



ВЕСТНИК
НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
«ХПИ»

30'2009

Харьков

ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»

Сборник научных трудов
Тематический выпуск

30'2009

«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Издание основано Национальным техническим университетом
«Харьковский политехнический институт» в 2001 году

Государственное издание

Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины

КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Председатель: Л.Л.Товажнянский, докт. техн. наук, проф.

Секретарь координационного совета: К.А.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, докт. техн. наук, проф.;	С.И.Кондрашов, докт.техн.наук, проф.;
Е.И.Сокол, докт. техн. наук, проф.;	В.М.Кошельник, докт.техн.наук,проф.;
Е.Е.Александров, докт. техн. наук, проф.;	В.И.Кравченко, докт.техн.наук, проф.;
Л.М.Бесов, докт. техн. наук, проф.;	Г.В.Лисачук, докт. хим. наук, проф.;
А.В.Бойко, докт. техн. наук, проф.;	В.С.Лутиков, докт. техн. наук, проф.;
Ф.Ф.Гладкий, докт. техн. наук, проф.;	О.К.Морачковский, докт.техн.наук,проф.
М.Д.Годлевский, докт. техн. наук, проф.;	В.И.Николаенко, докт.техн.наук, проф.;
А.И.Грабченко, докт.техн.наук, проф.;	П.Г.Перерва, докт. техн. наук, проф.;
В.Г.Данько, докт. техн. наук, проф.;	В.А.Пуляев, докт.техн.наук, проф.;
В.Д.Дмитриенко, докт. техн. наук, проф.;	М.И.Рыщенко, докт.техн.наук, проф.;
И.Ф.Домнин, докт. техн. наук, проф.;	В.Б.Самородов, докт.техн.наук, проф.;
В.В.Епифанов, докт. техн. наук, проф.;	Г.М.Сучков, докт. техн.наук, проф.;
Ю.И.Зайцев, канд. техн. наук, проф.;	Ю.В.Тимофеев, докт.техн.наук, проф.;
П.А.Качанов, докт. техн. наук, проф.;	Н.А.Ткачук, докт. техн.наук, проф.;
В.Б.Клепиков, докт. техн. наук, проф.;	

Харьков 2009

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2009. – № 30. – 200 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ответственный редактор: О.К.Морачковский, докт. техн. наук, проф.

Ответственный секретарь: А.Г.Андреев, канд. техн. наук, доц.

К.В.Аврамов	докт. техн. наук, проф.
Е.Е.Александров	докт. техн. наук, проф.
Д.В.Бреславский	докт. техн. наук, проф.
А.П.Зиньковский	докт. техн. наук, проф.
Ю.С.Воробьев	докт. техн. наук, проф.
Л.В.Курпа	докт. техн. наук, проф.
Г.И.Львов	докт. техн. наук, проф.
Ю.В.Михлин	докт. физ.-мат. наук, проф.
Н.А.Ткачук	докт. техн. наук, проф.
Ю.М.Шевченко	академик НАНУ, докт. техн. наук, проф.

АДРЕС РЕДКОЛЛЕГИИ: 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, НТУ «ХПІ». Каф. ДПМ, тел. (057) 707-68-79.

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 11 від 30 листопада 2009 р.

© Національний технічний університет «ХПІ»

Л.В.АВТОНОМОВА, канд.техн.наук, вед.науч.сотр., НТУ «ХПИ»;

С.М.ДЕРГУН, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;

Г.А.ГОНЧАРОВА, мл.науч.сотр., НТУ «ХПИ»;

А.В.СТЕПУК, канд.физ.-мат.наук, ст.науч.сотр., НТУ «ХПИ»

МЕХАНИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ И ВНУТРЕННЕЕ ДАВЛЕНИЕ СОСУДОВ ИМПЛАНТАНТОВ

Статтю присвячено визначенням впливу технології виготовлення і умов збереження на міцність при розтягуванні та внутрішньому тиску кровоносних судин імплантатів. Надані рекомендації умов зберігання судин імплантатів.

The article is dedicated to determine the influence of production technology and storage conditions on tensile strength and intrinsic pressure of blood vessels implants. The recommendations to be given concerning storage conditions of implant vessels.

Введение. Кровеносные сосуды – эластичные трубчатые образования в теле человека, по которым силой ритмически сокращающегося сердца или пульсирующего сосуда осуществляется перемещение крови по организму: к органам и тканям по артериям, артериолам, артериальным капиллярам, и от них к сердцу – по венозным капиллярам, венулам и венам. Адвентиция стенки кровеносного сосуда может быть представлена в виде каркаса из эластино-коллагеновых элементов, заполненного рыхлой соединительной тканью. При изучении строения стенки кровеносных сосудов вполне определенно установлено, что их наружная оболочка (adventia) в рыхлом слое соединительной ткани содержит большое количество косых и продольных толстых эластичных и коллагеновых волокон, которые и обуславливают необходимую жесткость стенки сосуда для неизменности формы просвета сосуда при его деформировании (изгибе) [1,2,3]. Эластиновые и коллагеновые волокна в совокупности образуют в адвентиции своеобразный жесткий (по сравнению с окружением) каркас [4], расположение и количество отдельных элементов которого вариабельно в зависимости от многих факторов: вида сосуда, его локализации, возраста, патологии и пр. Каждый такой эластиново-коллагеновый элемент обладает вполне определенными механическими свойствами. Модуль упругости крупных кровеносных сосудов в радиальном направлении изменяется от 0,11 МПа до 0,79 МПа [5 ,7-9], а коэффициент Пуассона имеет значение немногим больше нуля [6].

Цель исследования и постановка задачи. В медицинской практике часто используются имплантанты-сосуды при разных сердечно-сосудистых, варикозных и прочих заболеваниях. В связи с необходимостью сохранения

имплантантов на протяжении долгого времени разрабатываются разные способы их хранения, которые не ухудшали бы их механические свойства. Институтом проблем криобиологии и криомедицины Национальной академии наук Украины были предоставлены биоматериалы (сосуды-имплантанты), отличающиеся технологией изготовления и хранение которых осуществлялось в различных условиях: при комнатной температуре, в морозильной камере при температуре -24°C , прошедшие азотную криообработку. В связи с этим, были проведены экспериментальные исследования с целью определения влияния технологии изготовления и условий хранения на прочность имплантантов.

Эксперимент. В ходе работы были проведены два типа экспериментов для различных сосудов-имплантантов: деформирование их внутренним давлением и при растяжении.

Определение прочности в продольном направлении проводилось на разрывной машине FP 100/1BR при шкале нагрузки 40 Н и скорости перемещения активного захвата 66 мм/мин. Погрешность измерения составляла не более 2 %. Для исключения проскальзывания фиксация концов образца имплантанта в зажимном устройстве осуществлялась через прокладки из шлифовальной бумаги.

Внутренний диаметр сосуда определялся с помощью конического градуированного измерителя с нанесенной шкалой с погрешностью $\pm 0,5$ мм. Толщина стенки имплантанта измерялась микрометром на разрезанном вдоль сосуде.

Диаграмма растяжения в координатах усилие/удлинение через блок аналого-цифрового преобразователя регистрировалась на персональном компьютере.

Для проведения эксперимента у испытуемого крупного кровеносного сосуда вырезалась в продольном направлении полоса прямоугольной формы. Испытуемый образец закрепляли и растягивали до момента разрушения. На рис. 1 представлена экспериментальная картина распределения деформации образцов из крупного кровеносного сосуда-имплантанта при различных условиях хранения и изготовления.

Прочность сосуда в радиальном направлении определялась при нагружении имплантанта внутренним давлением с фиксацией давления при разрушении сосуда. При испытаниях использовался электронный датчик измерения давления на базе MPX5700 и с помощью аналого-цифрового преобразователя записывалось изменения давления в сосуде при шкале в 700 кПа и погрешности измерения равной 2,5 %. Схема экспериментальной установки для измерения разрушающего внутреннего давления сосудов-имплантантов представлена на рис. 2.

Эксперимент осуществлялся следующим образом: образец кровеносного сосуда необходимой длины ($\sim 20\text{--}25$ мм) фиксировался на ниппеле диаметра

соответствующего диаметру имплантанта. Концы сосуда плотно закреплялись нитью. Через вентиль тонкой регулировки давление воздуха с малой скоростью подачи нагнеталось внутрь сосуда до момента его разрушения. По регистрируемым значениям давления с помощью блока аналого-цифрового преобразователя на персональном компьютере строилась диаграмма разрушения сосуда в координатах давление/время.

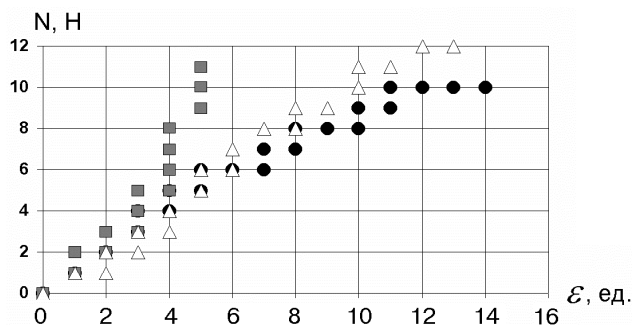


Рисунок 1 – Экспериментальная диаграмма деформирования образцов крупного кровеносного сосуда облученного 24 Гр при хранении: ■ ■ ■ – при комнатной температуре, ● ● ● – в морозильной камере при температуре $-24\text{ }^{\circ}\text{C}$, $\Delta \Delta \Delta$ – прошедшие азотную криообработку

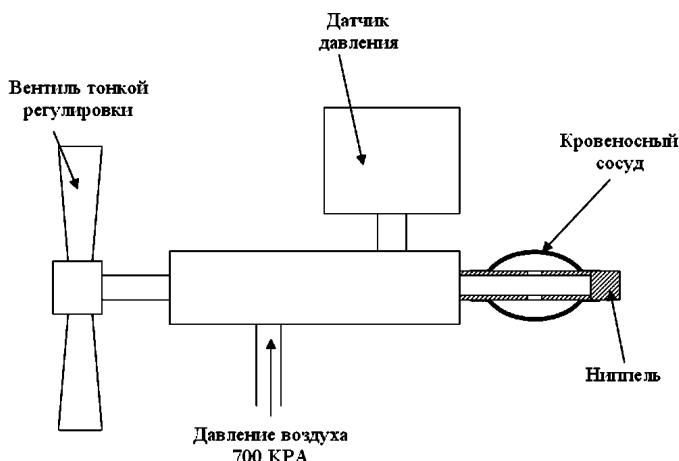


Рисунок 2 – Схема экспериментальной установки для измерения внутреннего давления при разрушении сосуда

Анализ экспериментальных данных. Как ранее отмечалось, для изучения механических свойств крупных кровеносных сосудов-имплантантов диаметром $3,5 \pm 0,5$ мм, были проведены два типа экспериментов: растяжение

сосудов и нагружение их внутренним давлением. Исследовались имплантаты при дозе облучения 24 Гр и 49Гр, которые хранились в разных условиях.

Величины разрывного усилия при растяжении для исследуемых кровеносных сосудов-имплантантов диаметром $3,5\pm 0,5$ мм приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Величина разрывного усилия при растяжении кровеносных сосудов-имплантантов

Способ хранения	Доза облучения, Гр	
	24	49
	Разрывное усилие, Н	Разрывное усилие, Н
Комнатная температура	11,3	11
Морозильная камера, -24 C°	11,6	-
Азотная обработка	12	8,8

Из табл. 1 видно, что величина разрывного усилия при растяжении для сосудов с дозой облучения равной 49 Гр ниже, чем для сосудов с дозой облучения равной 24 Гр на 2,7 % при комнатной температуре хранения и на 26,7 % для сосудов, хранящихся в азотной камере. Также стоит отметить, что для сосудов с дозой облучения равной 24 Гр с уменьшением температуры хранения прослеживается увеличение прочности на растяжение. Так, при хранении сосудов при комнатной температуре значение величины разрывного усилия на 5,8 % ниже, чем для сосудов, хранящихся в азотной камере. Таким образом, более высокая прочность на растяжение сосудов-имплантантов с дозой облучения равной 24 Гр наблюдается при хранении с использованием азотной заморозки, в то время как для сосудов с дозой облучения равной 49 Гр лучший результат показывает хранение при комнатной температуре.

Значения величины разрушающего внутреннего давления для исследуемых кровеносных сосудов-имплантантов диаметром $3,5\pm 0,5$ мм приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Величина разрушающего внутреннего давления в кровеносных сосудах-имплантантах

Способ хранения	Доза облучения, Гр	
	24	49
	Разрушающее давление, кПа	Разрушающее давление, кПа
Комнатная температура	396,0	355,4
Морозильная камера, -24C°	301,4	413,9
Азотная заморозка	449,0	392,2

Из табл. 2 видно, что значение разрушающего внутреннего давления для

сосудов, обработанных дозой облучения равной 24 Гр, на 10 % выше, чем для сосудов – с дозой облучения равной 49 Гр при комнатной температуре хранения и на 12,6 % при хранении их в азотной камере. В то же время при хранении сосудов в морозильной камере более интенсивно облученные сосуды-имплантанты на 27 % прочнее в радиальном направлении чем сосуды, облученные дозой 24 Гр. Следует отметить, при испытании сосудов с дозой облучения 24 Гр лучшую прочность показали сосуды, которые хранились при азотной заморозке, а для сосудов с дозой облучения равной 49 Гр предпочтительнее хранение в морозильной камере при температуре 24 С°.

Выводы. В данной статье были представлены результаты экспериментов при растяжении и нагружении внутренним давлением сосудов-имплантантов с разной дозой облучения и при разных условиях их хранения. Показано, что наилучшими прочностными характеристиками обладают сосуды-имплантанты с дозой облучения равной 24 Гр, которые находились в условиях азотной заморозки.

Список литературы. 1. Пурия Б. Я., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. – Рига: Зинатне, 1980. 2. Никулин А.А., Петров В.К. Кровеносные сосуды. – Тула.: Приокское книжное издательство, 1981. 3. Ванков В. Н. Строение вен. – М.: Медицина, 1974. 4. Капо К., Педли Т., Шротер Р., Суд У. Механика кровообращения. – М.: Мир, 1981. 5. Jimenez M.I.B. An object oriented modeling framework for the arterial wall // PhD thesis, University of Los Andes, Bogota, Colombia. – 2007. 6. Liao D., Arnett D.K., Tyroler H.A., Riley W.A., Chambless L.E., Szklo M., Heiss G. Arterial stiffness and the development of hypertension: The ARIC study // The importance of arterial stiffness measurement, Lannert A. (Ed.). – The Hungarian Arterial Stiffness Society: Medexpert Ltd., 2007. – PP. 8-9. 7. Levesque M.L., Liepsch D., Moravec S., Nerem R.M. Correlation of endothelial cell shape and wall shear stress in a stenosed dog aorta // Arteriosclerosis, Thrombosis, and Vascular Biology. – 1986. – 6. – PP. 220-229. 8. Schmid F., Sommer G., Rappolt M., Schulze-Bauer C.A.J., Regitnig T.P., Holzapfel G.A., Laggner P., Amenitsch H. In situ tensile testing of human aortas by time-resolved small-angle X-ray scattering // Journal of Synchrotron Radiation. – 2005. – 12. – PP. 727-733. 9. Mehnen L.H. Ferromagnetic amorphous bending sensors for artery wall displacement measurement simulation and practice // Ph.D Thesis, Institut für Analysis und Technische Mathematik, Wien. – 2002.

Поступила в редколлегию 06.09.2009

Ю.П.АНАЦКИЙ, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;

Ю.А.ЗЕНКЕВИЧ, асп., НТУ «ХПИ»;

В.В.ОВЧАРЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;

Э.А.СИМСОН, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;

М.В.ТРОХМАН, асп., НТУ «ХПИ»

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБРАЗУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ РОЛИКА ПОДШИПНИКА КАЧЕНИЯ

Було проведено оптимізацію твірної поверхні тіла кочення роликового підшипника. Попередньо аналітично отримано розподіл навантаження, що дозволило значно спростити розрахункову модель.

The optimization calculation of rolling body's formative surface of the roller bearing was solved. For this purpose preliminary there was the analytically got partition of load.

Введение. Современные тенденции в транспортном машиностроении свидетельствуют о постоянном стремлении к росту долговечности узлов, в том числе подшипниковых узлов железнодорожного вагонного состава и локомотивов. Они сводятся к постоянному усовершенствованию традиционных буксовых подшипников качения и их комбинаций для увеличения срока службы и снижения материалоемкости. Проектирования таких узлов требует решения контактной задачи расчета механических напряжений.

1. Предоптимизационный анализ. Для расчета распределения нагрузки использовано условие равновесия внешнего кольца:

$$F_r = (F_0 + \sum_{j=1}^z (2 F_j \cos(j\gamma)) \cos(\beta) ,$$

где z – половина тел качения в нагруженной зоне.

Смещение внешнего кольца относительно внутреннего, обусловленное контактными деформациями в местах касания тел качения и беговых дорожек колец:

$$\delta_j = \delta_0 \cos(j\gamma) ,$$

Величина деформации при отсутствии смазочного материала в зоне контакта:

$$\delta_j = c_T F_j ,$$

c_T — коэффициент пропорциональности.

$$\frac{F_j}{F_0} = \frac{\delta_j}{\delta_0} , F_j = \frac{F_0 \delta_j}{\delta_0} = F_0 \frac{\delta_0 \cos(j\gamma)}{\delta_0} = F_0 \cos(j\gamma) ;$$

$$F_r = F_0 (1 + 2 \sum_{j=1}^z \cos^2(j\gamma)) \cos(\beta) ;$$

$$F_0 = \frac{F_r}{(1 + 2 \sum_{j=1}^z \cos^2(j\gamma)) \cos(\beta)} \cdot$$

Получены аналитические соотношения распределения нагрузки по роликам, схематично представленные на рис. 1.

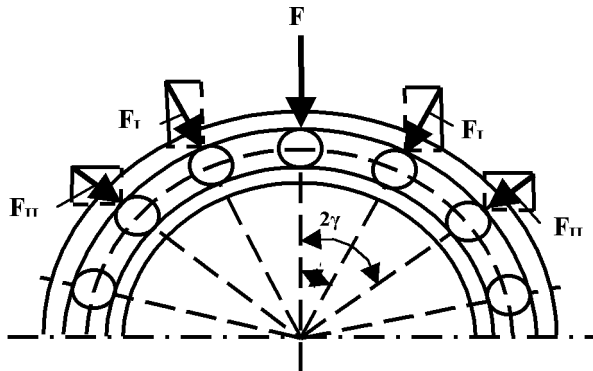


Рисунок 1 – Распределения нагрузки между телами качения

2. Численное решение. С учетом полученных выше результатов и осесимметричности построены трехмерные геометрическая (рис. 2) и конечно-элементная модели (рис. 3) сектора подшипника с телом качения. В качестве конечного элемента использован трехмерный квадратичный конечный элемент с двадцатью узлами.

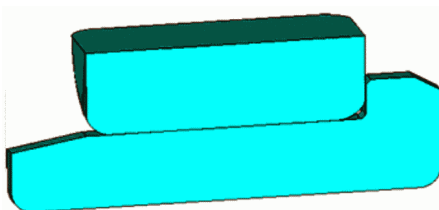


Рисунок 2 – Геометрическая модель сектора роликового подшипника с внутренним кольцом

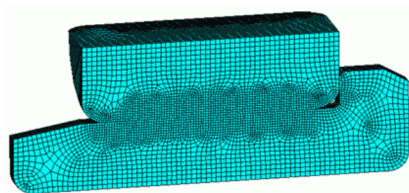
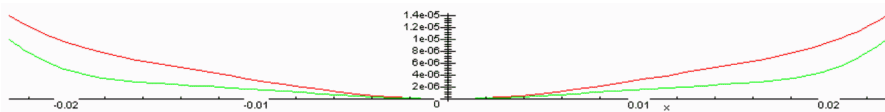


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель сектора роликового подшипника с внутренним кольцом

Проведен оптимизационного расчет для получения оптимальных (по критерию минимизации максимальных контактных напряжений) профилей боковой поверхности ролика для строго цилиндрической и выпуклой дорожек качения (рис. 4).

Распределение нормальных напряжений σ_y на внутреннем кольце при оптимизированной образующей ролика см. на рис. 5.



— цилиндрическая дорожка, — выпуклая дорожка
Рисунок 4 – Цилиндрическая и выпуклая дорожки качения

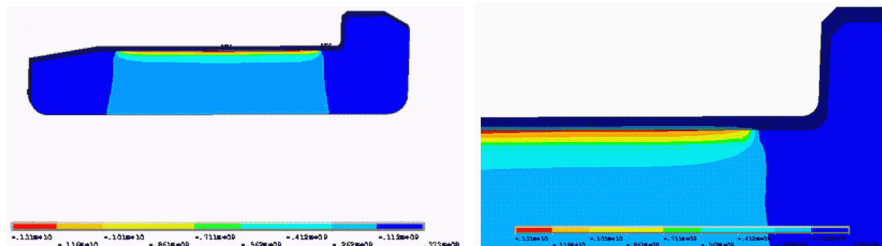


Рисунок 5 – Распределение нормальных напряжений на внутреннем кольце

В результате дальнейшего анализа и контактов с ВНИИЖТ было выявлено, что количество отказов (выходов из строя) для внешних колец больше чем для внутренних. Такой факт может быть обусловлен тем, что число «соударений» за единицу времени внешнего и внутреннего кольца с роликами в зоне нагружения существенно различаются. Соответственно расчетная модель была перестроена для внешнего кольца (рис. 6-7).

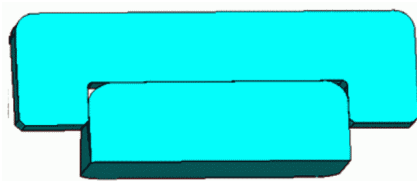


Рисунок 6 – Геометрическая модель сектора роликового подшипника с внешним кольцом

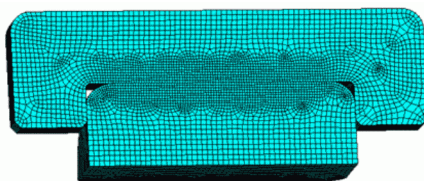


Рисунок 7 – Конечно-элементная модель сектора роликового подшипника с внешним кольцом

Результаты проведены на рис. 8.

Результат оптимизации профиля боковой поверхности ролика показал, что оптимизированные профили для моделей с внутренним и внешним кольцом практически не отличаются (рис. 9).

Выводы:

- 1 Аналитически получено распределение нагрузки между телами качения.
- 2 Построены геометрическая и конечно-элементная модели сектора

- контактного узла (с внешним и внутренним кольцом).
- 3 Решена контактная задача.
- 4 Проведена оптимизация образующих поверхности ролика и дорожки качения по критерию минимизации контактных напряжений.

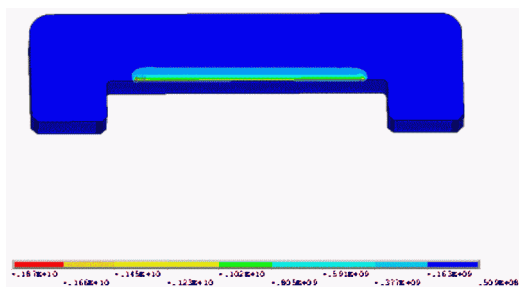
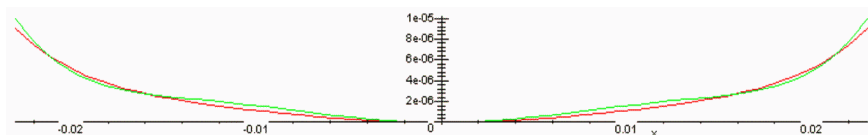


Рисунок 8 – Распределение нормальных напряжений на внешнем кольце



— модель с внутренним кольцом, — модель с внешним кольцом

Рисунок 9 – Оптимизированные профили для моделей с внутренним и внешним кольцом

Результаты решения в такой постановке получены впервые. Новая модель по своим характеристикам превосходит аналоги и предназначена для промышленного применения.

Список литературы: 1. ГОСТ 25.504-82. Расчет и испытание на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. 2. *Перель Л.Я., Филатов А.А.* Подшипники качения. Расчет, проектирование и обслуживание опор: Справочник 2-е изд., перераб.и доп. – М.: Машиностроение, 1992. – 608 с. 3. *Леликов О.П.* Валы и опоры с подшипниками качения. Конструирование и расчет: Справочник. – М.: Машиностроение, 2006. – 640 с. 4. *Kotzalas M.*, Power transmissions component failure and rolling contact fatigue progression. – Pennsylvania State Univ. 1999. 5. *Mitchel J.* Machinery analysis and monitoring. – Penn Well, Tulsa, 1981.

Поступила в редколлегию 10.04.2009.

А.Г.АНДРЕЕВ, канд.техн.наук, доцент НТУ «ХПИ»;
Б.М.АРПЕНТЬЕВ, докт.техн.наук, профессор, УИПА, Харьков;
В.А.КЛОЧКО, асс., УИПА, Харьков;
А.В.ЩЕПКИН, науч.сотр., НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРЯДКИ ДЕТОНАТОРОВ ПУТЕМ ИХ НАГРЕВА С ПОМОЩЬЮ ИНУ

Робота присвячена розробці методу утилізації детонаторів артилерійських снарядів шляхом їхнього нагрівання до температури не нижче 300°. Для цього детонатори розміщують у ємність з немагнітного матеріалу й нагрівають за допомогою індукційно-нагрівального пристрою. Технологічний режим повинен забезпечувати оптимальні витрати енергії при дотриманні температурних і часових вимог.

The work is devoted to development of method of shell detonator unloading by their heating to temperature not below 300°. For this purpose detonators place in a capacity from a unmagnetized material and heat up by approach of inductive-heating device. The technological mode should ensure the optimum costs of energy and observance of temperature and temporary conditions.

Актуальность темы. Происходящие в последние годы инциденты на складах боеприпасов, оставшихся на территории Украины после распада СССР, требуют утилизации боеприпасов, срок хранения которых истек. В связи с этим возникает необходимость разработки таких способов утилизации, которые сочетали бы ряд требований, среди которых – безопасность, экономичность, технологичность, эффективность.

Наиболее перспективным представляется использование нагрева изделий с помощью индукционно-нагревательных устройств [1, 2], которые обеспечивают высокую экономичность, легко встраиваются в автоматическую линию, позволяя выдерживать требуемый температурный режим, достаточно экономичны.

Постановка задачи. Для утилизации детонаторов применяют их нагревание до температуры не ниже 300°. Детонаторы размещают в емкость цилиндрической формы из немагнитного материала и нагревают с помощью индукционно-нагревательного устройства (ИНУ). Технологический режим должен обеспечивать оптимальные затраты энергии при соблюдении температурных и временных условий. При этом следует учитывать, что размещения детонаторов случайным образом приводит к осложнению задачи обеспечения требуемой температуры во всех без исключения деталях.

Для решения температурной задачи был применен метод конечных элементов [3]. Поскольку предполагается, что в рассматриваемых деталях температура не зависит от окружной координаты θ , то для решения нестационар-

ной температурной задачи удобно использовать уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{K}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

где T – температура, K – коэффициент теплопроводности, Q – поток тепла от источника внутри тела (считается положительным, если тепло подводится к телу), ρ – плотность, c – удельная теплоемкость материала детали, t – время.

В качестве граничных условий может быть задана:

температура на некоторой части поверхности тела S :

$$T = T_S(S); \quad (2)$$

плотность теплового потока q на части поверхности тела S_1 :

$$K \frac{\partial T}{\partial r} l_r + K \frac{\partial T}{\partial z} l_z + q = 0; \quad (3)$$

конвективный теплообмен на части границы S_2 :

$$K \frac{\partial T}{\partial r} l_r + K \frac{\partial T}{\partial z} l_z + h(T - T_0) = 0, \quad (4)$$

где q – поток тепла через поверхность тела (считается положительным, если тепло теряется телом), h – коэффициент теплообмена, T_0 – температура окружающей среды, l_r , l_z – направляющие косинусы между нормалью к поверхности и осями координат.

Функционал, связанный с уравнением (1) и граничными условиями (2)–(4) имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} \chi = & \int_V \frac{1}{2} \left[K \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2T \left(Q - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right] dV + \\ & + \int_{S_1} q T ds + \int_{S_2} \frac{h}{2} (T - T_0)^2 ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения вариационного уравнения использован МКЭ с применением тороидальных конечных элементов треугольного поперечного сечения с тремя узлами. В качестве неизвестной функции принята температура T . Если разбить тело на КЭ и проводить интегрирование по отдельным элементам, то процесс минимизации функционала приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$[C] \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + [K] \vec{T} = \vec{F}, \quad (6)$$

где $[C]$ – матрица демпфирования тела, состоящая из матриц демпфирования КЭ следующего вида:

$$[c^e] = \int_{V^e} \rho c [N]^T [N] dV = \frac{\pi \rho c \Delta}{30} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где Δ – площадь поперечного сечения КЭ в плоскости rz , матрица $[N]$ содержит функции формы, $[K]$ – матрица теплопроводности, состоящая из матриц для КЭ:

$$[k^e] = \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV^e + \int_{S_{23}} h [N]^T [N] dS_{23} =$$

$$= \frac{\pi r_c K}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} + \frac{\pi h L_{23}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_2 + r_3 & r_2 + r_3 \\ 0 & r_2 + r_3 & r_2 + 3r_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где r_c – центр тяжести поперечного сечения КЭ в плоскости rz . Второе слагаемое в (8) приведено для частного случая вычисления интеграла по поверхности КЭ между узлами 2, 3; L_{23} – расстояние между ними.

Вектор-столбец правых частей $\vec{F}$ состоит из векторов для КЭ следующего вида:

$$\vec{f}^e = \int_{V^e} Q [N]^T dV^e - \int_{S_{12}^e} q [N]^T dS_{12}^e + \int_{S_{23}^e} h T_0 [N]^T dS_{23}^e =$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(\frac{Q\Delta}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} - L_{12} q \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + L_{23} h T_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Формула приведена для частного случая: поток тепла q действует между узлами КЭ 1,2; конвекция – между узлами 2,3, L_{12} , L_{23} – расстояние между соответствующими узлами в плоскости rz .

При решении стационарной задачи уравнение (6) приобретает вид:

$$[K] \vec{T} = \vec{F}. \quad (10)$$

При решении нестационарной задачи частная производная по времени заменяется ее конечно-разностным аналогом с применением центральной разностной схемы [5]:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T^{(1)} - T^{(0)}}{\Delta t}, \quad (11)$$

откуда

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \vec{T}^{(1)} = \left(\frac{2}{\Delta t} [C] - [K] \right) \vec{T}^{(0)} + \vec{F}^{(0)} + \vec{F}^{(1)}, \quad (12)$$

где $\Delta t = t^{(1)} - t^{(0)}$ – шаг по времени, $\vec{T}^{(0)}$, $\vec{F}^{(0)}$, $\vec{T}^{(1)}$, $\vec{F}^{(1)}$ – векторы-

столбцы температурных полей и правых частей уравнения (6) в момент времени $t^{(0)}$ и $t^{(1)}$ соответственно.

Также может быть использована конечно-разностная схема Кранка-Николсона, где вычисляются также производные по времени от $\bar{T}$. Предполагая, что

$$\frac{d\bar{T}^{(0)}}{dt} + \frac{d\bar{T}^{(1)}}{dt} = \frac{2(\bar{T}^{(1)} - \bar{T}^{(0)})}{\Delta t}, \quad (13)$$

получаем систему уравнений

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t} [C] \right) \bar{T}^{(1)} = [C] \left(\frac{2}{\Delta t} \bar{T}^{(0)} + \frac{d\bar{T}^{(0)}}{dt} \right) + \bar{F}^{(cp)}, \quad (14)$$

где $F^{(cp)}$ – вектор-столбец правой части уравнения (10) в момент времени $(t^{(1)} - t^{(0)})/2$. Алгоритм этой схемы состоит в последовательном решении уравнения (14) и нахождении $d\bar{T}^{(1)}/dt$ из (13).

Для обращения матрицы и вычисления распределения температур применен метод квадратного корня [6], что учитывает ленточную структуру матрицы жесткости конструкции. Описанный алгоритм реализует программа на языке Fortran.

Схематический вид типичного поперечного сечения емкости с детонаторами представлен на рис. 1, разбивка на МКЭ – на рис. 2. Для упрощения расчета смежные в окружном направлении детонаторы условно представлены в виде одного тела тороидальной формы, но, поскольку распространение тепла происходит симметрично относительно оси вращения всей конструкции, такое изменение формы в окружном направлении не меняет распределение температур.

Источником тепла в детонаторах является электрический ток, создаваемый в поверхностном слое деталей переменным электромагнитным полем, которое возбуждается ИНУ. Для более точной имитации конвективных процессов между деталями, на КЭ были разбиты не только детонаторы и емкость, но и воздух между ними.

Разрядка детонаторов может быть также осуществлена путем их нагрева в металлической емкости (рис. 3), нагреваемой электрическим нагревателем.

Характеристики материала детонаторов и корпуса (использованы данные для стали):

- коэффициент линейного расширения $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$;
- плотность $\rho = 7800$ кг/м 3 ;
- удельная теплоемкость $c = 460$ Дж/кг · град.;
- коэффициент теплопроводности $K = 50$ Вт/м · град.

Характеристики воздуха, использованные в расчете:

- плотность $\rho = 1,293$ кг/м 3 ;

- удельная теплоемкость $c = 1004 \text{ Дж/кг} \cdot \text{град.}$;
- коэффициент теплопроводности $K = 0,026 \text{ Вт/м} \cdot \text{град.}$

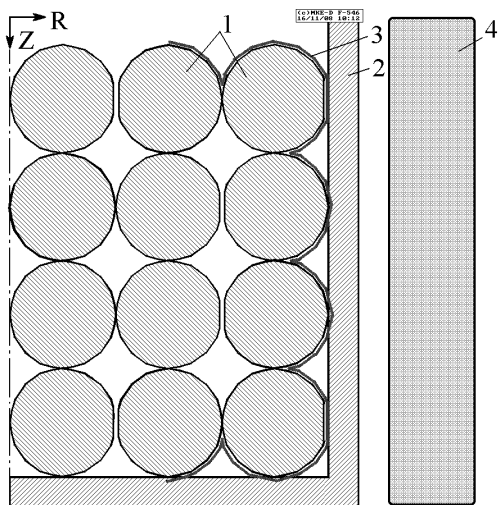


Рисунок 1 – Типичный вид поперечного сечения емкости (2), наполненной детонаторами (1), с зоной выделения тепла (3) с помощью ИНУ (4)

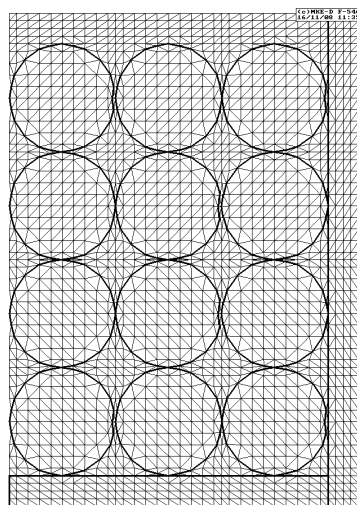


Рисунок 2 – Разбиение исследуемого объекта на КЭ

Контактное сопротивление между деталями, деталями и корпусом при теплопередаче [4, 7] имитируется сниженным коэффициентом теплопроводности в КЭ вблизи зон контакта. Кроме того, между некоторыми деталями отсутствует контакт (см. рис. 1). Начальная температура всей конструкции составляет 20°C . Зона выделения тепла показана на рис. 1, при этом мощность потока тепла на боковой поверхности детонаторов постоянна, а на их верхней и нижней поверхностях уменьшается по линейному закону с удалением от ИНУ. Мощность потока тепла q задается, исходя из мощности ИНУ.

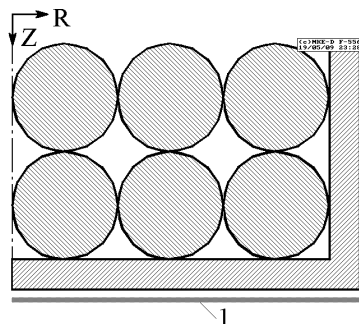


Рисунок 3 – Схема нагрева детонаторов с помощью электрического нагревателя

На рис. 4 представлены значения максимальных и минимальных температур в детонаторах в процессе их индукционного нагрева. Мощность нагрева составляет 5 кВт. Продолжительность нагрева составляет 17, 20, 23 мин. Необходимая температура в 300°C достигается во всех

деталей через 46, 32, 30 мин. соответственно. На рис. 5-7 показано распределение температур в деталях при их нагреве в моменты времени 5, 10, 20 мин. с начала нагрева.

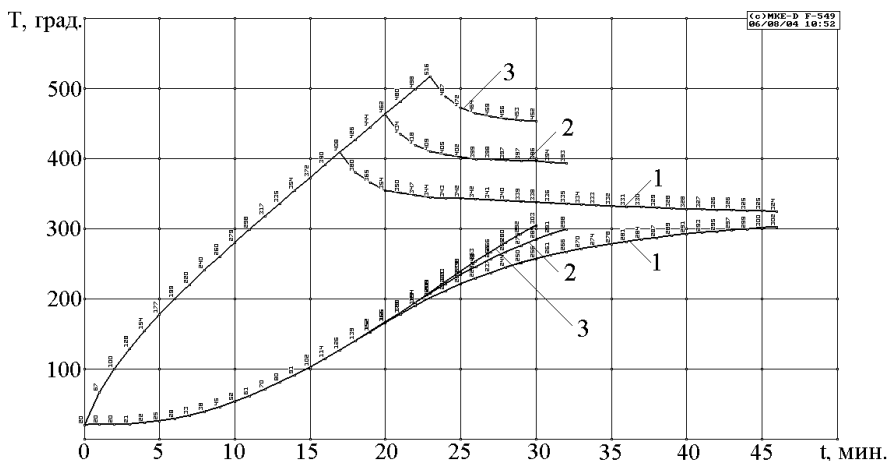


Рисунок 4 – Значения максимальных и минимальных температур в процессе индукционного нагрева деталей при мощности нагревания 5 кВт, продолжительность нагрева 17 мин. (1), 20 мин. (2), 23 мин. (3)

Если установлены ограничения по максимальной температуре, то нагрев деталей необходимо выполнять в несколько этапов. На рис. 8 представлены значения максимальных и минимальных температур в процессе индукционного нагревания деталей при мощности нагревания 10 кВт при наличии ограничения по максимальной температуры в 400 град. Нагрев выполняется в моменты времени 0–6,5 мин., 11,5–13 мин., 23–24 мин. с начала процесса.

Основные характеристики рассмотренных температурных режимов нагрева приведены в таблице.

Основные характеристики температурных режимов нагрева детонаторов с применением ИНУ

Мощность нагрева, W , кВт	Общее время нагрева, мин.	Максимальная температура нагрева, град.	Общее время достижения минимальной температуры в 300 °С. во всех деталях, мин.	Количество циклов нагрева
5	17	408	46	1
5	20	462	32	1
5	23	516	25	1
10	9	500	33	1
10	11	576	24	1
10	9	402	38	3

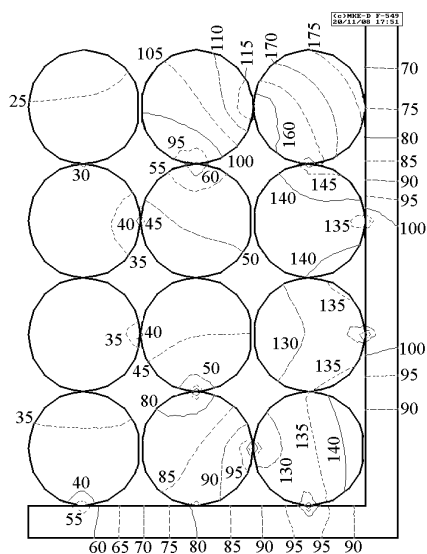


Рисунок 5 – Распределение температур в деталях в процессе индукционного нагрева деталей в момент времени 5 мин. с начала нагрева при мощности нагревателя 5 кВт

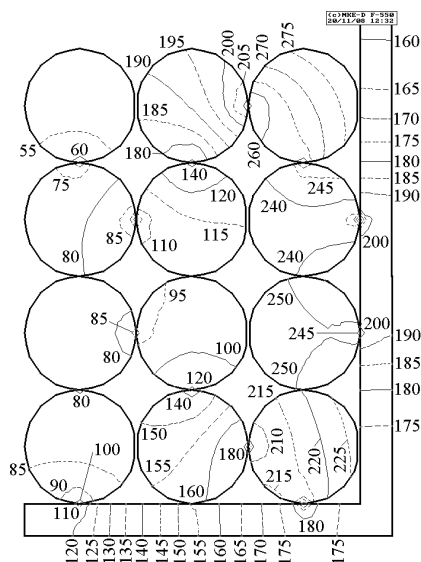


Рисунок 6 – Распределение температур в деталях в процессе индукционного нагрева деталей в момент времени 10 мин. с начала нагрева при мощности нагревателя 5 кВт

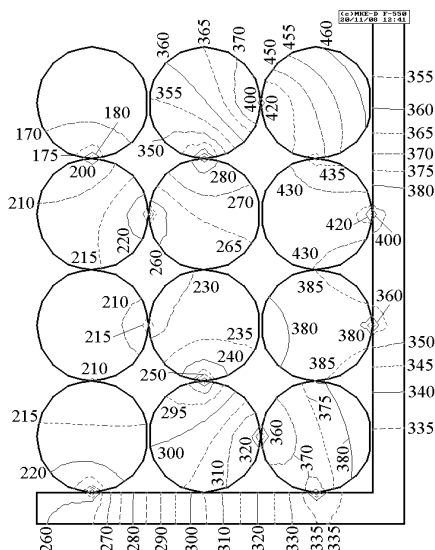


Рисунок 7 – Распределение температур в деталях в процессе индукционного нагрева деталей в момент времени 20 мин. с начала нагрева при мощности нагревателя 5 кВт

На рис. 9 представлены значения максимальных и минимальных температур в детонаторах при использовании для нагрева электрического нагревателя мощностью 5 кВт. Начальная температура всей конструкции составляет 20 °С. Зона выделения тепла показана на рис. 3, мощность потока тепла q задается постоянной по всей зоне. Конвективное рассеивание тепла за пределы конструкции не учитывается.

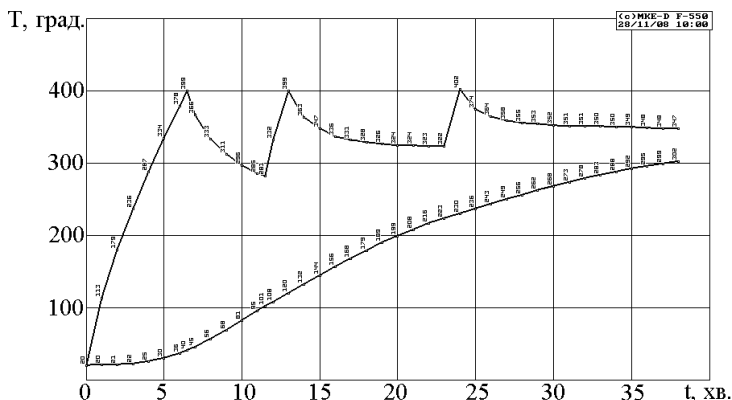


Рисунок 8 – Значения максимальных и минимальных температур в процессе индукционного нагрева деталей при мощности нагрева 10 кВт при наличии ограничения по максимальной температуре в 400 °С.

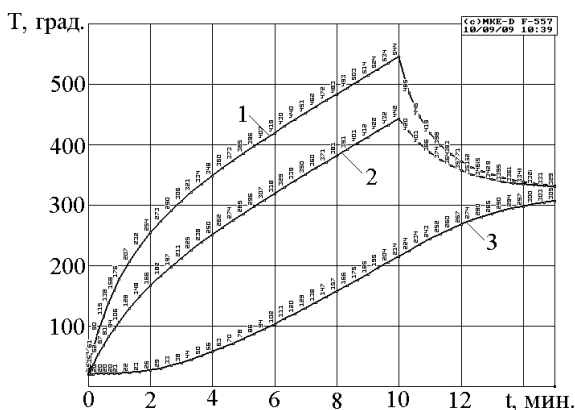


Рисунок 9 – Максимальная температура емкости с детонаторами (1), максимальные (2) и минимальные (3) температуры детонаторов в процессе их нагрева электрическим нагревателем мощностью 5 кВт

Выводы. Было проведено исследование теплового состояния детонаторов при их нагреве индукционно-нагревательными устройствами до темпера-

туры не менее 300 °С с целью разрядки. Результаты расчета показали, что нагрев происходит вследствие действия электромагнитного поля на детонаторы, которые размещены вблизи индуктора, скорость нагрева может достигать 100 град./мин. Другие детали получают тепло вследствие теплопередачи от нагретых деталей и через корпус емкости из немагнитного материала с скоростью не более 20 град./мин. Время, нужное для нагрева всех деталей, зависит от установленной допустимой максимальной температуры и количества деталей, которые непосредственно не испытывают действие электромагнитного поля. Повышение мощности нагревателя не ускоряет процесс. Введение ограничения по максимальной температуре может привести к необходимости нагрева деталей в несколько этапов.

Ускорение процесса нагрева всех детонаторов возможно лишь при изменении формы емкости для деталей из цилиндрической на тороидальную. Такая форма емкости обеспечит нагрев большинства деталей непосредственно от действия электромагнитного поля. Полученные варианты расчета мощности нагревания позволяют создать реальное ИНУ для утилизации детонаторов.

Список литературы: 1. Простяков А.А. Индукционно-нагревательные установки. – М., 1970. 2. Некрасов А.С., Синяк Ю.В. Экономика энергетики процессов нагрева. – М., Энергия, 1965. 3. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – Москва, Мир, 1975. – 541 с. 4. *Миллер В.С.* Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Киев: Наукова думка, 1966. – 164 с. 5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М., Мир, 1979. – 392 с. 6. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М., Физматгиз, 1963. – 660 с. 7. Попов В.М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений. – М., Энергия, 1971. – 235 с.

Поступила в редколлегию 07.07.2009

УДК 539.1

В.А.ВАНИН, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А.ГРИГОРЬЕВ, асп., НТУ «ХПИ»

СОЛИТОНЫ РАССЕЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЕ

Показано, що низькочастотні нелінійні коливання циліндричної пружини описуються рівняннями Кортевега – де Фриза. Отримані формули, що пов'язують амплітуду, енергію та імпульс солітона зі швидкістю його руху по гвинтовому стрижню.

It is shown, that the low-frequency non-linear oscillations of the cylindrical spring have been described by the equations of Korteweg – de Vries. The formulae relating the amplitude, the energy and the pulse of the soliton with its traveling Speed along the spiral rod have been gained.

Введение. В работе [1] на основе критического анализа и синтеза известных методов, описанных в [2-6], получена новая математическая модель связанных нелинейных колебаний, возникающих в винтовом цилиндрическом стержне (пружине). Известно (смотри [7-9]), что многие автоколебательные процессы, происходящие в непрерывных системах, описываются простейшим одномерным уравнением Кортевега–де Фриза

$$u'_t + (u + u^2 + u''_{xx})'_x = 0, \quad (1)$$

где u – амплитуда волны; t – время, x – пространственная координата (в уравнении (1) все эти величины приведены к безразмерному виду). Устойчивыми решениями уравнения (1) являются уединенные волны переноса $u = \Psi(x - vt)$, движущиеся со скоростью v , зависящей от амплитуды. Эти волны получили название *классические солитоны Рассела*, а их амплитудная функция $\Psi(x)$ описывается равенством

$$\Psi(x) = 1.5(v-1) / ch^2(0.5\sqrt{v-1} \cdot x). \quad (2)$$

В некоторых случаях процесс автоколебаний описывается модифицированным уравнением Кортевега – де Фриза

$$u'_t + (u + u^3 + u''_{xx})'_x = 0, \quad (1 \text{ а})$$

а амплитудная функция *модифицированного солитона Рассела* имеет вид

$$\Psi(x) = \sqrt{2(v-1)} / ch(\sqrt{v-1} \cdot x). \quad (2 \text{ а})$$

В настоящее время считается, что изучение уединенных волн переноса даст ключ к решению универсальных проблем физики, поэтому они активно исследуются в разных областях науки, где их удастся обнаружить; начиная с 1985-го года в мире ежегодно появляется более 2-ух тысяч публикаций по солитонной тематике. В данной работе показано, что такие волны могут возникать и в винтовых цилиндрических стержнях, колебания которых описываются моделью из статьи [1]. Заметим, что цилиндрический винтовой стержень (пружина) имеет, как и кристаллическая решетка, повторяющуюся пространственную структуру, что делает задачу изучения его автоколебаний особенно важной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Выбор математической модели. Полученная в [1] динамическая модель пружины учитывает перемещения 6-ти координат поперечного сечения стержня (рис.1), которые естественным образом объединяются в две группы: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 , с условными названиями «продольные колебания» и «поперечные колебания». Предполагается, что сечения стержня идентичны, а его колебания» и «поперечные колебания». Предполагается, что сечения стержня идентичны, а его винтовая ось имеет к началу колебаний постоянный угол подъема δ_0 . Величина $\text{tg } \delta_0$ определяет относительное начальное кручение, а $z^{-1} = d/D$ (где d – диаметр поперечного сечения, D – диаметр наводки, z – индекс) – относительную начальную кривизну стержня. Далее рассматриваются

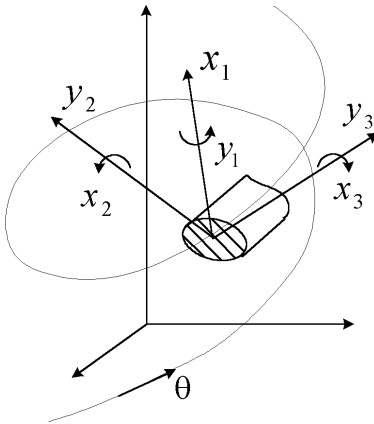


Рисунок 1 – Координаты сечения

стержни круглого или эллиптического сечения с малой кривизной ($z > 7$) и малым начальным кручением ($\delta_0 < 5^\circ$). Основные результаты, полученные в статье, остаются справедливыми и для стержней с квадратным или прямоугольным поперечным сечением.

В данной работе используется частный случай модели [1], актуальный для описания связанных низкочастотных колебаний пружины. Матричная форма соответствующих уравнений была опубликована в [6] и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (3)$$

где Vx, Vy – векторы, составленные из скоростей изменения координат x_j или y_j ; Qx, Qy – отвечающие им упругие силы и моменты сил q_j или f_j ; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения; I, Θ – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка; B, Ω – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -(tg\delta_0 \pm cx_3 \cdot q_3) & 0 \\ tg\delta_0 \pm cx_3 \cdot q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

знак «+» соответствует пружине растяжения, знак «-» – сжатия. Элементы диагональных матриц $Mx = \text{diag}(mx_1, mx_2, mx_3)$; $My = \text{diag}(my_1, my_2, my_3)$; $Cx = \text{diag}(cx_1, cx_2, cx_3)$; $Cy = \text{diag}(cy_1, cy_2, cy_3)$ вычисляются по формулам, обобщающим приведенные ранее в работе [1] для сечения круглой формы:

$$\begin{aligned} mx_1, my_2, my_3 &= m = \Delta; \quad mx_2 = \Delta^3 / (4z^2); \\ my_1 &= \Delta / (4z^2); \quad mx_3 = \Delta(1 + \Delta^2) / (4z^2); \\ cx_1, cy_2 &= (1 + \mu) / (2z^2 \Delta); \quad cx_2, cy_1 = 1 / \Delta; \\ cx_3 &= 0,5(1 + \mu)(1 + \Delta^2) / \Delta^3; \quad cy_3 = (4z^2 \Delta)^{-1}, \end{aligned}$$

где μ – коэффициент Пуассона; Δ – коэффициент овализации сечения (рис. 2).

Модель (3) оперирует с безразмерными величинами. Нормировки выбраны так, что радиус витка пружины R (начальный радиус кривизны) равня-

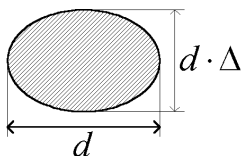


Рисунок 2 – Форма сечения

ется 1 и продолжительность распространения волны поперечной деформации по отрезку прямого стержня длиной R также равна 1. Нормировочные множители для сил δq и времени δT находятся по формулам

$$\delta q = 4z^2/(E \cdot S);$$

$$\delta T = \sqrt{E/\rho}/(2z \cdot R),$$

где E – модуль упругости; ρ – плотность материала стержня; S – площадь его сечения.

Моменты сил перед нормировкой дополнительно делятся на радиус витка R .

Постановка задачи. В работе [1] показано, что среди простых волн малой амплитуды, возникающих после линеаризации модели (3), (4) и имеющих форму

$$V_x, V_y, Q_x, Q_y \sim \exp(i \cdot (\omega t + \lambda \theta)),$$

различают колебания низкой, средней и высокой частоты. Этим колебаниям отвечают решения характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I - B & \Omega \\ \Theta & i\omega My & \Omega & i\lambda I + B^T \\ i\lambda I + B^T & -\Omega & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega & i\lambda I - B & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где, в силу условия $s\chi_3 \cdot |q_3| \leq \text{tg } \delta_0$, все элементы матрицы Ω считаются постоянными величинами. Колебаниям низкой частоты отвечают нижние ветви характеристического уравнения (рис. 3), причем точкам первого квадранта соответствуют гармонические, а третьего квадранта – экспоненциальные бегущие волны. Заметим, что для всех этих колебаний существенным является только изменение кручения χ_3 стержня, а остальными нелинейными факторами, учитываемыми в модели [1], здесь допустимо пренебречь.

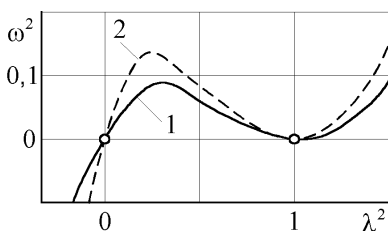


Рисунок 3 – Нижние ветви характеристического уравнения (1 – продольные, 2 – поперечные колебания)

Покажем, что связанные нелинейные свободные колебания малой частоты описываются КДФ – уравнением вида (1) и найдем основные параметры солитонов, которые можно будет наблюдать в длинных пружинах. При этом, поскольку длинные пружины сжатия без использования направляющих оказываются неустойчивыми, в данном исследовании мы ограничимся анализом пружин растяжения.

Аппроксимация характеристического уравнения. Для решения поставленной задачи раскроем определитель в равенстве (6) и упростим соотношения, используя комплекс аналитических и численно-аналитических методов.

Известно (смотри, например, работу [10]), что индекс пружины оказывает слабое влияние на положение нижних ветвей ее характеристического уравнения; здесь инерционность сечения при изгибе и кручении, а также его податливость при сжатии и сдвиге, которые зависят от величины индекса, в первом приближении допустимо не учитывать. В работе [11] для пружины с очень большим индексом (там принято $z = \infty$), изготовленной из проволоки круглого сечения, порядок определителя в равенстве (6) удалось понизить с 12-го до 4-го. Используя те же алгебраические приемы, но для произвольного сечения стержня, мы получили следующий результат:

$$\begin{vmatrix} -(1-\lambda^2+l^2) & (cx_3+\lambda^2cx_2) \cdot m \cdot \omega^2 / \lambda^2 & l \cdot m \cdot \omega^2 / \lambda^2 & 2l \cdot m \cdot \omega^2 \\ 1-\lambda^2-l^2 & -(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+l^2) & 0 & -l \cdot \omega^2 / \lambda^2 \cdot m \cdot (\lambda^2+1) \\ l \cdot cy_1 & (-\lambda^2(cx_2+cy_1)+cy_1-cx_3) \cdot l & -(1-\lambda^2+l^2) & (1+\lambda^2) \cdot cy_1 \\ 0 & -(\lambda^2cx_2+cx_3) \cdot l & 1-\lambda^2-l^2 & -(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+l^2) \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

где обозначено $m = mx_1, my_2, my_3 = \Delta$; $l = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \delta_0 + cx_3 \cdot q_3$.

Уравнение (7) является относительно частоты ω биквадратным и в области малых частот имеет аналитические решения

$$\omega^2 \approx (m \cdot cy_1)^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot (1-\lambda^2+l^2)^2 / (1+\lambda^2) \quad \text{и}$$

$$\omega^2 \approx (m \cdot cx_3)^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot (1-\lambda^2+l^2)^2 / (1+\mu+\lambda^2),$$

или, после извлечения корней из обеих частей уравнения,

$$\omega \approx \lambda \cdot (1-1.5 \cdot \lambda^2+l^2) \quad \text{и}$$

$$\omega \approx \lambda \cdot (1-(1+0.5/(1+\mu)) \cdot \lambda^2+l^2) / \sqrt{0.5(1+\mu)(1+1/\Delta^2)}, \quad (8)$$

где μ – коэффициент Пуассона, а волновое число удовлетворяет неравенству $|\lambda| < 0,3$.

Далее результаты (8), соответствующие модели первого приближения, были уточнены. Влияние индекса учтено за счет использования поправочных множителей:

$$\omega \approx \lambda \cdot (1+l^2-1.5 \cdot \lambda^2) \cdot (1-1/(8z^2)), \quad (9)$$

$$\omega \approx \lambda \cdot (1+l^2-(1+0.5/(1+\mu)) \cdot \lambda^2) \cdot (1-1/(4z^2)) / \sqrt{0.5(1+\mu)(1+1/\Delta^2)}, \quad (10)$$

величина которых была определена путем сопоставления формул (9), (10) с результатами численного решения характеристического уравнения (7); метод решения описан в [1]. В результате, для нижней ветви, отвечающей продольным колебаниям пружины, в области малых волновых чисел $|\lambda| < 0,3$ оказалась справедливой аппроксимация

$$\omega \approx \lambda \cdot (1+l^2-(1+0.5/(1+\mu)) \cdot \lambda^2) \cdot k / \sqrt{1+\mu}, \quad (11)$$

где поправочный коэффициент $k = (1 - 1/(4z^2)) / \sqrt{0.5(1 + \Delta^{-2})}$.

Нелинейное уравнение связанных колебаний. Учтем, что для продольных колебаний нижней ветви существенные значения имеют только три величины, **изменяющиеся синхронно**: скорость продольного перемещения V_{x1} , перерезывающая сила q_1 и момент кручения q_1 ; остальные три динамических параметра оказываются меньше указанных на порядок и более. Поэтому эти колебания пружины допустимо сводить к изменению только одной величины – момента q_3 , а равенство (11) оказывается характеристическим для следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial(l^2(q_3)q_3)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1+\mu)) \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right],$$

или, с учетом условия

$$l^2 = (tg\delta_0 + cx_3 \cdot q_3)^2 \approx tg^2\delta_0 + 2 \cdot tg\delta_0 \cdot cx_3 \cdot q_3, \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\cos^2\delta_0\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + cx_3 \sin 2\delta_0 \frac{\partial(q_3^2)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1+\mu)) \cos^2\delta_0 \cdot \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right]. \quad (13)$$

Покажем, что дифференциальное соотношение (13) является КДФ – уравнением вида (1). Для этого достаточно выполнить следующие замены:

$$u = q_3 \cdot (\sin 2\delta_0 \cdot cx_3); \quad \hat{x} = x / (\sqrt{(1 + 0.5/(1+\mu))} \cdot \cos\delta_0);$$

$$\hat{t} = t \cdot k / (\sqrt{1+\mu} \cos^2\delta_0), \quad (14)$$

и мы получим уравнение

$$u'_i + (u + u^2 + u''_{\hat{x}\hat{x}})'_{\hat{x}} = 0. \quad (15)$$

Отметим, что при колебаниях винтового стержня в соответствии с уравнением (15) величина $\Delta\chi_3 = \sin 2\delta_0$ отвечает изменению его кручения, причем внутри солитона угол наклона винтовой оси увеличивается.

Параметры классического солитона Рассела. Форма солитона (рис. 4) определяется двумя параметрами: амплитудой A изменения кручения $\Delta\chi_3$ и так называемой «эффективной длиной солитона» $2L$; после учета замен (14) получаем:

$$A = 1.5 \cdot (v-1) / \sin 2\delta_0; \quad 2L = \cos\delta_0 \cdot 2\sqrt{(1 + 0.5/(1+\mu))/(v-1)}, \quad (16)$$

где v – относительная скорость солитона. Заметим, что значение $v = 1$ соответствует скорости a_0 распространения по данной пружине длинной линейной волны продольной деформации; приближенное значение этой скорости можно найти по формулам работы [12], где используется модель эквивалентного стержня:

$$a_0 = 2\pi R i_e \sqrt{Z_{np} / m_{np}},$$

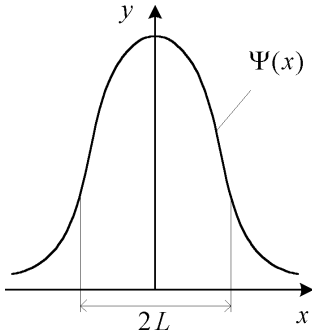


Рисунок 4 – Амплитудная функция солитона Рассела

i_e, m_{np} – число витков и масса пружины;
 Z_{np} – коэффициент жесткости пружины при ее растяжении.

