



**ВЕСТНИК**

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
«ХПИ»**

**32'2006**

**Харьков**

# ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»

Сборник научных трудов  
Тематический выпуск

32'2006

## «ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Издание основано Национальным техническим университетом  
«Харьковский политехнический институт» в 2001 году

Государственное издание

Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины  
КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:

**Председатель:** Л.Л.Товажнянский, д-р техн. наук, проф.

**Секретарь координационного совета:** К.А.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;  
Е.И.Сокол, д-р техн. наук, проф.;  
Е.Е.Александров, д-р техн. наук, проф.;  
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;  
М.Д.Годлевский, д-р техн. наук, проф.;  
А.И.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;  
В.Д.Дмитриенко, д-р техн. наук, проф.;  
В.В.Епифанов, д-р техн. наук, проф.;  
П.А.Качанов, д-р техн. наук, проф.;  
А.Ф.Кириченко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;  
В.И.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;  
О.К.Морачковский, д-р техн. наук, проф.;  
В.И.Николаенко, канд. ист. наук, проф.;

П.Г.Перерва, д-р техн. наук, проф.;  
Н.И.Погорелов, д-р техн. наук, проф.;  
М.И.Рыщенко, д-р техн. наук, проф.;  
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;  
В.П.Себко, д-р техн. наук, проф.;  
В.И.Таран, д-р техн. наук, проф.;  
М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.;  
М.П.Требин, д-р фил. наук, доц.;  
Ю.В.Тимофеев, д-р техн. наук, проф.;  
А.Ф.Шеховцов, д-р техн. наук, проф.;  
Е.И.Юносова, д-р фил. наук, проф.

Адрес редколлегии: 61002, Харьков,  
ул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПИ».  
Каф. ДПМ, Тел. (057) 707-68-79.

Харьков 2006

**Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».** Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. – № 32 – 195 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

#### **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

**Ответственный редактор:** О.К.Морачковский, д-р техн.наук,проф.

**Ответственный секретарь:** А.Г.Андреев, канд.техн.наук, доц.

Е.Е.Александров,	д-р техн.наук, проф.;
В.В.Бортовой,	канд.техн.наук, доц.;
Ю.С.Воробьев,	д-р техн.наук, проф.;
Е.Г.Голоскоков,	д-р техн.наук, проф.;
О.О.Горошко,	д-р физ.-мат.наук, проф.;
В.Б.Гринев,	д-р техн.наук, проф.;
В.А.Жовдак,	д-р техн. наук, проф.;
Г.И.Львов,	д-р техн. наук, проф.;
В.Л.Остапенко,	д-р физ.-мат.наук,проф.;
Л.А.Фильштинский,	д-р техн.наук,проф.;
Ю.М.Шевченко,	академик НАНУ

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».  
Протокол № 13 від 24 листопада 2006 р.

© Національний технічний університет «ХПІ»

*А.Г.АНДРЕЄВ*, канд.техн.наук, НТУ «ХПІ»;

*М.К.РЕЗНИЧЕНКО*, канд.техн.наук., Українська інженерно-педагогічна академія, Харків; *О.В.ЩЕПКИН*, НТУ «ХПІ»

## **ОПТИМІЗАЦІЯ НАГРІВУ ПРИ РОЗ'ЄДНАННІ ДЕТАЛЕЙ**

На прикладі нагрівання вузла транспортного засобу з метою його розбирання показана можливість оптимізації витрати енергії. Оптимізація проводилася з обмеженнями з напружень й температур. Установлено залежність витрати енергії від характеристик матеріалу. Застосовується симплексний метод Нелдера-Міда.

On example of heating the vehicle gear when putting it on the axis the opportunities of charge energy optimization are shown. The optimization was conducted with restrictions on pressure and temperatures. The dependence of charge of energy from properties of material is shown. The improved simplex method by J.A. Nelder and R.Mead is applied.

**Актуальність теми.** У зв'язку з високою вартістю ремонту транспортних засобів у даний час виникла необхідність неруйнующого розбирання вузлів машин, які мають з'єднання з натягом, із метою подальшого використання неушкоджених деталей. Для подібних операцій застосовний тепловий метод розбирання з використанням індукційно-нагрівальних пристроїв (ІНП) [1]. Процес розбирання вносить певні складності в порівнянні зі зборкою, зокрема у тому, що нагрів охоплюючої деталі повинен бути досить інтенсивним, щоб забезпечити появу зазору між деталями, незважаючи на теплопередачу до охоплюваної деталі. Тому доцільно визначити такий розподіл температури при відповідній швидкості підведення тепла, який, забезпечуючи технологічно задане розширення отвору охоплюючої деталі, мінімізує подавану кількість теплової енергії при обмеженні рівня напружень і температури у ній.

**Ціль роботи** – вибір режимів нагрівання охоплюючої деталі 1 (рис. 1) із метою розбирання конструкції, яка є елементом підвіски транспортного засобу і складається з двох пластин (1) і вала (2), поверхня якого в зоні з'єднання покрита дрібним шліцом.

Для розрахунку напружено-деформованого стану й розв'язання температурної задачі був застосований МСЕ [2]. Досліджувана конструкція розглядається як плоска, апроксимується плоскими скінченними елементами трикутного поперечного перерізу з трьома вузлами. Також використовуються однорічні стикувальні елементи, які моделюють стан сила-зсув-теплопередача на контактуючих між собою поверхнях деталей конструкції [3,4]. При цьому враховувалася симетричність конструкції у поздовжньому напрямі. Граничні умови забезпечують відсутність переміщення деталі як жорсткого цілого та її симетричність. Розв'язка нестационарної температурної задачі здійснюється із застосуванням центральної різницевої схеми [5].

Для розв'язання поставленої задачі використовувався метод прямого по-



шуку, який не потребує обчислення похідних досліджуваної функції – метод комплексів [6], що є модифікацією симплексного методу Нелдера-Міда, яка дозволяє враховувати обмеження. Використання теплового методу нагрівання деталей за допомогою ІНП вносить певні обмеження на форму температурного поля: тепло може подаватися в деталь лише в деяких обмежених зонах (рис. 2). Параметром оптимізації є потужність теплового потоку, який надходить у деталь. Потужність задається в 9-15 точках і змінюється між ними за лінійним законом.

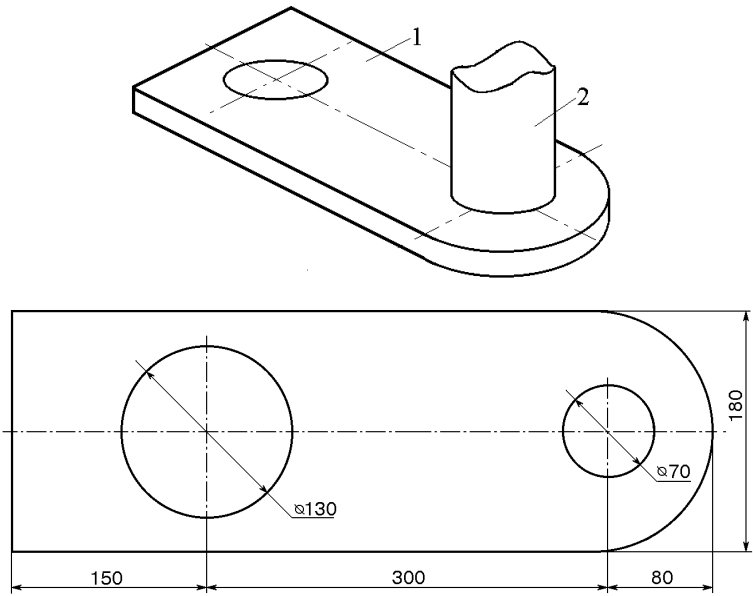


Рисунок 1 – Досліджувана конструкція

Характеристики матеріалу деталі:

- модуль пружності  $E = 0,21 \cdot 10^6$  МПа;
- коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,33$ ;
- коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha = 11,9 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>;
- щільність  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;
- питома теплоємність  $c = 460$  Дж/ кг · град.;
- коефіцієнт теплопровідності  $K = 80$  Вт/м · град.;
- коефіцієнт теплопровідності повітря  $K = 0,035$  Вт/м · град.

Утрати тепла конструкції шляхом конвекції та випромінювання в розрахунках не враховуються. Передача тепла від однієї деталі іншій враховується за допомогою контактних елементів. Обмеження з температури – до 350 град. Час нагрівання прийнятий 2-3 хв. Розширення отвору повинне бути 0,1 мм як у поздовжньому, так і в поперечному напрямку. Як показали розрахунки, рівень напружень у деталях істотно нижче межі пластичності.

