



ВЕСТНИК

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
«ХПИ»**

47'2008

Харьков

ВЕСТНИК

НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»

Сборник научных трудов
Тематический выпуск

47'2008

«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Издание основано Национальным техническим университетом
«Харьковский политехнический институт» в 2001 году

Государственное издание

Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины

КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Председатель: Л.Л.Товажнянский, докт. техн. наук, проф.

Секретарь координационного совета: К.А.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, докт. техн. наук, проф.;

Е.И.Сокол, докт. техн. наук, проф.;

Е.Е.Александров, докт. техн. наук, проф.;

А.В.Бойко, докт. техн. наук, проф.;

М.Д.Годлевский, докт. техн. наук, проф.;

А.И.Грабченко, докт. техн. наук, проф.;

В.Г.Данько, докт. техн. наук, проф.;

В.Д.Дмитриенко, докт. техн. наук, проф.;

В.В.Епифанов, докт. техн. наук, проф.;

П.А.Качанов, докт. техн. наук, проф.;

А.Ф.Кириченко, докт. техн. наук, проф.;

В.Б.Клепиков, докт. техн. наук, проф.;

В.И.Кравченко, докт. техн. наук, проф.;

О.К.Морачковский, докт. техн. наук, проф.;

В.И.Николаенко, канд. ист. наук, проф.;

П.Г.Перерва, докт. техн. наук, проф.;

Н.И.Погорелов, докт. техн. наук, проф.;

М.И.Рыщенко, докт. техн. наук, проф.;

В.Б.Самородов, докт. техн. наук, проф.;

В.П.Себко, докт. техн. наук, проф.;

В.И.Таран, докт. техн. наук, проф.;

Н.А.Ткачук, докт. техн. наук, проф.;

М.П.Требин, докт. фил. наук, доц.;

Ю.В.Тимофеев, докт. техн. наук, проф.;

Е.И.Юносова, докт. фил. наук, проф.

Адрес редколлегии: 61002, Харьков,
ул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПИ».

Каф. ДПМ, Тел. (057) 707-68-79.

Харьков 2008

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2008. – № 47. – 200 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ответственный редактор: О.К.Морачковский, докт. техн. наук, проф.

Ответственный секретарь: А.Г.Андреев, канд. техн. наук, доц.

| | |
|--------------------|------------------------------|
| Е.Е.Александров, | докт. техн. наук, проф.; |
| В.В.Бортовой, | канд. техн. наук, доц.; |
| Ю.С.Воробьев, | докт. техн. наук, проф.; |
| О.О.Горошко, | докт. физ.-мат. наук, проф.; |
| В.Б.Гринева, | докт. техн. наук, проф.; |
| В.А.Жовдак, | докт. техн. наук, проф.; |
| Г.И.Львов, | докт. техн. наук, проф.; |
| В.Л.Остапенко, | докт. физ.-мат. наук, проф.; |
| Л.А.Фильштинський, | докт. техн. наук, проф.; |
| Ю.М.Шевченко, | академик НАНУ |

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 12 від 28 листопада 2008 р.

© Національний технічний університет «ХПІ»

А.А. ЛАРИН, канд.техн.наук;

Ю.Л.ТАРСИС, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ», Харьков

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ МЕТОДОВ ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

Посвящается памяти Евгения Андреевича Шороха

Статтю присвячено історії розвитку динамічних розрахунків колінчастих валів. Надано аналіз різноманітних розрахункових схем і методів, у тому числі й сучасних, які базуються на методі скінчених елементів. Розглянуто внесок вчених НТУ «ХПІ» у розвиток цієї проблеми.

The history of development of dynamic calculations of crankshafts is discussed. The analysis of various methods including a method of final elements is given. The contribution of scientists NTU "KPI" to development of this problem is considered.



Шорох Евгений Андреевич

25.08.1933 – 09.12.2007

Кандидат технических наук, доцент, автор метода надпорных моментов в матричной форме, инициатор и руководитель разработки пакета прикладных программ по квазистатическому расчету коленчатых валов и применения метода конечных элементов для построения адекватной математической модели коленчатого вала.

Коленчатые валы являются наиболее нагруженными и, следовательно, наиболее ответственными деталями поршневых двигателей. В паровых машинах и двигателях внутреннего сгорания они составляют 20-30 % общей стоимости. В задачах динамики паровых машин XIX века с их небольшой скоростью вращения основное внимание уделялось только маховому колесу и центробежному регулятору [1, с. 147]. Но к началу XX века с ростом скорости и мощности паровых машин на динамику их валопроводов существенное влияние стали оказывать крутильные колебания. Анализ первых работ, посвященных этой проблеме, дан в статье С. П. Тимошенко «К вопросу о явлении резонанса в валах», опубликованной в 1905 г. [2, с. 13-54]. В развитии теории колебаний задача о крутильных колебаниях валопроводов сыграла огромную роль [3]. Несмотря на то, что эти вопросы были хорошо изучены уже в 30-е гг. XX века, расчеты валопроводов паровых машин проводились, по-прежнему, в статической постановке. Например, для определения минимального диаметра коленчатого вала Английским Ллойдом и Регистром СССР еще в 1940-е гг. ис-

пользовалась эмпирическая формула, в которой не учитывались крутильные колебания валов [4, с. 213, 221].

С заменой паровых машин двигателями внутреннего сгорания проблемы динамической прочности вышли на первое место. Поначалу наиболее опасными были крутильные колебания валопроводов. Для их исследования применялись дискретные механические модели, состоящие из абсолютно жестких маховых масс, соединенных невесомыми упругими участками вала, в которых зачастую необходимо было учитывать и нелинейности. В 20-30-е гг. колебаниям таких систем были посвящены работы М.Толле, А.И.Лурье, В.П.Герских, И.М.Бабакова и др. Обзор литературы по этому вопросу можно найти в статье [3]. Основными методами борьбы с крутильными колебаниями стали отстройка от резонанса, а также применение демпферов и antivибраторов для гашения колебаний. В отличие от крутильных, изгибные и продольные колебания сильнее демпфируются, так как увлекают за собой части корпуса двигателя. По этой причине собственные частоты их выше, чем крутильных колебаний, поскольку опоры вала препятствуют изгибу, и они (по крайней мере, низшие) не попадают в рабочий диапазон двигателя.

Но к 40-м гг. XX века с ростом скорости и мощности двигателей, с облегчением их конструкций, в коленчатых валах стали сильнее проявляться и изгибные, и продольные колебания. Дело в том, что с увеличением частот и амплитуд возбуждения вала, со снижением его материалоемкости, сопровождающимся уменьшением жесткости, в нем стали возникать резонансные колебания, устранить которые не представлялось возможным. Если исследование крутильных колебаний и их влияние на работоспособность трансмиссии было возможно с помощью примитивной модели, то оценка прочности самого коленчатого вала требовала более сложной модели. Поэтому, наряду с изучением крутильных колебаний, разрабатывался и второй подход, при котором коленчатый вал рассматривался как статически неопределимая рама сложной конфигурации, находящаяся под действием сил давления газов и сил инерции неуравновешенных масс элементов вала и присоединенных к нему деталей кривошипно-шатунных механизмов. Оба подхода достаточно долго развиваясь практически независимо друг от друга, позволяли решать, по существу, различные задачи и, наряду с их очевидными достоинствами, обладали весьма существенными недостатками. В связи с этим в конце 40-х гг. наметилась устойчивая тенденция сближения обоих подходов, позволяющая в значительной степени избавиться от присущих им недостатков и в комплексе подойти к решению проблемы динамической прочности коленчатых валов.

Настоящая статья посвящена историческому и логическому анализу методов расчетов динамической прочности коленчатых валов – задаче, в решение которой большой вклад внесли ученые НТУ «ХПИ». Объем статьи не позволяет уделить внимание всем работам, посвященным данному вопросу, поэтому авторы останавливаются на наиболее существенных, по их мнению, исследованиях, посвященных основным этапам и методам решения проблемы. Кроме того, естественно, на содержании работы не могли не отразиться личные при-

страстия и научные интересы авторов. Поэтому не исключено, что в ней не найдут отражения ряд вопросов, относящихся к рассматриваемой проблеме и, соответственно, не будут упомянуты многие достойные внимания работы, количество которых за рассматриваемый период весьма значительно.

Первыми двигателями, в которых усталостные поломки коленчатых валов заставили обратить на себя внимание, причем не только от кручения, но и от изгибных и продольных деформаций, были авиационные, удельная мощность которых гораздо выше, чем транспортных и стационарных. К тому же последствия выхода из строя авиационного двигателя гораздо серьезнее, да и само авиастроение является более развитой и наукоемкой отраслью. Вначале для повышения долговечности коленчатых валов были предприняты меры технологического характера. Улучшение качества обработки, шлифовка валов, накатка галтелей, применение специальных легированных сталей, повышение культуры сборки, а также азотирование и цементация принесли свои плоды. Вторым шагом стало улучшение конструктивных форм, уменьшение концентрации напряжений и т.п. Однако эти меры полностью не сняли проблемы прочности и надежности коленчатых валов, и для их дальнейшего совершенствования потребовалась разработка расчетных методов, позволяющих учесть влияние существенных конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов.

На первом этапе применялась разрезная схема коленчатого вала, и рассматривалось одно, наиболее нагруженное, колено, которое полагалось свободно опертым по краям, а влияние соседних колен не учитывалось. При этом считалось, что коленчатый вал оперт посередине подшипников и может свободно поворачиваться на опорах. Такие предположения существенно упрощают задачу. Первые исследования по разрезной схеме были выполнены С.П.Тимошенко, А.Гесснером и К.Бицено [2, с. 590-591]. При этом колено вала заменялось стержневой конструкцией (рис. 1, а).

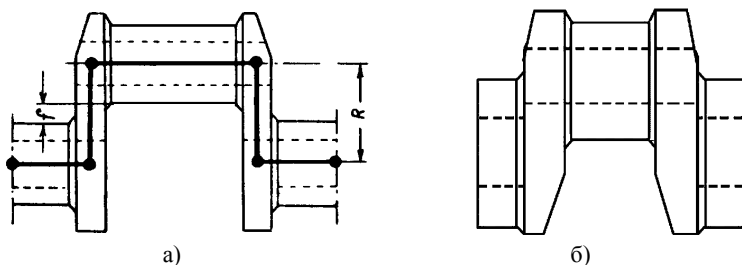


Рисунок 1 – Схема колена вала: а – старого типа, б – современного

Следующим шагом, связанным с возможностью учета влияния податливости и смещения опор, с одной стороны, и частичным защемлением шеек в опорах, с другой, было рассмотрение коленчатого вала как статически неопределимой системы. Первая модель, рассмотренная Р.Девилльером, представляла коленчатый вал в виде неразрезной балки постоянной жесткости [5]. Затем

С.П.Тимошенко [6], а за ним И.И.Трапезин [7] предложили моделировать коленчатый вал пространственной рамной системой, а его упругие характеристики определять методами сопротивления материалов. Ими было дано и название методу квазистатического расчета коленчатого вала – метод надпорных моментов.

В 1943 г. в Центральном институте авиационного моторостроения (ЦИАМ) работы по прочности двигателей возглавил академик АН УССР С.В.Серенсен (1905-1977). Он также был ведущим экспертом по вопросам прочности и по анализу случаев разрушения различного рода конструкций. В мае того же года Институт машиноведения АН СССР и Комитет прочности Всесоюзного научного инженерно-технического общества машиностроителей (ВНИТОМАШ) провели под руководством С.В.Серенсена совещание по динамической прочности деталей машин. Из-за начавшейся через месяц войны материалы совещания были изданы лишь в 1946 г. [4], не потеряв, однако, своей актуальности. Те же организации под руководством С.В.Серенсена в 1947 г. провели совещание, но уже по более узкой проблеме – по динамике и прочности коленчатых валов. Материалы докладов, сделанных на этом совещании, опубликованы в двух сборниках [8, 9]. По результатам семинара по вибрациям, проведенного в Институте машиноведения АН СССР, также изданы два сборника [10, 11], посвященные поперечным колебаниям и критическим скоростям валов. Все сборники выходили под редакцией С.В.Серенсена, а большинство статей в них посвящено проблемам прочности коленчатых валов, в основном авиационных двигателей. В двух, более поздних, изданиях уже проявилось влияние перехода авиации на газотурбинные и турбореактивные двигатели. Работы, опубликованные в указанных сборниках, сыграли огромную роль в распространении методов динамических расчетов машин и механизмов. По глубине рассматриваемых вопросов и объему материала они больше похожи на коллективные монографии.

В ряде работ был использован еще статический подход. Так, в статьях Р.С.Кинасошвили [4, с. 195-209], Р.С.Кинасошвили и В.Я.Кушуля [8, с. 350–372, с. 398-421] дан подробный анализ поломок, происходящих в различных деталях авиационных двигателей, в том числе и в коленчатых валах. В них отмечено, что поломки последних происходили не только от крутильных, но и от изгибных, и от продольных, и это проиллюстрировано многочисленными фотографиями. Однако сами авторы привели результаты квазистатических расчетов по разрезной схеме. В своей работе В.Я.Кушуль рассмотрел вопрос о влиянии выработки подшипников на прочность валов тяжелых тихоходных машин [9, с. 246-262]. В том же сборнике Э.Б.Слуцкая и О.Ю.Крамаренко опытным и расчетным путями исследовали влияние несоосности опор коленчатого вала тракторного двигателя на его прочность [9, с. 263-283]. Ими применена обычная расчетная схема коленчатого вала на жестких опорах с вычисленными коэффициентами влияния. Оказалось, что смещение опор на 0,1-0,2 мм, вызванное неправильным монтажом или износом коренных подшипников или шеек вала, может уменьшить запасы прочности в два-три раза.

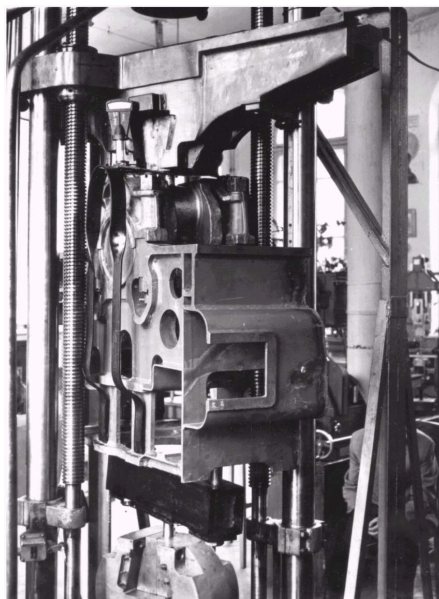


Рисунок 2 – Экспериментальное определение податливости опорного узла отсека тепловозного дизеля 10Д100

Дальнейшее развитие квазистатических расчетов связано с применением ЭВМ, которое дало возможность рассматривать задачу в наиболее общей постановке, где вал – это неразрезная схема на упругих несоосных гидродинамических опорах скольжения. Работы в этом направлении велись представителями различных школ. Сотрудниками ХПИ, доцентами В.Ф.Грозой и Е.А.Шорохом, была предложена наиболее приспособленная для использования ЭВМ матричная форма метода надопорных моментов [12-15]. С этой целью коленчатый вал мысленно разрезается на отдельные колена в средних сечениях коренных шеек. Основная система образуется за счет установки в этих сечениях так называемых шарниров Гука. Условием неразрывности деформаций является непрерывность упругой линии оси вала, проведенной по осям коренных шеек. Основное разрешающее уравнение метода включает матрицы податливости и геометрии вала, податливости и несоосности опор, векторы нагрузки для каждого расчетного положения вала. В результате расчета определяются внутренние силовые факторы: надопорные моменты, изгибающие и крутящие моменты в различных сечениях вала, реакции опор, то есть получается полная картина распределения усилий в коленчатом вале за цикл работы двигателя.

Для раскрытия статической неопределимости наибольшее применение нашел метод сил, основанный на известном из сопротивления материалов уравнении трех моментов, а при учете податливости и несоосности опор – уравнении пяти моментов. Следует иметь в виду, что раскрытие статической неопределимости осуществляется в двух взаимно перпендикулярных плоско-

стях в системе координат, связанной с вращающимся валом, для совокупности равноотстоящих его положений. Естественно, что решение этой задачи невозможно без применения ЭВМ. Определение податливости опорного узла осуществлялось экспериментально. На рис. 2 показана установка для испытаний отсека тепловозного дизеля 10Д100, проводившихся в лаборатории кафедры сопротивления материалов ХПИ с помощью машины ГРМ-1 [14, с. 98–101].

Однако метод имел существенные недостатки, а именно:

- конструкция коленчатого вала в конце 60-х гг. уже не позволяла представить колено стержнями с известными жесткостными параметрами, так как вал отличался значительным перекрытием шатунных и коренных шеек (см. рис. 1, б) и для определения его характеристик требовался либо натурный эксперимент, либо некоторые эмпирические гипотезы;
- отсутствовали расчетные методы определения податливостей опор вала;
- метод не представлял возможности учета нестационарной несоосности опор, связанной с зазорами в коренных подшипниках скольжения.

Указанные недостатки в значительной мере преодолены в последующих работах Е.А.Шороха, Ю.Л.Тарсиса и С.М.Захарова [16-19]. Так, для определения упругих характеристик коленчатого вала было предложено применение метода конечных элементов в трехмерной постановке, не изменяющее, однако, основных положений метода надпорных моментов [16, с. 85-91]. Для этого отдельное колено, ограниченное средними сечениями коренных шеек, моделировалось трехмерными конечными элементами. Коэффициентами влияния являлись углы поворота плоскостей надпорных сечений от действия единичных нагрузок в местах приложения реальных усилий при соответствующих граничных условиях. Последние и являются необходимыми для расчета коэффициентами влияния. Следует отметить, что нахождение углов поворота надпорных сечений более корректная процедура, чем углов поворота упругой линии вала, так как в силу соизмеримости всех размеров элементов колена, а также влияния поперечных сил, различия между ними оказываются весьма существенными. На рис. 3 представлено разбиение колена вала дизеля 10Д100 на конечные элементы [16, с. 85-86].

Для определения упругой податливости опор в кандидатской диссертации Ю.Л.Тарсиса, выполненной под руководством Е.А.Шороха, был применен метод конечных элементов в двухмерной постановке [16, с. 91-96]. Поперечные стойки блока, включающие опорные узлы коренных подшипников, моделировались плоскими конечными элементами. На рис. 4 представлено разбиение отсека дизеля 10Д100. Нагрузка моделировалась с учетом распределения сил, действующих на коренной подшипник, а граничные условия обеспечивали возможность определения упругих смещений опорного узла по отношению к соседним. Результаты расчетов показали хорошее совпадение с экспериментами, проведенными Е.А.Шорохом [16, с. 96].

И, наконец, для учета гидродинамических зазоров в коренных подшипниках был предложен метод совместного расчета нестационарно нагруженных подшипников и коленчатого вала с использованием автономных моделей [17,20].

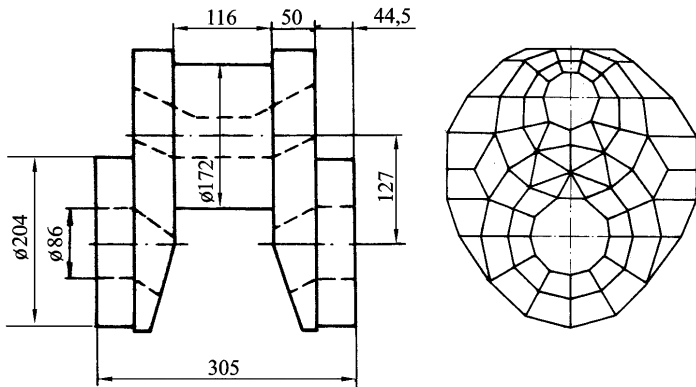


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель колена вала

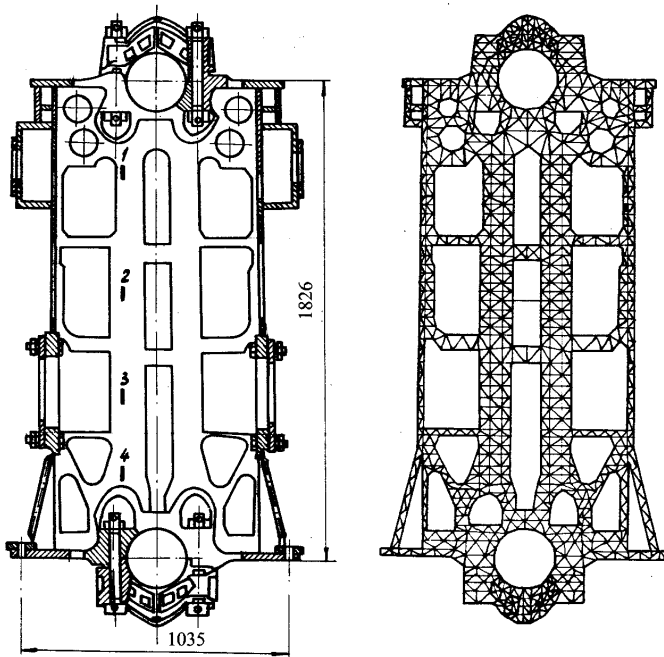


Рисунок 4 Разбивка сечения блока цилиндров тепловозного дизеля 10Д100 на конечные элементы

Параллельно с квазистатическим расчетом развивалась также и методика расчетов колебаний коленчатого вала. В одной из первых работ В.Я.Натанзон рассматривает изгибные колебания коленчатого вала авиационного двигателя, пренебрегая, однако, их связью с крутильными и продольными колебаниями [8, с. 302-349]. Вал рассматривается как многоопорная балка с одним коленом

между опорами и сосредоточенной массой в средней плоскости шатунной шейки. Автор применяет к системе метод начальных параметров (метод остатка). При этом смещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу на одном конце записывает через соответствующие величины на другом конце при помощи передаточной матрицы, которую получает из решения задачи о свободных колебаниях колена как стержневой системы (рис. 1, а).

В том же сборнике Ф.М.Диментберг рассматривает применение метода динамических жесткостей (МДЖ) для расчета связанных колебаний [8, с. 248-301]. Этот метод основан на применении величины, характеризующей упруго-инерционное сопротивление колебательной системы или ее части действующему усилию. Динамической жесткостью называют величину, равную отношению амплитуды усилия, возбуждающего гармонические колебания упругой системы, к амплитуде перемещения точки приложения этого усилия. Впервые метод был предложен в 1934 г. применительно к цепным системам В.П.Терских для расчета крутильных колебаний валопроводов [21], а термин динамическая жесткость введен М.Бю в 1940 г. в работе, посвященной связанным колебаниям коленчатых валов авиационных двигателей с гибким винтом [22].

М.Л.Кемпнер для расчета изгибных колебаний коленчатых валов применяет метод динамических податливостей [9, с. 186-245], который развивает применительно к системе с последовательно сопряженными элементами. При этом каждое звено он заменяет рамой как при статическом расчете. Автор отмечает, что деление изгибных колебаний на продольные и поперечные искусственно, поскольку на самом деле эти колебания не существуют друг без друга. Под динамической податливостью упругой системы имеется в виду отношение амплитуды перемещения к амплитуде усилия, которое возбуждает гармонические колебания системы. С помощью этого понятия вопрос об изгибных колебаниях коленчатого вала удалось связать с методами статического расчета.

М.Л.Кемпнер рассматривает два варианта: в 1-м пренебрегает связью между отдельными коленами вала, что осуществляется при помощи шарнира Гука в надпорном сечении [9, с. 243]; во 2-м – предполагает колена вала жестко заземленными, что характерно для широких подшипников.

На основе перечисленных работ и последующих исследований на кафедре теоретической механики НТУ «ХПИ» под руководством Е.А.Шороха был разработан пакет прикладных программ [19, 23], позволяющий на стадиях проектирования и доводки двигателей проводить широкий спектр расчетных исследований с применением всех существующих расчетных схем для самых различных типов двигателей. Расчет предусматривает, кроме получения упомянутых выше результатов, определение интегральных характеристик прочности – коэффициентов запасов усталостной прочности в наиболее опасных сечениях. Это позволяет учесть, как отдельное, так и совместное влияние наиболее существенных конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на прочностные характеристики вала, блока цилиндров и подшипников.

Для исследования связанных вынужденных колебаний коленчатого вала его заменяют стержневой системой на изотропно-упругих опорах, а расчет проводят с помощью метода динамических жесткостей (МДЖ) [24, 25]. Каждый стержень имеет два узла с шестью степенями свободы в каждом, которые соответствуют изгибу в двух плоскостях, растяжению-сжатию и кручению. Полная модель коленчатого вала может также включать твердые тела, моделирующие присоединенные детали (муфты и маховики), которые обладают только инерционными характеристиками. Матрицы динамической жесткости строят на основе решения дифференциальных уравнений, полученных при рассмотрении изгибных, продольных и крутильных колебаний стержней с бесконечным числом степеней свободы. Заметим, что при частоте, равной нулю, матрицы динамической жесткости переходят в матрицы статической жесткости.

Для каждого участка системы записывают соотношения МДЖ, которые затем с помощью известных рекуррентных зависимостей позволяют получить полную динамическую модель вала. В алгоритме МДЖ учтены ответвления, которыми могут являться, например, противовесы и упругие изотропные опоры. Учитывая также, что коленчатый вал представляет собой пространственную конструкцию, в алгоритме используют матрицы, связывающие локальные и глобальную системы координат. Для расчета вынужденных колебаний применяют разложение сил, действующих на вал, в ряд Фурье и принцип суперпозиции.

Задача идентификации упругих параметров стержней динамической модели (площадей, осевых и полярных моментов инерции сечений, а также длин) решается на основе сопоставления коэффициентов влияния колена вала, полученных с помощью метода конечных элементов, и тех же коэффициентов, полученных для стержневой модели методами сопротивления материалов. Связь искомых параметров стержней с имеющимися коэффициентами влияния определяется прямоугольной матрицей. Для приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей используется метод наименьших квадратов, с помощью которого минимизируется вектор невязки данной системы.

На основании полученного решения формируется комплект параметров дискретной стержневой модели коленчатого вала. Следует отметить, что найденные в результате идентификации величины совершенно не согласуются с их аналогами, определенными по чертежам, особенно для щек. Это подтверждает тот факт, что колено вала находится в существенно трехмерном напряженно-деформированном состоянии и замена его стержневой моделью невозможна без проведения подобной идентификации. Предложенный метод реализован в виде программного модуля и включен в пакет прикладных программ по расчету связанных вынужденных колебаний коленчатого вала на ПЭВМ. Кроме того, в пакет включена программа определения собственных частот вала.

В качестве примера рассматривается 8-ми цилиндровый V-образный дизель 8ЧН16.5/18.5, устанавливаемый на промышленный трактор. Его вал имеет четыре колена с двумя шатунами на одной шейке. Квазистатические расчеты и

динамические для частоты вращения вала 193,63 рад/с (1850 об/мин) с учетом 20 гармоник возбуждения показали хорошее совпадение по запасам прочности. На рис. 5 приведены графики коэффициентов запаса прочности для всех восьми щек коленчатого вала.

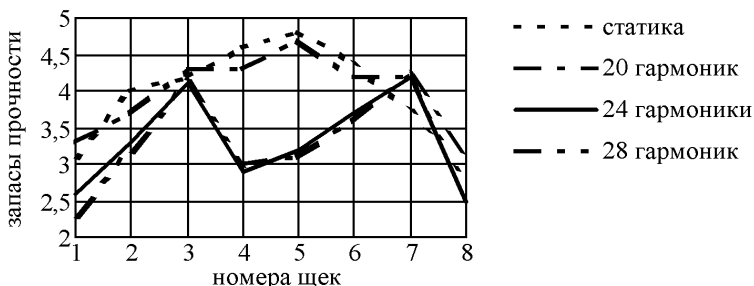


Рисунок 5 – Запасы усталостной прочности в щеках вала

Однако учет большего количества гармоник в возбуждении показал существенное уменьшение запасов прочности в середине вала, а именно в галтелях 4, 5 и 6-й щеки. На рисунке хорошо видно, как уменьшаются коэффициенты запаса прочности при учете 24 и 28 гармоник возбуждения. Этот результат объясняется интенсивными изгибными колебаниями с частотой 21-й гармоники возбуждения. Дело в том, что частота этой гармоники равна 2033 рад/с, а собственная частота колебаний вала – 2045 рад/с. Однако истинные значения амплитуд колебаний должны быть значительно ниже расчетных, так как при расчете не учитывалось демпфирование, которое для высоких частот колебаний оказывает существенное влияние, особенно в районе резонанса. Таким образом, квазистатический расчет дает вполне приемлемые результаты и его применение вместо динамического на протяжении многих лет достаточно обосновано. Применение указанного пакета программ позволило практически с единых позиций использовать квазистатический и динамический подходы к оценке прочности коленчатых валов на основе более адекватных и сопоставимых математических моделей, а, следовательно, существенно повысить как возможности, так и достоверность расчетных исследований.

Список литературы: 1. *Радциг А.А.* История теплотехники. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936. – 430 с. 2. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1975. – 704 с. 3. *Ларин А.А.* Развитие методов расчета крутильных колебаний в Харьковском политехническом институте с 1939 по 1970 годы // Вестник НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Харьков. – 2007. – Вып. 22. – С. 90-98. 4. Сборник докладов по динамической прочности деталей машин (труды совещания). – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – 256 с. 5. *Девильер Р.* Легкие двигатели внутреннего сгорания. Т. 1. – Л.: ГИЗ, 1929. – 472 с. 6. *Тимошенко С.П., Лессельс Дж.* Прикладная теория упругости. – Л.: ГИЗ, 1931. – 392 с. 7. *Трапезин И.И.* Расчет неразрезного многоколенчатого вала. – ОНТИ, НКТП, 1937. – 138 с. 8. Динамика и прочность коленчатых валов. Сб. статей под ред. *С.В.Серенсена*. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 422 с. 9. Динамика и прочность коленчатых валов. Сб. статей под ред. *С.В.Серенсена*. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. – 296 с. 10. Поперечные колебания и критические скорости. Сборник первый. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 270 с. 11. Поперечные колебания и критические скорости. Сборник второй. – М.: Изд-во АН

СССР, 1953. – 238 с. **12.** Гроза В.Ф., Шорох Е.А. К расчету многоопорных коленчатых валов в матричной форме // Изв. Вузов. Машиностроение. – 1964. – № 9. – С 91-98. **13.** Шорох Е.А. К статическому расчету коленчатого вала на упругих опорах // Динамика и прочность машин. – 1965. – Вып. 1. – С. 156-159. **14.** Шорох Е.А. Матричная форма статического расчета многоопорных коленчатых валов. Дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1966. – 154 с. **15.** Гроза В.Ф., Шорох Е.А. Статический расчет многоопорного коленчатого вала на упругих опорах // Изв. Вузов. Машиностроение. – 1968. – № 8. – С 46-51. **16.** Тарсис Ю.Л. Расчетный метод определения усилия в коленчатых валах с учетом упругой податливости и несоосности гидродинамических опор скольжения. Дис. ... канд. техн. наук. – Харьков, 1985. – 214 с. **17.** Захаров С.М., Тарсис Ю.Л., Шорох Е.А. Совместный расчет многоопорного коленчатого вала и подшипников скольжения // Вестник машиностроения. – 1985. – № 1. – С. 5-7. **18.** Тарсис Ю.Л., Андреев Ю.М., Ларин А.А. Эффективная организация расчета деформаций коленчатых валов при сложных программах нагружения // Динамика и прочность машин. – Харьков: ХПИ. – 1987. – Вып. 46. – С. 107-110. **19.** Тарсис Ю.Л. Компьютерное моделирование в динамике и прочности коленчатых валов и коренных подшипников ДВС // Вестник инженерной академии Украины. - Спец. вып. КВ № 2635. – Харьков. – 2000. – С. 403-406. **20.** Захаров С.М., Эрдман В.Ф. Моделирование и анализ работы подшипников коленчатого вала дизеля в системе автоматизированного проектирования // Двигателестроение. – 1979. – № 9. – С. 19-22. **21.** Терских В.П. Метод цепных дробей. – Л.: Судпромгиз, 1955. – 420 с. **22.** M. Biot Coupled Oscillations of Aircraft Engine-propeller Systems // Journ. of Aeron. Sciences. – № 9. – 1940. **23.** Исследование статической и динамической прочности коленчатого вала и блока дизеля промышленного трактора / Отчет о НИР (заключительный) // Харьковский политехнический институт № ГР 0187.0051370. Инв. № 0290.00320021.– Харьков, 1989. – Часть I. – 59 с.; Часть III. – 93 с. **24.** Дондошанский В.К. Расчеты колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах. – М.-Л.: Машиностроение, 1965. – 367 с. **25.** Тарсис Ю.Л. Расчет вынужденных связанных колебаний коленчатого вала ДВС // Динамика и прочность машин. – Харьков. – 1997. – Вып. 55. – С. 126-134.

Поступила в редколлегию 22.02.2008.

УДК 539

Л.В.АВТОНОМОВА, канд.тех.наук; **С.Ю.ПОГОРЕЛОВ**, канд.тех.наук;
И.Д.ПРЕВО; **В.Л.ХАВИН**, канд.тех.наук; НТУ «ХПИ», Харьков

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ФРЕЗЕРОВАНИЯ

Запропонована уточнена математична модель для розрахунку вібрацій інструмента при фрезеруванні. На відміну від традиційної моделі з двома мірами свободи модель має п'ять мір свободи, що забезпечує більш високу точність розрахунків.

A refined mathematical model for calculating tools selection in milling is suggested. Unlike traditional models with two degrees of freedom this model has five degrees of freedom that allows more precise calculations.

Вибрации, возникающие в процессе обработки металлов резанием, в частности путем фрезерования поверхностей, во многом определяют качество поверхностного слоя.

Вследствие этого большое значение имеет адекватное математическое описание модели самовозбуждающихся вибраций, возникающих в процессе

фрезерования при взаимном влиянии системы инструмента и системы детали и учетом дополнительных степеней свободы колебательной системы, что в отличие от известных моделей [1-3] обеспечивает более высокую точность расчетов характеристик вибрационного процесса.

В настоящей работе предлагается при моделировании вибрационного процесса для фрезы кроме степеней свободы в двух направлениях главных осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной оси инструмента, учитывать еще и степени свободы, связанные с инерцией поворота фрезы и возможностью ее кручения. Введение дополнительных степеней свободы позволяет учесть влияние этих видов перемещений на вибрационные процессы для фрез, имеющих существенные инерционные характеристики.

Система дифференциальных уравнений, которые описывают процесс развития вибраций инструмента-фрезы как системы с 5-ю степенями свободы имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} m_x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \eta_x \frac{\partial x}{\partial t} + C_x x = P_x(x, y, \psi_x, \psi_y, \theta, t); \\ m_y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \eta_y \frac{\partial y}{\partial t} + C_y y = P_y(x, y, \psi_x, \psi_y, \theta, t); \\ I_{IHX} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} + \eta_{\psi_x} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + C_{\psi_x} \psi_x = M_x(x, y, \psi_x, \psi_y, \theta, t); \\ I_{IHY} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} + \eta_{\psi_y} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} + C_{\psi_y} \psi_y = M_y(x, y, \psi_x, \psi_y, \theta, t); \\ I_\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \eta_\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + C_\theta \theta = M_\theta(x, y, \psi_x, \psi_y, \theta, t), \end{array} \right. \quad (1)$$

где m_x, m_y – приведенные массы для направлений X, Y ; $x, y, \psi_x, \psi_y, \theta$ – соответственно линейные перемещения, углы поворота относительно главных осей X, Y, Z ; I_x, I_y, I_θ – моменты инерции приведенных масс относительно главных осей X, Y, Z ; η_x, η_y – коэффициенты демпфирования; $P_x, P_y, M_x, M_y, M_\theta$ – соответственно внешние усилия и моменты относительно главных осей X, Y, Z ; t – время.

Нахождение правых частей уравнений системы состоит в определении элементарных силовых и моментных составляющих (составляющих для одного зуба) и их последующего суммирования.

Взаимодействие между системой инструмента и системой детали заменяется действием на систему инструмента сил резания. Рассматривая торцевое встречное фрезерование, выделяют три силы резания: осевую P_0 , радиальную – P_R , тангенциальную – P_τ . Для этих сил на основании экспериментальных результатов, приведенных [3], в зависимости от типа материала и условий обработки имеем следующие соотношения:

$$P_R/P_\tau = 0,3 \div 0,4; \quad P_0/P_\tau = 0,4 \div 0,45. \quad (2)$$

Для определения динамической тангенциальной силы резания использу-

ется следующая формула [1]

$$P_{K\tau} = k_{\tau} a_K(t) b_K(t), \quad (3)$$

где k_{τ} – удельная сила резания, $a_K(t)$ и $b_K(t)$ – динамическая толщина и ширина среза для K -го зуба.

На рис. 1 показаны проекции сил резания для направлений OX , OY .

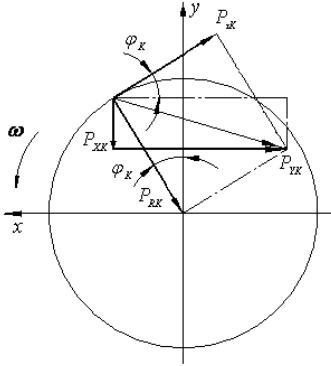


Рисунок 1 – Проекция сил резания

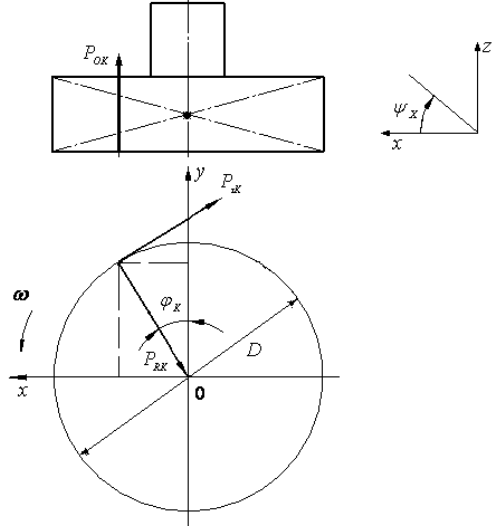


Рисунок 2 – Определение моментов M_{XK} , M_{YK}

Проецируя радиальную и тангенциальную составляющие на соответствующие оси (рис. 1), получим

$$P_{XK} = P_{RK} \sin(\phi_K + \theta) + P_{TK} \cos(\phi_K + \theta); \quad (4)$$

$$P_{YK} = P_{RK} \cos(\phi_K + \theta) - P_{TK} \sin(\phi_K - \theta), \quad (5)$$

где K – определяет номер данного зуба фрезы.

Выражения для моментов M_{XK} , M_{YK} и крутящего момента (рис. 2):

$$M_{XK} = \frac{D}{2} P_{OK} \sin(\phi_K + \theta); \quad (6)$$

$$M_{YK} = \frac{D}{2} P_{OK} \cos(\phi_K + \theta). \quad (7)$$

Для получения обобщенных сил и моментов необходимо провести суммирование по всем зубьям фрезы, которые находятся в данный момент времени в контакте.

$$\begin{aligned} P_X &= \sum_{K=1}^N P_{XK}; & P_Y &= \sum_{K=1}^N P_{YK}; & M_{XK} &= \sum_{K=1}^N M_{XK}; \\ M_{YK} &= \sum_{K=1}^N M_{YK}; & M_{\theta} &= \sum_{K=1}^N M_{\theta K}, \end{aligned} \quad (9)$$

где N – число зубьев фрезы, находящихся в контакте с обрабатываемым материалом.

Степени свободы $x, y, \Psi_x, \Psi_y, \theta$ изменяют начальную толщину и ширину среза, а, следовательно, и усилие резания. Изменение толщины $a(t)$ и ширины $b(t)$ среза обуславливается также влиянием следа обработки от прохода предыдущего зуба. Следует также отметить, что при их определении необходимо учитывать инерционность самого процесса резания. Инерционность выражается в том, что изменение силы резания отстает во времени на некоторую величину τ_0 от изменения толщины слоя, который срезается [1].

Значение мгновенной толщины среза вычисляется следующим образом (рис. 3)

$$a_{\varphi K}^D = a_{\varphi K} + y(t - \tau_0) \cos(\varphi_K + \theta) + x(t - \tau_0) \sin(\varphi_K + \theta) - y(t - T - \tau_0) \cos(\varphi_K + \theta) - x(t - T - \tau_0) \sin(\varphi_K + \theta), \quad (10)$$

где

$$a_{\varphi K} = s_z \sin(\varphi_K + \theta). \quad (11)$$

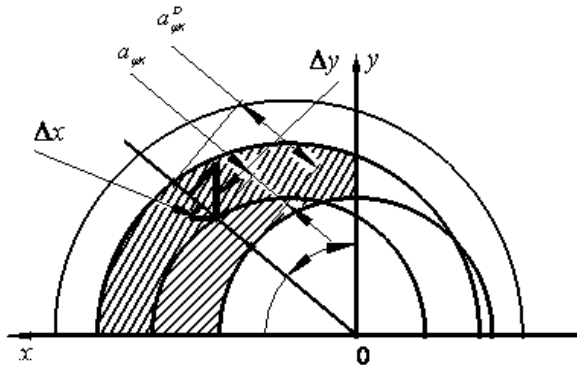


Рисунок 3 – Определение мгновенной толщины среза

Мгновенная глубина среза определяется по формуле

$$b_K(t) = b_0 + [\psi_x(t - \tau_0) \sin(\varphi_K + \theta) + \psi_y(t - \tau_0) \cos(\varphi_K + \theta) - \psi_x(t - T - \tau_0) \sin(\varphi_K + \theta) - \psi_y(t - T - \tau_0) \cos(\varphi_K + \theta)] * \frac{D}{2}. \quad (12)$$

Подставляя выражения (10) и (12) в формулу (3) получим значение для тангенциальной силы резания для одного зуба $P_{K\tau}$. Используя (2) вычислим осевую и радиальную составляющую для данного зуба. Рассматривая все зубья фрезы, которые находятся в данный момент времени в контакте с обрабатываемым материалом, определяем правые части для системы уравнений (1) по формулам (9).

Начальные условия для системы (1) принимаются в виде (13). Следует отметить, что влияние фазовой характеристики начинается через τ_0 , а влияние работы по следу – через $\tau_0 + T$.

$$\begin{cases} x(t-\tau) = 0 & \text{при } t-\tau \leq 0; \\ y(t-\tau) = 0 & \text{при } t-\tau \leq 0; \\ x(t-T-\tau) = 0 & \text{при } t-T-\tau \leq 0; \\ y(t-T-\tau) = 0 & \text{при } t-T-\tau \leq 0; \\ \psi_x(t-\tau) = 0 & \text{при } t-\tau \leq 0; \\ \psi_y(t-\tau) = 0 & \text{при } t-\tau \leq 0; \\ \psi_x(t-T-\tau) = 0 & \text{при } t-T-\tau \leq 0; \\ \psi_y(t-T-\tau) = 0 & \text{при } t-T-\tau \leq 0; \\ \theta(0) = 0; \\ \dot{\theta}(0) = 0. \end{cases}$$

Интегрирование системы (1) осуществлялось при помощи псевдоаналогового моделирования – подсистемы Simulink библиотеки Matlab. Для расчетов была разработана соответствующая структурная схема. В ее состав входят две подсистемы для интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка Ploshost X и Ploshost Y, две системы для замедления сигналов Zamedlen X и Zamedlen Y, мультипликатор на 6 сигналов, два блока функций Matlab, обеспечивающих получение динамических усилий в двух направлениях, а также блоки задания начальных условий и представления результатов.

В качестве тестового примера рассматривается расчет вибраций для процесса обработки сплава АК32ПКМ торцевым фрезерованием [3]. Инструмент – торцевая фреза диаметром $D = 125$ мм, ширина фрезерования $B = 110$ мм, скорость фрезерования $v = 110$ м/мин, удельная сила резания $k = 3580$ Н/м³, фазовая характеристика $\tau = 0,001$ с, количество зубьев $z = 6$, подача на зуб $S_z = 0,1$ мм/зуб.

Характеристики тестовой динамической модели с двумя степенями свободы приведены в таблице.

Исходные данные

| Направление | Частота $f_b, \text{с}^{-1}$ | Жесткость $c, \text{Н/м} \cdot 10^6$ | Масса $m, \text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ | Демпфирование $\eta, \text{Н} \cdot \text{с}/\text{м} \cdot 10^3$ |
|-------------|---------------------------------|---|--|--|
| X | 213 | 3,7 | 20,6 | 2,3 |
| Y | 200 | 3,2 | 20,3 | 1,9 |

Были проведены расчеты по определению средней амплитуды вибрационных процессов. В качестве метода интегрирования был выбран метод од 113 (Matlab) с переменным шагом интегрирования, абсолютная погрешность интегрирования $E_0 = 5 \cdot 10^{-6}$. Результаты расчетов в виде зависимости средней амплитуды колебаний от осевой глубины резания представлены на рис. 4 и рис. 5, где верхняя кривая получена в работе [3], нижняя – результаты вычислений, проведенных в данной работе. Отличие результатов не превышает 10 %.

Более низкие значения амплитуд вибраций, полученных в настоящей работе можно объяснить тем, что в [3] учитывалась третья степень свободы перемещения системы в направлении оси инструмента Z.

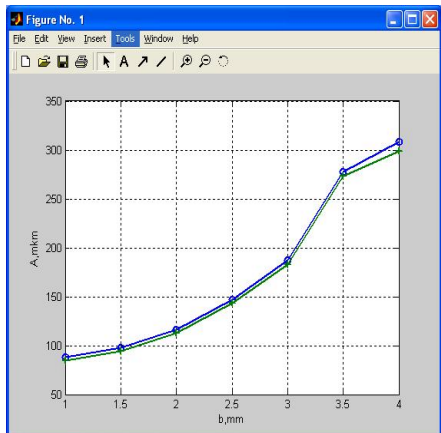


Рисунок 4 – Зависимость амплитуды вибраций от ширины среза в направлении OX

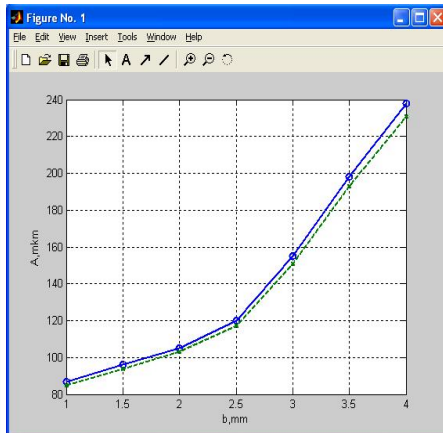


Рисунок 5 – Зависимость амплитуды вибраций от ширины среза в направлении OY

Выводы:

- 1 Предложена динамическая модель инструмента(фрезы) для расчета вибраций при фрезеровании, имеющая 5 степеней свободы.
- 2 На основе псевдоаналогового моделирования при помощи подсистемы Simulink библиотеки создано программное обеспечение, позволяющее путем численного интегрирования получить характеристики вибраций инструмента в реальном времени.
- 3 Для системы с двумя степенями свободы проведено сравнение с результатами работы [3], показавшее совпадение результатов с точностью 10 %, что связано с учетом в [3] массово-жесткостных характеристик инструмента в направлении его оси.

Список литературы: 1. Жарков Г.И. Вибрації при обробці лезвийним інструментом. – Ленінград: Машиностроение, 1986. – 178 с. 2. Yusuf Altintas Manufacturing automation: metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design // Cambridge University press, Australia. – 2000. – 282 p. 3. Подураев В.М., Малигін В.И., Кремльова Л.В. Динамічна модель елементів технологічної системи з урахуванням кінематичної нестабільності процесу різання // Вісник машинобудування. – 1996. – № 6. – С. 18-23.

Поступила в редколлегию 07.11.2008

О.В.БИРЮКОВ, канд.техн.наук; **С.Ю.САЕНКО**, канд.техн.наук;
В.В.КОЛОСЕНКО, канд.техн.наук; Институт физики твердого тела,
материаловедения и технологий ННЦ «ХФТИ», Харьков;
Е.И.КОРНИЛОВ, канд.техн.наук; **О.Ф.КОВПИК**, канд.техн.наук;
Институт плазменной технологии и новых методов ускорения ННЦ
«ХФТИ», Харьков; **О.К.МОРАЧКОВСКИЙ**, докт.техн.наук;
Д.В.ЛАВИНСКИЙ, канд.техн.наук; Национальный технический
университет «ХПИ», Харьков

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ТРУБЧАТОЙ СТЕНКИ ИЗ УГЛЕРОД-УГЛЕРОДНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ ВАКУУМНОЙ КАМЕРЫ

Представлено метод і результати розрахунку на міцність і жорсткість трубчастої стінки з вуглець-вуглецевого композитного матеріалу (ВВКМ), застосовуваного в ННЦ «ХФТИ» для вакуумних об'єктів. Стінка з жорстко закріпленими холодними краями розділяє вакуумний обсяг камери й атмосферу, і пручи-знаходячи вигнуту форму деформується в умовах високих температур (250⁰С) під внутрішнім тиском. Аналіз міцності заснований на методі скінчених елементів (МСЕ) і чисельному розв'язку на персональному комп'ютері (ПК) системи розв'язних рівнянь МСЕ. Наведено розрахункові дані для вигнутої форми стінки й максимальні значення інтенсивності напруг. Дано оцінки міцності й твердості трубчастої стінки.

The method and results of calculation on durability and rigidity of a tubular wall from carbon-carbon of a composite material (CCCM) used in NSC «KhFTI» for vacuum objects are presented. The wall with rigidly fixed cold edges divides vacuum volume of the chamber and an atmosphere, and getting bending form is deformed in conditions of heats (250⁰C) under internal pressure. The analysis of durability is based on a method of finite elements (FEM) and the numerical decision on a personal computer of system of resolving equations FEM. Settlement data for bending form of a wall and the maximal values of intensity of stress. Estimations of durability and rigidity of a tubular wall are given.

Введение

Исследуемое Устройство представляет собой цилиндрическую кольцевую вакуумную камеру с внутренней тонкостенной трубкой из углерод-углеродного композитного материала (УУКМ) вакуумной плотности.

Трубка, которую можно считать тонкой цилиндрической оболочкой. Для технологических целей стенка нагревается потоком горячего воздуха до температуры 250 °С. Торцы трубки закреплены в холодном корпусе вакуумной камеры с помощью кольцевых торцовых фланцев, которые сжимают кольцевые вакуумные уплотнители из резины и создают необходимое давление уплотнения, и, таким образом, надежно удерживают стенку в корпусе камеры.

Цилиндрическая оболочка-стенка имеет постоянную толщину и находится под действием осесимметричной нагрузки и нагрева. Стенка жестко закреплена по торцам в холодном корпусе камеры.

Материал стенки – УУКМ вакуумной плотности имеет высокую механическую плотность и химическую стойкость при высоких температурах.

Разработаны конструкции Устройства и стенки, проведены расчеты на прочность в заданных технологических условиях.

1 Конструкция Устройства вакуумной камеры с трубчатой стенкой

На рис. 1 показано Устройство – цилиндрическая вакуумная камера – 1 с тонкой трубчатой стенкой – 2 из УУКМ вакуумной плотности. Эта стенка разделяет вакуумный объем – кольцевую цилиндрическую камеру – 1 и атмосферу. Стенка – 2 с помощью кольцевых торцовых фланцев – 3 прижата к торцовым фланцам корпуса с двух сторон. Уплотнение на вакуум осуществляется с помощью кольцевых уплотнителей из резины – 4. Для получения необходимой вакуумной плотности резина прижата осевыми выступами торцовых фланцев – 3 к стенкам корпуса вакуумной камеры – 1. За счет уменьшения осевого сжатия увеличивается нормальное радиальное давление p_r на стенку – 2.

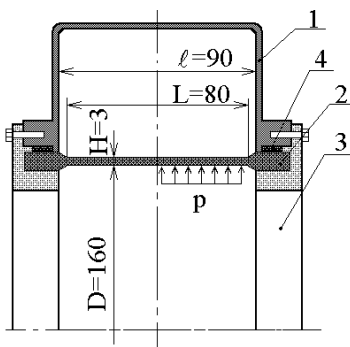


Рисунок 1 – Цилиндрическая вакуумная камера с трубчатой стенкой из УУКМ
1 – трубчатая стенка из УУКМ; 2 – корпус вакуумной камеры (металл);
3 – торцовый опорный уплотнитель (металл); 4 – уплотнитель на вакуум (резина)

На внутренней поверхности стенки – 2 действует нормальное радиальное давление горячего воздуха $p_a = 10^5$ Па. При этом стенка – 2 нагрета до необходимой технологической температуры $t_c = 250$ °С. На наружной поверхности стенки – 2 давление отсутствует $p_0 = 0$. В рабочем состоянии в стенке возникают механические и температурные напряжения.

На рис. 2 показана расчетная схема тонкой трубчатой стенки – 2 вакуумной камеры – 1. Стенка – 2 имеет толщину $H = 3$ мм, диаметр $D = 2a = 160$ мм, длину $l = 90$ мм. Она жестко зашкреплена в торцовых фланцах холодного корпуса камеры – 1.

2 Расчетная модель трубчатой стенки

Для расчетов на прочность и жесткость использована математическая постановка задачи для упругого деформирования тонкостенного цилиндра при действии на него равномерного внутреннего радиального давления. Геометрия стенки и особенности нагружения позволяют рассматривать задачу в осесимметричной постановке. Напряженно-деформированное состояние (НДС) мат-

рицы, при отсутствии объемных сил, определяется системой дифференциальных уравнений равновесия [2]:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad \sigma_{ij} n_j = p_{in}; \quad \forall x \in L_p, \quad (1)$$

где L_p – поверхность, на которую действует давление.

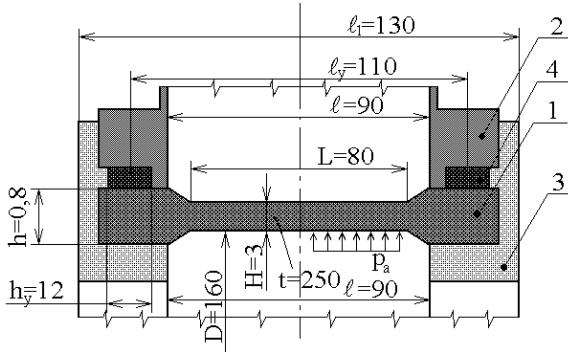


Рисунок 2 – Схема трубчатой стенки вакуумной камеры
1 – стенка из УУКМ; 2 – опорный фланец вакуумной камеры (металл); 3 – торцовый опорный кольцевой фланец (металл); 4 – уплотнитель на вакуум (резина)

Обобщенные уравнения состояния, которые устанавливают связь между напряжениями и деформациями в точках деформирующих тел, представлены тензорно-линейными соотношениями вида:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T, \quad (3)$$

где A_{ijkl} , α_{ij} – компоненты тензоров, отвечающие принятому закону свойств деформирования и температурного расширения-сжатия материала УУКМ.

В пределах линейной упругости материала, соотношение (3) отвечает обобщенному закону Гука. Для упругопластического деформирования при простом нагружении и при рассмотрении малых пластических деформаций, в соотношении (3)

$$A_{ijkl} = \frac{1}{E_*} \left[(1 + \nu_*) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu_* \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (4)$$

где E_* , ν_* – переменные параметры упругости, которые определяются связью между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций, соответственно диаграмме деформирования материала.

В этом случае (3), (4) отвечают деформационной теории малых упругопластических деформаций Ильюшина в форме переменных параметров упругости.

Далее, в расчетах использован вариационный принцип Лагранжа и конечно-элементная (КЭ) схема стенки (рис. 3). Базовым КЭ принят четырех узловой изопараметрический элемент с билинейной аппроксимацией перемещений.

Методика решения задач о деформировании стенки принята отвечающей

единой итерационной схеме. С этой целью в расчетах принято пошаговое при-
ложение давления, с итерационной схемой поиска неизвестных узловых пере-
мещений, аналогичной методике переменных параметров упругости для реше-
ния задач упруго-пластического деформирования. На каждом шаге линейризо-
ванная система уравнений МКЭ имела вид:

$$[K_{N-1}]\{U_N\} = \{F\} - \{F_{N-1}^{mem}\}, \quad (5)$$

где N – номер итерации, $[K]$ – глобальная матрица жесткости КЭ модели, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений КЭ модели, $\{F\}$ – вектор внешних сил, приведенных к узлам КЭ сетки, $\{F^{mem}\}$ – вектор температурных нагрузок, при-
веденных к узлам КЭ сетки.

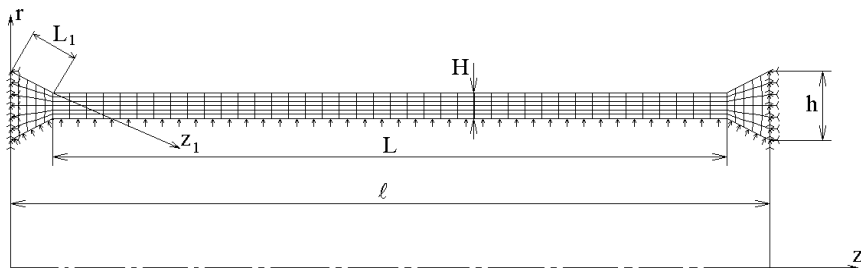


Рисунок 3 – КЭ схема стенки

Предложенный метод реализован в программном модуле для программ-
ного комплекса SPACE-T [5].

3 Результаты расчетов на прочность матрицы

Расчеты на прочность стенок вкладыша и матрицы выполнены при сле-
дующих данных о свойствах материала УУКМ [1]. Предел прочности на рас-
тяжение 110 МПа; предел прочности на сжатие 100 МПа; модуль упругости $1,8 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент Пуассона 0,19; коэффициент температурного рас-
ширения $-3,5 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$.

Данные расчетов напряженно-деформированного состояния матрицы
приведены на рис. 4-5.

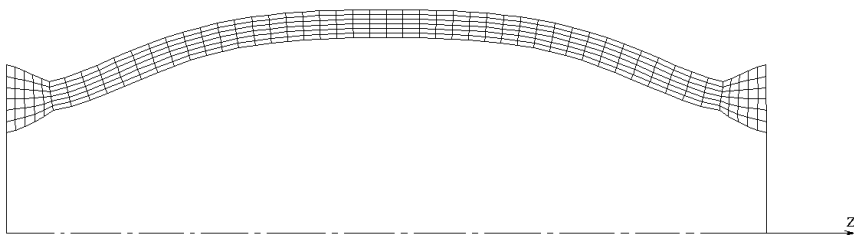


Рисунок 4 – Деформированная форма стенки

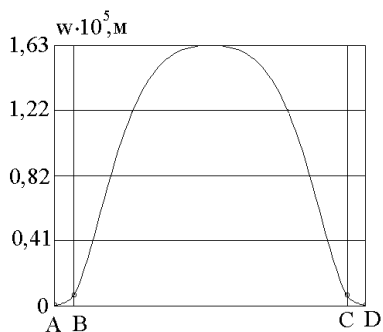


Рисунок 5 – Распределение прогибов в точках наружной поверхности стенки

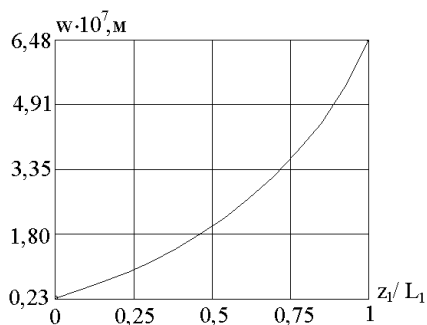


Рисунок 6 – Распределение прогиба в точках наружной поверхности стенки на участке переменной толщины

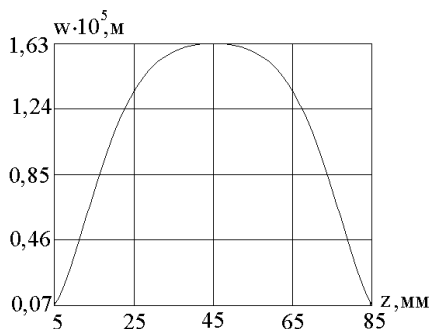


Рисунок 7 – Распределение прогиба в точках наружной поверхности стенки на участке постоянной толщины

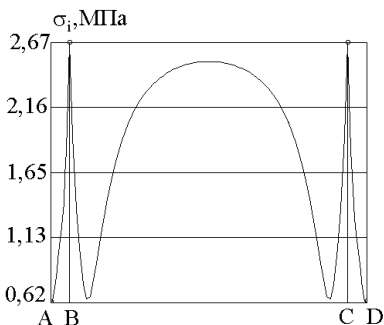


Рисунок 8 – Распределение интенсивности напряжений в точках наружной поверхности холодной стенки

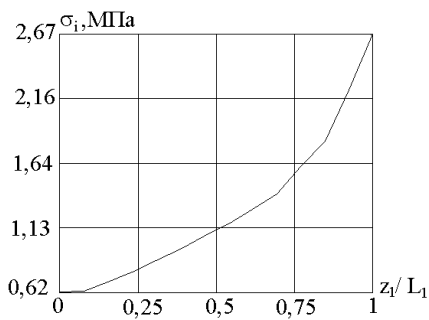


Рисунок 9 – Распределение интенсивности напряжений в точках наружной поверхности холодной стенки на участке переменной толщины

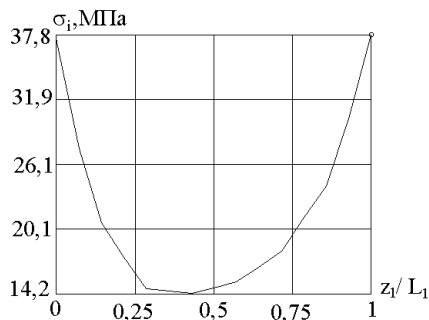


Рисунок 10 – Деформированная форма стенки

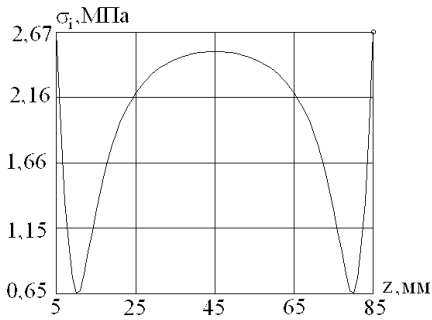


Рисунок 11 – Деформированная форма стенки

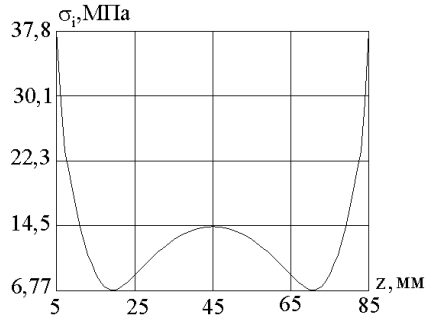


Рисунок 12 – Деформированная форма стенки

Выводы

В статье дано расчетное обоснование использования углерод-углеродного композитного материала (УУКМ) в матрицах прессформ для прессования изделий с помощью порошков тугоплавких соединений при удельных давлениях до 100 МПа и температурах до 1800°C. Приведена математическая постановка задачи об упругом деформировании под внутренним давлением двухслойного толстостенного корпуса прессформы с внутренним цилиндром-вкладышем из графита и наружным несущим цилиндром-матрицей из УУКМ с заданными относительными размерами матрицы: толстостенностью d_1/d_2 и отношением длины нагруженного участка к общей ее длине ℓ/L .

В основу решения положен метод конечных элементов (МКЭ) и метод решения контактной задачи по итерационной схеме метода переменных параметров упругости, хорошо зарекомендовавшим себя при решении задач упругого деформирования многослойных цилиндров. Стенка матрицы прессформы моделировалась телом вращения из изотропного материала, находящегося под внутренним давлением. Анализ прочности основан на МКЭ и численном решении на персональном компьютере (ПК) разрешающих уравнений МКЭ. Приведены расчетные данные о деформировании стенки матрицы и значения максимальных интенсивностей напряжений в зависимости от внутреннего давления, толстостенности и относительной длины нагруженного участка.

По приведенным в статье расчетным данным можно обоснованно выполнять проектирование прессформ из УУКМ заданных размеров для прессования изделий с помощью порошков тугоплавких соединений при давлении прессования до 100 МПа и температуре до 1800°C.

Согласно расчету для прессформы с внутренним диаметром вкладыша $d = 120$ мм, длиной спрессованного порошка $\ell = 120$ мм и относительными размерами вкладыша $d/d_1 = 0,6$; матрицей $d_1/d_2 = 0,6$ и $\ell/L = 0,5$ допустимое давление прессования с запасом прочности $n_B = 2,5$ и $(\sigma_+)_{B} = 110$ МПа; $p = 90,5$ МПа при осевой силе на пуансон $P = 102$ т.

Список литературы: 1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев, Наукова думка, 1988. – 735 с. 2. Николаев А.Н. Расчет и конструирование матриц для прессования металлических порошков // Труды горьковского политехнического института, металловедения и порошковой металлургии. – Т. XIX. В.1. – Горький, 1963. – С. 11-15. 3. Д.С.Миранский Принцип конструирования аппаратов сверхвысокого давления. Принцип редуцирования радиального напряжения // Прикладная механика и механическая физика. – № 2. – Москва, 1960. – 168 с. 4. Ю.Г.Буцуев, М.И.Персин, В.А.Соколов Углерод-углеродные композиционные материалы. Справочник. – М.: Металлургия, 1994. – 128 с. 5. Бондарь С.В., Зубатый С.С., Киркач Б.Н., Лавинский В.И. Программный комплекс SPACE-T для решения термоупругопластических контактных задач // Динамика и прочность машин. – 2000. – № 57. – С. 24-34. 6. Свойства конструкционных материалов на основе углерода / Справочник под ред. В.П. Седова. – М.: Металлургия, 1975. – 336 с.

Поступила в редколлегию 03.11.2008

УДК 621.039.55: 539.3

О.В.БИРЮКОВ, канд.техн.наук; **С.Ю.САЕНКО**, канд.техн.наук;
В.В.КОЛОСЕНКО, канд.техн.наук; Институт физики твердого тела,
металловедения и технологий ННЦ «ХФТИ», Харьков;
Е.И.КОРНИЛОВ, канд.техн.наук; **О.Ф.КОВПИК**, канд.техн.наук;
Институт плазменной технологии и новых методов ускорения ННЦ
«ХФТИ», Харьков; **О.К.МОРАЧКОВСКИЙ**, докт.техн.наук;
Ю.В.РОМАШОВ, канд.техн.наук; НГУ «ХПИ», Харьков

ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПЛОСКОЙ СТЕНКИ ИЗ УГЛЕРОД-УГЛЕРОДНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА ДЛЯ ВЫВОДА ПОТОКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ИЗ ВАКУУМНОЙ КАМЕРЫ

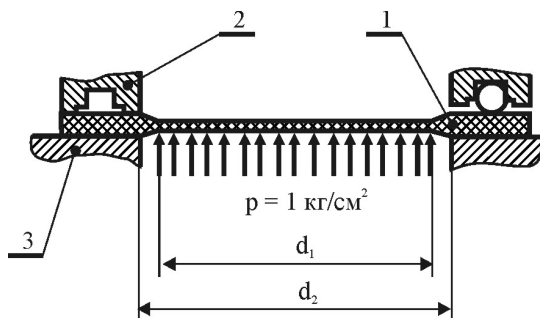
Представлено метод і результати розрахунку на міцність і твердість трубчастої стінки з вуглець-вуглецевого композитного матеріалу (ВВКМ), застосовуваного в ННЦ «ХФТИ» для вакуумних об'єктів. Стінка з жорстко закріпленими холодними краями розділяє вакуумний об'єм камери й атмосферу, і пручи-знаходячи вигнуту форму деформується в умовах високих температур (250 °С) під внутрішнім тиском. Аналіз міцності заснований на методі скінченних елементів (МСЕ) і чисельному рішенні на персональному комп'ютері (ПК) системи розв'язних рівнянь МСЕ. Наведено розрахункові дані для вигнутої форми стінки й максимальні значення інтенсивності напруг. Дано оцінки міцності й твердості трубчастої стінки.

The method and results of calculation on durability and rigidity of a tubular wall from carbon-carbon of a composite material (CCSM) used in NSC «KhFTI» for vacuum objects are presented. The wall with rigidly fixed cold edges divides vacuum volume of the chamber and an atmosphere, and getting bending form is deformed in conditions of heats (250⁰C) under internal pressure. The analysis of durability is based on a method of finite elements (FEM) and the numerical decision on a personal computer of system of resolving equations FEM. Settlement data for bending form of a wall and the maximal values of intensity of stress. Estimations of durability and rigidity of a tubular wall are given.