Условие $cx_3 \cdot |q_3| \ll \text{tg } \delta_0$ эквивалентно неравенству $1,5(v-1) \ll 2\sin^2 \delta_0$, откуда получаем следующее ограничение для длины солитона:

$$2L \gg \sqrt{3 \cdot (1 + 0,5/(1+\mu))} / \text{tg } \delta_0 > 2/\text{tg } \delta_0. \quad (16)$$

Анализ полученных результатов показывает, что

- скорость солитона близка к скорости a_0 ;
- амплитуда солитона определяется скоростью его движения;
- эффективная длина солитона составляет 10 витков пружины и более;
- общее растяжение ΔS пружины для классического солитона Рассела зависит от его скорости и пропорционально корню из амплитуды A :

$$\Delta S = x_1(+\infty) - x_1(-\infty) = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1,5(v-1)/\sin 2\delta_0}{\text{ch}^2(0,5\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{3\sqrt{v-1}}{\sin 2\delta_0} \cdot R \sim \sqrt{A},$$

где R – радиус навитки пружины;

- энергия солитона пропорциональна величине $A^{3/2}$. Действительно, потенциальная энергия этой волны, в основном, связана с кручением проволоки:

$$\begin{aligned} \Pi &= 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^3 cx_j q_j^2(x) + \sum_{j=1}^3 cy_j f_j^2(x) \right) dx \approx 0,5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} cx_3 q_3^2(x) dx = \\ &= \frac{0,5}{cx_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(9/4)(v-1)^2 / \sin^2 2\delta_0}{\text{ch}^4(0,5\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{3(v-1)^{3/2}}{cx_3 \sin^2 2\delta_0} = \frac{A^{3/2}}{cx_3 \sqrt{3 \sin 2\delta_0}}, \end{aligned}$$

а кинетическая энергия здесь равна потенциальной энергии;

- кроме энергии солитон переносит импульс P_c , направленный вдоль оси пружины, и момент количества движения J_c относительно этой оси:

$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty} mx_1 \cdot Vx_1(x) dx; \quad J_c = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} my_3 \cdot Vy_3(x) dx;$$

данные величины пропорциональны растяжению ΔS витков пружины.

Если стержень имеет круглое поперечное сечение, то переход к размерным величинам приводит к следующим формулам для энергии и импульса солитона:

$$E_M = \frac{\pi}{8(1+\mu)z\sqrt{3 \sin 2\delta_0}} G \cdot d^3 \cdot A^{3/2}; \quad P_c = \frac{3\pi/4}{\sqrt{3 \sin 2\delta_0}} d^3 \cdot \sqrt{\rho \cdot G \cdot A},$$

где G – модуль сдвига.

Например, если пружина изготовлена из стальной проволоки диаметром $d = 2$ мм, имеет индекс $z = 10$ и начальный угол подъема винтовой оси $\delta_0 = 2,5^\circ$, то скорость линейной волны деформации составляет

$$a_0 = \sqrt{(2G/\rho) \cdot (1 - 1/(4z^2))} / (z \cos \delta_0) \approx 460 \text{ м/с}.$$

В этой пружине для солитона с амплитудой $A = 0,001$, что соответствует увеличению угла подъема спирали примерно на $0,5^\circ$, получаем следующие значения:

$$v \approx 460,3 \text{ м/с}; E_M \approx 0,04 \text{ Дж}; P_c \approx 0,092 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

«Длина» $2L$ солитона соответствует для этого случая примерно 15,6 витков пружины; растяжение пружины на длине солитона составляет около 26 мм. Более 92 % энергии солитона Рассела и около 75 % смещения ΔS и импульса P_c сосредоточено на участке $[x_M - L, x_M + L]$, где координата x_M отвечает максимуму амплитуды.

Модифицированное КДФ уравнение для пружины и его решение.

Если пружина имеет большой индекс и/или значение параметра овализации ее сечения $\Delta = 1$, то она может быть навита с очень малым углом δ_0 подъема винтовой оси, и для величины l^2 вместо равенства (12) допустимо использовать другое соотношение:

$$l^2 = (tg \delta_0 + cx_3 \cdot q_3)^2 \approx cx_3^2 \cdot q_3^2.$$

В результате уравнение (13) изменяется и приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + cx_3^2 \frac{\partial(q_3^3)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1+\mu)) \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right]. \quad (13 \text{ а})$$

После использования замен

$$u = q_3 \cdot cx_3; \quad \hat{x} = x / (\sqrt{(1 + 0.5/(1+\mu))}); \quad \hat{t} = t \cdot k / \sqrt{1+\mu} \quad (14 \text{ а})$$

соотношение (13 а) совпадает с модифицированным КДФ уравнением вида (1 а) и имеет устойчивое решение – уединенную волну переноса (2 а). Амплитуда A изменения кручения витка и длина солитона $2L$ для этого случая определяются равенствами

$$A = \sqrt{2(v-1)}, \quad 2L = 4\sqrt{(1 + 0.5/(1+\mu))/(v-1)} = 4\sqrt{2(1 + 0.5/(1+\mu))} / A. \quad (15 \text{ а})$$

Заметим, что у данного солитона амплитуда убывает медленнее, чем у классического, поэтому эффективную длину $2L$ пришлось увеличить в 2 раза.

Учтем, что для стальной проволоки по условиям пропорциональности деформаций и напряжений амплитуда $A < 0,005 \cdot z$ [13]. Если индекс пружины $z < 20$, то эта амплитуда остается малой величиной, а в отношении параметров солитона справедливо большинство выводов, сформулированных выше.

Но модифицированный солитон обладает дополнительными «квантовыми» свойствами, которых нет у классического солитона Рассела. Так, площадь под кривой $\Delta\chi_3$ (рис. 5) здесь не зависит от амплитуды волны. Это означает, что у всех модифицированных расхождение ΔS крайних витков одина-

ково и не зависит от его амплитуды и скорости:

$$\Delta S = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2(v-1)}}{ch(\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \sqrt{2} \cdot \pi R,$$

где R – радиус навивки пружины.

Кроме того, оказалось, что энергия E_M этого солитона пропорциональна его амплитуде (таким свойством обладает фотон, смотри [14]):

$$E_M = \int_{-\infty}^{+\infty} cx_3 q_3^2(x) dx = \frac{1}{cx_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(v-1)}{ch^2(\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{4\sqrt{v-1}}{cx_3} = \frac{2\sqrt{2}}{cx_3} \cdot A.$$

Если пружинная проволока имеет круглое поперечное сечение, то переход к размерным величинам приводит к следующей формуле для энергии солитона:

$$E_M = [\pi / (4(1 + \mu) z)] G \cdot d^3 \cdot A.$$

Например, для стальной проволоки при значениях $d = 3$ мм; $z = 20$; $A \approx 0,06$ (что соответствует изменению угла δ примерно на $3,5^\circ$) получаем:

$$a_0 \approx 226,5 \text{ м/с}; \quad v_c \approx 226,9 \text{ м/с}; \quad E_M \approx 4 \text{ Дж}.$$

«Длина» $2L$ модифицированного солитона для этого случая равняется 17,7 виткам пружины, то есть 3,4 м винтовой оси. Расширение пружины на длине солитона составляет около 100 мм, что в 1,5 раза больше ее диаметра. Величина ΔS оказалась настолько большой, что ее будет несложно зарегистрировать в эксперименте.

Импульс модифицированного солитона определяется формулой

$$P_c = (\pi^2 / 4) d^3 \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$$

и не зависит от амплитуды волны, то есть для данной пружины его величина является квантованной. В этом примере она равняется 1,66 кг · м/с. Квантованным является и момент количества движения J_c этой волны.

Принципы генерирования солитонов в пружине. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для появления солитона в стальной пружине необходимо обеспечить высокую интенсивность ее деформирования. Анализируя динамику работы пружин в механизмах различного назначения (смотри, например, [15]), следует признать, что она далека от тех уровней, при которых будет возможно наблюдать возникновение солитона, и для генерирования этих волн понадобится специальная экспериментальная установка. Так, в рассмотренных примерах максимальные скорости V_{x1} перемещения витков достигали 10...12 м/с, что в 2...3 раза превышает уровень, при-

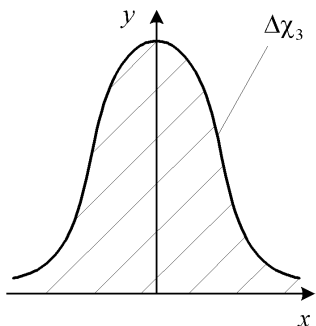


Рисунок 5 – Изменение кручения стержня внутри модифицированного солитона

нятый для пружин циклического действия исходя из предела их выносливости. Эти скорости можно уменьшить за счет снижения амплитуды волны, но при этом длина солитонов дополнительно возрастет и превысит 20 витков, что потребует соответствующего удлинения пружины.

Как это следует из теории, для генерирования солитона в предварительно растянутой пружине достаточно выполнить интенсивное перемещение одного из крайних витков (прицепа), увеличивая длину пружины со скоростью $V_{x_1}(t)$, близкой к зависимости

$$\Delta S'(t) = R \cdot \Psi(v_c t),$$

где $\Psi(x)$ – амплитудная функция солитона, определяемая формулами (2) или (2 а). При этом выполнение условия $V_{x_1}(t) \approx \Delta S'(t)$ важно обеспечить на участке, отвечающем эффективной длине солитона $2L$. Сформированная начальная волна деформации будет перемещаться по пружине со скоростью $v_c \approx a_0$, при этом форма волны будет корректироваться, асимптотически приближаясь к ее устойчивому состоянию $u = \Psi(x - v_c t)$.

Требования к интенсивности динамического возбуждения волны можно существенно снизить, если в экспериментальной установке для генерирования солитонов заменить стальную пружину пружинной из полимерного материала.

В заключение заметим, что уединенная волна переноса может использовать также и часть солитона (например, как указывалось в [9], его задний фронт), объединяя ее с гармоническими или экспоненциальными бегущими волнами в так называемый **волновой пакет**. Принципы формирования в пружине волновых пакетов и вопросы их устойчивости изучаются и будут рассмотрены в дальнейших публикациях этого цикла.

Выводы. Показано, что низкочастотные связанные нелинейные колебания длинной пружины растяжения описываются уравнениями автоколебаний Кортевега – де Фриза.

Получены формулы, связывающие скорость, энергию и другие характеристики уединенной нелинейной волны переноса (классического или модифицированного солитона Рассела) с ее амплитудой.

Характерной особенностью изучаемых солитонов является узкий (для данной пружины) диапазон их скоростей, которые во всех случаях отличаются от скорости распространения соответствующей линейной волны деформации на доли процента.

Список литературы: 1. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2008. – № 47. – С. 92-104. 2. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. 3. Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование, т. 2. – 1990. – № 8. – С. 21-30. 4. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования

уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Л.: ЛГУ, 1962. – Вып. 27. – С. 119-134. **5. Григорьев А.Л., Дериенко А.И.** Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХП», 2004. – Вип. 2 (9). – С. 257-264. **6. Лавинский В.И., Григорьев А.А.** Симметричная матричная линеаризованная модель колебаний винтового стержня. – II Університетська наук.-практ. конф. магістрантів. Тези доповідей. – Харків: НТУ «ХП», 2008. – Т. 1. – С. 64-66. **7. Захаров В.Е., Манаков С.В., и др.** Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. **8. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.** Гамильтонов поход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. **9. Филлипов А.Т.** Многоликий солитон. – М.: Наука, 1990. **10. Грунауэр А.А., Григорьев А.Л., Вештак И.А.** Определение функциональных зависимостей динамических характеристик пружины от закона ее ударного деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1987. – Вып. 42. – С. 40-49. **11. Дериенко А.И., Король С.А., Григорьев А.А.** Идентификация модели винтового бруса колебаний пружины для расчета спектра собственных частот // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2008. – Вип. № 1 (48). – С. 46-50. **12. Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л.** О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1985. – Вып. 39. – С. 7-22. **13.** Справочник машиностроителя. В трех томах / Под ред. Е.А. Чудакова. – М.: Гос. науч.- техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. – 1098 с. **14. Выхман Э.** Квантовая физика. – М.: Наука, 1983. – 415 с. **15. Хвингия М.В.** Вибрация пружин. – М.: Машиностроение, 1969.

Поступила в редколлегию 28.08.2009

УДК 519.7

В.М.ГРИЩЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХП»

УЗАГАЛЬНЕННЯ ФУНКЦІОНАЛУ ЛАГРАНЖА В ЗАДАЧАХ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розглядається модифікація функціоналу Лагранжа при рішенні задач умовного оптимального проектування конструкцій, яка систематизує існуючі підходи.

The modification of Lagrange functional in problem of optimum designing is consider.

1. Актуальність проблеми. В інженерній, організаторській діяльності, в економіці і багатьох інших сферах виникає безліч задач оптимізаційного характеру. Як правило, кожна з них має декілька можливих варіантів рішення. Зрозумілим є прагнення знайти «найкращий».

З точки зору математики ця проблема пов'язана з пошуком параметрів, які забезпечують досягнення системою екстремуму функціоналу цілі (extr). Широкий клас задач параметричної оптимізації зводиться до рішення задач нелінійного програмування (НП). Оптимізація (Opti) як один з нових напрям-

ків сучасної математики інтенсивно розвивається. Незважаючи на значні ресурси затрачені багатьма науковцями не створено усталеного алгоритму чисельної оптимізації для достатньо широкого класу практичних задач, особливо з обмеженнями-нерівностями.

2. Постановка оптимізаційної задачі. В роботі розглядається задача параметричної оптимізації з обмеженнями типу рівності-нерівності, відомої як задача нелінійного програмування (НП). В загальному вигляді вона формулюється так:

$$f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x); \quad (1)$$

$$\Omega = \{x \in R_n \mid \omega_j(x) = 0 \ (j=1,2,\dots,m; \ m < n); \ \Omega_j(x) \leq 0 \ (j=1,2,\dots,k); \}, \quad (2)$$

де $x^T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – вектор параметрів проектування; Ω – область допустимих значень; $\omega_j(x) = 0$, $\Omega_j(x) \leq 0$ – обмеження рівності – нерівності; $f(x)$, $\omega_j(x)$, $\Omega_j(x)$ – неперервні функції.

Найбільш вагомим теоретичним результатом в задачах умовної оптимізації з обмеженнями-нерівностями є умови Куна-Такера, згідно з якими питання визначення точок-«кандидатів» на extr пов'язане з аналізом сформульованої системи нелінійних співвідношень. В даній роботі розглядається узагальнення форми функціоналу Лагранжа та змісту невизначених множників, яке в певній мірі систематизує підходи рішення цих задач.

3. Основні положення алгоритму. Задача НП добре відома, теоретичні та обчислювальні аспекти пошуку оптимального рішення викладені в багаточисленній учбовій та науковій літературі [1]. Коротко сформулюємо її суттєві моменти. Потрібно знайти точку x^* , яка задовольняє умовам (2) та такої, що для всякої іншої в невеликій околиці виконується умова

$$f(x^*) \leq f(x).$$

Точка x^* може знаходитись як всередині області Ω , так і на границі.

Є один частинний випадок загальної задачі НП (1,2), коли система містить лише обмеження-рівності. Ця класична задача на умовний extr має класичне рішення з використанням невизначених множників Лагранжа і зводиться до еквівалентної на безумовний extr для функції Лагранжа виду

$$L(x, u) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x). \quad (3)$$

В ній з'являються додаткові параметри u_j . Знак їх довільний. За допомогою методу множників по суті встановлюються необхідні умови, що дозволяють ідентифікувати точки extr . Необхідні умови приводять до системи $(n + m)$ рівнянь (умови Опти):

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = 0; \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial L}{\partial u_j} &= \omega_j(x) = 0. \quad (j = 1, 2, \dots, m)\end{aligned}\quad (4)$$

Кожне рішення системи (4) з $(n + m)$ невідомими $(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)$ розглядається як стаціонарна «підозріла» на $\text{extr } f(x)$ точка, якість якої визначається подальшими дослідженнями. В прикладних задачах проектування надзвичайно важливу роль відіграють обмеження-нерівності, а з ними і рішення задачі (1, 2). Було б логічно побудувати рішення загальної задачі НП так, щоб і формально і по суті, воно відповідало схемі класичного варіанту Лагранжа. Кун і Такер запропонували підхід з множниками аналогічними лагранжевим для побудови критеріїв оптимальності на випадок загальної задачі НП як з обмеженнями типу рівності так і нерівності.

Для цього введено функціонал Лагранжа у вигляді

$$L(x, u, c) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x) + \sum_{j=1}^k c_j \Omega_j(x). \quad (5)$$

Умови Опті (Куна-Такера) такі:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k c_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \\ \frac{\partial L}{\partial u_j} &= \omega_j(x) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m); \\ \Omega_j(x) &\leq 0; \quad (j = 1, 2, \dots, k); \\ c_j \Omega_j(x) &= 0; \\ c_j &\geq 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Звернемо увагу на те, що якщо в класичній задачі множники Лагранжа u_j виступають як неперервні функції (з довільним знаком), то c_j – це розривні функції:

$$\begin{aligned}c_j &= 0, \quad \text{якщо} \quad \Omega_j(x) < 0 \quad (\text{неактивне обмеження}); \\ c_j &> 0, \quad \text{якщо} \quad \Omega_j(x) = 0 \quad (\text{активне обмеження}).\end{aligned}$$

Таким чином, підозрілі на min точки в загальній задачі НП з обмеженнями-нерівностями повинні задовольняти дещо відмінним від класичних умовам (нерівностям Куна-Такера (6)).

Розглянемо деякі модифікації функціоналу $L(x, u, c)$, які вирівнюють статус множників і приводять алгоритм рішення задачі НП з обмеженнями-нерівностями до звичної схеми, яка притаманна класичній задачі. З цією метою перерозподілимо функціональне навантаження співмножників c_j і Ω_j в $L(x, u, c)$, представивши у вигляді, що відповідає характеру їх поведінки:

$$c_j = v_j (\text{sign } \Omega_j + 1). \quad (7)$$

Тобто виділимо неперервний множник v_j та розривну частину. При цьому вважатимемо, що $\text{sign } 0 = 1$. Тоді матимемо:

$$c_j \Omega_j(x) = v_j (\text{sign } \Omega_j + 1) \Omega_j(x) = v_j (|\Omega_j(x)| + \Omega_j(x)).$$

У функціоналі відбулась суттєва зміна, а саме: всі обмеження, що визначають область Ω тепер задаються однотипово у вигляді рівності:

$$\omega_j(x) = 0; \quad \theta_j(x) = (|\Omega_j(x)| + \Omega_j(x)) = 0.$$

Останній запис еквівалентний умові-нерівності $\Omega_j(x) \leq 0$. Характер поведінки функцій-обмежень $\Omega_j(x)$ та $\theta_j(x)$ для одновимірного випадку показаний на рис. 1.

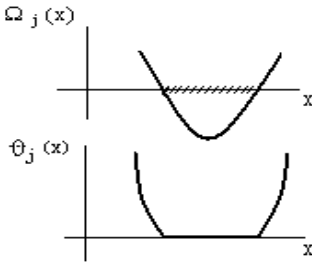


Рисунок 1 – Графіки функцій $\Omega_j(x)$ та $\theta_j(x)$

Зміни, що відбулись у функціоналі уніфікують форму запису обмежень як рівності так і нерівності, але вносять в аналіз проблему розривності функцій $\theta_j(x)$; зокрема, обчислення частинних похідних від $y = |\Omega_j(x)|$. Для залагодження цього питання перейдемо від класичного поняття похідної до її узагальненого значення. З цією метою розглянемо деяку обмежену область евклідового простору $D \subset \mathbb{R}_n$, яка включає границю області допустимих значень $\Omega_j(x) \leq 0$.

При цьому D^+ , D^- – ті підобласті D , в яких $\Omega_j(x) \geq 0$ та $\Omega_j(x) < 0$ відповідно. Тоді $\frac{\partial y}{\partial x_m}$ називається узагальненою частинною похідною від $y(x)$, якщо має місце тотожність [2]:

$$\int_D \frac{\partial y}{\partial x_m} \varphi dx = - \int_D y \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx, \quad (8)$$

де φ – фінітна (локально сумована) і $\varphi|_S = 0$; S – кусково-гладка поверхня, що обмежує D .

Обчислимо інтеграл, що стоїть у правій частині (8) для функції $y = |\Omega_j(x)|$:

$$\begin{aligned} - \int_D y \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx &= - \int_D |\Omega_j(x)| \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx = \int_{D^-} \Omega_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx - \int_{D^+} \Omega_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx = \\ &= - \int_{D^-} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} \varphi(x) dx + \int_{D^+} \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} \varphi(x) dx = \int_{D^-} \text{sign} \Omega_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} \varphi(x) dx + \int_{D^+} \text{sign} \Omega_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} \varphi(x) dx = \\ &= \int_D \text{sign} \Omega_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

В перетвореннях використана формула про дивергенцію (Остроградського):

$$\int_D \frac{\partial f(x)}{\partial x_m} dx = \int_S f(x) \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_m) dS.$$

Приймаючи до уваги (8) узагальнене значення похідної від розривної функції $y = |\Omega_j(x)|$ буде таким

$$\frac{\partial}{\partial x_m} |\Omega_j(x)| = \text{sign} \Omega_j \frac{\partial \Omega_j(x)}{\partial x_m}. \quad (9)$$

Таким чином, основні теоретичні результати загальної задачі НП (умови Куна-Такера) після введених змін будуть такими, коли обмеження-нерівності ($\Omega_j(x) \leq 0$) узагальнюються шляхом заміни їх на еквівалентні обмеження-рівності $\theta(x) = (|\Omega(x)| + \Omega(x)) = 0$, коли мають однаковий статус множники Лагранжа, і схема рішення задачі з обмеженнями-нерівностями буде відповідати класичній. Приведемо її.

Функціонал Лагранжа

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x) + \sum_{j=1}^k v_j (|\Omega_j(x)| + \Omega_j(x)). \quad (10)$$

Необхідні умови Opti :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^k v_j \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i} (\text{sign} \Omega_j(x) + 1) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = \omega_j(x) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m);$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_j} = |\Omega_j(x)| + \Omega_j(x) = 0, \rightarrow \text{або } \Omega_j(x) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

u_j, v_j – множники Лагранжа з однаковим статусом. Якщо стаціонарна точка відповідає умові $f(x) \rightarrow \min$, то $v_j > 0$, а обмеження грають таку ж роль як і штрафні функції. Якщо точка $x \in \Omega$ (тобто виконуються всі обмеження: $\omega_j = 0; \Omega_j(x) \leq 0$), то наслідком буде рівність $L(x, u, v) = f(x)$. Розглянемо особливості поведінки $L(x, v)$ на прикладах.

4. Модельні приклади та їх аналіз. В першій задачі розглядається однопараметрична задача НП з обмеженнями-нерівностями (рис. 2).

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 1 \rightarrow \min; \\ \Omega(x) &= 2 - x \leq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$L(x, v) = x^2 - 1 + v(|\Omega| + \Omega).$$

$$L^+(x, v) = x^2 - 1 + 2v(2 - x), \text{ якщо } 2 - x > 0.$$

Умови Opti :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - v(\text{sign}(2-x) + 1) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial v} &= |2-x| + 2-x = 0, \quad \text{або} \quad 2-x \leq 0.\end{aligned}\tag{12}$$

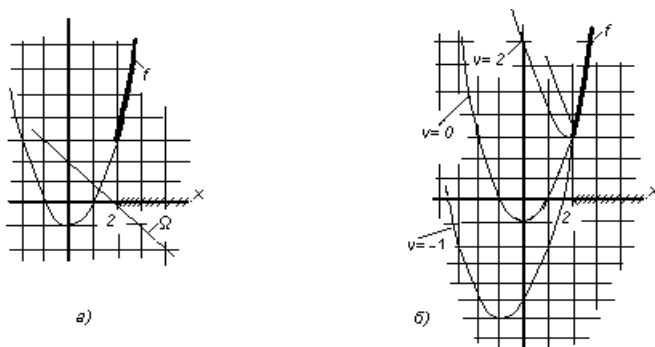


Рисунок 2 – Однопараметрична задача Opti.

Перевірці підлягають два рішення:

- 1) $2-x < 0 \quad x = 0$ (відкидаємо, так як $x \notin \Omega$).
- 2) $2-x = 0 \quad x^* = 2$.

$\text{sign}(2-x^*) = \text{sign} 0 = +1, \quad v^* = +2 > 0. \quad (x^*, v^*) = (2, 2)$ – стаціонарна точка, яка задовольняє умовам (12). Подальший аналіз показує, що це точка min. На рис. 2, б показані зовнішні штрафні функції $L^+(x, v)$ при різних v , а також оптимальна крива $L^+(x, v^*)$. Вона відрізняється від інших тим, що на зовнішній границі області Ω виконується умова $\frac{\partial L^+(x, v^*)}{\partial x} \Big|_{x=x^*} = 0$, в той час як

для інших функцій штрафу $x_{\min}$ може знаходитись поза областю обмежень. При чисельному рішенні в таких випадках частіше за все будується ітеропроцес «підтягування» точки $x_{\min}$ до області Ω шляхом варіювання величини v .

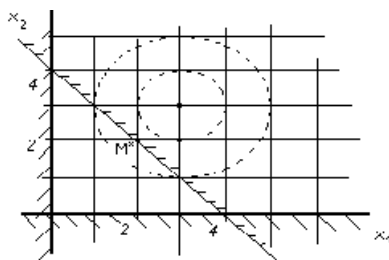
В якості другого модельного прикладу розглянуто 2-х параметричну задачу, постановка якої виглядає так:

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min;$$

$$\Omega_1(x) = -x_1 \leq 0,$$

$$\Omega_2(x) = -x_2 \leq 0,$$

$$\Omega_3(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0.$$



Модифікована задача буде мати наступне розв'язання.

$$L(x, v) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + v_1 (|-x_1| - x_1) + v_2 (|-x_2| - x_2) + v_3 (|x_1 + x_2 - 4| + x_1 + x_2 - 4),$$

Умови Opti :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 3) - v_1(\text{sign}(-x_1) + 1) + v_3(\text{sign}(x_1 + x_2 - 4) + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - v_2(\text{sign}(-x_2) + 1) + v_3(\text{sign}(x_1 + x_2 - 4) + 1) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_j} = 0 \rightarrow -x_1 \leq 0; -x_2 \leq 0; x_1 + x_2 - 4 \leq 0.$$

Техніка аналітичного пошуку оптимального рішення аналогічна класичному підходу. Потрібно перевіряти варіанти:

- 1) $-x_1 < 0; -x_2 < 0; x_1 + x_2 - 4 < 0; \rightarrow$ (відкидаємо, так як $x \notin \Omega$).
- 2) $-x_1 = 0; -x_2 < 0; x_1 + x_2 - 4 < 0;$
- 3) $-x_1 < 0; -x_2 < 0; x_1 + x_2 - 4 = 0; \rightarrow$ та інші.

Зупинимось на варіанті 3. З умов Opti витікає :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 6 + 2v_3 = 0 \\ 2x_2 - 6 + 2v_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array} \right\} \rightarrow (x_1^*, x_2^*, v_3^*) = (2, 2, 1), v_3^* > 0.$$

Рішення існує. Це «підозріла» на міні точка, що і підтверджує подальший аналіз. На завершення звернемо увагу на наступний аспект рішення задач НП [3]. Обмежень як типу рівності так і нерівності може бути багато. Відповідно до цього значною буде також кількість множників Лагранжа. Цю кількість можна скоротити до 1, якщо використати можливості R – функцій, які дозволяють ефективно обробляти складну геометричну інформацію. Так, область допустимих значень Ω , яка задається, наприклад, тільки обмеженнями-нерівностями може бути представлена однією R – функцією виду:

$$\Omega(x) = \Omega_1 V_0 \Omega_2 V_0 \dots V_0 \Omega_k \leq 0.$$

Але цей аспект алгоритму задачі НП інша тема.

5. Висновки. В роботі розглянуто узагальнення форми запису функціоналу Лагранжа на обмеження типу нерівності. Використовуючи розривні функції, обмеження задаються лише у формі рівності. Умови Куна-Такера формально переходять в умови Лагранжа. При цьому вирівнюється статус всіх множників Лагранжа, а для рішення загальної задачі НП використовується класична схема. Зміни у формулювання задачі нелінійного програмування внесені, зокрема, з метою використання в алгоритмі чисельного пошуку *extr* функціоналу загального виду.

Список літератури: 1. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. Т. 1. – М.: Мир, 1986. 2. Михлик С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. 3. Грищенко В. М., Галаган Ю.М. Алгоритм чисельної оптимізації конструкцій з урахуванням обмежень за допомогою R-функцій // Вісник НТУ «ХП». Тематичний випуск: Динаміка та міцність машин. – Харків: НТУ «ХП», 2006. – № 32. – С. 67-77.

Надійшла до редколегії 21.08.2009

УДК 539.3

S.GLADKOV, TU Dortmund;
M.STIEMER, Dr.rer.nat, TU Dortmund;
A.GROSSE-WOEHRMANN, TU Dortmund;
B.SVENDSEN, Dr.rer.nat., TU Dortmund

NUMERICAL MODELING OF PHASE-SEPARATION IN BINARY MEDIA BASED ON THE CAHN-HILLIARD EQUATION

У статті описано процедуру наближеного рішення рівняння Кана-Хіллєрда в частинних похідних 4го порядку котра базується на явному методі Ейлера в часі та змішаній постановці з білінійними скінченими елементами в просторі. Наведено чисельні рішення для ідеалізованої моделі з двумним потенціалом (в 2-х та 3-х просторових вимірах) та більш фізично релевантної моделі з логарифмічним потенціалом (тільки в 2-х просторових вимірах).

In the article numerical procedure for solution of the Cahn-Hilliard equation which is based on the forward Euler method in time and mixed (due to 4th order nature of differential operator) linear finite element formulation in space is described. Numerical examples consist of idealized model with double well potential (in 2 and 3 spatial dimensions) and more physically relevant model with logarithmic potential (in 2D only).

1. Introduction and motivation. During industrial hot forming processes such as extrusion, hot rolling or hot forging materials undergo mechanical deformation and recrystallization. For particular case of extrusion (Fig. 1) one can observe precipitate formation during the last, cooling stage of the extrusion process. Usually above mentioned phenomena influence each other in a complicated way, and it is exactly this influence of recrystallization/precipitate formation on a material's ductility and strength that effects the appeal of a hot forming method.

Precipitates form a separate phase in the alloy. A reliable simulation based prediction of forming results hence requires a coupled model for the evolution of both the mechanical fields and the evolution of areas covered by different phases.

While first attempts on the finite element simulation of phase-field models have recently been presented in [1, 2, 3, 4], their consideration in the context of a structural mechanical finite element simulation is a new issue [5, 6, 7, 8, 9, 10].

The purpose of this work is the formulation and application of a continuum field approach to the phenomenological modeling of the behavior of technological alloys undergoing phase transitions and attendant inelastic deformation. In the current paper only first results on the numerical modeling of the phase separation in the idealized binary media solely are presented. This is the continuation of the work started in [11].

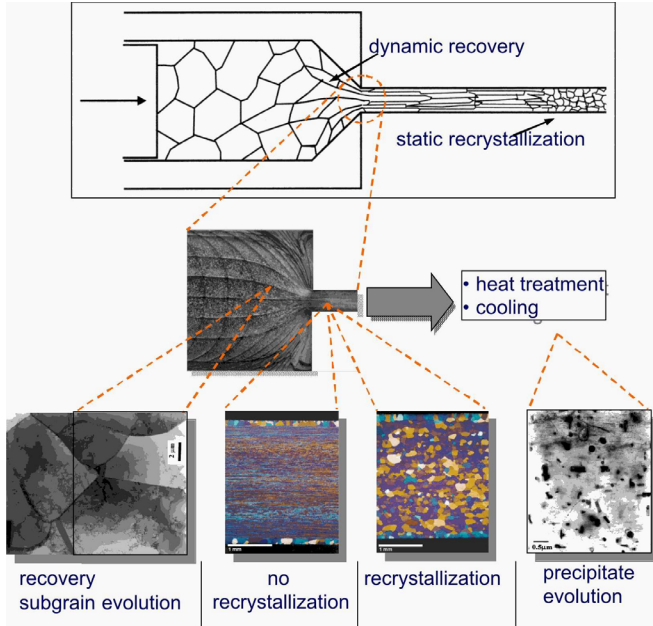


Figure 1 – Schematic extrusion process

2. Model formulation. To describe the phase transition, so called phase-field approach is utilized [12, 13, 14]. It can be motivated as follows. The interface between two phases on the atomic scale is a «mushy» one (Fig. 2). The classical approach to model this interface on the meso scale is to use a sharp interface model although this kind of the problem statement might be numerically quite complicated because one must impose boundary conditions on the moving interface (so-called Stefan conditions). Contrary to this approach, we will use a relaxed (or diffused) interface model proposed in [15] where different phases are distinguished using a phase-field – a field defined on the whole domain of the simulation and serving as a relaxed characteristic function for each phase. In this particular case of Cahn-Hilliard model the same quantity – concentration – serves both as a physical concentration and as phase indicator.

In this paper Cahn-Hilliard equation with two types of free energies is consid-

ered: with idealized double-well potential and with more physically relevant logarithmic potential. Because this equation is 4th order partial differential equation, but we want to stay with numerically efficient linear finite elements, mixed formulation is employed.

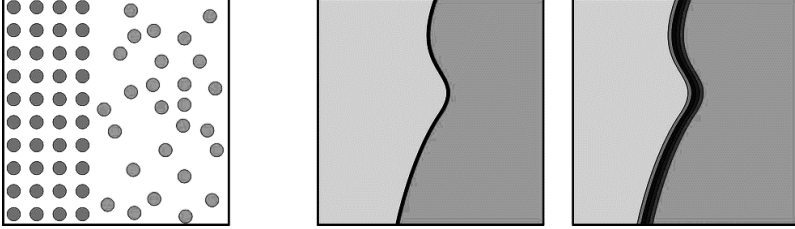


Figure 2 – «Mushy» interface on the atomic scale (*left*) and sharp and relaxed interfaces on the meso scale (*right*)

2.1 Cahn-Hilliard equation polynomial free energy (double well potential). This simplified nondimensionalized Cahn-Hilliard equation is taken from [16]:

$$\dot{c} = D\Delta (c^3 - c - \gamma\Delta c), \quad (1)$$

where $-1 \leq c \leq 1$ is concentration, D is a diffusion coefficient and γ is square of length of the transition region between the phases. Here $F_c = \frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{2}c^2 + a$ can be identified as chemical free energy (Fig. 3), $F_\gamma = \frac{\gamma}{2}\nabla c \cdot \nabla c$ as surface free energy, $\mu = D_c(F_c + F_\gamma) = c^3 - c - \gamma\Delta c$ as a chemical potential and $\mathbf{j} = D\nabla\mu$ as mass diffusion flux. Here the notation $D_x(\cdot)$ for derivative of function $(\cdot)$ with respect to its argument x is used. Problem statement should be closed with the homogeneous Neumann boundary conditions:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla c &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

and random initial conditions for concentration in the range $[-1, 1]$.

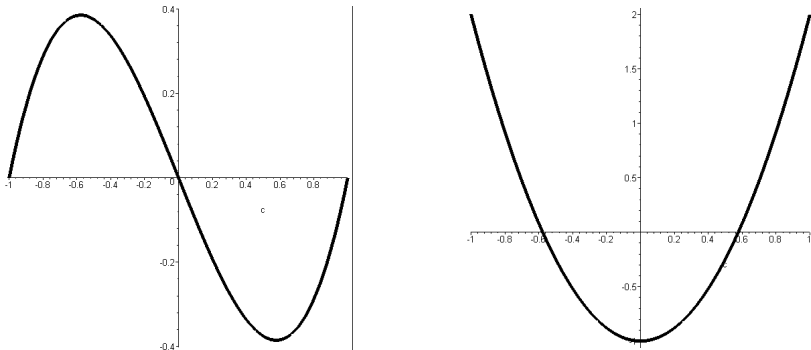


Figure 3 – 1st (*left*) and 2nd (*right*) derivatives of the chemical free energy F_c

Mixed formulation of problem (1) is

$$\begin{aligned}\dot{c} &= D [\Delta c^3 - \Delta \psi], \\ \psi &= c + \gamma \Delta c,\end{aligned}\tag{3}$$

where now there are 2 unknowns – c and ψ .

For time discretization backward Euler method is used. Time derivative is approximated as $\dot{c} = (c(t) - c(t - \Delta t))/\Delta t$ and new system (not containing time) is:

$$\begin{aligned}c &= c^t + \Delta t D [\Delta c^3 - \Delta \psi], \\ \psi &= c + \gamma \Delta c,\end{aligned}\tag{4}$$

where c^t is successful solution from the previous time step.

Spatial discretization of equations (4) is performed using Bubnov-Galerkin method. Multiplying equations (4) with test functions $\{c^*, \psi^*\}$, integrating over domain Ω and accounting for boundary conditions (2) we end up with the following weak form in terms of residual:

$$\begin{aligned}r(c, \psi) &= \int_{\Omega} (c^* c - \Delta t D c^* \Delta c^3 + \Delta t D c^* \Delta \psi - \\ &\quad c^* c^t + \psi^* \psi - \psi^* c - \gamma \psi^* \Delta c) d\Omega.\end{aligned}\tag{5}$$

Or using the chain rule $\Delta c^3 = 3c^2 \Delta c + 6c \nabla c \cdot \nabla c$ and integration-by-parts:

$$\begin{aligned}r(c, \psi) &= \int_{\Omega} (c^* c + 3\Delta t D c^2 \nabla c^* \cdot \nabla c - \Delta t D \nabla c^* \cdot \nabla \psi - \\ &\quad c^* c^t + \psi^* \psi - \psi^* c + \gamma \nabla \psi^* \cdot \nabla c) d\Omega.\end{aligned}\tag{6}$$

To solve this nonlinear system of equations Newton method is used. Newton updates are calculated as $c_{new} = c + \delta c$, $\psi_{new} = \psi + \delta \psi$.

Final linearized system of equations is

$$D_c r(c, \psi)[\delta c] + D_{\psi} r(c, \psi)[\delta \psi] = -r(c, \psi),\tag{7}$$

where

$$\begin{aligned}D_c r(c, \psi)[\delta c] &= \int_{\Omega} (c^* \delta c + 6\Delta t D c \nabla c^* \cdot \nabla c \delta c + 3\Delta t D c^2 \nabla c^* \cdot \nabla \delta c - \\ &\quad \psi^* \delta c + \gamma \nabla \psi^* \cdot \nabla \delta c) d\Omega,\end{aligned}\tag{8}$$

$$D_{\psi} r(c, \psi)[\delta \psi] = \int_{\Omega} (\psi^* \delta \psi - \Delta t D \nabla c^* \cdot \nabla \delta \psi) d\Omega.$$

It should be mentioned that the notation used here for linear system (7) can in fact be almost *directly* implemented into the open-source finite element library deal.II [17] which is used in this work for all numerical computations.

2.2 Cahn-Hilliard equation with logarithmic free energy. This equation is almost the same as one described in the previous section, but bulk chemical free energy F_c now contain logarithms and taken according to [7] in the form:

$$F_c = g_1 c + g_2 (1 - c) + g_3 c \ln c + g_4 (1 - c) \ln(1 - c) + g_5 c(1 - c).\tag{9}$$

Then procedure is the same as in section 2.1 except that now c has range $[0, 1]$

and second derivative of the chemical free energy is singular for $c = 0$ and $c = 1$ (1st and 2nd derivatives of (9) are plotted on Fig. 4). Mixed formulation of this problem (after time discretization via backward Euler method) is

$$\begin{aligned} c &= c^t + \Delta t D \Delta \mu, \\ \mu &= D_c F_c - \gamma \Delta c, \end{aligned} \quad (10)$$

where as auxiliary variable value of the chemical potential μ is taken. Multiplying equations (10) with test functions $\{c^*, \psi^*\}$, integrating over domain Ω and accounting for boundary conditions (2) following expression is achieved for residual:

$$\begin{aligned} r(c, \psi) &= \int_{\Omega} (c^* c - c^* c^t + \Delta t D \nabla c^* \cdot \nabla \mu + \\ &\quad \mu^* \mu - \mu^* F_c c - \gamma \nabla \mu^* \cdot \nabla c) d\Omega, \end{aligned} \quad (11)$$

where

$$D_c F_c = g_1 - g_2 + g_3(1 + \ln c) - g_4(1 - \ln(1 - c)) + g_5(1 - 2c). \quad (12)$$

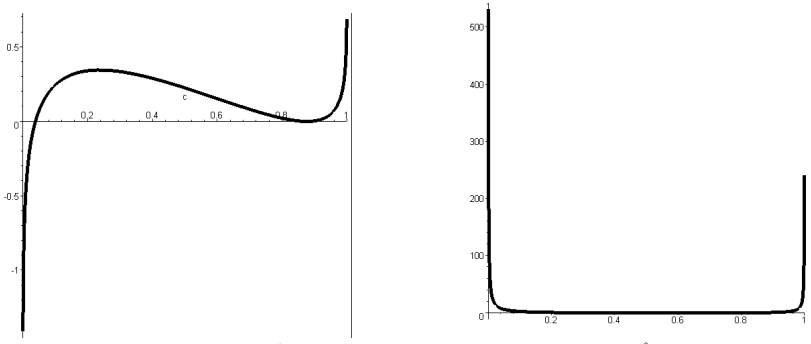


Figure 4 – 1st (left) and 2nd (right) derivatives of the chemical free energy F_c (9)

To solve nonlinear equation (11) as before Newton method would be used in the form of equation (7) where

$$\begin{aligned} D_c r(c, \mu)[\delta c] &= \int_{\Omega} (c^* \delta c - \mu^* D_c^2 F_c \delta c - \gamma \nabla \mu^* \cdot \nabla \delta c) d\Omega, \\ D_{\mu} r(c, \mu)[\delta \mu] &= \int_{\Omega} (\Delta t D \nabla c^* \cdot \nabla \delta \mu + \mu^* \delta \mu) d\Omega, \end{aligned} \quad (13)$$

and

$$D_c^2 F_c = \frac{g_3}{c} + \frac{g_4}{1 - c} - 2g_5. \quad (14)$$

3. Numerical results. In this section numerical results are presented for the given in section 2 model.

3.1 Cahn-Hilliard equation polynomial free energy. To perform numerical simulations $D = 1$; $\gamma = 0,5$ and $\Omega = [-100; 100]^2$ where chosen. Time step $\Delta t = 0,5$, simulation time $t_{final} = 300$ and tolerance for Newton method is set to 10^{-10} . Firstly

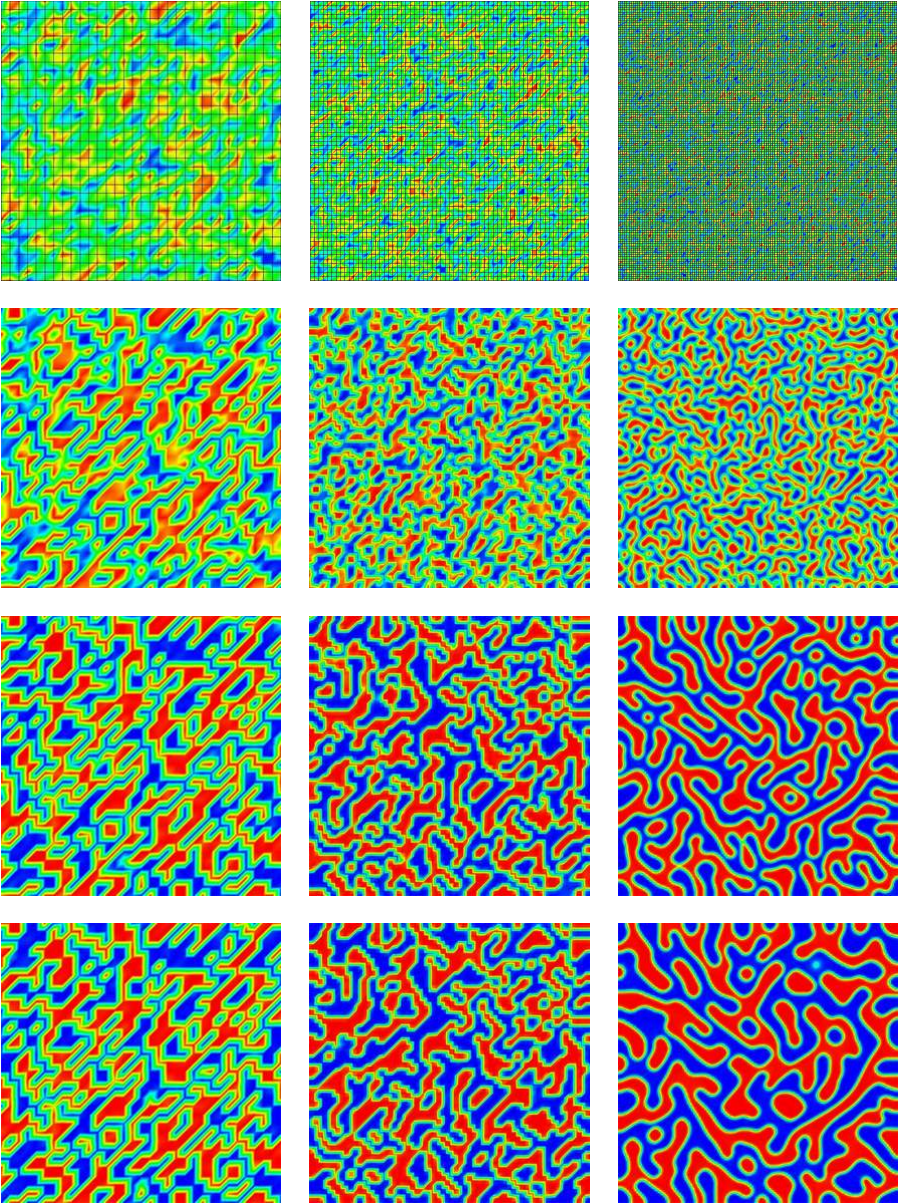


Figure 5 – Solution of the Cahn-Hilliard equation (1,2) using 32^2 (left), 64^2 (middle) and 128^2 (right) elements for time steps (from top to bottom) $t = 50; 150; 300$. Legend: blue $c = -1$, red $c = 1$

solution was tried on various meshes with 32^2 , 64^2 and 128^2 finite elements and it is plotted on the Fig. 5. One can see that 32^2 and 64^2 elements is definitely not enough to resolve the problem with the given value of γ correctly.

On Fig. 6 results for different values of parameter $\gamma = 0,5;4;16$ are shown on the mesh of 64^2 finite elements. Qualitatively it is observed that the interface becomes thicker and for the value $\gamma = 4$ problem can be resolved with only 64^2 elements.

First attempts to perform simulation in 3D are shown on the Fig. 7 for mesh consisting of 64^3 finite elements where $\Delta t = 0,2$; $t_{final} = 200$; $D = 1$ and $\gamma = 1$.

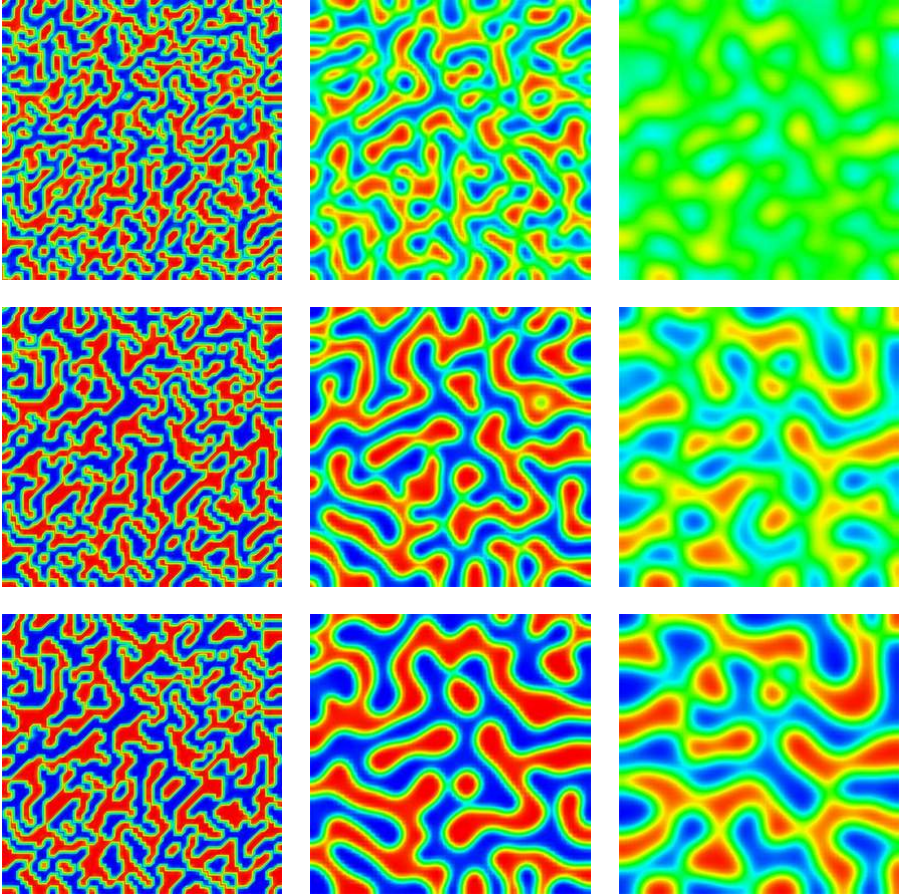


Figure 6 – Solution of the Cahn-Hilliard equation (1,2) using 64^2 finite elements for $\gamma = 0,5$ (left), $\gamma = 4$ (middle) and $\gamma = 16$ (right) for time steps (from top to bottom) $t = 50;150;300$. Legend: blue $c = -1$, red $c = 1$

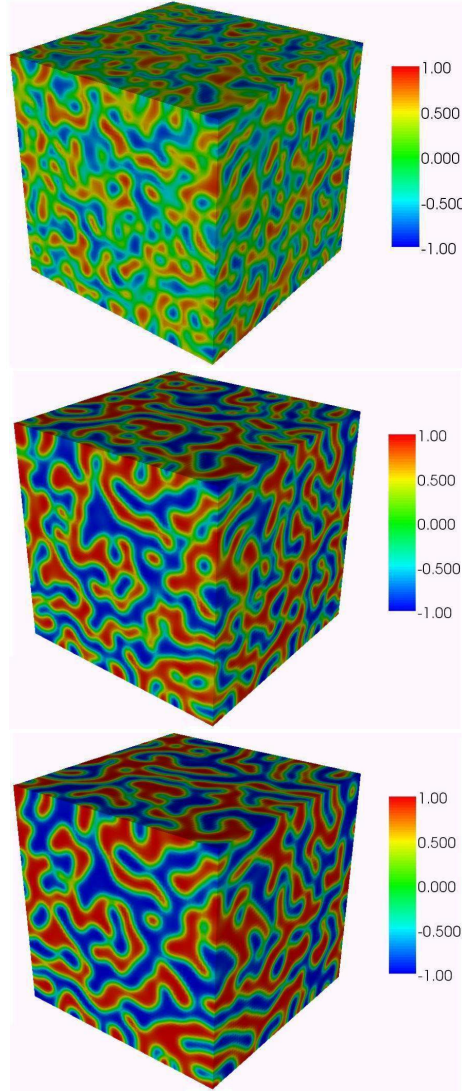


Figure 7 – Solution of the Cahn-Hilliard equation (1,2) in 3D for time steps $t = 40; 100; 170$

3.2 Cahn-Hilliard equation with logarithmic free energy. For numerical solution $\Omega = [-0,5; 0,5]^2$; $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$; $t_{final} = 10^{-2}$; $g_1 = -1,3634$; $g_2 = -1,5263$; $g_3 = 0,3630$; $g_4 = 0,1643$; $g_5 = 0,8750$; $\gamma = 10^{-4}$ and $D = 1$. Mesh consists of 64^2 finite elements and initial distribution is random in the interval $[0,1; 0,9]$. Solution is presented on Fig. 8.

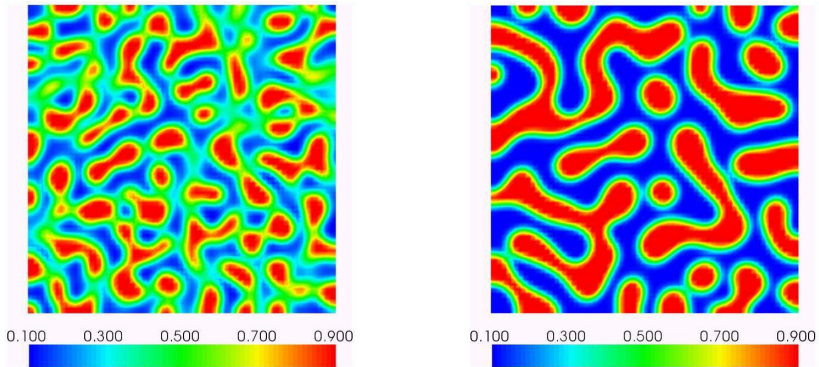


Figure 8 – Solution of Cahn-Hilliard equation with logarithmic free energy (9) for time steps $t = 0.002, 0.01$

4. Outlook. On the numerical side, the primary issue is to account for the strong localization of the phase and concentration boundaries. To assure an efficient discretization of the biharmonic operator, application of Discontinuous Galerkin methods [18, 19, 20] on unstructured meshes is aimed at. Beyond this, it seems that a meshless methods [21, 22, 23] for the spatial discretization of the Cahn-Hilliard equation are perfectly suited for an accurate and highly efficient simulation of these spatially quite heterogeneous problems.

References: **1.** Danilov D., Nestler B. Phase-field simulations of solidification in binary and ternary systems using a finite element method // *Journal of Crystal Growth*. – 2005. – Vol. 275. **2.** Barrett J. W., Blowey J. F. Finite element approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility // *Math. Comput.* – 1999. – Vol. 68. **3.** Barrett J. W., Blowey J. F. Finite element approximation of an Allen-Cahn/Cahn-Hilliard system // *IMA J. Numer. Anal.* – 2002. – Vol. 22. **4.** French D. A. Computations on the Cahn-Hilliard model of solidification // *Applied Mathematics and Computation*. – 1990. – Vol. 40. **5.** Yeon D.-H., Cha P.-R. et al. A phase field model for phase transformation in an elastically stressed binary alloy // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. – 2005. – Vol. 13. **6.** Uehara T., Fukui M., Ohno N. Phase field simulations of stress distributions in solidification structures // *Journal of Crystal Growth*. – 2008. – Vol. 310. **7.** Ubachs R. L. J. M., Schreurs P. J. G., Geers, M. G. D. A nonlocal diffuse interface model for microstructure evolution of tin-lead solder // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2004. – Vol. 52. **8.** Ubachs R. L. J. M., Schreurs P. J. G., Geers, M. G. D. Phase field dependent viscoplastic behaviour of solder alloys // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – Vol. 42. **9.** Ubachs R. L. J. M., Schreurs P. J. G., Geers, M. G. D. Microstructure dependent viscoplastic damage modelling of tin-lead solder // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2006. – Vol. 54. **10.** Ubachs R. L. J. M., Schreurs P. J. G., Geers, M. G. D. Elasto-viscoplastic nonlocal damage modelling of thermal fatigue in anisotropic lead-free solder // *Mechanics of Materials*. – 2007. – Vol. 39. **11.** Gladkov S., Stiemer M., Svendsen B. Phase-field-based modeling and simulation of solidification behavior of technological alloys // *PAMM*. – 2008. – Vol. 8. **12.** Boettinger W. J., Warren J. A. et al. Phase-field simulation of solidification // *Annual Review of Materials Research*. – 2002. – Vol. 32. **13.** Chen L.-Q. Phase-field models for microstructure evolution // *Annual Review of Materials Research*. – 2002. – Vol. 32. **14.** Granasy L., Pusztai T., Warren J. A. Modelling polycrystalline solidification using phase field theory // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2004. – Vol. 16. **15.** Cahn J. W., Hilliard J. E. Free Energy of

a Nonuniform System. I. Interfacial Free Energy // The Journal of Chemical Physics. – 1958. – Vol. 28. **16.** *Elliott C. M., Songmu Z.* On the Cahn-Hilliard equation // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1986. – Vol. 96. **17.** *Bangerth W., Hartmann R., Kanschat G.* deal.II - A general-purpose object-oriented finite element library // ACM Trans. Math. Softw. – 2007. – Vol. 33. **18.** *Wells G. N., Kuhl E., Garikipati K.* A discontinuous Galerkin method for the Cahn-Hilliard equation // Journal of Computational Physics. – 2006. – Vol. 218. **19.** *Xia Y., Xu Y., Shu C.-W.* Local discontinuous Galerkin methods for the Cahn-Hilliard type equations // Journal of Computational Physics. – 2007. – Vol. 227. **20.** *Stierner M.* Adaptive finite element simulation of relaxed models for liquid-solid phase transition // Proc. ENUMATH Conference (Graz 2007). **21.** *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. **22.** *Rvachev V. L., Sheiko T. I.* R-functions in boundary value problems in mechanics // Applied Mechanics Reviews. – 1995. – Vol. 48. **23.** *Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L.* Element-free Galerkin methods // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1994. – Vol. 37

Поступила в редколлегию 30.08.2009

УДК 621.6

А.Ю.ДЕНЬЩИКОВ, асс., ДГМА, Краматорск;

С.В.ПОДЛЕСНЫЙ, канд.техн.наук, доц., ДГМА, Краматорск

СНИЖЕНИЕ КОРОБЛЕНИЙ ПОСЛЕ СВАРКИ МЕТОДОМ ВИБРАЦИОННОГО СТАРЕНИЯ

У статті розглянуто зниження викривлень після зварювання методом вібраційного старіння. Проведені експериментальні дослідження зі зниження зварювальних деформацій для конструкцій що знаходяться у вільному стані та для випадку використання додаткових направляючих. Зроблені висновки про застосовність даного методу для вібраційної правки конструкцій та їх елементів.

In the article the declines of warping are considered after welding of method of vibratory stress relief. Experimental researches are conducted on the decline of welding deformations for the constructions of being in the free state and for the case of the use of the additional sending. Conclusions are done about applicability of this method for the vibratory correction of constructions and their elements.

В последние десятилетия получил распространение способ стабилизации геометрических размеров металлоконструкций под названием «вибрационная обработка» («вибрационное старение»), имеющий ряд преимуществ перед традиционными методами снятия остаточных напряжений [1].

Сущность способа заключается в создании в металлоконструкции после окончательной сборки или в процессе изготовления переменных напряжений определенной величины с помощью специальных вибровозбудителей (вибраторов). Переменные напряжения суммируются с остаточными, и при этом происходит пластическая деформация, способствующая снижению и пере-

распределению остаточных напряжений.

Один из косвенных признаков снижения остаточных напряжений – снижения величины короблений после сварки, потому некоторые авторы[1-5] рекомендуют вибрационное старение как один из методов правки. В Донбасской государственной машиностроительной академии были проведены работы по изучению возможности устранения сварочных деформаций методом вибрационной обработки.

1. Виброобработка конструкции в свободном состоянии. На НПП «Энергия» была проведена виброобработка сварной конструкции крышки «Ящика батарейного взрывобезопасный типа ЭК-120-РР-440/640-9», вид сверху которого представлен на рис. 1, а.

В связи с тем, что крышка ящика за счет остаточных напряжений имеет коробление и неплотно прилегает к ящику (см. рис. 1, б), то при виброобработке производился контроль кривизны крышки.

Для этого измерялось отклонение от прямолинейного положения на краях крышки (рис. 2).



Рисунок 1 – Ящик батарейный взрывобезопасный

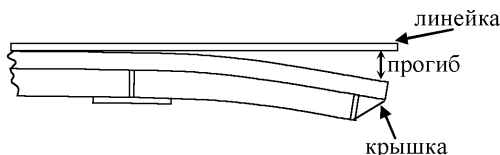


Рисунок 2 – Измерение величины прогиба

Для проведения виброобработки крышка была расположена на двух виброизолирующих опорах (автомобильных покрышках) размещенных по краям. Вибратор располагался максимально близко к геометрическому центру конструкции (рис. 3).



Рисунок 3 – Расположение конструкции с закрепленным вибратором на опорах

Перед обработкой и после нее был замерен ток потребляемый электродвигателем (дебаланс вибровозбудителя был установлен на 15 %). Результаты представлены в виде табл. 1 и графика на рис. 5.

Таблица 1 – Зависимость потребляемого двигателем тока от частоты вращения

Потребляемый ток	Частота, об/мин								
	3000	3500	4000	4500	5000	5500	5750	6000	6500
До виброобработки, А	7	8	7	7	7,5	10,5	25	18	33
После виброобработки, А	5,5	7,4	9	6,5	6,5	7	7,5	8	8,5

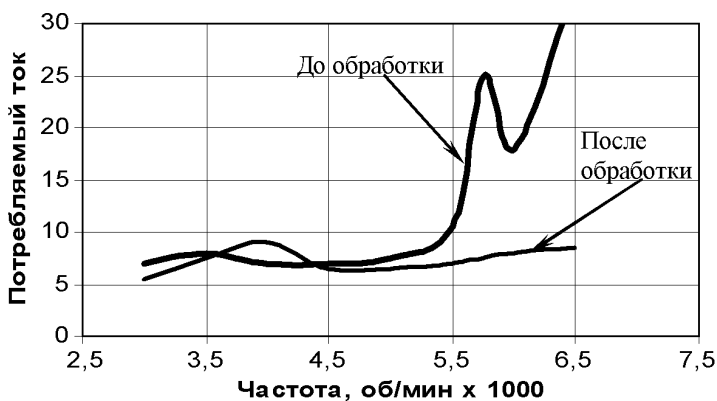


Рисунок 4 – График зависимости потребляемого двигателем тока от частоты вращения

Виброобработка производилась на первой резонансной частоте равной 6500 об/мин при величине дебаланса 40 % (~12 кН), затем повторно при дебалансе 60 % (~18 кН), при этом потребляемый ток снизился с 45 А до 33 А (при 40 %) и с 40 А до 33 А (при 60 %), что косвенно свидетельствует о снижении остаточных напряжений. При этом величину коробления удалось уменьшить с 17,2 мм до 11,2 мм на одном из концов крышки и с 13 мм до 8,2 мм на втором, что не отвечает техническим условиям к изготавливаемой конструкции.