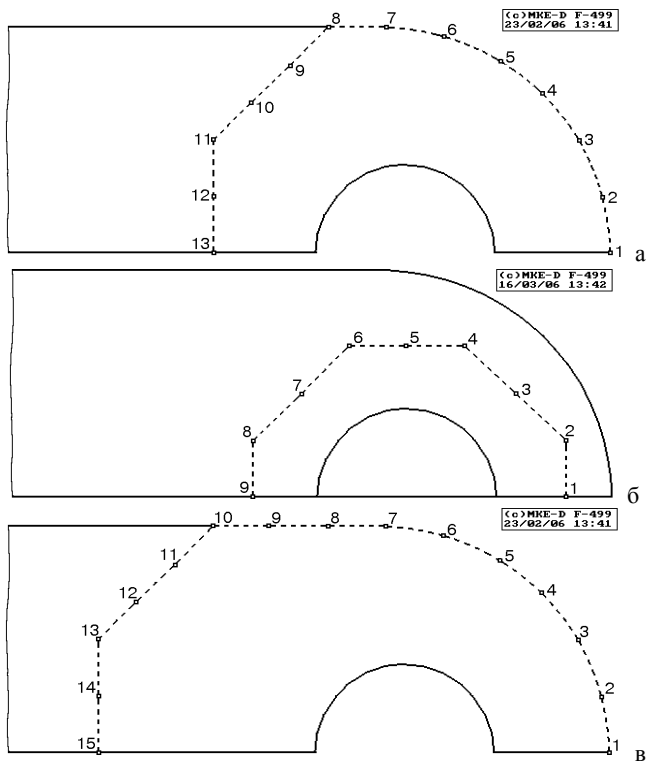


Рисунок 2 – Схема розташування точок задавання потужності нагрівання

Таблиця 1 – Дані про виконані варіанти розрахунку

№ варіанта	1	2	3	4	5	6
Варіант задавання потужності нагрівання (див. рис. 2)	а	а	а	а	б	у
Час нагрівання, хв.	3	3	2	2	2	2
Термічний опір у зоні контакту [4], $\text{м}^2 \cdot \text{град}/\text{Вт}$	0,006	0,006	0,001	0,001	0,001	0,001
Витрати енергії, W, МДж	1,698↓	1,972↓	2,170	2,751	2,92	3,41
Максимальна температура, град.	559	350↑	350↑	421↓	423↓	410↓
Максимальна потужність нагрівання, $\text{кВт}/\text{м}^2$	932	674	871	1109	1335	919
Середнє розширення отвору за радіусом, $\delta \cdot 10^6$ , м	100↓	100↓	82,2↑	100↓	100↓	100↓

Примітки: ↑ ↓ – значення, що оптимізується, – збільшення / зменшення;

↑ ↓ – діє обмеження зверху / знизу

Таблиця 2 – Оптимальний розподіл потужності нагрівання

Ва- ріант	Номер точки														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	9	683	23	932	145	2	1	1	0	1	220	345	97	-	-
2	194	188	204	215	278	127	327	307	1	674	0	311	236	-	-
3	300	270	290	305	292	285	307	149	800	871	640	76	413	-	-
4	399	359	351	370	359	345	398	91	977	1109	907	0	505	-	-
5	300	566	548	601	748	589	1335	251	512	-	-	-	-	-	-
6	300	348	344	365	359	358	384	440	397	161	860	813	919	859	866

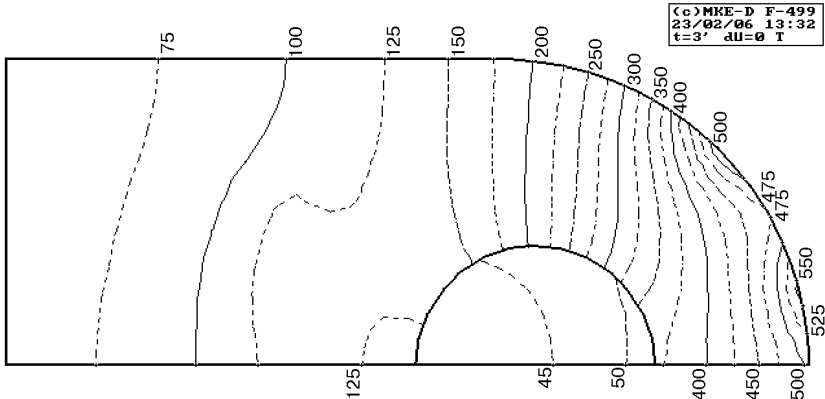


Рисунок 3 – Оптимальне температурне поле – варіант розрахунку 1

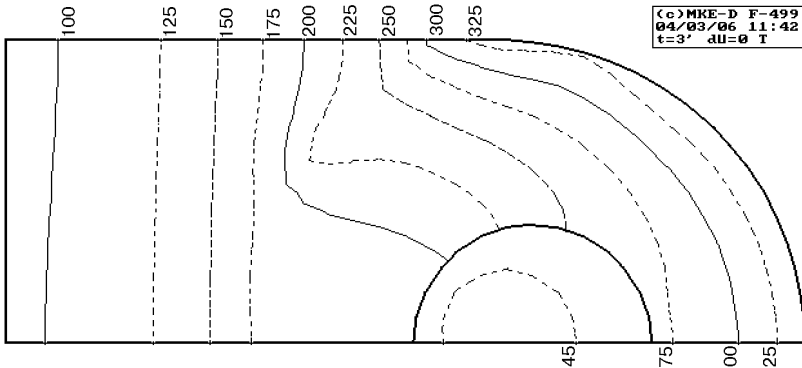


Рисунок 4 – Оптимальне температурне поле – варіант розрахунку 2

**Результати розрахунку.** Дані про обчислені варіанти задавання потужності нагрівання (1-6) зведені в табл. 1.

Основні характеристики розрахунків:

Варіант 1: Високий термічний опір у зоні контакту деталей; немає обме-

жень із температури; діє обмеження з розширення отвору; мінімізація витрати енергії. Час нагрівання 3 хв.

Варіант 2: Високий термічний опір у зоні контакту деталей; виконані всі обмеження; мінімізація витрат енергії. Час нагрівання 3 хв.

Варіант 3: Низький термічний опір у зоні контакту деталей; діє обмеження з температури; оптимізація розширення отвору – потрібного розширення досягти не удалось. Час нагрівання 2 хв.

Варіанти 4-6: Низький термічний опір у зоні контакту деталей; діє обмеження з розширення отвору; мінімізація температури – виконати обмеження по температурі не удалось. Час нагрівання 2 хв. Варіанти відрізняються зоною нагрівання.

На рис. 3,4 приведені оптимальні розподіли температури в деталі, отримані в розрахунках 1,2, а на рис. 5,6 схематично показані деформації деталі при цих розподілах температур. У табл. 2 приведені значення потужності нагрівання ( $\text{kВт/м}^2$ ), отримані в розрахунках 1-6.

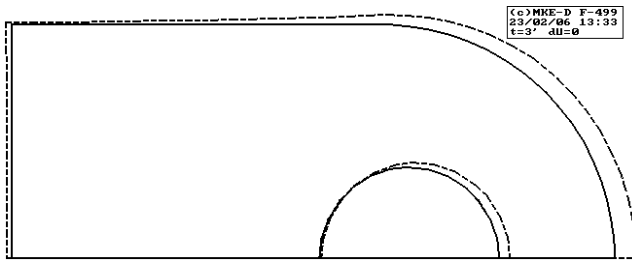


Рисунок 5 – Деформація деталі при оптимальному розподілі температур, варіант розрахунку 1

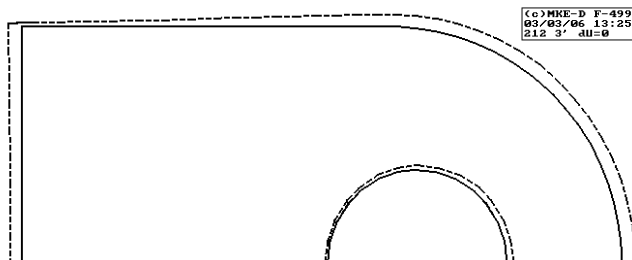


Рисунок 6 – Деформація деталі при оптимальному розподілі температур, варіант розрахунку 2

**Висновки.** Було проведено дослідження напруженого й теплового стану конструкції при її нагріванні індукційно-нагрівальним пристроєм для розбирання з'єднання з метою оптимізації цього технологічного процесу.

Розрахунки дали два варіанти нагрівання деталі 1:

- інтенсивне нагрівання в частині циліндричної зовнішньої поверхні деталі (див. рис. 3, варіант розрахунку № 1);

– кільцеве нагрівання навколо з'єднання з додатковим підігрівом у зоні інтенсивного тепловідводу в периферійну частину деталі 1 (див. рис. 4, варіант розрахунку № 2, йому ідентичні варіанти № 3-6).

Виконане дослідження дозволяє зробити такі висновки:

Як правило, при обмеженні максимальної температури нагрівання до 350° не вдається одержати необхідне розширення отвору. При встановленні заздалегідь рівня розширення отвору на рівні 0,1 мм (за радіусом) не здійсненне задане обмеження з максимальної температури. Усі обмеження виконані в розрахунку № 2 у припущенні високого контактного опору. Точне значення контактного опору може бути отримане експериментально.

Отримані варіанти розрахунку потужності нагрівання дають дані для створення реального індукційно-нагрівального пристрою.

**Список літератури:** 1. Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар. – Харків, Вид-во Харківського університету, 1965. – 227 с. 2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – Москва, Мир, 1975. – 541 с. 3. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Київ: Наукова думка, 1989. – 232 с. 4. Миллер В.С. Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Київ: Наукова думка. – 1966. – 164 с. 5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – Москва, Мир, 1979. – 392 с. 6. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэсдел К. Оптимизация в технике: в 2-кн. Кн. 2. – Москва: Мир, 1986. – 320 с.

*Надійшла до редакції 22.05.2006*

УДК 658.515 (088.8)

*А.Г.АНДРЕЕВ*, канд.техн.наук; *А.П.ЗВОНАРЕВА*,  
*А.В.ЩЕПКИН*; НТУ «ХПИ»

## **СПОСОБ РАЗБОРКИ ПРЕССОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ**

У статті описаний спосіб розбирання пресових з'єднань конструкцій типу вал-втулка, який складається з операцій нагрівання з'єднання та наступного швидкого його охолодження рідким азотом.

In the article the press junctions disassembly method of a type the shaft-cartridge is described. The method consists of heat of junction and quick postcooling by liquid nitrogen.

**Актуальность темы.** Известен способ разборки прессовых соединений деталей типа вал-втулка, включающий операции быстрого нагрева втулки до заданной температуры с последующим съемом охватывающей детали. Однако такой способ не обеспечивает разборку тонкостенной охватывающей детали с валом. По предложенному способу [1] в целях устранения указанного недостатка предварительно нагретое прессовое соединение деталей типа вал-втулка охлаждают со скоростью 80-105 град/с путем струйного опрыскивания соединения хладагентом (жидким азотом).