Формулировка проблемы. Окно вывода потока заряженных частиц из вакуумного объема в рабочую среду ускорителя предназначено для герметиза-

ции вакуумного объема, его физического отделения от рабочей среды, и пропускания заряженных частиц из вакуумного объема в рабочую среду. Проблемы при проектировании окна вывода потока заряженных частиц порождаются противоречивостью требования отделения вакуумного объема ускорителя от рабочей среды и требования пропускания заряженных частиц из вакуумного объема в рабочую среду.

Известные конструкции окон для вывода заряженных частиц имеют разграничивающие стенки, которые отделяют вакуумный объем от рабочей среды и через которые пропускаются заряженные частицы, в виде фольги или тонких пластин, выполненных из легких металлов – титана или алюминия и охлаждаемых струей воздуха или другого газа [1]. Такие стенки для обеспечения прозрачности потокам заряженных частиц выполняют толщиной порядка $15\div 100$ мкм; требования прочности ограничивают размеры таких стенок шириной $40\div 80$ мм и длиной более 1000 мм. Описанные конструкции обладают множеством недостатков. Прохождение потока зараженных частиц вызывает аномальное окисление и охрупчивание материала стенки, вызывает сильный нагрев стенки, которые приводит к сильному изменению ее формы и появлению температурных напряжений. Кроме этого, при выпуске пучка заряженных частиц через узкую полосу фольги требуется его развертка в двух направлениях – вдоль длинной и вдоль короткой сторон полосы.



1 – разграничивающая стенка; 2 – фланцы корпуса вакуумной камеры;
3 – прижимное кольцо

Рисунок 1 – Окно вывода ускорителя

Использование для изготовления разграничивающей стенки углерод-углеродного композитного материала (УУКМ) [2, 3] вместо металлов позволяет существенно улучшить конструктивные и эксплуатационные характеристики окна вывода потока заряженных частиц из вакуумного объема ускорителя. Материал УУКМ достаточно прозрачен для потока заряженных частиц и имеет при этом высокие прочностные характеристики и низкий коэффициент теплового расширения. Свойства материала УУКМ позволяют выполнять разграничивающие стенки в виде круглых пластин достаточно большого радиуса, что требует развертку потока заряженных частиц только по радиусу и существенно упрощает конструкцию ускорителя. Конструкция (рис. 1) окна вывода потока

заряженных частиц из вакуумного объема ускорителя с разграничивающей стенкой из материала УУКМ обеспечивает герметичность вакуумного объема ускорителя от внешней среды – атмосферы, а также вывод заряженных частиц из вакуумного объема ускорителя во внешнюю среду. Разграничивающая стенка 1, выполненная из УУКМ, закреплена на фланцах корпуса вакуумной камеры 2 при помощи прижимного кольца 3.

Уплотнение на вакуум обеспечивается резиновым уплотнительным кольцом: слева на рис. 1 показан уплотнитель в рабочем состоянии, а справа – перед сборкой. Поток заряженных частиц проходит через тонкую рабочую плоскость разграничивающей стенки, имеющую диаметр d_1 и толщину h_1 . Для закрепления стенки в корпусе вакуумной камеры и обеспечения рабочей поверхности резинового уплотнителя часть стенки имеет толщину $h_2 > h_1$.

1 Математическая постановка задачи. Расчет разграничивающей стенки на прочность и жесткость требует анализа при эксплуатационных нагрузках ее напряженно-деформированного состояния. Поскольку толщина разграничивающей стенки намного меньше ее радиуса, рассматриваем разграничивающую стенку в рамках классической теории изгиба [4] тонких круглых пластин; положение точек пластины относим к цилиндрическим координатам r, θ, z (рис. 2). Из-за существенно более низкой твердости резинового уплотнительного кольца не рассматриваем вопросы, связанные с контактным взаимодействием стенки с уплотнителем и сосредотачиваем внимание на прочности и жесткости стенки при осесимметричном изгибе давлением рабочей среды и, в общем случае, неравномерном по толщине, нагреве:

$$T(z) = (T_{B.O.} - T_{P.C.}) \frac{z}{h} + \frac{T_{B.O.} + T_{P.C.}}{2}, \quad (1.1)$$

где $T_{B.O.}, T_{P.C.}$ – температуры вакуумного объема и рабочей среды.

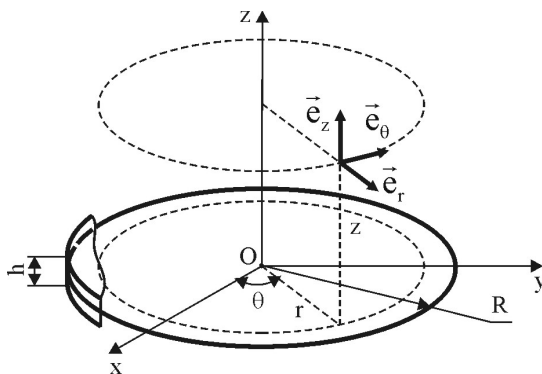


Рисунок 2 – Срединная плоскость пластины

Искомыми неизвестными оставляем внутренние силы $Q_{rr}, Q_{\theta\theta}, Q_{rz}$, моменты $M_{rr}, M_{\theta\theta}$, перемещения u, w и угол поворота κ_r :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} Q_{rr} - \frac{\nu}{Eh} Q_{\theta\theta} - \frac{du}{dr} &= -O_T; -\frac{\nu}{Eh} Q_{rr} + \frac{1}{Eh} Q_{\theta\theta} - \frac{u}{r} = -O_T; \\ \frac{12}{Eh^3} M_{rr} - \frac{12\nu}{Eh^3} M_{\theta\theta} - \frac{d\kappa_r}{dr} &= -D_T; -\frac{12\nu}{Eh^3} M_{rr} + \frac{12}{Eh^3} M_{\theta\theta} - \frac{\kappa_r}{r} = -D_T; \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\kappa_r + \frac{dw}{dr} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{rr}}{dr} + \frac{Q_{rr}}{r} - \frac{Q_{\theta\theta}}{r} = 0; \frac{dM_{rr}}{dr} + \frac{M_{rr}}{r} - \frac{M_{\theta\theta}}{r} + Q_{rz} = 0; \frac{dQ_{rz}}{dr} + \frac{Q_{rz}}{r} + p = 0. \\ w|_{r=d_1/2} = 0; \kappa_r|_{r=d_1/2} = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $E, \nu E, \nu$ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины; $h = h(r)$ – толщина пластины; O_T, D_T – приведенные температурные деформации:

$$O_T = -\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha(T - T_0) dz; \quad D_T = -\frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha(T - T_0) z dz;$$

α – коэффициент теплового расширения; T_0 – температура, от которой отсчитывается тепловое расширение.

2 Метод решения задачи. Попытки рассматривать с единообразных позиций решения краевых задач, описывающих напряженно-деформируемое состояние разнообразных элементов конструкций, естественно приводят к его обобщениям метода Бунова-Галеркина [5]. Рассмотрим общие подходы к решению задач расчета на прочность и жесткость разграничивающей стенки. Для этого представим задачу (1.2), (1.3) в операторной форме:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma; \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}_B \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Gamma, \quad (2.1)$$

где \mathbf{x} – вектор, составленный из пространственных координат точек области Γ ; \mathbf{L} и \mathbf{f} – матричный оператор и вектор, отвечающий дифференциальным уравнениям задачи, \mathbf{u} – вектор, составленный из неизвестных задачи; \mathbf{B} и \mathbf{u}_B – матричный оператор и вектор, отвечающие граничным условиям задачи.

Представим искомое решение в виде аппроксимации: $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_n$ по некоторой системе n пробных функций, в соответствие с методом Бубнова-Галеркина, тождественно удовлетворяя граничным условиям. Продолжая идею работы [6], представим такие аппроксимации в операторной форме:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\partial\Gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_B) + \Phi_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_n, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{u}_{\partial\Gamma}$ – вектор, продлевающий граничные значения внутрь области и выбираемый произвольным образом, чтобы выполнялось условие $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{\partial\Gamma} = \mathbf{u}_B$; Φ_n – матрица, составленная из произвольных пробных функций, выбираемых, чтобы $\mathbf{B} \cdot (\Phi_n \cdot \mathbf{a}_n) \equiv \mathbf{0}$; \mathbf{a}_n – вектор искомых коэффициентов аппроксимации.

Известные трудности [5] построения вектора $\mathbf{u}_{\partial\Gamma}$ и пробных функций Φ_n для областей сложной формы можно преодолеть при помощи разработанных акад. Рвачевым В.Л. методов аналитического описания геометрических объек-

тов на основе созданных им R-функций [7]. Подставив, аппроксимации (2.2) в дифференциальное уравнение (2.1), получаем невязку выполнения этого уравнения, и, следуя методу Бубнова-Галеркина, потребуем ортогональность в исследуемой области невязки к пробным функциям. Когда оператор \mathbf{L} – линейный, что выполняется в задаче расчета разграничивающей стенки, для определения коэффициентов аппроксимаций получаем систему линейных алгебраических уравнений [8]:

$$\mathbf{L}_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{f}_n. \quad (2.3)$$

$$\text{где } \mathbf{L}_n = \int_{\Gamma} (\Phi_n^T \cdot \mathbf{L} \cdot \Phi_n) d\Gamma, \quad \mathbf{f}_n = \int_{\Gamma} \Phi_n^T \cdot (\mathbf{f} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}_{\partial\Gamma}) d\Gamma.$$

Практическим преимуществом метода Бубнова-Галеркина является возможность записи алгоритмов вычислений в терминах матричных операций, легко реализуемых на ЭВМ.

3 Расчеты на прочность разграничивающей стенки. Расчеты на прочность разграничивающей стенки изготовленной из УУКМ, выполним при следующих исходных данных:

$$\left. \begin{aligned} d_1 = 70 \text{ мм}; \quad h_1 = 2 \text{ мм}; \quad E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,12; \quad \alpha = 4 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}; \\ p = 98100 \text{ Па}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

В качестве координатных последовательностей используем полиномы Чебышева [9].

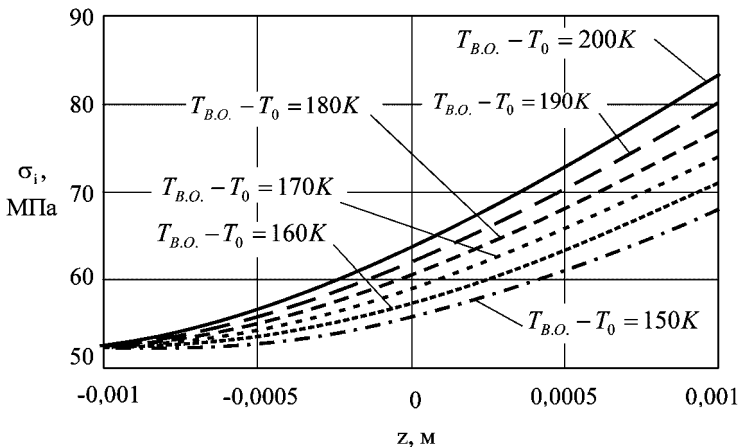


Рисунок 3 – Интенсивность напряжений в опасном сечении $r = R$ при $T_{P.C.} - T_0 = 200 \text{ К}$

Существенное различие в пределах прочности на растяжение $\sigma_{B+} = 44$ МПа и сжатие $\sigma_{B-} = 148$ МПа, характерное для материала УУКМ, требует для оценки статической прочности анализировать характер напряженного состояния в опасном сечении. Так при равномерном распределении температуры по толщине (когда температура $T_{B.O.} = T_{P.C.}$) интенсивность напряжений в опасном

сечении $r = R$ при нагреве до температуры $T - T_0 > 100$ К оказывается выше предела прочности на растяжение, оставаясь ниже предела прочности на сжатие вплоть до эксплуатационной температуры $T - T_0 \approx 200$ К. Только установленное в опасном сечении всестороннее сжатие позволило сделать положительное заключение о статической прочности.

Расчеты при фиксированной температуре $T_{B.O.} - T_0 \approx 200$ К показали, что неравномерный по толщине разграничивающей стенки нагрев, характеризуемый условием $0 < T_{B.O.} - T_{P.C.} < 50$ К, существенно не влияет на оценки статической прочности, но делает пластину более неравнопрочной, поскольку приводит к снижению минимального значения интенсивности напряжений. Расчеты, отвечающие температуре $T_{P.C.} - T_0 \approx 200$ К при неравномерном нагреве $T_{B.O.} \leq T_{P.C.}$, показали, что охлаждение вакуумного объема снижает приблизительно на 5 % максимальное значение интенсивности напряжений по сравнению с равномерно нагретой по толщине разграничивающей стенкой. Некоторые результаты таких расчетов представлены на рис. 3.

Выводы и рекомендации. Промышленное использование интенсивных пучков заряженных частиц для обработки материалов требует разработки соответствующего технологического оборудования. Технические характеристики такого оборудования в настоящее время ограничиваются в основном конструкцией окна вывода заряженных частиц из вакуумного объема ускорителя к обрабатываемому материалу. Сложность конструирования таких окон связана с отсутствием методик расчетного обоснования их конструктивных параметров и прогнозирования их эксплуатационных показателей, в первую очередь прочности. Представленные результаты позволяют сделать выводы:

- 1 Для оценки статической прочности разграничивающей стенки для окна вывода ускорителя электронов предложена математическая модель, учитывающая изгиб стенки давлением рабочей среды ее в общем случае неравномерный по толщине нагрев.
- 2 На основе метода Бубнова-Галеркина разработаны общие подходы к приближенному анализу напряженно-деформированного состояния разграничивающей стенки. Преимуществом разработанных подходов перед распространенными подходами, основанными на вариационном принципе Лагранжа, является возможность независимого определения параметров как деформированного, так и напряженного состояния, что повышает точность определения последнего.
- 3 На основе разработанных подходов выполнены расчеты на прочность изготовленной из УУКМ разграничивающей стенки для окна вывода потока заряженных частиц из вакуумного объема в рабочую среду. Показано, что температура является основным, лимитирующим прочностью, фактором, и что условия прочности выполняются для эксплуатационных температур с большим запасом.

Список литературы: 1. Абрамян Е.А., Кулешов Г.Д. Интенсивные электронные пучки. Физика, техника, применение. – М.Ж Энергоиздат, 1984. – 230 с. 2. Конкин А.А. и др. Углеродные и другие

жаростойкие волокнистые материалы. – М.: Химия, 1974. – 375 с. 3. Бушуев Ю.Г. и др. Углерод-углеродные композитные материалы: Справочник. – М.: Металлургия, 1994. – 128 с. 4. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с. 5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с. 6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 542 с. 7. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наукова думка, 1982. – 566 с. 8. Ромашов Ю.В. Метод Бубнова-Галеркина в задачах ползучести осесимметрично нагруженных круглых пластин // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2007. – № 4/3 (29). – С. 43-45. 9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров): Пер. с англ. – М.: Наука, 1977. – 832 с.

Поступила в редколлегию 01.09.2008

УДК 539.3

Д.В.БРЕСЛАВСКИЙ, докт.техн.наук; **Ю.Н.КОРЫТКО**;
О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ», Харьков

ПОЛЗУЧЕСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТЕМПЕРАТУРЕ

У роботі з застосуванням методу асимптотичних розкладів за двома масштабами часу та осереднення на періоді температурного циклу одержано нове рівняння стану повзучості металів та сплавів при циклічній зміні температури. Оцінку достовірності запропонованого рівняння стану термоциклічної повзучості одержано за порівнянням розрахункових й експериментальних даних.

The new creep-law of metals and alloys at the case of cyclic varying of temperature is given in a paper. The cyclic creep constitutive equation was derived by use of method of asymptotic creep-strains decomposition on two time scales after averaging on the period of a temperature cycle. The verification of suggested constitutive cyclic-thermo-creep – law was done by comparison the computed and experimental data.

1 Актуальность темы. В современном машиностроении конструктивные элементы часто эксплуатируются при совместном действии температурных и силовых полей. Уровни и периодичность смены действующих нагрузок и температур могут заметно влиять на процессы ползучести и время до разрушения конструктивных элементов. Во многих случаях изменение напряжений и температурных режимов носит циклический характер. В последнее время для описания ползучести материалов при постоянной температуре, быстром и медленном циклическом изменении напряжений предложены определяющие соотношения, например, в работах [1, 2]. Вместе с тем, практически важный случай циклического изменения рабочих температур, при которых развивается ползучесть в материале конструктивных элементов, до настоящего времени исследован недостаточно. В данной работе предложены новые уравнения состояния для термоциклической ползучести металлических материалов и их сплавов. Дано сопоставление расчетных и экспериментальных данных термоциклической ползучести образцов, изготовленных из углеродистой и легированной стали в различных интервалах температур.

2 Одноосная ползучесть. Как обычно, например [3, 4], примем, что деформация ползучести c зависит от напряжения – σ , времени – t и температуры – T :

$$c = f(\sigma, t, T), \quad (1)$$

где

$$f = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(T). \quad (2)$$

В дальнейшем, используя гипотезу течения, как и в [3], конкретизируем вид функций, входящих в (2) так:

$$f_1(\sigma) = B\sigma^n; \quad f_2(t) = t; \quad f_3(T) = A \exp\left(\frac{-\Delta H}{kT}\right), \quad (3)$$

где B, n, A – материальные постоянные, которые определяются при обработке экспериментальных кривых ползучести образцов при растяжении;

$\Delta H, k$ – энергия активации процессов ползучести в материале и постоянная Больцмана.

В этом случае уравнение состояния установившейся ползучести при постоянных напряжениях и температуре принимает вид:

$$\dot{c} = B \exp\left(\frac{-\Delta H}{kT}\right) \sigma^n. \quad (4)$$

В рамках феноменологического подхода обобщим зависимости (1-4) для термоциклической ползучести, принимая, что $T = \varphi(t)$; $\Delta H/k = Q$; $Q > 0$:

$$\dot{c} = B \sigma^n \exp\left(\frac{-Q}{\varphi}\right). \quad (5)$$

Из (4) следуют известные уравнения установившейся ползучести при постоянных напряжениях и температуре.

3. Ползучесть при циклическом изменении температуры. Рассмотрим термоциклическую ползучесть при постоянных напряжениях, принимая в (5) функцию $\varphi = \varphi^*(t)$ в виде, который отвечает наиболее часто встречающемуся на практике прямоугольному циклу на периоде T_c изменения температуры:

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi_0, & 0 < t < \tau \\ \varphi_{\max}, & \tau < t < T_c \end{cases}, \quad (6)$$

где τ – время нагрева образца от начального значения – φ_0 до температуры φ_{\max} , $\varphi_{\max} = \varphi_0 + \varphi_a$, φ_a – амплитудная составляющая изменения температуры.

Кусочно-непрерывную функцию $\varphi^*(t)$ представим в виде ряда Фурье:

$$\varphi^*(t) = \varphi_{\max} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_c} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_c} t\right) \right) \right), \quad (7)$$

где:

$$a_0 = \frac{2}{T_c \varphi_{\max}} \int_0^{T_c} \varphi^*(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T_c \varphi_{\max}} \int_0^{T_c} \varphi^*(t) \cos\left(\frac{2\pi k t}{T_c}\right) dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T_c \varphi_{\max}} \int_0^T \varphi^*(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_c}\right) dt.$$

Далее, введем параметр асимметрии цикла изменения температуры $M = \varphi_a/\varphi_0$ – отношение амплитудной составляющей температуры к ее минимальному значению на периоде теплосмены и преобразуем закон циклического изменения температуры:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \left(1 + M \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_c} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_c} t\right) \right) \right) \right). \quad (8)$$

Применим к определяющему уравнению в форме (6) метод двух масштабов [2]. Введем в рассмотрение:

- t – время основного процесса ползучести при циклическом изменении температуры;
- $\xi = t/T$ – время цикла изменения температуры по закону (9), $0 \leq \xi \leq 1$.

Далее, следуя основным подходам работ [1, 2], для получения определяющего уравнения ползучести при циклическом изменении температуры применим методику асимптотических разложений и усреднения на периоде.

Принимая, что общая продолжительность процесса ползучести t_* превышает величину периода T_c циклической составляющей температуры φ , введем в рассмотрение малый параметр $\mu = \frac{T_c}{t_*} \ll 1$.

Асимптотическое решение дифференциального уравнения (5) с начальным условием $c(0) = 0$ будем искать в виде разложения по малому параметру: $c \equiv c^0(t) + \mu c^1(\xi)$. Ограничимся только первым приближением, считая члены с высшими степенями параметра μ бесконечно малыми, получим:

$$\frac{dc(t, \xi)}{dt} = \left(\frac{\partial c(t, \xi)}{\partial t} + \mu^{-1} \frac{\partial c(t, \xi)}{\partial \xi} \right)_{\xi=t/\mu}.$$

Учитывая, что $\langle c^1(\xi) \rangle = \int_0^1 c^1(\xi) d\xi \equiv 0$, для медленно изменяющейся со-

ставляющей ползучести при циклическом изменении температуры и постоянном напряжении, после усреднения на периоде цикла окончательно получим:

$$\dot{c} = B\sigma^n \int_0^1 \exp \left(\frac{-Q}{\varphi_0 \left(1 + M \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi k \xi) + b_k \sin(2\pi k \xi)) \right) \right)} \right) d\xi. \quad (9)$$

Зависимость (9) примем в качестве уравнения состояния термоциклической ползучести материала в случае циклического изменения температуры при постоянном напряжении.

4 Сопоставления расчетных и экспериментальных данных. Предложенное уравнение состояния (9) верифицировалось на примере ползучести одноосных образцов, изготовленных из углеродистой стали (0,15 % С) в интервале температур от 573 К до 748 К. Эксперименты по статической и термоциклической ползучести образцов из данного материала проведены японскими учеными под руководством профессора С.Тайра [4]. Эти экспериментальные данные использованы для получения материальных постоянных, входящих в уравнение (5). После обработки найдено: $B = 2,4 \cdot 10^{-32} \cdot A$ (МПа) $^{-n}/c$, $A = 1,2 \cdot 10^{19}$; $n = 21,4$; $Q = 3,176 \cdot 10^4$ К.

На рис. 1 приведены кривые ползучести при постоянном напряжении, равном 180 МПа, для температур 773 К, 748 К и 723 К – кривые 1, 2 и 3 соответственно. Точками обозначены экспериментальные данные, взятые из работы [4]. Как видно из рисунка, обработка опытных данных выполнена с вполне удовлетворительной точностью.

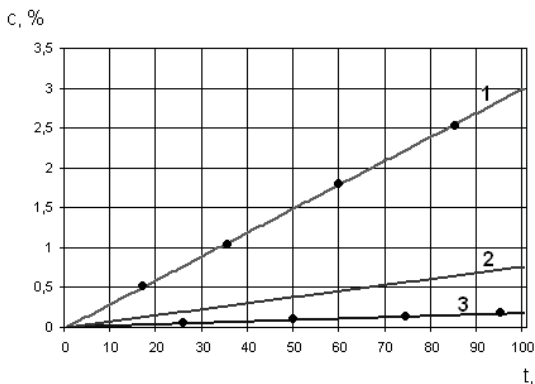


Рисунок 1 – Расчетные кривые статической ползучести углеродистой стали при $\sigma = 180$ МПа, $T = 773$ К – 1, 748 К – 2 и 723 К – 3, точки – экспериментальные данные

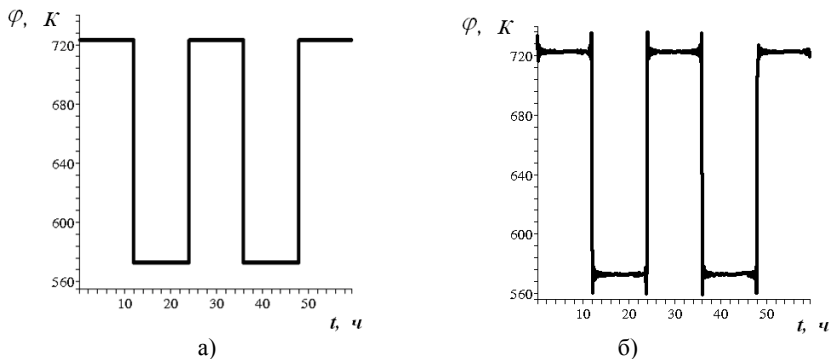


Рисунок 2 – Зависимость температуры от времени: а) – исходная [4]; б) – аппроксимированная рядом Фурье с удержанием 100 слагаемых

Далее рассмотрим термоциклическую ползучесть, воспользовавшись полученным уравнением (9). Расчетные кривые термоциклической ползучести при постоянном напряжении, равном 200 МПа, для углеродистой стали сопоставим с экспериментальными данными той же работы [4]. Для заданного в [4] изменения температуры в пределах цикла от 573 К до 723 К, представленного на рис. 2, примем закон (6) с параметрами: $\varphi_0 = 573$ К; $\varphi_a = 150$ К; $T_c = 24$ ч; $\tau = 12$ ч.

На рис. 3 приведены расчетные кривые статической ползучести (723 К) – 1 и циклической (573 К – 723 К) – 2 образцов из углеродистой стали, точки – экспериментальные данные [4].

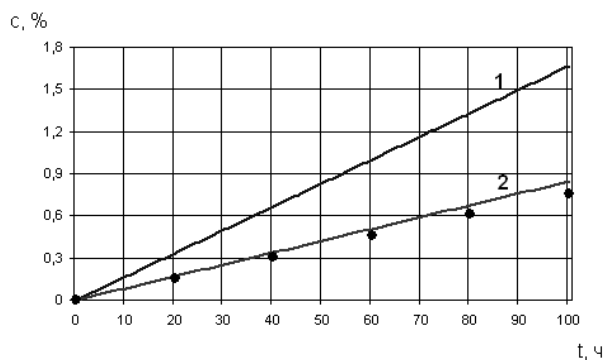


Рисунок 3 – Расчетные кривые статической ползучести (723 К) – 1 и циклической (573 К – 723 К) – 2, точки – экспериментальные данные

Авторы [4] отмечают, что при температуре 573 К статическая ползучесть рассматриваемой стали практически не наблюдается. Этот же вывод следует непосредственно из расчетных данных. Сравнительный анализ результатов расчетов и эксперимента свидетельствует о достаточной степени соответствия результатов (расхождение составляет менее 5 %).

Далее рассмотрим циклическую ползучесть образцов из нержавеющей стали марки 321 (293 К – 710 К). Экспериментальные данные статической ползучести при температуре 1003К приведены в [5] и использовались для определения материальных постоянных в (9). Расчетами определено: $B = 1,9 \cdot 10^{-11} \cdot A$ (МПа)⁻ⁿ/с; $A = 1,01 \cdot 10^{14}$; $n = 3,694$, $Q = 2,096 \cdot 10^4$ К. Изменение температуры в опытах, приведенных в [5], принималось отвечающим трапецеидальному циклу, показанному на рис. 4, параметры которого составляют: $\varphi_0 = 293$ К; $\varphi_a = 710$ К; $T_c = 2$ ч (рис. 4).

На рис. 5 приведены кривые ползучести при напряжении 70 МПа для принятого цикла изменения температуры (кривая 2), а также для статической ползучести при постоянных температурах (при 923 К – кривая 3, при максимальной температуре цикла 1003 К – кривая 1). Точками обозначены экспериментальные данные, взятые из работы [5]. Отличие опытных и расчетных данных не превосходит 3-5 %.

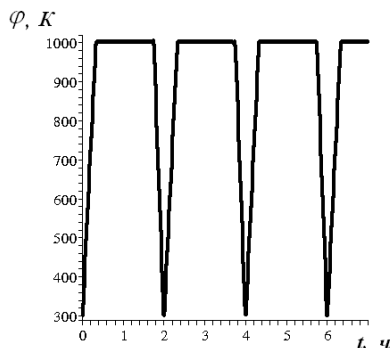


Рисунок 4 – Зависимость температуры от времени – аппроксимированная рядом Фурье с удержанием 100 слагаемых

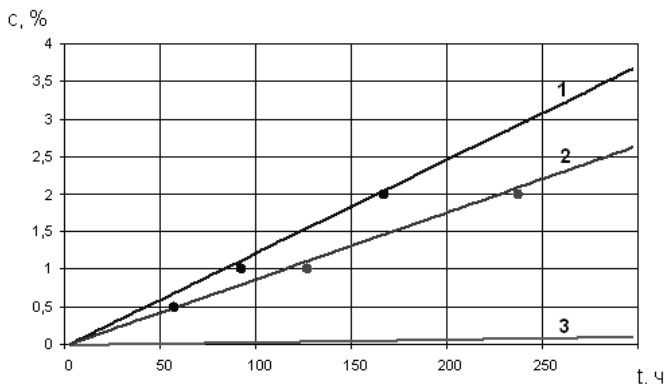


Рисунок 5 – Кривые статической – 1, 3 и циклической ползучести – 2 образцов из стали марки 321, точки – экспериментальные данные

5 Выводы. В работе дано обобщение уравнения состояния установившейся ползучести при постоянных напряжениях и температуре для случая термоциклической ползучести. Используя методику асимптотических разложений двух масштабов времени (быстрого и медленного) и усреднения на периоде температурного цикла предложено новое уравнение состояния термоциклической ползучести металлических материалов. Расчетные кривые термоциклической ползучести одноосных образцов, изготовленных из углеродистой стали (0.15% C) и нержавеющей стали марки 321, сопоставлены с экспериментальными данными других авторов. Данные сравнения свидетельствуют о вполне удовлетворительном соответствии расчетных и экспериментальных кривых термоциклической ползучести.

Список литературы: 1. Breslavsky D., Morachkovsky O. A new model of nonlinear dynamic creep // IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. – 1995. – P. 161-166. 2. Бреславский Д.В., Морачковский О.К., Уварова О.А. Метод асимптотических разложений в задачах мало- и многоциклового ползучести мате-

риалов // Вісник НТУ «ХП». – Харків: НТУ «ХП». – № 19. – 2004. – С. 23-32. 3. *Lemaitre J., Chaboche J.-L.* Mechanics of solid materials. – Cambridge: University press, 1994. – 556 p. 4. *Таїра С., Отани Р.* Теория высокотемпературной прочности материалов. – М.: Металлургия, 1986. – 280 с. 5. *Г.Гварниери* Характеристики длительной прочности листовых материалов при циклических нагрузках и температурах // Жаропрочные сплавы при изменяющихся температурах и напряжениях. – Госэнергиздат, 1960. – С. 65-111.

Поступила в редколлегию 01.09.2008

УДК 539.1

Д.В.ВАСЮКОВ, НТУ «ХПИ», Харьков

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОСНАСТКИ ДЛЯ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНОЙ ШТАМПОВКИ

Розглянута задача магнітопружності в об'ємній постановці для оснащення систем магнітно-імпульсного штампування листових металевих заготовок. Отримано розподіл механічних напружень, які виникають в індукторі під дією магнітного поля. Отримано розподілу характеристик магнітного поля: напруженості та індуктивності.

The three-dimensional magnetoelasticity problem for equipment of magnetic pulse stamping metal sheet systems have been considered. The stress-strain field dispensing were gotten that arise in inductor under the influence of a magnetic field. The physical characteristics of magnetic field were gotten.

Введение. Теоретические основы, описывающие модели механики сплошной среды, которые учитывают действие полей разной физической природы (включая электромагнитную) представлены в работах [1-7]. В рамках этих моделей, внешнее электромагнитное поле воздействует на термомеханическое состояние тела, в уравнениях равновесия учитываются слагаемые, которые характеризуют действие поля на тело, а именно, пондеромоторные силы и пондеромоторные моменты, а также источники энергии, которые появляются в процессе воздействия электромагнитного поля на тело. Пять параметров описывающих поле: напряженность и индуктивность электрического и магнитного полей и плотность поверхностных зарядов. Для тела представлены дополнительные характеристики, описывающие электромагнитные свойства: проводимость, поляризация и намагниченность [4,7].

Общая теория магнитоупругости была освещена в работах [5,10]. Последние авторы создали общие асимптотические решения трехмерных уравнений магнитоупругости для оболочек и пластин и сформулировали гипотезу магнитоупругости тонких тел.

Теоретические и экспериментальные результаты, которые были получены учеными в этой области, позволили применить технологии получения мощных магнитных полей и технические решения в промышленности. Открылась возможность применять большие давления, воздействующие на поверхность про-

водников при резком поверхностном эффекте, для пластической обработки металлов. Это воплотилось в установках магнитно-импульсной штамповки. Работы авторов [11–13] направлены на решение проблем проектирования установок магнитно-импульсной штамповки.

В свете интенсивного развития вычислительной техники и стремительно-го ее роста были созданы комплексы, позволяющие решать прикладные задачи динамической магнитоупругости. Моделированию процессов формообразования и штамповки заготовок посвящены [14-16], в которых, применяется метод конечных элементов и метод граничных элементов для моделирования связанных электромагнитных и механических процессов, освещены некоторые особенности решения связанных задач магнитоупругости.

Для анализа физических процессов, протекающих в необходимо решать связанную задачу, в которой учитывается действие сил различной природы (электромагнитная, механическая).

1. Постановка задачи. Схема установки магнитно-импульсной обработки металлов показана на рис. 1.

На рис. 2 показано расположение индуктора, который схематично представлен на рис. 1 под номером 5, относительно заготовки и матрицы.

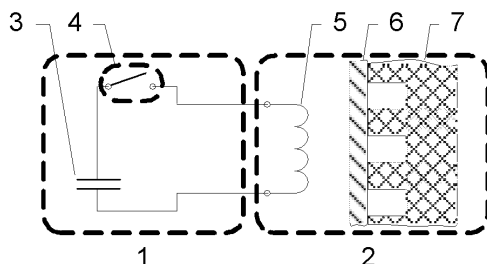


Рисунок 1 – Схема установки магнитно-импульсной штамповки: 1 – высоковольтная система; 2 – индукторная система; 3 – емкостный накопитель энергии; 4 – устройство управления; 5 – индуктор; 6 – листовая заготовка; 7 – матрица

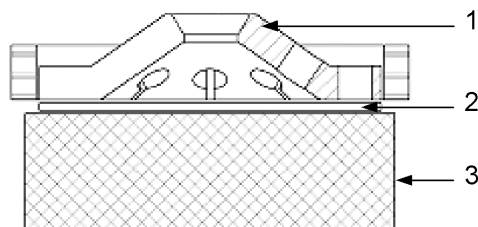


Рисунок 2 – Расположение индуктора относительно заготовки:
1 – индуктор; 2 – заготовка; 3 – матрица

Анализируя параметры работы установки и опираясь на практически обоснования приведенные в [13] принимаем следующее: условие квазистатич-

ности электромагнитных процессов $\omega/lc \ll 1$, где ω – рабочая частота установки, c – скорость света, l – характерный геометрический размер индуктора; считаем, что $j = \beta E$, где j – вектор плотности тока, β – коэффициент электропроводности, E – вектор напряженности электрического поля; равенство нулю плотности поверхностных зарядов $\rho_e = 0$.

Запишем основные соотношения теории магнитоупругости [1-7].

Уравнения Максвелла и соотношения электромагнитного поля:

$$\nabla \times H = j, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad \frac{1}{\beta_0 \mu_0^2} (\nabla \times B) (\nabla \times B) = 0, \quad \Delta \cdot B = 0, \quad (1)$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k}$ – оператор Лапласа в декартовых координатах;

H – вектор магнитной напряженности; B – вектор магнитной индуктивности; j – вектор плотности тока; β_0, μ_0 – электрическая и магнитная проницаемость среды.

Уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала:

$$B = \nabla \times A, \quad (2)$$

где A – вектор магнитного потенциала.

Найдя вектор магнитного потенциала A находим локальные характеристики вектора магнитной индукции и вектора напряженности магнитного поля, и интегральные характеристики – магнитостатической силы:

$$H = \mu^{-1} B, \quad F = \frac{1}{2} \oint (H(n \cdot B) + B(n \cdot H) - n(B \cdot H)) dS, \quad (3)$$

Далее запишем основные уравнения для напряжений и деформаций в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \sigma = \lambda \varepsilon_V I + 2\mu \varepsilon, \quad (4)$$

где ε – тензор деформаций; $u \{u_x, u_y, u_z\}$ – вектор перемещений; σ – тензор напряжений; μ и λ – постоянные Ламе; $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – первый инвариант деформаций; I – единичный тензор.

Запишем уравнения статики в перемещениях:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \frac{1}{\mu_0} (B) \times (\nabla \times B) = 0, \quad (5)$$

Дополним механическими и электромагнитными граничными условиями:

$$\sigma \cdot n = \sigma_a; \quad u = u_a; \quad B = B_c, \quad (6)$$

где σ_a – заданные напряжения на поверхности; u_a – заданные перемещения на поверхности; B_c – составляющая магнитного поля воздуха.

Данная задача решалась методом конечных элементов, который реализован в комплексе ANSYS. Уравнение, описывающее деформации, записывается в виде [17]:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\}, \quad (7)$$

где $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{yz} \ \varepsilon_{xz}]^T$ – вектор деформаций; $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]^T$ – вектор напряжений; $[D]$ – матрица податливости, имеет вид

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где E_x, E_y, E_z – модули упругости в трех направлениях; G_{xy}, G_{yz}, G_{xz} – модули сдвига в трех плоскостях; $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$ – коэффициенты Пуассона.

Запишем обратные физические соотношения:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}. \quad (9)$$

Система уравнений связанной задачи магнитоупругости, которая позволяет получить значение векторного магнитного потенциала и перемещений в узлах, в матричном виде записывается так [17]:

$$\begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [K^m] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{A\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{\Psi_i\} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

где $[K]$ – матрица коэффициентов жесткости; $[K^m]$ – матрица коэффициентов векторного магнитного потенциала среды; $\{u\}$ – вектор перемещений; $\{A\}$ – вектор магнитного потенциала; $\{F\}$ – вектор суммарной узловой нагрузки; $\{\Psi_i\}$ – вектор узловых магнитных нагрузок.

2. Численные исследования.

Рассмотрена 3-х мерная модель индуктора. На рис. 3 показаны основные характеристики магнитного поля – напряженность и индуктивность. В таблице представлены характеристики материала.

Характеристики материала

| № | Характеристика материала | Значение |
|---|---|---------------------------------|
| 1 | E – модуль упругости | 112 ГПа |
| 2 | ρ – плотность | $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ |
| 3 | ν – коэффициент Пуассона | 0,32 |
| 4 | σ_T – предел текучести | 200 МПа |
| 5 | μ_0 – относительная магнитная проницаемость | 1 |

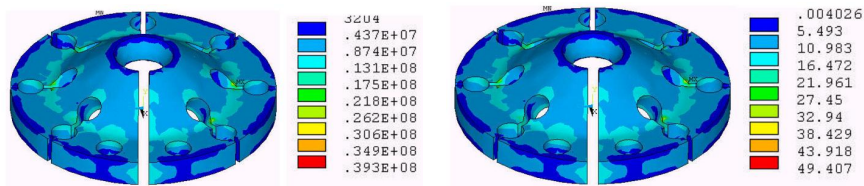


Рисунок 3 – Напряженность и индуктивность магнитного поля

Полученные результаты иллюстрируют влияние отверстий и щели на характер поведения магнитного поля. Отметим, что магнитная напряженность и индуктивность, вблизи отверстия в центре модели численно достигает значения $0,5 \cdot 10^7$ А/м², индуктивность 10 Тл. По модели наблюдаем увеличение амплитуд напряженности $0,4 \cdot 10^8$ А/м² и индуктивности, в среднем, до 25 Тл. Зоны повышенной концентрации вблизи отверстий и щели.

На рис. 4 показана интенсивность напряжений, возникающих в модели. Отметим, что максимальные значения наблюдаются в области отверстия в центре модели напротив щели и достигают значений 83 МПа. Далее, при движении к контурам, наблюдается уменьшение величин интенсивностей напряжений и на торцах достигает нулевого значения.

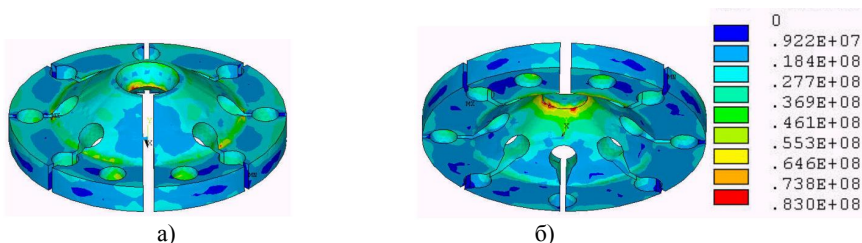


Рисунок 4 – Интенсивность напряжений: а) – вид сверху; б) – вид снизу

Снижение величин интенсивностей напряжений наблюдается в области щели. Отверстия цилиндрической формы вносят циклический характер в распределение интенсивностей напряжений в области, удаленной от щели. На изгибе модели наблюдаем повышенные интенсивности напряжений. По результатам выполненных расчетов делаем вывод о прочности индуктора: максимальные напряжения возникающие в модели удовлетворяют неравенству:

$$[\sigma_T] \geq \left(\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2) \right] \right)^{1/2}.$$

Таким образом условие прочности выполняется.

Выводы. Получено напряженно-деформированное состояние оснастки установок магнитно-импульсной штамповки в трехмерной постановке магнитоупругости и получены картины распределения полей напряжений и деформаций; поля напряженности и индукции магнитного поля, которые определяют силовое воздействие на индуктор со стороны магнитного поля.

Практическая значимость разработанной методики математического моделирования процессов, протекающих в элементах оснастки установок магнитно-импульсной штамповки, – определение оптимальных параметров конструкции, которая должна отвечать условиям прочности при заданных граничных условиях (механических и электромагнитных).

Список литературы: 1. C.Truesdell, R. Toupin The classical field theories, – S. Flügge (editor) // Handbuch der Physik. – Vol. III/1. – Berlin, Springer, 1960. – PP. 226–793. 2. Л.И.Седов Математические методы для

создания новых моделей сплошной среды // Усп. Мат. Наук. – **20**, № 5. – 1965. – С. 121-180. **3. А. С. Eringen** Mechanics of Continuum. – New York, Wiley, 1967. **4. Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак** Некоторые особенности создания моделей механики твердого тела с учетом электронных процессов // Докл. Акад. Наук Укр. – № 12. – 1970. – С. 18-31. **5. С.А. Амбарцумян, Г.Е. Багдасарян, М.В. Белубекян** Магнитоупругость оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. **6. А.С. Eringen and G.A. Maugin** Electrodynamics of Continua, Vol. 2. – New York, Springer, 1989. **7. G.A. Maugin** Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. – New York, Elsevier, 1988. **8. L. Knopoff** The interactions between elastic waves motions and a magnetic field in electric conductor // J. Geophys. – Res. 60. – 1955. – PP. 441-456. **9. P. Chadwick** Elastic wave propagation in a magnetic field // Actes IX Congr. Intern. Mech. Appl. – Vol. 7. – Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957. – PP. 143-158. **10. Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак, В.Ф. Кондрат** Магнетотермоупругость проводящих тел. – Киев, Наукова думка, 1982. **11. Дашук П.Н., Зайенц С.Л., Комельков В.С. и др.** Техника больших импульсных токов / Комельков В.С. (ред.) – М., Атомиздат, 1970. – 471 с. **12. Белый И.В., Фертик С.М., Хищенко Л.Т.** Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов. – Харьков, «Вища школа», 1977. – 168 с. **13. Lange K.** Handbook of metal forming // McGraw-Hill. – 1985. – P. 27.32-27.39. **14. Livshitz Y., Gafri O.** Technology and equipment for industrial use of pulse magnetic fields // IEEE International Pulsed Power Conference. – Vol. 1. – 1999. – P. 475-478. **15. M. Stiemer, J. Unger, H. Blum, B. Svendsen** Fully-coupled 3D Simulation of Electromagnetic Forming // ICHSF 2006, Dortmund, Germany, – 2006. – PP. 63-73. **16. Ph. Conraux, M. Pignol, V. Robin, J. M. Bergheau** 3D Finite Element Modeling of Electromagnetic Forming Processes // ICHSF 2006, Dortmund, Germany. – 2006. – PP. 73-83. **17. ANSYS, Inc., Swanson Analysis Systems IP, Inc.,** Theory Reference, Release 11.0 ed. 2007.

Поступила в редколлегию 25.11.2008

УДК 539.3

А.В.ВОРОПАЙ, канд.техн.наук; ХНАДУ, Харьков

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-обпертої по контуру та зосередженої маси, що лежить на пластині. На пластину діє нестационарне зосереджене навантаження. Викладаються результати розв'язку прямої та оберненої задачі. Розрахунки зводяться до аналізу інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate and concentrated mass, which is lying on the plate. The non-stationary concentrated load is acting on the plate. The results of solution for direct and inverse problems are presented. The problems are reduced to the first-kind Volterra integral equations, which are solved numerically by Tikhonov's regularization method.

Введение. Реальные механические системы, как правило, – сложные объекты, которые могут иметь множество малых контактирующих тел. При построении математической модели рассматривают основной механический объект (балка, пластина или оболочка), а остальными, зачастую, пренебрегают. В динамических системах дополнительное влияние оказывают силы инерции, вызванные малыми телами, у которых могут быть относительно высокие ускорения (особенно при нестационарных колебани-

ях). Силы инерции можно учитывать с помощью присоединенных масс (сосредоточенных или распределенных). В области прямых задач имеются научные работы, относящиеся к такому подходу, например, в монографии [1] рассматривается воздействие подвижной массы на балки и тонкую прямоугольную пластину лежащую на упругом основании. Обратные задачи такого направления мало изучены.

1. Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 1). На пластину воздействует поперечная сосредоточенная импульсная нагрузка, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы.

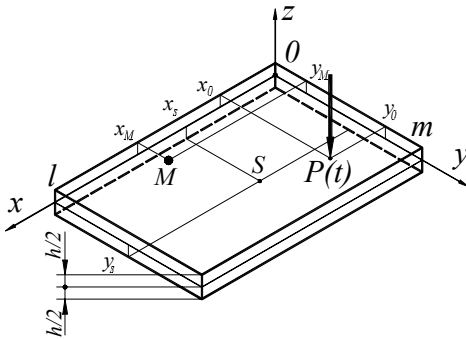


Рисунок 1 – Схема нагружения

Под прямой задачей понимается определение зависимости компонент перемещения во времени при известной возмущающей нагрузке и сосредоточенной массе.

Под обратной задачей – идентификация неизвестного закона изменения во времени нестационарной нагрузки по изменениям прогиба пластины в некоторой ее точке.

2. Решение прямой задачи. В рамках теории пластин С.П.Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений аналогичную [2], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t) \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; w –

перемещение срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины вдоль осей Ox и Oy ; ρ, E, ν – плотность и упругие постоянные материала пластины; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

$$\varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что $P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная), а $R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – воздействие сосредоточенной массы M .

Систему дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решаем посредством разложения искомых функций w_0, ψ_x, ψ_y в двойные ряды Фурье согласно рассмотренной схеме опирания по тригонометрическим функциям. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа, в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_x(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_y(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где $K_i(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$\begin{aligned} K_i^W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t, \\ K_i^{\Psi x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}, \\ K_i^{\Psi y}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}, \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$C_{ikn} = \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m}, \quad a = \frac{G'}{\rho}, \quad b = \frac{G' h}{\rho \cdot J}, \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J},$$

$$\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}, \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}, \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right),$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(a+d)+b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) - \Delta_{kn}]};$$

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) + \Delta_{kn}]};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Для точки (x_M, y_M) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} w(x_M, y_M, t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau, \end{cases}$$

которая может быть преобразована к следующему интегральному уравнению типа Вольтерра 1 рода при известной правой части:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

В матричном виде уравнение (2) можно записать:

$$\mathbf{A}_R \mathbf{R} = \mathbf{A}_P \mathbf{P},$$

где \mathbf{R} – неизвестный вектор, вектор \mathbf{P} – соответствует функции $P(t)$, матрицы \mathbf{A}_R и \mathbf{A}_P отвечают соответствующим ядрам уравнения (3).

Так как рассматриваемая задача является некорректной, решение интегрального уравнения осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [3] (РА Тихонова).

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Принимались следующие параметры: $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7890$ кг/м³; $h = 0,04$ м; $l = 0,6$ м; $m = 0,4$ м; $x_0 = 0,4$ м; $y_0 = 0,3$ м – координаты точки нагружения; $x_M = 0,2$ м; $y_M = 0,2$ м – координаты сосредоточенной массы; $x_S = 0,3$ м; $y_S = 0,1$ м – координаты датчика; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

При определении неизвестного вектора \mathbf{R} , согласно РА Тихонова параметр регуляризации α определялся на основе минимизации α по двух функционалов, графики которых приведены на рис. 2. Отметим, что кривой 1 соответствовал функционал $M1^\alpha[R] = \|A_R R(\alpha) - A_P P\|$, который естественно вытекает из (3), а кривой 2 – функционал $M2^\alpha[R] = \|R(\alpha)\|$ – ограничение искомой функции $R(t)$.

Из рис. 2 видно, что параметр регуляризации следует брать в диапазоне $\alpha = 10^{-31} \div 10^{-30}$. На рис. 3 показано известное изменение сосредоточенной нагрузки $P(t)$ – кривая 1 и определенные $R(t)$ – кривые 2.

После определения функции $R(t)$ на основе соотношений (2) можно определить прогибы, а также любые другие параметры напряженно-деформированного состояния в любой точке пластины.

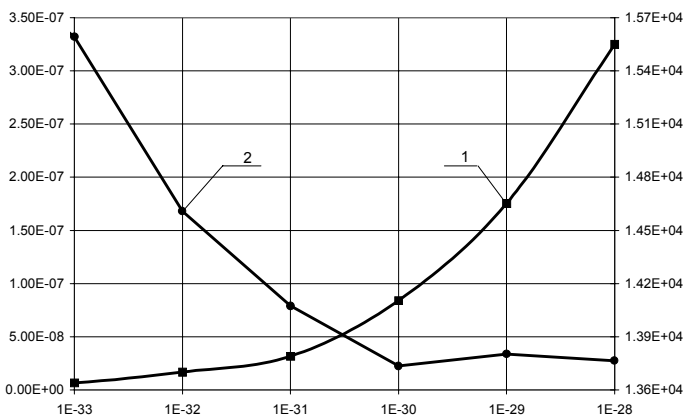


Рисунок 2 – Определение параметра регуляризации

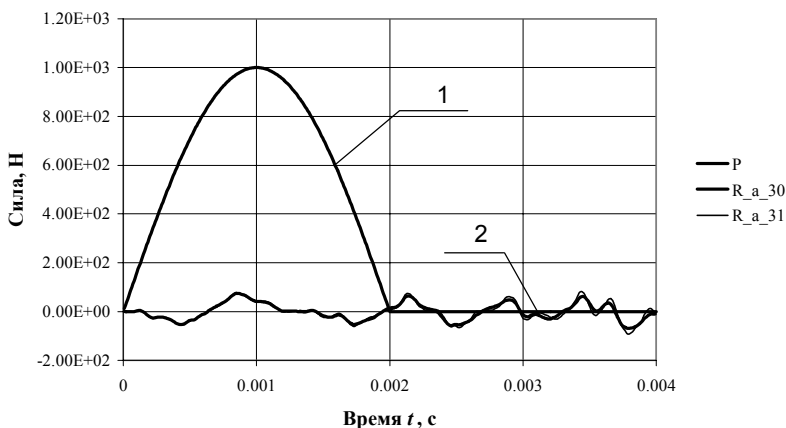


Рисунок 3 – Определение реакции сосредоточенной массы

3. Решение обратной задачи. В случае, если известно изменение прогиба в некоторой точке S пластины $w(x_S, y_S, t)$, координаты и величина сосредоточенной массы M , а требуется определить неизвестный закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ – задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В матричном виде эту систему можно записать так:

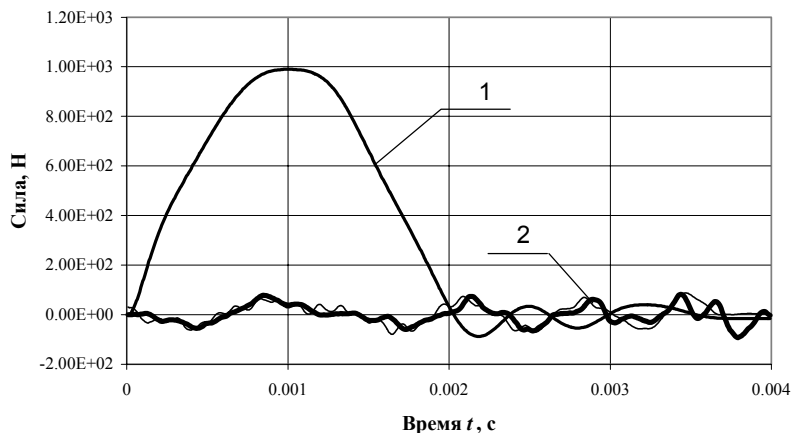
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Блочная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (4) решается с использованием обобщенного алгоритма (Гаусса или Крамера), а также РА Тихонова. Более подробное решение таких СЛАУ описано, например, в [4].

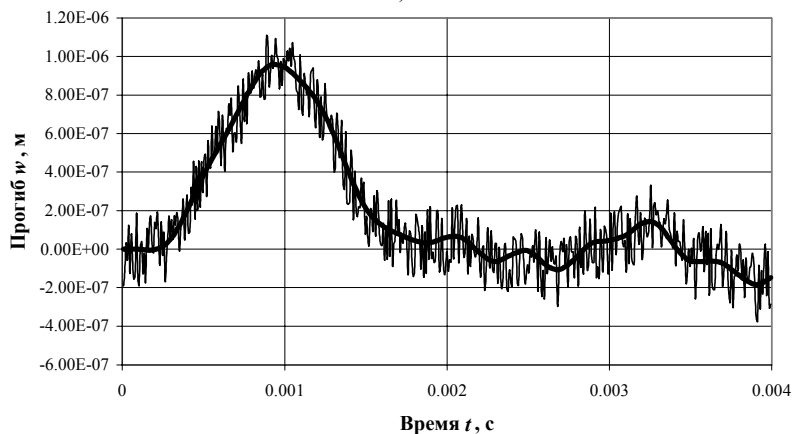
Вычислительные эксперименты по идентификации неизвестной возму-

щающей нагрузки (сосредоточенной силы) и силы взаимодействия между массой и пластиной приведены на рис. 4, а. Кривая 1 на рис. 4, а соответствует определенной при решении (4) функции $P(t)$; кривые 2 – изменение $R(t)$ (жирная кривая – решение прямой задачи, тонкая – идентифицированная функция).

В качестве исходных данных для идентификации использовалось вышеописанное решение прямой задачи – изменение прогиба пластины (жирная кривая на рис. 4, б). Для моделирования погрешностей, возникающих при проведении реальных экспериментов, на исходные данные был наложен «шум» с уровнем до 20 % (тонкая кривая на рис. 4, б).



а)



б)

Рисунок 4 – Идентификация неизвестной нагрузки

Выводы. На основе представленных результатов (рис.4 а) можно сделать вывод о том, что описанное решение задачи идентификации, на основе возму-

щенных данных для пластин с сосредоточенными массами является эффективным и устойчивым к погрешностям. Возможность учета сосредоточенных масс является важным элементом, улучшающим соответствие модели реальным механическим системам.

Список литературы: 1. *Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с. 2. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва: ВИНТИ, 1973 – 272 с. 3. *Тихонов А.Н., Гончаровский А.В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 4. *Воропай А.В., Янютин Е.Г.* Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикладная механика. – 2007. – 43. – №7. – С. 90-97.

Поступила в редколлегию 17.10.2008

УДК 539.434

Ю.Н.ГАЛАГАН; Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ», Харьков
К.В.НАУМЕНКО, докт.техн.наук, Университет им. Мартина Лютера,
Халле, Германия

ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Розглянута математична модель неізотермічної повзучості для випадку анізотропної пошкоджуваності. Для описання анізотропної поведінки пошкоджуваності використовується тензор 2-го рангу. Введено у розгляд вектори неспіввідповідності між напруженням та деформацією повзучості та швидкістю деформації повзучості для виявлення анізотропної поведінки пошкодження.

A mathematical model of nonisothermic creep for anisotropic damage case is considered. A second range tensor is used for description damage. Vectors of axis misadjustment between stress and creep strain and creep strain rate are considered for the purpose of anisotropic damage behaviour detection.

Сложные виды нагрузки и переменная температура – основные условия работы большинства инженерных конструкций. В результате этого в конструкциях возникает деформация ползучести, сопровождающаяся зарождением и развитием микротрещин, пустот, которые носят название повреждаемости. В общем случае повреждаемость носит анизотропный характер, что требует введения для ее описания тензорной величины.

Для решения задачи ползучести с учетом повреждаемости необходимо записать основные соотношения для скоростей деформации ползучести и повреждаемости и дополнить их экспериментальными данными. В случае изотропной повреждаемости это должны быть эксперименты на одноосное напряженное состояние, а в случае анизотропной повреждаемости – это эксперименты на многоосное напряженное состояние. Недостаточное количество экспериментальных данных на многоосное напряженное состояние, в виду слож-

ности их проведения, сильно затрудняет решение задачи на анизотропную ползучесть с учетом повреждаемости. В настоящее время не существует единой универсальной модели, способной адекватно описывать реальные процессы, протекающие в конструкциях в условиях сложных нагрузок и переменных температур.

1. Анализ проблемы и постановки задачи ползучести с учетом повреждаемости. Качановым [1] впервые был введен в рассмотрение, так называемый, параметр сплошности ψ в следующем виде:

$$\psi = \frac{A_0 - A_\omega}{A_0}, \quad (1)$$

где A_0 – начальное поперечное сечение образца, A_ω – поперечное сечение образца с повреждаемостью. Значение параметра сплошности лежит в пределах $1 \geq \psi \geq 0$. В случае повреждаемости $\psi = 0$, в неповрежденном состоянии $\psi = 1$.

Позже данная концепция была расширена введением скалярной величины повреждаемости ω :

$$\omega = 1 - \psi, \quad (2)$$

Работнов [2] дополнил данную теорию введением эффективного напряжения, которое учитывает уменьшение площади поперечного сечения, вызванного ростом повреждаемости в случае одноосного напряженного состояния. Таким образом, эффективное напряжение может быть представлено как соотношение приложенной силы F к эффективной площади $\tilde{A} = A_0 - A_\omega$:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{F}{A_0(1-\omega)} = \frac{\sigma}{(1-\omega)}. \quad (3)$$

Для постановки задачи ползучести с учетом повреждаемости необходимо записать основные соотношения для скорости деформации ползучести и повреждаемости.

Традиционной моделью для описания изотропной ползучести с учетом повреждаемости является модель Качанова-Работнова-Хэйхерста [13]. Она хорошо подходит для описания поведения материала в случаях одноосного и многоосного напряженных состояний и приемлема для всех трех стадий ползучести. Учет влияния переменной температуры осуществляется с помощью функций Аррениуса (6). В случае многоосного напряженного состояния основные соотношения теории ползучести имеют вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^{cr}}{\sigma_{vM}} S_{ij}; \quad \sigma_{vM} = \left[\frac{3}{2} S \cdot S \right]^{1/2}; \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = A_1(T) H(\epsilon^{cr}) \frac{\sigma_{vM}^n}{(1-\omega)^n};$$

$$\dot{\omega} = B_1(T) \frac{\langle \sigma_{eq}^\omega \rangle^m}{(1-\omega)^l}; \quad (5)$$

$$A_1(T) = A \exp\left(-\frac{Q_\alpha}{R \cdot T}\right); B_1(T) = B \exp\left(-\frac{Q_\beta}{R \cdot T}\right); \quad (6)$$

$$H(\varepsilon^{cr}) = 1 + C \exp\left(-\frac{\varepsilon_{eq}^{cr}}{k}\right), \quad (7)$$

где A, B, C, k, l, m, n – константы ползучести материала, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\omega}$ – компоненты тензора скорости деформации ползучести ($i, j = 1, 2, 3$), S и S_{ij} девиатор напряжений и его компоненты ($i, j = 1, 2, 3$) соответственно, σ_{eq}^{ω} – эквивалентное напряжение, σ_1 – максимальное главное напряжение, α – весовой коэффициент, описывающий влияние главного напряжения на развитие повреждаемости [4]. Значение данного коэффициента определяется из экспериментальных данных. Функция упрочнения $H(\varepsilon_{eq}^{\omega})$, представленная в виде (7), используется для описания первой стадии ползучести. Q_α, Q_β – энергии активации процессов ползучести и повреждаемости соответственно, R – постоянная Больцмана.

Эквивалентное напряжение, входящее в уравнения (4) и (5), в случае многоосного напряженного состояния, может быть представлено в следующем виде, предложенном Хэйхерстом [6]:

$$\sigma_{eq}^{\omega} = \alpha J_0(\sigma) + 3\beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma) \quad (8)$$

или

$$\sigma_{eq}^{\omega} = \alpha \sigma_1 + 3b\sigma + c\sigma_{eq}, \quad (9)$$

где α, β, a, b, c – некоторые константы, J_0, J_1, J_2 – линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора напряжений, σ_1 – главное максимальное напряжение, σ – среднее напряжение, σ_{eq} – эквивалентное напряжение по Мизесу. В случае упрощения выражения (8), а именно при $\beta = 0$, получаем следующее выражение для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{eq}^{\omega} = \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_{vM}. \quad (10)$$

Легко заметить, что процесс ползучести с учетом повреждаемости управляется двумя видами напряжений – максимальное главное напряжение и эквивалентное напряжение по Мизесу.

Основные соотношения (4) и (5) должны быть дополнены условием несжимаемости в следующем виде:

$$\langle \sigma_{eq}^{\omega} \rangle = \sigma_{eq}^{\omega} \text{ для } \sigma_{eq}^{\omega} > 0; \langle \sigma_{eq}^{\omega} \rangle = 0 \text{ для } \sigma_{eq}^{\omega} \leq 0. \quad (11)$$

Изотропная ползучесть с учетом повреждаемости может рассматриваться как частный случай анизотропной, и подходит для описания поведения некоторых материалов в условиях простого напряженного состояния. В общем случае, для описания реальных процессов ползучести с учетом повреждаемости, возникающих в конструкциях в условиях сложных нагрузок с переменными температурами, необходимо использование анизотропной модели.

2. Анизотропная модель ползучести с учетом повреждаемости. В на-

стоящее время не существует единой феноменологической модели для описания анизотропного поведения ползучести с учетом повреждаемости. Это вызвано ограниченным количеством экспериментальных данных, необходимых для подтверждения существования той или иной модели.

Большинство из существующих моделей анизотропной ползучести с учетом повреждаемости основаны на концепции эффективных напряжений и представлении повреждаемости в виде тензора 2-го, 4-го и в некоторых случаях 8-го порядка [4, 8, 9].

Для избежания трудностей при использовании тензора 4-го ранга, основываясь на экспериментальных данных Мураками и Оно [4] была разработана теория ползучести сплошной среды. Авторы описали повреждаемость с помощью симметричного тензора 2-го ранга. Данный тензор определяет соотношение между нормалью произвольной площадки с поврежденностью и нормалью площадки без поврежденности в случае эффективного напряженного состояния:

$$(I_{ij} - \Omega_{ij})n_i \delta A = \tilde{n}_i \delta \tilde{A}, \quad (12)$$

где I – единичный тензор 2-го ранга, Ω – симметричный тензор повреждаемости 2-го ранга.

Используя диадное разложение:

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i n^i \otimes n^i. \quad (13)$$

Использование симметричного тензора повреждаемости необходимо для сохранения симметрии тензора действующих напряжений.

Мураками и Оно [4] была предложена следующая интерпретация тензора эффективных напряжений:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma \cdot \Phi + \Phi \cdot \sigma), \text{ где } \Phi = [1 - \Omega]^{-1}. \quad (14)$$

В частном случае, когда главные направления тензоров напряжения и повреждаемости совпадают, компоненты действующего тензора напряжений принимают вид:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{1 - \Omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{1 - \Omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{1 - \Omega_3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Результаты металлографических исследований материалов [4, 5] показывают, что пустоты, вызванные ползучестью с повреждаемостью, развиваются в основном на границах зерен перпендикулярно главных растягивающим напряжениям. Таким образом, используя предположение, что скорость образования пустот управляется величиной эффективного напряжения и развитие пустот

происходит на площадках перпендикулярных направлению максимального растягивающего эффективного напряжения σ_1 , имеем следующие соотношения, аналогично выражениям (10) и (11):

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^{\Omega} &= \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_{vM}, \\ \langle \sigma_{eq}^{\Omega} \rangle &= \sigma_{eq}^{\Omega} \text{ для } \sigma_{eq}^{\Omega} > 0; \langle \sigma_{eq}^{\Omega} \rangle = 0 \text{ для } \sigma_{eq}^{\Omega} \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Моделирование процесса накопления повреждаемости для различных материалов – основная задача в решении проблемы анизотропной ползучести с учетом повреждаемости.

Рассмотрим модель описания развития анизотропной повреждаемости, предложенную Мураками и Оно [4]:

$$\dot{\Omega} = B_1 (\langle \sigma_{eq}^{\Omega} \rangle)^k [n_1 \cdot \Phi \cdot n_1]' n_1 \otimes n_1, \quad (17)$$

где n_1 – главное направление, которое соответствует первому главному напряжению σ_1 .

С целью лучшего согласования экспериментальных и теоретических результатов теми же авторами было предложено ввести модифицированный тензор напряжений, который в неповрежденном состоянии должен совпадать с (14):

$$\hat{\sigma} = \alpha_s \sigma + \frac{1}{2} \beta_s (\sigma \cdot \Phi + \Phi \cdot \sigma) + \frac{1}{2} (1 - \alpha_s - \beta_s) (\sigma \cdot \Phi^2 + \Phi^2 \cdot \sigma), \quad (18)$$

где α_s, β_s – константы материала. Выражение (18) основывается на предположении, что в рассматриваемом материале, исследуемая часть поврежденной площади сечения мала.

Основные соотношения для скоростей деформации ползучести и повреждаемости с учетом модифицированного тензора напряжений (18) можно представить в виде:

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^{cr}}{\hat{\sigma}_{vM}} \hat{S}; \dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = A_1 (\hat{\sigma}_{vM})^n; \hat{\sigma}_{vM} = \left[\frac{3}{2} \hat{S} \cdot \hat{S} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

где \hat{S} – девиаторная часть тензора напряжений.

Определяющие соотношения (17) и (19) должны быть дополнены экспериментальными данными на ползучесть материалов при многоосном напряженном состоянии, необходимыми для определения констант ползучести, входящих в данные соотношения.

3. Вектор несоосности между напряжением и деформацией. Для решения проблемы анизотропной ползучести с учетом повреждаемости необходимо иметь экспериментальные данные при сложном нагружении, например, непропорциональном. Но даже при наличии таких данных достаточно сложно создать модель, приемлемую для описания поведения повреждаемости, возникающей в конструкциях, работающих в условиях сложных нагрузок и переменной температуре.

Рассмотрим один из возможных способов выявления анизотропии повре-

ждаемости, возникающей в материале, в частности, при двухосном напряженном состоянии.

При многоосном напряженном состоянии основные соотношения ползучести могут быть представлены в виде, предложенном в [11].

На рис. 1 представлена тонкостенная труба, находящаяся под воздействием растягивающей силы F и крутящего момента M . Тензоры деформации ползучести, скорости деформации ползучести и напряжения могут быть представлены в виде:

$$\varepsilon^{cr} = \frac{3}{2}(\varepsilon_L - \frac{1}{E}\sigma)(k \otimes k - \frac{1}{3}I) + \frac{1}{2}(\gamma - \frac{2(1+\nu)}{E}\tau)(k \otimes e_\varphi + e_\varphi \otimes k); \quad (20)$$

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_L(k \otimes k - \frac{1}{3}I) + \frac{1}{2}\dot{\gamma}(k \otimes e_\varphi + e_\varphi \otimes k); \quad (21)$$

$$\sigma = \sigma k \otimes k + \tau(e_\varphi \otimes k + k \otimes e_\varphi), \quad (22)$$

где e_r, e_φ, k – базис в цилиндрических координатах.