2. Виброобработка конструкций с использованием дополнительных приспособлений. Исследования проводились на сварной колонне, которая представляет собой коробчатую конструкцию (толщина стенки 10 мм) с вваренными усиливающими элементами – мембранами толщиной 6 мм (рис. 5-6).



Рисунок 5 – Общий вид колоны без верхней полки

При варке мембран, во время изготовления конструкции, в стенках конструкции после сварки возникли коробления. Для обеспечения заданной формы конструкции, данные коробления необходимо было снизить до наварки верхней полки.

Для снижения короблений была выбрана следующая схема обработки: вдоль стенки через прокладку был проложен и прикреплен струбцинами швеллер № 14 (рис. 7) таким образом, чтобы стенка приняла прямолинейное положение (струбцины на рис 7. показаны в незатянутом положении). При деформировании стенки возникли внутренние напряжения, которые необходимо было снизить в процессе виброобработки.

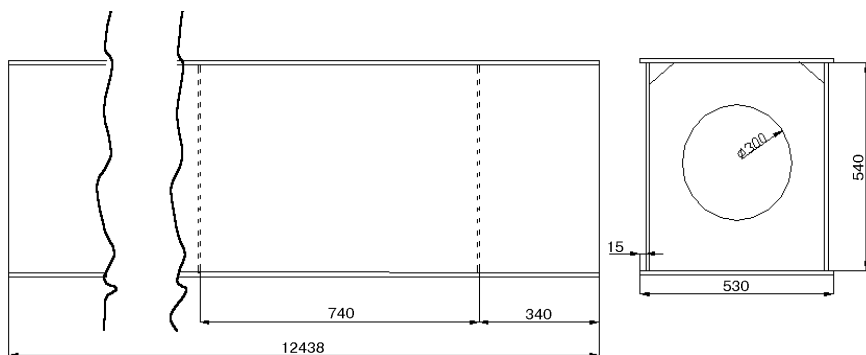


Рисунок 6 – Эскиз колоны

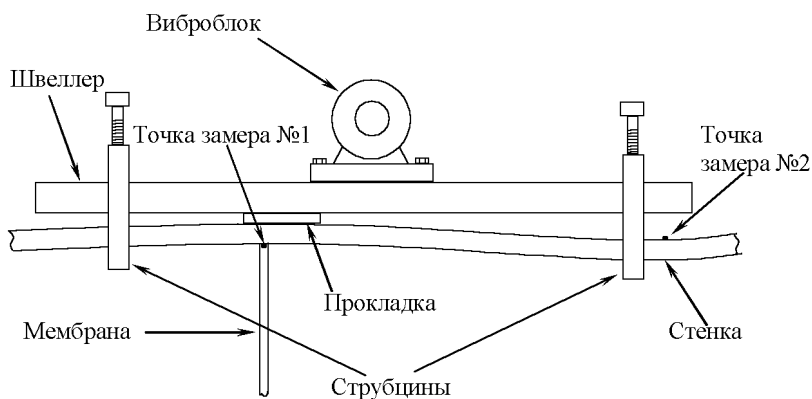


Рисунок 7 – Схема закрепления виброблока

Виброблок виброокомплекса Вк90 был прикреплен непосредственно к швеллеру болтами М20, пропущенными в предварительно просверленные отверстия. Значение дебаланса было установлено 10 %, что дало развиваемое виброусилие 3 000 Н.

Величина короблений замерялась как расстояние от линейки, длиной 1 м, проложенной вдоль стенки до самой стенки (рис 8).

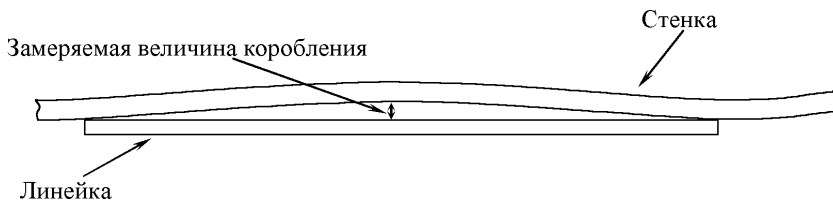


Рисунок 8 – Схема измерения коробления

Обработка производилась виброкомплексом на первой резонансной частоте в течении 25 мин. В процессе виброобработки ток, потребляемый двигателем виброблока, снизился с 50 до 35 ампер (напряжение питания двигателя 27В). Полученные значения короблений до обработки и после виброобработки представлены в виде таблицы 2.

Как показывают результаты, коробления удалось снизить примерно на 20 %. Для снижения на большую величину жесткость эталонной прямолинейной конструкции должна быть значительно выше жесткости элемента конструкции, подвергаемого правке, что не было обеспечено при использовании в качестве эталонной конструкции швеллера № 14.

Таблица 2 – Величины короблений стенки колоны, мм.

№ точки замера	После сварки	После виброобработки
1	4	3
2	3,5	2,8

Вывод. Как показали проведенные исследования, методом вибрационного старения возможно достигнуть снижения величины сварочных деформаций, но обеспечить полное восстановление заданных геометрических размеров при этом не удалось, для этого необходимо применение специализированных конструкций [1,6-8].

Список литературы: 1. Рагульский К.М. и др. Вибрационное старение. – Л.: Машиностроение. 1987. – 72 с. 2. Лащенко Г.И. Вибрационная обработка сварных конструкций. – К.: Экотехнология, 2001. – 56 с. 3. Коцюбинский О.Ю. Коробление чугуновых отливок от остаточных напряжений. – М.: Машиностроение, 1965. – 176 с. 4. Сагалевиц В.М. Устранение деформаций сварных балочных конструкций вибрацией / В.М.Сагалевиц, Н.Н.Завалишин, В.В.Нашивочников // Сварочное производство. – 1979. – № 9. – С. 9-12. 5. Бойченко О.В. Релаксация остаточных напряжений в упрочненных деталях под действием изгибных колебаний / Бойченко О.В., Мелешко И.В., Скиданенко В.И. // Сб.трудов Всероссийск. научной конференции «Современные тенденции развития автомобилестроения в России». – 2004. – Т. 4. – С. 91-97. 6. Дрыга А.И. Вибростабилизирующая обработка сварных и литых деталей в машиностроении. Теория, исследования, технология. – Краматорск: ДГМА, 2004. – 168 с. 7. Семенов В.М. Виброобработка крупных сварных конструкций тяжелого машиностроения / В.М.Семенов, В.Е.Соломатин, Т.М.Новоселова // Сварочное производство. – 1981. – № 8. – С. 15-26. 8. Деньщиков А.Ю. Моделирование процесса виброправки прокатных профилей / А.Ю.Деньщиков, А.И.Дрыга, Л.В.Кутовой, С.В.Подлесный // Вопросы вибрационной технологии: межвузовский сборник научных статей. – Ростов н/Д: ДГТУ, 2001. – С. 131-136.

Поступила в редакцию 09.10.2009

Б.Ф.ЗАЙЦЕВ, докт.техн.наук, ст.науч.сотр.; ИПМаш НАН Украины, Харьков;

А.В.АСАЕНОК, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков;

Н.Е.ВИКМАН, асп., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ МАСС ДЛЯ УЧЕТА ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ТРЕХМЕРНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Побудовано матриці мас полілінійного ізопараметричного скінченного елемента, які лінійно враховують залежність відцентрових сил від вузлових переміщень та забезпечують радіальність дії відцентрових сил при зміщеннях.

The mass matrices of polylinear isoparametric finite element, which take into account linearly dependence of centrifugal forces on node displacements and provide radialness of action of centrifugal forces at displacements, are obtained.

Введение и постановка задачи. Трехмерная постановка задачи колебаний вращающейся конструкции (ротора) необходима в ряде случаев, например, для корректного отражения механизма «дыхания» трещины, берега которой контактируют. В ряде работ, например [1, 2], использованы элементы континуального подхода для моделирования переменной жесткости вала с трещиной, основанные на применении механики трещин. В этих работах основной является стержневая модель, дополненная соотношениями континуальной механики для жесткостных характеристик на участке с трещиной, учет масс выполнен согласно стержневой модели.

Колебания вращающихся тел по стержневой модели обычно рассматриваются как в неподвижной, так и во вращающейся системе координат [3], причем заметных преимуществ для исследований ни та, ни другая система не имеет, исключая отдельные случаи, например вал двоякой жесткости [4]. При введении вращающейся системы координат необходимо учитывать инерционные силы переносного движения, то есть центробежные силы. Масса тела в стержневой модели сосредотачивается на оси, и при отклонениях ее из начального состояния легко обеспечивается линейная зависимость центробежных сил от перемещений и их радиальная направленность.

В трехмерном случае вращающегося тела для устранения перемещений тела как жесткого целого от вращения рассмотрение колебаний может быть выполнено только во вращающейся системе координат [5]. В рамках геометрически линейного подхода предполагается учет центробежных сил, зависящих от перемещений произвольных точек тела и отнесенных к недеформированному состоянию. Это нарушает радиальный характер действия центробежных сил и приводит к так называемой «отрицательной» жесткости на кру-

чение, что проявляется в появлении сил, направленных в сторону закручивания (против восстанавливающих сил) и определяемых скоростью вращения. Вообще говоря, при рассмотрении перемещений в деформированном состоянии (геометрически нелинейный подход) корректность учета центробежных сил была бы обеспечена, но это неоправданно усложненный подход. Ставится задача, оставаясь в рамках линейного подхода, то есть относя деформации к начальному состоянию, учесть изменение центробежных сил, связанных с перемещениями, и обеспечить их радиальную направленность. Решение этой задачи осуществляется в рамках МКЭ и сводится к построению дополнительных матриц масс конечного элемента.

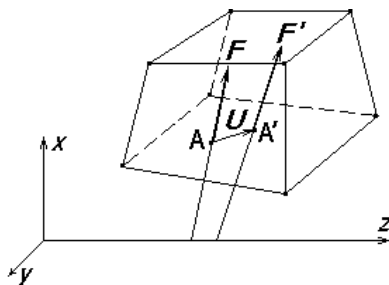
Получение матриц масс. Вывод матриц выполнен для изопараметрического восьмиузлового полилинейного конечного элемента (КЭ), который рассматривается в подвижной системе декартовых прямоугольных координат x, y, z , связанной с вращающимся вокруг оси z телом с угловой скоростью ω . В КЭ введены локальные координаты ξ, η, ζ , связанные на интервале $[-0.5, 0.5]$ с глобальными декартовыми координатами зависимостями

$$x = \sum_i x_i N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad y = \sum_i y_i N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad z = \sum_i z_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad (1)$$

где x_i, y_i, z_i ($i = 1, \dots, 8$) – координаты узлов КЭ; $N_i(\xi, \eta, \zeta) = (0,5 + \xi_i \xi)(0,5 + \eta_i \eta)(0,5 + \zeta_i \zeta)$ – функции формы; ξ_i, η_i, ζ_i – локальные координаты i -го узла КЭ.

Рассмотрим действие центробежных сил на материальную точку А (x, y, z), принадлежащую КЭ (см. рисунок) и имеющую массу dm (координатам x, y, z точки А соответствуют координаты ξ, η, ζ). В недеформированном состоянии центробежная сила F равна

$$F_x = x\omega^2 dm; \quad F_y = y\omega^2 dm; \quad F_z = 0. \quad (2)$$



Изменение центробежной силы при смещении точки КЭ

Силу F можно заменить на статически эквивалентную ей систему сил F_i , приложенных к узлам КЭ, и которые выражаются формулами

$$F_{xi} = F_x N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad F_{yi} = F_y N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad F_{zi} = 0; \quad (i = 1, \dots, 8), \quad (3)$$

где F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} – проекции узловых сил на оси координат.

При деформировании материальная точка переместится в положение A' с глобальными координатами x', y', z' и соответствующими им локальными координатами ξ', η', ζ'

$$\begin{aligned} x' &= x + u; \quad y' = y + v; \quad z' = z + w; \\ \xi' &= \xi + \Delta\xi; \quad \eta' = \eta + \Delta\eta; \quad \zeta' = \zeta + \Delta\zeta, \end{aligned} \quad (4)$$

где u, v, w – компоненты вектора перемещений U в глобальной системе координат, а изменения локальных координат $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ можно рассматривать как компоненты вектора смещений в локальных координатах $\mathbf{v}$.

Центробежная сила F' в точке A' определена компонентами

$$F'_x = (x+u)\omega^2 dm; \quad F'_y = (y+v)\omega^2 dm; \quad F'_z = 0$$

и аналогично (3) может быть заменена эквивалентной системой узловых сил

$$F'_{xi} = F'_x N_i(\xi', \eta', \zeta'); \quad F'_{yi} = F'_y N_i(\xi', \eta', \zeta'); \quad F'_{zi} = 0. \quad (5)$$

Так как деформация рассматривается по отношению к недеформированному объему, то в выражениях (5) все функции должны определяться координатами ξ, η, ζ (или x, y, z), а зависимость центробежных сил от перемещений должна быть линейной (линейная постановка задачи).

Между векторами $U\{u, v, w\}$ и $\mathbf{v}\{\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta\}$ существует взаимно однозначное соответствие, которое следует установить. Исходя из (1) и (4) выразим компоненты вектора перемещений через координаты точки A в деформированном и недеформированном состоянии

$$\begin{aligned} u &= x' - x = \sum_i x_i [N_i(\xi', \eta', \zeta') - N_i(\xi, \eta, \zeta)]; \\ v &= y' - y = \sum_i y_i [N_i(\xi', \eta', \zeta') - N_i(\xi, \eta, \zeta)]; \\ w &= z' - z = \sum_i z_i [N_i(\xi', \eta', \zeta') - N_i(\xi, \eta, \zeta)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Выполним разложение функций формы $N_i(\xi', \eta', \zeta')$ в ряд Тейлора в окрестности точки $A(\xi, \eta, \zeta)$ с точностью до второго порядка малости

$$N_i(\xi', \eta', \zeta') = N_i(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Delta\xi + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Delta\eta + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \Delta\zeta + o(\Delta\xi^2, \dots). \quad (7)$$

В связи с малостью перемещений нелинейные члены в (7) не учитываются.

После подстановки (7) в выражения (6) и преобразований получим связь между перемещениями u, v, w и приращениями локальных координат

$$u = \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Delta\xi + \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Delta\eta + \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \Delta\zeta;$$

$$v = \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Delta \xi + \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Delta \eta + \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \Delta \zeta; \quad (8)$$

$$w = \sum_i z_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Delta \xi + \sum_i z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Delta \eta + \sum_i z_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \Delta \zeta.$$

Систему уравнений (8) можно представить в матричном виде

$$U = [A] \mathbf{v}, \quad (9)$$

где матрица $[A]$ составлена из коэффициентов $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\xi, \eta, \zeta)$, определяемых выражениями (8).

Из решения системы уравнений (9) получим обратные соотношения – выражения перемещений в локальной системе координат через смещения в глобальных координатах

$$\mathbf{v} = [B] U, \quad (10)$$

где $[B] = [A]^{-1}$, а элементы матрицы $[B]$ – $\beta_{ij} = \beta_{ij}(\xi, \eta, \zeta)$.

Преобразуем выражения для узловых центробежных сил (5) с учетом разложения (7), тогда получим

$$F'_{xi} = (x+u)\omega^2 dm \left(N_i + \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \Delta \zeta \right);$$

$$F'_{yi} = (y+v)\omega^2 dm \left(N_i + \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Delta \eta + \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \Delta \zeta \right);$$

$$F'_{zi} = 0.$$

После подстановки в полученные выражения соотношений (10) получим зависимости для узловых сил в деформированном состоянии

$$F'_{xi} = F_{xi} + \omega^2 dm [(N_i + x\gamma_{i1})u + (x\gamma_{i2})v + (x\gamma_{i3})w];$$

$$F'_{yi} = F_{yi} + \omega^2 dm [(y\gamma_{i1})u + (N_i + y\gamma_{i2})v + (y\gamma_{i3})w]; \quad (11)$$

$$F'_{zi} = 0,$$

$$\text{где } \gamma_{ij} = \beta_{1j} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \beta_{2j} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} + \beta_{3j} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \quad (i = 1, \dots, 8; \quad j = 1, 2, 3).$$

Дальнейшие преобразования (11) связаны с переходом к узловым смещениям u_i, v_i, w_i согласно зависимостям изопараметрического КЭ

$$u = \sum_i u_i N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad v = \sum_i v_i N_i(\xi, \eta, \zeta); \quad w = \sum_i w_i N_i(\xi, \eta, \zeta). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (11) и интегрирования по объему элемента v_e , то есть суммирования узловых центробежных сил от множества материальных точек КЭ, получим следующие матричные соотношения для КЭ

$$\tilde{\mathbf{F}}' = \omega^2 \tilde{\mathbf{P}}_e + \omega^2 [\tilde{\mathbf{M}}_1] \tilde{\mathbf{v}} + \omega^2 [\tilde{\mathbf{M}}_1'] \tilde{\mathbf{v}}.$$

Здесь $\tilde{\mathbf{v}}$ – вектор узловых перемещений КЭ; постоянный вектор $\tilde{\mathbf{P}}_e$ имеет компоненты

$$\tilde{P}_{ix} = \int_{v_e} \rho x N_i dv_e ; \quad \tilde{P}_{iy} = \int_{v_e} \rho y N_i dv_e ; \quad \tilde{P}_{iz} = 0 .$$

Блочные матрицы $[\tilde{M}_1], [\tilde{M}'_1]$ имеют размерность 24×24 , а их структуры определяются видом блоков

$$[\tilde{M}_1]_{ki} = \begin{bmatrix} m_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & m_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad [\tilde{M}'_1]_{ki} = \begin{bmatrix} m'_{11} & m'_{12} & m'_{13} \\ m'_{21} & m'_{22} & m'_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (14)$$

где $[\tilde{M}_1]_{ki}$, $[\tilde{M}'_1]_{ki}$ – блоки (подматрицы) размером 3×3 , соответствующие трем строкам k -го узла и трем столбцам i -го узла матриц $[\tilde{M}_1]$, $[\tilde{M}'_1]$ а их элементы равны

$$m_{ki} = \int_{v_e} \rho N_k N_i dv_e ; \quad m'_{1j} = \int_{v_e} \rho x N_i \gamma_{kj} dv_e ; \quad m'_{2j} = \int_{v_e} \rho y N_i \gamma_{kj} dv_e , \quad (j = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Согласно структуре блоков матрица $[\tilde{M}_1]$ симметричная, а матрица $[\tilde{M}'_1]$ является несимметричной.

Таким образом, матрицы масс $[\tilde{M}_1]$, $[\tilde{M}'_1]$ определяют изменение центробежных узловых сил в зависимости от смещений точек КЭ при колебаниях, причем сохраняется отсутствие крутящего момента относительно оси вращения от системы узловых сил КЭ.

Заключение. Для трехмерного полилинейного изопараметрического конечного элемента построены матрицы масс, которые линейным образом учитывают изменение узловых центробежных сил от узловых перемещений точек во вращающейся системе координат. Построенные матрицы отражают радиальную направленность центробежных сил переместившихся точек в объеме конечного элемента вследствие чего крутящий момент от узловых центробежных сил равен нулю. Полученные матрицы масс имеют симметричную и несимметричную структуру.

Список литературы: 1. *Bachschmid N.* Cracks in rotating shafts: experimental behaviour, modelling and identification // SURVEILLAN 5 CETIM, Senlis (2004). 2. *Kicinski J., Banaszek S.* Non-linear interactions in large power machine with cracked rotor // ISCRMA-3, Cleveland, Ohio, 19–23 September 2005. 3. *Шульженко Н.Г.* Определение признака появления трещины при изгибных колебаниях вращающегося ротора // Пробл. машиностроения. – 1987. – Вып. 27. – С. 24–29. 4. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с. 5. *Зайцев Б.Ф.* Трехмерный МКЭ в расчетах колебаний вращающегося тела / Б.Ф. Зайцев, А.В. Асаенко, Н.Е. Ерецькая // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 88–92.

Поступила в редколлегию 30.06.2009.

Е.М.ИВАНОВ, канд.техн.наук, ХНАДУ «ХАДИ»

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Запропоновано модифіковано спрощений метод визначення параметрів коливальних систем на базі резонансного методу ідентифікації параметрів коливальних систем, оснований на вимірюванні резонансних частот коливальних систем.

At switching of frequencies of power influence there are transitional processes in KC. Influence of frequency of entrance influence and AЧХ is shown on transitional processes.

В работе [2] рассматривается резонансный метод идентификации параметров колебательных систем КС с одной и двумя степенями свободы. Там же приводится структурная схема колебательной системы, по которой был проведен эксперимент. В этой схеме с использованием электродинамических вибровозбудителей (ЭДВ) представлено несколько звеньев обратных связей с вибродатчиками, интеграторами, фазовращателями, общий сумматор. Такая схема реализует предлагаемый в работе [2] метод. Однако такой эксперимент можно модифицировано упростить и в этом случае будет изменена частично математическая интерпретация метода. Поясним это утверждение. Представим, что никаких звеньев обратных связей создавать не надо. Имеем только прямой канал вибровозбуждения, причем не только с помощью ЭДВ, а любого другого, например, электромагнитного, электрогидравлического вибровозбудителя и т.д. Будем менять только массу одного или другого колебательно-го звена, то есть к прежней массе будем добавлять известную массу $\Delta m_k, k = \overline{1, n}$. Конкретно рассмотрим последовательно КС с одной степенью свободы и КС с двумя степенями свободы, на вход которых приложены гармонические возмущения.

На рис. 1 приведена диссипативная КС с одной степенью свободы, где m, b, c – масса, коэффициент демпфирования и жесткости соответственно; x – перемещение; F – гармоническое возмущение.

Резонансная частота такой системы записывается выражением

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2h^2}, \quad (1)$$

где $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ – собственная частота консервативной системы ($b = 0$); $h = b/2m$ – показатель демпфирования.

Как известно [2], резонансный метод идентификации параметров КС основывается на измерении резонансных частот КС при изменении параметров этой системы, то есть можно представить

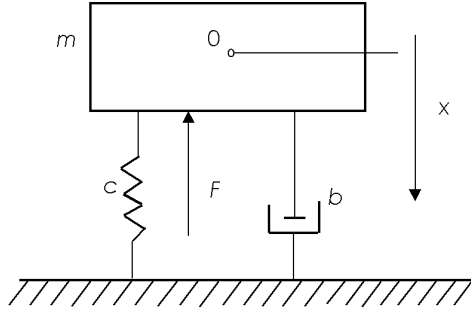


Рисунок 1

$$\omega_p = \sqrt{\frac{c \pm \Delta c}{m \pm \Delta m} - 2(h \pm \Delta h)^2} . \quad (2)$$

Если в (2) изменять Δc , Δm , Δh при неизменных m , c , h , то и ω_p будет меняться. Легче всего изменять массу m КС, то есть в эксперименте к прежней неизвестной массе m добавлять известные массы $\Delta m_1 = m_1$; $\Delta m_2 = m_2$; $\Delta m_3 = m_3$, например, гири. В этом случае резонансные частоты КС будут описываться соотношениями

$$\omega_{p_1}^2 = \frac{c}{m + m_1} - 2h^2 , \quad (3)$$

$$\omega_{p_2}^2 = \frac{c}{m + m_2} - 2h^2 , \quad (4)$$

$$\omega_{p_3}^2 = \frac{c}{m + m_3} - 2h^2 . \quad (5)$$

Выразим из (3), (4), (5) величины m , c и h относительно резонансных частот ω_{p_k} , $k = \overline{1,3}$. В результате имеем

$$m = \frac{m_2(\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_1) - m_1(\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_2)}{(\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_2) - (\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_1)} , \quad (6)$$

$$c = (\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2) \frac{(m + m_1)(m + m_3)}{m_3 - m_1} = (\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2) \frac{(m + m_3)(m + m_2)}{m_3 - m_2} , \quad (7)$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2) \frac{(m + m_3)(m + m_1)}{m_3 - m_1}}{m_2 + \frac{m_2(\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_1) - m_1(\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_2)}{(\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_2) - (\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_1)}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{(\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2) \frac{(m + m_3)(m + m_2)}{m_3 - m_1}}{m_1 + \frac{m_2(\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_1) - m_1(\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_2)}{(\omega_{p_1}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_2) - (\omega_{p_2}^2 - \omega_{p_3}^2)(m_3 - m_1)}}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Как видно (8) является очень громоздким. Поэтому легче h вычислять по формуле

$$h = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c}{m + m_1} - \omega_{p_2}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c}{m + m_2} - \omega_{p_3}^2 \right)}. \quad (9)$$

В (9) величины m и c предварительно вычислены по (6) и (7), а $\omega_{p_1}, \omega_{p_2}, \omega_{p_3}$ – измерены в эксперименте. Следует заметить, что можно положить $m_1 = 0$ и тогда ω_{p_1} будет определяться выражением (1).

Таким образом, изменяя только массу КС, определили все параметры данной КС.

Далее рассмотрим КС с двумя степенями свободы. Оговоримся тем, что будем ориентироваться на КС, которая приведена в [2]. Ее схема изображена на рис. 2, где m_1, m_2 – массы; c_1, c_2 – коэффициенты жесткости; x_1, x_2 – перемещения.

Из [2] известно соотношение

$$\omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}, \quad (10)$$

где ω_{01}, ω_{02} – собственные частоты этой КС. Эти частоты определяются выражениями [1, 2]

$$\omega_{01} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (11)$$

$$\omega_{02} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Следует заметить, что в выражениях (10), (11), (12) и других, касающихся КС с двумя степенями свободы, обозначения масс m_1 и m_2 не эквивалентно подобным обозначениям для КС с одной степенью свободы.

Итак, для данной КС будем изменять только массы звеньев, например, m_1 : $m_1 + \Delta m_1$; $m_1 + \Delta m_{12}$; $m_1 + \Delta m_{13}$ либо m_2 : $m_2 + \Delta m_2$; $m_2 + \Delta m_{22}$; $m_2 + \Delta m_{23}$. Тогда справедлива система уравнений

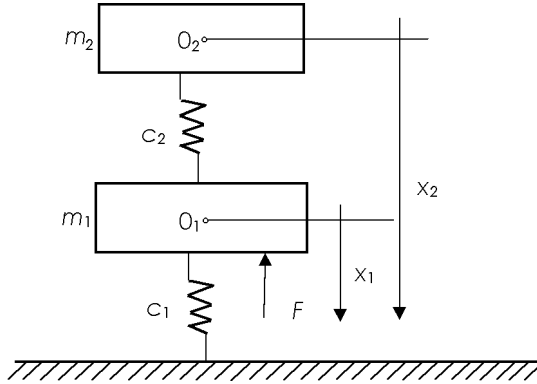


Рисунок 2

$$\left. \begin{aligned} \omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2 &= \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}; \\ \omega_{011}^2 \cdot \omega_{021}^2 &= \frac{c_1 c_2}{(m_1 + \Delta m_1) m_2}; \\ \omega_{012}^2 \cdot \omega_{022}^2 &= \frac{c_1 c_2}{m_1 (m_2 + \Delta m_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из системы уравнений (13) получаем выражение для масс m_1 и m_2 КС в виде

$$m_1 = \frac{\Delta m_1}{\frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{\omega_{011}^2 \omega_{021}^2} - 1}; \quad (14)$$

$$m_2 = \frac{\Delta m_2}{\frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{\omega_{012}^2 \omega_{022}^2} - 1}. \quad (15)$$

Для определения коэффициентов жесткости c_1 и c_2 воспользуемся соотношениями (11) и (12). Из них получаем

$$\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}, \quad (16)$$

$$\omega_{011}^2 + \omega_{021}^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1 + \Delta m_1} + \frac{c_2}{m_2}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) выводим зависимости для c_1 и c_2 в виде

$$c_1 = \frac{1}{\Delta m_1} \left[m_1 (m_1 + m_2 + \Delta m_1) (\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2) - (m_1 + \Delta m_1) (m_1 + m_2) (\omega_{021}^2 + \omega_{011}^2) \right];$$

$$c_2 = \frac{[(\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2)m_1 - c_1]m_2}{m_1 + m_2},$$

или из (10)

$$c_2 = \frac{m_1 m_2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{c_1}.$$

Таким образом, без использования системы обратных связей, управляющих совместно с задающим генератором вибровозбудителем, только простым изменением величин массы КС получены их параметры. Данный метод является теоретико-экспериментальным. Он апробирован в реальных условиях и подтвержден.

Список литературы: 1. Божко А.Е., Голуб Н.М. Динамико-энергетические связи колебательных систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – 188 с. 2. Божко А.Е., Иванова З.А., Личкатый Е.А. Резонансный метод идентификации параметров колебательной системы с двумя степенями свободы // Проблемы машиностроения, 2000. – Т. 3. – № 3-4. – С. 56-61.

Поступила в редколлегию 8.07.2009

УДК 539.3

Р.Е.КОЧУРОВ, асп., НТУ «ХПИ»;

К.В.АВРАМОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Нелінійні параметричні коливання циліндричних оболонок описуються рівняннями Доннелла-Муштарі-Власова. Рухи представляються у вигляді багатомодового розкладання по формах коливань. Дискретизація проводиться методом Бубнова-Гальоркіна. За допомогою методу гармонійного балансу досліджуються хвилі, які біжать, і нелінійні нормальні форми в системі з дисипацією та без її.

Donnell's equations are used to analyze cylindrical shell nonlinear parametrical vibrations. The motions are presented as multi-mode expansion. To obtain a finite-degree-of-freedom model of shell motions the Bubnov-Galerkin method is applied. Nonlinear modes and traveling waves of shells are treated using harmonic balance method; the effect of structural damping is taken into account.

Введение. Большое число исследований посвящено анализу нелинейных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек. В работах [3, 4] рассмат-

риваются модели нелинейных колебаний цилиндрических оболочек с тремя и четырьмя степенями свободы, которые описывают свободные, вынужденные и параметрические колебания. Взаимодействие двух пар сопряженных форм колебаний цилиндрических оболочек рассмотрено в [9]. Подробный обзор работ по динамике оболочек содержится в статье [8].

Анализ линейных колебаний цилиндрических оболочек показывает, что спектр собственных частот может быть весьма плотным. В этом случае только многомерными моделями, которые описывают взаимодействие между модами с плотным спектром, можно описать нелинейную динамику цилиндрических оболочек. В данной работе для анализа параметрических колебаний цилиндрических оболочек при их геометрически нелинейном деформировании учитываются три пары сопряженных форм колебаний имеющих близкие частоты линейных колебаний. В статье подробно исследованы два вида движений: нелинейные моды и бегущие волны.

Постановка задачи и уравнения колебаний. Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку без начальных неправильностей, сжатую вдоль образующей распределенной периодической нагрузкой вида

$$N_x(t) = N_1 \cos 2vt, \quad N_1 = \text{const} > 0.$$

Оболочка совершает колебания с умеренными амплитудами. Тогда деформации являются малыми, а перемещения умеренными и связи между деформациями и перемещениями описываются нелинейными уравнениями. Напряжения и деформации связаны законом Гука. Тогда колебания оболочки описываются уравнениями Донелла-Муштари-Власова:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где w – радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки, x, y – продольная и окружная координаты, R – радиус оболочки, ρ – плотность материала оболочки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, F – функция напряжений, $D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$ – цилиндрическая жесткость оболочки.

В цилиндрических оболочках сопряженные собственные формы колебаний $\cos sy \sin rx$ и $\sin sy \sin rx$ имеют одинаковые частоты. При нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек эти формы, в основном, возбуждаются совместно. В данной модели в разложении радиального прогиба учитываются три пары сопряженных форм колебаний, частоты которых близки. Динамический прогиб оболочки аппроксимируем разложением

$$w = \sum_{i=1}^3 (f_{2i-1} \cos s_i y + f_{2i} \sin s_i y) \sin r x + f_7 \sin^2 r x + f_8, \quad (2)$$

где $s_i = n_i / R$; $r = m \pi / L$; $i = \overline{1,3}$; n_i – число волн в окружном направлении, m – число полуволн вдоль образующей. Слагаемое $f_7 \sin^2 r x$ отражает не-симметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным перемещением к центру кривизны. Слагаемое f_8 описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты y , то есть торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [3].

Функцию напряжений представим так: $F = F_h + F_p$. Общее решение второго уравнения системы (1), F_h , определяется, удовлетворяя условие периодичности окружных перемещений [4], и имеет следующий вид:

$$F_h = \frac{E}{16} \sum_{i=1}^6 s_i f_i^2 x^2 - \frac{1}{4} \frac{E}{R} f_7 x^2 - \frac{1}{2} \mu N_x x^2 - \frac{1}{2} N_x y^2. \quad (3)$$

Частное решение второго уравнения системы (1), F_p , представим так:

$$\begin{aligned} F_p = & (F_1^{(0)} + F_5^*) \cos 2r x + \sum_{i=1}^3 (F_{i+2}^{(0)} \cos 2s_i y + F_{i+5}^{(0)} \sin 2s_i y) + F_1^* \sin r x + F_2^* \sin 3r x + F_4^*, \\ F_k^* = & \sum_{i=1}^3 (F_i^{(k)} \cos s_i y + F_{i+3}^{(k)} \sin s_i y); F_l^* = F_1^{(l)} \cos(s_1 + s_2)y + F_2^{(l)} \cos(s_1 - s_2)y + \\ & + F_3^{(l)} \cos(s_1 + s_3)y + F_4^{(l)} \cos(s_1 - s_3)y + F_5^{(l)} \cos(s_2 + s_3)y + F_6^{(l)} \cos(s_2 - s_3)y + \\ & + F_7^{(l)} \sin(s_1 + s_2)y + F_8^{(l)} \sin(s_1 - s_2)y + F_9^{(l)} \sin(s_1 + s_3)y + F_{10}^{(l)} \sin(s_1 - s_3)y + \\ & + F_{11}^{(l)} \sin(s_2 + s_3)y + F_{12}^{(l)} \sin(s_2 - s_3)y; k = 1, 2; l = 3, 4. \end{aligned} \quad (4)$$

Величины F_i определяются подстановкой выражений (2), (4) во второе уравнение системы (1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых гармониках.

Для дискретизации системы применим метод Бубнова-Галеркина к первому уравнению системы (1). Получим модель с конечным числом степеней свободы, которая относительно безразмерных переменных и параметров имеет вид:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_7) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = \overline{1,6}; \quad (5)$$

$$\ddot{f}_7 + \frac{4}{3} \ddot{f}_8 + \omega_7^2 f_7 + \tilde{\omega}_8^2 f_8 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{f}_8 + \frac{1}{2} \ddot{f}_7 + \omega_8^2 f_8 + \tilde{\omega}_7^2 f_7 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 = 0, \quad (7)$$

Частоты ω_7, ω_8 значительно больше частот $\omega_1, \dots, \omega_6$. Поэтому, полагая $\ddot{f}_7 = \ddot{f}_8 = 0$, из (6), (7) определим $f_7 = f_7(f_1, \dots, f_6)$, $f_8 = f_8(f_1, \dots, f_6)$ и введем их в (5). Тогда функции R_i , $i = \overline{1,6}$ системы (5) примут вид:

$$R_i(f_1, \dots, f_6) = \sum_{j=1}^6 \eta_{ij} f_j^2, \quad i = \overline{1,6}. \quad (8)$$

Итак, параметрические колебания оболочки описываются системой уравнений (5) с функциями R_i в виде (8).

Анализ нелинейных колебаний. Исследуем динамику системы (5). В этой системе существуют две нелинейные нормальные формы: $f_{2i-1} = \pm f_{2i}$, $i = \overline{1,3}$. Движения на этих нормальных формах описываются системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i \tilde{R}_i(f_1, f_3, f_5) + \tilde{G}_i(f_1, f_3, f_5) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = 1, 3, 5. \quad (9)$$

Полученные нелинейные моды являются прямыми линиями в конфигурационном пространстве динамической системы (5). Эти линии являются точным решением системы (5). Метод определения нелинейных нормальных форм в параметрически возбуждаемых системах предложен в [1, 5].

Для исследования движений на нормальной форме (9) воспользуемся методом гармонического баланса и движение представим так:

$$f_i = A_i \cos(\nu t) + B_i \sin(\nu t), \quad i = 1, 3, 5. \quad (10)$$

В результате, получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(A)} &= 0; \\ B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(B)} &= 0, \quad i = 1, 3, 5, \end{aligned} \quad (11)$$

В системе (11) существуют следующие группы решений:

- | | |
|--|--|
| 1.1). $A_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_i = 0;$ | 1.2). $B_1 \neq 0; B_3 = B_5 = 0; A_i = 0;$ |
| 2.1). $A_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_i = 0;$ | 2.2). $B_3 \neq 0; B_1 = B_5 = 0; A_i = 0;$ |
| 3.1). $A_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_i = 0;$ | 3.2). $B_5 \neq 0; B_1 = B_3 = 0; A_i = 0;$ |
| 4.1). $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; A_3 = 0; B_i = 0;$ | 4.2). $B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; B_3 = 0; A_i = 0;$ |
| 5.1). $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_i = 0;$ | 5.2). $B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0; A_i = 0,$ |

где $i = 1, 3, 5$. Решения (1.1) – (4.2) могут быть определены аналитически.

В случаях (5.1), (5.2) амплитуды колебаний $A_1, B_1, A_3, B_3, A_5, B_5$ определяются численно методом Ньютона из системы нелинейных алгебраических уравнений (11). В этом случае параметр ν варьируется с некоторым шагом.

Теперь исследуем нелинейные колебания оболочки с учетом диссипации энергии. В систему (5) введем слагаемые, которые описывают линейное демпфирование колебаний. Тогда эта система преобразуется к виду:

$$\ddot{f}_i + \xi_i \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_6) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, i = \overline{1, 6}. \quad (13)$$

В системе с диссипацией (13) существуют нелинейные моды $f_{2i-1} = \pm f_{2i}, i = \overline{1, 3}$. Следуя методу гармонического баланса получаем:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + B_i \xi_i \nu + G_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) - A_i \xi_i \nu + G_i^{(B)} = 0, i = 1, 3, 5. \quad (14)$$

В системе (14) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 \neq 0; B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_3 = B_5 = 0;$
- 2). $A_3 \neq 0; B_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_1 = B_5 = 0;$
- 3). $A_5 \neq 0; B_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_1 = B_3 = 0;$
- 4). $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; A_3 = 0; B_3 = 0;$
- 5). $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0.$

(15)

Решения (15) системы (14) исследуются численно. Задавая параметр ν с некоторым шагом, методом Ньютона определяются все неизвестные.

Рассмотрим режим бегущих волн в цилиндрической оболочке, который описывается системой (13). Для исследования этих движений воспользуемся методом гармонического баланса и колебания системы представим так:

$$f_i = A_i \cos(\nu t) + B_i \sin(\nu t), f_{i+1} = A_i \sin(\nu t) + B_i \cos(\nu t), i = 1, 3, 5. \quad (16)$$

Тогда амплитуды гармоник (16) описываются системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm B_i \xi_i \nu + \tilde{G}_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm A_i \xi_i \nu + \tilde{G}_i^{(B)} = 0, i = 1, 3, 5, \quad (17)$$

В системе (17) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 = B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = B_3 = B_5 = 0;$
- 2). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 = 0;$
- 3). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 \neq 0.$

(18)

Движения (18) исследуются при изменении частоты параметрической нагрузки ν численным решением системы (17) методом Ньютона.

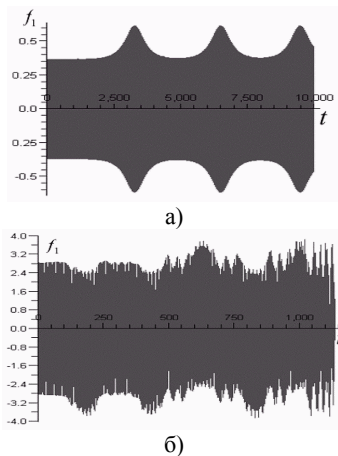
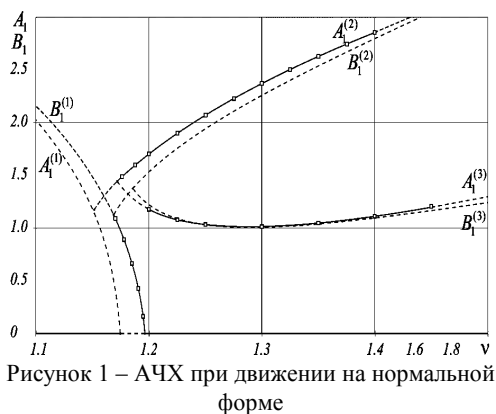
Численный анализ колебаний. Рассмотрим оболочку со следующими численными значениями параметров [6]: $h = 0,002$ м; $L = 0,4$ м; $R = 0,2$ м; $E = 2,1 \times 10^{11}$ Н/м²; $\mu = 0,3$; $\rho = 7850$ кг/м³; $\xi_i = 0,001\omega_i / \omega_0$, $i = \overline{1,6}$; $\omega_0 = 3165,03$; $N_1 = 0,6 N_{cr}$; $N_{cr} = 2,54 \times 10^6$ Н/м. Из анализа частот линейных колебаний оболочки с представленными параметрами следует, что в дальнейшем исследовании будут учитываться моды колебаний, имеющие такие параметры волнообразования: $n_1 = 4$; $n_2 = 5$; $n_3 = 6$; $m = 1$.

Для представленных параметров оболочки проводился численный анализ нелинейных нормальных форм. На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), которая выражает зависимости $A_1(\nu)$, $B_1(\nu)$. Ветви АЧХ, соответствующие случаю 1.1), 1.2) из (12), когда в колебаниях участвует только одна из трех сопряженных форм колебаний обозначены символами $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$. Ветви $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, отвечают случаю возбуждения двух сопряженных форм колебаний: 4.1), 4.2) из (12). Ветви $A_1^{(3)}$, $B_1^{(3)}$ отражают случай возбуждения трех сопряженных форм колебаний: 5.1), 5.2) в формулах (12). На рис. 3 представлена АЧХ, описывающая динамику системы с диссипацией (13).

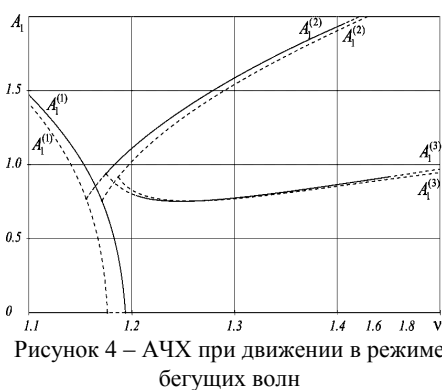
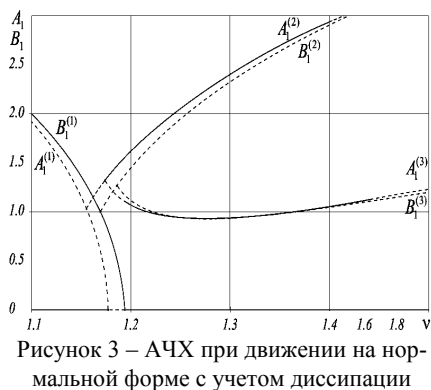
Для подтверждения результатов аналитического анализа проводилось прямое численное интегрирование системы (9) при различных значениях частот гармонического воздействия ν . Результаты расчетов представлены на рис. 1 точками, свидетельствуют о хорошем совпадении данных метода гармонического баланса и результатов прямого численного интегрирования.

Для исследования устойчивости параметрических колебаний производилось прямое численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (5) на интервалах времени t порядка 1000 периодов колебаний. Начальные условия определялись из уравнений (10), (16). На рис. 1 устойчивые движения представлены сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Исследовалось поведение динамической системы (5) при потере устойчивости нормальных форм. Для этого проводилось прямое численное интегрирование системы (5). Данные, представленные на рис. 2 а) соответствуют группе решений 1.1) из (12), при параметрах: $\nu = 1,18$, $A_1 = 0,3694$. На рис. 2 б) представлена динамика системы (5) после потери устойчивости решений 4.1) из (12) с параметрами: $\nu = 1,43$, $A_1 = 2,8494$, $A_5 = 2,6091$.



Производился численный анализ режимов типа бегущих волн на основании методики, представленной выше. Результаты анализа представлены в виде АЧХ на рис. 4.



Выводы. Существует большой класс цилиндрических оболочек, для которых двух и трех модовые аппроксимации колебаний не достаточны для адекватного описания динамики. Это объясняется близостью собственных частот различных мод колебаний. В этом случае только многомодовые модели адекватно описывают колебания.

При многомодовом режиме колебаний оболочки было обнаружено, что существуют нелинейные моды, которые описываются прямыми линиями в конфигурационном пространстве. Подчеркнем, что одинаковые нелинейные

моды существуют как в системе без диссипации, так и в системе с диссипацией. Существование таких нормальных форм объясняется циклической симметрией цилиндрических оболочек.

Список литературы: 1. Аврамов К.В. Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // ДНАНУ. – 2008. – № 11. – С. 41-47. 2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 423 с. 3. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснополяская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наукова думка, 1984. – 218 с. 4. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща школа, 1989. – 207 с. 5. Avramov K. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics // Journal of Sound and Vibrations. – 2009. – 322. – P. 476-489. 6. Gonçalves P.B., Del Prado Z.J.G.N. Nonlinear Oscillations and Stability of Parametrically Excited Cylindrical Shells // Meccanica. – 2002. – V. 36. – P. 105-116. 7. Koval'chuk P. S., Kruk L. A. Forced nonlinear oscillations of cylindrical shells interacting with fluid flow // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 265. – P. 245-268. 8. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S. Nonlinear problems of oscillations of thin shells // International Applied Mechanics. – 1998. – V. 34, №8. – P. 703-728. 9. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S., Kruk L. A. Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 265. – P. 245-268. 10. Yamaki N. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. – North-Holland, Amsterdam. – 1984.

Поступила в редколлегию 20.06.2009

УДК 519:539:534

С.В.КРАСНИКОВ, канд.техн.наук, ст.наук.співр., НТУ «ХП»

РОЗРОБКА ІНТЕГРОВАНІХ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ З АВТОМАТИЗАЦІЇ РОЗРАХУНКІВ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦІЙ

Розглядаються проблеми з використання сучасних САПР для проведення досліджень динаміки складних машинобудівних конструкцій. Запропоновано методику проведення досліджень за допомогою інтегрованого програмного засобу. Розроблені дві моделі спеціалізованого програмного комплексу щодо автоматизації проведення необхідних серій розрахунків.

The problems with the use of modern CAD systems for studies of dynamics for complex engineering designs are considered. A method for conducting research using integrated software is described. Developed two models of specialized software to automate the necessary series of calculations

Вступ. Сучасні дослідження пов'язані з проведенням багатой кількості обчислень. Особливо це стосується розрахунків динамічних характеристик машинобудівних конструкцій, що звичайно групуються у декілька серій. Кожній серії відповідають свої значення змінних параметрів. Доволі часто відомі програмні засоби з автоматизації інженерних досліджень (CAE) не мають

вбудованих можливостей для проведення подібних серій розрахунків або погано пристосовані щодо них [1,2]. Це пов'язано з величезною кількістю унікальних особливостей просторових моделей складних машинобудівних конструкцій. Тому актуальним є розробка уніфікованої методики щодо вказаних розрахунків та спеціалізованого програмного забезпечення для вирішення зазначених задач.

Мета роботи. Розробка уніфікованої методики з проведення досліджень динамічних характеристик складних машинобудівних конструкцій зі змінними параметрами за допомогою серій розрахунків з використанням популярних САЕ систем.

Особливості розробки інтегрованого програмного забезпечення для сучасних САЕ систем. Сучасний розвиток популярних САЕ систем має наступні тенденції:

- розробка САЕ за модульною системою (кожен модуль відповідає за певну кількість задач) та впровадження САЕ комплексів з різним набором модулів;
- розробка двох напрямків САЕ комплексів – відокремлених та вбудованих до популярних систем автоматизованого проектування (CAD).

Перша тенденція не дозволяє розробити для модульного САЕ стовідсотково універсальний інтегрований програмний засіб. Для кожної версії САЕ потрібно перевіряти та можливо переробляти розроблене програмне забезпечення.

Друга тенденція розділяє інтегровані програмні засоби на два різновиди: для відокремлених САЕ та для САЕ з використанням COM інтерфейсу.

Це пов'язано з тим, що більшість популярних відокремлених САЕ систем є продовженням програмних розробок 20 – 30 річної давнини. В той час неможливо було врахувати всі необхідні параметри розрахунків, а COM інтерфейс ще не використовувався. Тому ці САЕ системи або взагалі не мають COM інтерфейсу, або в ньому немає всіх необхідних функцій. Але ці САЕ дозволяють зробити все потрібне за допомогою консольного режиму.

Різновид САЕ комплексів вбудованих до популярних CAD комплексів зазвичай мають COM інтерфейс і розробники цих програмних засобів надають зусиль щодо потужності цього інструменту. Але й при наявності необхідних функцій для розрахунку виникають проблеми з параметризацією. Це пов'язано з тим, що скінчено-елементна модель в подібних САЕ комплексах кожен раз при зміні параметрів створюється заново, що призводить до різної нумерації елементів та вузлів в контрольованих місцях.

Враховуюче вищезазначене пропонується уніфікована методика для проведення серій розрахунків динамічних характеристик складних машинобудівних конструкцій, що представлена на рис. 1.

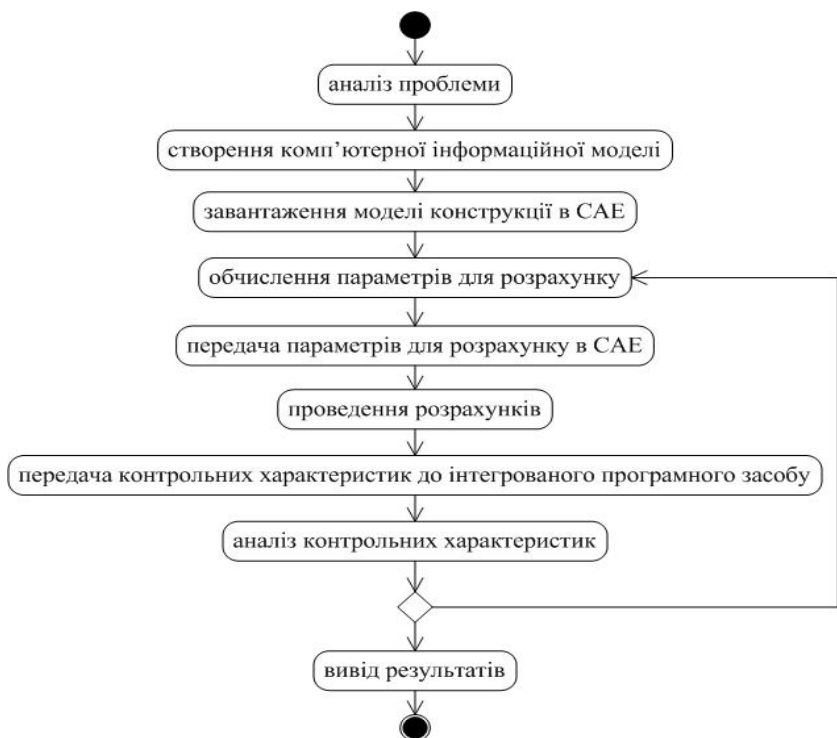


Рисунок 1 – Методика досліджень динамічних характеристик складних машинобудівних конструкцій

В результаті аналізу проблеми визначаються:

- геометричні, фізичні, структурні характеристики машинобудівної конструкції;
- цілі дослідження та критерії оцінки;
- обмеження досліджень.

Етап по створенню комп'ютерної інформаційної моделі починається з вибору методу моделювання. Найбільш розвиненим та популярним на даний час є метод скінчених елементів, на базі якого створено найвідоміші потужні програмні комплекси CAE. Результатом етапу є:

- розробка або вибір програмного забезпечення щодо моделювання та проведення розрахунків;
- побудована модель з визначеними змінними параметрами та контрольними характеристиками;
- перелік з необхідних розрахунків та чисельних методів для кожного з них та обґрунтування вибору;
- обмеження щодо розрахунків;

– метод перевірки вірогідності результатів розрахунків.

Інші етапи виконуються у відповідності з особливостями програмного забезпечення що використовується в дослідженні.

Особливості обраного САЕ безпосередньо впливають на архітектуру інтегрованого засобу та всього програмного комплексу. Як зазначалось вище, більшість відокремлених САЕ не має розвинутого COM інтерфейсу, тому при їх використанні діаграма компонентів комплексу має вигляд показаний на рис. 2.

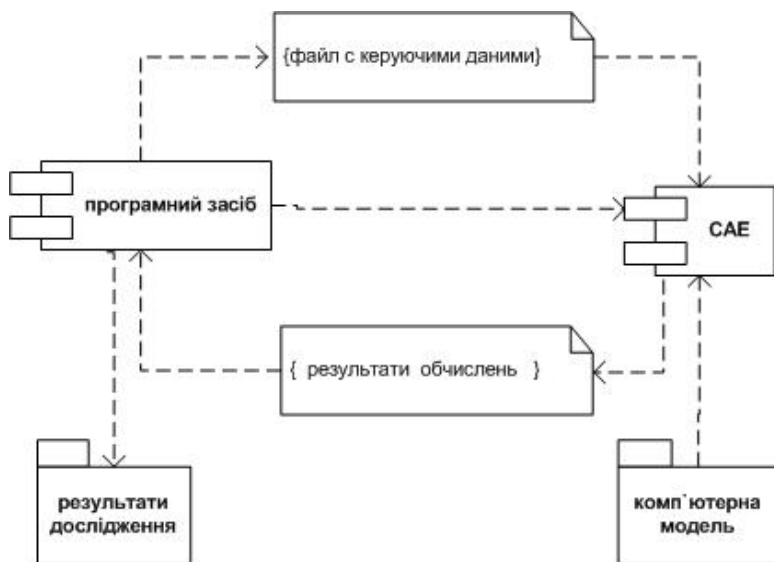


Рисунок 2 – Діаграма компонентів програмного комплексу на базі типового відокремленого САЕ

В зображеній діаграмі інтегрований програмний засіб має роль керуючої програми. Створений за її допомогою файл з керуючими даними містить у собі вказівки щодо обраного розрахункового модулю або методу та параметри розрахунку. Зазвичай цей файл є макросом або командним файлом. Результати обчислень вміщують в собі, при можливості фільтрації вихідних даних САЕ, лише контрольні характеристики та складаються з одного файлу. Комп'ютерна модель та результати дослідження можуть складатися з одного або декілька файлів та за структурою бути текстовими (двійковими) даними або типовою базою даних.

Основним недоліком цієї моделі є використання допоміжних тимчасових файлів, що збільшує потреби в часі на дослідження. Цього недоліку позбавлена архітектура комплексу на базі САЕ з використанням COM інтерфейсу (рис. 3). В цій моделі файли з керуючими даними та результатами заміню-

ються функціями СОМ інтерфейсу. Це дозволяє оперативно та швидко керувати процесом необхідних обчислень.

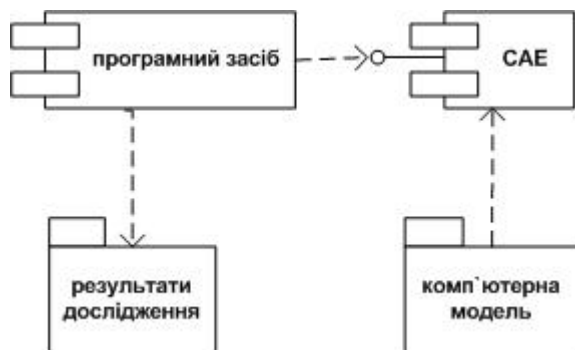


Рисунок 3 – Діаграма компонентів програмного комплексу на базі САЕ з використанням СОМ інтерфейсу

Висновки. Зазначені загальні тенденції розвитку архітектури САЕ систем та особливості їх видів. Запропонована уніфікована методика з проведення досліджень динамічних характеристик складних машинобудівних конструкцій зі змінними параметрами за допомогою серій розрахунків з використанням популярних САЕ систем. На базі методики розроблено дві моделі структури програмного комплексу з урахуванням зазначених особливостей сучасних САЕ.

Список літератури: 1. Гореткина Е. Перспективы развития САПР // PC Week/RE. – 2007. – № 35 (593). 2. Тернюк Н.Э., Гранин В. Ю., Гурова О.С., Тюрина М.Л., Булыгин А.В. Направления интеллектуализации САПР в машиностроении // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ». – 2008. – № 39. – С. 14-27. 3. Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. – СПб.: СПбГТУ, 1997. – 510 с.

Надійшла до редколегії 8.08.2009

Я.Д.КРУГЛИЙ, НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

У даній роботі розглядаються вимушені коливання скінчено-елементних систем великого розміру з малою нелінійністю. Розроблено метод розрахунку нелінійних коливань, який враховує частковий контакт у роз'ємних механічних з'єднаннях. Метод дозволяє суттєво зменшити розмір задачі і час розрахунку, а також отримати амплітудно-частотні залежності.

In this work the forced vibrations of largeness finite-element systems with small non-linearity are considered. The method of calculation of nonlinear vibrations, which takes into account a partial contact in sectional mechanical connections, is developed. A method allows substantially to decrease the size of task and checkout, and also get peak frequency dependences.

Введение

В конструкциях современных облопаченных дисков турбин используются различные механические соединения контактного типа, в которых присутствует сухое трение. Так с целью повышения жесткости длинных лопаток турбин используется бандаж, содержащие разъемные соединения. Под действием центробежных сил, а также при колебаниях лопаток, контактная область в этих соединениях изменяется, что может привести к раскрытию межлопаточного бандажного соединения и образованию отдельных пакетов лопаток. Для безотказной работы таких конструкций требуются анализ динамической прочности с учетом контактных соединений еще на стадии проектирования. В силу нелинейного характера контактных соединений, исследования динамических характеристик таких систем являются весьма сложными и требующими больших временных затрат. С появлением метода конечных элементов и программных комплексов, построенных на нем, стали возможны исследования нелинейной динамики конструкций сложной формы [1]. Однако, компьютерные технологии еще не позволяют решать быстро и с наименьшими затратами машинных ресурсов задачи большой размерности с учетом нелинейности, вызванной контактными взаимодействиями в соединениях [2]. Обычно в реальном облопаченном диске контакт наблюдается в малой области и нелинейность малая, хотя сама система при моделировании МКЭ имеет большую размерность [3]. Поэтому часто проблему анализа колебаний в системе с контактным соединением решают с помощью применения жестких элементов в соединении [4-5]. Однако достоверность такого подхода не доказана. Поэтому актуальной остается проблема построения достоверных и эффективных математических моделей и методов для расчета вынужденных нелинейных колебаний с учетом контактных соединений.

Постановка задачи

Необходимо разработать метод определения амплитудно-частотной зависимости в области резонанса при нелинейных колебаниях систем с малой областью нелинейности. При этом метод должен учитывать, что при моделировании колебаний таких систем разрешающие уравнения имеют большую размерность, а нелинейность определяется контактным взаимодействием малого числа степеней свободы системы.

Метод исследования нелинейных колебаний при контактном взаимодействии в малой области

Уравнение нелинейных вынужденных колебаний при контактном взаимодействии для конечно-элементной системы можно представить в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D_N]\{\dot{u}\} + [K_N]\{u\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где $[M]$ – матрица масс системы, $\{F(t)\}$ – вектор вынуждающей силы, $[D_N]$ – нелинейная матрица демпфирования, $[K_N]$ – нелинейная матрица жесткости.

Считая, что внутренне демпфирование системы мало, а демпфирование в контактном взаимодействии реализуется в малой области, в первом приближении можно пренебречь демпфированием системы.

Уравнение (1) представим в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}\} + ([K_L] + [K_N] - [K_L])\{u\} = \{F(t)\}, \quad (2)$$

где $[K_L]$ – линейная матрица жесткости конечно-элементной системы без учета контакта в разъемном соединении.

Преобразуем уравнение (2) к следующему виду:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K_L]\{u\} = \{F(t)\} - ([K_N] - [K_L])\{u\}. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда на систему действует периодическая гармоническая вынуждающая сила:

$$\{F(t)\} = \{F\} \sin \omega t, \quad (4)$$

где ω – частота вынуждающей нагрузки.

