{11}^m J_{m0}+\left(e_{31}^2/\varepsilon_{33}\right)J_{p0}$; $J_p=b\left(4h_p^3+6h_p^2 h_m+3h_p h_m^2\right)/12$; $J_{p0}=bh_p^3/12$; $J_{m0}=bh_m^3/12$; $F_p=bh_p$; $F_m=bh_m$; $\xi_0^4=\rho_m F_m/\rho_F\xi_1$; p^j – механическая нагрузка, действующая на соответствующем участке; ρ, c_{11} – плотности и приведенные модули упругости материалов слоев; e_{31}, ε_{33} – пьезомодуль керамики и диэлектрическая проницаемость при нулевой деформации.

Следует подчеркнуть, что выбор поверхности приведения для двухслойного участка совпадающим со срединной поверхностью металлической подложки приводит к более сложным соотношениям между функциями продольного и нормального перемещений. Однако, ввиду симметрии нагружения, типа закрепления упругого слоя и малого влияния продольных перемещений на изгибные колебания биморфа [9], в системе уравнений (2) принято $u^j_0 = 0$. Также опущены малые инерционные члены порядка квадрата и куба толщины слоев.

Силовые граничные условия ($M^{\mathrm{II}}\big|_{\chi=l_0} = M^{\mathrm{I}}\big|_{\chi=l_0}$; $Q^{\mathrm{II}}\big|_{\chi=l_0} = Q^{\mathrm{I}}\big|_{\chi=l_0}$; $M^{\mathrm{I}}\big|_{\chi=l_1} = 0$, где $l_0 = 1$; $l_1 = l_{\mathrm{m}}/l_{\mathrm{p}}$) совместно с кинематическими условиями представляют собой полную систему граничных условий и через функции w^j и V запишутся в виде:

$\chi = l_0$:

$$w^{\mathrm{II}} = w^{\mathrm{I}}\,; \quad \frac{\partial w^{\mathrm{II}}}{\partial\chi} = \frac{\partial w^{\mathrm{I}}}{\partial\chi}\,;$$

$$\frac{c_J}{l_{\mathrm{p}}^2}\frac{\partial^2 w^{\mathrm{II}}}{\partial\chi^2} - e_{31}\frac{F_{\mathrm{m}} + F_{\mathrm{p}}}{2}V = \frac{c_{11}^{\mathrm{m}} J_{\mathrm{m}0}}{l_{\mathrm{p}}^2}\frac{\partial^2 w^{\mathrm{I}}}{\partial\chi^2}\,; \quad c_J\frac{\partial^3 w^{\mathrm{II}}}{\partial\chi^3} = c_{11}^{\mathrm{m}} J_{\mathrm{m}0}\frac{\partial^3 w^{\mathrm{I}}}{\partial\chi^3}\,; \tag{3}$$

$\chi = l_1$:

$$w^{\mathrm{I}} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 w^{\mathrm{I}}}{d\chi^2} = 0\,. \tag{4}$$

Система уравнений (2) и граничные условия (3), (4) дополняются условием управления, которое в настоящей работе определяет равенство нулю интеграла от прогибов балки по ее длине

$$\int_0^{l_1} w(\chi,\tau)d\chi = \int_0^{l_0} w^{\mathrm{II}}(\chi,\tau)d\chi + \int_{l_0}^{l_1} w^{\mathrm{I}}(\chi,\tau)d\chi = 0\,, \tag{5}$$

что тождественно снижению динамической реакции балки на механическое нагружение.

В случае работы пьезоэлемента в режиме прямого пьезоэффекта на основании вариационного принципа выражение для разности потенциалов между электродами получено в виде

$$V_{\mathrm{d}}(\tau) = \frac{e_{31}h_{\mathrm{p}}\left(F_{\mathrm{m}} + F_{\mathrm{p}}\right)}{\varepsilon_{33}\,2bl_{\mathrm{p}}^2}\frac{\partial w^{\mathrm{II}}}{\partial\chi}\bigg|_{\chi=l_0} \tag{6}$$

и обеспечивает равенство нулю тока смещения через его поверхность.

Начальные условия нулевые (до момента $\tau = 0$ биморф находится в состоянии покоя).

Таким образом, уравнения изгибных колебаний (2), краевые условия (3), (4), условие управления (5) или соотношение (6) представляют собой замкнутую систему уравнений колебаний слойно-ступенчатого асимметричного биморфа с высокой сдвиговой жесткостью слоев.

3. Построение решения. Известно, что преобразователи рассматриваемого конструктивного исполнения находят широкое распространение в области низкочастотных колебаний [10], поэтому справедливым будет представление функций поперечных прогибов в виде

$$w^j(\chi,\tau) = w_{\mathrm{s}}^j(\chi,\tau) + w_{\mathrm{d}}^j(\chi,\tau)\,, \quad (j = \mathrm{I},\mathrm{II})\,, \tag{7}$$

где $w^j{}_S$ – квазистатические [12] решения (2), удовлетворяющие условию

$\partial^2 w_s^j / \partial\tau^2 = 0$.

С учетом (4) и четности функции прогиба w^j решения для $w^j{}_S$ представим в виде

$$w_s^{II}(\chi,\tau) = B_2(\tau)\chi^2 + B_0(\tau);$$
$$w_s^{I}(\chi,\tau) = B_3(\tau)(l_1 - |\chi|)^3 + B_1(\tau)(l_1 - |\chi|). \quad (8)$$

Для отыскания динамических составляющих $w^j{}_d$ привлекается принцип суперпозиции. В рассматриваемом случае его реализация заключается в задании каждому участку исследуемой слойно-ступенчатой балки граничных условий в виде шарнирного опирания. В результате при записи решений $w^j{}_d$ применимы разложения по формам свободных колебаний

$$w_d^{II}(\chi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau)\cos(\mu_k\chi), \quad \chi \in [0, l_0];$$
$$w_d^{I}(\chi,\tau) = 0, \quad \chi \in (l_0, l_1], \quad (9)$$

где $\mu_k = (2k-1)\pi/2l_0$; $a_k(\tau)$ – неизвестные коэффициенты разложения. Второе равенство (9) отражает отсутствие механического нагружения на однослойном участке ($p^I = 0$ поскольку $\chi_0 = x_0/l_p \le l_0$).

