

**ВЕСТНИК  
НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА “ХПИ”**

---

**Сборник научных трудов  
Тематический выпуск  
“МАШИНОВЕДЕНИЕ И САПР”**

**42'2008**

---

Издание основано Национальным техническим университетом  
“Харьковский Политехнический Институт” в 2001 году

**КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ: Председатель**  
Л.Л.Товажнянский, д-р техн. наук, проф.

**Секретарь координационного совета**  
К.А.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;  
Е.И.Сокол, д-р техн. наук, проф.;  
Е.Е. Александров, д-р техн. наук, проф.;  
Т.С.Воропай, д-р фил. наук, проф.;  
М.Д.Годлевский, д-р техн. наук, проф.;  
А.И.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;  
В.Д.Дмитриенко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;  
П.А.Качанов, д-р техн. наук, проф.;  
В.А.Лозовой, д-р фил. наук, проф.;  
О.К.Морачковский, д-р техн. наук, проф.;  
П.Г.Перерва, д-р экон. наук, проф.;  
Н.И.Погорелов, канд. экон. наук, проф.;  
М.И.Рыщенко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;  
В.П.Себко, д-р техн. наук, проф.;  
В.И.Таран, д-р техн. наук, проф.;  
Ю.В.Тимофеев, д-р техн. наук, проф.;  
Н.А. Ткачук, д-р техн. наук, проф.;

Государственное издание Свидетельств  
Госкомитета по информационной поли  
Украины  
КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

---

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**Ответственный редактор:**  
Н.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.

**Ответственный секретарь:**  
А.В.Ткачук, канд. техн. наук, ст.н.с.

Е.Е. Александров, д-р техн. наук, проф.;  
В.С. Гапонов, д-р техн. наук, проф.;  
Г.Н. Жолткевич, д-р техн. наук, проф.;  
А.А. Зарубина, канд. техн. наук, проф.;  
В.Б. Зеленский, канд. техн. наук, доц.;  
Г.И. Львов, д-р техн. наук, проф.;  
А.Д. Чепурной, д-р техн. наук, проф.

---

Адрес редколлегии: 61002, Харьков, ул  
21. НТУ “ХПИ”.

Каф. ТММиСАПР,  
тел. (0572) 7076-902.

**Харьков 2008**

Вісник Національного технічного університету “Харківський політехнічний інститут”. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Машинознавство та САПР. – Харків: НТУ “ХПІ”. – 2008. – № 42. – 156 с.

У збірнику представлені результати досліджень кінематики, динаміки, напружено-деформованого стану елементів сучасних машин, а також методи, моделі та системи їх автоматизованого проектування.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены результаты исследований кинематики, динамики, напряженно-деформированного состояния элементов современных машин, а также методы, модели и системы их автоматизированного проектирования.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

**Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ “ХПІ”.  
Протокол № 12 від 28 листопада 2008 р.**

*О. В. ВЕРЕТЕЛЬНИК*, асп. каф. ТММиСАПР НТУ “ХПИ”

## **ОБЗОР КОНСТРУКТИВНЫХ СХЕМ И РЕШЕНИЙ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ШЕЙНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА И ОРТЕЗОВ**

У роботі пропонується огляд літератури, що описує процес ортезування, та різні конструкції ортезів; моделювання шийного відділу хребта та ортезу з використанням програм САД, а також побудування скінчено-елементних моделей.

In the paper the review of literature is offered describing the process of orthesing and different constructions of ortheses; modeling of cervical spine and ortheses by using the of CAD-programs, and also construction of finite-element models.

**Актуальность проблемы** позвоночно-спинномозговых повреждений обусловлена большой их распространенностью, инвалидизацией и высокой смертностью пострадавших. С увеличением скорости и мощности средств передвижения частота травмы спинного мозга возрастает. В Соединенных Штатах Америки ежегодно регистрируется 8 - 10 тыс. случаев этого вида травмы [1], в Украине – около 2 тыс. случаев позвоночно-спинномозговых травм в год. Проблема лечения осложненных повреждений шейного отдела позвоночника, которые относятся к категории наиболее тяжелых и сопровождаются достаточно высокой летальностью и утратой больными трудоспособности, является в настоящее время чрезвычайно актуальной, и рассматривать ее необходимо как в медицинском, так и в социальном аспекте. Согласно современным статистическим данным, в Украине среди всех травм опорно-двигательного аппарата переломы и переломао-вывихи позвонков встречаются приблизительно в 10% случаев. Травмы шейного отдела позвоночника составляют, по данным различных авторов, 20-50% по отношению к общему количеству всех его повреждений, нижнешейный отдел травмируется в около 80% всех случаев травмирования шейного отдела. Наблюдения показывают, что повреждения в шейном отделе позвоночника чаще всего возникают на уровне С3-С6 позвонков [2].

Механизм травмы нижнешейного отдела позвоночника С3-С7 обусловлен непрямым приложением травмирующих сил. В основном это сила движущейся вперед головы. В настоящее время большинство таких травм происходят у ныряльщиков, когда приложение травмирующих сил приводит к взрывным переломам вследствие внезапной аксиальной нагрузки в состоянии флексии или же вследствие дорожно-транспортных происшествий, они вызываются внезапной остановкой тела при продолжающемся движении головы вперед.

В медицинской рекомендации по позвоночно-спинномозговым повреждениям [3] сообщается о том, что патологические движения позвонков могут создавать или обострять шейные боли [20-22, 33, 34, 43]. Для предотвращения этого используют так называемые иммобилизирующие средства [4, 16, 18, 19, 22, 33-36, 45, 49]. Изначально для иммобилизации использовался мягкий воротник и свернутое одеяло [12]. Позже использовался более жесткий воротник Hare [16]. В настоящее время шейная иммобилизация – одна из большинства часто выполняемых процедур при предварительном лечении острых травм пациентов в Северной Америке [4, 5, 13, 16, 20, 22, 33, 34, 36, 46, 49].

В 1989 Garfin [22] писал, что стабилизация шейного отдела позвоночника – это ключевой фактор в снижении поврежденности позвоночника и нервного столба. Предварительная стабилизация позвоночника эффективна для ограничения движения позвоночных сегментов при транспортировке пациента [5, 16, 22, 33, 34, 49].

Методы изучения эффективности стабилизирующих устройств изменяются. Сравнительные исследования были проведены на здоровом человеке, что в свою очередь вызвало затруднение к применению нормативных данных к больным с позвоночными повреждениями [8, 11, 14, 16, 17, 24-27, 31, 32, 37, 42, 46, 47].

Несколько методов было использовано, чтобы проанализировать поведение шейных позвонков. Эти методы базировались на клинической оценке, рентгенографии, компьютерной томографии и т.д. Roostmon и соавторы [39]

суммировали проблемы, возникающие при использовании того или иного метода исследования.

В начале использовались стабилизирующие средства, состоящие из мягкого воротника, который поддерживает голову, и ремней различных длин, которые создают фиксацию головы относительно туловища [16]. Garth [23] предложил ряд стандартов для шейных воротников, но со временем возникло их многообразие. С появлением различных стабилизационных воротников проводились сравнительные исследования отдельных воротников и их комбинаций с другими устройствами [8, 9, 11, 14, 42, 47].

В 1985 году Cline [12] провел исследование стабилизирующих средств, в результате чего были сделаны выводы о возможности использования воротника без дополнительных устройств. McCabe с коллегами [31] сравнил ряд воротников для продольного и бокового изгибов, они нашли, что наилучшую фиксацию обеспечивают полиэтиленовые воротники. Rosen [41] в 1992 году сделал выводы из исследования воротников, что наиболее эффективным является “вакуумный” воротник.

Perry и др. [37] оценили несколько шейных стабилизирующих устройств при моделировании транспортировки. Они нашли, что существенное влияние оказывает транспортировка, а не вид стабилизации. Mazolewski и др. [30] в своих исследованиях пришли к выводам, что дополнительная фиксация торса пациента уменьшает боковые движения позвоночных сегментов.

Несмотря на очевидную пользу, шейная стабилизация имеет несколько потенциальных недостатков. Имобилизация может быть некомфортна, занимает время, а также болезненна [6, 8, 10, 15, 40, 44, 48].

Chan и др. [10] изучали эффекты влияния шейной стабилизации на боль и дискомфорт. Johnson и Hauswald [25], Hamilton [24] сравнивали различные типы воротников и дополнительных устройств по стабилизации торса пациентов.

Linares [28], Mawson и соавт. [29], Rodgers и соавт. [38], Blaylock [7] занимались исследованиями по возникновению повреждений (загнивания, высыхания и т.д.) кожи в результате применения шейных стабилизирующих средств.

Bauer и др. [6], Totten и соавт. [44] рассматривали возможные ограничения дыхательных функций при использовании иммобилизирующих средств.

Шейная стабилизация может сократить неблагоприятное движение шейных позвонков и может сократить неврологические ухудшения у пациентов, а также способствует возникновению новых травм у больных с нестабильными сегментами позвоночника.

Важное место в послеоперационном поведении больных с повреждениями шейного отдела позвоночника после реконструктивно-восстановительных операций занимает ортезирование, позволяя придать мобильность пострадавшему, что предупреждает развитие сердечно-сосудистых, трофических и других осложнений, особенно у лиц пожилого возраста. Все это способствует ранней реабилитации и сокращению сроков пребывания пациентов в стационаре [50, 51].

Ортезы (греч. *orthos* – прямой, правильный) – это функциональные приспособления, имеющие структурные и функциональные характеристики опорно-двигательного аппарата. К ним относятся различные лечебно-профилактические шины, воротники, туторы, корсеты, бандажи, пояса, реклинаторы и т.д., предназначенные для обеспечения временной надежной иммобилизации отдельных сегментов опорно-двигательного аппарата, а также для компенсации функционально неполноценных конечностей и частей тела.

О положительных лечебных свойствах ортопедических аппаратов, восстанавливающих функцию поврежденной конечности, писали еще в начале XX века Н. Шмаревич и В. Блохин (1928), Н. Приоров (1930) и другие ортопеды, имеющие отношение к протезному делу. Н. Шенк (1975) доказывает целесообразность применения ортопедических аппаратов в лечебных целях, в то время как зарубежные специалисты большое значение при лечении этих категорий пациентов уделяют ортезированию. Так, D. Clement и др. в 1981 г. опубликовали результаты лечения различных по характеру сложности и локализации травм у спортсменов. Авторы пришли к мнению, что лишь применение ортопедических аппаратов позволило в 75% наблюдений в короткие сроки восстановить обычный уровень двигательной активности [53].

В настоящее время в мире существует большая разновидность ортезов, например, такие как шины-воротники Шанца, туторы, галоаппараты, бандажи и т.д.

Шина-воротник Шанца представляет собой ортопедический бандаж, обеспечивающий нейтральную фиксацию шейного отдела позвоночника и мягкую фиксацию головы. Тutory представляют собой техническое устройство, состоящее из гильзы и креплений, предназначенное для стабилизации какого-либо сегмента или всей конечности. Галоаппарат в последние годы широко применяется в хирургии шейного отдела позвоночника. Данное устройство зарекомендовало себя как высокоэффективное средство не только для жесткой фиксации шейного отдела позвоночника, но и позволяющее манипулировать на шейном отделе, устранять деформации и дислокации шейных позвонков, при этом больной может вставать, ходить и полностью себя обслуживать. Впервые галоаппарат был применен в 1956 г. при паралитической нестабильности шейного отдела позвоночника в качестве наружного ортеза после операции тотального шейного спондилодеза [54, 55]. Ранее также внешнюю фиксацию осуществляли с помощью тораокраниальных и торакоцервикальных гипсовых повязок, громоздких, создающих множество сложностей, средств иммобилизации. В последнее время используются, в основном, синтетические ортезы воротничкового типа различных модификаций из полимерных материалов, разработанные в Харьковском НИИ ортопедии и травматологии им. проф. М. И. Ситенко. Для обеспечения иммобилизации шейного отдела позвоночника было предложено более 10 вариантов фиксирующих воротников и голово-держателей. Их конструкция зависит от характера патологии, уровня поражения, этапа лечения и т.п. Такие ортезы изготавливаются индивидуально, отличаются легкостью, гигиеничностью, удобством при изготовлении и подгонке. В ряде случаев используются более сложные ортезы, их конструкция состоит из готовых стандартных деталей, которые собираются и подгоняются больному в зависимости от его индивидуальных анатомических особенностей [56].

На данный момент в публикациях практически не встречаются исследования по применению различных ортезов в послеоперационных фиксациях шейного отдела позвоночника, однако такое исследование было проведено в Харьковском государственном медицинском университете. На основании клинкорентгенологического анализа результатов ортезирования при травмах шейного отдела позвоночника после реконструктивно-восстановительных операций можно сделать выводы: наиболее эффективным ортезом для фиксации поврежденных шейных позвоночных сегментов после оперативного вмешательства является полимерный воротник [57].

В настоящее время ортезирование используется не только в лечебных целях, но и в профилактических. С возрастом позвоночник теряет свою форму, мышечные и костные ткани сжимаются и усыхают, при этом затрудняется распространение внутренней жидкости, в результате чего позвоночные сегменты теряют функциональные возможности, что может привести к различным травмам. Зарубежные компании предлагают ряд средств, например таких как: Posture Pump [58], Comfortrac [59], Pratos [60] и др., благодаря которым возможно придать позвоночнику естественную форму, тем самым разгрузить связки и мышцы, улучшить распространение внутренней жидкости, что способствует продлению жизненной функциональности, но зарубежные аналоги ортопедических средств обладают сложной конструкцией и имеют высокую стоимость. Также на рынке присутствуют ортезы более простой конструкции, например, компания Philadelphia Cervical Collar предоставляет ортезы для взрослых и для детей, головодержатели, ортопедические шины и т.д. [61].

В литературе очень хорошо описаны положительные и отрицательные стороны ортезирования, встречаются сравнительные исследования различных ортезов по конструкции, но практически нет исследований по оптимизации формы, массы, а также упрощения конструкции самого ортеза, что в свою очередь может снизить себестоимость ортеза.

**Список литературы:** 1. Villanueva P., Patchen S.J., Green B.A. Spinal cord injury: An ICU challenge for the 1990's. In Sivak E., Higgins T., Seiver A. eds.: The High Risk Patient: Management of the Critically III. Philadelphia, Lea & Febiger, 1994. – P. 146-159. 2. Абдулхабилов М. А., Аренберг А. А., Павловская Е. М. К вопросу о вывихах шейных позвонков // Актуальные вопросы травматологии и ортопедии. – 1977. – Вып. 15. – С. 61-64. 3. Mark N. Hadley, Beverly C. Walters, Paul A. Grabb, Nelson M. Oyesiku, Gregory J. Przybylski, Daniel K. Resnick, Timothy C. Ryken. Guidelines for the management of acute cervical spine and spinal cord injuries // Section on Disorders of the Spine and Peripheral Nerves of the American Association of Neurological Surgeons and the Congress of Neurological Surgeons. P.523-592. 4. Augustine J. Spinal Trauma. Basic Trauma Life Support: Advanced Pre-hospital Care. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall. 2nd edition: 120, 1998. 5. Augustine J. Spinal Trauma. Basic Trauma Life Support for Paramedics and Advanced EMS providers (ed 3). J. Campbell. Upper Saddle River, NJ, Brady: 153, 1998. 6. Bauer D, Kowalski R. Effect of

spinal immobilization devices on pulmonary function in the healthy, non-smoking man. *Ann Emerg Med* 17:915-918, 1988. **7.** *Blaylock B.* Solving the problem of pressure ulcers resulting from cervical collars. *Ostomy Wound Management* 42:26-33, 1996. **8.** *Carter VM, Fasen JA. et al.* The effect of a soft collar, used as normally recommended or reversed, on three planes of cervical range of motion. *J of Orthopaedic & Sports Physical Therapy* 23:209-215, 1996. **9.** *Chan D, Goldberg R, et al.* The effect of spinal immobilization on healthy volunteers. *Ann Emerg Med* 23:48-51, 1994. **10.** *Chan D, Goldberg R. et al.* Backboard versus mattress splint immobilization: a comparison of symptoms generated. *J Emergency Med* 14:293-298, 1996. **11.** *Chandler DR, Nemejc C. et al.* Emergency cervical-spine immobilization. *Ann Emerg Med* 21:1185-1188, 1992. **12.** *Cline JR, Scheidel E. et al.* A comparison of methods of cervical immobilization used in patient extrication and transport. *J Trauma* 25:649-653, 1985. **13.** *Committee on Injuries: Emergency Care and Transportation of the Sick and Injured.* 111-115, 1971. **14.** *Cooke M.* Spinal boards (letter, comment). *J Accident & Emerg Med* 13:433-1996. **15.** *Davies G, Deakin C. et al.* The effect of a rigid collar on intracranial pressure. *Injury* 27:647-649, 1996. **16.** *De Lorenzo RA.* A review of spinal immobilization techniques. *J Emergency Med* 14:603-613, 1996. **17.** *Dick T.* Comparing the short-board technique (letter). *Ann Emerg Med* 18:115-116, 1989. **18.** *Domeier RM., Evans RW. et al.* Pre-hospital clinical findings associated with spinal injury. *Pre-Hospital Emergency Care* 1:11-15, 1997. **19.** *Domeier RM, Evans RW et al.* The reliability of pre-hospital clinical evaluation for potential spinal injury is not affected by the mechanism of injury. *Pre-Hospital Emergency Care* 3:332-337, 1999. **20.** *Fenstermaker RA.* Acute neurologic management of the patient with spinal cord injury. *Urologic Clinics of North America* 20:413-421, 1993. **21.** *Forhna WJ.* Emergency department evaluation and treatment of the neck and cervical spine injuries. *Emergency Medicine Clinics of North America* 17:739-791, 1999. **22.** *Garfin SR., Shackford SR. et al.* Care of the multiply injured patient with cervical spine injury. *Clinical Orthopaedics & Related Research* 19-29, 1989. **23.** *Garth G.* Proposal for the establishment of minimum performance specifications for cervical extrication collars. *ASTM Skeletal Support Committee: 14th Annual Meeting*, 1988. **24.** *Hamilton RS, Pons PT. et al.* The efficacy and comfort of full-body vacuum splints for cervical-spine immobilization. *J Emergency Med* 14:553-559, 1996. **25.** *Johnson DR, Hauswald M. et al.* Comparison of a vacuum splint device to a rigid backboard for spinal immobilization. *Am J Emerg Med* 14:369-372, 1996. **26.** *Jones SL.* Spine trauma board. *Physical Therapy* 57:921-922, 1977. **27.** *Lerner E.B., Billittier AJT. et al.* The effects of neutral positioning with and without padding on spinal immobilization of healthy subjects. *Pre-Hospital Emergency Care* 2:112-116, 1998. **28.** *Linares HA., Mawson AR. et al.* Association between pressure sores and immobilization in the immediate post-injury period. *Orthopedics* 10:571-573, 1987. **29.** *Mawson AR, Biundo JJ, Jr., et al.* Risk factors for early occurring pressure ulcers following spinal cord injury. *Am J Phys Med & Rehabil* 67:123-127, 1988. **30.** *Mazolewski PMTH.* The effectiveness of strapping techniques in spinal immobilization. *Ann Emerg Med* 23:1290-1295, 1994. **31.** *McCabe JB, Nolan DJ.* Comparison of the effectiveness of different cervical immobilization collars. *Ann Emerg Med* 15:50-53, 1986. **32.** *McGuire RA, Degnan G. et al.* Evaluation of current extrication orthoses in immobilization of the unstable cervical spine. *Spine* 15:1064-1067, 1990. **33.** *McGuire RA Jr.* Protection of the unstable spine during transport and early hospitalization. *Journal of the Mississippi State Medical Association* 32:305-308, 1991. **34.** *Muhr MD., Seabrook DL. et al.* Paramedic use of a spinal injury clearance algorithm reduces spinal immobilization in the out-of-hospital setting. *Pre-Hospital Emergency Care* 3:1-6, 1999. **35.** *Nypaver M, Treloar D:* Neutral cervical spine positioning in children. *Ann Emerg Med* 23:208-211, 1994. **36.** *Orledge JD, Pepe PE:* Out-of-hospital spinal immobilization: Is it really necessary? *Academic Emerg Med* 5:203-204, 1998. **37.** *Plaiser B, Gabram S, Schwartz R, Jacobs L:* Prospective evaluation of craniofacial pressure in four different cervical orthoses. *J Trauma-Injury Infection & Critical Care* 37:714-720, 1994. **38.** *Roozmon P, Gracovetsky SA, et al:* Examining motion in the cervical spine. I: Imaging systems and measurement techniques. *J Biomed Eng* 15:5-12, 1993. **39.** *Rose L:* Thoracolumbar spinal instability during variations of the log-roll maneuver (comment). *Pre-Hospital Disaster Medicine* 7:138-1992. **40.** *San Mateo County, CA:* EMS System Policy Memorandum #F-3A. 1991. **41.** *Schriger DL, Larmon B, et al:* Spinal immobilization on a flat backboard: Does it result in neutral position of the cervical spine? *Ann Emerg Med* 20:878-881, 1991. **42.** *Suter R, Tighe T, et al:* Thoracolumbar spinal instability during variations of the log-roll maneuver. *Pre-Hospital Disaster Medicine* 7:133-138, 1992. **43.** *Toscano J:* Prevention of neurological deterioration before admission to a spinal cord injury unit. *Paraplegia* 26:143-150, 1988. **44.** *Trauma CO.* Advanced Trauma Life Support. Advanced Trauma Life Support. Chicago, IL, ACS: 214-218, 1993. **45.** *Trauma CO.* Spine and Spinal Cord Trauma. Advanced Trauma Life Support for Doctors. Student Course Manual. 6th ed. Chicago, IL, ACS: 215-242, 1997. **46.** *Tuite GF, Veres R, et al:* Use of an adjustable, transportable, radiolucent spinal immobilization device in the comprehensive management of cervical spine instability. Technical note. *J Neurosurg* 85:1177-1180, 1996. **47.** *Wagner FC, Jr., Johnson RM:* Cervical bracing after trauma. *Medical Instrumentation* 16:287-288, 1982. **48.** *Walsh M, Grant T, et al:* Lung function compromised by spinal immobilization (letter). *Ann Emerg Med* 19:615-616, 1990. **49.** *Worsing RA, Jr.:* Principles of pre-hospital care of musculoskeletal injuries. *Emergency Medicine Clinics of North America* 2:205-217, 1984. **50.** *Пульбере О.П.* Межтеловой керамоспондилорез шейного отдела позвоночника: Автореф. дисс....докт. мед.наук.– Кишинев, 1993. – 23с. **51.** *Юмашев Г.С., Проценко А.И., Капанадзе Ю.Е. и др.* //Оропед. травматол. –1989. – №7. – С.25-27. **52.** *Федеральный Центр лечебной физкультуры и спортивной медицины МЗ РФ.* **53.** *Паршиков М., Никитин С., Сергеева В.* //Конспект врача. Медицинская газета. – № 2-3 от 14.01.2005 г. **54.** *Perry, Nickel V.* // *J Bone Jt Surg.* – 1959. – Vol. 41-a. – P.37-59. **55.** *Ветрилэ С. Т., Колесов С.В.* Эффективность галотракции в хирургии шейного отдела позвоночника // *Вопросы нейрохирургии.* – №1. –2001. **56.** *Полищук Н. Е., Корж Н.А., Фищенко В.Я.* Повреждения позвоночника и спинного мозга. –Киев: КНИГА плюс, 2001. **57.** *Битчук Д.Д., Фадеев О.Г., Истомин А.Г.* Ортезирование шейного отдела позвоночника после реконструктивно-восстановительных операций // Харьковский государственный медицинский университет Украина. **58.** *Posture Pro Inc.,* 18584 Main Street, Huntington Beach, CA 92648 <http://www.posturepump.com>. **59.** *ComforTrac Inc.* 3930 Horseshoe Bend Road Keysville, VA 23947 USA, [www.comfortrac.net](http://www.comfortrac.net). **60.** *26 Bruckner Boulevard,* Bronx, NY 10454, Tel. 718-993-4014, 1-800-993-4010, Fax 718-993-4016, [info@pro-medusa.com](mailto:info@pro-medusa.com). **61.** *"НИКА-МЕД"* Москва, Бумажный пр-д., д. 14, стр. 2, <http://www.nikamed.ru>.

УДК 539.3

**В.И. ГОЛОВЧЕНКО**, нач. бюро технич. расчетов, канд. техн. наук,  
**Л.Е. ПОЛЕТУН**, гл. конструктор, **Н.Л. ИВАНИНА**, инж.,  
ОАО „Головной специализированный конструкторско-технологический институт”, г. Мариуполь

### **АНАЛИЗ НАГРУЖЕНИЯ КРЕПЕЖНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛИННОМЕРНОГО ГРУЗА ПРИ ЕГО ТРАНСПОРТИРОВКЕ НА ГРУНТОВОМ ТРАНСПОРТНОМ АГРЕГАТЕ**

Наведений аналіз навантаження елементів кріплення великогабаритного виробу від дії інерційних сил під час його транспортування на спеціальній автомобільній платформі. За результатами аналізу та на основі виведених формул призначені такі конструктивні параметри елементів кріплення, які зводять до мінімуму додаткове навантаження виробу.

An analysis of loads acting on elements for fastening of a bulky cargo to a special automobile platform during its transportation is given. On the base of results obtained and with the help of formulas derived, fastening elements structural parameters which minimize additional loading of the cargo are defined.

**Введение и описание конструкции.** Для транспортирования длинномерного крупногабаритного груза ответственного назначения в ОАО «ГСКТИ» был спроектирован специальный автомобильный полуприцеп - грунтовый транспортный агрегат (ГТА).

Транспортируемый груз представляет собой гладкую тонкую цилиндрическую оболочку кругового поперечного сечения. Для транспортировки он укладывается в горизонтальном положении на две опоры (ложементы), смонтированные на раме ГТА, и закрепляется на них от возможного сдвига и опрокидывания вследствие действия инерционных сил, возникающих при движении агрегата по автодорогам (рис. 1). С целью предохранения поверхности груза от повреждения и увеличения сцепления на опорных поверхностях ложементов смонтированы резиновые прокладки.

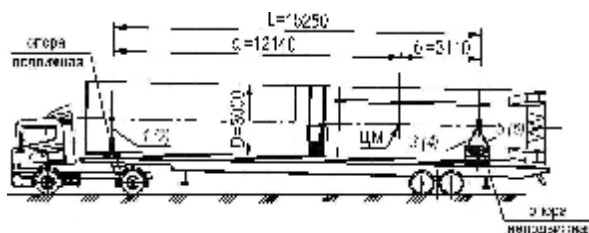


Рис. 1. Эскиз грунтового транспортного агрегата с грузом

Одна опора для груза (задняя) – неподвижная, другая (передняя) – подвижная, она имеет возможность линейного и углового перемещений вдоль и относительно продольной оси ГТА (рис. 2).

Крепление груза к опорам осуществляется винтовыми стяжками, один конец которых шарнирно закреплен на опоре, а другой – на серьге, надеваемой на специально вкручиваемый в обечайку груза рым-болт. Талрепы стяжек затягиваются съемными воротками. На передней опоре имеется одна пара стяжек (№1 и №2), на задней – две (№№3, 4 и 5, 6). На рис. 3 показано крепление груза к задней опоре, на рис. 4 – эскиз стяжки.

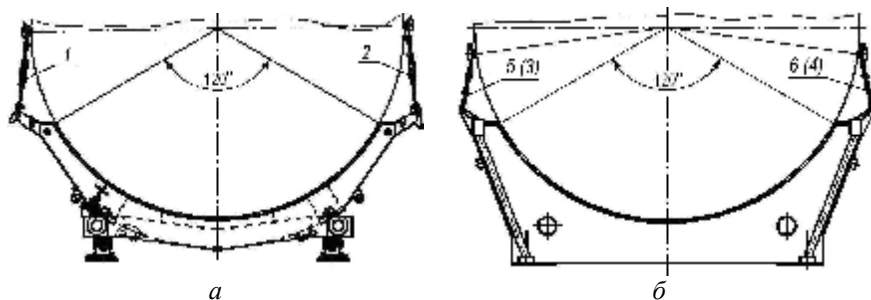


Рис. 2. Опоры для установки и крепления груза на ГТА: подвижная (а) и неподвижная (б) опоры (вид справа)

Стяжки передней опоры (подвижной) удерживают груз от опрокидывания (выкатывания из ложементов) при действии поперечной инерционной силы, а стяжки задней опоры удерживают груз как от выкатывания, так и от сдвига в продольном направлении под действием продольной инерционной силы.

Конструкция крепления относительно проста в изготовлении и в обслуживании, однако имеет существенный недостаток. Он заключается в том, что, в силу особенностей данного груза, для него весьма нежелательно воздействие местных вертикальных нагрузок. Нагрузки же от стяжек на рым-болты груза как раз и являются такими нагрузками. При транспортировании груза по дорогам к статическим нагрузкам от затяжки стяжек могут добавляться составляющие, вызываемые действием инерционных сил. Эти добавочные воздействия можно уменьшить, если применить жесткую конструкцию крепления груза к опорам. Однако

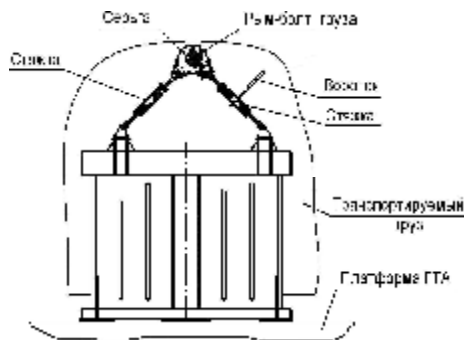


Рис. 3. Эскиз установки стяжек неподвижной опоры при транспортировке груза

поскольку жесткая конструкция крепления более сложна в изготовлении и имеет большие габариты и массу, было принято решение крепить груз стяжками. При этом проектантам была поставлена задача свести до минимально допустимого значения величину усилия предварительной затяжки стяжек и назначить такие параметры элементов крепления (длины, углы наклона, площади поперечных сечений, материал прокладок между грузом и ложементами, величины зазоров в подвижных соединениях элементов стяжек), при которых увеличение вертикальной нагрузки от стяжек на рым-болты при действии на груз продольной инерционной силы будет несущественным (не более 10% усилия предварительной затяжки стяжек). Соответственно, для обеспечения этого условия необходимо было определить допустимые величины инерционных сил, а также определить необходимость ограничения скорости транспортировки груза либо принятия иных специальных мер. Для выполнения расчетов были заданы следующие максимальные величины коэффициентов перегрузки: 1,0 - в продольном направлении (в направлении движения) и  $\pm 0,6$  - в поперечном и вертикальном направлениях.

Расчеты выполнялись на максимальные величины коэффициентов перегрузки, причем принималось, что инерционные силы максимальной величины действуют по своим направлениям не одновременно. Расчеты нагружения стяжек от действия поперечной и вертикальной инерционных сил сложности не представляли. Они показали, что в стяжках при заданных величинах коэффициентов перегрузки дополнительные усилия к усилию предварительной затяжки не возникают, так как

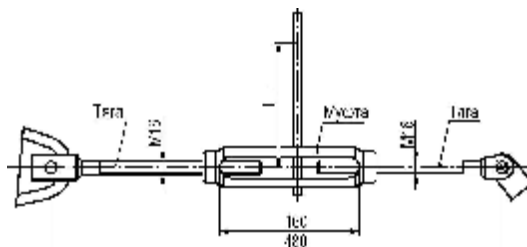


Рис. 4. Эскиз стяжки для крепления груза



величина поперечной инерционной силы недостаточна, чтобы груз мог выкатиться из ложементов, а вертикальная инерционная сила меньше силы веса груза. Поэтому в данной статье приводится анализ нагружения крепежных устройств только от действия продольной инерционной силы.

**1. Назначение величины предварительной затяжки стяжек.** Исходя из определенных проектантом груза величин допускаемых нагрузок на рым-болты, было принято предварительную затяжку стяжек осуществлять с помощью воротка усилием  $P = 150$  Н, приложенным на плече  $l = 200$  мм.

**2. Определение величины продольной силы, сдвигающей груз относительно неподвижной опоры.** Передняя опора, на которую опирается груз, – подвижная, поэтому на нее передается только часть продольной инерционной силы  $F_u$ , равная силе трения, возникающей при ее перемещении вдоль рамы ГТА  $F_n = F_{mp,n}$ . На стяжки передней опоры эта сила не передается, поскольку сила трения между грузом и прокладкой ложемента передней опоры (скольжение металла по резине) больше силы трения между опорой и рамой ГТА (скольжение металла по металлу), и груз относительно передней опоры не сдвигается.

На неподвижную опору, таким образом, приходится почти вся продольная инерционная сила от транспортируемого груза  $F_n = F_u - F_n$ . Эта сила сдвигает груз относительно неподвижной опоры. Если ее величина превышает сумму силы трения груза о ложемент неподвижной опоры и силы трения передней опоры о раму ГТА, происходит перемещение груза относительно ложемента. Рассмотрим, как при этом нагружаются стяжки.

**3. Определение деформаций стяжек при перемещении груза относительно неподвижной опоры.** Схематично картина перемещений точек крепления стяжек показана на рис. 5. Целесообразно данный рисунок рассматривать совместно с рис. 3.

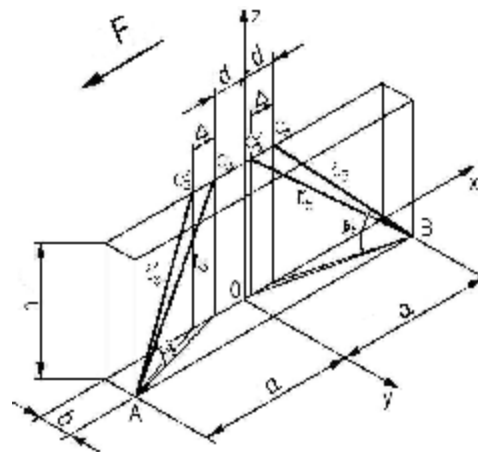


Рис. 5. Схема перемещения точек крепления стяжек к рым-болту груза от действия продольной инерционной силы

Здесь горизонтальная координатная плоскость  $XOY$  проходит через точки крепления стяжек к задней опоре (точки  $A$  и  $B$ ). Вертикальная плоскость  $YOZ$  проходит через продольную вертикальную плоскость симметрии рым-болта груза. Точки  $C_3$  и  $C_5$  – точки крепления стяжек к рым-болту. Плоскость  $XOZ$  – продольная плоскость, ось  $OX$  параллельна продольной оси ГТА и груза.

При перемещении груза на величину  $\Delta$  точки крепления стяжек к рым-болту  $C_3$  и  $C_5$  переместятся также на величину  $\Delta$  и займут положения  $C'_3$  и  $C'_5$ . Стяжка 5 при этом удлинится, а стяжка 3 укоротится.

Величины удлинения и укорочения стяжек равны соответственно разности длин отрезков:  $\Delta l_5 = BC'_5 - BC_5$ ,  $\Delta l_3 = AC_3 - AC'_3$ ,

$$\Delta l_5 = \sqrt{(a-d+\Delta)^2 + b^2 + h^2} - \sqrt{(a-d)^2 + b^2 + h^2}, \quad (1)$$

$$\Delta l_3 = \sqrt{(a-d)^2 + b^2 + h^2} - \sqrt{(a-d-\Delta)^2 + b^2 + h^2}. \quad (2)$$

Поскольку деформации стяжек упругие (так как напряжения в их поперечных сечениях не должны превышать предела пропорциональности материала), соответствующие им изменения усилий натяжения можно определить по закону Гука. Сумма проекций изменений усилий натяжения на вертикальную ось  $OZ$  дает изменение вертикальной нагрузки на рым-болт груза. Анализ формул (1) и (2) показывает, что удлинение стяжки 5 всегда больше укорочения стяжки 3. Следовательно, и изменение усилия в стяжке 5 будет больше, чем в стяжке 3. Поскольку знаки изменений усилий в стяжках 3 и 5 разные, сумма вертикальных

проекций приращений усилий остается величиной положительной. Вопрос о том, насколько велика эта сумма, проще всего решить графически. Причем, поскольку деформации стяжек упругие, а площади поперечных сечений элементов стяжек 3 и 5 одинаковы, достаточно сравнить графики изменения удлинений стяжек. На рис. 6 приведены графики абсолютных величин удлинений стяжек 3 и 5 в зависимости от перемещения груза  $\Delta$ , построенные по формулам (1) и (2) при  $a = 375$  мм,  $b = 80$  мм,  $d = 80$  мм,  $h = 370$  мм. Длины стяжек составляют 480 мм.

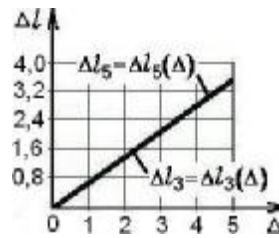


Рис. 6. Графики абсолютных величин удлинений стяжек 3 и 5 при перемещении груза относительно неподвижной опоры (мм).

Как видно из рисунка, графики удлинений стяжек слиты в одну линию даже при весьма значительных относительных деформациях ( $\epsilon = 1\%$ ). Это значит, что выполненная вертикальная нагрузка, создаваемая натяжением стяжки 5 вследствие перемещения груза относительно неподвижной опоры, практически полностью компенсируется соответствующим ослаблением стяжки 3 и на рым-болт не передается, т.е. суммарная вертикальная нагрузка на рым-болт от обеих этих стяжек не изменяется и остается равной той величине, которая была при предварительной затяжке стяжек. Такая картина будет иметь место до тех пор, пока стяжка 3 при дальнейшем перемещении груза не ослабнет полностью. Усилие в стяжке 3 станет равным нулю, а в стяжке 5 – равным удвоенной величине усилия предварительной затяжки. Контакты в подвижных соединениях элементов стяжки 3, созданные при ее затяжке, разомкнутся. При дальнейшем перемещении груза зазоры в подвижных соединениях стяжки 3 будут выбираться в противоположном направлении (как если бы на растянутую стяжку начала действовать сжимающая сила). И пока все зазоры не выберутся полностью, сдвигающую нагрузку от груза будет воспринимать только стяжка 5. После того, как зазоры сомкнутся, стяжка 3 опять вступит в работу, но уже будет испытывать сжатие. Поскольку стяжка представляет собой относительно тонкий стержень, допускать ее работу на сжатие весьма нежелательно. Поэтому конструкция крепления должна быть такой, при которой работа стяжек на сжатие была бы невозможной.

**4. Вывод формулы для определения усилий в стяжках при действии на груз продольной инерционной силы и ее анализ для принятия рациональных значений углов наклона стяжек.** Для вывода количественных соотношений между инерционной силой и усилиями в стяжках рассмотрим рис. 7, на котором схематично изображено твердое тело, находящееся на горизонтальной плоскости под воздействием внешней силы  $F$  и закрепленное от сдвига парой растяжек.

Вес тела –  $G$ , реакция растяжки –  $R$ , вертикальная реакция плоскости –  $N$ , коэффициент трения тела о плоскость –  $\mu$ , углы наклона растяжки –  $\alpha$  и  $\beta$ .

Уравнения равновесия тела в форме проекций сил на оси координат имеют вид:

$$\sum X = -F + mN + 2R \cos \alpha \cdot \cos \beta = 0; \quad \sum Z = -G + N - 2R \sin \alpha = 0.$$

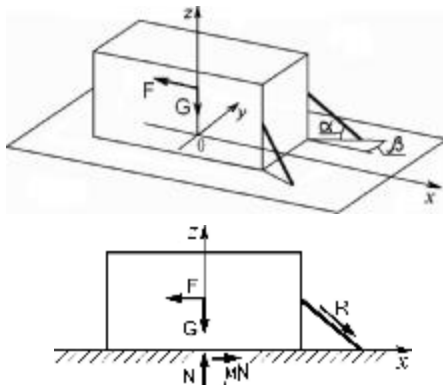


Рис. 7. К выводу формулы для определения усилия в стяжках от действия продольной силы

Выражая из второго уравнения  $N$  и подставляя его в первое уравнение, получаем реакцию плоскости в точке крепления растяжки:

$$R = \frac{F - mG}{2(m \sin \alpha + \cos \alpha \cos \beta)}. \quad (3)$$

Усилие в растяжке численно равно реакции.

Из полученной формулы следует, что: 1) благодаря силе трения сила, передающаяся на растяжку, уменьшается (числитель формулы), 2) вследствие возникающего натяжения растяжки сила прижатия груза к плоскости увеличивается, что дополнительно увеличивает силу трения (первое

слагаемое выражения в скобках в знаменателе). Как видно, возникновение силы дополнительного прижатия груза делает зависимость (3) нелинейной относительно величины коэффициента трения. На рис. 8 представлена эта зависимость при  $F = G = 10$  кН,  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\beta = 0, 15$  и  $30^\circ$ . Величины углов наклона растяжки приняты как наиболее часто встречающиеся в практике крепления грузов при транспортировке. Для оценки степени нелинейности зависимости здесь же приведены графики формулы (3), но без учета возникновения дополнительной силы трения (прямые линии). Из рисунка видно, что эффект прижатия груза к плоскости, учитываемый первым слагаемым в знаменателе формулы (3), весьма существенно снижает величину усилия в растяжке.

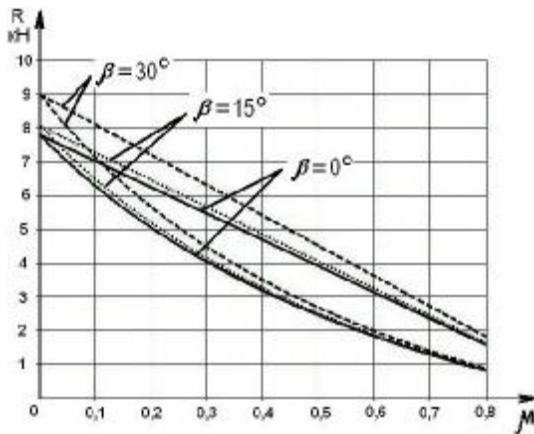


Рис. 8. Графики изменения усилия в растяжке в зависимости от величины коэффициента трения  $m$  и угла  $\beta$  при  $\alpha = 50^\circ$

угла  $\beta$  видна из рис. 8: минимальное значение усилия в растяжке имеет место при  $\beta = 0$ , в интервале  $0 < \beta < 15^\circ$  усилие увеличивается незначительно, при  $\beta > 15^\circ$  наблюдается существенное увеличение усилия. Дальнейший анализ формулы (3) будем проводить в предположении, что  $\beta = 15^\circ$ .

Из представленных на рис. 9 графиков, построенных для трех значений коэффициента трения  $\mu = 0,3, 0,4$  и  $0,5$  при  $\beta = 15^\circ$ , видно, что оптимальная величина угла  $\alpha$  составляет примерно  $30^\circ$ . Однако величины этого угла в интервале от нуля до  $50^\circ$  также можно считать приемлемыми.

На рис. 10 приведен трехмерный график зависимости усилия  $R$  от углов  $\alpha$  и  $\beta$  при коэффициенте трения  $\mu = 0,5$ . График показывает, что при значениях углов наклона растяжки  $\alpha = 0 \dots 50^\circ$  и  $\beta = 0 \dots 15^\circ$  усилие в ней превышает минимально возможное значения весьма незначительно. Такой характер график имеет и для других значений коэффициента трения в весьма широком интервале ( $\mu = 0 \dots 0,8$ ).

Выполненный анализ дает основание рекомендовать при проектировании неподвижной опоры ГТА так располагать ней узлы крепления стяжек, чтобы угол  $\alpha$  превышал  $50^\circ$ , а угол  $\beta$  не превышал  $15^\circ$ . касается назначения материала прокладки между ложементом и грузом, то рекомендации очевидны: материал должен быть мягким и обеспечить по возможности максимальную силу трения на поверхности контакта прокладки с грузом. Судя по графикам на рис. 9, увеличение коэффициента трения позволяет весьма существенно уменьшить усилия в стяжках.

Применительно к транспортируемому ГТА грузу при определении усилий в стяжках неподвижной опоры, возникающих при смещении груза под действием продольной инерционной силы с помощью формулы (3), необходимо иметь в виду следующее. Сила  $F$  представляет собой силу, сдвигающую груз относительно неподвижной опоры, т.е. силу  $F_u = P_u - F_{mp.n}$ . Сила трения подвижной опоры о раму транспортного агрегата

Поэтому для решения поставленной задачи уменьшения вертикальной нагрузки от стяжек на груз целесообразно использовать его в максимально возможной степени.

Для этого вначале выполняем анализ зависимости величины усилия в растяжке от величин углов наклона  $\alpha$  и  $\beta$  и коэффициента трения  $\mu$ . Степень влияния величины

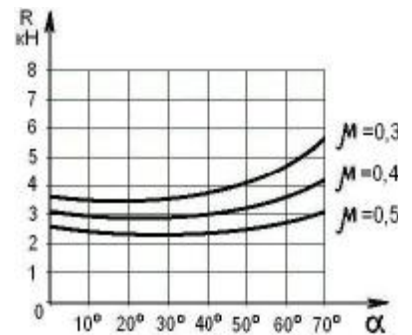


Рис. 9. Графики зависимости усилия в растяжке от величины угла  $\alpha$  и коэффициента трения  $\mu$  при  $\beta = 15^\circ$

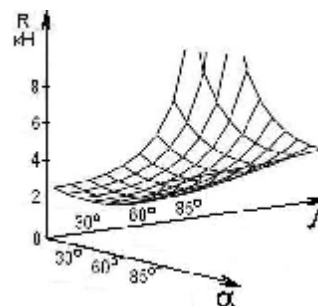


Рис. 10. График зависимости усилия  $R$  от углов  $\alpha$  и  $\beta$  при коэффициенте трения  $\mu = 0,5$

на не что

на

равна  $F_{mp.n} = m_n V_n$ , где  $m_n$  – коэффициент трения на поверхности контакта подвижной опоры и платформы, а  $V_n$  – вертикальная нагрузка на платформу агрегата от подвижной опоры. Нагрузка  $V_n$  включает в себя вес подвижной опоры  $G_{o.n.}$ , часть веса груза, приходящуюся на подвижную опору в статическом состоянии агрегата  $G_2 \cdot \frac{b}{L}$ , и динамическую добавку, вызванную действием продольной инерционной силы  $P_u \cdot \frac{D}{2L}$ . Таким образом,

$$F = P_u - m_n \left( G_{o.n.} + G_2 \cdot \frac{b}{L} + P_u \cdot \frac{D}{2L} \right). \quad (4)$$

Величина, обозначенная в формуле (3) как  $G$ , представляет собой силу веса тела, – силу, прижимающую тело к плоскости без учета дополнительного воздействия усилия в растяжке, возникающего при сдвиге груза. Для случая транспортируемого нами груза в качестве силы  $G$  в формуле (3) принимаем нагрузку на ложемент неподвижной опоры, равную суммарному воздействию силы веса груза  $G_2 \cdot \frac{a}{L}$ , динамической добавки (со знаком минус) от силы инерции груза  $P_u \cdot \frac{D}{2L}$  и суммы вертикальных составляющих сил предварительной затяжки стяжек неподвижной опоры  $P_{в.см} = 4P_{зам.см} \sin a$ , где  $P_{зам.см}$  – усилие предварительной затяжки одной стяжки:

$$G = G_2 \cdot \frac{a}{L} - P_u \cdot \frac{D}{2L} + 4P_{зам.см} \sin a. \quad (5)$$

Наконец, в качестве коэффициента трения  $\mu$  принимаем коэффициент трения груза о ложемент неподвижной опоры:  $m = m_n$ .

С учетом выполненных подстановок формула (3) приобретает следующий вид:

$$R = \frac{P_u - m_n \left( G_{o.n.} + G_2 \cdot \frac{b}{L} + P_u \cdot \frac{D}{2L} \right) - m_n \left( G_2 \cdot \frac{a}{L} - P_u \cdot \frac{D}{2L} + 4P_{зам.см} \sin a \right)}{2(m_n \sin a + \cos a \cos b)}. \quad (6)$$

Если далее выразить силу инерции через коэффициент перегрузки ( $P_u = kG_2$ ), формулу (6) можно представить в виде

$$R = \frac{kG_2 \left[ 1 + \frac{D}{2L} (m_n - m_n) \right] - G_2 \left( m_n \frac{a}{L} + m_n \frac{b}{L} \right) - m_n G_{o.n.} - 4m_n P_{зам.см} \sin a}{2(m_n \sin a + \cos a \cos b)}. \quad (7)$$

Формулой (7) можно пользоваться, если величина получаемого по ней усилия находится в интервале значений  $P_{зам.см} < R < 2P_{зам.см}$ . Смысл нижнего предельного значения состоит в том, что, поскольку стяжки имеют предварительную затяжку, дополнительное удлинение стяжек **5** и **6** при приложении внешней нагрузки возможно только тогда, когда величина этой нагрузки превышает усилие предварительной затяжки.

Величина верхнего предельного значения равна той величине усилия, при которой суммарная вертикальная нагрузка на опору от усилий в стяжках  $P_{в.см}$  еще равна сумме вертикальных проекций усилий предварительной затяжки всех стяжек, ибо формула (6) выведена именно для этого значения  $P_{в.см}$  (последнее слагаемое в числителе формулы (6)). В интервале усилий  $P_{зам.см} < R < 2P_{зам.см}$  это условие выполняется, так как величина  $P_{в.см}$ , как было отмечено выше, остается постоянной: после того, как под действием продольной инерционной силы стяжки **5** и **6** получат дополнительное удлинение, груз сместится в направлении действия силы, стяжки **3** и **4** при этом укоротятся и, соответственно, ослабнут. Однако, несмотря на перераспределение усилий в стяжках, до тех пор, пока стяжки **3** и **4** полностью не ослабнут и не выключатся из работы, сумма вертикальных проекций усилий в стяжках неподвижной опоры остается постоянной и равной

$P_{6.cm} = 4P_{зам.cm} \sin a$ . Это следует из анализа графика на рис. 5: к моменту выключения стяжек 3 и 4 из работы они укоротятся на величину удлинения, полученного от предварительной затяжки, а стяжки 5 и 6 получат дополнительное удлинение, равное удлинению от усилия предварительной затяжки. Следовательно, величины приращения усилий в стяжках в этот момент будут равны величине усилия предварительной затяжки:  $\Delta R = P_{зам.cm}$ . Таким образом, в момент выключения стяжек 3 и 4 из работы усилия в стяжках станут равными

$$R_3 = R_4 = P_{зам.cm} - \Delta R = 0; R_5 = R_6 = P_{зам.cm} + \Delta R = 2P_{зам.cm},$$

а сумма вертикальных проекций этих усилий будет равняться

$$P_{6.cm} = (R_5 + R_6) \sin a = 4P_{зам.cm} \sin a.$$

Следует заметить, что если при решении задачи обеспечения сохранности груза при транспортировании на ГТА параметры элементов крепления выбраны конструктором так, что величины усилий в стяжках, определенные по формуле (7), не будут превышать указанный верхний предел, можно считать, что поставленная задача решена наилучшим образом, так как вертикальная нагрузка на рым-болты груза от продольной инерционной силы действовать не будет.

**5. Анализ формулы для определения усилий в стяжках с целью выбора материала прокладки и выполнение числового расчета.** Формула (3), очевидно, имеет смысл только тогда, когда ее числитель больше нуля, т.е. когда сила  $F$ , достаточно велика, чтобы преодолеть силу трения тела о плоскость и вызвать его перемещение. Но чтобы вызвать перемещение рассматриваемого нами груза относительно неподвижной опоры, сила инерции должна преодолеть не только силы трения, но также и усилия предварительной затяжки стяжек. Произведем анализ условий, при которых усилия в стяжках 5 и 6 от силы инерции груза могут стать равными усилию предварительной затяжки, а также проанализируем влияние величин коэффициента перегрузки  $k$  и коэффициента трения груза относительно ложементов неподвижной опоры  $m_n$  на величину усилия  $R$ , определяемого по формуле (7).

В соответствии с полученными выше рекомендациями величины углов наклона стяжек принимаем равными  $a = 50^\circ$  и  $\beta = 15^\circ$ . Числовые величины параметров, характеризующих рассматриваемый груз и схему его крепления, имеют следующие значения:  $G_g = 70630$  Н,  $G_{o.n} = 3435$  Н,  $L = 15250$  мм,  $a = 12150$  мм,  $b = 3100$  мм,  $D = 3000$  мм,  $m_n = 0,2$ . Величина усилия предварительной затяжки стяжки определялась по заданной величине крутящего момента на воротке ( $M_g = Pl = 3 \cdot 10^4$  Н·мм) по формуле [1]

$$P_{зам.cm} = \frac{M_g}{d_2 \operatorname{tg}(1 + \rho')}, \quad (8)$$

где  $d_2$  – средний диаметр резьбы тяги стяжки ( $d_2 = 14,701$  мм);  $\lambda$  – угол подъема винтовой линии резьбы ( $\lambda = 0,0433$  рад);  $\rho'$  – приведенный угол трения в резьбе ( $\rho' = 0,2049$ ).