Таким образом, рассматриваются одночастотные нелинейные колебания под действием периодических гармонических сил в системах с большим количеством степеней свободы. Поведение такой нелинейной системы вблизи резонанса, если нелинейность незначительная, можно исследовать методом малого параметра [6]. При этом подходе решение системы (3) ищется в виде рядов:

$$\{u_z\} = \{\varphi_z\}^{(1)} a \cos(\omega t + \vartheta) + \varepsilon \{q_z\}^{(1)}(a, \omega t, \psi) + \varepsilon^2 \{q_z\}^{(2)}(a, \omega t, \psi) + \dots, \quad (5)$$

$(z = 1, 2, \dots, H),$

где z – номер собственной формы, H – число собственных форм, $\{\varphi_z\}$ – вектор z -й собственной формы, ε – малый параметр, a – амплитуда колебаний, ϑ – сдвиг фаз, $\psi = \omega t + \vartheta$, $\{q\}^{(1)}$, $\{q\}^{(2)}$ – периодические функции по обеим

угловым переменным ωt и ψ с периодом 2π .

Так как при контактном взаимодействии в малой области возникает малая нелинейность, то в решении (5) можно пренебречь членами ряда первого порядка малости ε и выше. В этом случае решение (5) примет следующий вид:

$$\{u_z\} = \{\varphi_z\}^{(1)} a \cos(\omega t + \vartheta), \quad (z = 1, 2, \dots, H). \quad (6)$$

Для решения системы (3) с помощью выражения (6) необходимо найти собственную форму для конечно-элементной системы без учета контакта в разъемном соединении.

Для определения собственных форм колебаний линеаризованной конечно-элементной системы предлагается алгоритм, состоящий из двух шагов.

На первом шаге решается задача определения контактной площадки в соединении. Решение задачи контактного взаимодействия системы, состоящей из b упругих тел (в случае малых по сравнению с размерами тел перемещений) сводится к минимизации энергетического функционала, при этом возможные перемещения на поверхности S_b должны удовлетворять кинематическим граничным условиям

$$u^b(\rho) = g^b(\rho), \quad \rho \in S_b, \quad (7)$$

где $g^b(\rho)$ – заданная функция, ρ – радиус-вектор точек поверхности тела.

Кроме того, на поверхности контакта должны выполняться условия не проникания, которые можно записать в виде

$$R_b(\rho_l) \leq 0, \quad b \neq l, \quad \rho_l \in S_l, \quad (8)$$

где R_b – уравнение границы области контакта для b -то тела; ρ_l – радиус-вектор точек l -го тела (с учетом деформирования).

При выполнении неравенства (8) в зоне контакта обеспечивается совместность касательных перемещений контактируемых тел, а при обращении его в равенство – возможно взаимное проскальзывание.

В рамках МКЭ возможные области контакта S_l разбиваются на специальные контактные конечные элементы [7], для которых условия (8) сводится к следующему виду:

$$\mu |F_n| > |F_s|; \quad (9)$$

$$\mu |F_n| = |F_s|, \quad (10)$$

где индексы n, s – означают нормальное и касательное направление, F – внутреннее контактное усилие, μ – коэффициент сухого трения. Нормальные и касательные силы определяются выражениями:

$$F_n = k_n (u_n^j - u_n^i - \Delta_n), \quad F_s = k_s (u_s^j - u_s^i - \Delta_s), \quad (11)$$

где i и j – номера узлов, в которых возникает контакт, k – контактная жесткость, Δ – предварительный зазор. В результате решения статической контактной задачи определяются области контакта в бандажном соединении.

На втором этапе решается задача определения собственных частот и

форм линеаризованной системы, полученной наложением связи на узлы, которые входят в контакт:

$$u_i = u_j, \quad (12)$$

где i и j – номера узлов, на которые накладываются условия контакта.

Собственные частоты и формы определяем из решения уравнения свободных колебаний для линеаризованной системы:

$$([K_L] - p_z^2 [M])\{\varphi_z\} = 0. \quad (13)$$

Полученные таким образом собственные формы близки к форме деформации нелинейной системы с учетом контактного взаимодействия. В случае если не накладывать связь на узлы, входящие в контакт, будут получены собственные формы со значительными амплитудами в месте контакта, находящимися в противофазе, что приведет к значительным искажениям результатов нелинейного анализа при использовании метода малого параметра.

Матрицы нелинейной жесткости при малой области контакта можно представить в блочном виде:

$$[K_N] = \begin{bmatrix} K_{mm}^N & K_{mk}^L \\ K_{km}^L & K_{kk}^L \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где m – число степеней свободы в области контактного взаимодействия, k – число степеней свободы в линейной области системы, $[K_{mm}^N]$ – нелинейный блок матрицы жесткости, соответствующий контактной области, который меняется в зависимости от нагрузки, $[K_{km}^L]$, $[K_{mk}^L]$, $[K_{kk}^L]$ – линейные блоки матрицы жесткости системы, независимые от нагрузки. При этом $m \ll k$, $m + k = N$. Представим линейную матрицу жесткости в блочном виде:

$$[K_L] = \begin{bmatrix} K_{mm}^L & K_{mk}^L \\ K_{km}^L & K_{kk}^L \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Рассмотрим разность между нелинейной жесткости системы (14) с малой областью контактного взаимодействия и линейной матрицей той же системы без учета контакта (15). Она имеет следующий вид:

$$[K_N] - [K_L] = \begin{bmatrix} K_{mm}^{NL} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } [K_{mm}^{NL}] = [K_{mm}^N] - [K_{mm}^L]. \quad (16)$$

Теперь матрицу разности между нелинейной и линейной матрицами жесткости размерностью H в уравнении (3) можно заменить матрицей $[K_{mm}^{NL}]$ размерностью m (16).

Тогда

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K_L]\{u\} = \{F(t)\} - \{F_0(a, \vartheta)\}. \quad (17)$$

Разлагая нелинейный вектор вынуждающей силы $\{F_0(a, \vartheta)\}$ в ряд по z -й собственной форме получим:

$$\{F_0(a, \vartheta)\} = \sum_{r=1}^m \varphi_r^z Q_r(a, \vartheta), \quad (18)$$

где Q – вектор возмущающей обобщенной силы, который определяется

$$\{Q_m(a)\} = \{R_m(a)\} a \cos \psi; \quad (19)$$

$$\{R_m(a)\} = \begin{pmatrix} R_1(a) \\ R_2(a) \\ \vdots \\ R_m(a) \end{pmatrix} = [K_{mm}^{NL}(a)] \{\varphi_m^z\}, \quad (20)$$

где $\{\varphi_m^z\}$ – подвектор z -й собственной формы, состоящий из m -элементов соответствующих степеням свободы матрицы $[K_{mm}^{NL}]$.

Согласно методу малого параметра [6] в резонансном случае производные от амплитуды a и разности фаз ϑ по времени представляет собой функции от a, ϑ , вектора обобщенной нагрузки и определяются как решение системы дифференциальных уравнений первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\pi p_z} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_r(a)\} \sin \psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^H \{F_r\}^T \{\varphi_r^z\}}{p_z + \omega} \cos \vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= p_z - \omega - \frac{1}{2\pi p_z a} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_r(a)\} \cos \psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^H \{F_r\}^T \{\varphi_r^z\}}{a(p_z + \omega)} \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где p_z – z -я собственная частота линеаризованной системы, φ^z – z -я собственная форма линеаризованной системы, m – количество элементов нелинейной матрицы жесткости, H – число элементов матрицы жесткости всей системы.

Так как для определения обобщенной нагрузки необходимо иметь явную зависимость компонент нелинейной матрицы жесткости (16) на данной частоте вынужденных колебаний от амплитуды a , а это при контактном взаимодействии невозможно. Предлагается следующий итерационный подход решения системы (21):

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_{i+1}}{dt} &= -\delta_e(a_i) a_{i+1} - \frac{F^*}{p_z + \omega} \cos \vartheta_{i+1}; \\ \frac{d\vartheta_{i+1}}{dt} &= \omega_e(a_i) - \omega + \frac{F^*}{a_{i+1}(p_z + \omega)} \sin \vartheta_{i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где:

$$\delta_e(a_i) = -\frac{1}{2\pi a_i p_z} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_{r0}(a_i)\} \sin \psi d\psi ;$$

$$\omega_e(a_i) = p_z - \frac{1}{2\pi p_z a_i} \int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^m \{\varphi_r^z\}^T \{Q_{r0}(a_i)\} \cos \psi d\psi ; \quad F^* = \sum_{r=1}^H \{F_r\}^T \{\varphi_r^z\}.$$

Параметры $\delta_e(a_i)$ и $\omega_e(a_i)$ представляют собой соответственно эквивалентный декремент затухания и полную эквивалентную собственную частоту рассматриваемой системы.

На первой итерации вычисляются эквивалентный декремент затухания и полная эквивалентная собственная частота для начального приближения амплитуды $\delta_e(a_0)$, $\omega_e(a_0)$. Компоненты нелинейной матрицы жесткости (19, 20) определяются из решения статической контактной задачи под действием приложенного в узлах статического кинематического нагружения в виде $\{\varphi_z\} a_0$, за исключением узлов, находящихся в области контактного взаимодействия. В качестве a_0 предлагается взять среднее арифметическое значение от модального статического решения нелинейной контактной задачи при действии амплитуды вынуждающей нагрузки:

$$a_0 = avr[\{u_{cmam}\} \otimes \{\varphi_z\}^{-1}]. \quad (23)$$

где $avr[]$ – оператор среднего арифметического, $\otimes$ – знак покомпонентного произведения векторов (произведение Кронекера).

При стационарных режимах колебаний с постоянными амплитудами и фазами, левые части уравнений первого приближения (22) равны нулю. Для определения стационарных значений амплитуды a_{i+1} и фазы ϑ получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \delta_e(a_i) a_{i+1} + \frac{F^*}{p_z + \omega} \cos \vartheta_{i+1} &= 0; \\ \omega_e(a_i) - \omega + \frac{F^*}{a_{i+1}(p_z + \omega)} \sin \vartheta_{i+1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Из уравнений (24) находим с точностью до величин второго порядка малости зависимость между амплитудой a_{i+1} и частотой внешних сил ω :

$$a_{i+1}^2 \left[\left(\omega_e^2(a_i) - \omega^2 \right)^2 + 4\delta_e^2(a_i) \omega^2 \right] = \{F^*\}^2. \quad (25)$$

Для нахождения фазы колебаний, из соотношения (24) получаем:

$$\vartheta_{i+1} = \arctg \frac{\omega_e(a_i) - \omega}{2\omega\delta_e(a_i)}. \quad (26)$$

Соотношения (25) позволяют построить зависимость a_{i+1} от ω , из которой определяются значения a_{i+1} для следующей итерации:

$$a_{i+1} = \max_{\omega_1, \omega_2} (a_{i+1}(\omega)), \quad (27)$$

где ω_1 и ω_2 – частоты, ограничивающие резонансный диапазон.

Итерационный процесс будет продолжен до тех пор, пока не будет выполняться следующее равенство:

$$\|a_{i+1} - a_i\| \leq \eta, \quad (28)$$

где η – заданная точность.

Из выражения (25) можно построить кривую, характеризующую резонансные колебания, возникающие в нелинейной системе в результате воздействия внешней периодической силы, частота которой близка к одной из собственных частот системы.

Выводы

- 1 Предложен метод решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях систем большой размерности с малой нелинейностью контактного типа.
- 2 Данный метод позволяет существенно уменьшить размерность задачи.
- 3 Предложенный метод решения задачи нелинейных колебаний позволяет получать амплитудно-частотную зависимость в области резонансной частоты, которая близка к одной из собственных частот лиnearизованной системы.

Список литературы: 1. Я.Д.Демуз, В.А.Жовдак, А.Ф.Кабанов, А.С.Степченко. Исследование влияния контакта в бандажном соединении на собственные частоты лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – № 21. – С. 67-72. 2. В.О.Жовдак, Я.Д.Демуз, О.С.Степченко. Нелінійні коливання пакетів лопаток з урахуванням технологічних відхилень у роз'ємних з'єднаннях // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці конференції. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД. – 2008. – С. 102-103. 3. В.О.Жовдак, О.С.Степченко, Я.Д.Демуз. Нелінійні коливання пакетів лопаток з роз'ємними з'єднаннями // Машинознавство. – 2008. – № 10 (136). – С. 17-21. 4. Ю.С.Воробьев, С.Янецки, Е.В.Тишковец, С.П.Канило. Анализ колебаний турбинного лопаточного аппарата со связями на основе трехмерных моделей // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 4 (20). – С. 19-23. 5. Ender Cigeroglu, Ning An, Chia-Hsiang Menq. Forced Response Prediction of Constrained and Unconstrained Structures Coupled Through Frictional Contacts // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – Vol. 131. – March 2009/022505. – P. 1-11. 6. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., Наука, 1974. 7. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor. The Finite Element Method. – Vol. 2. Butterworth-Heinemann, 2000. – 480 p. 8. В.А.Толок, В.В.Киричевский, С.И.Гоменюк, С.Н.Гребенюк, Д.П.Бувайло. Метод конечных элементов. Теория, алгоритмы, реализация. – К.: Наукова думка, 2003. – 283 с.

Поступила в редколлегию 14.05.2009

А.В.КУПРИЯНОВ, канд.техн.наук, доц., УИПА, Харьков

ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗМЕРНОЙ ТОЧНОСТИ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ, СОБИРАЕМОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАГРЕВА

Проведене моделювання змінного температурного поля і термоупругого стану елементів вагонної колісної пари в процесі складання з індукційним нагрівом. Отримані характеристики спільної деформації деталей дозволяють обґрунтовано призначати складальний технологічний розмір.

The design of the variable temperature field and thermoelastic state of elements of the carriage wheeled couple in the process of assembling with the induction heating is conducted. The descriptions of joint deformation of details allow to appoint an assembling technological dimension.

1 Предмет исследования

Железнодорожные колесные пары являются изделиями ответственного назначения, в которых колеса с осью соединены по посадке с натягом. Одной из технологий их сборки является тепловая, при которой нагретые колеса свободно устанавливаются на ось за счет временного сборочного зазора. После совмещения посадочных поверхностей колеса и оси, вследствие перераспределения тепла между деталями и их остывания, происходит скрепление. При этом размер между торцами ободов колес должен быть 1440^{+1}_{-3} мм, а разноразмерность выхода торцов оси за ступицы колес должна быть не более 3 мм (рис. 1).

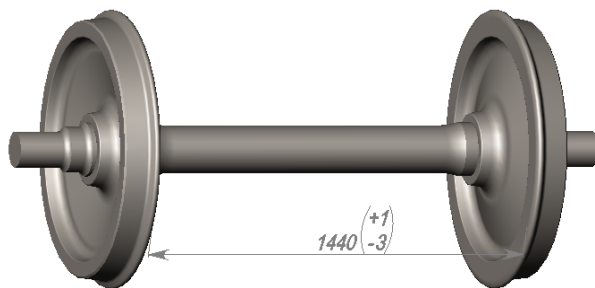


Рисунок 1 – Модель железнодорожной колесной пары

Процесс сборки включает четыре этапа: 1) нагрев колес; 2) перемещение колес от нагревательного устройства к сборочному стенду и установка их на ось; 3) перераспределение тепла и скрепление колес с осью; 4) остывание собранной колесной пары [1].

С целью экономии энергии используется локальный индукционный на-

грев ступицы колес. На рис. 2 показана схема индукционного нагревателя и участки колес 1, 2, 3 и 4, которые нагреваются с разной интенсивностью. Вследствие неравномерного нагрева в колесе возникают напряжения, которые приводят к его деформации. В деформированном состоянии колесо находится в течение последних 3-х этапов процесса сборки. При деформировании колеса внутренний торец обода 5 (рис. 2) смещается относительно внутреннего торца ступицы в направлении увеличения размера А. Ось нагревается и так же деформируется. После сборки и полного остывания колесной пары форма колес возвращается к первоначальной.

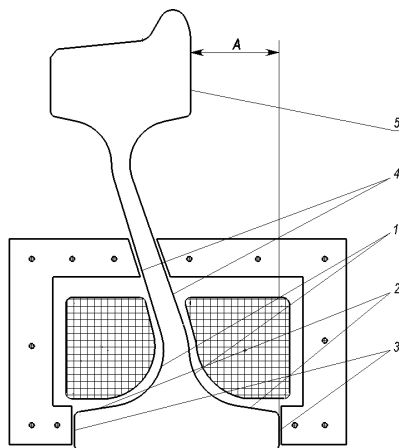


Рисунок 2 – Схема профиля индукционного нагревателя и колеса

Обычно сборка изделий с нагретыми или охлажденными деталями требует пересчета конструкторских размеров относительного положения деталей на технологические, учитывающие технологические деформации. В некоторых случаях изменение деформации деталей следует учитывать при расчете временных параметров технологии сборки. У колесной пары сборочный технологический размер между торцами колес должен отличаться от конструкторского 1440^{+1}_{-3} . Его величина должна быть такой, чтобы после остывания и возвращения деталей к первоначальной форме, размер между торцами ободов равнялся требуемому. Целью исследования являлось получение величины технологического размера между внутренними торцами ободов колес при сборке. Это предусматривает решение задачи термоупругости элементов колесной пары.

В качестве объекта исследования принята вагонная колесная пара с цельнокатаным железнодорожным колесом по ГОСТ 9036-88 и осью по ГОСТ 22780-77. Материал колеса – сталь 2 ГОСТ 10791-2004. Свойства ма-

териала: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$, предел текучести 620 МПа, коэффициент температурного расширения $\beta = 1,29 \cdot 10^{-5}$ град $^{-1}$, теплопроводность 50 Вт/м °С. Температура окружающей среды $T = 20$ °С. Допустимая температура нагрева – 320 °С.

2 Размерная цепь

Поскольку торец 5 обода колеса вследствие температурных деформаций смещается в направлении к наружному торцу ступицы, то размер между торцами ободов после сборки оказывается меньше конструкторского размера 1440_{-3}^{+1} . Линейная размерная цепь вдоль оси колесной пары имеет вид, показанный на рис. 3. Замыкающее звено - конструкторский размер A_{Δ} . Цепь включает сборочный технологический размер $\bar{A}_c$ - увеличивающее звено и уменьшающие звенья: $\bar{A}_{кл}$, $\bar{A}_{кп}$ - деформации левого и правого колес; $\bar{A}_{ол}$, $\bar{A}_{оп}$ - удлинение оси от тепла, поступившего от посадки левого и правого колес соответственно.

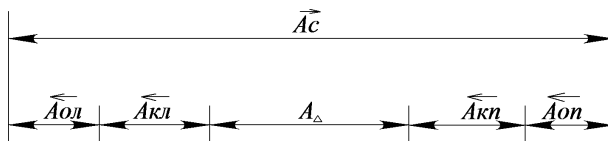


Рисунок 3 – Размерная цепь по оси колесной пары в процессе сборки

Деформации колес $\bar{A}_{кл}$, $\bar{A}_{кп}$ максимальны в момент окончания нагрева колес, а затем уменьшаются. Звенья $\bar{A}_{ол}$ и $\bar{A}_{оп}$ возникают как временные. Они близки к нулю в момент базирования колес на оси, затем их величина нарастает до максимального значения, а потом уменьшается до нуля вместе с остыванием колесной пары.

Для базирования колес вдоль оси необходимо использовать специальные упоры. Сборочный стенд может быть сконструирован так, что упоры для колес сразу убираются. В этом случае звенья $\bar{A}_{ол}$ и $\bar{A}_{оп}$ никак не влияют на точность получаемого размера, поскольку в момент базирования отсутствуют.

Можно использовать не убираемые, подпружиненные упоры. Последние предпочтительнее, так как исключают необходимость в наличии механизма. Фактически процесс базирования колес вдоль оси становится переменным, так как вследствие уменьшения деформации колеса «сползают» с оси и звено $\bar{A}_c$ учитывается в момент скрепления соединения. В этом случае $\bar{A}_{ол}$ и $\bar{A}_{оп}$ участвуют в размерной цепи со значением, близким к максимальному.

Аналитический расчет данной размерной цепи сопряжен с использованием переменных звеньев, закон изменения размеров которых не известен. Это приводит к большим погрешностям, поэтому было проведено математическое моделирование методом конечных элементов.

В качестве геометрического моделиера использовалась программа SolidWorks 2009. Задача термоупругости решалась методом конечных элементов средствами SolidWorks Simulation 2009.

3 Моделирование нагрева колес

Для моделирования процесса формирования колесной пары воспользуемся экспериментальными данными, приведенными в [1, §4]. Время нагрева составляло 3,5 мин., температура контролировалась термопарами в 8 точках-узлах, их положение показано на рис. 4. Из них первые три точки располагались на подступичной части оси на глубине 10 мм от поверхности, а остальные пять - на колесе. Значения температур в момент окончания нагрева, приведены в таблице.

Значения температуры в точках расположения термодпар

	Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 4	Точка 5	Точка 6	Точка 7	Точка 8
Температуры в точках в момент окончания нагрева, °С, эксперимент	20	20	20	225	310	280	150	30
Температуры в точках в момент окончания нагрева, °С, моделирование	20	20	20	218	286	251	157	27
Температуры в точках в момент «схватывания» колеса с осью, °С, через 4 мин. с начала сборки, эксперимент	100	70	70	192	225	185	120	35
Температуры в точках через 4 мин, °С, моделирование	95	70	74	194	213	190	110	36

Моделирование температурного поля состояло в том, что к участкам поверхности колеса прикладывался тепловой поток, эквивалентный нагреву от переменного магнитного поля. Величина и расположение теплового потока подбирались таким образом, чтобы получить модель температурного поля,

максимально близкого к экспериментальному. В результате был подобран режим нагрева, при котором тепловой поток на поверхностях 1, 2 (рис. 2) равен 130 кВт/м^2 , на поверхностях 3 - 80 кВт/м^2 , а на поверхностях 4 - 35 кВт/м^2 . Максимальная температура при этом составила 319°C , а температуры в момент окончания нагрева в местах расположения термопар приведены в таблице. Сечение колеса с полученным температурным полем изображено на рис. 4.

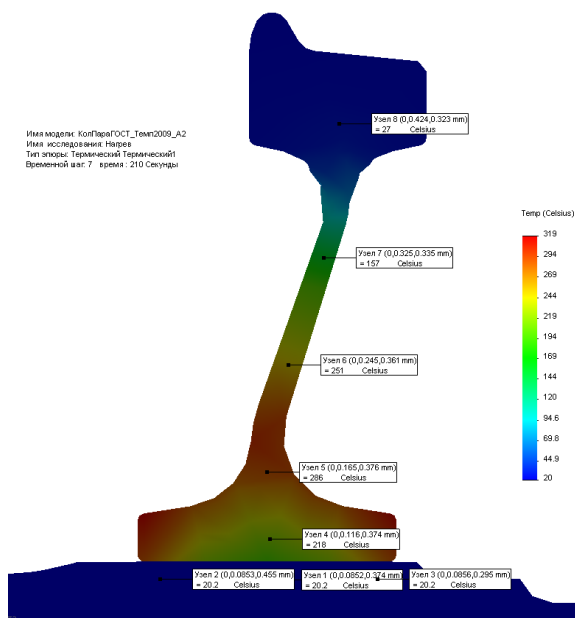


Рисунок 4 – Расположение точек и температурное поле в момент окончания нагрева

На этапе нагрева колес они находятся отдельно от оси на рис. 4 показано совмещенное изображение. Это связано с особенностью программного продукта, для которого модель не может меняться геометрически. В процессе моделирования нагрева и перемещения колес из нагревателя на сборку их тепловое взаимодействие с осью отсутствовало.

4 Моделирование остывания колесной пары

Перемещение колеса и установка его на ось в среднем занимают 1 мин. При моделировании температурное поле, полученное в момент окончания нагрева, принималось в качестве начального для этого этапа. Полученное температурное поле колес и оси показано на рис. 5.

Температурное поле, полученное после окончания установки колес на ось колесной пары, принималось за начальное в процессе моделирования остывания соединения. В дальнейшем тепло перераспределяется по материалу

колеса, переходя от более нагретой ступичной части через тонкую дисковую часть к холодному ободу. Тепло так же переходит через сборочный зазор в железнодорожно-рожную ось, а незначительная его часть рассеивается в атмосферу. Величина конвективного теплообмена на поверхностях колеса принималась $10 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

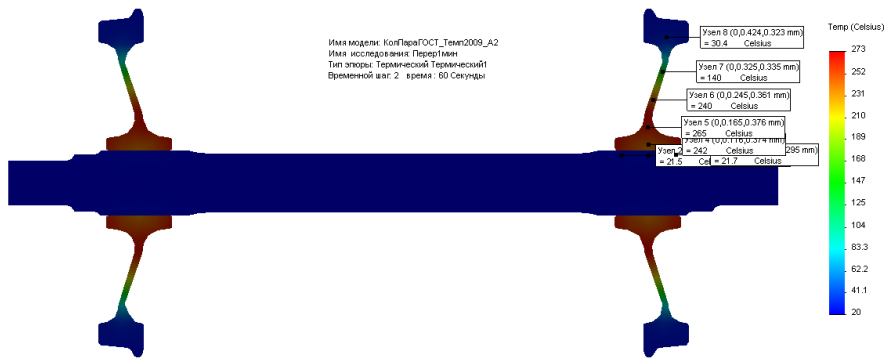


Рисунок 5 – Температурное поле в момент базирования колес

Значения температур, полученные экспериментально [1], в момент «скрепления» колеса с осью, через 4 минуты после окончания установки, приведены в таблице.

Задача аналитического описания теплопередачи в зазоре между ступицей и осью в литературе не приводится. Причиной этого является ее сложная зависимость от технологических факторов, например, шероховатости, и быстрое изменение ее величины. С уменьшением зазора теплопроводность растет из-за уменьшения величины воздушной прослойки и увеличения площади металлического контакта. В среднем в процессе скрепления деталей, по данным [2], коэффициент теплопроводности колеблется от 460 до $16150 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

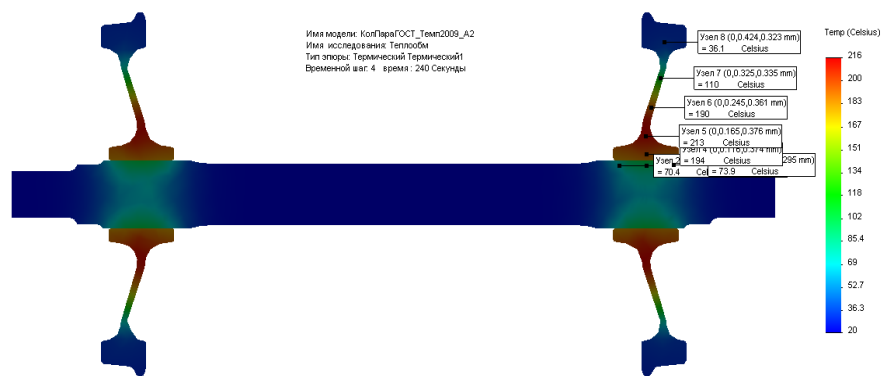


Рисунок 6 – Температурное поле колесной пары в момент скрепления колес с осью

С целью получения при моделировании температурного поля, максимально близкого к экспериментальному. Величина контактного термического сопротивления сборочного зазора так же подбиралась. Температурное поле через 4 мин. после окончания установки изображено на рис. 6; значения температуры в точках приведены в таблице. При этом величина теплопроводности через сборочный зазор равнялась $330 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{С}$.

5 Величина деформации колесной пары и технологические рекомендации

При моделировании процесса деформаций деталей колесной пары за базу принимался внутренний торец обода правого колеса. Полученная деформация в осевом направлении в момент базирования, которое было выполнено через 1 мин. после окончания нагрева, показана на рис. 7. Из рисунка видно, что удлинение подступичных частей вала незначительно по сравнению с деформацией колес.

Полученная деформация суммирует все составляющие звенья размерной цепи и фактически отображает разницу между сборочным технологическим размер A_c и замыкающим звеном - конструкторским размером A_d .



Рисунок 7 – Деформация колесной пары в осевом направлении в момент базирования

Зависимость уменьшения деформации с течением времени показана на рис. 8. Полученные моделированием величины деформации на 0,3-1 мм выше полученных экспериментально [1], где при сборочном технологическом размере 1443 мм размеры колесных пар составляли 1440-1440,5 мм для времени скрепления от 2 до 9 мин.

Полученной зависимостью можно пользоваться для обоснованного назначения сборочного технологического размера при сборке вагонных колесных пар. В случае использования убирающихся упоров деформация принимается на момент базирования колес, то есть в нулевой момент времени. В слу-

чае использования неподвижных подпружиненных упоров деформация принимается в момент скрепления, поскольку фактически вплоть до момента скрепления базовый размер меняется, т.к. происходит «сползание» колес с оси. Величину деформации колесной пары нужно прибавлять к конструкторскому размеру.

Для уменьшения разброса времени скрепления необходимо стабилизировать сборочный зазор. Может быть два направления решения:

- 1 Назначать время нагрева под фактический натяг [2].
- 2 Подбирать детали в сборочный комплект [3].

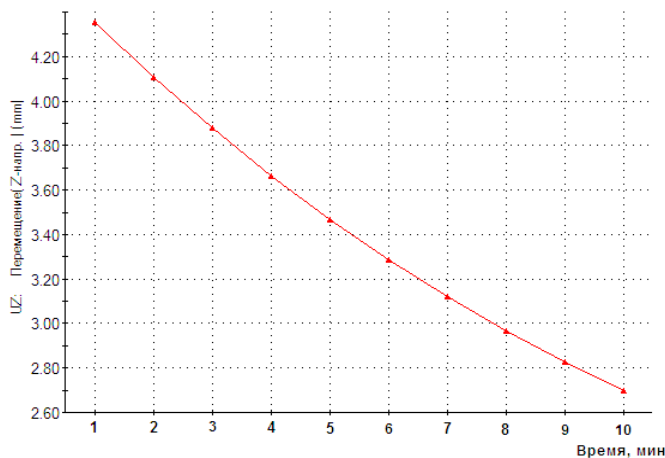


Рисунок 8 – Зависимость изменения расстояния между внутренними торцами ободов от времени

Выводы:

- 1 Предложены зависимости для определения сборочного технологического размера, обеспечивающего требуемую точность положения колес на оси колесной пары железнодорожного транспорта после ее сборки с нагревом.
- 2 Даны рекомендации по настройке сборочных стендов с убирающимися упорами и с пружинными.
- 3 Задача определения технологических размеров для изделий, собираемых с термовоздействием, достаточно точно может моделирована методом конечных элементов средствами SolidWorks Simulation 2009.

Список литературы: 1. Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар. – Харьков: Издательство Харьковского университета, 1965. – 227 с. 2. Зенкин А.С. Арпентьев Б.М. Сборка неподвижных соединений термическими методами. – М.: Машиностроение, 1987. – 128 с. 3. Куприянов А.В. Комплектование при сборке с подбором деталей // Сборка в машиностроении, приборостроении. – 2001. – №11. – С. 8-10.

Поступила в редакцию 23.06.2009

Г.И.ЛВОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.Н.ТКАЧУК, асп., НТУ «ХПИ»

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ТЕРМОУПРУГОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ

Розв'язується задача про термопружний контакт циліндричної оболонки з бандажем. У статті наведені сумісні рівняння згину, теплопровідності та термопружного контакту, одержані для різних випадків контактних умов. Описані аналітичні розв'язки термопружної контактної задачі. Проведено аналіз особливостей одержаних полів переміщень, контактних тисків та внутрішніх силових факторів, а також температури вздовж оболонки і за товщиною.

The task is solved about the thermoelastic contact of cylinder shell with a band. In the paper resulted joint equations of bend, thermoconduction and thermoelastic contact are got for the different cases of contact terms. The analytical solutions of thermoelastic contact task are described. The analysis of features of got fields of movings, contact pressures and internal power factors, and also temperature along a shell and along a thickness, is conducted.

Введение. Как известно, на качественное поведение в контакте тонкостенных элементов влияют 2 основных фактора. Первый – гипотезы распределения искомых величин по толщине. Так, решение, полученное в рамках кинематических гипотез Кирхгофа-Лява, приводит к сосредоточенным по линии реакциям на границах зон контакта [1]. Вопрос о влиянии типа теории упругих оболочек на характер контактных давлений хорошо изучен и представлен в литературе [1-6]. Второй фактор – способ учета контактных условий на лицевых поверхностях и приведение их к срединной поверхности оболочки. Этот фактор также использует приближенное распределение величин по толщине, но выделяется отдельно, потому что влияет на определяющие уравнения только в области контакта. Например, учет деформаций обжатия по теории Рейсснера-Власова исключает сосредоточенные контактные давления, а для гладких оболочек обнуляет контактные давления на границе зон контакта [5].

Во многих машинах и сооружениях тонкостенные конструкции работают при термомеханическом нагружении (цистерны, трубопроводы, камеры сгорания и т. д.). Ключевым при этом является задача построения адекватных моделей термомеханического контакта, адаптированных для тонкостенных элементов конструкций. В зависимости от типа принятой модели решение может обладать теми или иными особенностями. Однако эти вопросы изучены недостаточно. В связи с этим актуальным является исследование качественного поведения решения термоупругих связанных контактных задач оболочек. В данной статье оно проведено на примере цилиндрической оболочки при термоупругом контактном взаимодействии с жестким бандажом.

Постановка задачи. Целью данной работы является изучение качественных особенностей напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при термоупругом контакте с бандажом, а также особенностей тепловых потоков в зависимости от условий термического контакта. Кроме того, была поставлена задача получения аналитических решений, которые могли бы использоваться для сравнения с другими моделями и результатами численного моделирования.

Модельная задача. В качестве модельной была выбрана задача об осесимметричном термоупругом контакте цилиндрической оболочки конечной длины с жестким бандажом (рис. 1). Обозначим радиус срединной поверхности оболочки R , толщину h , ширину расположенного по центру бандажа $-2a$, длину оболочки $2(b+a)$, где b – длина свободного участка оболочки. Зададим температуру бандажа как T_k , а температуру торцевых поверхностей оболочки – T_0 .

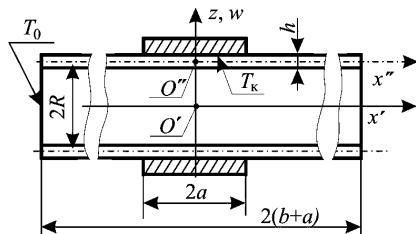


Рисунок 1 – Расчетная схема задачи о термоупругом контакте цилиндрической оболочки с бандажом

Для описания изгиба оболочки будем использовать уточненную теорию оболочек [7], использующую линейную аппроксимацию деформаций $\epsilon_x = \epsilon_{x0} + z\kappa_1$; $\epsilon_y = \epsilon_{y0} + z\kappa_2$; $\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{12}$, где ϵ, γ – деформации в слое на расстоянии z от срединной поверхности; индекс «0» относится к компонентам деформации срединной поверхности, а κ – изменения соответствующих кривизн срединной поверхности, и квадратичную – температуры $T = T_1 + zT_2 + \left\{ 2[z^2 - (h/2)^2] / hk \right\} (q^+ - q^-)$, где T_1 – температура срединной поверхности; T_2 – градиент температуры по толщине; k – коэффициент теплопроводности; q^+ и q^- – тепловые потоки на лицевых поверхностях, а также кубическое распределение для деформации ϵ_z . Данные представления, будучи подставлены в трехмерные уравнения термоупругости, удовлетворяют их интегрально до четвертой степени. По этой модели осесимметричный изгиб цилиндрической оболочки описывается уравнением относительно прогиба $w(x)$ срединной поверхности

$$Dw'''' + Kw = p - D\alpha(1-\nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R, \quad (1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; $K = Eh/R^2$ – окружная

жесткость; α – коэффициент линейного расширения; p – давление, приведенное к срединной поверхности; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

В зоне контакта перемещение на внешней поверхности должно соответствовать зазору в контакте: $w^+ = w_k$. Интегрируя ε_z по z от срединной до внешней поверхности, получим выражение для w^+ :

$$w^+ = w + \frac{vh^2}{8} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \alpha T_2 \right) - \frac{13hp^+}{32E} + \alpha \left(\frac{3h}{8} T_1 + \frac{23}{96} h^2 T_2 \right), \quad (2)$$

где p^+ – контактное давление на внешней поверхности.

Подстановка p^+ в уравнение (1) приводит к уравнению изгиба в контакте

$$Dw^{IV} + Kw + C(-w_k + w) + Bw'' = p - D\alpha(1 - \nu)(T_2)'' + \\ + K\alpha T_1 R + C\alpha \left[\frac{h}{8} T_1 + \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h^2 T_2 \right],$$

или

$$Dw^{IV} + Bw'' + (K + C)w = C \left\{ w_k - \alpha h \left[\frac{3}{8} T_1 + \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h^2 T_2 \right] \right\} - \\ - D\alpha(1 - \nu)(T_2)'' + K\alpha T_1 R. \quad (3)$$

Здесь $C = 32E/13h$ – жесткость на обжатие; $B = 4Eh\nu/13$ – коэффициент распределительной способности [5].

Температурное поле также описывается системой дифференциальных уравнений. В области, свободной от контакта, они имеют вид [8]:

$$\begin{cases} kh(T_1)'' + q^+ + q^- = 0; \\ \left[\frac{kh^2}{12} (T_2)'' - kT_2 + \frac{q^+ - q^-}{2} \right] = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где через q^+ , q^- обозначены тепловые потоки на верхней и нижней лицевых поверхностях соответственно.

В области контакта дополнительно должны быть выполнены условия идеального теплового контакта

$$T^+ = T_1 + (h/2)T_2 = T_k \quad (5)$$

или неидеального

$$(h_c)^{-1} q^+ = T_k - [T_1 + (h/2)T_2], \quad (6)$$

где h_c – контактная температурная проводимость.

В общем случае контакт цилиндрической оболочки с жестким бандажом может быть множественным, то есть могут чередоваться зоны прилипания и отрыва от бандажа. Последовательность этих зон определяет конфигурацию контакта. Выше рассмотрены дифференциальные уравнения внутри отдельных зон.

Теперь рассмотрим условия сопряжения на границах зон контакта с номерами $i, i + 1$. Для механических переменных необходимо выполнение условий:

$$w^{(i)} = w^{(i+1)}; \quad (w^{(i)})' = (w^{(i+1)})'; \quad M^{(i)} = M^{(i+1)}; \quad Q^{(i)} = Q^{(i+1)}. \quad (7)$$

Использование различных условий температурного контакта приводит к различным условиям сопряжения. Для идеального теплового контакта цилиндрической оболочки и бандажа они имеют вид:

$$T_1^{(i)} = T_1^{(i+1)}; \quad T_2^{(i)} = T_2^{(i+1)}; \quad kh(T_1^{(i+1)} - T_1^{(i)})' = H^{(i)}; \\ \frac{kh^2}{6} \left[(T_2^{(i+1)})' - (T_2^{(i)})' \right] = H^{(i)}, \quad (8)$$

где $H^{(i)}$ – сосредоточенный на границе контакта тепловой поток.

Для условий неидеального контакта достаточно только непрерывности T_1 и T_2 и их производных:

$$T_1^{(i)} = T_1^{(i+1)}; \quad (T_1^{(i)})' = (T_1^{(i+1)})'; \quad T_2^{(i)} = T_2^{(i+1)}; \quad (T_2^{(i)})' = (T_2^{(i+1)})'. \quad (9)$$

Таким образом, модель идеального термоупругого контакта приводит в общем случае к сосредоточенным тепловым потокам на границе зон контакта.

Система уравнений (1), (3)-(5) с условиями сопряжения (7)-(9) и граничными условиями составляют замкнутую систему уравнений.

Далее получим аналитическое решение для фиксированной конфигурации контакта при идеальном термоупругом контакте (рис. 2).

Общее решение в области 1 (см. рис. 2) имеет вид:

$$T_1^{(1)} = C_1 + C_2 x; \quad T_2^{(1)} = C_3 \operatorname{sh} \beta_{t0} x + C_4 \operatorname{ch} \beta_{t0} x;$$

$$w^{(1)} = C_5 \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x + C_6 \operatorname{ch} \beta x \sin \beta x + C_7 \operatorname{sh} \beta x \cos \beta x + C_8 \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x + w_{t1}^{(1)} + w_{t2}^{(1)};$$

где $w_{t1}^{(1)} = \alpha R (C_1 + C_2 x)$ – частное решение для температурной нагрузки $T_1^{(1)}$;

$$\beta_{t0} = (2\sqrt{3})/h; \quad \beta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)/R^2 h^2};$$

$$w_{t2}^{(1)} = -[(C_3 \operatorname{sh} \beta_{t0} x + C_4 \operatorname{ch} \beta_{t0} x) \alpha (1-\nu)] (\beta_{t0})^2 / [(\beta_{t0})^4 + 4\beta^4].$$

Примечание: $w_{t2}^{(1)}$ дает быстро затухающее решение вида $e^{-\beta_{t0} x}$ с характерным размером h ; $w_{t1}^{(1)}$ меняется с характерным расстоянием примерно b ; а

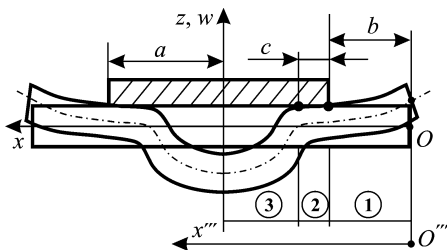


Рисунок 2 – Характерная картина распределения прогибов оболочки и контактных зон на фиксированной конфигурации контакта с одной зоной отрыва: 1 – свободный участок оболочки; 2 – зона термоупругого контакта цилиндрической оболочки с бандажом; 3 – зона отрыва

общее решение имеет характерный размер осцилляции $\sqrt{Rh}$. Таким образом, в общем решении сочетаются 3 слагаемых с резко отличающимися масштабами $b \gg \sqrt{Rh} \gg h$, что усложняет численное моделирование решения подобных задач.

Общее решение на интервале 2 (см. рис.2):

$$T_1^{(2)} = T_k + C_9 \operatorname{sh} \beta_{rk} x + C_{10} \operatorname{ch} \beta_{rk} x; \quad T_2^{(2)} = -\frac{2}{h} (C_9 \operatorname{sh} \beta_{rk} x + C_{10} \operatorname{ch} \beta_{rk} x);$$

$$w^{(2)} = C_{11} \operatorname{ch} r x \cos s x + C_{12} \operatorname{ch} r x \sin s x + C_{13} \operatorname{sh} r x \cos s x + C_{14} \operatorname{sh} r x \sin s x + w_t^{(2)};$$

$$w_t^{(2)} = (C_9 \operatorname{sh} \beta_{rk} x + C_{10} \operatorname{ch} \beta_{rk} x) \frac{\alpha \left[-\frac{3}{8} Ch + KR - 2D(1-\nu)(\beta_{rk})^2 + 2C \left(\frac{23}{96} + \frac{\nu}{8} \right) h \right]}{D(\beta_{rk})^4 + B(\beta_{rk})^2 + (K+C)} +$$

$$+ \left[\alpha T_k (KR - \frac{3}{8} CR) \right] / (K+C),$$

где $\beta_{rk} = \sqrt{3}/h$, а r, s – соответственно вещественная и мнимая часть корней уравнения $D\lambda^4 + B\lambda^2 + (C+K) = 0$.

Характерный размер осцилляции $1/r \sim h$.

Решение на участке 3 имеет вид, аналогичный виду на 1-ом, и включает в себя постоянные интегрирования $C_{15} - C_{22}$. В условия сопряжения входят также сосредоточенные потоки H^1 и H^2 . Кроме того, на границе контакта при $x = b + c$ (см. рис. 2) контактное давление равно нулю.

Таким образом, для определения 22-х постоянных интегрирования C_i , двух тепловых потоков H^1 и H^2 , а также ширины зоны контакта c имеется 8 граничных условий, 16 условий сопряжения и условие обнуления контактного давления.

Совокупность дифференциальных уравнений, граничных условий и условий сопряжения образуют замкнутую систему разрешающих уравнений. В статье она получена для фиксированной конфигурации контактных зон. Однако данная постановка не снижает общности подхода, так как обладает всеми качественными особенностями для случая множественного контакта. При этом разрешающая система уравнений для общего случая образуется прибавлением блоков уравнений и условий сопряжения в соответствии с числом зон контакта – отрыва.

Результаты исследований. На рис. 3-8 представлены результаты исследований для $R = 1$ м; $a = 0,25$ м; $h = 0,1$ м; $b = 5$ м; $k = 1$ Вт/К·м; $T_0 = 100$ °С; $\nu = 0,3$; $E = 1$ МПа; $\alpha = 10^{-4}$ К⁻¹. Рассматривается случай единичной пары «зона контакта – зона отрыва» (см. рис. 2).

Анализ представленных распределений прогибов, температур, изгибаю-

шего момента дает возможность отметить следующие характерные особенности полученного решения.

1. Прогиб срединной линии вне и в зоне контакта соответствует конфигурации контакта.
2. Зона контакта составляет $c = 0,016$ м, это меньше толщины цилиндрической оболочки.
3. Контактные давления распределены на локальном участке с максимумом значений на кромке и нулевым – на границе контакта.
4. В зоне контакта с кромкой бандажа происходит всплеск градиентов температур по толщине оболочки. В данной области присутствует локально сосредоточенный тепловой поток, который и приводит к появлению данного эффекта.
5. Изгибающий момент имеет резкие всплески с осцилляцией в районе контакта оболочки с бандажом

Таким образом, напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки, а также распределение контактных давлений и температур, как и прогнозировалось по виду общего аналитического решения, имеет несколько областей, в которых характер распределения компонент решения резко изменяется. Это является существенным обстоятельством, предопределяющим выбор методов и параметров моделей при численном решении подобных задач, которое, в отличие от рассматриваемой, не имеют решения в аналитическом виде.

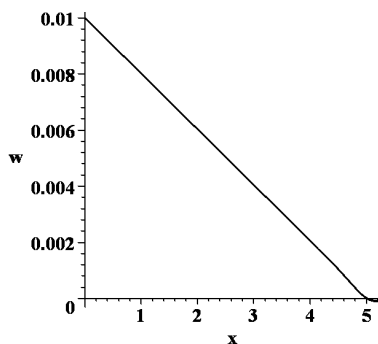


Рисунок 3 – Распределение прогиба (м) цилиндрической оболочки вдоль оси x (м)

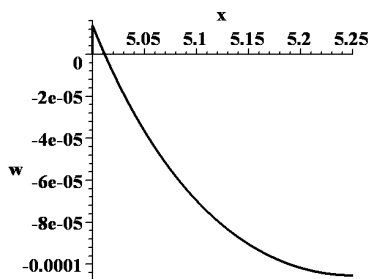


Рисунок 4 – Прогиб цилиндрической оболочки (м) в области контакта вдоль оси x (м)

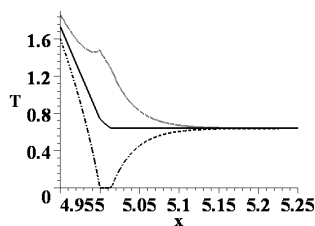


Рисунок 5 – Распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) в оболочке в области контакта вдоль оси x (м): серая линия (верхняя) – внутренняя поверхность, черная линия (средняя) – срединная поверхность, пунктирная линия (нижняя) – внешняя поверхность

Результаты параллельно проведенного численного моделирования в ANSYS с помощью четырехугольных элементов PLANG223 и аналитическое решение качественно полностью совпадают, а количественно отличаются не более чем 5-10 %, что достаточно хорошо для данной задачи. При этом очень важно, что соответствие распределений наблюдается не только вдоль срединной поверхности, но и по всему объему оболочки.

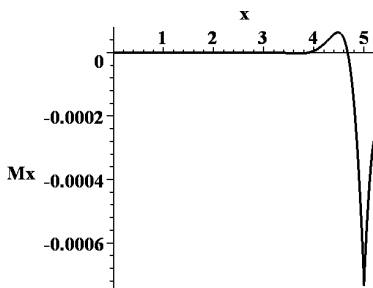


Рисунок 6 – Распределение изгибающего момента в цилиндрической оболочке ($\text{Н} \cdot \text{м/м}$) вдоль оси x (м)

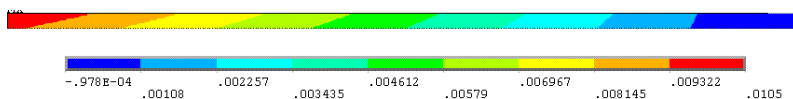


Рисунок 7 – Распределение прогибов точек оболочки (м), полученное в программном комплексе ANSYS при решении контактной термоупругой связанной задачи

Выводы. По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Решение термоупругих контактных задач для тонкостенных элементов содержит краевые эффекты двух масштабов: первый – с характерным размером h – отвечает за быстро затухающий градиент температур по толщине T_2 ; второй – изгибный краевой эффект с характерным размером $\sqrt{Rh}$. Кроме того, в общем решении содержится безмоментная составляющая с характерным размером $b \gg \sqrt{Rh} \gg h$ (для длинных оболочек).
2. При условии идеального термического контакта цилиндрической оболочки с жестким бандажом на границах зон контакта возникают сосредоточенные по линии тепловые потоки.
3. Получено аналитическое решение термоупругой контактной задачи, которое может служить эталоном для верификации численных схем и других моделей оболочек.

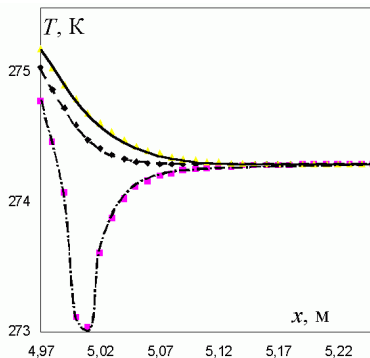


Рисунок 8 – Распределение температуры по длине цилиндрической оболочки: — — внутренняя поверхность; - - - срединная поверхность; - - - внешняя поверхность

4. Полученные в работе совместные уравнения изгиба оболочек, термопроводности и термоупругого контакта могут служить основой для формирования термоупругого осесимметричного конечного элемента для решения контактных задач.

Остается открытым вопрос оптимальности (адекватности) степеней аппроксимаций $\epsilon_x/T/\epsilon_z$ как 1/2/3 по нормальной координате оболочки, что является объектом дальнейших исследований.

Список литературы: 1. *Пелех Б.Л., Сухорольский Н.А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с. 2. *Григолюк Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с. 3. *Детинко Ф.М., Фастовский В.М.* О посадке бандажа на цилиндрическую оболочку // Прикладная механика. – 1975. – Том. II. – Вып. 2. 4. *Львов Г.И.* Взаимодействие упругопластической оболочки с жестким штампом // Прикладная механика. – 1980. – Том. 16. – № 11. 5. *Блох М.Б.* К вопросу модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикладная механика. – 1977. – Том. XIII. – Вып. 5. – С. 34-42. 6. *Львов Г.И., Ткачук А.Н.* О влиянии параметров и гипотез деформирования цилиндрической оболочки на зоны контакта с бандажом // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – 2006. – № 32. – С.98-104. 7. *Галинши А.К.* Уточненные уравнения движения термоупругих ортотропных оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972. – Вып. 8. – С. 365-392. 8. *Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наукова думка, 1979. – 364 с.

Поступила в редколлегию 29.05.2009

УДК 531.382:621.822.527

Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РОТОРА В МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРИНЯТЫХ УПРОЩЕНИЙ. ЧАСТЬ 1. ЖЕСТКИЙ РОТОР

У роботі запропоновано формування математичної моделі ротора в магнітних підшипниках різних типів. Моделювання проводиться на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду і рівнянь Максвелла, наведено і обґрунтовано варіанти математичних моделей, які записані при різних припущеннях і обмеженнях.

In work, forming of mathematical model of rotor on magnetic bearings of different types is offered. The design on the basis of Lagrange differential equations the second kind and equations of Maxwell is performed. There are represented and grounded variants of mathematical models in the work. The models are written down for different suppositions and limitations.

Введение. Магнитный подвес роторов является все чаще применяемым

в настоящее время типом опор роторных машин различного назначения: от малогабаритных, таких, как электрошпиндель, до больших – роторов турбокомпрессоров газоперекачивающих станций и турбин атомных электростанций.

К основным, часто используемым типам магнитных подшипников (МП), относятся МП на постоянных магнитах (МППМ), электромагнитные резонансные подшипники, активные магнитные подшипники (АМП) и другие. Каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками, но по функциональным особенностям все они близки к упруго-демпферным опорам [1]. Динамическое поведение, характерное роторам на упруго-демпферных опорах (УДО), свойственно и роторам в магнитных подшипниках, но с некоторыми оговорками, а в некоторых случаях и с существенными отличиями в связи с особенностями механического взаимодействия между магнитными полями.

Однако основные принципы описания динамики роторов на УДО [2, 3] могут быть использованы и для роторов на магнитных подшипниках. Для них также характерно разделение на жесткие и гибкие ротора, докритические и закритические из-за зависимости форм колебаний ротора от податливости опор, которые показаны на рис. 1. При жестких опорах первой критической скорости соответствует изгибная форма колебаний (рис. 1, в). При податливых в достаточной мере по сравнению с ротором опорах он проходит первые две или три (при учете колебаний в осевом направлении) критические скорости как жесткий, образуя цилиндрическую и коническую прецессии (рис. 1, а). Но при этом ротор является закритическим. При жесткости опор, сопоставимой с жесткостью самого ротора, формы колебаний представляют собой среднее между предыдущими случаями (рис. 1б). В этом случае не учитывать деформируемость вала при исследовании первых двух критических режимов некорректно. Кроме того, из-за особенностей колебаний роторов на податливых опорах (как УДО, так и МП) следует отметить, что колебания являются поперечными, но не всегда изгибными.

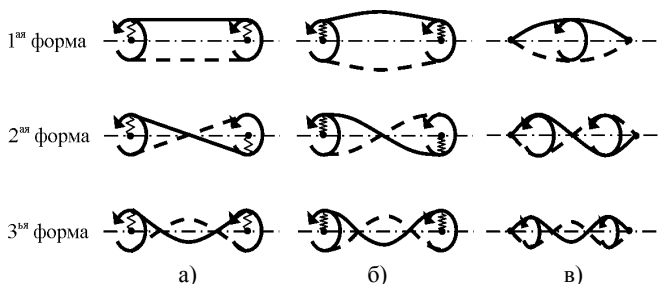


Рисунок 1. Формы поперечных колебаний роторов в зависимости от податливости опор: а) ротор на чрезвычайно податливых опорах, б) податливых, в) жестких

Наиболее распространенными и представляющими большую опасность при эксплуатации являются вынужденные колебания, обусловленные статической и моментной неуравновешенностями, а также другие виды колебаний, такие, как автоколебания. Свойства роторов на упругих опорах позволяют снизить амплитуды этих колебаний вследствие проявления эффекта самоцентрирования после прохождения первых двух критических скоростей. Для более эффективного использования этого эффекта на практике, т.е. снижения порога зоны повышенных вибраций, сужения данной зоны и уменьшения амплитуд необходимо уменьшение жесткости динамической системы ротор–опоры, так чтобы первые две критические скорости располагались на частотах вращения более низких, чем рабочие. При этом необходимо обеспечить условия для легкого перехода через них, например, с помощью применения способа прохождения резонансов за счет управления жесткостью и демпфирующими свойствами магнитных подшипников [1].

Однако проявление некоторых резонансных режимов роторов в АМП существенно отличается по своей природе от традиционных упруго-демпферных механических опор. Так, изгибные колебания ротора в АМП могут возникать не только при его вращении, но и в невращающемся состоянии, что связано с частотой среза управляемого подвеса ротора и потерей устойчивости подвеса по соответствующей форме из-за энергетической подпитки упругих колебаний вследствие непредвиденной положительной обратной связи в подвесе [4, 5].

Таким образом, для численного исследования динамики роторов в магнитных подшипниках могут быть использованы математические модели, записанные аналогично соответствующим моделям роторов в УДО, но с учетом специфики, проявляющейся во взаимодействии магнитных, электромагнитных и электрических полей, и сил, вызванных этим взаимодействием.

1. Направление исследований (постановка задачи). Математическому описанию динамики жестких и гибких роторов в механических УДО посвящено множество монографий и публикаций [2-3, 6-10]. Всем математическим моделям присущи вносимые авторами упрощения на основании принятых допущений, такие, как ограничение количества и малость обобщенных координат, неучет или неполный учет нелинейных членов уравнений и параметров неуравновешенности, неучет гироскопических моментов, внутреннего трения, нелинейной инерционности и т.д. Для описания гибких роторов используется либо теория изгиба Тимошенко, которая учитывает деформации сдвига, либо техническая теория изгиба, при использовании которой деформациями сдвига пренебрегают.

Для подавляющего большинства математических моделей роторов в АМП, известных из литературы, характерно то, что описание динамики сводится к линеаризации дифференциальных уравнений движения и уравнений,

описывающих электромагнитные процессы в системе, которые записываются на основании второго закона Кирхгофа [4-5, 11-13]. Нелинейные модели практически не используются ввиду основного акцента при исследованиях на выбор и совершенствование систем и алгоритмов управления. Отсутствует также взаимосвязь между радиальными и осевыми смещениями. Математическое моделирование роторов в МППМ на основании уравнений движения практически не применяется, основная литература посвящена либо экспериментальным исследованиям [14-15], либо конечноэлементным расчетам различных конструктивных вариантов магнитных подшипников [16-18].

Анализ источников позволяет сделать некоторые выводы о недостатках применяемых на сегодняшний день математических моделей динамики роторов в магнитных подшипниках, в частности, АМП. Так, численные эксперименты для выявления динамических свойств системы «ротор в АМП» выполняются на основании линеаризации уравнений движения и уравнений для токов [4, 5, 11, 12, 19-21]. При этом, с одной стороны, учитываются особенности действия управляемых магнитных сил, создаваемых электромагнитами, на объект управления (ротор), а с другой – линеаризованные уравнения не позволяют адекватно передать процессы при нахождении системы в предельных режимах, таких, как насыщение магнитной цепи, нулевой ток или нулевой зазор, а также не дают возможности отобразить другие характерные для такой системы нелинейности. Если же в математической модели электромагнитными уравнениями пренебрегают, а действия электромагнитов на ротор заменяются пусть даже нелинейными, но относительно только механических обобщенных координат силами, которые в некотором приближении заменяют магнитные, то неадекватность моделей будет обусловлена учетом особенностей электромагнитных процессов, например, постоянной времени изменения токов в обмотках электромагнитов из-за большой индуктивности.

Целью данной работы является математическое описание динамического поведения ротора в магнитном, электромагнитном или комбинированном подвесе с адекватным отражением нелинейной взаимосвязи происходящих в такой системе процессов (электрических, магнитных и механических), а также систематизация и определение возможных вариантов записи уравнений колебаний с сохранением нелинейных слагаемых разных порядков малости в сопоставлении с порядком слагаемых в функциях, описывающих восстанавливающие магнитные (пондеромоторные) силы.

2. Описание роторов в МП как динамических электромагнитомеханических систем. В данной работе рассматривается ротор в магнитных подшипниках различных типов (МППМ, АМП) в плане описания его динамического поведения, как в случае рассмотрения его как твердого тела (жесткий ротор – Часть 1), так и в случае учета его деформируемости (гибкий ротор – Часть 2).

Одним из вариантов вывода уравнений движения для механической системы является использование уравнений Лагранжа второго рода относительно независимых обобщенных механических координат [22, 23 с. 26]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = Q_r \quad (r=1, \dots, M), \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия; Π – потенциальная энергия; q_r – обобщенные механические координаты; Q_r – непотенциальные обобщенные силы; $\mathfrak{R}$ – диссипативная функция; M – число обобщенных механических координат.

В случае электромеханических систем они описываются уравнениями Лагранжа–Максвелла, имеющими структуру уравнений механики [23, 24]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial(T + \tilde{W})}{\partial q_r} + \frac{\partial(\Pi + V)}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = Q_r, & (r=1, \dots, M) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial i_k} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial i_k} + \frac{\partial V}{\partial \chi_k} = E_k, & (k=1, \dots, N) \end{cases} \quad (2)$$

где $\tilde{W}$ – коэнергия магнитного поля [5 стр. 53, 25]; V – энергия электрического поля; $\tilde{\Psi}$ – электрическая диссипативная функция; E_k – алгебраическая сумма сторонних электродвижущих сил; i_k – контурные токи; χ_k – заряды конденсаторов; N – число замкнутых неразветвленных контуров, причем:

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N i_k i_s \int \frac{1}{\mu} B_k B_s dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N L_{ks} i_k i_s; \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \chi_k^2 \int_{\Omega_k} \varepsilon E_k^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\chi_k^2}{C_k}; \quad (4)$$

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N R_{ks} i_k i_s, \quad (5)$$

где B_k – магнитные индукции магнитных цепей; L_{ks} – коэффициенты индукции электромагнитных цепей; ε – диэлектрическая постоянная; C_k – емкости конденсаторов; R_{ks} – активные сопротивления.