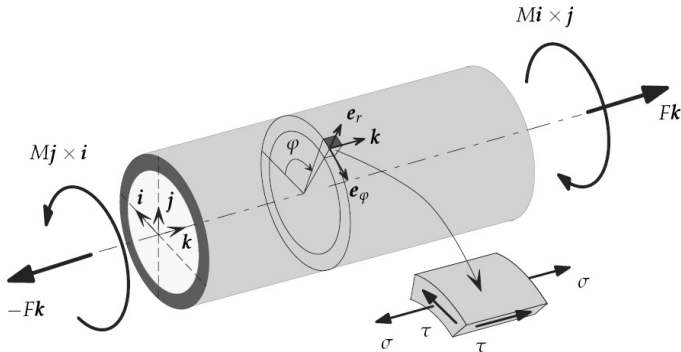


Рисунок 1 – Тонкостенная труба при двухосном напряженном состоянии

Эквивалентные скорость деформации ползучести и напряжение по Мизесу:

$$\dot{\varepsilon}_{vM} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_L^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2}; \quad \sigma_{vM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (23)$$

В двумерном пространстве главных напряжений и скоростей деформаций можно построить вектора с компонентами (σ_1, σ_2) , $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. В случае изотропной повреждаемости эти вектора должны иметь одинаковое направление. При анизотропии повреждаемости появится несоосность. Введем в рассмотрение так называемый вектор несоосности. Запишем векторное произведение между следующими парами векторов: между напряжением и деформацией ползучести (24), напряжением и скоростью деформации ползучести (25):

$$(\sigma \cdot \dot{\varepsilon}^{cr}) = \frac{3}{2}\tau \cdot \dot{\varepsilon}_L - \frac{1}{2}\sigma \cdot \dot{\gamma}; \quad (24)$$

$$(\sigma \cdot \varepsilon^{cr}) = \frac{3}{2} \tau \cdot \varepsilon_L - \frac{1}{2} \sigma \cdot \gamma. \quad (25)$$

Таким образом, вектор несоосности может быть представлен в виде:

$$V_{(\sigma, \varepsilon)} = \frac{(\sigma \cdot \varepsilon^{cr})}{\dot{\varepsilon}_{vM} \cdot \sigma_{vM}}. \quad (26)$$

Вычислив соотношение (26), мы, фактически, получим синус угла между вектором главных напряжений и вектором скорости деформации ползучести, и, таким образом, сможем сделать вывод о том наводится ли анизотропия, и если да, то в каком направлении она проявляется.

Формула (26) была применена для обработки экспериментальных данных, представленных в работе [4]. Имелись экспериментальные кривые ползучести медного образца при двухосном напряженном состоянии: $\sigma = 41,4$ МПа и $\tau = 11,9$ МПа. В момент времени $t = 480$ ч. происходила смена главного направления τ на углы, равные 30° , 60° , 80° С. Полученные экспериментальные кривые ползучести были обработаны с помощью математического пакета Mathcad и были построены соответствующие вектора несоосности. На рис. 2 представлен вектор несоосности для случая, когда главное направление τ в момент времени $t = 480$ ч. было изменено на 30° С. Из рис. 2 видно, что анизотропия наводится и максимальное значение вектора несоосности составляет около 0,67. Данное значение не совпадает со значением синуса угла 30° С, ввиду погрешности, возникающей при обработке экспериментальных кривых.

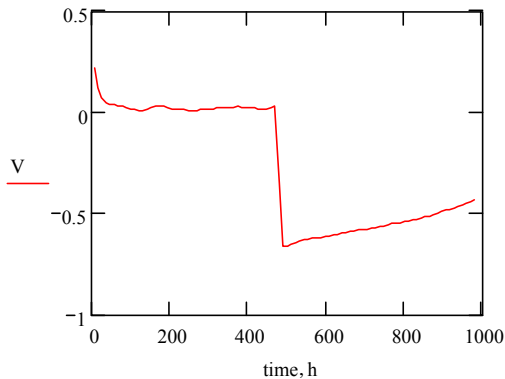


Рисунок 2 – Вектор несоосности между напряжением и скоростью деформации ползучести

Изложенный выше алгоритм требует доработки и проверки на большем количестве экспериментальных данных, но все же он может служить основой для создания методики, позволяющей обрабатывать экспериментальные кривые ползучести при многосном напряженном состоянии и предсказывать характер развития повреждаемости.

Выводы. В настоящее время не существует единой универсальной модели описания анизотропной ползучести с учетом повреждаемости. Основной проблемой является ограниченное количество экспериментальных данных, способных подтвердить ту или иную модель, а также метода обработки имеющихся экспериментальных данных. Представленная методика может служить основой при создании алгоритма обработки экспериментальных данных и может служить основой для создания модели, позволяющей предсказывать возникновение анизотропии повреждаемости и ее направленности.

Список литературы: 1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР., Отд. Тех. Наук. – 1958. – С. 26-31. 2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций, АН СССР. – 1959. – С. 5-7. 3. Hayhurst D.R. Computational Continuum Damage Mechanics: its use in the prediction of creep fracture in structures – past, present and future. In: Murakami, S., Ohno, N., (eds.) // IUTAM Symposium on Creep in Structures. – Dordrecht, Kluwer, 2001. – P. 175-188. 4. Murakami S. and Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage. In: Ponter, A.R.S. and Hayhurst, D.R. (eds.) // Creep in Structures. – Berlin: Springer, 1981. – P. 422-444. 5. Murakami S. and Sanomura Y. Creep and Creep damage of copper under multi-axial states of stress. In: Sawzuk, A., Bianchi, B., (eds) // Plasticity Today - Modelling, Methods and Applications. – Elsevier, London, New York, 1985. – P. 535-551. 6. Hayhurst D.R. Creep rupture under multi-axial states of stress // J. Mech. Phys. Solids. – Vol. 20. – 1972. – P. 381-390. 7. Hayhurst D.R. and Leckie F.E. High temperature creep continuum damage in metals. In: Boehler, J.P. (ed.) // Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids. Mechanical Engineering Publ. – London. – 1990. – P. 445-464. 8. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: part II–damage growth, crack initiation, and crack growth // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 55. – 1988. – P. 65-71. 9. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 1992. 10. Betten J. Creep damage and life analysis of anisotropic materials // Archive of Applied Mechanics 71. – Springer-Verlag, 2001. – P. 78-88. 11. Naumenko K. and Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. – Berlin et al.: Springer-Verlag, 2007. 12. Holdsworth S.R. and Merckling G. ECCC Developments in the Assessment of Creep-Rupture Properties // ECCC Creep International Conference, IMechE, London, 2004. – P. 1-11. 13. Leckie F.A. and Hayhurst D.R. Constitutive equations for creep rupture // Acta Metall. – 25. – 1977. – P. 1059-1070. 14. Altenbach H. Creep and damage in materials and structures // CISM Courses and Lectures. – No. 399. – Wein/New York: Springer, 1999. 15. Altenbach H., Huang C.-X., Naumenko K. Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // Jnl. Strain Analysis. – Vol. 37, no. 3. – 2002. – P. 265-275. 16. Becker A.A., Hyde T.H., Xia L. Numerical analysis in creep in components // Jnl. of strain analysis. – Vol. 29, no. 3, IMechE, 1994. – P. 185-192. 17. Gorash E., Lvov G., Harder J., Kostenko Y. and Wieghardt K. Comparative analysis of the creep behaviour in power plant component using different material models, in Creep & Fracture in High Temperature Components: Design & Life Assessment Issues (Shibli I.A., Holdsworth S.R., and Merckling G, eds.) // Proc. Of the ECCC Creep Conf., (London, UK). – P. 573-581, ECCC, DESTech Publications, Inc., Sept. 2005. 18. Kostenko Y., Lvov G., Gorash E., Altenbach H. and Naumenko K. Power plant component design using creep-damage analysis // In Proc. of Int. Mech. Eng. Conf. & Exp. "IMECE-2006", no.13710 in IMECE, (Chicago, USA), ASME, Nov. 2006. – P. 1-10. 19. Qi W. and Brocks W. Simulation of anisotropic creep damage in engineering components // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS, Barcelona, 2000. – P. 1-14.

Поступила в редакцию 27.11.2008

В.М.ГРИЩЕНКО, канд.техн.наук; **С.В.ГЛАДКОВ**, НТУ «ХП», Харьков

ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ ДВОМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається формалізм методу ГР при рішенні рівнянь в частинних похідних. Проведені порівняльні розрахунки модельних задач плоскої теплопровідності.

Procedure of Boundary Integral Equation Methods is consider in this article. And numerical solutions of model problems are compare.

1 Актуальність проблеми. В задачах проектування машинобудівних конструкцій значне місце посідають проблеми міцності, динаміки, теплопровідності та інші для окремих деталей, вузлів і конструкцій в цілому. Достовірність прогнозування поведінки цих об'єктів пов'язана з використанням адекватних розрахункових моделей, з наявністю ефективних методів вирішення рівнянь в частинних похідних при початково-крайових умовах. В практиці проведення розрахунків в наш час використовуються різні моделі, методи, програмне забезпечення. Але провідною тенденцією є перехід до дво- і тривимірних моделей з урахуванням реальних конструктивних і експлуатаційних факторів. При цьому на передній план виходить проблема багатократного збільшення розміру задач, який сягає за 1 млн.

Основу сучасних підходів їх вирішення складають чисельні методи механіки, головним з яких є метод скінченних елементів (МСЕ). По оцінкам спеціалістів у найближчій перспективі він збереже свою лідируючу роль. Але вже зараз при обчисленнях конструкцій складної форми МСЕ з великою кількістю невідомих виникають ускладнення, які намагаються усунути різними прийомами, розробкою модифікацій МСЕ і таке інше. Тому дослідники постійно займаються пошуком нових альтернативних підходів. У зв'язку з цим можливість, які притаманні теорії потенціалу час від часу збуджують інтерес до дослідження методу, який заснований на запису інтегральних рівнянь – методу граничних інтегральних рівнянь (МГР). Крайова задача для диференціальних рівнянь зводиться до інтегральних по границі області. Це дозволяє зменшити на порядок розмірність задачі. Першим кроком МГР є пошук невідомих задачі по границі – обчислення граничних інтегральних рівнянь. Після цього рішення задачі зводиться до квадратур.

Успішні результати, що вже одержані, прекрасна точність і ефективність дають підстави для розробки алгоритму розв'язання інженерних задач великого об'єму. Суттєві проблеми, які залишаються і супроводжують МГР, пов'язані зі станом методик рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь великого розміру (значно менших ніж у МСЕ але несиметричних та повністю заповнених).

2 Постановка двомірної задачі теплопровідності. Найбільш важливі напрямки інженерної діяльності, такі як проблеми міцності, динаміки, тепло-

провідності, електростатики та інші безпосередньо пов'язані з можливістю ефективного та достовірного визначення рішень класичних рівнянь математичної фізики в частинних похідних. Теорія рівнянь з частинними похідними є однією з центральних в розділах сучасної математики.

Дана робота присвячена викладенню основних положень методики побудови ГІР та порівняльної оцінки ефективності чисельної реалізації методу на прикладі двовірної задачі теплопровідності.

Розглядається двовірний інженерний об'єкт скінченних розмірів, кожна точка x якого належить області S , обмеженій кусочно-гладкою границею Γ . Зовнішній по відношенню до S орт нормалі в точці границі y ($y \in \Gamma$) позначено через $\mathbf{n}(y)$ (рис. 1).

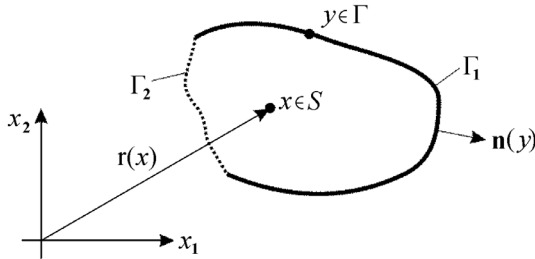


Рисунок 1 – Основні позначення

Ставиться крайова задача для рівняння Пуассона по визначенню температурного поля $u(x)$ – функції гармонічної в області S

$$\Delta u(x) = f(x), \quad (1)$$

де $x = \{x_1, x_2\}^T$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $f(x) = -\frac{1}{k}Q(x)$, k – коефіцієнт теплопровідності, $Q(x)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла.

При наступних крайових умовах: на одній частині границі Γ_1 задана температура $u^+(y)$ (крайові умови типу Диріхле), а на іншій Γ_2 – еквівалент теплового потоку (умови типу Неймана):

$$\begin{aligned} u^+(y) \Big|_{y \in \Gamma_1} &= f_1(y), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ \Big|_{y \in \Gamma_2} &= f_2(y). \end{aligned} \quad (2)$$

В якості прикладів розглядаються модельні задачі, а результати порівнюються з аналогічними одержаними за допомогою МСЕ.

3 Основні положення алгоритму. Приведемо основні моменти формалізму МГІР спільні при рішенні різних класичних рівнянь в частинних похідних для задач механіки суцільного середовища.

3.1 Теорема про дивергенцію для плоскої області. Для зменшення порядку задачі звичайно використовується одна із форм теореми про диверген-

цію. Відповідну формулу для випадку плоскої області можна одержати з відомої формули Стокса (3) для просторової поверхні S (рис. 2).

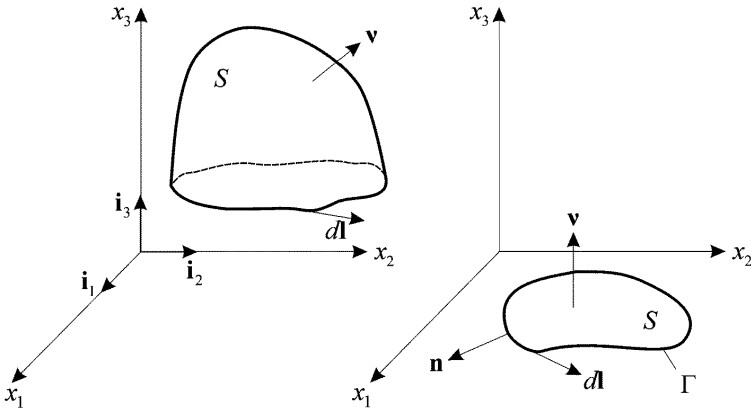


Рисунок 2 – До теореми Стокса

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3)$$

де $\mathbf{A} = \{A_1 A_2 A_3\}^T$ – регулярний вектор; $d\mathbf{l} = ldl$ – орієнтований відрізок контуру Γ ; \mathbf{v} – зовнішня по відношенню до S нормаль.

Якщо прийняти $\mathbf{v} = \mathbf{i}_3$, використати символ Леві-Чівіті ϵ_{ijk} , виконати нижче наведені перетворення, то можна привести (3) до теореми про дивергенцію деякого двомірного вектору $\mathbf{B} = \{B_1 B_2 0\}$, де $B_j = \sum_{k=1}^2 \epsilon_{k3j} A_k$:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{i}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j};$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} v_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^2 \epsilon_{k3j} A_k \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = \text{div } \mathbf{B}.$$

$$d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) dl = \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{i}_i v_j n_k dl = \sum_{i,k=1}^2 \epsilon_{i3k} \mathbf{i}_i n_k dl;$$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i,k=1}^2 \epsilon_{i3k} A_i n_k dl = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon_{i3k} A_i \right) n_k dl = \sum_{k=1}^2 B_k n_k dl = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dl.$$

Таким чином, для приведеного зв'язку напрямків \mathbf{n} , $d\mathbf{l}$ (рис. 2) теорема про дивергенцію для плоскої області має вигляд

$$\int_S \text{div } \mathbf{B} dS = \oint_L \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dl. \quad (4)$$

3.2 Фундаментальне (сингулярне) рішення рівняння Лапласу. Для рішення задачі Лапласа-Пуассона використовується метод потенціалів та пере-

хід до інтегральних рівнянь. Потенціали будуються використовуючи фундаментальне рішення рівняння $\Delta\Phi(z,x) = \delta(z-x)$:

$$\Phi(z,x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad (5)$$

де $r = \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2}$.

Це рішення показує розподіл температури в необмеженій двомірній області від зосередженого в точці z елементарного теплового джерела. Характерною особливістю цього рішення є наявність сингулярності в точці z .

3.3 Формалізм методу потенціалу. Висока ступінь абстракції дозволяє надавати чіткість та стрункність результатам досліджень. Тому зручно поставлену крайову задачу (1, 2) замінити еквівалентним операторним рівнянням

$$Au = f, \quad (1)$$

$$u^+(y) \Big|_{y \in \Gamma_1} = f_1(y),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ \Big|_{y \in \Gamma_2} = f_2(y), \quad (2)$$

де $A = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – додатно-визначений оператор, заданий в гільбертовому просторі H і $f, f_1, f_2 \in H$.

Границя Γ двомірної області S є простою замкнутою кривою з неперервними характеристиками.

Звичайно вводять спряжений оператор, чудовою властивістю якого є наступна: при довільних $u, v \in H$ вираз $(vAu - uA^*v)$ представляє собою дивергенцію деякого вектору \mathbf{B} :

$$(vAu - uA^*v) = v\Delta u - u\Delta v = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = \text{div} \mathbf{B},$$

де $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$, $B_i = v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

В такому разі можливо використати співвідношення про дивергенцію (4), права частина якого прийме вигляд

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \Big|_{y \in \Gamma} = \sum_{i=1}^2 \left(v \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^+ n_i - u^+ \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) n_i \right) = v \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - u^+ \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right).$$

Відповідна формула Гріна для операторного рівняння (1) запишеться так

$$\int_S (vAu - uA^*v) dx = \oint_L \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - u^+ \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] dl. \quad (6)$$

Якщо прийняти до уваги, що в якості функції $v(x)$ використовується фундаментальне рішення, тобто $v(x) = \Phi(z,x)$ і $z \in S$, тоді формулу (6) потрібно використовувати для області S/S_ε , з якої вилучена сингулярна точка z (рис. 3, а) і виконати граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S/S_\varepsilon} \Phi(z,x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} \left[\Phi(z,y) \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - u^+(y) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] dy l,$$

де S_ε та Γ_ε – шар та поверхня радіусу ε навколо особливої точки.

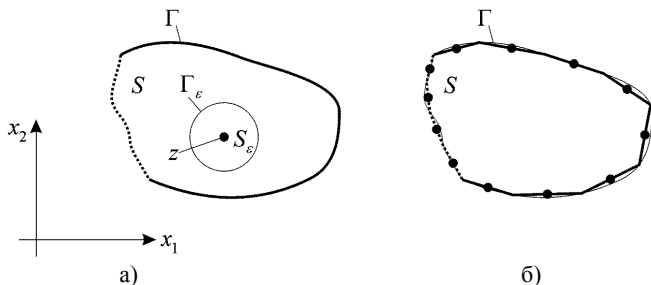


Рисунок 3 – До виводу загальних співвідношень МГР

Якщо врахувати, що потенціали по області та простого шару неперервні, а подвійного шару має стрибок, матимемо основну розрахункову формулу методу потенціалу:

$$K(z)u(z) = \oint_{\Gamma} \left[\Phi(z, y) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ - u^+(y) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] d_y l - \int_S \Phi(z, x) f(x) dx, \quad (7)$$

де $K(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d_y l$. Інтеграли в правій частині (7) потрібно розуміти

в сенсі головного значення.

Для точок $z \in S$ коефіцієнт $K(z) = 1$, а для точок z , що належать гладким ділянкам контуру $K(z) = 0,5$. При рішенні практичних задач вимушені зустрічатися з нерегулярністю в геометрії і граничних умовах конструкції, яка проявляється, у вигляді ребер та кутів. В таких випадках величину $K(z)$ потрібно обчислювати у кожному конкретному випадку окремо. Найбільш часто для цього використовуються однорідні рішення задачі.

4 Алгоритм дискретизації інтегрального рівняння. При чисельному рішенні задач спочатку будують граничне інтегральне рівняння (ГІР). Для цього точку z рівняння (7) виносимо на границю тіла ($z \in \Gamma$). В результаті отримаємо інтегральне рівняння, що пов'язує невідомі щільності потенціалів розподілені по границі області. Далі виконується дискретизація рівняння (7). Границя області Γ розбивається на скінченну кількість граничних елементів (ГЕ) (рис. 3, б). В межах кожного призначається певна кількість вузлових точок, наприклад, одна в центрі ГЕ. Невідомі щільності потенціалів $u^+(y)$ і $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+$ на кожному ГЕ апроксимуються функціями заданого виду. Найпростішою такою апроксимацією є апроксимація невідомих постійними значеннями. Якщо тепер послідовно призначати координати точки z відповідним вузловим точкам на ГЕ, то рівняння (7) перейдуть в замкнену систему алгебраїчних рівнянь відносно вузлових щільностей потенціалів на границі:

$$\frac{1}{2}u^+(z_i) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j^+ \int_{\Gamma_j} \Phi(z_i, y) d_y l - \sum_{j=1}^N u_j^+ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d_y l, \quad (8)$$

де $i = 1, 2, \dots, N$. Рівняння (8) записані для випадку апроксимації невідомих постійними на ГЕ та відсутності внутрішніх джерел тепла ($f(x) = 0$). Коефіцієнти цих рівнянь визначаються значеннями великої кількості інтегралів по контуру від фундаментального рішення задачі.

Зручно записати одержану систему алгебраїчних рівнянь в клітковій матричній формі:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

При цьому використані такі позначення: u_1, u_2 – вектори значень температури $u^+(y)$ в тих вузлових точках, в яких задана температура або тепловий потік відповідно, τ_1, τ_2 – вектори значень теплового потоку $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+$ в тих же точках границі Γ . Порядок системи рівнянь дорівнює N – по кількості вузлових точок, а число невідомих $2N$. Але в коректно поставленій задачі в кожній точці поверхні повинні бути відомими або компоненти u_1 , або τ_2 , тому заключна розрахункова формула буде такою:

$$\begin{bmatrix} m_{12} & -k_{11} \\ \frac{1}{2}E + m_{22} & -k_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}E - m_{11} & k_{12} \\ -m_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Вона дозволяє знайти невідомий розподіл температури та теплового потоку на ділянках Γ_2 та Γ_1 відповідно. Це означає рішення граничного інтегрального рівняння і повну інформацію про розподіл $u^+(y)$ та $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+$ на всій границі тіла. Значення $u(z)$ і (du/dz) у довільній точці S можуть бути визначені за допомогою квадратур по формулі (7).

5 Алгоритм рішення задачі. Чисельне розв'язання поставленої задачі було зроблено за допомогою системи комп'ютерної математики Maple. Для цього був розроблений ряд процедур реалізуючих наведений вище алгоритм.

Щоб виконати розрахунки в Maple потрібно завчасно приготувати геометрію досліджуваної області, для чого зручно використати програму HyperMesh. Завдяки їй користувач може побудувати геометрію та зробити автоматичну триангуляцію розрахункової області. Ця триангуляція і є початковим пунктом роботи алгоритму, тому що її границя використовується для побудови ГЕ, а внутрішня – для наступної візуалізації результатів (рис. 4). Паралельно ця ж розбивка використовується в розрахунках МСЕ для наступного порівняння результатів.

6 Результати рішення задач теплопровідності для модельних задач. В цій роботі розглядаються три модельні задачі – розподілення температури в квадратній та круглій областях, а також розподілення температури у фрагменті гільзи циліндру ДВЗ.

Сторона квадрату прийнята одиничною, також як і коефіцієнт теплопровідності. Крайові умови показані на рис. 5.

Радіус круга взято одиничним, а коефіцієнт теплопровідності рівним 0,5.

Крайові умови для круга показані також на рис. 5.

Ескіз розрізу гільзи наведено на рис. 6. Прийнято, що розподіл температури по довжині гільзи змінюється мало, а також що гільза є циклічно-симетричною з сектором 120° .

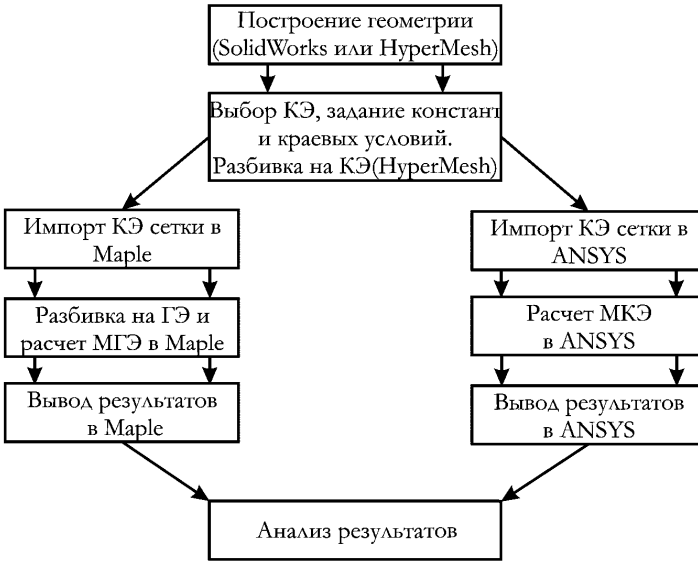


Рисунок 4 – Загальний алгоритм рішення задачі

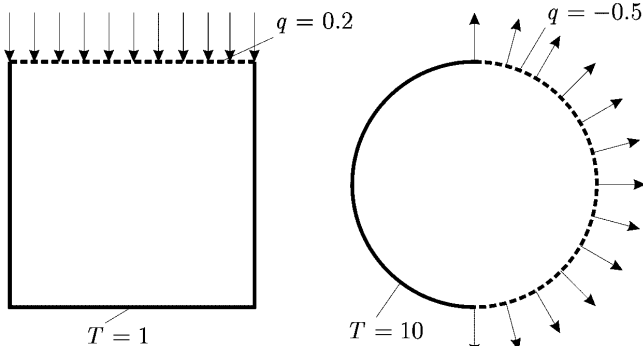


Рисунок 5 – Крайові умови для модельних задач (квадрат та круг)

Тобто, вводяться припущення, щоб була можливою двомірною постановкою задачі. Крайові умови для фрагменту гільзи наведено на рис. 6, а коефіцієнт теплопровідності для матеріалу взято рівним $20,323 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$.

При розрахунках проводиться порівняльна оцінка результатів одержаних двома методами МСЕ та МГП на одній і тій же «грубій» СЕ-сітці.

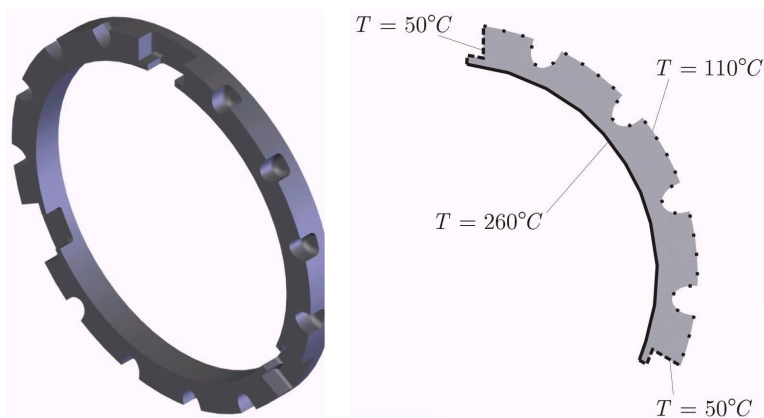


Рисунок 6 – Крайові умови для фрагменту гільзи циліндру ДВЗ

Еталонні рішення цих задач приведені на рис. 7¹ і представляють собою також SE-рішення, але одержані на сітках, розмір яких на порядок перевищує сітки модельних задач.

На рис. 8, а; 9, а та 10, а приведені SE-області розглянутих модельних задач, які були одержані за допомогою програми HyperMesh. Вони включають відповідно 26, 162, 184 скінченних елементи та 20, 95, 141 глобальних вузлових невідомих.

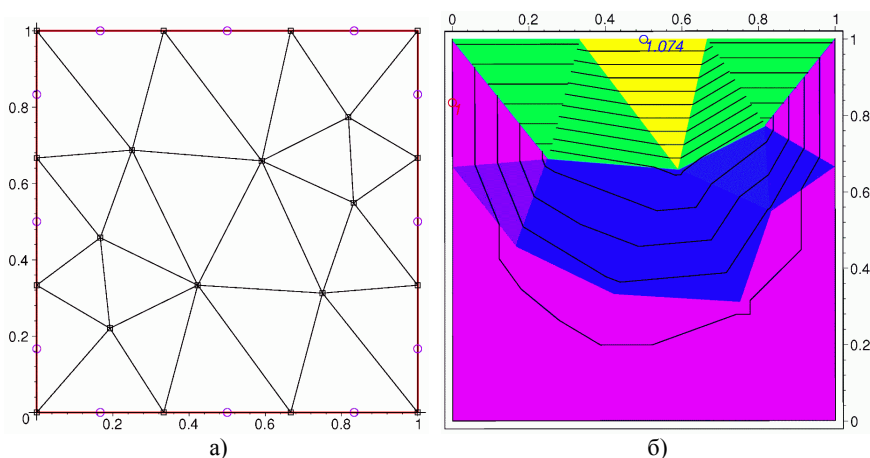


Рисунок 8 – Розрахункова SE сітка (а) та рішення МГР (б) для квадрату

Побудовані SE-моделі були імпортовані в ANSYS та проведені розрахунки температурного поля методом SE. Ці ж сітки моделювання були імпортовані в Maple і використані при рішенні задач методом ГР. Зовнішні грані SE

¹Рис. 7 розміщено на кольоровій вкладці між сторінками 66 і 67.

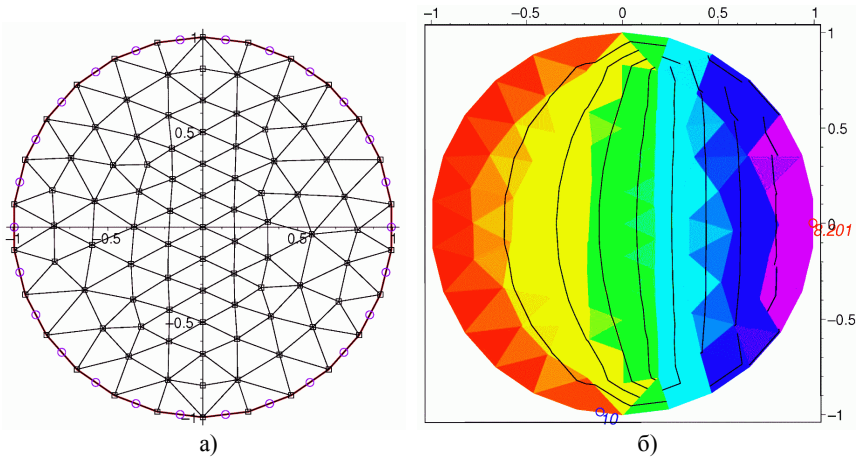


Рисунок 9 – Розрахункова СЕ сітка (а) та рішення МГР (б) для круга

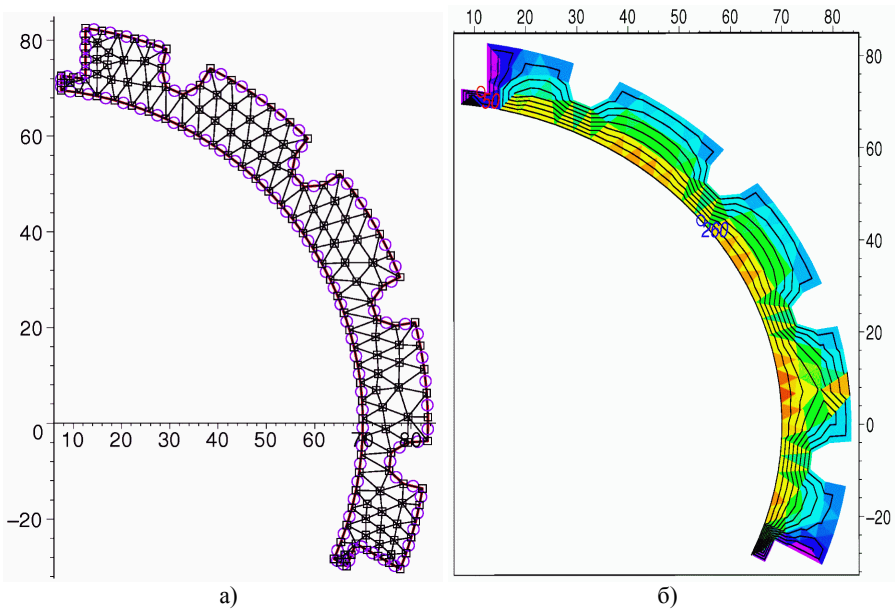


Рисунок 10 – Розрахункова СЕ сітка (а) та рішення МГР (б) для фрагменту гільзи циліндру ДВЗ

розглядалися як лінійні ГЕ. В їх межах температура вважалася постійною, тобто вибиралася одна вузлова точка в центрі ГЕ. Загальна кількість вузлових граничних невідомих була 12, 26 та 86 відповідно.

Результати розподілу полів температур, обчислених МГР, приведені на рис. 8, б, 9, б та 10, б. Причому кількість внутрішніх точок області для МГР

бралася обмеженою і призначалася лише для якісного відображення розподілу температури. Поля температур, одержані МСЕ на грубій сітці адекватні наведеним і не приводяться.

Порівняння чисельних значень виконувалось у вузлових точках граничних елементів. І практично для всіх результати одержані МГПР краще співпадають з еталонним ніж МСЕ. Наприклад, у випадку для квадрату, щоб одержати співпадіння результатів МСЕ з точністю 3-х знаків з рішенням МГПР довелося збільшити кількість СЕ до 340 (з лінійною апроксимацією невідомих).

7. Висновки. В роботі викладені основні положення методики побудови ГПР для класичних рівнянь математичної фізики в частинних похідних, які можуть бути корисними при рішенні практично важливих інженерних задач великого розміру. Розглянуто можливості програмної реалізації алгоритму, побудови геометрії, сітки та візуалізації результатів за допомогою широкодоступних пакетів Maple, HyperMesh, SolidWorks, Ansys.

Виконана реалізація МГПР одного практично важливого типу рівнянь – Пуассона. Результати розрахунків модельних задач відповідають репутації МГПР як високоефективного чисельного методу рішення задач механіки.

Список літератури: 1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. 2. Беляев Н.М. Основы теплопередачи:– К.: Вища школа.

Надійшла до редколегії 04.11.2008.

УДК 539.3

С.ДАРЯЗАДЕ; НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ТОРМОЗНОГО ДИСКА АВТОМОБИЛЯ

У роботі розглядається напружений і деформований стан гальмівного диска автомобіля при силовому й температурному навантаженнях. Виконано аналіз зовнішніх впливів на гальмівний диск при екстремому гальмуванні. За допомогою МСЕ розв'язано задачі нестационарної теплопровідності й термопружності.

Stresses and deformed states of the car brake disk are considered in the work with force and temperature loading. The analysis of external forcing on the brake disk under emergency braking is executed. The tasks of non-stationary heat conductivity and thermoelasticity are solved by the finite-element method.

Введение. Динамичное вождение автомобиля предполагает частое и интенсивное торможение, а эффективность торможения с повышением температуры тормозных устройств падает. При нагрузках тормозные диски могут нагреваться до очень высоких температур, и если это тепло передается ступице, то вероятен выход из строя этого узла.

Постановка задачи. Расчеты напряженно-деформированного состояния деталей машин по уточненным расчетным схемам от действия всех видов силового и температурного нагружений имеют важное место в механике. Данная задача может служить примером достаточно эффективного использования новых возможностей моделирования и рационального проектирования в системе пространственного твердотельного ANSYS.

Тормозной диск представляет собой одну из самых ответственных деталей тормозной системы. Его долговечность зависит от двух факторов: температурного и напряженного состояний, вызванных силами трения при торможении. Конструкция тормозного диска является осесимметричной, однако несимметричное приложение нагрузки не позволяет применить осесимметричную расчетную модель. Рассматриваются два вида моделей тормозных дисков для двух типов задач (рис. 1¹): задачи термоупругости и статической задачи от действия сил торможения, передаваемых на диск через тормозные колодки.

Исходные данные для расчета. Автомобиль массой $m = 1000$ кг, движущийся со скоростью $v = 120$ км/ч, начинает торможение и через $t = 6$ секунд останавливается.

Кинетическая энергия автомобиля равна

$$U = mv^2/2 = 554 \cdot 10^3 \text{ Дж.} \quad (1)$$

Во время торможения колодки передают на диск тепловой поток суммарной мощностью

$$M = U/t = 92,3 \cdot 10^3 \text{ Вт.} \quad (2)$$

Мощность, которая передается на каждую сторону тормозного диска равна

$$M_j = M/8 = 11,5 \cdot 10^3 \text{ Вт.}$$

Удельный тепловой поток

$$T = M_j/S = 3,1 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2, \quad (3)$$

где S – площадь контакта между колодками и диском.

Это задача представляет собой нестационарную задачу теплопроводности. Для ее решения использовался программный комплекс ANSYS. При заданной нагрузке от тормозных колодок необходимо приложить силу нормального давления и силу трения.

Ускорение автомобиля при торможении

$$a = v/t = 5,55 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

Суммарное тормозное усилие $F = ma$ передается на автомобиль через 4 колеса. Тормозное усилие на одном колесе $F_0 = F/4$. Это усилие передается с помощью 2-х тормозных колодок на тормозной диск. Его величина определяется из условий равенства крутящих моментов:

$$F_k = \frac{F_0 R}{2r}, \quad (5)$$

где $R = 140$ мм – радиус колеса, $r = 107$ мм – расстояние от центра колеса

¹Рис. 1 размещен на цветной вкладке между страницами 66 и 67.

Рис. 7 до статті В.М.Грищенко, С.В.Гладкова

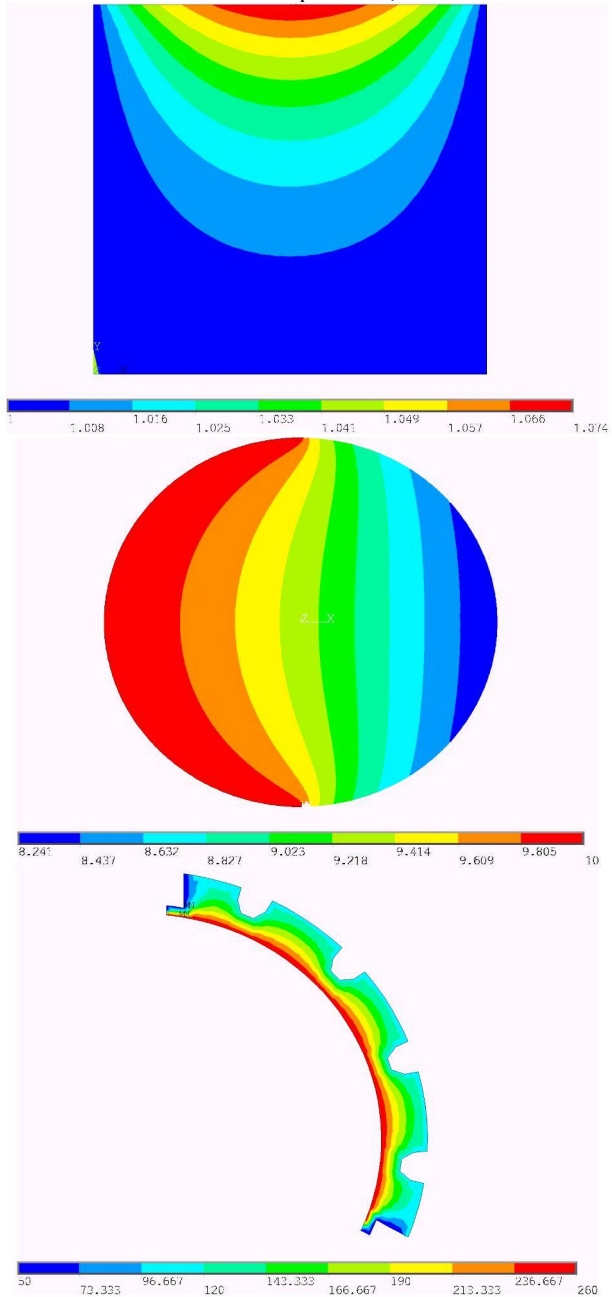


Рисунок 7 – Еталонні рішення модельних задач МСЕ

Рис. 1,2,3,5,6,8 к статье С.Дарязде

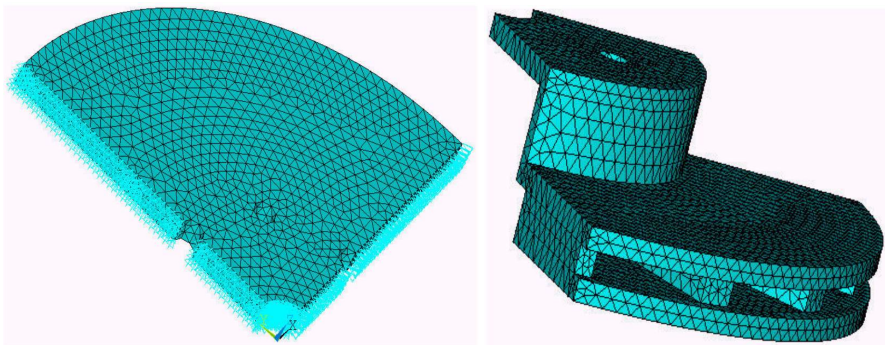


Рисунок 1 – Модели детали, разбитые на конечные элементы

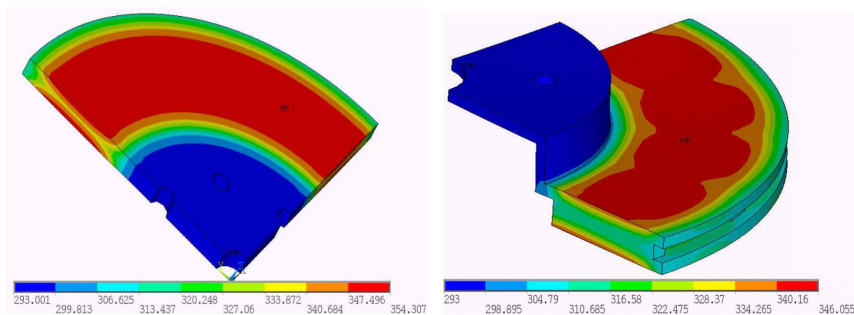


Рисунок 2 – Температурное состояние тормозного диска в момент времени 6 с, град. К

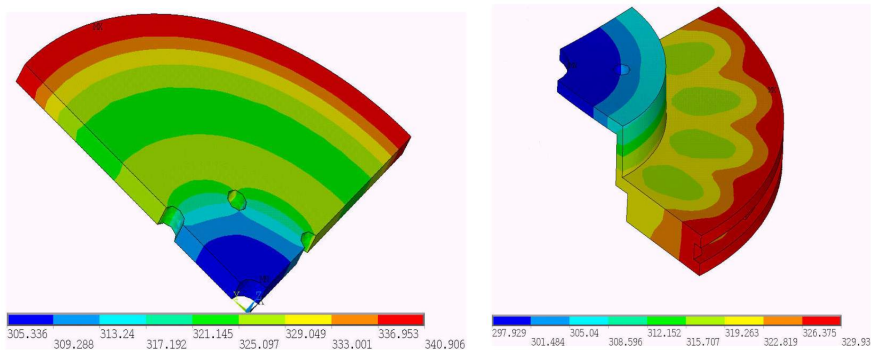


Рисунок 3 – Температурное состояние тормозного диска в момент времени 100 с, град. К

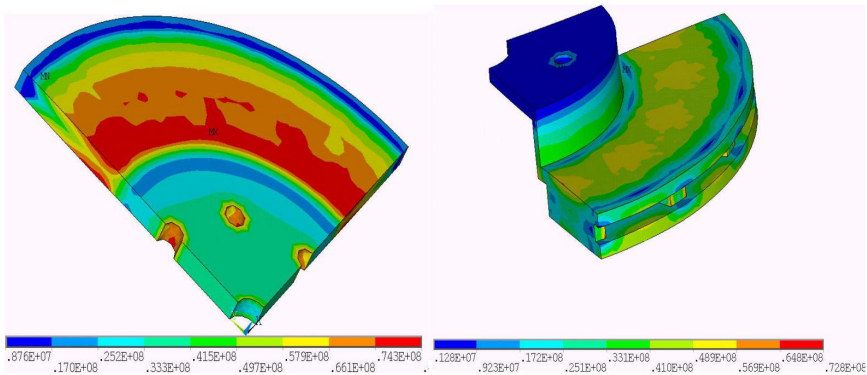


Рисунок 5 – Распределение эквивалентных напряжений в детали в момент времени 6 с.

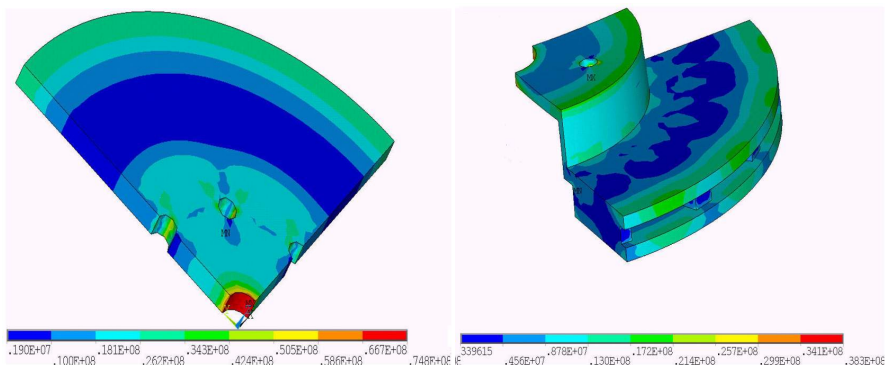


Рисунок 6 – Распределение эквивалентных напряжений в детали в момент времени 100 с.

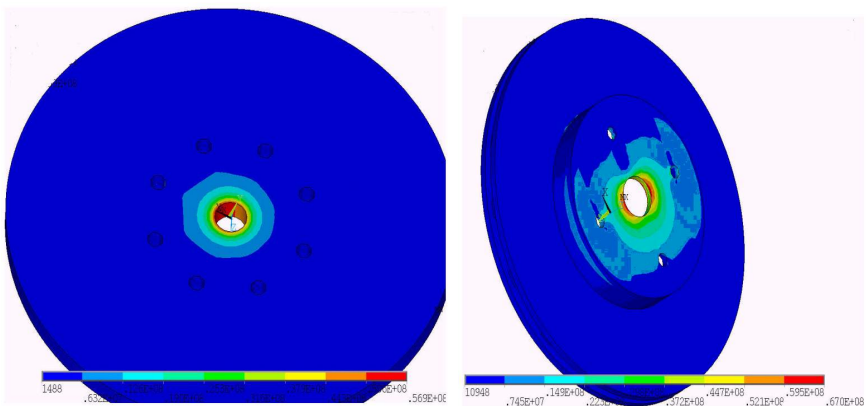


Рисунок 8 – Распределение эквивалентных напряжений в детали

до тормозной колодки. Величина касательного усилия составляет $F_k = 4,55 \cdot 10^2$ Н. Величина нормального давления между тормозной колодкой и диском при коэффициенте трения 0,4 составляла

$$q = F_k / \mu S = 1,11 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2. \quad (6)$$

Математическая модель. Если температура тела изменяется, то наряду с напряжениями, вызванными силовой нагрузкой в теле могут возникнуть так называемые температурные напряжения. Определение этих напряжений составляет предмет температурной задачи теории упругости. Величина и закон распределения температурных напряжений зависят от изменения температуры тела, которое определяется решением задачи теплопроводности. Вполне естественно поэтому температурную задачу теории упругости рассматривать в комплексе с соответствующей задачей теории теплопроводности.

Разрешающая система уравнений термоупругости в перемещениях имеет вид [3]:

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \bar{u} + \bar{F} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_t \text{ grad } t = 0, \quad (7)$$

где \bar{u} – вектор перемещений,

α_t – температурный коэффициент линейного расширения,

λ, μ – упругие постоянные Ламе,

t – изменение температуры.

Основные уравнения теории теплопроводности. Для определения температурного поля в твердом теле пользуются уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (8)$$

где τ – время; $a = \lambda/c$ – температуропроводность (λ – теплопроводность; c – теплоемкость единицы объема).

В начальный момент времени $\tau = 0$ температура тела должна также удовлетворять начальному условию

$$t(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (9)$$

и условиям на границе тела.

Обычно различают четыре вида граничных условий: граничные условия первого рода

$$t = f_1(M, \tau), \quad M \in S, \quad \tau > 0. \quad (10)$$

граничные условия второго рода

$$\frac{\partial t}{\partial n} = f_2(M, \tau), \quad M \in S, \quad \tau > 0. \quad (11)$$

граничные условия третьего рода

$$\frac{\partial t}{\partial n} = k(t - t_c) = 0 \quad (12)$$

на площади S при $\tau > 0$.

При идеальном тепловом контакте двух тел граничные условия будут

ИМЕТЬ ВИД:

$$t_1 = t_2; \quad \lambda_1 \cdot \frac{\partial t_1}{\partial n} = \lambda_2 \cdot \frac{\partial t_2}{\partial n} \text{ на площади } S \text{ при } \tau > 0. \quad (13)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела,

$k = a_n/\lambda$ относительный коэффициент,

a_n — абсолютный коэффициент теплоотдачи в среду с температурой t_c).

Характеристики материала (сталь):

$\nu = 0,3$ — коэффициент Пуассона;

$E = 0,2 \cdot 10^9$ Па — модуль упругости;

$\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ — плотность;

$c = 465$ Дж/кг · град. — коэффициент теплоемкости;

$\lambda = 47$ Вт/м · град. — коэффициент теплопроводности;

$\alpha = 10 \cdot 10^{-6}$ — коэффициент температурного расширения материала;

$a_n = 50$ Вт/м² · град. — коэффициент теплоотдачи.

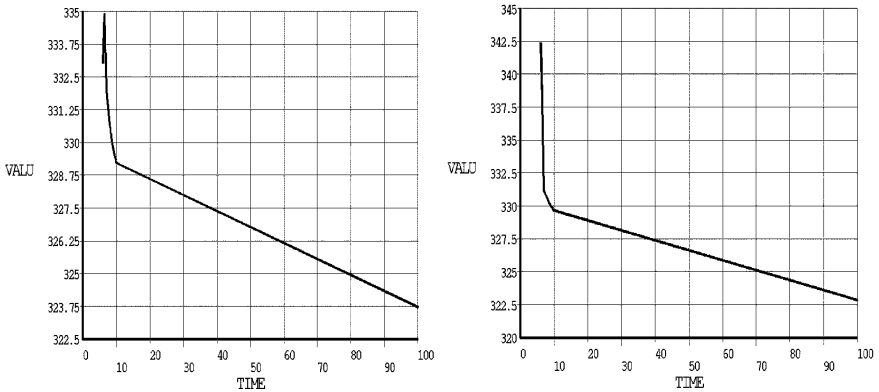


Рисунок 4 – Графики изменения температуры во времени

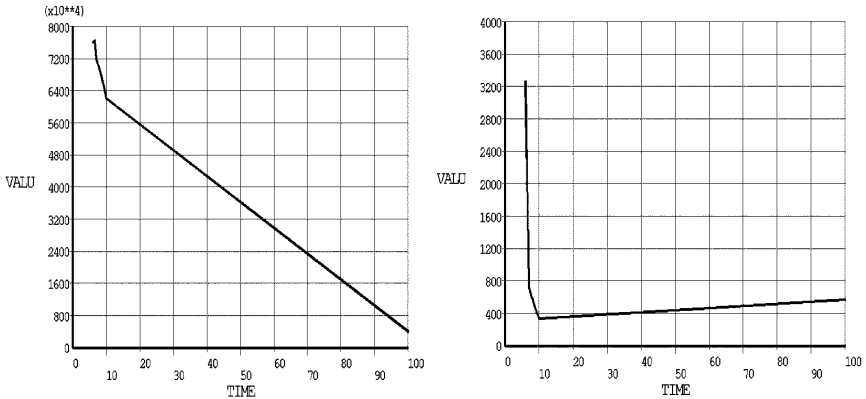


Рисунок 7 – Графики изменения напряжений во времени

Толщина диска первой модели равна составляет 10 мм, толщина каждого из дисков второй модели – 7 мм, высота ребер равна 10 мм, радиус отверстий равен 0,5 мм.

Температурное состояние диска в моменты времени 6 с. и 100 с. показано на рис. 2,3¹. График изменения во времени температуры в зоне контакта диска с тормозными колодками показан на рис. 4.

Распределение эквивалентных напряжений в детали показано на рис. 5, 6¹. График изменения во времени напряжений в зоне контакта диска с тормозными колодками показан на рис. 7¹.

Распределение эквивалентных напряжений показано на рис. 8.

Выводы. В работе рассматривается напряженное и деформированное состояние тормозного диска автомобиля при силовом и температурном нагружениях. Выполнен анализ внешних воздействий на тормозной диск при экстренном торможении. Решены задачи нестационарной теплопроводности и термоупругости.

Список литературы: 1. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 505 с. 2. *Будкин А., Ерыгин Д.* Тормозные диски «Волги» // За рулем. – № 8. – 2003. 3. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – Киев, Наукова думка, 1970. – 308 с. 4. *Кухтов В.Г.* Долговечность деталей шасси колесных тракторов. – Харьков, 2001. 5. *Кухтов В.Г., Щербак О.В., Лесь А.Н.* Комплексная оценка долговечности колесных тормозов тракторов типа Т-150К // Вестник НТУ «ХПИ». – № 25. – 2001. 6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с. 7. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с. 8. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с. 9. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с. 10. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев, Наукова думка, 1968. – 888 с. 11. *Тарабасов Н.Д.* Расчет напряженных посадок в машиностроении. – М.: Машгиз, 1961. – 268 с. 12. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с. 13. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград, Наука, 1967. – 402 с. 14. *Шнейдер П.* Инженерные проблемы теплопроводности. – Москва, Изд-во иностранной литературы, 1960. – 478 с.

Поступила в редколлегию 08.12.2008

¹Рис. 2,3,5,6,8 размещены на цветной вкладке между страницами 66 и 67.

В.А.ЖОВДАК, докт.техн.наук; *А.С.СТЕПЧЕНКО*, канд.техн.наук;
А.В.ТОРЯНИК; *С.В.КРАСНИКОВ*, канд.техн.наук;
НТУ «ХПИ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ РАССТРОЙКИ В МНОГОКОРПУСНЫХ ТУРБОАГРЕГАТАХ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ

У даній статті приводиться аналіз динаміки багатокорпусних турбоагрегатів на прикладі комп'ютерної кінцево-елементної моделі системи турбоагрегат-фундамент-основа K500. На основі порівняльного аналізу власних форм коливань окремого корпусу ЦНД і системи ТФО в цілому, досліджується явище розладу, що властиве багатокорпусним турбоагрегатам. Запропоновано рекомендації урахування розладу при проектуванні нових і модернізації існуючих турбоагрегатів.

This article provides an analysis of the dynamics of multi-body turbo sets on the example of computer finite-element model of turbine unit-foundation-base (UFB) K500. Based on natural modes comparative analysis of a cylinder of low pressure (CLP) separate body and entire UFB system, the mistuning investigation related to multi-body turbine is performed. Recommendations for detuning consideration have been proposed for the cases of designing new and upgrading existing turbo sets.

1 Введение. Актуальность проблемы. Поскольку атомные электростанции по-прежнему являются основным источником электроэнергии на Украине и в мире в целом, проблемы, связанные с их проектированием, эксплуатацией или модернизацией являются крайне актуальными. Как известно, максимальной мощностью и эффективностью обладают многокорпусные турбоагрегаты сложной конструкции. Данная работа посвящена исследованию вибрационных процессов, протекающих в агрегатах подобного рода.

В качестве объекта исследования в данной работе выступает система турбоагрегат - фундамент для турбины мощностью 500 Мвт – K500. Она состоит из железобетонного фундамента длиной более 60 метров, турбины, генератора, возбuditеля генератора. Особенностью конструкции турбины является наличие пяти корпусов, из которых четыре корпуса цилиндров низкого давления (ЦНД) и один корпус цилиндра высокого давления (ЦВД). ЦНД представляют собой одинаковые коробчатые металлические конструкции (габариты 8 x 9 x 6 метров) и состоят из пластин, оболочек, стержней и труб. В всех четырех корпусах ЦНД встроены опоры роторов, они наиболее податливы и требуют детального моделирования. ЦВД представляет собой твердую металлическую конструкцию, по форме близкую к цилиндрической, довольно жесткую, которая при работе турбины колеблется как единое целое и может моделироваться как система сосредоточенных масс. Все корпуса турбины и генератор соединены единым валопроводом.

2 Постановка задачи. Фундамент многокорпусного турбоагрегата K500, изображенный на рис. 1, имеет продольную плоскость симметрии. Однако в поперечном направлении фундамент несимметричен. Особенностью много-

корпусных турбоагрегатов подобного типа является расположение корпусов вдоль конструкции фундамента, что приводит к различной жесткости опирания. Наличие симметрично расположенных идентичных корпусов с несимметричными жесткостями закрепления требует детального исследования, поскольку заведомо предполагает густой спектр частот.

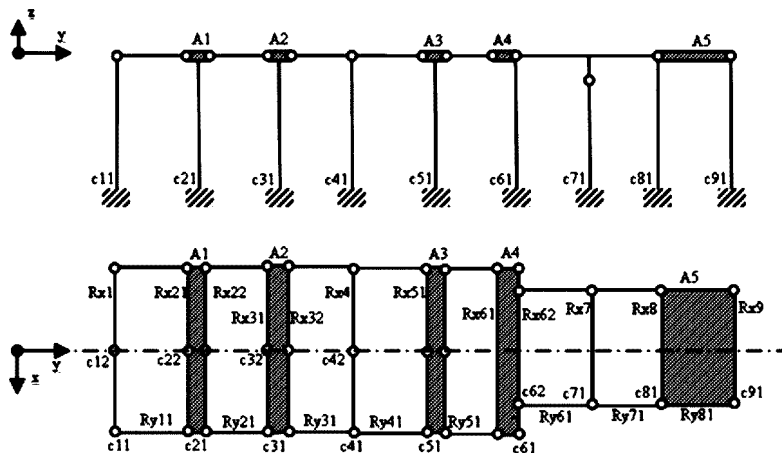


Рисунок 1 – Схема модели фундамента турбины К-500

Для проведения исследований был использован метод конечных элементов, хорошо зарекомендовавший себя при решении задач статики и динамики для конструкций со сложной геометрией, таких как система турбоагрегат-фундамент. Была построена конечно-элементная модель системы ТФО с подробным моделированием наиболее чувствительных к вибрациям корпусных конструкций турбины. Эти конструкции моделировались с помощью оболочечных, стержневых и массовых конечных элементов.

Фундамент системы моделировался на основании пластинчато-стержневой модели, результаты исследования которой были проведены ранее [1].

Корпус ЦВД турбины, валопровод, генератор и возбудитель генератора моделировались в виде системы масс. Заполненный водой конденсатор ЦНД моделировался с помощью кинематических ограничений и системы масс.

Корпус ЦНД, состоящий из корпусной части и крышки, моделировался детально. Геометрия нижней корпусной части и крышки приведена на рис. 2. Передаваемая на ЦНД масса конденсатора, обоймы и ротора учтены как сосредоточенные массы. Построенная конечно-элементная модель конструкции ЦНД в сборе представлена на рис. 3.

Поскольку остальные компоненты системы либо имеют очень высокую жесткость (ЦВД, возбудитель генератора), либо их жесткость не влияет на колебания ЦНД, они были смоделированы сосредоточенными массами в местах опирания на фундамент [2,3]. Система турбоагрегат-фундамент для турбины

К-500 имеет одну плоскость симметрии, поэтому для исследования колебаний смоделирована симметричная часть системы [2] с учетом граничных условий симметрии. Иллюстрация конечно-элементной модели системы ТФО К500 представлена на рис. 4. Выбранная схема моделирования системы ТФО имеет высокую степень адекватности и была апробирована в предыдущих исследованиях для однокорпусных турбоагрегатов [4].

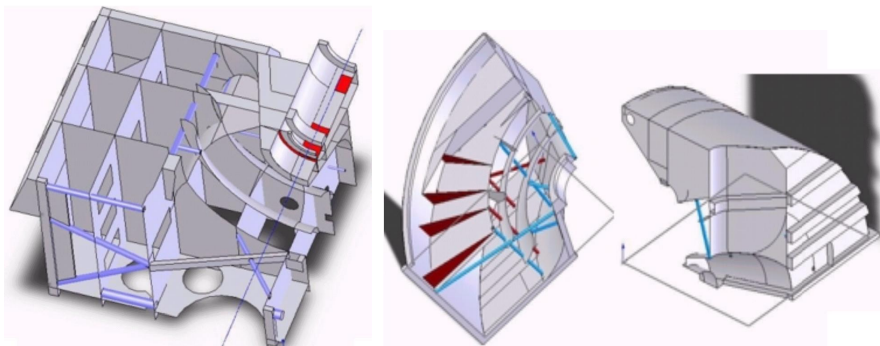


Рисунок 2 – Нижняя часть корпуса турбины К-500, 1/4

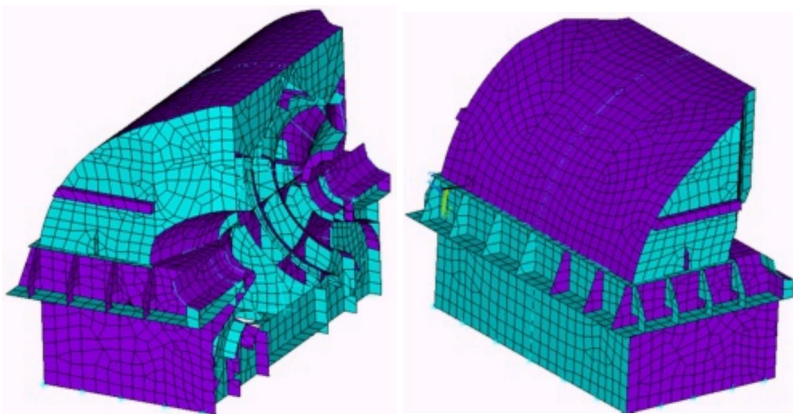


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель симметричной половины корпуса ЦНД турбины К-500 в сборе

3 Исследование динамических характеристик многокорпусного турбоагрегата. Вначале было проведено исследование колебаний одного ЦНД на основе модели симметричной половины корпуса в сборе (рис. 3), при этом крепление корпуса на фундамент было взято как жесткое. В результате расчета были получены собственные частоты, приведенные в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что ЦНД имеет достаточно густой спектр собственных частот в диапазоне до 50Гц. Часть из них кратные, так как половина ЦНД имеет плоскость симметрии. Анализ собственных форм колебаний показал, что

наиболее опасными являются формы с максимальными амплитудами у пластины продольного ребра и пластины в поперечной плоскости крышки корпуса. Данные формы приведены на рис. 5.

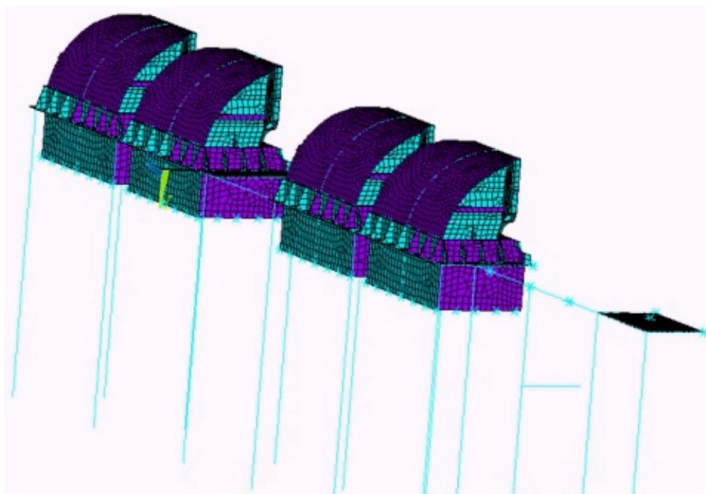


Рисунок 4 – Конечно-элементная модель симметричной половины системы ТФО К-500, конечно-элементная модель системы в целом

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний корпуса турбины К500

| № | Собственные частоты (Гц) | № | Собственные частоты (Гц) |
|---|--------------------------|----|--------------------------|
| 1 | 13,763 | 10 | 40,796 |
| 2 | 17,055 | 11 | 42,112 |
| 3 | 19,062 | 12 | 44,25 |
| 4 | 31,017 | 13 | 44,286 |
| 5 | 31,036 | 14 | 45,935 |
| 6 | 33,36 | 15 | 48,935 |
| 7 | 36,522 | 16 | 51,994 |
| 8 | 37,883 | 17 | 54,597 |
| 9 | 37,899 | | |

Для построенной модели системы ТФО (рис. 4) были проведены численные исследования собственных частот и форм колебаний с детализацией в районе рабочей частоты.

Расчет модели системы ТФО на собственные частоты дал густой спектр частот в диапазоне 0-55 Гц. Собственные частоты в районе рабочей частоты 50 Гц приведены в табл. 2. Как видно из табл. 2, данной конструкции присуще наличие собственных частот, сгруппированных относительно определенного значения. Анализ собственных форм соответствующих этим частотам, представленных на рис. 6, 7, 8, 9, показал, что эти собственные формы представля-

ют собой следствие реализации одной из собственных форм корпуса, приведенных ранее на рис. 5.

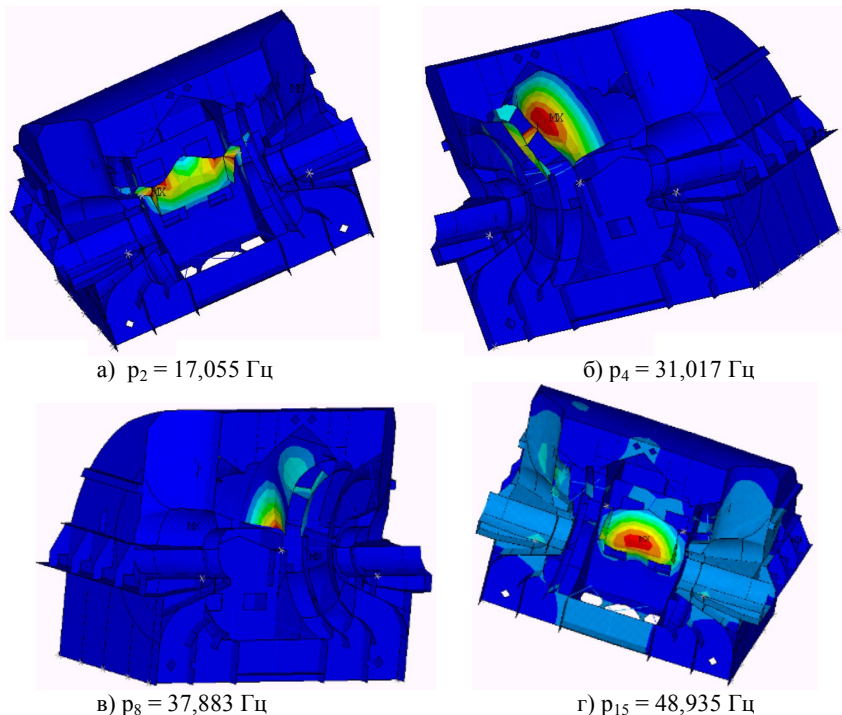


Рисунок 5 – Характерные собственные формы колебаний корпуса турбины K500

Анализ собственных форм колебаний на частотах $p_{90} = 45,706 \text{ Гц}$, $p_{91} = 46,067 \text{ Гц}$, $p_{92} = 46,388 \text{ Гц}$, $p_{93} = 47,314 \text{ Гц}$ показал, что проявляется одна и та же форма колебаний в разных корпусах ЦНД. Эта форма соответствует собственной форме колебаний p_{15} корпуса ЦНД, изображенной на рис. 5, г. Условно нумеруя ЦНД слева направо, данная форма реализуется в следующем виде – табл. 3.