При охлаждении охватываемая тонкостенная деталь, остывая быстрее вала, создает в соединении дополнительный температурный натяг, который, суммируясь с технологическим натягом, создает напряжения, превышающие предел пластичности. В результате в тонкостенной охватываемой детали появляются остаточные пластические деформации и натяг исчезает. После полного охлаждения вала охватываемая тонкостенная деталь без усилия легко снимается. Метод позволяет производить замену, в частности, удлинителей при ремонте электродвигателей без повреждения вала.

**Цель работы** – проведение исследования напряженного и теплового состояния соединения типа вал-втулка (рис. 1) в процессе его разборки описанным методом и уточнение параметров разборки.

Для расчета напряженно-деформированного состояния и решение темпера-

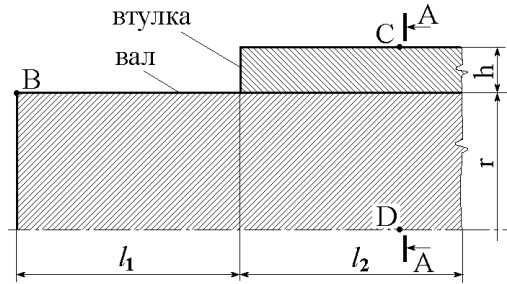


Рисунок 1

турной задачи был применен метод конечных элементов [2]. Рассчитываемое соединение аппроксимируется тороидальными конечными элементами трехугольного поперечного сечения с тремя узлами; также используются стыковые элементы, которые моделируют состояние сила-сдвиг-теплопередача на поверхностях деталей [3,4]. Решения нестационарной температурной задачи осуществляется с применением центральной разностной схемы [5]. Расчеты пластических деформаций проводятся на основе диаграммы растяжения материала с использованием метода начальных напряжений; остаточные напряжения и деформации находим по закону разгрузки [6]. Для обращения матрицы и вычисления перемещений применен метод квадратного корня [7], что учитывает ленточную структуру матрицы жесткости конструкции. Описанный алгоритм реализует программа МКЕ-D языком Fortran.

В расчетах предполагается, что вал и втулка сделаны из одинакового материала, характеристики которого приведены в табл. 1.

Начальная температура соединения составляет 200° С. Шаг по времени при решении нестационарной температурной задачи принят равным 0,01 с, перерасчет напряженно-деформированного состояния осуществляется через 0,25 с. Характеристики исследуемых соединений приведены в табл. 2 (см. также рис. 1).

На рис. 2 показано распределение температуры в сечении А соединений № 1-3 (см. рис. 1, табл. 2) при их охлаждении хладагентом в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды с начала процесса охлаждения. На рис. 3 дано изменение температуры на торце вала в точке В, на поверхности втулки вдали от торца в точке С и на оси вала в точке D при охлаждении. Граница пластиче-

ских деформаций в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды с начала процесса для соединений № 1 и 3 показана на рис. 4,5. Согласно расчету, натяг в соединении № 1 снимается при продолжительности охлаждения не менее 3 с., для соединения № 2 – при продолжительности охлаждения около 2 с., для соединения № 3 – 1 с.

Таблица 1 – Характеристики материала соединений

	Сталь	Дюралюминий	Медь
Модуль упругости $E$ , МПа	$0,2 \cdot 10^6$	$0,071 \cdot 10^6$	$0,11 \cdot 10^6$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0,3	0,3	0,32
Предел пластичности $\sigma_{ПС}$ , МПа	350	200	150
Коэффициент линейного расширения $\alpha$ , град <sup>-1</sup>	$12 \cdot 10^{-6}$	$22 \cdot 10^{-6}$	$17 \cdot 10^{-6}$
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	7800	2640	8900
Удельная теплоемкость $c$ , Дж/кг · град.	460	922	393
Коэффициент теплопроводности $K$ , Вт/м · град;	50	181	390
Коэффициент конвективного теплообмена $h$ , Вт/м <sup>2</sup> · град.	10000	10000	10000
Термическое сопротивление в зоне контакта, м <sup>2</sup> · град./Вт: $R_0$ – при нулевом давлении; $R_{10}$ – при контактом давлении $\sigma = 10$ МПа, $R_{100}$ – при $\sigma = 100$ МПа ;	$176 \cdot 10^{-6}$ ;  $84 \cdot 10^{-6}$ ; $15 \cdot 10^{-6}$	$176 \cdot 10^{-6}$ ;  $84 \cdot 10^{-6}$ ; $15 \cdot 10^{-6}$	$176 \cdot 10^{-6}$ ;  $84 \cdot 10^{-6}$ ; $15 \cdot 10^{-6}$
Коэффициент трения, $f$	0,15	0,15	0,15

Примечание: коэффициент конвективного теплообмена задан на основе [8]; термическое сопротивление в зоне контакта – [4].

Таблица 2 – Характеристики исследуемых соединений

№	Материал	г, м	h, м	Натяг $\delta$ , м
1	Сталь	0,03	0,01	$30 \cdot 10^{-6}$
2			0,005	
3			0,0025	
4	Дюралюминий	0,03	0,01	$30 \cdot 10^{-6}$
5			0,005	
6			0,0025	
7	Медь	0,03	0,01	$30 \cdot 10^{-6}$
8			0,005	
9			0,0025	

Примечание: указан радиальный натяг.

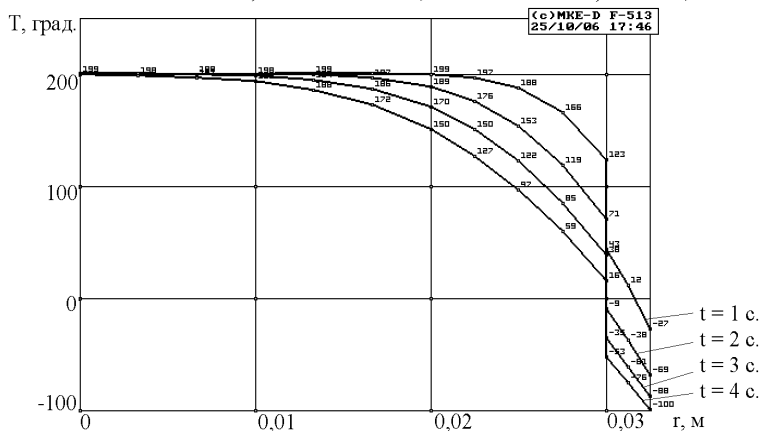
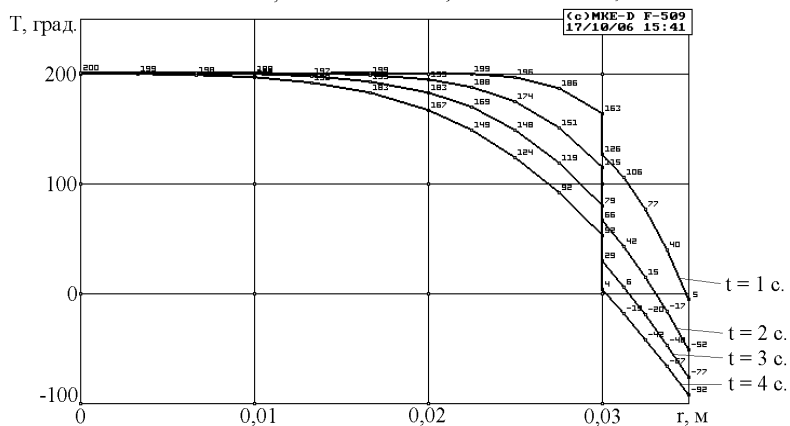
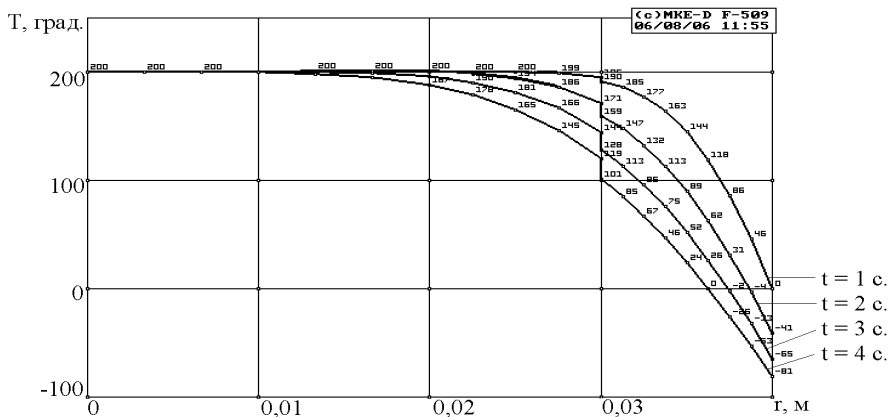


Рисунок 2 – Распределение температуры в сечении А соединений № 1-3 при их охлаждении в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды



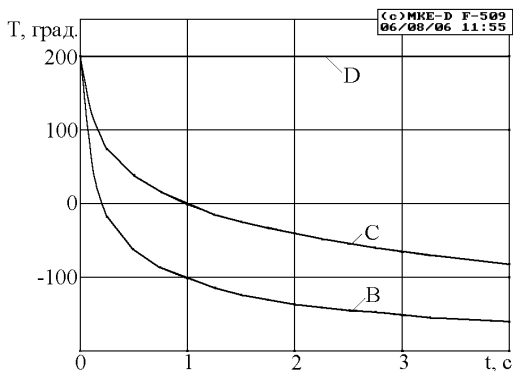


Рисунок 3 – Изменение температуры на поверхности втулки в точке С и вала в точках В, D для соединения № 1

В табл. 3 приведено распределение температуры в точках В,С, D (см. рис. 1) в процессе охлаждения соединения. В табл. 4 приведены характеристики соединения в зависимости от продолжительности процесса охлаждения  $t_{пр}$  хладагентом: уровень сжимающих напряжений  $\sigma_r$  или зазор  $\Delta$  в соединении деталей с натягом. Данные соответствуют полному выравниванию температуры в соединении.  $W$  – количество энергии, забранной у детали хладагентом, данные приведены для  $l_1 = l_2 = 0,05$  м (см. рис. 1).  $\sigma_{r0}$  – уровень сжимающих напряжений в соединении до начала технологического процесса.