Значения коэффициентов $a_k(\tau)$ находятся подстановкой разложения (9) в уравнение (2). Далее с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени и свойства ортогональности тригонометрических функций в пространстве изображений получим трансформанты искомых коэффициентов

$$a_k^L(s) = \gamma_0 \frac{2}{\mu_k}\sin(\mu_k\chi_0)\frac{p^L(s)}{s^2 + \mu_k^4},$$

где s – параметр преобразования; $p^L(s) = L[p]$. С использованием таблиц операционного исчисления в пространстве оригиналов

$$a_k(\tau) = \gamma_0 \frac{2}{\mu_k^3}\sin(\mu_k\chi_0)\int_0^{\tau} p(\varsigma)\sin\left(\mu_k^2(\tau-\varsigma)\right)d\varsigma. \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты $B_j(\tau)$ $\left(j = \overline{0,3}\right)$ решений (8) и управляющий электрический сигнал $V_c(\tau)$, приложение к пьезоэлементу которого обеспечивает выполнение условия управления (5), определяются из системы уравнений, которая формируется из краевых условий состыковки участков (3) и условия (5). В результате получим

$$V_c(\tau) = \frac{2c_J}{e_{31}(F_m + F_p)l_p^2}\left(2B_2(\tau) - 6\xi_1 B_3(\tau)(l_1 - l_0)\right);$$
$$B_j(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau)\sin(\mu_k l_0) b_{jk}, \quad (11)$$

где $b_{3k} = -\frac{1}{6\xi_1}\mu_k^3$; $b_{2k} = 3\left(\frac{1}{\mu_k} + \mu_k\frac{l_1^2 - l_0^2}{2} - b_{3k}\frac{(l_1 - l_0)^3(5l_1 + 3l_0)}{4}\right) \Big/ \left(l_0(3l_1^2 - l_0^2)\right)$;

$$b_{1k}=6\left(-\frac{1}{\mu_k}+\mu_k\frac{l_0^2}{3}-b_{3k}\frac{(l_1-l_0)^2(l_1+l_0)^2}{4}\right)\Big/\left(3l_1^2-l_0^2\right);$$

$$b_{0k}=b_{3k}(l_1-l_0)^3-b_{2k}l_0^2+b_{1k}(l_1-l_0).$$

В случае, когда пьезоэлемент выступает в качестве датчика, значения разности потенциалов $V_d(\tau)$ на его электродах определяются выражением

$$V_d(\tau)=\frac{e_{31}h_p\left(F_m+F_p\right)}{4l_p^2b\varepsilon_{33}}\left(2B_2(\tau)l_0-B_4(\tau)\right),$$

в котором функции $B_j(\tau)$ определяются разложением (11) с коэффициентами

$$b_{4k}=\mu_k;\quad b_{3k}=-\frac{1}{6\xi_1}\mu_k^3;\quad b_{2k}=-\frac{\mu_k^3c_J(l_1-l_0)-\mu_k\xi_2}{2c_J+2\xi_2l_0};\quad \xi_2=\frac{e_{31}^2h_p\left(F_m+F_p\right)^2}{4b\varepsilon_{33}};$$

$$b_{1k}=\mu_k-3b_{3k}(l_1-l_0)^2-2b_{2k}l_0;\qquad b_{0k}=\mu_k(l_1-l_0)-2b_{3k}(l_1-l_0)^3-b_{2k}l_0(2l_1-l_0)$$

и получены на основании равенств (3) и соотношения (6).

Однако в ряде случаев строгое удовлетворение принятому условию управления связано с большими энергетическими затратами на формирование управляющего электрического воздействия. Поэтому альтернативным является подход, согласно которому при управлении деформированным состоянием преобразователя к электродам пьезопривода подводится разность потенциалов

$$V(\tau)=\zeta\cdot V_c(\tau)+(1-\zeta)\cdot V_d(\tau),\tag{12}$$

где ζ $(0\le\zeta\le1)$ – весовой коэффициент (при $\zeta=0$ пьезоэлемент находится в режиме приема, $V(\tau)=V_d(\tau)$; при $\zeta=1$ на электродах генерируется разность потенциалов $V(\tau)=V_c(\tau)$, обеспечивающая выполнение условия (5)).

Значения функций $B_j(\tau)$ $\left(j=\overline{0,3}\right)$ при заданном потенциале (12) на внешнем электроде вычисляются в соответствии с кинематическими и силовыми условиями сопряжения участков балки (3):

$$B_3(\tau)=-\frac{\xi_1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\tau)\mu_k^3\sin(\mu_kl_0);\quad B_2(\tau)=\frac{e_{31}\left(F_m+F_p\right)l_p^2}{4c_J}V(\tau)+3\xi_1B_3(\tau)(l_1-l_0);$$

$$B_1(\tau)=-3B_3(\tau)(l_1-l_0)^2-2B_2(\tau)l_0+B_4(\tau);\quad B_0(\tau)=B_3(\tau)(l_1-l_0)^3-B_2(\tau)l_0^2+B_1(\tau)(l_1-l_0).$$

На основании полученных уравнений несложно отыскать как прогиб балки

$$w(\chi,\tau)=w^{\mathrm{II}}(\chi,\tau)H(l_0-\chi)+w^{\mathrm{I}}(\chi,\tau)\left[H(|\chi|-l_0)-H(l_1-|\chi|)\right],$$

где составляющие w^j определяются соотношениями (7)–(10) и разложением (11); $H(\chi)$ – функция Хевисайда;