Таблица 2 – Собственные частоты колебаний системы ТФО

| № | Собственные частоты (Гц) | № | Собственные частоты (Гц) |
|----|--------------------------|-----|--------------------------|
| 89 | 45,552 | 97 | 49,21 |
| 90 | 45,706 | 98 | 49,434 |
| 91 | 46,067 | 99 | 50,235 |
| 92 | 46,388 | 100 | 50,951 |
| 93 | 47,314 | 101 | 51,156 |
| 94 | 47,765 | 102 | 51,515 |
| 95 | 48,493 | 103 | 51,769 |
| 96 | 49,03 | | |

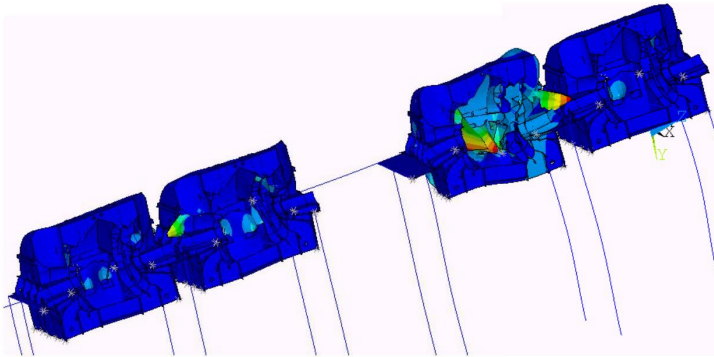


Рисунок 6 – Группа собственных форм колебаний системы ТФО в области 45-47 Гц – $p_{90} = 45,706$ Гц

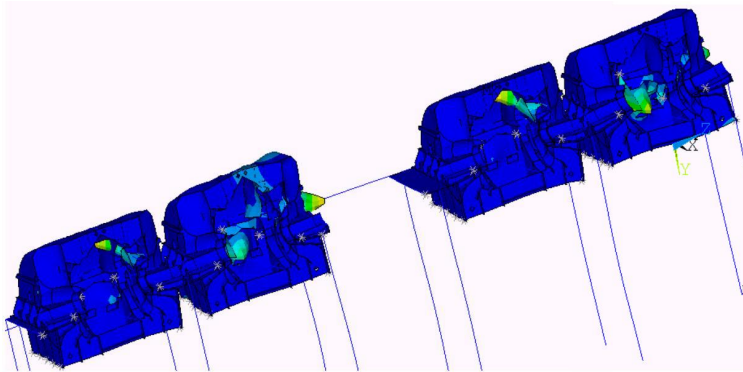


Рисунок 7 – Группа собственных форм колебаний системы ТФО в области 45-47 Гц – $p_{91} = 46,067$ Гц

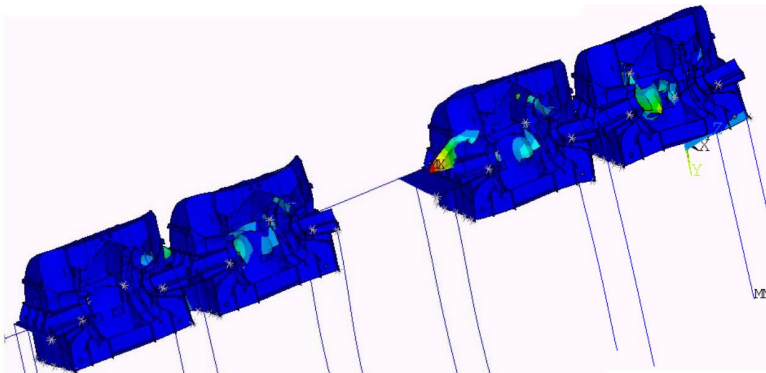


Рисунок 8 – Группа собственных форм колебаний системы ТФО в области 45-47 Гц – $p_{92} = 46,388$ Гц

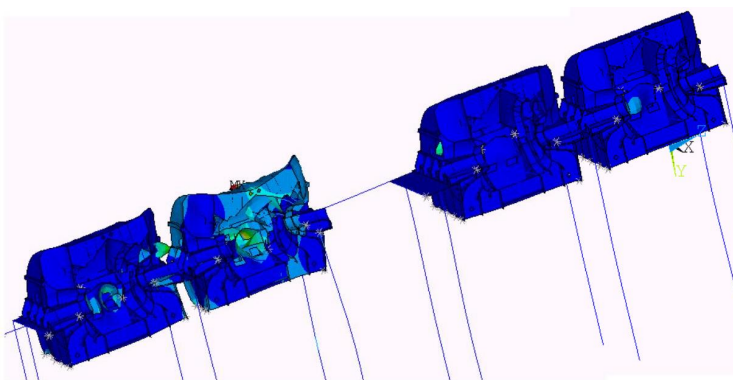


Рисунок 9 – Группа собственных форм колебаний системы ТФО в области 45-47 Гц – $p_{93} = 47,314$ Гц

Таблица 3 – Реализация собственной формы p_{15} колебаний корпуса в различных ЦНД на близких собственных частотах колебаний системы ТФО

| № ЦНД | Реализация собственной формы колебаний p_{15} корпуса ЦНД на собственных частотах системы ТФО | | | |
|-------|---|----------------------|----------------------|----------------------|
| | $p_{90} = 45,706$ Гц | $p_{91} = 46,067$ Гц | $p_{92} = 46,388$ Гц | $p_{93} = 47,314$ Гц |
| 1 | + | | | + |
| 2 | + | + | + | + |
| 3 | + | | + | |
| 4 | + | + | + | + |

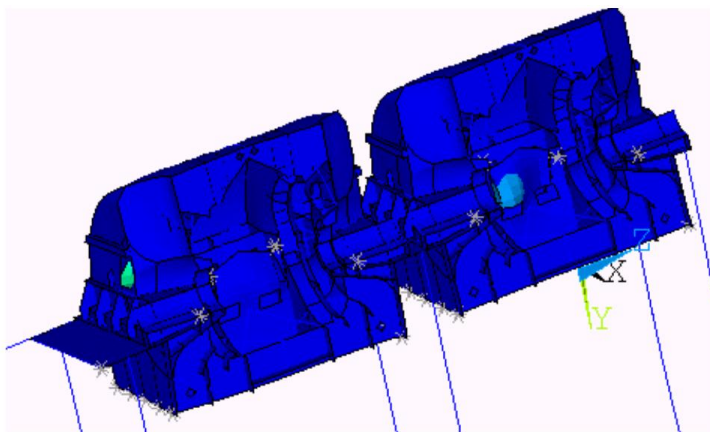
Из анализа собственных форм видно, что собственные формы колебаний системы делятся на группы, в каждой из которых реализуется одна и та же собственная форма корпуса ЦНД для одного или нескольких корпусов, то есть наблюдается расстройка. Это приводит к тому, что на разных собственных частотах колебания системы ТФО проявляется одна и та же форма колебаний корпуса ЦНД. Более того, из-за наличия локальных резонансов элементов фундамента, одна и та же форма колебаний корпуса может проявляться в разных частотных диапазонах, как проиллюстрировано на рис. 10.

Это явление объясняется тем, что несмотря на сходные условия закрепления 4 корпусов, жесткость фундамента для каждого из них различна. Таким образом, можно говорить о явлении расстройки собственных частот для многокорпусных агрегатов.

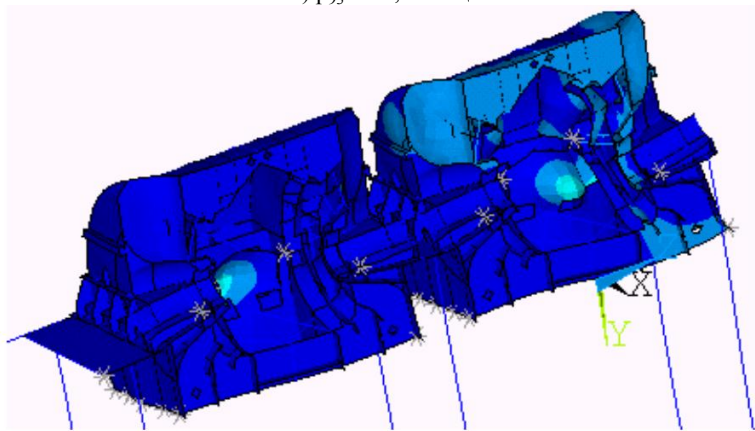
Кроме того, из-за близости собственных частот корпуса ЦНД ($p_{7,8,9}$ и $p_{12,13,14}$, см табл 1), для данной конструкций явление расстройки приводит к одновременной реализации разных собственных форм колебаний корпуса на одной собственной частоте системы ТФО. Данное явление реализуется, к примеру, в 3м корпусе на частоте $p_{92} = 46,388$ Гц (рис. 8) и соответствует формам корпуса ЦНД p_4 и p_{15} , проиллюстрированных на рисунках рис. 5, б и рис. 5, г.

Анализ собственных частот и форм колебаний показа, что при максимуме

амплитуд по одной форме для одного корпуса ЦНД, колебания с аналогичной формой наблюдаются и на соседних ЦНД, только с меньшей амплитудой. Данное явление может привести к увеличению ширины резонансного пика определяемого расстроенной собственной частотой, и соответственно уровню вибраций всех ЦНД системы.



а) $\rho_{93} = 47,314 \text{ Гц}$



б) 52.339 Гц

Рисунок 10 – Реализация одной и той же формы колебаний стенки корпуса на разных собственных частотах – 47 и 52 Гц

Следует отметить, что явление расстройки присуще всем многокорпусным турбоагрегатам и является их важной особенностью, которую следует учитывать при проектировании новых и модернизации существующих турбоагрегатов. Попадание одной из опасных собственных частот колебаний корпуса в рабочую область турбины приводит к тому, что отстройка от резонанса

представляет собой серьезную проблему:

- 1 требуется сдвиг собственных частот на величину, превышающую диапазон, в который попадает группа расстроенных частот;
- 2 плотность резонансных частот увеличивается пропорционально коэффициенту, соответствующему количеству корпусов, следовательно, отстройка от резонанса усложняется, так как сдвиг из одной резонансной области расстройки может привести к попаданию в другую резонансную область.

Выводы

Таким образом, исследование вибрационных характеристик многокорпусных турбоагрегатов показало наличие расстройки собственных частот колебаний ЦНД в системе ТФО. Данное явление присуще многокорпусным турбоагрегатам по причине невозможности создания абсолютно одинаковых по жесткости условий опирания корпусов.

Можно выделить следующие рекомендации учета расстройки при проектировании многокорпусных турбоагрегатов:

- 1 для отстройки от резонансов в рабочем диапазоне требуется смещение собственных частот на величину, значительно превышающую подобное значение при отстройке от резонансов у однокорпусных турбоагрегатов;
- 2 при оптимизации системы относительно резонансов следует учитывать опасность группы резонансов на каждом из диапазонов расстройки, так как густой спектр частот может не позволить отстроиться от резонанса полностью, но может иметь место возможность отстроиться на менее опасный резонанс;
- 3 явление расстройки в отдельных случаях приводит к взаимному наложению разных собственных форм ЦНД на одной собственной частоте системы ТФО.

Список литературы: 1. *Жовдак В.А., Красников С.В., Степченко А.С., Торьяник А.В.* Моделирование фундамента для многокорпусного турбоагрегата. // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 81-88. 2. *Степченко А.С.* Численные исследования динамических характеристик системы турбоагрегат-фундамент // Дисс. на соиск. ученой степени канд. техн. наук. Харьк. Гос. политех. ун-тет. – 1994. – 194 с. 3. *Красников С.В.* Колебания и надежность системы турбоагрегат-фундамент-основание с учетом случайности параметров // Дисс. на соиск. ученой степени канд. техн. наук. – НТУ «ХПИ». – 2003. – 140 с. 4. *Жовдак В.А., Красников С.В., Степченко А.С.* Исследование динамического взаимодействия турбоагрегата К-325-23.5 с фундаментом // Вестник ХГПУ. Вып. 53. Динамика и прочность машин. – Харьков, ХГПУ, 1999. – С.64-69.

Поступила в редакцию 13.11.2008

О.І.ЗИНЧЕНКО, канд.техн.наук; НТУ «ХП»

ДИНАМІЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МЕХАНІЗМУ ПРОСІВАННЯ ФОРМУВАЛЬНОЇ ЗЕМЛІ

У роботі запропонована методика розрахунку динамічних характеристик механізму просівання формувальної землі. Наведені результати розрахунків, одержані аналітичним методом і за допомогою апроксимації сплайном. Зіставлені результати.

In the article method of dynamical analysis of mechanisms of screening forming earths with application analytical method and by means approximate of spline are considered.

Вступ. Механізм просівання формувальної землі використовується в ливарному виробництві. Структура цього механізму така, що він складається із початкової ланки 1; ланок 2 і 4, які здійснюють складний рух і ланок 3 і 5, які здійснюють обертальний рух (див. рис.). Ланка 4 являє собою сито для просівання. Такий механізм відносять до механізму третього класу по Артоблевському [1].

При проектуванні машин або аналізі їх роботи нерідко з'являється необхідність обчислювати дійсні швидкості та прискорення ланок механізму або їх переміщення, які відповідають заданим положенням початкової ланки. В цьому випадку методи аналізу механізмів, розглянуті в кінематиці механізмів, не можуть бути використані, оскільки в них припускається заданим закон руху початкової ланки [1].

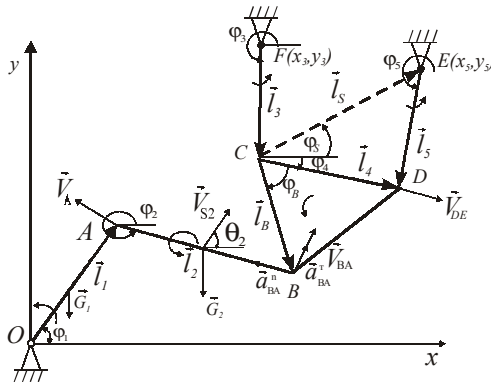


Рисунок – Механізм просівання формувальної землі

Співвідношення між приведеними до початкової ланки моментами рушійних сил і сил опору визначає стан руху машини – усталений чи неусталений. Однак, для одержання відповіді на те, які швидкості і прискорення точок механізму, необхідно скласти рівняння руху машини і розв'язати його відносно шуканої величини. Розв'язання поставленої задачі утруднене тим, що приведений момент інерції механізму є складною функцією невідомого положення

ланки, у той час як моменти зовнішніх сил можуть бути задані як функції часу або кутової швидкості.

Постановка задачі динамічного дослідження механізму третього класу. Метою даної статті є знаходження зведеного моменту інерції механізму просівання аналітично та за допомогою апроксимації сплайном, його першої похідної, знаходження зведеного моменту сил опору аналітично та за допомогою апроксимації сплайном.

Необхідно спочатку скласти рівняння руху механізму [2], тобто розв'язати систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{I_n} \left[M_\delta + M_o - \frac{1}{2} \psi^2 \frac{dI_n}{d\varphi} \right]; \frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad (1)$$

де ψ – шукана кутова швидкість, M_δ – зведений момент рушійних сил, M_o – зведений момент сил опору, I_n – зведений момент сил інерції.

M_o визначимо по формулі Клосса [2]:

$$M_o = \frac{2M_\kappa}{\frac{S_\kappa}{S} + \frac{S}{S_\kappa}}, \quad (2)$$

де $S = (\omega_c - \omega)/\omega_c$, ω_c – синхронна кутова швидкість, S – поточне ковзання ротора по відношенню до обертового магнітного поля, S_κ – критичне ковзання ротора, $S_\kappa = S_n(k + \sqrt{k^2 - 1})$, M_κ – критичний момент, $k = M_\kappa/M_n$ – коефіцієнт перевантаження.

Величини ω_c , S_n , M_n , k знаходимо із довідника. Величини системи (1) знайдемо наступним чином.

Виконаємо зведення мас і сил. Умовою еквівалентності механізму і його зведеної маси є рівність їх кінематичних енергій [3]. Для механізму, представленого на рисунку, кінетична енергія має вигляд:

$$T = \frac{\omega_1^2}{2} \left\{ I_1 + m_2 \left(\frac{v_{s2}}{\omega_1} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + I_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1} \right)^2 + m_4 \left(\frac{v_{s4}}{\omega_1} \right)^2 + I_4 \left(\frac{\omega_4}{\omega_1} \right)^2 + I_5 \left(\frac{\omega_5}{\omega_1} \right)^2 \right\} = I_n \frac{\omega_1^2}{2}. \quad (3)$$

В якості ланки зведення вибрано початкову ланку – кривошип. Тоді $m_n = I_n/I_1^2$, де m_n – зведена маса, I_n – зведений момент інерції.

Маємо:

$$I_n = 1/\omega_1^2 (m_2(v_{s2})^2 + I_2(\omega_2)^2 + I_3(\omega_3)^2 + I_4(\omega_4)^2 + m_4(v_{s4})^2 + I_5(\omega_5)^2). \quad (4)$$

$$\frac{dI_n}{d\varphi} = 2m_2v_{s2} \frac{dv_{s2}}{d\varphi} + 2I_2\omega_2 \frac{d\omega_2}{d\varphi} + 2I_3\psi_3 \frac{d\omega_3}{d\varphi} + 2m_4v_{s4} \frac{dv_{s4}}{d\varphi} + 2I_4\psi_4 \frac{d\omega_4}{d\varphi} +$$

$$+ 2I_5\psi_5 \frac{d\omega_5}{d\varphi}. \quad (5)$$

Зведений момент сил опору M_o знаходимо із умови рівності миттєвих потужностей механізму і ланки зведення [3]:

$$M_n = \sum_{i=1}^n P_i \frac{V_i}{\omega_n} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^n M_j \frac{\omega_j}{\omega_n}, \quad (6)$$

де P_i – сила, яка діє на i -ту ланку механізму; V_i – швидкість точки прикладення сили; α_i – кут між векторами P_i і V_i ; M_j – момент, який діє на j -ту ланку механізму; ω_j – кутова швидкість j -ої ланки механізму; ω_n – кутова швидкість ланки зведення.

В якості P_i розглядаємо сили ваги ланок. Таким чином, маємо:

$$M_o = -m_2 g V_{S2} \sin \theta_2 - m_3 g V_{S3} \sin \theta_3 - m_4 g V_{S4} \sin \theta_4 - m_5 g V_{S5} \sin \theta_5, \quad (7)$$

де θ_i – кут між напрямком вектора швидкості V_{Si} і віссю x (див. на рис. кут θ_2).

Зведений момент сил опору M_o знайдемо аналітично, а також ж з допомогою апроксимації сплайном.

В загальному вигляді задачу інтерполяції можна розв'язати, використовуючи формулу Лагранжа [4]. Формула Лагранжа дозволяє знайти многочлен степені p , який проходить через $p + 1$ задану точку. Однак, при високих степенях поліному крива може одержати характер, який не відповідатиме фізичній природі процесів в технічних системах. Тому доцільно використовувати інтерполяцію сплайном [4].

Позначимо сплайн, його першу і другу похідну відповідно S , S' , S'' . Нумерацію вузлових точок почнемо з нуля. Номер крайнього правого вузла – n . Номер ділянки співпадає з номером правого вузла.

Позначимо значення другої похідної S'' у вузлових точках через m_i . Тоді на ділянці $i + 1$ між вузлами i і $i + 1$ маємо:

$$S'' = m_i + k(m_{i+1} - m_i), \quad (8)$$

де k – безрозмірний аргумент на ділянці $i + 1$: $k = (x - x_i)/h$, де h – крок.

На лівій межі ділянки $k = 0$, на правій $k = 1$. Представлення S'' у вигляді (8) забезпечує неперервність другої похідної у вузлових точках.

Проінтегруємо два рази функцію (8) по змінній x , маючи на увазі, що $dk/dx = 1/h$. Маємо:

$$S' = (m_{i+1} - m_i) \frac{k^2 h}{2} + m_i k h + C_1; \quad (9)$$

$$S = (m_{i+1} - m_i) \frac{k^3 h^2}{6} + m_i \frac{k^2 h^2}{2} + C_1 k h + C_2. \quad (10)$$

C_1 і C_2 знайдемо із умови, що сплайн на ділянці $i + 1$ повинен проходити через вузлові точки с ординатами y_i і y_{i+1} . При цьому k приймає значення: $k = 0$ або $k = 1$. Із формул (9) і (10) одержимо:

$$C_1 = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (m_{i+1} - m_i) \frac{h}{6} - m_i \frac{h}{2}; \quad C_2 = y_i.$$

Підставляючи значення C_1 і C_2 у (9) і (10) одержимо:

$$S' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6} \left((2 - 6k + 3k^2)m_i + (1 - 3k^2)m_{i+1} \right); \quad (11)$$

$$S = (m_{i+1} - m_i) \frac{k^3 h^2}{6} + m_i k^2 \frac{3h^2}{6} + kh \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - (m_{i+1} - m_i) \frac{h}{6} - m_i \frac{h}{2} \right) + y_i.$$

Після приведення подібних членів одержимо:

$$S = y_{i+1}k + y_i(1 - k) + \frac{kh^2}{6} (k((m_{i+1} - m_i)k + 3m_i) - (m_{i+1} + 2m_i)). \quad (12)$$

Запишемо тепер умову неперервності першої похідної для внутрішніх вузлів відрізка інтерполяції. Значення S'_i для i -тої ділянки при $k = 1$, тобто в кінцевій точці ділянки $(i - 1, i)$, дорівнює:

$$S'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6} (-m_{i-1} - 2m_i). \quad (13)$$

S'_{i+1} при $k = 0$, тобто в початковій точці ділянки $(i, i + 1)$, дорівнює:

$$S'_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6} (m_{i+1} + 2m_i). \quad (14)$$

Тоді умова неперервності має вигляд:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6} (-m_{i-1} - 2m_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{6} (2m_i + m_{i+1}), \quad (15)$$

звідки випливає:

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{6}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}). \quad (16)$$

Для визначення $(n + 1)$ значення m_i може бути записано $(n - 1)$ рівняння (16). Ще два рівняння, яких не достає, можна задати у вигляді значень другої похідної на кінцях відрізка інтерполяції. Ці крайові значення для неперіодичної функції мають вигляд:

$$m(0) = U_0; \quad m(n) = U_n. \quad (17)$$

Найчастіше $m_0 = m_n = 0$, однак результати інтерполяції можуть бути покращені, якщо дослідити вплив цих величин на результати інтерполяції.

Система рівнянь (16), (17) лінійна відносно шуканих $m_1 \dots m_{n-1}$. Оскільки у ліві частини кожного із рівнянь (16), (17) входять лише три невідомі величини, матриця лівих частин є трюхдіагональною. Праві частини – відомі величини:

$$d_i = \frac{6}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}).$$

Канонічний вигляд рівнянь з трюхдіагональною матрицею має вигляд:

$$a_i m_{i-1} - b_i m_i + c_i m_{i+1} = d_i, \quad (18)$$

де коефіцієнти a_i, b_i, c_i наведені у табл. 1.

Система з трюхдіагональною матрицею найбільш просто розв'язується методом прогонки [4], який є окремим випадком методу Гауса, а тому має петворення прямого та оберненого ходів:

Таблиця 1

| i | a_i | b_i | c_i | $d_i h^2/6$ |
|-------|-------|-------|-------|----------------------------|
| 0 | 0 | -1 | 0 | $U_0 h^2/6$ |
| 1 | 1 | -4 | 1 | $y_2 - 2y_1 + y_0$ |
| 2 | 1 | -4 | 1 | $y_3 - 2y_2 + y_1$ |
| 3 | 1 | -4 | 1 | $y_4 - 2y_3 + y_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $n-1$ | 1 | -4 | 1 | $y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$ |
| n | 0 | 1 | 0 | $U_n h^2/6$ |

$$\lambda_{i+1} = c_i / (b_i - a_i \lambda_i); \eta_{i+1} = (a_i \eta_i - d_i) / (b_i - a_i \lambda_i), \quad (19)$$

де $i = \overline{1, n-1}$; λ_i, η_i – допоміжні коефіцієнти.

Так як коефіцієнти a_0 і c_0 дорівнюють нулю, то слід прийняти $\lambda_1 = 0; \eta_1 = 0$.

Формули перетворень оберненого ходу:

$$m_i = m_{i+1} \lambda_{i+1} + \eta_{i+1}. \quad (20)$$

У рівнянні (20) i слід змінювати від n до 0, задавши $m_n = U_n$. В результаті виконання усіх вказаних вище операцій знаходимо параметри m_1, m_2, \dots, m_{n-1} .

Результати динамічного дослідження механізму третього класу. Була розв'язана задача кінематичного дослідження даного механізму з наступними розмірами ланок і координатами нерухомих шарнірів: $x_3 = 75; y_3 = 93; x_5 = 128,5; y_5 = 103,5; l_1 = 10; l_2 = 104; l_3 = 60; l_4 = 64; l_5 = 48,5; l_B = 22; \varphi_B = -39,3; l_{S2} = 0,53 l_2; l_{S3} = 0,3 l_3; l_{S4} = 0,25 l_B; l_{S5} = 0,2 l_5$. Кутова швидкість ланки зведення $\omega_1 = 1$. Знайдено крайнє положення механізму, яке відповідає куту повороту кривошипу $\varphi_1 = \varphi_2 = 14,426^\circ$, при цьому інші кути повороту: $\varphi_3 = 283,826^\circ, \varphi_4 = 22,558^\circ, \varphi_5 = -65,721^\circ$. В результаті розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} -l_2 \psi_2 \sin \varphi_2 + l_3 \psi_3 \sin \varphi_3 + l_B \psi_4 \sin(\varphi_4 + \varphi_B) = l_1 \psi_1 \sin \varphi_1; \\ l_2 \psi_2 \cos \varphi_2 - l_3 \psi_3 \cos \varphi_3 - l_B \psi_4 \cos(\varphi_4 + \varphi_B) = -l_1 \psi_1 \cos \varphi_1; \\ -l_3 \psi_3 \sin \varphi_3 - l_4 \psi_4 \sin \varphi_4 + l_5 \psi_5 \sin \varphi_5 = 0; \\ l_3 \psi_3 \cos \varphi_3 + l_4 \psi_4 \cos \varphi_4 - l_5 \psi_5 \cos \varphi_5 = 0. \end{cases}$$

методом Гауса з вибором головного елемента [4] знайшли кутові швидкості ланок: $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5$ та швидкості центрів мас ланок $v_{S2}, v_{S3}, v_{S4}, v_{S5}$. В результаті розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} -l_1 \psi_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \psi_2^2 \cos \varphi_2 - l_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 = -l_3 \psi_3^2 \cos \varphi_3 - l_3 \varepsilon_3 \sin \varphi_3 - \\ -l_B \psi_4^2 \cos(\varphi_4 + \varphi_B) - l_B \varepsilon_4 \sin(\varphi_4 + \varphi_B); \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -l_1\psi_1' \sin \varphi_1 - l_2\psi_2' \sin \varphi_2 + l_2\varepsilon_2 \cos \varphi_2 = -l_3\psi_3' \sin \varphi_3 + l_3\varepsilon_3 \cos \varphi_3 - \\ -l_B\psi_4^2 \sin(\varphi_4 + \varphi_B) + l_B\varepsilon_4 \cos(\varphi_4 + \varphi_B); \\ -l_5\psi_5^2 \cos \varphi_5 - l_5\varepsilon_5 \sin \varphi_5 = -l_3\psi_3^2 \cos \varphi_3 - l_3\varepsilon_3 \sin \varphi_3 - l_4\psi_4^2 \cos \varphi_4 - l_4\varepsilon_4 \sin \varphi_4; \\ -l_5\psi_5^2 \sin \varphi_5 + l_5\varepsilon_5 \cos \varphi_5 = -l_3\psi_3^2 \sin \varphi_3 + l_3\varepsilon_3 \cos \varphi_3 - l_4\psi_4^2 \sin \varphi_4 + l_4\varepsilon_4 \cos \varphi_4. \end{array} \right.$$

знайшли кутові прискорення ланок: $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ та прискорення центрів мас ланок $a_{S2}, a_{S3}, a_{S4}, a_{S5}$.

Динамічне дослідження даного механізму проводилося з наступними вихідними даними:

$$I_1 = 0; I_2 = 0,8; I_3 = 0,5; I_4 = 18; I_5 = 0,2; m_2 = 10; m_3 = 5; m_4 = 550; m_5 = 3,5.$$

Результати представлені у вигляді таблиць 2, 3. У табл. 2, 3 $i = 0$ відповідає куту повороту кривошипа $\varphi_1 = \varphi_2 = 14,426^\circ$. Наступні значення i відповідають кутам повороту кривошипу, відрхованим через $7,5^\circ$ від попередніх значень. У табл. 2 наведені значення $I_n, dI_n/d\varphi$, знайдені із (4), (5) та значення S'_{In}, S'_{dIn} , знайдені із (11). У табл. 3 наведені значення M_o , знайдені із (7); S'_{Mo} та S'_{In} (похідні від сплайнів моменту сил опору та зведеного моменту інерції), знайдені із (11). Із табл. 3 видно, що максимальна похибка підрахунку величини S'_{In} порівняно із величиною $dI_n/d\varphi$ складає 0,119.

Таблиця 2

| i | I_n | S'_{In} | $dI_n/d\varphi$ | S'_{dIn} |
|-----|-------|-----------|-----------------|------------|
| 0 | 0,034 | 0,017 | -0,002 | 12,562 |
| 1 | 0,153 | 1,748 | 1,628 | 12,172 |
| 2 | 0,479 | 3,186 | 3,141 | 10,763 |
| 3 | 0,974 | 4,332 | 4,402 | 8,334 |
| 4 | 1,600 | 5,184 | 5,278 | 4,886 |
| 5 | 2,315 | 5,657 | 5,668 | 1,140 |
| 6 | 3,060 | 5,662 | 5,595 | -2,182 |
| 7 | 3,777 | 5,199 | 5,115 | -5,081 |
| 8 | 4,402 | 4,268 | 4,283 | -7,557 |
| 9 | 4,883 | 3,077 | 3,164 | -9,396 |
| 10 | 5,205 | 1,831 | 1,860 | -10,389 |
| 11 | 5,360 | 0,532 | 0,482 | -10,553 |
| 12 | 5,342 | -0,821 | -0,860 | -9,831 |
| 13 | 5,149 | -2,086 | -2,068 | -8,588 |
| 14 | 4,806 | -3,120 | -3,099 | -7,112 |
| 15 | 4,342 | -3,923 | -3,920 | -5,403 |
| 16 | 3,789 | -4,496 | -4,503 | -3,462 |
| 17 | 3,176 | -4,820 | -4,822 | -1,419 |
| 18 | 2,539 | -4,877 | -4,876 | 0,594 |
| 19 | 1,911 | -4,668 | -4,668 | 2,575 |

Продовження табл. 2

| i | I_n | S'_{I_n} | $dI_n/d\varphi$ | S'_{dI_n} |
|-----|-------|------------|-----------------|-------------|
| 20 | 1,328 | -4,192 | -4,203 | 4,527 |
| 21 | 0,824 | -3,487 | -3,491 | 6,300 |
| 22 | 0,424 | -2,592 | -2,5677 | 7,748 |
| 23 | 0,153 | -1,506 | -1,4764 | 8,871 |
| 24 | 0,038 | -0,229 | -0,259 | 9,669 |
| 25 | 0,095 | 1,090 | 1,032 | 9,939 |
| 26 | 0,319 | 2,304 | 2,311 | 9,4779 |
| 27 | 0,694 | 3,413 | 3,481 | 8,286 |
| 28 | 1,207 | 4,416 | 4,448 | 6,363 |
| 29 | 1,839 | 5,170 | 5,127 | 3,981 |
| 30 | 2,544 | 5,532 | 5,482 | 1,414 |
| 31 | 3,270 | 5,501 | 5,489 | -1,339 |
| 32 | 3,967 | 5,077 | 5,124 | -4,279 |
| 33 | 4,585 | 4,333 | 4,379 | -6,986 |
| 34 | 5,090 | 3,341 | 3,323 | -9,043 |
| 35 | 5,449 | 2,102 | 2,040 | -10,450 |
| 36 | 5,630 | 0,615 | 0,615 | -11,208 |
| 37 | 5,608 | -0,922 | -0,864 | -11,265 |
| 38 | 5,395 | -2,310 | -2,301 | -10,572 |
| 39 | 5,010 | -3,548 | -3,599 | -9,128 |
| 40 | 4,473 | -4,637 | -4,658 | -6,934 |
| 41 | 3,809 | -5,434 | -5,392 | -4,245 |
| 42 | 3,069 | -5,793 | -5,759 | -1,316 |
| 43 | 2,311 | -5,716 | -5,726 | 1,854 |
| 44 | 1,592 | -5,202 | -5,263 | 5,263 |
| 45 | 0,965 | -4,327 | -4,362 | 8,366 |
| 46 | 0,471 | -3,165 | -3,110 | 10,617 |
| 47 | 0,149 | -1,717 | -1,620 | 12,015 |
| 48 | 0,034 | 0,017 | -0,002 | 12,562 |

Таблиця 3

| i | M_o | S'_{M_o} | $dI_n/d\varphi$ | S'_{I_n} | похибка |
|-----|---------|------------|-----------------|------------|----------------|
| 0 | -4,933 | 179,608 | -0,002 | 0,017 | -0,019 |
| 1 | 18,462 | 176,395 | 1,628 | 1,748 | -0,119 |
| 2 | 40,867 | 164,481 | 3,141 | 3,186 | -0,045 |
| 3 | 61,143 | 143,865 | 4,402 | 4,332 | 0,070 |
| 4 | 78,151 | 114,548 | 5,278 | 5,184 | 0,094 |
| 5 | 90,950 | 81,059 | 5,668 | 5,657 | 0,011 |
| 6 | 99,388 | 47,927 | 5,595 | 5,662 | -0,067 |
| 7 | 103,513 | 15,154 | 5,115 | 5,199 | -0,084 |

Продовження табл. 3

| i | M_o | S'_{M_o} | $dI_n/d\varphi$ | S'_{I_n} | похибка |
|-----|-----------|------------|-----------------|------------|----------------|
| 8 | 103,371 | -17,262 | 4,283 | 4,268 | 0,015 |
| 9 | 99,149 | -46,122 | 3,164 | 3,077 | 0,088 |
| 10 | 91,591 | -68,226 | 1,860 | 1,831 | 0,029 |
| 11 | 81,582 | -83,576 | 0,482 | 0,532 | -0,051 |
| 12 | 70,006 | -92,171 | -0,861 | -0,821 | -0,040 |
| 13 | 57,706 | -94,940 | -2,068 | -2,086 | 0,017 |
| 14 | 45,364 | -92,809 | -3,100 | -3,120 | 0,021 |
| 15 | 33,622 | -85,779 | -3,920 | -3,923 | 0,003 |
| 16 | 23,121 | -73,850 | -4,503 | -4,496 | -0,007 |
| 17 | 14,403 | -59,295 | -4,822 | -4,820 | -0,002 |
| 18 | 7,613 | -44,385 | -4,876 | -4,877 | 0,001 |
| 19 | 2,799 | -29,120 | -4,668 | -4,668 | -0,000 |
| 20 | 0,005 | -13,500 | -4,203 | -4,192 | -0,011 |
| 21 | -0,809 | 0,450 | -3,491 | -3,487 | -0,004 |
| 22 | -0,0381 | 10,708 | -2,568 | -2,592 | 0,024 |
| 23 | 1,834 | 17,274 | -1,476 | -1,506 | 0,029 |
| 24 | 4,323 | 20,147 | -0,259 | -0,229 | -0,030 |
| 25 | 6,923 | 18,787 | 1,032 | 1,090 | -0,058 |
| 26 | 9,033 | 12,654 | 2,311 | 2,304 | 0,007 |
| 27 | 10,028 | 1,748 | 3,481 | 3,413 | 0,069 |
| 28 | 9,283 | -13,932 | 4,448 | 4,416 | 0,032 |
| 29 | 6,279 | -31,932 | 5,127 | 5,170 | -0,043 |
| 30 | 0,929 | -49,799 | 5,482 | 5,532 | -0,050 |
| 31 | -6,752 | -67,534 | 5,489 | 5,501 | -0,012 |
| 32 | -16,746 | -85,135 | 5,124 | 5,077 | 0,046 |
| 33 | -28,901 | -99,540 | 4,379 | 4,333 | 0,046 |
| 34 | -42,532 | -107,685 | 3,323 | 3,341 | -0,018 |
| 35 | -56,820 | -109,570 | 2,040 | 2,102 | -0,062 |
| 36 | -70,944 | -105,194 | 0,615 | 0,615 | 0,001 |
| 37 | -84,082 | -94,460 | -0,864 | -0,922 | 0,059 |
| 38 | -95,392 | -77,267 | -2,301 | -2,310 | 0,009 |
| 39 | -104,029 | -53,616 | -3,599 | -3,548 | -0,051 |
| 40 | -109,147 | -23,507 | -4,658 | -4,637 | -0,021 |
| 41 | -110,0421 | 9,856 | -5,392 | -5,434 | 0,042 |
| 42 | -106,564 | 43,270 | -5,759 | -5,793 | 0,035 |
| 43 | -98,711 | 76,735 | -5,726 | -5,716 | -0,010 |
| 44 | -86,473 | 110,250 | -5,26 | -5,20 | -0,061 |
| 45 | -70,023 | 139,741 | -4,362 | -4,327 | -0,035 |
| 46 | -50,242 | 161,130 | -3,110 | -3,165 | 0,055 |
| 47 | -28,192 | 174,419 | -1,620 | -1,717 | 0,098 |
| 48 | -4,933 | 179,608 | -0,002 | 0,017 | -0,019 |

Висновки. Розв'язана задача динамічного дослідження механізму для просівання формувальної землі. Розроблено комплекс програм мовою Паскаль, завдяки яким одержані необхідні кінематичні та динамічні характеристики механізму. У результаті роботи над даною задачею динамічного дослідження використана можливість розрахунку різними методами величини $dI_n/d\phi$. Виявилося, що величина похибки точного і наближеного методу незначна. Точним був підрахунок величини $dI_n/d\phi$ аналітичним методом, використовуючи формулу (5), а наближеним – підрахунок похідної від сплайну зведеного моменту інерції (S'_m). Таким чином, можна зробити висновок, що можливо значно зменшити час розрахунків, вилучивши із програми обчислення $dI_n/d\phi$ точним методом, тобто частину операторів, які визначають прискорення центрів мас ланок та кутові прискорення ланок (див. формулу 5).

Список літератури: 1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 776 с. 2. *Грунауэр А.А.* Теория механизмов и машин. – Киев: УМК ВО, 1992. – 384 с. 3. *Кожевников С.Н.* Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 591 с. 4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Надійшла до редколегії 27.11.2008

УДК 621.762: 621.763

А.Г.КУРИЛОВ; Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ», Харьков

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПОДШИПНИКА СКОЛЬЖЕНИЯ ДЛЯ ПОГРУЖНЫХ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕЙ

Був проведений розрахунок під'ятника ковзання, який працює у режимі рідинного тертя. Розрахунок побудован на гідродинамічній теорії змащування. Були отримані функції розподілення тиску на під'ятник, та ці данні використанні для визначення напружено деформованого стану.

Calculation of the sliding thrust bearing which works in a mode liquid friction has been carried out. Calculation is based on the hydrodynamic theory of greasing. Functions of distribution of pressure upon the bearing have been received, and this data is used for definition of the deflection mode.

Актуальность темы и цель исследования. Для достаточно точного расчета подшипника скольжения должна быть установлена взаимосвязь целого ряда различных параметров: конструктивных размеров опоры, зазора между трущимися деталями, свойств смазывающей жидкости, нагрузки, скорости вращения, способов теплоотвода и т.д. Ответ на этот вопрос дает гидродинамическая теория смазки.

Гидродинамическое давления, развивающее в смазочном слое распределяется неравномерно, потому и целью работы является получение функции распределения давления по сектору подшипника и дальнейшее применение результатов в определении напряженно-деформированного состояния.

Общие положения. Для появления в смазочном слое гидродинамических давлений и соответствующей несущей силы необходим клиновидный зазор между поверхностью пяты и подпятника [1]. Такой зазор можно получить за счет скола отдельных участков (сегментов) рабочей поверхности или же с помощью подвижных самоустанавливающихся сегментов. В данной работе рассмотрен второй способ.

Под воздействием нагрузки, сегменты наклоняются под определенным углом к плоской поверхности, по которой они скользят; при относительном движении трущихся поверхностей образуются смазочные клинья с гидродинамическими давлениями.

При произвольном перемещении поверхности пяты относительно поверхности подпятника в слое жидкости возникают давления, которые могут быть описаны обобщенным уравнением Рейнольдса для плоского потока жидкости [2, 4]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 12\rho V + 6 \frac{\partial}{\partial x} (\rho U h) + 6 \frac{\partial}{\partial z} (\rho W h) + 12h \frac{\partial \rho}{\partial T}. \quad (1)$$

Выражение (1) справедливо при следующих упрощающих допущениях: масло движется в зазоре подшипника ламинарно; влияние капиллярных сил в смазке вследствие их малости не учитывается; принимается, что влияние сил тяжести и сил инерции ничтожно малы по сравнению с гидродинамическими явлениями, развивающимися в смазке; масло прилипает к подшипнику и вкладышу, а поверхностные явления не нарушают прилипания, их действием пренебрегают; кривизна смазочного слоя ввиду малой его толщины в расчет не принимается [1].

Уравнение справедливо для любого случая нестационарного движения вязкой жидкости, для которой величины ρ и μ не являются постоянными, но зависят от температуры, давления и координат рассматриваемой точки. Решение уравнения в общем виде – задача чрезвычайно сложная, да и практическое использование такого решения было бы сопряжено с большими затруднениями. В применении к подшипникам скольжения уравнение может быть существенно упрощено при следующих допущениях:

- смазка подшипника осуществляется несжимаемой жидкостью (маслом, водой, эмульсией и пр.) при $T = \text{const}$, плотность ее $\rho = \text{const}$ и, следовательно, $\frac{\partial \rho}{\partial T} = 0$; последний член правой части отпадает, а ρ можно исключить из обеих частей уравнения;
- принимается, что по всему слою смазочной жидкости, несущему нагрузку, вязкость смазки μ есть величина постоянная и определяется по осредненной температуре и давлению;
- предполагается установившийся режим работы подшипника, который работает с постоянной скоростью скольжения, $v = \text{const}$;
- так как при установившемся движении центр вкладыша не перемещается и эксцентриситет $e = \text{const}$, то скорость в направлении оси OY приравнивается нулю, то есть $V = 0$;

– подшипник конечной длины в соответствии с данными опытов рассматривается как часть бесконечно длинного подшипника, поэтому можно принять $W = 0$ и $P = P_x$.

Для этих условий уравнение Рейнольдса имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dp}{dx} \right) = 6\mu U \frac{dh}{dx}, \quad (2)$$

где U – скорость скольжения на среднем радиусе.

Гидродинамический расчет. Произведем гидродинамический расчет подпятника ЭД.139.060СБ для двигателя ПЭД–107.

Для этого подпятника число сегментов $z = 6$, ширина сегмента $\Delta r = 0,0125$ м, длина сегмента на среднем радиусе $B = 0,013$ м.

Нагрузка на подпятник – 2000 кг.

Вязкость масла $\mu = 0,435$ кг/(м · с).

Скорость скольжения на среднем радиусе

$$U = \omega R_{np} = \pi \cdot n \cdot R_{np} / 30 = 7,457 \text{ м/с.}$$

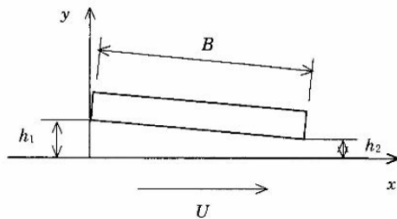


Рисунок 1 – Положение сегмента в смазочном слое

Толщина h масляной пленки между пятой и подпятником выражена линейным уравнением в зависимости от x , следующим образом [3]:

$$h(x) = h_1 - \frac{x}{B}(h_1 - h_2). \quad (3)$$

Введем вспомогательные безразмерные величины – $m = \frac{h_1}{h_2}$; $\bar{x} = \frac{x}{B}$;

$\bar{h} = \frac{h}{h_2}$. Параметр m характеризует угол наклона сектора подпятника.

Тогда с учетом введенных величин получим:

$$\bar{h}(x) = m - \bar{x}(m - 1).$$

Интегрируя уравнение Рейнольдса (2) по x , получаем:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left(\frac{1}{h^2} - \frac{C_1}{h^3} \right),$$

где C_1 это константа интегрирования. Если толщина масляной пленки в точке максимального давления, или точке где $dp/dx = 0$, обозначить h_m , то имеем: $C_1 = -h_m$

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h_m}{h^3} \right).$$

Проинтегрируем снова по x .

$$p = 6\mu U \int_{h_1}^h \frac{1}{h^2} - \frac{h_m}{h^3} dx + C_2. \quad (4)$$

Здесь h_m и C_2 определим из граничных условий – давление на входе и выходе из сектора равно 0.

$$p(h_1) = p(h_2) = 0.$$

При $h = h_1$: $p(h_1) = 0 + C_2 = 0$, следовательно $C_2 = 0$.

$$\text{При } h = h_2: p(h_2) = 6\mu U \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{h^2} - \frac{h_m}{h^3} dx = 0, \text{ откуда } h_m = \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{h^2} dx \right) \left/ \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{h^3} dx \right) \right.$$

Подставим константы интегрирования в уравнение (4) и запишем это уравнение в безразмерных переменных \bar{x} и \bar{h} :

$$p(h_2) = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \int_{h_1}^h \frac{1}{h^2} - \frac{\bar{h}_m}{h^3} d\bar{x}, \text{ где } h_m = \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{h^2} dx \right) \left/ \left(\int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{h^3} dx \right) \right. = \frac{2m}{m+1}.$$

Получим окончательный вид для $p(x)$:

$$p(\bar{x}) = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \frac{(m-1)(1-\bar{x})\bar{x}}{(m+1)(m-m\bar{x}+\bar{x})^2} = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \bar{p}(\bar{x}). \quad (5)$$

Несущая сила, приходящаяся на единицу ширины одного сегмента

$$P = \int_{h_1}^{h_2} p dx = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \int_{h_1}^{h_2} x \left(\frac{1}{h^2} - \frac{\bar{h}_m}{h^3} \right) d\bar{x}. \quad (6)$$

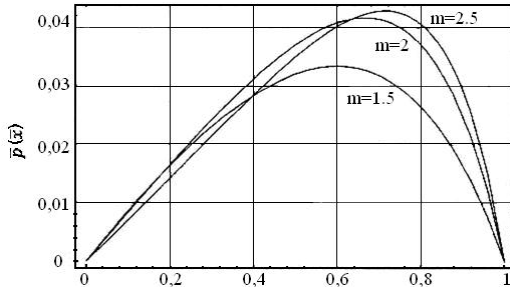


Рисунок 2 – Графики зависимости давления от \bar{x} при различных m , то есть при различных углах наклона сектора.

Для сегмента бесконечной ширины, несущая сила будет определяться из уравнения:

$$P = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \frac{1}{(m-1)^2} \left[\ln m - \frac{2(m-1)}{m+1} \right] = \frac{6\mu UB}{h_2^2} \bar{P}(m). \quad (7)$$

Для сегмента конечной ширины Δr несущая сила P_κ должна определяться с учетом радиального истечения смазки, то есть задача должна решаться как двухмерная. Однако на практике обычно пользуются приближенными методами [5], вводя поправку ξ на радиальное истечение

$$P_\kappa = P\Delta r\xi = \frac{6\mu UB^2\Delta r}{h_2^2} \xi \bar{P}(m), \quad (8)$$

$$\text{где } \xi = \frac{5}{6} \frac{1}{1 + \frac{B^2}{\Delta r^2}}.$$

Несущая сила всей опоры [1] определяется из формулы:

$$P_0 = P_\kappa z = 0,133 \frac{\mu UB^2 \Delta r z}{h_2^2 \left(1 + \frac{B^2}{\Delta r^2} \right)}. \quad (9)$$

Формула (9) позволит определить, что $h_2 = 77,191 \cdot 10^{-6}$, м

Теперь определим значение x_c – центр давления масляной пленки, места в котором будет расположена ножка сектора:

$$x_c = \frac{1}{P} \int_{h_1}^{h_2} p x dx = \frac{3\mu UB^3}{Ph_2^2} \int_{h_1}^{h_2} x \left(\frac{1}{h} - \frac{\bar{h}_m}{h^3} \right) dx. \quad (10)$$

Откуда:

$$\bar{x}_c = \frac{2m(m+2)\ln m - (m-1)(5m+1)}{2(m-1)[(1+m)\ln m - 2(m-1)]} = 0,662.$$

Применим полученную функцию распределения давления на среднем радиусе в качестве входного параметра для проведения расчета в программном комплексе. Зададим закон распределения давления на средней линии сегмента и распространим его на весь сегмент.

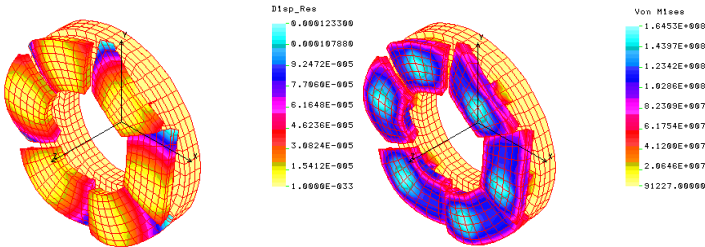


Рисунок 3 – Графики перемещений и напряжений

Как видно из графиков максимальное давление приходится на место где расположена ножка сектора подпятника.

Выводы:

- 1 Получена функция распределения давления на средней линии сектора подпятника. Были получены графики распределения для нескольких случаев наклона сектора.
- 2 Эпюра распределения давления позволяет определить место на секторе подпятника, где давление достигает максимума. Эта точка совпала с координатой центра давления масляной пленки, то есть с координатой расположения ножки сектора.
- 3 Полученные результаты, в частности функция распределения давления и координата центра давления масляной пленки, были применены в программном комплексе для проведения расчета на определение напряженно-деформированного состояния. Данный способ позволил как можно точнее определить напряжения и деформации возникающие в подпятнике.

Список литературы: 1. Чернавский С.А. Подшипники скольжения. – М: Машгиз, 1963. 2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. – М: Наука, 1970. 3. Yukio Hori Hydrodynamic Lubrication. Fundamentals of thrust bearings. – Springer Tokyo, 2006. – PP. 47-61. 4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М: ГИТТЛ, 1950. 5. Shiebel R. Die Gleitlager. Berechnung und Konstruktion. – Berlin, Spr. 1933 (русский перевод, ОНТИ, 1936).

Поступила в редколлегию 13.11.2008

УДК 539.1

В.И.ЛАВИНСКИЙ, докт.техн.наук;
А.А.ГРИГОРЬЕВ; НТУ «ХПИ», Харьков

СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВИНТОВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Розроблена динамічна модель гвинтового стрижня, призначена для дослідження високочастотних нелінійних коливань і автоколивань. Аналізуються поздовжні та поперечні пов'язані коливання, для чого рівнянням надана симетрична матрична форма із відповідним збільшенням кількості коефіцієнтів зв'язку до 12.

The dynamic model of the spiral rod for research of the high frequency nonlinear oscillations has been developed. The Longitudinal and transverse connected oscillations are being examined, for this reason the equations got a symmetric matrix form with the respective increase of the coupling coefficient number up to 12.

Введение. Работа посвящена новым аспектам решения актуальной проблемы изучения нелинейных колебаний и автоколебаний, возникающих в упругих континуальных системах. Известно, что простейшее уравнение автоколебаний Кортевега–де Фриза

$$u'_t + (u + b \cdot u^2 + u''_{xx})'_x = 0 \quad (1)$$

имеет механическую интерпретацию: еще М. Крускал и Н. Забуски показали, что оно описывает уединенные незатухающие волны трансляции $u = \Psi(x \pm vt)$ (фононы), движущиеся по струне со скоростью v , зависящей от амплитуды. Фонон является квантовым объектом, имеющим классическое описание. В настоящее время считается, что исследование поведения фононов, движущихся по активной механической среде (например, вибрирующему упругому телу), позволит объединить классическую и квантовую механику, а также, возможно, наметить пути решения универсальных проблем физики, в том числе создания теории единого силового поля.

В данной работе начато изучение этих волн на простых модельных задачах, аналогичных тем, которые описываются уравнением (1). Уравнения нелинейных колебаний винтового стержня, представленные, например, в монографии [1], также являются одномерными, но более сложными, чем (1). Цилиндрический винтовой стержень (пружина) имеет, как и кристаллическая решетка, повторяющуюся пространственную структуру, что делает задачу изучения его автоколебаний особенно важной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Постановка задачи. Рассматриваемая цилиндрическая пружина является частным случаем винтового стержня, у которого все поперечные сечения одинаковы, а винтовая ось наводится с постоянным углом подъема δ . Величина $\text{tg } \delta$ определяет относительное начальное кручение, а $z^{-1} = d/D$ (где d – диаметр поперечного сечения, D – диаметр навивки, z – индекс) – относительную начальную кривизну стержня. Далее рассматриваются стержни круглого сечения с малой кривизной ($z > 10$) и кручением ($\delta < 5^\circ$). Для указанных условий сформируем систему дифференциальных уравнений, адекватно описывающих свободные нелинейные колебания стержня в широком диапазоне частот и длин волн, и преобразуем ее к виду, пригодному для анализа связанных колебаний и автоколебаний.

Модели - аналоги. Группы колебаний. Уравнения модели [1] учитывают 6 степеней свободы сечения стержня; геометрические коэффициенты уравнений зависят от кривизны χ_1 , χ_2 и кручения χ_3 витка, что приводит к нелинейности:

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot (\vec{v}'_t + \vec{\omega} \times \vec{v}') &= \vec{Q}'_0 + \vec{\chi} \times \vec{Q}, & \rho J \cdot \vec{\omega}'_t + \vec{\omega} \times \rho J \cdot \vec{\omega}' &= \vec{M}'_0 + \vec{\chi} \times \vec{M} + \vec{e} \times \vec{Q} \\ \vec{v}'_0 + \vec{\chi} \times \vec{v}' &= \vec{\omega} \times \vec{e}, & \vec{\chi}'_t &= \vec{\omega}'_0 + \vec{\chi} \times \vec{\omega}, & \vec{M}' &= A \cdot (\vec{\chi} - \vec{\chi}_0^{(1)}) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $\vec{v}, \vec{\omega}$ – линейная и угловая скорость поперечного сечения; \vec{Q}, \vec{M} – векторы упругих сил и моментов; $\rho I, \rho J, A$ – диагональные матрицы коэффициентов инерции и жесткости сечения; \vec{e} – орт касательной к винтовой оси; $\vec{\chi}, \vec{\chi}_0^{(1)}$ – векторы текущей и начальной кривизны; θ – координата сечения (рис. 1); τ – «безразмерное время».

Таким образом, в модели [1] рассматривались колебания двух векторов (перемещений и углов) или их 6-ти проекций на главные оси сечения; такие же

уравнения описывали динамическую деформацию стержня при произвольной форме его оси. Однако для стержня с малой кривизной и кручением сила связи между проекциями разнится на порядки. Если, как в статье [3], учесть это различие, то одну группу сильно связанных координат составят перемещение и два угла, а другую – угол и два перемещения.

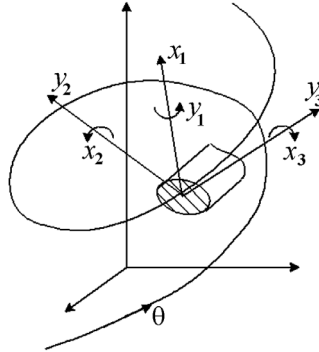


Рисунок 1 – Координаты сечения

В предположении, что отклонения этих векторов от положения равновесия малы, уравнениям (2) удалось придать форму, обычную для анализа связанных колебаний:

$$\begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega y + \Delta \\ -\Omega y^T - \Delta^T & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & -\Omega y - \Delta \\ \Omega y^T + \Delta^T & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

где X, Y – векторы, составленные из координат x_j или y_j (рис. 1), относящихся к группе продольных или поперечных колебаний; Qx, Qy – отвечающие им упругие силы и моменты; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения (податливости осевого сжатия и поперечного сдвига в этой модели равны 0); I, Θ – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка; B, Δ и $\Omega x, \Omega y$ – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат, в которых χ_j обозначают отклонения соответствующей кривизны и кручения от начального значения,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -tg\delta & 0 \\ tg\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi_1 \\ 0 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega y = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие $B_{21}, -B_{23}, B_{32} = 1$ означает, что начальный радиус кривизны витка (до деформирования) принят равным 1. Матрицы влияния Ωx и Ωy возникают в результате замены векторных произведений умножением на кососимметричную матрицу.

В группу продольных колебаний входит перемещение x_1 в направлении бинормали (параллельно оси пружины), а в группу поперечных – перемещение y_2 в радиальном направлении (перпендикулярно оси), что определило исторически сложившиеся (для анализа колебаний пружин) названия групп. При этом к поперечным колебаниям отнесены перемещения по координате y_3 (касательной к винтовой оси), которые параллельны движению волны и по принятому в механике правилу считаются продольными.

В статье [2] использованы аналогичные, но линеаризованные уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Delta \\ \Delta & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Delta \\ -\Delta & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

при условиях $\chi_{1,2,3} = 0$ модель (4) совпадает с моделью (3).

В работе [3] уравнения модели (4) были уточнены путем учета деформации винтовой линии (ранее это уточнение предложено и обосновано в статье [4]). Учет деформаций осевого сжатия и поперечного сдвига является актуальным для расчета пружины с малым индексом, а также для расчета высокочастотных колебаний любой пружины, поскольку, этот фактор кардинальным образом изменяет асимптотику решений характеристического уравнения модели.

В работе [5] уравнения (4) приведены к полностью симметричному виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Delta \\ \Delta & -B^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Delta \\ -\Delta & -B \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где Vx_j, Vy_j – скорости изменения координат x_j или y_j .

Динамическая модель винтового стержня. С учетом конечной цели исследований и на основе синтеза методов, данных в работах [1-5], мы получили новую симметричную матричную модель, пригодную для анализа высокочастотных колебаний винтового стержня:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega y x + \Delta \\ \Omega x y + \Delta & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & \Omega y x^T - \Delta \\ \Omega y x^T - \Delta & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\varepsilon_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega y x = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\chi_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega x y = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ε_3 – относительное сжатие (растяжение) винтовой оси; $\varepsilon_{2,1}$ – относительные поперечные сдвиги этой оси в направлении нормали и бинормали.

Уравнения (6) совпадают с (5) при условиях $\chi_j, \varepsilon_j = 0$.

В нелинейной модели (6) отклонения кривизны и кручения χ_j стержня от равновесных значений определяются моментами упругих сил, как в [1], это же относится и к деформациям ε_j его оси, которые в работах [1,2] не учитывались:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= c y_1 \cdot Q y_1; & \chi_2 &= c x_2 \cdot Q x_2; & \chi_3 &= c x_3 \cdot Q x_3; \\ \varepsilon_1 &= c x_1 \cdot Q x_1; & \varepsilon_2 &= c y_2 \cdot Q y_2; & \varepsilon_3 &= c y_3 \cdot Q y_3, \end{aligned}$$

в линеаризованной модели, а также при учете гистерезиса, они считаются постоянными величинами. По условиям линейной пропорциональности напряжений и деформаций все эти величины являются малыми (их значения для кручения и кривизн составляют менее 0,1, для остальных видов деформаций – менее 0,01).

Модель консервативна (матрицы влияния сопряжены).

Диагональные элементы $m x_j, \dots, c y_j; j = 1, 2, 3$ матриц $M x, \dots, C y$ вычисляются по следующим формулам (μ – коэффициент Пуассона): $m x_1, m y_2, m y_3, c x_2, c y_1 = 1$; $m x_2, m y_1, c y_3 = (4z^2)^{-1}$; $c x_3 = 1 + \mu$; $m x_3 = (2z^2)^{-1}$; $c x_1, c y_2 = (1 + \mu)/(2z^2)$.

Произведение соответствующих коэффициентов инерции m_i и податливости c_i определяет величину скорости звука a_{np}, a_{non} продольных или поперечных колебаний.

Уравнения учитывают нелинейную интерференцию и дисперсию волн, что необходимо для воспроизведения автоколебаний.

Заметим, что при анализе автоколебаний с учетом гистерезиса вместо системы (6) допустимо использовать систему (5), но в матрице Δ постоянную величину $\text{tg } \delta$ необходимо заменить переменной величиной $\text{tg } \delta + \chi_3$. Кручение χ_3 фактически играет роль единственного медиатора, связывающего две группы колебаний в этом процессе.

Во всех моделях стержня положительное направление упругих сил выбрано противоположным силам инерции. Модель (6) оперирует с безразмерными величинами. Нормировки выбраны так, что радиус витка пружины R (начальный радиус кривизны) равняется 1, а продолжительность распространения волны продольной деформации по отрезку стержня, равному R , также равна 1. Нормировочные множители для сил δq и времени δT находятся по формулам

$$\delta q = 4z^2 / (E \cdot S); \quad \delta T = \sqrt{E / \rho} / (2z \cdot R),$$

где E – модуль упругости; ρ – плотность материала стержня; S – площадь его сечения.

Моменты сил перед нормировкой дополнительно делятся на радиус витка R .

Динамическая модель (7) становится замкнутой после указания начальных и граничных условий. Различные виды граничных условий типа Штурма

для пружины рассматривались в статьях [6, 7]; в работе [8] исследовалась связь граничных условий и спектра пружины. Эти результаты легко обобщаются на рассматриваемый случай, в частности можно считать доказанным, что если оба граничных условия имеют вид

$$\left[X(\theta_{l,n}) \quad Y(\theta_{l,n}) \right] + \left[Q_x(\theta_{l,n}) \quad Q_y(\theta_{l,n}) \right] \cdot G_{l,n} = 0, \quad (7)$$

где $G_{l,n}$ – неотрицательные матрицы (матрицы податливости опор), то решениями системы уравнений (6), (7) являются незатухающие гармонические колебания.

При расчетах вынужденных колебаний стержней начальные условия считаются нулевыми; при свободных колебаниях они заменяются условиями периодичности. Однако такие описания представляют упругий континуум как механически пассивную среду, и для анализа автоколебаний они неприемлемы. Предполагается, что данный винтовой стержень является активной средой, то есть в нем возбуждены медленно затухающие колебания, создающие вибрационный фон и обладающие механической энергией.

Частный случай. Прямому стержню в этой модели соответствуют условия $\chi_1 = -1$; $\chi_3 = -\text{tg } \delta$, которые нивелирует влияние начальной кривизны и кручения витка. В результате система (6) распадается на подсистемы – крутильные и продольные колебания описываются волновыми уравнениями, имеющими следующие факторизации:

$$\begin{cases} mx_3 \partial Vx_3 / \partial \tau = \partial Qx_3 / \partial \theta \\ cx_3 \partial Qx_3 / \partial \tau = \partial Vx_3 / \partial \theta \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} my_3 \partial Vy_3 / \partial \tau = \partial Qy_3 / \partial \theta \\ cy_3 \partial Qy_3 / \partial \tau = \partial Vy_3 / \partial \theta \end{cases}, \quad (8 \text{ а})$$

остальные характеристики связаны попарно геометрией стержня:

$$\begin{cases} mx_1 \partial Vx_1 / \partial \tau = \partial Qx_1 / \partial \theta \\ mx_2 \partial Vx_2 / \partial \tau = \partial Qx_2 / \partial \theta - Qx_1 \\ cx_1 \partial Qx_1 / \partial \tau = \partial Vx_1 / \partial \theta + Vx_2 \\ cx_2 \partial Qx_2 / \partial \tau = \partial Vx_2 / \partial \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} my_1 \partial Vy_1 / \partial \tau = \partial Qy_1 / \partial \theta + Qy_2 \\ my_2 \partial Vy_2 / \partial \tau = \partial Qy_2 / \partial \theta \\ cy_1 \partial Qy_1 / \partial \tau = \partial Vy_1 / \partial \theta \\ cy_2 \partial Qy_2 / \partial \tau = \partial Vy_2 / \partial \theta - y_1 \end{cases} \quad (8 \text{ б})$$

и участвуют в поперечных (изгибно-сдвиговых) колебаниях прямого бруса, происходящих в 2-ух перпендикулярных плоскостях (описываются уравнениями 4-го порядка).

Уравнения (9 б) уточняют известные уравнения колебаний камертона (учебник [9]); они дополнительно учитывают инерцию изгиба поперечного сечения бруса. Но для основной частоты колебаний камертона данное уточнение не существенно.

Характеристическое уравнение модели. При условии $\chi_j, \varepsilon_j = \text{const}$ уравнения (6) становятся линейными, а модель – линеаризованной.

Решение системы (6) будем искать в форме простой волны, то есть

$$Vx, Vy, Qx, Qy \sim \exp(i \cdot (\omega t + \lambda \theta)),$$

если ω и λ – вещественные числа, то волна является бегущей.

Характеристическое уравнение модели (7) связывает круговую частоту ω и круговое волновое число λ :

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I - B - \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Theta & i\omega My & \Omega xy + \Delta & i\lambda I + B^T + \Omega x^T \\ i\lambda I + B^T + \Omega x^T & -\Omega xy^T - \Delta & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega yx^T - \Delta & i\lambda I - B - \Omega x & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Клеточная структура матрицы позволила свернуть определитель:

$$\det \begin{bmatrix} -\omega^2 I + Mx^{-1}A_{11} & Mx^{-1}A_{12} \\ -My^{-1}A_{12}^* & -\omega^2 I + My^{-1}A_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$A_{11} = -(i\lambda I - B - \Omega x) \cdot Cx^{-1} \cdot (i\lambda I - B - \Omega x)^* + (\Omega yx + \Delta) \cdot Cy^{-1} \cdot (\Omega yx + \Delta)^T;$$

$$A_{22} = -(i\lambda I - B - \Omega x)^* \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B - \Omega x) + (\Omega xy + \Delta) \cdot Cx^{-1} \cdot (\Omega xy + \Delta)^T;$$

$$A_{12} = (\Omega yx + \Delta) \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B - \Omega x) - (i\lambda I - B - \Omega x) \cdot Cx^{-1} \cdot (\Omega xy + \Delta)^T,$$

метод преобразования аналогичен тому, который использовался в статье [3] для модели (4) или (5) и ее характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I + B & -\Delta \\ \Theta & i\omega My & -\Delta & i\lambda I - B^T \\ i\lambda I + B^T & \Delta & i\omega Cx & \Theta \\ \Delta & i\lambda I - B & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Корни ω^2 вычислялись как собственные числа матрицы 6-го порядка

$$K = \begin{bmatrix} Mx^{-1}A_{11} & Mx^{-1}A_{12} \\ My^{-1}A_{21} & My^{-1}A_{22} \end{bmatrix},$$

для чего использовалась стандартная программа диалоговой среды MathCAD.

При условиях $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_{xy}, \Omega_{yx}, \Delta = 0$ характеристическое уравнение распадается на два бикубических уравнения для величин ω^2 или :

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & i\lambda I + B \\ i\lambda I + B^T & i\omega Cx \end{bmatrix} = 0 \quad (12 \text{ a})$$

и

$$\det \begin{bmatrix} i\omega My & i\lambda I - B^T \\ i\lambda I - B & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0 \quad (12 \text{ б})$$

в развернутом виде они имеют следующий вид:

– для продольных колебаний –

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (\lambda^2 - 1)^2 - mx_1 mx_2 mx_3 cx_1 cx_2 cx_3 \cdot \omega^6 + [mx_1 mx_2 cx_1 cx_3 + mx_1 mx_3 cx_2 cx_3 + mx_1 mx_3 cx_1 cx_2 + \\ & + \lambda^2 (mx_1 mx_2 cx_1 cx_2 + mx_1 mx_3 cx_1 cx_3 + mx_2 mx_3 cx_2 cx_3)] \cdot \omega^4 - [mx_1 (cx_1 + cx_3) - \\ & - \lambda^2 (2mx_1 cx_1 - mx_1 cx_2 - mx_2 cx_3 - mx_3 cx_2) + \lambda^4 (mx_1 cx_1 + mx_2 cx_2 + mx_3 cx_3)] \cdot \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (12 \text{ a})$$

– для поперечных колебаний –

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 1)^2 - my_1 my_2 my_3 cy_1 cy_2 cy_3 \cdot \omega^6 + [my_1 my_3 cy_1 cy_2 + my_2 my_3 cy_1 cy_3 + my_1 my_2 cy_1 cy_3 +$$

$$+\lambda^2 (m_1 m_2 c_1 c_2 + m_1 m_3 c_1 c_3 + m_2 m_3 c_2 c_3) \cdot \omega^4 - [c_1 (m_1 + m_3) - (12 \text{ б}) \\ -\lambda^2 (2m_1 c_1 - m_2 c_1 - m_2 c_3 - m_3 c_2) + \lambda^4 (m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3)] \cdot \omega^2 = 0,$$

что приводит к появлению в решениях характеристического уравнения трех пар ветвей: нижних, средних и верхних (рис. 2). При малых значениях λ^2 отношение частот средней и нижней ветви или верхней и средней ветви приблизительно равно индексу z .

Выполненное аналитическое и численно – аналитическое исследование показало, что при условии $\chi_j, \varepsilon_j \neq 0$ или $\delta \neq 0$ качественное поведение решений характеристического уравнения отвечает кривым на рис. 2. Доказано, что корни характеристического уравнения (10) зависят от квадратов величин χ_j и ε_j , а уравнения (11) – от $\text{tg}^2 \delta$, что, с учетом малости данных величин, делают результаты этих зависимостей малосущественными.