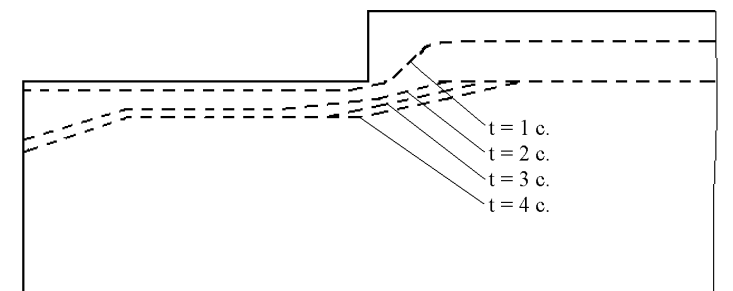


Рисунок 4 – Граница зоны пластических деформаций, возникающих в соединении № 1 в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды с начала процесса охлаждения

На рис. 6 показано распределение температуры в сечении А соединения № 4 (см. рис. 1, табл. 2) при его охлаждения хладагентом в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды с начала процесса охлаждения; граница пластических деформаций для этого же соединения показана на рис. 7. Согласно расчету, натяг в соединении № 4 не снимается, а лишь снижается на 23 %.

На рис. 8 показано распределение температуры в сечении А соединения № 7 (см. рис. 1, табл. 2) при его охлаждении хладагентом в моменты времени

t = 1,2,3,4 секунды с начала процесса охлаждения. Пластичность в соединениях из меди появляется у втулке, на валу пластические деформации не наблюдаются. Согласно расчету, натяг в соединении № 7 не снимается, а лишь снижается на 55 %; в соединениях № 8-9 – полностью снимается.

Таблица 3 – Распределение температуры в процессе охлаждения соединения

№ со-ед.	t, с.	T <sub>В</sub> , град.	T <sub>С</sub> , град.	T <sub>Д</sub> , град.	№ со-ед.	t, с.	T <sub>В</sub> , град.	T <sub>С</sub> , град.	T <sub>Д</sub> , град.		
										Материал – сталь	1
0,02	128	161	200	2	-95	-19	192				
0,03	110	151	200	3	-117	-51	166				
0,05	84	137	200	4	-131	-74	133				
0,1	42	113	200	5	1	-62	6	199			
0,15	16	97	200		2	-99	-43	185			
0,2	-3	85	200		3	-117	-73	153			
0,25	-18	74	200		4	-129	-87	116			
0,5	-62	39	200	6	1	-73	-24	199			
0,75	-86	16	200		2	-98	-56	179			
1	-102	0	200		3	-115	-75	145			
1,5	-123	-24	200		4	-127	-91	108			
2	-136	-41	200	Материал – медь	7	1	15	80	199		
2,5	-145	-54	200			2	-36	27	188		
3	-151	-65	200			3	-63	-7	163		
3	-151	-65	200			4	-83	-32	132		
4	-160	-82	200	8	1	-7	46	198			
2	1	-103	-5		200	2	-53	-6	181		
	2	-136	-52		200	3	-76	-34	152		
	3	-150	-77		200	4	-92	-54	120		
	4	-157	-93	200	9	1	-32	8	297		
3	1	-107	-27	200		2	-63	-27	175		
	2	-130	-69	200		3	-80	-46	144		
	3	-141	-88	200		4	-94	-62	113		
	4	-148	-100	200							

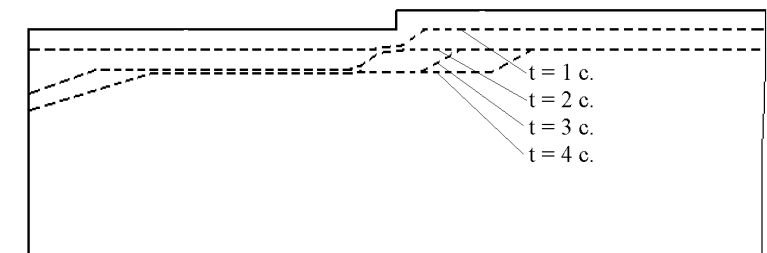


Рисунок 5 – Граница зоны пластических деформаций, возникающих в соединении № 3 в моменты времени t = 1,2,3,4 секунды с начала процесса охлаждения

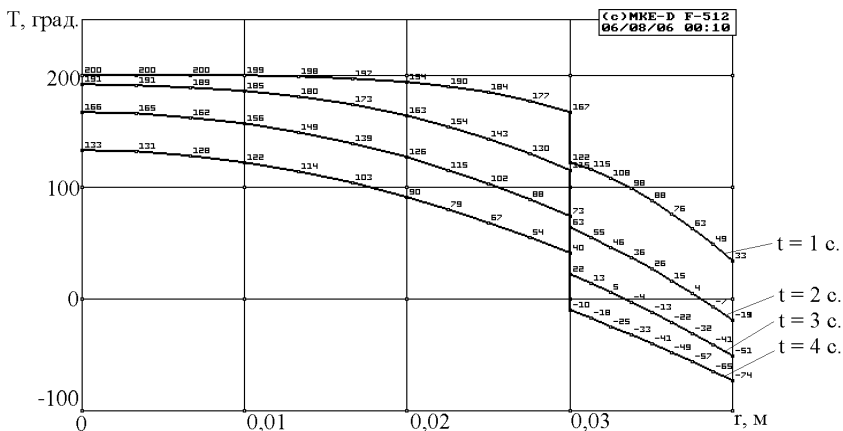


Рисунок 6 – Распределение температуры в сечении А соединения № 4 при ее охлаждении в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды

Таблица 4 – Характеристики соединения в зависимости от продолжительности охлаждения  $t_{\text{ПР}}$

№ соед	$t_{\text{ПР}}$	$\sigma_{r0}$ , МПа	$\sigma_r$ , МПа	$\Delta$ , мкм	W, кДж
1	1	46,7	29,1	0	59
	2		14,8	0	99
	3		-	1,8	131
	4		-	5,5	159
2	1	27,9	4,9	0	52
	2		-	12,0	86
	3		-	18,0	116
	4		-	19,7	138
3	1	15,5	-	12,5	48
	2		-	13,7	79
	3		-	12,7	104
	4		-	13,1	126
4	1	16,6	15,7	0	67
	2		13,4	0	114
	3		12,7	0	151
	4		12,7	0	182
5	1	9,9	1,8	0	57
	2		-	3,0	97
	3		-	3,0	128
	4		-	3,7	155
6	1	5,5	-	16,7	54
	2		-	17	86
	3		-	17	115
	4		-	19	140
7	1	26,0	21,7	0	76
	2		13,9	0	135
	3		12,0	0	185
	4		11,9	0	227
8	1	15,4	-	0,1	65
	2		-	6,4	114
	3		-	6,3	155
	4		-	6,8	191
9	1	8,7	-	13,0	58
	2		-	12,8	102
	3		-	12,8	140
	4		-	13,8	173

Примечание: в таблице указан радиальный зазор.

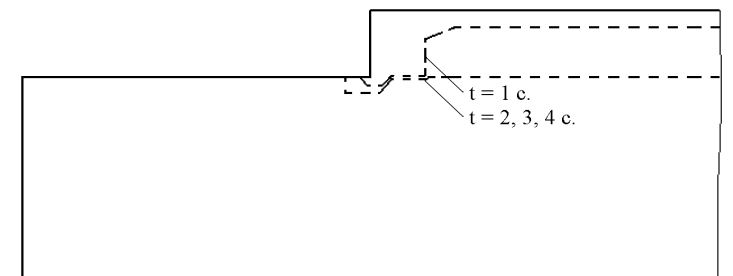


Рисунок 7 – Граница зоны пластических деформаций, возникающих в соединении № 4 в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды с начала процесса охлаждения

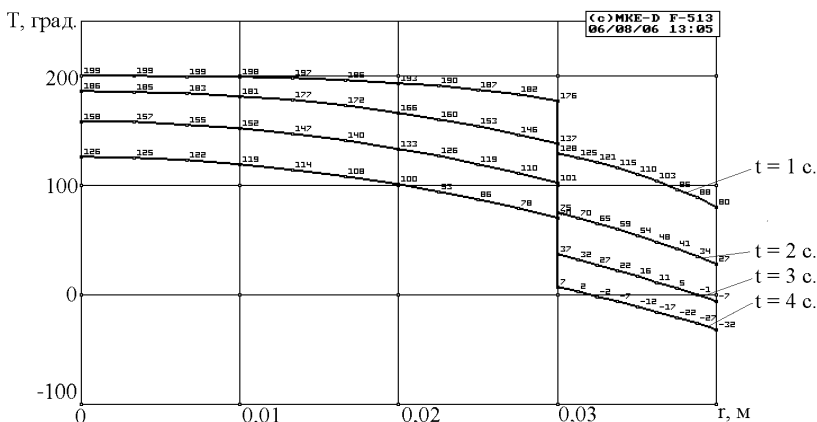


Рисунок 8 – Распределение температуры в сечении А соединения № 7 при его охлаждении в моменты времени  $t = 1, 2, 3, 4$  секунды

**Выводы.** С помощью современных численных методов проведено исследование способа разборки прессовых соединений деталей типа вал-втулка, обеспечивающий съем тонкостенной охватывающей детали с вала. Расчеты показали, что возможность съема втулки зависит от геометрии соединения, свойств материала, времени охлаждения.