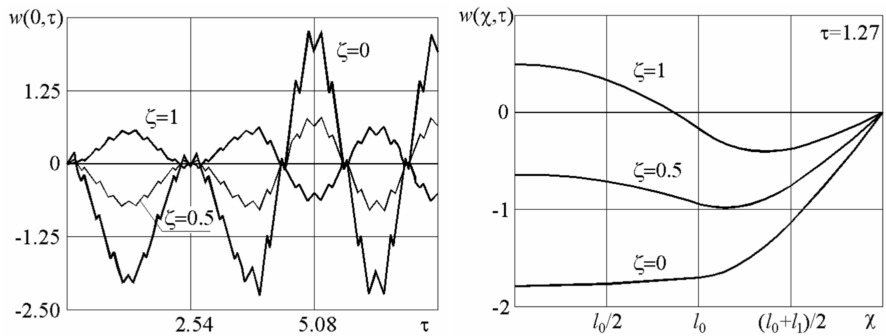
так и другие характеристики, описывающие нестационарные процессы в слойно-ступенчатом биморфе. В частности, для вычисления механического напряжения в управляющем пьезоэлементе используется выражение

$$\sigma_p(\chi,z,\tau)=\frac{c_{11}^p}{l_p}\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial\chi}-e_{31}E_z,\quad z\in\left[-\frac{h_m}{2}-h_p;\frac{h_m}{2}\right],\tag{13}$$

для которого справедливы соотношения (1) и полученное на основании вариационного принципа равенство $\Phi(\chi,\tau)=\dfrac{e_{31}}{\varepsilon_{33}}\dfrac{h_{\text{p}}^2}{12l_{\text{p}}^2}\dfrac{\partial^2 w^{\text{II}}}{\partial\chi^2}$.

4. Численные результаты. Расчеты проводились при фиксированных значениях геометрических и физико-механических параметрах составляющих биморф слоев: металлическая подложка – титан ВТ-6 – $l_{\text{m}} = 50$ мм, $b = 10$ мм, $h_{\text{m}} = 0{,}5$ мм, $\rho_{\text{m}} = 4500$ кг/м^3, $c_{11}^{\text{m}} = 11{,}3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; электроупругий слой – пьезокерамика PZT-5 – $l_{\text{p}} = 25$ мм, $b = 10$ мм, $h_{\text{p}} = 1$ мм, $\rho_{\text{p}} = 7600$ кг/м^3, $c_{11}^{\text{p}} = 13{,}6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $e_{31} = -7{,}9$ Кл/м^2, $\varepsilon_{33} = 1280{\cdot}\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Механическая нагрузка задана в виде $p(\tau) = H\,(3{,}81 - \tau)$, а длина области нагружения принята равной $2{\cdot}x_0 = 25$ мм ($\chi_0 = 0{,}5$).

На рис. 2, *а* представлен отнесенный к l_{p}/γ_0 прогиб балки в центральной точке ($\chi = 0$) для различных значений ζ, а на рис. 2, *б* – форма поверхности приведения в момент $\tau = 1{,}27$.



а) *б*)

Рисунок 2 – Прогиб биморфа при $p(\tau) = H(3{,}81-\tau)$

На рис. 3 изображены результаты решения задачи для различных весовых коэффициентов ζ (12), который определяет уровень удовлетворения условию управления (5). Для $\zeta = 1$ на внешнем покрытии пьезопривода следует обеспечить потенциал $V(\tau) = V_{\text{c}}(\tau)$ (рис. 3). При $\zeta = 0$ пьезоэлемент биморфа работает в режиме приема и при действии нагрузки $p(\tau) = H(3{,}81-\tau)$ на его электродах генерируется разность потенциалов $V(\tau) = V_{\text{d}}(\tau)$, значения которой для наглядности увеличены в десять раз. Кривая $\zeta = 0{,}5$ (рис. 3) отображает альтернативный вариант формирования управляющего электрического сигнала. Отметим, что на этом рисунке значения $V(\tau)$ отнесены к нормирующему коэффициенту $e_{31}h_{\text{p}}\left(F_{\text{m}}+F_{\text{p}}\right)\big/2l_{\text{p}}b\varepsilon_{33}\gamma_0$.

Рис. 4 отвечает анализу распределения максимальных значений механического напряжения в пьезоэлементе σ_{p} по его длине при различных значениях ζ. Расчеты выполнены согласно выражению (13) для момента времени $\tau = 1{,}27$ при возбуждении биморфа механической нагрузкой $p(\tau) = H(3{,}81-\tau)$.