В статье [10] для нижних ветвей уравнение (10) было сведено к условию вырожденности матрицы 4-го порядка. Оказалось, что нижние ветви являются приближенной факторизацией уравнения (1), и это позволяет рассчитывать на получение низкочастотных волн трансляции (их длины волн значительно больше длины витка). Однако такие решения трудно реализовать на практике, и они имеют только теоретический интерес.

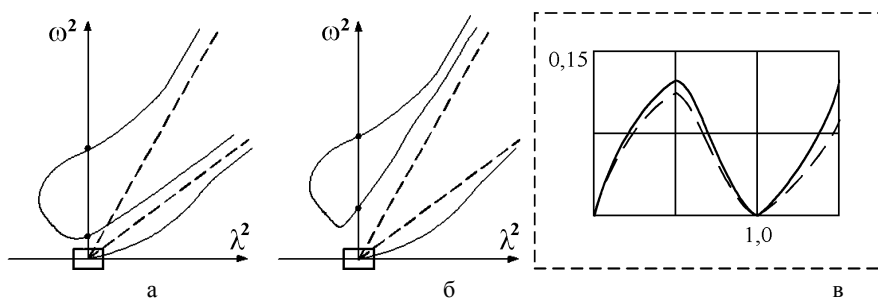


Рисунок 2 – Зависимость волнового числа λ от частоты ω для продольных (а) и поперечных (б) колебаний стержня (на позиции в показаны нижние ветви для малых частот). В разрыве между ветвями величина λ^2 комплексная.

Частоты синфазных колебаний винтового стержня. Как показал анализ, больший интерес вызывают средние и верхние ветви. Оказалось, что на них расположены четыре ненулевые частоты синфазных колебаний; на таких частотах отсутствуют деформации сдвига и существенно уменьшается внутреннее (гистерезисное, вязкое) трение. Но главное свойство этих частот состоит в ином: весь упругий континуум (а в случае длинной пружины он может быть весьма протяженным) колеблется синхронно, без запаздывания. Заметим, что, например, при кручении или сжатии прямого стержня такой режим колебаний не возможен (при синхронном движении соседних сечений не происходит деформации, а значит, нет обмена между кинетической и потенциальной энергией).

Средним ветвям на диаграмме «квадрат волнового числа – квадрат частоты» (рис. 3) соответствуют смещенные из начала координат наклонные прямые линии

$$\omega^2 = a^2 \cdot \lambda^2 + \omega_c^2.$$

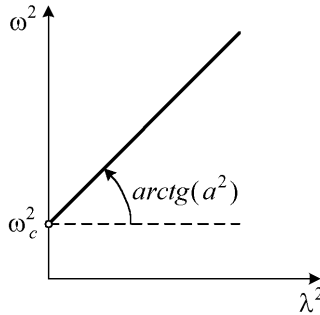


Рисунок 3 – Средняя ветвь

Приведем теоретическое обоснование для выявленной при анализе результатов компьютерного моделирования прямолинейной формы средних ветвей. Если стержень имеет круглую форму сечения, то характеристическое уравнение (12 а) принимает следующий вид:

$$-\lambda^2(1-\lambda^2)^2 + \lambda^2(1+\mu+\lambda^2) + A_1\omega^2((4-2\mu)\lambda^4 + (1+\mu)\lambda^2 + 1) - 2A_1\omega^4(1+\mu) - A_1^2\omega^4((5+4\mu)\lambda^2 + 3 + \mu) + A_1^3\omega^6 \cdot 2(1+\mu) = 0, \quad (13)$$

где $A_1 = 1/(4z^2) \ll 1$. Первые два слагаемых этого уравнения приближенно описывают нижнюю ветвь. На точках средней ветви величина ω^2 имеет порядок z^2 , поэтому, если отбросить малосущественные слагаемые, то уравнение (13) примет вид

$$\omega^2(1+\mu+\lambda^2) - 2A_1\omega^4(1+\mu) = 0,$$

или

$$(1+\mu+\lambda^2) - 2A_1\omega^2(1+\mu) = 0, \quad (14)$$

$$\omega^2 = (2z^2 / (1+\mu)) \cdot \lambda^2 + 2z^2,$$

где величина $2z^2/(1+\mu)$ при выбранной нормировке совпадает с величиной квадрата скорости звука для поперечных колебаний, а $2z^2$ – это квадрат синфазной частоты.

При произвольном (не круглом) сечении стержня коэффициенты mx_2 , mx_3 и cx_1 малы, что позволяет получить приближенное уравнение средней ветви в виде

$$cx_3 + cx_2\lambda^2 - mx_3cx_2cx_3\omega^2 = 0,$$

обобщающим (14). Аналогичное обоснование получено для поперечных колебаний.

При решении уравнений (10) получены формулы для синфазных частот, учитывающие их зависимость от δ , а также геометрических характеристик сечения стержня:

для продольных колебаний (средняя и верхняя ветвь) –

$$\omega x_{c.n}^2 = \frac{1}{mx_3cx_2} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[\frac{1}{my_1cx_2} + \frac{1}{mx_1cy_2} \right];$$

$$\omega x_{c.в}^2 = \frac{cx_1 + cx_3}{mx_2cx_1cx_3} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[\frac{1}{my_2cx_1} + \frac{1}{mx_2cy_1} \right],$$

для поперечных колебаний (средняя и верхняя ветвь) –

$$\omega y_{c.n}^2 = \frac{1}{my_2cy_3} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[\frac{1}{my_2cx_1} + \frac{1}{mx_2cy_1} \right];$$

$$\omega y_{c.в}^2 = \frac{my_1 + my_3}{my_1my_3cy_2} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[\frac{1}{my_1cx_2} + \frac{1}{mx_1cy_2} \right].$$

Симметричный вид этих формул, а также формул (12 а, б), является следствием выявленной в статье [3] симметрии между группами колебаний винтового стержня.

Анализ этих формул показал, что начальное кручение $tg \delta$ оказывает слабое влияние на протекание средних ветвей и этим влиянием при построении линеаризованной модели фонона (модели первого приближения) допустимо пренебрегать. Влияние нелинейных параметров связи χ_j, ε_j оказывается еще более слабым. Заметим, что если бы связь между группами колебаний оказалась сильной, то получить линеаризованную модель фонона было бы невозможно.

Для прямого стержня средние ветви проходят через начало координат и соответствуют волновым уравнениям (рис. 4), нижние и верхние ветви для продольных и поперечных колебаний сливаются. Синфазных частот у средних ветвей здесь нет.

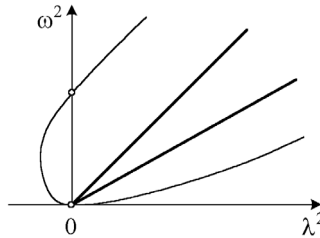


Рисунок 4 – Решения характеристического уравнения для прямого стержня

Приведем приближенные формулы для синфазных частот винтового стержня:

$$\omega x_{c.n} = \sqrt{2} z, \quad \omega y_{c.n} = 2z, \quad \omega x_{c.в} = 2\sqrt{(2+0.5z^{-2})/(1+\mu)} z^2, \quad \omega y_{c.в} = 2\sqrt{(2+z^{-2})/(1+\mu)} z^2.$$

Синфазные частоты средних ветвей располагаются в звуковом, а верхних ветвей – в ультразвуковом диапазоне. Соответствующие периоды колебаний для средних ветвей близки временам распространения звуковой волны по одному витку пружины, а для верхних ветвей – по поперечному сечению винто-

вого стержня:

$$Tx_{c.n} = (\pi \cdot D / a_{non}) / \sqrt{1 + \mu}; \quad Ty_{c.n} = \pi \cdot D / a_{np}; \quad Tx_{c.в}, Ty_{c.в} = 0.5 \pi \cdot d / a_{non},$$

например, для пружины, имеющей средний диаметр навивки $D = 300$ мм и диаметр проволоки $d = 10$ мм частоты этих колебаний равны 5 кГц; 3,5 кГц и 190 кГц.

Показательно, что значения нижних синфазных частот не зависят от индекса, а верхних – от радиуса кривизны стержня. Поэтому для моделей первого приближения в высокочастотной области динамический анализ винтового стержня можно заменять более простым анализом прямого стержня.

Конвективная связь и векторные уравнения колебаний. При выводе матричных уравнений были отброшены конвективные слагаемые $\vec{\omega} \times \vec{v}$ и $\vec{\omega} \times \rho J \cdot \vec{\omega}$, которые возникали в уравнении движения при переходе от абсолютных производных d/dt (для неподвижных осей) к локальным производным \tilde{d}/dt (для связанных осей):

$$d \vec{a} / dt = \tilde{d} \vec{a} / dt + \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Такое упрощение при динамическом анализе малых колебаний стержней является общепринятым (монография [1]), но для высокочастотных колебаний оно может приводить к заметным погрешностям. Кроме того, оно сокращает число коэффициентов связи продольных и поперечных колебаний в два раза, то есть искажает модель автоколебаний качественно.

После учета новых факторов, матричная модель (6) приобретает следующую векторную форму (знак тильды над локальными производными, как и ранее, опускаем):

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{Q} + \vec{p} \times \vec{\omega}; & \rho J \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{M} + (\vec{e} + \vec{\varepsilon}) \times \vec{Q} + \vec{j} \times \vec{\omega} \\ cQ \cdot \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{v} + (\vec{e} + \vec{\varepsilon}) \times \vec{\omega}; & cM \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{\omega} \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где cQ , cM – диагональные матрицы, составленные из коэффициентов податливости сечения при осевом сжатии, сдвиге и изгибе в двух плоскостях, кручении; \vec{p} , \vec{j} – векторы плотности импульса и момента количества движения,

$$\vec{p} = \rho I \cdot \vec{v} = \{mx_1 \cdot Vx_1; my_2 \cdot Vy_2; my_3 \cdot Vy_3\};$$

$$\vec{j} = \rho J \cdot \vec{\omega} = \{my_1 \cdot Vy_1; mx_2 \cdot Vx_2; mx_3 \cdot Vx_3\}.$$

Матричной факторизацией векторных уравнений (15) движения и упругости является система уравнений для связанных групп продольных и поперечных колебаний

$$\left(\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} - \left[\begin{array}{cc} Yx & Yyx \\ -Yyx^T & Yy \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} Vx \\ Vy \end{array} \right] &= \left(\left[\begin{array}{cc} I & \Theta \\ \Theta & I \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} - \left[\begin{array}{cc} B + \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Omega y + \Delta & -B^T - \Omega x^T \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} Qx \\ Qy \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\begin{array}{c} Qx \\ Qy \end{array} \right] &= \left(\left[\begin{array}{cc} I & \Theta \\ \Theta & I \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + \left[\begin{array}{cc} B^T + \Omega x^T & \Omega yx^T - \Delta \\ \Omega yx^T - \Delta & -B - \Omega x \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} Vx \\ Vy \end{array} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где

$$\Upsilon x = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -j_1 \\ -p_2 & j_1 & 0 \end{pmatrix}, \Upsilon yx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_3 & 0 & p_1 \\ -j_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}, \Upsilon y = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & 0 \\ -p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы сохранить симметричный (сопряженный) вид, гарантирующий гармоничность свободных колебаний, в правую часть уравнения вращений был добавлен фиктивный момент $\vec{p} \times \vec{v} = 0$, имеющий аналогичную физическую размерность:

$$\rho J \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{M} + (\vec{e} + \vec{e}') \times \vec{Q} + \vec{j} \times \vec{\omega} + \vec{p} \times \vec{v}.$$

Для решения характеристического уравнения модели (16)

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx - \Upsilon x & -\Upsilon yx & i\lambda I - B - \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Upsilon yx^T & i\omega My - \Upsilon y & \Omega xy + \Delta & i\lambda I + B^T + \Omega x^T \\ i\lambda I + B^T + \Omega x^T & -\Omega xy^T - \Delta & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega yx^T - \Delta & i\lambda I - B - \Omega x & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0$$

используется тот же алгоритм, что и для модели (6), но предварительно в определителе из уравнения (10) выполняются следующие замены блоков:

$$A_{11} \rightarrow A_{11} + \Upsilon x; A_{12} \rightarrow A_{12} + \Upsilon yx; A_{22} \rightarrow A_{22} + \Upsilon y.$$

В заключение заметим, что новая динамическая модель учитывает все известные в механике стержней факторы (кроме эффектов трения), и, априори, способна правильно описывать связанные колебания винтового стержня. Для проверки адекватности модели планируется зарегистрировать в эксперименте режим синфазных колебаний пружины, попадающий на среднюю ветвь характеристического уравнения, и сравнить его частоту с предсказанной теорией.

Выводы

- 1 На основе анализа и синтеза известных математических моделей разработана новая динамическая модель винтового стержня, предназначенная для исследования нелинейных колебаний и автоколебаний в широком диапазоне частот и длин волн.
- 2 К отличительным особенностям модели относятся следующие ее качества: рассматриваются связанные колебания групп продольных и поперечных деформаций; уравнения имеют симметричную матричную форму; число коэффициентов взаимного влияния групп увеличено максимально (до 12-ти).
- 3 Проанализированы решения характеристического уравнения модели, показано, что они слабо зависят от коэффициентов влияния, выявлена и обоснована прямолинейность протекания ветвей, получены формулы для частот синфазных колебаний.

Список литературы: 1. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. 2. Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных час-

тот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, № 8. – С. 21-30. 3. Григорьев А.Л., Деряенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХП», 2004. – Вып. 2 (9). – С. 257-264. 4. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Л.: ЛГУ, 1962. – Вып. 27. – С. 119-134. 5. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Симметричная матричная линеаризованная модель колебаний винтового стержня // II Університетська наук.-практ. конф. магістрантів. Тези доповідей. – Харків: НТУ «ХП». – 2008. – Т. 1. – С. 64-66. 6. Полищук Д.Ф. Влияние граничных условий на спектр частот собственных продольных колебаний цилиндрических пружин // Машиноведение. – 1969. – № 3. – С. 31-35. 7. Григорьев А.Л. Операторный метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических пружин // Информационные технологии. Сб. науч. тр. – Харьков: ХГПУ, 1998. – Вып. 6, ч. 4. – С. 54-58. 8. Григорьев А.Л., Деряенко А.И. Алгебраический метод определения собственных частот продольных колебаний цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХП», 2002. – Вып. 1 (5). – С. 101-109. 9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 10. Деряенко А.И., Король С.А., Григорьев А.А. Идентификация модели винтового бруса колебаний пружины для расчета спектра собственных частот // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2008. – Вып. № 1 (48). – С. 46-50.

Поступила в редколлегию 04.11.2008.

УДК 539.3

Е.И.ЛЮБИЦКАЯ, НТУ «ХПИ», Харьков

ИЗГИБ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Розглянуто геометрично нелінійний згин тонких ортотропних пологих оболонок при поперечному навантаженні які взаємодіють з пружною основою типу Вінклера. На базі теорії R-функцій та варіаційних методів надано розв'язки задачі для оболонок складної форми в плані; наведено алгоритм знаходження верхнього та нижнього критичного навантаження. Досліджено закономірності впливу форми плану та жорсткості основи на напружено-деформований стан ортотропних оболонок.

Geometrically nonlinear behavior of orthotropic shallow shells subjected to the transverse load and resting on Winkler's foundation is investigated. On base of R-function theory and variational methods problem's solution for shells with complex plan form is proposed. The algorithm to finding upper and lower critical loads is developed. Influence of plan form, foundation modulus on a stress-deformation state of orthotropic shells is presented.

В данной работе предлагается один из возможных подходов к решению задач геометрически нелинейного изгиба ортотропных пластин и пологих оболочек, имеющих в плане произвольную форму, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки при учете влияния упругого основания типа Винклера. Подход базируется на применении вариационно-структурного метода R-функций (RFM) [1], методов последовательных нагружений и Ньютона [2]. Для решения задачи о закритической деформации использованы идеи, предложенные в работе [3], которые базируются на методе продолжения по

параметру.

В рамках классической геометрически нелинейной теории [4, 5] разрешающая система дифференциальных уравнений в смешанной форме, описывающая поведение ортотропных пологих оболочек на упругом основании типа Винклера, имеет следующий вид:

$$L_1(D_{ij})W + \Delta_k \Phi - L(W, \Phi) = q - pW; \quad (1)$$

$$L_2(A_{ij})\Phi + \Delta_k W + \frac{1}{2}L(W, W) = 0, \quad (2)$$

где $W(x,y)$, $\Phi(x,y)$ – прогиб и функция усилий, q – заданная поперечная нагрузка, k_1, k_2 – главные кривизны оболочки, $\Delta_k = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, L_1, L_2 – линейные дифференциальные операторы [5], p – коэффициент жесткости упругого основания.

На границе области искомые функции W, Φ должны удовлетворять крайевым условиям, зависящим от способа опирания оболочки. Если условия закрепления соответствуют скользящей заделке, то крайевые условия выглядят следующим образом:

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0; \quad \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Для условий скользящего шарнира:

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; \quad \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

где n и τ – нормаль и касательная к границе области.

Чтобы получить решение поставленной задачи, нелинейную систему (1)-(2) необходимо сначала линеаризовать. Один из распространенных методов линеаризации – метод последовательных нагружений (МПН) [2]. Суммарная величина нагрузки разбивается на n частей δQ_i ($i = \overline{1, n}$). Общее напряженно-деформированное состояние определяется как сумма состояний на каждом этапе нагружения оболочки, в пределах которого деформации считаются малыми по сравнению с толщиной,

$$W^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta W_i; \quad \Phi^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta \Phi_i.$$

Неизвестные функции приращений прогиба и напряжений δW_i и $\delta \Phi_i$ отыскиваются из линейной системы следующего вида:

$$L_1(D_{ij})\delta W_i + \Delta_k \Phi^{(i-1)} - L(\delta W_i, \Phi^{(i-1)}) - L(W^{(i-1)}, \delta \Phi_i) = \delta Q_i - p\delta W_i; \quad (5)$$

$$L_2(A_{ij})\delta \Phi_i + \Delta_k W^{(i-1)} + \frac{1}{2}L(W^{(i-1)}, \delta W_i) = 0.$$

Здесь $W^{(i-1)}$ и $\Phi^{(i-1)}$ – функции, соответствующие значению нагрузки на $(i-1)$ -м шаге нагружения. Уравнения (5) необходимо дополнять соответ-

вующими граничными условиями.

В ходе многократного повторения процедуры увеличения нагрузки в решении накапливаются нежелательные погрешности. Поэтому целесообразно уточнить решение, например, с помощью метода Ньютона-Канторовича, более подробное описание которого можно найти в работах [2, 4].

Для решения последовательности линеаризованных задач изгиба ортотропной пологой оболочки применяется вариационный метод Ритца. В результате задача сводится к нахождению точки стационарности соответствующего функционала. Согласно вариационному методу Ритца, искомые функции приращений прогиба δW и напряжений $\delta \Phi$ раскладываются в ряд по некоторой полной системе координатных функций $\{W_j\}$, $\{\Phi_j\}$, удовлетворяющих заданным граничным условиям:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N_1} a_j W_j ; \quad \delta \Phi = \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_j \Phi_j ,$$

где a_j – неопределенные коэффициенты разложений.

Для областей со сложной геометрией построение необходимых последовательностей координатных функций весьма затруднительно, однако применение метода RFM позволяет справиться с подобными трудностями. Прежде всего, с помощью R-функций строится уравнение границы заданного плана оболочки $\omega(x,y) = 0$ [1, 6], а также структурные формулы решения краевой задачи. Если, например, на части контура оболочки ω_1 граничные условия соответствуют скользящей заделке, а на остальной части ω_2 – скользящему шарниру, то структурные формулы, удовлетворяющие главным (кинематическим) граничным условиям, могут быть выбраны как:

$$\delta W = \omega \omega_1 P_1 ; \quad \delta \Phi = \omega^2 P_2 . \quad (6)$$

Здесь P_1, P_2 – неопределенные компоненты структурных формул, которые представляются в виде разложения в ряд по полной системе функций, например, по степенным полиномам $\{\varphi_i\}$, $\{\Psi_i\}$:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i ; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i \Psi_i . \quad (7)$$

При определенных геометрических параметрах исследуемой пологой оболочки, а также при достижении определенного уровня ее нагружения зависимость прогиба оболочки от величины внешнего давления может быть неоднозначной. Наряду с исходной формой равновесия становится кинематически возможной другая, смежная форма равновесного состояния. К сожалению, методы МПН и Ньютона не позволяют определять верхнюю и нижнюю критические нагрузки, при которых происходит «хлопок» пологой оболочки. Подход, позволяющих строить кривую деформирования с последовательным прохождением через все критические точки, в сочетании с теорией R-функций, был использован в работах [7, 8] для изотропных и ортотропных пологих оболочек. В данной работе метод развит для ортотропных оболочек на упругом основании.

Применение предложенного алгоритма дает возможность проводить ши-

рокий вычислительный эксперимент на базе программного комплекса POLE-RL [9]. Ниже приведены некоторые примеры задач, решение которых выполнено с помощью разработанного подхода.

Задача 1. Геометрически нелинейный изгиб сферической изотропной панели с круглым планом радиуса $R = 0,1$ (м) на упругом основании типа Винклера (рис. 1) под действием равномерно распределенной нагрузки q . Физические и геометрические параметры оболочки следующие: толщина $h = 0,01$ (м), радиусы кривизны $k_1 = k_2 = 4$ (1/м), модуль упругости $E = 20,4$ (МПа), коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент жесткости основания $p = 4,7$ (кН/м³).

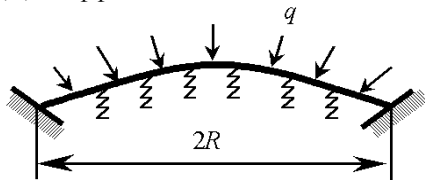


Рисунок 1

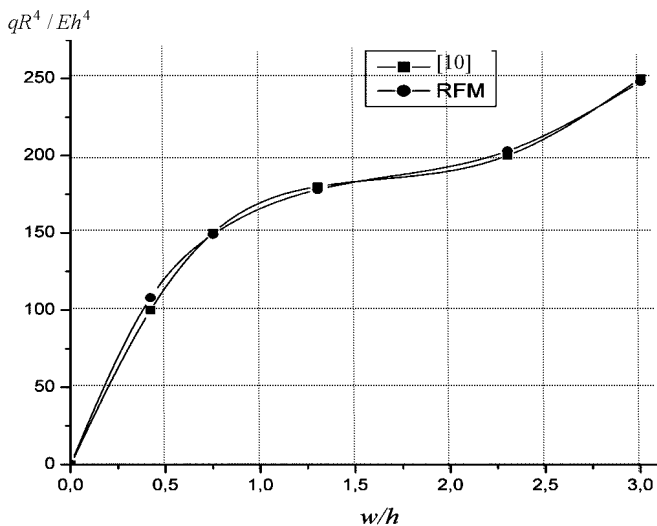


Рисунок 2

Зависимость «нагрузка – прогиб в центре» представлена на рис. 2. Результаты, полученные в работе [10] при помощи метода граничных элементов, не более чем на 0,6 % отличаются от результатов расчетов на базе RFM, что говорит о достоверности разработанного алгоритма.

Задача 2. Исследуем напряженно-деформируемое состояние (НДС) ортотропной сферической полой оболочки со сложной формой плана и смешан-

ными условиями закрепления (рис. 3) под действием равномерно распределенной нагрузки. Геометрические параметры оболочки следующие: $h = 1$; $b = 0,5 a$; $d = -0,5a$, r – радиус отверстия. Материал – стеклопластик с коэффициентами упругости $E_1/E_2 = 10$; $G/E_2 = 1/3$; $\nu_{12} = 0,22$. Оболочка лежит на упругом основании типа Винклера с коэффициентом упругости p . Внешняя часть контура опирается на скользящий шарнир, на внутренней части – скользящая заделка.

Исследовано влияние упругого основания на вид кривой деформирования оболочки при $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 30$; $r = 0,1 a$. Графики «нагрузка – максимальный прогиб» представлены на рис. 4. Анализируя полученные результаты, можно заметить, что при увеличении коэффициента постели основания

$\tilde{p} = p \frac{E_2 h^3}{a^4}$ значение критической нагрузки, при которой происходит хлопок оболочки, растет, а соответствующий ему прогиб w/h увеличивается незначительно и находится в промежутке $4 < w/h < 4,7$. Также отметим, что с увеличением \tilde{p} разница между верхним и нижним критическими значениями (Q_B и Q_H) уменьшается, а также значительно сближаются соответствующие этим нагрузкам прогибы оболочки. При дальнейшем росте коэффициента \tilde{p} зависимость «нагрузка – максимальный прогиб» становится однозначной.

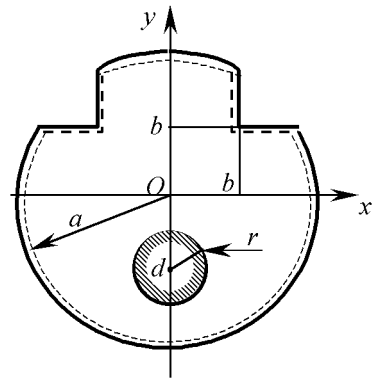


Рисунок 3

Влияние размера отверстия на значения критических нагрузок при $\tilde{p} = 10$ в зависимости от кривизны сферической оболочки представлено на рис. 5. Из графика видно, что небольшое увеличение радиуса отверстия (на $0,05 a$) значительно увеличивает значения Q_B и Q_H и сближает их между собой.

В табл. 1 представлено распределение прогибов и изгибающих напряжений в оболочке в сечении $y = 0$ в зависимости от размеров отверстия. $\frac{q_0 a^4}{E_2 h^4} = 100$, $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, $\tilde{p} = 20$. Из таблицы видно, что с ростом размеров отверстия прогибы и напряжения σ_y^H растут, в то время как σ_x^H уменьшаются.

Таким образом, с помощью разработанного на базе RFM подхода возможно на этапе проектирования элементов конструкций выполнять анализ их НДС и проверку удовлетворения параметров напряженного состояния допустимым пределам.

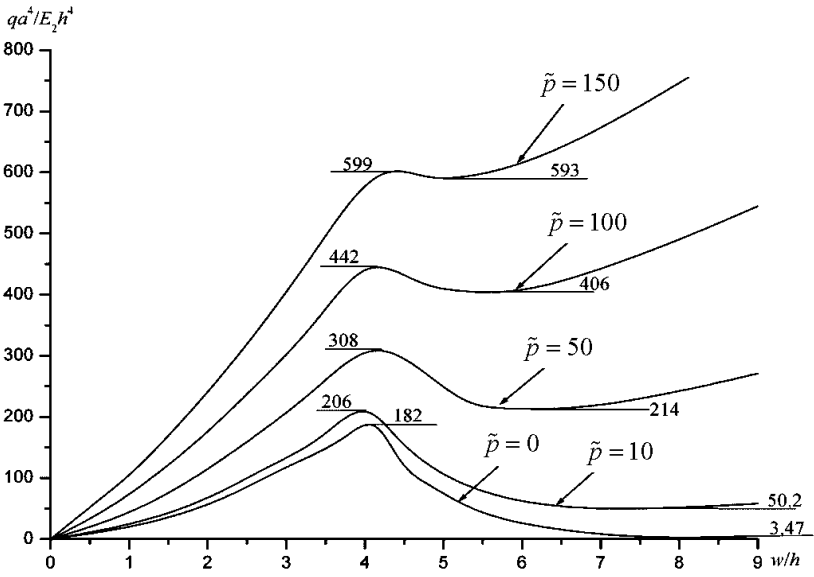


Рисунок 4

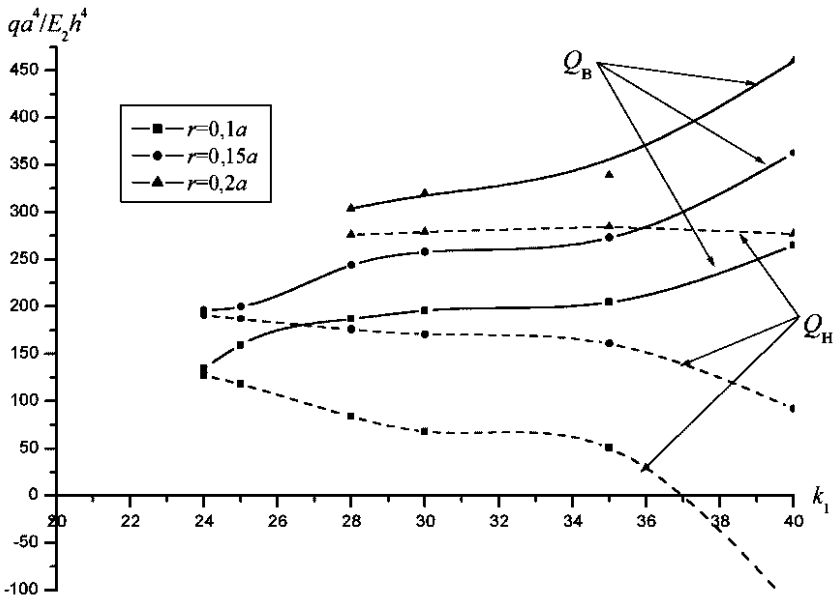


Рисунок 5

Таблица 1 – Распределение прогибов и напряжений в сечении $y = 0$

при $\frac{q_0 a^4}{E_2 h^4} = 100; \frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10; \tilde{p} = 20$

| x | 0 | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1 |
|----------------------------|-------|-------|------|------|------|------|
| $r = 0,1$ | | | | | | |
| $w(0,0)/h$ | 1,85 | 1,93 | 1,95 | 1,66 | 1,01 | 0 |
| $\sigma_x^H a^3 / E_2 h^3$ | -1,23 | 1,38 | 3,49 | 3,16 | 4,66 | 4,54 |
| $\sigma_y^H a^3 / E_2 h^3$ | 2,76 | 2,63 | 2,14 | 1,77 | 1,46 | 0,75 |
| $r = 0,2$ | | | | | | |
| $w(0,0)/h$ | 1,16 | 1,28 | 1,40 | 1,25 | 0,80 | 0 |
| $\sigma_x^H a^3 / E_2 h^3$ | -2,15 | 0,49 | 3,24 | 2,47 | 4,49 | 4,20 |
| $\sigma_y^H a^3 / E_2 h^3$ | 1,58 | 1,84 | 1,76 | 1,40 | 1,24 | 0,64 |
| $r = 0,3$ | | | | | | |
| $w(0,0)/h$ | 0,57 | 0,71 | 0,93 | 0,92 | 0,63 | 0 |
| $\sigma_x^H a^3 / E_2 h^3$ | -2,65 | -0,75 | 2,77 | 2,40 | 4,15 | 3,34 |
| $\sigma_y^H a^3 / E_2 h^3$ | -0,08 | 0,61 | 1,29 | 1,16 | 1,06 | 0,51 |

Таблица 2 – Влияние \tilde{p} на прогиб и напряжения оболочки из стеклопластика

при $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10, r = 0,2$

| | w/h max | $\sigma_x^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$ | | $\sigma_y^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$ | | $\sigma_x^M \frac{a^3}{E_2 h^3}$ | | $\sigma_y^M \frac{a^3}{E_2 h^3}$ | |
|------------------|--------------|----------------------------------|-------------|----------------------------------|--------|----------------------------------|--------|----------------------------------|--------|
| | | max | min | max | min | max | min | max | min |
| $\tilde{p} = 0$ | 2,061 | 7,046 | - 13,100 | 3,347 | -3,968 | 14,109 | -9,791 | 5,856 | -6,341 |
| $\tilde{p} = 20$ | 1,581 | 5,548 | - 10,431 | 2,500 | -3,093 | 10,740 | -7,409 | 4,806 | -4,995 |
| $\tilde{p} = 40$ | 1,283 | 4,641 | -8,726 | 1,985 | -2,548 | 8,613 | -5,884 | 4,101 | -4,168 |

В табл. 2 представлены прогиб и экстремальные значения изгибающих и мембранных напряжений в оболочке с кривизной $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, с радиусом отверстия $r = 0,2$ при варьировании коэффициента жесткости упругого основания. Из таблицы можно сделать вывод, что увеличение коэффициента \tilde{p} снижает степень напряженности пологой оболочки, что соответствует физическому смыслу задачи.

- Список литературы:** 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., 1982. – 552 с. 2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с. 3. Трошин В.Г. Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек // Прикладная математика и механика. – Т. 47, вып. 1. – 1983. – С. 101-107. 4. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с. 5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974. – 448 с. 6. Рвачев В.Л., Курна Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К., 1987. – 176 с. 7. Курна Л.В., Морачковская И.О., Скелтус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории пологих оболочек // Проблемы машиностроения. – Т. 4, № 1-2. – 2001. – С. 58-77. 8. Л.В. Курна, Е.И. Любичкая. Исследование закритического поведения ортотропных пологих оболочек сложной формы в плане // Вестник НТУ «ХПИ». – № 32. – 2006. – С. 92-97. 9. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – К, 1988. – 198 с. 10. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. – Казань: Фэн, 2002. – 199 с.

Поступила в редколлегию 03.11.2008

УДК 621.318:37

Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков

МАГНИТНЫЕ ПОДШИПНИКИ КАК УПРУГО-ДЕМПФЕРНЫЕ ОПОРЫ РОТОРОВ С УПРАВЛЯЕМОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

У роботі виконано огляд і порівняльний аналіз різних конструктивних варіантів механічних пружно-демпферних опор роторів і магнітних підшипників. Обґрунтована і виділена як головна перевага магнітних підшипників можливість управління механічною жорсткістю за рахунок зміни немеханічних величин. Запропоновано спосіб зниження амплітуд коливань ротора в магнітних підшипниках при проходженні резонансних режимів в процесі його розгону до робочих обертів обертання і вибігу.

In the paper, a review and comparative analysis of different structural variants of mechanical resiliently-dampers supports of rotors and magnetic bearings is executed. The possibility of control by mechanical stiffness due to the change of unmechanical values is grounded and selected as above all advantage of magnetic bearings. The method of vibrational amplitude contraction of rotor on the magnetic bearings in transition of resonance is offered.

Введение. Конструирование и расчет роторов исторически прошли несколько этапов. Первые машины имели скорости вращения роторов значительно меньше первой критической. С ростом скорости вращения, уменьшением габаритов машин и со снижением их массы ротора стали эксплуатироваться при скоростях близких к критическим. Многие современные роторные машины работают в зарезонансных областях, так как использование машин с роторами, частота вращения которых ниже первой критической, приводит к значительному увеличению массы вращающихся частей. Самым рациональным решением при конструировании роторных машин является создание машин с жестким ротором, вращающимся в упругих опорах [1,2]. Такой подход позволяет, не накладывая никаких ограничений на конструкцию и размеры ротора и сохраняя без изменения все его оптимальные конструктивные параметры, определенные для заданных ус-

ловий эксплуатации, изготовления и прочности, осуществлять за счет эффекта самоцентрирования легкий переход через критические скорости при малых амплитудах колебаний с уменьшением давления ротора на опоры.

При вращении ротора в упругих подшипниках на закритических скоростях актуальным является вопрос об ограничении амплитуд в области резонанса при прохождении критических частот вращения. Здесь возможно применение специальных упруго-демпферных цельнометаллических опор, демпферов вязкого трения и др.

1 Цель исследований. Данная работа нацелена на определение преимуществ применения магнитных подшипников в качестве опор роторов по сравнению с существующими упругими и упруго-демпферными подшипниковыми узлами других типов.

2 Конструктивные схемы упругих и упруго-демпферных опор роторов. Упругое опирание роторов на корпус машины может быть осуществлено различными способами. Одним из способов такого опирания является применение витых пружин. Однако их применение приводит к существенному увеличению габаритов подшипникового узла. Некоторые другие варианты конструктивных схем упругих опор представлены на рис. 1-3 [1]. На рис. 1, а и 1, б показаны радиальная и осевая опоры соответственно. Они выполнены в виде упругих колец. В радиальной опоре внутренние выступы кольца принимают давление от обоймы подшипника, а наружные передают его на жесткий корпус. В осевой опоре упругое кольцо имеет выступы с двух сторон и воспринимает нагрузки, перпендикулярные к плоскости этого кольца.

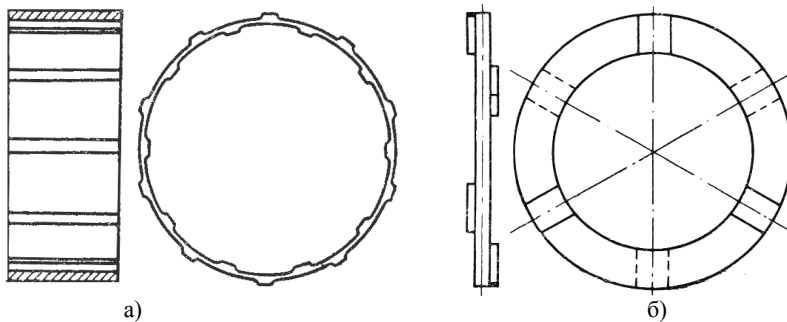


Рисунок 1 – Упругие опоры в виде колец с выступами: а) радиальная, б) торцовая

Упругая опора может быть сделана более податливой не только уменьшением толщины выступов, но и увеличением длины каждого упругого элемента за счет перехода на концентрическую окружность другого диаметра с помощью перемычек. Схема такой опоры изображена на рис. 2, а. Пример упруго-демпферной опоры приведен на рис. 2, б. Здесь показан упругий элемент, который выполнен в виде втулки с аксиальными прорезями и отделен демпфирующим масляным слоем от неподвижной обоймы.

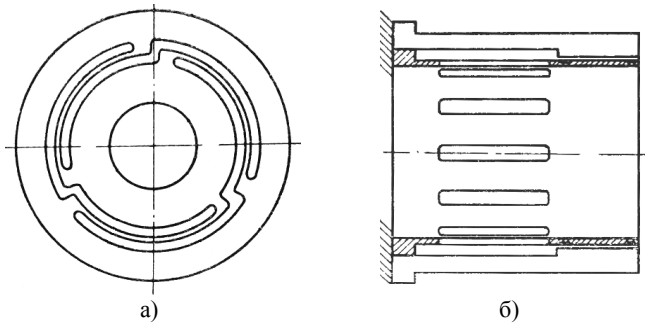


Рисунок 2 – Упругие радиальные опоры: а) с криволинейными упругими элементами, б) в виде упругого элемента с масляным демпфером

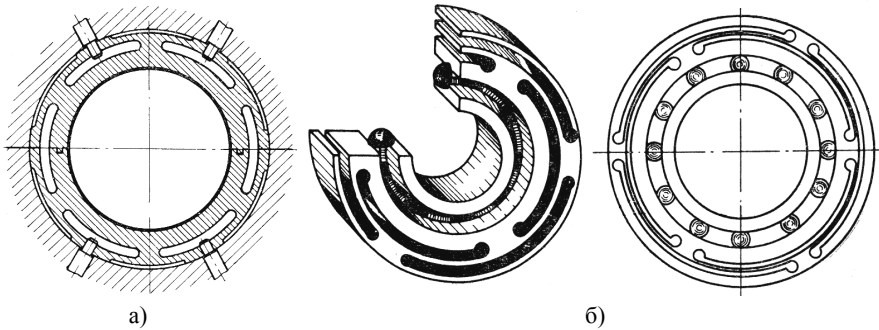


Рисунок 3 – Упругие подшипники: а) скольжения, б) качения

Упругие опоры, которые устанавливаются между подшипником и корпусом машины, достаточно сложны, и поэтому, в большинстве случаев, они изготавливаются не отдельно, а как один узел вместе с подшипником. На рис. 3, а и 3, б приведены некоторые конструкции упругих подшипников скольжения и качения соответственно.

3 Магнитные подшипники (МП). Этот тип подшипников основан на принципе магнитной левитации ферромагнитных тел (в частности роторов) в магнитном или электромагнитном полях, создаваемых внешними источниками [3]. Обеспечение устойчивого подвеса ротора без его физического контакта с неподвижными частями машины осуществляется за счет сил магнитного притяжения или отталкивания. В зависимости от способа реализации различают [4]: магнитные подшипники на постоянных магнитах (МППМ), магниторезонансные подшипники (МРП), активные магнитные подшипники (АМП) и др.

Радиальные и осевые МППМ (рис. 4, а и 4, б соответственно) могут исполняться по различным схемам. Одним из способов конструкционного решения для МППМ является использование двух или более магнитных колец [5]. К недостаткам МППМ относится невозможность создания полного подвеса роторов только с их применением, что следует из теоремы Ирншоу [4].

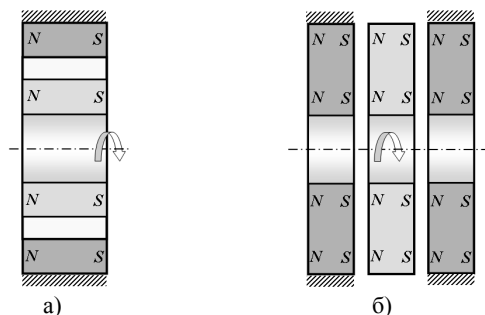


Рисунок 4 – Магнитные подшипники на постоянных магнитах:
а) радиальный, б) осевой

АМП – это управляемое электромеханическое устройство, в котором стабилизация положения ротора осуществляется силами магнитного притяжения, действующими на ротор со стороны электромагнитов. Напряжение или ток управления в обмотках этих электромагнитов регулируется системой автоматического управления по сигналам датчиков положения ротора [6]. В системе управления может использоваться как аналоговая, так и более современная цифровая обработка сигналов. Варианты радиального и осевого АМП показаны на рис. 5, а и 5, б соответственно.

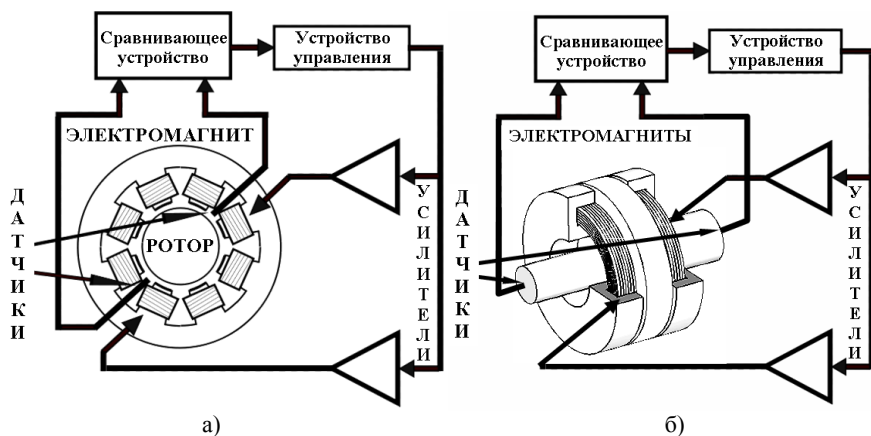


Рисунок 5 – Активные магнитные подшипники: а) радиальный, б) осевой

Принцип действия МРП основан на применении электрической резонансной LC-цепи, реализующей принцип саморегулирования положения подвешиваемого ротора относительно статорных электромагнитов [4]. Простота конструкции такого подшипника сопровождается существенными недостатками: малая грузоподъемность, потери энергии на вихревые токи и перемагничивание, относительно малые зазоры и др. Поэтому данный тип магнитного подшипника применяется крайне редко.

Основным отличием МППМ от МРП и АМП является то, что они не нуждаются в источниках электроэнергии, им не нужна система автоматического регулирования, которая составляет основную часть стоимости АМП, но они имеют относительно низкую жесткость, которая не может изменяться. В свою очередь, достоинством АМП является возможность реализации жесткости опор в широком диапазоне. Это позволяет обеспечивать устойчивость движения ротора для заданных возмущающих динамических нагрузок.

Исходя из разумного баланса между достоинствами и недостатками, на практике часто применяются комбинированные магнитные подвесы, которые используют МППМ и АМП в различных конструктивных вариациях.

4 Жесткостные характеристики механических подшипников. Радиальная жесткость обычных подшипников (например, качения) возникает за счет деформации тел и дорожек качения в местах контакта и характеризуется нелинейной зависимостью. Кроме того, из-за поперечного смещения вращающегося кольца при прохождении тел качения под вектором нагрузки возникают пульсации жесткости. Введение осевого предварительного натяга позволяет изменять жесткость радиального шарикоподшипника с увеличением частоты вращения, а установка подшипника в упругую опору линеаризует систему ротор-опоры (снижает степень нелинейности) [1]. Так, жесткость радиального упругого поля шарикоподшипника начинает изменяться по нелинейной характеристике после уничтожения предварительного натяга силами инерции ротора, а до этого момента работает только линейное внешнее упругое поле.

Для ограничения амплитуд колебаний роторов на упругих опорах при прохождении ими критических скоростей вращения целесообразно применение упруго-демпферных цельнометаллических опор, демпферов вязкого трения, а также упругих элементов с предварительным натягом [1]. Однако, установка искусственных демпферов вносит дополнительную нелинейность в систему, а значит, и новые зоны повышенной вибрации.

При конструировании высокооборотных роторных машин для снижения виброперегрузок первую и вторую критические скорости жесткого ротора, вращающегося в двух упругих подшипниках следует располагать ниже зоны рабочих частот вращения, а в зоне рабочих частот вращения необходимо использовать эффект самоцентрирования жесткого ротора [1].

Следует особо отметить, что предварительный натяг у шариковых радиально-упорных подшипников, который создается осевой пружиной, может выполнять функции регулятора колебаний, меняя жесткость опор в зависимости от скорости вращения ротора и его неуравновешенности. В этом случае подшипник будет работать как демпфер сухого трения и тем самым ограничивать амплитуды колебаний жесткого ротора в области резонансов [2].

5 Жесткостные и демпфирующие свойства магнитных подшипников

5.1 Коэффициенты жесткости МП. Несущая способность магнитных подшипников зависит от габаритных размеров и используемых материалов. Для АМП она может достигать гораздо больших значений, чем для МППМ –

60 Н на 1 см² площади полюса для электротехнических сталей и 100 Н на 1 см² для кобальтовых [4]. Жесткость МП определяется силовыми характеристиками. Для МППМ, кроме перечисленных выше факторов, она также зависит от уровня намагниченности постоянных магнитов, а для АМП – от параметров системы автоматического регулирования и от параметров управления.

Методики расчета силовых и жесткостных характеристик МППМ и АМП изложены в [5, 7]. В них показано, что для МППМ на двух постоянных магнитах с осевой намагниченностью, которые реализуют подвес за счет сил отталкивания (см. рис. 4, а), силовая характеристика является нелинейной, симметричной и жесткой, а квазиупругий коэффициент (коэффициент жесткости) описывается квадратичным полиномом (рис. 6, а) [5].

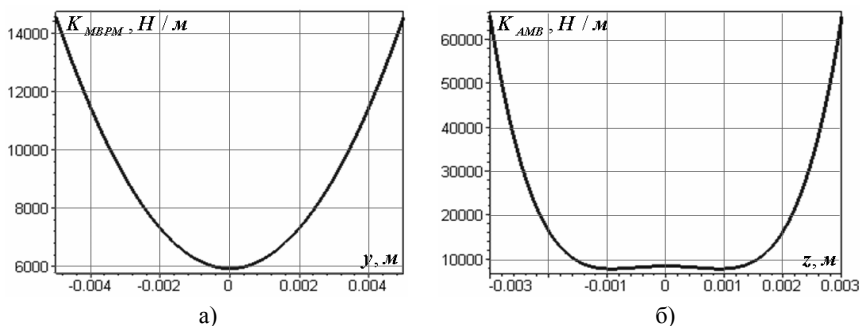


Рисунок 6 – Коэффициенты жесткости магнитных подшипников:
а) радиального МППМ, б) осевого АМП

Для осевого АМП (см. рис. 5, б), регулирование осевым положением ротора которого осуществляется с помощью импульсной системы управления [8], реализующей алгоритм дискретного управления [9], коэффициент жесткости описывается полиномом четвертой степени (рис. 6, б) [7].

Таким образом, коэффициенты жесткости магнитных подшипников являются нелинейными, а силовые характеристики симметричными и преимущественно жесткими.

Жесткость АМП обеспечивается наличием так называемых токов смещения. Смысл подачи этих токов можно пояснить на примере АМП, изображенного на рис. 5, а. Он состоит из четырех электромагнитов, которые образуются попарным параллельным или последовательным включением рядом стоящих полюсных катушек для реализации последовательности полярностей полюсных наконечников NS-SN-NS-SN [4]. Токи смещения – это токи, подаваемые на катушки противоположно расположенных (вертикально или горизонтально) электромагнитов и создающие две равные противоположно направленные магнитные силы притяжения. Таким образом, создаваемое ими магнитное смещение образует в подвесе предварительный силовой натяг, а управление суммарной силой (например, вертикальной) осуществляется увеличением натяга в одном направлении с одновременным его уменьшением в противополо-

ложном. Величина токов смещения и определяет жесткость АМП.

Таким образом, уменьшение или увеличение токов смещения в процессе эксплуатации роторной машины позволяет варьировать механическую жесткость опор ротора путем изменения немеханических параметров.

Так, например, для осевого АМП, изображенного на рис. 5, б, система управления осуществляет регулирование по закону управления, представленному на рис. 7, а, который описывается следующим выражением [7]:

$$i_{c1,2} = \mp(i_{\max} - i_{\min})z / \delta_a + i_{\min} . \quad (1)$$

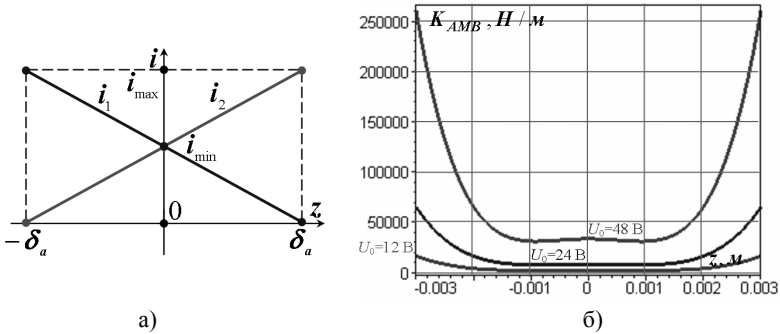


Рисунок 7 – Характеристики осевого АМП: а) закон управления, б) зависимость коэффициента жесткости от аксиального смещения ротора при различных значениях управляющего напряжения

Здесь максимальное значение тока намагничивания в обмотках, которое может быть достигнуто в режиме квазипостоянного тока при длительном нахождении ротора в крайнем положении, зависит от величины управляющего напряжения U_0 и активного сопротивления цепи. Оно равно:

$$i_{\max} = U_0 / r_{ck} . \quad (2)$$

При центральном положении ротора в обмотках обоих электромагнитов обеспечивается среднее значение тока намагничивания, равное:

$$i_{\min} = i_{\max} / 2 . \quad (3)$$

Тогда изменения жесткости всего магнитного подшипника можно достичь изменением напряжения U_0 , что и показано на рис. 7, б.

Для МППМ, изображенного на рисунке 4а, изменять жесткость можно при помощи создания дополнительного электромагнитного поля той же конфигурации, что и поля, создаваемого внешним неподвижным кольцевым ПМ [10]. При совпадении направлений силовых линий этих магнитных полей пондеромоторные (магнитные) силы и коэффициенты жесткости такой опоры будут увеличиваться, а при противоположном направлении – уменьшаться. В данном случае такое поле может быть создано при помощи двух одинаковых обмоток, расположенных на одинаковых кольцевых магнитопроводах с обеих сторон МППКМ, как показано на рис. 8, а. Направление силовых линий и величина намагниченности будут зависеть от направления и величины тока в обмотках. Причем величина и направление тока в

обеих обмотках должны быть одинаковыми для достижения максимального эффекта и отсутствия осевого выталкивающего усилия. Так, при подаче на катушки питающего постоянного напряжения и создании магнитного поля, согласованного с полем, наведенным неподвижным постоянным кольцевым магнитом (основным), коэффициент жесткости увеличивается в $\sim 1,5$ раза (см. рис. 8, б) [10]. Если магнитное поле противоположно по направлению основному, то значения жесткости уменьшаются примерно на такие же значения.

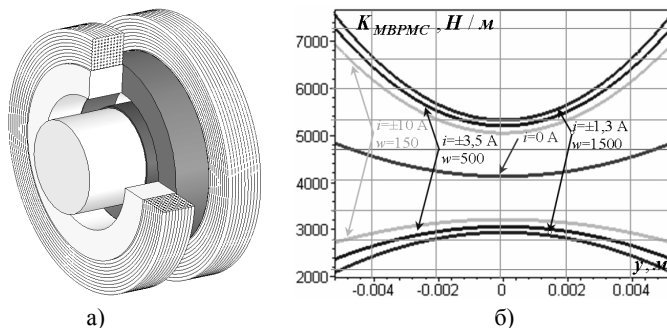


Рисунок 8 – Характеристики радиального МППМ: а) конструкция, б) зависимость коэффициента жесткости от радиального смещения ротора при различных значениях тока в обмотках и количестве витков w

5.2 Демпфирующие свойства МППМ. Магнитные подшипники выполняют не только роль упругих опор роторов, а и единых упруго-демпферных элементов. Для МППМ демпфирующие свойства, как и жесткостные, зависят от геометрических параметров постоянных магнитов, материалов, из которых они изготовлены, а также направления и уровня намагниченности.

Так, в работе [11] приведены экспериментальные данные для двух МППМ (МП1 и 2), изготовленных из двух магнитных колец с радиальной намагниченностью, работающих на отталкивании. Геометрические размеры составных частей МП1 и 2 соответственно: наружный диаметр внешнего кольца – 53,35 и 71,12 мм, внутренний диаметр внешнего кольца – 20,32 и 30,56 мм, наружный диаметр внутреннего кольца – 12,57 и 19,56 мм, толщина внешнего кольца – 6,99 и 8,38 мм, а толщина внутреннего – 6,35 и 10,16 мм. Внутреннее кольцо изготовлено из сплава Ceramic 8 с остаточной индукцией $B_r = 0,385$ Тл и коэрцитивной силой $H_c = 263000$ А/м, а внешнее – из сплава Ceramic 5 с $B_r = 0,38$ Тл и $H_c = 192000$ А/м. Значения логарифмического декремента колебаний рассчитаны по экспериментально полученным зависимостям «отклонение от времени» для случая свободных затухающих колебаний [12]. Для МП1 и 2 они равны $\sim 0,41$ и $\sim 0,29$ соответственно. Но такие высокие значения декремента объясняются, скорее всего, несовершенством экспериментальной установки, выполненной в форме маятника.

5.3 Демпфирующие свойства радиальных МППМ комбинированного магнитного подвеса ротора. Для экспериментальной модели ротора на комбини-

рованном магнитном подвесе [8], в котором применены два радиальных самоцентрирующихся подшипника на двух постоянных кольцевых магнитах с осевой намагниченностью, работающих на отталкивание (см. рис. 4, а), и один осевой АМП двухстороннего действия со статорами в виде броневых сердечников (см. рис. 5, б), параметры демпфирования установлены на основании экспериментальных исследований с записью виброграмм свободных затухающих колебаний. Геометрические размеры входящих в МППМ колец: диаметры внешнего неподвижного (статорного) кольца – 58 и 40 мм, а внутреннего подвижного (роторного) кольца – 29 и 15 мм, толщина обоих колец 10,5 мм. Кольца изготовлены из сплава NdFeB с остаточной индукцией $B_r = 1,07$ Тл и коэрцитивной силой $H_c = 808000$ А/м. На рис. 9, а представлена схема комбинированного магнитного подвеса ротора, а на рис. 9, б – виброграмма свободных колебаний ротора, а именно вертикального движения опорного участка ротора правого МППМ. Определение отклонения ротора основывалось на измерении величины напряженности магнитного поля в зазоре МППМ с помощью датчика Холла в микросхемном исполнении с элементами усиления и стабилизации с линейным выходом. Проведенное тарирование измерительной схемы позволило установить линейную связь между отклонениями опорного участка ротора и выходным напряжением (отклонению ротора на 1 мм соответствует изменение напряжения на 50 мВ). Для фиксирования и обработки информации в ПЭВМ использовалась система осциллограф-спектроанализатор ADC Lab (LA-1.5PCI 500 kHz 12 bit).

Значения логарифмического декремента колебаний рассчитывались по экспериментально полученным осциллограммам свободных затухающих колебаний ротора в вертикальном направлении (см. рис. 9, б) методом затухающих колебаний [13]. Он заключается в том, что виброграмма разбивается на ряд участков с числом циклов n , зависящим от интенсивности убывания амплитуд. Среднее значение декремента на участке определяется по формуле:

$$\delta = (1/n) \ln(a_i / a_{i+n}) . \quad (4)$$

Полученный декремент приписывается средней амплитуде на данном периоде:

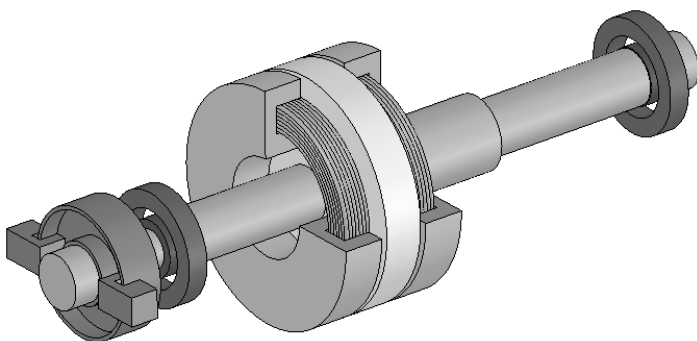
$$a_{i\text{cp}} = (a_i + a_{i+n}) / 2 . \quad (5)$$

Значения декремента, полученные при анализе виброграммы, в зависимости от амплитуд колебаний сведены в таблицу.

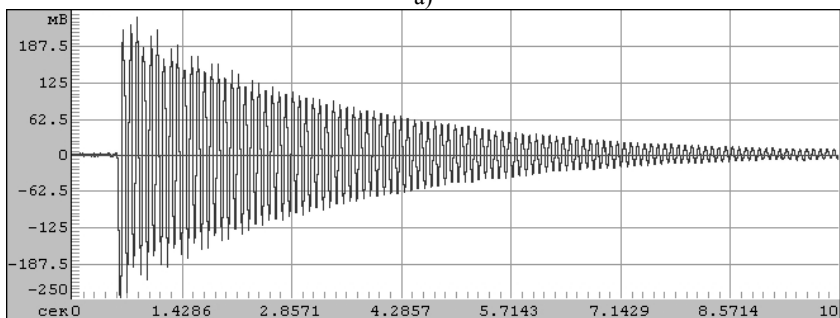
Значения декремента колебаний ротора в двух радиальных кольцевых МППМ

| | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|
| a_{cp} , мм | 3,5 | 1,5 | 0,5 |
| δ , % | 3,5 | 3,0 | 2,9 |

5.4 Демпфирующие свойства АМП. Для АМП демпфирующие свойства зависят от параметров электрических цепей электромагнитов. Так, в работе [14] проведено решение задачи управления радиальным магнитным подвесом двухопорного ротора экспериментальной модели компрессора ГПА–Ц–6,3, которая является копией компрессора в масштабе 1:10 с заменой подшипников скольжения активными магнитными. Модель представлена на рис. 10.



а)



б)

Рисунок 9 – Экспериментальные исследования на модели комбинированного магнитного подвеса ротора: а) схема подвеса, б) виброграмма свободных колебаний ротора в вертикальном направлении

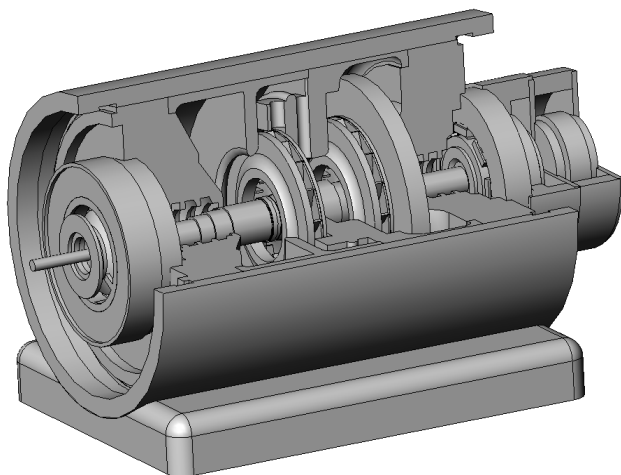


Рисунок 10 – Экспериментальная модель компрессора ГПА-Ц-6,3 с ротором в АМП

При проведении расчетных исследований демпфирование в системе повышалось путем увеличения активных сопротивлений в цепях АМП в пределах 5-20 Ом. Как видно из рис. 11, а и 11, б, повышение полных сопротивлений в цепях обмоток всех электромагнитов АМП1 и АМП2 с 5 Ом до 10 Ом приводит к снижению величины максимальных отклонений на $\sim 5\%$. Дальнейшее увеличение активных сопротивлений несущественно снижает максимальные отклонения, но приводит к повышению энергетических затрат за счет активных потерь в обмотках электромагнитов, что нежелательно. Однако, в резонансных режимах, то есть в зонах критических скоростей вращения, увеличением активных сопротивлений в цепях катушек электромагнитов АМП можно добиться существенного снижения амплитуд колебаний.

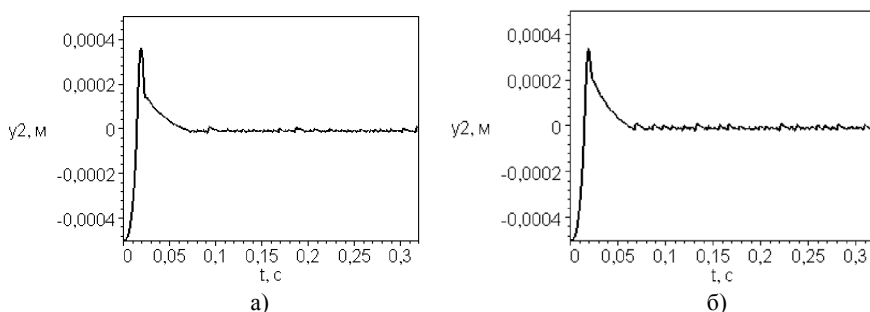


Рисунок 11 – Виброграмма колебаний правого опорного участка ротора в вертикальном направлении при сопротивлениях в цепях радиальных АМП: а) 5 Ом, б) 10 Ом

6 Способ прохождения резонансов за счет управления жесткостью и демпфирующими свойствами магнитных подшипников. Все выше изложенное позволяет сделать вывод, что магнитные подшипники – это упруго-демпферные опоры с изменяемыми жесткостными и демпфирующими параметрами, которыми можно управлять. А значит, магнитные подшипники обладают уникальным достоинством по сравнению с другими опорами роторов, так как их применение позволяет изменять механическую жесткость и демпфирующие свойства изменением немеханических величин (напряжений, токов, сопротивлений), причем непосредственно в процессе работы роторной машины. Тем самым может быть обеспечена возможность отстройки от резонансов, при которых ротор совершает колебания как жесткий.

Главным достоинством применения упругих опор всех типов, в том числе и магнитных подшипников, является увеличение ресурса роторной машины за счет уменьшения резонансных амплитуд колебаний ротора, более легкого перехода через критические скорости при разгоне и остановке, а также эффекта самоцентрирования и снижения давления в опорах. При достаточно податливых по сравнению с ротором опорах он проходит первую и вторую критические скорости как жесткий, образуя цилиндрическую и коническую прецессии и совершая поперечные колебания. Ротор остается жестким до подхода к третьей критической скорости, которой соответствует изогнутая форма коле-

баний. Поэтому ротора на упругих опорах принято делить на докритические и закритические (вращающиеся выше первой критической скорости), жесткие и упругие (вращающиеся выше третьей критической скорости).

Кроме того, резонансные изгибные колебания ротора в АМП могут возникать и при отсутствии его вращения на частоте, близкой к одной из его собственных частот. Причина данного явления связана с частотой среза управляемого подвеса ротора – частотой, начиная с которой модуль передаточной функции разомкнутой системы управления становится меньше единицы [4]. Эти колебания происходят в силу потери устойчивости подвеса по соответствующей форме из-за энергетической подпитки упругих колебаний вследствие непредвиденной положительной обратной связи в подвесе.

Предлагаемый способ прохождения резонансов (или отстройки от них) заключается в использовании возможности быстрого изменения жесткостных и/или демпфирующих параметров магнитных подшипников. Рассмотрим его, например, при выходе закритического ротора на рабочие обороты вращения и прохождении через первый резонанс, соответствующий поперечным колебаниям ротора. Данный процесс схематически проиллюстрирован на рис. 12. Здесь показаны зависимости амплитуды первой гармоники вынужденных колебаний (A_1) от частоты гармонической вынуждающей силы (ω) при жесткой силовой характеристике системы «ротор в МП».

Через A'_1 и A''_1 обозначены резонансные кривые при различных значениях жесткости, которые обеспечиваются различными значениями средних токов или токов смещения (см. рис. 7, б и 8, б). Причем резонансная кривая A''_1 соответствует большим значениям жесткости, а кривая A'_1 изображает амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) при номинальных (принятых для данной роторной машины) жесткостях магнитных подшипников. Штрих-пунктирными линиями на рис. 12 показаны скелетные кривые ω'_0 и ω''_0 , соответствующие различным значениям жесткости.

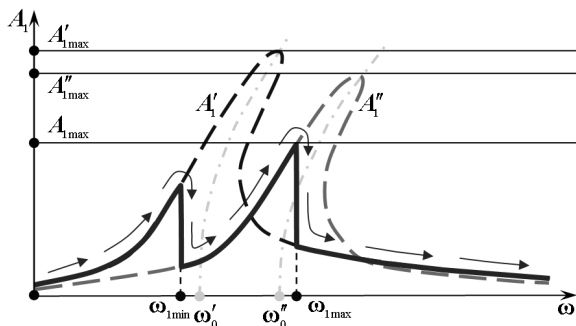


Рисунок 12 – Схематическое изображение амплитудно-частотной характеристики при колебаниях ротора на магнитных подшипниках с управляемой жесткостью

Известно, что понижения амплитуд колебаний вблизи резонанса в первую очередь можно добиться увеличением демпфирования в системе, например,

увеличением активных сопротивлений в цепях катушек электромагнитов АМП (см. п. 4.3), как это показано на рис. 12 (кривая A''_1). Но, как уже отмечалось, это влечет за собой повышение энергетических затрат.

Первый из предлагаемых способов прохождения резонансов (за счет управления демпфирующими свойствами магнитных подшипников) основывается на кратковременном увеличении демпфирования в узком диапазоне скорости вращения ротора, охватывающем область резонанса. То есть при подходе в процессе разгона ротора к некоторому заранее определенному значению скорости вращения, лежащему чуть ниже резонанса, изменение сопротивлений в цепях позволит увеличить демпфирование и снизить амплитуды колебаний. Это может быть обеспечено с помощью простейшей системы управления, в составе которой имеется датчик оборотов вращения. При выбеге ротора процедура снижения резонансных амплитуд аналогична.

Второй способ прохождения резонансов (за счет управления жесткостью магнитных подшипников) позволяет более существенно понизить амплитуды резонансных колебаний (см. рис. 12). Он основывается на перескоке с одной резонансной кривой A'_1 на другую A''_1 путем изменения жесткости магнитных подшипников увеличением токов смещения (или напряжений), подаваемых на обмотки электромагнитов АМП или МППМ (рис. 8, а). Значения этих токов зависят от параметров системы и рассчитываются заранее. Они подаются при значении угловой скорости, лежащем в заранее установленном диапазоне $[\omega_{1\min}, \omega_{1\max}]$, охватывающем критическое значение. После выхода из данного диапазона средние токи возвращаются к исходным значениям. Функцию изменения токов в зависимости от величины скорости вращения также может выполнять простейшая система управления, в состав которой входит датчик оборотов вращения.

В этом случае максимальные значения амплитуд колебаний $A_{1\max}$ оказываются значительно меньше максимумов $A'_{1\max}$ и $A''_{1\max}$ обеих резонансных кривых A'_1 и A''_1 , а результирующая АЧХ системы изображена на рис. 12 сплошной жирной линией.

Заключение. В результате проведенных исследований выявлена особенность магнитных подшипников, которая выделяет этот тип упруго-демпферных опор роторов по сравнению с другими. Эта отличительная черта заключается в допустимости варьирования жесткостью магнитных подшипников изменением электрических параметров цепей электромагнитов.

Указанная особенность МП положена в основу предложенного способа снижения амплитуд колебаний ротора в магнитных подшипниках при прохождении резонансных режимов в процессе его разгона до рабочих оборотов вращения и выбеге. Показано, что уровень максимальных амплитуд при использовании данного способа может быть уменьшен на десятки процентов.