В случае, когда токи проводимости замкнуты и в электрических ветвях отсутствуют конденсаторы, электромеханические системы, кроме уравнений Лагранжа–Максвелла (2), могут описываться уравнениями, аналогичными уравнениям Рауса в механике [23, 24]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{\partial W}{\partial q_r} + Q_r, & (r=1, \dots, M) \\ \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^N R_{Cks} \frac{\partial W}{\partial \Psi_s} = E_k, & (k=1, \dots, N) \end{cases} \quad (6)$$

где W – энергия магнитного поля [5 стр. 53, 25]; Ψ_k – потоки индукции (потокосцепления), причем:

$$W = W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M); \quad \Psi_k = \frac{\partial W}{\partial i_k} = \sum_{s=1}^N L_{ks} i_s; \quad (7)$$

$$i_s = \frac{\partial W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M)}{\partial \Psi_s} = \sum_{k=1}^N L_{ks}^{-1} \Psi_k \quad (s = 1, \dots, N),$$

где $L_{ks} = L_{ks}(q_1, \dots, q_M)$ – коэффициенты само- и взаимной индукции контуров; L_{ks}^{-1} – элементы матрицы обратной матрице с коэффициентами L_{ks} [24].

В уравнениях (6) члены $-\partial W/\partial q_r$ есть пондеромоторные силы, то есть обобщенные силы, обусловленные механическим воздействием магнитного или электромагнитного поля [24]. Эти силы могут быть определены дифференцированием по обобщенным механическим координатам функции магнитной энергии, полученной с использованием эквивалентных схем замещения электромагнитных цепей магнитных подшипников [5, 26, 27].

Другим способом определения пондеромоторных сил является их вычисление по тензору напряжений Максвелла на основе конечно-элементного анализа электромагнитных полей, как для МППИМ [28], так и для АМП [29]. В этом случае силы являются функциями обобщенных механических координат в отличие от первого варианта, где они зависят еще и от токов управления или потокоцеплений. Тогда математическая модель системы «ротор в МП» будет ограничена только уравнениями (1) с найденными силами в правой части, а закон управления АМП, то есть закон изменения токов в обмотках электромагнитов будет учтен на этапе конечноэлементного расчета. Но тогда модель не будет отображать электромагнитные процессы в полной мере.

Еще один способ определения магнитных сил – использование для постоянных магнитов МППИМ токовых моделей [30]. В них магниты представляются как распределения эквивалентных токов. Для решения применяются стандартные методы анализа электрических цепей постоянных токов.

Если ротор находится в комбинированном пассивно-активном полном магнитном подвесе, то для описания его динамики может быть использован один из перечисленных подходов, либо их некоторая комбинация.

3. Математическое моделирование колебаний жесткого ротора в МП. 3.1. Постановка задачи и нелинейные уравнения движения, описывающие колебания твердых тел в потенциальном поле сил. В общем случае колебания твердых тел характеризуются нелинейной связанностью обобщенных координат [24]. На начальном этапе многие задачи о колебаниях тел рассматриваются на основе применения теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако представление линейной теории колебаний твердых тел не всегда адекватно отображает процессы, происходящие в системе. Наличие нелинейных связей при сочетании некоторых условий может привести к перераспределению энергии колебаний между

обобщенными координатами механической системы. Тогда динамическое поведение твердого тела, в данном случае ротора, может существенно отличаться от моделируемого на основе линейного подхода, т.е. колебания могут иметь совершенно другие качественные и количественные закономерности в зависимости от величины перераспределения энергии.

При рассмотрении колебаний твердых тел, находящихся в потенциальном поле сил (гравитации, упругих сил и т.д.), считают, что перемещения x_0 , y_0 , z_0 центра масс тела относительно осей неподвижной системы координат $Oxyz$ и углы поворота ψ , ϑ , φ не малые, но такие, что в уравнениях движения с приемлемой точностью могут быть сохранены только члены не выше третьего порядка относительно обобщенных координат и их производных. Тогда уравнения колебательного движения твердого тела независимо от характера потенциального поля и внешних сил имеют вид [24]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 + f'_1(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_1(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_1(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = H_x(t) \\ m\ddot{y}_0 + f'_2(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_2(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_2(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = H_y(t) \\ m\ddot{z}_0 + f'_3(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_3(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_3(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = H_z(t) \\ J_1\ddot{\psi} + f'_4(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_4(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_4(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\psi(t) \\ J_2\ddot{\vartheta} + f'_5(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_5(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_5(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\vartheta(t) \\ J_3\ddot{\varphi} + f'_6(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_6(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_6(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\varphi(t) \end{cases} \quad (8)$$

где m – масса тела (ротора); J_1 , J_2 , J_3 – моменты инерции тела относительно его главных центральных осей; $f'_i, f''_i, f'''_i (i=1..6)$ – функции первой, второй и третьей степеней относительно обобщенных координат и их производных (отражают соответственно линейные и нелинейные силы и моменты, обусловленные силами инерции и потенциального поля); $H(t)$, $M(t)$ – внешние возмущающие силы и моменты, зависящие от времени.

Такую же структуру будут иметь и уравнения колебаний твердого тела, которое находится в потенциальном поле упругих сил.

Если рассматривается жесткий ротор в упругих опорах, в нашем случае магнитных подшипниках, то на него при колебаниях будут действовать реакции упругих пружин и силы сопротивления движению, внешние возмущающие силы и моменты, зависящие от времени. В этом случае уравнения колебательного движения тела относительно неподвижной системы координат с удержанием величин до третьего порядка малости относительно обобщенных координат и их производных имеют вид [23 с. 54, 24 с. 266]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 + b_1\dot{x}_0 + c_1x_0 + f'_1(x_0, \dots, \varphi) + f''_1(x_0, \dots, \varphi) = H_x(t) \\ m\ddot{y}_0 + b_2\dot{y}_0 + c_2y_0 + f'_2(x_0, \dots, \varphi) + f''_2(x_0, \dots, \varphi) = H_y(t) \\ m\ddot{z}_0 + b_3\dot{z}_0 + c_3z_0 + f'_3(x_0, \dots, \varphi) + f''_3(x_0, \dots, \varphi) = H_z(t) \\ J_1\ddot{\psi} + b_4\dot{\psi} + c_4\psi + f'_4(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) + f''_4(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) = M_\psi(t) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} J_2 \ddot{\vartheta} + b_5 \dot{\vartheta} + c_5 \vartheta + f_5''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) + f_5'''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) = M_{\vartheta}(t) \\ J_3 \ddot{\varphi} + b_6 \dot{\varphi} + c_6 \varphi + f_6''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) + f_6'''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) = M_{\varphi}(t) \end{cases}$$

где c_i – коэффициенты, которые определяются упругой системой; b_i – коэффициенты, которые характеризуют сопротивление относительно движению, рассматриваемого твердого тела – жесткого ротора.

Принимая во внимание предположения о малости обобщенных координат и их производных, нелинейные члены уравнения (9) можно считать малыми по сравнению с линейными членами. Полагая также силы сопротивления движению малыми и вводя малый параметр ν ($\nu > 0$), уравнения (9) можно представить в квазинормальной форме [23 с. 54, 24 с. 266]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \lambda_1^2 x_0 = -\nu \tilde{f}_1(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0) + H_x(t)/m \\ \ddot{y}_0 + \lambda_2^2 y_0 = -\nu \tilde{f}_2(x_0, \dots, \varphi, \dot{y}_0) + H_y(t)/m \\ \ddot{z}_0 + \lambda_3^2 z_0 = -\nu \tilde{f}_3(x_0, \dots, \varphi, \dot{z}_0) + H_z(t)/m \\ \ddot{\psi} + \lambda_4^2 \psi = -\nu \tilde{f}_4(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) + M_{\psi}(t)/m \\ \ddot{\vartheta} + \lambda_5^2 \vartheta = -\nu \tilde{f}_5(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) + M_{\vartheta}(t)/m \\ \ddot{\varphi} + \lambda_6^2 \varphi = -\nu \tilde{f}_6(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}) + M_{\varphi}(t)/m \end{cases} \quad (10)$$

где $\tilde{f}_i$ – модифицированные функции второй и третьей степени относительно обобщенных координат и их производных; $\lambda_1^2 = c_1 / m, \dots, \lambda_6^2 = c_6 / J_3$.

Дальнейший анализ колебаний любого твердого тела, в том числе и жесткого ротора, математически моделируемых уравнениями (10), предполагает решение двух задач. Первая из них заключается в определении условий возникновения пространственных нелинейных колебаний и сводится к исследованию устойчивости некоторых резонансных вынужденных периодических или почти периодических режимов колебаний. Вторая связана с исследованием резонансных характеристик пространственных колебаний и сводится к построению решений для этих режимов колебаний, а также к изучению их устойчивости в областях неустойчивости равновесных состояний.

3.2. Расчетная схема жесткого ротора в магнитных подшипниках. В

большинстве случаев в моделях используются линеаризованные уравнения, в которых сохраняются члены первого порядка относительно обобщенных координат и их производных [2-6]. Однако рассматриваемой системе присуще проявление нелинейных эффектов [31]. Поэтому при получении уравнений движения ротора в МП необходимо учесть практику описания нелинейных колебаний роторов в механических нелинейных опорах [7-10, 24, 32].

Рассмотрим ротор с диском общей массой m и центром инерции (масс) в точке C , который представлен на рис. 2.

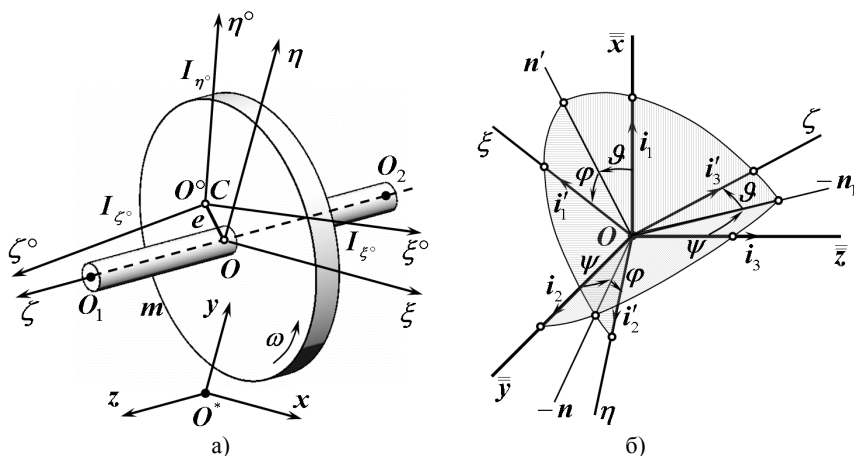


Рисунок 2 – Пространственная расчетная схема: а) модель вращающегося абсолютно жесткого ротора, б) системы координат и углы Эйлера (самолетные)

Пусть ротор соединяется с диском в точке O , лежащей на его оси жесткости. Введем три правые прямоугольные системы координат (рис. 2, а):

- 1) O^*xyz – неподвижная система, ось O^*z которой проходит через центры опор ротора (радиальных магнитных подшипников);
- 2) $O^*\xi\eta\zeta$ – подвижная система, связанная с ротором, ось $O^*\zeta$ которой совпадает с геометрической продольной осью (осью вращения), две другие оси $O^*\xi$ и $O^*\eta$ совпадают с направлениями главных центральных осей жесткости ротора в месте соединения с диском;
- 3) $O^o\xi^o\eta^o\zeta^o$ – система главных центральных осей ротора с центром O^o в точке C и с главными центральными моментами инерции J_{ξ^o} , J_{η^o} (экваториальные) и J_{ζ^o} (полярный).

Расположение осей инерции $O^o\xi^o\eta^o\zeta^o$ относительно осей жесткости $O^*\xi\eta\zeta$ определяется параметрами динамической неуравновешенности – линейными e_ξ , e_η (статическая неуравновешенность) и угловыми γ_ξ , γ_η (моментная неуравновешенность).

Положение твердого тела (в случае жесткого ротора) или диска (в случае невесомого упругого вала) может быть определено с помощью двух систем координат – инерциальной (неподвижной) системы O^*xyz и подвижной системы $O^*\xi\eta\zeta$. Размещение подвижной системы по отношению к неподвижной определяется координатами x_0 , y_0 , z_0 ее полюса O (или радиус вектором $r_0 = \overrightarrow{O^*O}$) и углами, определяющими положение $O^*\xi\eta\zeta$ по отношению к O^*xyz .

В качестве этих углов могут использоваться углы Эйлера (прецессии, нутации и чистого вращения) [22-23]. Угол нутации всегда остается малым, а углы прецессии и собственного вращения могут изменяться в широких пределах,

хотя их алгебраическая сумма является малой величиной. Однако в допущении малости отклонений ротора от положения равновесия все углы кроме угла собственного вращения малы. Тогда вместо классических углов Эйлера могут быть использованы самолетные или корабельные углы Эйлера, но только система самолетных осей является правой, что соответствует принятым для ротора системам координат (рис. 2, а).

Введем систему самолетных осей и углов (рис. 2, б) [22-23]. Здесь подвижная система координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ имеет начало в полюсе O , а оси параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат O^*xyz . За основные оси примем $O\bar{\zeta}$ и $O\bar{x}$. Проектируя $O\bar{\zeta}$ на основную плоскость $O\bar{y}\bar{z}$, строим вектор $-n_1$, расположенный в той же плоскости вектор n так, что i_1, n, n_1 образуют ортонормированный правый триэдр (рис. 2, б). Вектор n' расположен по проекции i_1 на основную плоскость $O\bar{\zeta}\eta$ (его проще всего разыскать, построив направление, перпендикулярное к i'_1 в плоскости основных осей $O\bar{\zeta}$ и $O\bar{x}$; в ней же расположен и вектор n_1).

Углы ψ, ϑ, φ имеют названия рысканья, тангажа и крена соответственно. Они характеризуют повороты ротора вокруг осей $O\bar{x}$, $O\bar{\zeta}$ и On , где n – единичный вектор, который определяет положительное направление линии узлов. Угол ψ – угол между $O\bar{z}$ и $-n_1$, отсчитываемый вокруг $O\bar{x}$; ϑ – угол между $-n_1$ и i'_3 , отсчитываемый вокруг $-n$; φ – угол между n' и $O\bar{\zeta}$, отсчитываемый вокруг $O\bar{\zeta}$, при рассмотрении в качестве твердого тела – ротора он может также считаться углом собственного вращения [22 с. 47-48].

Положительным направлением поворота в правой системе координат считается поворот против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси, вокруг которой производится поворот: $O\bar{x}$, $-n$ и $O\bar{\zeta}$ (см. рис. 2). Направляющие косинусы для введенных самолетных углов, характеризующие взаимосвязь подвижной и неподвижной систем координат, представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Косинусы самолетных углов

α	ξ	η	ζ
$\bar{x} (x)$	$\cos \vartheta \cos \varphi$	$-\cos \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta$
$\bar{y} (y)$	$\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta$	$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
$\bar{z} (z)$	$\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta$	$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \vartheta$

3.4. Нахождение сил инерции. Кинетическая энергия жесткого ротора, как и любого другого твердого тела, положение которого определяется двумя системами координат O^*xyz и $O\bar{\zeta}\eta\zeta$, имеет вид [23 с. 21-22]:

$$T = \frac{1}{2} [mv_0^2 + 2m(v_0 \times \omega) \cdot r'_C + \omega \Theta^0 \omega], \quad (11)$$

где v_0 – скорость полюса O ; ω – угловая скорость тела; r'_C – радиус-вектор $\overrightarrow{OC}$ (или $\overrightarrow{OO^\circ}$) центра инерции тела в системе подвижных осей, имеющих начало в полюсе O ; Θ^0 – тензор инерции тела в этой точке.

За обобщенные координаты q_0 твердого тела, в данном случае ротора с диском, могут быть приняты координаты x_0, y_0, z_0 полюса O и углы Эйлера ψ, ϑ, φ , а обобщенными скоростями являются первые производные этих величин по времени. Тогда через них могут быть выражены проекции угловой скорости тела ω на связанные с телом оси $O\xi\eta\zeta$ [22 с. 22, 23 с.20]:

$$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_\eta = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta \end{cases} \quad (12)$$

и проекции на эти же оси проекции вектора скорости v_0 полюса O :

$$\begin{cases} v_{0\xi} = \dot{x}_0 \alpha_{11} + \dot{y}_0 \alpha_{12} + \dot{z}_0 \alpha_{13} \\ v_{0\eta} = \dot{x}_0 \alpha_{21} + \dot{y}_0 \alpha_{22} + \dot{z}_0 \alpha_{23} \\ v_{0\zeta} = \dot{x}_0 \alpha_{31} + \dot{y}_0 \alpha_{32} + \dot{z}_0 \alpha_{33} \end{cases} \quad (13)$$

причем:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, & \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, & \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, & \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Проекции радиус-вектор r'_C на те же, связанные с ротором, оси:

$$r'_{C\xi} = e_\xi, \quad r'_{C\eta} = e_\eta, \quad r'_{C\zeta} = 0. \quad (15)$$

Тензор инерции ротора с диском в полюсе O :

$$\Theta^0 = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad \text{причем} \quad \begin{cases} \Theta_{12}^0 = \Theta_{21}^0 \\ \Theta_{13}^0 = \Theta_{31}^0 \\ \Theta_{23}^0 = \Theta_{32}^0 \end{cases} \quad (16)$$

где диагональные члены представляют собой моменты инерции относительно осей, а недиагональные – центробежные моменты инерции.

Используя соотношения для выражения моментов инерции ротора с диском относительно одних осей ($O\xi\eta\zeta$) через известные моменты инерции относительно других осей ($O^\circ\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$) с учетом смещения на e_ξ, e_η и поворота на γ_ξ, γ_η [33 с. 20-21], получим для осевых моментов инерции:

$$\begin{cases} J_\xi = (J_{\xi^\circ} + m e_\eta^2) \cos^2 \gamma_\eta \\ J_\eta = (J_{\eta^\circ} + m e_\xi^2) \cos^2 \gamma_\xi \\ J_\zeta = J_{\zeta^\circ} + m (e_\xi^2 + e_\eta^2) \end{cases} \quad (17)$$

и для центробежных моментов инерции:

$$\begin{cases} J_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2}(J_{\eta^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \sin 2\gamma_\xi + J_{\eta^\circ\zeta^\circ} \cos 2\gamma_\xi \\ J_{\xi\zeta} = -\frac{1}{2}(J_{\xi^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \sin(-2\gamma_\eta) + J_{\xi^\circ\zeta^\circ} \cos(-2\gamma_\eta) \\ J_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(J_{\xi^\circ} - J_{\eta^\circ}) \sin 2\gamma_\zeta + J_{\xi^\circ\eta^\circ} \cos 2\gamma_\zeta \end{cases} \quad (18)$$

В формулах (18) $J_{\xi^\circ\eta^\circ} = J_{\xi^\circ\zeta^\circ} = J_{\eta^\circ\zeta^\circ} = 0$, так как центробежные моменты инерции относительно главных центральных осей равны 0; угол γ_η принимается отрицательным, так как положительным направлением поворота считается от оси ζ к ξ (см. рис. 2, б); а угол между осями ζ° и $\zeta - \gamma_\zeta \approx 0$.

Принимая предположения о малости параметров неуравновешенности и пренебрегая бесконечно малыми членами вторых и выше порядков, можно прийти к упрощенной записи тензора инерции ротора в точке O :

$$\Theta^0 = \begin{pmatrix} J_{\xi^\circ} & 0 & -\gamma_\eta(J_{\xi^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \\ 0 & J_{\eta^\circ} & \gamma_\xi(J_{\eta^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \\ -\gamma_\eta(J_{\xi^\circ} - J_{\zeta^\circ}) & \gamma_\xi(J_{\eta^\circ} - J_{\zeta^\circ}) & J_{\zeta^\circ} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

3.5. Неинерционные силы, действующие на жесткий ротор в магнитных подшипниках. Колебательные движения жесткого ротора возникают в результате взаимодействия сил инерции с учетом гироскопического момента, сил потенциального поля, сил сопротивления движению и внешних сил.

Силы и моменты инерции ротора могут быть достаточно подробно описаны левыми частями уравнений (1) при подстановке в них (11)-(13), (15)-(18), причем структура этих нелинейных сил инерции весьма сложна.

При построении обобщенной силовой функции нелинейных потенциальных сил U или потенциальной энергии Π нужно учитывать характер решаемой задачи, а также то, что для корректного описания нелинейных колебаний необходимо, чтобы структура нелинейных сил поля была адекватна структуре нелинейных сил инерции (как, например, при решении задачи о линейных колебаниях достаточно в качестве силовой функции выбрать выражение потенциальной энергии в виде однородной квадратичной формы).

Структура нелинейных сил инерции описывается сложными тригонометрическими выражениями с нелинейной взаимосвязью между всеми шестью обобщенными координатами и их производными, для которых невозможно разделение переменных. Однако для получения решения с приемлемой точностью уравнения движения могут быть приведены к квазилинейному виду, и тогда использование приближенных методов анализа систем с малой нелинейностью позволит исследовать основные эффекты нелинейных колебаний ротора в магнитных подшипниках, в том числе нелинейные резонансы.

Для перевода уравнений движения в квазилинейный вид можно воспользоваться разложением тригонометрических функций в степенные ряды [34]:

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots; \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots, \quad (20)$$

с удержанием в уравнениях движения членов, которые содержат обобщенные координаты и члены второго и третьего порядков относительно них, а также первые и вторые производные указанных величин по времени.

В этом случае для соблюдения адекватности силовая функция и потенциальная энергия ротора с диском должны быть представлены в виде:

$$\Pi = -U(x_0, y_0, z_0, \psi, \vartheta, \varphi) = -(U' + U'' + U''' + U'''), \quad (21)$$

где U', U'', U''', U'''' – формы силовой функции, содержащие члены первой, второй, третьей и четвертой степеней относительно обобщенных координат.

Тогда выражения потенциальных сил соответственно будут содержать члены первой, второй, третьей степеней относительно координат, а значит, инерционные и потенциальные силы будут адекватно представлены в уравнениях движения жесткого ротора в магнитных подшипниках:

$$Q_{\Pi r} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_{0r}}, \quad (r = 1, \dots, M). \quad (22)$$

Силами сопротивления называют силы, зависящие только от скоростей точек механической системы, если их мощность при движении системы не равна тождественно нулю. К таким силам, например, не относятся гироскопические силы, также зависящие от скоростей точек механической системы, однако мощность которых тождественно равна нулю при движении системы. Взятая с обратным знаком обобщенная сила сопротивления определяет характеристику силы сопротивления [24 с. 14-17].

В основном силы сопротивления описываются нелинейными функциями скоростей, но в практических расчетах ввиду малого влияния сил сопротивления на некоторые колебательные свойства и процессы они могут быть линеаризованы, а сопротивление может считаться линейно-вязким. При вычислении же амплитуд вынужденных колебаний вдали от резонанса силами трения часто можно пренебрегать. В свою очередь нелинейность сил сопротивления необходимо учитывать при анализе свободных затухающих колебаний, при вычислении резонансных амплитуд вынужденных колебаний, при нахождении стационарных режимов автоколебаний и конечных амплитуд колебаний при параметрическом резонансе, а также при исследовании переходных процессов в автоколебательных системах. Если силы сопротивления совершают отрицательную работу и вызывают рассеивание (диссипацию) механической энергии, то они называются диссипативными.

К силам сопротивления относят: силы трения в подвижных соединениях машин и механизмов, силы конструкционного трения в «неподвижных» соединениях (прессовых, заклепочных, болтовых и т. п.), связанные с микро-

проскальзываниями в зонах контакта при нагружении системы, а также силы внутреннего трения в материале элементов системы и силы сопротивления среды, возникающие при движении тела в газе или жидкости и др.

Силы сопротивления сложной природы для целей анализа часто заменяют эквивалентным вязким сопротивлением, которое определяется из требований, чтобы это сопротивление вызывало такое же рассеяние энергии за один цикл, что и реальная сила сопротивления [35 с. 69-92].

Тогда для задания сил сопротивления необходимо выбрать одну из двух гипотез, наиболее подходящую к описанию нашей системы. Первая гипотеза предполагает, что твердое тело движется в сопротивляющейся среде, реакции которой пропорциональны скоростям линейных и угловых перемещений тела, а вторая – что силы сопротивления действуют сосредоточенно на отдельные точки твердого тела и пропорциональны скоростям движения именно этих точек. Коэффициенты пропорциональности в этих случаях могут быть заданы как известные параметры, характеризующие элементы системы, или определены из экспериментов [24]. Для ротора на магнитных подшипниках более адекватного отображения реального поведения можно добиться использованием второй из перечисленных гипотез, так как пондеромоторные силы и силы сопротивления действуют локально только в местах опирания.

Учитывая вышесказанное, можно ввести диссипативную функцию либо в виде нелинейной зависимости от скоростей обобщенных координат:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}), \quad (23)$$

либо как квадратичную форму обобщенных скоростей:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^M b_{rs} \dot{q}_{0r} \dot{q}_{0s}, \quad \dot{q}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}), \quad (24)$$

либо как однородную квадратичную форму обобщенных скоростей:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} (b_{x_0} \dot{x}_0^2 + b_{y_0} \dot{y}_0^2 + b_{z_0} \dot{z}_0^2 + b_{\psi} \dot{\psi}^2 + b_{\vartheta} \dot{\vartheta}^2 + b_{\varphi} \dot{\varphi}^2), \quad (25)$$

Тогда частные производные от диссипативной функции по обобщенным скоростям дадут компоненты сил сопротивления:

$$Q_{\mathfrak{R}r} = - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_{0r}}, \quad (r = 1, \dots, M). \quad (26)$$

Внешние силы и моменты, соответствующие каждой из обобщенных координат, являются величинами, явно зависящими от времени.

3.6. Линеаризованные уравнения движения жесткого ротора в магнитных подшипниках. В большинстве случаев для роторов, вращающихся вокруг оси $O\zeta$ (рис. 2) со скоростью $\dot{\varphi}$, скорости поворотов вокруг двух других осей существенно меньше, то есть $\dot{\psi} \ll \dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta} \ll \dot{\varphi}$. То же самое касается и самих углов $\psi \ll \varphi$, $\vartheta \ll \varphi$, причем углы ψ, ϑ можно считать малыми.

Кроме того, примем, что перемещения ротора ξ , η , ζ и линейные параметры неуравновешенности e_ξ , e_η малы и имеют такой же порядок малости, как и зазор в подшипниках δ , а углы поворота ψ , ϑ и угловые параметры неуравновешенности γ_ξ , γ_η одного порядка малости с максимально возможным исходя из геометрических ограничений углом поворота ротора $2\delta/l$, где l – расстояние между радиальными опорными участками ротора. Тогда в выражениях (20) можно ограничиться только первыми членами, и справедлива замена $\sin \psi = \psi$, $\cos \psi = 1$, $\sin \vartheta = \vartheta$, $\cos \vartheta = 1$. При анализе поперечных и продольных колебаний роторов движение вокруг продольной оси не рассматривается и принимается $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$, $\varphi = \omega t$.

Линеаризация уравнения движения может быть осуществлена при пренебрежении в них величинами второго и более высоких порядков относительно обобщенных координат и их производных.

Учитывая принятые положения, подставляя (12), (13), (15), (19) в (11), а (11), (21) и (25) в первые M уравнений из (6), вводя значения параметров $J_{\xi^0} = J_{\eta^0} = J_e$, $J_{\zeta^0} = J_p$, $e_\xi = e_1$, $e_\eta = e_2$, $\gamma_\xi = \gamma_1$, $\gamma_\eta = \gamma_2$ и удерживая члены первого порядка малости относительно обобщенных координат и их производных, приходим к линеаризованным уравнениям движения ротора в магнитных подшипниках, известным в литературе [6 с. 130-187]. Они представляют собой систему 5 линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно 5 обобщенных координат, так как крутильные колебания вокруг продольной оси, как было оговорено выше, не рассматриваются:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 + b_{x_0}\dot{x}_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_0} - \frac{\partial W}{\partial x_0} + Q_{x_0} + m\omega^2(e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t), \\ m\ddot{y}_0 + b_{y_0}\dot{y}_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_0} - \frac{\partial W}{\partial y_0} + Q_{y_0} + m\omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t), \\ m\ddot{z}_0 + b_{z_0}\dot{z}_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_0} - \frac{\partial W}{\partial z_0} + Q_{z_0}, \\ J_e\ddot{\psi} + J_p\omega\dot{\vartheta} + b_\psi\dot{\psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \psi} + Q_\psi + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t), \\ J_e\ddot{\vartheta} - J_p\omega\dot{\psi} + b_\vartheta\dot{\vartheta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + Q_\vartheta + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t), \end{cases} \quad (27)$$

где магнитные силы, создаваемые МП, описываются членами – $\partial W/\partial q_{0r}$. Если будет использоваться СДУ (1), то $-\partial W/\partial q_{0r}$ отсутствуют, а $-\partial \Pi/\partial q_{0r}$ представляют собой потенциальные силы, зависящие только от обобщенных механических координат – перемещений и углов поворота, к которым могут быть приведены как силы в МППМ [28], так и силы в

АМП [29] (см. п. 2).

Перейдем в уравнениях (27) от угловых обобщенных координат – самолетных углов Эйлера, к другим обобщенным угловым координатам – углам между проекциями продольной оси ротора $O\zeta$ на координатные плоскости неподвижной системы координат Oxz , Oyz и осями координат этой же системы координат Ox , Oy . Для связи двух групп углов воспользуемся схемой, представленной на рис. 3.

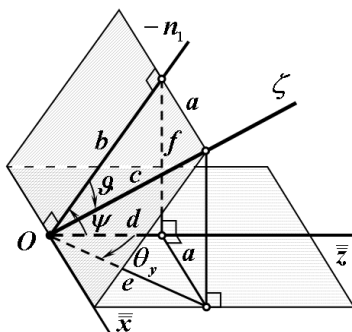


Рисунок 3. Схема перехода от самолетных углов Эйлера к углам поворота вокруг осей неподвижной системы координат

Введем углы между проекциями и осями θ_x и θ_y , которые представляют собой углы поворота ротора вокруг осей Ox и Oy соответственно. Из рис. 2, б следует, что поскольку $-n_1$ есть проекция $O\zeta$ на основную плоскость $O\bar{y}\bar{z}$, а ψ – угол между $O\bar{z}$ и $-n_1$, отсчитываемый вокруг $O\bar{x}$ от $O\bar{y}$ к $O\bar{z}$, то:

$$\theta_x = \psi. \quad (28)$$

На рис. 3 представлена схема, эквивалентная изображенной на рис. 2, б. Она позволяет выявить зависимость между углами θ_y и ϑ . Здесь a, b, c, d, e, f – введенные вспомогательные отрезки, $O\bar{z}n_1$ – плоскость $O\bar{y}\bar{z}$, параллельная координатной плоскости Oyz . Тогда справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta &= a/c, \quad \cos \vartheta = b/c, \quad \operatorname{tg} \vartheta = a/b \\ \sin \psi &= f/b, \quad \cos \psi = d/b, \quad \operatorname{tg} \psi = f/d \\ \sin \theta_y &= a/e, \quad \cos \theta_y = d/e, \quad \operatorname{tg} \theta_y = a/d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_y = \frac{a}{d} = \frac{b \operatorname{tg} \vartheta}{d} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \psi}. \quad (29)$$

Если углы малы, то, воспользовавшись разложением тригонометрических функций в ряды (20), приходим к взаимосвязи углов:

$$\theta_y = \vartheta. \quad (30)$$

Тогда, принимая, что магнитный подвес осуществляется с помощью управляемых электромагнитных подшипников, то есть АМП, по всем степеням свободы, приходим к уравнениям движения, известным из [27]:

$$\left\{ \begin{aligned} m\ddot{x}_0 + b_{x_0}\dot{x}_0 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x_0} - \frac{\partial W}{\partial x_0} + Q_{x_0} + m\omega^2(e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \\ m\ddot{y}_0 + b_{y_0}\dot{y}_0 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y_0} - \frac{\partial W}{\partial y_0} + Q_{y_0} + m\omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) \\ m\ddot{z}_0 + b_{z_0}\dot{z}_0 &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z_0} - \frac{\partial W}{\partial z_0} + Q_{z_0} \\ J_e \ddot{\theta}_x + J_p \omega \dot{\theta}_y + b_{\theta_x} \dot{\theta}_x &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} - \frac{\partial W}{\partial \theta_x} + Q_{\theta_x} + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) \\ J_e \ddot{\theta}_y - J_p \omega \dot{\theta}_x + b_{\theta_y} \dot{\theta}_y &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_y} - \frac{\partial W}{\partial \theta_y} + Q_{\theta_y} + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) \end{aligned} \right. \quad (31)$$

где члены $P_{q_0} = -\partial W / \partial q_{0r}$ (или $P_{q_0} = -\partial \tilde{W} / \partial q_{0r}$) представляют собой электромагнитные реакции подвеса, зависящие не только от обобщенных механических координат – перемещений и углов поворота, но и от обобщенных электрических координат – потокосцеплений, если используются уравнения (6) (или токов – если (2)). Для описания взаимосвязи между обобщенными координатами к системе уравнений (31) должна быть добавлена вторая группа уравнений (6) (или (2)), параметры которых будут зависеть от особенностей применяемых в системе АМП [27].

Для определения положения ротора кроме первой группы обобщенных координат $q_0 = (x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y)$, может использоваться вторая $q = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_3)$ – координаты точек O_1 и O_2 (рис. 2) в неподвижной системе координат (например, центров опорных участков ротора в радиальном направлении) и координата z некоторой точки O_3 , расположенной на оси ротора (например, центра опорного участка ротора в осевом направлении).

Для решения система дифференциальных уравнений должна быть записана относительно одной группы координат, связь между которыми может быть выявлена с помощью схемы, представленной на рис. 4, где O', O'_1, O'_2, O'_3 и O'', O''_1, O''_2, O''_3 – проекции соответствующих точек на координатные плоскости неподвижной системе координат. Если при нахождении сил используются координаты q , то при выводе уравнений должна быть выполнена замена переменных группы q_0 на q , либо только в уравнениях (31), либо во всех выражениях (6), (11), (12), (13), (15), (19), (21) и (25):

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + l_1 \cos \theta_x \sin \theta_y, & y_1 = y_0 - l_1 \cos \theta_y \sin \theta_x, \\ x_2 = x_0 - l_2 \cos \theta_x \sin \theta_y, & y_2 = y_0 + l_2 \cos \theta_y \sin \theta_x, \\ z_3 = z_0 - (l_2 \pm l_3) \cos \theta_x \cos \theta_y, \end{cases} \quad (32)$$

где l_1 – расстояние между точками O и O_1 ; l_2 – между O и O_2 ($l_1 + l_2 = l$);

а l_2 – между O_2 и O_3 , причем если O_3 расположена относительно O_2 со стороны O_1 , то l_3 должна подставляться в (32) со знаком «-».

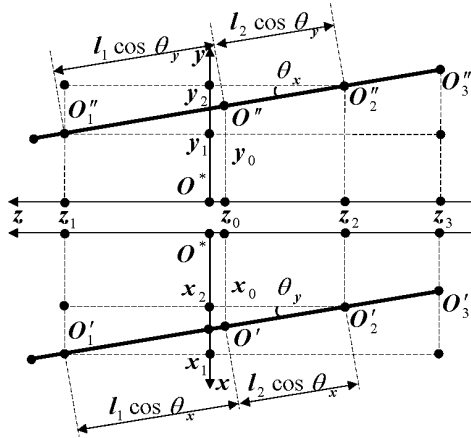


Рисунок 4 – Проекции оси жесткого ротора на плоскости неподвижной системы координат

При этом силы и моменты P_{q0} , действующие в точке O и находящиеся в правой части СДУ (31), связаны с пондеромоторными силами P_q , действующими в точках O_1 , O_2 и O_3 , следующим образом:

$$\begin{cases} P_{x_0} = P_{x_1} + P_{x_2}, & P_{\theta_x} = -P_{y_1}l_1 + P_{y_2}l_2, & P_{z_0} = P_{z_3}, \\ P_{y_0} = P_{y_1} + P_{y_2}, & P_{\theta_y} = P_{x_1}l_1 - P_{x_2}l_2, \end{cases} \quad (33)$$

Полагая, как и раньше, перемещения и углы малыми, используя (20) и удерживая члены первого порядка малости выражения (32), можно разрешить относительно обобщенных координат второй группы:

$$\begin{cases} x_0 = (x_1l_2 + x_2l_1)/l, & \theta_y = (x_1 - x_2)/l, \\ y_0 = (y_1l_2 + y_2l_1)/l, & \theta_x = (-y_1 + y_2)/l, \\ z_0 = z_3 + (l_2 \pm l_3). \end{cases} \quad (34)$$

Вводя однородную квадратичную форму обобщенных скоростей $\dot{q}$:

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{2}(b_{x_1}\dot{x}_1^2 + b_{x_2}\dot{x}_2^2 + b_{y_1}\dot{y}_1^2 + b_{y_2}\dot{y}_2^2 + b_{z_3}\dot{z}_3^2), \quad (35)$$

и подставляя выражения (34) в (11), а (11) и (35) в (6), приходим к системе дифференциальных уравнений движения относительно обобщенных координат второй группы $q = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_3)$:

$$\left(\left(\frac{ml_2^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_1 + \left(\frac{ml_1l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_2 + \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + b_{x_1} \dot{x}_1 \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \frac{\partial W}{\partial x_1} + Q_{x_1} + H_{x_1}(t),$$

$$\begin{cases} \left(\frac{ml_1^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_2 + \left(\frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_1 - \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + b_{x_2} \dot{x}_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - \frac{\partial W}{\partial x_2} + Q_{x_2} + H_{x_2}(t), \\ \left(\frac{ml_2^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_1 + \left(\frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_2 - \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_{y_1} \dot{y}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} - \frac{\partial W}{\partial y_1} + Q_{y_1} + H_{y_1}(t), \\ \left(\frac{ml_1^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_2 + \left(\frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_1 + \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_{y_2} \dot{y}_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} - \frac{\partial W}{\partial y_2} + Q_{y_2} + H_{y_2}(t), \\ m\ddot{z}_3 + b_{z_3} \dot{z}_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_3} - \frac{\partial W}{\partial z_3} + Q_{z_3} + H_{z_3}(t), \end{cases} \quad (36)$$

где члены $-\partial \Pi / \partial q_r$ представляют собой потенциальные силы, зависящие только от обобщенных механических координат – перемещений центров опорных участков ротора, к которым могут быть приведены как силы в МППМ [28], так и силы в АМП [29] (см. п. 2); $P_q = -\partial W / \partial q_r$ – пондеромоторные силы, то есть электромагнитные реакции магнитных подшипников [28]; $H_q(t)$ – явно зависящие от времени силы, а именно внешние периодические нагрузки, вызванные динамической неуравновешенностью ротора:

$$\begin{aligned} H_{x_1}(t) &= \frac{ml_2 \omega^2}{l} (e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t)) + \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t)), \\ H_{x_2}(t) &= \frac{ml_1 \omega^2}{l} (e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t)) - \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t)), \\ H_{y_1}(t) &= \frac{ml_2 \omega^2}{l} (e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t)) - \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t)), \\ H_{y_2}(t) &= \frac{ml_1 \omega^2}{l} (e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t)) + \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t)), \\ H_{z_3}(t) &= H_{z_3}(t). \end{aligned} \quad (37)$$

3.7. Нелинейные уравнения движения жесткого ротора в магнитных подшипниках. При анализе систем нелинейных дифференциальных уравнений ввиду известных трудностей их решения часто возникает необходимость вводить ограничения в постановку задачи. Крайним случаем таких ограничений является использование приведенных выше линеаризованных уравнений. Однако пренебрежение нелинейными членами в виде произведения двух и более малых величин – координат и их производных – приводит к искусственному исключению нелинейных взаимосвязей между ними, которые присущи реальной системе, в данном случае ротору в магнитных подшипниках, и важны для характеристики его движения.

В свою очередь учет всех нелинейных членов в уравнениях движения создает трудности при анализе. Тогда одним из вариантов математического

описания жесткого ротора в магнитных подшипниках есть применение уравнений движения квазилинейного типа, в которых удерживаются только те нелинейные члены, которые позволяют учесть нелинейные колебательные процессы, присущие системе. В качестве критерия включения нелинейных членов в уравнения может быть выбрано их сравнение с максимально возможными отклонениями координат. Если для ротора в МП принять, что углы поворота не могут превышать $\pi/18$, то по сравнению с первыми членами разложения в ряд тригонометрических функций (20) вторые члены составляют 0,5 и 1,5 % соответственно для функций $\sin$ и $\cos$, а третьи – 0,0008 и 0,0028 %. Для обобщенных координат – поступательных перемещений ротора – такой анализ можно провести, введя вспомогательные углы x_1/l , x_2/l , y_1/l_r , y_2/l , z_3/D_{out3} , где D_{out3} – внешний диаметр статора осевого МП. Если учесть максимально возможные отклонения, величина которых обусловлена геометрическими размерами, то значения углов будут равны $2\delta_r/l$ и $2\delta_a/D_{out3}$, где δ_r , δ_a – зазоры в радиальных и осевом МП соответственно. Эти значения для подавляющего большинства конструктивных вариантов МП также не превышает $\pi/18$. Тогда при выводе уравнений движения ротора в МП можно ограничиться первыми двумя слагаемыми в рядах (20) и сохранением в кинематических соотношениях и самих уравнениях членов первой, второй и/или третьей степеней относительно обобщенных координат и их производных. Это дает возможность исследовать нелинейные особенности данной системы, так как определяющая роль в формировании наиболее эффективных нелинейных резонансов принадлежит именно этим нелинейным слагаемым. Кроме того, примем, что все обобщенные координаты перемещения и углы поворота ротора – x_0 , y_0 , z_0 , θ_x , θ_y , x_1 , y_1 , x_2 , y_2 и z_3 , параметры неуравновешенности – e_1 , e_2 , γ_1 и γ_2 , а также зазоры в МП – δ_r , δ_a имеют одинаковый порядок малости, что учтем при определении порядка малости членов уравнений и их исключении из рассмотрения.

Пользуясь обозначениями, принятыми в (8) и (9), запишем члены второго и третьего порядка, которые должны быть добавлены в левые части уравнений (31) и (36) для учета нелинейных особенностей системы.

Для первой группы координат q_0 члены второго порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} f''_{x_0}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= 0, \quad f''_{y_0}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) = 0, \\ f''_{z_0}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \left([\ddot{\theta}_x - \omega^2 \theta_x + 2\omega \dot{\theta}_y] (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\ &\quad \left. - [\ddot{\theta}_y - \omega^2 \theta_y - 2\omega \dot{\theta}_x] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right); \end{aligned} \quad (38)$$

$$f''_{\theta_x}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) = m \ddot{z}_0 (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t);$$

$$f''_{\theta_y}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) = m \ddot{z}_0 (-e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t),$$

а для второй группы q они могут быть описаны формулами:

$$f''_{x_1}(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) = \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (-e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t);$$

$$\begin{aligned}
f_{x_2}''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t); \\
f_{y_1}''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (-e_1 \sin \omega t - e_2 \cos \omega t);, \\
f_{y_2}''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t); \quad (39) \\
f_{z_3}''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \\
&= \frac{m}{i} \left(\left[(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - \omega^2 (x_2 - x_1) + 2\omega (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) + \right. \\
&\quad \left. + \left[(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - \omega^2 (y_2 - y_1) - 2\omega (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \right] (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) \right).
\end{aligned}$$

Анализ выражений (38) показывает, что если параметры неуравновешенности не равны 0, то члены второго порядка вносят в уравнения движения связи между угловыми координатами и осевым смещением ротора. Подобное не наблюдалось в линеаризованных уравнениях (31), однако связь углов поворота с двумя другими линейными координатами, как и прежде, отсутствует.

Члены второго порядка (39), входящие в левые части уравнений относительно второй группы координат, также вносят связь между осевыми и радиальными движениями неуравновешенного ротора. При этом проявляются зависимости как радиальных от осевых, так и наоборот, в отличие от уравнений первой группы, где члены второго порядка малости в уравнениях движения в радиальных направлениях x_0, y_0 равны нулю.

Члены третьего порядка малости относительно обобщенных координат первой группы, их производных и параметров неуравновешенности могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
f_{x_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \left(2\omega \dot{\theta}_y \theta_y (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\
&\quad \left. - 2\omega \dot{\theta}_y \theta_y (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\
&\quad \left. - \left[\ddot{\theta}_y \theta_y + \dot{\theta}_y^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \theta_y^2 \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right); \\
f_{y_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= \\
&= m \left(- \left[\ddot{\theta}_x \theta_x + \ddot{\theta}_x^2 + 2\omega \dot{\theta}_x \theta_y + \dot{\theta}_y \theta_x \right] - \frac{1}{2} \omega^2 \theta_x^2 \right) (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) + \\
&\quad + \left[\ddot{\theta}_x \theta_y + \ddot{\theta}_y \theta_x + 2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y - 2\omega \dot{\theta}_x \theta_x - \omega^2 \theta_x \theta_y \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t);, \\
f_{z_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= 0; \\
f_{\theta_x}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \ddot{y}_0 (-\theta_x (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) + \\
&\quad + \theta_y (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t)) + \\
&\quad + (J_1 - J_3) \left(\left[\ddot{\theta}_y \theta_y + \dot{\theta}_y^2 - 2\omega \dot{\theta}_y \theta_y + \frac{1}{2} \omega^2 \theta_y^2 \right] (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2[\ddot{\theta}_x \theta_y + \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y](\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) - \\
& - (J_1 - J_3)[\ddot{\theta}_x \theta_y^2 + 2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \theta_y] - \frac{1}{2} J_3 \omega \dot{\theta}_y \theta_y^2; \\
f_{\theta_y}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) = & m([\ddot{y}_0 \theta_x - \ddot{x}_0 \theta_y](e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t)) + \\
& + (J_1 - J_3)([\dot{\theta}_x^2 - 2\omega \dot{\theta}_x \theta_y](\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) - \\
& - \ddot{\theta}_x \theta_y (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t)) + (J_1 - J_3) \dot{\theta}_x^2 \theta_y + \frac{1}{2} J_3 \omega \dot{\theta}_x \theta_y^2. \quad (40)
\end{aligned}$$

Для второй группы эти члены ввиду громоздкости записей здесь не приводятся, но они могут быть получены при подстановке в формулы (40) выражений одних координат через другие (34) и использовании следующих зависимостей между членами разных систем уравнений:

$$\begin{aligned}
f_{x_1}'''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) = & (f_{x_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2)l_2 + f_{\theta_y}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2))/l; \\
f_{x_2}'''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) = & (f_{x_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2)l_1 - f_{\theta_y}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2))/l; \\
f_{y_1}'''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) = & (f_{y_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2)l_2 + f_{\theta_x}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2))/l; \quad (41) \\
f_{y_2}'''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) = & (f_{y_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2)l_1 + f_{\theta_x}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2))/l; \\
f_{z_3}'''(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) = & f_{z_0}'''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2).
\end{aligned}$$

Эти соотношения являются результатом перехода в уравнениях (31) ко второй группе координат и необходимостью замены этих уравнений их линейными комбинациями, согласно выражениям (33), для получения в них правых частей, совпадающих с правыми частями соответствующих уравнений системы (36).

Анализ выражений (40) показывает, что только в членах третьего порядка появляются слагаемые, не зависящие от параметров неуравновешенности и характеризующие связь между угловыми координатами (причем эти члены находятся в уравнениях движения относительно данных координат и не присутствуют в уравнениях характеризующих поступательные движения).

Если же проанализировать структуру членов третьей степени относительно обобщенных координат второй группы и их производных (41), здесь наблюдается полная взаимосвязь между координатами посредством членов, не зависящих от параметров неуравновешенности. Это происходит из-за наличия в выражениях (41) в слагаемых членов f_{θ_x}''' , f_{θ_y}''' , в которых координаты θ_x , θ_y заменяются на x_1 , y_1 , x_2 , y_2 в соответствии с (34).

При описании сил сопротивления в нелинейных уравнениях движения, обращаясь к системе (31) с учетом (38) и (40), нужно отметить, что в структуре моментов сил сопротивлений наряду с основными линейными членами возможно наличие нелинейных слагаемых, которые являются в основном следствием рассмотрения немалых угловых перемещений [23]. Роль таких слагаемых в большинстве случаев невелика, а их влияние может проявиться в

случаях внутренних резонансов и сказаться на величинах амплитуд связанных колебаний. Так как для рассматриваемых систем силы сопротивления могут считаться малыми, то нелинейные члены могут быть опущены.

В системе (36) с учетом (39) и (41) силы сопротивления действуют сосредоточенно на отдельные точки жесткого ротора (опорные участки), смещения которых являются обобщенными координатами. Поэтому данные силы с достаточной степенью адекватности могут считаться пропорциональными скоростям движения именно этих точек, а коэффициенты пропорциональности являются характеристиками магнитных подшипников и могут определяться экспериментально [1].

Обобщая вышеприведенные нелинейные математические модели динамического поведения жесткого ротора в магнитных подшипниках можно ввести еще одну форму представления уравнений движения, а именно – квазилинейную форму их записи. Учитывая, что нелинейные члены уравнений, описывающие силы инерции и упругие силы, а также линейные члены сил сопротивления, являются малыми величинами по сравнению с линейными, можно выделить все малые члены в одну группу в каждом из уравнений, входящих в систему, и ввести малый положительный параметр. Тогда системы дифференциальных движений, как относительно первой группы обобщенных координат, так и относительно второй, можно представить в виде (10).

Заключение. Анализ полученных в работе систем дифференциальных уравнений движения жесткого ротора в магнитных подшипниках различных типов позволяет прийти к выводам, что учет нелинейных членов может привести к потере информативности математической модели о нелинейных эффектах, присущих рассматриваемой электромагнитомеханической системы. Это в первую очередь связано с магнитными или электромагнитными силами, зависимость которых от обобщенных механических координат нелинейна и может аппроксимироваться кубическими полиномами или полиномами более высоких степеней [28, 29]. Данные силы располагаются в правых частях уравнений, а форма представления левых частей (силы инерции, сопротивления и упругие силы), конечно же, должна быть соразмерна им по степеням членов.

Полученные нелинейные математические модели в дальнейшем могут использоваться для исследования механизмов возбуждения пространственных колебаний вращающегося жесткого ротора, в том числе форм пространственных движений, а также выяснения условий существования различных режимов резонансных, устойчивых периодических или почти периодических колебаний, выявления качественных и количественных закономерностей установившихся процессов при пространственных колебаниях и др.

Список литературы: 1. Мартыненко Г.Ю. Магнитные подшипники как упруго-демпферные опоры роторов с управляемой жесткостью // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність

машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – № 47. – С. 111–124. **2.** Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – Л.: Машиностроение (Ленинград, отделение), 1977. – 288 с. **3.** Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. – М.: Наука, 1982. – 280 с. **4.** G. Schweitzer, H. Bleuler and A. Traxler Active magnetic bearings. – Zurich: ETH, 1994. – 244 p. **5.** Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. **6.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н. Челомей (пред). – М.: Машиностроение, 1980. – Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесников. – 543 с. **7.** Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 335 с. **8.** Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные изгибно-крутильные колебания системы двигатель-ротор // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 2. – С. 153–157. **9.** Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 387 с. **10.** Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1970. – 409 с. **11.** Maslen E.H. Magnetic bearings. – University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. – 229 p. **12.** Chiba A., Fukao T., Ichikawa O., Oshima M., Takemoto M. and Dorrell D.G. Magnetic Bearings and Bearingless Drives. – Elsevier Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 2005. – 381 p. **13.** Alahakoon S. Digital Motion Control Techniques for Electrical Drives. – Electrical Machines and Power Electronics Department of Electric Power Engineering Royal Institute of Technology, Stockholm, 2000. – 310 p. **14.** Jansen R. and DiRusso E., Passive Magnetic Bearing With Ferrofluid Stabilization. – NASA Technical Memorandum 107154, 1996. – 154 p. **15.** Bermudez J.-L., Zanolli S., Sandtner J., Bleuler H., Benabderrahmane C. Preliminary experiments on an eddy currents bearing // Seventh International Symp. on Magnetic Bearings, August 23–25, 2000, ETH Zurich. – P. 136–139. **16.** Bassani R. Earnshaw (1805–1888) and Passive Magnetic Levitation // Meccanica. – Springer, 2006. – № 41. – P. 375–389. **17.** Bassani R. Permanent magnetic levitation and stability Fundamentals of Tribology and Bridging the Gap Between the Macro-and Micro Nanoscales // NATO Sciences Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001. – P. 899–913. **18.** Parviainen A. Design of axial-flux permanent-magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines // Thesis for the degree of Doctor of Science (Technology), Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, Finland, 2005. – 153 p. **19.** Losch F. Identification and automated controller design for active magnetic bearing system // Diss. of Doctor of Technical Science. Swiss Federal Institute of Technology. – Zurich: ETH, 2002. – 254 p. **20.** Polajžer B. Design and Analysis of an Active Magnetic Bearing Experimental System // Diss. Ph.D. University of Maribor faculty of electrical engineering and computer science, Maribor, Slovenia, 2003. – 77 p. **21.** Larssonneur R. Design and control of active magnetic bearing systems for high speed rotation // Diss. of Doctor of Technical Science. Swiss Federal Institute of Technology. – Zurich: Offsetdruckerei AG, 1990. – 182 p. **22.** Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 824 с. **23.** Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 432 с. **24.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н. Челомей (пред). – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. И.И. Блехмана. – 351 с. **25.** Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Учебник для студентов энергетических и электротехнических ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с. **26.** Мартыненко Г.Ю. Уточнение математической модели ротора на ЭМП за счет определения магнитной проводимости зазоров под полюсами с учетом взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ», 2006. – №32. – С. 179–192. **27.** Мартыненко Г.Ю. Построение математической модели полного электромагнитного подвеса ротора с использованием взаимосвязанных магнитомеханических уравнений Рауса // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – № 22. – С. 107–126. **28.** Мартыненко Г.Ю. Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – № 38. – С. 83–95.

29. Мартыненко Г.Ю. Определение силовых и жесткостных характеристик осевого активного магнитного подшипника при заданном законе управления // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – № 36. – С. 133-141. 30. Furlani E.P. Permanent Magnet and Electromechanical Devices. Materials, Analysis, and Applications. – San Diego, USA: Academic Press, 2001. – 518 p. 31. Мартиненко Г. Визначення критичних швидкостей обертання ротора експериментальної моделі на комбінованому магнітному підвісі // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці 1-ї міжнародної науково-технічної конференції. – Львів: Кінпатрі Лтд., 2008. – С. 119-121. 32. Аврамов К.В. Асимптотическая процедура анализа нелинейных колебаний роторов // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – № 36. – С. 11-20. 33. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с. 34. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1981. – 718 с. 35. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

Поступила в редколлегию 20.03.2009

УДК 539.3

С.А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., НТУ «ХПИ»

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К МУЛЬТИДИСЦИПЛИНАРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МАШИН

Розглядаються проблемні питання, що виникають при розробці системного підходу до оптимізації моделей машин з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; які орієнтовані на великі розмірності векторів перемінних стану і проектування. Досліджено обчислювальні етапи. Розглянуто застосування розробленого математичного апарату.

The complex of theoretical, calculable and applied questions of new approach for the optimization of complicated technical systems are studied. The basic requirements were stated. The design principles were developed. Structural elements was distinguished. The common scheme of interaction between structural elements was elaborated. New schemes for solving formulated problems are proposed. Computational stages are investigated.

Введение. Постановка большинства рассматриваемых в литературе по механике модельных задач оптимизации конструкций подразумевает управление вибрационными или прочностными характеристиками без учета последствий для рабочего процесса и возможностей технологии изготовления [1-4]. Решая практические задачи, невозможно оставаться в рамках механики деформируемого тела, поэтому необходимо вводить в постановку задач комплексные мультифизические модели функционирования изделия и критерии качества рабочих и эксплуатационных характеристик [5]. Прочностные характеристики при этом носят второстепенный характер и выступают или в

качестве ограничений, или служат признаком отбраковки на этапе проверочных расчетов и испытаний. При разработке системного подхода к оптимизации машин необходимо учитывать все этапы жизненного цикла – от проектирования до утилизации; эффективно сочетать принципы композиции, декомпозиции и иерархичности; обеспечить взаимодействие многообразных методов (математических, эвристических, экспериментальных) и специалистов различных профилей. Помимо компромиссного мультидисциплинарного и многокритериального характера предложенная методика решения оптимизационной проблемы отличается от канонизированной формы прежде всего более высокой сложностью (большим числом различных моделей и разнохарактерных переменных).

Постановка проблемы оптимизации. Задача оптимизации конструкций заключается в нахождении варьируемых параметров, принадлежащих допустимой области U и минимизирующих (максимизирующих) целевую функцию (функционал качества) J_0 . Целевая функция представляет собой суперпозицию критериев качества, при этом в качестве весовой функции используются неопределенные множители Лагранжа. На проектные переменные могут накладываться как явные двусторонние ограничения, задаваемые из конструктивно-технологических соображений, так и функциональные ограничения типа равенств и неравенств, наложенные на функционалы J_j , неявным образом сужающие область варьирования. При этом значения функционалов определяются из решения задач анализа, описываемых уравнениями состояния [5]. Структуру уравнений, характеризующих математические связи между заданными h и искомыми u величинами, определяет тип исследуемого процесса, состав системы, граничные условия, нагрузки и условия сопряжения. Вектор (функция) u переменных состояния, образующих пространство решений, может определять перемещения, температуры, потенциалы электрического поля и другое. При решении задач оптимизации конструкций в качестве варьируемых переменных h рассматриваются параметры распределения толщины; физико-механических свойств материалов, управляющих нагрузок; формы срединной поверхности, граничного контура, вырезов, количества, места приложения и величины сосредоточенных масс и жесткостей (стрингеры, шпангоуты и другое). Выбор класса проектных переменных (непрерывные функции, кусочно-непрерывные функции, вектор дискретных параметров) во многом определяет метод оптимизации и оптимальное решение.

Целью данной работы было создание концепции подхода к мультидисциплинарной оптимизации машин на основе сложных математических моделей с высокой степенью геометрической и физической информативности.

Основные этапы оптимизации. Сложность задачи, противоречивость критериев, большое число разнохарактерных конструктивных переменных,

неформализуемость некоторых ограничений, различная точность и детерминированность моделей, требования унификации не позволяют решать математически строго задачу оптимизации конструктивных параметров непосредственно для полной модели. Учитывая ее сложность, существенные различия в значимости конструктивных параметров и неформализуемость некоторых ограничений, основной концепцией оптимального проектирования таких сложных систем является многоуровневый иерархический подход. Проектирование выполняется сверху вниз. При этом результаты решения задачи предыдущего уровня используются в качестве исходных данных для решения задач оптимального проектирования последующего уровня. Процесс декомпозиции физико-механической модели на компоненты является плохо формализуемым творческим процессом. Поэтому построение системы уровней осуществляется обычно методом экспертных оценок. На нижнем уровне проектирования решаются задачи оптимизации основных деталей. Характер критериев зависит от уровня проектирования. На верхних уровнях это, как правило, стоимостные критерии. На нижних - это разнородные специфические технические критерии, которые отображают особенности рабочего процесса, силового нагружения, температурного режима, технологии изготовления и т.д.

Сложные современные машины создаются как комбинация множества взаимодействующих между собой и с внешней средой конструктивных элементов, которая описывается достаточно сложной математической моделью. При анализе составных конструкций объем и сложность вычислений настолько велики, что необходимо сегментирование системы. На базе использования методов и принципов системного и объектно-ориентированного анализа можно осуществить декомпозицию абстрактной модели на составляющие и связи между ними, а также реализовать их формальное описание. От правильности выбранной стратегии зависит эффективность и точность решения. Полная конструкция представляется в виде совокупности иерархически соподчиненных подсистем различных уровней с сохранением структур и принадлежности. Исследование всей конструкции следует базировать на независимом анализе, естественно заданных субструктур, а затем связывать эти подконструкции в единую систему. Изложенный подход делает возможным изъятие из полной расчетной модели некоторой ее части, перестроение сетки и более подробный анализ для выделенной области. Это может повысить эффективность численного моделирования, так как сначала делается анализ для грубой сетки, а затем для интересующей области - подсистемы - измельчается сетка и уточняется расчет.

Процесс оптимального проектирования основных узлов машин раскладывается на этапы и, соответственно, конструктивные параметры искусственно разделяются на группы, варьируемые на каждом этапе с целью оптимизации соответствующих функционалов. Параметры h_0 определяются из решения задачи более высокого уровня. Предварительный анализ распределения

коэффициентов чувствительностей [6] позволяет разделить параметры по степени соизмеримости влияния на величины целевых функций. На первом этапе решается задача оптимизации параметров h_1 по критериям и функциональным ограничениям, характеризующим рабочий процесс. На втором этапе производится оптимизация параметров h_2 , в значительной мере определяющих прочностные и вибрационные характеристики. На третьем этапе варьируются конструктивные параметры «смешанного» типа h_{12} , влияние которых на рабочие и прочностные характеристики существенно и соизмеримо, с целью построения семейства Парето-решений. При этом конструктор может выбрать несколько решений для экспериментальной апробации. Участие на этом этапе конструктора с его субъективным выбором вариантов проекта объясняется необходимостью учета стоимостных, эксплуатационных, технологических и других критериев, что характерно для задач мультидисциплинарной оптимизации.

Разбиение на подпункты носит условный методологический смысл, поскольку физический процесс может иметь комплексный и взаимовлияющий характер. Предполагается, что связь между подмоделями однозначна, алгоритмизируема и корректна. Такая трактовка дает возможность формализовать процесс и распространить традиционный инструментарий анализа и синтеза. Моделирование структурными уравнениями, ориентированными на конкретный класс объектов, может включать большое количество методов из различных областей с применением различных CAD/CAM/CAE-систем. Это может быть осуществлено как в ручном режиме, так и путем создания специализированных автоматизированных систем.