В этой формуле учтено, что момент на воротке, создаваемый для затяжки стяжки, преодолевает моменты сил трения в двух резьбовых соединениях муфты (см. рис. 4). Величина усилия предварительной затяжки стяжки, вычисленная по формуле (8), равна  $P_{зам.cm} = 8050$  Н.

График функции  $R(k, m_n)$ , построенный по формуле (7) при этих значениях входящих в нее параметров, представлен на рис. 11а.

Из него следует, что при увеличении коэффициента перегрузки  $k$  усилия  $R$  в стяжках 5 и 6 увеличиваются, а при увеличении коэффициента трения  $m_n$  – уменьшаются. Из графика также видно, что при определенных значениях  $k$  и  $m_n$  величина  $R$  не достигает величины  $P_{зам.cm}$ . При этих значениях  $k$  и  $m_n$  груз не смещается относительно неподвижной опоры, а стяжки 5 и 6 дополнительно не нагружаются. Для определения совокупности предельных значений  $k$  и  $m_n$ , при которых груз еще не перемещается и не создает дополнительного натяжения стяжек, необходимо решение уравнения  $R(k, m_n) = P_{зам.cm}$ . Поскольку аналитически решение такого уравнения найти сложно, оно было получено

графически как линия пересечения поверхности  $R(k, m_n)$  с плоскостью  $R = P_{зат.ст.}$ , показанная на рис. 11б. Из этого рисунка видно, что при заданной для выполнения анализа максимальной величине коэффициента перегрузки  $k = 1,0$  транспортируемый груз не будет сдвигаться относительно неподвижной опоры, если величина коэффициента трения  $m_n$  груза о ложемент опоры будет более  $m_n \approx 0,7$ . Поскольку подобрать материал для прокладки с таким высоким коэффициентом трения оказалось невозможным, стало очевидным, что добиться того, чтобы при данном способе крепления груза стяжки дополнительно не нагружались и, соответственно, не увеличивали бы нагрузки на рым-болты, не удастся. Однако чтобы максимально уменьшить величину приращения усилий в стяжках, было решено использовать для прокладки между грузом и ложементам материал с наибольшим коэффициентом трения среди имеющихся материалов – резину.

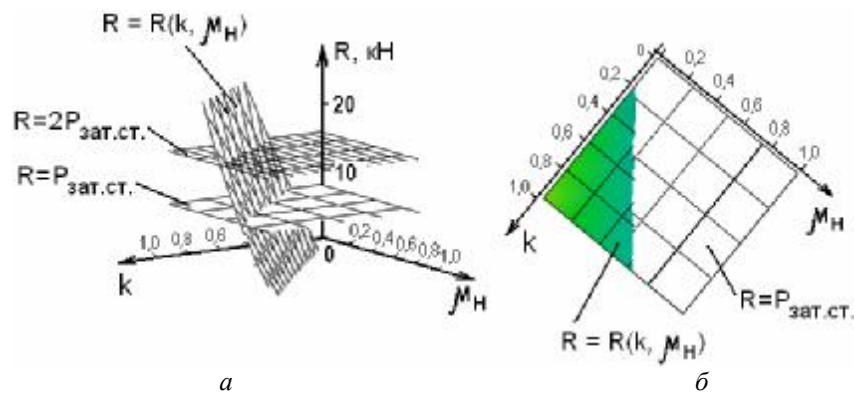


Рис. 11. График зависимости усилий в стяжках 5 и 6 неподвижной опоры от коэффициента перегрузки  $k$  и коэффициента трения  $m_n$  (а); проекция на плоскость  $kO m_n$  линии пересечения поверхности  $R(k, m_n)$  с плоскостью  $R = P_{зат.ст.}$  (б)

Величина коэффициента трения резины по поверхности груза составляет  $m_n = 0,5$ . При таком коэффициенте трения груз под действием продольной инерционной силы, как видно из графика на рис. 11б, может смещаться относительно неподвижной опоры при коэффициенте перегрузки  $k \approx 0,8$ . Это значит, что, например, при движении ГТА юзом в результате экстренного торможения на дороге с асфальтовым или бетонным покрытием продольная инерционная сила уже может передаваться на стяжки (коэффициент сцепления шин при таком покрытии  $j = 0,7 \dots 0,8$  [2]).

При заданном для проведения анализа значении  $k_{max} = 1,0$  и  $m_n = 0,5$  величины усилий в стяжках 5 и 6, полученные по формуле (7), составляют  $R_5 = R_6 = 14290$  Н. Следовательно, приращение усилий в этих стяжках дополнительно к усилию предварительной затяжки равно  $\Delta R = R_5 - P_{зат.ст.} = 6240$  Н. Стяжки 3 и 4 ослабнут, усилия в них будут составлять  $R_3 = R_4 = P_{зат.ст.} - \Delta R = 1810$  Н. Как видно, все стяжки остаются в натянутом состоянии.

Суммарная вертикальная нагрузка от стяжек на рым-болты груза осталась неизменной: в статическом состоянии она была равной  $P_{в.ст.} = 4P_{зат.ст.} \sin \alpha = 24665$  Н и при воздействии продольной инерционной силы с коэффициентом перегрузки  $k_{max} = 1,0$  осталась такой же:  $P_{в.ст.} = (R_3 + R_4 + R_5 + R_6) \sin 50^\circ = 24665$  Н.

Полученный результат говорит о том, что принятые по результатам выполненного анализа углы наклона стяжек, величина усилия предварительной затяжки, материал прокладки являются в совокупности оптимальными, поскольку при этом наборе значений параметров продольная инерционная сила не создает дополнительной вертикальной нагрузки на рым-болты груза.

Величина нормального напряжения в поперечных сечениях тяг стяжек 5 и 6 составляет  $\sigma = \frac{4R_5}{\pi d_1^2} = 95$  МПа, где  $d_1 = 13,835$  мм – внутренний диаметр резьбы тяги.

Материал тяг – конструкционная сталь, имеющая предел текучести  $s_T = 240$  МПа.

Величина коэффициента запаса прочности  $n = \frac{\sigma_T}{\sigma} = 2,5$  достаточна. Остальные

элементы стяжек также имеют достаточные запасы прочности.

Следует заметить, что поскольку стяжки 3 и 4 при действии продольной инерционной силы полностью не ослабевают, а остаются все время натянутыми, вопрос о назначении необходимой величины зазоров в подвижных соединениях их элементов специального решения не потребовал. Величины зазоров были назначены по общепринятым для таких соединений нормам точности. Эскизы подвижных соединений элементов стяжек и поля допусков сопрягаемых деталей приведены на рис. 12 и 13.

Организационные меры по обеспечению сохранности и целостности груза при транспортировке должны быть направлены на обеспечение надлежащего состояния дорожного покрытия на маршруте следования ГТА с грузом, устранение препятствий с дороги и недопущение возможности столкновения с встречным транспортом. Как показано выше, при резком же торможении агрегата и движении юзом даже по сухому асфальту или бетону дополнительные вертикальные нагрузки на груз от стяжек не возникают.

**Выводы.** Выполненный анализ нагружения элементов крепления груза при транспортировке на ГТА позволил спроектировать рациональную конструкцию опор и стяжек, при которой обеспечивается сохранность груза от действия возникающих при транспортировке перегрузок.

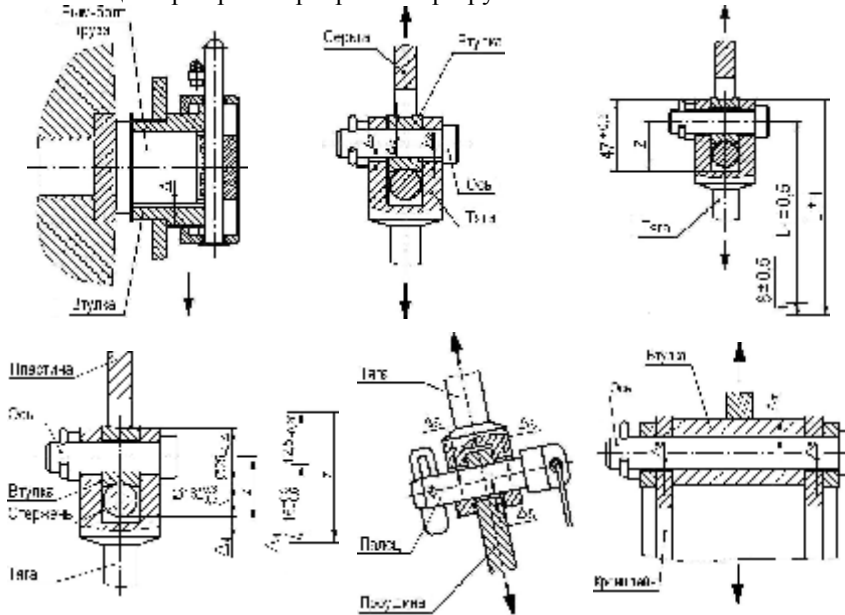


Рис. 12. Схемы расположения зазоров в сопряжениях элементов стяжки при ее предварительной затяжке

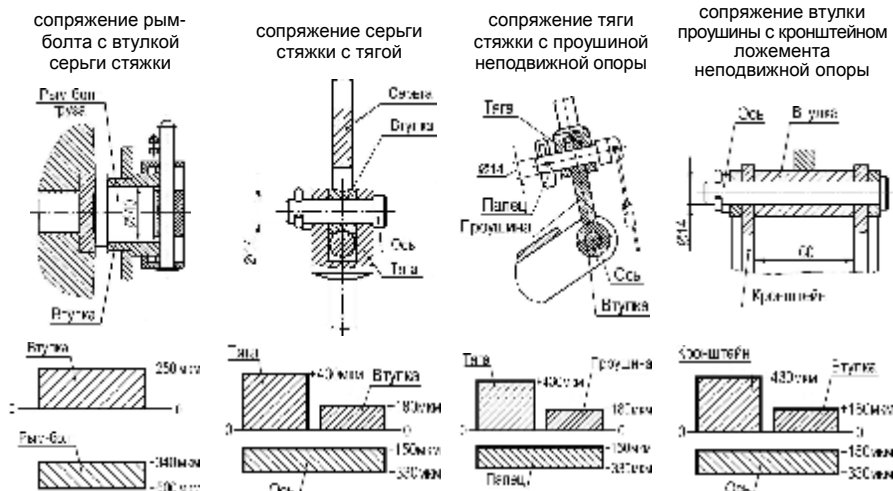


Рис. 13 – Эскизы сопряжений и схемы расположения полей допусков сопрягаемых деталей



**Список литературы:** 1. Батурин А.Т., Ицкович Г.М. и др. Детали машин. – Изд. 6. – М.: «Машиностроение», 1971. – 466 с. 2. Артамонов М.Д., Иларионов В.А., Морин М.М. Основы теории и конструкции автомобиля. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Машиностроение, 1974. – 288 с.

*Поступила в редколлегию 30.10.08*

**УДК 531.8:621.747**

*А.В. ГРАБОВСКИЙ, аспирант каф. ТММиСАПР, НТУ “ХПИ”*

## **ОБЗОР КОНСТРУКЦИЙ ИНЕРЦИОННЫХ МАШИН И ИХ ПРИНЦИПИАЛЬНЫЕ СХЕМЫ РАБОТЫ**

Представлений анализ існуючих конструктивних схем інерційних машин, що використовуються в ливарному виробництві, гірській промисловості, при транспортуванні вантажів і вібраційній обробці. Проведений анализ патентної, технічної літератури і авторських свідоцтв досліджуваних класів конструкцій.

The analysis of existent construction charts of inertia machines, utilized in a casting production, mining industry, at the portage of loads and oscillation treatment is presented. The analysis of patent, technical literature and copyright certificates of the probed classes of constructions is conducted.

**Состояние вопроса.** Инерционные машины получили большое распространение в промышленности, они находят свое применение в литейном производстве [1], при выбивке отливок из песчано-глинистого кома, в горной промышленности [2], при дроблении и разделении породы, обработке деталей в вибрирующих контейнерах [3, 4], транспортировании грузов, деталей и других областях.

В технической литературе приведено множество конструкций инерционных машин, основанных на различных принципах работы.

Например, работа инерционных машин в литейном производстве бывает основана на переменном магнитном поле [5], либо, в случае извлечения отливок из кома, на ультразвуковом воздействии. В некоторых источниках можно встретить конструкции для выбивки отливок в виде вращающегося барабана [6]. Конструкции аналогичного принципа применяются для обработки деталей после штамповки, например, снятие заусенцев [3]. Некоторые способы выбивки литейных форм [7] предусматривают помещение формы в герметичную камеру и создание в ней декомпрессии до остаточного давления 100-300 ГПа. Разработан также процесс вакуумного прошивания сырых песчаноглинистых форм при одностороннем вакуумировании формы, приводятся технологические и конструктивные параметры процесса. В патентном решении [8] формовочную смесь с отливкой выбивают из опок ударной воздушной или газовой волной с помощью импульсной головки. В литературе также встречаются конструкции инерционных машин, основанные на других принципах работы, в том числе дробеметные и установки выбивки выдавливанием [9].

**Обзор существующих инерционных машин.** Несмотря на многообразие разработанных способов выбивки литья, обработки деталей, разделения и дробления горной породы, до настоящего времени механические эксцентриковые и инерционные машины являются наиболее распространенным видом оборудования, так как у них относительно простая конструкция.

Инерционные машины, применяемые в промышленности, могут отличаться по компоновке (рис. 1) [10], в зависимости от местных условий планировки, например, типом вибровозбудителя, местом его установки и направлением колебаний полотна решетки.





Рис. 1. Типы механических вибрационных и виброударных систем:

а – эксцентриковая, б – вибрационная, в – виброударная

Однако, принципиальная схема машин при этом все равно сохраняется (рис. 2) [11]. Они состоят из корпуса 1, установленного на упругих пружинных опорах 2, и вибровозбудителя 3, смонтированного в корпусе и приводимого во вращение электродвигателем.

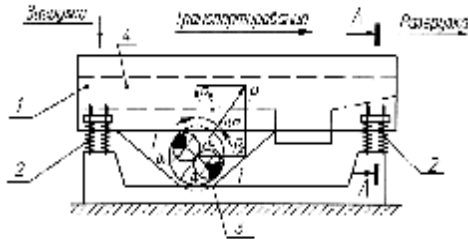


Рис. 2. Принципиальная схема инерционной машины с вибровозбудителем направленного действия

Конструктивно вибровозбудитель может быть выполнен различными способами, в частности, указанными на рис. 1. В верхней части корпуса закреплено полотно решетки 4, в случае выбивки сквозь щели которого просыпается отделяемая от отливок формовочная песчано-глинистая смесь. Полотно 4 может также выполнять функции рабочего органа, по которому передвигаются детали либо дробится и сортируется порода.

В инерционных машинах с транспортированием вибровозбудитель расположен несимметрично относительно центра тяжести, благодаря чему создается горизонтальная компонента усилия, направленная под углом к полотну решетки, чем и достигается эффект перемещения.

Несмотря на простоту своей конструкции, механические решетки не остаются неизменными, а постоянно совершенствуются в направлении повышения эффективности их работы, плавности регулировки вибрационных усилий, снижения пыле- и шумовыделения.

На следующих рисунках (рис. 3, 4) [1, 12-14] представлены разные конструкции инерционных эксцентриковых выбивных решеток, предназначенных для выбивки отливок из песчано-глинистых форм. Подобные конструкции не потеряли своей актуальности, они эксплуатируются на передовых линиях Украины. В частности, на предприятии „Азовмаш” на автоматизированной линии KW установлена выбивная решетка, показанная на рис. 4 [1, 13, 14]. Данная линия предназначена для изготовления деталей крупного вагонного литья.

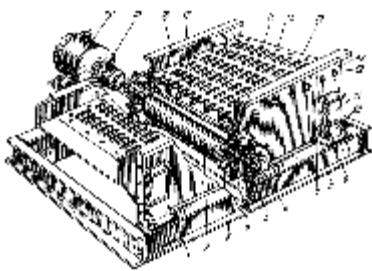


Рис. 3. Инерционная выбивная решетка, предназначенная для выбивки отливок массой 1.6т [12]

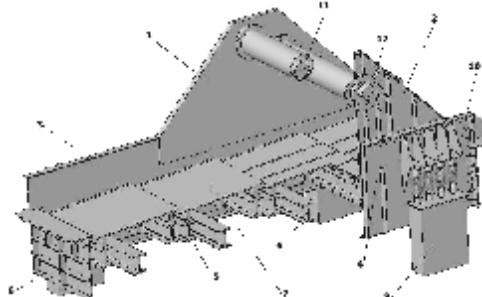


Рис. 4. Инерционная выбивная решетка, предназначенная для выбивки отливок массой 10 т [13]

В патентной литературе значительная часть технических решений направлена на исследование различных параметров при работе инерционной машины, снижение энергозатрат и повышение эффективности работы. Например, фирмой „Kinergy Corp” (США) используется вибратор типа неуравновешенного вала с приводом. Собственная частота пружин, на которых устанавливается рабочая рама, намного выше частоты вибровозбудителя при работе в холостом режиме. При подаче породы частота колебаний снижается, что обеспечивает автоматическую регулировку мощности, которую развивает система в нагруженном состоянии [15].

Фирма „Acme Conveyors” (Великобритания) производит инерционные машины с двумя вибрирующими массами. В таких установках вибрационный блок соединяется через упругие амортизаторы с рабочим столом или корпусом, который, в свою очередь, соединен через другие амортизаторы с неподвижной опорой [15].

Для выбивки и дробления прочных и особо прочных формочных смесей рекомендуется применять инерционные машины с вкладным полотном, хорошо зарекомендовавшие себя в работе [16].

В некоторых работах ряд технических решений направлен на снижение пусковых нагрузок [27]. Инерционная машина (рис. 5) [17] для выбивки формы содержит корпус 1 с закрепленным на нем рабочим полотном 2, вибровозбудитель 3 и упругую подвеску 4, которая соединяет инерционную машину с фундаментом.

Вибровозбудитель имеет вал 5, с неподвижной дебалансной массой, установленной в корпусе решетки 1 на подшипниках 6, на концах которого закреплены втулки 7, с несамотормозящей резьбой, на которые навернуты дебалансные гайки 8 и фланцы 9, к которым крепятся своими концами пружины кручения 10.

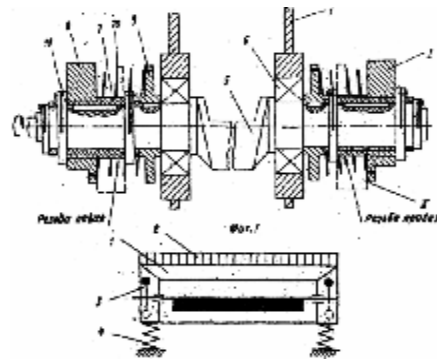


Рис. 5. Инерционная решетка для выбивки форм [17]

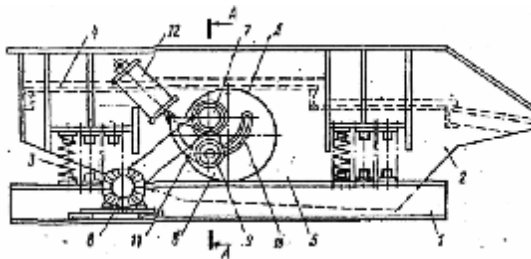


Рис. 6. Выбивная транспортирующая инерционная решетка [18]

В некоторых источниках технические решения по совершенствованию конструкций инерционных машин направлена на повышение сроков службы. Так, выбивная транспортирующая решетка (рис. 6) состоит из корпуса 2, рабочего полотна 4, вибровозбудителя, состоящего из приводного вала 7 и ведомого вала 9, шейки которых установлены во фланцах 6. Валы 7 и 9 соединяются кулисой 11 с приводом ее перемещения, выполненным в виде гидроцилиндра 12. Шейка ведомого вала размещена в пазу 13, сделанном во фланце 6 [18].

В работе [19] предлагается решетка, которая создает меньше шума. Решетка изготавливается из полых элементов, заполненных чугунной дробью, что позволяет снизить уровень шума от 97 до 89 дБ.

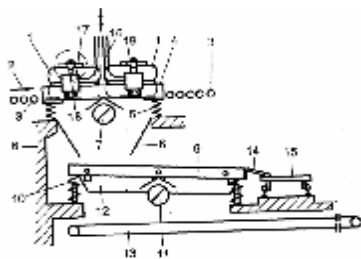


Рис. 7. Вибрационная установка для малошумной выбивки форм [20]

В другом предлагаемом техническом решении (рис. 7) [20] опоки 1 подаются в установку и выводятся из нее по рольганговым секциям 3 в направлении стрелки 2, содержимое опок 1 выдается на решетку 9 через воронку 8, выбитая смесь отводится с решетки 9 через воронку 12 на ленточный транспортер 13, возвращающий ее в оборот смесеприготовления, а отделенные от смеси отливки по лотку 14 поступают на пластинчатый конвейер 15. Такое решение позволяет снизить шумовые нагрузки, возникающие при работе выбивной установки, до уровня, допустимого действующими санитарно-гигиеническими нормами, увеличить срок службы опок за счет исключения их ударного взаимодействия с элементами установки, сократить продолжительность процесса выбивки, устранить необходимость в дорогостоящих средствах шумоизоляции установки и улучшить показатели ее ремонтпригодности.

Также для уменьшения шума предлагаются и другие конструкции инерционных машин. Так, на рис. 8 показана машина, которая имеет верхнее 1 и нижнее 2 полотна

Также для уменьшения шума предлагаются и другие конструкции инерционных машин. Так, на рис. 8 показана машина, которая имеет верхнее 1 и нижнее 2 полотна

с соосными щелями 3. Полотна связаны между собой при помощи боковых планок 4 винтами 5. Между полотнами 1 и 2 помещены демпфирующие средства 6, выполненные в виде медных труб 7, наполненных свинцовой дробью 8. Чтобы демпфирующие средства 6 не препятствовали свободному прохождению смеси через щели 3, сечения труб 7 выбирают незначительными. Сэндвич-полотно существенно поглощает колебания, гасит шум, возникающий при соударении отливок с решеткой.

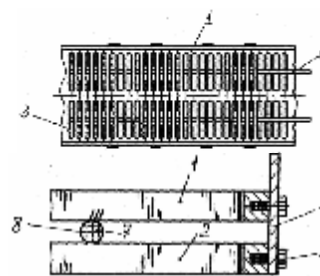


Рис. 8. Инерционная машина с устройством для снижения уровня шума

С целью увеличения долговечности и повышения надежности работы производится фиксация корпуса вибровозбудителя относительно рамы решетки в поперечном направлении по отношению к оси вала. Также фиксируются колосниковые секции в продольном направлении относительно рамы решетки. Корпус инерционного вибровозбудителя снабжен установленными по торцам цилиндрическими опорными фланцами, при этом каждая колосниковая секция жестко соединена с одной из своих опорных балок прямоугольным выступом.

При работе решеток из-за длительных вибрационных ударных нагрузок часто выходят из строя подшипниковые узлы. Существуют различные технические решения по усовершенствованию конструкций подшипниковых узлов.

К примеру, инерционная транспортирующая машина (рис. 9) [21] содержит решетку 1, корпус 2 с вибровозбудителем 3, установленную на пружинах 4 раму 5. В корпусе 2 вокруг посадочных окон установлены пластики 6 с закрепленными на шарнирах 7 башмаками 8. На них закреплен упругий установочный элемент 9. Конические посадочные места 10 возбуждателя вибрации 3 зажимаются между упругими элементами 9 башмаков 8, регулировка затяжки осуществляется винтами 11, установленными на пластиках 6.

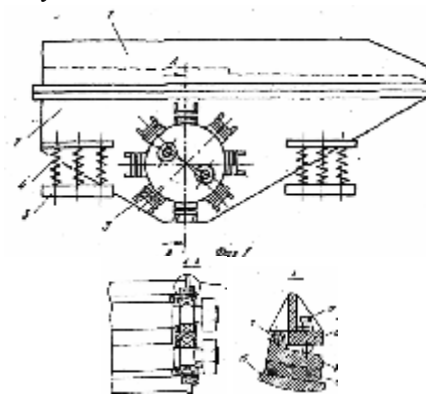


Рис. 9. Инерционная транспортирующая решетка для выбивки форм [21]

Вибрационная машина (рис. 10) [22] отличается тем, что с целью улучшения условий отделения отливок от земли она снабжена шарнирно закрепленными на выходе предпоследней секции вертикальными стержнями. Они образуют со свободными концами ее продольных пластин выходные окна. Стержни задерживают крупные комья земли на решетках для дальнейшего размельчения, после чего смесь проходит через окна.

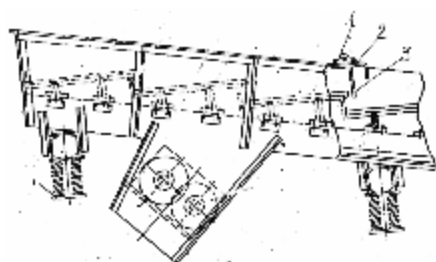


Рис. 10. Инерционная машина [22, 23]

70° к направлению транспортирования, что предотвращает прохождение земли над ними, задерживая выход крупных комьев формовочной смеси, что способствует их дроблению.

В другой конструкции установки [24] с целью улавливания ферромагнитных частиц непосредственно при прохождении смесью полости инерционной машины под полотном решетки установлен направляющий экран, электромагнит и дополнительный бункер. Электромагнит установлен под направляющим экраном с возможностью возвратно-поступательного перемещения, а дополнительный бункер расположен под электромагнитом.

В работах [10-12] авторы широко проанализировали принципиальные схемы инерционных машин с дебалансными приводами, описали принципы работы и

В других работах предпринимается попытка на одном оборудовании одновременно с процессом выбивки литья производить дробление отработанной формовочной смеси. В конструкции выбивной машины [23] между поперечными балками решетки и продольными пластинами установлены выступающие под ними гибкие затворные элементы, они располагаются под углом

существующие методы расчета. Их работы считаются основополагающими в этой области, однако описанные методы расчета не позволяют в достаточной степени проанализировать работоспособность конструкции [1].

**Выводы и направления дальнейших исследований.** Из приведенного анализа многообразия конструкций можно сделать вывод, что в производстве в качестве выбивных, транспортирующих, сортирующих устройств достаточно часто применяют инерционные машины с дебалансным возбудителем. На сегодняшний день еще не существует „идеальной”, удовлетворяющей всем параметрам инерционной машины. Об этом свидетельствует множество патентов и авторских свидетельств, количество которых постоянно увеличивается. Разработка и совершенствование существующих конструкций продолжается и сейчас. Этой тематике посвящена и диссертация [1]. В ней описаны проблемы и методы их решения на предприятии „Азовмаш”. По результатам работы была разработана новая конструктивная модель инерционной выбивной машины с дебалансными приводами и внедрена в производство.

В литературе инерционные машины классифицируются по частоте возбуждающей силы: дорезонансные, резонансные и зарезонансные. Существуют также классификации по типу работы вибрационной системы – эксцентриковая, вибрационная и виброударная (см. рис. 1) системы. Наиболее часто в производстве встречаются зарезонансные вибрационные машины с самосинхронизирующимися приводными дебалансными валами.

Из всех приведенных машин особое внимание необходимо уделять тяжело нагруженным (технологической нагрузкой 10 т и более) машинам. Такие машины являются уникальными, и проведение эксперимента недопустимо затратно по времени и средствам. Производство опытных образцов таких машин является дорогостоящим и недопустимым. В то же время эти машины чаще выходят из строя, что связано с габаритными размерами – и массой выбиваемого кома, и самой машины. При проектировании нельзя пропорционально увеличивать размеры машины и ее жесткость, поскольку такие машины будут слишком тяжелыми и, соответственно, у них будет слишком большой перерасход энергии.

Однако, во всех приведенных работах, в частности, в работе [1] уделено недостаточно внимания вопросам исследования динамических и прочностных характеристик. Что касается методов исследования динамических характеристик, то этот вопрос глубже рассмотрен в работах [25-26]. На сегодняшний день пока существует мало работ, посвященных вопросу долговечности и критериям многоциклового усталости в инерционных машинах, хотя работают они с высокочастотной многоцикловогой нагрузкой.

В дальнейшем планируется более подробно осветить вопрос исследования динамики поведения инерционных машин и уделить внимание прочностным характеристикам, исследованию долговечности конструкции, в частности, вопросам, посвященным исследованию многоцикловогой усталости.

**Список литературы:** 1. Барчан Е.Н. Удосконалення методів розрахунку та конструкції вибивної транспортуючої машини для формувальних ліній крупного литва. // Дисс. канд. техн. наук: 05.02.02. – Мариуполь. – 2008. – 178 с. 2. Ленда В.О. Вібраційні системи з комбінованим режимом динамічного навантаження для енергозберігаючих технологій переробки мінеральної сировини. // Автореф. дис. докт. техн. наук: 05.05.06. – Дніпропетровськ. – 2006. – 31 с. 3. Ясунік С.М. Підвищення ефективності обробки деталей у віброуючих контейнерах. // Автореф. дис... канд. техн. наук: 05.03.01. – Харків. – 2004. – 19 с. 4. Калмиков М.О. Підвищення ефективності процесу вібраційної обробки великогабаритних виробів. // Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.03.01. – Харків 2006. – 20 с. 5. Ефимов В.Н. и др., Устройство для выбивки литейных форм, Патент России, № 2183531, пр. В22Д 29/00. Оpubл. 10.08.2002г. 6. Improved sand and casting separation at Casting Limited // Foundry Trade Journal. – 1981, 151. – № 3228, – 964 p. 7. Спосіб вибивки литейних форм: А.с. 1154036. СССР. МКИ В22Д 29/00 / В.С.Мысовский, А.М.Бродский, И.Н.Шамонова и др. – №3663607/22-02; Заявл. 18.11.83; Оpubл. 07.05.86, Бюл. № 17. – 1с. 8. Пат. 275598 ГДР. МКИ В22Д 29/00. Verfahren and Vorrichtung zum Ausleeren von Formkasten, VEB Schwermaschinenbau Lauchhammerwert: Пат. 275598 ГДР. МКИ В22Д 29/00 P.Nicklisch, R.Boettcher. – №2998042; Заявл.09.02.87; Оpubл.22.06.88, – 2с. 9. Knight E.S. Separating sand and castings // British Foundryman. – 1979, 72. – № 6. – PP.206-213. 10. Аксенов П.Н. Оборудование для литейных цехов. Учебник для машиностроительных вузов. – М.: Машиностроение, 1977. – 510 с. 11. Горский А.И. Расчет машин и механизмов автоматических линий литейного производства. – М.: Машиностроение, 1978. – 552 с. 12. Матвеевко И.В., Тарский В.Л. Оборудование для литейных цехов. – М.: Машиностроение, 1985. – 400 с. 13. Барчан Е.Н. Методы, модели и алгоритмы для синтеза параметров вибивной инерционной машины на основе моделирования динамических процессов. // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем. вип.: "Машинознавство та САПР". – 2007. – №3. – С.3-17. 14. Барчан Е.Н., Ткачук Н.А., Грабовский А.В. Экспериментальное исследование динамических процессов в вибивной машине с дебалансным приводом. // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем. вип.: Машинознавство та САПР.– 2007. – №3. – С.17-23. 15. Dumbaugh G.D. One simple «Common», Drive for Foudry Vibrating Equipment / Trans. Amer. Foundrymen's Soc. – Vol. 94. Proc. 90-th Annu Meet, May 11-15, 1986. 16. Пономарев Н.Г., Кузин А.В. Особенности выбивки отливок из прочных форм // Литейное производство. – 1981. – № 10. – С.15. 17. Инерционная решетка для выбивки форм: А.с.799911. СССР. МКИ В22Д29/02 / М.Р.Козулькевич, Е.А.Королев, П.М.Ткаченко, П.А.Федорук. – №2713467-22; Заявл. 17.01.79; Оpubл.23.01.84, Бюл. № 4. – 1с. 18. Выбивная транспортирующая решетка: А.с.1488123. СССР.

МКИ С22D29/00 / Ю.И. Карпов, Е.Ю. Карпова – №4263147; Заявл. 15.06.87; Оpubл.23.06.89, Бюл. № 23. – 1 с. **19.** *Godding R.G., Shaw F.M.* Problems of knockout // Foundry Trade Journal – 1979. – 146. – № 3165. – P.1412-1413. **20.** *Пат. 141752* ГДР. МКИ В22D29/02. Schwinganordnung zur Larmgeminderten Entleerung adgegossener Giefereiformen: Пат. 141752 ГДР. МКИ В22D29/02 М.Goritzka . – № 192279; Заявл.09.04.76; Оpubл. 21.05.80. – 1с. **21.** *Инерционная* транспортирующая решетка для выбивки форм: А.с. 1002090. СССР. МКИ В22D29/00 / П.М.Ткаченко – №3346462/22-02; Заявл.14.10.81; Оpubл.07.03.83, Бюл. № 9. – 1с. **22.** *Вибрационная* решетка: А.с.619287. СССР. МКИ В22D29/02 / Н.И. Бабичев – №2437924/22-2; Заявл. 04.01.77; Оpubл.15.08.78, Бюл.№ 30. – 1с. **23.** *Вибрационная* решетка: А.с.1258605. СССР. МКИ В22D29/00 / Г.В. Милях, В.С.Самсоненко, В.Е.Сушко – №3887173/22-2; Заявл.22.04.85; Оpubл.23.09.86, № 35. – 1с. **24.** *Установка* для выбивки литейных форм: А.с. 1235652. СССР. МКИ В22D 29/02 / К.А.Берман, В.А.Шкода, П.С.Заболоцкий – №3834052/22-02; Заявл.29.12.84; Оpubл.07.06.86, Бюл. № 21. – 1с. **25.** *Гергега И.И.* Совершенствование конструкций и методов расчета вибрационных машин. Дис. канд. техн. наук: 01.02.06 / Львовский орден Ленина политехнический институт им. Ленинского комсомола. – Л., 1991. – 291 с. **26.** *Нисонский В.П., Гергега И.И., Козулькевич Р.М., Гуцуляк Ю.В.* Математическая модель многосекционных выбивных агрегатов с учетом рассеяния энергии // Проблемы прочности. – 1994. – № 10. – С.30-36. **27.** Сердюк Л.И. Основы теории, расчет и конструирование управляемых вибрационных машин с дебалансными возбудителями. // Автореф. дис... докт. техн. наук: 05.02.02:01.02.06. – Харків. – 1991. – 31 с.

Поступила в редколлегию 02.11.08

## УДК 621.875

**Ю.Б. ГУСЕВ**, гл. конструктор ОАО “Головной специализированный конструкторско-технологический институт”, г. Мариуполь,  
**А.Ю. ТАНЧЕНКО**, асп. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ”

### К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ И МЕТОДАХ РАСЧЕТА ГРЕЙФЕРНЫХ ПЕРЕГРУЖАТЕЛЕЙ МОСТОВОГО ТИПА

У статті розглянуто проблему класифікації та синтезу великогабаритних конструкцій типу „перевантажувач”. Наведено методику розрахунку та врахування діючих на кран навантажень. Надано рекомендації щодо підходу у проектуванні подібних конструкцій.

In the paper the problem of classification and synthesis of large-size constructions such as „loader” is considered. The method of calculation and account of loadings which are operating on a crane is resulted. Recommendations are given in relation to approach in design of similar constructions.

**Введение.** В настоящее время при проектировании высоконагруженных крупногабаритных машин, производимых малыми сериями или единично под соответствующий заказ, возникает множество проблем, связанных с обоснованием их конструктивных решений и конструктивно-технологических параметров. Это связано, прежде всего, с самой спецификой этих машин: будучи уникальными объектами, они не могут быть охвачены методиками расчета, традиционными для деталей машин массового производства. С другой стороны, для этих машин трудно получить эмпирические расчетные зависимости, поскольку для этого, как правило, отсутствует статистическая база наблюдений. Что же касается экспериментальных исследований, то их стоимость и длительность высоки, что делает их проведение неоправданным на этапе проектных работ.

Указанные выше обстоятельства вынуждают исследователей напряженно-деформированного состояния (НДС) силовых элементов проектируемых высоконагруженных крупногабаритных машин, которое в основном определяет их несущую способность и долговечность, обратиться к общим расчетным методам его определения. Поскольку силовые элементы таких машин, как правило, представляют собой сложные пространственные конструкции под действием сложной системы сил и граничных условий, то для формирования системы разрешающих уравнений необходимо обратиться к основным соотношениям механики сплошной среды [1-4]. Для отдельных групп тяжело нагруженных крупногабаритных машин, являющихся представителями того или иного типа машин, представляется целесообразным применить с соответствующими

изменениями методы расчета, сложившиеся на протяжении десятилетий [5]. Различные области применения перегружателей и широкий диапазон их основных характеристик predeterminedили значительное разнообразие схем и конструкций перегружателей. Ниже приведен обзор конструкций перегружателей и методов их расчета.

**1. Общая классификация перегружателей.** Перегружатели классифицируют: по области применения или виду обслуживаемого производства и схеме установки в грузовом потоке (технологическом процессе); по конструктивному признаку. Рассматриваемые машины обслуживают сложные технологические процессы в металлургической, химической и энергетической промышленности, а также грузовые потоки в морских и речных портах. В той или иной степени они оказываются жестко встроенными в общий технологический поток и вместе с конвейерами складов образуют систему машин, поэтому от работы перегружателей зависит эффективность всего производства.

Характер основного производства и условия эксплуатации учитываются при проектировании перегружателей и определенным образом влияют на их конструкцию. Наиболее широко перегружатели применяют на рудных дворах металлургических заводов, вследствие чего их называют рудными. Схема грузового потока на рудном дворе и характер использования такого перегружателя зависят от вида оборудования (дворы с вагонопрокидывателями или разгрузочными эстакадами), мощности доменного цеха. С помощью перегружателей в портах металлургических заводов разгружают морские суда, доставляющие руду, агломерат и другие материалы.

Классификация перегружателей по конструктивным признакам показана на рис. 1. Как видно из схемы, перегружатели классифицируются по типам металлических конструкций, по типам (видам) грузозахватных и перегрузочных устройств, а также по типам механизмов передвижения. По конструктивным схемам металлоконструкций различают перегружатели с жесткой и шарнирной системой. Перегружатели жесткой системы характеризуются пространственно жесткой металлоконструкцией, исключающей смещение опор в горизонтальной плоскости. У перегружателей шарнирной системы одна из опор жесткая, другая шарнирная. Шарнирная опора позволяет компенсировать температурные деформации моста и его перекося. Перегружатели можно разделить также по числу грейферных тележек на однотележечные и двухтележечные.



Рис. 1. Классификация перегружателей

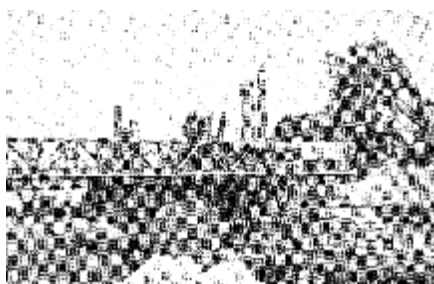


Рис. 2. Перегружатель, установленный на складе руды и шихтовых

**2. Область применения перегружателей.** Перегружатели для доменных цехов металлургических заводов. На складах рудных материалов доменных цехов не только хранят материалы, но и смешивают их с целью усреднения. Эту

работу выполняют перегружатели. В доменных цехах металлургических заводов перегружатели устанавливают на складе руды и шихтовых материалов (рис. 2), если материалы доставляются поездом, или в заводской гавани, если руда и агломерат поступают водным путем. При поездной доставке материалов рудный двор может оборудоваться вагоноопрокидывателями или разгрузочными эстакадами с траншеями. При первой схеме (рис. 3) вагоны с рудой разгружаются вагоноопрокидывателем, и руда заполняет рудную траншею. При разгрузке железнодорожных вагонов на эстакаде у гибкой опоры (рис. 4) перегружатель транспортирует материалы в основную штабель. Здесь часть материалов поступает в бункера непосредственно из вагонов.

На рис. 3 показан перегружатель фирмы Блейхерт (ГДР) производительностью 400 т/ч, массой 1200 т. С помощью перегружателя, оборудованного грейферной тележкой, руду укладывают в штабель 5, из которого она перегружателем подается в передаточный вагон. Последний развозит руду по бункерам. Из бункеров шихтовые материалы поступают на вагон-весы и далее на скиповый подъемник. Для направления материалов в вагоны перегружатели оборудуются стационарными и передвижными направляющими воронками.

На рис. 4 показан перегружатель фирмы Блейхерт (ГДР) производительностью 500 т/ч и массой 1175 т. Руда и агломерат, доставляемые самоходными баржами, разгружаются в заводских портах. Для этого используют перегружатели, оборудованные грейферной тележкой (или тележками), перемещающейся по нижнему поясу моста, или перегружатели со стреловым грейферным краном, передвигающимся по верхнему поясу моста, и встроенным ленточным конвейером (рис. 5). Грейферный кран 1 погружает руду в передвижной бункер 2, откуда она через пластинчатый питатель 3 и лоток 4 поступает на ленточный конвейер 5. На консолях перегружателя имеются распределительные

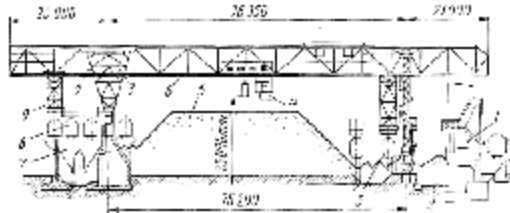


Рис. 3. Схема перегружателя фирмы Блейхерт установленного на рудном дворе (производительность 400 т/ч, масса 1200 т):  
1 – вагоноопрокидыватель с боковым опрокидыванием вагонов; 2 – рудная траншея; 3 – загружаемые вагоны; 4 – грейферная тележка перегружателя; 5 – штабель руды; 6 – перегружатель грузоподъемностью 30 т; 7 – бункера; 8 – передаточный вагон; 9 – разгрузочная воронка перегружателя



Рис. 4. Схема перегружателя, установленного в доменном цехе с эстакадной разгрузкой вагонов (производительность 500 т/ч, масса 1175 т):  
1 – скиповый подъемник; 2 – разгрузочная воронка перегружателя; 3 – бункера; 4 – передаточные вагоны и вагоны непосредственной подачи руды в бункера; 5 – грейферная тележка; 6 – штабель руды; 7 – рудная траншея; 8 – перегружатель грузоподъемностью 30 т

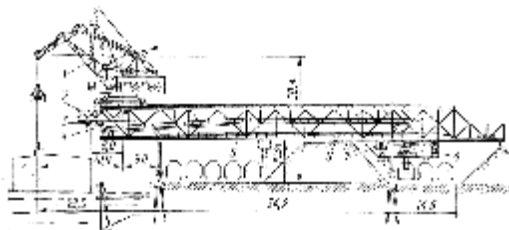


Рис. 5. Перегружатель со стреловым грейферным краном и встроенными ленточными конвейерами, установленный в заводской гавани металлургического завода:  
1 – кран, 2 – передвижной бункер, 3 – питатель, 4 – лоток, 5 – ленточный конвейер, 6 – распределительные устройства для загрузки руды в вагоны

устройства 7, 8 для погрузки руды в вагоны. При погрузке руды в штабеля пользуются нижним конвейером 6 и разгрузочными тележками.

*Перегружатели, используемые на*

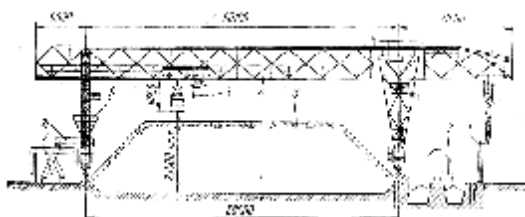


Рис. 7. Схема перегружателя фирмы Блейхерт на складе угля тепловой электростанции:  
1 – токоприемное устройство перегружателя; 2 – разгрузочная траншея; 3 – штабель угля; 4 – перегружатель грузоподъемностью 15 т; 5 – грейферная тележка; 6 – ленточный конвейер

коксохимических и газовых заводах. На рис. 6 показана схема установки перегружателя фирмы Блейхерт на складе угля газового завода. Производительность перегружателя 330 т/ч, масса 510 т. Первичный штабель угля под консолью образуется с помощью ленточного конвейера со сбрасывающей тележкой. Погрузку угля на склад и штабелирование производят перегружателем. Уголь выдается со склада ленточным конвейером, расположенным в траншее под первичным штабелем. Если на угольном складе коксохимического завода устанавливается перегружатель со стреловым грейферным краном и встроенным ленточным конвейером, то при работе перегружателя могут использоваться элементы автоматики. Движения телескопической и разгрузочных тележек перегружателя ограничены и фиксируются конечными выключателями.

*Перегружатели для тепловых электростанций.* На склад уголь поступает в вагонах и разгружается в траншее (рис. 7). Отсюда его перегружают грейферной тележкой и оформляют в штабель. В одну из опор перегружателя встроен бункер, под которым проходит пластинчатый транспортер (питатель). Со склада уголь выдается грейферной тележкой, которая подает его в люки ленточного конвейера, пролегающего вдоль склада. Производительность перегружателя фирмы Блейхерт, показанного на рис. 7, 250 т/ч, масса 508 т.

*Перегружатели для морских портов.* В морских портах перегружатели используют на разгрузочно-погрузочных операциях с рудой, углем и другими сыпучими грузами. Схема перегружателя, выпускаемого фирмой Исикавадзима-Харима, показана на рис. 8. Суда разгружаются

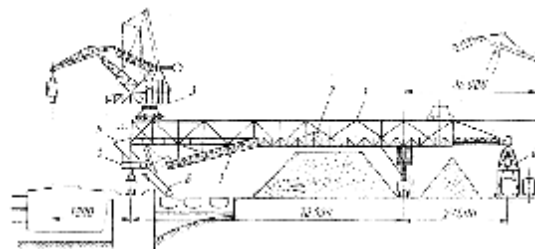


Рис. 8. Перегружатель со стреловым грейферным краном и встроенными ленточными конвейерами, установленный в морском порту:

- 1 - мост; 2 - барабанная сбрасывающая тележка ленточного конвейера; 3 - стреловой грейферный кран; 4 - бункер; 5 - питатель; 6, 7 - конвейеры; 8 - самоходный бункер

стреловым поворотным краном с шарнирно-сочлененной укосиной. Для лучшего обзора кран имеет выдвижную кабину. В опору моста со стороны моря встроен бункер. Из бункера уголь подается питателем на ленточный конвейер. Последний может занимать два положения: нижнее, когда уголь перегружается в баржи, и верхнее, когда уголь подается на ленточный конвейер, расположенный вдоль моста перегружателя. В штабеля склада уголь подается барабанной сбрасывающей тележкой. Конечная разгрузка угля с конвейера осуществляется в самоходные бункера. Для загрузки бункера может использоваться и поворотный стреловой кран.

**3. Перегружатели с одной грейферной тележкой нормального исполнения.** Под грейферной тележкой нормального исполнения имеется в виду крановая тележка с расположенными на ней механизмами подъема и замыкания грейфера с механизмом передвижения, не имеющая поворотной стрелы. Перегружатели с одной грейферной тележкой, перемещающейся по нижнему поясу моста, являются наиболее распространенным видом перегружателей, а их конструктивная схема – типичной. Перегружатели с грейферной тележкой нормального исполнения широко применяются на металлургических и коксохимических заводах, угольных складах ТЭЦ, портах.

Перегружатель такого типа МПЗО-76,2 конструкции СКМЗ показан на рис. 9. Он предназначен для обслуживания склада руды доменного цеха. Металлоконструкция перегружателя состоит из моста с двумя консолями, жесткой опоры и гибкой опоры. Мост выполнен в виде двух ферм. Каждая ферма состоит из верхнего и нижнего

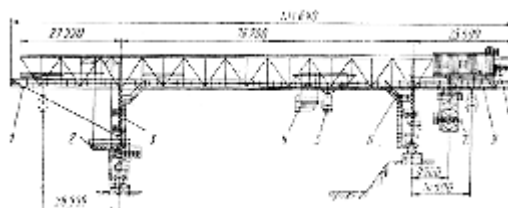


Рис. 9. Перегружатель конструкции СКМЗ с грейферной тележкой нормального исполнения грузоподъемностью 30 т:

- 1 - мост с консолями, 2 - неподвижная направляющая воронка с питателем, 3 - гибкая опора, 4 - грейферная тележка, 5 - грейфер короткозвенного типа, 6 - жесткая опора, 7 - передвижная направляющая воронка, 8 - ремонтный кран, 9 - ремонтное помещение



поясов, раскосов, стоек и подвесок Н-образного сечения. В плоскости каждой стойки и подвески располагаются поперечные рамы, на консолях которых крепятся ездовые балки для грейферной тележки. Балки имеют двуглавное сечение. По концам ездовых балок расположены пружинные буфера. Верхние пояса ферм соединяются горизонтальными связями. Консоли моста имеют строительный подъем, пролетная часть моста выполнена без строительного подъема, так как суммарный прогиб ее под действием вертикальных нагрузок не превышает допустимый (1/700 пролета). Жесткая и гибкая опоры различной длины выполнены в виде рам со стяжкой для восприятия нагрузок, действующих вдоль оси моста. В горизонтальной плоскости жесткая опора соединена с мостом подкосами. Гибкая опора соединяется с мостом неподвижно. Изменение длины моста под действием температурных колебаний, а также перекося моста (забегание опор) компенсируются гибкостью конструкции опоры. На консоли жесткой опоры расположено ремонтное помещение с ремонтным краном. На этой же консоли подвешена передвижная направляющая воронка. На консоли гибкой опоры предусмотрена неподвижная направляющая воронка с питателем. Механизм передвижения перегружателя состоит из четырех ходовых балансирующих агрегатов, включающих главные и малые балансиры, редукторы и двигатели. Каждый главный балансир при помощи шаровой опоры связан с двумя малыми балансирами, имеющими по четыре ходовых колеса, два из которых приводные. Высота опор разная. Жесткая опора на 8,5 м короче гибкой. Каждая опора передвигается по двум рельсам и имеет по 16 ходовых колес, половина которых приводные. Угон перегружателя предотвращается устройствами, смонтированными в стяжки опор. Грейферная тележка, перемещающаяся по нижнему поясу ферм моста, имеет самостоятельные одинаковые по конструкции механизмы подъема и замыкания грейфера. Каждый механизм включает барабан, редуктор, электродвигатель постоянного тока и два тормоза. Между собой механизмы кинематически не связаны. Они установлены на общей раме, опирающейся через пружинные амортизаторы на буксы ходовых колес. Тележка перемещается на четырех приводных колесах. Электрический ток поступает к тележке по жестким троллеям, расположенным вдоль моста. На кабине управления тележки установлен механизм захвата и передвижения направляющей

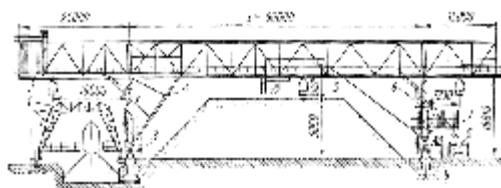


Рис. 10. Перегрузатель конструкции СКМЗ грузоподъемностью 25 т:

- 1 – тележка для разгрузки вагонов, 2 – мост с двумя консолями, 3 – механизм передвижения моста,
- 4 – жесткая опора, 5 – грейферная тележка, 6 – гибкая опора, 7 – питатель, 8 – стационарный конвейер, 9 – подача напряжения

воронки. Машинист управляет всеми механизмами перегружателя из кабины управления. На рис. 10 показана конструктивная схема перегружателя типа МП 25-60, предназначенного для обслуживания складов угля тепловых электростанций. Перегрузатель имеет мост 2 с двумя консолями, жесткую 4 и гибкую 6 опоры одинаковой высоты. Металлоконструкция моста принципиально не отличается от металлоконструкций описанного выше перегружателя. Механизм передвижения моста 3 и противоугонные устройства унифицированы с указанным выше перегружателем. В гибкую опору 6 встроены бункер и питатель 7, направляющие уголь на стационарный конвейер 8. Устройство грейферной тележки 5 и грейферной тележки грузоподъемностью 30 т аналогично. В качестве приводов механизмов перегружателя, в том числе механизмов подъема и замыкания грейфера и передвижения тележки, применяются двигатели переменного тока. Напряжение подается к перегружателю при помощи колонок с башмаками 9, установленными вдоль склада, и токосъемников в виде лыж, закрепленных на гибкой опоре.

Уголь поступает на склад в железнодорожных вагонах под консоль жесткой опоры перегружателя. При помощи тележки 1, перемещающейся вдоль состава, люки вагонов открываются, и уголь разгружается в траншею. Из траншеи уголь подается грейферной тележкой на склад в пролете моста. Со склада уголь выдается грейферной тележкой через питатель, предусмотренный в гибкой опоре.

Однотележный перегружатель большой грузоподъемности (40 т)

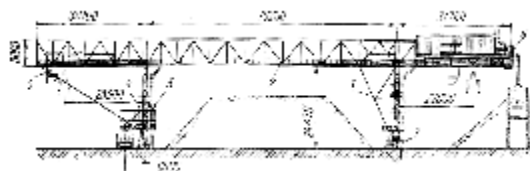


Рис. 11. Перегрузатель конструкции СКМЗ грузоподъемностью 40 т:

- 1 – жесткая опора, 2 – мост, 3 – гибкая опора,
- 4 – питатель, 5 – грейферная тележка



грейферная тележка 3. Мост усилен шпренгельной системой. Преимущество такой конструкции в ее технологичности: значительно уменьшено количество деталей, что облегчает монтаж и эксплуатацию.