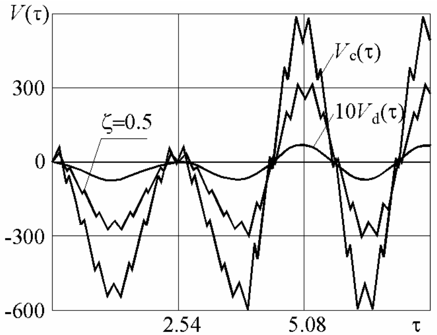


Рисунок 3 – Разность потенциалов на электродах пьезоэлемента

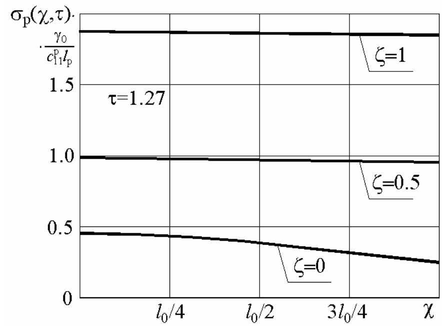


Рисунок 4 – Механическое напряжение в пьезокерамическом слое

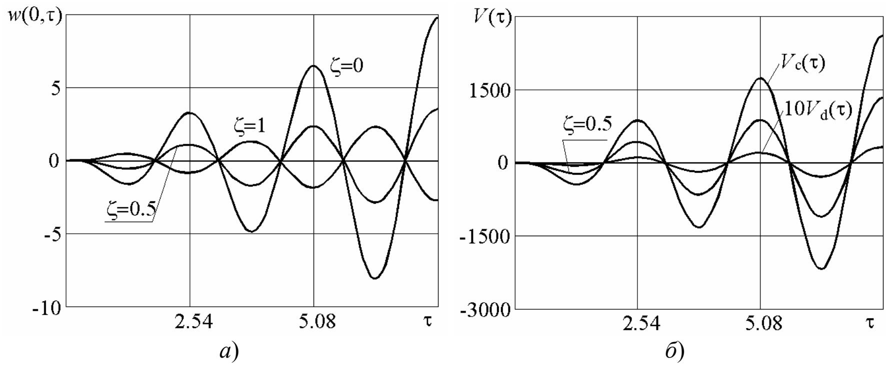


Рисунок 5 – Характеристики НДС биморфа при $p(\tau) = \sin(\omega\tau)$

Заключение. Представленный графический материал свидетельствует об эффективности изложенной методики формирования управляющего электрического сигнала $V(\tau)$. Полученные результаты были апробированы путем моделирования в программных пакетах, основанных на МКЭ. В общем случае, целевая функция управления может быть задана и в другом виде, например, обеспечивающем неподвижность некоторой точки биморфа. Введение весового коэффициента ζ позволяет количественно оценить возможности управления и в ряде случае установить компромиссное значение. Незначительная осцилляция на рисунках обусловлена привлечением квазистатической формы решения (8) при скачкообразном характере изменения механического нагружения преобразователя. Применительно к нагрузке, график функции которой лишен разрывов первого рода, указанные осцилляции отсутствуют. В частности, при механическом возбуждении балки синусоидальным сигналом $p(\tau) = \sin(\omega\tau)$. Отметим, что при $\omega = 2\pi/2{,}54$, что соответствует частоте собственных изгибных колебаний биморфа с разомкнутыми электродами пьезоэлемента, наблюдается нарастание амплитуд $w(0,\tau)$ с ростом τ (рис. 5, *а*), а на электродах возбуждается разность потенциалов $V\mathrm{d}(\tau)$, нормированный график которой показан на рис. 5, *б*. Действие электрического сигнала $V(\tau)$ приводит к уменьшению амплитуд прогибов асимметричного биморфа (рис. 5, *б*).

Список литературы: **1.** *Crawley E.F.* Intelligent structures for aerospace: a technology overview and assessment. // AIAA Journal. – 1994. – № 32. – P. 1689-1699. **2.** *Rao S.S., Sunar M.* Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of flexible structures: A survey // Appl Mech Rev. – 1994. – № 47. – P. 113-123. **3.** *Ray M.C.* Optimal control of laminated plate with piezoelectric sensor and actuator layers // AIAA Journal. – 1998. – № 36. – P. 2204-2208. **4.** *Baz A., Poh S.* Optimal vibration control with modal positive position feedback // Optimal Control Applications and Methods. – 1996. – № 17. – P. 141-149. **5.** *Miu D.K.* Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics. – Springer-Verlag, New York. Morgan Matroc, Inc., 1993. Guide to Modern Piezoelectric Ceramics. Electro Ceramics Division. **6.** *Sloss J.M., Bruch Jr J.C., Adali S., Sadek I.S.* Piezoelectric patch control using an integral equation approach // Thin-Walled Struct. – 2001. – № 39. – P. 45-63. **7.** *Hsu C.Y., Lin C.C., Gaul L.* Vibration and sound radiation controls of beams using layered modal sensors and actuators // Smart Mater. Struct. – 1998. – № 7. – P. 446-455. **8.** *Бабаев А.Э., Бабаев А.А.* Совместное действие ударной нагрузки и электрического импульса на тонкую биморфную полосу с пьезокерамическим слоем // Thesis of conference repots. Int. conf. DSMSI, Kyiv – 2007. – С. 246. **9.** *Бабаев А.Э., Бабаев А.А., Янчевский И.В.* Нестационарные колебания биморфной балки в режимах прямого и обратного пьезоэлектрического эффекта // Актуальные проблемы физико-механических исследований. Акустика и волны. – 2007. – № 3. – С. 16-27. **10.** *Евсейчик Ю.Б., Рудницкий С.И., Шарапов В.Л., Шульга Н.А.* Чувствительность биморфного преобразователя типа металл-керамика // Прикладная механика. – 1990. – V. 26. № 12. – С. 67-75. **11.** *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. 5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с. **12.** *Wang H.M., Ding H.J., Chen Y.M.* Dynamic solution of a multilayered orthotropic piezoelectric hollow cylinder for axisymmetric plane strain problems // Int. J. Sol. and Struct. – 2005. – № 42. – P. 85-109.

Поступила в редколлегию 16.11.2009

УДК 539.3 + 681.3

О.А.КОСТРОМИЦКАЯ, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;
Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СМЕННЫХ ОБОЛОЧЕК НА ТОЧЕЧНЫХ ОПОРАХ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ПУАНСОНОВ

Запропонована технологія комп'ютерного проектування композитних оболонок для пуансона на точкових опорах. Створена програма автоматичної побудови моделі композитної оболонки на різних системах точкових опор, автоматизовано розрахунок НДС в програмному комплексі і виведення результатів розрахунку. Досліджено вплив геометричних характеристик композитної оболонки універсального пуансона на кількість опор, необхідних для дотримання умов міцності і допустимої жорсткості оболонки.

Technology of computer design of composite shells for a multi-point stretch die is presented. The program of automatic modeling of composite shell on the different systems of point dies is created, the calculation of stressedly-deformed state in the universal program complex and view of calculation results is automated. Influence of geometrical characteristics of multi-point stretch die composite shell on the number of dies necessary for realization of strength and possible rigidity of shell is investigated.

Введение. Конструктивными особенностями обводообразующих деталей летательных аппаратов являются их большие габариты и сложность геометрии. Проблема обеспечения требуемого порядка гладкости поверхностей, выполнения аэродинамических и технологических требований неразрывно связана с решением задач проектирования поверхностей сложных форм.

Возросшие требования к точности воспроизведения обводов приводят к возникновению графоаналитических методов и аналитических методов описания обводов летательных аппаратов.

Внедрение компьютерных методов проектирования коренным образом меняет сложившиеся технологические процессы и производственные технологии. Возможность создания цифровых моделей изделия позволяет отказаться от физических эталонов формы и размеров (плазов, эталонов поверхности, некоторых шаблонов). Цифровые модели оснастки и автоматизированное управление технологическими процессами позволяют реализовать программное управление оборудованием на всех этапах производства, включая сборку и контроль геометрических параметров.