Наряду с этим, снижение амплитуд колебаний в резонансе может быть осуществлено и с помощью применения традиционных (механических) упругих опор с искусственными демпферами. При этом внесение большего линей-

ного сопротивления уменьшает амплитуды колебаний в зоне резонанса, но приводит и к уменьшению коэффициента полезного действия. Нелинейные искусственные демпферы позволяют резко увеличить коэффициент сопротивления, но сами по себе они могут являться причиной возбуждения стойких автоколебаний. Поэтому кратковременное увеличение демпфирования при использовании магнитных опор в зонах критических скоростей вращения также является перспективным способом борьбы с повышенными вибрациями.

Список литературы: 1. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – Л.: Машиностроение, 1977. – 288 с. 2. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. – М.: Наука, 1982. – 280 с. 3. Maslen E.H. Magnetic bearings. University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. – 229 p. 4. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 5. Мартыненко Г.Ю. Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах // Вісник НТУ «ХП», Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХП», – 2007. – № 38. – С. 83-95. 6. G. Schweitzer, H. Bleuler, A. Traxler Active magnetic bearings. – Zurich: ETH, 1994. – 244 p. 7. Мартыненко Г.Ю. Определение силовых и жесткостных характеристик осевого активного магнитного подшипника при заданном законе управления // Вісник НТУ «ХП», Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХП», – 2008. – № 36. – С. 133-141. 8. Улянов Ю.М., Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М. Система управління осьовим рухом ротора на комбінованому магнітному підвісі з пасивними радіальними і активним осьовим підшипниками // Зб. наук. праць Української державної академії залізничного транспорту. – Харків: УкрДАЗТ. – 2008. – Вип. 97. – С. 107-118. 9. Патент № 2277190. Российская Федерация. МПК F16C 32/04. Способ дискретного управления электромагнитным подвесом вращающихся роторов / ОАО «Сумское НПО им.М.В.Фрунзе», НТУ «ХПИ»; Роговой Е.Д., Бухолдин Ю.С., Левашов В.А., Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М. - № 2003121317/11. – Заявл. 10.07.2003 г. – Опубл. 27.05.2006 г. // Изобретения. Официальный бюллетень, 2006. – № 15. 10. Мартыненко Г.Ю. Магнитный подшипник на постоянных кольцевых магнитах с изменяемой жесткостью // Проблемы машиностроения. – Харьков: ИПМаш НАН Украины. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 46-55. 11. R. Jansen and E. DiRusso, Passive Magnetic Beating With Ferrofluid Stabilization. – NASA Technical Memorandum 107154, 1996. – 154 p. 12. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1971. – 240 с. 13. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 375 с. 14. Мартыненко Г.Ю. Исследование устойчивости движения ротора в управляемых электромагнитных подшипниках с помощью нелинейной имитационной вычислительной модели / Проблемы машиностроения. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2005. – Т. 8, № 1. – С. 47-58.

Поступила в редколлегию 07.11.2008

С.А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МУЛЬТИФИЗИЧНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ CALS ТЕХНОЛОГИЙ

Розглядаються проблемні питання, що виникають при розробці математичних моделей складних конструкцій за наявності дії полів різної природи. Розроблені методи аналізу послідовноз'язаних, сильноз'язаних, слабоз'язаних мультифізичних просторових скінчено-елементних моделей систем. Обґрунтовано використання сукупності методів аналізу при дослідженні життєвого циклу об'єктів нової техніки.

The complex of theoretical, calculable and applied questions of elements product lifecycle management are studied. Coupled-field analyses are useful for solving problems where the coupled interaction of phenomena from various disciplines of physical science is significant. There are basically 3 methods of coupling distinguished by the finite element formulation techniques used to develop the matrix equations.

Интенсификация рабочих процессов в современных конструкциях, подвергающихся воздействию тепловых, гидроаэромеханических, электромагнитных и других полей, усовершенствование технологий изготовления, потребность в эксплуатации по состоянию обуславливают необходимость высокого уровня интеграции наукоемких технологий виртуального моделирования жизненного цикла инновационных изделий. Современный этап развития промышленности связан с CALS (Continuous Acquisition and Life-cycle Support), PLM (Product Lifecycle Management), ИПИ (Информационная поддержка жизненного цикла изделий) – концепцией, объединяющей принципы и технологии поддержки жизненного цикла продукции на всех его стадиях, основанной на использовании постоянно развивающейся интегрированной информационной среды (единого информационного пространства (ЕИП)), обеспечивающей единые способы управления процессами и взаимодействия всех участников: заказчиков (включая государственные учреждения и ведомства), поставщиков (производителей), эксплуатационного и ремонтного персонала, реализованной в соответствии с требованиями системы международных, государственных и отраслевых стандартов, регламентирующих правила указанного взаимодействия преимущественно посредством электронного обмена данными. Стратегия PLM предусматривает двухэтапный план создания ЕИП: 1) автоматизация отдельных процессов (или этапов) ЖЦ изделия и представление данных на них в электронном виде; 2) интеграция автоматизированных процессов и относящихся к ним данных, представленных в электронном виде, в рамках ЕИП [1-5]. Прогресс современной вычислительной техники позволяет исследовать проблему жизненного цикла изделий как результат взаимодействия огромного числа конструкторских, технологических и производственных факторов. Для ее эффективного решения необходимо развитие методического, программного, лингвистического, информационного, технического и математического обеспечения жизненного цикла изделий. Сложность задачи формулировки функционала полной ожидаемой эффективности жизненного цикла

конструкций, включающей затраты, связанные с проектированием, подготовкой производства, изготовлением, коррективной эксплуатацией, отказом; противоречивость критериев, большое число разнохарактерных варьируемых переменных, неформализуемость некоторых ограничений, различная точность и детерминированность моделей, требования унификации не позволяют решать математически строго задачу оптимизации непосредственно для полной модели. Данная работа посвящена проблемам мультифизического моделирования, анализа и синтеза конструкций для CALS технологий. Широкий спектр фундаментальных и прикладных проблем, характерный для таких задач, способствовал появлению множества теоретических исследований, в которых анализ эффектов связанности выводится на уровень краевых задач математической физики [6]. Особое значение в настоящее время приобретают вопросы мультифизического анализа чувствительности и оптимизации [7,8].

Целью данной работы была формализация на основе единой комплексной научно-методологической концепции математических моделей конструкций, обладающих высоким уровнем адекватности реальным физико-механическим процессам различной природы, исследование вариантов совокупности и структуры специфических связей, проиллюстрированное демонстрацией решенных задач. Процесс декомпозиции физико-механической модели на компоненты является плохо формализуемым творческим процессом. На базе использования методов и принципов системного и объектно-ориентированного анализа можно осуществить декомпозицию абстрактной модели на составляющие и связи между ними, а также реализовать их формальное описание. От правильности выбранной стратегии зависит эффективность и точность решения.

С точки зрения формальной логики все многообразие расчетных физико-механических технологий жизненного цикла инновационных изделий можно классифицировать следующим образом. Рассмотрим вначале двухуровневые модели процессов с учетом их взаимного влияния друг на друга, которые являются комбинацией различных по физической природе процессов и, как следствие, расчетных схем взаимодействия. Введем следующие виды степеней связанности структурных элементов системы (для примера взята стационарная конечно-элементная модель): последовательная (при одностороннем действии)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22}(\bar{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2(\bar{y}_1) \end{Bmatrix}; \quad (1)$$

сильная (полная)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

слабая с учетом обратных связей (при двустороннем взаимодействии)

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\bar{y}_2) & 0 \\ 0 & K_{22}(\bar{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1(\bar{y}_2) \\ \bar{F}_2(\bar{y}_1) \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где K_{11} , K_{21} , K_{22} – обобщенные матрицы жесткости; \bar{y}_1 и \bar{y}_2 – обобщенные

вектора узловых переменных, \bar{F}_1 и \bar{F}_2 – обобщенные вектора нагрузок. Развитие на подпункты носит условный методологический смысл, поскольку физический процесс может иметь комплексный и взаимовлияющий характер. Предполагается, что связь между подмоделями однозначна, алгоритмизируема и корректна. Такая трактовка дает возможность формализовать процесс и распространить традиционный инструментарий анализа и синтеза. Моделирование структурными уравнениями, ориентированными на конкретный класс объектов, может включать большое количество методов из различных областей с применением различных CAD/CAM/CAE-систем. Это может быть осуществлено как в ручном режиме, так и путем создания специализированных автоматизированных систем. Основная цель применения данного математического обобщения, реализуемого в едином информационном пространстве жизненного цикла инновационных изделий, заключена в повышении точности результатов, минимизации затрат времени на подготовку модели и трансляции промежуточных данных. При этом необходимо или использование единой информационной базы для всех этапов жизненного цикла, или разработка специальных процедур согласования структур данных на различных этапах.

Примерами конструкций, для которых важен учет взаимодействия физических полей различной природы (2) с сильной степенью связности, являются пьезоэлектрические устройства акустической электроники. Отличие полевых уравнений пьезоэффекта керамических сред от аналогичных уравнений классической теории упругости обусловлено необходимостью введения дополнительных термодинамических переменных, характеризующих электрическое состояние среды. В результате вместо 15 переменных, описывающих механическое упругое поле (перемещения, деформации и напряжения), приходим к 22-м переменным (векторы напряженности и индукции электрического поля, электростатический потенциал). Исходными соотношениями состояния для данной задачи будут уравнения пьезоэффекта, описывающие электромеханическое преобразование, квазистатические уравнения Максвелла, уравнения движения элемента среды; а также геометрические соотношения Коши. Основные разрешающие уравнения для процессов, изменяющихся во времени, могут быть непосредственно получены из обобщенного вариационного принципа Гамильтона-Остроградского $\delta \int (T - \Pi + W) dt = 0$, где T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия (является наиболее важной энергетической характеристикой произвольной системы, выраженной через компоненты выбранного пространства состояний и при необходимости может включать, например, энергию электрической индукции для трехмерного пьезоэлектрического тела), W – работа приложенных сил. Конечноэлементные соотношения в матричной форме для пьезоэлемента представляются в виде:

$$\begin{bmatrix} [M_{yy}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\} \\ \{\dot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{yy}] & [K_{y\phi}] \\ [K_{\phi y}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{L\} \end{Bmatrix},$$

где точка над переменной означает производную по времени, $[M_{yy}]$ – мат-

рица масс; $[C]$ – матрица демпфирования; $[K_{yy}]$ – матрица жесткости; $[K_{\phi\phi}]$ – матрица диэлектрической проницаемости; $[K_{y\phi}]$ – матрица пьезоэлектрической связи; $\{F\}$ – вектор механической нагрузки; $\{L\}$ – вектор электрической нагрузки; $\{y\}$ и $\{\phi\}$ – вектора узловых перемещений и потенциалов.

Для примера рассмотрим задачу расчета пьезоэлектрического датчика-преобразователя. Пьезокерамический преобразователь представляет собой куб из материала PZT4 с поляризацией вдоль оси. Электроды размещены на поверхностях, ортогональных оси поляризации. Рассматривались группы частот колебаний, соответствующих, как короткозамкнутой цепи, так и разомкнутой. Подэлектродная область представляет собой эквипотенциальную поверхность и специальным образом не моделируется. Для короткозамкнутой цепи верхний и нижний электроды заземляются (напряжение на электродах равно нулю). Для случая разомкнутой цепи заземляется только верхний электрод. Случай короткозамкнутой цепи представляет собой возбуждение преобразователя приложенным к электродам потенциалом, а случай разомкнутой цепи – возбуждение зарядом. Преобразователь моделировался четвертью куба с приложенными граничными условиями симметрии по поверхностям раздела. Для исследования использовались трехмерные КЭ. Распределение интенсивностей напряжений на соответствующих формах собственных колебаний приведено на рис. 1 и 2. В качестве формы иллюстрации результатов сделана тоновая заливка на поверхности. Светлыми тонами показана зона близких к нулю интенсивностей напряжений, темными – экстремальных.

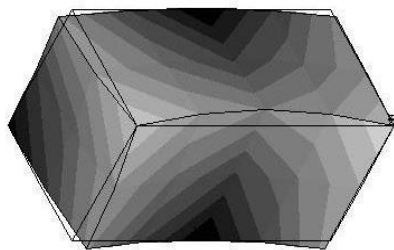


Рисунок 1 – Третья собственная форма. Короткозамкнутая цепь.

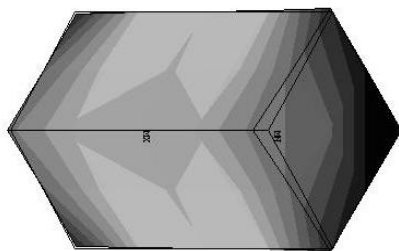


Рисунок 2 – Пятая собственная форма. Разомкнутая цепь.

Недостатком моделей сильной связанности является увеличение размерности и ширины ленты системы разрешающих уравнений, преимуществом – возможность достижения решения за одну итерацию.

Примерами конструкций, для которых необходим учет воздействия последовательно связанных физических полей различной природы (1), являются устройства радиоэлектронной аппаратуры, подверженные механическим и тепловым воздействиям. В общем виде математическая модель сильной (полной) связанности описывается системами уравнений в частных производных: теплопереноса и термоупругости в перемещениях [6]

$$c_{ij}\rho_{ij}\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+k_1\bar{V}_j\nabla T_i\right)=\nabla(\lambda_{ij}\nabla T_i)-k_2(3\lambda_i^*+2\mu_i^*)\alpha_{T_i}T_{0i}\operatorname{div}\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial t}+k_3Q_i^{HC}+Q_i^y; \quad (4)$$

$$\rho_{ij}\frac{\partial^2\bar{U}_i}{\partial t^2}=\mu_i^*\nabla^2\bar{U}_i+(\lambda_i^*+\mu_i^*)\overline{\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{U}_i}-(3\lambda_i^*+2\mu_i^*)\alpha_{T_i}\overline{\operatorname{grad}(T_i-T_{0i})}, \quad (5)$$

где $T_i(x, y, z, t)$ – температурное поле приборов; $\bar{U}_i(x, y, z, t)$ – векторное поле перемещений при деформациях приборов; $\bar{V}_j(x, y, z, t)$ – векторное поле скоростей сред теплоносителей; ∇^2 – оператор Лапласа; $c_{ij}, \rho_{ij}, \lambda_{ij}, \alpha_{T_i}$ – теплофизические параметры материалов (теплоемкости, плотности, теплопроводности, коэффициент линейного расширения); T_{0i} – номинальная температура; λ_i^*, μ_i^* – коэффициенты Ляме; t – время; Q_i^{HC}, Q_i^y – приведенные мощности источников тепловыделяющих (хладопроизводящих) элементов; k_1, k_2, k_3 – коэффициенты (принимают значения 0 или 1), отражающие связанный характер процессов, протекающих в устройствах. К системам уравнений необходимо добавить начальные и граничные условия с учетом особенностей крепления и внешнего теплообмена данных устройств.

Рассмотрим установившийся режим, когда температурное поле можно считать стационарным. Этот режим устанавливается при достаточно долгом прогреве после включения, постоянной внешней температуре и является основным рабочим режимом. После декомпозиции, состоящей в разделении системы (модели) на подсистемы (подмодели, задача анализа включает в себя: 1) задачу стационарной теплопроводности $\Lambda\bar{T}=\bar{Q}$, где Λ – матрица теплопроводности, \bar{Q} – вектор обобщенной тепловой нагрузки; 2) задачу термоупругости $K_{yy}\bar{y}_t=\bar{F}_t$, где \bar{y}_t – обобщенный вектор термоупругих перемещений. Решение задачи теплопроводности определяет нагрузки для задачи термоупругости. Температурное нагружение оказывает двоякое действие: вызывает дополнительные статические напряжения, связанные с возникновением градиента температур, а также в некотором диапазоне изменяет физико-механические характеристики материала. Задача анализа резонансного состояния сводится к матричной проблеме $[K_{yy}+G(\bar{y}_s)-\lambda M_{yy}]\bar{y}_d=0$, где $G(\bar{y}_s)$ – матрица «геометрической» жесткости (приведенных начальных напряжений), формируемая на решении \bar{y}_s статической задачи (температура + силовые факторы). Совместное решение задачи теплофизики и механики позволяет, с одной стороны, экономить затраты времени (например, за счет генерации единой КЭ сетки), а с другой стороны – более адекватно задавать нагрузки. Основным отличием моделей с последовательной (слабой) степенью связанности от сильной степени является отсутствие недиагональных блоков K_{21} в глобальных матрицах. Часто последовательная связь не только эффективнее сильной, но и более удобна, так как имеется возможность выполнять расчеты независимо. Температурные напряжения, возникающие в платах радиоэлектронной аппаратуры и вызывающие разрушения вследствие: наличия температурного градиента; несвободного теплового

расширения отдельных частей платы или невозможности этого (фиксация платы в направляющих штырях); подробно исследованы в работах [9,10].

Необходимость подавления колебаний плат обусловлена возможной потерей электрического контакта как внутри платы, так и контакта платы с периферией, при больших амплитудах колебаний, что может привести к аварийной ситуации. Поэтому при проектировании необходимо решать задачи о поиске собственных частот плат бортовых компьютеров, все элементы которых (процессор, микросхемы и т.п.) расположены на стеклотекстолитовой пластине. При расчете плата представляется в виде кусочно-однородной пластины. Для исследования был выбран оболочечный КЭ shell63, у которого шесть степеней свободы в каждом из 4 узлов, а также КЭ типа mass21, т.е. сосредоточенные массы, которые заменяют различные элементы платы. На рис. 3 приведены формы колебаний и интенсивностей напряжений платы.

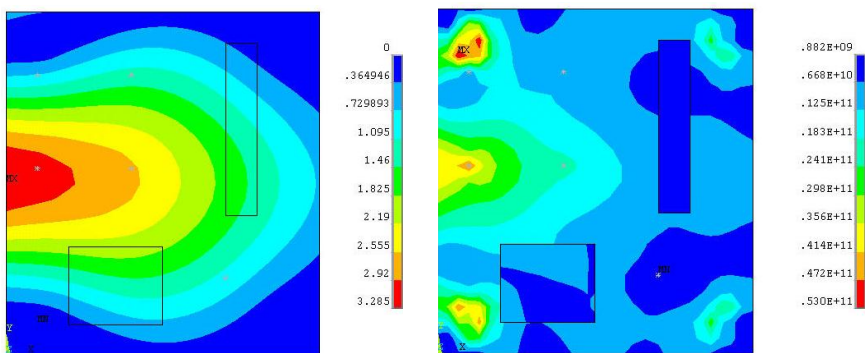


Рисунок 3 – 1-ая собственная частота

Примером конструкций, для которых важен учет воздействия слабосвязанных физических полей различной природы (3), являются резонансные приборы. Особенностью таких задач является учет обратных связей (при двустороннем взаимодействии) и необходимость нескольких итераций при решении нелинейной задачи. Ультразвуковые колебания высокой интенсивности вызывают существенный разогрев системы. Соответствующая связанная нелинейная математическая модель включает стационарные уравнения теплопроводности $\Delta \vec{T} = \vec{Q}(\vec{\sigma}(\vec{v}_d))$, в которых функция тепловых источников строится по форме резонансных динамических напряжений как доля интенсивности гистерезисных потерь, и уравнения собственных колебаний $[K_{yy}(\vec{T}) - \omega^2 M_{yy}(\vec{T})] \vec{v}_d = 0$, включающие зависимость физико-механических характеристик и геометрии элемента от распределения температуры. При этом выполняются итерации между различными физическими анализами до тех пор, пока не будет достигнут желаемый уровень сходимости. При двустороннем взаимодействии (3) в анализе сложного взаимодействия «жидкость — конструкция» (Fluid Structure Interaction, FSI) необходимо учесть деформации конструктивных элементов и

повторить расчет параметров движения среды для новой геометрии. Общая расчетная схема может носить нестационарный характер, при этом временные шаги могут быть различными. Схемы решения с точки зрения сбалансированного сочетания точности, полноты, строгости и затрат ресурсов. Таким методом решаются задачи флаттера несущих поверхностей, вибраций в лопаточных машинах, искусственных сердечных клапанах и т.д.

После сборки, состоящей в преобразовании модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых), возможно построение многоуровневых иерархических систем. Так в случае излучателя, работающего на большой глубине в жидкости и изготовленного из пьезоактивного материала, для достижения хорошего соответствия математической модели реальному поведению конструкции необходимость учитывать и связь напряженно-деформированного и электрических полей в конструкции:

$$\begin{cases} [K_{yy}]\bar{y}_s = \bar{F}_s; & \{[K_{yy}] + [G(y_s)] - \omega^2[M_{yy}]\}\bar{y} + [K_{y\varphi}]\bar{\varphi} - [R]^T \bar{p} = 0 \\ [K_F]\bar{p} - \omega^2[M_F]\bar{p} - \omega^2\rho[R]\bar{y} = 0; & [K_{\varphi y}]\bar{y} + [K_{\varphi\varphi}]\bar{\varphi} = 0 \end{cases}$$

где $[M_F]$, $[K_F]$ – матрицы масс и жесткости жидкости; $[R]$ – матрица взаимосвязи «давление-перемещение», определяемая из условия совместности на границе конструкции с жидкостью \bar{p} – вектор узловых давлений.

Данное исследование позволило провести классификацию задач анализа мультифизических конечноэлементных моделей различной степени связанности, позволяющую построить схему для декомпозиции комплексной проблемы на ряд отдельных физических задач, и успешно апробировать разработанный математический аппарат на ряде конструкций. Анализ структуры и типов связей между отдельными задачами служит основой схемы последовательности решения общей проблемы. Использование единой расчетной модели для мультифизического моделирования позволяет минимизировать время, обычно затрачиваемое на подготовку множества расчетных моделей, преобразование и передачу данных от одной расчетной модели в одной системе к другой модели в другой системе. Классификация может служить основой последующей унификации и стандартизации подходов. Дальнейшим направлением исследований является применение математического аппарата при исследовании жизненного цикла ряда современных конструкций, а также его развитие на проблемы оптимизации и анализа чувствительности.

Список литературы: 1. *Piegl L.A.* Ten challenges in computer-aided design // Computer-aided design. – 2005. – № 37. – P. 461-470. 2. *Lvov G.* The integrated information technologies on principles CALS at designing, manufacture and operation of high technology production // 7 Magdeburger Maschinenbau-Tage. – 11 bis 12 Oktober 2005. – PP. 259-263. 3. <http://www.cimdata.com/>. 4. *Кунву Ли.* Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с. 5. *Ткачук Н.А., Грищенко Г.Д., Чепурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н.* Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // Механіка та машинобудування. – 2006. – № 1. – С. 57–79. 6. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. – Киев: Наукова думка, 1987-1989. 7. *Назаренко С.А.* Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы //

Вестник НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 119-122. 8. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., Марусенко С.И. Проблемы мультидисциплинарной оптимизации элементов конструкций. CFD-анализ // Вестник НТУ «ХПИ». – 2004. – № 47. – С. 19-22. 9. Повгородний В.О. Прогнозирование показателей надежности механических конструкций бортовой аппаратуры Автореф. дис. канд. техн. наук: Харьков, 2004. – 20 с. 10. Щемелинин Д.А. Проблемы моделирования механических и тепловых процессов в блоках и печатных платах электронных приборов и пути их решения на основе 3D моделей // Объединенный научный журнал / Агенство научной печати. – Москва, 2007. – № 17(205). – С. 57-65.

Поступила в редколлегию 25.11.2008.

УДК 536.24

А.М.НИКИТИН, НТУ «ХПИ», Харьков

ВОЗМОЖНОСТЬ ТЕНЗОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ ЛДИС

У даній роботі розглянута задача ідентифікації компонентів тензора Рейнольдса та результатів виміру ЛДВШ. Пропонується варіант рішення на підставі порівняння алгоритмів обробки сигналів лазерного доплерівського вимірника швидкості й Рейнольдса.

This paper consider the problem of identification of Reynolds' tensor components and results LDA-measurements. Offer a variant of the decision which based on comparison of signals-processing algorithm of laser Doppler anemometer and Reynolds' velocity algorithm.

Введение. В 2004 году на сайте журнала «Автометрия» [1] была опубликована тема научной дискуссии, которая полностью созвучна излагаемому ниже материалу. Актуальность этой темы поддерживает проблема соответствия результатов измерений методом лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА) и параметрами среды, которые использованы в теоретическом описании турбулентных потоков. Сама проблема возникала ранее, и идентичность величин мгновенной и осредненной скоростей [3] для большинства экспериментальных задач обоснована сопоставлением результатов параллельных экспериментов, проведенных методами ЛДА и термоанемометрии. Задача идентификации компонентов тензора турбулентных напряжений подобным способом не решается из-за сложности изготовления термоанемометрических или других зондов с пространственным разрешением, близким к 10^{-5} м.

Постановка задачи. В данной работе обсуждается вариант задачи идентификации компонентов тензора Рейнольдса и результатов измерения ЛДИС на основании сравнения алгоритмов обработки сигналов лазерного доплеровского измерителя скорости ЛДИС и осреднения скорости Рейнольдса.

Исходная информация и решение. Метод ЛДА получает информацию о потоке жидкости или газа в результате обработки спектра сигналов, детектированных фотоприемником непосредственно от выбранной точки потока.

Структура канала обработки сигналов измерителя построена в блочном исполнении (см. рис. 1). Аналоговый блок (4) канала обработки сигналов выполняет функции детектирования, усиления, фильтрации и визуализации спектра. Спектр сигналов фиксируется в дискретном блоке (5) в виде гистограммы F_e и несет информацию о движении частиц жидкости в малом по величине измерительном объеме Λ_e .

Измерительный объем формируется областью интерференции когерентного модулированного излучения. Размеры интерференционного объема могут быть рассчитаны с необходимой точностью по формулам, приведенным в [2]. Параметры потока оказываются осредненными в трехмерной области с эффективным максимальным размером $\lambda_e \leq 10^{-4}$ м. Это позволяет измерять значения параметров турбулентного потока, аппаратно приведенные к координатам центра тяжести измерительного объема, по величине не превышающего $\Lambda_e \leq 10^{-12}$ м³.

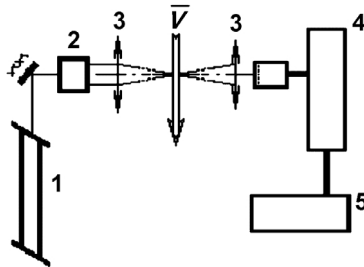


Рисунок 1 – Схема лазерного измерителя: 1 – оптический генератор; 2 – модулятор; 3 – объектив; 4 – аналоговый блок; 5 – дискретный блок; \bar{V} – зона потока жидкости

Оптическая схема (1, 2, 3, рис. 1) формирует ведущий параметр ЛДИС – вектор чувствительности доплеровского измерителя $|\bar{k}_e| = 2\pi/\lambda$. Его величина и направление в зоне течения определяются по методике, разработанной в [2, 3]. Интегральный спектр мгновенных откликов фотодетектора с определенной степенью дискретности отображается в блоке (5, рис. 1) и используется в дальнейшей обработке в виде гистограммы F_e . Параметры векторов чувствительности \bar{k}_e вместе с гистограммами спектров сигналов F_e составляют достаточный набор исходных данных для последующего определения значений параметров потока в заданной точке измерения.

Гистограмма спектра сигналов ЛДИС F_e несет информацию об искомым параметрах потока. Использование формулировки эффекта Доплера в виде [6], который устанавливает однозначное соответствие между проекцией вектора мгновенной скорости движущейся среды u_e , приведенной к координатам центра измерительного объема Λ_e , и вектором чувствительности измерителя \bar{k}_e , показывает, что мгновенный отклик фототока приемника не содержит никакой посторонней информации о потоке.

$$u_e = (V \cdot k_e). \quad (1)$$

Скалярное произведение (1) позволяет определить величину вектора скорости в случае коллинеарности векторов \overline{V} и \overline{k}_e или величину проекции \overline{V} на направление \overline{k}_e . Как показывает практика, выполнение условия коллинеарности векторов \overline{V} и \overline{k}_e в большинстве экспериментов затруднительно либо не реально. Оказывается эффективным использование таких конструкций ЛДИС, которые определяют компоненты мгновенных значений параметров потока. Тогда вариант метода ЛДА сводится к привязке данных к единой системе координат.

Между проекцией вектора мгновенной скорости \overline{V}_e и частотой фототока $i(t)$ в некоторый момент времени устанавливается однозначное соответствие. Спектр $F_e(\omega)$ сигналов ЛДИС является отображением в амплитудно-частотной плоскости некоторой совокупности единичных откликов $i(t)$, измеренных на протяжении малого промежутка времени T .

Вариант метода ЛДА, использующего методы спектрального анализа конечного числа N откликов фотодетектора $i(t)$, устанавливает достаточность выборки регистраций условием устойчивости энергетического спектра $F_e(\omega)$. Для квазистационарных процессов течения $F_e(\omega)$ можно представить в виде, аналогичном функции вероятности сигнала $i(\omega, t)$ с частотой ω в некоторый промежуток времени. Для дифференциальных оптических схем с точностью до констант [2] спектр доплеровского сигнала можно записать в виде:

$$F(\omega, t) = \int_{t-\tau_0}^{t+\tau_0} i^2(\omega, \tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) \cdot d\tau. \quad (2)$$

Учитывая тот факт, что полезным сигналом в анемометрии считается сигнал, несущий информацию о движении частиц или неоднородностей в потоке, τ_0 принимается конечным. Величина τ_0 определяет точность измерения доплеровского сдвига частоты, а также скорости в исследуемой точке [4] по (1):

$$(\overline{V} \cdot \overline{k}_e) = \mu_1(F_e) \left| \overline{k}_e \right|^{-1}; \quad \mu_1(F_e) = \frac{\int_{t-\tau_0}^{t+\tau_0} \omega \cdot i^2(\omega, \tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) \cdot d\tau}{\int_{t-\tau_0}^{t+\tau_0} i^2(\omega, \tau) \cdot \exp(-j\omega\tau) \cdot d\tau}, \quad (3)$$

$\mu_1(F_e)$ – первый центральный момент спектра $F_e(\omega)$.

Размер интервала интегрирования в (3) в реальных доплеровских измерителях находится в диапазоне ($10^{-3} \div 10^2$) с, в зависимости от конструкций оптических схем и быстродействия систем обработки спектров электрических сигналов.

Одноточечные парные корреляции, которые в некоторых работах называют турбулентными напряжениями, определяются по величине дисперсии доплеровского спектра по второму центральному моменту, аналогично (3):

$$\overline{u'_e u'_e} = \mu_2(F_e) \cdot \left| \overline{k}_e \right|^{-2}. \quad (4)$$

Определение $\mu_2(F_e)$ проводится на том же интервале $2\tau_0$. Как показано в

[6, 7] корреляцию (5) можно сопоставить с состоянием среды в точке течения на площадке с нормалью, совпадающей с направлением вектора \overline{k}_e . Учитывая изложенный подход, время формирования спектра сигнала ЛДИС $2\tau_0$ в течение точечных измерений можно ограничить временем достижения устойчивого положения гистограммы спектра в амплитудно-частотной плоскости.

Рассмотрим процедуру осреднения скорости Рейнольдса [5]. Мгновенная скорость \overline{V} представляется в виде суммы векторов осредненной скорости $\overline{\overline{V}}$ и вектора мгновенной пульсационной скорости $\overline{v(t)}$. При этом идентификация вводимых понятий достигается применением теоремы о среднем с интегрированием по временному интервалу t_R

$$\overline{\overline{V}}(t) = \frac{1}{t_R} \int_{t-R/2}^{t+R/2} \overline{V}(t) \cdot dt_R - \text{вектор осредненной скорости,} \quad (5)$$

$$\overline{v(t)} = \overline{V}(t) - \overline{\overline{V}}(t) - \text{вектор пульсационной скорости.} \quad (6)$$

Продолжительность интервала интегрирования t_R выбирается такой, что увеличение его не вызывает изменений вектора осредненной скорости $\overline{\overline{V}}$:

$$\lim_{\Delta t_R \rightarrow 0} [\Delta \overline{\overline{V}}(t)] = \lim_{\Delta t_R \rightarrow 0} [\overline{\overline{V}}_{(t_R + \Delta t_R)}(t) - \overline{\overline{V}}_{(t_R)}(t)] \rightarrow 0 \text{ или} \quad (7)$$

$$\lim_{\Delta t_R \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t_R} \int_{t-(t_R + \Delta t_R)/2}^{t+(t_R + \Delta t_R)/2} \overline{V}(t) \cdot dt_R - \frac{1}{t_R} \int_{t-t_R/2}^{t+t_R/2} \overline{V}(t) \cdot dt_R \right] \rightarrow 0.$$

Выделяемый по (7) доминантный уровень распределения параметра $\overline{\overline{V}}(x_i, t)$ в области течения может рассматриваться в качестве информативного в дальнейшем изучении потока до тех пор, пока вектор пульсационной скорости $\overline{v(x_i, t)}$ можно считать малым и пригодным для моделирования. При этом случайная вектор-функция $\overline{v(x_i, t)}$ из (6), определенная в том же интервале t_R , что и вектор осредненной скорости $\overline{\overline{V}}$, должна удовлетворить условие

$$\frac{1}{t_R} \int_{t-t_R/2}^{t+t_R/2} \overline{v(x_i, t)} \cdot dt_R = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

В то же время величина

$$\rho \cdot \overline{uv} = \frac{\rho}{t_R} \int_{t-t_R/2}^{t+t_R/2} [\overline{u(x_i, t)} \cdot \overline{v(x_i, t)}] \cdot dt_R \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

представляет собой компонент тензора Рейнольдса, если $\overline{u(x_i, t)} \cdot \overline{v(x_i, t)}$ явля-

ются соответствующими координатными проекциями в декартовой системе координат. Формула (9) записана для сред с постоянной плотностью в точке исследования, что не является существенным для проблемы интерпретации результатов измерения ЛДИС. Это удобно при выделении из тензора Рейнольдса тензора кинематических корреляций $\overline{u_i u_j}$

$$[\pi_{ij}] = [\rho \cdot \overline{u_i u_j}] = \rho \cdot [\overline{u_i u_j}]; \quad i, j = x, y, z \quad (10)$$

$[\overline{u_i u_j}]$ – представляет собой трехмерный тензор второго ранга с девятью независимыми компонентами в общем случае.

Динамическое состояние среды в точке стационарного изотермического потока, описываемое уравнениями Рейнольдса [5], в принятых обозначениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} U_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \Delta U_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\overline{u_i u_j}); \\ \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0; \end{array} \right. \quad , \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Система уравнений Рейнольдса в виде (11) связывает с каждым из слагаемых определенные физические эффекты. Первое слагаемое $\frac{\partial U_i}{\partial x_j} U_j$ соответст-

вует «конвективному переносу»; второе $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$ влиянию инерционных сил;

$\nu \Delta U_i$ – явлению диффузии и $\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j})$ – эффекту «генерации турбулентности».

Как видим из (11), все феноменологические модели турбулентности пытаются оценить и учесть величину последнего слагаемого.

Принимая во внимание два похода, сформированные в разное время и различными технологиями, сопоставляя формулы (3), (4) и (5), (9), (10), можно установить соответствие между временным интервалом аппаратного формирования спектра сигналов ЛДИС и временем осреднения в процедуре Рейнольдса. Для квазистационарных течений равенство $2\tau_0 = t_R$ очевидно.

Предположим, что в течение малого интервала времени ($t \pm k \cdot \tau_0$) измерены все девять независимых компонентов тензора турбулентных корреляций

$$\begin{bmatrix} \overline{u_x u_x} & \overline{u_x u_y} & \overline{u_x u_z} \\ \overline{u_y u_x} & \overline{u_y u_y} & \overline{u_y u_z} \\ \overline{u_z u_x} & \overline{u_z u_y} & \overline{u_z u_z} \end{bmatrix} = \overline{u_i u_j}; \quad i, j = x, y, z. \quad (12)$$

В этом случае парная корреляция в произвольном направлении $\overline{u'_e u'_e}$ может быть вычислена [5] по известным значениям координатных косинусов l_{ei} , которые определяют это направление в принятой системе координат

$$\overline{u_i u_j} \cdot l_{ei} \cdot l_{ej} = u'_e u'_e; \quad i, j = x, y, z. \quad (13)$$

Очевидно, если направление вектора чувствительности измерителя $\overline{k_e}$ задано в пространстве декартовых координат значениями направляющих косинусов l_{ei} , то измеряемая по (4) и определенная по (13) величины $\overline{u'_e u'_e}$ эквивалентны:

$$\overline{u'_e u'_e} = \mu_2(F_e) \cdot \left| \overline{k_e} \right|^{-2} = \overline{u_i u_j} \cdot l_{ei} \cdot l_{ej}; \quad i, j = x, y, z. \quad (14)$$

Связь между величинами компонентов $\overline{u_i u_j}$ и измеряемыми величинами $\overline{u'_e u'_e}$ по формуле (14) линейна и позволяет выбрать такие направления измерения, что измеренные значения парных корреляций однозначно определяют полный набор компонентов тензора.

Адаптированный в [6, 7] для измерений компонентов тензора турбулентных корреляций вариант метода ЛДА позволяет получать оценку ошибки в процессе измерения. Для определения ошибок использовался метод избыточной информации, что позволило получить следующие выражения. Оценка максимальной относительной ошибки проекций осредненной скорости в точке измерения

$$\delta_U = \left[\sqrt{2} / 2 (U_x + U_z) - U_3 \right] / U_3 \quad (15)$$

максимальной относительной ошибки величины при измерении компонентов тензора турбулентных корреляций

$$\delta_\pi = 1 - \frac{\left\{ a^2 \alpha^2 [\sigma_2(F_2) + \sigma_2(F_1)] - 2[u'_x u'_x - u'_x u'_z + (a^2 + 1)u'_z u'_z] \sin^2 \gamma \right\}}{2(a-1)^2 u'_x u'_y \cos^2 \gamma}. \quad (16)$$

Выражения (15) и (16) получены для целевой схемы измерителя, поэтому дальнейшие преобразования и выводы не могут претендовать на общность. В то же время, предполагая достоверность равенства $2\tau_0 = t_R$ можно оценить предельную величину ошибки, которая укажет качество самой реализованной конструкции ЛДИС. Опираясь на величину спектральной ошибки δ_F , которую распространим на все измеряемые спектры сигналов, можно показать, что $\delta_{\mu 2} = 2 \delta_{\mu 1} = 2 \delta_F$, а, учитывая, что $\delta_\pi \approx \delta_{\mu 2}$ (15) и (16) получим:

- для компонентов корреляций $\delta_\pi = 5 \cdot \delta_{\mu 2} = 10 \cdot \delta_F$,
- для проекций скорости $\delta_U = 4 \cdot \delta_F$.

Предельная точность измерений определена в [3], которая оценивает величину относительной ошибки измерения скорости $\delta_{U0} \approx \Omega/\omega = 10^{-7}$. Можно ожидать, что аналогичная величина предельной ошибки измерения компонентов тензора турбулентных корреляций составит $\delta_\pi \approx 10 \cdot \Omega/4 \cdot \omega = 2,5 \cdot 10^{-7}$. Это значит, что точность измерений величин компонентов тензора турбулентных корреляций $\left[\overline{u_i u_j} \right]$, которая опубликована в [6] может быть улучшена.

Представление результатов эксперимента. Графический интерпретатор измеряемых параметров потока представляет изображения вектора осредненной скорости, годограф диагональных компонентов или «парных

пульсационных корреляций» (пунктирная линия) и сплошная линия для недиагональных компонентов. Система координат XY на диаграммах совпадает с общей системой координат модели.

Все рисунки и диаграммы выполнены в относительных масштабах. Величины приведенные на каждой диаграмме позволяют определить реальный масштаб изображений и проводить количественный анализ. При этом масштаб скорости не совпадает с масштабом компонентов напряжений, но для всех компонентов на данной диаграмме справедлив один и тот же масштаб. В качестве тестового направления выбрано направление, аналогичное главной оси тензора корреляций, направление для которого выполняется условие равенства нулю смешанных корреляций.

Приведенные диаграммы некоторых точек измерения в модели канала ленточнопоточного типа [4] позволяют наглядно представить некоторые особенности течения и подтверждают возможность точного описания турбулентных течений с помощью системы уравнений Рейнольдса.

Эпюры напряженного состояния демонстрируют проявление физических эффектов, выделяемых в системе уравнений (1), с учетом легенды, справедливой для всех приведенных диаграмм:

- — — — — вектор осредненной скорости потока U ;
- — — — — годограф парных турбулентных корреляций $\overline{u'_e u'_e}$;
- — — — — годограф непарных турбулентных корреляций $\overline{u'_e u'_o}$.

где вектор скорости и тестовое направление составляют углы, близкие к $\pm\pi/2$ (рис. 2), «инерционные эффекты» — $\frac{\partial P}{\partial x_i}$, соответствует преобладанию величин нормальных напряжений (рис. 3), «диссипация турбулентности» — $\mu\Delta U_i$, отмечается соразмерностью величин компонентов напряжений (рис. 4), «генерация турбулентности» — $\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)$, характерна в случае если направления вектора скорости и тестовое составляют углы, близкие к кратным $\pm\pi/2$ (рис. 5).

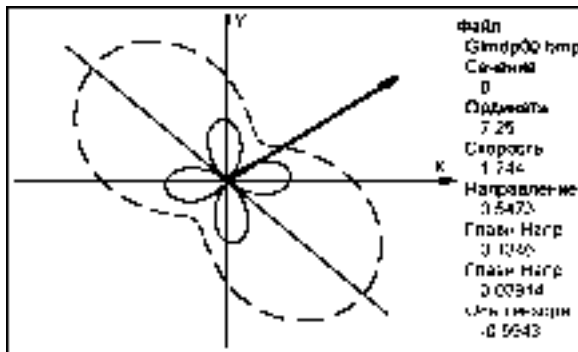


Рисунок 2

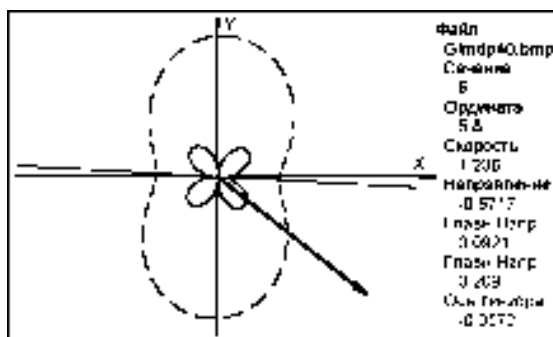


Рисунок 3

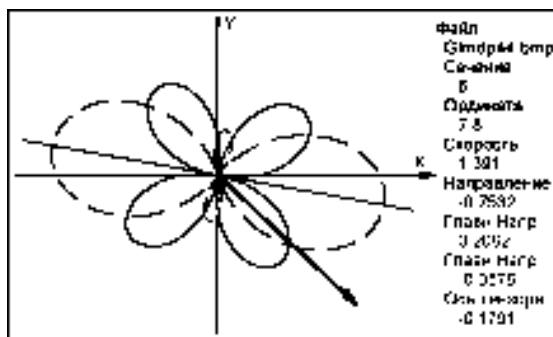


Рисунок 4

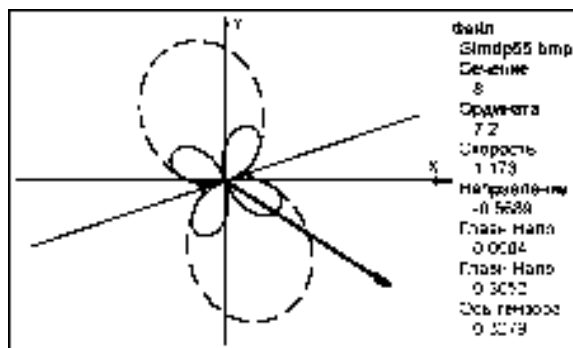


Рисунок 5

«Конвективный перенос» соответствует $\frac{\partial U_i}{\partial x_j} U_j$, преобладает в точках

Выводы. В результате сопоставления методов представления и обработки сигналов ЛДИС и осреднения Рейнольдса показана идентичность интервала времени аппаратного интегрирования при формировании спектра сигналов и

времени осреднения в процедуре Рейнольдса.

Показана возможность однозначного соответствия (14) между измерениями одноточечных корреляций пульсаций лазерным доплеровским анемометром и значениями компонентов тензора Рейнольдса в одноименной системе уравнений.

Для ЛДИС, адаптированного к измерению величин компонентов тензора турбулентных корреляций, определена минимальная ошибка, возможная в случае стационарного турбулентного течения.

Список литературы: 1. Автметрия. – Новосибирск, изд-во СО РАН, 2004. – №№ 4-6. – <http://www.sibran.ru/avtw.htm>. 2. Дубнищев Ю.Н., Ринкевичус Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. – М.: Наука, 1982. – 304 с. 3. Дубнищев Ю.Н. и др. Лазерной доплеровские измерители скорости. – Новосибирск: Наука СО, 1975. – 164 с. 4. Дюррани Т., Грейтид К. Лазерные системы в гидромеханических измерениях. – М.: Энергия, 1980. – 336 с. 5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. 1978. 735 с. 6. Никитин А.М. Измерение кинематических параметров турбулентных течений // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск: «Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 29. – С. 35-42. 7. Товажнянский Л.Л., Никитин А.М. и др. Лазерная диагностика потоков. Часть 1. Двумерные модуляторы лазерного излучения // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск: «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 12. – С. 139-146.

Поступила в редакцию 06.10.2008.

УДК 539.3

Н.И.ОБОДАН, докт.техн.наук; **Н.Б.МАКАРЕНКО**, канд.техн.наук;
Днепропетровский национальный университет

ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ ПОДХОД В ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Розглядається проблема ідентифікації геометричних параметрів реальної системи за допомогою вимірів відгуків досліджуваної системи на зовнішній вплив. Розв'язання такої задачі зв'язано із знаходженням зворотного оператора для крайової задачі теорії оболонок, що при числовій реалізації приводить до нездоланих труднощів, що визначені поганою обумовленістю задачі. В подальшій роботі пропонується підхід, заснований на комбінації чисельного розв'язання послідовних прямих задач, методу оптимізації (метод Ньютона) і методів регуляризації.

The problem of identification of geometrical parameters of real system with the help of measurements of the responses of researched system on external influence is considered. The decision of such task is connected to finding of the inverse operator for a boundary value problem of the theory of shells, which at numerical realization results in insuperable difficulties, which are predetermined by bad conditionality of a task. In the present work the approach based on a combination of the numerical decision of consecutive direct tasks, method of optimization (method of Newton) and regularization methods is offered.

Введение и постановка задачи. Решение обратных задач в механике деформируемого твердого тела для систем с распределенными параметрами яв-

ляется весьма актуальным, поскольку позволяет решать проблемы диагностики состояния различных систем по результатам наблюдений за ними. Проблема состоит в идентификации физических и геометрических параметров реальной системы с помощью измерений откликов исследуемой тонкостенной системы на внешнее воздействие. Решение такой задачи связано с получением обратного оператора для краевой задачи теории оболочек, что при численной реализации приводит к непреодолимым трудностям, определяемым, в первую очередь, плохой обусловленностью задачи. Общие постановки и методы решения некоторых обратных задач с использованием идентификационного подхода развиваются в работах [1–3]. Методы, используемые для решения обратных задач, базируются, как правило, на построении функции Грина в сочетании с методами оптимизации [1, 3]. Именно поэтому существующие решения ограничиваются классическими постановками задач. Достаточно полный обзор работ по обратным задачам в механике деформируемого тела представлен в монографии А.О.Ватульяна [1].

В настоящей работе предлагается подход, основанный на сочетании численного решения последовательности прямых задач, метода оптимизации (метод Ньютона) и методов регуляризации.

Рассматривается тонкостенная конструкция, имеющая нарушения сплошности материала, место расположения, форма и размеры которых подлежат определению. На поверхности конструкции введем конечносвязную область Ω , ограниченную контуром $\Gamma(x,y)$ и внутренними несвязными контурами $\Gamma_k(x,y)$ (x,y – декартовы координаты на плоскости), содержащими в себе пустые области Ω_k . Контур Γ и Γ_k являются гладкими контурами, причем их уравнения представимы в виде $\rho_\Gamma = \rho_\Gamma(x,y)$, $\rho_\Gamma^k = \rho_\Gamma^k(x,y)$, $k = 1, m$, где $\rho_\Gamma, \rho_\Gamma^k$ – непрерывно дифференцируемы.

Деформированное состояние оболочки, следуя И. И. Воровичу [4], опишем обобщенным решением в виде пары функций w, Ψ , удовлетворяющей интегральным тождествам (пространства H_1 и H_2 определены там же):

$$\begin{aligned} (w \cdot \phi)_{H_1} &= \int_{\Omega_0} (C^{ik} C^{jl} \cdot B_{ij} \cdot \phi \cdot \nabla_{kl} \Psi + R^3 \phi) d\Omega_0 ; \\ (\Psi \cdot \theta)_{H_2} &= \int_{\Omega_0} C^{ik} C^{jl} \cdot w \cdot B_{ij} \cdot \nabla_{kl} \theta d\Omega_0 , \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } \Omega_0 = \Omega - \sum_{k=1}^m \Omega_k ;$$

$\Psi(x,y)$ – функция усилий, введенная как $T^{ij} = C^{ik} C^{jl} \cdot \nabla_{kl} \Psi$;

T^{ij} – усилия в срединной поверхности,

C^{ik} – составляющие дискриминантного тензора,

∇_{kl} – оператор двукратного дифференцирования,

B_{ij} – коэффициенты квадратичной формы,

R^3 – проекция вектора поверхностной нагрузки на нормаль к поверхности.

На контуре Γ необходимо предварительное выполнение условий:

$$w|_{\Gamma} = \tilde{w} \text{ и (или) } \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = \tilde{\chi}, \quad (2)$$

где n – направление нормали к контуру, χ – угол поворота. Условия свободного края на любых контурах Γ_k являются естественными для обобщенного решения (1).

Пусть известны следы решения (1) $U^*_{pi}, p = \overline{1, N}, i = \overline{1, 3}$ в точках с координатами $(x_p, y_p); (x_p, y_p) \in \Omega$. Задача состоит в определении функций $\rho_{\Gamma}^k(x, y)$, для которой решение $U(\rho_{\Gamma}^1, \rho_{\Gamma}^2, \dots, \rho_{\Gamma}^m)$ краевой задачи (1), (2) удовлетворяет условиям

$$U_{pi} - U^*_{pi} = 0; \quad p = \overline{1, N}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Метод решения

Построим дискретную модель рассматриваемой оболочки путем конечно-элементного разбиения многосвязной области Ω с границами $\Gamma, \Gamma_k, k = \overline{1, m}$. Введем сетку дискретизации, узлы которой имеют координаты $(x_i, y_i), i = \overline{1, L}$. Функции U, Φ можно аппроксимировать через их узловые значения [5]:

$$U = \sum_{i=1}^L U_i H_i(x, y); \quad \Phi = \sum_{i=1}^L H_i(x, y), \quad (4)$$

где H_i – функции формы,

L – число узлов элемента.

Для описания ломаной используем вектор $X = \{x_d, x_d\} = X\{z_j\}; d = \overline{1, D}; j = \overline{1, 2D}$. После подстановки (4) в (1) и интегрирования система разрешающих алгебраических уравнений принимает вид

$$K \cdot W = P, \quad (5)$$

где K – матрица жесткости,

W – вектор перемещений $W = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_1, v_1, w_1\}$,

P – проекция вектора нагрузки $R = \{R^1, R^2, R^3\}$.

Решение системы уравнений (5) проводится на основе конечноэлементного пакета прикладных программ аналогично [6]. Для решения задачи (1)–(4) составим функцию невязки $\Delta^2(\rho_{\Gamma}) = (\tilde{U} - U^*)^T \cdot (\tilde{U} - U^*)$, где \tilde{U} – вектор решения краевой задачи (1), (2) при заданных векторах $X^k = \{z_j^k\}$. Необходимо при заданных векторах нагрузки и перемещений определить вектор X так, чтобы удовлетворялось условие

$$\Delta X \Rightarrow \min_x. \quad (6)$$

Это условие приводит к соотношению [6]:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot \Delta, \quad (7)$$

где элементы матрицы $A = \{a_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial u_p}{\partial z_j} \right\}, i, j = \overline{1, M}$ определяются численно,

путем решения соответствующих прямых задач. В случае, когда $2D = M = N$, в качестве алгоритма идентификации вектора X на основе условия (7) и решения прямой задачи (5) можно использовать алгоритм Гаусса-Ньютона в форме

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - A^{-1} [M \times M] \Big|_{X^{(n)}} \cdot \Delta(X^{(n)}).$$

Так как задача (1) – (4) является некорректной [1], матрица A плохо обусловлена и требует регуляризации. Регуляризация матрицы A проводится в два этапа:

1. выбор информативных точек сравнения (x_p, y_p) , $p = (p_1, \dots, p_N)$, $p = \overline{1, P}$, где N – заданное число точек измерения, и информативных точек аппроксимации (x_d, y_d) ; $d \in d_1, \dots, d_N$, для которых выполняется условие

$$\left(a_{ii} - \sum_{j=1}^M |a_{ij}| \right) \Rightarrow \max_i, i = \overline{1, M}. \quad (8)$$

Для этого определяются значения выражений $a_{ii} - \sum_{j=1}^M |a_{ij}|$ по всем строкам матрицы A с расположением последовательности значений по мере их убывания. Первые P значений из всех возможных и определяют номера тех строк матрицы A , которые являются строками регуляризированной матрицы \tilde{A} . Из числа M столбцов выбираются те D , которые усиливают условие (8). Число P соответствует заданному количеству точек измерений (i_1, \dots, i_P) , а номера узлов (j_1, \dots, j_P) – точкам дискретизации, в которых проводятся измерения, и точкам восстановления значений X соответственно. Число P выбирается как соответствующее условию

$$\|A(X^{(n)}, P) \cdot X^{(n)} - \Delta(X^{(n)}, P)\| \rightarrow \inf_P. \quad (9)$$

2. Если значение $\det \tilde{A}$ близко к нулю, используется регуляризирующий функционал А. Н. Тихонова [7], в результате чего нормальное решение уравнений типа (6) приближенно заменяется на решение системы

$$(\alpha \cdot E + A^T(X^{(n)}) \cdot A(X^{(n)})) \cdot X^{(n)} = A^T(X^{(n)}) \cdot \Delta(X^{(n)}), \quad (10)$$

где E – единичная матрица. Для определения параметра α по невязке используется условие [1, 2, 7], выполнение которого зависит от величины α :

$$\|A(X^{(n)}) \cdot X^{(n)} - \Delta(X^{(n)})\| \leq \varepsilon, \quad (11)$$

где ε – заданный малый параметр.

Сформулируем последовательность действий при идентификации дефекта:

1. Формирование дискретной модели и начального приближения $X^0 = \{z_j\}$, $j = \overline{1, 2D}$ с помощью алгоритма, реализующего метод конечных элементов: вычисляется вектор характерных перемещений для соответствующей системы и определяются границы области, где $\delta > \gamma$ ($\delta = |U_p^*(\rho_f) - \bar{U}_p|$, \bar{U}_p – перемещения для системы без дефекта), γ – малое число.

2. Численное построение матрицы A .
3. Выбор элементов, составляющих матрицу \tilde{A} .
4. Регуляризация матрицы \tilde{A} .
5. Определение вектора $X = \{z_j\}$ (если $\det \tilde{A} \approx 0$) с заданной точностью.
6. Определение числа P из условия (9) и соответствующего вектора X .

Результаты расчетов и выводы

Изложенный алгоритм был применен для решения обратной задачи восстановления размера и формы пробойны в оболочечной конструкции по результатам наблюдений. В качестве наблюдений использовались решения соответствующих прямых задач для тонкостенных цилиндрических панелей с различными формами повреждений. Исследована возможность определения при помощи изложенной методики размеров, формы и мест расположения дефекта, наличие которого обусловило выявленное поведения реальной конструкции под действием известного воздействия.

В качестве исследуемой конструкции рассматривалась тонкая (толщина $h = 10^{-3}$ м) стальная (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu = 0,3$) квадратная в плане (сторона $a = 1$ м) цилиндрическая панель, защемленная по угловым точкам, а в серединах сторон нагруженная силами $P = 1$ Н. Панель разбивалась сеткой 50×50 на треугольные конечные элементы с шестью степенями свободы в узлах (всего 5000 элементов). Приращение для построения матрицы A бралось равным 10^{-3} м, для начального приближения формы границы дефекта выбиралось $\delta = 1 \cdot 10^{-4}$. Рассматривались панели, имеющие сквозные треугольные и круглые отверстия в центральной и в угловой частях панели.

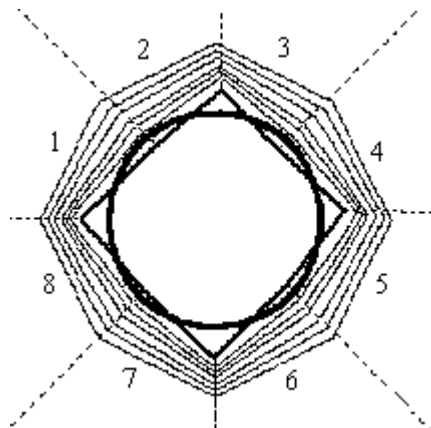


Рисунок 1 – Приближение формы круглого отверстия по 8 точкам

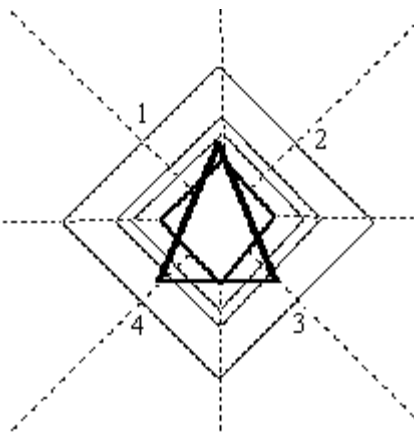


Рисунок 2 – Приближение формы треугольного отверстия по 4 точкам

На рисунках приведены результаты идентификации формы дефекта с заданной точностью $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ вычислений по невязкам. Пунктирными линиями

обозначены элементы разбиения области. Жирными линиями на рисунках обозначены действительные границы отверстия, тонкими линиями обозначены контуры приближений (цифрами отмечены звенья ломаной начального приближения), линиями средней толщины – результат приближений формы и места расположения дефекта. Заданная точность расчетов с помощью метода Ньютона достигалась за 5 – 12 итераций. Рис. 1 соответствует процессу определения места расположения центрального круглого отверстия, граница которого приближается 8-звенной замкнутой ломаной. На рис. 2–4 проиллюстрировано влияние расположения и числа звеньев P (4, 4 и 3 соответственно) ломаной, аппроксимирующей контур сквозного треугольного отверстия, расположенного в угловой части панели, на окончательный результат идентификации формы повреждения. Рис. 4 соответствует минимальной норме (9).

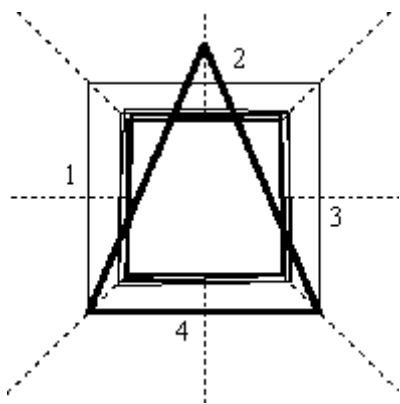


Рисунок 3 – Приближение формы треугольного отверстия по 4 точкам

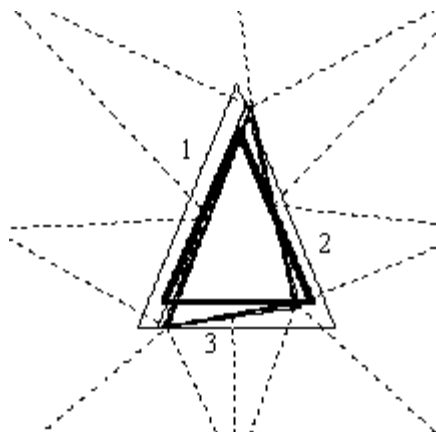


Рисунок 4 – Приближение формы треугольного отверстия по 3 точкам

Полученные результаты показывают, что предлагаемая методика позволяет идентифицировать повреждения таким образом, что могут быть определены не только расположение дефекта, но и его форма. Было установлено, что при наличии близко расположенных дефектов их идентификацию удастся провести только путем специального подбора значения ε или получая огибающую области дефекта.

Список литературы: 1. Ватуляна А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. – М.: Физматлит, 2007. 2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. 3. Скопецкий В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ, Наукова думка, 2002. 4. Воронич И.И. Математические проблемы нелинейной теории полых оболочек. – М.: Наука, 1989. 5. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 6. Ободан Н.И., Шульга А.С. Идентификация дефектов в деформируемых телах // Проблемы машиностроения. – 2005. – 1. – С. 33-37. 7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.

Поступила в редколлегию 10.11.2008

С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, НТУ «ХПИ», Харьков

О СКОРОСТИ И ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА ИСКРЫ, КАК ЧАСТИЦЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В функциях Эйри побудовано розв'язки рівняння польоту іскри, яка згорас, як легкої сферичної частки змінного радіуса та маси. Виведено компактні формули для обчислення кінематичних характеристик польоту частки за квадратично-поліноміального опору газу, який рухається.

In Airy functions the solutions of the equation of flight a burning spark, as easy spherical particle of variable radius and weight is constructed. The compact formulas for calculation kinematical characteristics of flight a particle are deduced at square-polynomial resistance of motive gas.

Актуальность темы и цель исследования. Летящие, горящие искры являются потенциальным источником зажигания легковоспламеняемых материалов и объектов. Это испаряющиеся нефтепродукты, сельхозобъекты, где хранятся хлопок, солома, сено; участки полей созревших зерновых культур и лесные хвойные массивы в сухое жаркое время года. Поэтому определение кинематических характеристик полета горящих искр является актуальным в обеспечении безопасной жизнедеятельности человека. Эта задача с точки зрения механики сводится к рассмотрению движения частицы переменных размеров и массы. Начало исследований движения тел переменной массы положил И.В. Мещерский [1], что в последующем нашло развитие в [2] и многих других публикациях. Однако в большинстве исследований по механике тел переменной массы внимание сосредоточено на учете переменности массы и движущей реактивной силы. Последняя оказывается очень малой при всестороннем диффузионном сгорании сферического тела, что характерно для сгорающих искр. Здесь главными, влияющими на полет, факторами являются переменность массы и размеров, с чем связано аэродинамическое сопротивление движению. Поэтому изучение движения сгорающих частиц заслуживает отдельного внимания, чему посвящено содержание этой статьи. Целью работы является получение компактных формул для расчета скорости и дальности полета горящей искры в попутно движущемся потоке газа, а также апробация формул путем вычислений.

Основные обозначения и допущения при составлении уравнения движения. Основные упрощения заключаются в пренебрежении действием реактивной силы и веса в системе действующих на частицу сил. Пренебрежение гравитацией не вносит больших погрешностей при рассмотрении полета легких частиц, к которым относятся искры при вылетании их из выхлопных труб ДВС.

Обозначим символом $v = v(t)$ абсолютную скорость полета частицы, а ее значение в момент вылетания из выхлопной трубы – символом v_0 . С этого момента ведем отсчет времени полета t . Поток выхлопного газа в воздухе считаем замедленным, аппроксимируя его скорость выражением

$$V = V(t) = V_0 - at,$$

в котором a, V_0 – положительные постоянные.

Начальную скорость искры принимаем большей, чем скорость газа. При выполнении неравенства $v_0 > V_0$ газовый поток (струя) не разгоняет, а тормозит движение искры, причем будет положительной относительная скорость

$$v_1 = v_1(t) = v(t) - (V_0 - at). \quad (1)$$

Силу аэродинамического сопротивления F_c описываем квадратично-полиномиальной зависимостью

$$F_c = \pi r^2 (k_1 v_1 + k_2 v_1^2),$$

где πr^2 – площадь миделевого сечения частицы; k_1, k_2 – постоянные коэффициенты аэродинамического сопротивления движению.

Таким образом, сила сопротивления меняется не только в связи с изменением относительной скорости, а также – в связи с изменением радиуса r частицы во времени. Далее эту зависимость принимаем в виде

$$r = r(t) = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t},$$

что согласуется с процессом испарения и сгорания капель жидкого топлива [3,4].

Здесь $r_0 = r(0)$ – начальное значение радиуса; $\varepsilon > 0$ – параметр, характеризующий скорость сгорания искры на промежутке времени $t \in [0; 1/\varepsilon)$.

Принимая плотность частицы ρ постоянной, ее массу, как шара, определяем выражением

$$M = M(t) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3.$$

Скорость полета искры под действием силы инерции с учетом силы сопротивления будет решением дифференциального уравнения

$$M \frac{dv}{dt} + \pi r^2 (k_1 v_1 + k_2 v_1^2) = 0,$$

которое после сокращения на M принимает вид

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{r} (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_1^2) = 0, \quad (2)$$

где $\delta_{1,2} = \frac{3k_{1,2}}{4\rho}$.

Согласно (1) $\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - a$. Поэтому из (2) получаем

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{r} (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_1^2) - a = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) ищем при начальном условии

$$v_1(0) = v_0 - V_0. \quad (4)$$

Замкнутое решение задачи Коши в функциях Эйри. Перейдем в (3) от переменной t к переменной $\xi = \sqrt{1 - \varepsilon t}$. Поскольку

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\xi} \frac{dv_1}{d\xi}; \quad r = r_0 \xi; \quad \xi(0) = 1,$$

вместо выражений (3) и (4) получаем

$$\frac{dv_1}{d\xi} - \alpha_2 \left(v_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \right)^2 + \frac{2a}{\varepsilon} \xi + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} = 0; \quad (5)$$

$$v_1(1) = v_0 - V_0; \quad (6)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2}{\varepsilon r_0} \delta_{1,2}.$$

Выразим v_1 через вспомогательную функцию $w(\xi)$ по формуле

$$v_1 = -\frac{1}{\alpha_2} w^{-1} \frac{dw}{d\xi} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}. \quad (7)$$

Этим преобразованием уравнение (5) сводим к виду

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{2a\alpha_2}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} \right) w = 0. \quad (8)$$

Общим решением (8) есть

$$w = c_1 Ai(b\eta) + c_2 Bi(b\eta). \quad (9)$$

Здесь $b = \sqrt[3]{\frac{2a\alpha_2}{\varepsilon}}$; $\eta = \xi + \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $Ai(x),$

$Bi(x)$ – функции Эйри.

Продифференцировав решение (9) согласно (7), находим, что

$$v_1(t) = -\frac{b}{\alpha_2} \frac{c Ai'(b\eta) + Bi'(b\eta)}{c Ai(b\eta) + Bi(b\eta)} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}. \quad (10)$$

Здесь $Ai'(x), Bi'(x)$ – производные функций Эйри; $c = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная, которую определяем с помощью начального условия (6), что приводит к выражению

$$c = -\frac{Bi'(\eta_0) + v_* Bi(\eta_0)}{v_* Ai(\eta_0) + Ai'(\eta_0)}, \quad (11)$$

где $\eta_0 = \left(\frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} + 1 \right) b$; $v_* = \frac{1}{b} \left(\alpha_2 (v_0 - V_0) + \frac{\alpha_1}{2} \right)$.

Учитывая (1) и (10), получаем формулу скорости полета искры

$$v(t) = V_0 - at - \frac{b}{\alpha_2} \frac{c Ai'(b\eta) + Bi'(b\eta)}{c Ai(b\eta) + Bi(b\eta)} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad (12)$$

в которой $\eta = \eta(t) = \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} + \sqrt{1 - \varepsilon t}$.

Функции Эйри и их производные затабулированы в [5], [6]. Поэтому, вы-

числение $v(t)$ можно проводить с помощью таблиц.

Расчет существенно упрощается, если не учитывать замедление скорости потока газа. При $a = 0$ решение уравнения (5) представляется в элементарных функциях и имеет вид

$$v_{1a}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2(v_0 - V_0)} \right) \exp[\alpha_1(1 - \sqrt{1 - \varepsilon t})] - 1 \right\}^{-1}.$$

Оно удовлетворяет начальному условию (4).