**4. Перегрузатели с двумя грейферными тележками нормального исполнения.** С целью повышения

производительности перегружателей на них иногда устанавливают две тележки, передвигающиеся по параллельным путям. Типичный перегружатель такой конструкции показан на рис. 13. Он предназначен для транспортных операций на рудных дворах доменных цехов металлургических заводов, расположенных на берегу залива или реки, и является наиболее мощным. Материал транспортируется двумя грейферными тележками 3. Каждая тележка перемещается вдоль моста по собственному рельсовому пути. Мост перегружателя 2 опирается на две опоры, одна из которых (5) соединена с мостом жестко, другая (8) шарнирно. Со стороны жесткой опоры мост имеет нависающую над водой консоль, позволяющую грейферным тележкам разгружать руду непосредственно из морских судов 1. Со стороны шарнирной опоры также предусмотрена консоль, на которой подвешены две направляющие воронки 6, 7. Через эти воронки загружают железнодорожные вагоны, находящиеся на бункерной эстакаде. Для предотвращения угона перегружатель снабжен специальными устройствами,

размещенными на стяжках обеих опор моста. Над жесткой опорой, в верхней части моста, установлен 4 мостового типа для обслуживания грейферных тележек во время их ремонта. Мост

перегрузателя состоит из ферм, выполненных в виде треугольной решетки с дополнительными стойками. Главные фермы

моста в плоскости каждой стойки связаны поперечными рамами, к нижней части которых крепятся ездовые балки грейферных тележек. С жесткой опорой мост склепан и представляет собой единое целое. На шарнирной опоре мост свободно лежит на двух опорных катках; сама опора соединена с поперечной рамой моста центральным шкворнем – поворотной осью, закрепленной в сферическом подшипнике. Такое соединение моста с шарнирной опорой, а также роликовое устройство, расположенное под жесткой опорой, допускают свободный перекося моста в плане. Основные элементы и монтажные стыки металлоконструкций клепаные. Наиболее нагруженные элементы выполнены из низколегированной стали. На перегружателе установлены две грейферные тележки грузоподъемностью 30 т каждая. Конструкция тележек типовая, принятая для перегружателей с пролетом 76,2 м. Грейферные тележки снабжены грейферами для руды емкостью 6 м<sup>3</sup> и грейферами для агломерата емкостью 11 м<sup>3</sup>. Свободный проход грейферов через люки в трюм рудовозов обеспечивается раскрытием челюстей грейфера вдоль оси моста. Грузоподъемность двухтележечных перегружателей, изготавливаемых в ГДР, 5 т и 15 т, пролеты, соответственно, 40 и 60 м.

**5. Виды металлоконструкций перегружателей.** В современных конструкциях перегружателей на металлоконструкцию приходится около 65%, а на механизмы и электрооборудование соответственно 30% и 5% общей массы. Основные размеры (пролет, высота, длины консолей, подмостовой габарит и т. п.) перегружателей определяются условиями их эксплуатации. Металлоконструкция перегружателя состоит из моста и двух опор, одна из которых жесткая, другая – гибкая или шарнирная. Жесткая опора воспринимает и передает на рельсы крановых путей вертикальные реакции, а также реакции от продольных и

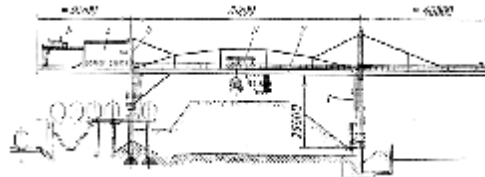
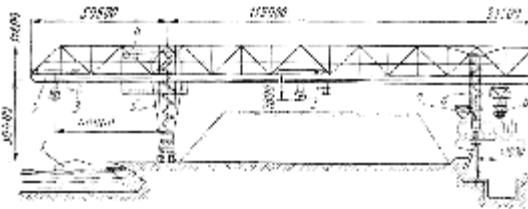


Рис. 13. Перегрузатель конструкции завода ВТА (ГДР):

- 1 – шарнирная опора, 2 – мост, 3 – грейферная тележка, 4 – жесткая опора, 5 – ремонтное помещение, 6 – ремонтный кран



кран

Рис. 14. Перегрузатель конструкции СКМЗ с двумя грейферными тележками грузоподъемностью 30 т каждая:

- 1 – объект разгрузки, 2 – мост с двумя консолями, 3 – грейферные тележки, 4 – ремонтный кран, 5 – жесткая опора, 6,7 – направляющие воронки, 8 – гибкая опора

поперечных горизонтальных нагрузок. Гибкая опора предназначена для того, чтобы воспринимать и передавать на крановые пути вертикальные нагрузки, а также горизонтальные нагрузки, действующие поперек перегружателя. При одинаковой жесткости опор нагрузки, действующие вдоль моста, распределяются между обеими опорами поровну.

Мост представляет собой пространственную конструкцию замкнутого или незамкнутого типа. Опоры перегружателя в зависимости от типа перегружателя выполняются в виде плоских или пространственных конструкций высотой 15-25 м. Опорные узлы их соединяются стяжками и прикрепляются к балансирным тележкам механизма передвижения. Стяжки используют для установки автоматических и ручных противоугонных захватов, а также для расположения на них электрооборудования. Классификация перегружателей по типам металлоконструкций приведена на рис. 15.

В зависимости от типа грейферной тележки различают металлоконструкции перегружателей: с ездой по низу с грейферной тележкой нормального (опорного) типа, расположенной в пределах внутренних габаритов моста (или подвешенного типа, устанавливаемой снаружи моста), с ездой поверху с двухконсольной грейферной тележкой опорного типа (или с поворотным грейферным краном), с угловой грейферной тележкой. Схемы металлоконструкций перегружателей в зависимости от типа соединения моста с опорами показаны на рис. 16.

*Металлоконструкции перегружателей с центральным приводом и жестким сопряжением моста с опорами* (рис. 16, а). В металлоконструкциях этих перегружателей мост склепывается с жесткой опорой 5, представляющей собой вертикальную плоскую сквозную раму с затяжкой, связанную подкосами с узлами главных ферм. Шарнирная опора 4, также представляющая собой вертикальную плоскую раму, сочленяется с мостом шарнирами 6. Цен-

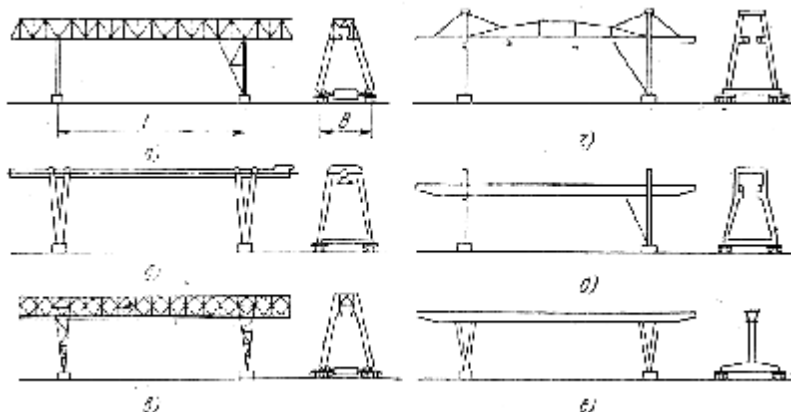


Рис. 15. Классификация перегружателей по типам металлоконструкций: а - решетчатая; б - трубчато-балочная; в - комбинированная решетчатая; г - комбинированная шпренгельная; д - коробчато-балочная двухбалочная; е - коробчато-балочная однобалочная

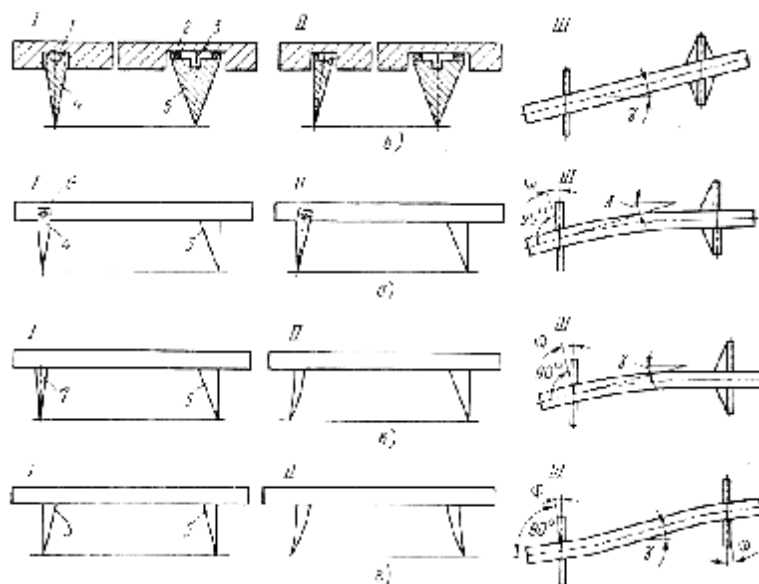


Рис. 16. Схемы металлоконструкций перегружателей:

а – с центральным приводом и жестким сопряжением моста с опорой; б – с подвижно-шарнирным соединением моста с опорами; в – с отдельным приводом и жестким сопряжением моста с опорами; г – жесткой системы трубчато-балочной, конструкции с опорами равной жесткости; I – схема перегружателя; II, III – взаимное положение моста и опор соответственно при продольной деформации моста и при перекосе (вид в плане); 1 – шаровой шарнир (линза); 2 – опорная плита (скользун); 3 – направляющий штырь (шкворень); 4 – шарнирная опора; 5 – жесткая опора; 6 – цилиндрический шарнир; 7 – гибкая опора;

$\gamma$  – максимальный угол перекоса моста;  $\varphi$  – угол закручивания опоры

тральный привод, расположенный в средней части моста, позволяет уменьшить забегание опор перегружателя при его передвижении, однако из-за громоздкости в современных конструкциях перегружателей он не применяется.

*Металлоконструкции перегружателей с подвижно-шарнирным соединением моста с опорами* (рис. 16, б). Мост этой системы перегружателей опирается в четырех точках на ригель пространственной жесткой опоры 5 посредством опорных плит 2 и шарнирно соединяется с ней по оси моста вертикальным шкворнем 3. Сопряжение с шарнирной опорой 4 осуществляется через опорную линзу 1 в одной точке, расположенной по оси моста. Подобная система опирания обеспечивает поворот жесткой опоры и моста вокруг оси вертикального шкворня. Жесткая опора представляет собой две плоские наклонные двухшарнирные рамы, соединенные системой фасадных и горизонтальных связей в пирамидальную пространственную конструкцию. Верхняя часть жесткой опоры состоит из нескольких продольных и поперечных ферм или сплошностенчатых балок, имеющих в уровнях верхнего и нижнего поясов горизонтальные связи. В местах пересечения балок ригеля с опорными узлами главных ферм располагаются четыре опорные плиты, на которые опирается мост. В центре пространственной конструкции ригеля расположен вертикальный шкворень, закрепленный в конструкциях моста и ригеля. Шарнирная опора 4 состоит из двух плоских рам, соединенных системой фасадных и поперечных связей. Поперечной балкой мост опирается на шарнирную опору через чечевицеобразную линзу в середине ригеля. Вертикальные реакции моста передаются на ригель жесткой опоры через четыре опорные точки, а на ригель шарнирной опоры – через одну. Горизонтальные реакции во всех направлениях воспринимаются шкворнем 3 на жесткой опоре и линзой 1 на шарнирной опоре. Обе опоры закрепляются на балансирных тележках механизма передвижения. В шарнирной системе с отдельным приводом и подвижно-шарнирным сочленением моста с опорами допускается перекося моста в плане до  $10^\circ$ .

Исследованиями ЦНИИпроектстальконструкции, СКМЗ и ВНИИПТМАШа выявлены преимущества жесткой системы металлоконструкции перед шарнирной: выше эксплуатационная надежность, проще и легче конструкция, меньшая трудоемкость изготовления и монтажа. Однако механизм передвижения с отдельным приводом, примененный при шарнирной системе, имеет большую надежность, прост по устройству, отличается малым весом, небольшой трудоемкостью и стоимостью изготовления и монтажа, меньшими эксплуатационными расходами, более высоким КПД, чем механизмы передвижения с центральным приводом. Выявившиеся при сравнительном исследовании положительные характеристики металлоконструкций перегружателя жесткой системы и преимущества механизма передвижения с отдельным приводом сделали целесообразным разработку новой комбинированной конструкции жесткой системы, снабженной механизмом передвижения с отдельным приводом.

*Перегружатель с отдельным приводом и жестким сопряжением моста с опорами* (рис. 16, в). Обе опоры данной системы жестко соединяются с соответствующими узлами главных ферм моста. Жесткая 5 и гибкая 4 опоры представляют собой две вертикальные рамы, склепанные с опорными узлами моста на уровне нижнего пояса. Рама жесткой опоры связывается с мостом подкосом, идущим от опорного узла опоры к одному из нижних узлов главных ферм. Передвижение перегружателя осуществляется отдельными, синхронно работающими приводами, установленными на каждой из ходовых балансирных тележек механизма передвижения. В процессе перемещения вдоль склада одна опора может забегать относительно другой. Величина этого забегания для перегружателя с пролетом 76,2 м составляет 250-300 мм. Надежность при передвижении обеспечивается системой ограничителей перекося.

*Перегружатель жесткой системы, трубчато-балочной конструкции с опорами равной жесткости* (рис. 16, г). Особенности этой конструкции являются крупногабаритные трубчатые элементы и опоры равной жесткости 5. Цельносварная металлоконструкция состоит из двухконсольного моста, выполненного в виде

сварной трубы с подвешенными к ней ездовыми балками, и двух пространственных опор треугольной формы с основными элементами из сварных труб. Последние сопрягаются с мостом коробчатыми ригелями и соединяются над тележками механизма передвижения в опорные коробки, связанные одна с другой трубчатыми стяжками. Перегрузочатель передвигается раздельными, синхронно работающими приводами, расположенными на каждом из четырех балансирных агрегатов (тележек) механизма передвижения. Забегание одной опоры относительно другой контролируется системами ограничителей перекоса. Одинаковая жесткость опор приводит к выравниванию горизонтальных поперечных нагрузок на ходовые тележки. Суммарная поперечная нагрузка на ходовую тележку в рассматриваемой системе с учетом возникающего распора не превышает подобной нагрузки в системе с одной жесткой и одной гибкой опорой. Преимуществом трубчато-балочной конструкции является возможность использования при монтаже металлоконструкций крупногабаритных заводских блоков со стыковкой их монтажной сваркой.

*Конструктивная схема перегружателей жесткой системы комбинированной конструкции.* Во всех комбинированных конструкциях используется совместная работа нижних поясов главных ферм с ездовыми балками. Нижние пояса выполнены в виде коробчатой конструкции, воспринимающей вертикальные нагрузки и крутящий момент. Одна из модификаций этой конструкции представляет собой пространственный решетчатый мост, соединенный с двумя опорами равной жесткости. Металлоконструкция моста состоит из двух главных ферм с треугольной или ромбической решеткой, у которых нижний пояс имеет коробчатые сечения, а остальные элементы (верхний пояс, раскосы, стойки) Н-образное, тавровое или крестовое. Нижний пояс играет роль балки жесткости и используется для укладки подтележечных рельсов грейферной тележки. Обе главные фермы соединены между собой системами продольных и поперечных связей. Обе опоры имеют равные жесткости, одинаковые принципиальные геометрические схемы и жестко соединяются с мостом.

Особенностью другого типа металлоконструкций является шарнирное соединение шарнирной опоры с мостом и отсутствие продольных связей по поясам шпренгеля. Металлоконструкция моста выполняется из двух главных ферм с коробчатой балкой жесткости, усиленной шпренгельной конструкцией снизу или сверху. Балка жесткости используется для укладки подтележечных рельсов. Обе главные фермы соединяются распорками, установленными в плоскости вертикальных стоек. Продольные связи по поясам шпренгелей отсутствуют. Как жесткая, так и шарнирная опоры имеют однотипную коробчатую конструкцию. Жесткая опора соединена с мостом подкосом, шарнирная – шарниром. Перегрузочатель передвигается от раздельных синхронно работающих двигателей. Одной из современных конструкций перегружателей является ферменно-балочная конструкция, разработанная и внедренная ЗАО „Запорожжкран”. Кажущаяся на первый взгляд простота и легкость конструкции в действительности является весьма сложной, т.к. основные работы по сборке и сварке металлоконструкции перегружателя большого количества негабаритных элементов металлоконструкции перенесены на монтаж. Это в значительной мере увеличивает срок ввода изделия в эксплуатацию, снижает его качество. Кроме того, значительно возрастают эксплуатационные затраты, связанные с восстановлением лакокрасочных покрытий.

**6. Унификация и типизация конструкций перегружателей.** В краностроении широко применяется унификация и типизация схем и конструкций перегружателей. В основном унификации и типизации подверглись металлоконструкции, а также балансирные тележки, тормоза, редукторы и другие механизмы. Основными эксплуатационными характеристиками являются грузоподъемность и пролет, т. е. расстояние между опорами моста (колея перегружателя), поэтому удобно отдельные модели перегружателей характеризовать этими показателями. Так, мостовой перегружатель (МП), имеющий грузоподъемность 25 т и пролет 60 м, обозначают МП-25-60.

При типизации металлоконструкций перегружателей исходят из унификации генеральных размеров, оптимизации типов сечений с целью получения наименьшей массы металлоконструкций по всему ряду; унификации сечений и отдельных узлов в пределах ряда. На основании опыта проектирования, изготовления, монтажа и эксплуатации перегружателей жесткой решетчатой конструкции для наиболее распространенного пролета 76,2 м ЦНИИпроектстальконструкция разработал двухсерийный типовой проект: серия I

объединяет перегружатели, имеющие одинаковые опоры с высотой до оси главной трубы 21 м; серия II – перегружатели с опорами разной высоты, отличающиеся одна от другой на 8,5 м. В пределах каждой серии при одинаковой для всех случаев колее перегружателя назначены длина консолей и соответствующий ей выход грейферных тележек. В конструкции типовых перегружателей предусмотрена установка грейферных тележек грузоподъемностью 30 и 40 т, производительностью соответственно 400 и 700 т/ч.

В качестве дополнительного оборудования на типовых перегружателях может устанавливаться ремонтный кран грузоподъемностью до 20 т (используемый при ремонте скипов доменных печей), а также перегрузочное устройство с питателем (для угольных перегружателей) или стационарной перегрузочной воронкой (для рудных перегружателей). Единой для всех типов обеих серий является геометрическая схема моста и гибкой опоры; жесткая опора имеет одинаковую геометрию только в пределах первой или второй серии.

Металлоконструкции типового перегружателя разработаны применительно к технологическим возможностям специализированных заводов строительных металлоконструкций. Для перегружателей, отличающихся длиной консолей и высотой опор, была создана единая пространственная геометрическая схема. Общность геометрии всех типоразмеров перегружателей обеспечило заводское изготовление их с широким применением кондукторов. При этом все элементы перегружателя, изготавливаемые заводским способом, делаются сварными, а ездовые балки – сварными или клепаными. Стальные конструкции соединяются высокопрочными болтами, работающими на трение. В некоторых случаях высокопрочные болты заменены заклепками. Типизация трубчато-балочной конструкции перегружателей осуществлена применительно к технологическим возможностям заводов тяжелого машиностроения.

**7. Методика расчета.** Основными конструктивными параметрами перегружателей являются: пролет  $L$ , длина моста  $L_0$ , размеры консолей, а также высота подъема грейфера  $H$

(рис. 17), которые определяются размерами обслуживаемого им склада (емкостью), технологической схемой грузопотока, способами доставки материалов на склад и выдачи их со склада, способами механизации. Пролет  $L$

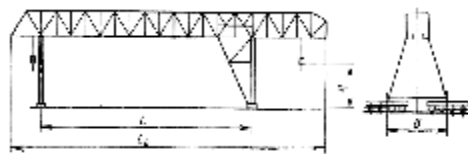


Рис. 17. Основные геометрические параметры перегружателя:

$L$  – длина пролета,  $L_0$  – длина моста,  $H$  – высота подъема грейфера,  $B$  – база перегружателя

перегружателя предусматривают 30-115 м, чаще всего 40-80 м. Высота подъема  $H$  грейфера зависит от глубины разгрузочных траншей и высоты штабеля. Чаще всего  $H = 20 \div 30$  м. База перегружателя  $B$  определяется условиями общей устойчивости. Грузоподъемность перегружателя  $Q$ , рабочие скорости грейферной тележки определяются производительностью перегружателя. Грузоподъемность перегружателя обычно не превышает 50 т. Наиболее распространены перегружатели грузоподъемностью 16-32 т. ГОСТ 1575-61 устанавливает следующий ряд грузоподъемностей перегружателей: 10 т; 12,5 т; 16 т; 20 т; 25 т; 32 т; 40 т; 50 т. Грузоподъемность назначают не только исходя из требуемой производительности – при прочих равных условиях заданную производительность склада можно обеспечить меньшим количеством перегружателей, если повысить грузоподъемность последних. Однако из-за резервирования перегружателей для ремонта и снятия пиковых нагрузок иногда целесообразнее применить большее число перегружателей при меньшей грузоподъемности.

Рабочие скорости грейферной тележки (крана): подъема (опускания) груза  $v_{гр}$ , передвижения  $v_r$ , а также скорость поворота  $v_{пов}$  рекомендуется принимать большими и их соотношения определять в каждом случае исходя из технико-экономических показателей перегружателей и их конструктивных особенностей. Максимальная скорость передвижения тележки ограничивается короткими участками пути перемещения и допусаемым ускорением (принимается, что буксование ходовых колес отсутствует). При полном пути перемещения максимальная средняя скорость передвижения тележек  $u_{m\max} = \sqrt{L_0 j_m}$ , где  $j_m$  – максимально допустимое ускорение грейферной тележки в  $m/s^2$ . Обычно скорость передвижения тележки не превышает  $0,5v_{r\max}$  и составляет 50-360 м/мин в зависимости от длины пути перемещения. Максимальная скорость подъема

(опускания) груза при соблюдении допускаемого ускорения подъема (опускания)  $j_n$  и заданной высоте подъема  $H$   $v_{n\max} = \sqrt{Hj_n}$ .

Во избежание больших динамических нагрузок ускорение  $j_n$  принимают равным 1-1,2 м/с<sup>2</sup>. Чаще всего скорость подъема (опускания) груза не превышает 0,3  $v_{\text{тmax}}$  и составляет 30-100 м/мин. Скорость опускания грейфера принимают равной скорости подъема или несколько большей, т.е.  $v_{on} = (1,0 \div 1,4)v_n$ . Скорость передвижения моста перегружателя назначают равной 15-35 м/мин, и на производительность перегружателя она практически не влияет. Перегружатели, как правило, входят в состав оборудования, обеспечивающего непрерывный технологический процесс погрузочно-разгрузочных операций, поэтому к ним предъявляются высокие требования с точки зрения прочности и надежности. При проектировании перегружателей следует руководствоваться Правилами Госнадзорхрантруда Украины.

Механизмы перегружателей рассчитывают с учетом режима работы механизмов: для механизмов подъема и замыкания грейфера, а также передвижения грейферной тележки режим работы весьма тяжелый (ВТ); для механизмов поворота стрелового крана и изменения вылета стрелы крана – тяжелый (Т); для механизма передвижения стрелового крана – легкий (Л) (режим „Л” для поворотных стреловых кранов перегружателей со встроенными конвейерами) и ВТ, а для механизмов передвижения перегружателя и противоугольных устройств – Л. Расчет металлоконструкций производят с учетом режима работы перегружателей в целом.

В соответствии с методикой, разработанной во ВНИИПТМАШе, внешние нагрузки, действующие на кран, определяют для двух состояний: рабочего и нерабочего. При этом под нерабочим понимается такое состояние, когда перегружатель не работает из-за ветра большой силы, сейсмических нагрузок, но находится в исправном (рабочем) состоянии. Нагрузки нерабочего состояния могут также действовать на перегружатель, когда он находится в ремонте.

Расчет производят, когда на перегружатель в рабочем состоянии действуют нормальные нагрузки (вариант А) и максимальные нагрузки (вариант Б). При нерабочем состоянии рассчитывают перегружатель, когда на него действуют максимальные нагрузки нерабочего состояния (вариант В). Параметры, учитываемые при расчетах перегружателей, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры для расчета перегружателей

Нагрузки	Расчет на выносливость и прочность при основных нагрузках	Расчет на прочность при нагрузках:			
		основных и дополнительных	основных, дополнительных и случайных	основных	основных и случайных
	А	Б	Б	В	В
Вес конструкции	+	+	+	+	+
Номинальный груз	+	+	+	-	-
Сила инерции при нормальной работе	+	-	-	-	-
Ветровая нагрузка по ГОСТ 1451-65	-	+	+	+	-
Эквивалентная ветровая нагрузка	+	-	-		
Нагрузка, возникающая от уклона пути, качки крана	+	+	+	+	+
Буксировочный момент на оси ведущих ходовых колес, максимальный момент двигателя, тормоза, муфты предельного момента, силы инерции	-	+	-	-	-
Ударная нагрузка	-	-	+	-	-
Ураганный ветер	-	-	-		+
Сейсмическая нагрузка	-	-	-	-	+

Нагрузки, соответствующие расчетным случаям нагружения перегружателей, разделяются на весовые, ветровые и инерционные. К особым видам нагрузок относятся сейсмические, нагрузки от снега и оледенения, от ударов тележки



(перегрузателя) о буфера, от температурных воздействий, нагрузки монтажные и транспортные. Наибольшую сложность представляет определение ветровых нагрузок.

*Ветровые нагрузки*, действующие на перегружатель, существенно влияют на общее сопротивление передвижению перегружателя и тележки, распределение давлений на ходовые колеса перегружателя и элементы металлоконструкций, устойчивость перегружателя, а также на число и мощность противоугольных устройств. Воздействие ветра на конструкции перегружателей учитывается при расчете металлоконструкций перегружателя на прочность. Она создается давлением ветра на наветренную площадь перегружателя, тележки и груза (грейфера) и зависит от наветренной площади, скорости ветра, пульсации этой скорости и формы сечения элементов крана, обтекаемых воздухом.

Распределенная ветровая нагрузка  $\omega$  на наветренную поверхность конструкции крана  $w = q_0 \cdot n \cdot c \cdot g \cdot \beta$ , где  $q_0$  – скоростной напор ветра на высоте до 10 м над поверхностью земли;  $n$  – поправочный коэффициент на возрастание скоростного напора в зависимости от высоты над поверхностью земли (воды);  $c$  – аэродинамический коэффициент;  $g$  – коэффициент перегрузки;  $\beta$  – коэффициент, учитывающий динамическое воздействие, вызываемое пульсациями скоростного напора ветра.

*Инерционные нагрузки* в перегружателях возникают при неустановившихся движениях механизмов, при толчках, вызванных неровностями пути во время передвижения тележки (крана) или перегружателя, при ударах тележки (крана) о буфера. Механизмы передвижения тележки (крана) и перегружателя преодолевают в период разгона (торможения) инерционные нагрузки  $P_{u.n} = (G_n + G_m + G_{zp})v_n / g t_{p(m)}$ ;  $P_{u.m} = (G_m + G_{zp} + G_m)v_m / g t_{p(m)}$ , где  $G_n$ ,  $G_m$ ,  $G_{zp}$ ,  $G_m$  – вес соответственно перегружателя, тележки (крана), грейфера и полезного груза;  $v_n$ ,  $v_m$  – установившаяся номинальная скорость соответственно передвижения перегружателя и тележки (крана);  $t_{pT}$  – время разгона (торможения) перегружателя или тележки (крана).

Инерционные нагрузки при подъеме  $P_{u.n} = (G_{zp} + G_m)v_{nd} / g t_p$ ;  $P_{u.c} = (G_{zp} + G_m)v_c / g t_{p(m)}$ , где  $v_{nd}$ ,  $v_c$  – скорость соответственно подъема и опускания груженого грейфера;  $t_p$  и  $t_c$  – время разгона механизмов лебедки при подъеме грейфера и время торможения при опускании.

При расчете деталей механизмов и элементов металлоконструкций на прочность расчетные максимальные нагрузки должны определяться в результате исследования динамических расчетных схем механизмов и металлоконструкций. Расчет на выносливость и на прочность деталей механизмов производится исходя из условия  $\sigma \leq [\sigma] = \sigma_0 / K_n K_m$ , где  $\sigma$  – максимальное напряжение, действующее в детали, с учетом коэффициентов концентрации напряжения, состояния поверхности и посадок, МПа;  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение для рассматриваемой детали;  $\sigma_0$  – опасное напряжение материала при данном напряженном его состоянии (предел выносливости, предел текучести, предел прочности) в зависимости от расчетного случая;  $K_n$  – коэффициент, учитывающий влияние внутренних дефектов материала.

При расчете на выносливость принимают для проката и поковок  $K_n = 1,1$ , для стальных отливок  $K_n = 1,3$ . При расчете на прочность по статическим характеристикам  $K_n = 1,0$ . Общий запас прочности  $K_m = K_1 + K_2$ , где  $K_1$  – коэффициент безопасности, зависящий от назначения и степени ответственности механизма;  $K_2$  – коэффициент, учитывающий режим работы механизмов. Значения коэффициента  $K_1$  и  $K_2$  для расчетных случаев следующие:

- значения коэффициента  $K_1$  для механизма подъема и замыкания грейфера, механизма передвижения грейферной тележки (крана) и механизма поворота стрелового крана  $K_1 = 1,2$  (вариант А) и  $K_1 = 1,1$  (вариант Б); для механизма изменения вылета стрелы  $K_1 = 1,4$  (вариант А),  $K_1 = 1,3$  (вариант Б) и  $K_1 = 1,3$  (вариант В); для механизма противоугольных устройств  $K_1 = 1,5$  (вариант А),  $K_1 = 1,4$  (вариант Б) и  $K_1 = 1,3$  (вариант В).

- значения коэффициента  $K_2$  для различных режимов работы:  $K_2 = 1,0$  – легкий;  $K_2 = 1,1$  – средний;  $K_2 = 1,2$  – Т;  $K_2 = 1,3$  – весьма тяжелый.

При выборе допускаемых напряжений ВНИИПТМАШ рекомендует использование следующих формул: при статической нагрузке для пластичного материала –  $\sigma_s / K_m$ , для хрупкого –  $\sigma_e / K_m$ ; при переменной (симметричной) –  $\sigma_{-1} / K_m K_n$ , при ударной –  $\sigma_s / K_m$  (для пластичного материала) ( $\sigma_s$ ,  $\sigma_e$ , и  $\sigma_{-1}$  – предел

соответственно текучести, прочности, выносливости при симметричном цикле).

**Выводы.** Таким образом, приведенные выше для перегружателей основные соотношения, расчетные схемы, нагрузки и ограничения представляют собой исходную информацию для расчетов напряженно-деформированного состояния силовых элементов металлоконструкции. Однако сам расчет НДС требует отдельного рассмотрения, т.к. сопряжен с решением задачи теории упругости для тел сложной формы. Для решения данной задачи в настоящее время наиболее подходит численный метод конечных элементов.

Проведенный анализ методов расчета напряженно-деформированного состояния тяжело нагруженных крупногабаритных машин позволяет сделать заключение о том, что исходя из типа машины, ее конструктивного решения и условий эксплуатации создается расчетная модель, формируются ограничения на напряжения и деформации, а сам расчет НДС проводится в одном из специализированных компьютерных пакетов [7]. Соответственно, последующий анализ результатов расчета приводит к необходимости корректировки конструкции машины и проведения повторных расчетов. Поскольку это сопряжено с огромным информационным потоком, то длительность и сложность этих расчетов требуют создания специализированных программно-модельных комплексов, которые автоматизируют, ускоряют и удешевляют проведение этих исследований.

**Список литературы:** 1. Александров В.М., Коваленко Б.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с. 2. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – М.: Факториал. – 1998. – 288 с. 3. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. – М.: Факториал. – 1998. – 288 с. 4. Елисеев В.В. Механика упругих тел. // СПб.: СПбГТУ. – 1999. – 341 с. 5. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1976. – 455 с. 6. Гусев Ю.Б. Общий подход к обеспечению долговечности, работоспособности и сохранения нагрузочной способности мостовых перегружателей - Восточно-европейский журнал передовых технологий // 2008.- №3. – С. 39-43. 7. Гусев Ю.Б., Танченко А.Ю. Обеспечение технического уровня сложных пространственных конструкций на основе моделирования физико-механических процессов на примере обоснования параметров мостового перегружателя - Вісник НТУ "ХПИ". Тем. вип.: Машинознавство та САПР. -2008. - №14. - С.34-46.

*Поступила в редколлегию 02.06.08*

## УДК 534.1

**В. Б. ЗЕЛЕНСКИЙ**, доц. каф. ТММиСАПР, канд. техн. наук,  
**А. А. ЗАРУБИНА**, проф. каф. ТММиСАПР, канд. техн. наук,  
**И. Я. ХРАМЦОВА**, научн. сотр. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ”

### **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАЯТНИКА-РОТОРА С ИЗГИБНО- И КРУТИЛЬНОДЕФОРМИРУЮЩИМСЯ СТЕРЖНЕМ**

Отримані диференціальні рівняння вигинних та крутильних деформацій маятника-ротора без урахування невірноваженості по довжині його стрижня.

Differential equations of flexure-torsion distortion of pendulum-rotor are got without the account of imbalance on its bar length.

В соответствии с постановкой задачи о пространственных колебаниях упругого маятника-ротора с изгибно- и крутильно-деформирующимся стержнем [1], получим теперь динамические выражения для рассматриваемой системы. При этом распределением неуравновешенности маятника-ротора по длине стержня пренебрегаем.

Кинетическая энергия системы состоит из энергии переносного движения  $T_e$ , энергии связи переносного и относительного движения  $T_m$  и энергии относительного движения  $T_r$ ,

$$T = T_e + T_m + T_r. \quad (1)$$

Кинетическая энергия переносного движения [2]

$$T_e = \frac{1}{2} \left[ MV_0^2 + 2MV_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_c) + \boldsymbol{\omega} \cdot \theta^o \cdot \boldsymbol{\omega} \right]. \quad (2)$$

Здесь  $M$  – масса всей системы

$$M = m + \rho l, \quad (3)$$

где  $m$  – масса диска;  $\rho$  – плотность стержня;  $l$  – его длина;  $\mathbf{r}'_c$  – вектор-радиус центра инерции системы в подвижной (относительной) системе координат  $Oxyz$ ;  $\theta^o$  – тензор инерции системы в точке  $O$  подвеса маятника-ротора. Очевидно, что  $\theta^o$  и  $\mathbf{r}'_c$  являются функциями обобщенных координат  $u, v, w, \theta$ .

Для уравновешенного ротора без учета диска

$$Mr'_c = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^{N_l} m_s^l \left[ \left( u^l + a^l - \frac{\partial v^l}{\partial a^l} b_s^l - \frac{\partial w^l}{\partial a^l} c_s^l \right) \cdot \mathbf{i}_1 + (v^l + b_s^l \cos \theta^l - c_s^l \sin \theta^l) \cdot \mathbf{i}_2 + (w^l + b_s^l \sin \theta^l - c_s^l \cos \theta^l) \cdot \mathbf{i}_3 \right]. \quad (4)$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  и  $N_l \rightarrow \infty$ , получим с учетом диска на конце

$$\begin{aligned} Mr'_c = & \rho^* \int_0^l da \left[ (u+a)F - \frac{\partial v}{\partial a} \iint_F bdF - \frac{\partial w}{\partial a} \iint_F cdF \right] \cdot \mathbf{i}_1 + \\ & + \rho^* \int_0^l da \left[ vF + \cos \theta \iint_F bdF - \sin \theta \iint_F cdF \right] \cdot \mathbf{i}_2 + \\ & + \rho^* \int_0^l da \left[ wF + \sin \theta \iint_F bdF - \cos \theta \iint_F cdF \right] \cdot \mathbf{i}_3 + \\ & + m[u(l,t)+l] \cdot \mathbf{i}_1 + mv(l,t) \cdot \mathbf{i}_2 + mw(l,t) \cdot \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\rho^*$  – плотность материала стержня;  $F$  – площадь поперечного сечения ( $\rho = \rho^* F$ ).

Принимая, что поперечное сечение стержня является симметричным относительно геометрических осей  $b, c$ , параллельных до деформации осям  $y$  и  $z$  соответственно, получим, что статические моменты сечения  $\iint_F bdF = \iint_F cdF = 0$ , и в дальнейшем в суммах типа (5) будем отбрасывать соответствующие члены. Тогда вместо (5) для уравновешенного ротора, обозначив  $Mr'_c = \mathbf{S}_0$ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 = Mr'_c = & \rho^* \int_0^l da \left[ (u+a) \cdot \mathbf{i}_1 + v \mathbf{i}_2 + w \mathbf{i}_3 \right] + \\ & + m[u(l,t)+l] \cdot \mathbf{i}_1 + m[v(l,t) \cdot \mathbf{i}_2 + w(l,t) \cdot \mathbf{i}_3], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mathbf{S}_0$  – статический момент системы относительно полюса  $O$ .

Теперь второй член выражения (2) будет

$$\begin{aligned} 2MV_0 \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}'_c) = & 2V_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot Mr'_c = 2V_0 \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}_0 = \\ = & 2[(\omega_2 \cdot S_{03} - \omega_3 \cdot S_{02}) \cdot V_{01} + (\omega_3 \cdot S_{01} - \omega_1 \cdot S_{03}) \cdot V_{02} + (\omega_1 \cdot S_{02} - \omega_2 \cdot S_{01}) \cdot V_{03}], \end{aligned} \quad (7)$$

где выражения для компонент вектора  $\mathbf{S}_0$  определяются из выражения (6):

$$\mathbf{S}_{01} = \rho \int_0^l (u+a) \cdot da + m[u(l,t)+l]; \mathbf{S}_{02} = \rho \int_0^l v da + mv(l,t); \mathbf{S}_{03} = \rho \int_0^l w da + mw(l,t). \quad (8)$$

Найдем теперь компоненты тензора инерции  $\theta^o$ . Без учета диска для уравновешенного ротора имеем

$$\begin{aligned} \theta_{11}^o &= \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^{N_l} m'_s \left[ (\mathbf{r}'_s \cdot \mathbf{i}_2)^2 + (\mathbf{r}'_s \cdot \mathbf{i}_3)^2 \right] = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^{N_l} m'_s \left[ (v' + b'_s \cos \theta'_s - c'_s \sin \theta'_s)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (w' + b'_s \sin \theta'_s + c'_s \cos \theta'_s)^2 \right] = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^{N_l} m'_s (v'^2 + w'^2 + b'^2 + c'^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Положим далее в выражении (9)  $n \rightarrow \infty$  и  $N_l \rightarrow \infty$  и в пределе с учетом диска получим:

$$\theta_{11}^o = \rho \int_0^l da [v^2 + w^2 + i_y^2 + i_z^2] + m[v^2(l,t) + w^2(l,t) + r_y^2 + r_z^2], \quad (10)$$

где

$$i_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{\iint_F c^2 dF}{F}, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{\iint_F b^2 dF}{F} - \quad (11)$$

квадраты радиусов инерции сечения стержня относительно осей  $b$  и  $c$ , параллельных осям  $y$  и  $z$ , а  $r_y$  и  $r_z$  – соответствующие радиусы инерции диска. Далее, пропустив промежуточные выкладки, запишем:

$$\begin{aligned} \theta_{22}^o &= \rho \int_0^l \left[ a^2 + w^2 + 2ua + i_y^2 \left( \cos^2 \theta + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right) + i_z^2 \left( \sin^2 \theta + \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 \right) \right] da + \\ &\quad + m \left[ l^2 + w^2(l,t) + 2u(l,t)l + r_y^2 \left( \cos^2 \theta(l,t) + \left( \frac{\partial w(l,t)}{\partial a} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_z^2 \left( \sin^2 \theta(l,t) + \left( \frac{\partial v(l,t)}{\partial a} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом членом, содержащим  $u^2$ , как имеющим четвертый порядок малости, пренебрегаем.

$$\begin{aligned} \theta_{33}^o &= \rho \int_0^l \left[ a^2 + v^2 + 2ua + i_y^2 \left( \sin^2 \theta + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right) + i_z^2 \cos^2 \theta + \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 \right] da + \\ &\quad + m \left[ l^2 + v^2(l,t) + 2u(l,t)l + r_y^2 \left( \sin^2 \theta(l,t) + \left( \frac{\partial w(l,t)}{\partial a} \right)^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_z^2 \left( \sin^2 \theta(l,t) + \left( \frac{\partial v(l,t)}{\partial a} \right)^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \theta_{12}^o &= -\rho \int_0^l \left[ v(u+a) + i_y^2 \frac{\partial w}{\partial a} \sin \theta - i_z^2 \frac{\partial v}{\partial a} \cos \theta \right] da - \\ &\quad - m \left[ v(l,t)(u(l,t)+l) + r_y^2 \frac{\partial w(l,t)}{\partial a} \sin \theta(l,t) - r_z^2 \frac{\partial v(l,t)}{\partial a} \cos \theta(l,t) \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \theta_{13}^o &= -\rho \int_0^l \left[ w(u+a) + i_y^2 \frac{\partial w}{\partial a} \cos \theta - i_z^2 \frac{\partial v}{\partial a} \sin \theta \right] da - \\ &\quad - m \left[ w(l,t)(u(l,t)+l) + r_y^2 \frac{\partial w(l,t)}{\partial a} \cos \theta(l,t) - r_z^2 \frac{\partial v(l,t)}{\partial a} \sin \theta(l,t) \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\theta_{23}^o = -\rho \int_0^l [v \cdot w + (i_z^2 - i_y^2) \sin \theta \cdot \cos \theta] da - \quad (16)$$

$$-m[v(l,t) \cdot w(l,t) + (r_z^2 - r_y^2) \sin \theta(l,t) \cdot \cos \theta(l,t)].$$

Третий член выражения (2) с учетом  $\theta_{ik}^o = \theta_{ki}^o$  будет

$$\dot{\omega} \theta^o \dot{\omega} = \theta_{11}^o \omega_1^2 + \theta_{22}^o \omega_2^2 + \theta_{33}^o \omega_3^2 + 2(\theta_{12}^o \omega_1 \omega_2 + \theta_{13}^o \omega_1 \omega_3 + \theta_{23}^o \omega_2 \omega_3). \quad (17)$$

Переходим к рассмотрению кинетической энергии связи переносного и относительного движения. Эта часть кинетической энергии определяется по формуле:

$$T_m = \dot{V}_0 \cdot \dot{Q}_r + \dot{\omega} K_r^o, \quad (18)$$

где  $\dot{Q}_r$  – главный вектор относительных количеств движения, а  $K_r^o$  – их главный момент относительно полюса  $O$ .

Главный вектор относительных количеств движения  $\dot{Q}_r$  можно получить как

$$\dot{Q}_r = \sum m_k \dot{r}_k', \quad (19)$$

где индексом \* обозначен вектор, проекции которого на подвижные оси  $Oxyz$  равны производным по времени от проекций на них самого вектора.

Очевидно, используя выражение (6) можно записать  $\dot{Q}_r = S^o$ , и из (8) получим:

$$Q_r = S_1^o = \rho \int_0^l a da + m a(l,t); Q_{r_2} = S_2^o = \rho \int_0^l a da + m a(l,t); Q_{r_3} = S_3^o = \rho \int_0^l a da + m a(l,t). \quad (20)$$

Далее главный момент относительных количеств движения по формуле:

$$K_r^o = \sum_{l=1}^n \sum_{s=1}^{N_l} m_s^l r_s^l \times r_s^l, \quad (21)$$

где виртуальные скорости представляются вектором  $r_s^l$ , который с учетом выражения (4) можно представить как

$$r_s^l = \left( \dot{a} - \frac{\partial \dot{a}}{\partial a'} b_s^l - \frac{\partial \dot{a}}{\partial a'} c_s^l \right) \cdot i_1 + \left[ \dot{\theta} - (b_s^l \sin \theta^l + c_s^l \cos \theta^l) \cdot \dot{\theta} \right] \cdot i_2 + \left[ \dot{\theta} + (b_s^l \cos \theta^l + c_s^l \sin \theta^l) \cdot \dot{\theta} \right] \cdot i_3. \quad (22)$$

Выполнив произведение (19) и переходя к пределу при  $N_l \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$  получим

$$K_{r_1}^o = \rho \int_0^l [v \cdot w + (i_y^2 + i_z^2) \sin^2 \theta] da + m \cdot [v(l,t) \cdot w(l,t) - w(l,t)w(l,t) + (r_y^2 + r_z^2) \sin^2 \theta(l,t)];$$

$$K_{r_2}^o = \rho \int_0^l [w \dot{a} - (u+a) \dot{\theta} + i_z^2 \left( \cos \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \dot{\theta} - \sin \theta \cdot \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right) - i_y^2 \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial w}{\partial a} \cdot \dot{\theta} + \cos \theta \cdot \frac{\partial \dot{a}}{\partial a} \right)] da + m \cdot [w(l,t) \dot{a}(l,t) - (u(l,t) + l) \dot{\theta}(l,t) + r_z^2 \left( \cos \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \dot{\theta}(l,t) - \sin \theta \cdot \frac{\partial \dot{a}(l,t)}{\partial a} \right) - r_y^2 \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial w}{\partial a} \cdot \dot{\theta}(l,t) + \cos \theta \cdot \frac{\partial \dot{a}(l,t)}{\partial a} \right)]; \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
K_{r_3}^o = & \rho \int_0^l [(u+a) \dot{\varphi} - v \dot{\psi} + i_z^2 \left( \cos \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \dot{\varphi} - \sin \theta \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial a} \right) + \\
& + i_z^2 \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \dot{\psi} + \cos \theta \cdot \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial a} \right)] \cdot da + m \cdot [(u(l,t) + l) \dot{\varphi}(l,t) - \\
& - v(l,t) \cdot \dot{\psi}(l,t) + r_y^2 \left( \cos \theta \cdot \frac{\partial w}{\partial a} \cdot \dot{\varphi}(l,t) - \sin \theta \cdot \frac{\partial \dot{\varphi}(l,t)}{\partial a} \right) + \\
& + r_z^2 \left( \sin \theta \cdot \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \dot{\psi}(l,t) + \cos \theta \cdot \frac{\partial \dot{\psi}(l,t)}{\partial a} \right)].
\end{aligned}$$

Теперь запишем выражение (18) в проекциях:

$$T_m = V_{o1} Q_{r1} + V_{o2} Q_{r2} + V_{o3} Q_{r3} + \omega_1 K_{r1}^o + \omega_2 K_{r2}^o + \omega_3 K_{r3}^o \quad (24)$$

и все выражения для преобразований кинетической энергии связи переносного и относительного движения готовы.

Кинетическая энергия  $T_r$  относительного движения в случае дискретных точек определяется по формуле

$$T_r = \frac{1}{2} \sum m_i \left( \dot{\mathbf{r}}_i' \right)^2. \quad (25)$$

Пользуясь выражением (20) для виртуальной скорости и перехода к пределу при  $n \rightarrow \infty$  и  $N_l \rightarrow \infty$  получим с учетом массы на конце

$$\begin{aligned}
T_r = & \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ \dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 + i_z^2 \left( \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial a} \right)^2 + \dot{\varphi}^2 \right) + i_y^2 \left( \left( \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial a} \right)^2 + \dot{\psi}^2 \right) \right] \cdot da + \frac{1}{2} m \cdot \left[ \dot{\varphi}(l,t) + \right. \\
& \left. + \dot{\psi}(l,t) + r_z^2 \left( \left( \frac{\partial v(l,t)}{\partial a} \right)^2 + \dot{\varphi}^2(l,t) \right) + r_y^2 \left( \left( \frac{\partial w(l,t)}{\partial a} \right)^2 + \dot{\psi}^2(l,t) \right) \right].
\end{aligned} \quad (26)$$

Потенциальная энергия маятника-ротора складывается из потенциальных энергий силы веса  $\Pi_1$ , изгиба и кручения  $\Pi_2$  и потенциальной энергии  $\Pi_3$  деформации пружины в точке подвеса.

Полагаем, что ось  $O\xi$  неподвижной системы координат  $O\xi\eta\zeta$  горизонтальна (см. рис. 1 [2]), а компоненты  $\omega_2, \omega_3$  угловой скорости  $\dot{\omega}$  достаточно малы и ими можно пренебречь при определении потенциальной энергии силы веса. Тогда

$$\Pi_1 = -M_g (\xi_o + \xi_{1c}), \quad (27)$$

где  $\xi_o$  – координата точки подвеса в неподвижной системе координат, а  $\xi_{1c}$  – абсолютная координата центра инерции маятника-ротора в системе  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  с осями, параллельными осям неподвижной системы. Очевидно,  $\xi_{1c} \approx r_c' \cdot e_1 \approx r_c' \cdot i_1$ . Так как для дальнейшего случая вариаций первое слагаемое в выражении (25) несущественно, отбросим его. Таким образом,

$$\Pi_1 = -g S_1^o \cdot i_1 = -g S_1^o = -g \left[ \rho \int_0^l (u+a) \cdot da + m(u(l,t) + l) \right]. \quad (28)$$

Потенциальная энергия деформации  $\pi_2$  определяется с учетом следующих предположений: центр изгиба поперечного сечения совпадает с геометрическим центром симметрии сечения; повороты сечения в результате кручения происходят относительно центра изгиба; перемещения центра изгиба относительно осей  $b$  и  $c$  вследствие сдвига пренебрегаем; депланациями сечений от кручения пренебрегаем; сжатием продольных волокон стержня пренебрегаем.

Потенциальная энергия деформации изгиба и кручения

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ E \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial a^2} \right)^2 \right] + G I_p \left( \frac{\partial \theta}{\partial a} \right)^2 \right\} \cdot da, \quad (29)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $I_z, I_y$  – моменты инерции сечения маятника ротора

относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $G$  – модуль упругости при сдвиге,  $GI_p$  – крутильная жесткость.

Потенциальная энергия деформации пружины в точке подвеса определяется выражением

$$\Pi_3 = \frac{1}{2}k[\alpha]^2, \quad (30)$$

где  $k$  – сферическая жесткость на поворот;  $\alpha$  – угол, составленный осью  $\xi$  и касательной к дифференцированной оси стержня маятника-ротора в точке подвеса  $O$ . Косинус этого угла найдется из произведения векторов  $\mathbf{e}_1$  и

$$\frac{\mathbf{r}}{\partial a} = \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial a} \right) \cdot \mathbf{i}_1 + \frac{\partial v}{\partial a} \cdot \mathbf{i}_2 + \frac{\partial w}{\partial a} \cdot \mathbf{i}_3 \right]_{a=0}. \quad (31)$$

Принимая как и ранее  $\mathbf{e}_1 \approx \mathbf{i}_1$ , имеем

$$\cos \alpha = 1 + \partial u / \partial a, \quad (32)$$

а с другой стороны (по условию несжимаемости стержня)

$$\left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 = 1, \quad (33)$$

при  $a = 0$

$$1 + \frac{\partial u}{\partial a} = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 - \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2}. \quad (34)$$

Принимая  $\alpha$  и  $\left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2$ ,  $\left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2$  малыми величинами и разлагая в ряды  $\cos \alpha$  и  $1 + \frac{\partial u}{\partial a}$ , получаем

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right]_{a=0}. \quad (35)$$

Тогда

$$\alpha^2 = \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right]_{a=0} \quad (36)$$

и

$$\Pi_3 = \frac{1}{2}k \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right]_{a=0}. \quad (37)$$

Дифференциальные уравнения движения маятника-ротора получим из принципа Гамильтона-Остроградского, найдя стационарное значение интеграла

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (38)$$

то есть вариационного уравнения

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt. \quad (39)$$

Здесь  $L = T - \Pi$  – кинетический потенциал; составляющие кинетической и потенциальной энергии получены выше.

Имея в виду получить уравнения движения «носимого» тела (т. е. относительных колебаний маятника ротора), примем в рассмотрение вариации  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \theta$ ,  $\delta v'$ ,  $\delta w'$ ,  $\delta \theta'$  относительных координат  $v$ ,  $w$ ,  $\theta$  и их производных, от которых зависят выражения для  $T$  и  $\Pi$ . Вариации  $\delta u$  и  $\delta u'$  не рассматриваются, поскольку с помощью условия несжимаемости  $u$  и  $u'$  будут выражены через  $v$  и  $w$ , и их производные. Вариации относительных координат вычисляются при условиях варьирования  $\delta v(a, t_1) = \delta v'(a, t_2) = 0$ ,  $\delta w(a, t_1) = \delta w'(a, t_2) = 0$ ,  $\delta \theta(a, t_1) = \delta \theta'(a, t_2) = 0$  и условиях в точке подвеса  $\delta v(0, t) = \delta w(0, t) = \delta \theta(0, t) = 0$ .