Введем на основе анализа структуры и типов связей между отдельными этапами общей проблемы следующие категории задач мультидисциплинарной оптимизации: последовательная (при независимом рассмотрении 1 и 2 этапов); полная (при наличии только 3 этапа и увеличении размерности и ширины ленты системы разрешающих уравнений весь набор оптимальных параметров достигается за одну итерацию); слабосвязанная (при этом выполняются итерации между различными этапами до тех пор, пока не будет достигнут желаемый уровень сходимости). Классификация может служить основой последующей унификации и стандартизации подходов. После сборки, состоящей в преобразовании модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых), возможно построение многоуровневых иерархических систем.

Численная реализация задач мультидисциплинарной оптимизации требует значительных ресурсов памяти и больших затрат машинного времени. При решении задач оптимизации необходимо использовать ресурсы нескольких компьютеров параллельно, то есть реализовать кластерный подход и взаимодействие через высокоскоростные Интернет соединения. Причем модули сетевого взаимодействия, как и большинство остальных модулей ком-

плекса, должны быть заменяемыми.

Методы оптимизации. В качестве метода глобальной оптимизации будем использовать генетические алгоритмы, реализующие случайный поиск с централизованным управлением с использованием отбора и генетических механизмов воспроизводства. Опираясь совокупностью возможных решений, обрабатывается набор параметров, структурированный в виде цепочки конечной длины, а последующие поколения популяции решений генерируются с помощью генетических операторов отбора, кроссовера и мутации [4]. В качестве метода локальной оптимизации при решении практических задач, характеризующихся высокими размерностью вектора варьируемых параметров и числом функциональных ограничений, в настоящее время наиболее предпочтительным представляется метод последовательной линеаризации. На каждом шаге метода последовательной линеаризации осуществляется следующий набор вычислительных этапов: решение исходной и сопряженной задач; вычисление функциональных производных или градиентов критериев целей и функциональных ограничений по варьируемым переменным[6]; построение области линеаризации; решение задачи линейного программирования. Конструктивная форма условий оптимальности первого порядка имеет вид

$$\min \delta \vec{h}^T \vec{\nabla}_h J_0; \quad J_j + \delta \vec{h}^T \vec{\nabla}_h J_j = 0; \quad \vec{h} + \delta \vec{h} \in \delta U \cap U.$$

Область линеаризации должна удовлетворять целому ряду условий. Она должна быть достаточно малой, чтобы формулы первого порядка с приемлемой точностью описывали приращения функционалов, и в то же время достаточно большой, чтобы процесс оптимизации не был слишком медленным. Область должна быть построена так, чтобы она целиком содержалась в глобальной области геометрических ограничений, при этом должна быть обеспечена возможность изменения ее конфигурации по любому возможному направлению в n -мерном пространстве варьируемых параметров.

Практическое применение. Возможности разработанного математического аппарата продемонстрируем на примере последовательной задачи. Необходимость подавления колебаний плат обусловлена возможной потерей электрического контакта как внутри платы, так и контакта платы с периферией, при больших амплитудах колебаний, что может привести к аварийной ситуации. Поэтому при проектировании необходимо решать задачи отстройки собственных частот плат бортовых компьютеров, элементы которых (процессор, микросхемы и т.п.) расположены на стеклотекстолитовой пластине. На рис. 1 и 2 приведены соответственно АЧХ платы до и после оптимизации. Как видно из графиков, удалось изменить геометрию конструкции таким образом, что первая собственная частота была выведена из зоны опасных вынужденных частот колебаний, за счет

увеличения рассеяния энергии в конструкции была снижена максимальная амплитуда колебаний.

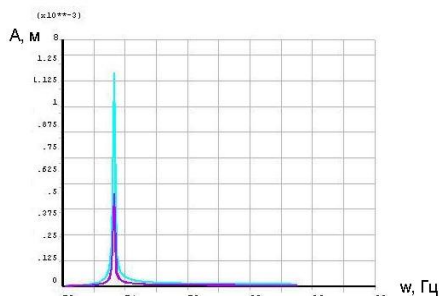


Рисунок 1

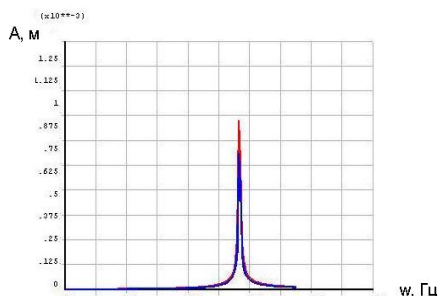


Рисунок 2

Закключение. Создана концепция нового подхода к решению комплексной многоуровневой задачи мультидисциплинарной оптимизации машин с использованием блочно-иерархического процесса. В построенной общей схеме приведены базовые принципы, которые будут использованы при его дальнейшей разработке. Введены на основе анализа структуры и типов связей между отдельными этапами общей проблемы категории задач мультидисциплинарной оптимизации. Дальнейшим направлением исследований является применение математического аппарата при исследовании жизненного цикла ряда современных конструкций.

Список литературы: 1. Fridman M.M., Zyczkowski M. Structural optimization of elastic columns under stress corrosion conditions // Structural Optimization. – 2001. – Vol. 21(3). – P. 218-228. 2. Harscher P., Amari S., Vahldieck R. etc. Analytical gradient evaluation of cost functions in general field solvers // A novel approach for optimization of microwave structures. IEEE Microwave Theory and Techniques Symposium MTT-S, Boston, June 2000. 3. Жовдак В.А., Иглин С.П., Смирнова Л.М., Солошенко В.А.. Оптимизация лопатки рабочего колеса турбокомпрессора по критерию собственной частоты колебаний // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – №. 12, т. 1. – С. 71-78. 4. P.G.Alotto, C.Eranda, B.Brandstatter et al. Stochastic algorithms in electromagnetic optimization // IEEE Trans. on Magnetics. – 1998. – V. 34, № 5. – PP. 3674-3684. 5. Назаренко С.А Математические модели мультифизического анализа конструкций для CALS технологий // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С. 125-132. 6. Назаренко С.А Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы // Вестник НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 119-122.

Поступила в редколлегию 05.06.2009

С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, асп., НТУ «ХПИ»

ОБ ЭФФЕКТЕ ЗАВИСАНИЯ МЕЛКОЙ ЧАСТИЦЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ

Описано рух сферичної частки, що зменшує радіус за показниковим законом, нелінійним диференціальним рівнянням зі змінними коефіцієнтами. За допомогою спеціального перетворення знайдено аналітичний розв'язок задачі Коші в функціях Бесселя. Встановлено ефект зависання дрібної частки змінної маси в повітряному шарі обмеженої товщини.

The motion of a spherical particle is described which reduces radius under the exponential law, nonlinear differential equation with variable factors. Through special transformation the analytical solution of a Cauchy problem in Bessel functions is found. The fact of hover of a fine particle of variable mass in air environment under condition of infinite existence in time is established.

Актуальность темы и цель исследования. В природе и технике нередко приходится видеть движение тел переменной массы, например, различных типов ракет, масса которых уменьшается в процессе сгорания топлива [1]. Изменение массы может происходить также в ходе перемещения элементов механической системы (намотке нитей или канатов на барабаны) [2], при испарении движущихся капель в газовой среде, при полете в атмосфере горящих частиц твердого топлива [3], метеоритов [1] и пр. С помощью моделей движения частиц переменной массы можно описывать движение капель образующих туманы [4].

Движение легких частиц в газовой среде сопровождается рядом особенностей, в частности наличием эффекта отражения легкой частицы встречным потоком [5], а также наличием экстремума скорости, характерного только при движении малой частицы переменной массы [6,7].

Построение аналитического решения уравнения движения существенно усложняется в случае нелинейных задач [5]. Ниже рассматривается одна из таких задач.

Основные обозначения и допущения при составлении уравнения движения. Исследование проведем в предположении, что сила аэродинамического сопротивления пропорциональна площади миделевого сечения и квадрату скорости падения шара в воздухе. Плотность шара принимаем постоянной. Поэтому уменьшение его радиуса сопровождается также уменьшением его массы и возрастанием удельной силы аэродинамического сопротивления.

Изменение радиуса тела подчиним показательному закону

$$r(t) = r_0 \exp(-\lambda t), \quad (1)$$

где r_0 – начальный радиус тела; λ – коэффициент, определяющий скорость уменьшения радиуса во времени t .

Заметим, что движение материальной точки, у которой изменялась масса по показательному закону, рассматривалось в работах [1], [8] и других исследованиях. В отличие от указанных публикаций здесь рассматривается полет тела переменных размеров и массы.

В рамках принятых допущений изменение скорости падения тела v во времени t описывается нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{r} v^2 = g. \quad (2)$$

Здесь k – безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления; g – ускорение свободного падения; r – подчиняется закону (1).

Значение начальной скорости падения тела принимаем равным v_0 . Поэтому решение уравнения (2) должно удовлетворять начальному условию

$$v(0) = v_0. \quad (3)$$

Замкнутое решение задачи Коши в функциях Бесселя. Для нахождения решения уравнения (2) вводим новую безразмерную переменную

$$\xi = \exp(\lambda t); \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi. \quad (4)$$

Учитывая, что, согласно (4)

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi \frac{d}{d\xi},$$

представляем (2) в виде

$$\frac{dv}{d\xi} + \beta v^2 = \frac{g_1}{\xi}, \quad (5)$$

$$\text{где } g_1 = \frac{g}{\lambda}; \quad \beta = \frac{k}{\lambda r_0}.$$

Чтобы избавиться в (5) от нелинейности, используем преобразование

$$v = \frac{1}{\beta} \frac{dw}{d\xi} w^{-1}, \quad (6)$$

в котором $w(\xi)$ неизвестная вспомогательная функция.

Подставив выражение (6) в (5), приходим к линейному уравнению типа Бесселя

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\beta_1}{\xi} w = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } \beta_1 = \beta g_1.$$

Общим решением (7) есть

$$w = \sqrt{\xi} (c_1 I_1(\eta) + c_2 K_1(\eta)), \quad (8)$$

где $\eta = 2\sqrt{\beta_1\xi}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $I_1(z), K_1(z)$ – соответственно модифицированная функция Бесселя и Макдональда индекса единица.

Учитывая принятые выше обозначения, после постановки (8) в (6), получаем общее решение уравнения (2)

$$v(\eta) = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\beta_1}{\xi}} \frac{cI_0(\eta) - K_0(\eta)}{cI_1(\eta) + K_1(\eta)}, \quad (9)$$

где $c = c_1c_2^{-1}$ – произвольная постоянная.

Константу c в (9) определяем из условия (3), что дает

$$c = \frac{v_0\beta K_1(\eta_0) + \sqrt{\beta_1}K_0(\eta_0)}{\sqrt{\beta_1}I_0(\eta_0) - v_0\beta I_1(\eta_0)}; \quad \eta_0 = 2\sqrt{\frac{\beta g}{\lambda}}. \quad (10)$$

При увеличении времени полета независимо от v_0 , графики изменения скорости приближаются к одной линии, которая аналитически представляется выражением

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{gr_0}{k}} \exp(-0,5\lambda t). \quad (11)$$

К нему приходим из решения (9), заменив там цилиндрические функции их асимптотическими выражениями при больших значениях аргумента [9]

$$I_0(\eta) \sim I_1(\eta) \sim \frac{e^\eta}{\sqrt{2\pi\eta}}; \quad K_0(\eta) \sim K_1(\eta) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} e^{-\eta}.$$

Для определения максимального расстояния, пролетаемого частицей за время ее существования необходимо вычислить сходящийся несобственный интеграл вида

$$\max S = \int_0^\infty v(t) dt. \quad (12)$$

Для подынтегральной функции (9) его не удастся выразить в аналитическом виде с помощью известных функций.

Чтобы упростить численное интегрирование в (12) представим его в виде

$$\max S = \int_0^\infty v_a(t) + \int_0^\infty [v(t) - v_a(t)] dt. \quad (13)$$

Асимптотика (11) позволяет первое слагаемое в (13) выразить через элементарные функции. Поэтому

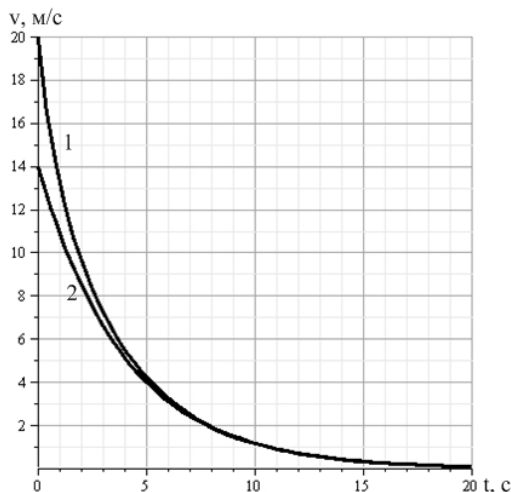
$$\max S = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{gr_0}{k}} + \int_0^\infty [v(t) - v_a(t)] dt. \quad (14)$$

Несобственный интеграл в (14) с заданной погрешностью ε можно заменить обычным определенным интегралом и проводить его вычисление на компьютере. Для контроля точности вычислений можно использовать правило Рунге.

Результаты расчетов. Сравним точное (9) и асимптотическое решения (11) для скорости частицы. Для этого проведем расчет при $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $k = 10^{-4}$; $\lambda = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $v_0 = 20 \text{ м/с}$.

Результаты расчетов, представленные на рисунке подтверждают то, что при росте времени аналитическое решение (9) (кривая 1) стремится к асимптотике (11) (кривая 2).

Дальше определим перемещение тела по формуле (14). В таблице представлены величины пролетаемого телом пути $S_{\max}$ при различных начальных скоростях v_0 , вычисление с погрешностью меньшей 10^{-3} м.



Зависимости скорости от времени, полученные различными способами

Величины пролетаемого частицей пути $S_{\max}$ для различных начальных скоростей

v_0 , м/с	5	10	15	20	25	30
$\max S$, м по форм (14)	53,77	57,80	60,56	63,18	65,44	67,45

Исходя из результатов в таблице, следует отметить, что величины пролетаемого частицей пути при различных начальных скоростях мало отличается друг от друга. Шестикратное увеличение v_0 увеличило $\max S$ только на 20 процентов.

Частица, радиус которой убывает по показательному закону, пролетает конечное расстояние $\max S$ за время ее существования. Она зависает в газовом слое высотой $\max S$, то есть за бесконечное время полета не может преодолеть большего расстояния. Поскольку в природе (туманы, дымовые завесы и пр.) зависание длиться на конечном интервале времени изложенная теория может быть использована для описания начального этапа этого явления.

Выводы. Решение дифференциального уравнения вертикального падения тела, радиус которого уменьшается по показательному закону, выражается в модифицированных функциях Бесселя. Частица пролетает конечное расстояние и после этого зависает в воздухе на бесконечное время. Такое явление обусловлено экспоненциальным законом уменьшения радиуса и массы частицы.

Список литературы: 1. Циолковский К.Э. Собр. соч. т. II, АН СССР. – 1954. 2. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 3. Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде. – М.: Издательство Академии наук СССР, 1958. – 92 с. 4. Грин Х., Лейн В. Аэрозоли – пыли, дымы и туманы. – Ленинград: Химия, 1969. – 428 с. 5. Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304 с. 6. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Об условиях экстремума скорости падения сферического тела переменного радиуса // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Системный анализ, управление и информационные технологии. – Вып. 26. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – С. 67-78. 7. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы // Механика и машиностроение. – 2007. – № 1. – С. 25-29. 8. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 9. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Поступила в редколлегию 03.09.2009

УДК.539.3:621.313

Э.С.ОСТЕРНИК, канд.техн.наук; завод «Электротяжмаш», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ ВАЛОПРОВОДОВ МНОГОМАШИННЫХ АГРЕГАТОВ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Виконано натурні вібродослідження та розроблено математичну модель динаміки критичних швидкостей n_{cr} ротора турбогенератора в процесі експлуатації. Запропоновано своєчасні заходи, що перешкоджають небезпечному наближенню n_{cr} до робочої частоти обертання ротора турбогенератора.

The scope of works undertaken includes performance of natural vibration studies, and development of the mathematical model for the dynamics of critical velocities n_{cr} of the rotor of turbine-driven set in the course of operation. Due measures have been proposed to avoid the dangerous proximity of n_{cr} to the operating rotational speed of the rotor of turbogenerator.

К числу наиболее ответственных многомашинных агрегатов на подшипниках скольжения принадлежат современные турбоагрегаты. Их срок службы должен быть не менее 40 лет [1]. Условия СНГ зачастую вынуждают эксплуа-

тировать турбоагрегаты дольше, чем обязывают стандарты.

Валопровод (система сочлененных роторов) турбоагрегата является гибким и находится на упруго-массивных опорах (встроенные или выносные подшипники скольжения). Трудности в определении исходных данных для расчета потребовали исследовать динамику системы валопровод-смазочный слой-подшипниковые опоры – статор-фундамент в процессе промышленной эксплуатации.

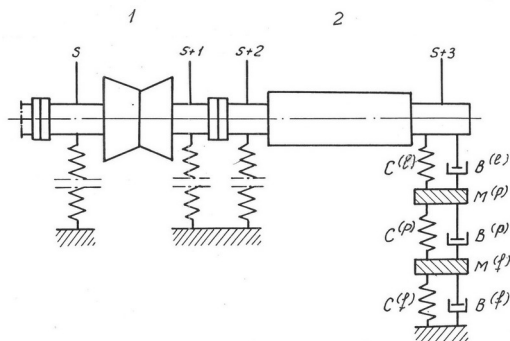


Рисунок 1 – Часть колебательной системы турбоагрегата:
1 – ротор ЦНД, 2 – ротор генератора

На рис. 1 представлена наиболее исследованная в данной работе часть указанной системы: роторы генератора и последнего цилиндра низкого давления (ЦНД) турбины. Цилиндры высокого и среднего давления не показаны. Элементы $C^{(l)}$, $C^{(p)}$, $C^{(f)}$ характеризуют упругие свойства масляной пленки, подшипников, статора и фундамента; $B^{(l)}$, $B^{(p)}$, $B^{(f)}$ – их демпфирующие свойства; $M^{(p)}$ и $M^{(f)}$ – приведенные к данной опоре массы стула подшипника и статорных частей, а также фундамента. Расчетные схемы всех опор (номера $1 \dots s \dots s+3$) одинаковы [2].

Номинальная частота вращения валопровода агрегата $n_{nom} = 3000$ об/мин, как показали испытания, находится между 4-й и 5-й критическими скоростями. Величина $n_{cr}^{(s)}$ преимущественно определяется 2-й парциальной критической скоростью системы ротор-опоры генератора n_{crII}^{gen} ; $n_{cr}^{(l)} \approx n_{crI}^{gen}$.

Это потребовало тщательных исследований динамики ротора генератора в процессе реальной эксплуатации. Основное внимание уделялось критической скорости агрегата по генератору $n_{cr}^{(s)}$, условно обозначенной n_{cr}^{II} . Работы проводились в интервале 9 лет.

Частотные характеристики валопровода определялись при пусках и остановах агрегата. При этом наиболее информативными были испытания автоматов безопасности турбины, связанные со стопорными и регулируемыми

клапанами, перекрывающими доступ пара в турбину. Такие испытания автоматов безопасности турбины проводятся при частоте, превышающей n_{nom} на 10-12 %, а иногда и более, что позволило исследовать критериальный диапазон $n \in [3000, 3400]$ об/мин. Чисто механический характер динамики обеспечивался отсутствием электрического возбуждения на роторе.

Частота вращения n поднималась или снижалась бесступенчато, чтобы не нарушать нормальные техпроцессы на электростанции и не подвергать валопровод с облопачиванием опасности промежуточных резонансов при $n_{cr}^{(1)} \dots n_{cr}^{(4)}$. Виброизмерения выполнялись, начиная с 1000 об/мин, через 50-100 об/мин до n_{nom} ; в диапазоне $n_{nom} < n < n_{max}$ через 20-30 об/мин. На каждом испытании автоматов безопасности n несколько раз повышалась вплоть до их срабатывания, затем n снижалась до n_{nom} . Для виброисследований записывались колебания опор валопровода от штатных индукционных датчиков виброскорости, подключенных непосредственно к регистрирующей аппаратуре. Такая схема, исключая специальные усилители, помехоустойчива при длинных линиях связи, обладает требуемым частотным диапазоном и длительной стабильностью. Частота вращения определялась по осциллограммам с точностью 0,2 % путем сопоставления сигналов фотоэлектрического отметчика оборотов и кварцевого генератора опорной частоты. В результате получены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики (АЧХ и ФЧХ) виброскорости опор в вертикальном и поперечном направлениях. Покажем, что резонансные частоты систем типа многомашинного агрегата по виброперемещению и по виброскорости весьма близки.

Рассмотрим колебания N -мерного упругого континуума Ω . Для турбоагрегата $N=3$. Интегро-дифференциальное уравнение колебаний континуума запишем в виде

$$\ddot{u}(P, t) + \int_{\Omega} K_1(P, Q) \frac{\partial^2 \ddot{u}(Q, t)}{\partial^2 t} m(Q) dQ = \int_{\Omega} K_1(P, Q) \ddot{q}(Q, t) dQ. \quad (1)$$

Здесь P и Q – точки N -мерной области Ω , $\ddot{u}$ – вектор виброперемещения, m – функция плотности, $\ddot{q}$ – внешняя нагрузка. Краевые условия содержатся в ядре $K_1(P, Q)$, поэтому уравнение (1) относительно них инвариантно. Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\ddot{\varphi}(P) = \lambda^2 \int_{\Omega} K(P, Q) \ddot{\varphi}(Q) dQ,$$

$$\text{где } K(P, Q) = K_1(P, Q) \sqrt{m(P) \cdot m(Q)}.$$

Разлагая $\ddot{q}$ в гармонический ряд

$$\ddot{q}(Q, t) = \sqrt{m(Q)} \sum_k A_k(Q) e^{i\omega_k t},$$

придем к решению уравнения (1) для вынужденных колебаний в виде

$$\bar{u}(P, t) = \frac{1}{\sqrt{m(P)}} \sum_l \sum_k \frac{A_{lk} \varphi_l(P) e^{i\omega_k t}}{\lambda_l^2 - \omega_k^2}, \quad (2)$$

где

$$A_{lk} = \int_{\Omega} \bar{\varphi}_l(Q) \bar{A}_k(Q) dQ.$$

Наконец, для производной порядка r имеем

$$\frac{\partial^r \bar{u}}{\partial t^r} = \frac{(i)^r}{\sqrt{m(P)}} \sum_l \sum_k \frac{A_{lk} \varphi_l \omega_k^r e^{i\omega_k t}}{\lambda_l^2 - \omega_k^2}. \quad (3)$$

Сопоставление (2) и (3) показывает, что резонансные частоты виброперемещения и его производных любого порядка при $\omega_k = \lambda_l$ совпадают. Погрешность от пренебрежения в формулах (1)–(3) малым внутренним трением при $r = 1$ для систем типа турбоагрегата составляет около 0,5 %.

Регистрация виброскорости имеет самостоятельное значение, так как уровень $\partial \bar{u} / \partial t$ является одним из критериев виброненадежности агрегата [1,3]. В настоящее время применяются также измерительные схемы с частотным анализом на ЭВМ по программе быстрого преобразования Фурье, что позволяет получать АЧХ на распечатках. В условиях промышленной эксплуатации такие схемы не всегда применимы.

Известно, что при непрерывно возрастающей (или убывающей) частоте ω происходит явление перехода через резонанс. Максимальные амплитуды достигаются при частоте ω^* несколько большей (или соответственно меньшей), чем собственная частота λ [2]. При испытаниях автоматов безопасности, когда за $\Delta t \approx 30 \text{ с}$ достаточно равномерно возрастает от 3000 до 3330–3400 об/мин, смещение $\omega^* - \lambda$ не выше 0,2 %. Описанный процесс определения n_{cr} при разгоне и выбеге агрегата можно считать квазистационарным. Суммарная погрешность описанного способа определения n_{cr} не превышает 0,9 %.

Анализ экспериментальных данных выявил ряд особенностей в динамике системы ротор-опоры-фундамент агрегата.

Первая область резонансных частот вращения находится в интервале 1200–1380 об/мин. Расчет ротора турбоагрегата на жестких опорах давал $n_{cr,s}^I = 1530$ об/мин, на реальных опорах критическая скорость существенно ниже. По мере эксплуатации n_{cr}^I снизилась на 90–150 об/мин. Значения n_{cr}^I , обнаруженные при измерениях вибрации в вертикальном и поперечном направлениях, весьма близки.

В интервале 1500–1800 об/мин максимумы суммарной вибрации сопровождаются максимумами второй гармоники. Здесь обнаруживается критическая скорость второго порядка $n_h = 1/2 n_{cr}^{II}$. Эффект двойкой изгибной жесткости ротора генератора частично устранен специальным ослаблением междуполусного продольного сечения ротора.

Резонансы в области $n = 2380 \div 2900$ об/мин связаны с собственными частотами статора генератора.

Основным было исследование резонансов при $n \geq 3000$ об/мин. Без учета податливости опор и масляной пленки $n_{cr,s}^{II} = 4640$ об/мин. Соответствующие экспериментальные значения n_{cr}^{II} лежат значительно ниже.

При вводе турбоагрегата в эксплуатацию АЧХ резко росла, начиная с 3070 об/мин, но максимум не был достигнут вплоть до 3400 об/мин. При последующих испытаниях автоматов безопасности турбины, повторяющихся при регламентных работах в процессе эксплуатации (включая ремонты), наблюдалось прохождение системы через n_{cr}^{II} . С ростом времени эксплуатации t_{exp} величина n_{cr}^{II} монотонно снижалась. Сопоставление частотных характеристик иллюстрируется на рис. 2. Приведены АЧХ в относительных координатах

$$a^{(1)} = u_n^{(1)} / u_{3000}^{(1)},$$

где $u_n^{(1)}$ – амплитуда 1-й (т.н. оборотной) гармоники виброперемещения при частоте вращения n , $u_{3000}^{(1)} = u_n^{(1)}$ при $n = 3000$ об/мин. Такой способ представления АЧХ позволяет непосредственно сопоставлять динамические характеристики механических систем.

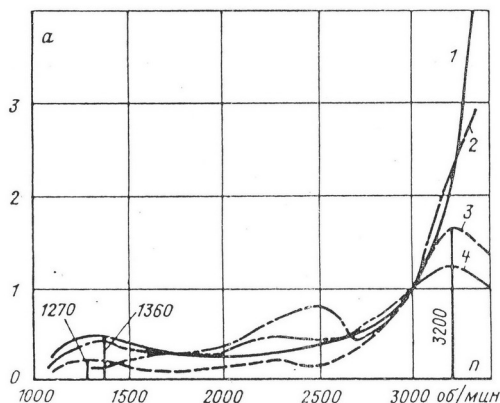


Рисунок 2 – АЧХ вертикальных колебаний опор генератора при вводе агрегата в строй (кривые 1 и 2) и после $15 \cdot 10^3$ ч эксплуатации (3 и 4); 1,3 – сторона турбины

АЧХ, полученная после $15 \cdot 10^3$ ч эксплуатации, обнаруживает максимум по $a^{(1)}$ при $n = 3200$ об/мин на обеих опорах генератора. Изменения соответствующей фазы колебаний φ_1^0 достигают при этом 110° . Форма колебаний характеризуется тем, что колебания опор генератора близки по фазе, а последняя опора турбины находится к ним в противофазе. Эти данные демонстрируют прохождение системой валопровод-опоры-фундамент критической частоты вращения при $n_{cr}^{II} = 3200$ об/мин.

Рассмотрены данные по n_{cr}^{II} в интервале исследований за 9 лет. Для анализа и прогнозирования закономерности снижения $n_{cr}^{II}(t_{exp})$ построена соответствующая эмпирическая степенная функция в виде

$$n_{cr}^{II} = C + N(t_{exp})^{-P}, \quad (4)$$

где $N(t_{exp}) = Bt_{exp}^{-P}$.

Эта закономерность в логарифмических координатах (t_{exp} , N) дает прямую линию (рис. 3). Время эксплуатации указано в часах и переведено в годы при условно принятой наработке 8000 часов в календарный год.

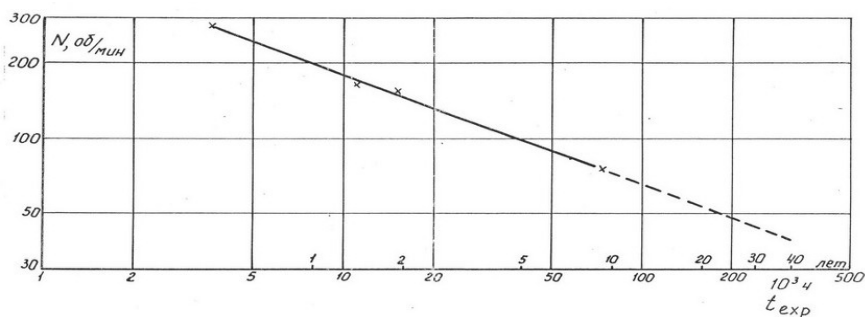


Рисунок 3 – Снижение n_{cr}^{II} со временем эксплуатации

В декартовых координатах кривая, заданная формулой (4), обладает асимптотой $n_{cr}^{II}(t_{exp} \rightarrow \infty) = C$. В логарифмических координатах предельные значения $N = 0$ ($n_{cr}^{II} = C$) и $t_{exp} = 0$ отсутствуют.

Параметры C , B , P определены методом наименьших квадратов. Данная методика и ее результаты адекватны [4]. Решение соответствующей системы уравнений дает $C = 3045$; $B = 10,245$; $p = 0,440$. Средняя квадратичная погрешность формулы (4) в данном случае составляет $\Delta n = 1,04$ об/мин при погрешности эксперимента до 30 об/мин.

В предположении справедливости формулы (4) и за исследованным диапазоном эмпирическая прямая на рис. 3 продолжена штриховым участком. При наработке 8000 часов в год и сроке службы $t_{exp} = 40$ лет $n_{cr}^{II} = 3085$ об/мин, если не выполнялись указанные далее меры. В реальной эксплуатации таких случаев не было.

Поскольку все исследования проводились в режиме холостого хода без электрического возбуждения, реальной причиной снижения n_{cr} могли быть только механические изменения в системе ротор-опоры-фундамент.

Сюда не входят изменения режима работы масляного слоя в подшипниках. Известно, что жесткость слоя пропорциональна его вязкости [5]. Температура масла при испытаниях на входе ($55 \div 57$) °С. При этом, как показывают расчеты,

повышение t° на 2°C снижает жесткость масляной пленки не более, чем на 3 % (масло турбинное «Л»), и n_{cr}^{II} может снизиться не более, чем на 30 об/мин.

Однако не только прогнозные, но и экспериментальные данные, представленные на рис. 3, показывают, что снижение n_{cr}^{II} по сравнению с исходными значениями превышает 200 об/мин, так что n_{cr}^{II} может стать опасно близкой к $n_{nom} = 3000$ об/мин. Вероятными причинами снижения n_{cr}^{II} являются некоторая выработка вкладышей подшипников, усталостные трещины в элементах системы, ослабление жестких соединений узлов агрегата, которые могут происходить в процессе длительной эксплуатации при переменных графиках нагрузки. Сюда также могут относиться такие явления в системе турбоагрегат-фундамент-основание, как виброползучесть в железобетонном фундаменте и его основании. Опасному развитию этих явлений препятствуют такие своевременные меры, как виброакустическая диагностика, перезаливка или смена вкладышей, дефектоскопия и устранение усталостных трещин в роторе и фундаменте, повторные балансировки валопровода агрегата, восстановление натягов и зазоров, а также при необходимости – силикатизация грунтов и модификация бетона (например, специальными присадками). См. также [6,7].

Напомним также о близком по характеру явлении – снижении строя (собственных частот у струн) музыкальных инструментов [8].

Выводы. Проведенные в интервале 9 лет виброисследования мощных турбоагрегатов показали, что критические скорости их роторов n_{cr} в процессе эксплуатации могут снижаться. Это явление хорошо описывается эмпирической степенной функцией, что позволяет строить прогнозные оценки. Опасному приближению n_{cr}^{II} к рабочей частоте вращения препятствуют своевременная виброакустическая диагностика, восстановление вкладышей, натягов и зазоров; устранение усталостных трещин, повторные балансировки валопровода.

Перспективы развития данного направления – выбор адекватной физической модели, например, виброползучести. Целесообразно также проводить исследования иных машин с гибкими роторами и подшипниками скольжения, особенно многомашинных агрегатов, и рассмотреть проблему динамической устойчивости системы, работающей вблизи резонанса.

Список литературы: 1. Машины электрические вращающиеся. Турбогенераторы. Межгосударственный стандарт ГОСТ 533-2000. – К., 2002. – 28 с. 2. Вибрации в технике. Справочник. В 6-ти тт. – М., 1978-1981. 3. Агрегаты паротурбинные стационарные. Нормы вибрации опор валопроводов и общие требования к проведению измерений. Межгосударственный стандарт ГОСТ 25364-97. – К., 1999. – 6 с. 4. *Остерник Э.С.* Моделирование деформационных полей в электромашиностроении с помощью функций N-переменных // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т.3. – С. 29-42. 5. *Pincus O., Sternlicht B.* Theory of Hydrodynamic Lubrication. – N.Y., 1981. – 427 p. 6. Проектирование железобетонных конструкций. Справочное пособие / Под редакцией А.Б. Гольшева. – К., 1990. – 486 с. 7. *Данилевич Я.Б., Карымов А.А.* Оценка сокращения «срока жизни» вала ротора турбогенератора // Электричество. – 1997. – № 2. – С. 36-40. 8. *Давиденков Н.Н.* Избранные труды. Т.2. – К., 1981. – 655 с.

Поступила в редколлегию 21.07.2009

Л.О.ПАРХОМЕНКО, ХДУХТ, Харків

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРІВ

Розглянуто задачу теорії пружності про дослідження власних радіальних коливань пружного циліндра скінченної довжини. Розв'язання задачі пропонується здійснювати сумісним застосуванням методу R-функцій і варіаційного, при цьому вихідна задача зводиться до алгебраїчної задачі на власні значення. Використання методу R-функцій дозволяє розглядати циліндри складної геометричної форми. Наведено чисельні результати розрахунку власних значень і власних форм в задачі про коливання кругового пружного циліндра скінченної довжини.

The elasticity theory problem of the investigation of free radial vibrations for an elastic cylinder of finite length is considered. Combined using R-function method and variational method for solving problem is proposed, at that the original problem is reduced to the algebraic eigenvalue problem. The application of R-function method is permit to consider arbitrary geometric form cylinders. The results of numeric eigenvalue and eigenform calculation of vibration problem for the circular elastic cylinder of finite length are presented.

1 Вступ. Циліндр скінченної довжини широко використовується в машинобудуванні, а також часто зустрічається в конструкціях двигунів та енергетичному устаткуванні. Збільшення навантаження на такі деталі зумовлює необхідність дослідження їх власних коливань.

Математичною моделлю коливальних процесів у пружному тілі є рівняння руху [1], а врахування усталеності коливань дозволяє вихідну задачу зводити до алгебраїчної проблеми власних чисел.

Задача про розрахунок частот власних радіальних коливань пружного циліндра класичної форми, поверхня якого є вільною від напружень, розглянута в [2,3]. Певні складнощі виникають при розрахунку коливань тіл, геометрія яких відрізняється від класичної. Такі дослідження потребують використання наближених методів обчислення та створення універсальних алгоритмів їх реалізації. Зокрема, слід відмітити метод скінченних елементів (МСЕ), який має широке практичне застосування у випадку дослідження власних коливань тіл зі складною геометрією. Застосування МСЕ до розрахунку коливань пружних тіл розглянуто в [4] та багатьох інших роботах.

В представлений роботі пропонується наближений метод розрахунку усталених коливань циліндрів скінченної довжини складної геометричної форми з використанням методу R-функцій сумісно з варіаційним методом Рітца [2,3]. Такий підхід дозволяє розглядати циліндри довільної бічної форми та будувати структури розв'язку, в яких враховується геометрична інформація. Велику кількість прикладів застосування методу R-функцій

до розрахунку власних коливань пластин представлено в [5].

Аналіз збіжності розв'язку, отриманого за методом, що пропонується, робиться шляхом порівняння результатів розрахунку, проведеного за різним числом координатних функцій, із результатами обчислень за допомогою інших наближених методів.

2 Постановка задачі. Розглядається пружне тіло обертання скінченної довжини Ω з межею $\partial\Omega$, розташоване в циліндричній системі координат Orz (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Досліджується випадок відсутності дії на тіло масових та поверхневих сил. Рух пружного тіла визначається векторним рівнянням Ламе [1,6]

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $U(t, r, z)$ – вектор зміщень; λ, μ – сталі Ламе; ρ – густина матеріалу.

Припускаємо періодичність коливальних процесів у часі і вважаємо, що

$$U(t, r, z) = e^{-i\gamma t} \cdot u(r, z); \quad u(r, z) = \begin{pmatrix} u_r(r, z) \\ u_z(r, z) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де γ – кругова частота процесу.

Позначимо через β відношення швидкості розповсюдження поперечних хвиль c_2 до швидкості розповсюдження повздовжніх хвиль c_1 в нескінченному пружному середовищі, тобто $\beta = c_2/c_1$, при цьому $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$; $c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ [1].

Візьмемо за масштаб довжини деяку характерну величину R , за масштаб часу – величину R/c_2 . Компоненти вектора зміщень і тензора напружень вважаємо співвіднесеними відповідно до $R\sigma_0/\mu$ і σ_0 (σ_0 – деяка стала, яка має розмірність напруження). Ураховуючи співвідношення (2), рівняння (1) в безрозмірних величинах набуває вигляду

$$\frac{1}{\beta^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \operatorname{rot} \operatorname{rot} u = -\gamma^2 u; \quad (3)$$

компоненти тензора напружень визначаються формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right];$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{u_r}{r} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right];$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} + (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right];$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0.$$

Вважаємо, що на межі тіла $\partial\Omega$ із зовнішньою нормаллю ν задані нульові нормальне σ_ν та дотичне τ_ν напруження:

$$\sigma_\nu = 0; \quad \tau_\nu = 0; \quad (r, z) \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Рівняння (3) можна переписати в операторному вигляді як

$$Au = \gamma^2 u, \quad (5)$$

де

$$Au = - \left(\frac{1}{\beta^2} \text{grad div } u - \text{rot rot } u \right). \quad (6)$$

Таким чином, дослідження коливань тіла, що розглядається, зводиться до задачі на власні значення (5), при цьому крайові умови (4) вважаються природними.

3 Формулювання варіаційної задачі. Для розв'язання отриманої задачі застосуємо варіаційний метод. Знаходження мінімального власного значення оператора A , визначеного рівністю (6), еквівалентно задачі про знаходження мінімуму функціонала енергії [2]

$$E(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1 - 2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\} d\Omega \quad (7)$$

за умови

$$\int_{\Omega} (u_r^2 + u_z^2) d\Omega = 1. \quad (8)$$

При цьому вектор зміщень $u(r, z)$ повинен задовольняти рівностям

$$\int_{\Omega} u \, d\Omega = 0; \quad \int_{\Omega} r \times u \, d\Omega = 0, \quad (9)$$

де r – радіус-вектор довільної точки.

4 Формування структур розв'язку варіаційної задачі. Згідно з методом R-функцій [6] наближений розв'язок задачі (7–8) будемо шукати у вигляді

$$u_r = \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_1 - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\Phi_1}{r} +$$

$$\begin{aligned}
& + \omega \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - (1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_2 ; \\
u_z = & \Phi_2 - \omega D_1 \Phi_2 - 2(1 - \beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} T_1 \Phi_2 - (1 - 2\beta^2) \omega \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\Phi_1}{r} + \\
& + \omega \left[(1 - 2\beta^2) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 \right] T_1 \Phi_1 .
\end{aligned} \tag{10}$$

Тут:

1. Функція $\omega(r, z) \in C^1(\Omega)$, побудована за допомогою апарату R-функцій, є лівою частиною нормалізованого до першого порядку рівняння межі $\partial\Omega$ області [5,6]

$$\omega(r, z) = 0, \quad (r, z) \in \partial\Omega$$

та має такі властивості:

$$\text{а) } \omega(r, z) > 0, \quad (r, z) \in \Omega;$$

$$\text{б) } \frac{\partial \omega}{\partial \nu} = -1, \quad (r, z) \in \partial\Omega.$$

2. D_1, T_1 – диференціальні оператори, що визначаються рівностями

$$D_1 g = \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial z};$$

$$T_1 g = -\frac{\partial \omega}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial g}{\partial z}.$$

3. Функції $\Phi_i(r, z)$ ($i = 1, 2$) є довільними. При будь-якому їх виборі крайові умови (4) виконуються точно. У чисельній реалізації структур розв'язку (10) функції Φ_i подаються у вигляді розвинення за елементами деякої повної системи функцій (поліномів Чебишева, сплайнів та ін.):

$$\Phi_1(r, z) = \sum_{m=1}^{n_1} C_{1,m} \varphi_m^{(1)}(r, z);$$

$$\Phi_2(r, z) = \sum_{m=1}^{n_2} C_{2,m} \varphi_m^{(2)}(r, z). \tag{11}$$

Підставивши (11) у формули (10), представимо наближений розв'язок задачі (7–8) у вигляді

$$u_m(r, z) = \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{ri}(r, z);$$

$$u_{zn}(r, z) = \sum_{i=1}^n C_i \Psi_{zi}(r, z), \tag{12}$$

де $n = n_1 + n_2$; $C_i = \begin{cases} C_{1,i}, & i \leq n_1 \\ C_{2,i}, & n_1 < i \leq n \end{cases}$; $\Psi_{ri}(r, z)$; $\Psi_{zi}(r, z)$; $(i = \overline{1, n})$ – деякі

функції, що визначаються структурами (10).

Мінімізуючи функціонал (7) на множині функцій (12), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n C_i [a_{ij} - \gamma^2 \cdot b_{ij}] = 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \iint_D \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri} \Psi_{rj}}{r^2} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \left. \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) \right\} r dr dz; \\ b_{ij} = & \iint_D (\Psi_{ri} \Psi_{rj} + \Psi_{zi} \Psi_{zj}) r dr dz; \quad i, j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут D – проекція області Ω на площину Orz .

Перші n власних значень $\gamma_1^2 < \gamma_2^2 < \dots < \gamma_n^2$ задачі (5) визначаються рівняннями, що випливає із системи (13):

$$\det(A - \gamma^2 B) = 0,$$

де $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$.

Коефіцієнти C_i апроксимуючих розвинень (12) обчислюються для кожного власного значення γ_k^2 ($k = \overline{1, n}$) як розв'язки системи лінійних рівнянь (13) за умови (8). Вони визначають власні форми коливання тіла.

5 Чисельні результати. Розглянемо задачу про власні радіальні коливання прямого кругового пружного циліндра радіуса R і висоти h , розташованого симетрично відносно площини $z = 0$ (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Розв'язання цієї задачі наведено в [2] та здійснюється за допомогою варіаційного методу Рітца (метод 1).

Отримаємо наближений розв'язок задачі за допомогою методу, запропонованого вище (метод 2).

Циліндр, що розглядається, утворюється перетином нескінченного циліндра радіуса R : $\Omega_1 = \{r = R\}$ з нескінченною смугою ширини h : $\Omega_2 = \{-h/2 \leq z \leq h/2\}$, тобто $\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2$. Нормалізовані до першого порядку рівняння меж областей $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_2$ визначаються функціями

$$\omega_1(r, z) = \frac{1}{2R}(R^2 - r^2); \quad \omega_2(r, z) = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right].$$

Нормалізоване до першого порядку рівняння межі циліндра $\omega(r, z) = 0$, $(r, z) \in \partial\Omega$ задається функцією

$$\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2.$$

Тут символом « $\wedge_0$ » позначено операцію R_0 -кон'юнкції [5,6]:

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для побудови структур наближеного розв'язку (10) в розвиненнях (11) покладаємо

$$\{\varphi_m^{(1)}(r, z)\}_{m=1}^{\infty} = \{r^{2k+1} z^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty};$$

$$\{\varphi_m^{(2)}(r, z)\}_{m=1}^{\infty} = \{z^{2k+1} r^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty}.$$

Обрані таким чином системи функцій за рахунок симетрії забезпечують виконання умов (9).

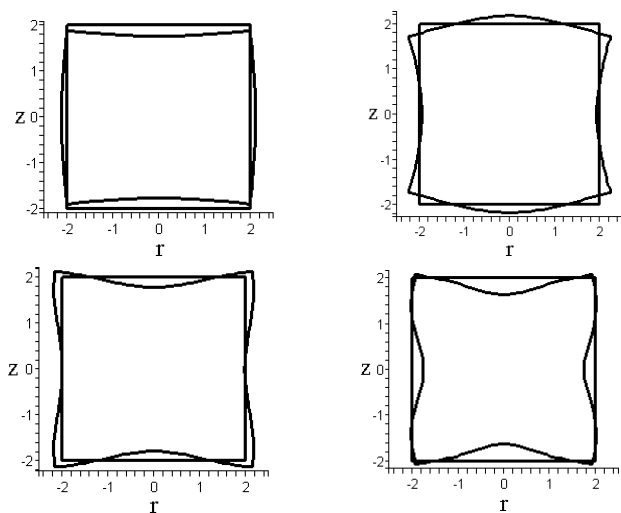
Інтеграли (14) обчислювались наближено за допомогою квадратурних формул Гаусса, порядок яких узгоджувався зі степенями апроксимуючих поліномів. Враховуючи симетрію, обчислення виконувались за 1/4 частиною меридіанного перетину циліндра. З метою оцінки точності результатів розрахунки проводились із різним числом координатних функцій. Для підтвердження вірогідності отриманих результатів перевірялось виконання крайових умов (4).

У таблиці наведено перші чотири власних значення, що знайдені за методами 1 та 2. Представлені результати отримано з числом $n = 6$ та $n = 10$ координатних функцій. Для обчислень покладено $R = 2$, $h = 4$, $\beta^2 = 1/4$. Усі розрахунки виконано в середовищі Maple 9.5.

Розв'язок задачі на власні значення для прямого кругового циліндра

Власні значення	Число координатних функцій			
	$n = 6$		$n = 10$	
	Метод 1	Метод 2	Метод 1	Метод 2
γ_1^2	1,35596	1,36794	1,35584	1,35955
γ_2^2	2,49976	2,55196	2,47290	2,49528
γ_3^2	4,61518	4,56298	4,38968	4,40530
γ_4^2	7,98255	7,64823	6,73395	6,75028

На рисунку представлено власні форми, що відповідають першим чотирьом власним значенням.



Власні форми коливання прямого кругового циліндра

6 Висновки. Розроблено універсальний алгоритм для розрахунку власних радіальних коливань пружних циліндрів довільної бічної форми. Координатні послідовності варіаційної задачі будуються за допомогою лівих частин нормалізованих до першого порядку рівнянь меж областей. Побудова цих лівих частин здійснюється шляхом використання двомісних R -операцій. Аналіз наближеного і тестового розв'язків показав, що вже при $n = 6$ координатних функціях перші три власні значення співпадають з точністю до 0,1. Алгоритм реалізовано за допомогою програмного пакету Maple 9.5.

Список літератури: 1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с. 2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 3. Nieves F.J., Bayón A., Gascón F., 2008, Optimization of the Ritz method to calculate axisymmetric natural vibration frequencies of cylinders, J. of Sound and Vibration, 311, 588-596. 4. Чирков А.Ю. Применение смешанных вариационных формулировок МКЭ к решению задач о собственных колебаниях упругих тел // Проблемы прочности. – 2008. – № 2. – С. 121-140. 5. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задаче теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1987. – 175 с. 6. Рвачев В.Л., Синекон Н.С. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наукова думка, 1990. – 216 с.

Надійшла до редколегії 04.06.2009

В.О.ПОВГОРОДНИЙ, канд.техн.наук, мл.науч.сотр.,
ИПМаш НАН Украины, Харьков

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Розглянуто проблеми ідентифікації теплофізичних та механічних властивостей прямокутних пластинок. Наведено їх класифікацію та постанови. Також у даній статті розглядаються питання термопружності плит з пористих матеріалів.

The problems of the identification thermophysical and mechanical parameters of rectangular's plates. Kvalifications are discussed. This article is devoted to the problem of thermoelasticity of the plate. The ses plates are constructed from the porous materials.

Математическая модель однородной изотропной теории термоупругости, сформированная в 19 веке, была основана на положении, что свойства упругости характеризуются двумя упругими постоянными (модуль Юнга и коэффициент Пуассона, которые определяются из простых макроэкспериментов). Эта модель сыграла огромную роль в становлении на научную основу расчетов на прочность, устойчивость и колебания различных конструкций и сооружений [1].

Поскольку само изделие из пористого материала выполняется методами прессования, то ясно, что плотность материала и, следовательно, пористость распределяется по массиву самого материала неравномерно. Возникает изначальное нарушение гипотез сплошности и однородности материала, принимаемых в механике твердого деформируемого тела как основные.

Но поскольку все чаще требуются решения задач механики деформируемого твердого тела именно для таких материалов, приходится возвращаться к гипотезе сплошности, но учитывать пористость введением поправок в исходные зависимости состояния материала, то есть подходить к решению задач механики деформируемого твердого тела с позиции механики неоднородных тел.

На рис. 1 представлены экспериментальные кривые пористого железа по значениям теплофизических и механических характеристик в зависимости от пористости.

Кроме того, основная «скелетная» составляющая материала имеет свойства, зависящие от температуры. На основании сказанного и опираясь на экспериментальные данные, для дальнейших решений принята следующая физико-механическая модель состояния материала:

- 1 Принимаем материал идеально упругим, термочувствительным и подчиняющимся закону Гука.
- 2 Предлагается следующая эмпирическая зависимость для модуля Юнга от температуры T и пористости P

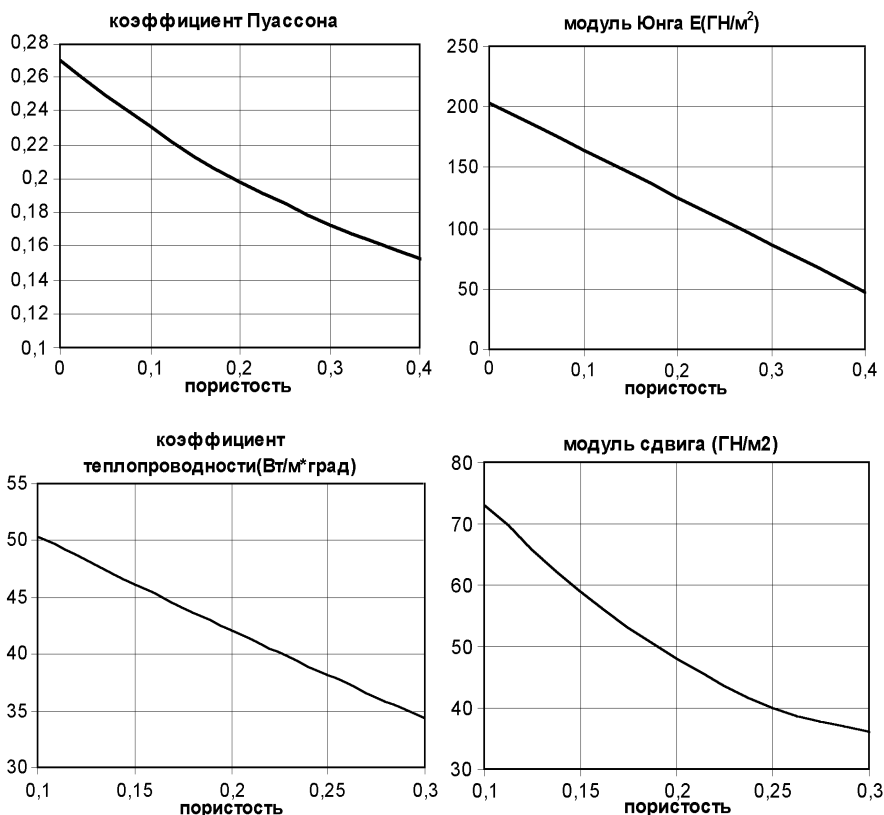


Рисунок 1 – Влияние пористости на характеристики пористого железа

$$E(T, P) = E_0 (1 + a_1 P + a_2 P^2) (1 + b_1 T + b_2 T^2 + \dots). \quad (1)$$

- 3 На основе экспериментальных данных получаем эмпирическую формулу для коэффициента Пуассона

$$\mu(P) = \mu_0 (1 + c_1 P + c_2 P^2 + c_3 P^3). \quad (2)$$

- 4 Коэффициент линейного расширения материала $\alpha(T)$ является функцией температуры и не зависит от пористости. Основанием для такого утверждения служит тот факт, что от теплового воздействия расширяется лишь «скелетная часть» материала как сплошное тело. На основе экспериментальных данных получаем формулу

$$\alpha(T) = \alpha_0 (1 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \dots). \quad (3)$$

- 5 Коэффициент теплопроводности материала считаем зависящим от температуры и пористости. На основе экспериментальных данных была получена следующая зависимость

$$\lambda(T, P) = \lambda_0 \sqrt{(1-P)^3} (1 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \dots). \quad (4)$$

- 6 Пористость P является функцией координат точек тела и не зависит от температуры
- 7 Принимаем приближенно, что пористость тела не зависит от напряженного состояния тела.
- 8 На основании гипотетической независимости пористости от напряженного состояния тела принимаем условие, что пористый материал одинаково сопротивляется растяжению-сжатию, то есть $E_{\text{раст}} = E_{\text{сж}}.$
- 9 Полагаем, что при изготовлении изделия из пористого материала методом порошковой металлургии начальные (технологические) напряжения отсутствуют.
- 10 В случае внутреннего тепловыделения для мощности теплового источника принимается зависимость

$$W(T, P) = W_0 (1 - P) (1 + \gamma_1 T + \gamma_2 T^2 + \dots). \quad (5)$$

Коэффициенты в (1), (2), (3), (4), (5) определялись методом наименьших квадратов путем обработки экспериментальных данных.

Приближенные гипотезы, описывающие физико-механическое состояние материала, позволяют подходить к решению задач с позиций хорошо развитой механики неоднородных материалов сплошных тел, свойства которых скорректированы на пористость.

Объектами исследования являются балка-стенка, круглая и прямоугольная пластины. Для них решены задачи теплопроводности и термоупругости. Полагаем поле температур в пластине одномерным. Пластины могут содержать или не содержать источники тепла. Тепловые граничные условия могут быть 1-ого рода или приводимые к ним. По контуру пластинки могут быть как свободными, так и закрепленными.

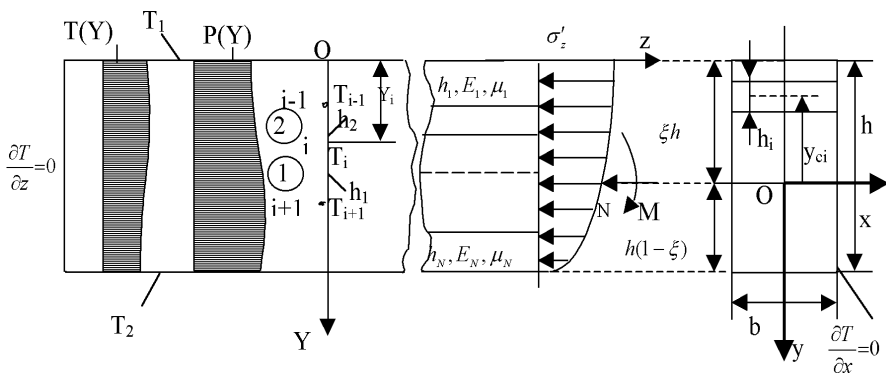


Рисунок 2 – Схема балки-плиты в одномерном поле температур

Решение задачи теплопроводности пластин сводится к интегрированию нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\lambda(T, P) \frac{\partial T}{\partial Y} \right] + W(T, P) = 0 \quad (6)$$

при удовлетворении граничным условиям $T = T_1$ при $Y = 0$, $T = T_2$ при $Y = h$.

Непосредственное решение нелинейной задачи затруднено, поэтому воспользуемся схемой итераций, согласно которой исходная краевая задача заменяется решением серии линейных задач:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left[\lambda^{(m-1)}(Y) \frac{\partial T^{(m)}}{\partial Y} \right] + W^{(m-1)}(Y) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где $\lambda^{(m)}(Y)$, $W^{(m)}(Y)$ – характеристики, полученные из предыдущего приближения.

Сформулированную краевую задачу заменяем эквивалентной ей вариационной с поиском экстремума следующего функционала

$$J_{(m)} = \int_0^h \left\{ \frac{\lambda^{(m-1)}(Y)}{2} \left[\frac{\partial T^{(m)}}{\partial Y} \right]^2 - T_{(m)} W^{(m-1)}(Y) \right\} dY. \quad (8)$$

Рассматривается балка-стенка. Согласно МКЭ разбиваем пластину по толщине (или высоте балки-стенки) на отдельные слои-суперэлементы (с условно постоянными, усредненными характеристиками) и аппроксимируем функцию температуры линейным сплайном. В конечном итоге получаем линейную алгебраическую систему уравнений вида

$$T_i^{(m)} = \frac{1}{\frac{\lambda_1^{(m-1)}}{h_1} + \frac{\lambda_2^{(m-1)}}{h_2}} \left\{ \frac{\lambda_1^{(m-1)}}{h_1} T_{i+1}^{(m)} + \frac{\lambda_2^{(m-1)}}{h_2} T_{i-1}^{(m)} + \frac{1}{2} [W_1^{(m-1)} h_1 + W_2^{(m-1)} h_2] \right\}, \quad (9)$$

Решение системы (9) ищется итерационным методом Гаусса-Зейделя до сходимости с заданной точностью.

Для поиска нормальных температурных напряжений в балке-стенке исходим из посылки, что длина бруса велика, и краевыми эффектами можно пренебречь. В этом случае с достаточной точностью можно использовать прием, основанный на принципе освобождаемости от связей (принцип Сен-Венана).

Суть приема решения заключается в том, что вначале балка-стенка жестко защемляется и для такого ее состояния определяются нормальные напряжения в торцах, приводящихся к равнодействующей силе N и моменту M . Для получения действительного поля напряжений к пластинке прикладываются торцевые усилия обратного направления.

Для получения численного решения балка-стенка представляется в виде пакета отдельных слоев (суперэлементов), подчиняющихся общепринятым

гипотезам (плоских сечений, одноосного напряженного состояния и условию совместности деформаций).

Получены расчетные формулы для температурных напряжений в стержне при различных способах его закрепления.

Формула (10) отображает состояние балки-стенки в случае, когда пластина свободна от связей

$$\sigma_z(y) = -E(y)\alpha(T)T(y) + \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}} + \frac{E(y)yM}{\sum_{i=1}^n E_i \left[\frac{bh_i^3}{12} + bh_i y_{ci}^2 \right]}. \quad (10)$$

При наличии подвижной заделки, разрешающей осевое перемещение, но запрещающей поворот, в формуле (10) убирается последнее слагаемое. В случае жесткой заделки в формуле (10) остается лишь первое слагаемое.

Здесь имеем

$$N = -b \int_{-\xi h}^{h(1-\xi)} \sigma'_z(y) dy, \quad M = -b \int_{-\xi h}^{-h(1-\xi)} \sigma'_z(y) y dy. \quad (11)$$

Решение задачи дало ряд новых результатов, что свидетельствует о необходимости более тщательного исследования НДС пористых тел по сравнению со сплошными.

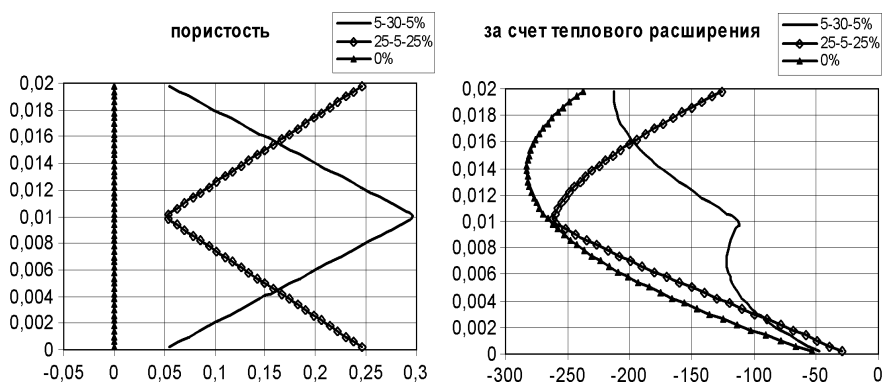


Рисунок 3 – Графики пористости и напряжений защемленной балки-стенки из пористого железа

На практике балка-стенка используется, например, в качестве токонесущей шины в случае одностороннего механического контакта с одним или несколькими токосъемниками.

На рис. 4 представлена характерная картина распределения пограничных температур по длине шины определенных эмпирически с помощью термпар.

Технически закрепление шины осуществляется по схеме скользящей за-

делки, разрешающей осевое ее смещение и запрещающей поворот.

Для решения задачи термоупругости данной конструкции предлагается приближенный метод, основанный на суб- и суперэлементной интерпретациях.

Протяженность субэлемента соответствует зоне постоянного уровня пограничной температуры, то есть ширины токосъемника или участков шины между токосъемниками.