В практике авиастроения с конца 70-х годов [1] применялась переналаживаемая оснастка на точечных опорах, выдвигающихся на разную высоту. Существовали различные методы расчета такой технологической оснастки [2].

В 2006 году стартовал европейский проект, предназначенный для создания более быстрого, дешевого и гибкого формообразования тонких оболочек в единичном или мелкосерийном производстве.

Базовой идеей проекта является замена существующих штампов системами пуансонов-стержней (рис. 1), выдвигающихся на разную высоту с использованием числового программного управления. Это значительно снижает стоимость и время изготовления обводообразующих деталей планера самолета. В дальнейшем в рамках нового проекта предусматривалось с помощью указанной идеи наладить технологию производства панелей из композитов.

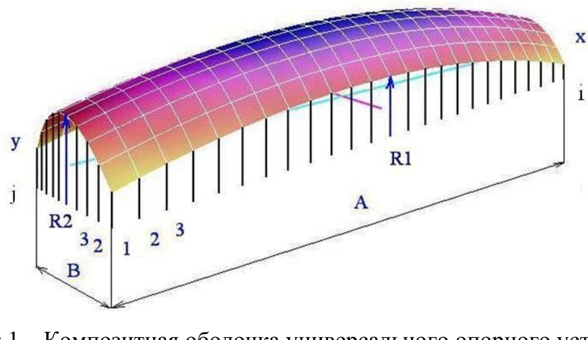


Рисунок 1 – Композитная оболочка универсального опорного устройства

Моделирование оболочки на опорах. В данной работе исследуется напряженно-деформированное состояние (НДС) рабочей (сменной) композитной оболочки (рис.1) под действием распределенного нормального давления. Эта оболочка используется для процесса формообразования обтяжкой металлических листовых деталей на универсальном обтяжном пуансоне. Оболочка из композита лежит непосредственно на точечных опорах оснастки. Являясь прокладкой между точечными опорами и металлической заготовкой, рабочая оболочка обеспечивает гладкость изготавливаемой оболочки. Композитные оболочки универсальной оснастки могут иметь значительное число точечных опор [3-5].

Существующие мощные универсальные программные комплексы со встроенным языком позволяют создавать пользователям собственные программы построения модели, запуска расчета и вывода полученных результатов. Такие программы можно запускать в пакетном (Batch) режиме.

Чтобы соединить мощь универсального комплекса и собственный пользовательский интерфейс для задания и вывода данных при решении конкретной задачи, используется COM (Component Object Model) модель объектных компонентов, – одна из основных технологий, на которой основывается операционная система Windows. Технология COM является языково-независимой технологией и может использоваться для соединения отдельных программ, написанных на разных языках.

Для построения модели композитной оболочки на точечных опорах, число и расположение которых может задаваться, а также последующего расчета напряженно-деформированного состояния оболочки под действием равномерно распределенного нормального давления создана программа КМ на языке APDL. Для удобства использования этой программы осуществлена автоматизация задания исходных данных и вывода результатов, создано приложение Delphi (графический интерфейс пользователя Graphical User Interface — GUI), из которого с помощью функции API Windows вызываются макросы основной программы КМ. В данном случае сервером автоматизации (управляемым приложением) является программный комплекс Ansys. Управляющим приложением (диспетчером) является интерфейс-приложение Delphi.

Для запуска приложения-сервера из программы-диспетчера используется функция API Windows *CreateProcess.* Для этого формируется файл ввода исходных данных *1.in*, в котором также записываются команды на языке APDL для работы макросов, обеспечивающих

– построение модели оболочки на точечных опорах;
– задание механических характеристик материала;
– задание нагрузки и граничных условий.

Файл *1.in* является одним из параметров *CreateProcess*.

Если поверхность оболочки симметрична по одному или двум направлениям x и y, то можно рассчитывать 1/2 или 1/4 части оболочки.

Поскольку количество опор i, j по направлениям x и y, соответственно, может быть различным, четным или нечетным, в программе предусмотрены четыре варианта расположения опор: i, j – четные числа, i, j – нечетные числа, четное число i и нечетное число j и, наоборот, четное число j и нечетное число i.

Считается, что края оболочки $x = \pm A/2$, $y = \pm B/2$ опираются на опоры, во всех вариантах, а по центральным осям $x = 0$, $y = 0$ опоры имеются в случаях, когда i, j – нечетные числа.

Срединная поверхность оболочки описывается симметричной функцией второго порядка и в силу симметрии рассматривается 1/4 часть оболочки. Оси симметрии проходят через центр оболочки (рис. 1). Дискретная модель срединной поверхности оболочки предполагает, что в точках дискретизации $\left(x_p, y_q\right)$, $p=\overline{1,px}$, $q=\overline{1,qy}$ задается значение функции поверхности z_{pq}. Здесь px, qy – количество точек дискретизации вдоль оси x и y, соответственно.

Дискретная математическая модель сменной оболочки (1) имеет вид:

$$z_{pq}=f-\frac{x_p^2}{2R_1}-\frac{y_q^2}{2R_2},\qquad p=\overline{1,px},\, q=\overline{1,qy} \tag{1}$$

где f – стрела подъема оболочки в центральной точке x = 0, y = 0.

Опоры задаются на плоскости $z=0$ координатами $\left(x_k, y_m\right)$, $k=\overline{1,i}$, $m=\overline{1,j}$.

Следующим этапом проектирования является формирование точек контакта оболочки с опорами. Для этого сравниваются координаты каждой опоры x_p, y_q, $p=\overline{1,px}$, $q=\overline{1,qy}$ с координатами каждого узла дискретной поверхности оболочки x_k, y_m, $k=\overline{1,ix}$, $m=\overline{1,jy}$. Те узлы оболочки, которые находятся ближе всего к точкам опор, являются точками опор на дискретной поверхности оболочки. В них задаются граничные условия: перемещения по трем направлениям равны нулю

$$u\left(x_k, y_m, z_{km}\right)=0,\ v\left(x_k, y_m, z_{km}\right)=0,\ w\left(x_k, y_m, z_{km}\right)=0 \quad k=\overline{1,ix},\, m=\overline{1,jy}. \tag{2}$$

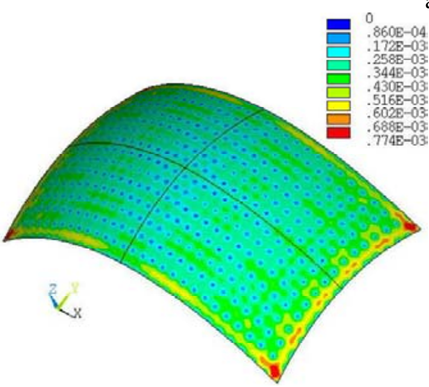
Результаты расчетов. В процессе проектирования исследовано влияние геометрических характеристик композитной оболочки универсальной оснастки на количество опор, необходимых для того, чтобы в процессе формообразования соблюдались условия прочности оболочки, а суммарное перемещение оболочки не превышало допустимого.