Пропуская все операции по варьированию составляющих кинетического потенциала  $L$  и приравнявая нулю множители при вариациях  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \theta$  и их производных, запишем уравнения относительных изгибно-крутильных колебаний стержня маятника-ротора.

$$\begin{aligned}
& -EI_z v^{IV} + \rho \left[ -\frac{m}{\rho} + i_z^2 \frac{m}{\rho} + v' \left[ \frac{1}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) (l_2^{*2} - a^2) + (\omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - v_{01}^*) (l_1^* - a) \right] - \right. \\
& - v' \left[ (\omega_2^2 + \omega_3^2) a + \omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - v_{01}^* + g \right] + v' (\omega_1^2 + \omega_3^2) + w (\mathfrak{G}_1 - \omega_2 \omega_3) + 2\omega_1 v_{01}^* + \quad (40) \\
& + i_z^2 [\omega_1 \theta' (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) - 2\theta' (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + 2\theta \theta' (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) - \\
& - \theta' (\mathfrak{G}_2 \cos \theta + \mathfrak{G}_3 \sin \theta)] + \omega_1 V_{03} - \omega_3 V_{01} - v_{02}^* - (\omega_1 \omega_2 + \mathfrak{G}_3) a = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_y w^{IV} + \rho \left[ -\frac{m}{\rho} + i_y^2 \frac{m}{\rho} + w' \left[ \frac{1}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) (l_3^{*2} - a^2) + (\omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - v_{01}^*) (l_1^* - a) \right] - \right. \\
& - w' \left[ (\omega_2^2 + \omega_3^2) a + \omega_3 V_{02} - \omega_2 V_{03} - v_{01}^* + g \right] + w (\omega_1^2 + \omega_2^2) + v (\mathfrak{G}_1 + \omega_2 \omega_3) + 2\omega_1 v_{01}^* + \quad (41) \\
& + i_y^2 [\omega_1 \theta' (\omega_2 \cos \theta - \omega_3 \sin \theta) + 2\theta' (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) + 2\theta \theta' (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + \\
& + \theta' (\mathfrak{G}_2 \sin \theta - \mathfrak{G}_3 \cos \theta)] + \omega_2 V_{01} - \omega_1 V_{02} - v_{03}^* - (\omega_1 \omega_3 + \mathfrak{G}_2) a = 0;
\end{aligned}$$

В уравнениях (40) и (41) обозначено

$$l_1^* = l + \frac{m}{\rho}, \quad l_2^{*2} = l^2 + \frac{2m}{\rho} l - 2i_z^2, \quad l_3^{*2} = l^2 + \frac{2m}{\rho} l - 2i_y^2. \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& GI_p \theta'' + \rho \left[ - (i_z^2 + i_y^2) \theta'' + i_z^2 [\omega_1 w' (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) + 2\theta' (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + \right. \\
& + v' (\mathfrak{G}_2 \cos \theta + \mathfrak{G}_3 \sin \theta)] - i_y^2 [\omega_1 w' (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) - 2\theta' (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) - \\
& - w' (\mathfrak{G}_2 \sin \theta - \mathfrak{G}_3 \cos \theta)] + (\omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\omega_2 \omega_3) (i_z^2 - i_y^2) \sin \theta \cos \theta (i_z^2 + i_y^2) \mathfrak{G}_1 = 0
\end{aligned} \quad (43)$$

Перерезывающая сила в направлении оси  $Oy$  в точке крепления массы  $m$  будет

$$\begin{aligned}
& -EI_z v^{III}(l, t) = -m \left[ -gv' - \frac{m}{\rho} l (\mathfrak{G}_3 + \omega_1 \omega_2) + \omega_1 V_{03} - v_{02}^* + (\omega_1^2 + \omega_3^2) v + \right. \\
& + w (\mathfrak{G}_1 - \omega_2 \omega_3) + v' [ -(\omega_2^2 + \omega_3^2) \left( l - \frac{i_z^2 \rho}{m} \right) + \omega_2 V_{03} - \omega_3 V_{02} + v_{01}^* ] + 2\omega_1 v_{01}^* - \frac{i_z^2 \rho}{m} \mathfrak{G}_1 + \quad (44) \\
& + \frac{i_z^2 \rho}{m} [\omega_1 (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + 2\theta' (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + \mathfrak{G}_2 \sin \theta - \mathfrak{G}_3 \cos \theta] \Big]_{a=l}.
\end{aligned}$$

Перерезывающая сила в направлении оси  $Oz$  в точке крепления массы  $m$  будет

$$\begin{aligned}
& -EI_y w^{III}(l, t) = -m \left[ -gw' - \frac{m}{\rho} l (\mathfrak{G}_2 - \omega_1 \omega_2) + \omega_2 V_{01} - \omega_1 V_{02} - v_{03}^* + (\omega_1^2 + \omega_2^2) w - \right. \\
& - (\mathfrak{G}_1 + \omega_2 \omega_3) v + w' [ -(\omega_2^2 + \omega_3^2) \left( l - \frac{i_y^2 \rho}{m} \right) + \omega_2 V_{03} - \omega_3 V_{02} + v_{01}^* ] - 2\omega_1 v_{01}^* - \frac{i_y^2 \rho}{m} \mathfrak{G}_1 - \quad (45) \\
& - \frac{i_y^2 \rho}{m} [(\omega_1 + 2\theta') (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) - (\mathfrak{G}_2 \cos \theta + \mathfrak{G}_3 \sin \theta)] \Big]_{a=l}.
\end{aligned}$$

Далее изгибающие моменты:

$$\begin{aligned}
& -EI_z v^{II}(l, t) = -mr_z^2 [(\omega_2^2 + \omega_3^2) v' - \frac{m}{\rho} + (\omega_1 + 2\theta') (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + \\
& + \mathfrak{G}_2 \cos \theta - \mathfrak{G}_3 \sin \theta]_{a=l}, \quad (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_y w^{II}(l, t) = -mr_y^2 [(\omega_2^2 + \omega_3^2) w' - \frac{m}{\rho} - (\omega_1 + 2\theta') (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) + \\
& + \mathfrak{G}_2 \cos \theta + \mathfrak{G}_3 \sin \theta]_{a=l}, \quad (47)
\end{aligned}$$

а крутящий момент при  $a=l$

$$\begin{aligned}
& GI_p \theta' = m \left[ - (r_z^2 + r_y^2) (\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2) - r_z^2 \langle v' [\omega_1 (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) + \mathfrak{G}_2 \cos \theta + \mathfrak{G}_3 \sin \theta] + \right. \\
& + 2\theta' (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) \rangle + r_y^2 \langle w' [-\omega_1 (\omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta) + (\mathfrak{G}_2 \sin \theta - \mathfrak{G}_3 \cos \theta)] + \quad (48) \\
& + 2\theta' (\omega_2 \sin \theta - \omega_3 \cos \theta) \rangle + (\omega_2^2 - \omega_3^2 - 2\omega_2 \omega_3) (r_z^2 - r_y^2) \sin \theta \cos \theta \Big]_{a=l}.
\end{aligned}$$

Наконец, изгибающие моменты в закрепленном конце

$$EI_z v^{II}(0, t) = kv'(0, t); \quad EI_y w^{II}(0, t) = kw'(0, t). \quad (49)$$



**Список литературы:** 1. В. Б. Зеленский, А. А. Зарубина, З. С. Сафонова, И. Я. Храмова. К постановке задачи о пространственных колебаниях упругого маятника-ротора с изгибно и крутильно деформирующимся стержнем. // Вестник НТУ „ХПИ”. Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – 2007. – №29. – С.47-51. 2. А. И. Лурье. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ. – 1961.– 824 с.

*Поступила в редколлегию 01.10.2008*

**УДК 621.01**

**О.І. ЗІНЧЕНКО**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММіСАПР, НТУ “ХПІ”

### **АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ СИНТЕЗУ ШЕСТИЛАНКОВИХ МЕХАНІЗМІВ ЧЕТВЕРТОГО КЛАСУ З НАБЛИЖЕНИМ ВИСТОЄМ ВИХІДНОЇ ЛАНКИ**

У статті викладено метод кінематичного синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу з наближеним вистоєм вихідної ланки в одному з крайніх положень. Наведені результати синтезу та зроблено їх аналіз.

In the article method of kinematics synthesis of six-link mechanisms of fourth class with the initial stop of driven link in one of final positions are considered. The results of synthesis and their analysis are considered.

**Вступ.** Розглянуто актуальний науковий напрямок, який пов'язаний з розв'язанням науково-практичної задачі кінематичного синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу, здатних забезпечити наближений вистій вихідної ланки. Розроблений метод синтезу та кінематичного аналізу вказаних механізмів, створена комплексна математична модель, програмне забезпечення та проведені на їхній основі дослідження, а також практичні рекомендації складають наукову і практичну цінність.

**Актуальність.** В теперішній час достатньо повно розроблені методи кінематичного синтезу механізмів другого і третього класів, призначених здійснювати рух з одним або декількома наближеними вистоями вихідної ланки. Проте висока якість і велика тривалість вистою забезпечується, наприклад, механізмами другого класу за рахунок великої кількості ланок. Велика кількість ланок негативно позначається на динаміці механізму і його вартості. Прості шестиланкові механізми другого класу хоча і не мають цих недоліків, але мають обмежені функціональні можливості. В той же час, були доведені і підтверджені раніше багатьма відомими ученими переваги механізмів високих класів за функціональними можливостями (відтворенню заданих рухів робочих органів) порівняно з механізмами других і третіх класів (за класифікацією І.І. Артоболевського). На даний час розроблені методи кінематичного синтезу механізмів високих класів. В основному це графоаналітичні методи. Але ці методи вимагають значної кількості часу для розв'язання задачі, вони складні і не завжди дають потрібний результат. Крім того, графічна форма розв'язання задач синтезу не забезпечує потрібної точності при визначенні параметрів механізму і не дозволяє знайти всі розв'язки. Окрім графоаналітичних методів синтезу механізмів високих класів відомі також аналітичні методи, але на сьогоднішній день вони не є

достатньо ефективними. Таким чином, розробка методу аналітичного синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу (ШМЧК), призначених здійснювати рух вихідної ланки з наближеним вистоем, є актуальним науковим напрямком, пов'язаним з розв'язанням науково-практичної задачі забезпечення руху вихідної ланки з наближеним вистоем.

Постановка задачі синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу з наближеним вистоем вихідної ланки детально освітлена в [1]. Алгоритм кінематичного синтезу таких механізмів докладно викладений в [2].

Пропонується наступний алгоритм синтезу ШМЧК:

1) спроекувати шарнірний чотириланковик (ШЧ)  $OACB$  за трьома

положеннями кривошипа 1, які відповідатимуть куту вистою шестиланкового механізму, і трьома положеннями коромисла  $BC$ . Алгоритм синтезу ШЧ за трьома положеннями відомий із літератури [3]. При синтезі за трьома положеннями задаємося наступними величинами:  $j_{12}, j_{13}$  –

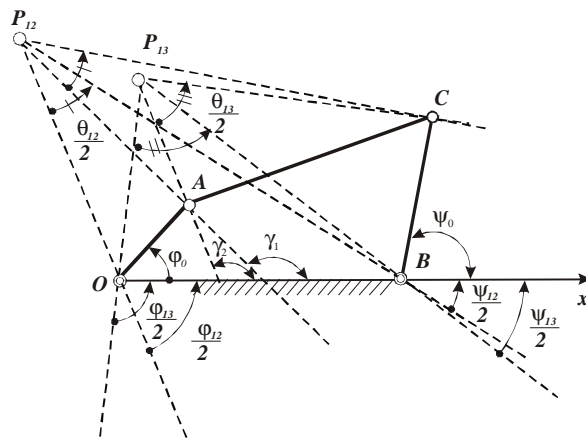


Рис. 1. ШЧ у задачі синтезу за трьома положеннями

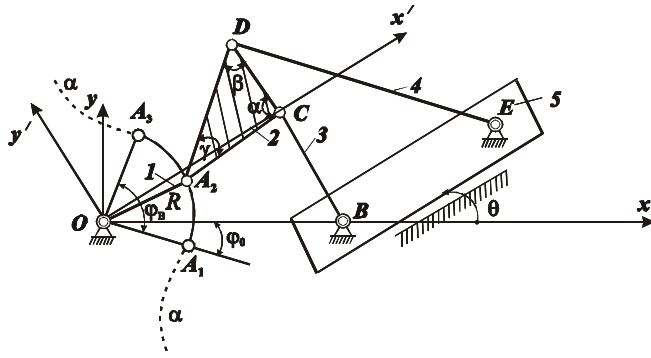
кутами повороту кривошипу  $OA$ ;  $y_{12}, y_{13}$  – кутами повороту коромисла  $CB$ ;  $y_0$  – початковим кутом повороту коромисла  $CB$ ;  $l_{OB}$  – довжиною стояка;  $l_{CB}$  – довжиною коромисла  $CB$  (рис. 1). Знаходимо відносні розміри механізму  $l_{OA}, l_{AC}$  і кут  $j_0$ , який відповідає початковому положенню кривошипа. Складання ШЧ  $OACB$  приймається однаковим для всіх положень;

2) задавшись положенням точки  $D$  (рис. 2) на шатуні  $AC$  ШЧ  $OACB$  ( $l_{CD}, a$ ), отримаємо три положення цієї точки  $D_1, D_2, D_3$ . Ці положення відповідають трьом характерним положенням кривошипа  $OA$ , які задані кутами  $j_0, j_0 + j_{12}, j_0 + j_{13}$ , де  $j_{13} = j_B$  ( $j_B$  – заданий кут вистою, в процесі проектування не змінюється). Складання ШЧ  $BCDE$  задається і є однаковим для всіх положень;

3) три точки  $D_i$  завжди лежать на одному колі. Знаходимо центр цього кола  $E$  і приймаємо його за положення осі шарніра, а радіус кола приймаємо за довжину коромисла  $DE$  (див. рис. 2);

4) шарніри  $B$  і  $E$  слід помістити на повзун і вибрати напрям його руху. В результаті одержимо необхідний шестиланковий механізм (див. рис. 2), і синтез механізму на цьому закінчуємо. Кут, який відповідає вибору напрямку руху повзуна, обчислюється за формулою:  $q = j_0 + nj_B + kp$ , де  $n$  – варійований параметр, якщо розв'язуємо задачу забезпечення точності вистою, задаємо у межах  $[0, 2 \div 0, 8]$ , фактично визначає напрямку руху повзуна;  $k = \pm 1$  – характеризує рух повзуна після вистою в один або в інший бік. Якщо розв'язуємо задачу забезпечення циклограми роботи машини, то крім кута вистою є відомими кути робочого та холостого ходів. Із формул:  $j_{p.x.} = 180^\circ - nj_B$  (якщо кривошип обертається проти годинникової стрілки),  $j_{p.x.} = 180^\circ - (1 - n)j_B$  (якщо кривошип обертається за годинниковою стрілкою) знаходимо значення параметра  $n$ , який не змінюватиметься у процесі проектування механізму. Після того, як вибрано напрямку руху повзуна, необхідно перерахувати координати усіх шарнірних точок у новій системі координат  $x'Oy'$ .

Рис. 2. ШМЧК з вихідною ланкою повзуном, відносна траєкторія  $a - a$  точки  $A$  ланки 2 ШЧ BCDE



Після знаходження всіх параметрів ШМЧК проводиться кінематичне дослідження механізму. Розглянуто два види ШМЧК: механізм з вихідною ланкою коромислом (рис. 3) і механізм з вихідною ланкою повзуном (рис. 4), які можуть найчастіше зустрічатися в техніці. При нерухомій ланці 5 координати, аналоги швидкості та аналоги прискорення шатунної точки  $A$  ШЧ BCDE знаходяться за відомими з курсу теорії механізмів та машин формулами. Будується відносна траєкторія  $\Gamma$  точки  $A_2$  ШЧ BCDE (див. рис. 3 і рис. 4). Цю траєкторію можна розглядати як криволінійний паз кулісного механізму (рис. 5) і проводити кінематичний аналіз, як показано у [4, 5].

Кінематичний аналіз ШМЧК з вихідною ланкою коромислом проводиться наступним чином.

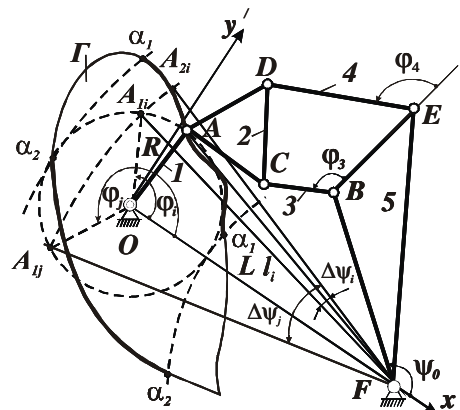


Рис. 3. ШМЧК з вихідною ланкою коромислом

1. Нехай складання механізму таке, що траєкторією точки  $A_2$  (індекс 2 відповідає належності точки до ланки 2) ШЧ BCDE є крива  $a_1 - a_1$  (див. рис. 3). Криві  $a_1 - a_1$  і  $a_2 - a_2$  відповідають різним складанням механізму. Уточнюються межі кривої  $a_1 - a_1$  і знаходяться значення кута

$$j_3 \in (j_{3\min}, j_{3\max}).$$

Граничні точки робочої ділянки кривої  $a_1 - a_1$  знаходяться від шарніра  $F$  на відстані  $(L + R)$  і  $(L - R)$ , де  $L$  – міжцентрова відстань,  $R$  – радіус кривошипа  $OA$ .

2. Для кожного значення кута  $j_{3i}$  обчислюються координати точки  $A_{2i}$  ( $x_{2i}, y_{2i}$ ) і кут  $j_i$ , який відповідає положенню кривошипа 1, точка  $A_i$  якого знаходиться на відстані  $l_i$  від точки  $F$ :

$$j_i = \arccos((R^2 + L^2 - l_i^2)/2RL), j_i \in [0, p] \quad (i = \overline{0, n}),$$

де  $l_i = \sqrt{(x_{A_{2i}} - x_F)^2 + (y_{A_{2i}} - y_F)^2}$ ,  $x_F = l_{OF}$ ,  $y_F = 0$ ,  $l_{OF} = R/\sin(y^z/2)$ ,

де  $y^z$  – заданий розмах коромисла.

3. Для того, щоб точки  $A_{2i}$  і  $A_i$  збіглися, крива  $a_1 - a_1$  повинна обернутися навколо точки  $F$  на кут  $\Delta y_i$ , якому відповідає дуга  $\overset{\frown}{A_{2i}A_i}$  (див. рис. 3):

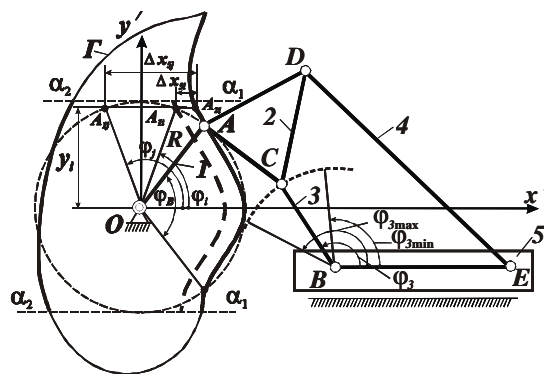


Рис. 4. ШМЧК з вихідною ланкою повзуном

$\Delta y_i = \arcsin(|y_{1i}(x_{2i} - x_F) - y_{2i}(x_{1i} - x_F)|/l_i^2)$ , де  $x_{1i} = R \cos j_i$ ,  $y_{1i} = R \sin j_i$  – координати точки  $A_1$ . Кут  $y_i = y_0 + \Delta y_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ), де  $y_0 = \arctg[(y_B - y_F)/(x_B - x_F)]$ , визначає  $i$ -те положення коромисла.

4. Обчислюються кути, відповідні кутам  $j_j$ :

$$\Delta y_j = \Delta y_i + 2 \arcsin(R \sin j_i / l_i),$$

де  $j_j = 2p - j_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ,  $j = 2n - i$ ). Кут  $y_j = y_i + 2 \arcsin(R \sin j_i / l_i)$  визначає  $j$ -те положення коромисла.

Розглянемо кінематичний аналіз ШМЧК з вихідною ланкою повзуном.

1. Граничні точки кривої  $a_1 - a_1$  (див. рис. 4) знаходяться на відстані  $R$  від осі  $x'$ , тому знаходяться в результаті розв'язання рівнянь  $y(j_3) = R$  і  $y(j_3) = -R$  методом ітерацій ( $a_2 - a_2$  – інше складання механізму).

2. Кут  $j_i$ , який відповідає положенню кривошипа 1, точка  $A_{1i}$  якого знаходиться на відстані  $\Delta x_{5i}$  від точки  $A_{2i}$ , обчислюється за формулою:  $j_i = \arcsin(y_{A_{2i}}/R)$ ,  $j_i \in [-p/2; p/2]$ .

3. Для того, щоб точки  $A_{2i}$  і  $A_{1i}$  збіглися, крива  $a_1 - a_1$  повинна зміститися на величину  $\Delta x_{5i}$ :  $\Delta x_{5i} = x_{A_{2i}} - \sqrt{l_{OA}^2 - y_{A_{2i}}^2}$  ( $i = \overline{0, n}$ ), де координати точки  $A$  ( $x_{A_{2i}}, y_{A_{2i}}$ ) ШЧ  $BCDE$  обчислюються для кожного значення кута  $j_{3i}$  при нерухомому повзуні.

4. Обчислюються переміщення повзуна  $\Delta x_{5j}$  на інтервалі  $j \in [p/2; 3p/2]$  і відповідні їм значення  $j_j$ :  $\Delta x_{5j} = x_{2i} - 2l_{OA} \cos j_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ), де  $j_j = p - j_i$ .

Результатом виконання пунктів 1-4 для  $n$  точок відносної траєкторії точки  $A_2$  є таблиця, що містить  $2n$  значень переміщень повзуна  $\Delta x_{5k}$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ) (для механізму з вихідною ланкою повзуном) або кутів повороту коромисла  $y_k$  ( $k = \overline{1, 2n}$ ) (для механізму з вихідною ланкою коромислом) і відповідні цим значенням кути повороту коромисла  $BC$   $j_{3k}$  і кути повороту кривошипа  $j_k$ .

Для аналітичного визначення закону руху повзуна або коромисла задані таблицею значення апроксимуються періодичними кубічними сплайнами.

В результаті одержимо аналітичні залежності  $\Delta x_5 = \Delta x_5(j)$  або  $y = y(j)$ . Потім визначаються  $\Delta y_{\max}$  – максимальний кут повороту коромисла на висті або  $\Delta x_{5\max}$  – максимальне переміщення повзуна на висті. Аналоги швидкостей та прискорень коромисла або повзуна визначаються аналітично як похідні від сплайн-функцій. Запропонований метод кінематичного аналізу з мінімальним використанням ітерацій є коректним і, наприклад, при числі точок апроксимації  $n = 12$  дає похибку за переміщеннями вихідної ланки по зрівнянню з методом скорочення нев'язок не більш ніж на 0,1%.

При синтезі механізмів після проведення кінематичного дослідження пропонується проводити наближений силовий розрахунок. В першому наближенні припускається, що на ланки 1, 2, 3, 4, 5 механізму не діють сили ваги, сили інерції і моменти інерції. На ланку 5 у випадку вихідної ланки коромисла діє одиничний момент корисного опору  $M_c$  (рис. 6). У цьому випадку реакції в шарнірах  $B$  і  $C$  будуть направлені по ланці  $BC$ , а реакції в шарнірах  $D$  і  $E$  – по ланці  $DE$ . Оскільки ланка 2 знаходиться під дією трьох сил ( $\vec{R}_{21}, \vec{R}_{23}, \vec{R}_{24}$ ), то

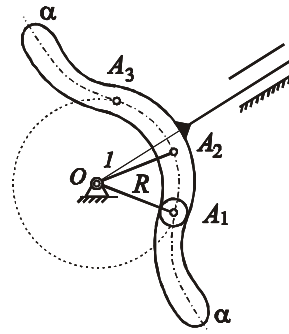


Рис. 5. Еквівалентний кулісний механізм з поступально рухомою

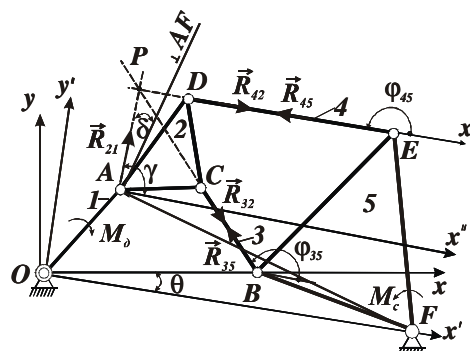


Рис. 6. Моменти і реакції в задачі наближеного силового розрахунку ШМЧК

всі вони перетинаються в точці, положення якої визначається перетином прямих  $BC$  і  $DE$ . Отже, лінія дії реакції  $\vec{R}_{21}$  відома.

Тоді відносні реакції в кінематичних парах із умов рівноваги статки мають вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{R}_F &= -\vec{R}_{21}, R_{21} = |M_C / (l_{AF} \cos d)|, \\ R_{35} &= (R_{21} \cos g - R_{45} \cos j_{45}) / \cos j_{35} = \\ &= M_C \cos g / (l_{AF} \cos d \cos j_{35}) - R_{45} \cos j_{45} / \cos j_{35}, \\ R_{45} &= R_{21} (\sin g - \cos g \operatorname{tg} j_{35}) / (\sin j_{45} - \operatorname{tg} j_{35} \cos j_{45}) = \\ &= M_C / (l_{AF} \cos d) [(\sin g - \cos g \operatorname{tg} j_{35}) / (\sin j_{45} - \operatorname{tg} j_{35} \cos j_{45})], \end{aligned}$$

де  $\cos d = (\cos g y_A + \sin g (x_F - x_A)) / l_{AF}$ ,  $g = \operatorname{arctg}((y_P - y_A) / (x_P - x_A))$ ,

$x_P = (y_E - x_E \operatorname{tg} j_{45} - y_B + x_B \operatorname{tg} j_{35}) / (\operatorname{tg} j_{35} - \operatorname{tg} j_{45})$ ,  $y_P = y_B + (x_P - x_B) \operatorname{tg} j_{35}$ ,  $j_{35}$  і  $j_{45}$  – кути між прямою  $OF$  і ланками 3 і 4 відповідно.

Якщо вихідною ланкою є повзун (рис. 7), то на ланку 5 діятиме одинична сила корисного опору  $F_C$ , і відносні реакції в кінематичних парах матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} R_{21} &= |F_C / \cos d|, \quad R_{45} = F_C \sin(j_{45} - d) / (\cos d \sin(j_{35} - j_{45})), \\ R_{35} &= F_C \sin(d - j_{35}) / (\cos d \sin(j_{35} - j_{45})), \text{ де } d = \operatorname{arctg}((y_P - y_A) / (x_P - x_A)). \end{aligned}$$

Реакція з боку напрямної на повзун:  $N_{56} = -F_C \operatorname{tg} d$ . Точка прикладання реакції  $N_{56}$  визначається величиною:

$$h = -(x_E - x_B) R_{45} \sin j_{45} + (y_E - y_B) R_{45} \cos j_{45} / N_{56}.$$

Далі проводиться вибір раціональних параметрів ШМЧК з вистоєм вихідної ланки. Оскільки при синтезі ШМЧК 8 параметрів ( $j_{12}, y_{12}, y_{13}, y_0, l_{BC}, a, l_{CD}$ , а

також напрямок руху повзуна в ШМЧК з вихідною ланкою повзуном або координати точки  $F$  в ШМЧК з вихідною ланкою коромислом) задаються довільно, то за рахунок раціонального вибору цих параметрів можна поліпшити деякі характеристики механізму. Тому задачу кінематичного синтезу ШМЧК ставимо наступним чином: спроектувати ШМЧК таким чином, щоб отримати необхідну якість вистою і задовольнити низку вимог, що пред'являються до механізму. Розглядаються наступні критерії якості ШМЧК: якість вистою вихідного коромисла  $f_1 = \max(y(j) / y^\Sigma)$ ,  $j \in [j_0, j_0 + j_{13}]$  або вихідного повзуна  $f_1 = \max(\Delta x_5(j) / h)$ ,  $j \in [j_0, j_0 + j_{13}]$ , де  $h$  – хід повзуна,  $y^\Sigma$  – заданий розмах коромисла; габаритний критерій  $f_2 = 1 / l_{OA}$  – для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном. В цьому критерії довжина вхідної ланки залежить від параметрів синтезу ШЧ  $OACB$ ; максимальне значення приведенного кута тиску (див.  $d$  на рис. 7) для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном визначається критерієм:  $f_3 = \max \operatorname{tg} |d(j)|$ ,  $j \in [0, 2p]$ ; максимальні значення відносних реакцій в кінематичних парах на ділянках робочого та холостого ходу визначаються відповідно критеріями:

$$f_4 = \max R_{35}^2(j) + \max R_{45}^2(j), j \in j_{px}, \quad f_5 = \max R_{35}^2(j) + \max R_{45}^2(j), j \in j_{xx}.$$

Задача вибору раціональних параметрів є багатокритеріальною, вона розв'язана шляхом згортки всіх критеріїв в один інтегральний критерій  $F(C) = k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4 + k_5 f_5$ , який мінімізується, де  $C_1 = j_{12}, C_2 = y_{12}, C_3 = y_{13}, C_4 = y_0, C_5 = l_{BC}, C_6 = a, C_7 = l_{CD}, C_8 = 0, 2 \div 0, 8$ ,  $k_i$  – коефіцієнти ваги, які вибираються згідно виконання необхідних умов проектування. Задача вибору раціональних параметрів ставилася як задача нелінійного програмування без обмежень і розв'язувалась методом випадкового і направлено пошуку. Область

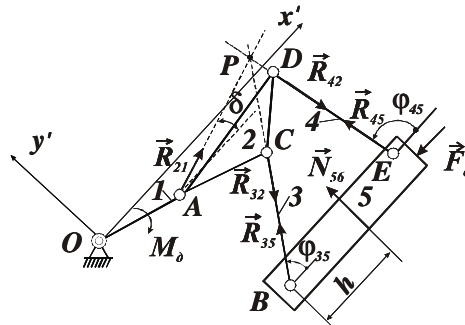


Рис. 7. Сили і реакції в задачі наближеного силового розрахунку ШМЧК з вихідною ланкою повзуном

заданого простору параметрів синтезу можна розширювати або звужувати, виходячи із конкретних умов задачі.

**Результати досліджень.** Описані в [2, 5] алгоритми кінематичного синтезу реалізовані у розроблених програмах на мові Паскаль. З використанням цього програмного забезпечення було синтезовано ряд механізмів. На рис. 8-10 наведено графіки координат  $x_B$ , переміщень  $\Delta x_B$ , аналогів швидкостей  $x_B'$  та аналогів прискорень  $x_B''$  повзуна ШМЧК, а також відносні реакції в кінематичних парах при дії одиничної сили опору на всьому інтервалі руху повзуна. Повзун має приблизну зупинку на інтервалі  $90^\circ$  повороту кривошипа. Механізм має наступні параметри:  $l_{OA} = 0,28; l_{AC} = 0,985; l_{AD} = 0,251; l_{CD} = 0,8; a = 11^\circ; l_{DE} = 0,554, l_{CB} = 0,3; l_{BE} = 1,12$ . Хід повзуна дорівнює:  $h = 0,545l_{OB}$ ; максимальне переміщення повзуна на вистій:  $\Delta x_{5\max} = 0,00799l_{OB} = 0,015h$ . На рис. 11 і рис.12 наведено графіки координат, переміщень, аналогів швидкостей та прискорень повзуна ШМЧК, а також реакції в кінематичних парах у випадку, коли повзун має приблизну зупинку на інтервалі  $140^\circ$  повороту кривошипа. Механізм має наступні параметри:  $l_{OA} = 0,18; l_{AC} = 1,127; l_{AD} = 0,38; a = 11,2^\circ; l_{DE} = 0,323; l_{CB} = 0,31; l_{BE} = 0,847$ . Хід повзуна дорівнює:  $h = 0,374l_{OB}$ ; максимальне переміщення повзуна на вистій:  $\Delta x_{5\max} = 0,027l_{OB} = 0,072h$ .

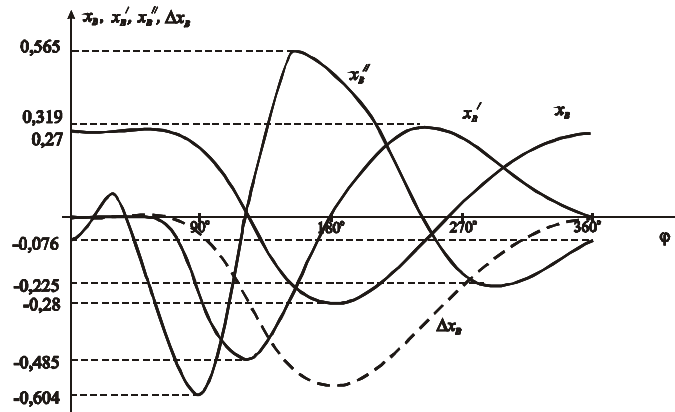


Рис. 8. Переміщення, координати, аналоги швидкості і прискорення точки  $B$  повзуна для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном при  $j_B = 90^\circ$

На рис. 13 наведено графіки кутів повороту та аналогів кутової швидкості вихідного коромисла ШМЧК з вихідною ланкою коромислом. Коромисло

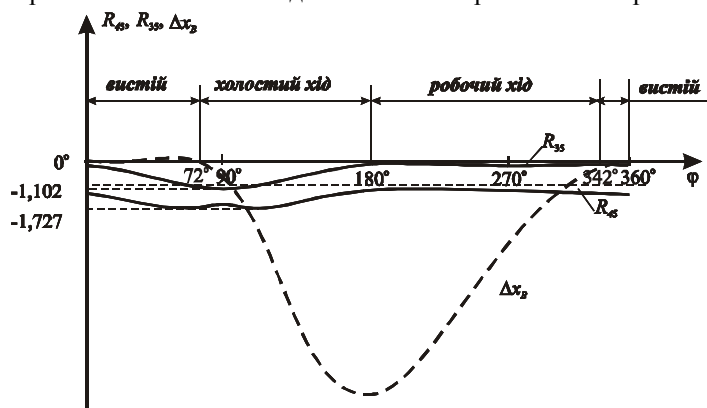


Рис. 9. Відносні реакції в кінематичних парах для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном при  $j_B = 90^\circ$

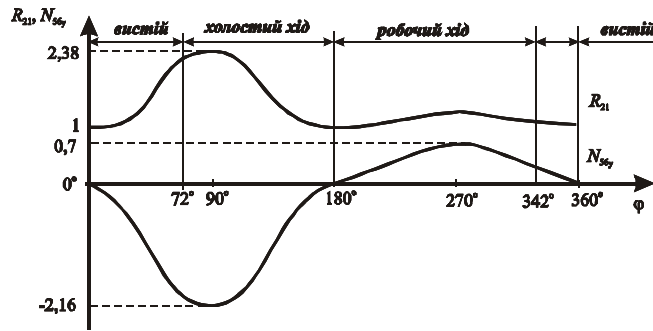


Рис. 10. Відносні реакції в кінематичних парах для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном при  $j_B = 90^\circ$

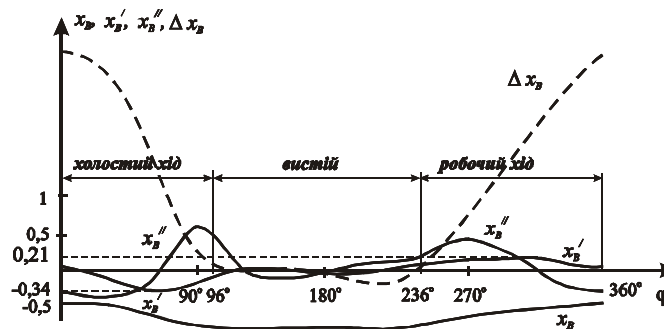


Рис. 11. Переміщення, координати, аналоги швидкості і аналоги прискорення точки  $B$  повзуна для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном при  $j_B = 140^\circ$

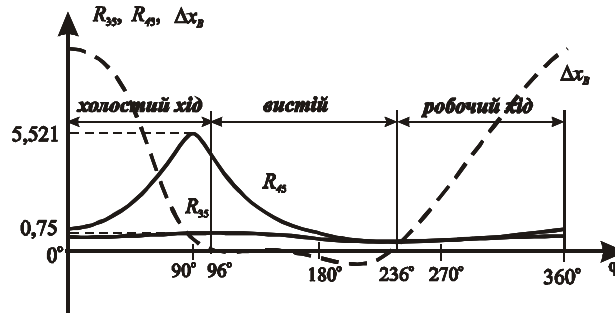


Рис. 12. Відносні реакції в кінематичних парах для ШМЧК з вихідною ланкою повзуном при  $j_B = 140^\circ$

має приблизну зупинку на інтервалі  $90^\circ$  повороту кривошипа. Механізм має наступні параметри:  $l_{OA} = 0,28; l_{AC} = 0,985; l_{AD} = 0,251; l_{CD} = 0,8;$   
 $\alpha = 11^\circ; l_{DE} = 0,554; l_{CB} = 0,3; l_{BE} = 1,12; l_{BF} = 2,06; l_{EF} = 1,12.$  Розмах коромисла дорівнює:  $y^\Sigma = 37^\circ;$  максимальний кут повороту коромисла на висті:  $\Delta y_{5 \max} = 0,17^\circ; \Delta y_{5 \max} = 0,0045 y^\Sigma.$

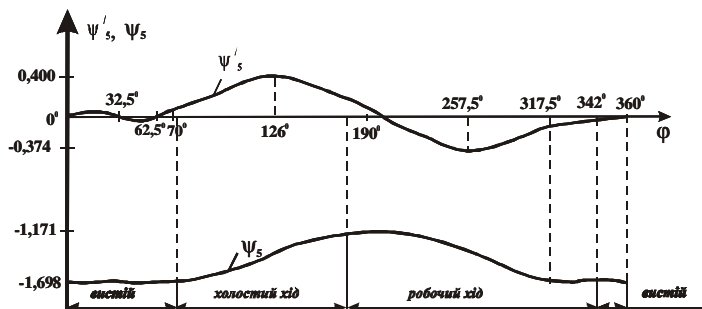


Рис. 13. Кут повороту та аналоги кутової швидкості вихідного коромисла для ШМЧК з вихідною ланкою коромислом при  $j_B = 90^\circ$

**Аналіз синтезованих механізмів.** Аналіз синтезованих механізмів дозволив зробити наступні висновки:

1. За робочий хід потрібно приймати такий відрізок значень кута повороту кривошипу, де відносні реакції  $R_{35}, R_{45}$  досягатимуть мінімальних значень (в межах одиниці).

2. З рис. 12 видно, що мають місце відносні реакції в кінематичних парах, що перевищують у декілька разів одиницю. Це прийнятно, якщо сила корисного опору має місце тільки на робочому ході або на порядок більше цієї сили на холостому ході.

3. Змінюючи значення коефіцієнтів ваги цільової функції, можна суттєво знизити реакції у кінематичних парах, поліпшити “якість” вистою.

4. Чим менший кут вистою вхідної ланки, тим більша точність вистою вихідної ланки проєктованого механізму (див. рис. 8 та рис. 11).

5. Можна варіювати часом робочого та холостого ходу за рахунок зміни параметра  $n$ , можна варіювати розташуванням робочого та холостого ходів на циклограмі за рахунок зміни напрямку обертання кривошипу, можна варіювати напрямком руху вихідної ланки після вистою за рахунок зміни параметра  $k$ .

6. Розроблену методику оптимізаційного синтезу можна застосовувати як для розв’язання задачі забезпечення циклограми роботи машини (оскільки задається кут вистою вхідної ланки та тривалість робочого та холостого ходів), так і для забезпечення точності вистою, необхідної для виконання певного технологічного процесу.

**Висновки.** Найбільш важливі висновки, наукові та практичні результати синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу з наближеним вистоем вихідної ланки:

1. Аналіз літературних даних показав відсутність ефективних аналітичних методів кінематичного синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу з вистоем вихідної ланки, тому розробка нових методів, комплексної математичної моделі, алгоритмів і програмного забезпечення кінематичного синтезу визначена як актуальне і важливе завдання машинознавства.

2. Розроблено методику кінематичного аналізу кулісних механізмів з криволінійним пазом [6]. Доведено кінематичну еквівалентність усіх важільних механізмів з групами другого порядку, у тому числі шестиланкових механізмів четвертого класу, кулісним механізмам з криволінійною кулісою. Це дало можливість з’ясувати граничні можливості шестиланкових механізмів четвертого класу та запропонувати методи і алгоритми кінематичного синтезу цих механізмів [5].

3. Розроблено метод, комплексну математичну модель, алгоритми, числові моделі й програмне забезпечення кінематичного синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу з вистоем вихідної ланки. Запропонований метод кінематичного аналізу з мінімальним використанням ітерацій дає похибку порівняно з іншими відомими методами за переміщеннями вихідної ланки не більше, ніж 0,1%.

4. Реалізована стратегія вибору раціональних параметрів шестиланкових механізмів четвертого класу, яка втілена у комплексному програмному забезпеченні кінематичного синтезу, завдяки якому можна визначити відносні розміри ланок механізму, максимальні значення переміщень на інтервалі вистою, максимальні значення кутів повороту коромисла на інтервалі вистою, значення аналогів швидкостей та аналогів прискорень вихідної ланки, реакції в кінематичних парах. Наведено ряд прикладів синтезованих механізмів з різними кінематичними і динамічними характеристиками. Аналіз проведених числових експериментів показав, що при наступному виборі простору існування випадкових точок параметрів:

$$Ch[1] = 0,4j_B, Ck[1] = 0,6j_B, Ch[2] = 0,4C[3], Ck[2] = 0,6C[3], Ch[3] = -0,9p,$$

$$Ck[3] = -0,1p, Ch[4] = 0,1p, Ck[4] = 0,9p, Ch[5] = 0,1, Ck[5] = 1,5, Ch[6] = 0,1p,$$

$$Ck[6] = 2p - 0,1, Ch[7] = 0,1, Ck[7] = 1,5, Ch[8] = 0,2, Ck[8] = 0,8,$$

де  $Ch[i]$  – початок відрізка,  $Ck[i]$  – кінець відрізка зміни  $i$ -го параметра ( $i = 1 \div 8$ ), одержали, що приблизно 8% області заданого простору параметрів відповідає параметрам працездатних механізмів.

5. Було розв’язано ряд практичних задач, отримані наступні важливі для практики результати: для верстата IB23A, розробленого ВАТ “ВЕЛТ” [7],



визначено удосконалення кінематичної схеми шестиланкового механізму досилання без вистою шляхом заміни його шестиланковим механізмом четвертого класу з вистоєм вихідного повзуна у межах 7 мм (3,5 % його ходу) на інтервалі  $J_B = 140^\circ$ . Завдяки цій заміні, крім забезпечення вистою, додатково одержано такі результати: хід вихідного повзуна зменшений на 50% (з 400 мм до 200 мм), середня швидкість повзуна у момент контакту із заготовкою зменшена на 58% (з 9,6 м/с до 4 м/с), габарити верстату у напрямку досилання зменшені на 22%, маса верстату зменшена на 12% (з 1300 кг до 1144 кг) [5].

6. Одержані результати впроваджені шляхом передачі теоретичних розробок та програмного забезпечення і застосовуються в практиці проектування складних механічних систем у ВАТ “ВЕЛТ” зі значним ефектом. Це стало можливим за рахунок досягнення заданих кінематичних характеристик механізму з вистоєм, вдосконалення циклограми роботи і зниження масогабаритних параметрів механізму.

**Список літератури:** 1. *Зинченко Е.И., Ткачук Н.А., Храмова И.Я.* Использование теории синтеза по трем положениям для синтеза механизмов четвертого класса с приближенным вистоим выходного звена // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем вип.: „Машинознавство та САПР” – Харків: НТУ “ХПІ”. – 2006. – Вип. 33. – С.34 – 45. 2. *Зинченко О.И.* Кінематичний синтез шестиланкових механізмів четвертого класу з вистоєм вихідної ланки: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 621.01 / Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”. – Харків. – 2007. – 20 с. 3. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. – М.: Гос. изд-во физ.- мат. лит-ры, 1959. – 1084 с. 4. *Новгородцев В.А., Зинченко Е.И.* Кинематика плоских механизмов, содержащих одну структурную группу второго порядка // Динаміка і міцність машин. – Харків: ХДПУ. – 1999. – Вип. 53. – С.127–132. 5. *Зинченко О.И.* Кінематичний синтез шести ланкових механізмів четвертого класу з вистоєм вихідної ланки: Дис. ... канд. техн. наук: 05.02.02. – Харків – 2007. – 176 с. 6. *Новгородцев В.О., Зинченко О.И.* Кінематика кулісних механізмів з криволінійними пазами // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ. – 1999. – Вип. 49. – С. 73-80. 7. *Зинченко Е.И.* Задача усовершенствования кинематических схем станков для изготовления и укладки пазовых коробов в пазы сердечников статоров электродвигателей для решения проблемы повышения эффективности производства электрических машин переменного тока // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем вип.: „Машинознавство та САПР”. – Харків: НТУ “ХПІ”. – 2006. – Вип. 3. – С. 86–93.

*Поступила в редколлегию 03.10.08*

**УДК 519.2:621.658.512**

**Н.Ю.ЛАМНАУЭР**, канд. техн. наук, **О.Д. ПТАШНЫЙ**, канд. пед. наук, **Ю.И. СОЗОНОВ**, канд. техн. наук, Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков

## ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ИЗДЕЛИЙ

Запропонована модель надійності виробів, що обертаються, яка враховує внутрішні та зовнішні впливи. Знайдені оцінки параметрів цієї моделі, які дозволяють розв'язувати ряд практичних задач, пов'язаних з питаннями надійності виробів.

The model of reliability of wares which are revolved is offered which takes into account the internal and external influencing. Estimations of parameters of this model are found which allow to settle the row of the practical tasks related to the questions of reliability of wares.

**Введение.** Неуклонное повышение качества продукции является одной из составляющих успешного выхода Украины на мировой рынок. Качественной должна быть продукция во всех областях народного хозяйства, а в машиностроении особенно, так как именно машиностроение является его основой. Поэтому основной задачей современного машиностроения является получение продукции заданного качества с минимальными затратами. Качество изготовления продукции определяется совокупностью свойств, процессом ее изготовления, соответствием этого процесса и его результатов установленным требованиям.

Показатели качества машин имеют изменчивый характер, что является следствием погрешностей изготовления деталей и дополнительных изменений показателей их качества за счет технологии изготовления. Так, для вращающихся изделий погрешности приводят к изменению динамического качества машин, появлению вибраций, шума, искажению поверхностей контакта и других нежелательных явлений. Все это усиливается за время работы машины и, как следствие, приводит к потере надежности и долговечности, а при достижении ими предельных значений приводит к авариям.

Так как 80% изделий машиностроения имеют узлы, которые вращаются [1], то актуальной является задача обеспечения качества вращающихся соединений. Одна из основных задач машиностроения – создание изделий с высокими качественными показателями – не может быть решена без развития науки о надежности и долговечности машин. Поэтому основной задачей, стоящей перед производителями в области повышения качества изделий машиностроения, стала необходимость создания стройной математико-статистической теории надежности вращающихся изделий. Данная теория должна связывать в единое целое теоретические и прикладные задачи обеспечения надежности.

Поскольку надежность и долговечность машины – это ее «динамика качества», так как рассматривается изменение качества машины во времени, то вредные процессы, приводящие к отказам, классифицируют по скорости их протекания и рассматривают картину взаимодействия машины с этими процессами [2].

Вредные процессы могут возникать как в самом изделии, так и быть результатом внешних воздействий на это изделие. Если уровень внешних или внутренних воздействий превзойдет некоторое критическое значение, то изделие может перестать функционировать, т. е. произойдет нарушение его работоспособности.

Известно также, что при возникновении колебаний в изделии имеется обратная связь между его упругой системой и данным рабочим процессом или трением, которые являются источником колебаний, т. е. возникают автоколебательные процессы.

Статистические данные о потере работоспособности изделия при правильной методике сбора и обработки информации дают достоверные сведения о надежности и долговечности изделия данного типа с учетом реальных условий эксплуатации.

Аналитические расчеты являются тем источником информации о будущем поведении изделия. Только расчетным путем можно судить о надежности будущего изделия на стадии его проектирования, до минимума свести время, необходимое для определения показателей надежности и долговечности изделий, выявить основные взаимосвязи между показателями надежности и параметрами, характеризующими конструкцию, технологию и методы эксплуатации изделия.

Однако в настоящее время нет методики и даже общей схемы исследования вращающихся изделий на надежность и долговечность. Такое положение объясняется чрезвычайной сложностью проблемы расчета изделия на надежность и долговечность. Эта сложность связана с разработкой самих методов расчета и с построением принципиальной схемы расчета на надежность и долговечность.

В основе инженерной задачи по определению параметров изделия с учетом износа, коррозии, усталости и др. лежат физические процессы, приводящие к

потере работоспособности машины с течением времени. Но без знания законов протекания процессов нельзя вести расчеты по оценке скорости потери данным узлом работоспособности, нельзя решить задачу прогноза поведения данной системы.

Расчет должен оценить вероятность возникновения отказов в результате двух различных причин – от действия вредных процессов, возникающих в изделии (постепенные отказы) и от случайных внешних или внутренних воздействий, связанных с колебательным процессом вращающегося изделия. Соответственно имеется два потока информации, которую надо получить для расчета показателей надежности. При расчете постепенных отказов должен быть положен физический закон потери материалом начальных свойств. Например, зависимость интенсивности износа от физико-механических и геометрических характеристик материала и режимов работы пары. Так, для простейшего, однако широко распространенного случая износа деталей машин М.М. Хрущевым и Е.С. Берковичем установлен закон о пропорциональности износа удельным нагрузкам и пути трения и его зависимость от микротвердости материала [3].

Кроме постепенных отказов, для вращающихся изделий имеются пиковые нагрузки со случайной амплитудой и частотой, вызванные биением. Примером таких изделий могут служить подшипники качения, зубчатые колеса и ряд других изделий, имеющих биение в процессе вращения.

**1. Модель надежности вращающихся изделий.** Проведенный анализ [4] показал, что имеющиеся процессы, связанные с износом и другими внутренними процессами, позволяют приближенно описать прочность изделия за время  $t$  в виде

$$R(t) = r \exp(-bt), \quad (1)$$

где  $r$  – начальная прочность изделия,  $b$  – параметр, характеризующий величину внутреннего отрицательного процесса.

Примем, что последовательность импульсов нагрузки, связанная с биением есть случайная величина, имеющая равномерный закон распределения

$$F(t) = \frac{b-t}{b-a}, \quad (a \leq t \leq b) \quad (2)$$

где  $a$  – нижний порог нагрузки, а  $b$  – верхний порог нагрузки, вызванной биением вращающегося изделия. Отсюда из [5] получаем, что интенсивность отказов  $I(t)$ , происходящих от превышения нагрузки импульсов над прочностью, имеет вид:

$$I(t) = h(t) \int_{R(t)}^{\infty} F(x) dx, \quad (3)$$

где  $h(t)$  – частота появления импульсов нагрузки.

Распределение (2) имеет верхний порог  $b$ , поэтому функция надежности  $\mathbf{I}(t)$  вращающегося изделия имеет нижний порог ресурса

$$t_0 = \frac{1}{b} \ln \frac{r}{b}. \quad (4)$$

Отметим, что определение нижнего порога ресурса изделия и сравнение полученных показателей с заданными техническими условиями позволяет оценить уровень надежности данного изделия и при необходимости указать пути улучшения этих показателей.

Отсюда принимая, что частота  $h(t)$  постоянная и равна  $h$ , получаем функцию надежности из (4), (3), (2) и (1)

$$\mathbf{I}(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{\infty} I(t) dt\right) = \exp\left(-\frac{h \left( bt - \frac{b \ln\left(\frac{r}{b}\right)}{b} - \frac{b}{b} + \frac{re^{-bt}}{b} \right)}{b-a}\right). \quad (5)$$

Функция плотности распределения наработки изделия до отказа имеет вид

(рис. 1)

$$f(t) = -\mathbf{I}'(t) = \frac{h(b - re^{-bt})}{b-a} \cdot \mathbf{I}(t). \quad (6)$$

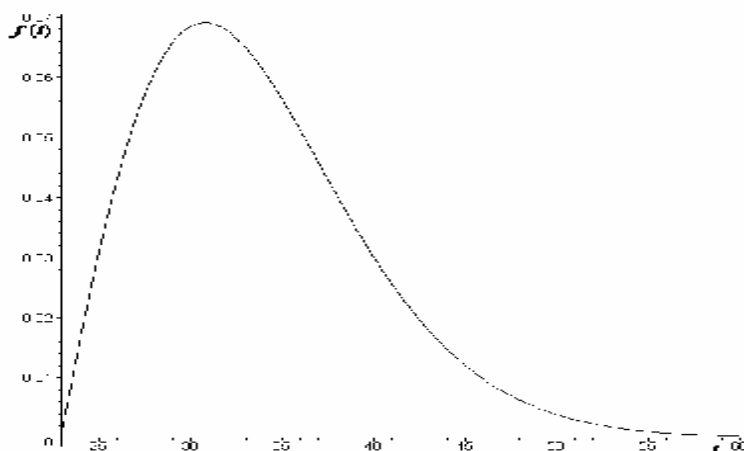


Рис. 1. Плотность распределения наработки до отказа вращающегося изделия при  $a = 0$ ,  $b = 2$ ,  $h = 0,4$ ,  $r = 5$ .