Вычисление пролетаемого искрой пути. Путь S , представляемый интегралом

$$S = \int_0^t v(t) dt, \quad (13)$$

для решения (13) не выражается в замкнутом виде через известные функции. Поэтому для вычисления S в общем случае приходится проводить численное интегрирование. Однако, на начальном участке полета, когда $\varepsilon t \leq 0,5$, а искра является наиболее пожароопасной, можно построить приближенную формулу определения пути. Чтобы получить ее разложим S на два слагаемых

$$S = S_{II} + \Delta S, \quad (14)$$

$$\text{где } S_{II} = \int_0^t v_{1II}(t) dt + V_0 t; \quad \Delta S_n = \int_0^t [v(t) - v_{1II}(t) - V_0] dt.$$

Функцией $v_{1II}(t)$ выше обозначили аппроксимацию $v_1(t)$ на промежутке $t \in [0; 1/(2\varepsilon)]$, которая аналитически интегрируется по t . В качестве такой принимаем

$$v_{1II}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[\left(1 + \frac{\alpha_1}{(v_0 - V_0)\alpha_2} \right) \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 t\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (15)$$

Для нее

$$S_{II} = \frac{2}{\varepsilon\alpha_2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{(v_0 - V_0)\alpha_2}{\alpha_1} + 1 \right) \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 t\right) - \frac{(v_0 - V_0)\alpha_2}{\alpha_1} \right] - \frac{\varepsilon\alpha_1 t}{2} \right\} + V_0 t. \quad (16)$$

Второе слагаемое в формуле (14) можно приближенно вычислить по формуле трапеций

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} t [v(t) - v_{1II}(t) - V_0]. \quad (17)$$

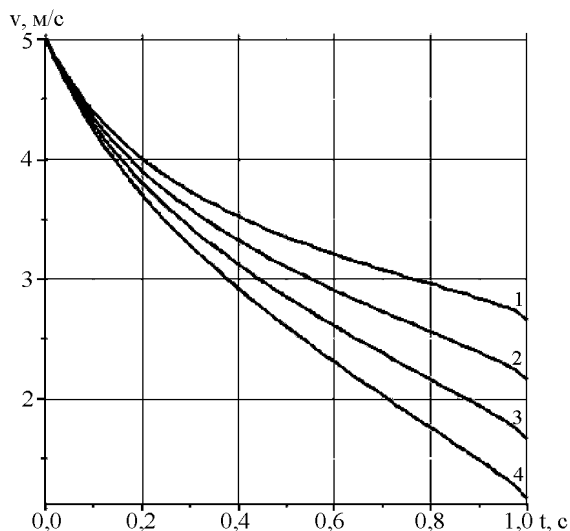
Таким образом, приближенное вычисление пути сводится к применению формул (12), (14), (15), (16) и (17).

Результаты расчетов и выводы. Изучим, как влияет ускорение a на скорость полета искры v , для этого примем следующие исходные данные: $r_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м; $k_1 = 5 \cdot 10^{-1}$ Н·с/м³; $k_2 = 8 \cdot 10^{-1}$ Н·с²/м⁴; $V_0 = 3$; $v_0 = 5$ м/с;

$\varepsilon = 1 \text{ с}^{-1}$; $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Цифрами 1,2,3,4 на рисунке обозначены зависимости, полученные для значений $a = 0,5; 1; 1,5; 2 \text{ м/с}$. С увеличением ускорения, вызывающего уменьшение скорости потока газа, падает скорость искры.

Проверим точность приближенной формулы (14). Для этого сравним результаты, полученные по формуле (14), с результатами численного интегрирования (13). Расчет проведен при $a = 0,5 \text{ м/с}^2$ и предыдущих остальных исходных данных. Результаты расчета представлены в таблице.

Сопоставляя значения дальности полета, полученные численно из (13) и по формуле (14), можно сделать вывод о высокой точности предложенных расчетных формул.



Зависимости скорости полета от времени для различных a

Значения дальности полета S , полученные различными способами

| $t, \text{ с}$ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Числ. инт. (13) | 0,467 | 0,886 | 1,272 | 1,634 | 1,977 |
| По форм. (14) | 0,467 | 0,884 | 1,269 | 1,629 | 1,970 |

Выводы. Расчетная апробация полученных формул показала, что они приводят к результатам, которые согласуются с физическими представлениями о рассматриваемом процессе. Поэтому, после идентификации входящих в них параметров, формулы могут применяться для расчета кинематических характеристик искры в конкретных условиях полета.

Список литературы: 1. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТЛ, 1952. – 276 с. 2. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2, 3-е изд. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 3. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: Машиностроение, 1977. – 277 с. 4. *Абрамчук Ф.И., Марченко А.П., Разлейцев Н.Ф.* и др. Со-

временные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. – Киев: Техника, 1992. – 272 с. 5. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 6. *Смирнов А.Д.* Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 260 с.

Поступила в редколлегию 11.11.2008

УДК 539.3

А.А.ОСЕТРОВ, НТУ «ХПИ», Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ RFM И СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Розглядається НДС пологих багат шарових оболонок складної форми у плані з різними видами граничних умов. Математична модель задачі уявляє собою систему рівнянь, яка складена відносно прогину, переміщень у площині оболонки та кутів нахилу нормалі до серединної поверхні згідно з уточненою теорією типу Тимошенко для оболонок. Розв'язок поставленої задачі виконується варіаційно-структурним методом з використанням сплайн-апроксимації невизначених компонент структури розв'язку. Отримані чисельні результати ілюструють ефективність запропонованого методу і створеного програмного забезпечення.

A stressed state of laminated shallow shells with complex plan form and different boundary conditions is being investigated. The governing equations for shallow shells are constructed relatively of deflection, displacements and the turn angle of the middle surface of the shell, according to the Timoshenko's-type refined shell theory. The given problem is solved by variation-structural method using spline-approximation in solution structure undefined components. Obtained numerical results illustrate the effectiveness of the offered method and created software.

Область применения тонкостенных композитных конструкций сегодня представляет собой достаточно широкий спектр отраслей, таких как авиа, авто и кораблестроение, космическая техника, гражданское строительство и др. Такая распространенность приводит к закономерной необходимости расчета, как задач статики, так и динамики тонкостенных конструкций, составленных из многослойных материалов. Наиболее часто применяемым методом для решения такого рода задач является метод конечных элементов[1]. Как показывает обзор литературы, большинство авторов ограничиваются расчетом пологих оболочек прямоугольных в плане. В данной работе применен метод R-функций[2], что наряду с применением сплайн-аппроксимации неопределенных компонент позволило получить новые результаты для оболочек сложной формы в плане при разных видах граничных условиях.

1. Математическая постановка. Рассматривается многослойная полая оболочка постоянной толщины h , собранная из произвольного числа однород-

ных анизотропных слоев постоянной толщины. В соответствии с уточненной теорией первого порядка прямолинейный отрезок, нормальный к координатной поверхности, остается прямым и после деформации, сохраняя свою длину, но изменяет угол наклона к координатной поверхности. Деформации и углы поворота нормали выражаются через перемещения следующим образом[3]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \beta_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1; \beta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2,\end{aligned}\quad (1)$$

где u , v и w – перемещения срединной поверхности, а ψ_1 , ψ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности. Константами k_1 , k_2 представлены кривизны центральной поверхности оболочки.

Для внутренних усилий и моментов в рамках уточненной теории 1-го порядка справедливы следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{bmatrix}\quad (2)$$

Поперечные усилия определяются как:

$$Q_1 = k_1^2 C_{55} \beta_1 + k_2^2 C_{45} \beta_2; Q_2 = k_1^2 C_{45} \beta_1 + k_2^2 C_{44} \beta_2, \quad (3)$$

где k_1^2 и k_2^2 – коэффициенты влияния сдвиговых деформаций.

В свою очередь коэффициенты C_{ij} , K_{ij} , D_{ij} определяются с помощью жесткостных характеристик слоев, используя известные формулы[4]:

$$C_{ij} = \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l dz; K_{ij} = \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l z dz; D_{ij} = \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l z^2 dz, \quad (4)$$

где B_{ij}^l – коэффициенты жесткости l -го слоя с учетом поворота осей ани-

зотропии, N – количество слоев оболочки, $h_l = \left\{ -\frac{h}{2}, h_1, \dots, h_{N-1}, \frac{h}{2} \right\}$ – координаты границ между слоями по толщине оболочки, относительно срединной поверхности, а диапазон изменения значений пар индексов $\langle ij \rangle = \{ \langle 11 \rangle, \langle 12 \rangle, \langle 22 \rangle, \langle 16 \rangle, \langle 26 \rangle, \langle 66 \rangle, \langle 44 \rangle, \langle 45 \rangle, \langle 55 \rangle \}$.

Потенциальная энергия деформации полой оболочки имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \right) d\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2) d\Omega, \quad (5)$$

а работа внешних сил при условии воздействия только поперечных нагрузок принимает вид $A = \iint_{\Omega} q w d\Omega$, где q – интенсивность внешней нагрузки, а Ω – область, ограничивающая форму оболочки в плане.

С учетом вышеупомянутых предположений вариационная постановка сводится к нахождению минимума функционала

$$J = V - A, \quad (6)$$

2. Метод решения. При нахождении минимума функционала (6) воспользуемся методом Ритца совместно с методом R-функций (RFM) [2]. Для построения системы базисных функций рассмотрим следующие виды граничных условий:

1. Край $x = \text{const}$ шарнирно закреплен, тогда

$$v = w = \psi_2 = N_1 = M_1 = 0; \quad (7)$$

2. Край $y = \text{const}$ шарнирно закреплен, тогда

$$u = w = \psi_1 = N_2 = M_2 = 0. \quad (8)$$

Для представленных типов краевых условий структуры решения, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям, имеют вид:

1. Шарнир при $x = \text{const}$

$$u = P_1; \quad v = \omega_2 P_2; \quad w = \omega_2 P_3; \quad \psi_1 = P_4; \quad \psi_2 = \omega_2 P_5, \quad (9)$$

где $\omega_2 = 0$ – уравнение участка шарнирно закрепленной границы, параллельного оси ou .

2. Шарнир при $y = \text{const}$

$$u = \omega_1 P_1; \quad v = P_2; \quad w = \omega_1 P_3; \quad \psi_1 = \omega_1 P_4; \quad \psi_2 = P_5, \quad (10)$$

где $\omega_1 = 0$ – уравнение участка шарнирно закрепленной границы, параллельного оси ox .

В случае смешанных граничных условий, когда шарнирное закрепление происходит по всей границе оболочки, структура решения примет вид

$$u = \omega_1 P_1; \quad v = \omega_2 P_2; \quad w = \omega P_3; \quad \psi_1 = \omega_1 P_4; \quad \psi_2 = \omega_2 P_5, \quad (11)$$

где $\omega = 0$ – уравнение всей границы области, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 – неопределенные компоненты структуры решения.

Аппроксимацию неопределенных компонент P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 будем выполнять с помощью сплайнов Шенберга 3-го порядка [5]. Пусть область, совпадающая с планформой оболочки погружается в окаймляющий прямоугольник $\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Каждая неопределенная компонента P_i , заданная на равномерной сетке (с количеством разбиений N по оси ox и M по оси oy :

$x_i = a + i \frac{b-a}{N}, y_j = c + j \frac{d-c}{M}$) может быть представлена в виде

$$P_l = \sum_k a_k^{(l)} \Psi_k^{(l)}(x, y), \quad (12)$$

где

$$\Psi_k^{(l)}(x, y) = B_3 \left(\frac{N(x-a)}{b-a} - i \right) B_3 \left(\frac{M(y-c)}{d-c} - j \right) \quad (13)$$

Причем сплайн $B_3(x)$ определяется как

$$B_3(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0,25(x+2)^3 & -2 < x \leq -1 \\ -0,75x^3 - 1,5x^2 + 1 & -1 < x \leq 0 \\ 0,75x^3 - 1,5x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ -0,25x^3 + 1,5x^2 - 3x + 2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x < +\infty \end{cases} \quad (14)$$

Системы базисных функций для примера шарнирного закрепления (7) в соответствии с их структурным представлением (9) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_k &= \Psi_k^{(1)}(x, y); & v_k &= \omega_2 \Psi_k^{(2)}(x, y); & w_k &= \omega_2 \Psi_k^{(3)}(x, y); \\ \Psi_{1k} &= \Psi_k^{(4)}(x, y); & \Psi_{2k} &= \omega_2 \Psi_k^{(5)}(x, y). \end{aligned} \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты $a_k^{(l)}$ в разложении (12) определяются из условия минимума функционала (6) посредством метода Рунге, который позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(l)}} = 0. \quad (16)$$

Численная реализация предложенного метода решения основана на совмещении аналитических возможностей математического пакета Maple[6] и ряда быстрых программных модулей, отвечающих за численные методы интегрирования и линейной алгебры, написанных на языке программирования C++.

3. Численные результаты. Исследуем НДС квадратной в плане двухслойной [0/90] полой сферической оболочки [7] под действием синусоидальной нагрузки $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$. Значения параметров жесткости слоев приняты следующими: $E_1 = 19,2 \cdot 10^6$; $E_2 = 1,56 \cdot 10^6$; $G_{12} = 0,82 \cdot 10^6$; $G_{23} = 0,523 \cdot 10^6$; $G_{13} = G_{12}$; $\nu_{12} = 0,24$. Граничные условия для этой задачи приняты в виде шарнирного закрепления по всей границе области, отношение толщины к характерному геометрическому размеру примем $h/a = 0,1$. Тогда структура решения примет вид (11), где $\omega_2 = x(a-x)/a$ и $\omega_1 = y(a-y)/a$; $\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2$, а $\vee_0, \wedge_0 - R$ – операции [2].

В табл. 1 представлено сравнение полученных результатов для безразмерного параметра $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 a^4)$ центрального прогиба исследуемых обо-

лочек при разных значениях кривизны, с результатами других авторов (CST – классическая теория, FSDT – теория первого порядка типа Тимошенко, HSDT – теории более высоких порядков).

Таблица 1 – Безразмерный параметр \bar{w} прогиба оболочек для разных кривизн

| R/a | Источник результатов | | | | |
|--------|----------------------|---------------|----------|----------|---------|
| | Сетка сплайнов | Данная работа | HSDT [7] | FSDT [8] | CST [8] |
| 5 | 4x4 | 1,4351 | 1,4150 | 1,4393 | 1,3185 |
| | 8x8 | 1,4342 | | | |
| | 16x16 | 1,4342 | | | |
| | 20x20 | 1,4342 | | | |
| 10 | 4x4 | 1,5561 | 1,5329 | 1,5566 | 1,4211 |
| | 8x8 | 1,5552 | | | |
| | 16x16 | 1,5551 | | | |
| | 20x20 | 1,5551 | | | |
| 50 | 4x4 | 1,5993 | 1,5748 | 1,5984 | 1,4574 |
| | 8x8 | 1,5984 | | | |
| | 16x16 | 1,5983 | | | |
| | 20x20 | 1,5983 | | | |
| Пласт. | 4x4 | 1,6011 | 1,5766 | 1,6001 | 1,4589 |
| | 8x8 | 1,6002 | | | |
| | 16x16 | 1,6001 | | | |
| | 20x20 | 1,6001 | | | |

Сходимость полученных результатов (табл. 1) при различных сетках сплайнов и их сравнение с известными в литературе, свидетельствует о достоверности предложенного метода и разработанного программного обеспечения. Также стоит отметить, что изменение кривизны сферической оболочки (табл. 1) в диапазоне кривизн от $k_1 = k_2 = 0$ до $k_1 = k_2 = 0,2$ приводит к уменьшению безразмерного параметра центрального прогиба на 10 %.

Исследуем НДС двухслойной [0/90] пологой оболочки двойкой кривизны со сложной формой плана (рис. 1) при условии шарнирного закрепления на всей границе. Параметры жесткости слоев примем такими же, как и в предыдущей задаче, а внешнюю нагрузку рассмотрим двух видов: синусоидальную

$$q = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \text{ и равномерную } q = q_0.$$

Геометрические параметры оболочки примем в виде $a/b = 1$; $2a/R_1 = 0,1$; $h/2a = 0,1$; $a_1/a = 0,8$; $b_1/b = 0,8$. Структуру решения для шарнирно закрепленной оболочки выберем в виде (11), где

$$\omega = (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2); \quad \omega_1 = ((f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6)) \wedge_0 f_1;$$

$$\omega_2 = ((f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 ((f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}))) \wedge_0 f_2; f_1 = (b^2 - y^2) / 2b;$$

$$f_2 = (a^2 - x^2) / 2a; f_3 = (y^2 - b_1^2) / 2b_1; f_4 = (x^2 - a_1^2) / 2a_1;$$

$$f_5 = -(x^2 + y^2 + 2a_1x + a_1^2 - b_1^2) / 2b_1; f_6 = -(x^2 + y^2 - 2a_1x + a_1^2 - b_1^2) / 2b_1;$$

$$f_7 = (x^2 + y^2 + x(a_1 + a) - 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a);$$

$$f_8 = (x^2 + y^2 - x(a_1 + a) - 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a);$$

$$f_9 = (x^2 + y^2 + x(a_1 + a) + 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a);$$

$$f_{10} = (x^2 + y^2 - x(a_1 + a) + 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a).$$

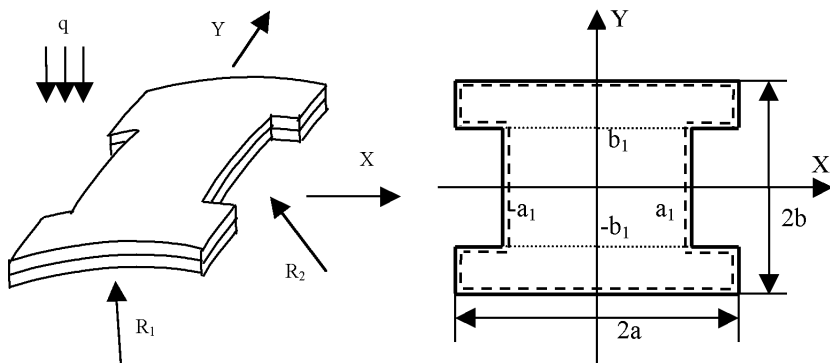


Рисунок 1 – Форма оболочки

В табл. 2 представлены результаты в виде безразмерного параметра для центрального прогиба $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 (2a)^4)$ и изгибающих моментов $\bar{M}_1 = M_1 10^2$; $\bar{M}_2 = M_2 10^2$, для разных значений кривизны $2a/R_2 = 0,2; 0,1; 0,05$ и двух видов внешней нагрузки.

На рис. 2 представлены графики распределения безразмерного параметра прогиба и моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 соответственно в сечении $y = 0$ для случая синусоидальной нагрузки и разных значений кривизны $2a/R_2 = 0,2; 0,1; 0,05$, когда кривизна $2a/R_1 = 0,1$.

В соответствии с табл. 2 и рис. 2 изменение одной из кривизн оболочки приводит к повышению значения момента \bar{M}_1 для случая равномерно распределенной нагрузки почти на 14 %, что на 6 % больше, нежели в случае синусоидальной нагрузки. В то же время изменения значений момента \bar{M}_2 в обоих случаях не превышают 3 %. Сопоставление результатов табл. 1 и табл. 2 для случая сферической оболочки с кривизной $k_1 = k_2 = 0,1$ показывает, что появление шарнирно закрепленных вырезов приводит к уменьшению значения безразмерного центрального прогиба на 35 %, что сопоставимо с результатом применения синусоидальной нагрузки вместо равномерно распределенной к оболочке с вырезом (табл. 2).

Таблица 2 – Безразмерный прогиб \bar{w} и моменты $\bar{M}_1; \bar{M}_2$ двухслойной оболочки

| $2a/R_2$ | Сетка сплайнов | Синусоид. нагрузка | | | Равном. нагрузка | | |
|----------|----------------|--------------------|-------------|-------------|------------------|-------------|-------------|
| | | \bar{w} | \bar{M}_1 | \bar{M}_2 | \bar{w} | \bar{M}_1 | \bar{M}_2 |
| 0,2 | 20x20 | 0,9869 | 3,1474 | 2,7469 | 1,4183 | 4,4121 | 3,6256 |
| | 40x40 | 0,9927 | 3,2002 | 2,7578 | 1,4277 | 4,4903 | 3,6429 |
| | 60x60 | 0,9948 | 3,2188 | 2,7619 | 1,4312 | 4,5181 | 3,6493 |
| 0,1 | 20x20 | 1,0148 | 3,3191 | 2,6901 | 1,4595 | 4,6621 | 3,5480 |
| | 40x40 | 1,0207 | 3,3744 | 2,7007 | 1,4690 | 4,7444 | 3,5648 |
| | 60x60 | 1,0229 | 3,3940 | 2,7046 | 1,4726 | 4,7736 | 3,5711 |
| 0,05 | 20x20 | 1,0244 | 3,3917 | 2,6474 | 1,4735 | 4,7679 | 3,4882 |
| | 40x40 | 1,0303 | 3,4482 | 2,6579 | 1,4831 | 4,8518 | 3,5048 |
| | 60x60 | 1,0325 | 3,4682 | 2,6617 | 1,4867 | 4,8816 | 3,5109 |

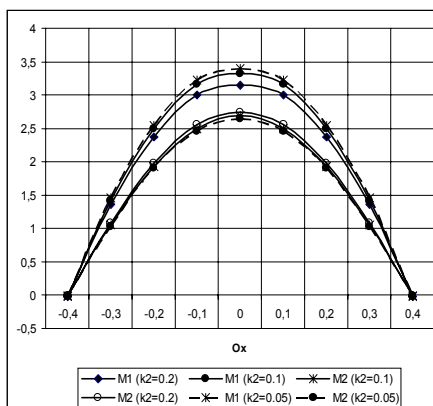
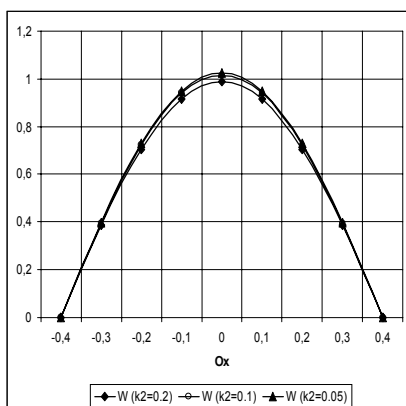


Рисунок 2 – Значения параметров прогиба \bar{w} и моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2

В дальнейшем предполагается, что база алгоритмов и программное обеспечение будут использованы для исследования колебаний оболочек.

Список литературы: 1. *K. S. Sai Ram, T. Sreedhar Babu* Study of bending of laminated composite shells. Part I: shells without cutout // *Comp. structures*. – 51. – 103-116 (1999). 2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с. 3. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М., 1956. 4. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с. 5. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 6. *Дьяконов В.* Maple 9 в математике, физике, образовании. – "СОЛОН-Пресс", 2004. – 688 с. 7. *C.P. Wu, Y.W. Chi* Asymptotic solutions of laminated composite shallow shells with various boundary conditions // *Acta Mechanica*. – 132. – 1-18 (1999). 8. *Kheider A. A., Librescu L., Frederick D.* A shear deformable theory of laminated composite shallow shell-type panels and their response analysis Part II: Static response // *Acta Mechanica*. – 77. – 1-12 (1989).

Поступила в редакцию 22.11.2008

Э.С.ОСТЕРНИК, канд.техн.наук, завод «Электротяжмаш», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОПРИВОДЕ МНОГОКЛЕТЬЕВОГО СТАНА ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКИ

Побудовано математичну модель динаміки системи, до якої належать чистова група клітей прокатного стана з електроприводом і прокатувана штаба. Одержано також математичну модель самої штаби перед чистою групою. Виконано натурні експерименти на цій групі клітей, що мала аварійні зупинники через перевищення обмежень по механічним і електричним параметрам. Показано, що ці параметри підпорядковано нормальному закону розподілу. Простої прокатного стана зменшено на 86 %.

The scope of works undertaken includes elaboration of a mathematical model for dynamics of the system. The model includes a finish group of stands of the rolling mill with electric drive and the rolled strip. Another mathematical model was obtained for the strip prior to the finish group. Among the entire works performed were natural studies based on the above group of stands, which suffered emergency stops following excess of limitations imposed on mechanical and electrical parameters. These parameters were proved to follow the normal distribution law. The idle time of rolling mill was reduced by 86 %.

1 Постановка проблемы. Рассматривается непрерывный широкополосный стан горячей прокатки листов из слябов. Такие станы состоят из двух групп рабочих клетей: черновой и чистой, расположенных последовательно одна за другой. Расстояния между клетями черновой группы выбраны так, что прокатываемая полоса одновременно находится только в одной клетке. При прокатке в чистой группе полоса одновременно находится в нескольких или во всех клетях.

К специфике динамики прокатных станов относятся

- 1 повышенная роль процессов накопления повреждений, включая явления износа, нерасчетных зазоров в соединениях и трещин в фундаментах;
- 2 объединение в одной системе (прокатный стан + прокат) узлов и агрегатов, работающих в разных условиях. Например, электропривод и узлы привода вне рабочей клетки работают в зоне упругих деформаций, при $t^0 \leq 80^0\text{C}$; рабочие валки – при повышенных температурах; прокат – в зоне пластичности;
- 3 вероятностный характер процессов параметров проката;
- 4 объединение в системе чисто механических и электромеханических агрегатов, являющихся соответственно объектами механики твердого деформируемого тела и электромеханики;
- 5 целесообразность и реальный опыт применения АСУТП на современных прокатных станах;
- 6 высокий удельный вес прокатных станов со сроком эксплуатации 40 лет и более.

До начала данной работы для повышения производительности исследуемого стана были заменены электродвигатели (ЭД) главного привода в чистой группе. Сразу после пуска из монтажа был отмечен стук в коренных под-

шипниках. На ЭД наблюдались частые выходы из строя подшипников скольжения. При этом отмечались повышенные нагревы подшипников и «игра вала» (осевое перемещение вала относительно подшипника).

Предварительным обследованием были отмечены следующие отклонения условий эксплуатации от нормы:

- 1 превышение температуры масла на входе в подшипники;
- 2 систематическая «игра вала» с частотой вращения, которая может вызываться нештатными нагрузками на концы валов ЭД, передаваемыми от стана.

Было известно, что однотипные ЭД более 10 лет успешно эксплуатируются на аналогичном стане, замечаний по работе подшипников нет. Было решено провести исследование причин аварий подшипников ЭД, разработку и апробирование в промышленных условиях мероприятий, обеспечивающих надежность в эксплуатации.

2 Математическая модель чистой группы клетей с прокатываемой полосой. В соответствии с постановкой задачи рассматривается вопрос об оптимальных режимах прокатки. Сюда относятся специальные динамические режимы, позволяющие получать полосы с требуемыми механическими свойствами и допусками по геометрическим размерам.

Существующий уровень информации и управляемости электродинамикой клетей не соответствует требованиям оптимальности. Клетки и их группы (чистовые, черновые) представляют собой электромеханические системы, состоящие из электродвигателей, трансмиссии (промежуточных валов, муфт, редукторов, шестеренных клетей и других узлов), рабочих и опорных валков, а также системы управления. Часть звеньев системы рассматриваются как упругие, часть – как жесткие диски в процессе крутильных колебаний. Имеющиеся расчетные методики относятся в основном к станам, где полоса одновременно находится лишь в одной клетке, напр., [1]. В работах, относящихся к многоклетевым станам, не учтено рассеяние энергии в звеньях привода.

Предлагается детерминированная математическая модель электропривода для группы из m клетей непрерывного прокатного стана. Модель построена путем обобщения работы [1]. Наличие зазоров в соединениях и зубчатых передачах и другие нелинейные факторы не учитывались.

Система дифференциальных уравнений для асинхронного (АС) электропривода, моделируемого n жесткими дисками, имеет вид:

$$j = 1, \dots, m;$$

$$I_1^{(j)} \ddot{\varphi}_1^{(j)} + h_{12}^{(j)} [\dot{\varphi}_1^{(j)} - \dot{\varphi}_2^{(j)}] + c_{12} [\varphi_1^{(j)} - \varphi_2^{(j)}] = M_m^{(j)} ; \quad (1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$I_i^{(j)} \ddot{\varphi}_i^{(j)} - h_{i-1,i}^{(j)} [\dot{\varphi}_{i-1}^{(j)} - \dot{\varphi}_i^{(j)}] + h_{i,i+1}^{(j)} [\dot{\varphi}_i^{(j)} - \dot{\varphi}_{i+1}^{(j)}] -$$

$$- c_{i-1,i}^{(j)} [\varphi_{i-1}^{(j)} - \varphi_i^{(j)}] + c_{i,i+1}^{(j)} [\varphi_i^{(j)} - \varphi_{i+1}^{(j)}] = 0 ; \quad (i)$$

$$(i = 2, 3 \dots n-1)$$

$$I_n^{(j)} \ddot{\varphi}_n^{(j)} - h_{n-1,n}^{(j)} [\dot{\varphi}_{n-1}^{(j)} - \dot{\varphi}_n^{(j)}] - c_{n-1,n}^{(j)} [\varphi_{n-1}^{(j)} - \varphi_n^{(j)}] = -M_\Sigma^{(j)}; \quad (n) \quad (1)$$

$$M_\Sigma^{(j)} = M_c^{(j)} + c_r^{(j)} [\varphi_n^{(j)} - \dot{\varphi}_n^{(j-1)} t]; \quad (n+1)$$

$$M_m^{(j)} + \frac{1}{\omega_0^{(j)} s_k^{(j)}} \dot{M}_m^{(j)} = \frac{2M_k^{(j)}}{\omega_0^{(j)} s_k^{(j)}} [\omega_0^{(j)} - \dot{\varphi}_1^{(j)}]. \quad (n+2)$$

Предполагается работа АС-электродвигателей на устойчивом рабочем участке механической характеристики.

Для электропривода постоянного тока с двигателями независимого возбуждения в системе (1) взамен уравнения (n+2) имеем (после линеаризации):

$$T_e^{(j)} \dot{M}_m^{(j)} + M_m^{(j)} + \beta_j \dot{\varphi}_1^{(j)} = M_0^{(j)}. \quad (2)$$

Уравнения (1)...(n) соответствуют уравнениям Лагранжа для крутильной системы каждой клетки. Уравнение (n+1) моделирует замыкание клеток прокатываемой полосой, которая образует сложную замкнутую систему и может испытывать дополнительную упругую деформацию в случае существенного увеличения или снижения момента на клетки j .

В соответствующий переходный период линейные скорости выхода полосы клетки $j-1$ и входа в клетку j неодинаковы вследствие изменения опережения в зависимости от натяжения полосы. Для простоты опережение принято постоянным.

Обозначения в системе (1), (2):

- $I_1^{(j)}$ – момент инерции ротора двигателя;
- $I_2^{(j)}, \dots, I_{n-1}^{(j)}$ – приведенные к оси двигателя моменты инерции деталей механической части привода;
- $I_n^{(j)}$ – приведенный к оси двигателя момент инерции исполнительного органа (рабочего вала);
- $h_{i,i+1}^{(j)}$ – коэффициенты, характеризующие рассеяние энергии в механических звеньях привода;
- $c_{i,i+1}^{(j)}$ – крутильные жесткости элементов трансмиссии привода;
- $\varphi_i^{(j)}$ – угол поворота жесткого диска i в клетке j : $i = 1, \dots, n$;
- $M_m^{(j)}$ – момент двигателя;
- $M_c^{(j)}$ – приведенный к оси двигателя момент технологической нагрузки, действующей на исполнительный механизм в установившейся стадии прокатки;
- $U_e^{(j)}$ – напряжение цепи возбуждения;
- $R_{e\Sigma}^{(j)}$ – суммарное сопротивление цепи возбуждения;
- $T_e^{(j)} = L_e^{(j)}/R_{e\Sigma}^{(j)}$ – постоянная времени цепи возбуждения;
- $L_e^{(j)}$ – индуктивность цепи возбуждения;
- $K_\Phi^{(j)} = \Phi^{(j)}/I_a^{(j)}$ – поток возбуждения двигателя;
- $I_e^{(j)}$ – ток обмотки возбуждения;
- $U_a^{(j)}$ – напряжение якорной цепи;
- $I_a^{(j)}$ – ток в цепи якоря;
- $R_{a\Sigma}^{(j)}$ – суммарное сопротивление якорной цепи;
- $T_a^{(j)} = L_{a\Sigma}^{(j)}/R_{a\Sigma}^{(j)}$ – постоянная времени якорной цепи;

- $L_{a\Sigma}^{(j)}$ – индуктивность якорной цепи;
 $k_j = p^{(j)}N^{(j)} / 2\pi a^{(j)}$;
 $p^{(j)}$ – число пар полюсов двигателя;
 $N^{(j)}$ – число активных проводников якоря;
 $a^{(j)}$ – число параллельных ветвей;
 $j = 1, \dots, m$ – номер клетки в группе;
 m – число клеток в группе;
 $M_{\Sigma}^{(j)}$ – общий момент сил сопротивления, действующий на валки клетки;
 $\beta_j = (k_j \Phi_j)^2 / R_{\Sigma}^{(j)}$ – модуль жесткости механической характеристики двигателя;
 $c_n^{(j)} = \frac{E_j F_j R_j^2}{l_j}$ – жесткость полосы, приведенная к валку, причем $E_j = E_j(t^0)$
– модуль упругости полосы между валками клетей (j) и ($j - 1$);
 F_j – поперечное сечение полосы;
 R_j – радиус рабочих валков;
 l_j – длина полосы между валками;
 $\omega_0^{(j)}$ – синхронная частота вращения АС-двигателя;
 $s_k^{(j)}$ – его критическое скольжение;
 $M_k^{(j)}$ – его критический момент;

для привода постоянного тока:

$$T_e^{(j)} = T_a^{(j)};$$

$$\beta_j = (k_j \Phi_j)^2 / R_{\Sigma}^{(j)};$$

$$M_0^{(j)} = U_a^{(j)} k_j \Phi_j / R_{a\Sigma}^{(j)}.$$

Решение системы (1), (2) может проводиться при таких начальных условиях:

а) в случае пуска привода вхолостую:

при $t = 0$

$$\dot{\phi}_n^{(j)} = 0; \quad M_n^{(j)} = 0; \quad (3)$$

б) если клетки работают в нагрузочных режимах:

при $t = 0$

$$M_n^{(j)} = M_c^{(j)};$$

$$\frac{dM_{n,n-1}^{(j)}}{dt} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d^2 M_{n,n-1}^{(j)}}{dt^2} = 0,$$

где $M_{n,n-1}^{(j)}$ – момент сил упругости в клетях.

Решение системы (1) и (2) при начальных условиях (3) или (4) может быть выполнено численными методами, включая метод Рунге-Кутты. Модель, описанная соотношениями (1)–(4), применима для решения следующих задач:

1 расчет динамики и прочности действующей или модернизируемой сис-

темы, включая расчет собственных частот, динамических крутящих моментов и механических напряжений, если заданы параметры полосы и технологического процесса. Оценка динамических явлений для отдельных клетей и группы в целом.

- 2 создание имитационной модели группы клетей, позволяющей выполнить АСУ скоростным режимом прокатки с помощью ЭВМ, работающей в режиме реального времени. Применение такой АСУТП позволит на действующем прокатном стане вводить специальные динамические режимы. Это создает, в частности, принципиальную возможность расширить сортамент, улучшить механические и геометрические свойства проката до больших капиталовложений на реконструкцию. АСУТП на базе, отличной от (1)-(4), описаны в [2,3].
- 3 поверочный и варианты расчеты проектируемого прокатного стана с заданным сортаментом проката и объемом производства. При этом можно добиться выравнивания показателей надежности основных звеньев привода – ср.[4-6].

3 Натурные экспериментальные исследования. Решалась задача технической диагностики. Основными диагностируемыми узлами были коренные подшипники ЭД. Программа предусматривала исследование электромеханических параметров при различных эксплуатационных режимах. Исследования носили статистический характер и выполнялись, как правило, на больших партиях проката от мартеновских плавок. Регистрировались токи, напряжения, частота вращения, температура подшипников, радиальное и осевое усилия, передаваемые на подшипник со стороны привода, вибрации подшипников и «игра вала». Разработаны специальные методы измерений и аппаратура.

Из теории известно, что при прокатке на рабочие валки (В) стана со стороны полосы действуют крутящий момент полезных сопротивлений M_i и главный вектор усилия прокатки. Вектор разлагается на радиальную R , тангенциальную T и аксиальную A составляющие [7]. Эти статодинамические силовые факторы передаются на электродвигатель через линию главного привода. Их значения ограничиваются техническими условиями.

Радиальное усилие R , передаваемое от механизма стана на конец вала электродвигателя, приведенное к его торцу, не должно превышать 25кН. Эта нагрузка действует в вертикальной плоскости, проходящей через продольную ось вала, и направлена вниз. Подшипники ЭД со стороны стана имеет упорное кольцо для восприятия осевых (аксиальных) нагрузок N со стороны стана, не превышающих 200 кН. Усилия N должно быть кратковременными (редкими, случайными). Конструкция ЭД не рассчитана на восприятия осевых сил, направленных в сторону стана.

Во всех режимах работы прокатного механизма нагрузки должно быть таковы, чтобы динамические крутящие моменты в линии вала двигателя, возникающие в динамических режимах и определяемые как произведение статического перегрузочного момента на коэффициент динамичности, не превышали величины $[M_i]$.

В аварийных, редко повторяющихся режимах, динамические крутящие моменты на валу двигателя не должны превышать $2 [M_t]$. При этом повторяемость указанных аварийных динамических нагрузок по моменту не должна превышать числа $[h]$ за календарный год. Значения $[M_t]$ и $[h]$ приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Предельные параметры $[M_t]$ и $[h]$

| Параметр | Размерность | Тип двигателя | |
|----------|-------------|---------------|------------|
| | | 1 | 2 |
| $[M_t]$ | кН · м (тм) | 984 (100) | 1560 (160) |
| $[h]$ | раз | 1000 | 400 |

Штатный аппаратурный контроль силовых факторов и прочих параметров, упомянутых ранее, на отечественных прокатных станах не предусмотрен.

Динамическим явлениям в прокатных станах посвящена обширная литература. Значительная часть ее – исследование конкретных элементов станов с целью повышения их надежности и долговечности. Необходимость в таких работах объясняется тем, что затраты на текущие работы, техническое обслуживание и содержание основных средств в прокатных цехах достигает 60% общей суммы расходов по переделу проката. При этом 90 % разрушений привода имеют усталостный характер в результате возбуждения в приводе переменных динамических нагрузок. Поэтому, учитывая частые случаи выхода из строя подшипников ЭД, в программу было включено определение величины и характера нагрузок, передаваемых на привод, подшипники и якорь электродвигателя при различных режимах.

Величина усилия R , передаваемого на конец вала ЭД, определялась пересчетом по экспериментальным значениям вертикального усилия H , действующего на подшипник электродвигателя со стороны привода. Формула пересчета

$$R = H \frac{l}{l + l_1}, \quad (5)$$

где l – расстояние между осями подшипников,

l_1 – расстояние от торца вала до оси подшипника со стороны привода.

Усилие H измерялось непосредственно на подшипнике с помощью тензорезисторов. Это позволило избежать применения измерительных мессдоз, помещаемых, например, между подшипником и фундаментными плитами, или иных дополнительных деталей. Тензорезисторы и проводка к ним устанавливались на вкладыше по специальной схеме, исключающей деформации изгиба, усиливающей и регистрирующей сигналы от деформации растяжения-сжатия. Схема обеспечивает требуемый уровень дублирования. Для установки тензорезисторов был заблаговременно подготовлен запасной вкладыш. По окончании установки и тарировки тензосхемы такой вкладыш – динамометр во время суточного планового ремонта закатывался на место аналогичного штатного вкладыша. Описанная методика позволила устанавливать силоизмерительное оборудование с минимальными затратами и без потерь производительности стана. Приняты специальные меры, обеспечившие длительную стабильность

тарировочных характеристик при $t^{\circ} \leq 70^{\circ} \text{C}$, помехоустойчивость и маслозащиту тензосхемы.

Методика определения осевого усилия N , приложенного со стороны стана, разработана по аналогии с предыдущей. Тензорезисторы устанавливались на запасном упорном кольце, схема тензометрии исключала деформации изгиба, обеспечивала усилие и дублирование сигналов от деформаций растяжения - сжатия. Принятый способ тарировки позволил вести нагружение по закону $q = \text{const}$, что соответствует реальным условиям.

Сигналы от всех тензосхем подавались на статодинамический многоканальный тензоусилитель (частотный диапазон до 5000 Гц). Синхронно с тензосигналами осциллографировались ток якоря I_a и другие параметры (см. ниже). Включение аппаратуры велось дистанционно.

Исследования проводились на ряде партий металла, приведенных в табл.2.

Измерения на партиях № 1 и № 2 носили отладочный характер. Базовыми были партии №№ 5 и 6, полученные из мартеновских плавок. На остальных партиях, полученных из конверторных плавок, проводились сравнительные исследования. Выбирались в основном партии, для которых возрастают усилия прокатки.

Таблица 2 – Партии проката

| № партии | Сечение проката, мм | Число исследованных полос |
|----------|---------------------|---------------------------|
| 1 | 3,5 x 1040 | 5 |
| 2 | 4 x 1270 | 4 |
| 3 | 2 x 1060 | 5 |
| 4 | 5 x 1500 | 4 |
| 5 | 2 x 1060 | 43 |
| 6 | 2,5 x 1310 | 47 |
| 7 | 3 x 1290 | 4 |

Динамика радиальных усилий характеризуется рисунком, где показана осциллограмма усилия N , записанного одновременно с током якоря I_a . Для каждой полосы металла записывались 4 процесса:

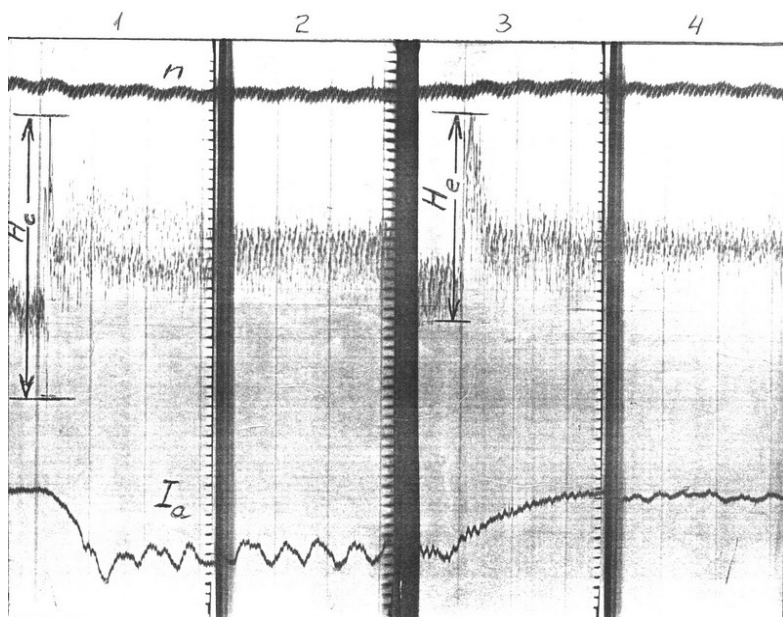
- 1 Захват раската валками исследуемой клетки и переход к установившейся стадии (далее: захват).
- 2 Установившаяся стадия прокатки (далее: прокатка)
- 3 Выброс раската из валков (далее: выброс) и переход к режиму холостого хода.
- 4 Холостой ход по ЭД исследуемой клетки (далее: холостой ход). Вслед за холостым ходом обычно начинался захват следующей полосы.

Приведен полный цикл процессов для одной из 43-х полос партии № 5. По осциллограмме определяются H_c и H_e – импульсы $H(t)$ при захвате и выбросе полосы клетью.

В результате обработки осциллограмм, включая гармонический анализ, определяются также следующие параметры, связанные с работой ЭД:

k – коэффициент переменной составляющей тока якоря:

$$k = \frac{(I_a)_{\text{var}}}{(I_a)_n} \quad (6)$$



Осциллограмма усилия H и тока I_a

Здесь $(I_a)_{\text{var}}$ — амплитуда переменной составляющей тока якоря I_a при прокатке (процесс 2);

$(I_a)_n$ — номинальное значение I_a ;

$(I_a)_c$ — ток захвата, то есть максимальное значение I_a в процессе 1;

t_c — время захвата, то есть нарастания I_a от $I_a = (I_a)_{\text{xx}} \approx 0$ до $I_a = (I_a)_c$;

$(I_a)_r$ — ток прокатки, то есть среднее значение постоянной составляющей I_a в процессе 2.

Для данной полосы $H_c = 148,5$ кН, $H_e = 113,1$ кН.

Отсюда по формуле (5) получим значения радиальных усилий: $R_c = 115,2$ кН, $R_e = 87,8$ кН. Эти значения значительно выше допустимого $[R] = 25$ кН.

Таким образом зарегистрировано ранее не описанное явление импульсного нагружения подшипника усилием $R(t)$ при захвате (R_c), а также при выбросе (R_e) полосы.

Исследование I_a дает: $(I_a)_c = 5,76$ кА; $(I_a)_r = 3,49$ кА; $(I_a)_{\text{var}} = 1,58$ кА; $k = 9,83$ %.

Коэффициент k также превышает допустимое значение $[k] = (4 \div 7)$ %.

Известны отрицательные последствия переменной составляющей в выпрямленном токе, а именно рост потерь в нагрузке, ухудшение коммутации ЭД, при малых нагрузках выпрямитель переходит в режим работы с прерыви-

стым током [8]. Эксперименты [9] показали, что прерывистый ток вызывает контактную электроэрозию в подшипниках.

На рисунке видна также запись частоты вращения n , записанной от штатной аппаратуры. Здесь $n = 205 \pm 10$ об/мин. Наблюдаются пульсации сигнала с частотой 6,8 Гц. Из осциллограммы захвата видно, что импульс H появляется в самом начале нарастания I_a , что соответствует соударению полосы с рабочими валками. За время захвата t_c , при достижении значения $I_a = (I_a)_{\max} = (I_a)_c$ усилие H приближается к стационарному значению в режиме прокатки.

Изучение динамики радиальных усилий в подшипнике во время процесса захвата обнаруживает, что кривая $H(t)$ соответствует двухстороннему соударению в зазоре ударной пары, обладающей асимметрией ударных воздействий [10]. Эти взаимодействия дают импульсы $H_c(t)$ противоположного знака, время между которыми составило на исследованной полосе $t_i = 0,0306$ с. Форма импульсов близка к пилообразным – ср.[11]. Величина достигает значения $H_c = 357,5$ кН, откуда $R_c^{(\max)} = 278,2$ кН. Это на порядок выше нормы $[R] = 25$ кН.

Влияние зазоров на динамику усилия в прокатных станах и пути снижения этих усилий путем оптимизации зазоров изложены в работе [12]. При этом специально рассмотрено явление разрыва контакта в подшипниковых опорах.

Исследование на партии № 5 с числом полос $m = 43$ носило статистический характер. Методами, описанными в работе [13], установлено, что усилия H и соответственно R , а также $(I_a)_c$, $(I_a)_r$ распределены по нормальному закону (уровень значимости $q = 2$ %; уровень значимости составного критерия $q \leq 7$ %). В табл. 3 даны следующие статистические характеристики: среднее арифметическое значение параметров x_j ($j = 1, \dots, 6$), то есть $\bar{H}_c, \bar{H}_e, \bar{R}_c, \dots$; несмещенные оценки для среднего квадратического отклонения σ , то есть S_x .

Таблица 3 – Параметры усилий и токов для партии №5 из 43-х полос

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-----------|-----------|
| x_j | H_c | H_e | R_c | R_e | $(I_a)_c$ | $(I_a)_r$ |
| Размерность | кН | кН | кН | кН | кА | кА |
| \bar{x} | 68,7 | 54,3 | 53,3 | 42,1 | 5,49 | 3,67 |
| S_x | 28,4 | 18,6 | 22,0 | 14,42 | 0,391 | 0,356 |
| $\chi_x, \%$ | 41,3 | 34,3 | 41,3 | 34,3 | 7,12 | 9,69 |

Дополнительно к известным введена оценка разброса параметра x_j по формуле

$$\chi_x = \frac{S_x}{\bar{x}} \cdot 100\% . \quad (7)$$

Среднее значение $\bar{R}_3 = 53,3$ кН значительно выше допустимого значения $[R] = 25$ кН. Крайние значения: $R_c^{\max} = 278$ кН, $R_c^{\min} = 31,7$ кН. Здесь учтены испытания шести партий проката, указанных в табл. 2. Усредненные значения некоторых параметров для этих партий приведены в табл. 4. На партии № 6 определялось осевое усилие N .

Таблица 4 – Радиальные усилия для разных партий проката

| № партии | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
|------------------|------|------|------|------|------|------|
| \bar{R}_c , кН | 42,1 | 41,9 | 54,2 | 39,7 | 53,3 | 44,8 |
| \bar{R}_e , кН | 36,3 | 35,2 | 47,4 | 32,2 | 42,1 | 35,3 |

Сопоставление таблиц 2 и 4 показывает, что, как и полагалось ранее, меньшим толщинам проката δ (большим степеням обжатия) соответствуют повышенные усилия H и R .

Возвращаясь к партии № 5 (табл. 3), получим корреляционные коэффициенты $r_{3,5} = 0,4237$; $r_{3,6} = 0,3715$; $r_{4,6} = 0,3541$. Проверка значимости этих коэффициентов с уровнем $q = 2\%$ позволяет с вероятностью не менее 0,98 утверждать, что положительная корреляционная связь действительно имеет место между параметрами усилий и тока якоря: $x_3 = R_c$ и $x_5 = (I_a)_c$; $x_3 = R_c$ и $x_6 = (I_a)_r$; $x_4 = R_e$ и $x_6 = (I_a)_r$. Поскольку между усилиями H_c и R_c , H_e и R_e существует линейная зависимость (5), корреляционные зависимости для H те же, что и для R .

Показано, что превышение допустимого значения R создает опасность аварийного выхода подшипника из строя из-за недопустимого снижения толщины масляной пленки.

Предложены следующие способы снижения усилий H и R :

- 1 Оптимизация зазоров на линии клетки – см. выше.
- 2 Временная частичная разгрузка клетки по I_a с перераспределением нагрузки между клетями чистовой группы. Этот способ основан на положительной корреляционной связи между R_{\max} в процессах захвата и выброса и током якоря. Он применяется при эксплуатации (например, при подъеме t° масла на коренном подшипнике ЭД до 60°C величина I_a снижалась до 3 кА). Указанный способ несколько снижает производительность стана.
- 3 Перспективным способом является изменение техпроцесса прокатки, включая переменную частоту вращения ЭД, что может быть реализовано с помощью АСУТП. ЭД допускает такое регулирование. Описанная в разделе 2 математическая модель динамики привода применима для построения АСУТП скоростным режимом прокатки с помощью ЭВМ, работающей в режиме реального времени. Наличие АСУТП позволит регулировать скоростной режим прокатки на чистовой группе клеток так, чтобы не вызывать опасных крутильных колебаний и снижения качества проката. АСУТП повысит эффективность реализации способа по п.2. Ограничение усилий R должно не только повысить надежность работы ЭД, но и увеличить время между перевалками (заменами изношенных валков стана).
- 4 Осевые усилия N , направленные со стороны стана, измерялись на мартеновской партии № 6. Качественная картина динамики этих усилий аналогична динамике R . Величины N незначительны. При визуальном осмотре во время плановых ремонтов повреждения баббитовой заливки

на упорном кольце не обнаруживались. О работе по осевым усилиям, направленным в сторону стана см. далее.

Выше сообщалось, что конструкция исследуемых электродвигателей не рассчитана на восприятие осевых сил, направленных в сторону стана. На коренном подшипнике со стороны магнитной системы между торцом вкладыша и валом предусмотрен осевой зазор $\Delta = (1 \div 0,2)$ мм. «Игра вала» ограничивается величиной $[2s_{rel}] = \Delta_1 = 0,7$ мм $< \Delta$.

Такое перемещение может, в частности, обуславливаться несовпадением магнитных осей якоря и магнитной системы ЭД. Выполнено измерение относительных виброперемещений $2s_{rel}$ в различных эксплуатационных режимах с помощью вихретокового преобразователя.

Статистические исследования «игры вала» выполнялись на той же партии № 5, что и работы по усилиям R . В каждом из процессов (захват, прокатка, выброс, холостой ход) значения s_{rel} распределялись по нормальному закону ($q_I = 2\%$, $q \leq 7\%$). Во всех этих процессах значения «игры вала» ниже нормы 700 мкм. Различия средних значений $2s_{rel}$ между режимами не превышает 10,4%. Ударные явления на «игре вала» при этом не проявляются.

Основной интерес представляют исследования «игры вала» в переходном процессе включения привода в нормальный режим после перевалки. «Игра вала» может быть описана эмпирической функцией вида

$$2s_{rel}(t) = F(t) + A(t) \sin[\omega(t)t + \varphi(t)]. \quad (8)$$

Здесь

$F(t)$ – аperiodическое слагаемое;

$A(t)$ – переменная амплитуда почти периодического слагаемого;

$\omega(t)$ – переменная частота;

$\varphi(t)$ – переменная фаза колебаний.

Начиная с $t = 7$ с,

$$A(t) = a(t)e^{-\lambda(t)t}, \quad (9)$$

что соответствует затухающим колебаниям с переменной частотой. Здесь $\lambda(t)$ – переменный декремент затухания.

Максимальное значение «игры вала» за весь процесс составляет с учетом второго слагаемого в формуле (8) $(2s_{rel})_{max} = 1384$ мкм. Эта величина почти в два раза превышает норму 700 мкм. Измерения проводились в режиме холостого хода. Положительное значение $F(t)$ соответствует перемещению якоря в сторону стана. На ЭД наблюдается выработка баббита там, где сверхнормативной «игрой вала» выбирается осевой зазор $\Delta = (1 \pm 0,2)$ мм. Вероятной причиной этого явления может быть установка нештатных муфт между провалами и валами ЭД. Такая зубчатая муфта передает на ЭД осевые силы, соответствующие аксиальной составляющей A_B усилия прокатки. Предусмотрено проведение работ по снижению «игры вала» до нормы. Такие работы ведутся одновременно со снижением радиальных усилий в подшипниках путем оптимального регулирования зазоров по всей линии существующего главного привода клетки и замены муфт на штатные.

Вибрация подшипников со стороны привода и коллектора на всех ЭД ниже нормы. Спектр виброперемещения подшипников аналогичен спектру $s_{rel}(t)$. Исследование также носило статистический характер.

На валах электродвигателей были обнаружены напряжения по отношению к земле. После установки заземляющих щеток останovy стана из-за перегрева подшипников резко снизились. Однако позднее отмечались случаи перегревов и прямых проявлений подшипниковых токов.

При прокате мартеновской партии металла осциллографировались токи якоря I_a и коренного подшипника I_p . Статистическая обработка данных показала, что коэффициент переменной составляющей от I_a имеет среднее арифметическое значение $\bar{k} = 7,920\%$, модальное значение $m_{0k} = 8,3\%$, распределен по нормальному закону, а указанные значения превосходят норму – см. формулу (6). Установлена положительная корреляция между параметром k и последовательными импульсами подшипниковых токов.

Даже частичное выполнение упомянутых в данном разделе рекомендаций позволило снизить простои прокатного стана из-за перегрева подшипников ЭД на 86 %.

4 Математическая модель полосы проката перед чистовой группой клетей. Известно, что передний и задний концы раската полосы перед чистовой группой клетей холоднее остальной части полосы. Форма этих концов отличается от прямоугольной. Передние, а иногда и задние концы раската обрезаются. Для экономии по крайней мере части металла от концов раската предлагается предусмотреть специальное программное регулирование электроприводов в чистовой группе клетей. Для этого регулирования требуется ввести информацию о полосе в виде ее математической модели.

Предлагается моделировать раскат многофакторной эмпирической функцией от геометрических и других параметров, включая натяжение полосы. Эмпирическая функция отыскивается в виде алгебраического полинома, наилучшего в среднем квадратичном. Пусть задано m значений $y_1^{(0)}, \dots, y_i^{(0)}, \dots, y_m^{(0)}$ функции n – переменных $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Строим приближение в виде алгебраического полинома r -той степени, принимающего в i -той точке значение:

$$y_i = \sum_{s=1}^{\lambda} b_s \prod_{j=1}^n x_{ij}^{s_j} . \quad (10)$$

Методика аппроксимации и некоторые результаты изложены в статье [14].

Расчет оценок погрешности аппроксимации проводится по формулам:

$$E_1 = \sum_{i=1}^m \left[y_i^{(0)} - y_i \right]^2 ;$$

$$E_2 = \sum_{i=1}^m \left[y_i^{(0)} \right]^2 - \sum_{i=1}^m y_i^2 .$$

Для наилучшей аппроксимации заданной степени

$$E_3 = \bar{\Delta} = \sum_{i=1}^m \left| \frac{y_i^{(0)} - y_i}{y_i^{(0)}} \right| \cdot 100\% ;$$

$$E_4 = \Delta_{\max} = \max \left\{ \frac{y_i^{(0)} - y_i}{y_i^{(0)}} \right\} \cdot 100\% ;$$

$$E_5 = \Delta = \sqrt{E_1 / (m - \lambda)} ;$$

$$E_6 = \delta_E = \frac{|E_1 - E_2|}{E_1} \cdot 100\% ;$$

$$E_7 = \chi = \left| \Delta / \bar{y}^{(0)} \right| \cdot 100\% ;$$

$$E_8 = \Delta' = \sqrt{E_1 / m} ;$$

$$E_9 = \chi' = \left| \Delta' / \bar{y}^{(0)} \right| \cdot 100\% .$$

Доказаны существование, единственность и минимизирующее свойство аппроксимирующего алгебраического полинома. Разработана и реализована система программ для аппроксимации дискретных функций.

Фактическое моделирование полос проведено на примерах раскатов из опытных слябов. Короткие кромки (передний и задний концы раскатов) аппроксимировались на данном этапе алгебраическими полиномами одной переменной. Передние концы удовлетворительно моделировались полиномами степеней $r = 6,7$; задние концы – полиномами степеней $r = 4 \div 6$. При этом $E_9 \leq 11\%$.

Выводы. Построена математическая модель динамики системы, куда входят чистовая группа клетей прокатного стана с электроприводом и прокатываемая полоса. Получена также математическая модель самой полосы перед чистовой группой. Выполнены натурные эксперименты на этой группе клетей, имевшей аварийные остановки из-за превышения ограничений по механическим и электрическим параметрам. Показано, что эти параметры подчиняются нормальному закону распределения.

Перспективы данного направления распространяются на математические модели с использованием теории случайных процессов. Такие модели могут стать основой АСУТП многоклетевых прокатных станов.

Список литературы: 1. *Иванченко Ф.К., Красношапка В.А.* Динамика металлургических машин. – М.: 1983. – 296 с. 2. Автоматизированные широкополосные станы, управляемые ЭВМ. – М.: 1984. – 240 с. 3. Доклад дипл. инженера Х. Вокуша. Концепция управления и обслуживания для базисной автоматизации широкополосного прокатного стана. Siemens Aktiengesellschaft. Printed in FRG. 128264 SD 5850.5. 4. *Земляков В.Д., Фисенко С.А.* К вопросу снижения динамических нагрузок в электроприводах прокатных станов // Электротехника. – 1988. – № 1. – С. 6-10. 5. *Ларин В.Б. и др.* Понижение порядка динамической модели прокатного стана // Автоматика. – 1992. – № 2. – С. 67-75. 6. *Остерник Э.С.* Моделирование динамики электропривода для группы клетей непрерывного прокатного стана. – 9 с. – Рукопись деп. в «Информэлектро». 5.06.1991. – № 40. –

Эт.91. 7. Целиков А.И., Гришков А.И. Теория прокатки. – М.: 1970. – 360 с. 8. Перельмутер В.М., Брауде Ю.Н. и др. Тиристорные электроприводы прокатных станов. – М.: 1978. – 152 с. 9. Амбарцумов Т.Г., Тютюнников П.Т. Защита подшипников электрических машин от токов // Труды ВНИИЭМ. – Т. 28. – М., 1989. – С. 21-23. 10. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. – М.: 1978. – 352 с. 11. Римский В.К. Математическое и имитационное моделирование удара // Заводская лаборатория. – 1990. – № 5. – С. 111. 12. Смирнов В.В., Яковлев Р.А. Механика приводов прокатных станов. – М.: 1977. – 216 с. 13. Остерник Э.С. О стохастической модели статора турбогенератора // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2007. – № 22. – С. 135-147. 14. Остерник Э.С. Моделирование деформационных полей с помощью функций N – переменных // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Тем. выпуск «Динамика и прочность машин». – 2003. – № 8, т.3. – С. 29-42.

Поступила в редколлегию 07.10.2008

УДК 620.171.3, 53.072.11

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд.физ.-мат.наук, НТУ «ХПИ», Харьков

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ФОТОУПРУГОСТИ КАК ОБЪЕМНАЯ

У роботі розглядається метод фотопружності для плосконапруженого циліндричного тіла. Визначено, що незважаючи на плоский стан напруг, обговорювані методи носять томографічний характер і є стійкими. Визначено ступінь складності завдання для пошуку напруг й імітаційного моделювання напруженого тіла.

Photoelasticity method is considered for plane strain cylindrical body in this paper. In spite plane nature of the stress, under discussioned methods have tomography nature and are robust. Degree to difficulties of the problem for determined stress and simulation modeling of the stress body had determined.

1. Введение. Сообщество разработчиков (людей, занимающихся совершенствованием методологии) метода фотоупругости никогда не было очень обширным. Однако в последние годы появляются новые группы специалистов в этой области в противоположность 1980-90-м годам, когда наблюдался глубокий спад в использовании этого метода. Связано это с востребованностью метода фотоупругости в условиях новых технологий и задач.

2. Актуальность рассматриваемой проблемы. В настоящее время публикации по моделированию напряжений в узлах механизмов методом фотоупругости мало (имеется в виду моделирование механизмов из пьезооптически активных материалов с последующим изучением напряжений методом фотоупругости в различных условиях нагружения). В основном метод фотоупругости сейчас применяется непосредственно к телам, напряженное состояние которых нас интересует [1-6].

3. Постановка задачи. В работах [1-6] рассматриваются плоские задачи фотоупругости. Тела представляют собой пластины с плоскими напряжениями. Эти пластины имеют конечную толщину. Несмотря на то, что напряжения



Рисунок 1 – Вид плосконапряженного тела в скрещенных поляроидах

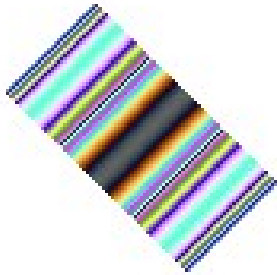


Рисунок 2 – Вид плосконапряженного тела в скрещенных поляроидах сбоку и повернутое на 45°

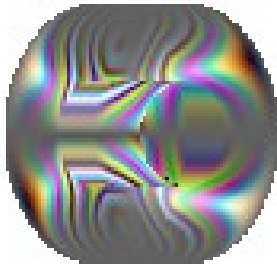


Рисунок 3 – Вид плосконапряженного тела в скрещенных поляроидах, повернутое сначала вокруг оси Y , а потом Z на угол 45°

считаются плоскими, прохождение света через такие тела в произвольном направлении не является плоской пьезооптической задачей. Свет может проходить через плоское тело под наклоном. В этом случае плоское напряжение будет представлено 6-ю компонентами. По ходу луча напряженное состояние будет меняться, в отличие от прохождения света в перпендикулярном к плоскости тела направлении. Если плосконапряженное тело имеет существенную толщину, при пьезооптических измерениях и последующем моделировании прохождения света в произвольном направлении возникнут трудности.

Моделирование прохождения света достигается разбиением на слои участка тела по ходу луча. Задача построения уравнений фотоупругости так просто решиться не может. В данной работе рассматривается подход, когда факт объемности игнорируется. Проще всего избежать наклонных просвечиваний и решать задачу, дополнив уравнения фотоупругости для перпендикулярного просвечивания уравнениями равновесия [1-6].

4. Имитационное моделирование. Определим напряжения в теле аналогично [1-6]. Исследуем погрешность методом, предложенным в [7]. Сделаем это для тела, показанного на рис. 1, имеющего неизменную толщину.

На рис. 1, 2 показан вид между скрещенными поляроидами и четвертьволновой двупреломляющей пластинкой. На рис. 3. показано то же тело в том же оптическом устройстве, только повернутое сначала вокруг оси Y , а потом Z на угол 45° .

5. Выводы. Прохождение света через напряженное тело моделируется сравнительно легко. Задача определения напряжений в объемном теле, даже в

относительно простых случаях (топографическая задача), вызывает большие сложности, требующие конкретного решения в каждом отдельном случае. Для более обобщенного подхода необходим способ быстрой разработки алгоритма и программного обеспечения. Таким способом может оказаться специализированный язык программирования.

Список литературы: 1. *Тесленко А.А.* Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 2. *Тесленко А.А.* Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 3. *Тесленко А.А.* Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 4. *Тесленко А.А.* Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С. 169-171. 5. *Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л., Тихонова Е.В.* Систематическое исследование метода наклонного просвечивания. Часть I. // Препринт-ИМК-91-4, Харьков. – 1991. – С. 67. 6. *Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л., Тихонова Е.В.* Систематическое исследование метода наклонного просвечивания. Часть II. // Препринт-ИМК-91-5, Харьков. – 1991. – С. 78. 7. *Тесленко А.А.* Систематическое исследование метода наклонного просвечивания. // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170.

Поступила в редколлегию 17.11.2008

УДК 539.3:517.968+517.956

Ю.С.ШУВАЛОВА, УкрГАЗТ, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Розглянуто другу основну задачу динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа. За допомогою динамічного аналога потенціалу простого шару задача зводиться до системи нестационарних граничних рівнянь. Для прямокутної пластинки отримано явний вигляд граничних інтегральних рівнянь. Одержані чисельні результати.

The second basic dynamic problem for thin elastic plates in Kirchhoff model is under consideration. Its decision is submitted by dynamic analogue of a single layer potential. This representation results in system of the non-stationary boundary equations. The obvious kind of the boundary integral equations is received for a rectangular plate. The numerical results are received.

Введение. Тонкие упругие пластины являются элементами многочисленных конструкций, используемых в аэрокосмической, электронной технике и многих других отраслях промышленности. Поэтому развитие методов вычисления напряжений, возникающих в пластине очень важная задача. В статье предложен вариант метода теории потенциалов, позволяющий свети задачу к

системе граничных нестационарных уравнений. При дальнейшей численной реализации рассматривается пластина прямоугольной формы. Метод исследования основан на схеме, развитой в [1–4] в задачах классической динамической теории упругости.

1 Обозначения и постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая пластина, занимающая область $\Omega \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, где Ω – некоторая область в \mathbb{R}^2 ($h = \text{const}$). Вектор смещения точки (x, x_3) пластины, где $x = (x_1, x_2)$, имеет вид $(-x_3 \partial_1 u(x, t), -x_3 \partial_2 u(x, t), u(x, t))$, где $u(x, t)$ – смещение точки x срединной плоскости пластины в направлении, перпендикулярном этой плоскости в недеформированном состоянии, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$. Функция $u(x, t)$ является решением смешанной задачи (1.1):

$$\begin{cases} \rho h \partial_t^2 u(x, t) + \tilde{D} \Delta^2 u(x, t) = q(x, t), & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \psi(x), \end{cases} & x \in \Omega, \\ \begin{cases} (Qu)(x, t) = g_1(x, t), \\ (-Mu)(x, t) = g_2(x, t), \end{cases} & (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\Gamma = \partial\Omega$; $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, ∂_n – производная по внешней нормали $n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ к контуру Γ , ρ – поверхностная плотность пластины, $\tilde{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – ее цилиндрическая жесткость, $q(x, t)$ – плотность внешних сил, действующих на пластину.

$$\begin{cases} Qu = -D(\partial_n \Delta u + (1-\nu) \partial_\tau [n_1 n_2 (\partial_2^2 u - \partial_1^2 u) + (n_1^2 - n_2^2) \partial_1 \partial_2 u]), \\ -Mu = D(\Delta u + (1-\nu)(2n_1 n_2 \partial_1 \partial_2 u - n_2^2 \partial_1^2 u - n_1^2 \partial_2^2 u)), \end{cases} \quad (1.2)$$

– операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента.

$D = \tilde{D} / \rho h$, ∂_τ – производная в направлении касательного к Γ орта τ , полученного из n поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки [5].

Поскольку имеющиеся неоднородности можно перенести в краевые условия, то далее будет рассматриваться задача для однородного уравнения колебаний пластины и однородных начальных условий.