Охлаждение хладагентом с целью съема эффективно лишь кратковременно – для деталей из стали – 7-8 с., из меди и алюминия – 2-3 с. при внешнем диаметре втулки 8 см. Время эффективного охлаждения определяется временем начала уменьшения градиента температур во втулке, что приблизительно соответствует началу охлаждения оси вала. Дальнейшее охлаждение не дает эффекта.

Согласно расчету, в стальном валу после применения такой разборки возникают пластические деформации.

Чем толще стенка втулки, тем менее эффективен данный метод. Таким образом, данный метод разборки следует применять там, где не работают стандартные методы (быстрый нагрев или прессовый съем втулки).

- Список литературы:** 1. Патент 453276 СССР Способ разборки прессовых соединений / Г.Я. Андреев, Н.М.Лактионов, А.Н.Морозов. Заявлено 06.12.72; Опубл. 15.12.74; Бюл. № 46. – 1975.
2. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – Москва, Мир, 1975. – 541 с. 3. *Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н.* и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1989. – 232 с. 4. *Миллер В.С.* Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Киев: Наукова думка, 1966. – 164 с. 5. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М., Мир, 1979. – 392 с. 6. Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: В. 2 ч. Ч. 2: *Можаровский Н.С. Качаловская Н.Е.* Методы и алгоритмы решения краевых задач. – Киев, Вища школа, 1991. – 287 с. 7. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. – М., Физматгиз, 1963. – 660 с. 8. *Михеев М.А.* Основы теплопередачи. – М.-Л.: Энергоиздат, 1956. – 392 с.

*Поступила в редколлегию 11.10.2006*

УДК 539.4

**К.В. АСТАХОВА; В.А. ЖОВДАК**, докт. техн. наук;  
**В.В. ТАТЬКОВ**, канд. техн. наук; **А.И. ТРУБАЕВ**, канд. техн. наук;  
**И.М. ФЕДОРЕНКО**; НТУ «ХПИ»

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДОВ ГИДРОСИСТЕМЫ КОПРОВОГО ПРЕССА**

На основі методу скінчених елементів проведені чисельні дослідження вимушених, власних коливань та міцності трубопроводу гідросистеми, що знаходиться під дією гідравлічних ударів. Дано оцінку впливу внутрішнього тиску на спектр власних частот і напружений стан системи. Динамічні характеристики внутрішнього тиску визначені за допомогою експерименту.

On the basis of a finite element method the numerical researches of forced and free vibrations and strength of the pipeline of a hydraulic-circuit system were under an operation of transient shocks are held. The estimation of influence of internal pressure on a spectrum of natural frequencies and stress state of a system is given. The dynamic responses of internal pressure are defined experimentally.

В современной промышленности все большую роль играет переработка вторичного сырья и, в частности, металлического лома. Технология его переработки включает в себя, помимо всего прочего, прессование, которое осуществляется посредством копровых прессов. При прессовании неклассового лома (т.е. лома, неоднородного по размерам и качеству) в гидросистеме возникают нестационарные явления. Эти явления носят характер гидравлических ударов, сопровождающихся забросами давления, вызывающих разрушение элементов гидроцилиндров, соединительной арматуры, магистральных трубопроводов. До настоящего времени динамике гидроагрегата копрового пресса не уделялось должного внимания. Следовательно, расчет собственных и вынужденных колебаний трубопровода, вызванных пульсацией внутреннего давления, является актуальной проблемой, связанной с обеспечением надежной работы оборудования, используемого в металлургии.

На рис. 1 представлен фрагмент пространственного трубопровода гидро-

системы пресса, подводящего рабочую жидкость к гидрораспределителям. Материал – сталь Ст20. В табл. 1 приведены значения наружных и внутренних диаметров для различных участков трубопровода. Трубопровод заполнен маслом и жестко закреплен по краям.

Таблица 1

Участок трубопровода	Наружный диаметр $D \cdot 10^{-3}$ , м	Внутренний диаметр $d \cdot 10^{-3}$ , м
1	168	118
2	102	70
3	89	61

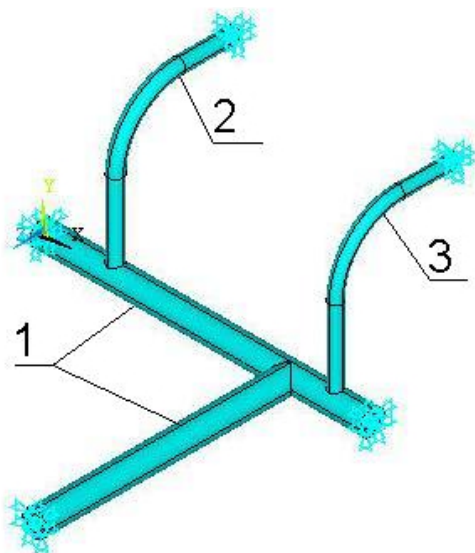


Рисунок 1 – Геометрическая модель трубопровода

На рис. 2 приведены графики пульсации давления в коллекторе (поз. 1), поршневой полости механизма поперечного прессования (поз. 2) и штоковой полости механизма поперечного прессования (поз. 3). Экспериментальные данные свидетельствуют о наличии неклассового лома в камере прессования и нарушении технологического цикла по созданию пакета металлолома.

Рассматриваются задачи о собственных и вынужденных колебаниях и статической прочности системы, нагруженной внутренним давлением.

Решение проводится на основе метода конечных элементов в форме перемещений [2, 3]. В качестве конечного элемента выбран 10-узловой пространственный твердотельный элемент. Выбор элемента обусловлен геомет-

При проведении постановочного эксперимента определено, что основным условием забросов давления является внезапная остановка цилиндра, имеющего максимальную скорость движения (при подаче от 4-х насосов Г305А), в момент упора в один или несколько фрагментов нестандартного металлолома. Это относится к гидравлическим контурам приводов крышки, поперечного и продольного прессования.

Были проведены экспериментальные замеры пульсации давления на разных участках гидросистемы копрового пресса. Первичные преобразователи давления типа ПД-60/2 были установлены в напорном коллекторе (рис.1, поз.1), в штоковой и поршневой полостях гидроцилиндров механизма прижима крышки и механизма поперечного и продольного прессования. Сбор и обработка информации проводились с помощью восьмиканального диагностического комплекса [1].

рическими характеристиками системы, которые не позволяют рассматривать систему как тонкую оболочку.

Для выбора адекватной конечно-элементной (КЭ) модели предварительно были выполнены расчеты статической прочности трубопровода, нагруженного внутренним давлением  $P = 29$  МПа, которое соответствует максимальному значению давления в процессе эксплуатации. В табл. 2 приведены максимальные значения эквивалентных напряжений по Мизесу и перемещений, полученные с использованием различных конечно-элементных моделей. Наибольшие напряжения возникают на внутренней поверхности трубы в тройниковом соединении коллектора (участок 1), где имеет место концентрация напряжений.

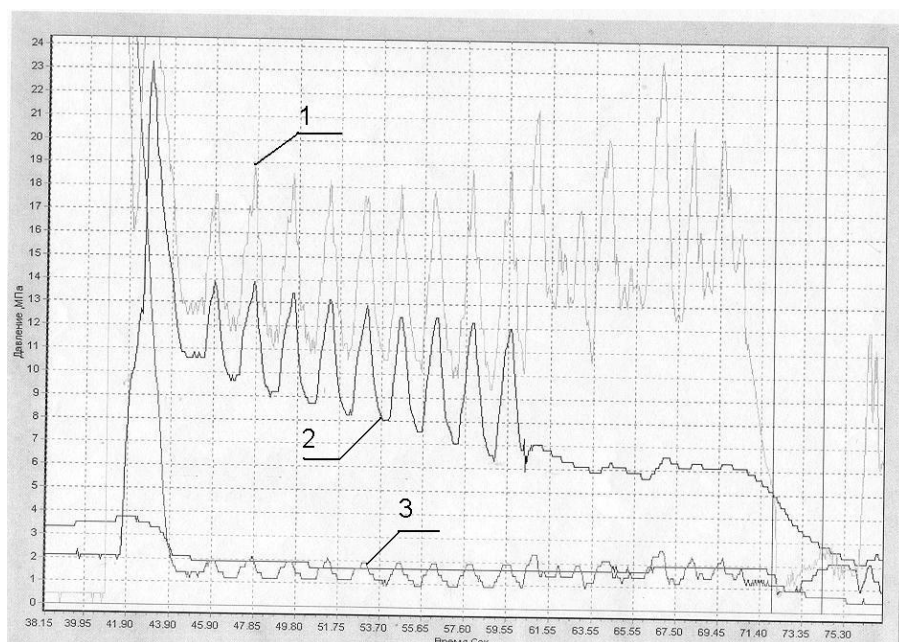


Рисунок 2 – Циклограмма работы прессы

Таблица 2

№ КЭ модели	Количество элементов	Максимальные напряжения, МПа	Максимальные перемещения, м
1	19918	394	$0,137 \cdot 10^{-3}$
2	24303	402	$0,138 \cdot 10^{-3}$
3	29253	405	$0,138 \cdot 10^{-3}$
4	40053	405	$0,138 \cdot 10^{-3}$

Дальнейшие расчеты проводились с использованием КЭ модели № 3, так как эта модель обеспечивает достаточную точность при расчете напряжений и

перемещений, что видно из исследования сходимости результатов (табл. 2).

Распределения напряжений в системе приведены на рис. 3. Из полученных результатов следует, что номинальное значение напряжений составляет 94 МПа, что не превышает предел выносливости материала. Согласно [4] был определен коэффициент концентрации для тройникового узла, равный 2,5. Тогда максимальное значение напряжений, соответствующее данному коэффициенту концентрации, составляет 235 МПа, что не превышает предел текучести материала.