**2. Оценка параметров модели надежности вращающихся изделий.** Любая модель, какая бы адекватная она ни была, не является рабочей до тех пор, пока не будут найдены оценки ее параметров. Поэтому найдем ненаблюдаемые параметры  $r$  и  $b$  модели (6). Параметры  $a$ ,  $b$  и  $h$  могут быть найдены экспериментально, где оптимальные оценки с минимальной дисперсией параметров  $a$  и  $b$  определяются по формулам [6]:

$$a^* = \frac{nx_{(1)} - x_{(n)}}{n-1}, \quad b^* = \frac{nx_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}, \quad (7)$$

где  $n$  – число экспериментов, определяющих величины пиковых нагрузок;  $x_{(n)}$  – наибольшая величина нагрузки,  $x_{(1)}$  – наименьшая величина нагрузки.

Частота  $h$  обычно задается или легко считывается как среднее ее значение.

Итак будем считать, что имеется двухпараметрическое распределение (6) с параметрами  $r$  и  $b$ . Математическое ожидание этого распределения имеет вид

$$M(T) = \frac{e^{\frac{hb}{2(b-a)b}}}{b(bb-ab+hb)} \cdot \left( \frac{hb}{(b-a)b} \right)^{\frac{hb}{2(b-a)b}-2} \left\{ hbW_{\frac{hb}{2(b-a)b}, \frac{hb}{2(b-a)b} + \frac{1}{2}} \left( \frac{hb}{(b-a)b} \right) + \right. \\ \left. (b(b-a)+hb)W_{\frac{hb}{2(b-a)b} + 1, \frac{hb}{2(b-a)b} + \frac{1}{2}} \left( \frac{hb}{(b-a)b} \right) \right\} + \frac{1}{b} \ln \frac{r}{b}, \quad (8)$$

где  $W_{x,y}(z)$  – функция Уиттекера [7].

Функция распределения наименьшего члена выборки объема  $m$  имеет вид [8]  $F_1(t) = 1 - (\mathbf{I}(t))^m$ , а плотность распределения наименьшего члена выборки  $f_1(t) = -m(\mathbf{I}(t))^{m-1} \mathbf{I}'(t)$ . Тогда модальное значение наименьшего члена выборки определяется из уравнения

$$(m-1)(\mathbf{I}'(t))^2 + \mathbf{I}(t)\mathbf{I}''(t) = 0. \quad (9)$$

Для модели (5) уравнение (9) имеет решения

$$t_{\text{mod}(1),1} = \frac{-1}{b} \ln \frac{2bhm + b(b-a) + \sqrt{4bbhm(b-a) + b^2(b-a)^2}}{2hmr},$$

$$t_{\text{mod}(1),2} = \frac{-1}{b} \ln \frac{2bhm + b(b-a) - \sqrt{4bbhm(b-a) + b^2(b-a)^2}}{2hmr}.$$

Модальное значение наименьшего значения выборки должно быть больше нижнего порога ресурса (4). Поэтому выбираем значение  $t_{\text{mod}(1),2}$ . Принимая модальное значение  $t_{\text{mod}(1),2}$  за наименьшее значение выборки  $t_{(1)}$ , находим оценку начальной прочности  $r$

$$r = \frac{e^{bt_{(1)}} [2bhm + b(b-a) - \sqrt{4bbhm(b-a) + b^2(b-a)^2}]}{2hmt_{(1)}}. \quad (10)$$

Оценку параметра  $b$  находим из формулы математического ожидания  $M(T)$  (8), принимая его за средний ресурс  $\bar{t}$ .

$$\begin{aligned} \bar{t} - t_{(1)} &= \frac{e^{\frac{hb}{2(b-a)b}}}{b(bb-ab+hb)} \cdot \left( \frac{hb}{(b-a)b} \right)^{-\frac{hb}{2(b-a)b}-2} \left\{ hbW_{\frac{hb}{2(b-a)b}, \frac{hb}{2(b-a)b} + \frac{1}{2}} \left( \frac{hb}{(b-a)b} \right) + \right. \\ & \left. (b(b-a)+hb)W_{\frac{hb}{2(b-a)b}+1, \frac{hb}{2(b-a)b} + \frac{1}{2}} \left( \frac{hb}{(b-a)b} \right) \right\} + \\ & \frac{1}{b} \ln \frac{2bhm + b(b-a) - \sqrt{4bbhm(b-a) + b^2(b-a)^2}}{2bhm}. \end{aligned} \quad (11)$$

Трансцендентное уравнение (11) имеет однозначное решение и достаточно легко решается. Так, например, в системе Maple при  $m=30$ ,  $a=2$ ,  $b=2,5$ ;  $t_{(1)}=100$ ,  $\bar{t}=150$  и  $h=0,36$  имеем  $b=0,0002566791704$  и  $r=2,559414288$ . Откуда оценка нижнего порога ресурса  $t_0=91,50608697$ .

#### Выводы

1. Предложена физико-статистическая модель надежности вращающихся изделий, учитывающая процесс биения.
2. Найдены некоторые числовые характеристики данной модели, и на их базе предложены оценки параметров данной модели.
3. Поскольку данная модель использует результаты наблюдений, то она может быть применима при различных скоростях процесса вращения и внутренних отрицательных процессах.

**Список литературы:** 1. Дальский А.М., Кулешова З.Г. Сборка высокоточных соединений в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1988. – 304 с. 2. Дальский А.М., Котова Г.А., Никитский В.С. Комплексный метод оценки надежности шпиндельных узлов прецизионных станков. // Станки и инструмент. – 1969. – № 6. – С.5-7. 3. Хрущев М. М., Беркович Е. С. Точное определение износа деталей машин // АН СССР. Ин-т машиноведения – М.: АН СССР, 1953. –116 с. 4. Мур Д. Ф. Основы и применения трибоники. – М.: Мир, 1978. – 487 с. 5. Резниченко Н.К., Созонов Ю. И. Надежность многовитковых индукторов // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – 2005. – Вып. 39. – С.22-28. 6. Ламнауэр Н.Ю. Экономический вопрос выбора технологии финишной обработки изделий в машиностроении // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – 2008. – Вып. 1. – С.113-120. 7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Часть вторая: Пер. с англ. / Под ред. Ф.В. Широкова – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1963. – 516 с. 8. Дейвид Г. Порядков статистики: Пер. с англ. / Под ред. В.В.Петрова – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 336с.

Поступила в редколлегию 09.10.08

## АНАЛИЗ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ: ВАРИАНТ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для дослідження контактної взаємодії складнопрофільних тіл пропонується застосувати метод граничних інтегральних рівнянь. Особливістю запропонованої реалізації методу є аналітичний спосіб обчислювання елементів матриці коефіцієнтів впливу для підобластей трикутної форми. Поверхня можливого контакту розбивається на ці підобласті регулярною сіткою. Визначення області контакту та розподілу контактної тиску здійснюється методом ітерацій.

An application of boundary integral equations method is offered for analysis of contact interaction of complex shaped bodies. Analytical procedure for evaluation of influence coefficients matrix in triangular subdomains distinguishes the proposed realization of the method. Probable contact area is divided into these subdomains by a regular mesh. Resultant contact spot and contact pressure distribution is achieved by means of an iterative algorithm.

**Введение.** При исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями [1-3] возникает необходимость проведения многовариантного решения задач анализа при варьировании формы и размеров взаимодействующих тел. Конкурирующими требованиями при этом выступают оперативность и точность решения единичной задачи анализа, которые в значительной мере определяются методом, выбранным для ее решения. Крайними вариантами выбора являются, например, метод Герца и метод конечных элементов (МКЭ). Первый значительно сужает множество тел, для которых он дает приемлемую точность решения, однако позволяет проводить достаточно оперативную оценку контактных давлений и контактных площадок. Вторым применим и обеспечивает высокую точность практически для тел конечных размеров любой формы, однако требует больших затрат времени на формирование численных моделей, особенно для контакта сложнопрофильных тел. Компромиссным с этой точки зрения представляется метод граничных интегральных уравнений (МГИУ). Он свободен от требований теории Герца о первоначальном точечном контакте тел и о представлении локального зазора в сопряжении тел в виде положительно определенной квадратичной формы от координат, задающих точки общей касательной плоскости. Этим существенно расширяется множество тел, доступных для исследования их контактного взаимодействия. С другой стороны, в отличие от МКЭ, он оперирует с существенно меньшими по размерам дискретными моделями, поскольку снижает на единицу физическую размерность при постановке задачи. Таким образом, для многих случаев исследуемого контактного взаимодействия сложнопрофильных тел МГИУ является альтернативой методу Герца и МКЭ, сочетая преимущества первого и второго и будучи лишен в значительной мере их недостатков, и поэтому представляет интерес при решении контактных задач.

*Целью* данной статьи является постановка, формулировка и реализация одного из вариантов метода граничных интегральных уравнений для исследования контактного взаимодействия сложнопрофильных тел.

**Кинематическая модель контакта.** При исследовании контакта тел несогласованной формы в отсутствие трения в первом приближении рассматриваются перемещения точек поверхностей и зазор между ними только в одном направлении. На этом основании выводятся кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта основано на пренебрежении изменением направления векторов нормали поверхностей взаимодействующих тел [4, 5]. Примером является теория Герца, в рамках которой нормальный зазор между поверхностями приближенно представляется квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой первоначального касания тел.

В более общем случае приходится учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку  $O$ ) традиционно располагают на линии действия прижимающей силы  $P$  (рис. 1). Оси  $z_1$  и  $z_2$

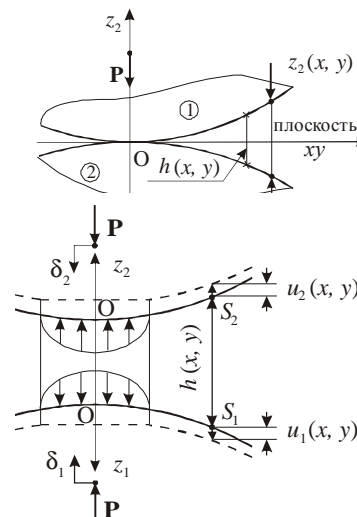


Рис. 2. Деформация тел и образование контактной

для удобства имеют направление вовнутрь тела (здесь и далее нижний индекс соответствует номеру тела, к которому относится обозначение). В этом случае уравнения каждой из поверхностей можно записать в виде  $z_i = z_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , а зазор соответственно вычисляется как

$$h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y). \quad (1)$$

В деформированном состоянии под действием силы  $\mathbf{P}$  оба тела приводятся в контакт по некоторой площадке. При этом перемещение произвольной точки границы  $S_i$  каждого из тел в направлении оси  $z$  складывается из смещения  $\delta_i$ , величина которого отсчитывается в направлении, обратном положительному для оси  $Oz_i$ , и отклонения  $u_{z_i}$  от первоначальной формы соответствующей поверхности (рис. 2). Первая компонента представляет собой сближение тел и не связана с их деформированием, а вторая отвечает деформациям, вызванным действием искомого контактного давления. Данное разложение традиционно для задач о взаимодействии упругого полупространства с гладким штампом, в которых компонентами сближения  $\delta_i$  являются перемещения бесконечно удаленной точки полупространства или всего жесткого штампа как абсолютно твердого тела. Такое представление вертикальных перемещений в пренебрежении поперечными тангенциальными в плоскости  $Oxy$  приводит к следующей общепринятой записи нелинейных соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (2)$$

**Модель деформирования упругого полупространства.** Приведенная выше кинематическая модель контакта хорошо сочетается с моделью упругого поведения твердых тел при приложении контактного давления, основанной на том приближении, что перемещения точек их поверхности в зоне контакта и локальные деформации эквивалентны перемещениям и деформациям упругого полупространства под действием нормального распределенного усилия.

Для упругого полупространства известно интегральное соотношение, устанавливающее связь между действующим давлением и нормальными перемещениями точек его границы (рис. 3):

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta, \quad (3)$$

где  $\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ .

Поскольку распределения контактных давлений, действующих на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, то в соотношениях (2) представляется возможным выразить неизвестные перемещения  $u_{z_1}(x, y)$  и  $u_{z_2}(x, y)$  исключительно через единственную функцию распределения давления, которая в дальнейшем будет искомой:

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = \left( \frac{1-\nu_1^2}{p E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{p E_2} \right) \iint_S \frac{p(x, h)}{r} dx dh = \frac{1}{p E^*} \iint_S \frac{p(x, h)}{r} dx dh. \quad (4)$$

Здесь  $\nu_i, E_i, i = 1, 2$  – упругие параметры каждого из контактирующих тел. Контактная площадка  $S$  и распределение давлений  $p(\xi, \eta)$ , присутствующие в правой части равенства, являются неизвестными.

**Численный подход.** Для определения контактной площадки и распределения давлений в случае сложной геометрии контактирующих тел, когда контактная задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, привлекают различные численные методы. Среди них для решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел рассмотрим те, которые основаны на замене непрерывных распределений давления набором элементов. Они различаются между собой типом аппроксимации неизвестных контактных давлений и способом учета граничных условий.

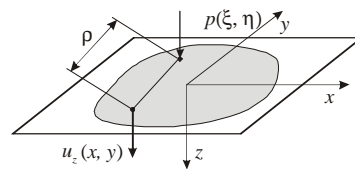


Рис. 3. Перемещение границы полупространства под действием давления

Здесь будет использовано кусочно-линейное представление распределения давления, которому отвечают непрерывные и дифференцируемые поверхностные смещения. Искомая функция контактных давлений приближается суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которых расположены в узлах регулярной сети шага  $c$ , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 4), и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давлений  $p_n$ :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n \quad (5)$$

Для нахождения величин усилий в узлах сетки, наилучшим способом удовлетворяющих граничным условиям, применимы два следующих подхода: *прямой метод (или метод коллокаций)*, в котором система разрешающих соотношений получается путем записи условий (2) для заданного набора точек коллокации [4, 5]; *вариационный метод (принцип Калькера)*, в рамках которого за действительные принимаются узловое значения контактных давлений, минимизирующие функционал энергии [6].

Применение каждого из вышеуказанных методов требует умения вычислять нормальные смещения (4) для используемого типа аппроксимирующих давлений. Очевидно, что такая задача эквивалентна определению перемещений  $u_z$ , отвечающих каждой из базисных нагрузок. Для пирамидальных элементов (рис. 4, б) в силу их однородности достаточно вычислить значения поверхностных смещений для одной единичной пирамиды с единичными сторонами как

$$\begin{aligned} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi E^*} \sum_m \iint_{S_m} \frac{\sum_n \hat{p}(\xi - \xi_m, \eta - \eta_m) \cdot p_m}{\rho(x, y, \xi, \eta)} d\xi d\eta = \left. \begin{array}{l} \xi = c\xi, \eta = c\eta \\ x = c\bar{x}, y = c\bar{y} \end{array} \right| = \quad (6) \\ &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_m \iint_{S^{(1)}} \frac{\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) \cdot p_m}{\rho(x - \xi_m, y - \eta_m, \xi, \eta)} d\xi d\eta = \frac{1}{\pi E^*} c \sum_m w(\bar{x} - \xi_m, \bar{y} - \eta_m), \end{aligned}$$

где  $S = \bigcup_m S_m$ ;  $S_m$  – шестиугольная область пирамидального элемента с вершиной в узле  $(\xi_m, \eta_m)$ ;  $S^{(1)}$  – шестиугольная область с единичными сторонами;  $\hat{p}^{(1)}$  – единичное пирамидальное распределение на ней, а

$$w(x, y) = \sum_m \iint_{S^{(1)}} \frac{\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (7)$$

является „шаблоном” формы распределения перемещений для единичного пирамидального элемента.

Можно предложить простой алгоритм вычисления значений этой функции как в отдельных точках [4], так и во всей плоскости [7]. Ниже предлагается один частный способ вычисления, легко численно реализуемый.

Рассмотрим произвольный треугольник  $\Delta A_1 A_2 A_3$  и интегралы типа

$$\iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 \iint_{\Delta_i} \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta \quad (8)$$

Треугольники  $\Delta_i$  образованы точкой  $B(x, y)$  и двумя вершинами исходного треугольника (рис. 5) и связаны с определенной ориентацией: если пересечение  $\Delta_i$  с  $\Delta A_1 A_2 A_3$  не

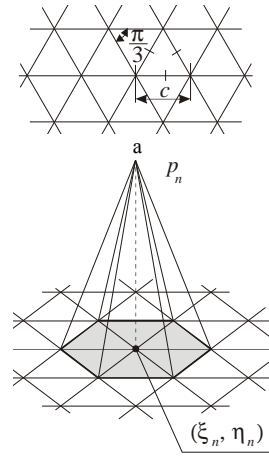
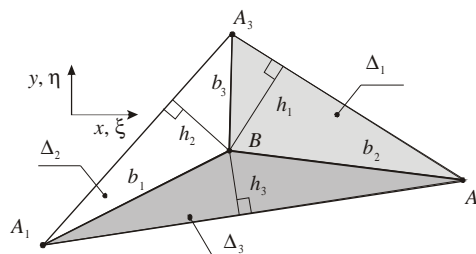


Рис. 4. Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления



пусто, то ориентация положительна, в противном случае – отрицательна. Этим определяются знаки интегралов в правой части равенства (8), так что разложение исходного интеграла в виде суммы трех остается справедливым и в случае, когда т.  $B$  лежит за пределами  $\Delta A_1 A_2 A_3$ .

Далее будут рассмотрены распределения  $p(\xi, \eta)$  вида:

$$\{p(\xi, \eta)=1; p(\xi, \eta)=x-\xi; p(\xi, \eta)=y-\eta, \quad (9)$$

комбинацией которых определяется любая линейно распределенная на  $\Delta A_1 A_2 A_3$  нагрузка.

Для отдельного треугольника  $\Delta_i$  с учетом ориентации отрезков рассмотрим следующие углы (рис. 6):

$$\varepsilon_{2i-1} = \angle(\mathbf{h}_i, \mathbf{b}_{i+1}); \quad \varepsilon_{2i} = \angle(\mathbf{h}_i, \mathbf{b}_{i+2}); \quad \theta_i = \angle(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_i). \quad (10)$$

В приведенной выше записи использовано циклическое правило суммирования индексов (при  $i=2$   $b_{i+2}$  обозначает  $b_1$ ). На примере треугольника  $\Delta_1$  легко получить значения интегралов для распределений в (9):

$$\iint_{\Delta_i} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_0^{h_1/\cos\varphi} \left( \frac{1}{r} r \right) dr d\varphi = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{h_1}{\cos\varphi} d\varphi = h_1 \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_i} \frac{x-\xi}{\rho} d\xi d\eta &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_0^{h_1/\cos\varphi} \left( \frac{-r \cos(\theta_1 + \varphi)}{r} r \right) dr d\varphi = \\ &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \cos(\theta_1 + \varphi) \frac{1}{2} \left( \frac{h_1}{\cos\varphi} \right)^2 d\varphi = -\frac{1}{2} (h_1)^2 \cos\theta_1 \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} (h_1)^2 \sin\theta_1 \left[ \frac{1}{\cos\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_i} \frac{y-\eta}{\rho} d\xi d\eta &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \int_0^{h_1/\cos\varphi} \left( \frac{-r \sin(\theta_1 + \varphi)}{r} r \right) dr d\varphi = \\ &= -\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sin(\theta_1 + \varphi) \frac{1}{2} \left( \frac{h_1}{\cos\varphi} \right)^2 d\varphi = -\frac{1}{2} (h_1)^2 \sin\theta_1 \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} (h_1)^2 \cos\theta_1 \left[ \frac{1}{\cos\varphi} \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

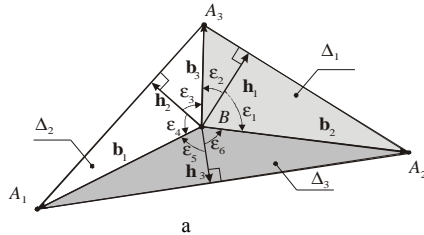
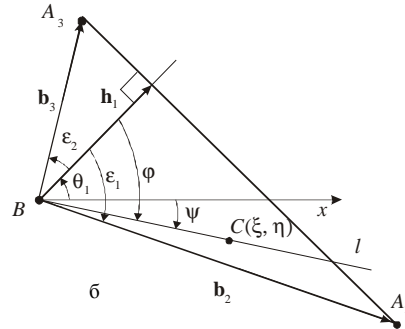


Рис. 6. Ориентация углов и отрезков в  $\Delta A_1 A_2 A_3$



Обобщая выражения (11)-(13), можем вычислить значения основных интегралов для всех трех малых треугольников:

$$I_{00}^{(i)} = \iint_{\Delta_i} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta = h_i \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}}; \quad (14)$$

$$I_{10}^{(i)} = \iint_{\Delta_i} \frac{x-\xi}{\rho} d\xi d\eta = -\frac{1}{2} h_i^2 \cos\theta_i \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} \right] + \frac{1}{2} h_i^2 \sin\theta_i \left[ \frac{1}{\cos\varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} \right]; \quad (15)$$

$$I_{01}^{(i)} = \iint_{\Delta_i} \frac{y-\eta}{\rho} d\xi d\eta = -\frac{1}{2} h_i^2 \sin \theta_i \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin \varphi}{1-\sin \varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} \right] - \frac{1}{2} h_i^2 \cos \theta_i \left[ \frac{1}{\cos \varphi} \Big|_{\varepsilon_{2i-1}}^{\varepsilon_{2i}} \right]. \quad (16)$$

В свою очередь для всего  $\Delta A_1 A_2 A_3$ , исходя из представления (8), можем записать:

$$I_{00} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{1}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 I_{00}^{(i)}; \quad (17)$$

$$I_{10} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{x-\xi}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 I_{10}^{(i)}; \quad (18)$$

$$I_{01} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{y-\eta}{\rho} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 I_{01}^{(i)}. \quad (19)$$

Следуя [7], эти соотношения можно использовать для вычисления формы перемещений от единичной пирамидальной нагрузки. Для этого необходимо рассмотреть линейный элемент нагрузки, изображенный на рис. 7, а. В нем элементное базисное распределение принимает единичное значение в одной вершине и нулевое в остальных двух. Совершив замену координат, как показано на рис. 7, б, такую форму распределения на  $\Delta A_1 A_2 A_3$  можно записать как

$$p^{(i)}(\xi', \eta') = 1 - \eta' / H_1. \quad (20)$$

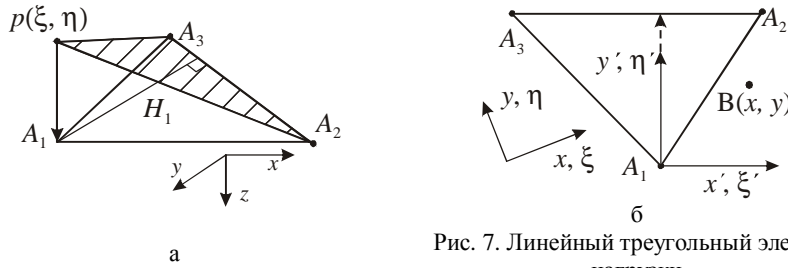


Рис. 7. Линейный треугольный элемент нагрузки

Поскольку  $1 - \eta' / H_1 = [1 - y' / H_1] + 1 / H_1 [y' - \eta']$ , справедливо представление интеграла от такой элементарной нагрузки через уже вычисленные в (17)-(19):

$$I_{01} = \iint_{\Delta A_1 A_2 A_3} \frac{p^{(i)}(\xi', \eta')}{\rho} d\xi' d\eta' = [1 - y' / H_1] I_{00} + [1 / H_1] I_{01}.$$

Комбинацией шести таких линейных элементов легко получить искомый пирамидальный и вычислить для него форму перемещений (7). Следует отметить, что все приведенные выше соотношения являются точными, а поэтому получаемые описанным выше способом значения „шаблона”  $w(x, y)$  также будут точными. Однако при численной реализации данного алгоритма область его применимости ограничена. При определении формы перемещений (7) в точках, расположенных далеко от единичного элемента, его вычисление связано с выполнением большого числа операций сложения величин разного знака с близкими абсолютными значениями, что приводит к возникновению численной погрешности. В этом случае, начиная с некоторой величины удаления, пирамидальную нагрузку можно заменить сосредоточенной и принять соответствующее ей значение интеграла (7) за окончательный результат.

Любой подход к непосредственно решению контактной задачи, основанный на применении соотношений (3)-(5), предполагает вычисление перемещений под действием представленной узловыми значениями нагрузки в заданном конечном числе точек. Если это множество имеет некоторый регулярный порядок, как, к примеру, множество узлов сетки элементов давления, изображенной на рис. 4, то процедуру вычисления узловых значений перемещений можно упростить, снизив вычислительные затраты.

Продемонстрируем эту возможность в случае, когда для перемещений и контактных давлений используется общая регулярная треугольная сетка. Для обозначения ее узлов будем применять как сплошную индексацию  $\{I_n\}_{n=1}^N$ , так и специальную систему отсчета. За ее начало возьмем точку  $O$ , которая обычно является узлом сетки. Оси этой системы направлены вдоль двух ортов  $\mathbf{e}_i$  и  $\mathbf{e}_j$ , угол между которыми составляет  $\pi/3$  (рис. 8). В этом случае любому узлу сетки можно поставить в соответствие целочисленные координаты-индексы  $(i, j)$  таким образом, что его радиус-вектор будет вычисляться как

$$\mathbf{r}_j = c(\mathbf{e}_i \cdot i + \mathbf{e}_j \cdot j) \Leftrightarrow J \sim J_{ij}. \quad (21)$$

Используя эту индексацию, можем переписать равенство (6) для узловых точек в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) = u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) = \\ &= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w \left( \frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c} \right) \cdot p_{kl} = \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w(i-k, j-l) \cdot p_{kl} = \sum_m C_{nm} p_m, \end{aligned} \quad (22)$$

отражающем то, как вычисляется матрица коэффициентов влияния  $C$ , связывающая узловые значения перемещений с узловыми значениями контактных давлений. Из этой записи также видно, как по узловым значениям «шаблона» (7) на единичной сетке (для которой  $c = 1$ ) определяются коэффициенты влияния для сеток с другими размерами ячейки  $c$ .

Действительно, значение коэффициента  $w \left( \frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c} \right)$  для двух узлов

$J_{ij}$  и  $J_{kl}$  определяется только их относительным расположением, и, соответственно, разницей индексов  $i, k$  и  $j, l$ . Таким образом, достаточно вычислить значение „шаблона” (7) для одного единичного пирамидального элемента в узлах отмасштабированной сетки

$$J_{i'j'} : \mathbf{r}_{J_{i'j'}} = c(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j') \rightarrow w_{i'j'} = w(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j'), \quad (23)$$

а по ним уже определяются коэффициенты влияния  $C_{nm}$  для действительной сетки

$$C_{nm} = \frac{c}{\pi E^*} w(i(n) - i(m), j(n) - j(m)). \quad (24)$$

Более того, из-за наличия осей симметрии пирамидального элемента и сетки оказывается достаточно вычислить значения  $w_{i'j'}$  только в узком секторе  $\{i' \geq 0, 0 \leq j' \leq i'\}$  и хранить их при численной реализации в виде треугольной или симметричной матрицы ( $w_{i'j'} = w_{j'i'}$ ). Для произвольной пары индексов  $(i', j')$  значение  $w_{i'j'}$  тогда можно быстро получать путем серии

„отражений индексов”, как показано на рис. 9. Здесь показана форма области индексов  $(i', j')$ , в которой возможно определение коэффициентов  $w_{i'j'}$  этим способом по предварительно вычисленным значениям  $w = \{w_{i'j'}; 0 \leq i' \leq N_w, 0 \leq j' \leq i'\}$ . Исходная область сетки, в которой непосредственно вычисляются коэффициенты „шаблона” (7), указана на рис. 9 штриховкой. Такой простой прием позволяет в 12 раз уменьшить количество производимых на этом этапе вычислений.

К достоинствам вычисления коэффициента влияния по „шаблону” относится то,

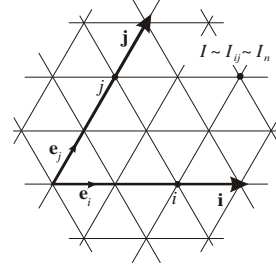


Рис. 8. Система отсчета и индексов для регулярной сетки

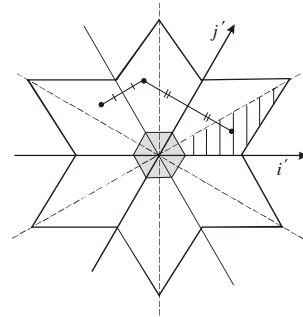


Рис. 9. Отражение индексов для вычисления коэффициентов „шаблона”

что достаточно один раз для всех приложений вычислить и сохранить матрицу  $w$  достаточных размеров, а в дальнейшем для используемых сеток различных размеров и густоты необходимо будет только сформировать матрицу коэффициентов влияния без проведения сложных вычислительных операций.

**Прямой метод решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел** состоит в том, что условия контакта записываются для конечного числа точек. В результате формируется система соотношений, позволяющая найти узловые значения контактных давлений, которые им удовлетворяют [4]. Выбор точек локализации и способ приближенной записи различных условий при этом являются довольно субъективными. Стандартной практикой является их численная проверка для серии модельных задач, поскольку для большого числа вариантов методов не существует строгого доказательства и оценок сходимости.

Использование общей сетки для пирамидальных элементов давления и узлов коллокации позволяет применить для записи соотношений метода выражения (22), согласно которым условия контакта (2) в узлах сетки принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n \text{ - в контакте;} \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n \text{ - вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (24)$$

где  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  – суммарное сближение;  $h_n = h(x_n, y_n)$  – узловые значения первоначального зазора.

Другим условием, которое необходимо учитывать, является неотрицательность давлений, что накладывает на искомые узловые значения следующие ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (25)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m \text{ - вне зоны контакта.} \quad (26)$$

В условия (2) и их дискретную запись (24) входит сближение тел  $\delta$ , которое в большинстве задач является неизвестным. Возникающую в связи с этим неопределенность можно исключить, добавив в систему разрешающих соотношений уравнение, в котором присутствует величина действующего прижимающего усилия  $P$ . Чаще всего бывает заданным именно оно. Это уравнение получаем интегрированием по элементам кусочно-линейно представленного давления:

$$\sum_m \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 p_m = P. \quad (27)$$

Система соотношений (24)-(27) на практике всегда разрешается единственным образом относительно неизвестных  $\{p_m\}_{m=1}^N$  и  $\delta$ . При их определении наибольшей трудностью является то, что форма и размеры области контакта обычно неизвестны. Поэтому для начала необходимо сделать предположения относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и делают начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают истинную область контакта. В ходе последующей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значения контактных давлений. На каждом ее шаге имеется множество  $N_c$ , состоящее из индексов  $n_c$  узлов, предположительно входящих в контакт. Для них должны выполняться уравнения из системы (24), а также равенство (27):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 p_{m_c} = P. \end{cases} \quad (28)$$

Последнее равенство в системе (28) записано с учетом условия (26):  $p_m = 0, m \notin N_c$ . Соотношения (28) образуют систему из  $(N_c + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения (СЛАУ) относительно такого же числа неизвестных. Ее матрица формируется из коэффициентов влияния  $C_{nm}$  и весовых множителей из

равенства (27). Система (28) имеет единственное решение. Полученные с его помощью узловые значения  $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$  могут оказаться нарушающими условие (25), что будет означать, что размеры зоны контакта завышены. Индексы узлов, в которых это происходит, исключаются из множества  $N_c$ , и производится новый шаг итерации. Так происходит до тех пор, пока на некотором шаге не будет получено множество индексов  $N_c$ , для которого решение системы (28) даст неотрицательное давление в зоне контакта.

В большинстве ситуаций этот результат является окончательным. Однако он все же требует дополнительной проверки на выполнение еще одного типа условий, представленного в (24). Вне зоны контакта не должно возникать взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если в части узлов, не вошедших в область контакта, не будут соблюдаться неравенства из (4), то их индексы придется включить во множество  $N_c$  и повторить итерационную процедуру. Однако в большинстве случаев, когда начальное приближение области контакта выбрано достаточно большим и покрывает действительное контактное пятно, подобной необходимости возобновления итерационного процесса не возникает. Варьируемая зона контакта постепенно стягивается к искомой, и проверки выполнения условия (25) оказывается достаточно. Точность результата при этом определяется размером ячейки с.

В качестве примера работы этого алгоритма можно провести решение модельной задачи герцевского контакта параболоида вращения с упругим полупространством, зазор между которыми вычисляется как

$$h_{par}(x, y) = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2), \quad (29)$$

где  $R$  – радиус кривизны параболы.

Точное решение этой задачи дает теория Герца [4], согласно которой в сопряжении тел такой формы действует эллипсоидально распределенное контактное давление

$$p^H(x, y) = p_0^H \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a_H^2}}, \quad x^2 + y^2 \leq a_H^2 \quad (30)$$

на круговой контактной площадке, радиус которой вычисляется при известной величине прижимающего усилия как

$$a_H = \left( \frac{3pR}{4E^*} \right)^{1/3}. \quad (31)$$

Максимальное давление при этом достигается в центральной точке площадки и составляет величину

$$p_0^H = \frac{3p}{2\pi a_H^2} = \left( \frac{6p(E^*)^2}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3}. \quad (32)$$

Применение вышеизложенного алгоритма для функции зазора, определяемой выражением (29), приводит к следующим результатам. Если используемая сетка имеет достаточные размеры и накрывает пятно контакта, то итерационный процесс сходится с достаточной скоростью. Для решения этой задачи форма области, занимаемая сеткой, была выбрана шестиугольной. На рис. 10 показана область и одно из ее разбиений, а также обозначена граница круговой области контакта, предсказываемая теорией Герца. На рис. 11 показаны

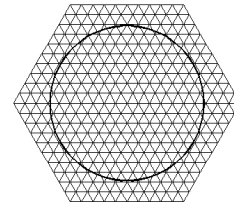


Рис. 10. Шестиугольная область и одно ее разбиение

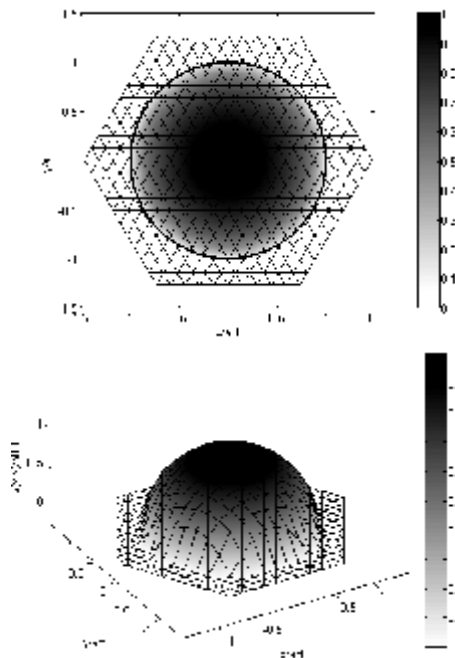
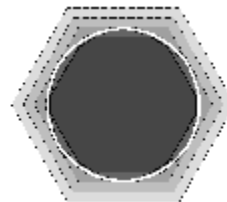


Рис. 12. Кусочно-линейное распределение контактного давления, полученное в

последовательные приближения области контакта. Видно, что границы этих областей монотонно стягиваются к окончательному результату, обозначенному более толстой линией. Он, в свою очередь, оказывается близким к точной круговой форме, что также отображено на рис. 11. Используемая в данном численном методе кусочно-линейная аппроксимация позволяет получать непрерывные распределения контактных давлений (рис. 12). Их точность при этом зависит от размера  $c$  ячейки сетки. На рис. 13 представлена картина изменения погрешности при определении величины максимальных контактных давлений с уменьшением  $c$ , т.е. со сгущением сетки. Для наглядности также приведены распределения контактных давлений на оси  $Ox$ , полученные для различных размеров ячеек сетки, и соответствующее им герцевское распределение (рис. 14).

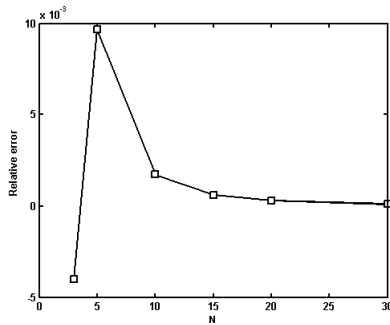


Рис. 13. Изменение погрешности определения величины максимальных контактных давлений с уменьшением размера ячейки

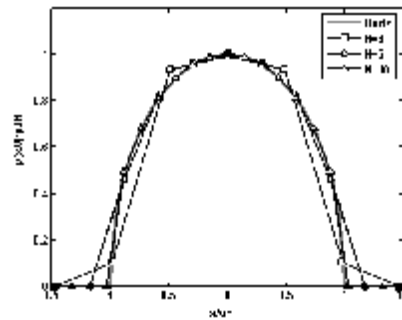


Рис. 14. Распределения контактных давлений на оси  $Ox$  для различных размеров ячеек сетки

**Вариационные методы решения задачи негерцевского нормального контакта.** В отличие от описанного выше прямого метода, в рамках которого находится приближенное распределение контактного давления, обеспечивающего выполнение точных соотношений контакта (2) в конечном числе точек, вариационный подход основывается на слабой постановке контактной задачи. Известные результаты Фикера [8], а также Дюво и Лионса [9] устанавливают общий принцип, определяющий существование и единственность решения контактных задач. Он заключается в том, что действительные перемещения точек системы тел, приводимых в контакт при выполнении ряда условий, минимизируют полную энергию системы  $U$  в пространстве возможных перемещений, удовлетворяющих условию непроникновения.

Однако при использовании модели упругого полупространства, в которой имеется соотношение (3), выражающее перемещение точек границы через нормальные усилия на поверхности контактирующих тел, представляется более удобным принять в качестве варьируемой функции распределение контактных давлений. В этом случае необходимо воспользоваться отличным от вышеупомянутого вариационным принципом, предложенным Калькером [6]. Согласно ему для истинных области контакта и давления, действующего в сопряжении тел, достигается минимум полной дополнительной работы  $\Phi$  среди всех возможных неотрицательных распределений  $p$ . Вид функционала для рассматриваемой задачи и постановка задачи минимизации, ей эквивалентной, представлен ниже:

$$\begin{cases} \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S, \end{cases} \quad (33)$$

где  $S$  – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства (возможные распределения контактных давлений должны иметь ограниченные носители). С учетом соотношения (4) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, зависящим от одной лишь неизвестной функции давления  $p$ . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (33) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значение минимизируемого функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями  $p$  типа (5) на регулярной треугольной сетке. В этом случае  $S$  либо точно, либо приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом принимает вид суммы квадратичной и линейной

форм относительно узловых значений давления  $p_n$ . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную форму с узлами, совпадающими с узлами используемой сетки:

$$\int_S f g dS = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \sum_i f_i g_i, \quad (34)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, являющейся приближением (33)-(34):

$$\begin{cases} \Phi_n(\{p_n\}_{n=1}^N) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; \\ p_m \geq 0, \quad m = 1, N. \end{cases} \quad (35)$$

Примечательно, что узловые значения  $\{p_n\}_{n=1}^N$ , получаемые как решение (35), являются идентичными результату применения прямого метода и удовлетворяют условиям (24)-(26). В этом случае имеется эквивалентность не только начальных сильной и слабой постановки контактной задачи, но и приближенных методов ее решения. Однако это будет справедливо лишь при использовании формулы (34) для вычисления интегралов в (33), что не является обязательным.

*Преимуществами вариационного подхода* являются: наличие условий, единственным образом определяющих форму области контакта и распределение контактных усилий; возможность применения методов квадратичного программирования. Последнее обстоятельство позволяет применять вариационную формулировку для формального обоснования применимости метода коллокаций и, в частности, достоверности приведенных выше результатов.

**Заключение.** В статье предложена постановка задачи анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел на базе метода граничных интегральных уравнений. Рассмотрена прямая и вариационная формулировки задачи, показана их эквивалентность, а также сформулирована система разрешающих соотношений для определения контактных зон и контактных давлений. На примере моделирования герцевского контакта проиллюстрирована точность и сходимость метода. Анализ представленных результатов позволят сделать следующие выводы.

1. Метод граничных интегральных уравнений обладает необходимыми свойствами универсальности, достаточной точности и сравнительно невысокой трудоемкости решения задач анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел [1-3]. Это делает его приемлемым для решения широкого круга задач в процессе многовариантных расчетов с варьированием геометрии контактирующих тел.

2. Предложенный в работе способ аналитического вычисления коэффициентов матрицы разрешающих уравнений при использовании линейного представления распределения контактных давлений в пределах подобласти треугольной формы, получаемых при регулярной разбивки поверхности тела, обеспечивает, кроме высокой точности, значительную экономию времени за счет использования свойств симметрии и регулярности сетки дискретизации.

3. Одной из наиболее важных особенностей предложенной формулировки метода граничных интегральных уравнений является необходимость вычисления зазоров в узловых точках сетки на поверхности сопряженных тел. Это не представляет трудностей при аналитическом представлении поверхностей контактирующих тел. Однако для случая контакта тел более сложной формы (в частности, для сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями [1-3], получаемыми как облако сопряженных точек при численном решении вспомогательной задачи), необходимо заранее предусматривать способ автоматизированного вычисления зазоров. Последнее особенно важно при проведении автоматизированных исследований, сочетающих синтез геометрии формы и анализ контактного взаимодействия при проектировании реальных конструкций.

Отмеченные особенности свидетельствуют о том, что предложенный и реализованный в статье вариант метода граничных интегральных уравнений для исследования контактного взаимодействия является достаточно конкурентоспособным для широкого класса сложнопрофильных тел. В дальнейшем его планируется использовать при решении ряда прикладных задач.

НТУ “ХПИ”. – 2006. – Вып. 26. – С.196-203. 2. *Ткачук Н.Н.* Оценка контактных напряжений в сопряжении сложнопрофильных деталей // Вестник НТУ “ХПИ”. Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2006. – Вып. 24. – С.138-152. 3. *Ткачук Н.Н.* Топологически регулярные конечно-элементные сетки для тел с кинематически генерируемыми поверхностями // Вестник НТУ “ХПИ”. Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2006. – Вып. 32. – С.156-166. 4. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 5. *Li J., Berger E.J.* A semi-analytical approach to three-dimensional normal contact problems with friction // Computational Mechanics. – 2003. – 30. – pp. 310-322. 6. *Kalker J.J.* Variational principles of contact elastostatics. – J. Inst. Math. and Appl. – 1977. – 20. – 199 p. 7. *Li J., Berger E.J.* A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area // Journal of Elasticity. – 2001. – 63. – pp. 137-151. 8. *Fichera G.* Problemi elastostatici con vinconi unilaterale: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. – Mem. Accad. Naz. Lincei, Series 8. – 1964. – 7. – 91 p. 9. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

*Поступила в редколлегию 02.06.08*

УДК 621.87

**О.А. МЕЛЬНИЧЕНКО, О.С. ПОДОЛЯК**, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН ГІЛЬЗ ЦИЛІНДРІВ ПРИ ДИНАМІЧНИХ РЕЖИМАХ РОБОТИ

В роботі розглядаються умови зміни напруженого стану гільз циліндрів двигунів, застосовуваних на автомобільних кранах, в залежності від динамічних режимів роботи. Був проведений розрахунок, що дозволив графічно визначити зміну внутрішнього діаметра гільзи уздовж твірної циліндра.

**The terms of change of the tense state of shells of cylinders of engines of applied on motor-car faucets depending on dynamic office hours are examined in work. A calculation which allowed graphically to define the change of internal diameter of shell along formative cylinder was conducted.**

**Постановка проблеми.** Вивчення закономірностей зміни напруженого стану гільз циліндрів у залежності від режимів роботи є важливою задачею при дослідженні зносу гільз циліндрів двигунів, застосовуваних на автомобільних кранах.

**Аналіз досліджень.** Вивчаючи опубліковані дослідження, можна дійти висновку, що зміни напруженого стану при роботі автомобільного крана в режимі „підйом-опускання” відповідають несталому режиму. Пов'язано це з тим, що вантажопідйомні машини є машинами циклічної дії [1]. У машин циклічної дії рух, що має несталий характер, займає у загальному циклі значний час, і чим більша частка цього часу, тим вище динамічні навантаження, що діють на усі вузли й елементи машини [2], включаючи і гільзу циліндра двигуна.

**Постановка задачі.** Основною метою даної роботи є дослідження умов зміни напруженого стану гільз циліндрів двигуна автомобільного крана в залежності від динамічних режимів роботи, а також визначення зміни внутрішнього діаметру гільзи уздовж твірної циліндра.

Виклад основного матеріалу. **Класична теорія пружності виходить із пружних властивостей твердого тіла і, отже, з існування однозначного (пропорційного) зв'язку між напругою і деформацією. Однак, у зв'язку з анізотропією напруженості у випадку додатка зовнішнього навантаження, різні мікробсяги матеріалу мають неоднакові деформації, що відповідають**



**локальній напрузі, у результаті чого між по-різному деформованими мікрообсягами виникають напруги зрушення.**

Таким чином, реальні тіла володіють (навіть при малих напругах) недосконалою пружністю, тобто при циклічному деформуванні деформація відстає по фазі від напруги [3]. У зв'язку з наявністю зрушення фаз між деформацією і напругою не виконується закон Гука. Різниця між енергією, витраченою на деформацію, і енергією, повернутою зразкові після навантаження,

**приводить до виникнення розсіяної енергії за цикл деформації, велика частина якої перетворюється на тепло. Незалежно від природи джерел енергетичних втрат характеристикою циклічної в'язкості пружної системи вважається дисипація енергії, що залежить від величини відношення розсіяної енергії за цикл сталих коливань до амплітудного значення потенційної енергії пружної системи.**

Для визначення величин напруг, що виникають у гільзах циліндрів у результаті впливу навантажувальних режимів роботи, і для тарування експериментальної установки був проведений аналітичний розрахунок. Згідно [4], приймаємо, що розрахункові напруги і деформації в гільзі виникають від прикладених до неї вісисиметричних газових навантажень. Передбачається також, що на верхній фланець гільзи і її твірну діють рівномірно розподілені сили і моменти з постійною інтенсивністю (рис.1,а).

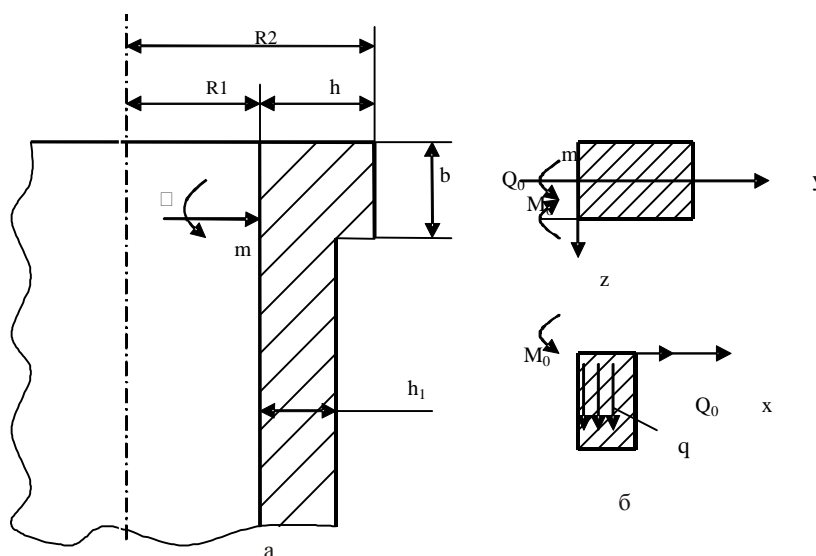


Рис. 1. Схема сил діючих на фланець гільзи

Розглянемо окремо фланець і гільзу, використовуючи метод сил [4]. У місці приєднання фланця до гільзи буде діяти згинальний момент  $M_0$  і поперечна сила  $Q_0$ , віднесені до одиниці довжини внутрішнього кола гільзи (рис.1, б).

Зазначені величини визначаються з умови безперервності в місці з'єднання гільзи і фланця:

$$\Theta_r = \Theta_\phi; \quad a_r = a_\phi. \quad (1)$$

При дії по краю гільзи моменту  $M_0$  і поперечної сили  $Q_0$  радіальне переміщення по краю гільзи

$$a_r = \frac{1}{2a^3 D} (Q_0 - aM_0), \quad (2)$$

де  $a = 4\sqrt{\frac{3(1-m^2)}{r_1^2 h^2}}$ ;  $D$  – жорсткість стінки гільзи.

Аналізуючи геометричне розташування сил і моментів, кут повороту краю гільзи можна знайти з рівняння:

$$\Theta_r = \frac{1}{2\alpha^2}(Q_0 - 2\alpha M_0). \quad (3)$$

Деформація фланця визначається як деформація кривого бруса з порівняними розмірами радіуса кривизни і висоти поперечного перерізу.

Радіальне переміщення фланця від дії сил можна знайти з виразу

$$\delta = \frac{q_1 r_1^2}{EF'}, \quad (4)$$

де  $q_1 = q - Q_0$ ;  $F'$  – площа приведеного перетину;  $E$  – модуль подовжньої пружності;  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

Від дії крутного моменту,  $m_1$  фланець гільзи переміститься на кут

$$j' = Q_\phi = \frac{q_1 r_1^2}{EI'_y}, \quad (5)$$

де  $m_1 = m - M_0$ ;  $I'_y$  – момент інерції приведеного перетину  $F'_Z$  щодо осі  $y$ .

Для прямокутного перетину

$$F' = F'_Z = \beta F; \quad I'_y = \beta \frac{hb^3}{12},$$

де  $\beta = \frac{r_1}{h} \ln \frac{r_2}{r_1}$ .

Радіальні деформації нижнього краю фланця, що викликані поворотом на кут  $j$ ,

$$\delta_1 = \frac{b}{2} \phi. \quad (6)$$

Тоді сумарне радіальне переміщення фланця можна записати у вигляді

$$a_\phi = \delta_1 + \delta. \quad (7)$$

Вирішуючи спільно рівняння (1) і (7), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{(q - \Theta_0)r_1^2}{EF} + \frac{b}{2} \times \frac{-(m - M_0 - Q_0 b/2)r_1^2}{EI'_y} &= \frac{1}{2\alpha^3 D}(Q_0 - \alpha M_0); \\ \frac{(m - M_0 - Q_0 b/2)r_1^2}{EI'_y} &= -\frac{1}{2\alpha^2 D}(Q_0 - 2\alpha M_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Визначивши з рівняння (8)  $M_0$  і  $Q$ , знаходимо величину деформації гільзи

$$\varpi = \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha^3 D} [Q_0 \sin \alpha x - \alpha M_0 (\cos \alpha x + \sin \alpha x)] \quad (9)$$

Згинальний момент у гільзі

$$M = \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} [Q_0 \sin \alpha x - \alpha M_0 \times (\cos \alpha x + \sin \alpha x)] \quad (10)$$

Напруги, що виникають у гільзі,

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_0}{h^2}. \quad (11)$$

Напруги у фланці, викликані радіальними і кутовими переміщеннями, можуть бути знайдені з наступної залежності:

$$s_r = \left( \frac{q_1 r}{F'} + \frac{m_1 r_1}{I'_y} z \right) \frac{r_1}{r}, \quad (12)$$

де  $r$  – поточний радіус ( $r_1 \leq r \leq r_2$ ).

За допомогою рівнянь (8) і (11) був проведений розрахунок, що дозволив графічно визначити зміну внутрішнього діаметра гільзи уздовж твірної циліндра для ряду двигунів, застосовуваних на сучасних автомобільних кранах (рис. 2).

З рис. 2 видно, що напруги, які виникають уздовж утворюючої гільзи циліндра, розподіляються нерівномірно, що повинно привести до зміни внутрішнього діаметра гільзи. Якщо зіставити отримані залежності з відомими епорами зносу, то вони мають певну подібність. Установлено, що найбільший знос спостерігається в тій частині циліндра, де розташовані верхні компресійні кільця. Для двигунів ЗИЛ-130 зазначена зона знаходиться звичайно на відстані 60 – 80, для ЯМЗ-238 і КАМАЗ-740 на відстані 15 – 40 мм від верхньої крайки гільзи циліндрів. З залежностей, наведених на рис.2, а, видно, що на цих відстанях спостерігається також і найбільша деформація гільз.