2 Динамический потенциал. Пусть $\Phi(x, t)$ – фундаментальное решение уравнения колебаний пластины, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{cases} \partial_t^2 \Phi(x, t) + D \Delta^2 \Phi(x, t) = \delta(x, t), \\ \Phi(x, t) = 0, & t < 0, \end{cases}$$

$\delta(x, t)$ – функция Дирака. Несложные вычисления дают явный вид фунда-

ментального решения:

$$\Phi(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}} \operatorname{si} \left(\frac{|x|^2}{4\sqrt{Dt}} \right)$$

где $\operatorname{si}(z) = -\int_z^\infty \frac{\sin \mu}{\mu} d\mu$ – интегральный синус, $\theta(t)$ – характеристическая функция полуоси $(0, \infty)$.

Запаздывающий потенциал простого слоя с заданной на $\Gamma \times \mathbb{R}$ гладкой двухкомпонентной плотностью вводится формулой:

$$(V\bar{\alpha})(x,t) = \iint_{\Gamma \times \mathbb{R}} (\Phi(x-y, t-\tau)\alpha_1(y,\tau) + \partial_{n,y}\Phi(x-y, t-\tau)\alpha_2(y,\tau)) ds_y d\tau, \quad (2.1)$$

где $\partial_{n,y}$ – операция нормальной производной, действующая по переменной y .

Потенциал $V\bar{\alpha}$ удовлетворяют однородному уравнению колебаний пластины в $\Omega \times \mathbb{R}_+$, а если плотность равна нулю при $t < 0$, то и нулевым начальным условиям. Для потенциала $V\bar{\alpha}$ справедливы формулы скачков:

$$\begin{aligned} (QV\bar{\alpha})^\pm(x,t) &= \pm\alpha_1(x,t) + (QV\bar{\alpha})^0(x,t), \\ (-MV\bar{\alpha})^\pm(x,t) &= \pm\alpha_2(x,t) + (-MV\bar{\alpha})^0(x,t), \end{aligned} \quad (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+, \quad (2.2)$$

Представив решения задачи (1.1) потенциалом простого слоя $u(x,t) = (V\bar{\alpha})(x,t)$, получим систему граничных уравнений

$$\begin{cases} (QV\bar{\alpha})^\pm(x,t) = g_1(x,t), \\ (-MV\bar{\alpha})^\pm(x,t) = g_2(x,t), \end{cases} \quad (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+. \quad (2.3)$$

Однозначная разрешимость поставленной задачи была доказана в [5] в однопараметрической шкале пространств соболевского типа.

3 Применение метода потенциалов к тонкой упругой пластине прямоугольной формы. Рассмотрим тонкую упругую пластину прямоугольной формы (рис. 1).

Учитывая формулы скачков (2.1), из системы (2.2) получен явный вид интегральных граничных уравнений. Далее приведем представление системы для $x = (x_1; 0) \in \Gamma_1$ ($0 < x_1 < a$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha_1(x,t) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{\Gamma} \alpha_k(y,t) Q_k(x-y,t) ds_y + \int_0^\infty \int_{\Gamma} \frac{\alpha_k(y,t) - \alpha_k(y,\tau)}{(t-\tau)^2} \tilde{Q}_k(x-y, t-\tau) ds_y d\tau \right] &= g_1(x,t), \\ \frac{1}{2}\alpha_2(x,t) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{\Gamma} \alpha_k(y,t) M_k(x-y,t) ds_y + \int_0^\infty \int_{\Gamma} \frac{\alpha_k(y,t) - \alpha_k(y,\tau)}{(t-\tau)^2} \tilde{M}_k(x-y, t-\tau) ds_y d\tau \right] &= g_2(x,t). \end{aligned}$$

1) Пусть $y = (s, 0) \in \Gamma_1$, тогда

$$Q_1(x-y,t) = 0, \quad M_2(x-y,t) = 0,$$

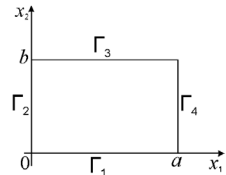


Рисунок 1

$$Q_2(x-y, t) = -\frac{t\sqrt{D}}{\pi} \cdot \frac{3(1-\nu)}{(x_1-s)^4} \sin \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{Dt}} + \frac{2-\nu}{2\pi(x_1-s)^2} \cos \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{Dt}} \approx$$

$$\approx \frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)^2} - \frac{3(x_1-s)^2}{128\pi Dt^2},$$

$$M_1(x-y, t) = -\frac{\nu t\sqrt{D}}{\pi(x_1-s)} \sin \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{Dt}} + \frac{(1+\nu)\sqrt{D}}{2\pi(x_1-s)^2} \int_0^\infty \theta(t-\tau) \sin \frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)} d\tau \approx$$

$$\approx -\frac{\nu}{4\pi} + \frac{(1+\nu)}{8\pi} \ln t - \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^4}{1536\pi Dt^2}.$$

Разбиваем Γ_1 на n частей, на каждой из которых считаем плотности $\alpha_k(y, t)$ постоянными ($\alpha_{ki}(y, t) = const, i = \overline{1, n}$).

$$\int_{\Gamma_1} \alpha_2(y, t) Q_2(x-y, t) ds_y = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)^2} - \frac{3(x_1-s)^2}{128\pi Dt^2} ds = \sum_{i=1}^n \alpha_{2i}(s, t) \left[\frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)} + \frac{(x_1-s)^3}{128\pi Dt^2} \right]_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

Замечание. Первое слагаемое понимаем как интеграл в смысле Адамара

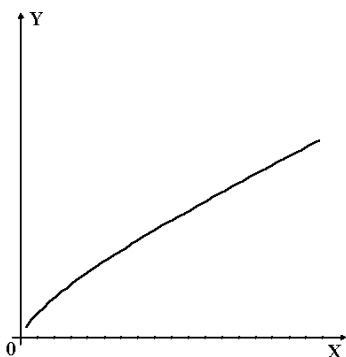
$$\int \frac{dy}{y^2} = \operatorname{Re} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{dy}{(y+i\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{y^2 - \varepsilon^2}{(y^2 + \varepsilon^2)^2} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{y\varepsilon}{\varepsilon^2 + y^2} = -\frac{1}{y} + c.$$

$$\int_{\Gamma_1} \alpha_4(y, t) M_1(x-y, t) ds_y = \sum_{i=1}^n \alpha_{4i} \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{(1+\nu) \ln t - 2\nu}{8\pi} - \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^4}{1536\pi Dt^2} ds = \sum_{i=1}^n \alpha_{4i} \left[\frac{((1+\nu) \ln t - 2\nu)s}{8\pi} + \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^5}{7680\pi Dt^2} \right]_{a_{i-1}}^{a_i}$$

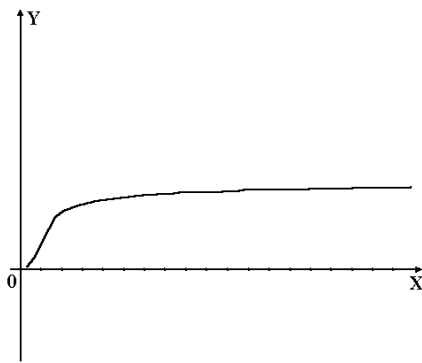
2) на остальных частях границы $\Gamma_i, i = \overline{1, 3}$

Интегралы $\int_{\Gamma_i} \alpha_k(y, t) Q_k(x-y, t) ds_y, \int_{\Gamma_i} \alpha_k(y, t) M_k(x-y, t) ds_y, k = 1, 2$ вы-

числяются аналогично.



Смещение $u(t)$ в средней точке пластины под постоянной нагрузкой $q = const$



Смещение $u(t)$ в средней точке пластины под нагрузкой $q = t^2(t-5)^2$

Рисунок 2

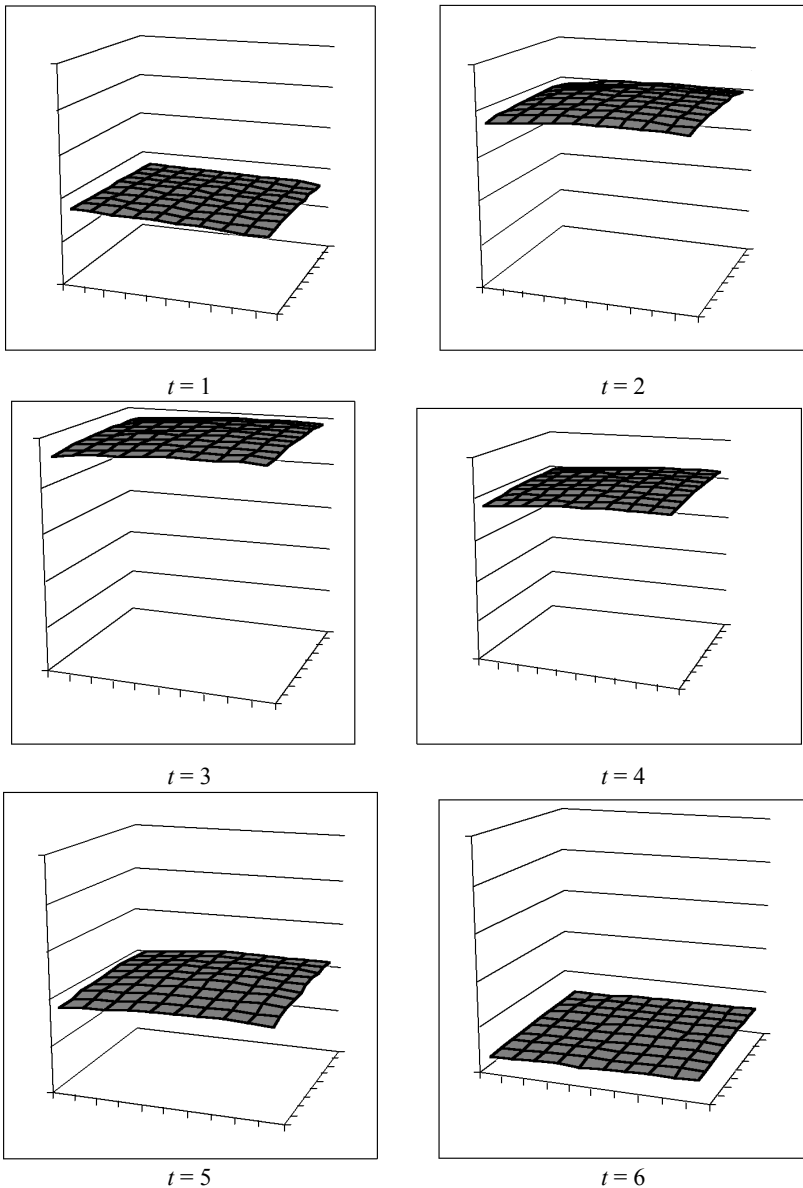


Рисунок 3

4. Численные результаты. Для численной реализации возьмем пластину размеров $1 \times 1 \times 0,1$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Края пластины свободны. То есть решается задача вида

$$\rho h \partial_t^2 u(x, t) + \tilde{D} \Delta^2 u(x, t) = q(x, t), \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, +\infty),$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \partial_t u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad x \in (0, 1) \times (0, 1),$$

$$\begin{cases} (Qu)(x, t) = 0, \\ (-Mu)(x, t) = 0, \end{cases} \quad (x, t) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+,$$

Рассмотрим различные варианты нагрузок $q(x, t)$.

Смещение точек пластины во времени под нагрузкой $q(x, t) = q_0 \sin t$.

Вывод. Построен динамический аналог потенциала простого слоя для второй основной задачи динамики тонких упругих пластин, который позволяет определять смещение любой точки пластины в произвольный момент времени без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов.

Список литературы: 1. *Chudinovich I.Yu.* The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems // Math. Methods Appl. Sci., – 1993. – {\bf 16} – P. 203-215. 2. *Chudinovich I.Yu.* The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 2. Methods for approximate solutions. // Math. Methods Appl. Sci. – 1993. – {\bf 16} – P. 217-227. 3. *Chudinovich I.Yu.* Methods of potential theory in the dynamics of elastic media. // Russian J. Math. Phys. – 1993. – {\bf 1} – P. 427-446. 4. *Chudinovich I.Yu.* On the solution of the boundary equations in problems of elastic wave diffraction on the spatial cracks // Differentsial'nye uravneniya. – 1993, – {\bf 29} – P. 1648-1651. (In Russian). 5. *Chudinovich I.Yu., Gassan Yu.S.* Boundary Equations in basic Dynamic Problems for Thin Elastic Plates // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – № 475. – С.250-258.

Поступила в редколлегию 03.11.2008.

УДК 539.3

Е.Г.ЯНИЮТИН, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков

В.Т.ГРИШАКИН, ХНАДУ, Харьков

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ БАЛОК

В статті пропонуються засоби розв'язання прямих та обернених задач механіки деформівного твердого тіла на прикладі балок, що перебувають під дією зосередженої рухомої сили. Задачі розглянуті як для балок теорії Кірхгоффа-Лява, так і для балок теорії С.П. Тимошенко. Урахування дисипації енергії коливань здійснено за допомогою моделі Фойгта.

The direct and inverse problems of deformable rigid body mechanics solving methods on example of beams under action of the concentrated mobile force are offered in this article. Problems are considered both for beams of the Khirhgoff theory, and for beams of the Timoshenko theory. The account of fluctuation energy dissipate is carried out by means of Foight model.

Настоящая статья посвящена решению двух обратных задач динамики балок конечной длины. Предполагается, что балки являются вязко-упругими, колебания их нестационарны, а уравнения движения моделируются по двум различным теориям. Под обратными (в данном случае, задачами идентификации неизвестных нагрузок) понимаются задачи, в которых определение внешних сил производят на основе анализа их косвенных проявлений [1-3].

Вначале рассмотрим задачу о колебаниях шарнирно-опертой балки конечной длины при действии подвижной силы с учетом диссипации энергии колебаний с использованием дифференциального уравнения теории Кирхгоффа-Лява, приведенного в работе [4], а именно:

$$\frac{EI}{\rho F} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho F} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q_z(x,t), \quad (1)$$

где η - коэффициент вязкости, $q_z(x,t) = P(t)\delta(x - V_0 t)$ - интенсивность поперечной нагрузки, V_0 - скорость движения силы. Учет внутреннего трения в балке проводим аналогично тому, как это выполнено в монографии [4], а именно с использованием модели Фойгта, в которой связь между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Функцию динамического прогиба балки $w(x,t)$ будем искать с применением рядов Фурье. Решение дифференциального уравнения (1) находим при нулевых начальных условиях и граничных условиях, отвечающих шарнирному опиранию.

Подставив разложение $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin k\pi x/l$ в (1) и выполнив ряд преобразований, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4 w_k(t) + \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4 \frac{dw_k(t)}{dt} + \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} \right) \sin \lambda_k x = \frac{1}{\rho F} P(t) \delta(x - V_0 t), \quad (2)$$

где $\lambda_k = k\pi/l$.

Используя условие ортогональности для тригонометрических функций, а также учитывая свойство для δ -функции, приведем выражение (2) к виду

$$\frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4 \frac{dw_k(t)}{dt} + \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4 w_k(t) = \frac{2}{\rho F l} P(t) \sin(\lambda_k V_0 t). \quad (3)$$

Решение дифференциального уравнения (3) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени [5]. В пространстве изображений полученное уравнение примет вид

$$s^2 w_k^L(s) + 2n_k s w_k^L(s) + p_k^2 w_k^L(s) = \frac{2}{\rho F l} F_k^L(s),$$

где $w_k^L(s) \rightarrow w_k(t)$; $F_k^L(s) \rightarrow P(t) \sin \lambda_k V_0 t$; $2n_k = \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4$; $p_k^2 = \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4$.

Используя правила операционного исчисления [5,6], запишем

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_k V_0 \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\sin p_{\alpha_k}(t-\tau)}{p_{\alpha_k}} d\tau \sin \lambda_k x, p_{\alpha_k} > 0; \quad (4)$$

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_k V_0 \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\operatorname{sh} p_{\alpha_k}(t-\tau)}{p_{\alpha_k}} d\tau \sin \lambda_k x, p_{\alpha_k} < 0,$$

где $p_{\alpha_k} = \sqrt{p_k^2 - n_k^2}$.

Заметим, что эти формулы учитывают различные значения величин вязкого трения и дают возможность рассчитывать прогибы балки без всяких ограничений, накладываемых на исходные данные.

Необходимость рассмотрения обратных задач связана, например, с открывающейся в результате их решения возможностью определения напряженно-деформированного состояния конструкций без априорного знания о воздействующих на них нагрузках. В состав комплекса операций, необходимых для решения обратной задачи для балки конечной длины, может входить установка датчика в произвольной точке исследуемой балки, прогибы которой необходимо фиксировать для определения нагрузки.

Идентификация подвижной нагрузки была проведена для балки с прямоугольным поперечным сечением и следующими характеристиками: длина $l = 2$ м; ширина $b = 0,15$ м; высота поперечного сечения $h = 0,1$ м; площадь поперечного сечения $F = bh = 0,015$ м²; осевой момент инерции $I = bh^3/12 = 1,25 \cdot 10^{-5}$ м⁴; плотность материала $\rho = 0,795 \cdot 10^4$ кг/м³; модуль упругости $E = 0,206 \cdot 10^6$ МПа; величина силы $P = 1$ кН; скорость движения силы $V_0 = 50$ м/с.

В математическом плане обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I-го рода [1-3], а именно

$$w_0(t) = \int_0^t P(\tau) K(t-\tau, \tau) d\tau, \quad (5)$$

где $K(t, \tau)$ - ядро интегрального уравнения.

Исследуемая обратная задача относится к классу некорректных задач математической физики [7]. Известно, что решение таких задач возможно лишь с применением специальных регуляризирующих алгоритмов. Поэтому используем общую операторную форму записи выражения (5) в виде $w = A \cdot q$ и, применяя регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова, запишем сглаживающий параметрический функционал для уравнения (5) в виде

$$M^\alpha[q] = \|w^\delta - A \cdot q\|_{L_2}^2 + \alpha \|q\|^2, \quad (6)$$

где w^δ - вычисляемые с некоторой погрешностью измерения δ перемещения балки в точке x_0 ; q - искомая функция, в данном случае подвижная сила; A - математический оператор, такой что $A \cdot q = w$; α - параметр регуляризации.

В пространстве Соболева [7] функционал (6) примет вид

$$M^\alpha[q] = \int_0^T \left(w^\delta(t) - \int_0^t q(\tau) K(t-\tau, \tau) d\tau \right)^2 dt + \alpha \int_0^T (q^2(t) + (q'(t))^2) dt,$$

где T – время завершения исследуемого процесса (наблюдения за ним).

Как показали исследования [1-3], эффективным способом решения таких задач следует считать регуляризацию матричного уравнения, согласно которой решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (7)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \cdot \sin(\lambda_k \cdot V_0 t)$; \mathbf{q} – вектор, определяющий изменение силы во времени; \mathbf{C} – трехдиагональная матрица, представленная в монографии [7].

На рис. 1 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения. В качестве исходных данных для обратной задачи было принято изменение прогиба в точке с координатой $x = l/4$, вычисленное по формулам (4) – результат решения прямой задачи (см. кривую 2), а кривая 3 – та же кривая, после наложения на нее пятипроцентного «шума», а также нескольких случайных «амплитудных выбросов». Укажем, что на рисунке 1 сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

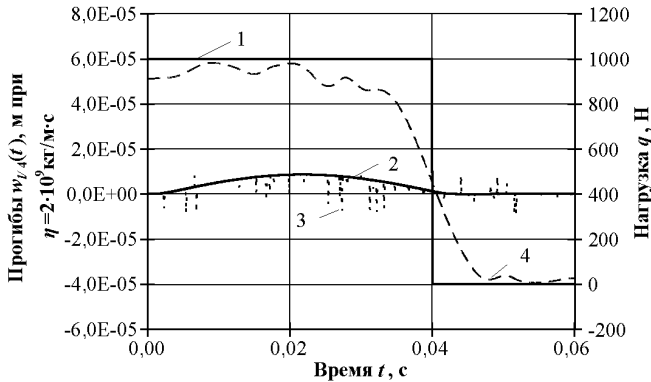


Рисунок 1

Аналогичные исследования могут быть проведены и для уточненной модели балки С.П. Тимошенко, позволяющей учитывать влияние инерции вращения поперечного сечения и сдвига, что особенно важно при изучении балок относительно малой длины. Для учета в такой балке эффектов поперечного, вращательного и вязкоупругого затуханий по Фойгту можно воспользоваться системой дифференциальных уравнений, впервые полученных S.H. Crandall и A. Yildiz, которые приведены в монографии [8]:

$$\begin{cases} c^2 \left(1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \left(1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial t}; \\ a^2 \left(1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q_z(x, t) + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases} \quad (8)$$

где $a = \sqrt{k' G / \rho}$; $b = \sqrt{k' G F / \rho I}$; $c = \sqrt{E / \rho}$; $E I$ – изгибная жесткость; F –

площадь поперечного сечения балки; G – модуль сдвига; k' – коэффициент формы поперечного сечения; ρ – плотность материала; ε_1 и ε_2 – коэффициенты поперечного и вращательного затуханий; β_1 и β_2 – коэффициенты затухания от действия окружающей среды.

В соответствии со стандартной методикой разделения переменных, $\left(w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin k\pi x/l, \psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \sin k\pi x/l \right)$ на основе уравнений (8) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_k(t)}{dt^2} + (b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) \frac{d\psi_k(t)}{dt} + (b^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k(t) - b^2 \lambda_k \left(\varepsilon_2 \frac{dw_k(t)}{dt} + w_k(t) \right) = 0; \\ \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) \frac{dw_k(t)}{dt} + a^2 \lambda_k^2 w_k(t) - a^2 \lambda_k \left(\varepsilon_2 \frac{d\psi_k(t)}{dt} + \psi_k(t) \right) = \frac{2}{\rho Fl} P(t) \sin \lambda_k V_0 t. \end{cases}$$

В пространстве изображений указанная система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} (s^2 + s(b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) + b^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k^L(s) - b^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) w_k^L(s) = 0; \\ (s^2 + s(a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + a^2 \lambda_k^2) w_k^L(s) - a^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) \psi_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} F_k^L(s). \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы уравнений (9) в пространстве изображений можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \frac{b^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) F_k^L(s)}{s^4 + a_{3k} s^3 + a_{2k} s^2 + a_{1k} s + a_{0k}}; \\ w_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \frac{(s^2 + s b_{1k} + b_{0k}) F_k^L(s)}{s^4 + a_{3k} s^3 + a_{2k} s^2 + a_{1k} s + a_{0k}}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{где } b_{0k} = b^2 + c^2 \lambda_k^2;$$

$$b_{1k} = b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2;$$

$$a_{0k} = a^2 c^2 \lambda_k^4;$$

$$a_{1k} = b_{0k} (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + a^2 \lambda_k^2 b_{1k} - 2a^2 b^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2;$$

$$a_{2k} = b_{1k} (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + b_{0k} + a^2 \lambda_k^2 (1 - b^2 \varepsilon_2^2);$$

$$a_{3k} = b_{1k} + a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1.$$

Согласно правилам операционного исчисления [5] в пространстве оригиналов выражения для искомых функций примут вид

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \sum_{j=1}^4 \frac{(\omega_{j,k}^2 + b_{1k} \omega_{j,k} + b_{0k}) e^{\omega_{j,k}(t-\tau)}}{4\omega_{j,k}^3 + 3a_{3k} \omega_{j,k}^2 + 2a_{2k} \omega_{j,k} + a_{1k}} d\tau \sin \lambda_k x; \\ \psi(x, t) &= \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \sum_{j=1}^4 \frac{b^2 \lambda_k (\omega_{j,k} \varepsilon_2 + 1) e^{\omega_{j,k}(t-\tau)}}{4\omega_{j,k}^3 + 3a_{3k} \omega_{j,k}^2 + 2a_{2k} \omega_{j,k} + a_{1k}} d\tau \cos \lambda_k x. \end{aligned} \quad (11)$$

Расчеты по приведенным формулам проводились с использованием среды

Mathcad [9]. В формулах (11) значения величин $\omega_{j,k}$ ($j = 1-4$) являются комплексными и находятся как корни полинома, входящего в знаменатель уравнения (10), в той же среде. Отметим, что в Mathcad операции с комплексными числами производятся в автоматическом режиме.

Обратная задача для рассматриваемой балки теории С.П.Тимошенко аналогична ранее описанному расчетному случаю для балки теории Кирх-гоффа-Лява. Коэффициенты затухания принимались равными $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 10^{-3}$ с и $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 200$ с⁻¹, что позволяет учесть затухание колебаний балки не только за счет внутреннего трения в материале, но и за счет вязкости окружающей среды, что моделирует поведение балки, погруженной, например, в жидкость. Применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала (6), после чего задача сводится к решению регуляризированной системы линейных алгебраических уравнений (7).

На рис. 2 изображены результаты идентификации неизвестной подвижной силы, действовавшей на балку теории Тимошенко. В качестве исходных данных было принято изменение прогиба в точке с координатой $x = l/4$, вычисленное по формулам (11) – результат решения прямой задачи (см. кривую 2). Кривая 3 «зашумлена» аналогично предыдущему расчетному случаю. Сплошной линией на рис. 2 (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

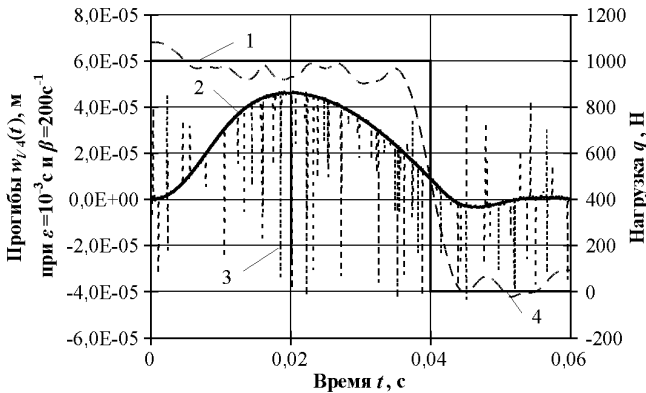


Рисунок 2

На основе представленных на рисунках результатов можно сделать вывод, что процедура применения сглаживающего функционала А.Н. Тихонова в проблемах о колебаниях балок при наличии в уравнениях их движения диссипативных членов может эффективно использоваться при решении обратных задач. Ранее эта процедура использовалась при идентификации подвижных нагрузок для абсолютно упругих балок [1-3]. Основную цель своих дальнейших исследований по развитию задач данного направления авторы видят в их обобщениях на деформируемые объекты более сложных геометрических форм.

Список литературы: 1. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Гришакин В.Т. Идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на балки и плиты // Збірник наукових праць Національного гірничого університету. – 2006. – № 24. – С. 145-150. 2. Янютин Е.Г., Гнатенко Г.О., Гришакин В.Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // Машинознавство. – 2007. – С. 18-23. 3. Воропай А.В., Янютин Е.Г., Гришакин В.Т. Некорректные обратные нестационарные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении // Вісник Харківського національного університету. – № 775. – Харків. – 2007. – С. 73-80. 4. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. - М.: Наука, 1960. – 186 с. 5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 6. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с. 7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 8. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. - 272 с. 9. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

Поступила в редакцию 20.11.2008

УДК 539.3

Е.Г.ЯНЮТИН, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков
Г.А.ГНАТЕНКО, ХНАДУ, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ БАЛКИ

В статті розглядаються пряма і обернена задача теорії пружності про імпульсну дію на пружну балку скінченної довжини. Пропонується методика визначення закону зміни нестационарної дії в часі. Наводяться результати чисельних експериментів з ідентифікації невідомого навантаження на основі вихідних даних аналітичних і експериментальних досліджень.

The direct and inverse problems of the theory of elasticity for finite length beam under pulse loading are considered. The methods for determining the time dependent pulse action are obtained. The numerical results for identification of unknown nonstationary action based on analytical and experimental initial data are presented.

Зачастую при проектировании различных конструкций возникают вопросы правильного выбора величины и характера изменения во времени нагрузок воздействующих на них. Этому может способствовать умение решения так называемых обратных задач, связанных с непосредственной идентификацией воздействующих сил. Ряд таких задач и способы их эффективного решения представлены, например, в монографиях [1, 2].

Одна из таких задач по определению ударного воздействия на упругую балку конечной длины падающего груза рассмотрена в настоящей статье.

Вначале опишем механическую систему, которая положена в основу решения задачи.

Пусть воздействие равномерно распределенной по некоторой площадке нагрузки с интенсивностью $P(t)$ на однопролетную шарнирно-опертую балку длиной l эквивалентно схеме изображенной на рис. 1.

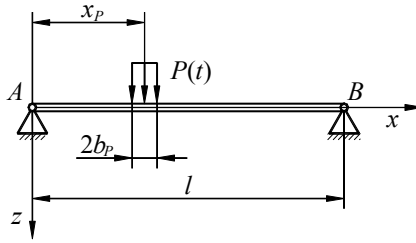


Рисунок 1

Исследование поперечных колебаний балки производится на основе модели теории типа Тимошенко [3], а именно с использованием общеизвестной системы дифференциальных уравнений, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) FG = q(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k' \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Psi \right) FG - \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $q(x, t)$ – закон распределения нагрузки, включающий в себя функцию изменения нестационарного во времени воздействия $P(t)$.

Решение системы дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий получим путем разложения искомых функций в тригонометрические ряды. Форма записи этого решения показана ниже:

$$w(x, t) = \frac{4}{\rho F l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k x_p \sin \lambda_k b_p}{\lambda_k} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_k x; \quad (2)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{4b}{\rho F l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k x_p \sin \lambda_k b_p}{\lambda_k} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik} D_k} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \cos \lambda_k x,$$

$$\text{где } \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad a = \frac{k'G}{\rho}; \quad b = \frac{k'GF}{\rho I}; \quad c = \frac{E}{\rho},$$

$$D_k = \sqrt{\left((a+c)\lambda_k^2 + b \right)^2 - 4ac\lambda_k^4}; \quad \omega_{1,2k}^2 = \frac{(a+c)\lambda_k^2 + b \pm D_k}{2}; \quad C_{ik} = \frac{b + c\lambda_k^2 - \omega_{ik}^2}{\omega_{ik} D_k}.$$

Отметим, что в уравнение (2) входит функция $P(t)$, которая предполагается неизвестной.

Целью процедуры идентификации (определения, восстановления) является отыскание неизвестного закона изменения нагрузки $P(t)$ по данным регистрируемых параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) или перемещениям. В случае регистрации закона изменения деформаций ε_x в некоторой точке на балке с координатой x_s , на основании выражения $\varepsilon_x = z \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ (z – выбираемое расстояние от нейтральной оси балки до плоскости регистрации), получим следующее аналитическое соотношение:

$$\int_0^t P(\tau)K(t-\tau)d\tau = \varepsilon_x(t), \quad (3)$$

$$\text{где } K(t) = \frac{2bh}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k x_p \sin \lambda_k b_p \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik} D_k} \sin \omega_{ik}(t) \sin \lambda_k x_s.$$

Укажем, что в этом уравнении неизвестная функция $P(t)$, а функция $\varepsilon_x(t)$, входящая в правую часть уравнения, является заданной и измеряется, например, в процессе соответствующего численного или натурального экспериментов. Уравнение (3) является интегральным уравнение Вольтерра I-го рода, решение которого можно получить с помощью различных способов, в том числе и численных. Однако, при неточно заданной правой части уравнения, что естественно, поскольку исходные данные зачастую получаются из наблюдений, решение получается неустойчивым, ввиду некорректности задачи, обусловленной спецификой решения интегральных уравнений Вольтерра I-го рода [4]. Далее будет применен эффективный метод приближенного решения уравнения с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [1, 5]. Метод позволяет получить приближенное решение уравнений типа (3), устойчивое к малым изменениям исходных данных.

Запишем интегральное уравнение (3) в операторной форме

$$Az \equiv \int_0^t K(t, \tau)z(\tau)d\tau = u(t); \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (4)$$

где z – искомая функция; u – функция, соответствующая правой части уравнения (3). A – некоторый математический оператор, который переводит $z \in Z$ в элементы $u \in U$ (Z и U – некоторые метрические пространства).

Для отыскания приближенного решения согласно методу А. Н. Тихонова [5], задача по решению уравнения (4) заменяется задачей отыскания минимума сглаживающего функционала, который для данного уравнения примет вид:

$$M^\alpha [z, u_\delta] = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2. \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Способом решения такого рода задач является регуляризация матричного уравнения [5], получающегося в результате перехода к конечномерной задаче путем аппроксимации интегралов. При этом решается СЛАУ следующего вида

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_\delta. \quad (6)$$

где \mathbf{A} – матрица, являющаяся конечно-разностным аналогом оператора в уравнении (4), взятым на сетке с равномерным шагом $\Delta t = t/M$; \mathbf{A}^T – транспонированная к \mathbf{A} матрица; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица размерности $M \times M$, явное выражение которой представлено в [5]. Значение параметра α можно вычислить, например, на основании принципа невязки [5].

При выполнении процедуры идентификации использовались результаты исследований, опубликованные в монографиях [6, 7]. В этих работах приведены результаты исследований по ударному нагружению балок падающим гру-

зом. В качестве исходных данных для идентификации нагрузки рассмотрены как деформации, так и прогибы балки.

В монографии [6] было изучено явление упругого удара по балке конечной длины на основе волнового уравнения Тимошенко. Авторами монографии были получены численные значения (решена прямая задача) прогиба при деформировании стального рельса Р-4а путем сбрасывании на него стального шара радиусом 11,48 см с высоты 25 см. Авторами настоящей статьи, используя указанные данные прогиба в центре балки, совпадающей с точкой удара, были восстановлены значения силы, возникающей в месте соприкосновения балки с шаром. Идентификация проводилась на основе следующих исходных данных: $l = 0,8$ м; $F = 39,45 \cdot 10^{-4}$ м²; $k' = 0,35$.

На рис. 2 приведены результаты восстановления нагрузки. Кривая 1 соответствует исходным данным прогиба для идентификации (взята непосредственно из рис. 72, а, б монографии); кривая 2 – значения силы, полученные авторами монографии в результате решения прямой нелинейной задачи ($\tau = 0,2022 \cdot 10^{-5}$ с для каждого графика). Кривая 3 – график восстановленного ударного нагружения (контактной силы взаимодействия) с применением метода А. Н. Тихонова.

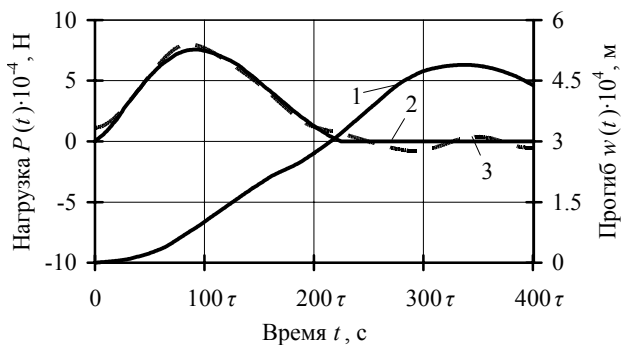


Рисунок 2

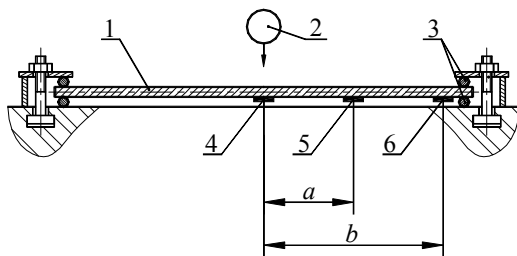
Отметим, что кривые, приведенные на рис. 2, свидетельствуют о высокой достоверности полученных результатов идентификации.

Авторы монографии [7] приводят результаты экспериментальных исследований при ударном нагружении балки, схема которого приведена на рис 3.

В монографии произведено описание установки и параметров измерительного комплекса, с помощью которого производилась регистрация параметров НДС. Там же приведены осциллограммы, характеризующие деформационный процесс, и графики изменения напряжений на поверхности балки, а также ее прогибов.

Нагружение балки производилось в среднем сечении путем сбрасывания сферического стального шара массой 1,725 кг с высоты 10 см. В процессе исследования регистрировались осциллограммы деформаций (напряжений), по

результатам которых авторами монографии были построены графики изменения напряжений в среднем сечении балки и на расстоянии 33 см от середины балки.



1 – исследуемая балка; 2 – ударник; 3 – элементы опирания; 4-6 – тензодатчики
Рисунок 3

Идентификацию внешней нагрузки произведем по данным осевых деформаций на нижней поверхности балки. Переход от напряжений к осевым деформациям, учитывая вид напряженного состояния балки, осуществлялся на основе выражения $\epsilon_x = \sigma_x/E$.

В процессе процедуры идентификации принималось, что усилие взаимодействия между шаром и балкой моделировалось равномерно распределенным по некоторой площадке, размер которой определялся на основе механических соображений по известным зависимостям теории контактного взаимодействия тел [8].

Результаты сопоставления полученных функций нагрузки приведены на рис. 4. Кривые 1, 2 соответствуют функциям нагрузки, восстановленным по данным, регистрируемым для двух различных сечений балки; кривая 3 – усредненное значение силы, рассчитанное как среднее арифметическое для значений этих двух кривых.

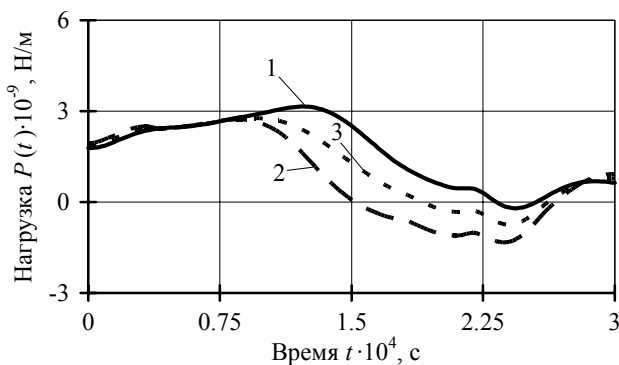


Рисунок 4

Представленные на рис. 4 результаты указывают на удовлетворительное совпадение теоретических (идентифицированных) и экспериментальных ре-

зультатов. Заметим, что на этих рисунках наблюдаются и некоторые несоответствия результатов. Опишем ряд причин, которые могут вызывать некоторое рассогласование. Во-первых, неизбежны неточности в полученных экспериментальных значениях, которые послужили исходными данными при проведении процедуры идентификации. В монографии авторы не указывают точность полученных значений напряжений и возможный уровень погрешности. Во-вторых, упрощенный вариант взаимодействия элементов системы (балка – падающий шар) был выбран при процедуре идентификации, соответствующим постоянной области нагружения. В принципе, в реальности эта область является переменной во времени в процессе ударного взаимодействия. В-третьих, используемые методы регуляризации, при проведении процедуры идентификации, позволяют получить решение, лишь приближенное к точному решению. Указанное является свойством решения некорректных обратных задач с помощью численных методов. Возможны и другие неточности, например точность описания нестационарного поведения балки уравнениями теории Тимошенко. Причины такого типа указывались в монографии [1] при обсуждении вопроса о сравнении теоретических результатов с экспериментальными данными по ударному нагружению полусферической оболочки. Эти причины могут порождать неточности в значениях величин сил ударного взаимодействия, например, заключающихся в некоторых отрицательных значениях контактного давления.

В целом приведенный на рис. 2, 4 графический материал свидетельствует об эффективности разработанной методики идентификации внешних нагрузок, воздействующих на балки конечной длины, в случае их экспериментального ударного нагружения.

Однако следует подчеркнуть, что в выбранном примере идентификации достоверные результаты, по-видимому, имеют место лишь на временном промежутке $0 - 1,5 \cdot 10^{-4}$ с, на котором существенных отрицательных значений контактного давления не наблюдается

Список литературы: 1. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* Импульсное воздействие на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: ХГАДТУ, 2001. – 184 с. 2. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* и др. Задачи импульсного деформирования. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с. 4. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986 – 544 с. 5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 6. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340 с. 7. *Колодяжный А.В., Севрюков В.И.* Ударные и импульсные воздействия на конструкции и материалы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 168 с. 8. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989.–510 с.

Поступила в редколлегию 25.11.2008

О.О.ЛАРИН, НТУ «ХПІ»

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТРИВИМІРНИХ ЦИКЛО–СИМЕТРИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ З ВИПАДКОВИМ РОЗЛАДОМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Проведено аналіз гармонічних коливань цикло-симетричної конструкції з випадково заданим розладом методом Монте-Карло. Наведено аналіз імовірнісних характеристик АЧХ

It is carried out the analysis of simple harmonic vibrations of cyclic symmetry designs with random mistuning by the direct Monte-Carlo simulations method. It is presented the analyses of the probabilistic characteristics of the FRF.

Вступ. У техніці широко розповсюджені конструкції з різноманітними типами симетрії, що зумовлено високою технологічністю їх виробництва, само-збалансованістю, наявністю симетрій у багатьох природних процесах та ін. Одним із найрізноманітніших видів симетричних конструкцій є системи із циклічною симетрією, в яких можна виділити підсистему (сектор) геометричні, механічні й силові параметри якого зберігають свою інваріантність під час обертання на кут $2\pi/N$ [1,2,3]. Зазначена симетрія обумовлює наявність певних властивостей динамічних характеристик таких систем: форми коливань по куту симетрії розподіляються за гармонічним законом утворюючи стоячі хвилі, в системі присутні кратні власні частоти.

З розрахунковою точки зору дуже важливою властивістю є можливість проведення досліджень динамічної поведінки цикло-симетричної системи (ЦСС) на основі моделі одного сектора з граничними умовами циклічної симетрії. Це дає можливість застосовувати складні моделі, що дозволяють проводити детальний числовий аналіз напружено-деформованого стану всіх конструктивних елементів об'єкту, що досліджується.

Разом із тим, в реальних конструкціях цього типу існує певна невизначеність їх параметрів, яка виникає через стохастичну природу виробничих технологічних процесів і експлуатаційну деградацію властивостей матеріалу та призводить до розладу.

Розлад може суттєво змінити динамічну поведінку ЦС системи та викликати суттєве збільшення амплітуд його вібрацій. Це може бути обумовлено декількома ефектами: по-перше, просторовою локалізацією енергії навколо одного або декількох секторів [3,4]; по-друге, викривлення симетричних власних форм може призвести, підчас коливань, до прояву їх у суперпозиції і як наслідок до істотного збільшення амплітуд вібрацій [5]; по-третє, внаслідок розладу можуть виникати додаткові резонансні режими та розширення резонансних областей у робочому діапазоні частот [6]. Таким чином розлад може призвести до втрати динамічної міцності або до істотного зменшення ресурсу внаслідок втоми матеріалу.

Треба зазначити, що оцінка або прогнозування надійності та ресурсу по-

требує попереднього отримання достовірної інформації відносно напружено-деформованого стану, а для цього необхідно використовувати моделі сектора великої розмірності, які враховують основні конструктивні особливості, що в значному ступені ускладнює, а інколи і унеможлиблює отримання числових результатів. Це особливо актуально для систем з випадковим розладом, бо перше в таких системах внаслідок втрати симетрії необхідно проводити розрахунки по моделі всієї системи в цілому, а не моделі сектору, по-друге випадковість параметрів у цих системах вимагає визначення імовірнісних характеристик відклику системи, що сполучено з проблемою розрахунку відповідної детермінованої задачі для необхідного числа реалізацій випадкового розладу.

Тому, навіть незважаючи на інтенсивний розвиток можливостей і ресурсів сучасних комп'ютерних систем актуальними залишаються розробки методів, що знижують обчислювальну вартість задач скінчено-елементного аналізу ЦС конструкцій з випадковим розладом [8-13]. Це мотивувало розвиток методів конденсації розмірності задачі (розкладання в ряд по власним формам симетричної системи [9], метод синтезу форм коливань [10,11] та використання формули Шермона-Моррісона-Вудбарі [12,13]), які дозволяють побудувати більш ефективні схеми моделювання з використанням скінчено-елементних моделей лише одного сектору системи. Проте для систем з великою кількістю секторів, як, наприклад, робочі колеса газових або парових турбін, кількість випадкових параметрів може бути досить великим, що значно збільшує кількість необхідних ітерацій у моделюванні Монте-Карло (МК) та в значному ступені ускладнює отримання числових результатів навіть для системи конденсованої розмірності. Через це для отримання практично важливих кількісних результатів широко застосовуються наближені методи статистичного параметричного аналізу [7, 14-17]. Використання будь-якого наближеного методу вимагає оцінки його меж застосування та похибок, що виникають.

Постановка задачі. В роботі проведено дослідження, випадкових коливань тривимірної ЦС системи з випадковим розладом, проаналізовані ефекти, що виникають у аналізі імовірнісних характеристик З цією метою було побудовано ЦС систему відносно малої розмірності, що дозволяє отримати результати під час застосування прямого моделювання Монте-Карло на основі моделі усієї системи в цілому. Розроблена скінчено-елементна модель представлена на рисунку 1, вона складається з 20 секторів зв'язаних по ободу (та утворює таким чином з'єднання секторів по типу бандажування), у кожному секторі задано випадковий розлад у вигляді зосереджуваного пружного елемента, що має випадкову жорсткість, яка моделювалась як центрована нормальна величина з середньоквадратичним відхиленням, значення якого призводить до змінення у межах 10 відсотків першої парціальної власної частоти сектору системи (додачне значення жорсткості призводить до зменшення частоти на 10 відсотків, а від'ємне значення – до збільшення частоти на 4 відсотка). Система виводилась з положення рівноваги гармонічною силою з одиничною амплітудою, яка прикладена до першого сектору, забезпечуючи таким чином збудження всіх резонансів у досліджуваному діапазоні частот.

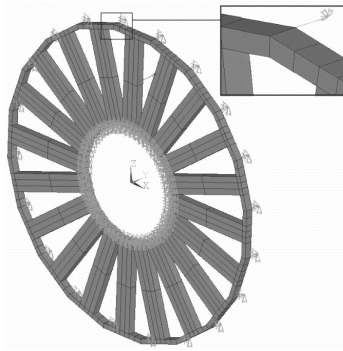


Рисунок 1 – Скінчено-елементна модель ЦС системи з доданим пружним елементом, що дозволяє моделювати випадковий за жорсткістю розлад

Дослідження систем із детермінованим розладом. В роботі проведено дослідження детермінованої задачі з розладом що заданий у одному секторі. Так на рис. 2 наведено отримані амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для декількох секторів системи, представлені графіку демонструють залежність АЧХ вузла першого сектору від віддалення сектору в якому прикладений розлад.

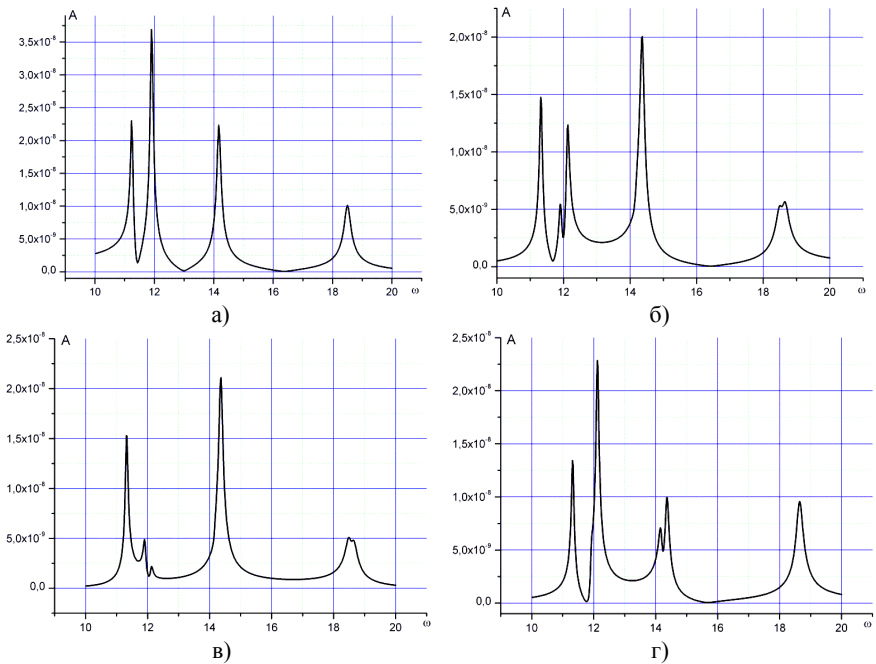


Рисунок 2 – АЧХ для системи з детермінованим розладом, що заданий у одному секторі (АЧХ ЦС системи – а), розлад задано у 5, 15 та 17 секторах – б), в) та г) відповідно)

Дослідження систем з випадковим розладом. Під час використання методу Монте-Карло важливою проблемою є аналіз кількості реалізацій необхідних для визначення ймовірностних характеристик відклику системи. Так на рис. 3 наведено графіки збігання математичного сподівання (МС) та середньоквадратичного відхилення (СКВ) амплітуд коливань у залежності від кількості ітерацій. Аналіз процесу збігання характеристик випадкових АЧХ вказує, що на резонансній частоті воно є значно повільніше і вимагає більшого числа ітерацій.

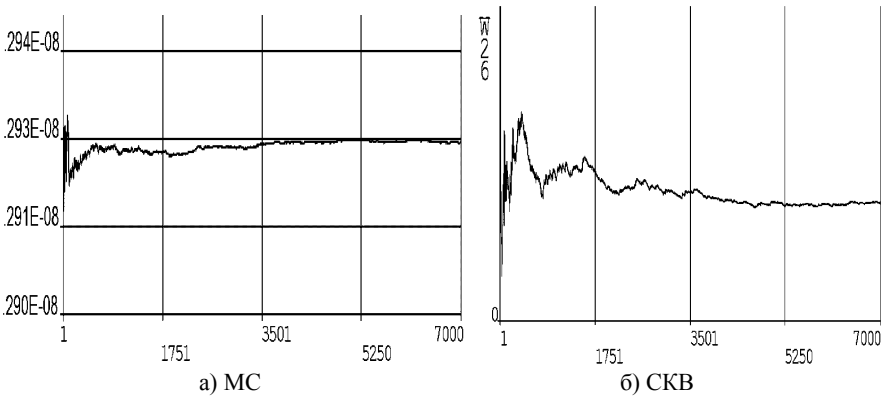


Рисунок 3 – Графік збігання схеми МК

На рис. 4, а представлено МС (товста лінія) та верхня границя можливого розкиду реалізацій АЧХ, що визначено за правилом «3 сігм». Особливої уваги потребує наявність того факту, що МС АЧХ не співпадає з АЧХ ЦС системи (див. рис. 2, а та 4, а), яка є результатом обчислення АЧХ у разі нульових значень МС параметрів розладу, а отже широко застосовується у наближених підходах типу статистичної лінеаризації.

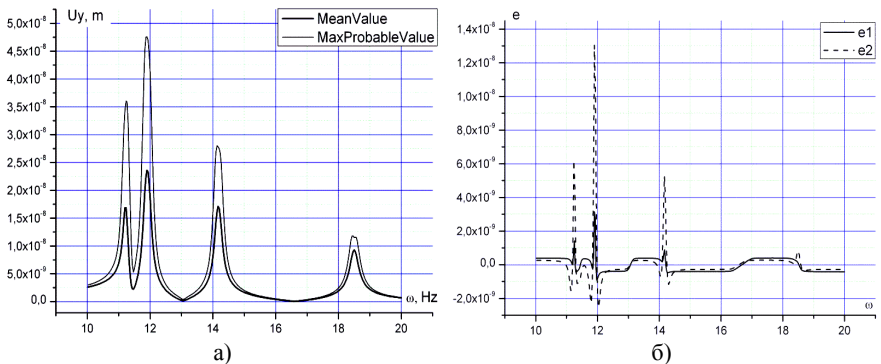


Рисунок 4 – МС АЧХ розраховані методом МК
(а) – МС АЧХ, б) – похибка визначення МС АЧХ методом МК

Наявність таких значних відхилень може бути пояснено якщо розглянемо обчислення МС рівняння вимушених випадкових коливань

$$([K(\alpha)] - \omega^2 \cdot [M(\alpha)] + i \cdot [D(\alpha)]) \cdot q = [Z(\omega, \alpha)]q = f, \quad (1)$$

де $[K]$, $[M]$ и $[D]$ – матриці жорсткості, мас та демпфування відповідно; $[Z(\omega)]$ – матриця динамічної жорсткості; ω – частота збурення; q – амплітудні значення переміщень; f – вектор амплітуд зовнішньої вимушеної сили, а $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]'$ – вектор випадкових параметрів розладу, штрихом позначено операцію транспонування.

Матриця $[Z(\omega, \alpha)]$ у рівнянні (1) може бути представлена в вигляді суперпозиції динамічної матриці жорсткості нерозлагодженої системи $[Z_0(\omega)]$ та матриці розладу $[\Delta Z(\alpha, \omega)]$:

$$([Z_0(\omega)] + [\Delta Z(\alpha, \omega)]) \cdot q = f. \quad (2)$$

Тоді безпосереднє обчислення МС рівняння (2)

$$M[(Z_0 + \Delta Z(\alpha))q] = M[Z_0 q] + M[\Delta Z(\alpha)q] = f. \quad (3)$$

Враховуючи, що матриця жорсткості ЦС системи є детермінованою, а матриця розладу у наслідок випадковості параметрів розладу є випадковою так само як і вектор амплітуд коливань, та, враховуючи правило обчислення МС від добутку 2 випадкових величин отримаємо

$$Z_0 M[q] + M[\Delta Z(\alpha)]M[q] + K_{\Delta Z, q} = f, \quad (4)$$

де $K_{\Delta Z, q}$ – кореляційний момент між розладом та вектором амплітуд коливань.

У більшості випадків математичне очікування розладу є нульовим

$$M[q] = Z_0^{-1} f - Z_0^{-1} K_{\Delta Z, q} = q_0 - Z_0^{-1} K_{\Delta Z, q}. \quad (5)$$

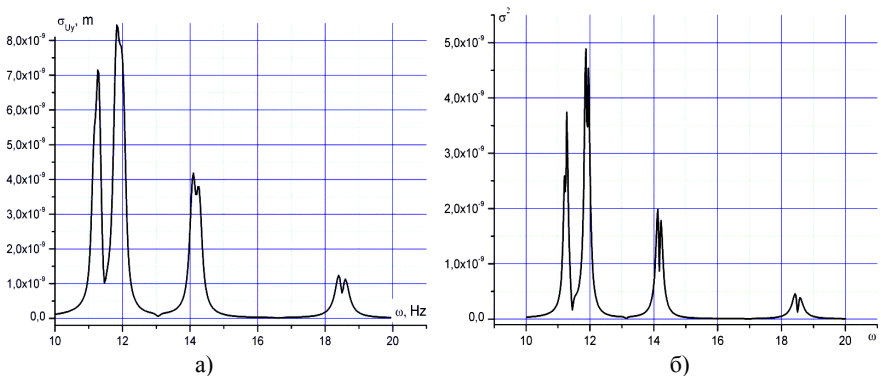


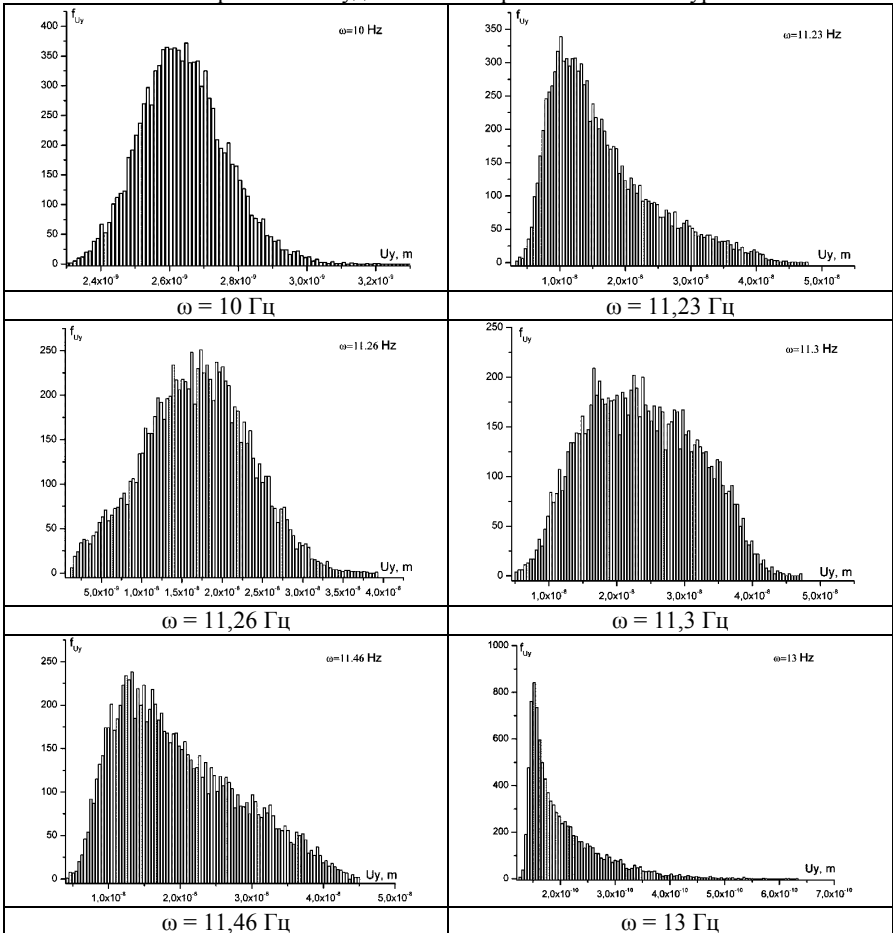
Рисунок 5 – СКВ АЧХ розраховані методом МК

Отже відмінність ЦС розвитку та МС системи з центрованим розладом пояснюється наявністю великої кореляції між параметрами розладу та вектором амплітуд переміщень. Зрозуміло, що ця кореляція тим менша чим менше СКВ параметрів розладу. Відповідне порівняння наведено на рисунку 46, де

пунктирною та суцільною лінією позначено абсолютну похибку МС АЧХ розраховані методом МК для розладу СКВ якого має таке значення, що забезпечую змінення першої власної частоти парціального сектору у межах 5 та 2 відсотків відповідно. З наведених результатів видно, що похибка визначення МС АЧХ для розладу СКВ якого забезпечую змінення першої власної частоти парціального сектору у межах до 2 відсотків, не перевищує 10% на резонансних режимах.

На рис. 5 представлено СКВ АЧХ розраховані для розладу СКВ якого має таке значення, що забезпечую змінення першої власної частоти парціального сектору у межах 5 та 2 відсотків відповідно рис. 5, а та 5, б. З наведених результатів видно, що СКВ АЧХ має більшу кількість резонансів ніж МС, що відповідає прояву явища розшарування частот ЦС системи внаслідок розладу.

Гістограми амплітуд коливань на різних частотах збурення



В таблиці наведено гістограми амплітуд коливань у згінному напрямку для різних фіксованих значень частоти. Наведені гістограми вказують на те, що щільність ймовірності амплітуд коливань змінюється не тільки кількісно, але й якісно.

Висновки: В даній роботі проведено дослідження випадкових вимушених коливань, проаналізовані деякі особливості поведіння такої системи. Треба зазначити, що існування суттєвої кореляції між параметрами розладу та АЧХ значно зменшує можливість застосування статистичної лінеаризації визначення математичного очікування в рамках наближеного підходу має велику похибку на резонансних піках АЧХ, яка зменшується до інженерно допустимих значень лише при досить малих значеннях СКВ параметрів розладу (СКВ розладу має таке значення, що забезпечують змінення першої власної частоти парціального сектору у межах 2 відсотків). Отримані гістограми вказують на суттєву залежність закону щільності ймовірності амплітуд коливань від частоти збурення. Наявність цього явища не може бути враховано у лінеаризованій постановці оскільки лінійне представлення апіорі зберігає закон розподілу щільності ймовірності. Крім того отримані гістограми вказують на те, що параметричний імовірнісний аналіз у класичному вигляді оцінки МС та СКВ не є достатнім, бо для даної системи на деяких частотах збурення мода не співпадає з МС, а отже потребує окремого аналізу, як характеристика, що вказує на найбільш ймовірну реалізацію АЧХ.

Разом із тим треба зазначити, що для отримання добрих значень збігання МС та СКВ відклику системи потрібно велика кількість ітерацій методу МК, яка значно зростає зі збільшенням кількості випадкових параметрів у системі. Так для 20 випадкових параметрів добре збігання по МС на резонансних піках спостерігалось лише при кількості ітерацій у 10000, при цьому час розрахунку скінчено-елементної моделі відносно малої розмірності (2160 ступенів волі) на персональному комп'ютері (процесор 2x2 ГГц, оперативна пам'ять 2 ГБ) з використання паралельної схеми розрахунку складав понад 6 годин. Таким чином можливості використання прямого моделювання МК для реальних ЦС конструкцій з випадковим розладом суттєво обмежені.

Список літератури: 1. *Іванов В. П.* Колебания рабочих колес турбомашин. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с. 2. *Лукин Б.С.* Об исследовании колебаний циклически симметричных конструкций методом конечных элементов // Динамика и прочность машин. – Харків: ХПІ, 1979. – Вип. 31. – С. 12-21. 3. *Зиньковский А.П., Бусленко И.Н., Матвеев В.В.* Локализация колебаний бандажированного лопаточного венца рабочего колеса турбомашин // Проблемы прочности. – Киев: Институт проблем прочности АН Украины, 1994. – № 7. – С. 53-62. 4. *C.Pierre, O.Mehmed, J.Judge* Experimental investigation of mode localization and forced response amplitude magnification for a mistuned bladed disk // Transactions of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 940-950. 5. *J.H.Griffin, J.A.Kenyon* Experimental demonstration of maximum mistuned bladed disk forced response // Transactions of the ASME. J. of Turbomachinery. – 2003. – Vol. 125. – P. 673-681. 6. *Жовдак В.О., Ларін О.О., Головка О.М.* Вимушені коливання циклосиметричного лопаткового апарату з випадковим технологічним розладом // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, НТУ «ХПІ». – 2007. – № 38. – С. 58-68. 7. *E.P.Petrov, D.J.Ewins* Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk assemblies // Transactions of the ASME. J. of Turbomachinery. – 2003. – Vol.

125. – P. 623-631. **8.** *Соболь И.М.* Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1972. – 64 с. **9.** *J.H.Griffin, D.M.Feiner* Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model - Part I: theory // Transactions of the ASME. J. of Turbomachinery. – 2004. – Vol. 126. – P. 150-158. **10.** *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – Part I: theoretical models // Transactions of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 89-99. **11.** *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – Part II: application // Transactions of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 100-108. **12.** *Petrov E.P., Sanliturk K.Y., Ewins D.J.* A new method for dynamic analysis of mistuned blade disk based on the extract relationships between tuned and mistuned systems // Transaction of the ASME. – Vol. 124. – 2002. – P. 586-597. **13.** *J. Ewins, E. P Petrov, K. Y. Sanliturk, R. Elliott.* Quantitative Prediction of the Effects of Mistuning Arrangement on Resonant Response of a Practical Turbine Bladed Disc // Proceedings of the 5th National Turbine Engine High Cycle Fatigue (HCF) Conference, Chandler, AZ. – 2000. **14.** *A.Sinha* Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos // Transactions of the ASME. J. of Vibration and Acoustics. – 2006. – Vol. 128. – P. 449-457. **15.** *E.P.Petrov* A sensitivity-based method for direct stochastic analysis of nonlinear forced response for bladed disks with friction interfaces // Proceedings of GT2007 ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air, Montreal, Canada. – 2007. – P. 24-35. **16.** *Евланов Л.Г., Константинов В.М.* Системы со случайными параметрами. – М.: Наука, 1976. – 568 с. **17.** *Жовдак В.А., Смирнова Л.М., Солошенко В.А.* Задача статистической динамики для циклически симметричных систем со случайной расстройкой // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сборник научных трудов ХГПУ. – Харьков: ХГПУ, 1999. – № 7, ч. 1. – С. 280-283.

Надійшла до редколегії 28.11.2008.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| А.А.ЛАРИН, Ю.Л.ТАРСИС История развития методов динамических расчетов коленчатых валов | 3 |
| Л.В.АВТОНОМОВА, С.Ю.ПОГОРЕЛОВ, И.Д.ПРЕВО, В.Л.ХАВИН Динамическая модель процессов фрезерования | 13 |
| О.В.БИРЮКОВ, С.Ю.САЕНКО, В.В.КОЛОСЕНКО, Е.И.КОРНИЛОВ, О.Ф.КОВПИК, О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, Д.В.ЛАВИНСКИЙ Расчеты на прочность и жесткость трубчатой стенки из углерод-углеродного композитного материала для вакуумной камеры | 19 |
| О.В.БИРЮКОВ, С.Ю.САЕНКО, В.В.КОЛОСЕНКО, Е.И.КОРНИЛОВ, О.Ф.КОВПИК, О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, Ю.В.РОМАШОВ Прочность и жесткость плоской стенки из углерод-углеродного композитного материала для вывода потока заряженных частиц из вакуумной камеры | 25 |
| Д.В.БРЕСЛАВСКИЙ, Ю.Н.КОРЫТКО, О.К.МОРАЧКОВСКИЙ Ползучесть металлов при циклически изменяющейся температуре | 31 |
| Д.В.ВАСЮКОВ Напряженно-деформированное состояние элементов оснастки для магнитно-импульсной штамповки | 37 |
| А.В.ВОРОПАЙ Нестационарные колебания пластины с присоединенной сосредоточенной массой | 42 |
| Ю.Н.ГАЛАГАН, Г.И.ЛЬВОВ, К.В.НАУМЕНКО Ползучесть и повреждаемость конструкций при неизотермическом нагружении | 48 |
| В.М.ГРИЩЕНКО Модифікація функціоналу Лагранжа в задачах оптимізації конструкції з обмеженнями | 56 |
| С.ДАРЯЗАДЕ Исследование термоупругого состояния тормозного диска автомобиля | 65 |
| В.А.ЖОВДАК, А.С.СТЕПЧЕНКО, А.В.ТОРЯНИК, С.В.КРАСНИКОВ Исследование явления расстройки в многокорпусных турбоагрегатах на основе компьютерной модели | 70 |
| О.І.ЗІНЧЕНКО Динамічне дослідження механізму просівання формувальної землі | 79 |
| А.Г.КУРИЛОВ, Г.И.ЛЬВОВ Гидродинамический расчет подшипника скольжения для погружных электродвигателей | 87 |
| В.И.ЛАВИНСКИЙ, А.А.ГРИГОРЬЕВ Связанные колебания винтового цилиндрического стержня | 92 |

| | |
|---|-----|
| Е.И.ЛЮБИЦКАЯ Изгиб пологих ортотропных оболочек на упругом основании при геометрическом и линейном деформировании | 104 |
| Г.Ю.МАРТЫНЕНКО Магнитные подшипники как упруго-демпферные опоры роторов с управляемой жесткостью | 111 |
| С.А.НАЗАРЕНКО Математические модели мультифизического анализа конструкций для CALS технологий | 125 |
| А.М.НИКИТИН Возможность тензорного представления результатов измерения ЛДИС | 132 |
| Н.И.ОБОДАН, Н.Б.МАКАРЕНКО Идентификационный подход в граничных обратных задачах теории оболочек | 140 |
| С.В.ОЛЬШАНСКИЙ О скорости и дальности полета искры, как частицы переменной массы | 146 |
| А.А.ОСЕТРОВ Применение RFM и сплайн-аппроксимации к исследованию задач изгиба многослойных пологих оболочек | 151 |
| Э.С.ОСТЕРНИК Исследование динамических процессов в электроприводе многоклетьевого стана горячей прокатки | 158 |
| А.А.ТЕСЛЕНКО Плоская задача фотоупругости как объемная | 171 |
| Ю.С.ШУВАЛОВА Моделирование динамики тонких упругих пластин методами граничных интегральных уравнений | 173 |
| Е.Г.ЯНЮТИН, В.Т.ГРИШАКИН Идентификация подвижной нагрузки для вязко-упругих балок | 178 |
| Е.Г.ЯНЮТИН, Г.А.ГНАТЕНКО Определение импульсного нагружения балки | 184 |
| О.О.ЛАРИН Дослідження вимушених коливань тривимірних цикло-симетричних конструкцій з випадковим розладом методом Монте-Карло | 190 |

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»

Збірник наукових праць № 47

Науковий редактор докт.техн.наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор Щепкін О.В.

Відповідальний за випуск В.М.Луньова

Обл.вид. № 144-08

Підп. до друку 21.12.2008 р. Формат 60x84 1/16. Надруковано на цифровому видавничому комплексі Rank Xerox DocuTech 135. Умов.друк.арк. 9,4. Облік. вид. арк. 10,0. Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 211. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня ТОВ «Сучасний друк», Харків, вул. Лермонтовська, 27