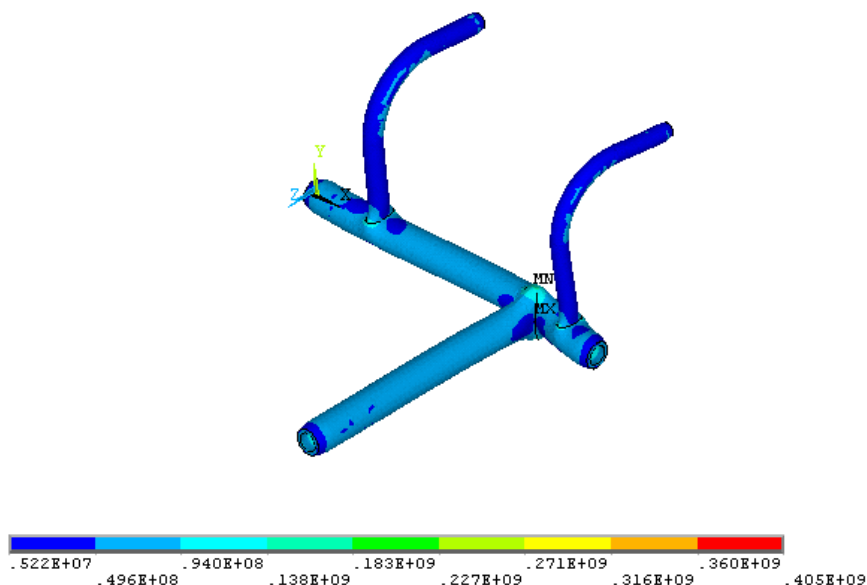


Рисунок 3 – Распределение напряжений по трубопроводу

Исследовалось влияние внутреннего давления на спектр собственных частот. В табл. 3 приведены частоты собственных колебаний трубопровода, полученных без учета и с учетом влияния внутреннего давления в системе. Полученные результаты свидетельствуют о незначительном изменении значений собственных частот системы под действием внутреннего давления (не более 3 %), хотя влияние этого параметра может быть существенным в зависимости от условий закрепления системы [5]. На рис. 4 приведены 1-ая (а) и 2-ая (б) формы собственных колебаний трубопровода. Используемые в приводе трехплунжерные насосы Г305А воспроизводят пульсацию рабочей жидкости с частотами 30, 60, 120 Гц. Рабочие частоты насосов не являются опасными для трубопроводной системы с точки зрения возникновения резонансных явлений.

Был проведен расчет вынужденных колебаний, вызванных пульсацией внутреннего давления в коллекторе. Предполагалось, что закон изменения давления во времени одинаков для любой точки трубопроводной системы. При расчетах ис-



пользовался фрагмент экспериментально полученной циклограммы, который соответствует максимальной нагрузке трубопровода (рис. 5).

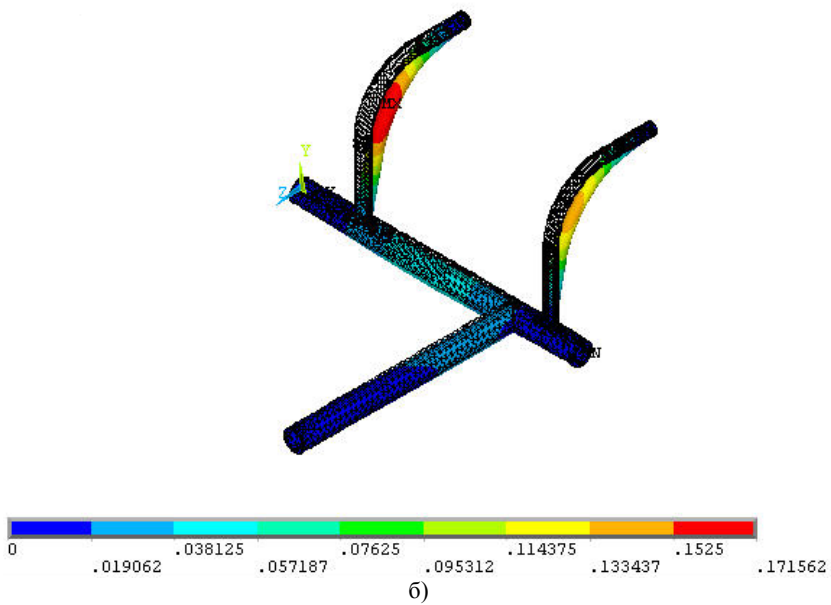
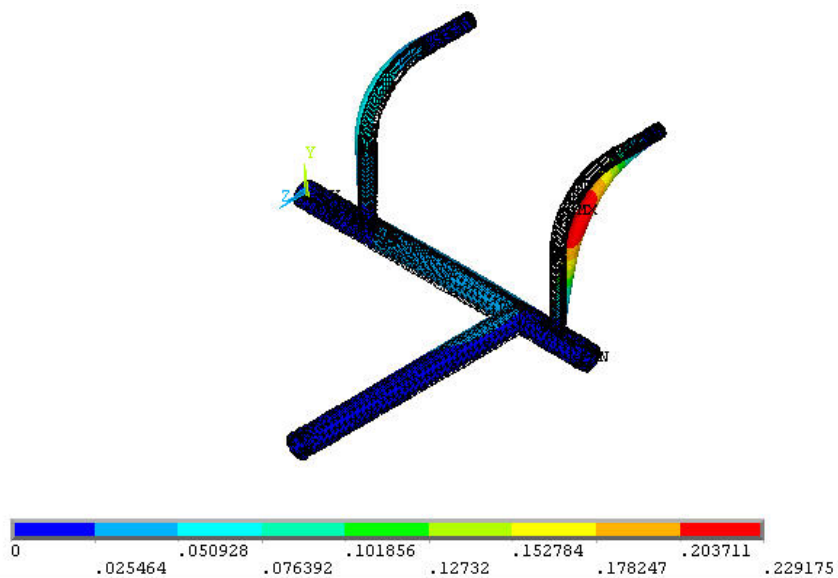


Рисунок 4 – 1-ая (а) и 2-ая (б) формы собственных колебаний трубопровода

Таблица 3

№ частоты	Значение частоты, Гц (P = 0 МПа)	Значение частоты, Гц (P = 29 МПа)
1	139,86	143,50
2	152,35	155,93
3	174,07	176,70
4	227,20	228,34
5	231,85	233,75
6	275,23	276,29
7	369,84	371,57
8	383,35	385,51
9	407,73	410,24
10	436,14	440,59

Уравнение движения КЭ модели конструкции имеет вид:

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  – матрицы инерции, демпфирования и жесткости конструкции соответственно,  $\{y\}$  – вектор узловых перемещений,  $\{F(t)\}$  – вектор внешних сил, вызванных действием внутреннего давления. При решении уравнения (1) использовался полный метод, который позволяет учесть произвольный закон изменения нагрузки во времени.

Как и при исследовании статической прочности было получено, что максимальные значения эквивалентных напряжений возникают на внутренней поверхности тройникового соединения коллектора. На рис. 6 показано распределение напряжений в двух тройниковых соединениях в момент времени  $t = 1,5$  с. На рис. 7 приведен график изменения эквивалентных напряжений во времени для области, соответствующей месту концентрации напряжений.

В связи с тем, что период импульса нагружения (рис. 5) намного больше первого периода собственных колебаний ( $T_1 = 0,007$  с), то характер изменения напряжения во времени имеет вид, подобный графику внешней нагрузки.

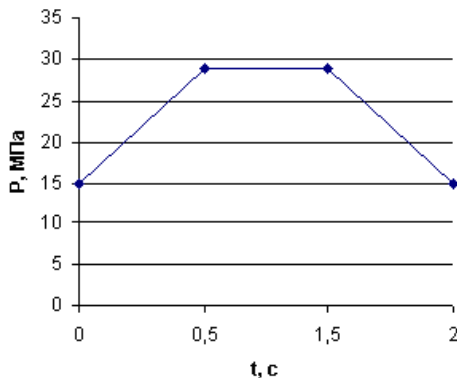


Рисунок 5 – График изменения внутреннего давления

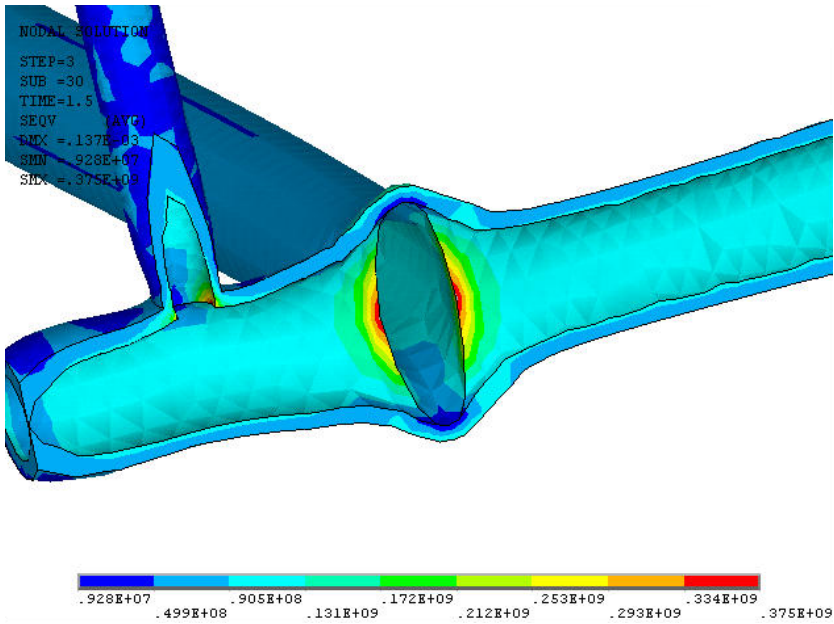


Рисунок 6 – Распределение напряжений в тройниковых соединениях в момент времени  $t = 1,5$  с

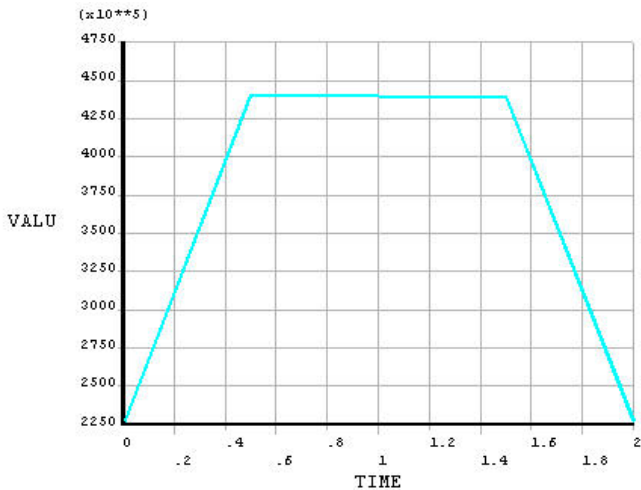


Рисунок 7 – График изменения эквивалентных напряжений во времени

**Выводы.** По результатам численных исследований можно сделать вывод о том, что была получена адекватная конечно-элементная модель, обеспечивающая достаточную точность при оценке напряженно-деформированного

состояния системы, возникающего при гидравлических ударах. Полученные результаты могут быть использованы для расчета ресурса и надежности работы трубопровода гидросистемы.