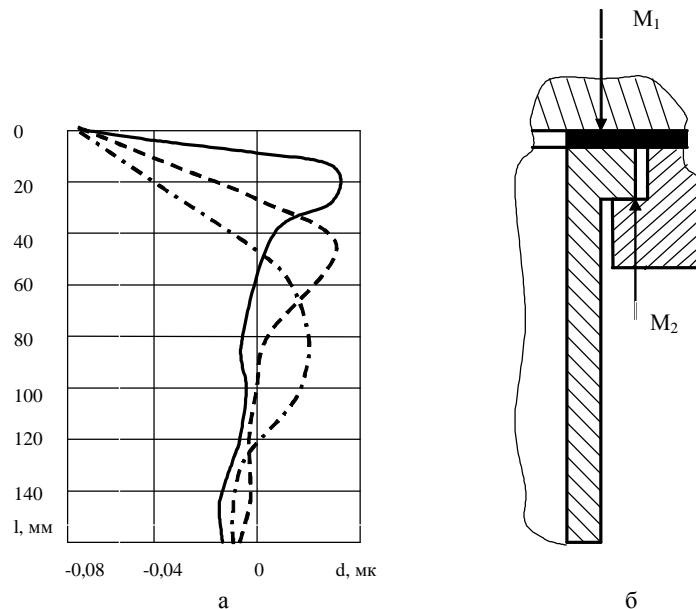


Рис. 2. Зміна внутрішнього діаметра гільзи вздовж твірної циліндра (а) і схема дії сил (б)

— - ЗИЛ-130; - - - - - ЯМЗ-238; - · - · - КАМАЗ- 740.

За допомогою рівняння (2) були виконані розрахунки по визначенню максимальних напруг на внутрішній поверхні гільзи (табл. 1) з урахуванням того, що

$$P = 1,8 Pr_{\max} F_h, \quad (13)$$

де  $P_{r_{\max}}$  – максимальний тиск згорання;  $F_h$  – площа, обмежена завалькованим краєм прокладки навколо камери згорання.

Таблиця 1

Максимальні напруги на внутрішній поверхні гільзи циліндрів

Тип двигуна	Діаметр циліндра, мм	$\sigma_{\max}$ , МН/м <sup>2</sup>
ЗИЛ-130	100	62,1 – 65,4
КАМАЗ-740	130	72,5 – 73,9
ЯМЗ-238	130	73,6 – 74,2

**Висновок.** Через ряд допущень виконані теоретичні підрахунки не можуть цілком врахувати тієї великої кількості факторів, що існують у реальних умовах і впливають на деформацію гільз, тому необхідно поряд з теоретичними дослідженнями проводити експериментальні. Разом з тим проведені дослідження дають можливість визначити порядок величин деформацій і природу їхнього виникнення, що дозволяє більш обґрунтовано виконувати експериментальні дослідження. Об'єднавши результати теоретичних і експериментальних досліджень, можна справедливо судити про вплив динаміки автомобільного крана на деформацію гільз циліндрів.

**Список літератури:** 1. Хархута Н. Я. Дорожные машины. – Л.: Машиностроение, 1996. – 68 с. 2. Мишин И.А. Долговечность двигателей. – Л.: Машиностроение, 1996. – 288 с. 3. Малмейстер А.К. Основы теории локальной деформации. // Механика полимеров. – 1985. – № 4. – С.12-27. 4. Вихтер М.М., Доброгаев Р.П. Конструкция и расчет автотракторных двигателей. – М.: Машиностроение, 1984. – 552 с.

Поступила в редколлегию 02.10.08

## УДК 531

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ,  
**С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**, аспирант НТУ „ХПИ”

### О ВЛИЯНИИ РЕАКТИВНОЙ СИЛЫ НА СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ ШАРА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ УБЫВАНИЕМ РАДИУСА

В статті за допомогою циліндричних функцій побудовано аналітичний розв’язок нелінійної задачі Коші. Використовуючи його, досліджено вплив реактивної сили на швидкість падіння однорідної кулі, у якої маса та радіус убавують у часі по показникових законах для двох варіантів відносної швидкості відділення часток від кулі.

In the paper the analytical solution of nonlinear Cauchy problem is built by cylinder functions. With this solution's use the influence of reactive force on rate of fall of homogeneous ball which mass and radius are decreasing in time on exponential laws is researched for two variants of relative speed of ball's particles separation.

**Актуальность темы и цель исследования.** Движение шара переменной массы моделируют при изучении полета горящих частиц топлив, мелкодисперсных отходов (выбросов) производств, падающих сгорающих метеоритов и пр. Поэтому исследование особенностей полета тел, у которых происходит изменение размеров и массы во времени, относится к актуальным научно-техническим задачам. Системное исследование полета шаровидных капель с учетом их испарения проводилось в работах [1, 2], но там не учитывалось действие реактивной силы. В работах [3, 4] записаны уравнения движения сферической капли с учетом реактивной силы при линейном убывании радиуса капли во времени. Однако не построено точных аналитических решений этих уравнений. В связи с этим здесь поставлена цель построить точное аналитическое решение уравнения

вертикального падения шара с учетом реактивной силы и квадратичного сопротивления внешней среды при экспоненциальных убываниях радиуса и массы тела, а также изучить влияние реактивной силы на скорость движения.

**Первая постановка задачи и ее аналитическое решение.** При постановке задачи вводим гипотезу К.Э. Циолковского [5], согласно которой относительная скорость отделения частиц от шара является постоянной величиной. Кроме того, предполагаем, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади миделевого сечения шара (квадрату радиуса) и квадрату скорости падения тела постоянной плотности. Таким образом, изменение радиуса шара  $r = r(t)$  во времени  $t$  определяет и соответствующее изменение его массы. Убывание радиуса подчиняем показательному закону

$$r = r(t) = r_0 \exp(-\lambda t),$$

в котором  $r_0 = r(0)$  – начальное значение радиуса, а параметр  $\lambda > 0$  характеризует скорость его уменьшения.

Согласно принятым допущениям определение скорости падения шара как функции времени  $v = v(t)$  сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dv}{dt} \pm \frac{3}{r} \frac{dr}{dt} |v_r| + \frac{\alpha}{r} v^2 = g \quad (1)$$

при начальном условии

$$v(0) = v_0. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2)  $u_r = const$  – относительная скорость отделения частиц от шара;  $\alpha$  – коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха;  $g$  – ускорение свободного падения;  $v_0$  – начальное значение скорости падения; знак “+” перед цифрой 3 соответствует случаю, когда реактивная сила ускоряет падение, а “-” – когда замедляет его.

Далее перейдем от  $t$  к новой переменной  $x$  по формулам  $\xi = \exp(\lambda t)$ ;

$\frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi$ ;  $\frac{dv}{dt} = \lambda \xi \frac{dv}{d\xi}$ ;  $r = \frac{r_0}{\xi}$ . Вместо выражений (1) и (2) получаем соответственно

$$\frac{dv}{d\xi} + \beta v^2 = \frac{g_1}{\xi}; v(1) = v_0. \quad (3)$$

Здесь  $\beta = \frac{\alpha}{\lambda r_0}$ ;  $g_1 = \frac{g}{\lambda} \pm 3|v_r|$ .

В дальнейшем, в зависимости от значений  $g_1$  будем различать три случая движения. Остановимся сначала на первом, когда  $g_1 > 0$ .

Чтобы избавиться от  $v^2$  в уравнении (3), выразим скорость через вспомогательную функцию  $w = w(\xi)$  и ее производную по формуле

$$v = \frac{1}{\beta} \frac{dw}{d\xi} w^{-1}. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), приходим к линейному уравнению типа Бесселя

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\beta g_1}{\xi} w = 0$$

с общим решением

$$w(\eta) = \eta(c_1 I_1(\eta) + c_2 K_1(\eta)), \quad (5)$$

в котором  $\eta = 2\sqrt{\beta g_1 \xi}$ ;  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные;  $I_1(\eta)$ ,  $K_1(\eta)$  – соответственно модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса единица.

Продифференцировав решение (5) в соответствии с (4), получаем выражение скорости падения шара

$$v(\eta) = \frac{2g_1 c I_0(\eta) - K_0(\eta)}{\eta c I_1(\eta) + K_1(\eta)}. \quad (6)$$

В нем  $c = c_1 c_2^{-1}$  – произвольная постоянная;  $I_0(\eta)$ ,  $K_0(\eta)$  – соответственно модифицированные функции Бесселя и Макдональда нулевого индекса.

Аналитическое решение (6) удовлетворяет начальному условию (2), когда

$$c = \frac{2g_1 K_0(\eta_0) + v_0 \eta_0 K_1(\eta_0)}{2g_1 I_0(\eta_0) - v_0 \eta_0 I_1(\eta_0)}, \quad \eta_0 = 2\sqrt{\beta g_1}. \quad (7)$$

Таким образом, расчет скорости падения шара можно проводить с помощью таблиц цилиндрических функций [6,7].

Из уравнения (3) следует, что при  $0 < v_0 < \sqrt{g_1/\beta}$  скорость падения не является монотонной функцией, а имеет максимум.

Несмотря на действия движущих реактивной силы и силы гравитации, скорость  $v(\eta)$  при больших  $\eta$  аппроксимируется убывающей экспонентой

$$v(\eta) \sim v_a(\eta) = \frac{2g_1}{\eta} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t\right). \quad (8)$$

С течением времени скорость асимптотически стремится к нулю.

Второй случай движения имеем при  $g_1 = 0$ , когда сила гравитации уравновешивается тормозящей реактивной силой. Решением уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию (2), является

$$v(t) = \frac{\lambda r_0}{\alpha} \frac{1}{\exp(\lambda t) - b}, \quad (9)$$

где  $b = 1 - \frac{\lambda r_0}{\alpha v_0} < 1$ .

При больших  $t$  убывание скорости происходит по показательному закону

$$v_a(t) \sim \frac{\lambda r_0}{\alpha} \exp(-\lambda t),$$

причем быстрее, чем в первом случае.

Используя выражение (9), легко определить расстояние  $S$ , пролетаемое шаром при его падении

$$S = \int_0^t v(t) dt = \frac{r_0}{\alpha} \ln \frac{1 - b \exp(-\lambda t)}{1 - b}. \quad (10)$$

Из (10) следует, что, невзирая на бесконечное время падения шара, при отсутствии неподвижных пространственных ограничений максимальная дальность (высота) падения будет ограниченной (конечной) величиной. Действительно, предельный переход  $t \rightarrow \infty$  в (10) дает

$$\max S = \frac{r_0}{\alpha} \ln \frac{1}{1 - b} = \frac{r_0}{\alpha} \ln \frac{\alpha v_0}{\lambda r_0}. \quad (11)$$

Заметим, что в первом случае движения  $\max S$  также является ограниченной величиной, но большей, чем (11). Таких особенностей нет при падении тела постоянных размеров и массы.

Третий случай движения характеризуется тем, что  $g_1 < 0$ , т.е. ускоряющая сила гравитации меньше тормозящей реактивной силы. Для него уравнение падения шара (3) принимает вид

$$\frac{dv}{d\xi} + \beta v^2 = -\frac{g_2}{\xi}, \quad (12)$$

где  $g_2 = 3|v_r| - \frac{g}{\lambda} > 0$ .

Подстановкой (4) нелинейное уравнение (12) сводится к линейному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + \frac{\beta g_2}{\xi} w = 0$$

с общим решением

$$w(\tau) = \tau(c_3 J_1(\tau) + c_4 Y_1(\tau)). \quad (13)$$

Здесь  $\tau = 2\sqrt{\beta g_2 \xi}$ ;  $c_3, c_4$  – произвольные постоянные;  $J_1(\tau), Y_1(\tau)$  – функции Бесселя и Неймана индекса единица.

Используя (2), (4), (13), для вычисления скорости полета получаем формулы

$$v(\tau) = \frac{2g_2}{\tau} \frac{c_5 J_0(\tau) + Y_0(\tau)}{c_5 J_1(\tau) + Y_1(\tau)}; \quad (14)$$

$$c_5 = c_3 c_4^{-1} = \frac{v_0 \tau_0 Y_1(\tau_0) - 2g_2 Y_0(\tau_0)}{2g_2 J_0(\tau_0) - v_0 \tau_0 J_1(\tau_0)},$$

где  $\tau_0 = 2\sqrt{\beta g_2}$ ;  $J_0(\tau), Y_0(\tau)$  – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

В отличие от предыдущих случаев движения здесь  $v(\tau)$  не только убывает с течением времени, а при некотором  $\tau = \tau^*$  становится равной нулю. С этого момента времени шар начинает двигаться вверх, и решение (14) становится непригодным для расчета. Определение времени полета шара вниз (до реверсирования движения) связано с решением трансцендентного уравнения

$$c_5 J_0(\tau^*) + Y_0(\tau^*) = 0. \quad (15)$$

Его корень можно находить методом итераций по формуле

$$\tau_{n+1}^* = \tau_n^* + \frac{c_5 J_0(\tau_n^*) + Y_0(\tau_n^*)}{c_5 J_1(\tau_n^*) + Y_1(\tau_n^*)}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

приняв начальным приближением  $\tau_0^* = \tau_0$ .

Однако малые и большие корни уравнения (15) можно также вычислить с помощью приближенных формул. Так, в случае малых корней, используя аппроксимацию [6]

$$Y_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_0(x) + 0,36747 + 0,60559 \left(\frac{x}{3}\right)^2,$$

вместо (15) получаем приближенное уравнение

$$\frac{(\tau^*)^2}{2} \exp\left(\frac{(\tau^*)^2}{2}\right) = q, \quad (17)$$

в котором  $q = \exp(-p(c_5 + 0,1469))$ .

Приближенным решением уравнения (17) является

$$\tau^* = \left[ (2+q) \left( \sqrt{1 + \frac{8q}{(2+q)^2}} - 1 \right) \right]^{1/2}. \quad (18)$$

При  $0,216 \leq c < \infty$  или  $0 < \tau^* \leq 0,7$  погрешность формулы (18) меньше 1 %.

Например, при  $c = 0,338$  вычисленное по формуле (18) значение  $\tau^* = 0,603$ , вместо точного значения 0,600, к которому приводят таблицы специальных функций [6].

В случае больших корней уравнения (15) его можно приближенно заменить на

$$c_5 \cos\left(\tau^* - \frac{1}{8\tau^*} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\tau^* - \frac{1}{8\tau^*} - \frac{\pi}{4}\right) = 0. \quad (19)$$

К этому соотношению приводит представление функций Бесселя большого аргумента с помощью модуля и фазы [6].

Решением уравнения (19) является

$$\tau^* = \frac{p + \tau_0}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2(p + \tau_0)^2}} \right), \quad (20)$$

причем  $p = \arctg \frac{c_5 \cos \omega + \sin \omega}{c_5 \sin \omega - \cos \omega}$ ;  $\omega = \tau_0 - \frac{\pi}{4}$  (Погрешность формулы (20) меньше

1%, когда  $3 \leq \tau_0 \leq \tau^*$ ).

Промежуточные между малыми и большими значения  $\tau^*$  можно определить с помощью линейной интерполяции и табл. 1.

Из табл. 1 исключен интервал  $c_5 \in (-7,820; 10,294)$  или  $\tau^* \in (2,28; 2,50)$ , куда попадает нуль функции  $J_0(\tau^*)$ . В этом промежутке корень уравнения (15) следует определять по формуле

$$\tau^* = 2,4048 + \frac{0,5099}{0,5191 \cdot c_5 - 0,1027}.$$

Таблица 1

Корни уравнения (15), которые находятся на промежутке  $\eta^* \in [0,7; 3]$

$\eta^*$	$c_5$	$\eta^*$	$c_5$	$\eta^*$	$c_5$	$\eta^*$	$c_5$
0,70	0,216	1,45	-0,700	2,08	-2,905	2,58	5,554
0,75	0,159	1,50	-0,747	2,10	-3,111	2,60	4,972
0,80	0,103	1,55	-0,831	2,12	-3,344	2,62	4,498
0,85	0,047	1,60	-0,923	2,14	-3,612	2,64	4,102
0,90	-0,007	1,65	-1,024	2,16	-3,922	2,66	3,768
0,95	-0,061	1,70	-1,136	2,18	-4,285	2,68	3,482
1,00	-0,115	1,75	-1,261	2,20	-4,719	2,70	3,233
1,05	-0,170	1,80	-1,404	2,22	-5,245	2,75	2,733
1,10	-0,225	1,85	-1,569	2,24	-5,896	2,80	2,356
1,15	-0,282	1,90	-1,763	2,26	-6,726	2,85	2,059
1,20	-0,340	1,95	-1,995	2,28	-7,820	2,90	1,819
1,25	-0,400	2,00	-2,280	2,50	10,294	2,95	1,619
1,30	-0,462	2,02	-2,413	2,52	8,495	3,00	1,449
1,35	-0,527	2,04	-2,560	2,54	7,227		
1,40	-0,596	2,06	-2,723	2,56	6,283		

Вычисленные упрощенным способом значения  $\tau^*$  можно уточнить итерациями по формуле (16).

Зная  $\tau^*$ , далее несложно определить время падения шара

$$t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{(\tau^*)^2}{4\beta g_2},$$

а также оценить максимальную дальность его полета вниз до реверсирования

$$\max S = \int_0^{t^*} v(t) dt = \frac{2}{\lambda} \int_{\tau_0}^{\tau^*} v(\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (21)$$

С этой целью выделим асимптотику скорости (14) при малых  $\tau$ , используя соответствующие аппроксимации функций Бесселя [6]. В области малых аргументов

$$v_a(\tau) = v_0 - 2g_2 \ln \frac{\tau}{\tau_0}.$$

Интеграл от  $v_a(\tau)$  выражается с помощью элементарных функций. Поэтому

$$\max S = \frac{2}{\lambda} \left[ (v_0 + 2g_2 \ln \tau_0) \ln \frac{\tau^*}{\tau_0} - g_2 (\ln^2 \tau^* - \ln^2 \tau_0) \right] + \Delta H. \quad (22)$$

Невязку  $\Delta H = \frac{2}{\lambda} \int_{\tau_0}^{\tau^*} [v(\tau) - v_a(\tau)] \frac{d\tau}{\tau}$  удобно оценивать по формуле Симпсона

$$\Delta H \approx \frac{\tau^* - \tau_0}{3\lambda} \left\{ \frac{8}{\tau_0 + \tau^*} \left[ v\left(\frac{\tau_0 + \tau^*}{2}\right) - v_a\left(\frac{\tau_0 + \tau^*}{2}\right) \right] - \frac{1}{\tau^*} v_a(\tau^*) \right\}. \quad (23)$$

Кроме изложенного способа, для оценки  $\max S$  также может быть полезна



формула [8]

$$\max S \approx \frac{1}{4\alpha} \left\{ [r^*(3 + \lambda t^*) - r_0] \ln \left( 1 + \frac{1}{\Omega} \right) + \frac{r_0 - r^*(1 + \lambda t^*)}{1 + \Omega} \right\}, \quad (24)$$

в которой  $\Omega = \frac{(3\lambda v_r - g)r^*}{\alpha v_0^2}$ ;  $r^* = \frac{r_0}{\lambda t^*} [1 - \exp(-\lambda t^*)]$ .

К ней приводит идея усреднения радиуса шара на интервале движения.

**Результаты расчета и их анализ.** Проведем расчет при  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $\alpha = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>;

$\lambda = 0,5$  м/с;  $v_r = 4$  м/с и

различных значениях  $v_0$ . Для таких данных  $g_1 > 0$ . Результаты расчета представлены на рис. 1.

На рис. 1 цифрами 1, 2, 3 отмечены рассчитанные по формулам (6) и (7) кривые, соответствующие значениям  $v_0 = 3; 6,173; 9$  м/с. Для первого значения начальной скорости график  $v(t)$  имеет максимум. График, отмеченный цифрой 2, соответствует граничному случаю, когда

$$v_0 = \sqrt{\frac{g_1}{\beta}} \approx 6,173 \text{ м/с. Для}$$

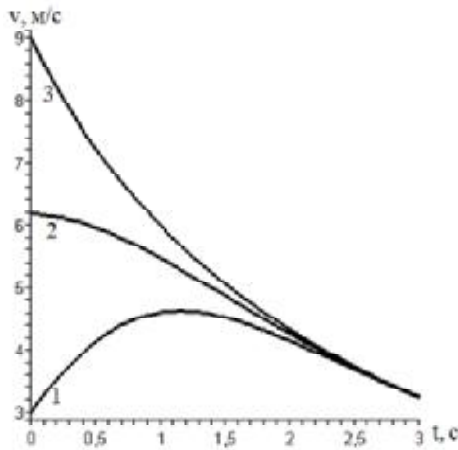


Рис. 1. Зависимости скорости от времени для различных  $v_0$  при  $g_1 > 0$

третьего значения начальной скорости график  $v(t)$  является монотонным.

Проводя расчет для второго случая движения, когда  $g_1 = 0$ , принимаем следующие исходные данные:  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $\alpha = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>;  $I = 2/3$  м/с;  $u_r = 5$  м/с и различные значения  $u_0$ . Результаты расчета приведены на рис. 2. Цифрами 1,2,3 отмечены кривые, полученные с помощью (9), при начальных скоростях  $u_0 = 3, 6, 9$  м/с. Как видно из рис. 2, экстремумов у скорости падения нет.

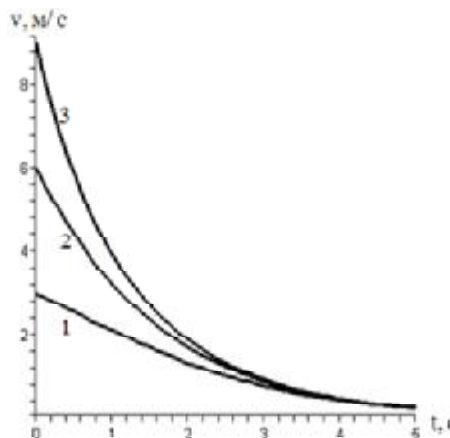


Рис. 2. Зависимости скорости от времени для различных  $u_0$  при  $g_1 = 0$

Для третьего случая движения, когда  $g_1 < 0$ , используем такие исходные данные:  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $a = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>;  $I = 0,5$  м/с;  $u_r = 10$  м/с и различные значения  $u_0$ .

Графики, отмеченные цифрами 1,2,3, соответствуют начальным скоростям  $u_0 = 3, 6, 9$  м/с. Как видно из рис. 3, в некоторый момент времени  $t^*$  скорость становится равной нулю.

Проверим эффективность

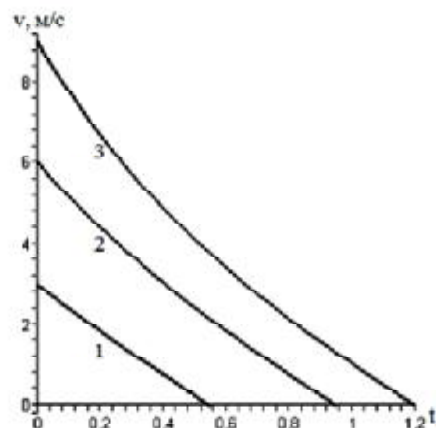


Рис. 3. Зависимости скорости от времени для различных  $u_0$  при  $g_1 < 0$

итерационной формулы (11), используя указанные выше исходные данные и  $v_0 = 6$  м/с. Вычислив для них  $\tau_0 = 2,882$ , дальше по формуле (16) получаем:

$\tau_1^* = 3,715$ ,  $\tau_2^* = 3,649$ ,  $\tau_3^* = 3,650$ ,  $\tau_4^* = 3,650$ . Проведя четыре итерации, с принятой точностью нашли искомое значение  $\tau^* = 3,650$ . По формуле (20) также получаем  $\tau^* = 3,651$ , что подтверждает эффективность этой формулы в области больших  $\tau^*$ .

Дальше, используя найденное  $\tau^*$ , определим время остановки тела  $t^* = 0,946$  с, что подтверждает рис. 3.

Далее проверим точность предложенных формул (22), (24) для оценки максимальной дальности полета тела. Используем исходные данные, принятые для случая  $g_1 < 0$ . Результаты расчетов представлены в табл. 2. Они свидетельствуют о том, что для оценки максимальной дальности полета корректнее использовать формулу (24), погрешность которой не превышает 3%.

Таблица 2

Максимальная дальность полета  $\max S$  и время  $t^*$  при различных  $u_0$

$v_0$ , м/с	2	5	7	10	15
Числ. инт. (21), м	0,371	1,936	3,226	5,101	7,750
По форм. (22), м	0,371	1,940	2,978	4,350	6,287
По форм. (24), м	0,371	1,930	3,2031	5,153	7,924
$t^*$ , с	0,375	0,831	1,043	1,255	1,452

### Вторая постановка задачи падения шара и ее аналитическое решение.

Она отличается от предыдущей только тем, что вместо гипотезы К.Э. Циолковского принимаем  $v_r = v(t)$ , т.е. абсолютную скорость частиц, отделившихся от шара, берем равной нулю. Таким считали  $v_r$  в работах [3, 4]. В рамках принятого предположения дифференциальное уравнение падения шара имеет вид

$$\frac{dv}{d\xi} \mathbf{m} \frac{3}{\xi} v + \beta v^2 = \frac{g}{\lambda \xi}.$$

При знаке “-” перед  $(3/\xi)$  реактивная сила является движущей, а при знаке “+” – тормозящей.

Подставив в него выражение (4), приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} \mathbf{m} \frac{3}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \frac{\beta g}{\lambda \xi} w = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим сначала случай движущей реактивной силы. При знаке “-” перед  $(3/\xi)$  общее решение данного уравнения с точностью до постоянных  $c_1$  и  $c_2$  выражается через цилиндрические функции

$$w = \eta^4 [c_1 I_4(\eta) + c_2 K_4(\eta)].$$

Здесь  $\eta = 2\sqrt{\frac{\beta g}{\lambda}} \xi$ ;  $I_4(\eta)$ ,  $K_4(\eta)$  – модифицированные функции Бесселя и

Макдональда индекса четыре.

Продифференцировав полученное решение в соответствии с (4), приходим к формуле скорости падения шара

$$v(\eta) = \frac{2g}{\lambda \eta} \frac{AI_3(\eta) - K_3(\eta)}{AI_4(\eta) + K_4(\eta)}, \quad (26)$$

в которой  $A = c_1 c_2^{-1}$  – произвольная постоянная;  $I_3(\eta)$ ,  $K_3(\eta)$  – модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса три.

Константу  $A$  определяем с помощью начального условия (2). Она принимает значение

$$A = \frac{2gK_3(\eta_0) + \lambda \eta_0 v_0 K_4(\eta_0)}{2gI_3(\eta_0) - \lambda \eta_0 v_0 I_4(\eta_0)}, \quad (27)$$

где  $\eta_0 = 2\sqrt{\frac{\beta g}{\lambda}}$ .

Используя рекуррентные соотношения и таблицы цилиндрических функций [6, 7], по формулам (26) и (27) несложно рассчитать зависимость  $v(t)$ .

Рассмотрим поведение скорости падения при больших  $t$  или  $\eta$ . Учитывая, что при  $v > 0$  [6]

$$I_\nu(\eta) \sim \frac{\exp(\eta)}{\sqrt{2\pi\eta}}; \quad K_\nu(\eta) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \exp(-\eta),$$

из (26) получаем

$$v(\eta) \sim \frac{2g}{\lambda\eta} = \sqrt{\frac{g}{\beta\lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t\right). \quad (28)$$

Этот результат совпадает с (8), когда там положить  $|v_r| = 0$ , т.е. не учитывать реактивную силу.

При тормозящей реактивной силе, когда знак “+” перед  $(3/\xi)$  в уравнении (25), общим его решением есть

$$w = \eta^{-2}(c_3 I_2(\eta) + c_4 K_2(\eta)). \quad (29)$$

Здесь  $c_3, c_4$  – произвольные постоянные;  $I_2(\eta), K_2(\eta)$  – модифицированные функции Бесселя и Макдональда индекса два.

Продифференцировав решение (29) согласно (4) и удовлетворив начальному условию (2), получаем

$$v(\eta) = \frac{2g}{\lambda\eta} \frac{BI_3(\eta) - K_3(\eta)}{BI_2(\eta) + K_2(\eta)}; \quad (30)$$

$$B = c_3 c_4^{-1} = \frac{2gK_3(\eta_0) + \lambda\eta_0 v_0 K_2(\eta_0)}{2gI_3(\eta_0) - \lambda\eta_0 v_0 I_2(\eta_0)}.$$

Как и в предыдущем случае, расчет скорости сводится к использованию таблиц цилиндрических функций.

При больших  $t$  или  $\eta$  асимптотика скорости совпадает с (8). Скорость асимптотически стремится к нулю с течением времени. При этом невозможен эффект реверсирования движения шара тормозящей реактивной силой, о котором шла речь выше при использовании гипотезы К.Э. Циолковского.

Таким образом, при  $v_r = v(t)$ , реактивная сила не влияет на асимптотическое поведение скорости падения шара при больших  $t$ . Это легко объяснить с помощью физических соображений. Действительно, скорость  $v(t)$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а следовательно к нулю стремятся  $v_r$  и реактивная сила, что нивелирует влияние последней на скорость падения шара в области больших  $t$ .

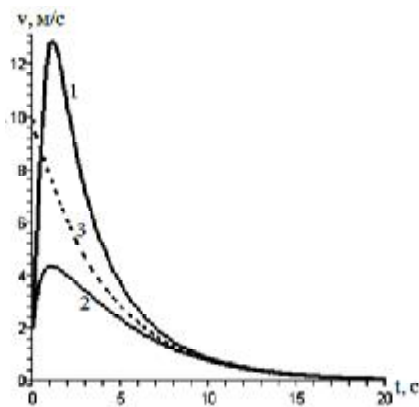


Рис. 4. Зависимости скорости от времени для различных направлений действия реактивной силы

#### Результаты расчета и их анализ.

Проведем расчет при  $r_0 = 10^{-3}$  м;  $\alpha = 10^{-4}$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda = 0,5$  м/с;  $v_0 = 2$  м/с. Рассмотрим случаи, когда реактивная сила является тормозящей, а также движущей. Цифрой 1 на рис. 4 представлена кривая, полученная при движущей реактивной силе, а цифрой 2 – тормозящей. Кривая 3 соответствует зависимости (28), которая при больших  $t$  является асимптотикой функции скорости независимо от знака  $v_r$ .

Расчеты показали, что для принятых исходных данных, независимо от направления

действия реактивной силы, скорость падения шара имеет максимум.

**Выводы.** Введением новой переменной в дифференциальное уравнение падения шара, радиус которого убывает по его показательному закону, удалось свести к специальному уравнению Риккати, решение которого выражается в функциях Бесселя. Такое преобразование проводилось как при моделировании реактивной силы с применением гипотезы К.Э. Циолковского, так и без ее использования. С помощью асимптотических выражений функций Бесселя удалось построить приближенные формулы для оценки вертикального перемещения сферического тела. Скорость падающего шара убывающей массы имеет максимум, если тело брошено вниз с начальной скоростью, меньшей некоторого значения.

**Список литературы:** 1. Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Моделирование полета капель, які випаровуються при русі в газі. – Харків: Едена, 2006. – 203с. 2. Кучеренко С.И., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Тищенко Л.М. Балістика крапель, які випаровуються при польоті. – Харків: ХНТУСГ, 2007. – 304с. 3. Севриков В.В., Карпенко В.А., Севриков И.В. Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Сев ГТУ, 1996. – 260 с. 4. Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А. Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001 – 195с. 5. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2, 3-е изд., М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 6. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832с. 7. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977.-344с. 8. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчету максимальной высоты выброса капель, испаряющихся при полете// Коммунальное хозяйство городов. Вып. 76. – К.: Техника, 2007. – С. 412 – 417.

*Поступила в редакцию 25.06.08*

УДК 62.233.27

*Г.О. ПАВЛОВА, канд.техн.наук, О.В. ЧЕРНИШЕНКО, аспірант,*

*М.Є. ФЕДОСЕЄВА, магістр, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків*

ДО ПИТАННЯ ВИЯВЛЕННЯ ДЕФЕКТІВ, ЩО ВИНΙΚАЮТЬ

ПІД ЧАС РОБОТИ У ПІДШИПНИКАХ КОЧЕННЯ

Розглядається проблема вібродіагностики підшипників кочення та пропонується нова методика вимірювання шумів підшипника кочення та діагностування його стану за допомогою вібродатчиків та спеціальної установки.

The problem of rolling bearing vibration monitoring is examined and the new method of measuring of rolling bearing' noises and its state diagnosis is offered by vibration detectors and the special equipment.

**Постановка проблеми.** В наш час безперервний розвиток різних галузей техніки зв'язаний з використанням в установках та механізмах різноманітних видів підшипників та підшипникових вузлів, якість роботи яких залежить від явищ, що виникають у процесі роботи підшипника і всього механізму. Тому проблема вібродіагностики підшипників кочення є дуже актуальною на сьогоднішній день.

**Аналіз досліджень.** Вібраційна діагностика підшипників кочення є однією з найбільш важливих у системі діагностування. На сьогоднішній день існує багато розробок для діагностики підшипників та їх вузлів, проведено багато досліджень властивостей підшипників. Наприклад, тільки питаннями вібродіагностики займалася велика кількість вчених: Барков А.В., Спрішевський А.І., Рагульськіс К.М. та інші. На сьогоднішній день визначені такі основні методи діагностування стану підшипників, як: діагностика підшипників кочення за спектром огинаючої вібросигналу, порівняння потужності сигналу в двох частотних діапазонах, акустична діагностика підшипників кочення, діагностика підшипників за

інтенсивністю вібраційних коливань тощо [1, 6].

Всі акустичні методи діляться на активні та пасивні. Активні методи засновані на збудженні та прийнятті хвиль за допомогою спеціальних перетворювачів. Пасивні методи діляться на шумовібраційні та акустичні емісії. Всі пасивні методи засновані на реєстрації та аналізі пружних хвиль, що виникають у самих виробках. Під час використання шумовібраційних методів використовуються шуми або вібрації, що виникають під час роботи підшипників. При цьому можуть вимірюватися різноманітні параметри сигналу, але для цілей діагностики найбільш широке застосування отримали аналіз спектру коливань та дослідження законів розподілу амплітуд вібрацій [2]. Метод акустичної емісії заснований на реєстрації пружних хвиль, що виникають у момент виникнення та розвитку тріщин. При цьому джерелом ультразвукових хвиль є сам дефект. Таким чином, метод акустичної емісії, на противагу шумовібраційному методу, дозволяє прогнозувати виникнення внутрішніх дефектів.

У багатьох діагностичних пристроях у якості перетворювача характеристик використовуються п'єзоелектричні елементи.

Аналізуючи широко вібродіагностичну апаратуру, можна сказати наступне. Для оцінки дефектів або діагностики об'єктів, що мають частини на підшипниках кочення, що обертаються, найбільш загальним методом аналізу є спостереження за змінами середньоквадратичного рівня та спектральної потужності віброакустичного сигналу. Однак ці параметри залежать від навантаження на підшипник, частоти обертання, щільності посадки підшипника, кількості змащувальної речовини тощо [3]. При вимірюванні імовірних характеристик віброакустичного сигналу, таких, як математичне очікування, дисперсія, ексцес тощо, моменти імовірності дають інформацію про стан об'єкту, що не залежить від частоти обертання чи навантаження на підшипник.

У пристроях для діагностики стану підшипників кочення у зібраному об'єкті або окремо за діагностичний параметр найчастіше приймається віброакустичний сигнал.

Діагностування в основному проводиться шляхом порівняння амплітуд спектру віброакустичного сигналу, що досліджується, зі спектром еталонного підшипника або з завданими граничними значеннями теоретичного спектру. Особливо складно вирішуються „протириччя” відносно оптимальних галузей частот для діагностування підшипникових вузлів.

Дискретні імпульси, що нерідко зв'язані з дефектом, виникають у різних частотних діапазонах з різним рівнем вираження. Ця характерна особливість може бути якісно пояснена шляхом розглядання відносних рівнів, зв'язаних з пошкодженням фонового шуму, та ефективності виявлення пошкодження залежить від рівня фонового шуму. Основні складності, що виникають під час створення апаратури віброакустичного діагностування, полягають у тому, що необхідно приймати дуже слабкі сигнали, а апаратура повинна мати велику швидкодію. Окрім віброакустичного сигналу за діагностичний параметр приймається омичний або індуктивний опір. Частина вібродіагностичних приладів для контролю стану підшипників кочення використовують зміну масляної плівки [4].

**Постановка задачі.** Існуючі методи дозволяють виміряти вібрацію підшипників та діагностувати їх стан, але розвиток рівня техніки вимагає нового підходу до вирішення цієї проблеми, тому вирішення питання в даному конкретному випадку полягає не в розробці чергового методу вібродіагностики, а нового підходу, тобто методики.

**Виклад основного матеріалу.** Пропонується нова методика вимірювання шумів підшипника кочення та діагностування його стану за допомогою вібродатчиків та спеціальної установки на основі методу ПІК-фактору.

Для контролю технічного стану підшипників методом ПІК-фактору необхідно мати простий віброметр, що дозволяє виміряти два параметра вібросигналу:

1. Середнє квадратичне значення рівня (СКЗ) вібрації, тобто енергії вібрації;
2. Пікову амплітуду (ПІК) вібрації.

Співвідношення цих двох параметрів ПІК/СКЗ називається ПІК-фактором.

В осцилограмі нового, добре змащеного підшипника присутній стаціонарний сигнал шумового характеру. З часом, по мірі появи дефектів на деталях підшипника, в сигналі почнуть з'являтися окремі короткі амплітудні піки, що відповідають моментам співударів дефектів. В подальшому, з розвитком дефекту, спочатку збільшуються амплітуди піків, потім поступово збільшується і їхня

кількість. Наприклад, дефект, з'являючись на одному з роликів, створює в подальшому забоїну на кільці, з нього вона переноситься на інший ролик, дефекти роликів починають випрацювати сепаратор і тощо до повного руйнування. Спочатку по мірі появи і розвитку дефекту наростає функція ППК, а СКЗ змінюється дуже мало, оскільки окремі, дуже короткі амплітудні піки практично не змінюють енергетичні характеристики сигналу.

В подальшому, по мірі збільшення амплітуд і кількості піків, починає збільшуватись енергія сигналу, виростає СКЗ вібрації. Співвідношення ППК временного зсув між ними має явно виражений максимум на часовій вісі. На цьому і базується метод ППК-фактору. Експериментально було встановлено, що момент проходження функції ППК-фактор через максимум відповідає залишковому ресурсу підшипника порядку двох-трьох тижнів. Перевага методу ППК-фактору – простота. Для реалізації потрібен звичайний віброметр загального рівня. Недоліки: слабка поміхозахисність методу і необхідність проводити багатократні вимірювання в процесі експлуатації. Установити датчик безпосередньо на зовнішній обоймі підшипника практично неможливо, тому сигнал вібрації характеризує не тільки підшипник, але й інші вузли механізму, що в даному випадку розглядається як перешкода. Чим далі встановлений датчик від підшипника і складніша кінематика самого механізму, тим менше достовірність методу. Отримати оцінку стану по одному замірюванню неможливо.

Вимірювання шумів підшипника за допомогою метода, що пропонується, проводиться в наступній послідовності. Два датчики ДН-4 підводяться до зовнішнього кільця підшипника, що знаходиться в мостовому крані. Коли кран починає рухатися і виникають шуми, коливання грузу під час цих шумів змінюють ЕДС самоіндукції магнітного поля, в якому він знаходиться. Датчик за допомогою дротів передає отриманий аналоговий сигнал на ПНЧ, який приєднується до комп'ютера, в звуковій платі якого знаходиться 12-розрядний АЦП, який перетворює отриманий аналоговий сигнал у цифровий та представляє отриману інформацію на моніторі комп'ютеру, а потім цю інформацію можна обробляти за допомогою програми Power Graf 2.1 і за результатами діагностувати стан підшипника.

Даний підшипник працює в мостовому крані, тому для повного аналізу необхідно знати паспортні дані цього крану. Вантажопідйомність крану  $Q=200-3000$  кг. Підкрановий шлях механічного цеху в осях розрахований на роботу двох кранів, вантажопідйомність яких складає 10000 та 5000 кг. Кран переміщується надземною колією, допускається його використання в районах, де температура повітря складає не менше  $20^{\circ}C$ . Режим роботи крану – 3М, клас навантаження – В1 (робота при навантаженнях, значно менших номінальних, рідко – за номінальних навантажень), завантаженість в зміну – 25% робочого часу (власний рух крану).

Підшипник 73630, стан якого необхідно діагностувати за його шумами, встановлений у мостовому крані. Даний експеримент проводився в умовах переміщення крану по цеху з чотирма різними вантажами, тобто можна сказати, що підшипник працює в різних умовах. За допомогою установки необхідно виміряти рівень шуму, що виникає під час роботи встановленого підшипника: вібродатчики передають на установку отримані шуми та вібрації, і в результаті обробки комп'ютером цих даних ми отримуємо числові дані шумів власне підшипника та сторонніх шумів, які потім представляємо у вигляді спектрограм. Вимірювання проводилися тільки під час руху крану, тобто не враховується час на завантаження та розвантаження.

Для даного експерименту проведений розрахунок кінематики підшипників кочення. Згідно з таблицями характеристик підшипників [5] діаметр доріжок кочення внутрішнього кільця підшипника ( $d_B$ ) – 0,15 м, діаметр доріжок кочення зовнішнього кільця підшипника ( $d_3$ ) – 0,34 м, в підшипнику 14 роликів у одному ряду, тобто всього 28 роликів, діаметр кожного ролика ( $d_p$ ) – 39 мм. Згідно з паспортними даними крану швидкість руху крану ( $V_{кр}$ ) складає 1,2 м/с, діаметр колеса ( $D_{кол}$ ) – 0,5 м.

Для спрощення розрахунків приймаємо, що ролики в підшипнику розташовані не під кутом, а перпендикулярно осьовій лінії, при цьому похибка розрахунку складе не більше, ніж 2 – 3%.

Розраховуємо кутову швидкість руху  $\omega = 4,8 \text{ рад/с}$ , число обертів підшипника  $n = 0,764 \text{ об/с}$ .

З огляду на те, що зовнішнє кільце підшипника нерухоме, частота обертання внутрішнього кільця підшипника дорівнює частоті обертання самого підшипника.

Розраховуємо радіус підшипника (відстань від внутрішнього до зовнішнього кільця)  $R_n = 0,095\text{ м}$ , відстань від поверхні кільця підшипника до середньої вісі ролика  $R_{cp} = 0,0475\text{ м}$ , середній діаметр центрів роликів  $R_{cp.p} = 0,123\text{ м}$ .

Швидкість обертання внутрішнього колеса підшипника залежить від швидкості обертання колеса, тому  $V_{руху} = 0,5\text{ м/с}$ .

Далі обчислюємо час однієї вібрації з частотою 100 Гц (з огляду на те, що вібрації власне підшипника спостерігаються саме в діапазоні від 50 до 100 Гц) за 1 секунду  $t_B = 0,01\text{ с}$ .

Загальна швидкість перекочування роликів на зовнішньому та внутрішньому кільцях підшипника складає  $V_{заг} = 1\text{ м/с}$ , шлях відповідно –  $S_{заг} = 1\text{ м}$ , отже  $\kappa = V_{заг} * t_B = 1 * 0,01 = 0,01\text{ м}$ .

Розрахунок показує, що на доріжках кочення спостерігаються незначні дефекти (хвилястість) розміром 10 мм (к). При цьому даний підшипник можна експлуатувати і надалі, бо він має середній рівень зношеності, а виникнення вказаних дефектів пов'язане з відбитками на доріжках роликів під дією навантаження. Якби підшипник був у незадовільному стані і потребував заміни, тобто на доріжках кочення були б раковини, то пік частот на спектрограмі був би в районі 2000 – 3000 Гц. Якщо поглянути на спектрограму у вказаному діапазоні, то можна упевнитися в тому, що шуми підшипника носять затухаючий характер. Невеликий пік частот виникає в точці 2250 Гц, але він вказує на те, що тільки починається процес викрошування поверхні підшипника, а отже, підшипник може перебувати в експлуатації ще досить довгий час (рис. 1).

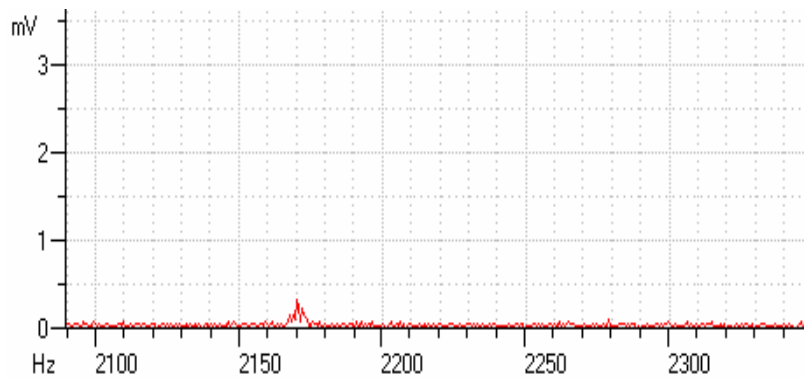


Рис. 1. Спектрограма інтенсивності звуку підшипника в діапазоні від 2000 до 2500 Гц

За даними спектрограм (рис. 2) можна зробити висновок, що в діапазоні частот до 50 Гц представлені шуми, що отримані на початку руху крану, основним чином від вібрації крану від кочення колеса по колії, на спектрограмі ця ділянка відрізняється інтенсивним підвищенням шумів. Шуми власне підшипника знаходяться в діапазоні частот від 50 до 100 Гц. Після позначки в 100 Гц представлені сторонні шуми, тобто шуми апаратури, що поступово зменшуються.

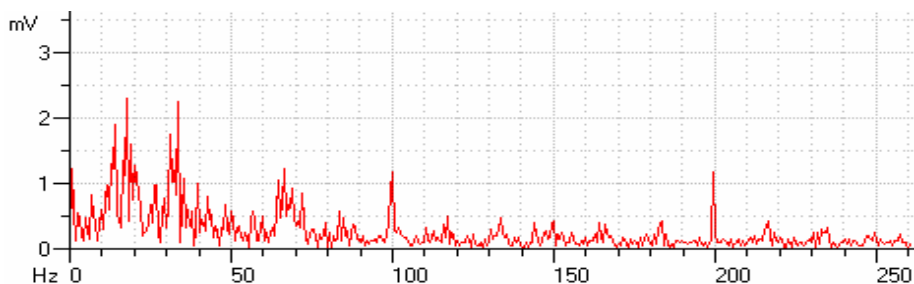


Рис.2 Спектрограма інтенсивності звуку підшипника

З огляду на те, що всі спектрограми мають ці характеристики, можна зробити висновок, що зміна умов роботи об'єкту не відобразилась на показниках шумів підшипників, отже, підшипник знаходиться в задовільному стані та може експлуатуватись і надалі.

**Висновок.** Запропонована методика базується на контролі вібрацій підшипників та дозволяє визначити їх можливі дефекти, а своєчасне виявлення цих дефектів дозволить уникнути зайвих витрат у процесі роботи та виходу з ладу цілого вузла.

**Перспективи подальших досліджень.** Подальшої розробки потребує питання визначення діапазону дійсних шумів від дефектів підшипників, що дозволить вдосконалити та уточнити запропонований метод діагностування.

**Список літератури:** 1. Барков А.В. Диагностика и прогноз состояния подшипников качения по сигналу вибрации // Судостроение. – 1985, №3. – С.21-23. 2. Александров А.В., Барков Н.А., Баркова В.А. Вибрация и вибродиагностика судового электрооборудования. – Ленинград: Судостроение, 1986. – 343с. 3. Хрущев М. М., Беркович Е. С. Точное определение износа деталей машин // АН СССР. Ин-т машиноведения – М.: АН СССР, 1953 – 116с. 4. Марченко Б. Г., Мыслович М. В. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин – Киев: Наук. думка, 1992. – 195 с. 5. Бейзельман Р.Д., Цыпкин Б.В., Перель Л.Я. Подшипники качения. Справочник. Изд. 6-е перераб. и доп. – М: Машиностроение, 1975. – 572 с. 6. Добрынин С. А., Фельдман М. С., Фирсов Г. И. Методы автоматизированного исследования вибрации машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.

*Поступила в редколлегию 09.10.08*

**УДК 621.01**

**Я.О.ПІДГАЙЧУК**, асп. каф. машинознавства, Хмельницький національний університет, м. Хмельницький

## **ДИНАМІЧНИЙ СИНТЕЗ КУЛАЧКОВО-ЦІВКОВИХ МЕХАНІЗМІВ З ПЕРЕРИВЧАСТИМ ОБЕРТОВИМ РУХОМ ВИХІДНОЇ ЛАНКИ**

Стаття присвячена особливостям динамічному синтезу розробленого автором кулачково-цівкового механізму з переривчастим обертовим рухом вихідної ланки.

This article is dedicated to dynamic synthesis of the cam and lantern mechanism with intermittent rotational motion of an output link developed by the author.

**Постановка задачі.** В сучасних машинах і приладах досить часто використовуються механізми переривчастого руху [1-4, 11-13]. До таких механізмів відносяться: кулачкові, мальтійські, храпові, з неповнозубими колесами, важільні та комбіновані (зубчасто-важільні, кулачково-важільні тощо) механізми. Переваги та недоліки таких механізмів наведені в технічній літературі, зокрема, в попередніх статтях [5, 7], в яких, крім цього, наведена методика кінематичного синтезу оригінальних кулачкових механізмів з періодичним обертовим рухом і зупинкою вихідної ланки.

В цій роботі розглядаються особливості динамічного синтезу кулачково-цівкового механізму (рис. 1) [7, 14], який забезпечує за один оберт спарених кулачків *два повороти* вихідної ланки на кут  $\beta_m = 2\pi/z_2$  з однаковою або різною тривалістю зупинки вихідної ланки, де  $z_2$  – кількість роликів на цівковому колесі, та наведені рекомендації щодо їхнього оптимального синтезу.



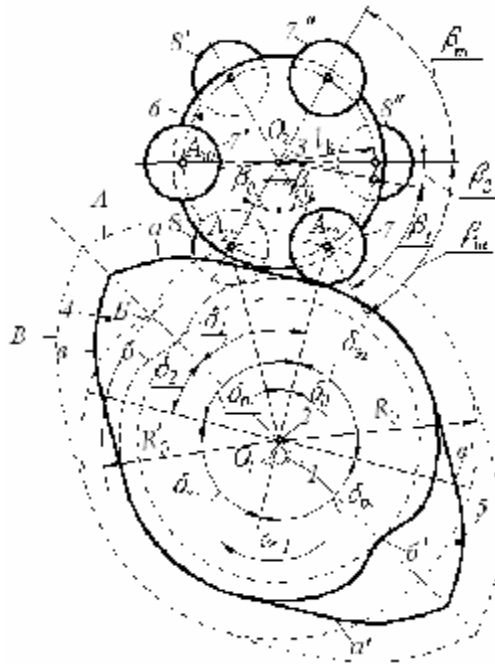


Рис. 1. Схема кулачково-цівкового механізму з періодичним поворотом і зупинкою вихідної ланки

Механізм складається із основи 1, на якій встановлені вали 2 і 3. На валу 2 закріплено два спарені однакові кулачки 4 і 5, які надають періодичний обертовий рух із зупинками вихідної ланки 6. Ланка 6 несе не менше трьох пар рівномірно розташованих роликів 7 і 8 ( $z_2 = 6$ ). Ролики 7 зміщені відносно роликів 8 на кут  $\beta_m$ . Ролики 7 контактують з кулачком 4, ролики 8 – з кулачком 5. При трьох парах роликів такий кулачковий механізм забезпечує за один оберт кулачків два повороти вихідної ланки 6, кожний – на кут  $\beta_m = 60^\circ$ .

Механізм працює таким чином. При обертанні спарених кулачків 4 і 5 профіль  $a$  кулачка 4, якому відповідає кут профілю  $\delta_1$ , взаємодіючи з роликом 7, повертає диск 6 на кут  $\beta_1 < 60^\circ$ , в цей час ролик 8 контактує з кулачком 5, що забезпечує замикання ланок механізму. Після виходу кулачка 4 із контакту з роликом 7 диск 6 приводиться в рух кулачком 5, який контактує профілем  $b$  з роликом 8 і повертає вихідну ланку на кут  $\beta_2 = \beta_m - \beta_1$ , а кулачок 5 в цей час контактує з роликом 7' (кут профілю  $\delta_2$ ), причому сума кутів  $\delta_1 + \delta_2 = \delta_{p1}$ ,  $\beta_1 + \beta_2 = \beta_m$ . В період зупинки ролики 7 і 8 займають положення відповідно роликів 7 і 8 та котяться по циліндричних поверхнях відповідних кулачків доти, поки в контакт з виступом кулачка 5 (профілем  $a$ ) не вступить ролик 8 і цикл руху повториться.