В поперечных сечениях (в средней зоне) субэлементов тепловые условия становятся близкими к теплоизоляции, что позволяет для субэлемента приближенно считать распределение температуры одномерным вдоль координаты y и использовать для решения описанную методику.

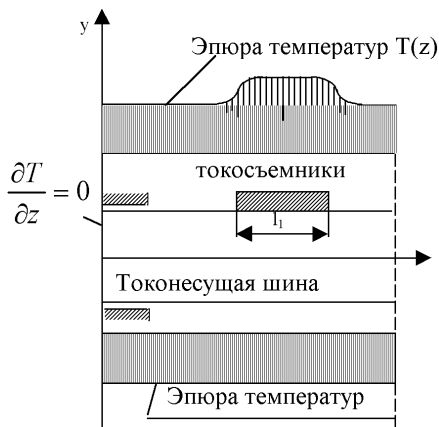


Рисунок 4 – Схема токонесущей шины

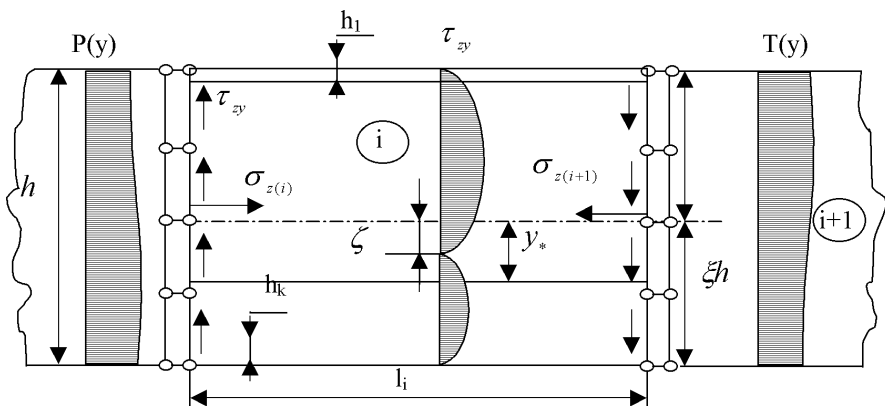


Рисунок 5 – Схема i -го субэлемента

Формулы нормальных напряжений в субэлементе имеют вид

$$\sigma_z(y) = -E(y)\alpha(T)\Gamma(y) + \frac{N}{A_i \sum_{k=1}^n \frac{E_k A_k}{E_i A_i}}. \quad (12)$$

Поскольку введение продольных связей между субэлементами позволяет свободно смещаться двум смежным сечениям в поперечном направлении друг относительно друга, это нарушает условие совместности их деформаций. Для исправления этого недостатка введем касательные напряжения в смежных сечениях и подчиним их уравнению равновесия

$$\tau_{zy} = - \int_{y_*}^{h(1-\xi)} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dy, \quad (13)$$

где y_* отсчитывается от нейтрального слоя субэлемента i , $-\xi h \leq y_* \leq h(1 - \xi)$. Интеграл (13) практически вычисляется по квадратурной формуле.

Полученные формулы (13) для определения τ_{zy} по сути аналогичны приему, используемому в формуле Журавского по определению касательных напряжений при поперечном изгибе балки.

Аналогично было получено решение для прямоугольной и круглой пластин.

Заметим, что из полученных решений для пористых пластин как частный случай вытекают известные решения (Тимошенко) для однородных тел, что подтверждает достоверность полученного результата.

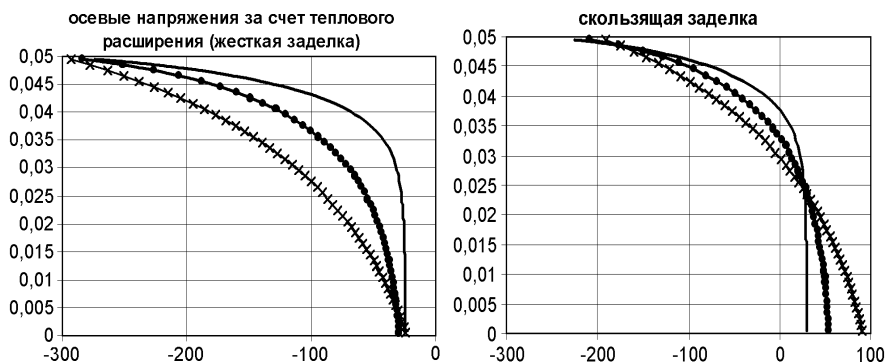


Рисунок 6 – Схема пористого охлаждения пластины в одномерном поле температур

Далее рассмотрим задачу пористого охлаждения прямоугольной пластины (плиты). Рассматриваются случаи наличия внутреннего тепловыделения и его отсутствия.

Нахождение температурного поля внутри прямоугольной и круглой плит

ведется по одинаковой схеме (одномерный режим). Одна из лицевых поверхностей пластины нагрета до высокой температуры T_2 . Охлаждающая жидкость, нагнетаемая сквозь пластину в положительном направлении y , имеет при $y = -\infty$ температуру T_0 .

Перенос тепла в такой пластине можно определить как сумму двух составляющих: теплопроводность внутри твердого тела $-\lambda_s(1-P)dT_s/dy$ и теплообмен твердое тело – жидкость $dT_f = dq/GC$. Исходя из этого, количество тепла, отдаваемого твердым телом жидкости, должно быть равно количеству тепла, переносимому за счет теплопроводности.

Таким образом, дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет температура пластины без источника тепла, примет вид

$$\frac{d^2 T_s}{dy^2} - \xi_s \frac{dT_s}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq h, \quad \text{где} \quad \xi_s = \frac{GC}{\lambda_s(1-P)}. \quad (14)$$

Тепловой баланс, составленный для жидкости, выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - \xi_f \frac{d\theta}{dy} = 0 \quad \text{при} \quad -\infty \leq y \leq 0, \quad \text{где} \quad \xi_f = \frac{GC}{\lambda_f}. \quad (15)$$

Частное решение уравнения (14), которое удовлетворяет граничным условиям $T = T_1$ при $y = 0$, $T = T_2$ при $y = h$, имеет вид

$$T = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{(e^{\xi_s h} - 1)} (e^{\xi_s y} - 1) \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq h. \quad (16)$$

Частное решение уравнения (15), удовлетворяющее граничным условиям, принимает вид

$$\theta = T_0 + \frac{(T_2 - T_1)}{(e^{\xi_f h} - 1)} e^{\xi_f y} \quad \text{для} \quad -\infty \leq y \leq 0. \quad (17)$$

Исключая температуру T_1 из уравнений (16) и (17), окончательно получим поле температур в пластине

$$T = T_0 + (T_2 - T_0) e^{-\xi_s h \left(1 - \frac{y}{h}\right)}. \quad (18)$$

В случае присутствия теплового источника W поле температур по толщине стенки описывается функцией

$$T = T_0 + \left(\frac{1 - e^{-\xi_s h \left(1 - \frac{y}{h}\right)}}{\xi_s h} + \frac{y}{h} \right) \frac{W(1-P)h}{GC_p} \quad \text{для} \quad 0 \leq y \leq h. \quad (19)$$

Выводы

Получены решения нового класса задач термоупругости пористых пластин и цилиндров на основе метода суперэлементов. В случае двумерного по-

ля температур в балке-пластинке и цилиндре для приближенного определения касательных напряжений предложено использовать аналогию с формулой Журавского при поперечном изгибе бруса.

Список литературы: 1. Яхно В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости / В.Г.Яхно. – Новосибирск : Наука, 1990. – 304 с. 2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач / А.М. Денисов. –М.: Изд-во МГУ, 1994. – 206 с. 3. Ватульян А.О. К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния / А.О. Ватульян // Экологический вестник научных центров ЧЭС 2006. – № 2. – С. 23-25.

Поступила в редколлегию 28.08.2009.

УДК 531:629

С.Ю.ПОГОРЕЛОВ, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»;

К.Ю.СЧАСТЛИВЕЦ, науч.сотр., НТУ «ХПИ»;

С.И.МАРУСЕНКО, науч.сотр., НТУ «ХПИ»

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОТВОДА НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ РЕЗОНАТОРА ЛАЗЕРНОГО ГИРОСКОПА

Точність роботи кільцевого лазерного гіроскопа залежить від параметрів температурного поля. У запропонованій роботі досліджено вплив параметрів теплопровідності на деформування призми резонатора лазерного гіроскопа під впливом температурного поля, що змінюється, та стискаючого зусилля, зокрема на величину кутів повороту нормалей до граней резонатора.

The measurement accuracy of ring laser gyros depends from temperature field parameters. In the proposed paper was analyzed the deformation of laser gyroscope resonator with the influence of varying thermal conduction parameters, temperature field and compression force. In particular, the angles of resonator facets turning were obtained.

Введение. Навигационные комплексы, применяемые для решения задачи определения местоположения подвижного объекта на местности или в пространстве, основаны, как один из вариантов, на применении бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС). В качестве чувствительных элементов в данном приборе используются кольцевые лазерные гироскопы (ЛГ) [1,3,4].

В составе БИНС резонатор ЛГ смонтирован с помощью механического конструктива, который, помимо крепления ЛГ в приборе, является также основным элементом теплоотвода для ЛГ. В процессе работы ЛГ имеет место выделение тепла на элементах оптического контура, резисторах и катушках индуктивности [3,4]. Тепло отводится от призмы прибора путем целенаправ-

ленной теплопередачи через области контактирующих поверхностей прижимного кольца пружины и опорного кольца крышки ЛГ. Дальнейший отвод тепла осуществляется через детали конструктива и креплений на внешний корпус, а затем сбрасывается в атмосферу за счет конвективной теплоотдачи. Детальный анализ вопросов теплопроводности и теплообмена для корпусов БИНС приведен в работе [2].

Целью данной работы является исследование влияния параметров теплопроводности на деформирование призмы резонатора ЛГ под действием изменяющегося во времени температурного поля и прижимного усилия, в частности, на величину углов поворота нормалей к граням резонатора.

Постановка задачи. Очевидно, что попытка последовательно решать задачи расчета переменного температурного поля и определения НДС для системы в целом была бы затруднительной в силу сложности модели-сборки. Для решения был использован ряд упрощенных вспомогательных моделей с перенесением промежуточных результатов.

Решение задачи включает в себя следующие этапы.

- 1 Выполнение расчетов температурного поля при изменяющихся во времени граничных условиях.
- 2 Расчет напряженно-деформированного состояния по нестационарному температурному полю с одновременным воздействием прижимного усилия.

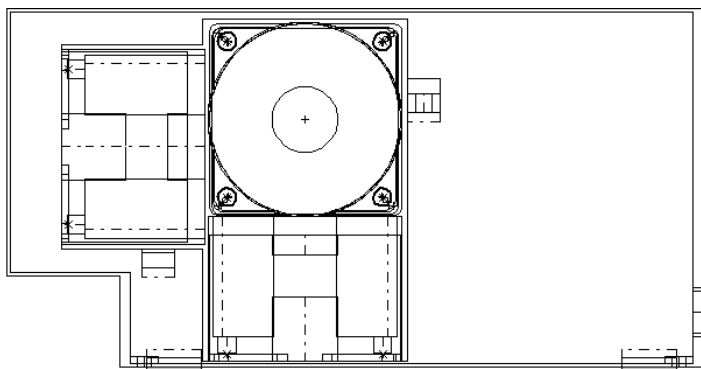


Рисунок 1 – Вариант компоновки сборки из трех ЛГ в корпусе

На первом этапе с целью установить влияние изменения теплоотвода с призмы ЛГ через зоны контакта и для выполнения расчетов температурного поля при изменяющихся во времени граничных условиях, была создана расчетная модель, состоящая из собственно призмы ЛГ с тепловыми источниками и двух контактирующих с ней колец. Эти кольца контактируют с призмой

ЛГ в местах ее соединения с обвязкой ЛГ и имитируют теплоемкость и теплопроводность остальных деталей блока, включая внешний и внутренний корпуса, и заменяют обвязку ЛГ и корпуса по отводу тепла от призмы. Эта модель показана на рис. 3.

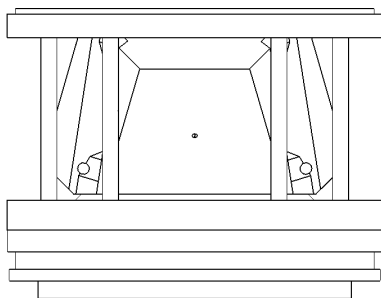


Рисунок 2 – ЛГ с механическим конструктивом (защитный экран не показан)

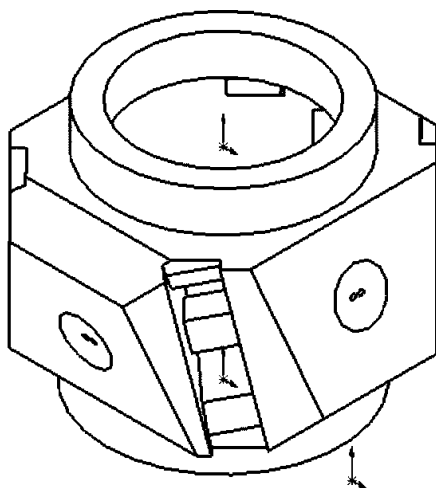


Рисунок 3 – Призма ЛГ с кольцами-имитаторами.

При этом расчетные параметры для колец-имитаторов были определены из следующих соображений. Была найдена общая теплоемкость всей конструкции, включая внешний корпус и блок-корпус с тремя ЛГ, которая затем была приведена к объемам колец-имитаторов. Теплопроводность, в свою очередь, была пересчитана пропорционально изменению длины пути протекания теплового потока от источника до поверхностей теплосброса.

Так, расчетные «эквивалентные» параметры составили:

Теплоемкость $C = 44000 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{K})$, теплопроводность $K_{XX} = 16$

Вт/(м · К).

Подробно постановка этапа задачи расчета температурного поля резонатора ЛГ рассматривалась в [3].

Между имитаторами и призмой имеет место контактная теплопередача. При этом коэффициент контактной теплопроводности зависит от сжимающего усилия, воздействующего на контакт. Кроме того, в результате действия сжимающего усилия, деформируется поясok на прижимной крышке ЛГ, в связи с чем от усилия зависит и площадь контакта. Для определения площади контакта, и, соответственно, выбора параметров имитаторов, была решена вспомогательная структурная задача взаимодействия призмы с прижимной крышкой под действием прижимного усилия. Величина теплопроводности контакта была выбрана из соображений, приведенных в [5].

Выполнение расчетов температурного поля при изменяющихся во времени граничных условиях включало в себя проверку достоверности и оценку влияния «эквивалентных» параметров имитаторов. Программа этих расчетов приведена в таблице.

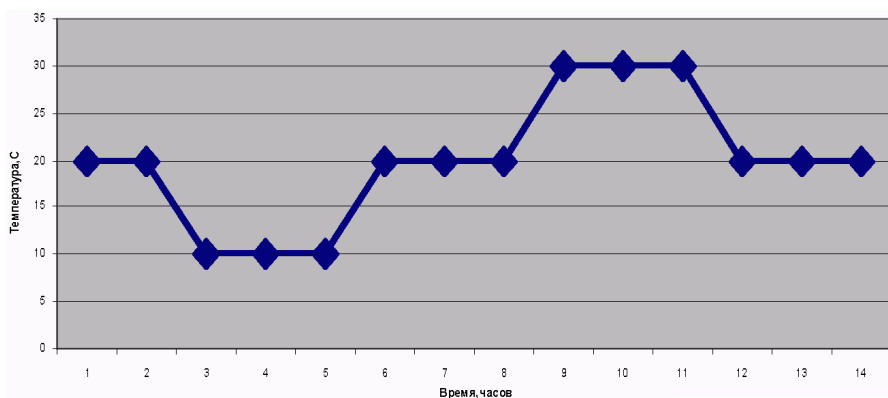


Рисунок 4 – Программа изменения внешней температуры

Для сопоставления с результатами, полученными на модели без учета обвязки и корпусов, были рассмотрены варианты, в которых теплопроводность имитатора принималась «очень большой», а теплоемкость- «очень малой», а для оценки изменения влияния этих параметров осуществлялось их изменение в соответствии с п.1-5 таблицы.

Оценку влияния изменения коэффициента контактной теплопроводности проводили как для постоянного значения (п.6), так и для изменяющегося в результате изменения прижимного усилия, которое, в свою очередь, зависит от изменения температуры (п.7-9).

На втором этапе проводился расчет напряженно-деформированного состояния по нестационарному температурному полю с одновременным воз-

действием прижимного усилия. Из-за увеличения порядка системы уравнений по сравнению с температурной, возникла необходимость изменения модели, в сторону уменьшения количества узлов и элементов. В частности, в измененной модели не детализирована разбивка на элементы трубок оптического контура, кроме того, кольцевые имитаторы также исключены. Температурное поле переносится на новую модель из имеющихся результатов в соответствии с координатами узлов модели (с интерполяцией для несовпадающих узлов). Расчет структурной задачи при этом получается также в виде набора шагов, каждый из которых соответствует шагу, просчитанному в температурной задаче.

№	Теплопроводность материала имитатора КХХ, Вт/(м · К)	Теплоемкость материала имитатора С, Дж/(м ³ · К)	Коэффициент контактной теплопроводности ККТ, Вт/м ² /К
1	100000	1	1000000
2	16	1	1000000
3	100000	44000	1000000
4	16	1	25000
5	100000	44000	25000
6 «эквивалентный»	16	44000	25000
7	16	44000	15000...23000...31000
8	16	44000	10000...25000...40000
9	16	44000	8000...23000...38000

Деформирование призмы ЛГ вызывается следующими двумя причинами:

- 1) неравномерный нагрев призмы в результате тепловыделения на оптическом контуре, катодно-подогревательном узле и прочих тепловых источниках в призме,
- 2) действие прижимной пружины ЛГ.

На первом этапе значение прижимной силы считается постоянным (50 кг) и лишь косвенно учитывается в изменяющемся коэффициенте контактной теплопроводности. В дальнейшем изменение прижимного усилия будет непосредственно включено в структурную задачу.

Результаты решения. Были определены величины углов поворота нормали к граням резонатора ЛГ.

На рис. 6, 7 приведены графики изменения углов поворота нормалей к граням призмы резонатора ЛГ при просчете структурной задачи по температурным полям, полученным по вариантам, указанным в таблице 1.

Из этих графиков видно, что результаты группируются в два потока. Один из них (варианты 1,3,5) соответствует «большой» теплопроводности имитационных колец, другой (варианты 2,4,6,8,9) – «эквивалентной» теплопроводности, обоснованной ранее.

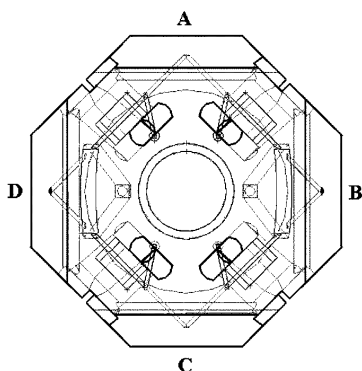


Рисунок 5 – Обозначения граней резонатора

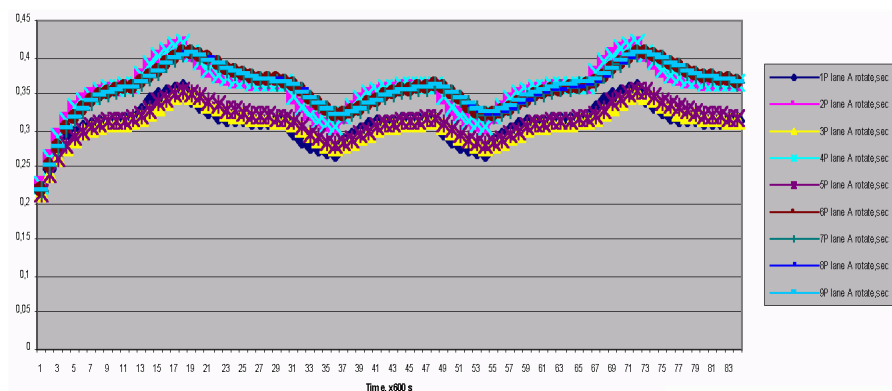


Рисунок 6 – Поворот нормали граней А, С.

Выводы. Можно сделать следующие выводы о влиянии варьируемых параметров.

Теплопроводность материала имитатора (КХХ): чем она больше, тем меньше углы поворота нормали. Влияние этого фактора видится наиболее существенным.

Теплоемкость материала имитатора (С): увеличение теплоемкости материала сглаживает зубцы на графике и уменьшает диапазон изменения углов поворота нормали.

Коэффициент контактной теплопроводности (ККТ) оказывает малое

влияние, что видно из сопоставления вар.2,4, а также 6-9. Изменением коэффициента контактной теплопроводности в процессе работы можно пренебречь.

Таким образом, можно констатировать, что уменьшение термического сопротивления на пути теплоотвода от призмы способствует уменьшению отклонений нормалей граней резонатора ЛГ и положительно влияет на точность работы ЛГ в целом.

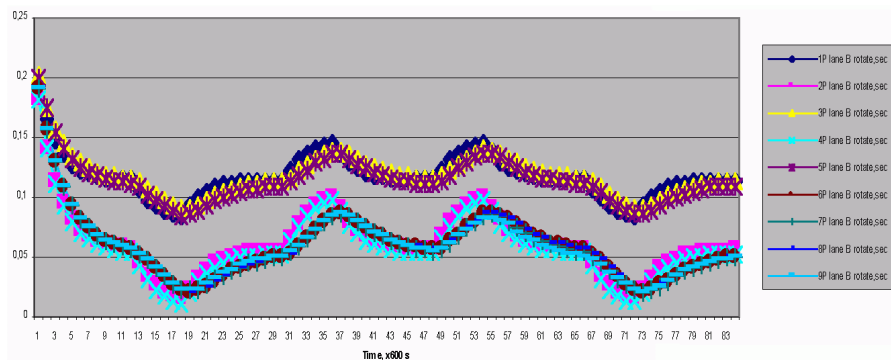


Рисунок 7 – Поворот нормали граней В, D.

Список литературы: 1. Джашишов В.Э., Панкратов В.М. Математические модели теплового дрейфа гироскопических датчиков инерциальных систем. – СПб.: ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 2001. – 150 с. 2. Погорелов С.Ю., Счастливцев К.Ю. Влияние температурных деформаций на точность работы лазерной бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2003. – № 8, т. 3. – С. 53-56. 3. Погорелов С.Ю., Счастливцев К.Ю. и др. Температурное поле резонатора кольцевого лазерного гироскопа при различной конфигурации теплоотводящих элементов // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – № 20. – С. 3-8. 4. Погорелов С.Ю., Счастливцев К.Ю. Уточнение расчетной модели кольцевого лазерного гироскопа на основе экспериментальных данных // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – №47. – С. 153-158. 5. Погорелов С.Ю., Счастливцев К.Ю., Марусенко С.И. Изменение теплопроводности контакта элементов лазерного гироскопа под действием прижимного усилия // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2007. – № 38. – С. 124-129.

Поступила в редколлегию 06.04.2009

А.С.СТЕПЧЕНКО, канд.техн.наук, доц., НТУ «ХПИ»

ПОСТРОЕНИЕ СУПЕРЭЛЕМЕНТА РОТОРА С УЧЕТОМ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

У даній статті пропонується метод побудови суперелемента ротора з урахуванням пружності масляної плівки в підшипниках ковзання. Передбачається що ротор однопрогоновий, на кінцях ротора підшипники ковзання і проміжних опор немає. Для побудови матриці динамічної жорсткості суперелемента використається метод початкових параметрів. При цьому враховується ексцентриситет у дисках і формується вектор вимушеного навантаження у супервузлах.

In given article the method of construction of a superelement of a rotor with a glance of oil film elasticity in bearings of sliding is offered. The rotor one-flying is supposed that, on the ends of a rotor bearings of sliding and intermediate support are not present. For construction of a matrix of dynamic rigidity of a superelement the method of initial parameters is used. Thus it is considered eccentricity in disks and the vector of forcing loading in supernodes is formed.

1 Введение

Обеспечение надежной работы турбоагрегата на современных атомных и тепловых электростанциях во многом определяется вибрационными характеристиками как отдельных его элементов, так и системы турбоагрегат-фундамент в целом. Однако детальное моделирование всех элементов такой сложной системы как турбоагрегат-фундамент при расчете ее динамических характеристик не рационально. Более эффективно путь – это создание детальных моделей отдельных частей системы, с приближенным моделированием остальных. Разработаны, и показали свою эффективность модели системы турбоагрегат-фундамент с детальным моделированием роторной части турбоагрегата [1] и статорной части турбоагрегата [2,3]. Однако в обоих подходах учет отброшенных статорной и роторной частей, соответственно, носит слишком приближенный характер. Поэтому актуальной задачей является построение компактных упрощенных моделей роторной и статорной частей системы турбоагрегат-фундамент.

В данной работе предлагается метод построения суперэлементной модели ротора с учетом подшипников скольжения. При этом используется технология метода начальных параметров, который хорошо зарекомендовал себя при расчете как собственных, так и вынужденных колебаний роторов [4, 5]. Особенностью предлагаемого метода является линеаризованная модель подшипника скольжения, которая позволяет учесть податливость масляной пленки. Предложенный метод позволяет не только получить матрицу жесткости суперэлемента ротора, но вынуждающую нагрузку от эксцентриситета дисков, приведенную к узлам сочленения со статорной частью конструкции турбины.

2 Постановка задачи

Необходимо на основе метода начальных параметров (МНП) построить модель ротора с учетом упругости масляной пленки в подшипниках скольжения. Базовая модель - это один пролет ротора с подшипниками скольжения на обоих концах без промежуточных опор. Ротор может иметь участки кольцевого поперечного сечения с постоянным диаметром по длине участка, а также участки соответствующие дискам. При этом необходимо учесть внешнюю нагрузку порождаемую эксцентриситетом дисков. Матричное соотношение МНП для пролета ротора, который рассматривается как суперэлемент (СЭ), алгебраическими преобразованиями необходимо привести к виду матричных соотношений метода конечных элементов.

3 Моделирование ротора с учетом подшипника скольжения МНП

Для моделирования ротора турбоагрегата методом начальных параметров предлагается разбить его на следующие участки:

- безмассовый упругий стержень кольцевого поперечного сечения;
- массовый элемент, обладающий инерцией поворота;
- элемент – подшипник скольжения, учитывающий упругость масляной пленки.

При построении матриц перехода через участки ротора будем считать, что упругие характеристики в направлении X и Y общей системы координат различаются из-за действия связывающих сил определяемых масляной пленкой подшипника скольжения (ось Z направлена вдоль оси ротора). Поэтому рассматриваются изгибные колебания ротора в 2-х плоскостях, и каждый вектор параметров имеет две компоненты.

Вектор столбец для прогонки МНП имеет вид:

$$\{\vec{X}\}^T = \{\vec{F}, \vec{M}, \vec{\varphi}, \vec{\delta}, \vec{n}\}, \quad (1)$$

где $\vec{F}$ – вектор перерезывающей силы; $\vec{M}$ – вектор изгибающего момента; $\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота; $\vec{\delta}$ – вектор перемещений; $\vec{n}$ – единичный вектор соответствующий внешней нагрузке от неуравновешенности ротора.

Связь между параметрами $(i+1)$ -й участка ротора с i -й участком в общем случае имеет вид:

$$\{\vec{X}\}_{i+1} = [G_i] \cdot \{\vec{X}\}_i = \begin{bmatrix} A_i & S_i \\ 0 & E \end{bmatrix} \cdot \{\vec{X}\}_i, \quad (2)$$

где $[G_i]$ – матрица прогонки через i -й участок ротора; $[A_i]$ – блок матрицы прогонки соответствующий матрице перехода через i -й участок ротора; $[S_i]$ – блок матрицы прогонки соответствующий матрице векторов внешней нагрузки от неуравновешенности на i -том участке ротора; $[E]$ – единичная матрица размерностью вектора $\vec{n}$.

Блоки матрицы прогонки через участок безмассового упругого стержня в векторном виде запишутся следующим образом [6]:

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -L_i & 1 & 0 & 0 \\ \frac{L_i^2}{2EI_i} & \frac{L_i}{EI_i} & 1 & 0 \\ \frac{L_i^3}{6EI_i} & \frac{-L_i^2}{2EI_i} & L_i & 1 \end{bmatrix}, [S_i] = 0, \quad (3)$$

где L_i , I_i – длина и момент инерции i -го участка ротора; E – модуль упругости.

Блоки матрицы прогонки через участок элемента массы в векторном виде запишутся следующим образом [6]:

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_i \omega^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [S_i] = \begin{bmatrix} m_i \omega^2 r_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где m_i – масса i -го участка ротора; ω – частота вынужденных колебаний; r_i – векторный оператор, который определяется следующим выражением:

$$r_i = (e_x^i + e_y^i \vec{k}) \times \dot{i}, \quad (5)$$

где e_x^i, e_y^i – эксцентриситеты i -го диска в направлении соответствующих осей.

Для моделирования сил, действующих в подшипнике скольжения, предлагается использовать теоретическую модель Э.Поздняка [7,8]. Согласно этой теории при вращении вала в подшипнике скольжения на него действует гидродинамическая упруго-инерционная сила смазывающего масла, проекции F_x , F_y которой определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} F_x = -C_{xx}u - C_{xy}v - \chi_{xx}\dot{u} - \chi_{xy}\dot{v} - j_{xx}\ddot{u} - j_{xy}\ddot{v}; \\ F_y = -C_{yx}u - C_{yy}v - \chi_{yx}\dot{u} - \chi_{yy}\dot{v} - j_{yx}\ddot{u} - j_{yy}\ddot{v}; \end{cases} \quad (6)$$

где C, χ, j – коэффициенты упругости, демпфирования и инерции масляного слоя, соответственно; u, v – компоненты вектора перемещений $\vec{\delta}$, в направлении x и y соответственно.

В первом приближении, учитывая малость скорости и ускорения масляного слоя по сравнению с перемещениями, слагаемые, учитывающие вязкое трение и инерционность масла, можно отбросить. Считая подшипник коротким и угловую жесткость масла малой, предлагается следующая механическая модель подшипника:

– корпус подшипника моделируется как абсолютно жесткое тело;

- в точке стыковки ротора и корпуса турбины перемещения совпадают и определяется упруго-инерционными силами смазывающего масла в подшипнике (6), а углы поворота не зависят друг от друга.

С учетом принятой модели подшипника и выражениями сил реакции масляного клина (6), связь между компонентами вектора сил $\vec{F}$ и перемещений $\vec{\delta}$ в узлах i и $(i+1)$ имеет вид:

$$\begin{cases} F_x^i = F_x^{i+1} = C_{xx}(u_{i+1} - u_i) + C_{xy}(v_{i+1} - v_i), \\ F_y^i = F_y^{i+1} = C_{yx}(u_{i+1} - u_i) + C_{yy}(v_{i+1} - v_i), \end{cases} \quad (7)$$

а вектора моментов и углов поворота определяются равенствами:

$$\{\vec{M}_i\} = \{\vec{M}_{i+1}\} = 0; \quad \{\vec{\varphi}_i\} = \{\vec{\varphi}_{i+1}\}. \quad (8)$$

Коэффициенты упругой жесткости масляной пленки C определяются из нелинейной системы уравнений, решение которой Э.Позняком [7] сведено к 12 интегралам, первые четыре определяют упругость масляного слоя :

$$C_{xx} = \frac{\mu \omega l}{\psi^3} I_1; \quad C_{xy} = \frac{\mu \omega l}{\psi^3} I_2; \quad C_{yx} = \frac{\mu \omega l}{\psi^3} I_3; \quad C_{yy} = \frac{\mu \omega l}{\psi^3} I_4; \quad (9)$$

где μ – динамическая вязкость масла; ψ – относительный зазор (отношение характерного зазора к радиусу подшипника); l – длина подшипника; $I_1 \div I_4$ – интегралы Позняка.

Если записать связь между силами и перемещениями, действующими в подшипнике (7), в виде суммы симметричной и антисимметричной матрицы:

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C'_1 \\ C'_1 & C_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C'_2 \\ -C'_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\text{где } C'_1 = (C_{xy} + C_{yx})/2; \quad C'_2 = (C_{xy} - C_{yx})/2.$$

Первое слагаемое равенства (10) определяет упругую силу масляной пленки, а второе поворот ее как единого целого. В высокооборотных роторах неконсервативная сила, определяемая тензором поворота, действует как демпфирующая, и ее влияние рассматривается при учете демпфирования [9]. Разрешая уравнение (7) относительно компонент вектора перемещений и отбрасывая силы определяемые тензором поворота, получим:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \frac{C_{yy}}{C'_3} & -\frac{C'_1}{C'_3} \\ -\frac{C'_1}{C'_3} & \frac{C_{xx}}{C'_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_i + [C_{II}^i] \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}_i; \quad (11)$$

$$\text{где } C'_3 = C_{xx}C_{yy} - C'^2_1.$$

Из условий (7,8) и выражения (11) получим блоки матрицы прогонки через подшипник в следующем виде:

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ C_{\Pi}^i & 0 & & 1 \end{bmatrix}, [S_i] = 0. \quad (12)$$

4 Получение матрицы динамической жесткости суперэлемента ротора

Связь между начальными и конечными параметрами пролета ротора может быть представлена в блочном виде:

$$\begin{Bmatrix} q_N \\ P_N \\ n \end{Bmatrix} = [G_n] \cdot [G_{n-1}] \cdots [G_1] \cdots [G_2] \cdot [G_1] \begin{Bmatrix} q_0 \\ P_0 \\ n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & S_1 \\ A_{21} & A_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_0 \\ P_0 \\ n \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

где q_N, q_0 – вектора соответствующие геометрическим параметрам в конце и в начале ротора соответственно; P_N, P_0 – вектора соответствующие силовым параметрам в конце и в начале ротора соответственно; A_{ki} – блоки матрицы перехода через ротор, соответствующие геометрическим ($k, j = 1$) и силовым ($k, j = 2$) параметрам; S_k – блоки матрицы векторов внешней нагрузки от неуравновешенности, соответствующие геометрическим ($k = 1$) и силовым ($k = 2$) параметрам.

В методе конечных элементов связь устанавливается между силовыми и геометрическими параметрами суперэлемента. Запишем выражение (13) в виде системы блочных уравнений относительно силовых параметров P_N, P_0 и геометрических q_N, q_0 :

$$\begin{cases} q_n = A_{11}q_0 + A_{12}P_0 + S_1n \\ P_n = A_{21}q_0 + A_{22}P_0 + S_2n \end{cases} \quad (14)$$

Разрешив уравнения (14) относительно силовых параметров, получим уравнение вынужденных колебаний суперэлемента ротора:

$$[Z_{PT}(\omega)] \begin{Bmatrix} q_0 \\ q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_0 \\ F_N \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где: $[Z_{PT}(\omega)]$ – матрица динамической жесткости суперэлемента ротора, которая определяется через матрицы перехода через ротор равенством:

$$[Z_{PT}(\omega)] = \begin{bmatrix} -A_{12}^{-1}A_{11} & A_{12}^{-1} \\ A_{21} - A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} & A_{22}A_{12}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

а элементы векторов внешней нагрузки F_N, F_0 , вызываемой эксцентриситетом дисков ротора, определяются из следующей системы равенств:

$$\begin{cases} \bar{S}^1 = -A_{12}^{-1}S_1, & \bar{S}^2 = S_2 - A_{22}A_{12}^{-1}S_1, \\ \mathbf{f}_{i0} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{s}_{ij}^{-1}, & \mathbf{f}_{iN} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{s}_{ij}^{-2}, \quad i = 1 \div 4. \end{cases} \quad (16)$$

Выводы

- 1 Предложена линеаризованная модель учета жесткости масляной пленки в подшипнике.
- 2 Использование МНП позволяет одновременно определять матрицу динамической жесткости суперэлемента ротора и вектор внешней нагрузки, вызванный небалансом ротора, в узлах стыковки подшипника и корпуса турбины.
- 3 При данном подходе используется малый объем памяти и нет требуется обращение матриц высокого порядка.
- 4 Разработанный метод позволяет эффективно учитывать ротор на подшипниках скольжения при моделировании системы турбоагрегат-фундамент.

Список литературы: 1. Шульженко Н.Г., Воробьев Ю.С. Численный анализ колебаний системы турбоагрегат-фундамент. – К.: Наукова думка, 1991. – 232 с. 2. Степченко А.С. Численные исследования динамических характеристик системы турбоагрегат-фундамент // Дисс. на соиск. ученой степени канд. техн. наук. Харьк. Гос. политех. ун-та. 1994. – 194 с. 3. Жовдак В.А., Кабанов А.Ф., Красников С.В., Степченко А.С. Исследование динамики статорных частей турбин К-300-240 и К-325-23.5 ХТГЗ // Проблемы машиностроения. – Т. 4. № 3-4. – Харьков. – 2001. – С. 4-12. 4. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Взаимосвязанные колебания в турбомашине и газотурбинных двигателях. – Харьков: Вища школа, 1973. – 179 с. 5. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем. – Харьков: Вища школа, 1978. – 138 с. 6. Дмитренко В.А. Колебания разветвленных роторов // Динамика и прочность машин. – Вып. 23. – Харьков: Вища школа. – 1976. – С. 87-93. 7. Поздняк Э.Л. Исследование устойчивости движения роторов на подшипниках скольжения // Изв. АН СССР, отд. Механика и машиностроение. – М., 1963. – № 2. – С. 102-119. 8. Поздняк Э.Л. Влияние масляного слоя в подшипниках скольжения на устойчивость и критические скорости высокоскоростных роторов // Колебания валов на масляной пленке. – М.: Наука, 1968. – С. 10-37. 9. Ланна М.И. Исследование влияния упругих и демпфирующих свойств масляной пленки на критические скорости роторов судовых турбин // Колебания валов на масляной пленке. – М.: Наука, 1968. – С. 68-76.

Поступила в редколлегию 14.07.2009

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд.физ.-мат. наук, доц., УГЗУ, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ С НАПРЯЖЕННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.

На прикладі циліндра, стислого по діаметру, досліджена можливість моделювання проходження світла через довільну послідовність оптичних пристроїв, включаючи п'єзооптично активні напружені тіла. Як прийом моделювання визначений як відповідний засіб представлення тіла, як набору тонких пластин. Випробований найпростіший метод визначення оптимальної товщини пластин.

A possibility of modeling arbitrary optical devices sequence is investigated. The investigation is performed for cylinder compressed on diameter. Optical devices sequence can including piezooptical active, stressed bodies. The methods of modeling devices are determined. The bodies are presented as raw of thin plates. The thin plates was stressed arbitrary. Simple method of determination of optimum thickness of plates is tested.

1. Введение. Большое значение в настоящее время приобретают методы имитационного моделирования оптических систем на ЭВМ. Это связано с большим количеством разработок, в которых применяются высококачественные оптические материалы (в частности стекла для TFT мониторов и др.). Компьютерное моделирование позволяет сократить дорогостоящие эксперименты в этой области. Компьютерное имитационное моделирование, также, позволяет продолжить на более высоком уровне теоретические изыскания в соответствующем направлении исследований. В настоящее время наблюдается повышенный спрос на такое моделирование. Организуются новые лаборатории по компьютерному моделированию оптических сред. Математическое моделирование оптических свойств материалов развито в прошлом веке (работы Джонса, Стокса). Написание соответствующих компьютерных алгоритмов не представляет сложностей. Новации могут быть только в удобстве моделирования и в моделировании оптических свойств на основе информации о физических особенностях среды. В данной работе для моделирования используется оригинальный специализированный язык. В этом языке, помимо моделирования произвольно заданного количества и расположения оптических устройств, заданных своими оптическими свойствами, возможно моделирование устройств, представляющих собой объемно-напряженные пьезооптически активные тела. В работах [1-5] методами имитационного моделирования активно изучались поляризационно-оптические устройства, соответствующие измерительным методикам метода фотоупругости. Изучению были подвергнуты отдельные измерительные схемы. На основе подобных исследований можно судить о степени применимости данных измерительных схем к условиям конкретных задач. Желание расширить данные исследования на бо-

лее широкий круг задач (а значит и измерительных схем) приводит к более общим подходам моделирования, включающим создание специализированных языков.

2. Актуальность рассматриваемой проблемы. Моделирование измерительных поляризационно-оптических схем (методологий) делится на два этапа. Первый этап: моделирование поляризационно-оптического устройства и исследуемого тела внутри него. Первый этап включает получение, какого либо модельного результата, соответствующего результату реального эксперимента. Это может быть измеренные параметры или поляризационная картина тела, полученная на экране устройства, или сетчатке глаза, или что-либо другое. Второй этап включает моделирование исследуемого метода обработки данных, или, проще говоря, саму обработку. В данной статье сосредотачивается внимание на первом этапе. Этот этап имеет особое самостоятельное значение в данное время, что видно из вышесказанного. То есть, в данной работе будут изучены подходы к моделированию поляризационно-оптических устройств. Такое моделирование не представляло бы никаких проблем, если бы частью оптической системы не было бы пьезоптически активное тело. Рассмотрение задачи моделирования прохождения света через оптическую систему с напряженным телом само по себе представляет собой практически важную задачу. Важность задачи объясняется тем, что многие оптические устройства включают в себя напряженные тела. Механические напряжения объясняют многие свойства таких оптических систем.

3. Методы моделирования. Методика моделирования оптически активного тела очень проста. По ходу луча тело разбивается на n областей внутри которых оптические свойства (а значит и механические напряжения) считаются однородными. Говорят, что тело представляется в виде стопы пластинок. Данные пластины в общем случае будут двулучепреломляющими. В этом случае прохождение света через оптическую систему будет описываться хорошо известными выражениями. Это могут быть общие формулы взаимодействия света с оптически активной средой, или специализированные матрицы Джонса и Мюллера и др. Если напряженное состояние тела помещенного в оптическую систему задано аналитически, то задача сводится к отысканию точки входа луча света, точки выхода и шага разбиения тела на «стопу пластинок». В данной работе напряжения задаются в конечно элементной форме. Такую форму тоже можно считать заданной аналитически и технических трудностей она представлять не должна. Разбиение на «стопу пластинок» может проводится аналогичным выше приведенному способом. Однако, в методе конечных элементов (МКЭ) напряжения интерполируются. Уже в следствие этого факта напряжения приближены. В данной работе зададим узловые напряжения в точной аналитической модели. Исследуем, как отразится интерполирование на точности моделирования.

4. Численный эксперимент. В численном эксперименте каждый оптический элемент (включая «пластинки» тела) был представлен в трех экспериментах тремя способами: с помощью матриц Джонса, Мюллера, и общих формул сложения колебаний. Также моделировались аналитически заданные напряжения и те же напряжения заданные в конечно-элементном виде. Напряжения в конечно-элементном виде задавались непосредственно в узлах элементов из аналитической модели. Исследованию подверглись различия в поляризационных картинах аналитической и конечно-элементной моделях. На рисунке показаны поляризационные картины тел помещенных в оптическую систему: источник белого света полярироид, четверть-волновая двупреломляющая пластинка, тело, полярироид. Оси полярироидов взаимно перпендикулярны. Ось четверть-волновой пластинки направлена под углом 45° . Продемонстрировано моделирование различных форм тела, в том числе и форм с полостями внутри (рис.1, 2). Такие поляризационные картины наблюдаемы и для аналогичных, реальных тел.

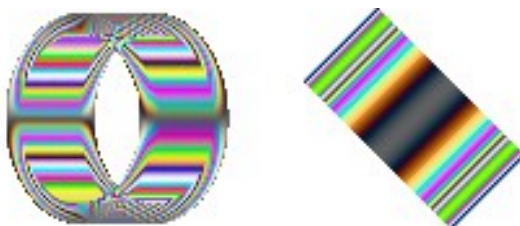


Рисунок 1 – Вид плосконапряженного цилиндрического тела в скрещенных поляриоидах, повернутое вокруг оси Y, на угол 45° , и вид с торца

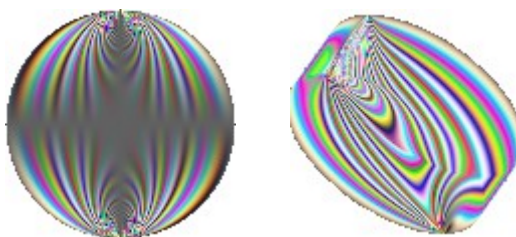


Рисунок 2 – Вид плосконапряженного диска в скрещенных поляриоидах, перпендикулярно поверхности и под углом

5. Обсуждение результатов. В ходе численных экспериментов не выявлено в процессе моделирования каких-либо существенных преимуществ одного из способов представления оптических объектов (прямого аналитического задания свойств объектов, расчетных методов Мюллера и Джонса). В картинах изоклин «просматривается» конечно-элементная решетка, но качество моделирования, несмотря на это, удовлетворительное.

6. Выводы. Если в состав любой оптической системы входит напряженное, пьезооптически активное тело, то это тело (тела) может приближенно рассматриваться как набор оптически однородных пластин. Приближение будет тем точнее, чем большее количество более тонких вообразаемых пластин будет использовано.

Список литературы: 1. Тесленко А.А. Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 2. Тесленко А.А. Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 3. Тесленко А.А. Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 4. Тесленко А.А. Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 22. – С. 169-171. 5. Тесленко А.А. Систематическое исследование метода наклонного просвечивания // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170.

Поступила в редколлегию 11.09.2009

УДК 534.1:631.362

Л.Н.ТИЩЕНКО, докт.техн.наук, ХНТУСХ, Харьков;

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, докт.физ.-мат. наук, ХНТУСХ, Харьков

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОГО РЕШЕТА НА ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ

Використовуючи гідродинамічну аналогію, побудовано наближені формули для обчислення проєкцій швидкості потоку зернової суміші на плоскому нахиленому решеті, як шару в'язкої рідини, з урахуванням його поперечних коливань і відокремлення проходової фракції від суміші внаслідок сепарування. Проведено розрахунки та проаналізовано результати обчислень.

Using hydrodynamical analogy, the approached formulas for account of projections of velocity of a flow a grain mix on flat inclined sieve, as layer of a viscous liquid are constructed, in view of its cross vibration and branch passing of fractions from a mix owing to separation. The accounts are carried out and the results of calculations are analysed.

Проблема. Вследствие применяемых упрощений, существующие математические модели движения слоя зерна по виброрешету не всегда адекватны

техническим условиям сепарирования. Поэтому разработка уточненных теоретических моделей движения сыпучей среды в условиях вибраций относится к актуальным задачам.

Обзор последних публикаций. Известные концептуальные подходы к описанию движения зерновой смеси, как и сами публикации, достаточно полно проанализированы в обзорной части монографии [1]. В последнее время при разработке моделей движения начали использовать гидродинамическую аналогию, где вибрации решета учитывают косвенно, задавая значения коэффициента вибровязкости смеси в зависимости от амплитуды и частоты колебаний решета [1,2,3,4]. Такой подход позволяет вычислять усредненные за период колебаний, независимые от времени, значения кинематических характеристик потока зерновой смеси. Однако, вследствие вибраций решета, в действительности, эти характеристики являются периодическими функциями времени. Поэтому желательно знать отклонения максимальных значений проекций скорости потока зерна, производительности решета и других параметров от их усредненных значений. Для проведения такого анализа приходится решать уравнения гидродинамики с учетом периодически изменяющихся во времени инерционных членов, что усложняет математическое исследование. Важное значение приобретает поиск корректных приближенных решений, что и определило цель этой работы.

Целью данной работы является построение компактных формул для расчета кинематических характеристик потока зерновой смеси при ее сепарировании плоским наклонным решетом с учетом его поперечных колебаний. Цель достигается путем приближенного аналитического решения краевой задачи гидродинамики для дифференциального уравнения с периодическим во времени коэффициентом. Построение приближенного решения проводится методом Бубнова-Галеркина.

Изложение основного содержания работы. Определение проекций скорости потока $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ на координатные оси ox и oy прямоугольной системы координат, показанной на рис. 1, в зависимости от времени t , проводим решая уравнения Навье-Стокса (двумерный случай) [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla^2 u \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \nabla^2 v \right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

в которых $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; ρ , μ – усредненные по объему плотность и коэффициент вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси; $p = p(x, y, t)$ – давление в движущемся слое смеси толщиной h ; θ – угол наклона решета к горизонтали; g – ускорение свободного падения.

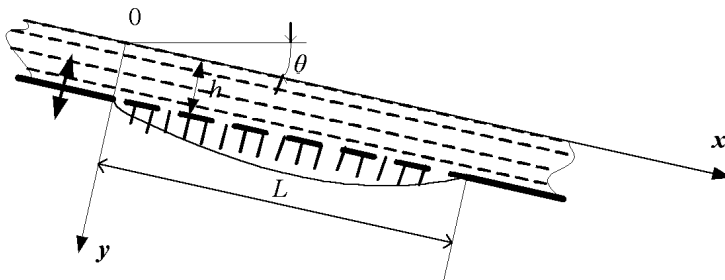


Рисунок 1 – Расчетная схема решета со слоем зерновой смеси

При постановке граничных условий учтем, что на свободной поверхности слоя $y = 0$ нет нормальных и касательных напряжений, а поэтому

$$-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

По условию «прилипания» смеси к решетке, которое обычно применяют в гидродинамике [5], в плоскости $y = h$:

$$u(x, h, t) = 0. \quad (4)$$

Задание поперечной проекции скорости в этой плоскости вызывает затруднение, обусловленное тем, что часть зерновой смеси, в виде проходовой фракции, проникает через перфорированную поверхность решета, а другая часть, в виде сходовой фракции, совершает вместе с решетом поперечные колебания. Во избежание чрезмерного усложнения математической постановки задачи распределение поперечной проекции скорости потока на решетке будем описывать выражением:

$$v(x, h, t) = v_n \varepsilon - A\omega(1 - \varepsilon)[\sin(\omega t) - \beta \varepsilon \cos(\omega t)]. \quad (5)$$

Здесь A , ω – амплитуда и частота поперечных колебаний решета; ε – коэффициент «живого сечения» рабочей плоскости решета длиной L и шириной H ; v_n , β – константы, подлежащие экспериментальному определению в конкретных условиях сепарирования.

От значений этих констант зависит производительность решета Q_n по отделению проходовой фракции от смеси. Действительно,

$$Q_n = Q_n(t) = LH\varepsilon[v_n + A\omega(1 - \varepsilon)\beta \cos(\omega t)]. \quad (6)$$

Согласно (6) средняя производительность сепарирования за период од-

ного колебания решета зависит только от константы v_n и определяется выражением

$$Q_{ncp} = LH\varepsilon v_n ,$$

что упрощает экспериментальное определение v_n .

Второе слагаемое в (6) описывает изменение производительности, вызванное колебаниями давления внутри слоя зерновой смеси, вследствие поперечных вибраций решета. Считая, что производительность $Q_n(t)$ в любой момент времени должна быть положительной, приходим к ограничению:

$$0 < \beta < v_n [A\omega(1-\varepsilon)]^{-1} .$$

Подчеркнем, что выражение (5) является граничным условием в интегральном, приближенном смысле, где усредненная по поверхности переносная скорость колебательного движения решета (второе слагаемое) складывается с усредненной по той же поверхности относительной скоростью отделения проходовой фракции (первое и третье слагаемые) и корректируется их вклад в сумму с помощью коэффициента живого сечения решета.

При $\varepsilon = 0$:

$$v(0, h, t) = -A\omega \sin(\omega t) , \quad Q_n = 0 .$$

Если $\varepsilon = 1$, то:

$$v(0, h, t) = v_n , \quad Q_n = v_n LH .$$

Оба частных случая согласуются с физическим представлением о движении смеси. В первом, когда нет отверстий в решете, вся смесь совершает с ним колебания с частотой ω . Во втором случае, когда поверхность решета идеально проходимая, колебания решета не влияют на поперечное движение смеси, которая вся становится проходовой фракцией.

Учитывая малую толщину слоя смеси по сравнению с другими его размерами, в установившемся режиме движения принимаем:

$$v(x, y, t) = v(x, h, t) = v(t) ,$$

то есть считаем поперечную проекцию скорости слоя не зависимой от x и y . Такие допущения характерны для теории пограничного слоя [5,6]. При указанном предположении:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 . \quad (7)$$

Из уравнения неразрывности (2), с учетом (7), находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 . \quad (8)$$

В результате система уравнений (1) приобретает упрощенный вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(t) \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) ;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (9)$$

а граничными условиями к ней, вместо (3) и (4) становятся:

$$p = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

и

$$u = 0 \quad \text{при} \quad y = h.$$

Интегрируя второе уравнение в (9) по y , с учетом первого граничного условия в (10) и выражения (5), получаем распределение давления в слое зерна:

$$p = \rho \left\{ g \cos \theta + A \omega^2 (1 - \varepsilon) [\cos(\omega t) + \beta \varepsilon \sin(\omega t)] \right\} y.$$

При таком распределении давлений:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

и первое уравнение системы (9) можно выразить в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left\{ v_n \varepsilon - A \omega (1 - \varepsilon) [\sin(\omega t) - \beta \varepsilon \cos(\omega t)] \right\} \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (11)$$

Учитывая краевые условия (10), приближенное решение (11) представ-
ляем произведением

$$u(y, t) = f(t) (h^2 - y^2), \quad (12)$$

где $f(t)$ – неизвестная периодическая функция времени.

Используя (11) и (12), методом Бубнова-Галеркина, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dt} + (a + b \sin \tau) f = g^*, \quad (13)$$

в котором

$$a = \frac{5}{2\omega h} \left(\frac{\mu}{\rho h} - \frac{3v_n \varepsilon}{8} \right); \quad b = \frac{15}{16} \frac{A}{h} \sqrt{1 + (\beta \varepsilon)^2} \cdot (1 - \varepsilon);$$

$$g^* = \frac{5g}{4\omega h^2} \sin \theta; \quad \tau = \omega t - \alpha; \quad \alpha = \arctg(\beta \varepsilon).$$

Периодическое решение (13) ищем в виде:

$$f(\tau) = f_1(\tau) \exp(b \cos \tau). \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), приходим к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{af_1}{a\tau} + af_1 = g^* \exp(-b \cos \tau). \quad (15)$$

Разложим функцию $f_1(\tau)$ в ряд Фурье:

$$f_1(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\tau) + b_k \sin(k\tau)]. \quad (16)$$

Учитывая табличные интегралы [7]

$$\int_0^{2\pi} \exp(-b \cos \tau) \sin(k\tau) d\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(-b \cos \tau) \cos(k\tau) d\tau = 2\pi(-1)^k I_k(b),$$

с помощью выражений (15) и (16) находим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{g^* I_0(b)}{a}; \quad a_k = \frac{2(-1)^k g^* a I_k(b)}{k^2 + a^2}; \quad b_k = \frac{2(-1)^k g^* k I_k(b)}{k^2 + a^2}. \quad (17)$$

Здесь $I_k(b)$ – модифицированная функция Бесселя, таблицы которой имеются в [8,9] и других изданиях по специальным функциям.

Таким образом, на основании (12), (14), (16) и (17) продольная проекция скорости потока представляется выражением

$$u(y, \tau) = g^* (h^2 - y^2) F(\tau), \quad (18)$$

в котором

$$F(\tau) = \exp(b \cos \tau) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{k0})(-1)^k I_k(b)}{k^2 + a^2} [a \cos(k\tau) + k \sin(k\tau)], \quad (19)$$

δ_{k0} – символ Кронекера.

Обычно, в условиях сепарирования смеси на решетке, параметр $b < 1$. Поэтому ряд $F(\tau)$ сходится быстро и вычисление его частичной суммы не вызывает затруднений. Более того, при малых значениях параметра b вместо ряда (19) можно использовать приближенную формулу:

$$F(\tau) \approx \varphi(\tau) = \frac{1}{a} \exp[(b \cos \tau) \left\{ 1 + \frac{b^2}{4} - \frac{ab}{1+a^2} (a \cos \tau + \sin \tau) + \frac{ab^2}{4(4+a^2)} [a \cos(2\tau) + 2 \sin(2\tau)] \right\},$$

погрешность которой имеет порядок b^3 . Тогда

$$u(y, \tau) \approx g^* (h^2 - y^2) \varphi(\tau)$$

и для расчета скорости потока не нужно вычислять значения функций Бесселя.

Производительность решета $Q_c(\tau)$ по сходовой фракции является также периодической функцией времени, ибо согласно (18):

$$Q_c(\tau) = H \int_0^h u(y, \tau) dy = \frac{2}{3} g^* H h^3 F(\tau).$$

В приближенных расчетах можно принять

$$Q_c(\tau) \approx \frac{2}{3} g^* H h^3 \varphi(\tau).$$

Если нет поперечных колебаний решета, то $b = 0$; $I_0 = 1$; $I_k(0) = 0$. В ряде (19) отличен от нуля только первый член, соответствующий $k = 0$. При таком режиме сепарирования, согласно (18), (19), (20), продольная проекция скорости потока и производительность решета не зависят от времени, причем

$$u(y, \tau) = u_{CT} = \frac{g^*}{a} (h^2 - y^2); \quad Q_c(\tau) = Q_{CT} = \frac{2}{3} \frac{g^*}{a} H h^3.$$

Сравним эти значения с усредненными за период колебаний параметрами:

$$u_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y, \tau) d\tau; \quad Q_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_c(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Подставив выражения (18) и (20) в (21), с учетом того, что [7]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(b \cos \tau) \sin(k\tau) d\tau = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(b \cos \tau) \cos(k\tau) d\tau = 2\pi I_k(b),$$

получаем

$$u_{cp} = a g^* \Phi(b) (h^2 - y^2), \quad Q_{cp} = \frac{2}{3} a g^* \Phi(b) h^3 H.$$

Здесь

$$\Phi(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{k0}) (-1)^k I_k^2(b)}{k^2 + a^2}. \quad (22)$$

Обычно, в реальных условиях работы решета, параметры a и b меньше единицы, причем

$$2a^2 < 1 + a^2. \quad (23)$$

Кроме того, для малых положительных b выполняется неравенство

$$I_0^2(b) - I_1^2(b) > 1, \quad (24)$$

в чем легко убедиться, используя таблицы функций Бесселя [9].

При выполнении неравенств (23) и (24), из сходимости знакопередающего ряда (22) вытекают соотношения:

$$\Phi(b) > \frac{1}{a^2} \left[I_0^2(b) - \frac{2a^2}{1+a^2} I_1^2(b) \right] > \frac{1}{a^2} [I_0^2(b) - I_1^2(b)] > \frac{1}{a^2}.$$

Это значит, что при $b > 0$:

$$u_{cp} > u_{CT}; \quad Q_{cp} > Q_{CT},$$

то есть, за счет поперечных колебаний решета увеличиваются усреднен-

ные проекция скорости потока и производительность решета по сходовой фракции. При малом значении a :

$$u_{cp} \approx u_{CT} I_0^2(b); \quad Q_{cp} \approx Q_{CT} I_0^2(b),$$

то есть, увеличение кинематических характеристик потока смеси связано главным образом с увеличением амплитуды колебаний решета (параметра b).

Результаты расчета и их анализ. Расчеты проводились для зерновой смеси пшеницы при $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,006 \text{ м}$; $\theta = 8^\circ$. Рассматривали две частоты колебаний решета: $\omega = \omega_1 = 41,86 \text{ с}^{-1}$ и $\omega = \omega_2 = 52,33 \text{ с}^{-1}$ с различными амплитудами. Вычисленные для этих частот, при амплитуде продольных колебаний решета $A^* = 0,0075 \text{ м}$, значения коэффициентов вибровязкости по формуле из [4], оказались равными: $\mu = \mu_1 = 0,037 \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\mu = \mu_2 = 0,028 \text{ Па} \cdot \text{с}$. С увеличением ω уменьшился коэффициент вибровязкости. Решето характеризовали параметрами: $L = 0,79 \text{ м}$; $\varepsilon = 0,4$. В качестве исходных данных также задавали: $v_n = 0,003 \text{ м/с}$; $\beta = v_n (A\omega)^{-1}$.

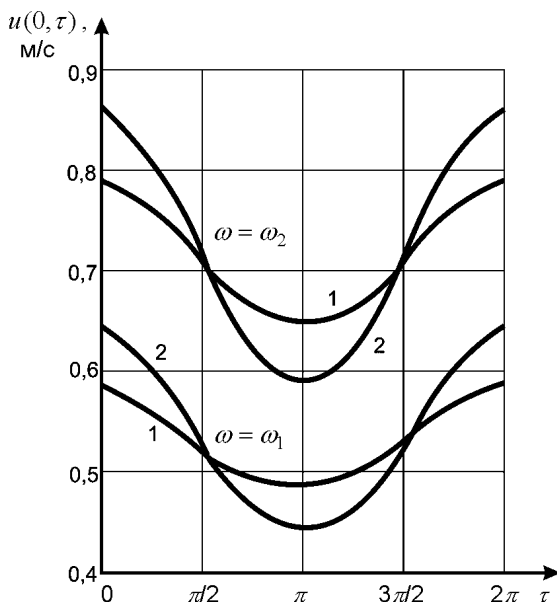


Рисунок 2 – Зависимости $u(0, \tau)$ при разных ω и A : 1 – $A = 0,001 \text{ м}$; 2 – $A = 0,002 \text{ м}$

Рассчитанные по (18) графики скорости потока $u(0, \tau)$ на свободной поверхности слоя, представлены на рис. 2. Цифрой 1 отмечены результаты, полученные при $A = 0,001 \text{ м}$, а цифрой 2 – $A = 0,002 \text{ м}$. С увеличением ω увеличилась скорость потока зерновой смеси, а с увеличением A – возросли ампли-

туды колебаний скорости.