**Список литературы:** 1. *Ремарчук М.П., Федоренко И.М.* Розробка та використання діагностичного комплексу для визначення стану гідросистем мобільних машин в умовах експлуатації // Восточноєвропейський журнал передових технологій. – 2005. – № 4/2 (16). 2. *Зенкевич О.К.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1980. – 420 с. 3. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М., Высшая школа, 1985. – 392 с. 4. *Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок.* – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с. 5. *Жовдак В.А., Трубаев А.И.* Собственные колебания и прочность трубопроводов гидросистем // Вісник НТУ «ХП». Збірник наукових праць. Тематичний випуск «Динаміка і міцність машин». – 2005. – № 20.

*Поступила в редакцію 30.10.2006.*

УДК 539.3

**О.В.БІРЮКОВ**, канд.техн.наук; **О.Ф.КОВПІК**, канд.фіз.-мат.наук;  
**Є.О.КОРНІЛОВ**, докт.фіз.-мат.наук; **С.Ю.САЄНКО**, канд.техн. наук;  
ІФТТМТ ННЦ «ХФТІ», Харків;  
**О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ**, докт.техн.наук; **О.О.ЗАМУЛА**, НТУ «ХП»

### **АНАЛІЗ МІЦНОСТІ РОЗМЕЖУВАЛЬНОЇ СТІНКИ КАМЕРИ ВИВОДУ ПУЧКІВ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК З ПРИСКОРЮВАЧА В АТМОСФЕРУ**

В роботі розглянуто напружено-деформований стан розмежувальної стінки камери виводу електронних і протонних пучків з прискорювача в атмосферу. Метод розв'язання побудований на базі методу скінченних елементів. Досліджено вплив на міцність геометричної конфігурації стінки, а також спільну дію термосилових напружень.

In article strength-stress state of the boundary wall of the chamber of outlet electronic and proton beams from the accelerator in an atmosphere is considered. The method of the solution is constructed on the basis of finite element method. Influence on strength of a geometrical configuration of a wall, and also a combined effect temperature and load is explored.

**Актуальність теми.** Для радіаційної технології, зокрема, для очищення електронним пучком мікро-біологічно і хімічно забрудненої води, коли необхідно досягти високої продуктивності, доцільним є використання вікон великих розмірів. Як зазначено в роботах [1,2] для вікон, що пропускають пучки середньої потужності доцільно в прискорювальних комплексах використовувати вікна з піровуглецевого матеріалу, або вуглець-вуглецевого композиційного матеріалу (УУКМ) [3], який широко застосовується в ядерній енергетиці, реакторобудуванні, ракетній техніці. У зв'язку з цим, актуальним є розрахунки з аналізу міцності розмежувальної стінки камери виводу пучків заряджених частинок з прискорювача, в умовах дії атмосферного тиску, напору води та рі-

зниці температур [1], що надасть обґрунтування щодо вибору конструкції та матеріалу розмежувальної стінки камери прискорювача.

**Постановка проблеми.** В роботі розглянуто напружено-деформований стан розмежувальної стінки камери виводу електронних і протонних пучків з прискорювача в атмосферу, виготовленої з вуглець-вуглецевого композиційного матеріалу (УУКМ). Цей матеріал має унікальні властивості: високу питому міцність при температурах понад 1000 °С, інертність щодо дії багатьох хімічних середовищ, високу радіаційну стійкість, що можна використати при проектуванні вікон достатньо великих розмірів з товщиною стінки вікна на рівні декількох міліметрів.

Конструкцію камери для обробки води з вікном з УУКМ показано на рис. 1. Камера з випуклим днищем – 2 з'єднана з корпусом прискорювача – 1. Радіальний потік електронів – 3 з прискорювача потрапляє на вікно – 4 з УУКМ. Проходячи скрізь стінку, електрони взаємодіють з потоком води – 5, що подається під тиском у водяну порожнину корпусу. Цей потік води охолоджує зовнішню стінку вікна. Вікно в корпусі утримується в місцях кріплення за допомогою мідних ущільнювачів при щільному приляганні до опорних поверхонь кінцевого корпусу і сферичного днища.

Позрахункові схеми вікон виводу електронів з прискорювача із заданими розмірами показано на рис. 2.

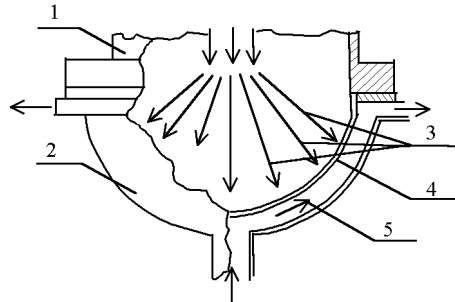


Рисунок 1 – Камера для обробки води електронним пучком прискорювача:  
1 – корпус прискорювача; 2 – камера для обробки води; 3 – пучок електронів;  
4 – вікно виводу електронів з прискорювача; 5 – потік води

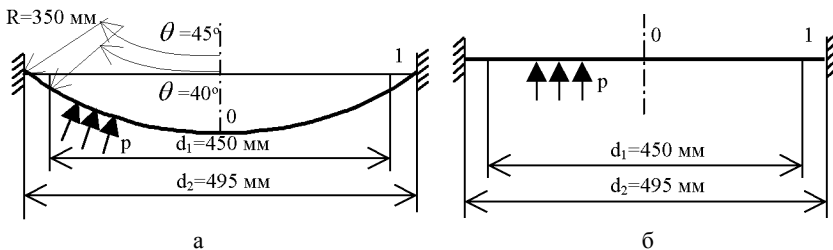


Рисунок 2

Вікно у вигляді сферичного купола (рис. 2, а) має сталу товщину стінки  $h_1 = 3$  мм вздовж робочої частини, яка визначається кутом розгортки потоку - конусом  $2\theta = 80^\circ$  і діаметром  $d_1 = 450$  мм. Шляхом плавного переходу робоча частина з'єднується з опорною товщиною  $h_2 = 15$  мм. Діаметр контуру кріплення стінки вікна в корпусі становить  $d_1 = 495$  мм. Значення матеріальних констант прийнято наступними [3]: модуль пружності  $E = 1,2 \cdot 10^5$  кгс/см<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,19$ ; границя міцності  $\sigma_B = 600$  кгс/см<sup>2</sup>, коефіцієнт термічного розширення  $\alpha = 4 \cdot 10^{-6}$  1/С<sup>0</sup>. Опорні поверхні жорстко закріплені в корпусі. На зовнішню поверхню вікна до місця кріплення в корпусі діє рівномірно розподілений тиск  $p = -2$  кгс/см<sup>2</sup>, що складається з атмосферного тиску і тиску води, що протікає в порожнині охолодження і обробки води. При проходженні потоку електронів скрізь стінку вікна вона нагрівається, а проточна вода її охолоджує. Встановлюється деяка стала температура стінки вище температури опорних поверхонь корпусу. Для оцінки впливу цієї різниці температур на напружено-деформований стан вікна прийнято величину  $\Delta T = 200$  К.

Вікно у вигляді плоскої стінки з тими ж товщинами  $h_1$  і  $h_2$  та з тим же прохідним діаметром  $d_2$  показано на рис. 2, б. Ця стінка охолоджується потоком води, що проходить паралельно до зовнішньої поверхні вікна.

**Аналіз міцності.** Розрахунки напружено-деформованого стану проводилися на базі методу скінченних елементів [4]. Оскільки розмежувальна стінка має вигляд тонкостінної оболонки обертання і деформування відбувається осьосиметрично, то використовувалися одномірні оболонкові кінчні елементи. За попередніми розрахунками для прийнятної точності виявилось достатнім 90 скінченних елементів. На рис. 3,4,5 наведено дані розрахунків, за якими температурний фактор не враховувався.

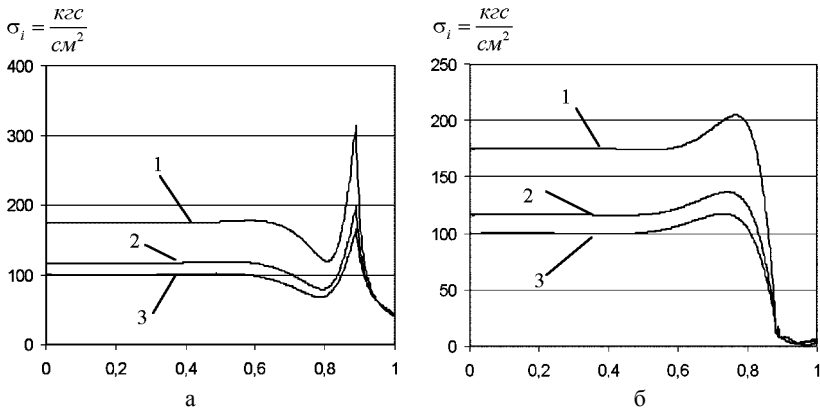


Рисунок 3 – 1:  $h_1 = 2$  мм; 2:  $h_1 = 3$  мм; 3:  $h_1 = 3,5$  мм

На рис. 3, показано розподіл інтенсивності напруження на внутрішній (а) і на зовнішній (б) поверхнях розмежувальної стінки, схему якої подано на рис.