Як відомо [2, 3, 6, 8, 9], при проектуванні механізмів треба враховувати можливість їх руху під дією прикладених сил з можливо більшим ККД. Виконання цих умов значною мірою залежить від вибраних розмірів та форм ланок механізму. Працездатність кулачкового механізму, яка є основною складовою розроблених механізмів, залежить від основного радіуса кулачка і взаємного розташування осей кулачка і цівкового колеса. В кулачково-цівкових механізмів з переривчастим обертовим рухом вихідної ланки, крім цих параметрів, на їхню працездатність ще впливають: кількість роликів на цівковому колесі; тривалість періодів розбігу і вибігу цівкового колеса та вибраний для цього закон руху.

При невдалому виборі цих параметрів може настати заклинювання механізму або він матиме розміри ланок більші, ніж це викликається необхідністю, більше того, механізм може не існувати. Це пояснюється невідповідними співвідношеннями сил,

що діють між кулачками і цівковим колесом. Тому слід у всіх випадках поєднувати кінематичний синтез механізмів з динамічним, тобто з урахуванням сил, що діють на ланки.

Основним фактором, який призводить до заклинювання ланок в кулачкових механізмах, є кути тиску у вищій кінематичній парі  $\vartheta_i$ , які в будь-якому положенні механізму повинні бути менші допустимих  $\vartheta_d$ . На практиці допустимий кут тиску для коромислових кулачкових механізмів  $\vartheta_{\text{доп}} = 45\text{--}50^\circ$ .

**Дослідження кутів тиску в механізмі.** Методика визначення кутів тиску в кулачкових механізмах викладено як в спеціальній літературі, так і навчальних посібниках [2, 3, 6, 8, 9]. Особливості механізмів, які розглядаються, полягають в тому, що рух вихідної ланці за період її одного повороту спочатку здійснюється кулачком 4 (див. рис. 1), а потім кулачком 5. Тому при синтезі цих механізмів треба враховувати кути тиску в обох вищих кінематичних парах (кулачок 4 – ролик 7 і кулачок 5 – ролик 8).

На рис. 2 показані кути тиску  $\vartheta_1$  і  $\vartheta_2$  відповідно між кулачком 4 і роликом 7 та кулачком 5 і роликом 8, де  $v_{B7}, v_{B8}$  – вектори швидкості відповідно центрів роликів 7 і 8;  $R_{47}, R_{58}$  – реакції у відповідних парах. У нашому випадку для спрощення аналізу кутів тиску, особливо це стосується кута  $\vartheta_2$ , який змінюється в межах від 0 до  $\pi$ , доцільно враховувати його знак.

Залежності для визначення кутів тиску в нашому випадку мають вигляд [2, 3]:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \arctg \left[ \frac{-s'_{B_2} + a \cos(\beta_i + \beta_0) - l_k}{a \sin(\beta_i + \beta_0)} \right]; \\ \vartheta_2 &= \arctg \left[ \frac{-s'_{B_2} - a \cos(\beta_i - \beta_0) - l_k}{a \sin(\beta_i - \beta_0)} \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

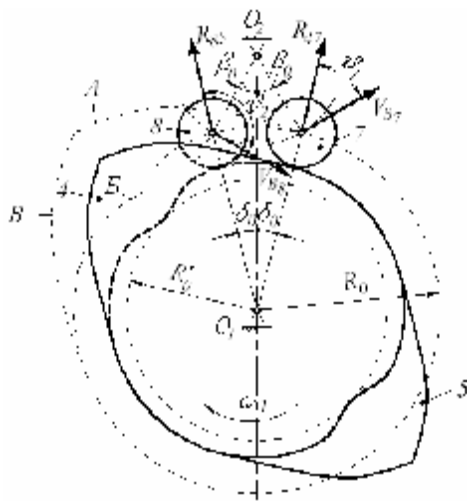


Рис. 2. Кути тиску на початку періоду руху цівкового колеса

де  $\vartheta_1, \vartheta_2$  – кути тиску відповідно в парі 4 – 7 і 5 – 8;  $s'_{B_2} = \beta_i l_k$  – аналог швидкості цівкового колеса  $b$ ;  $a = O_1 O_2$  – міжосьова відстань;  $\beta_0$  – кут, який визначає початкове положення роликів 7 і 8 відносно вісі  $O_1 O_2$ ;  $\beta_i$  – кутові переміщення роликів;  $l_k$  – довжина коромисла  $AO_2$  (радіус кола центрів роликів на цівковому колесі).

На рис. 3 наведено приклад діаграми кутів тиску для механізму, який зображений на рис. 1, у функції відносного часу

$k = \beta_i / \beta_m$ , де  $\beta_i$  – кутове переміщення цівкового колеса. Як видно з цих діаграм, кут  $\vartheta_1$  має найбільше значення на початку періоду руху, який визначається за формулою

$$\vartheta_{1m} = \pi / 2 - \delta_0 - \beta_0, \quad (2)$$

де  $\delta_0 = \arccos \frac{R_0^2 + a^2 - l_k^2}{2R_0 a}$ ;  $\beta_0 = \pi/z_2$  [5, 7].

Радіус основного кола кулачків (див. рис. 1) визначається за формулою

$$R_0 = \sqrt{a^2 + l_k^2 - 2al_k \cos \beta_0}.$$

Кут  $\vartheta_2$  на першій половині руху ( $k \leq 0,5$ ) має від'ємне значення, а це значить, що в цей час ведучим є кулачок 4, а кулачок 5 є веденим і служить для замикання ланок під час руху. При  $k = 0,5$  кут  $\vartheta_2 = \pi/2$  і ролик 8 знаходиться на міжосьовій лінії  $O_1O_2$ . Подальший рух

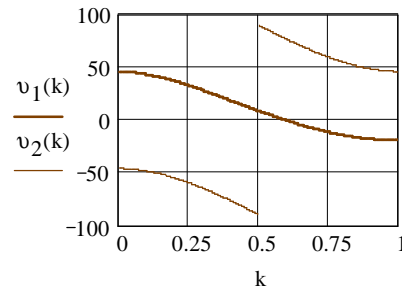


Рис. 3. Приклад діаграми кутів тиску [10]

цівкового колеса забезпечується кулачком 4, поки не закінчиться його профіль  $A$ , а це настає тоді, коли його радіус  $R_1(k)$  досягає максимального значення  $R_{1m}(k)$  і визначається точкою перетину профілів  $A$  і  $B$ . У цьому випадку мають місце рівності (рис. 1 і рис. 4):

$$R_{1m}(k) = R_{3m}(k), \quad \delta_1(k) = \delta_3(1-k), \quad (3)$$

де  $R_{3m}(k)$  – максимальний радіус профілю  $B$ ;  $\delta_1(k), \delta_3(1-k)$  – кути профілю відповідно  $A$  і  $B$ .

З другої рівності (3) знаходимо значення відносного часу  $k_m$ , при якому закінчується контакт ролика 7 з кулачком 4, і кулачок 5 стає ведучим. Зокрема для даного механізму, діаграми кутів профілю якого наведені на рис. 4, а,  $k_m = 0,725$ , тоді максимальний кут  $\vartheta_{2m} = 74,5^\circ$ , що є дещо більше допустимого значення для коромислових кулачків, але це має місце в кінці періоду руху, при вибігу, коли на вихідну ланку діють у напрямку руху додаткові моменти інерції, крім цього, надалі кут  $\vartheta_2$  зменшується, і при  $k = 1$   $\vartheta_2 = \vartheta_{1m}$  (див. рис. 3).

Критичним для працездатності механізму є максимальне значення кута  $\vartheta_{1m}$ , який у нашому випадку знаходиться в допустимих межах –  $\vartheta_{1m} = 45,9^\circ$ . Крім цього, кути тиску  $\vartheta_{2m}$  при  $k > 0,5$  можна зменшити, якщо зменшити міжосьову відстань  $a$  або збільшити радіус кола  $l_k$  лише для роликів 8. У першому випадку, прийнявши  $\lambda = 2,14$  (рис. 4, б), одержимо –  $\vartheta_{1m} = 38,6^\circ$ ,  $k_m = 0,79$ ,  $\vartheta_{2m} = 62,7^\circ$ . У другому випадку, збільшивши  $l_k$  для роликів 8, одержимо два різні кулачки, що дещо ускладнює конструкцію механізму.

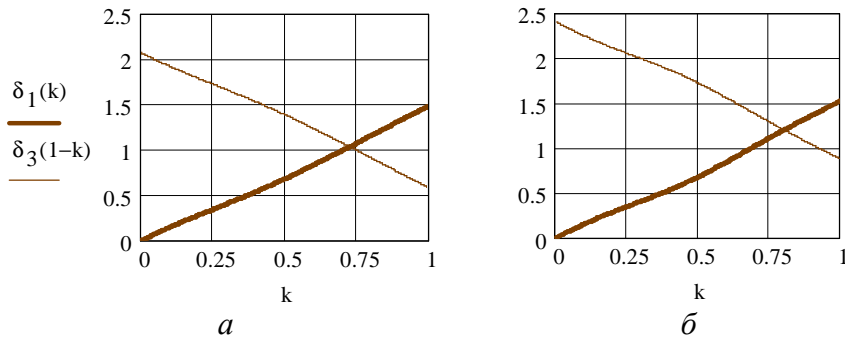


Рис. 4. Приклади діаграм кутів профілів А і В:  
 $a - \lambda = 2,86$ ;  $b - \lambda = 2,14$  [10]

**Визначення мінімального значення міжосьової відстані механізму і кількості пар роликів на цівковому колесі.** Цей фактор, що максимальне значення кута тиску  $\vartheta_{1m}$  має місце на початку періоду руху, суттєво спрощує динамічний синтез даних механізмів. Аналіз залежностей (1)-(2) показує, що на величину кута тиску  $\vartheta_{1m}$  впливають наступні параметри: співвідношення між довжиною коромисла  $l_k$  і міжосьовою відстанню  $a = O_1O_2$ , яке позначимо  $\lambda = a/l_k$  – відносна міжосьова відстань; кількість роликів  $z_2$  на цівковому колесі; кут повороту кулачків  $\varphi_p$  за період одного повороту цівкового колеса; закон руху цівкового колеса.

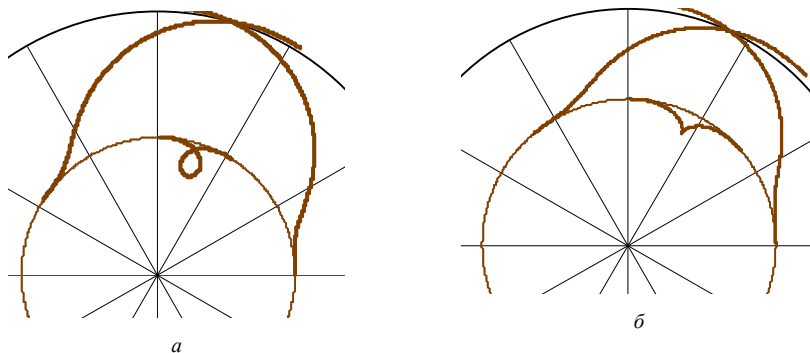


Рис. 5. До визначення мінімальної міжосьової відстані механізму  
(теоретичні профілі кулачків):  $a - \lambda < \lambda_{\min}$ ;  $b - \lambda = \lambda_{\min}$  [10]

При малих співвідношеннях  $\lambda_{\min} = a_{\min}/l_k$  настає самоперетин профілю В кулачків (рис. 5, а), це значення визначає мінімальну міжосьову відстань  $a_{\min} = \lambda_{\min} l_k$ . Граничним значенням  $\lambda_{\min}$  є випадок, коли радіус кривизни профілю В  $\rho = 0$  (рис. 5, б). Це настає при  $k = 0,5$ . Використаємо залежність для радіуса кривизни профілю В, яка має вигляд [6]:

$$\rho = \frac{\{a^2 + l_k^2(1 + \beta_v)^2 - 2al_k[(1 + \beta_v)\cos(\beta_0 + \beta_i)]\}^{\frac{3}{2}}}{a^2 + l_k^2(1 + \beta_v)^3 - 2al_k(1 + \beta_v)(2 + \beta_v)\cos(\beta_0 + \beta_i) + \beta_a \sin(\beta_0 + \beta_i)}, \quad (4)$$

де  $\beta_v, \beta_a$  – відповідно аналоги кутових швидкостей та прискорень цівкового колеса;  $\beta_0, \beta_i$  – кути, які визначають його положення на початку і під час руху. Тоді, прирівнявши праву сторону рівняння (4) до нуля та прийнявши довжину радіуса  $l_k$  за одиницю вимірювання довжини, одержимо рівняння:

$$\lambda^2 + (1 + \beta_v)^2 - 2\lambda[(1 + \beta_v)\cos(\beta_0 + \beta_i)] = 0. \quad (5)$$

При  $k = 0,5$  кут  $\beta_i = |-\beta_0| = \pi/z_2$ , а аналог кутової швидкості  $\beta_v = b_k \beta_m / \varphi_p$ . Крім цього, для більшості законів руху в цьому положенні механізму інваріант швидкості  $b_k = b_{k \max} = B$ , де  $B$  – константа піка швидкості, значення якої наводиться в спеціальній літературі [6, 8, 9], зокрема, в підручнику [3], а  $\varphi_p$  – кут повороту кулачків за період одного повороту цівкового колеса. Тоді одержимо

$$\lambda_{\min} = 1 + \beta_v, \quad (6)$$

де

$$\beta_v = \frac{2\pi B}{z_2 \varphi_p}. \quad (7)$$

Отже, для знаходження мінімально допустимого значення міжосьової відстані  $a_{\min} = \lambda_{\min} l_k$  необхідно попередньо вибрати кількість роликів  $z_2$  на цівковому колесі, радіус  $l_k$ , на якому розташовані ці ролики, закон руху цівкового колеса та кут повороту кулачків за період руху  $\varphi_p$ , який визначається циклограмою роботи механізму.

Максимальне значення  $\lambda$  буде тоді, коли кут тиску  $\vartheta_{1m} = \vartheta_d$ , а він знаходиться за формулою (2). При такому  $\vartheta_{1m}$  кут (див. рис. 2)

$$\delta_0 = \pi/2 - \beta_0 - \vartheta_d. \quad (8)$$

Тоді максимальні значення  $a_{\max}$  і  $\lambda_{\max}$  відповідно дорівнюють:

$$a_{\max} = \frac{l_k \sin(\beta_0 + \delta_0)}{\sin \delta_0}, \quad \lambda_{\max} = a_{\max} / l_k. \quad (9)$$

В табл. 1 наведені співвідношення між геометричними параметрами механізму для різних значень  $z_2$  при мінімально і максимально допустимих значеннях  $\lambda = a/l_k$ , а також максимальні значення кутів тиску при цих значеннях  $\lambda$  і допустимому куту тиску (для  $\lambda_{\max}$ )  $\vartheta_{1m} = \vartheta_d = 50^\circ$  та значення відносного часу  $k_m$ , при якому рух передається кулачку 5, а кут  $\vartheta_2$  в цей момент має найбільше значення  $\vartheta_{2m}$ , які наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Співвідношення між геометричними параметрами механізму при рівноспадному законі руху

Позначення	Кількість роликів на цівковому колесі $z_2$				
	6	8	10	12	14
Мінімально допустима міжосьова відстань					
$\lambda_{\min}$	2,00	1,75	1,60	1,50	1,43
$\vartheta_{1m}, ^\circ$	36,2	42,6	46,5	49,1	51
$k_{m_1}$	0,807	0,881	0,929	0,964	0,988
$\vartheta_{2m}, ^\circ$	60,5	57,0	54,9	53,9	52,6
Максимально допустима міжосьова відстань при $\vartheta_{1m} = 50^\circ$					
$\lambda_{\max}$	3,70	2,14	1,72	1,52	1,41
$k_{m_2}$	0,674	0,809	0,896	0,956	0,998
$\vartheta_{22m}, ^\circ$	74,5	65,9	60,2	54,9	50,4

Аналіз наведених в табл. 1 даних дозволяє зробити наступні висновки:

1. Кількість пар роликів на цівковому колесі ( $z_2/2$ ) може бути від 3 до 7. При  $z_2/2=8$  не лише кути тиску більші допустимих значень, але, більше цього, механізм не існує, оскільки максимальне значення профілю кулачка не може забезпечити поворот цівкового колеса на кут  $\beta_m$ . Число пар роликів також не може бути меншим 3-х.

2. Встановлено допустимий діапазон зміни відносної міжосьової відстані  $\lambda$  при різних значеннях кількості роликів на цівковому колесі. Цей діапазон при вибраному законі руху найбільший при мінімальному  $z_2=6$ , а для  $z_2 \geq 10$  практично відсутній, оскільки  $\lambda_{\min} \approx \lambda_{\max}$ . При деяких інших законах це максимальне значення може ще зменшитися. Характер зміни параметрів, що наведені у табл. 1, для  $z_2=6$  і  $z_2=8$  показано на рис. 6. З цих діаграм видно, що збільшення відносної міжосьової відстані призводить до погіршення роботи механізму,

оскільки збільшуються кути тиску, а критичне значення  $k_m$ , при якому визначається  $\vartheta_{2m}$ , зменшується, що призводить до збільшення цього кута (див. рис. 3).

**Дослідження впливу закону руху цівкового колеса на геометричні параметри механізму.**

Закон руху цівкового колеса суттєво впливає на кути тиску і, відповідно, на допустимі значення відносної міжосьової

відстані та кількості роликів на цівковому колесі. Для прикладу в табл. 2 наведено співвідношення між геометричними параметрами механізму при синусоїдному законі, який має суттєвий недолік – повільна зміна переміщення вихідної ланки на початку і в кінці руху [2, 3, 6]. Як видно з наведеної таблиці, при цьому законі руху кількість роликів може бути лише 6 або 8, вже при  $z_2=10$  кути тиску  $\vartheta_{1m} > \vartheta_d = 50^\circ$ , а  $\lambda_{\max} > \lambda_{\min}$ . В табл. 3 наведені рекомендовані граничні значення  $\lambda$  та максимальні значення кутів тиску в критичних положеннях механізму ( $\vartheta_{1m} \leq \vartheta_d = 50^\circ$  і  $\rho=0$ ) при  $z_2=6$  для різних законів, які найчастіше використовуються в машинобудуванні. Умовні позначення законів руху запозичено із робіт [3, 9].

Аналіз наведених в табл. 3 даних показує, що закон руху вихідної ланки впливає на величину допустимих значень відносної

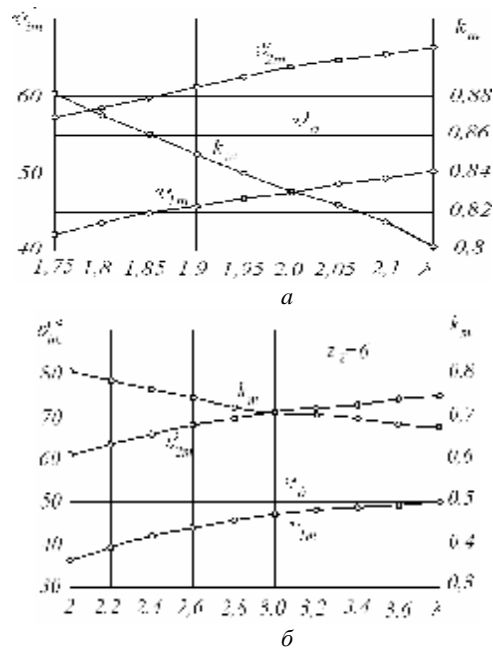


Рис. 6. Характер зміни параметрів механізму при рівноспадному законі руху в діапазоні  $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ : а –  $z_2=6$ ; б –  $z_2=8$

міжосьової відстані  $\lambda$  і максимальне число роликів на цівковому колесі  $z_{2\max}$ . Максимальні значення  $\lambda_{\max}$  і величина  $k_m$  при цьому не залежать від закону руху, вони визначаються кількістю роликів  $z_2$  і прийнятим допустимим кутом  $\vartheta_d$  для кулачка 4.

Таблиця 2

Співвідношення між геометричними параметрами механізму при синусоїдному законі руху вихідної ланки

Мінімально допустима міжосьова відстань				Максимально допустима міжосьова відстань при $\vartheta_{1m} = 50^\circ$			
Позначення	Кількість роликів на цівковому колесі $z_2$			Позначення	Кількість роликів на цівковому колесі $z_2$		
$\lambda_{\min}$	2,(3)	2,0	1,8	$\lambda_{\max}$	3,7	2,14	1,72
$\vartheta_{1m},^\circ$	41,2	47,8	52,0	$k_{m_2}$	0,674	0,809	0,896
$k_{m_1}$	0,765	0,831	0,874	$\vartheta_{22m},^\circ$	71,0	60,3	53,9
$\vartheta_{2m},^\circ$	59,6	57,2	57,0				

Таблиця 3

Граничні значення  $\lambda$  і  $z_2$  та максимальні значення кутів тиску при  $z_2 = 6$  для різних законів руху вихідної ланки

Позначення	Закон руху						
	$C_0$	К	0000	0050	Ш	2.9	0010
$B$	2	1,571	1,5	2	1,875	1,625	1,525
$\lambda_{\min}$	2,(3)	2,05	2,00	2,(3)	2,25	2,08	2,02
$\vartheta_{1m},^\circ$	41,2	37,1	36,2	41,8	40,1	37,7	36,5
$k_{m_1}$	0,765	0,801	0,807	0,768	0,774	0,795	0,805
$\vartheta_{2m},^\circ$	59,6	60,3	60,5	62,1	59,8	59,5	60,4
$\lambda_{\max}$	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7
$k_{m_2}$	0,674	0,674	0,674	0,674	0,674	0,674	0,674
$\vartheta_{22m},^\circ$	71,0	73,9	74,5	72,1	71,8	73,5	74,3
$z_{2\max}$	8	12	14	8	8	10	12

**Дослідження впливу тривалості періоду руху кулачків при одному повороті цівкового колеса на геометричні параметри механізму.** Як видно з формул (1), в склад яких входить аналог швидкостей  $s'_{B_2} = \beta_v l_k$ , де  $\beta_v = b_k \beta_m / \varphi_p$ , фазовий кут  $\varphi_p$  впливає на величину кутів тиску, а відповідно і на величини інших параметрів, які забезпечують працездатність механізму. На рис. 7 наведено для прикладу (закон Шуна) діаграми зміни  $\lambda_{m_1}$  і максимальних значень кутів тиску  $\vartheta_{1m}$  і  $\vartheta_{2m}$  при значеннях  $k_m$  залежно від вибраного кута  $\varphi_p$ . З цих діаграм видно, що при куті  $\varphi_p \approx 42^\circ$   $\lambda_{\min} = \lambda_{\max}$ , тобто при будь-якому значенні  $\varphi_p < 42^\circ$  має місце самоперетин профілю  $B$ . Максимальний кут  $\varphi_p$  знаходимо з умови, при якій відсутня зупинка вихідної ланки. При такій умові кут

$$\varphi_{\text{pmax}} = \pi - 2\delta_0. \quad (10)$$

Аналітично мінімально допустиме значення кута  $\varphi_p$  можна знайти, розв'язавши рівняння (4), (6) відносно  $\varphi_p$ , попередньо вибравши закон руху, який визначає константу піка швидкості  $B$ , кількість роликів цівкового колеса  $z_2$  і відносну міжосьову відстань в межах  $\lambda_{\text{min}} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{max}}$ , які визначаємо за формулами (6) і (9). Тоді, після відповідних перетворень рівняння (4), одержимо

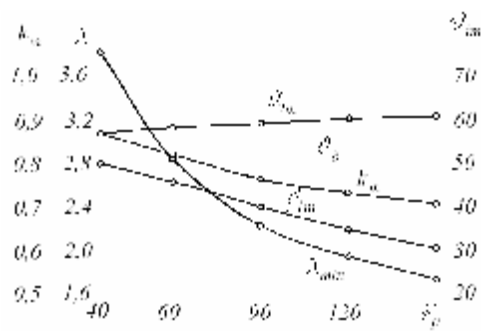


Рис. 7. Характер зміни параметрів механізму при зміні періоду руху кулачків за один поворот цівкового колеса (законі Шуна,  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ ,  $z_2 = 6$ )

$$\varphi_{\text{pmin}} = \frac{2\pi B}{z_2(1-\lambda)}. \quad (11)$$

Для прикладу в табл. 4 наведені допустимі значення кута  $\varphi_p$ , обчислені за формулами (10) і (11) та його допустимий діапазон  $\Delta\varphi_p$  при різній кількості роликів на цівковому колесі (закон руху – рівноспадний,  $\lambda = \lambda_{\text{max}}$ ).

Таблиця 4  
Допустимі значення  $\varphi_p$  залежно від кількості роликів  $z_2$

$z_2$	6	8	10	12	14
$\varphi_{\text{pmin}}, ^\circ$	41,6	74,0	93,8	108,2	117,6
$\varphi_{\text{pmax}}, ^\circ$	121	130,3	137,7	143,5	148,0
$\Delta\varphi_p, ^\circ$	79,4	56,3	40,3	35,3	30,4

Як видно з наведеної таблиці, при збільшенні кількості роликів  $z_2$  як мінімальні, так і максимальні допустимі значення кута  $\varphi_p$  зростають, але їх допустимий діапазон значно зменшується.

**Коефіцієнт корисної дії механізму (ККД).** Для визначення миттєвого ККД даного механізму використаємо залежності, які наведені в роботі [8] для двох випадків:

- результуюча сил, що діють на цівкове колесо, направлена проти його руху

$$\eta = \frac{1 - f_1 f_2 - (f_1 + f_2) \text{tg}(\vartheta)}{1 + f_1 \text{ctg} \delta}, \quad (12)$$

- результуюча сил, що діють на цівкове колесо, направлена у напрямі його руху

$$\eta = \frac{1 - f_1 \text{ctg} \delta}{1 - f_1 f_2 + (f_1 + f_2) \text{tg}(\vartheta)}, \quad (13)$$

де  $f_1$  – зведений коефіцієнт тертя в кінематичній парі кулачок – ролик;  $f_2$  – зведений коефіцієнт тертя в обертовій парі цівкове колесо – стояк;  $\vartheta$  – кут тиску;  $\delta$  – кут підйому профілю кулачка, яким називають гострий кут між нормаллю  $n - n$  і прямою  $t - t$ , що проходить через центр обертання кулачка і точкою контакту кулачка з роликом цівкового колеса (рис. 8).

При аналізі ККД механізму прийемо більш несприятливі умови роботи, коли ролик ковзає по кулачку, тертьова пара з матеріалів



сталь – чавун, тоді  $f_1=0,18$ . Зведений коефіцієнт тертя в обертовій парі  $f_2=1,27 f_1$  [2]. Кут підйому профілю кулачка  $\sigma$  визначаємо за такою формулою

$$\sigma_i = \pi/2 - \alpha_i + \delta_i - \vartheta_i, \quad (14)$$

де  $\alpha$  – кут нахилу коромисла (лінії  $A_i O_{2i}$ );  $\delta = \delta(k)$  – кут профілю кулачка;  $\vartheta = \vartheta(k)$  – кут тиску;  $i$  – номер вищої пари.

Кут нахилу коромисла

$$\alpha_i = \arctg \frac{y_A - y_{O_2}}{x_A - x_{O_2}}, \quad (15)$$

де  $x_A, x_{O_2}, y_A, y_{O_2}$  – координати відповідно центрів ролика і цівкового колеса, які дорівнюють:

$$\left. \begin{aligned} x_A &= R_i \cos \delta_i; & y_A &= R_i \sin \delta_i; \\ x_{O_2} &= a \cos \varphi_i; & y_{O_2} &= a \sin \varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

На рис. 9 наведено приклади діаграм миттєвих ККД механізмів  $\eta_i = \eta(k)$  у двох вказаних випадках (12) і (13) та їх середні значення  $\eta_c = \Sigma \eta_i / i$  (закон руху – рівноспадний,  $\lambda = \lambda_{\max}, z_2 = 14$ ).

Як видно із цих діаграм, миттєвий ККД механізму визначається спочатку першим кулачковим механізмом (кулачок 4 – ролик 7), а при значеннях  $k \geq k_m$  другим кулачковим механізмом (кулачок 5 – ролик 8). Якщо результуюча сил, що діють на цівкове колесо, направлена проти його руху (рис. 9, а), то при закінченні роботи кулачка 4 дещо зменшується миттєвий ККД, але він більший від нуля, тобто заклинювання не наступить, незважаючи на те, що кут тиску максимальний. В іншому випадку, коли результуюча сил, що діють на цівкове колесо, направлена у напрямі його руху, а це буває в період вибігу, в цей час момент від сил інерції направлений у напрямі руху і може бути більшим за момент сил опору, а тому миттєвий ККД збільшується, що і зумовлює збільшення його середнього значення  $\eta_c$  (від 0,87 до 0,935). На рис. 9, б наведені діаграми ККД, які обчислювались на ділянці  $0 \leq k \leq k_m$  за формулою (12), а при  $k_m \leq k \leq 1$  – за формулою (13). Це є підтвердженням того, що в період вибігу допустимі кути тиску можуть бути дещо збільшені. Подальші експериментальні дослідження дозволять більш точно встановити їхні допустимі значення.

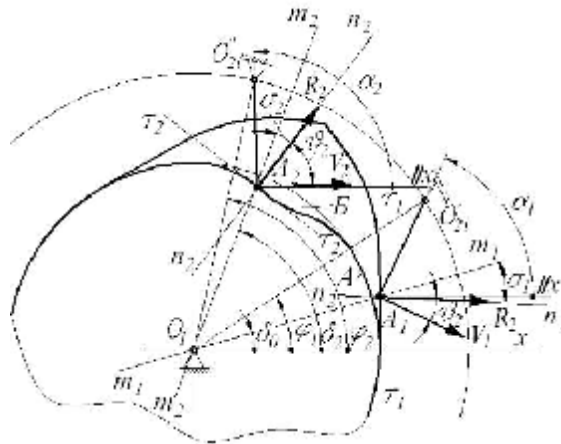


Рис. 8. Визначення кута підйому профілю кулачка

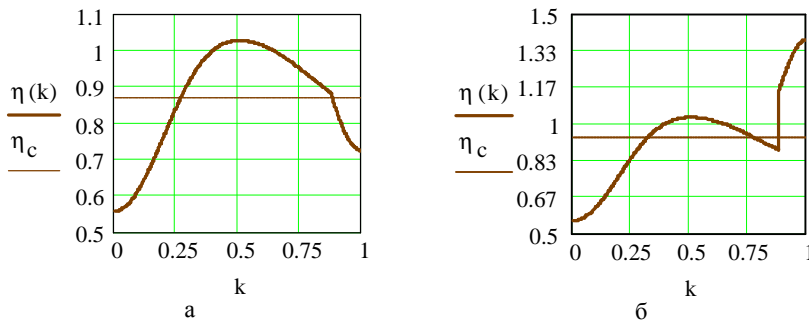


Рис. 9. Приклади діаграм миттєвих ККД механізмів [10]

**Висновки.** В результаті проведених досліджень кутів тиску і миттєвого та середнього ККД в даному механізмі показано особливості його динамічного синтезу. Встановлено, що першим критичними положенням у роботі механізму є початок руху, тоді кут тиску в першому кулачковому механізмі  $\vartheta_1$  (кулачок 4 – ролик 7) має максимальне значення. Ця умова визначає максимальну відносну міжосьову відстань  $\lambda_{\max}$ . Другим критичним положенням є кінець роботи першого кулачкового механізму, тоді кут тиску в другому кулачковому механізмі (кулачок 5 – ролик 8)  $\vartheta_2$  має максимальне значення. Третім критичним положенням механізму є умова самоперетину профілю *Б* кулачків, яка визначає мінімально допустимі значення відносної міжосьової відстані  $\lambda_{\min}$  та кута руху кулачків  $\varphi_{\min}$ .

Наведено рекомендації та аналітичні залежності, які дозволяють вибрати основні геометричні параметри механізму (відносну міжосьову відстань  $\lambda$ , кількість роликів  $z_2$  на цівковому колесі, діапазон кута руху  $\varphi_p$  кулачків), при яких забезпечуються їхня працездатність, тобто максимальні значення кутів тиску знаходиться в допустимих межах, особливо це стосується періоду розбігу. Діапазон зміни цих параметрів залежить також від вибраного закону руху цівкового колеса.

Як показують дослідження ККД механізму, в період руху цівкового колеса, кути тиску в другій парі (кулачок 5 – ролик 8) дещо більші допустимих, але це не призводить до заклинювання, оскільки миттєвий ККД  $\eta_i > 0$ . А якщо прийняти до уваги, що кулачок 5 стає ведучим лише в кінці період вибігу при  $k > k_m$ , то і миттєвий, і середній ККД збільшуються завдяки моменту інерції ведених мас, який в цей час направлений у напрямку руху.

**Список літератури:** 1. Артоболевский И. И. Механизмы в современной технике. – В 7 т. – М.: Наука, 1979-1981. 2. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. – 640 с. 3. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин. – К.: Наукова думка, 2002. – 660 с. 4. Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М. Механизмы: Справочник. – М.: Машиностроение, 1976. – 784 с. 5. Костогриз С.Г., Підгайчук Я.О. Кінематичний синтез кулачкового механізму з переривчастим обертовим рухом вихідної ланки // Вісник Хмельницького національного університету. – Т.2. Техн. Науки. – № 3. – 2007. – С. 44-49. 6. Левитский Н. И. Кулачковые механизмы. – М.: Машиностроение, 1964. – 287 с. 7. Підгайчук Я.О. Кінематичний синтез кулачково-цівкового механізму з переривчастим обертовим рухом вихідної ланки // Вісник Хмельницького національного університету. – Т.2. Техн. Науки. – № 3. – 2007. – С. 13-17. 8. Попов Н. Н. Расчет и проектирование кулачковых механизмов. – М.: Машиностроение, 1980. – 214 с. 9. Тур К. В. Механика полиграфических машин. – М.: Книга, 1965. – 496 с. 10. Дьяконов В. Mathcad 2000. – СПб.: Питер, 2001. – 592 с. 11. Авторское свидетельство СССР № 998789, кл. F 16 H 25/04. Поворотное устройство / А.И. Петрук, В.Г. Яницкий и др. – № 3264107/25; Заявлено 26.03.81; Опубл. 23.02.83, Бюл. № 7. 12. Авторское свидетельство СССР № 1128032, кл. F 16 H 25/04. Поворотное устройство / А.И. Петрук, В.Г. Яницкий и др. – № 3635334/25; Заявлено 19.08.83; Опубл. 07.12.84, Бюл. № 45. 13. Патент України на корисну модель № 29706, кл. F 16 H 25/00. Кулачковий механізм переривчастого обертового руху веденої ланки / С.Г. Костогриз, Я.О. Підгайчук – № u200710330; Заявлено 17.09.2007; Опубл. 25.01.2008, Бюл. № 2. 14. Патент України на корисну модель № 29707, кл. F 16 H 25/00. Кулачково-цівковий механізм

УДК 621.01:539.3

**Т.В. ПОЛИЩУК**, зам. генерального директора, ОАО „Азовобщешмаш”, г. Мариуполь

### **К ВОПРОСУ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИИ МЕХАНИЗМА НАКЛОНА ПЛАВИЛЬНОЙ ПЕЧИ**

У статті наведені моделі та результати досліджень напружено-деформованого стану металоконструкції механізму нахилу плавильної печі.

In the paper the models and results of researches of stressed and deformed state of metalware of mechanism of inclination of smelting furnace are presented.

**Введение.** Для исследования статике, кинематики и напружено-деформированного состояния (НДС) металоконструкции механизма наклона плавильной печи (МНПП) ранее были предложены подходы, методы, модели, алгоритмы, программное обеспечение [1-7]. этом большое внимание было уделено моделированию данных процессов и состояний в макете механизма. В данной статье основное внимание уделяется исследованию напружено-деформированного состояния полномасштабной конструкции МНПП.

**1. Модели.** Исследуется напружено-деформированное состояние механизма наклона плавильной печи. Геометрия модели перестроена в соответствии с рабочими чертежами с учетом рекомендаций [1-7]. Нагрузки также являются полномасштабными: нагрузка, приходящаяся на механизм наклона от плавильной печи – 1,9 МН; нагрузка, приходящаяся от вспомогательного оборудования – 1,1 МН; вес конструкции – 210 кН (рис. 1).

В результате исследования были получены картины НДС всего макета, а также проведено подмоделирование центральной опорной поверхности с более мелкой конечно-элементной сеткой. Более подробно геометрическая модель исследуемого объекта представлена на рис. 2. Подготовленные к расчету в среде ANSYS геометрическая и конечно-элементная модели приведены на рис. 3.

**2. Результаты расчета напружено-деформированного состояния механизма наклона плавильной печи.** На рис. 4 представлена структура

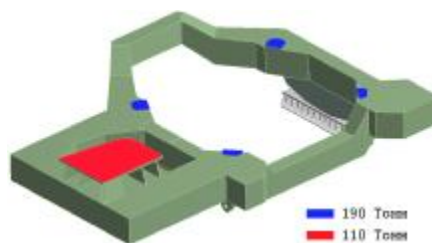


Рис. 1. Основные нагрузки, действующие на металоконструкцию механизма наклона плавильной печи

При

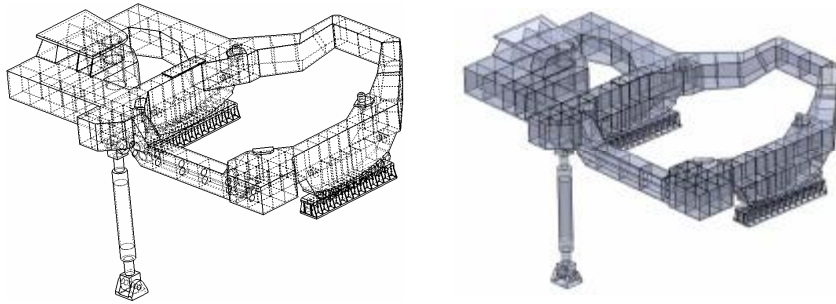
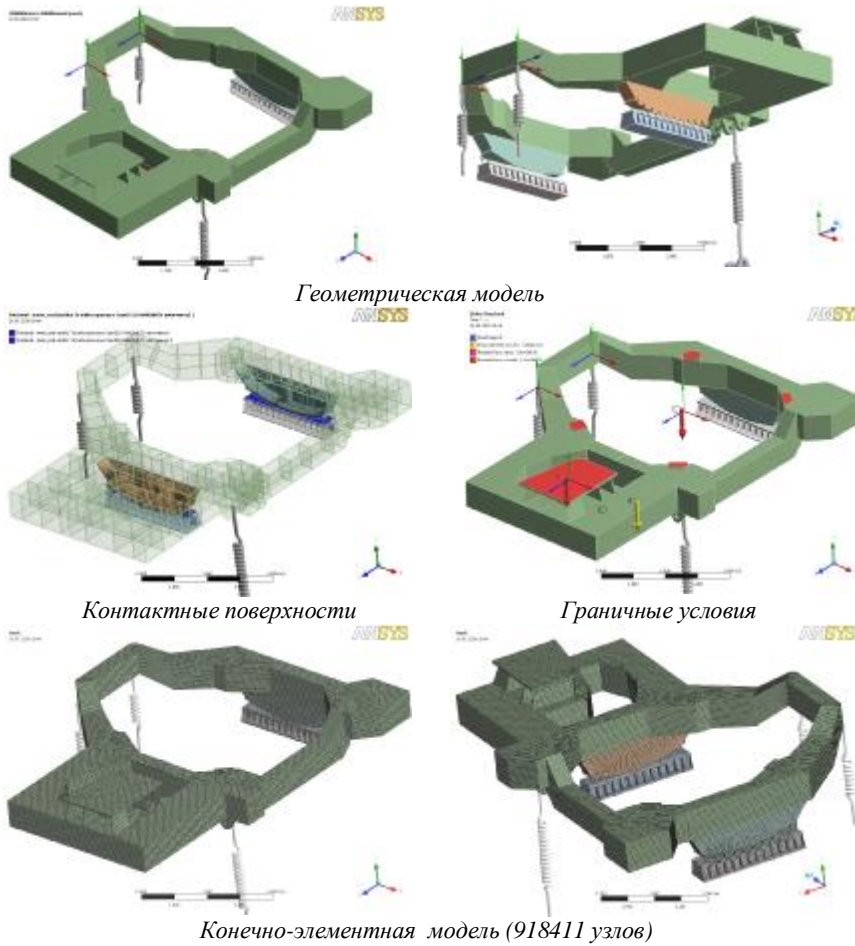


Рис. 2. Геометрическая модель механизма наклона плавильной печи



Конечно-элементная модель (918411 узлов)  
 Рис. 3. Модель МНПП для расчета в среде ANSYS/Workbench

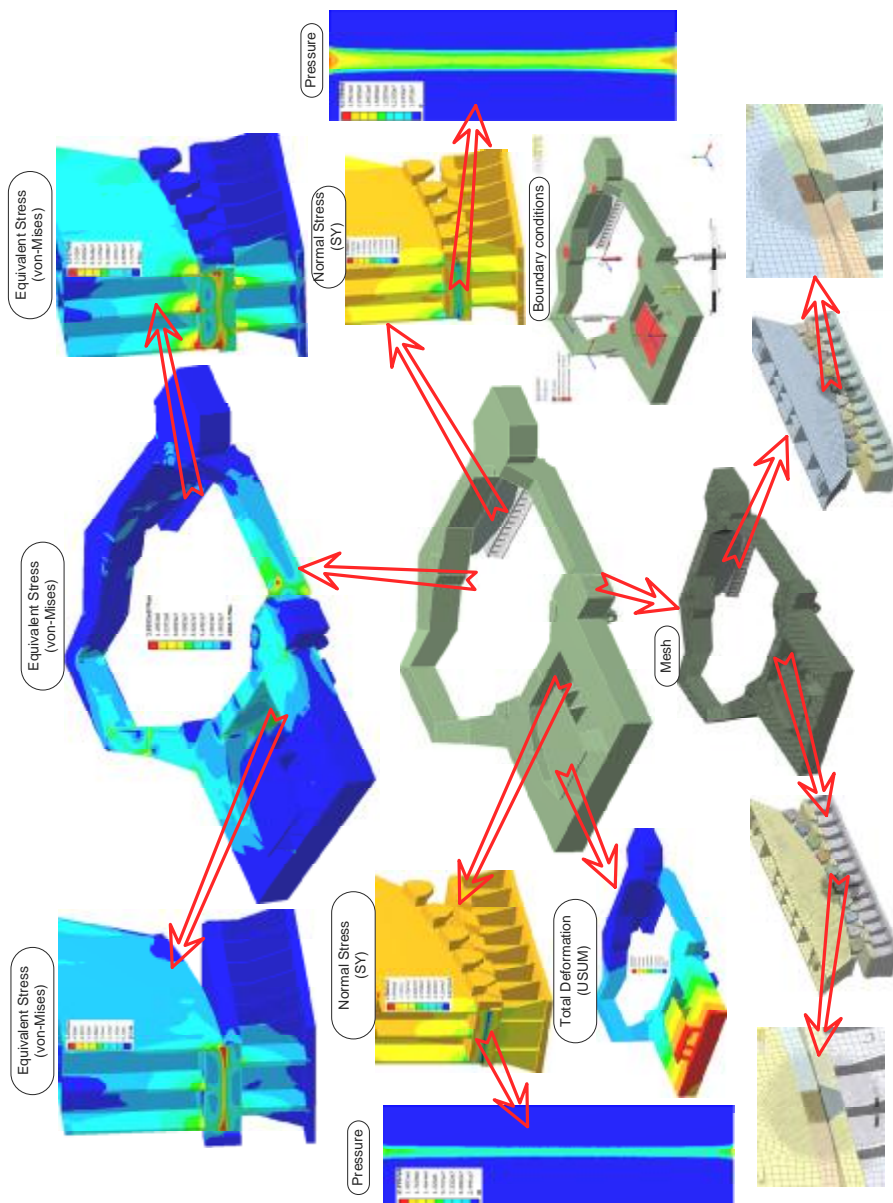


Рис. 4. Общая структура проведения исследований напряженно-деформированного состояния механизма наклона плавильной печи

исследований НДС механизма наклона плавильной печи, включающая определение напряженно-деформированного состояния конструкции в целом, а также подконструкции (выделяется область, примыкающая к опорным поверхностям, в которой НДС характеризуется резким градиентом и значительными величинами). На рис. 5, 6 приведены геометрические модели этапа подмоделирования (левая и правая цилиндрические опорные поверхности). На рис.7 – общая картина напряженно-деформированного состояния в конструкции механизма наклона плавильной печи, а на рис. 8-10 – результаты моделирования НДС подконструкций (левая и правая опоры).

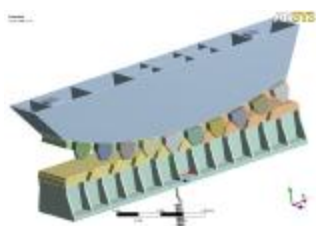


Рис. 5. Геометрическая модель левой цилиндрической опорной поверхности

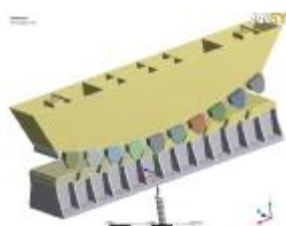


Рис. 6. Геометрическая модель правой цилиндрической опорной



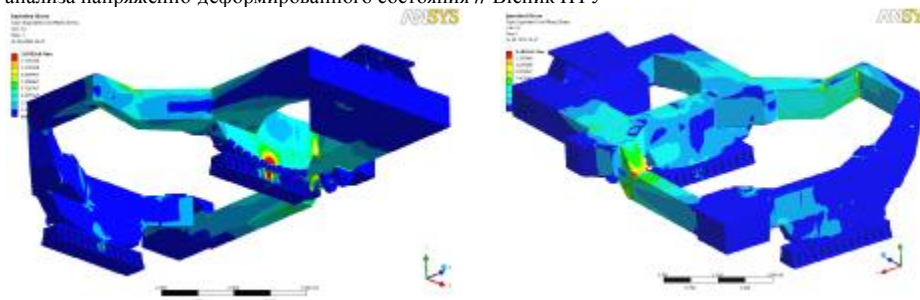
(подмоделирование)

поверхности (подмоделирование)

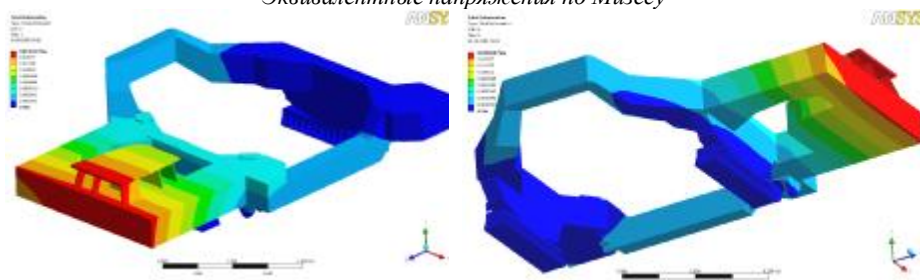
**Заключение.** В статье приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния металлоконструкции механизма наклона плавильной печи, выполненные с применением многостадийной технологии «подмоделирования». Это очень перспективное направление для сложных и сверхсложных механических систем, когда отдельные части конструкции вычлняются из всей конструкции с соответствующими граничными условиями. Это известный прием, однако в данном случае дополненный новым способом учета воздействия остальной части конструкции печи: вместо кинематических условий предложено комбинированное воздействие отбрасываемых частей конструкции. При этом на части поверхности задаются главные условия (как в традиционном подходе), а на части – силовые (этим самым резко повышается точность моделирования напряженно-деформированного состояния, особенно в зоне контактного взаимодействия).

Таким образом, продемонстрирована работоспособность и эффективность предложенной технологии исследований, которую в дальнейшем предполагается применить для комплексных исследований напряженно-деформированного состояния механизма наклона плавильной печи.

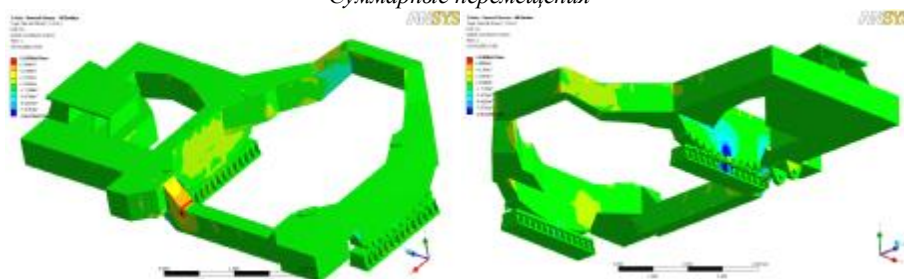
**Список литературы:** 1. *Полищук Т.В., Пеклич М.М., Ткачук Н.Н.* Кинематический и силовой расчет механизма наклона плавильной печи // *Механіка та машинобудування*. – 2007. – №1. – С.100-106. 2. *Полищук Т.В., Ткачук Н.Н.* К вопросу о кинематическом и силовом анализе механизма наклона плавильной печи // *Вісник НТУ "ХПІ"*. Тем. вип.: "Машинознавство та САПР". – 2007– №29. – С.122-131. 3. *Полищук Т.В.* Оптимальное проектирование механизма наклона плавильной печи: модели для анализа напряженно-деформированного состояния // *Вісник НТУ*



Эквивалентные напряжения по Мизесу



Суммарные перемещения



Напряжения  $\sigma_y$

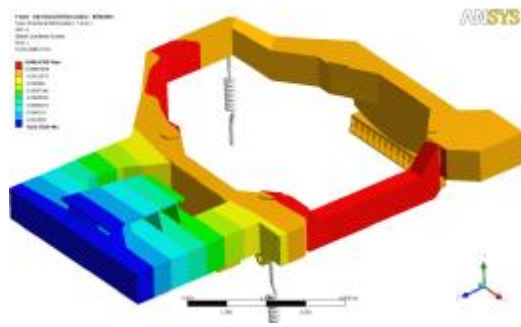
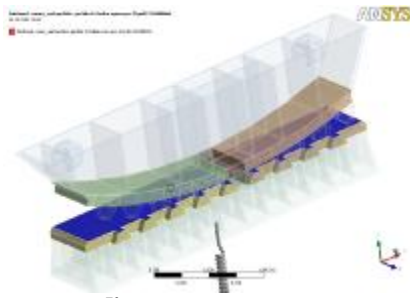
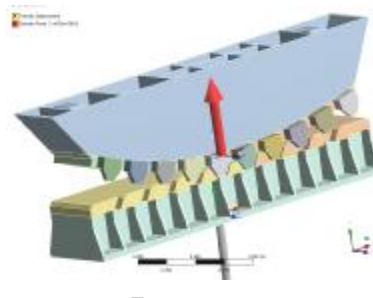


Рис. 7. Общая картина распределения компонент напряженно-деформированного состояния в механизме наклона плавильной печи (ось  $y$  – вертикальная)

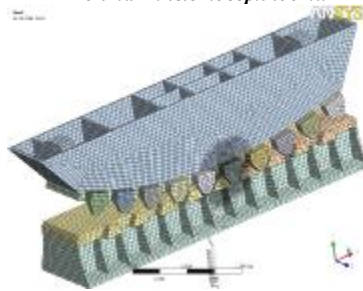
Вертикальные перемещения  $u_y$



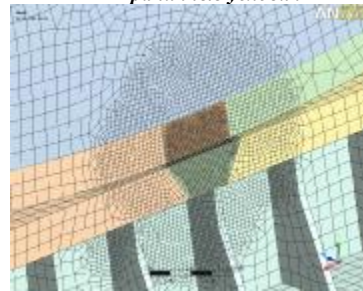
Контактные поверхности



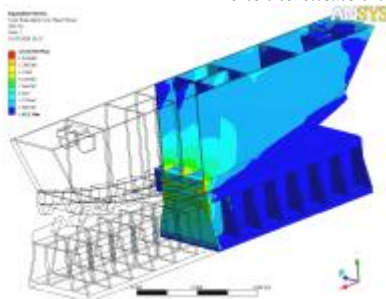
Граничные условия



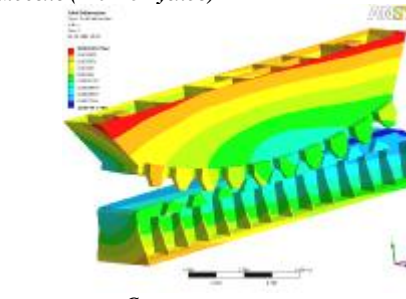
Конечно-элементная модель (1154732 узлов)



Суммарные перемещения



Эквивалентные напряжения по Мизесу



Контактные давления

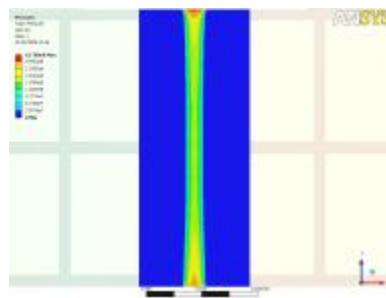
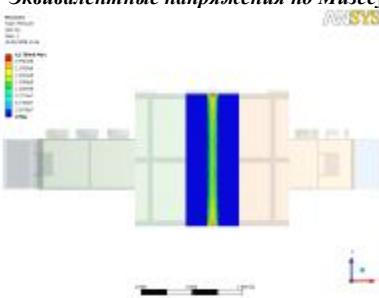


Рис. 8. Напряженно-деформированное состояние левой опоры МНПП (подмоделирование), см. рис. 5

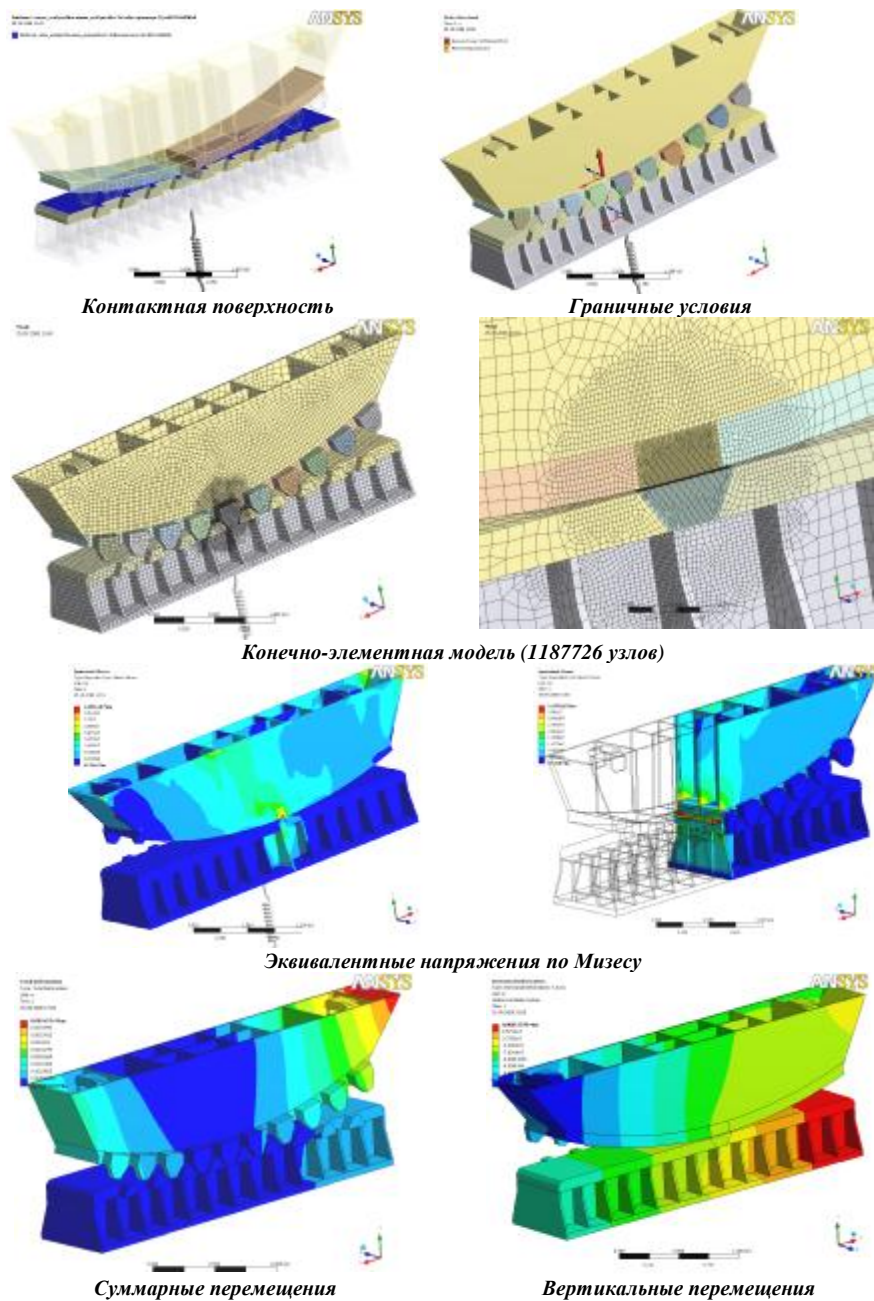


Рис. 9. Напряженно-деформированное состояние правой опоры МНПП (подмоделирование), см. рис. 6



Рис. 10. Контактные давления в правой опоре МНПП (подмоделирование), см. рис. 6

"ХП". Тем. вип.: Динаміка та міцність машин. – 2007. – № 38. – С.129-134. 4. *Полищук Т.В.* Модельная задача об изгибе коромысла механизма наклона плавильной печи // Вісник НТУ "ХП". Тем. вип.: Машинознавство та САПР". – 2008. – №2. – С.125-144. 5. *Полищук Т.В.* Напряженно-деформированное состояние макета механизма наклона плавильной печи: модели, алгоритмы, результаты // Вісник НТУ "ХП". Тем. вип.: Машинознавство та САПР. – 2008. – № 9. – С.103-114. 6. *Полищук Т.В.* К обоснованию выбора параметров конечно-элементной модели макета механизма наклона плавильной печи // Восточно-европейский журнал передовых технологий – 2008. – 1/1 (31). – С.46-49. 7. *Чепурной А.Д., Полищук Т.В., Ткачук Н.А.* Теоретические основы проектирования механизма наклона плавильной печи // Восточно-европейский журнал передовых технологий – 2008. – 1/1 (31). – С.46-49.