На рис. 3 указаны графики удельной производительности решета $\bar{Q}_c(\tau) = Q_c(\tau)H^{-1}$, полученные по (20) для разных ω и A . Здесь также увеличение ω и A сопровождается увеличением $\bar{Q}_c(\tau)$, но, в отличие от $u(0, \tau)$, относительные амплитуды колебаний меньше. Это объясняется тем, что колебания $u(y, \tau)$ ослабевают при $y \rightarrow h$, а на поверхности решета $u(h, \tau) = 0$. Поэтому интеграл от скорости по толщине слоя имеет меньшие относительные изменения во времени, чем $u(0, \tau)$.

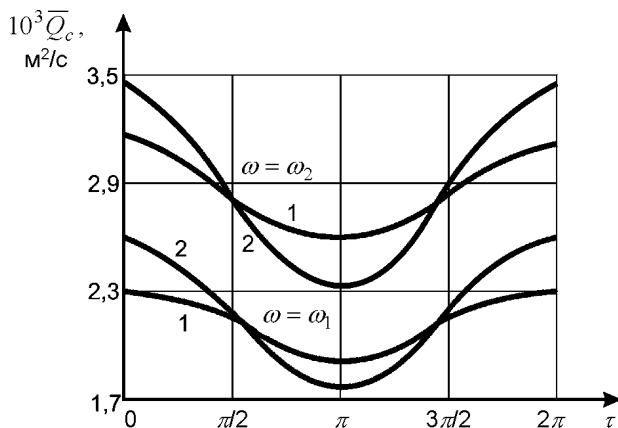


Рисунок 3 – Зависимости удельной производительности решета $\bar{Q}_c(\tau)$ при разных ω и A : 1 – $A = 0,001$ м; 2 – $A = 0,002$ м

На рис. 4 представлены графики удельной производительности решета $\bar{Q}_n(\tau) = Q_n(\tau)H^{-1}$. Они получены по формуле (6) при $\omega = \omega_1$; $A = 0,001$ м для двух значений ϵ коэффициента живого сечения решета. Удельная производительность решета по проходовой фракции, согласно изложенной теории, также является периодической функцией времени, что связано с изменением давления в слое зерновой смеси, вследствие поперечных колебаний решета.

Из рис. 4 следует, что при увеличении ϵ уменьшается отношение амплитуды колебаний $Q_n(\tau)$ к усредненному за период значению этого параметра.

Расчеты показали, что поперечная составляющая вибраций решета вызывает значительные колебания скорости потока и других кинематических параметров. Но эти колебания больше влияют на интенсивность сегрегации смеси и полноту ее разделения и меньше - на пропускную способность решета. Из-за высокочастотности колебаний пропускная способность решета фактически определяется усредненными значениями параметров.

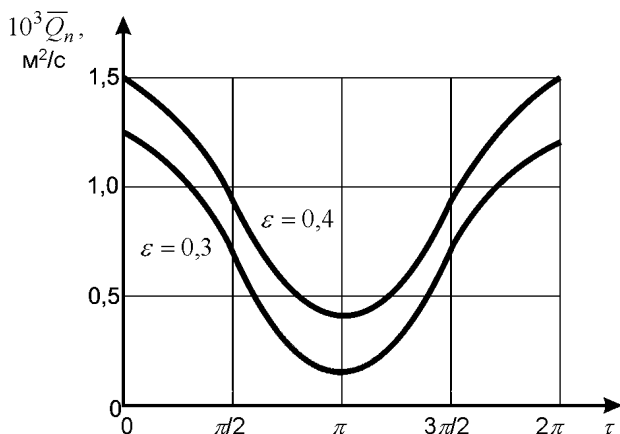


Рисунок 4 – Зависимости удельной производительности решета $Q_n(\tau)$ при разных ε

Заканчивая изложение работы подчеркнем, что, кроме поперечных колебаний решета, выше косвенно учитываются также его продольные колебания, от параметров которых зависит значение коэффициента μ . Изложенная приближенная теория описывает по сути общий случай произвольно направленных гармонических колебаний плоского решета.

Выводы. Полученные расчетные зависимости приводят к результатам, которые согласуются с физическими представлениями о движении зерновой смеси на вибрирующем плоском решете. Поэтому они могут использоваться для расчета кинематических характеристик потока. Адекватность теории можно повысить путем экспериментального определения входящих в модель параметров.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с. 2. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. Сравнение двух способов вычисления коэффициента вибровязкости псевдоожиженной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 1. – С. 96-100. 3. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П. Решения упрощенных уравнений гидродинамики при моделировании движения зерновой смеси по наклонному плоскому решету // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 74. – С. 306-312. 4. Тищенко Л.Н., Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Зайцев О.Б. Модель однослойного движения зерновой смеси по наклонному рифленому решету // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 74. – С. 28-39. 5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с. 6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с. 7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1962. – 1100 с. 8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 9. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редколлегию 21.07.2009

В.Б.УСПЕНСКИЙ, канд.техн.наук, доц. НТУ «ХПИ»;
И.А.БАГМУТ, асс., НТУ «ХПИ»

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ ВЛА НА ВЫСТАВКЕ

Розглянуто алгоритми обчислення кутів орієнтації повітряного літального апарату по вимірах інерційних датчиків. Отримано співвідношення для помилок визначення кутів орієнтації повітряного літального апарату на виставці залежно від систематичних складових інструментальних погрешностей інерційних датчиків.

Algorithms of an evaluation of angles of orientation of an air-slaked flight vehicle on measurements of inertial sensors surveyed. Ratio for errors of definition of angles of orientation of an air-slaked flight vehicle on the exhibition are obtained depending on regular component instrumental errors of inertial sensors.

Постановка проблемы. Алгоритм начальной выставки является одной из составляющих алгоритмического обеспечения интегрированных инерциально-спутниковых навигационных систем (ИИСНС). Под задачей выставки ИИСНС понимается определение начальной ориентации системы координат (СК), связанной с воздушным летательным аппаратом (ВЛА), по измерениям инерциальных датчиков (ИД) – гироскопов (ГС) и акселерометров (АК) [1]. Точность выставки в основном определяется инструментальными погрешностями (ИП) инерциальных датчиков. В этих условиях представляет практический интерес оценить ошибки определения углов ориентации ВЛА на выставке в зависимости от инструментальных погрешностей ИД.

Анализ последних исследований и публикаций. В [2] рассмотрено влияние погрешностей ГС на точность определения угла курса. При этом не было учтено влияние масштабных коэффициентов (МК) и углов несоосности гироскопов. Также не были затронуты вопросы влияния погрешностей АК на точность выставки.

Цель и постановка задачи. Целью работы является исследование влияния ошибок измерений инерциальных датчиков на точность определения углов ориентации ВЛА на выставке. В качестве параметров ориентации ВЛА принимаются углы курса ψ , тангажа θ и крена γ , вычисляемые относительно местной географической системы координат. Решается задача получения оценок ошибок определения этих углов.

Изложение материала. Рассмотрим используемые СК [3]:

- Географическая декартова СК с осями N, H, E, в дальнейшем обозначаемая символом $\{X_N\}$, вершина которой совпадает с точкой местопо-

ложения ВЛА. В данной СК ось N направлена на север, ось Н – вдоль географической вертикали "вверх" и ось Е – на восток.

- Связанная с ВЛА декартова базовая система координат (БСК) $\{X_B\}$ с началом в его центре масс, с осью X направленной по продольной оси ВЛА, осью Y лежащей в плоскости симметрии ВЛА и направленной "вверх", осью Z дополняющей СК до правой. Ориентацию БСК относительно географической СК задают углы курса ψ , тангажа θ и крена γ .
- Системы координат, связанные с осями чувствительности инерциальных датчиков – X_D, Y_D, Z_D . Начало данных систем отсчета совпадает с началом отсчета БСК. Оси этих СК могут совпадать с одноименными осями БСК, однако, как правило, имеет место некоторое рассогласование осей (см. рис.1).

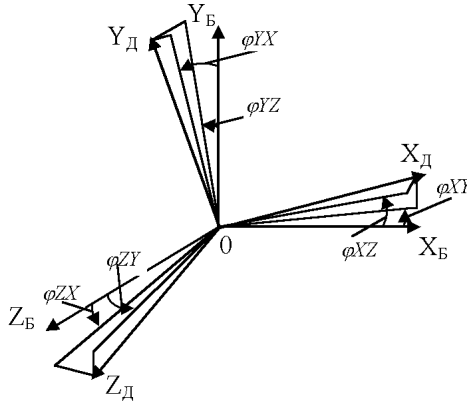


Рисунок 1 – Ориентация осей чувствительности ИД относительно осей БСК

Данное рассогласование задается шестью углами ϕ_{ij} , $i \in \{X, Y, Z\}$, $j \in \{X, Y, Z\}$, $i \neq j$, где i указывает на оси, между которыми есть рассогласование, j обозначает ось поворота, соответствующую данному углу рассогласования. Для тройки гироскопов данные углы будем обозначать $\omega_{XY}, \omega_{XZ}, \dots$, а для акселерометров – $a_{XY}, a_{XZ}, \dots$

Модели ошибок измерений гироскопов зададим следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta\omega_X &= \Delta\omega_X - \omega_X^* \cdot \delta k\omega_X - \omega_Z^* \cdot \omega_{XY} + \omega_Y^* \cdot \omega_{XZ}; \\ \delta\omega_Y &= \Delta\omega_Y - \omega_Y^* \cdot \delta k\omega_Y + \omega_Z^* \cdot \omega_{YX} - \omega_X^* \cdot \omega_{YZ}; \\ \delta\omega_Z &= \Delta\omega_Z - \omega_Z^* \cdot \delta k\omega_Z - \omega_Y^* \cdot \omega_{ZX} + \omega_X^* \cdot \omega_{ZY}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $\omega_X^*, \omega_Y^*, \omega_Z^*$ – проекции истинного вектора абсолютной угловой скорости вращения ВЛА $\vec{\omega}^*$ на оси БСК; $\delta\omega_X, \delta\omega_Y, \delta\omega_Z$ – проекции ошибок измерения этого вектора на те же оси; $\Delta\omega_X, \Delta\omega_Y, \Delta\omega_Z$ – систематические

дрейфы ГС; $\delta k\omega_X, \delta k\omega_Y, \delta k\omega_Z$ – погрешности МК гироскопов.

Аналогичным образом зададим модели ошибок измерений АК:

$$\begin{aligned}\delta a_X &= \Delta a_X - a_X^* \cdot \delta k a_X - a_Z^* \cdot a_{XY} + a_Y^* \cdot a_{XZ}; \\ \delta a_Y &= \Delta a_Y - a_Y^* \cdot \delta k a_Y + a_Z^* \cdot a_{YX} - a_X^* \cdot a_{YZ}; \\ \delta a_Z &= \Delta a_Z - a_Z^* \cdot \delta k a_Z - a_Y^* \cdot a_{ZX} + a_X^* \cdot a_{ZY},\end{aligned}\quad (2)$$

где a_X^*, a_Y^*, a_Z^* – проекции ошибки истинного вектора кажущегося ускорения ВЛА $\vec{a}^*$ на оси БСК; где $\delta a_X, \delta a_Y, \delta a_Z$ – проекции ошибки измерения этого вектора на те же оси; $\Delta a_X, \Delta a_Y, \Delta a_Z$ – систематические смещения нулей АК; $\delta k a_X, \delta k a_Y, \delta k a_Z$ – погрешности МК акселерометров.

Учитывая, что выставка проводится на стоянке ВЛА, истинные значения векторов $\vec{\omega}^*$ и $\vec{a}^*$ будут следующими:

$$\begin{aligned}\omega_X^* &= \Omega_X^* = \Omega \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi^*, \omega_Y^* = \Omega_Y^* = \Omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi^*, \\ \omega_Z^* &= \Omega_Z^* = -\Omega \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi^*;\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}a_X^* &= g_X^* = g^* \sin \theta^*, a_Y^* = g_Y^* = g^* \cos \theta^* \cos \gamma^*, \\ a_Z^* &= g_Z^* = -g^* \cos \theta^* \sin \gamma^*.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь Ω_X^*, Ω_Y^* и Ω_Z^* – горизонтальные проекции на оси БСК вектора истинной угловой скорости вращения Земли $\vec{\Omega}^*$, $\Omega = \|\vec{\Omega}^*\|$; ψ^* – истинное значение угла курса; φ – географическая широта точки выставки; g_X^*, g_Y^*, g_Z^* – горизонтальные проекции на оси БСК вектора истинного ускорения силы тяжести $\vec{g}^*$, $g^* = \|\vec{g}^*\|$; θ^* и γ^* – соответственно истинные значения тангажа и крена.

Считаем, что входящие в (1), (2) ИП являются константами, и реализуются в запуске случайным образом в соответствии с равномерным законом распределения из известного диапазона: $\Delta \omega_i \in [-\Delta \omega_{\max}; \Delta \omega_{\max}]$, $\delta k \omega_i \in [-\delta k \omega_{\max}; \delta k \omega_{\max}]$, $\omega_{ij} \in [-\varpi_{\max}; \varpi_{\max}]$, $\Delta a_i \in [-\Delta a_{\max}; \Delta a_{\max}]$, $\delta k a_i \in [-\delta k a_{\max}; \delta k a_{\max}]$, $a_{ij} \in [-\alpha_{\max}; \alpha_{\max}]$, $i \in \{X, Y, Z\}$, $j \in \{X, Y, Z\}$, $i \neq j$.

Оценка ошибки определения угла тангажа. Значение угла тангажа можно вычислить на основе соотношения

$$\theta = \arcsin \frac{g_X}{g}, \quad (5)$$

где $g = \|\vec{g}\|$ – модуль измеренного вектора силы тяжести $\vec{g} = (g_X \ g_Y \ g_Z)^T$; g_X, g_Y, g_Z – проекции этого вектора на оси БСК.

Полагаем, что измерения вектора силы тяжести содержат ошибки обусловленные погрешностями АК:

$$g_X = g_X^* + \delta a_X, \quad g_Y = g_Y^* + \delta a_Y, \quad g_Z = g_Z^* + \delta a_Z. \quad (6)$$

На основе соотношений (5), (6) ошибку вычисления угла тангажа $\delta\theta$ с учетом ее малости можно приближенно представить следующим образом (см. рис. 2):

$$\delta\theta \cong \frac{\delta a_{NE}}{g^*}, \quad (7)$$

где δa_{NE} – проекция совокупной ошибки измерений АК на горизонтальную плоскость NE СК $\{X_N\}$, обусловленная ошибками δa_X , δa_Y и δa_Z :

$$\delta a_N = \cos \theta^* \delta a_X + \sin \theta^* (\sin \gamma^* \delta a_Z - \cos \gamma^* \delta a_Y). \quad (8)$$

С учетом (7), (8) ошибку определения угла тангажа можно выразить:

$$\delta\theta = \frac{1}{g^*} (\cos \theta^* \delta a_X + \sin \theta^* (\sin \gamma^* \delta a_Z - \cos \gamma^* \delta a_Y)). \quad (9)$$

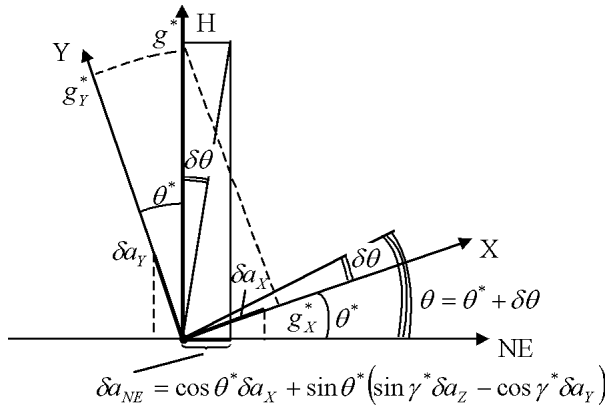


Рисунок 2 – Взаимосвязь ошибки определения угла тангажа с ошибками измерений АК

На основании (2) и (4) максимальные по абсолютному значению ошибки измерений АК будут задаваться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \delta a_{X \max} &= \Delta a_{\max} + |g_X^*| \cdot \delta ka_{\max} + |g_Z^*| \cdot \alpha_{\max} + |g_Y^*| \cdot \alpha_{\max}; \\ \delta a_{Y \max} &= \Delta a_{\max} + |g_Y^*| \cdot \delta ka_{\max} + |g_Z^*| \cdot \alpha_{\max} + |g_X^*| \cdot \alpha_{\max}; \\ \delta a_{Z \max} &= \Delta a_{\max} + |g_Z^*| \cdot \delta ka_{\max} + |g_Y^*| \cdot \alpha_{\max} + |g_X^*| \cdot \alpha_{\max}. \end{aligned} \quad (10)$$

Очевидно, что максимальные ошибки измерений АК $\delta a_{X \max}$, $\delta a_{Y \max}$ и $\delta a_{Z \max}$ в зависимости от ориентации ВЛА в общем случае будут отличаться по значению, но при этом принадлежать одному и тому же диапазону: $\delta a_{i \max} \in [-\delta a_{\max}; \delta a_{\max}]$, $i \in \{X, Y, Z\}$.

Максимизируя (9) по γ^* получим соотношение для оценки максимальной

по абсолютному значению ошибки определения угла тангажа на выставке:

$$\delta\theta_{\max} = \max_{\gamma^*} |\delta\theta| = \frac{\left(\delta a_{X\max} |\cos \theta^*| + (\delta a_{Z\max} + \delta a_{Y\max}) \frac{\sqrt{2}}{2} |\sin \theta^*| \right)}{g^*}.$$

Максимизировать ошибку $\delta\theta_{\max}$ также θ^* и значениям ошибок $\delta a_{X\max}$, $\delta a_{Y\max}$ и $\delta a_{Z\max}$ в общем случае не представляется возможным, так как значения данных ошибок будут различными в зависимости от значения угла θ^* и соотношения максимальных значений инструментальных погрешностей.

Например, для $\Delta a_{\max} = 0,001$ м/с²; $\delta ka_{\max} = 0,01$ %; $\alpha_{\max} = 100''$; а также $g^* = 9,81$ м/с² и $\theta^* = 1^\circ$ имеем: $\delta\theta_{\max} \approx 2,8'$.

Оценка ошибки определения угла крена. Значение угла крена можно вычислить следующим образом:

$$\gamma = -\arctg \frac{g_Z}{g_Y}. \quad (11)$$

Учитывая соотношения (2), (4) и (11) ошибку определения угла крена на выставке можно представить так:

$$\delta\gamma = -\frac{1}{g^* \cos \theta^*} (\sin \gamma^* \delta a_Y + \cos \gamma^* \delta a_Z). \quad (12)$$

На основании (10), (12) соотношение для оценки максимальной по абсолютному значению ошибки определения угла крена будет таким:

$$\delta\gamma_{\max} = \max_{|\delta a_{i\max}| \leq \delta a_{\max}, \gamma^*} |\delta\gamma| = \frac{\sqrt{2} \cdot \delta a_{\max}}{g^* \cos \theta^*}.$$

Например, для значений $\Delta a_{\max} = 0,001$ м/с²; $\delta ka_{\max} = 0,01$ %; $\alpha_{\max} = 100''$; $g^* = 9,81$ м/с² и $\theta^* = 1^\circ$ получим: $\delta\gamma_{\max} \approx 2,6'$.

Оценка ошибки определения угла курса. Считаем, что алгоритмически проведено горизонтирование приборной системы координат. В этом случае значение угла курса можно вычислить как

$$\psi = -\arccos \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2}} \cdot \text{sign} \omega_3, \quad (13)$$

где $\omega_1 = \cos \theta \cdot \omega_X - \sin \theta \cdot \cos \gamma \cdot \omega_Y - \sin \gamma \cdot \omega_Z$, $\omega_3 = \sin \gamma \cdot \omega_Y + \cos \gamma \cdot \omega_Z$ – горизонтальные проекции вектора измеренной угловой скорости; ω_X , ω_Y , ω_Z – проекции измеренного вектора абсолютной угловой скорости вращения ВЛА $\vec{\omega} = (\omega_X \ \omega_Y \ \omega_Z)^T$ на оси БСК.

Горизонтальные гироскопы генерируют следующие измерения проекций угловой скорости вращения Земли

$$\omega_X = \Omega_X^* + \delta\omega_X, \quad \omega_Z = -\Omega_Z^* + \delta\omega_Z. \quad (14)$$

Учитывая соотношения (13) и (14), получим ошибку определения угла

курса на выставке:

$$\delta\psi = -\frac{1}{\Omega \cos \varphi} (\delta\omega_X \sin \psi^* + \delta\omega_Z \cos \psi^*). \quad (15)$$

На основании (1), (3) максимальные по абсолютному значению ошибки измерений ГС будут задаваться соотношениями

$$\begin{aligned} \delta\omega_{X \max} &= \Delta\omega_{\max} + |\Omega_X^*| \cdot \delta k\omega_{\max} + |\Omega_Z^*| \cdot \overline{\omega}_{\max} + |\Omega_Y^*| \cdot \overline{\omega}_{\max}; \\ \delta\omega_{Y \max} &= \Delta\omega_{\max} + |\Omega_Y^*| \cdot \delta k\omega_{\max} + |\Omega_Z^*| \cdot \overline{\omega}_{\max} + |\Omega_X^*| \cdot \overline{\omega}_{\max}; \\ \delta\omega_{Z \max} &= \Delta\omega_{\max} + |\Omega_Z^*| \cdot \delta k\omega_{\max} + |\Omega_Y^*| \cdot \overline{\omega}_{\max} + |\Omega_X^*| \cdot \overline{\omega}_{\max}. \end{aligned} \quad (16)$$

Данные ошибки принадлежат одному и тому же диапазону: $\delta\omega_{i \max} \in [-\delta\omega_{\max}; \delta\omega_{\max}]$, $i \in \{X, Y, Z\}$.

С учетом (15) и (16) получим соотношение для определения максимальной по абсолютному значению ошибки определения угла курса:

$$\delta\psi_{\max} = \max_{|\delta\omega_{i \max}| \leq \delta\omega_{\max}, \psi^*} |\delta\psi| = \frac{\sqrt{2} \delta\omega_{\max}}{\Omega \cos \varphi}.$$

Например, для значений $\Delta\omega_{\max} = 0,001$ м/с², $\delta k\omega_{\max} = 0,001$ % и $\overline{\omega}_{\max} = 100$ ", а также $\varphi = 50^\circ$ и $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с [3]: $\delta\psi_{\max} \approx 8,4^\circ$.

Выводы. Получены соотношения для оценок ошибок определения углов ориентации ВЛА на выставке в зависимости от систематических составляющих инструментальных погрешностей ИД. Данные оценки можно использовать при инициализации алгоритмов комплексирования информации в ИИСНС, а также для формирования требований к инерциальным датчикам.

Список литературы: 1. Степанов О. А. Интегрированные инерциально-спутниковые системы навигации // Гирокоспия и навигация. – 2002. – № 1 (36). – С. 23-45. 2. Успенский В. Б., Багмут И. А. Оценка точности гирокомпасирования в зависимости от величины систематических дрейфов гироскопов // Зб. наук. пр. VI Міжнародної науково-технічної конференції «Фізичні і комп'ютерні технології в народному господарстві». – 2002. 3. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 296 с.

Поступила в редколлегию 03.04.2009

С.В.ФИЛИПКОВСКИЙ, канд.техн.наук, ст.науч.сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;

К.В.АВРАМОВ, докт.техн.наук, вед.науч.сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ РЕЖИМОВ ТОПЛИВОПОДАЮЩЕГО ТРАКТА РАКЕТЫ

Запропоновано метод аналізу частот і форм поздовжніх коливань рідини в магістралі окислювача рідинного ракетного двигуна. Розроблено скінчений елемент, що враховує стискальність рідини й пружність стінок труби. Запропонований скінчений елемент, який апроксимує гідроамортизатор, що знижує власні частоти.

The method of a liquid longitudinal oscillations modal analysis in an oxidizer line of the fluid-propellant rocket engine is offered. The finite element which is taking into account a liquid compressibility and the pipe walls elasticity is developed. The finite element which approximates the hydroshock reducer that decreases the natural frequencies is offered.

Постановка задачи

Расчет топливного тракта ракеты имеет особую важность, так как в случае неправильного проекта магистрали окислителя ее колебания могут попасть в резонанс с колебаниями корпуса и привести к аварии.

Основы проектирования трубопроводов и гидравлических агрегатов летательных аппаратов (ЛА) рассмотрены в книгах [1,2]. В них объяснены специфика применения законов гидравлики к расчету статике и динамики трубопроводов, насосов, регулирующих и управляющих агрегатов. В монографии [3] изложена методика анализа колебаний топливных баков с жидкостью, динамических характеристик упруго подвешенных топливных магистралей с криволинейными участками. В монографии [4] исследованы автоколебания, возникающие в результате взаимодействия продольных упругих колебаний корпуса ракеты с динамическими процессами, протекающими в двигательной установке. Книга [5] посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию низкочастотных колебаний давления и расхода в гидравлических системах, включающих высокооборотные шнекоцентробежные насосы. Для описания изменения амплитуд, а также сдвигов фаз скорости и давления жидкости использованы уравнения четырехполюсника [3,4] и импедансного метода [5]. Аналитическое решение уравнений движения этими методами дает высокую точность результатов но требует выполнения громоздких преобразований.

Целью настоящей статьи является разработать методику анализа топливных магистралей произвольной конфигурации и определить резонансные частоты колебаний магистрали окислителя ЖРД.

Математическая модель на основе конечноэлементной дискретизации

При создании расчетной схемы трубопровода принимаем [3–5], что скорость течения мала по сравнению со скоростью звука в трубе, вязкое сопротивление не учитываем, жидкость считаем сжимаемой, а стенки труб упругими.

Для применения к рассматриваемой задаче метода конечных элементов (МКЭ) произведем дискретизацию трубы вдоль осевой линии одномерными конечными элементами с линейным распределением скорости и давления вдоль элемента. Чтобы получить матрицы конечного элемента рассмотрим малый отрезок трубы длиной Δl (рис. 1).

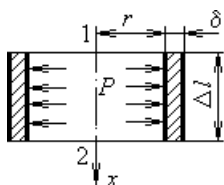


Рисунок 1 – Отрезок трубопровода с жидкостью

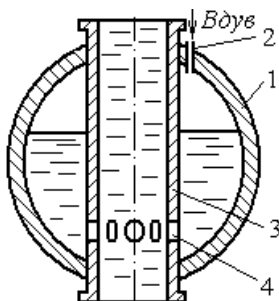


Рисунок 2 – Схема газожидкостного демпфера

Согласно [1], потенциальная энергия деформации ΔW_{Π} упругой трубы со сжимаемой жидкостью равна

$$\Delta W_{\Pi} = p^2 S \left(\frac{r}{\delta E} + \frac{1}{2K} \right) \Delta l = \frac{p^2 S \Delta l}{2\rho c_0^2}, \quad (1)$$

где p – избыточное давление жидкости, $S = \pi r^2$ – площадь сечения трубы, r – радиус трубы, δ – толщина стенки трубы, E – модуль упругости материала трубы, $K = \rho c^2$ – объемный модуль упругости жидкости, Δl – длина отрезка трубы, ρ – плотность жидкости, c – скорость звука в жидкости, $c_0 = 1/\sqrt{\rho/K + (2\rho r)/(\delta E)}$ – скорость распространения возмущения в трубе (формула Жуковского).

Изменение объема жидкости ΔV от действия избыточного давления p определяется так

$$p = K \frac{\Delta V}{V}, \quad (2)$$

где V – объем жидкости до действия давления. Обозначим перемещения верхнего и нижнего сечений рассматриваемого объема жидкости в трубе X_1 и X_2 , тогда

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{X_1 - X_2}{\Delta l}. \quad (3)$$

Обозначив перемещения сечения жидкости вдоль трубы X , в пределе получим, что формула (3) может быть представлена так:

$$p = K \frac{\partial X}{\partial x}. \quad (4)$$

где x – координата вдоль оси трубы. Подставив (4) в (1) и проинтегрировав по длине элемента, получим

$$W_{\Pi} = \int_0^L \frac{c^2 \rho S}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5)$$

Кинетическая энергия рассматриваемого отрезка трубы ΔW_K включает только кинетическую энергию жидкости в продольном движении. Она определяется так:

$$\Delta W_K = \rho S \Delta l \frac{u^2}{2}, \quad (6)$$

где u – скорость жидкости в трубе, которая определяется так:

$$u = u_0 + \partial X / \partial t, \quad (7)$$

где u_0 – скорость невозмущенного потока. Кинетическую энергию стенок трубы не учитываем. Согласно [3–5] скорость невозмущенного потока мала по сравнению со скоростью жидкости: $u_0 \ll \partial X / \partial t$ и

$$u \approx \frac{\partial X}{\partial t}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (6) и проинтегрировав по длине элемента, получим

$$W_K = \int_0^L \frac{\rho S}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (9)$$

Поскольку принимается линейное распределение переменной величины X вдоль конечного элемента, то ее можно выразить через узловые значения элемента $X_i(t)$ и $X_j(t)$ следующим образом

$$X = X_i(t) \left(1 - \frac{x}{L} \right) + X_j(t) \left(\frac{x}{L} \right) = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad \left(\frac{x}{L} \right) \right] \begin{Bmatrix} X_i(t) \\ X_j(t) \end{Bmatrix} = [N] \{X\}, \quad (10)$$

где $N_i = 1 - x/L$, $N_j = x/L$ – функции формы конечного элемента. Подставив (10) в (5) и (9) и, пользуясь вариационным принципом Лагранжа, получаем матрицы конечного элемента трубы с жидкостью [7]. Матрица жесткости принимает вид:

$$[k] = \frac{c^2 \rho S}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (11)$$

а матрицу инерции представим так

$$[m] = \frac{\rho SL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Матрицы для всего трубопровода получаем стандартной процедурой объединения матриц МКЭ [7].

Граничное условие на конце трубопровода, примыкающем к насосу, описывает отсутствие колебаний расхода. Его можно представить так: $X = 0$.

Конечноэлементная аппроксимация газожидкостного демпфера

Для снижения частоты первого тона колебаний применяют устройство, называемое газожидкостным демпфером (рис. 2). Он представляет собой полость 1, верхняя часть которой заполнена инертным газом. При колебаниях давления в трубопроводе 3 жидкость перетекает через отверстия 4 в полость и обратно, при этом газ выполняет роль упругого элемента с малой жесткостью. Количество газа в полости регулируется подачей через клапан 2.

В первом приближении газожидкостный упругий элемент удобно аппроксимировать одномерным конечным элементом как и трубопровод с жидкостью (рис. 3). Предположим, что газ изменяет свои давление и объем по адиабатическому процессу, так как упругий элемент имеет термоизолирующее покрытие, а материал стенки линейно деформируется при изменении давления от нуля до амплитудного значения. Определим упругие свойства стенки аппроксимирующего элемента при следующих допущениях.

1) Объем жидкости, перетекающий из трубопровода в упругий элемент и обратно в процессе его работы, равен изменению объема аппроксимирующего элемента за счет изменения радиуса при изменении давления жидкости.

2) Объем вытесненной жидкости равен изменению объема газа в газожидкостном упругом элементе.

3) Работа сил давления жидкости при растягивании стенки аппроксимирующего элемента равна работе сил упругости этой стенки.

4) Работа сил упругости стенки аппроксимирующего элемента равна работе газа при изменении объема и давления.

Потенциальная энергия деформации стенки аппроксимирующего элемента $\Delta W_{\text{ПА}}$ равна работе силы давления на пути Δr . Если считать, что сила изменяется от нуля до конечной величины по линейному закону, то

$$W_{\text{ПА}} = \frac{2\pi r L p_2 \Delta r}{2} = \pi p_2 r L \Delta r, \quad (13)$$

где $2\pi r L$ – площадь поверхности, к которой прикладывается давление, p_2 – конечная величина давления.

Представим закон Гука для стенок трубы так:

$$\sigma = E_A \frac{\Delta r}{r}, \quad (14)$$

где σ – нормальное напряжение в материале стенки трубы; E_A – модуль

упругости материала стенки трубы. Нормальное напряжение σ связано с давлением p_2 так:

$$\sigma = p_2 \frac{r}{\delta_A}, \quad (15)$$

где δ_A – толщина стенки аппроксимирующего элемента. Подставив (15) и (14) в (13) получим

$$W_{\Pi A} = \frac{\pi p_2^2 r^3 L}{\delta_A E_A}. \quad (16)$$

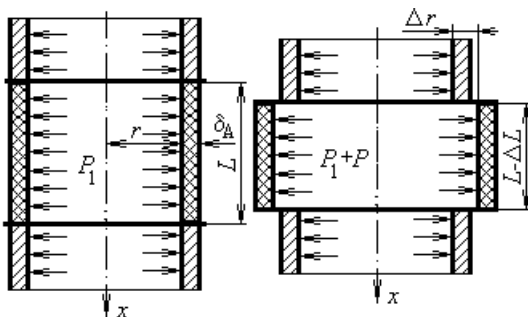


Рисунок 3 – Конечноэлементная модель газожидкостного упругого элемента

Работа A , совершаемая газом при адиабатическом расширении, определяется так [8]

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right], \quad (17)$$

где p_1 и p_2 – давление в начале и в конце процесса, V_1 и V_2 – объем газа в начале и в конце процесса, γ – показатель адиабаты.

Давление в газожидкостном упругом элементе представим так:

$$p_2 = p_1 + p,$$

где p_1 – номинальное давление, поддерживаемое постоянной подачей газа в газожидкостный упругий элемент, p – амплитудное отклонение давления.

Изменение объема газа ΔV в газожидкостном демпфере определяется так

$$\Delta V = V_1 - V_2. \quad (18)$$

Эквивалентное увеличение объема трубы аппроксимирующего элемента от действия внутреннего давления равно

$$\Delta V = 2\pi r \Delta r (L - \Delta L) \approx 2\pi r L \Delta r. \quad (19)$$

Увеличение радиуса Δr вследствие приращения давления p равно

$$\Delta r = \frac{pr^2}{\delta_A E_A} . \quad (20)$$

Изменение объема жидкости в трубе упругого элемента равно

$$\Delta V = S\Delta l = \pi r^2 \Delta L . \quad (21)$$

Подставив (20) в (13) получим

$$W_{\text{ПА}} = \frac{\pi r^3 L p_2^2}{\delta_A E_A} . \quad (22)$$

Учитывая, что давление в трубопроводе меняется от p_1 до p_2 , приравняем энергию деформации (22) работе (17)

$$\frac{\pi r^3 L (p_2^2 - p_1^2)}{\delta_A E_A} = -\frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] . \quad (23)$$

Подставив (21) в (18), с учетом (19), (20) и (23) получим

$$V_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] = \pi r^2 \Delta L . \quad (24)$$

Приравняв (11) и (19) с учетом (20) и (23) получим

$$\frac{\pi r^3 (2p_1 + p) p L}{\delta_A E_A} = -\frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1 + p}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] , \quad (25)$$

Поскольку мы предполагаем, что $0 < p < p_1$, выполним линеаризацию

$$\left(\frac{p_1 + p}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} = \left(1 + \frac{p}{p_1} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} \approx 1 - \frac{p}{\gamma p_1} .$$

С учетом того, что для инертных газов $\gamma=5/3$, получим выражение:

$$\delta_A E_A = \frac{20\pi r^3 L p_1}{7 \left[1 - \left(\frac{28}{68} \right)^{0.6} \right] V_1} = 21,744 \frac{r^3 L p_1}{V_1} . \quad (28)$$

Начальные значения давления p_1 и объема газа V_1 в газожидкостном упругом элементе известны. Величины L и r выбираем произвольно, например, равными характерным размерам упругого элемента.

Колебаний топливных магистралей

Рассмотрена магистраль окислителя, состоящая из пяти участков труб постоянного поперечного сечения. Первый участок соединен с баком. На

конце магистрали установлен газожидкостный упругий элемент, за ним следует насос. Параметры этой магистрали представлены в табл. 1. Начальные объем и давление газа $V_1 = 0,040 \text{ м}^3$, $p_1 = 7 \cdot 10^5 \text{ Па}$, свойства жидкости: $\rho = 1,285 \text{ кг/м}^3$, $c = 910 \text{ м/с}$.

В табл. 2 представлены результаты расчета. Результаты расчета магистрали с демпфером представлены в последних двух столбцах, а результаты расчета без демпфера в первых двух столбцах. Рядом с результатами расчета МКЭ даны результаты расчета импедансным методом [3–5]. Как видно из таблицы, результаты близки.

Исследованы колебания разветвленной магистрали окислителя (рис. 4), параметры, которой приведены в табл. 3. Первый и второй участки подводят жидкость от бака к разветвлению, затем идут по два участка в двух одинаковых ветвях трубопровода. На концах ветвей перед насосами установлены газожидкостные упругие элементы с параметрами: $V_1 = 0,020 \text{ м}^3$, $p_1 = 7 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Таблица 1.

Участок	1	2	3	4	5
$l, \text{ м}$	0,280	5,610	2,472	2,613	0,300
$D, \text{ м}$	0,588	0,581	0,390	0,400	0,500
$\delta, \text{ м}$	0,0011	0,0035	0,0035	0,003	0,003
$E, \text{ Па}$	$0,69 \cdot 10^{11}$	$0,69 \cdot 10^{11}$	$0,69 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$

Таблица 2.

Номер частоты	Аналитический метод	МКЭ	Аналитический метод	МКЭ
$\omega_1, \text{ Гц}$	16,081	13,872	2,401	2,878
$\omega_2, \text{ Гц}$	35,115	32,238	23,198	24,694
$\omega_3, \text{ Гц}$	62,791	59,071	53,324	46,842

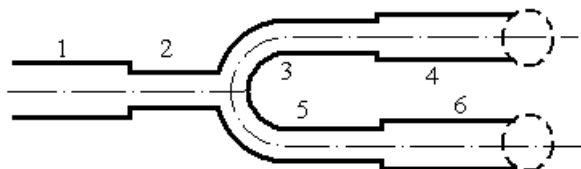


Рисунок 4 – Схема разветвленной магистрали окислителя

Результаты расчета представлены в табл. 4. В первых двух столбцах табл. 4 даны результаты расчета частот колебаний без демпфера. В последних двух столбцах даны частоты трубопровода с демпферами. Для сравнения приведены результаты расчета по МКЭ и данные полученные методом четы-

рехполюсника [3–5].

Как следует из результатов расчета, использование двух демпферов, является эффективным средством гашения колебаний.

Таблица 3.

Участок	1	2	3	4	5	6
l , м	2,302	5,67	1,512	4,818	1,512	4,818
r , м	0,2905	0,2	0,125	0,14	0,125	0,14
δ , м	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	0,002	$2,5 \cdot 10^{-3}$	0,002
E , Па	$0,69 \cdot 10^{11}$	$0,69 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^{11}$

Таблица 4.

Номер частоты	Аналитический метод	МКЭ	Аналитический метод	МКЭ
ω_1 , Гц	13,057	11,894	2,259	3,708
ω_2 , Гц	33,590	33,626	21,980	22,619
ω_3 , Гц	54,071	55,405	46,120	46,783

Заключение

В работе получена математическая модель на основе МКЭ колебаний окислителя в магистралях ЖРД. Разработана линейная модель газожидкостного демпфера колебаний. Разработаны методы анализа колебаний окислителя в магистралях с демпфером и без него.

В работе анализу подвергались магистрали окислителя различной конфигурации. Все проанализированные магистрали имеют первую собственную частоту колебаний около $11 \div 14$ Гц. Это значение частоты близко к частоте первого тона колебаний корпуса ракеты. Во всех исследованных в работе магистралях удалось первую собственную частоту колебаний окислителя вывести из опасного частотного диапазона благодаря использованию одного или двух газожидкостных упругих элементов.

Список литературы: 1. Башта Т.М. Гидравлические приводы летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1967. – 498 с. 2. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1989. – 296 с. 3. Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А. Динамика топливных систем ЖРД. – М.: Машиностроение, 1975. – 172 с. 4. Натанзон М.С. Продольные автоколебания жидкостной ракеты. – М.: Машиностроение, 1977. – 206 с. 5. Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Натанзон М.С. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. – М.: Машиностроение, 1977. – 352 с. 6. Овсянников Б.В., Боровский Б.И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1986. – 376 с. 7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. 8. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Поступила в редколлегию 22.06.2009

Н.В.ЧОСТА, канд.техн.наук, доц., ДГМА, Краматорск
В.Е.ШОЛЕНИНОВ, асс., ДГМА, Краматорск

ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ЖЕСТКОСТИ КУЗНЕЧНО-ШТАМПОВОЧНОГО ОБОРУДОВАНИЯ С КЛИНОШАРНИРНЫМ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫМ МЕХАНИЗМОМ

Розглянуто вплив різноманітних параметрів на жорсткість пресів із клиношарнірним механізмом і дані рекомендації щодо їх раціонального вибору.

Influence of various parameters on rigidity presses with wedge linkwork the mechanism is considered and recommendations at their rational choice are given.

Для современного оборудования обработки металлов давлением (ОМД) его общая жесткость является важным параметром. Так, при выполнении формообразующих операций ОМД, таких как прессование, объемная штамповка, жесткость кривошипной кузнечно-прессовой машины имеет существенное значение для точности заготовок, получаемых на ней. Чем больше жесткость машины, тем выше точность останковки ползуна в крайнем нижнем положении и, соответственно, точнее размер заготовки по высоте. При выполнении на кривошипных машинах разделительных операций, таких как холодная ломка изгибом, сдвиговая отрезка сортового проката, в конце операции происходит резкий сброс усилия разделения. Это приводит к освобождению энергии упругой деформации машины и инструмента. Составляющая потерь упругой деформации кривошипных машин для разделительных операций достигает 25...35% от общей работы. И одним из путей, позволяющих уменьшить величину упругой отдачи является увеличение жесткости машины.

Можно выделить два направления повышения жесткости оборудования: повышение жесткости станины и повышение жесткости главного исполнительного механизма (ГИМ) за счет новых конструктивных схем. Первый путь является не совсем рациональным, так как он приводит к резкому увеличению массы прессы, и как следствие, к его удорожанию [1]. Наиболее рациональным является второй путь – повышение жесткости ГИМ.

Одним из направлений повышения жесткости ГИМ, является создание механизмов с дополнительным звеном, воспринимающим технологическое усилие и снижающим или полностью устраняющим влияние упругого прогиба вала на общую податливость конструкции. Таким механизмом является кривошипно-клиновой исполнительный механизм, разрабатываемый фирмой «Еутисо» (Германия) [2].

Использование клинового исполнительного механизма позволяет с од-

ной стороны, свести к минимуму перекося ползуна при его эксцентричном нагружении и, с другой стороны, весьма существенно (по данным фирмы «Eutisco» в 1,4 раза) повысить жесткость прессы.

Однако наряду с преимуществами, клиновая конструкция ГИМ имеет и недостатки. При постоянном угле клина соотношение усилий на клине и ползуне является постоянной величиной, в то время как графики усилий технологических операций обработки металлов давлением имеют характер изменения, близкий к гиперболе. Наличие перечисленных недостатков снижает технологические возможности клиновых прессов.

Наиболее перспективными с точки зрения повышения жесткости и соответствия технологическим особенностям операций ОМД, являются разрабатываемые в Донбасской государственной машиностроительной академии клиношарнирные механизмы (КШМ).

В работе Харлашкина В.В. был рассмотрен клиношарнирный механизм (КШМ) с перпендикулярным направлением перемещения выпуклого клина относительно направления перемещения ползуна, определены его кинематические и энергосиловые параметры [3]. Дальнейшее исследование этого типа КШМ было продолжено Трофимовым В.И. [4]. Был разработан винтовой пресс с КШМ, в котором предусмотрено изменение угла наклона направляющей входного клина. Для разделительных операций был предложен КШМ с вогнутым клином [5].

У клиношарнирного механизма одна из рабочих поверхностей клина выполнена цилиндрической, сопряженной с дополнительным звеном – шарниром. Шарнир имеет вторую рабочую поверхность, которая также выполнена по радиусу и сопрягается с цилиндрической поверхностью ползуна. Перемещение клина вдоль неподвижных направляющих приводит к изменению угла между прямой, перпендикулярной направлению перемещения клина, и прямой, соединяющей центры цилиндрических поверхностей. А это, в свою очередь, дает возможность получить переменное соотношение между приводным усилием на клине и исполнительным усилием на ползуне.

Проведенные ранее исследования показывают, что применение КШМ в кривошипных машинах позволяет повысить их жесткость, по сравнению с традиционным кривошипно-ползунным исполнением, почти на 30 % [6]. Однако расчеты жесткости КШМ носили усредненный, оценочный характер.

Целью настоящей работы является исследование влияния различных параметров на жесткость КШМ и пути ее повышения.

Изменение радиусов сопряженных поверхностей КШМ приводит к изменению их площадей контакта и изменению массы шарнира, что влияет на жесткость всего механизма. Исследование влияния радиусов сопряженных поверхностей на жесткость проводилось методом конечных элементов в системе *Abaqus* [7], для чего были разработаны модели КШМ с выпуклым и вогнутым клиньями. На рис. 1, а представлена расчетная схема КШМ с выпук-

лым клином. На рис.1, б – его конечно-элементная модель. Радиус клина 1 обозначен R , радиус шарнира 2 – r , высота ползуна 3 – H . В расчете учитывались упругие деформации самого КШМ без учета прогиба несущей конструкции и станины. Согласно данным работы [8] вертикальная жесткость современных кривошипных горячештамповочных прессов (КГШП) оценивается зависимостью:

$$C_0 = (50...70) \sqrt{F}, \quad (1)$$

где F – усилие прессы в kH .

Расчеты жесткости КШМ выполнялись для прессы усилием $F = 12 \text{ кН}$. Жесткость КГШП, такого же усилия, но традиционного исполнения, рассчитанная по формуле (1) составляет $C_0 = 242 \text{ кН/мм}$.

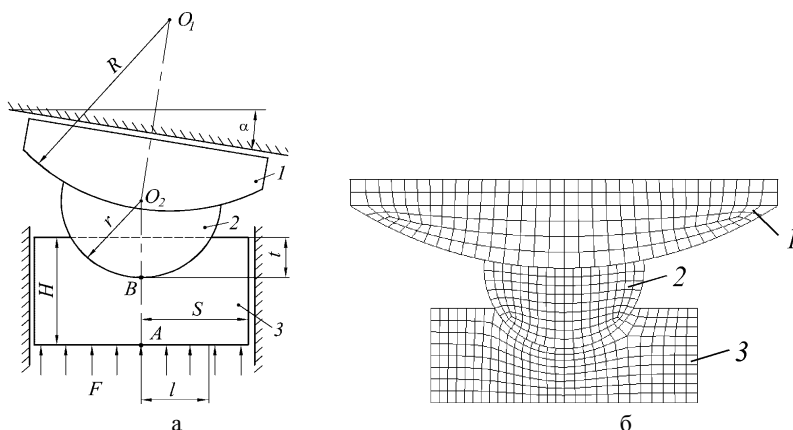


Рисунок 1 – Расчетная схема к определению жесткости КШМ с выпуклым клином (а) и его конечно-элементная модель (б)

На рис. 2 представлена зависимость отношения расчетной вертикальной жесткости КШМ – C в центральной точке A (см. рис. 1, а) к жесткости C_0 от соотношения радиусов клина и шарнира R/r , при угле наклона входного звена 1 $\alpha = 0^\circ$.

Анализируя полученную зависимость можно сделать следующие выводы:

- без учета упругой деформации станины, жесткость КШМ многократно превосходит жесткость КГШП;
- уменьшение разницы радиусов сопряженных поверхностей КШМ приводит к увеличению жесткости, что объясняется увеличением суммарной площади их контакта.

Большое влияние на жесткость механизма оказывает высота H ползуна 3. На рис. 1, а глубина погружения шарнира 2 в ползун 3 обозначена t . На

рис. 3 представлена зависимость отношения C_1 к C (где C_1 – жесткость КШМ, у которого высота ползуна практически равна глубине погружения шатуна в ползун, то есть $H \approx t$) от соотношения H/t . Анализ зависимости показывает, что увеличение вертикального размера ползуна приводит к резкому падению величины жесткости. Поэтому расстояние между максимальной точкой погружения ползуна – т. В (см. рис. 1, а) и точкой А, лежащей на поверхности ползуна, должно быть как можно меньше. Наиболее рационально принимать его из условия прочности на сжатие. Из графиков также видно, что чем больше разница радиусов сопряженных поверхностей КШМ, тем интенсивнее происходит падение жесткости.

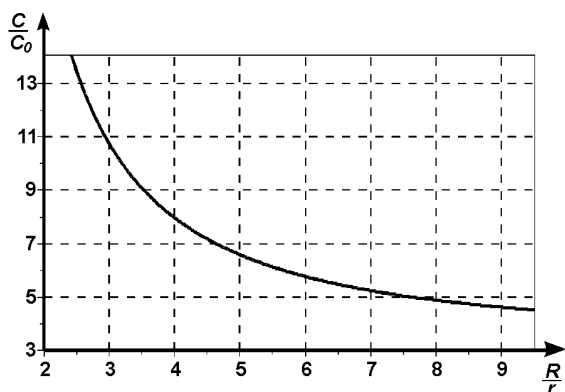


Рисунок 2 – Зависимость расчетной вертикальной жесткости от соотношения радиусов КШМ

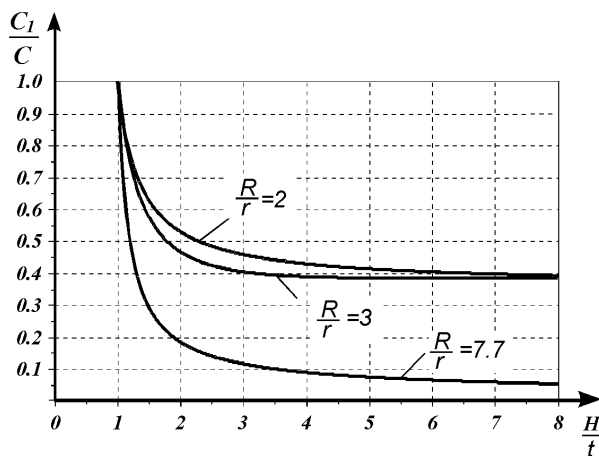


Рисунок 3 – Зависимость жесткости КШМ от высоты ползуна

На рис. 4 показано распределение вертикальной жесткости по поверхности ползуна в виде зависимости C_2/C (где C_2 - жесткость в центральной точке B) при различных соотношениях высоты ползуна H к радиусу шарнира r .

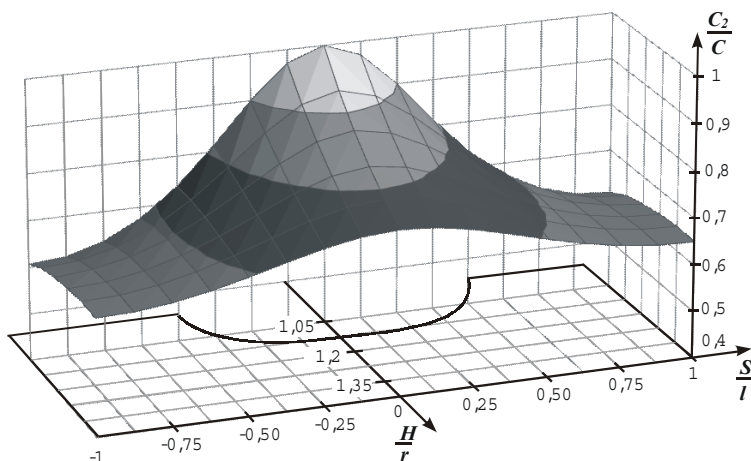


Рисунок 4 – Распределение жесткости КШМ по поверхности ползуна

Из графика можно сделать вывод, что по мере удаления от центральной точки A , жесткость падает по экспоненциальной зависимости, поэтому рекомендуется заготовку располагать в центральной зоне ползуна, сводя к минимуму эксцентриситет прикладываемой нагрузки.

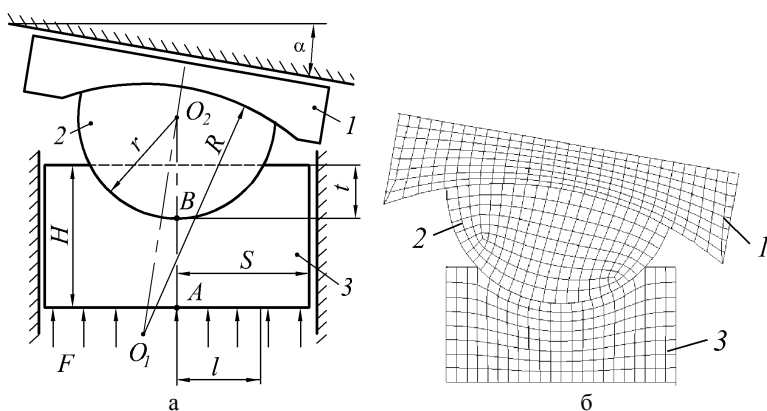


Рисунок 5 – Расчетная схема к определению жесткости КШМ с вогнутым клином (а) и его конечно-элементная модель (б)

Для исследования КШМ с вогнутым клином была разработана конечно-элементная модель в системе *Abaqus*. На рис. 5, а представлена расчетная схема КШМ с вогнутым клином. Его конечно-элементная модель – на рис. 5,б.

На рис. 6 представлены графики изменения жесткости КШМ с выпуклым и вогнутым клиньями в зависимости от угла наклона направляющей – α . C_3 – жесткость при $\alpha = 0^\circ$. Анализ графиков показывает, что в обоих случаях с увеличением α вертикальная жесткость падает. Для механизма с выпуклым клином она уменьшается пропорционально α , а для КШМ с вогнутым клином падение более существенное и уже при $\alpha = 15^\circ$ жесткость уменьшается на 40 %.

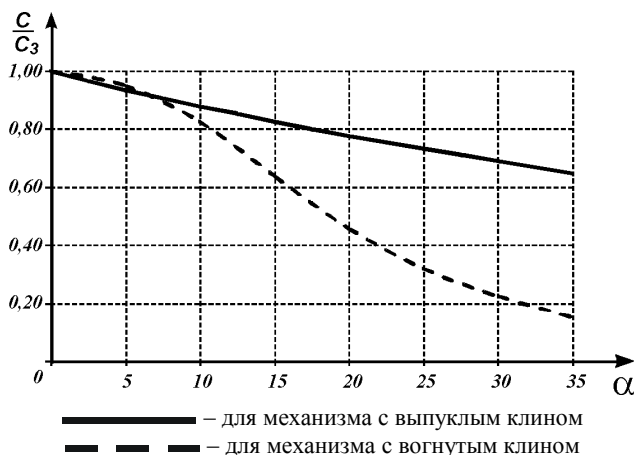


Рисунок 6 – Зависимость жесткости КШМ от угла наклона ползуна

Выводы:

1. Для повышения жесткости кузнечно-штамповочного оборудования с кривошипным приводом наиболее приемлемым является клиношарнирный механизм.
2. Жесткость КШМ многократно превосходит жесткость КГШП.
3. Уменьшение разницы радиусов сопряженных поверхностей КШМ приводит к увеличению жесткости.
4. С увеличением угла наклона клина вертикальная жесткость падает. У КШМ с вогнутым клином изменение угла наклона приводит к более существенному падению жесткости.

Список литературы: 1. Ланской Е.Н. Проектирование базовых деталей кривошипных прессов при заданных показателях прочности и жесткости / Е.Н.Ланской, В.И.Силанов, И.Н.Филькин, В.М.Шинковский // Кузнечно-штамповочное производство. – 1983. – № 3. – С. 11-19. 2. Гурьев

Ю.Т. Новые тенденции в развитии горячештамповочных прессов / Ю.Т.Гурьев, А.И.Гончаров // ЭИ. Обработка давлением. – Вып. 2. – М.: НИИМаш, 1972. – С. 1-7. 3. Харлашкин В.В. Разработка и внедрение механических прессов с клиношарнирным приводом ползуна для точной штамповки: дис. ... канд. техн. наук: 05.03.05 / Харлашкин В.В. – Краматорск, 1986. – 188 с. 4. Трофимов В.И. Разработка винтоклинового пресса на основе клиношарнирного механизма для точной штамповки низких заготовок: дис. ... канд. техн. наук: 05.03.05 / Трофимов В.И. – Краматорск, 1990. – 231 с. 5. Роганов Л.Л. Исследование механизмов с переменной клиновидностью для технологических процессов обработки металлов давлением с максимальным начальным усилием / Л.Л.Роганов, С.Г.Карнаух, Н.В.Чоста, В.Е.Шоленинов // Обработка материалов давлением: сб. научн. тр. – Краматорск: ДГМА, 2008. – № 1 (19). – С. 342-347. 6. Роганов М.Л. Сравнительная оценка кинематических и силовых параметров механизмов привода механических прессов / М.Л.Роганов, Н.В.Чоста // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском у металургії і машинобудуванні: тематич. зб. наук. пр. – Краматорськ - Слов'янськ: ДДМА, 2004. – С. 38-41. 7. Манилык Т. Практическое применение программного комплекса ABAQUS в инженерных задачах. Версия 6.5 / Т.Манилык, К.Ильин. – М.: МФТИ, Тесис, 2006 – 68 с. 8. Ланской Е.Н. О параметрах жесткости прессов / Е.Н.Ланской // Кузнечно-штамповочное производство. – 2008. – № 8. – С. 35-39.

Поступила в редколлегию 30.09.2009

СОДЕРЖАНИЕ

Л.В.Автономова, С.М.Дергун, Г.А.Гончарова, А.В.Степук Механические испытания на растяжение и внутреннее давление сосудов имплантантов	3
Ю.П.Анацкий, Ю.А.Зенкевич, В.В.Овчаренко, Э.А.Симсон, М.В.Трохман Оптимизация образующей поверхности ролика подшипника качения	8
А.Г.Андреев, А.В.Щепкин Исследование процесса разрядки детонаторов путем их нагрева с помощью ИНУ	12
В.А.Ванин, А.А.Григорьев Солитоны Рассела в цилиндрической пружине	20
В.М.Грищенко Узагальнення функціоналу Лагранжа в задачах нелінійного програмування	30
S.Gladkov, M.Stiemer, A.Grosse-Woehrmann, B.Svendsen Numerical modeling of phase-separation in binary media based on the cahn-hilliard equation	37
А.Ю.Деньщиков, С.В.Подлесный Снижение короблений после сварки методом вибрационного старения	46
Б.Ф.Зайцев, А.В.Асаенко, Н.Е.Викман Построение матриц масс для учета центробежных сил при колебаниях трехмерного вращающегося тела	52
Е.М.Иванов Упрощенный метод идентификации параметров колебательных систем	57
Р.Е.Кочуров, К.В.Аврамов Нелинейные нормальные формы и бегущие волны в цилиндрических оболочках при их геометрически нелинейном деформировании	61
С.В.Красніков Розробка інтегрованих програмних засобів з автоматизації розрахунків динамічних характеристик конструкцій	68
Я.Д.Круглий Применение метода малого параметра для исследований вынужденных колебаний систем большой размерности с малой нелинейностью	73
А.В.Куприянов Обеспечение размерной точности колесной пары, собираемой с использованием нагрева	80

Г.И.Львов, А.Н.Ткачук Об аналитическом решении термоупругой контактной задачи о взаимодействии цилиндрической оболочки с бандажом	88
Г.Ю.Мартыненко Математическое описание динамического поведения ротора в магнитных подшипниках в зависимости от принятых упрощений. Часть 1. Жесткий ротор	95
С.А.Назаренко Системный подход к мультидисциплинарной оптимизации машин	119
С.В.Ольшанский Об эффекте зависания мелкой частицы переменной массы в воздушной среде	125
Э.С.Остерник Исследование критических скоростей валопроводов многомашинных агрегатов в процессе эксплуатации	129
Л.О.Пархоменко Наближений метод розрахунку власних коливань циліндрів	136
В.О.Повгородний Термоупругое состояние пластин, выполненных из различных материалов	143
С.Ю.Погорелов, К.Ю.Счастливцев, С.И.Марусенко Влияние параметров теплоотвода на деформирование резонатора лазерного гироскопа	151
А.С.Степченко Построение суперэлемента ротора с учетом подшипника скольжения методом начальных параметров	158
А.А.Тесленко Моделирование поляризациино-оптических устройств с напряженными элементами	164
Л.Н.Тищенко, В.П.Ольшанский Влияние поперечных колебаний плоского решета на движение слоя зерновой смеси	167
В.Б.Успенский, И.А.Багмут Оценка точности определения углов ориентации ВЛА на выставке	177
С.В.Филипковский, К.В.Аврамов Конечноеэлементный анализ резонансных режимов топливоподающего тракта ракеты	183
Н.В.Чоста, В.Е.Шоленинов Пути повышения жесткости кузнечно-штамповочного оборудования с клиношарнирным исполнительным механизмом	191

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»

Збірник наукових праць № 30

Науковий редактор докт.техн.наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор Щепкін О.В.

Відповідальний за випуск В.М.Луньова

Обл.вид. № 129-09

Підп. до друку 16.11.2009 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 9,4. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 218. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Цифрова друкарня «Зебра», Харків, вул. Чичибабіна, 9