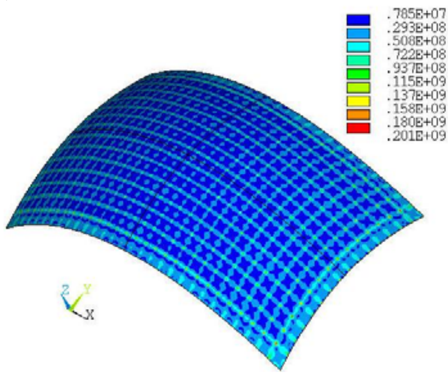
Для расчета композитной оболочки взяты за основу геометрические параметры, характерные для производства самолетов различных классов (см. таблицу). Толщина оболочки и количество опор выбраны в результате серии проведенных расчетов.

Типоразмер (вар.)	Классы летательных аппаратов	Габариты (A×B), м	Продольный радиус R_1, м	Поперечный радиус R_2, м	Толщина h, мм	Число опор в продольном направлении i	Число опор в поперечном направлении j
1	Среднего класса	3,0×1,2	19,5	1,2	4	21	10
2	Широко-фюзеляжные	11,0×2,2	25,0	2,5	7	40	21
3	Крупнотоннажные (военно-транспортные)	8,7×2,1	130,0	~1,5	12,0	20	10
4	Тяжелого класса	15,0×3,6	40,0	3,5	20,0	41	21
5	-	2,0×2,0	1,2	1,2	5	40	40
6	-	2,0×1,2	1,2	1,2	4	41	20
7	-	3,0×1,2	2,5	1,2	4	41	20
8	-	2,0×1,2	1,2	1,2	10	30	16

Приведенные в таблице варианты 1-4 ориентированы на весьма пологие оболочки. Для проектирования композитных оболочек с большой гауссовой кривизной выполнена следующая серия расчетов – варианты 5-8. Для варианта 8 на рис. 2 показаны модель 1/4 части оболочки и результаты расчетов – суммарные перемещения u_{sum}, м и эквивалентные по Мизесу напряжения S_{eqv}, Па.

а)





б) в)

Рисунок 2 – Вариант 8: а) Расположение опор на 1/4 части оболочки; б) суммарные перемещения u_{sum}, м; в) эквивалентные напряжения S_{eqv}, Па

На рис.3 показана форма приложения Delphi с результатом – перемещением u_{sum}, м для одного из вариантов серии расчетов, в котором принималось: $i = 5$, $j = 3$.

Заключение. В данной работе представлена технология компьютерного проектирования композитных оболочек для универсального пуансона. Создана программа автоматического построения модели композитной оболочки на различных системах точечных опор, а также автоматизирован расчет напряженно-деформированного состояния с помощью универсального расчетного комплекса и вывод результатов расчета.

Исследовано влияние геометрических характеристик композитной оболочки универсальной оснастки на количество опор, необходимых для того, чтобы в процессе формообразования соблюдались условия прочности оболочки, а суммарное перемещение оболочки не превышало допустимого.

Апробация технологии выполнена на серии проектов композитных оболочек с параметрами, характерными для современной авиационной промышленности.

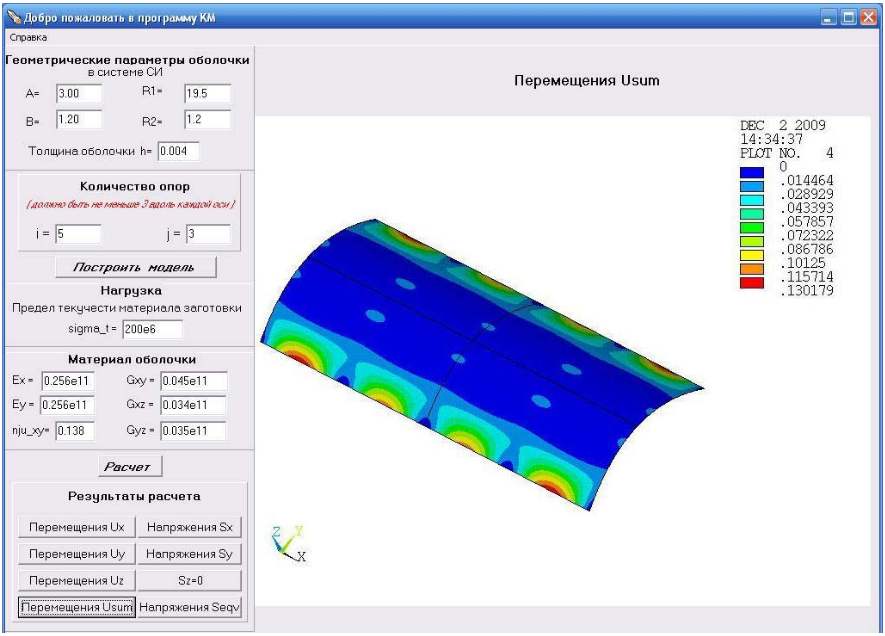


Рисунок 3 – Форма интерфейс-приложения Delphi

Список литературы: 1. *Боголюбов В.С*. Формообразующая оснастка из полимерных материалов. – М., Машиностроение, 1979. – 183 с. **2.** *Боголюбов В.С. и др*. Проектирование, изготовление и эксплуатация пустотелых обтяжных пуансонов с применением стеклопластиков. РТМ-1453-74. – М., 1975. – 60 с. **3.** *M-Z Li, Z-Y Cai, Z Sui, and X-J Li* Principle and applications of multi-point matched-die forming for sheet metal. – ImechE, 2008. **4.** *A-M. Yan, I. Klappka*. Springback in stretch forming process of aeronautic panel production by finite element simulation. – Int J Mater Form (2008) Suppl. – 1: 201-204. **5.** *Zhong-Yi Cai, Shao-Hui Wang, Xu-Dong Xu and Ming-Zhe Li*. Numerical simulation for the multi-point stretch forming process of sheet metal // Journal of Materials Processing Technology. – Volume 209, Issue 1. – 1 January 2009. – P. 396-407.