Поступила в редколлегию 04.10.08



**УДК 621.833.031**

**А.Г. ПРИЙМАКОВ**, канд. техн. наук, зав. каф. прикладной механики,

Харьковский государственный технический университет строительства

и архитектуры, **А.В. УСТИНЕНКО**, канд. техн. наук, доц.

каф. ТММиСАПР, **Г.А. ПРИЙМАКОВ**, аспирант каф. ДПМ, НТУ „ХПИ”

## **СИСТЕМНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТОСПОСОБНОСТИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗУБЧАТЫХ ПАР В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ**

Розроблено теоретичні та експериментальні передумови прогнозування працездатності трибологічних систем типу зубчастих передач. Системно досліджено експериментальний бік цієї науково-технічної проблеми.

Theoretical and experimental prognostication pre-conditions of tribologic systems capacity are developed as gearings. The experimental side of this scientific and technical problem was system research.

**Введение.** В процессе эксплуатации трибологических систем типа силовых зубчатых передач возникает проблема прогнозирования их работоспособности как некоторого интегрального показателя, включающего в себя критерии прочности, выносливости, износостойкости, надежности, остаточного ресурса и др. Рассмотрение критериев по отдельности не позволяет объективно учитывать многофакторность их влияния, особенно в условиях неопределенности, свойственной эксплуатации силовых зубчатых

передач в реальных условиях. Поэтому необходимо применять системный подход к прогнозированию их работоспособности в процессе эксплуатации, например, при выборе допускаемых контактных напряжений  $\sigma_{HP}$ .

**Анализ литературных источников** [1-12] показывает, что эта научно-техническая проблема в такой постановке решается впервые.

**Целью статьи** является создание методологии системного подхода к прогнозированию работоспособности силовых зубчатых передач в процессе эксплуатации с учетом реологии и анизотропии свойств контактирующих пар, самоорганизации зубчатой пары как замкнутой трибологической системы (ТС), интенсивности износа  $J_h$  и меры повреждаемости  $D$  пары в процессе эксплуатации.

**1. Экспериментальные исследования изнашивания зубчатых пар.** Теоретические предпосылки системного подхода к прогнозированию работоспособности достаточно полно изложены в работах [1-3], однако возникает необходимость в их экспериментальном подтверждении.

В ходе исследования наиболее типовых силовых зубчатых пар (например, пары Сталь 30ХГСА – Сталь 40Х) на экспериментальном трибологическом компьютеризированном центре "ТК", созданном в научно-технической лаборатории кафедры №207 ХИ ВВС им. И. Кожедуба [4], получены следующие результаты (рис. 1, табл. 1, 2).

В табл. 3 и 4 приведены данные по физико-механическим характеристикам поверхностных слоев (ПС) пар трения.

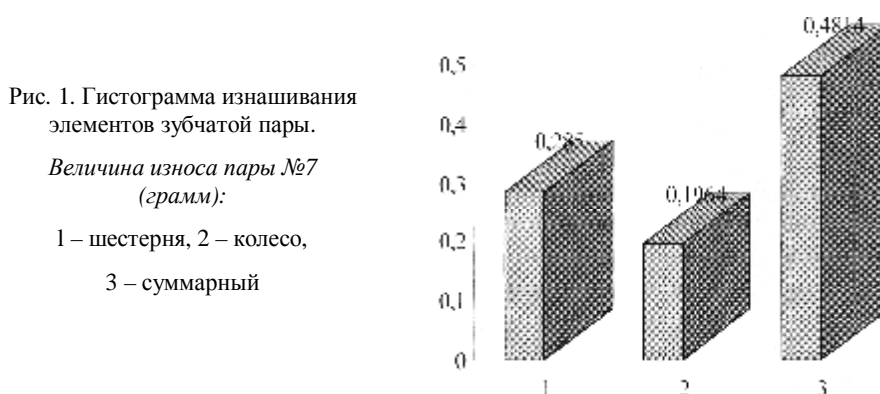


Рис. 1. Гистограмма изнашивания элементов зубчатой пары.

Величина износа пары №7 (грамм):

1 – шестерня, 2 – колесо,  
3 – суммарный

Таблица 1

Материалы пары трения

Деталь	Наименование	Материал	Твердость, НВ
1. Подвижная деталь – ролик	Шестерня	Сталь 30ХГСА, ГОСТ 4543-71	330...390
2. Подвижная деталь – колодка	Колесо	Сталь 40Х, ГОСТ 1050-84	260...310

Таблица 2

Основные трибологические характеристики при достижении базы испытаний  $N_0$

№ пары трения	Износ колодки, г		Износ ролика, г		Суммарный износ пары, г	$M_{тр ср}$ , Н·м	Температура поверхности ср., °С
	Н		П				
7. Шестерня – колесо	45	0,3388	45	0,1821	0,5209	1,7	67
	47	0,2960	47	0,2266	0,4226	1,7	67
	54	0,2203	48	0,1804	0,4007	1,7	67
	ср	0,2850	ср	0,1964	0,4814	1,7	67

*Шестерня (ролик)*

до испытаний

после испытаний



*Колесо (колодка)*

до испытаний

после испытаний

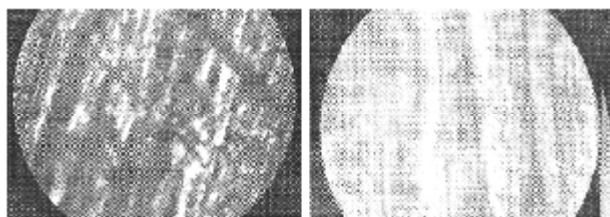


Рис. 2. Микрофотографии поверхностей трения образцов

Таблица 3

Микротвердости поверхностей трения

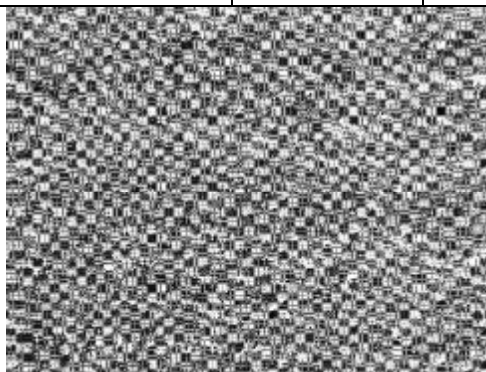
Микротвердость поверхностей пары трения №7, $H_{ср}$ , МПа	Колодка	Ролик
До испытаний	3100	3200
После испытаний	5080	5810

Таблица 4

Напряжения в поверхностном слое

Напряжение в поверхностном слое пары трения №7а, $\sigma$ , МПа	Колодка	Ролик
До испытаний	600	620
После испытаний	980	1120

Рис. 3.  
Микрофотография  
(РЭМ) поверхности  
трения  
образца №7,  $\times 740$



На рис. 2, 3 и в табл. 5 приведены данные по микрогеометрии поверхностей трения. Содержание химических элементов в поверхностном слое

Таблица 5

деталей, подвергавшихся испытаниям, приведено в табл. 6. Результаты

Шероховатости поверхностей трения

Шероховатость, $R_a$	Колодка	Ролик

определения анизотропии структурного состояния поверхностей трения зубчатой пары приведены в табл. 7 и на рис. 4.

Таблица 6

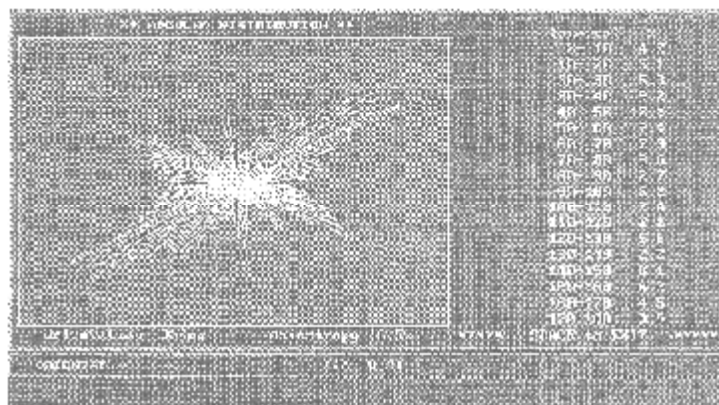
Содержание химических элементов в поверхностном слое материалов, которые подвержены сравнительному анализу

Содержание химических элементов, %			Пара: №7	
			Деталь: шестерня (ролик)	
			Материал: Сталь 30 ХГСА ГОСТ 4543-71	
			До испытаний	После испытаний
1	C	углерод	0,32...0,39	-
2	Si	кремний	1,1...1,4	0,956
3	Mn	марганец	0,8...1,1	1,137
4	Cr	хром	1,1...1,4	1,184

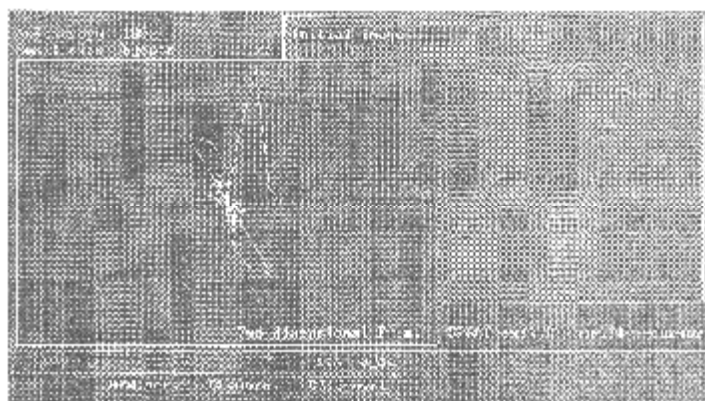
Таблица 7

Определение коэрцитивной силы  
(коррелянт тензора эквивалентных напряжений)

Коэрцитивная сила $F_{КП}$ , А/см	Шестерня (ролик)	Колесо (колодка)
До испытаний	8,4	7,1
После испытаний	8,8	9,2



а



б

Рис. 4. Фурье-анализ структурного состояния поверхности трения образца №7:  
 а – анализ ориентации блоков и анизотропия структурных составляющих;  
 б – обобщенный анализ сложности структурного состояния (уровня  
 разнообразия составляющих структуры)

## 2. Определение эквивалентных действующих напряжений в поверхностном слое зубьев шестерни и колеса. После

выполнения всех экспериментальных исследований контактного взаимодействия зубчатой пары под рабочей нагрузкой появляется возможность найти по известным зависимостям [1-3] тензор и численные значения эквивалентных напряжений в поверхностных слоях зубьев. Эти напряжения, по сути, и определяют допустимые контактные напряжения  $\sigma_{НР}$ . Отметим, что Фурье-анализ дает возможность определить параметры Ляме в известных соотношениях теории упругости [9, 10] по С.П. Тимошенко, позволяющих полностью оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) силовой зубчатой пары в пределах упругости и даже перейти в область динамической ползучести.

Особо следует отметить, что НДС трибосистемы хорошо коррелируется измерением коэциртивной силы поверхностного слоя  $F_{КП}$ , [А/см]. Хотя этот метод до сих пор не стандартизован в нашей стране, он весьма положительно зарекомендовал себя в зарубежных и отечественных исследованиях [11, 12].

**Выводы.** Системное экспериментальное исследование зубчатых пар должно включать в себя: определение основных

трибологических характеристик материалов пары для базы испытаний  $N_0$  наиболее нагруженного элемента (шестерни); определение физико-механических характеристик поверхностных слоев пары; определение микрогеометрии поверхностей трения; химический анализ ПС; определение анизотропии структурного состояния поверхностей трения, и, в результате, определение действующих эквивалентных напряжений в ПС, а по ним – определение объективных значений  $\sigma_{НР}$ .

**Список литературы:** 1. *Приймаков О.Г., Бобровицький О.В.* Математичне моделювання процесу функціонування інтегрального показника працездатності авіаційних матеріалів // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: НАКУ им. Н.Е. Жуковского "ХАИ". – 2004. – Вып.24. – С.136-141. 2. *Приймаков О.Г., Приймаков Г.О.* Працездатність деталей авіаційної техніки з точки зору термодинаміки // Вестник науки и техники. – 2003. – Вып.4. – С.21-28. 3. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В.* К вопросу о рациональном выборе допускаемых напряжений в машиностроении // Механіка та машинобудування. – 2004. – №2. – С.57-62. 4. *Приймаков О.Г., Чотій Л.Ю.* Комплекс обладнання для трибологічних досліджень // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2004. – Вып.38(3). – С.77-84. 5. *Приймаков А.Г., Стадниченко Н.Г.* О механизмах структурной приспособляемости при абразивном изнашивании материалов // Проблемы трибологии: Междунар. научн. журнал. – 2004. – №2. – С.113-121. 6. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В., Приймаков Г.А.* Математическая модель анализа напряженно-деформированного состояния поверхностного слоя и его устойчивости на поверхностях трения при определении допускаемых напряжений // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Проблемы механического привода. – Харьков, 2005. – №40. – С.65-77. 7. *Приймаков О.Г.* Основи технічних знань: В 2 т. – Харків: Скорпіон, 2006. – Т.1. – 248с. – Т.2. – 216с. 8. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В.* Выбор допускаемых напряжений в условиях абразивного изнашивания // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – Харьков, 2006. – №32. – С.129-137. 9. *Приймаков О.Г., Устиненко О.В., Стадниченко В.М.* Математичне моделювання процесів реології та самовпорядкування в зубчатих передачах // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков, 2007. – №3. – С.137-145. 10. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В., Приймаков Г.А.* Аналитическое определение трещиностойкости зубчатых пар с позиций синергетики // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Проблемы механического привода. – Харьков, 2007. – №21. – С.76-86. 11. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В., Стадниченко В.Н.* О стойкости трибологических свойств термонапряженных зубчатых передач // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – Луганск, 2007. – №9(115). – Ч.1. – С.184-187. 12. *Приймаков А.Г., Устиненко А.В., Приймаков Г.А.* Напряженно-деформированное состояние зубчатых передач с позиций термоконтактного деформирования в упруго-пластической области и в условиях ползучести // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – Харьков, 2007. – №38. – С.137-141.

*Поступила в редколлегию 09.10.2008*

УДК 62-26 : 62-50

*В.М. ШАТОХИН*, д-р. техн. наук, проф. каф. теор. механики,  
*Н.С. ЯРМАК*, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. каф. КГМ, НТУ „ХПИ”

## **ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЙ ДЕТАЛЕЙ В ВИБРАЦИОННЫХ МОНТАЖНЫХ УСТРОЙСТВАХ ДЛЯ СБОРОЧНЫХ РОБОТОВ**

Описано конструктивны особливости одного класу вібраційних монтажних пристроїв для складальних роботів, запропонована математична модель для дослідження рухів деталей. Приведено результати розрахунків, що підтверджують її ефективність.

The constructive peculiar properties of one class of vibratory assembly devices for selecting robots are described, mathematical model for the details moving research is offered. The results of calculation, which confirm its efficiency are produced.

**Введение.** Актуальной в самых разных отраслях промышленности является проблема автоматизация сборки с применением роботов (манипуляторов) для увеличения производительности труда, высвобождения рабочих рук, повышения качества работ, а также при выполнении опасных для здоровья, физически тяжелых и монотонных работ. Одним из перспективных направлений при решении этой задачи является применение так называемых неуправляемых, в частности, вибрационных монтажных устройств. Использование их позволяет отказаться при сборке даже несимметричных деталей без фасок от дорогостоящих датчиков и сервоприводов, не предъявляет высоких требований к жесткости всей конструкции робота. Сборка осуществляется следующим образом. Схват робота “грубо” подводит монтируемую деталь, которая установлена в грейфере вибрационного монтажного устройства, к месту соединения с другой деталью (например, плунжер к гильзе плунжера). Включается монтажное устройство, деталь с грейфером начинают совершать определенные пространственные колебания, при этом происходит сопряжение деталей, даже несмотря на то, что первоначально положение монтируемой детали было неточным. Пространственные колебания грейферу и детали сообщаются электромотором с дебалансом, установленным на монтажном устройстве.

Анализ конструктивных особенностей вибрационных монтажных устройств дан в [1-3]. Там же изложены простейшие приемы выбора параметров механизмов. Моделированию динамических процессов в некоторых устройствах с дебалансными, электромагнитными и механическими виброприводами посвящены статьи [4-7].

Созданные образцы сборочных устройств подтвердили их высокую эффективность. Однако недостаточная разработка математических моделей указанных устройств, методов их исследования, оптимального выбора парамет-

ров и режимов работы затрудняет пути совершенствования существующих конструкций и рациональной компоновки аналогичных механизмов.

Целью работы является построение математических моделей одного класса вибрационных монтажных устройств для исследования движений деталей.

### 1. Математическая модель вибрационного монтажного механизма.

На рис. 1 показана схема вибрационного монтажного механизма для сборочного устройства. Конструктивно механизм состоит из нескольких жестких тел, соединенных между собой упругими элементами: 1 – основание для крепления механизма к “руке” манипулятора; 2 – кольцо; 3 – наклонные стержни; 4 – рейфер; 5 – монтируемая деталь; 6 – пластинчатые пружины; 7 – тахометр; 8 – электромотор; 9 – дебаланс; 10 – пластина упругой опоры возбудителя, которая изогнута под углом  $45^\circ$  и крепится к кольцу так, чтобы ось электромотора образовывала углы в  $45^\circ$  с направлениями, параллельными осям плоских пружин.

Для записи дифференциальных уравнений движения использована процедура составления уравнений Лагранжа 2-го рода.

*Обобщенные координаты.* Неподвижную систему координат свяжем со схватом манипулятора, ее начало поместим в плоскости крепления рейфера к плоским пружинам (предполагаем, что они статически деформированы). Оси  $Ox$  и  $Oy$  направляем вдоль указанных пружин, а ось  $Oz$  – вертикально вверх (рис. 2, а). Положение кольца в неподвижной системе координат  $Oxyz$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка определяется тремя обобщенными координатами:  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ . Координаты  $x$  и  $y$  определяют положение центра масс кольца. Координата  $\varphi$  определяет поворот подвижной, жестко связанной с кольцом системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  по отношению к неподвижной.

В исходном состоянии соответственные оси подвижной и неподвижной систем координат совпадают. Можно показать, что положение рейфера по отношению к кольцу с точностью до бесконечно малых высших порядков также определяется тремя обобщенными координатами (рис. 2, в): координаты  $\vartheta_{x_1}$ ,  $\vartheta_{y_1}$  характеризуют вращение рейфера вокруг осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$ ; координата  $z_1 = z$  – вертикальное смещение точки подвеса. Эксперименты показали, что на эксплуатационных режимах работы механизма положение возбудителя по отношению к кольцу вполне определяется угловой координатой  $\gamma$  (рис. 2, г), а упругая связь может быть смоделирована шарниром  $O_2$  со спиральной пружиной, коэффициент жесткости которой легко определяется экспериментально.



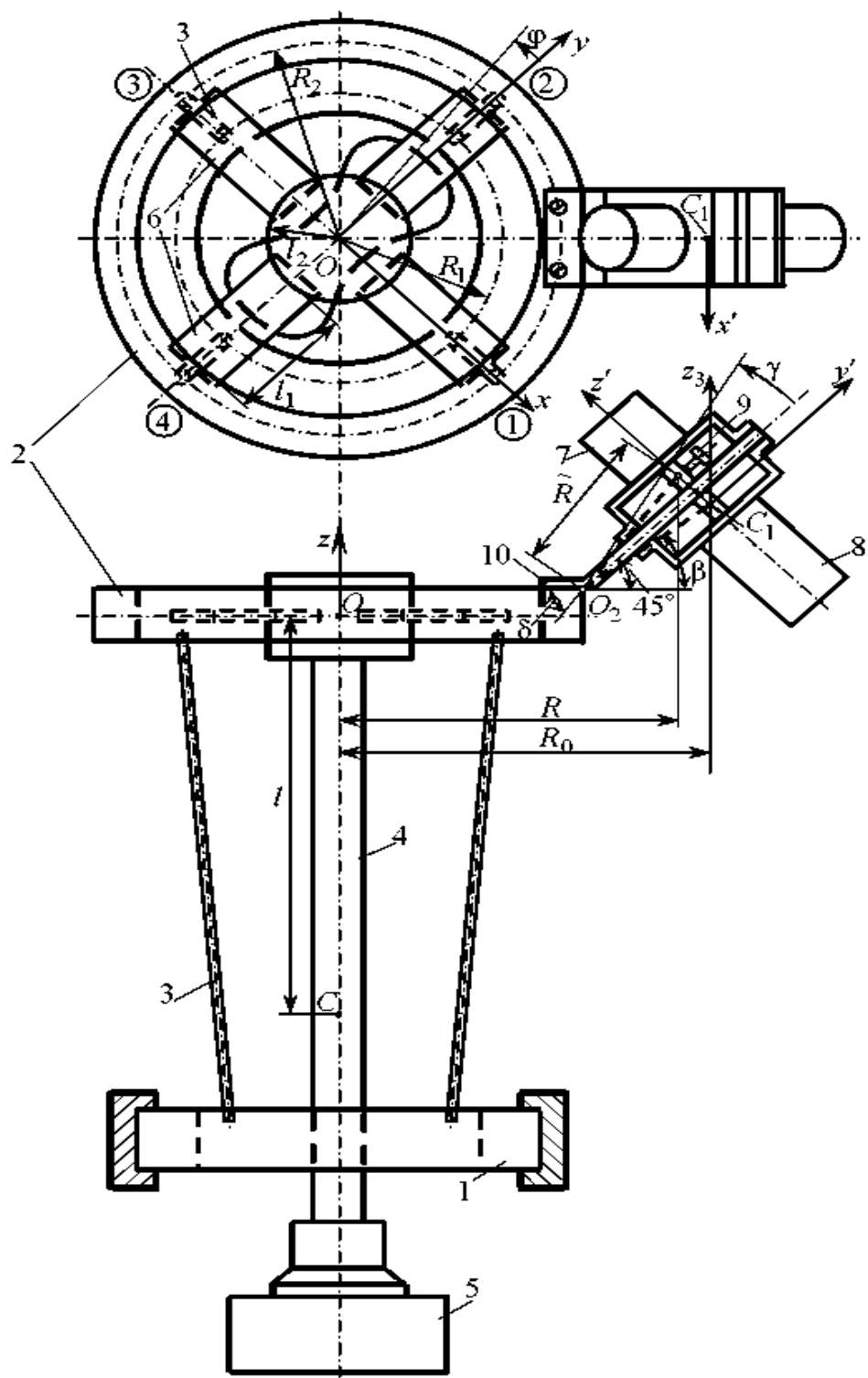


Рис. 1. Схема вибрационного монтажного механизма

Таким образом движение механизма определяют семь обобщенных координат:  $x, y, \varphi, \vartheta_{x_1}, \vartheta_{y_1}, z_1, \gamma$ .

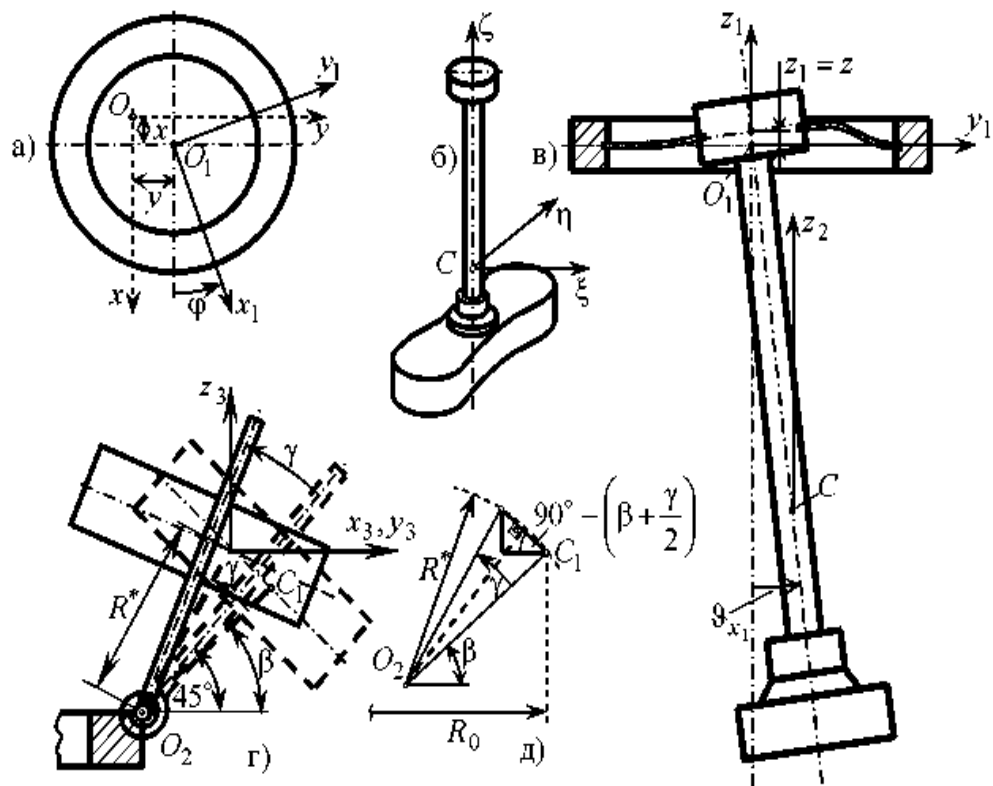


Рис. 2. Обобщенные координаты; главные центральные оси инерции грейфера

Суммарная кинетическая энергия системы (кольцо, грейфер с монтируемой деталью, возбудитель) при малых колебаниях

$$\begin{aligned}
 T = & m_1 \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{J_{z_1} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2}{2} \left[ (\dot{x} - l \dot{\vartheta}_{y_1})^2 + (\dot{y} + l \dot{\vartheta}_{x_1})^2 + \dot{z}_1^2 \right] + \\
 & + \frac{J_{\xi} \dot{\vartheta}_{x_1}^2}{2} + \frac{J_{\eta} \dot{\vartheta}_{y_1}^2}{2} + \frac{J_{\zeta} \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_3}{2} \left[ (\dot{x} - R_0 \dot{\varphi} \cos 45^\circ - R^* \dot{\gamma} \sin \beta \cos 45^\circ)^2 + \right. \\
 & \left. + (\dot{y} + R_0 \dot{\varphi} \cos 45^\circ - R^* \dot{\gamma} \sin \beta \cos 45^\circ)^2 + R^{*2} \dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta \right] + \frac{J_{x'} \dot{\gamma}^2}{2} + \frac{J_{z_3} \dot{\varphi}^2}{2}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $m_1$  — масса кольца;  $J_{z_1}$  — момент инерции кольца относительно вертикальной оси;  $m_2$  — масса грейфера и детали;  $l$  — расстояние от точки подвеса до центра масс грейфера (см. рис. 1);  $J_{\xi}, J_{\eta}, J_{\zeta}$  — моменты инерции грейфера и детали относительно главных центральных осей инерции  $C\xi, C\eta, C\zeta$

(рис. 2. б);  $m_3$  – масса возбудителя;  $R_0$  – расстояние от центра масс возбудителя до оси механизма;  $R^*$  – расстояние от центра масс возбудителя до оси шарнира;  $\beta$  – угол между направлением  $O_2C_1$  и горизонталью (см. рис. 2, г, д);  $J_{x'}$ ,  $J_{z_3}$  – моменты инерции возбудителя соответственно относительно осей  $C_1x'$  и  $C_1z_3$  (см. рис. 1).

Если считать возбудитель симметричным относительно плоскости  $x'C_1z'$  (в этом случае  $J_{y'z'} = 0$ ), то имеет место формула

$$J_{z_3} = J_{y'} \cos^2 45^\circ + J_{z'} \cos^2 45^\circ, \quad (2)$$

где  $J_{y'}$ ,  $J_{z'}$  – моменты инерции возбудителя соответственно относительно осей  $C_1y'$  и  $C_1z'$  (см. рис. 1).

**Обобщенные восстанавливающие силы.** Обобщенные силы, соответствующие координатам  $x$  и  $y$ ,

$$Q_x = -4cx, \quad (3) \quad Q_y = -4cy, \quad (4)$$

где  $c = \frac{12EI_{zz}}{l_c^3}$  – коэффициент жесткости стержня;  $E$  – модуль упругости стали;

$I_{zz} = \frac{\pi d_c^4}{64}$  – осевой момент поперечного (круглого) сечения стержня;  $l_c$  – длина стержня;  $d_c$  – диаметр стержня.

Обобщенная сила, соответствующая координате  $\varphi$  (угол  $\varphi$  полагаем малым)

$$Q_\varphi = -4cR_2^2\varphi, \quad (5)$$

где  $R_2$  – радиус большей окружности, на которой закреплены концы стержней ( $R_1$  – радиус меньшей окружности).

Для вычисления обобщенных сил, соответствующих координатам  $\vartheta_{x_1}$ ,  $\vartheta_{y_1}$ , найден момент и поперечная сила от изгиба плоской пружины (рис. 3, а). Использовалось дифференциальное уравнение упругой линии и краевые условия, которые для правой пружины имеют вид (здесь оси  $x$  и  $y$  – вспомогательные)

$$V_y(0) = 0, \quad V_y'(0) = 0, \quad V_y(l_1) = f, \quad V_y'(l_1) = -\vartheta_{x_1},$$

где  $V_y(x)$ ,  $V_y'(x)$  – перемещение и производная от перемещения;  $l_1$  – длина свободной части плоской пружины;  $f = l_2\vartheta_{x_1}$  (для малых углов);  $l_2$  – радиус верхней части грейфера.

Выражение обобщенной силы для малых углов запишется так

$$Q_{\vartheta_{x_1}} = -\tilde{c} \vartheta_{x_1}, \quad (6)$$

где  $\tilde{c} = 2al_2 + 2d + 2d_1 + m_2gl$ ;  $g$  – ускорение силы тяжести; где

$$a = EI_{zz}^* \frac{12 \left( \frac{l_1}{2} + l_2 \right)}{l_1^3}; \quad d = EI_{zz}^* \frac{4l_1 + 6l_2}{l_1^2}; \quad I_{zz}^* = \frac{bh^3}{12}$$

– осевой момент инерции

прямоугольного сечения плоской пружины;  $b$  – ширина пружины;  $h$  – толщина пружины, где  $d_1 = \frac{GJ_t}{l_1}$ ;  $J_t = \alpha h^3 b$  – момент сопротивления кручению для прямоугольного сечения (рис. 3, б);  $\alpha$  – табличный коэффициент, зависящий от соотношения  $h$  и  $b$ .

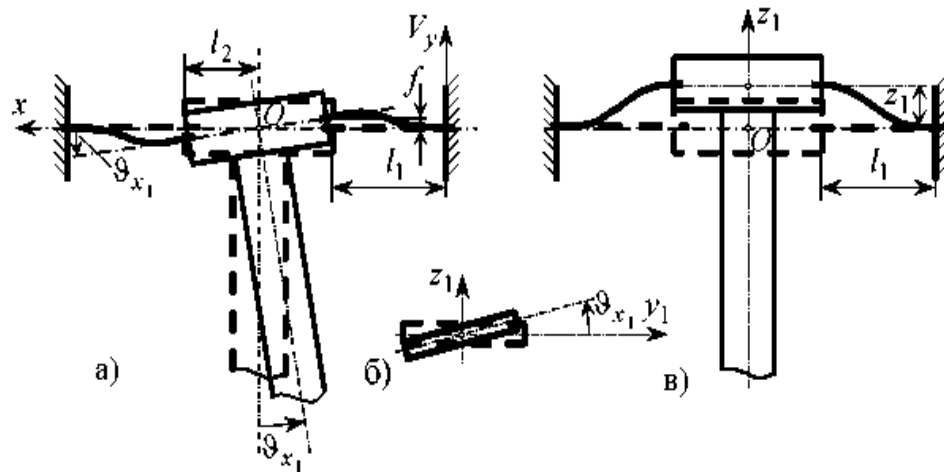


Рис. 3. Схемы для нахождения обобщенных сил  $Q_{\vartheta_{x_1}}$ ,  $Q_{\vartheta_{y_1}}$ ,  $Q_{z_1}$

Очевидно, что выражение, аналогичное (6), справедливо и для обобщенной силы, соответствующей координате  $\vartheta_{y_1}$

$$Q_{\vartheta_{y_1}} = -\tilde{c} \vartheta_{y_1}. \quad (7)$$

На рис. 3, в показан характер деформирования плоских пружин при изменении координаты  $z_1$ . Тогда обобщенная сила

$$Q_{z_1} = -4c_1 z_1, \quad (8)$$

где  $c_1 = \frac{12EI_{zz}^*}{l_1^3}$ .

Для определения обобщенной силы  $Q_\gamma$  проведены эксперименты по статическому деформированию упругой опоры возбудителя. Выражение для обобщенной силы принято в виде

$$Q_\gamma = -c_2 \gamma. \quad (9)$$

где  $c_2$  – экспериментальное значение коэффициента жесткости.

**Возмущающие силы.** Для удобства рассуждений на рис. 4 показаны необходимые части механизма, координатные оси, обозначения.

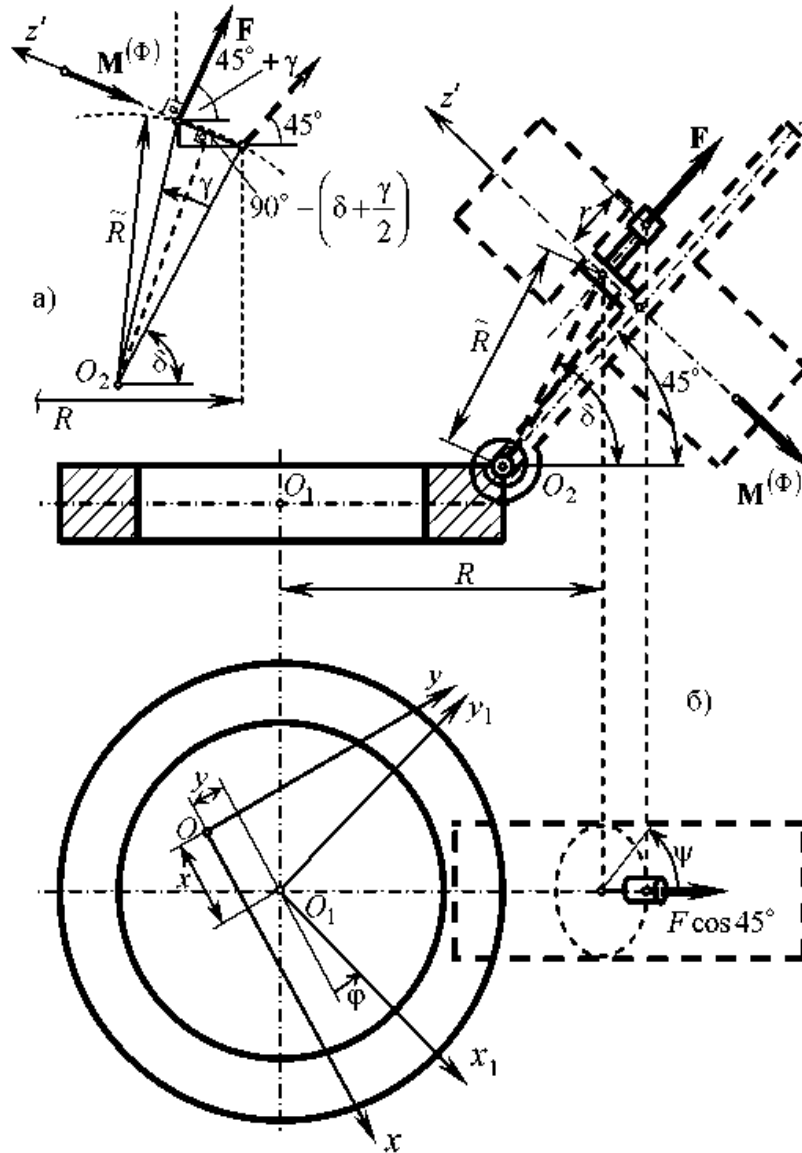


Рис. 4. Схема для нахождения возмущающих воздействий: а) –  $\gamma > 0$ ; б) –  $\gamma = 0$

При малых колебаниях момент центробежной силы инерции дебаланса  $\mathbf{F}$  относительно оси  $O_1z_1$  и реактивный момент возбудителя в сумме дают

$$M_{O_1z_1} = m\dot{\psi}^2 r R \sin \psi - I_z^{(r)} \ddot{\psi} \cos 45^\circ, \quad (10)$$

где  $F = m\dot{\psi}^2 r$  – модуль центробежной силы инерции дебаланса;  $m$  – масса дебаланса;  $r$  – расстояние от центра масс дебаланса до оси электродвигателя;  $\dot{\psi}$  – угловая скорость ротора электромотора;  $R$  – расстояние от оси механизма до точки пересечения плоскости движения дебаланса с осью электромотора;  $M^{(\Phi)} = I_{z'}^{(r)} |\ddot{\psi}|$  – модуль “реактивного” момента роторов электромотора и тахометра при пуске ( $M_{z'}^{(\Phi)} = -I_{z'}^{(r)} \dot{\psi}$  – проекция момента на ось  $z'$ );  $I_{z'}^{(r)}$  – суммарный момент инерции роторов электромотора и тахометра относительно оси  $z'$ ;  $\psi$  – угол поворота ротора электромотора.

Проекции силы  $\mathbf{F}$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  при малых колебаниях

$$F_x = \frac{\sqrt{3}}{2} m\dot{\psi}^2 r \cos(\psi + \xi), \quad F_y = \frac{\sqrt{3}}{2} m\dot{\psi}^2 r \cos(\psi - \xi), \quad (11)$$

где  $\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  $\sin \xi = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Момент силы  $\mathbf{F}$  относительно оси  $O_2 z_4$  шарнира  $O_2$

$$M_{O_2 z_4} = -m\dot{\psi}^2 r \cos \psi \tilde{R} \sin(\delta - 45^\circ), \quad (12)$$

где  $\tilde{R}$  – расстояние от оси шарнира  $O_2$  до точки пересечения оси электромотора и плоскости движения дебаланса.

Ось  $O_2 z_4$  – перпендикулярна плоскости рис. 4, б и, следовательно, параллельна оси  $C_1 x'$  на рис. 1. На указанных рисунках она не изображена.

*Обобщенные силы сопротивления* принимались пропорциональными соответствующим обобщенным скоростям  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\vartheta}_{x_1}$ ,  $\dot{\vartheta}_{y_1}$ ,  $\dot{z}_1$ ,  $\dot{\gamma}$ , т.е. в

$$\text{виде} \quad Q_x^* = -\beta_x \dot{x}, \quad Q_y^* = -\beta_y \dot{y}, \quad Q_\phi^* = -\beta_\phi \dot{\phi}, \quad Q_{\vartheta_{x_1}}^* = -\beta_{\vartheta_{x_1}} \dot{\vartheta}_{x_1}, \\ Q_{\vartheta_{y_1}}^* = -\beta_{\vartheta_{y_1}} \dot{\vartheta}_{y_1}, \quad Q_{z_1}^* = -\beta_{z_1} \dot{z}_1, \quad Q_\gamma^* = -\beta_\gamma \dot{\gamma}.$$

**Дифференциальные уравнения движения механизма.** После выполнения стандартных операций по составлению дифференциальных уравнений Лагранжа 2-го рода с учетом приведенных выше выражений, уравнения движения механизма записываются в виде

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{q} = [x, y, \phi, \vartheta_{x_1}, \vartheta_{y_1}, z_1, \gamma]^T$  – вектор обобщенных координат;  $\mathbf{M}$  – матрица инерции;  $\mathbf{B} = \text{diag} \{ \beta_x, \beta_y, \beta_\phi, \beta_{\vartheta_{x_1}}, \beta_{\vartheta_{y_1}}, \beta_{z_1}, \beta_\gamma \}$  – диагональная матрица

демпфирования:  $C = \text{diag}\{4c, 4c, 4cR_2^2, \tilde{c}, \tilde{c}, 4c_1, c_2\}$  – диагональная матрица жесткости;  $P$  – вектор возмущения ( $\tau$  – знак транспонирования).

Формулы (10)–(12) позволяют представить вектор возмущения в виде

$$P = \left[ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{3}}{2} m\dot{\psi}^2 r \cos(\psi + \xi), \frac{\sqrt{3}}{2} m\dot{\psi}^2 r \cos(\psi - \xi), m\dot{\psi}^2 r R \sin\psi - I_{\tau}^{(r)} \dot{\psi} \cos 45^\circ, \\ 0, 0, 0, -m\dot{\psi}^2 r \cos\psi \tilde{R} \sin(\delta - 45^\circ) \end{array} \right]^T. \quad (14)$$

### 3. Расчетно-экспериментальные исследования динамических процессов в вибрационном механизме.

Характер изменения обобщенных координат  $x, y, \varphi, \vartheta_{x_1}$  при пуске устройства иллюстрируют рис. 5, 6.

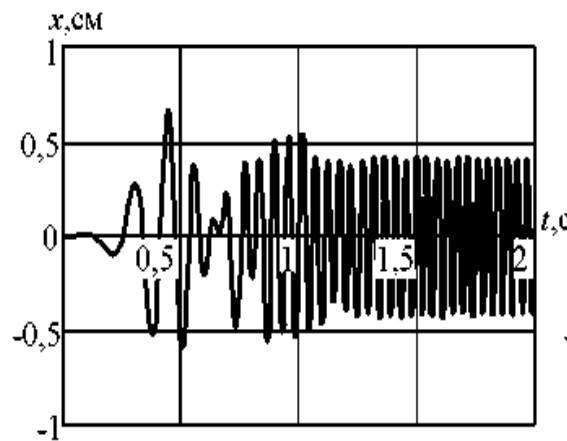


Рис. 5. Закон изменения координаты  $x$

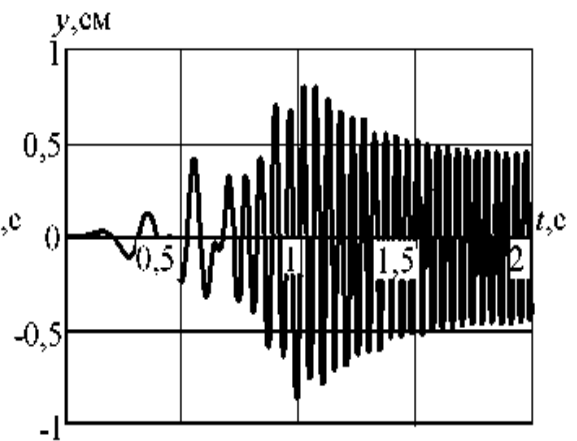


Рис. 6. Закон изменения координаты  $y$

Установившийся режим соответствует  $\omega_0 = 152,05 \text{ рад/с}$  ( $n_0 = 1452 \text{ мин}^{-1}$ ). В этом случае реализуются резонансные колебания вблизи 6-ой собственной частоты механизма ( $\nu_6 = 24,2 \text{ Гц}$ ), когда значительно меняются координаты

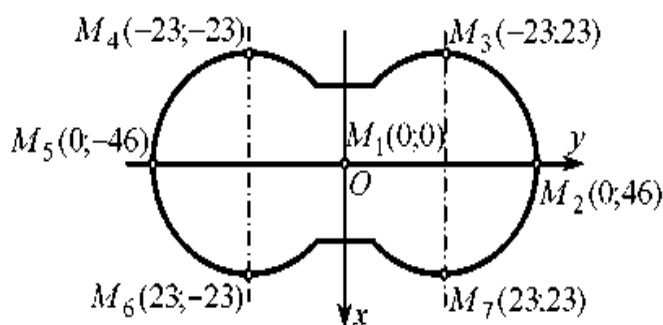


Рис. 7. Расположение характерных точек основания монтируемой детали

$\vartheta_{x_1}, \vartheta_{y_1}$  и достаточно существенны изменения координат  $x, y, \varphi$  [2]. Такой режим способствует быстрому сопряжению деталей, что подтверждается опытным путем.

Пространственные движения некоторых характерных точек основания монтируемой детали, представлен-

ного на рис. 7 (координаты даны в миллиметрах), показаны на рис. 8, 9.

**Выводы.** 1. Построена полная математическая модель вибрационного монтажного устройства для сборочного робота, позволяющая исследовать процесс пуска механизма, установившиеся режимы, пространственные движения любых точек монтируемой детали. 2. Приведены результаты расчетных исследований динамических процессов при монтаже конкретной детали. 3. Изложенный подход перспективен при создании и совершенствовании аналогичных конструкций.

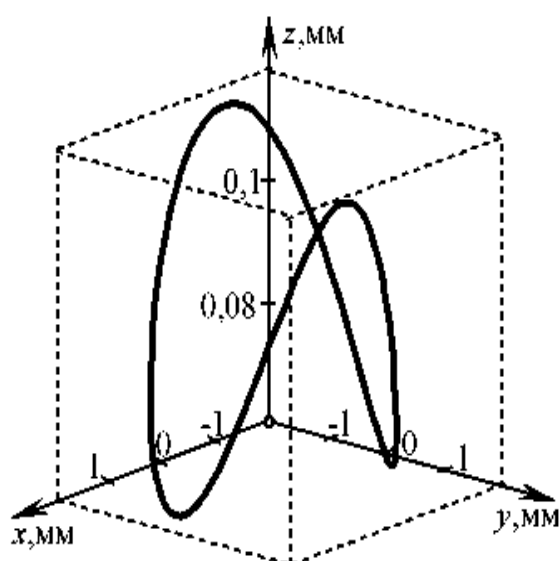


Рис. 8. Траектория движения точки  $M_1$

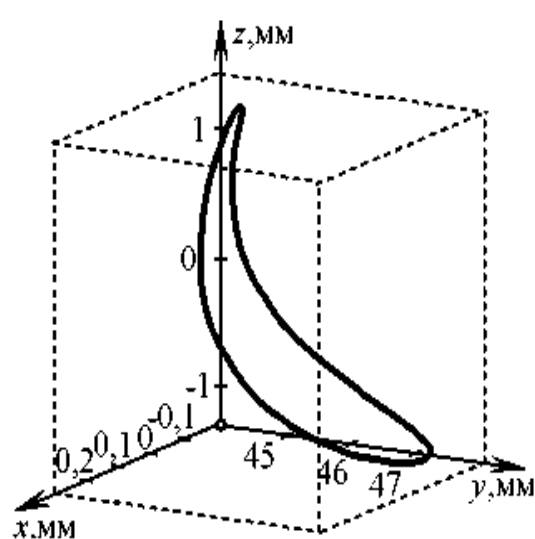


Рисунок 9 – Траектория движения точки  $M_2$

**Список литературы:** 1. *Jacobi P.* Fügemechanismen für die automatisierte Montage mit Industrierobotern.– Karl-Marx-Stadt, Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule, 1982.– S. 96. 2. *Шатохин В. М., Якоби П.* Синтез параметров вибрационного монтажного устройства для сборочного робота // Теория механизмов и машин.– Харьков: Вища школа.– 1985.– Вып. 38.– С. 3-13. 3. *Вибрации в технике: Справочник.* В 6-ти т./ Под ред. Э.Э. Лавендела.– М: Машиностроение, 1981.– т. 4: Вибрационные процессы и машины.– 510 с. 4. *Шатохин В.М.* Синтез параметров вибрационного монтажного устройства при вынужденных нелинейных колебаниях // Вісник Інженерної академії України. Спеціальний випуск.– Київ: Інженерна академія України.– 2000.– С. 407-410. 5. *Лобзонов Б.А., Судник Ф.А.* К расчету режимов колебаний при вибрационной сборке.– В кн.: Автоматизация производственных процессов в машиностроении и приборостроении. Рига: Зинатне, 1989, вып. 6.– С. 33-42. 6. *Савиценко В.М., Беспалов В.Г.* Ориентация деталей исканием при автоматической сборке // Вестник машиностроения, 1995, № 5.– С. 48-50. 7. *Зайцев А.И., Шатохин В.М.* Синтез параметров вибрационных монтажных устройств по собственным формам колебаний // Вібрації в техніці та технологіях.– 2007.– № 2 (47).– С. 21-25.

Поступила в редколлегию 01.9.08