Поступила в редколлегию 21.11.09

ПОРЯДОК ПОДАЧІ СТАТЕЙ ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ У ВІСНИКУ НТУ «ХПІ»

Для опублікування статті у Віснику НТУ «ХПІ» необхідно подати у тематичну редколегію такі документи:

1 Заявку підписану всіма авторами:

«Прошу прийняти статтю ..... [прізвища авторів, назва статті] на ... сторінках [указати кількість сторінок] для опублікування у Віснику НТУ «ХПІ». Оплату гарантуємо. Відомості про авторів: [прізвище, ім'я, по-батькові кожного автора, наукове звання, посада, місце роботи, контактний телефон].

Підписи авторів.»

2 Текст статті на аркушах формату А4.

3 Акт експертизи про можливість опублікування матеріалів у відкритому друку.

4 Рецензію на статтю з місця роботи, підписану доктором або кандидатом наук.

5 Рецензію на статтю від одного з членів редколегії.

6 Електронну версію статті на дискеті 3,5", лазерному диску, USB- диску або іншому носії інформації.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ, ПОДАВАНИХ ДЛЯ ОПУБЛІКУВАННЯ У ВІСНИКУ НТУ «ХПІ»

Стаття повинна бути виконана з використанням редактора Word без нумерації сторінок. Переноси допускаються лише автоматичні або «м'які» (клавіша Ctrl+«-»). Розмір паперу: А4; орієнтація – альбомна; усі поля по 1,5 см; по 2 сторінки на аркуші [у термінології Word – 2 колонки на листі], поле між ними 3 см. Інтервал між рядками по всій статті – одинарний, шрифт Times New Roman (тексти комп'ютерних програм – шрифт Arial), розмір (там, де не зазначено інакше) – 10 пт, звичайний.

Заголовок статті містить:

1 Код УДК. Друкується без відступу, вирівнювання по лівому краю.

2 Ініціали і прізвища авторів. Друкується через один пустий рядок після УДК. Вирівнювання по лівому краю, відступ 0,75 см. Ініціали й прізвища пишуться великими літерами; шрифт курсив напівжирний. Слідом за прізвищем через кому вказується наукове звання, (канд.техн.наук; докт.фіз.-мат.наук; академік та ін.); посада (студент, асп., наук.співр., доц., проф.); назва організації (НТУ «ХПІ»; ІПМаш НАН України; ЗАТ НІІГідроПривод; БелгТАСМ, Бєлгород, Росія) шрифт звичайний; дані на кожного автора закінчуються знаком «;». Кожне прізвище пишеться з нового рядка.

3 Назва статті. Друкується великими літерами через один пустий рядок після інформації про авторів. Шрифт – прямий, напівжирний; відступ 0,75 см; вирівнювання по лівому краю.

4 Анотація українською мовою довжиною 4…10 рядків. Друкується через один пустий рядок після назви статті. Шрифт – 8 пт; без відступу; вирівнювання по ширині.

5. Анотація англійською мовою. Друкується через один пустий рядок піс-

ля анотації на українському, оформлення аналогічне.

Основний текст починається через один порожній рядок після заголовка. Вирівнювання по ширині, відступ нового рядка 0,75 см. Посилання в тексті на малюнки, таблиці, формули, літературу мають вигляд: див. рис. 1, *а*; у табл. 2; у (3); у рівнянні (4); див. формули (5)-(7); у [14, 16]; [11, с. 5]. У тексті рекомендується використовувати тире середньої довжини (клавіша «Ctrl + Gray −»). Текст може бути розділений на розділи з заголовками вигляду:

1. Математична модель. Використовується метод …

Висновки. У результаті отримано...

Перед заголовком пропускається один рядок.

Формули створюються у вигляді об'єктів редактором формул Equation, центруються. Нумерація, якщо вона необхідна, ставиться праворуч у дужках; вирівнюється по правому краю. Невеликі формули можна розміщати не в окремому рядку, а прямо в тексті. Після формул потрібно ставити розділові знаки, якщо цього вимагає орфографія; одна від іншої формули відокремлюються точкою з комою. Не рекомендується використовувати в редакторі формул літери кирилиці. Нескладні формули можна набирати в Word без використання редактора формул, наприклад: $R = \mathrm{\beta} \cdot r$; $a^2 + b_1/c$. Розміри шрифту в Equation слід встановлювати такі: звичайний – 10 пт, великий індекс – 7 пт, малий – 6 пт, великий символ – 15 пт, малий – 10 пт. Шрифти: Times New Roman і Symbol, стиль прямий або курсив.

Латинські літери набирають курсивом, прямим шрифтом – функції (sin, tg та ін.), числа подібності (Bi, Pr та ін.), математичні скорочення (max, lim, exp та ін.). Прямим шрифтом набирають у формулах літери кирилиці, одиниці вимірювання (МПа, кДж/м^2 та ін.). Не можна застосовувати у тексті знаки (+, >, №, %, sin та ін.) окремо без числових або літерних значень.

Грецькі літери рекомендується набирати прямим шрифтом.

Рисунок повинен бути оформлений як окремий об'єкт у тексті статті, розташування поверх тексту не допускається; рисунок відокремлюється від тексту зверху і знизу порожнім рядком. Рекомендуються використовувати чорно-білу палітру, якість відтворення рисунків кольорової палітри не гарантується. Якщо рисунків декілька, то вони нумеруються. В підрисуночних підписах: Рисунок 1; Рисунок 2 – … ; назва (якщо є) ставиться після тире, центрується, шрифт – 9 пт. Для растрових малюнків шириною на всю сторінку рекомендована кількість пикселів по горизонталі від 1000 до 3000.

Символи на рисунку повинні бути близькі за розміром до основного тексту. Частини рисунка позначаються під рисунком літерами *а*, *б* без дужки. Написи на рисунку, позначення елементів на рисунку (*1*, *2*, *3*) пишуть курсивом. Посилання у тексті, у підрисуночних підписах на частини рисунків (див. рис. 1, *а*, *б*), на його елементи (*1*, *2*, *3*) пишуть курсивом.

Таблиця відокремлюється від тексту зверху і знизу порожнім рядком; використовується шрифт – 9 пт. Якщо таблиць декілька, вони нумеруються. Заголовок містить номер таблиці та назву (якщо вона є) і може бути оформлений у вигляді складової частини таблиці з невидимою сіткою. Заголовок має вигляд: Таблиця 1; Продовження таблиці 1; Таблиця 2 – [назва]. Заголовок вирівнюється вліво з відступом 0,75 см; якщо таблиця має назву – заголовок центрується. Назва (якщо є) ставиться після тире.

Через один порожній рядок після основного тексту статті друкується список літератури. Розмір шрифту – 8 пт; без відступу; вирівнювання по ширині. Список літератури починається з набраних напівжирним шрифтом слів «**Список літератури:**», слідом за якими ставиться двокрапка. Сам список літератури набирається суцільним текстом з виділенням прізвищ і ініціалів авторів курсивом, номер позиції виділяється жирним шрифтом. Якщо авторів більше трьох, то після прізвищ перших трьох авторів можна вказувати «і ін.». Розділові знаки в списку – відповідно до вимог ВАК України.

Після списку літератури у наступному рядку указується дата надходження статті в редколегію. Після слів «*Надійшла до редколегії*» ставиться число, місяць і рік через крапку у форматі *00.00.0000*. Розмір шрифту – 8 пт; курсив; вирівнювання по правому краю.

ПРИКЛАД ОФОРМЛЕННЯ СТАТТІ:

УДК 658.012

Л.В.ИВАНОВ, докт.техн.наук, проф., АО «Телеком», Киев;
В.С.ПЕТРОВ, канд.физ.-мат.наук, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;
В.Т.ТИШКОВ, студент, НТУ «ХПИ»

ВЫДЕЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ГРУПП В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ СОЦИАЛЬНОГО ОПРОСА НАСЕЛЕНИЯ

В статті пропонуються методи обробки даних, здобутих у результаті соціологічного опиту населення про його відношення до тих чи інших партій у Харківській області. Зроблені висновки про верстви населення, на які спираються різні партії.

[Анотація англійською]

В ноябре-декабре 1997 года был проведен опрос населения, целью которого являлось выяснение отношения различных его слоев к тем или иным партиям, зарегистрированным и имеющим более или менее сильные позиции в Харьковской области. Применение математических методов...

Полученные результаты доказывают адекватность модели и могут быть использованы при анализе социально-экономических данных.

Список литературы: **1.** *Иванов Л.И., Смирнов В.Т. и др.* Факторный анализ в социальных исследованиях. – М., Наука, 1996. – 352 с. **2.** *Петров В.С.* Применение методов кластерного анализа при обработке данных экспертного опроса // Автоматика. – 1995. – № 3. – С. 15-18. **3.** *Тишков В.Т.* Кластерный анализ в социальных исследованиях // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. – 1990. – № 260: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 10. – С. 5-7. **4.** *Иванов Л.В., Петров В.С.* Применение методов статистического анализа при обработке данных опроса населения // Статистический анализ социально-экономических данных / Под ред. *Р.В.Сидорова.* – Киев, Наукова думка 1997. – С. 57-65.

Поступила в редколлегию 05.03.2007

З ПОСТАНОВИ ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ ВІД 15.01.2003Р. N97-05/1 «ПРО ПІДВИЩЕННЯ ВИМОГ ДО ФАХОВИХ ВИДАНЬ, ВНЕСЕНИХ ДО ПЕРЕЛІКІВ ВАК УКРАЇНИ»

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови президії ВАК України від 10.02,1999 р. № 1-02/3 «Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію». Однак окремі установи-засновники таких видань не дотримуються вимог до складу редакційної колегії видань, не організовують належним чином рецензування та відбір статей до друку, не надсилають свої наукові видання до бібліотек, перелік яких затверджено постановою президії ВАК України від 22.05.1997 р. № 16/5, тим самим обмежуючи можливість наукової громадськості знайомитися з результатами дисертаційних досліджень. У зв'язку з цим президія Вищої атестаційної комісії України

ПОСТАНОВЛЯЄ:

1. Попередити установи-засновники наукових фахових видань, що у разі відсутності видань у фондах визначених ВАК бібліотек вони будуть вилучені з переліку наукових фахових видань України, в яких дозволяється друкувати результати дисертаційних досліджень.

2. Установам-засновникам фахових видань оновити склади редакційних колегій так, щоб більшість у них становили фахівці, основним місцем роботи яких є установа-засновник фахового видання.

3. Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у виданнях, що виходитимуть у 2003 році та у подальші роки, лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку.

4. Спеціалізованим ученим радам при прийомі до захисту дисертаційних робіт зараховувати статті, подані до друку, починаючи з лютого 2003 року, як фахові лише за умови дотримання вимог до них, викладених у п. 3 даної постанови.

...

7. Експертним радам ВАК України провести до 1 січня 2004 року аналіз наукового рівня публікацій у фахових виданнях і подати президії ВАК України пропозиції щодо внесення відповідних змін до переліку фахових видань.

СОДЕРЖАНИЕ

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»

Збірник наукових праць № 42

Науковий редактор докт.техн.наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор Щепкін О.В.

Відповідальний за випуск В.М.Луньова

Обл.вид. № 169-09

Підп. до друку 28.12.2009 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 9,4. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 218. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».
Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Zебра», Харків, вул. Чичибабіна, 9