2, а. На рис. 4 показано розподіл інтенсивності напруження на поверхні розмежувальної стінки, схему якої подано на рис. 2, б.

З рис. 3 можна встановити, що навіть за товщини  $h_1 = 2$  мм максимальне значення інтенсивності напруження є вдвічі меншим від границі міцності  $\sigma_B$ . Як це видно з порівняння рис. 3 і рис. 4, оптимальнішим є варіант з використанням розмежувальної стінки сферичного виду.

На рис. 5 показано розподіл по меридіану інтенсивності напруження (лінії 1 на внутрішній поверхні і лінії 2 на зовнішній).

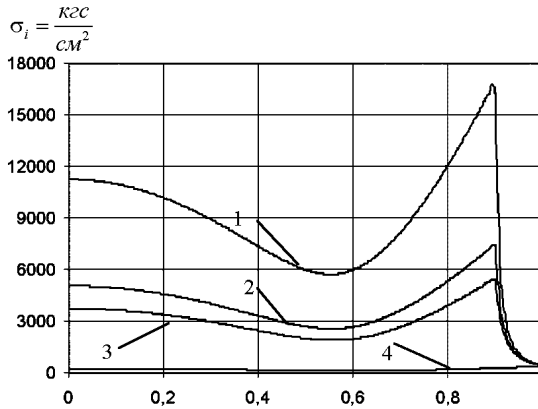


Рисунок 4 – 1:  $h_1 = 2$  мм; 2:  $h_1 = 3$  мм; 3:  $h_1 = 3,5$  мм; 4:  $h_1 = 15$  мм

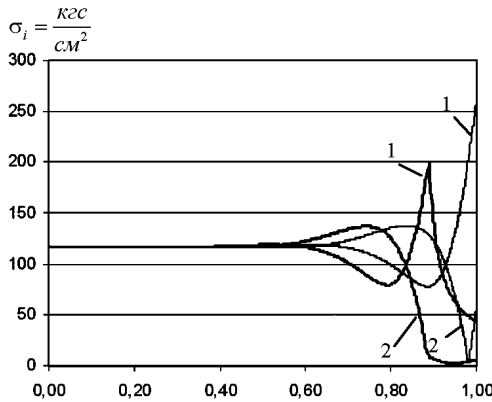


Рисунок 5

На цьому рисунку жирні криві відповідають розрахункові розмежувальної стінки при  $h_1=3$  мм зі стовщеним переходом до жорсткого кріплення в камері, а тонкі лінії – при сталій товщині  $h_1=3$  мм. Порівнюючи графіки на рис. 5, можна дійти висновку, що варіант зі стовщенням зменшує максимальний рівень напружень на 25 % .

Розглянемо данні розрахунку сферичної оболонки (рис. 2, а) товщиною  $h_1 = 3$  мм, зі стовщеним переходом до жорсткого кріплення в камері, що надані на рис. 6.

На рис. 6 показано розподілення інтенсивності напружень на внутрішній (а) і зовнішній (б) поверхнях розмежувальної стінки для різних комбінацій дії температурного навантаження і зовнішнього тиску води. При цьому враховано різницю температур розмежувальної стінки і корпусу камери, що складає  $\Delta T = 200$  К.

Як це видно з рис. 6, має місце взаємодія температурних деформацій та деформацій внаслідок дії зовнішніх сил, так, що за рахунок зовнішнього тиску дія температури компенсується й рівень інтенсивності напружень знижується.

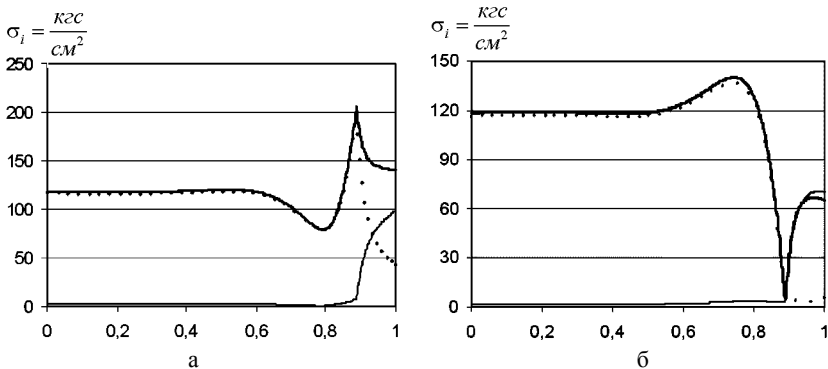


Рисунок 6 –  $\Delta T = 200$  °C;  $p = 0$  кг/см<sup>2</sup>;  $\bullet\bullet\bullet$   $\Delta T = 0$  °C;  $p = -2$  кг/см<sup>2</sup>;  
 $\text{---}$   $\Delta T = 200$  °C;  $p = 0$  кг/см<sup>2</sup>;

**Висновок.** В роботі розглянуто напружено-деформований стан розмежувальної стінки камери виводу електронних і протонних пучків з прискорювача в атмосферу, з аналізу якого випливає, що за даного рівня навантаження і різниці температур рівень інтенсивності напружень для розмежувальної стінки у формі круглої пластини і сферичного куполу різняться на порядки. Отже, слід надати перевагу варіанту розмежувальної стінки у вигляді сферичного куполу.

**Список літератури:** 1. О.Ф. Ковник, Е.А.Корнилов, О.В.Бирюков и др. Углеродные окна вывода электронных и протонных пучков из ускорителей в атмосферу // ВАНТ "Ядерно-физические исследования". – Выпуск 1(42). – Харьков, 2004. – С. 77-79. 2. Неклюдов И.М., Корнилов Е.А., Морачковский О.К., Бирюков О.В. Разработка методики расчета на прочность разграничивающей стенки для окна вывода ускорителей электронов // Физические и компьютерные технологии. Труды 8<sup>й</sup> Международной научно-технической конференции, г. Харьков, 9-10 декабря 2003г. – С. 278-281. 3. Ю.Г. Бушуев, М.И. Персин, В.А.Соколов Углерод-углеродные композитные материалы. Справочник. – М.: Металлургия, 1994. – С. 128. 4. О.О. Замула Урахування геометричної нелінійності у розрахунках на повзучість тонкостінних елементів конструкцій // Вісник НТУ «ХП». Збірка наукових праць. Харків. НТУ «ХП». – 2005. – Вип. 47. – С.77-83.

Надійшла до редакції 01.06.2006.



**О.В.БИРЮКОВ**, канд.техн.наук; **С.Ю.САЕНКО**, канд.техн.наук;  
**В.В.КОЛОСЕНКО**; НЦ "ХФТИ»;  
**Д.В.ЛАВИНСКИЙ**, канд.техн.наук; **В.Н.СОБОЛЬ**;  
**О.К.МОРАЧКОВСКИЙ**, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»

## **СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЕСС-ФОРМ ДЛЯ ПРЕССОВАНИЯ ИЗДЕЛИЙ ИЗ ПОРОШКОВ**

Представлено метод та результати аналізу міцності двохшарової товстостінної матриці й центрального стержня, що формує внутрішню поверхню виробу, прес-форм для пресування виробів з порошкових матеріалів. Аналіз міцності конструктивних елементів прес-форм виконано методом скінчених елементів (МСЕ). Приведено розрахункові дані, за якими можна здійснювати проектування прес-форм за умов забезпечення міцності їхнім конструктивним елементам.

The method and outcomes of the strength analysis of a two-layer thick-walled matrix and central core, which one reshapes an internal surface of item, moulds for pressing powdered materials are submitted. The analyses of strength of structural members of a mould by a finite element method (FEM) are executed. The predicted data on the basis of which one it is possible to execute designing elements of moulds to their structural members under strength conditions are submitted.

**Актуальность проблемы.** В научно-технической литературе имеются публикации по общим вопросам прочности конструктивных элементов устройств и технологиям прессования, например [1-4]. В известных устройствах для прессования изделий из порошков тугоплавких соединений используются матрицы из тугоплавких материалов, прессование производят при давлениях 30...40 МПа и температурах до 1800 °С. При больших давлениях материалы пресс-форм разрушаются. Для прессования изделий из порошков тугоплавких соединений предлагается использовать углерод-углерод композитный материал (УУКМ), предназначенный для эксплуатации при давлениях 40...100 МПа. Для обоснованного выбора размеров стенки пресс-формы из УУКМ по условиям прочности необходимы данные анализа статической прочности конструктивных элементов пресс-форм для прессования изделий из порошков тугоплавких соединений, которыми можно воспользоваться при проектировании таких устройств. Анализ прочности элементов устройства для прессования полых изделий из порошков тугоплавких соединений посвящена данная работа.

**Устройство для прессования полых изделий из порошков.** Конструкция устройства для прессования полых брикетов из порошков тугоплавких соединений показана на рис. 1.

Прессуемый брикет из порошка – (4) находится в объемном напряженном состоянии от торцевого давления  $P$  и бокового давления  $p_1$ .

Устройство состоит из двухслойной пресс-формы: внутреннего вкладыша из графита – (1) и наружного цилиндра-матрицы из УУКМ – (2); центрального стержня из графита или УУКМ – (3); прессуемого брикета из порошка – (4);

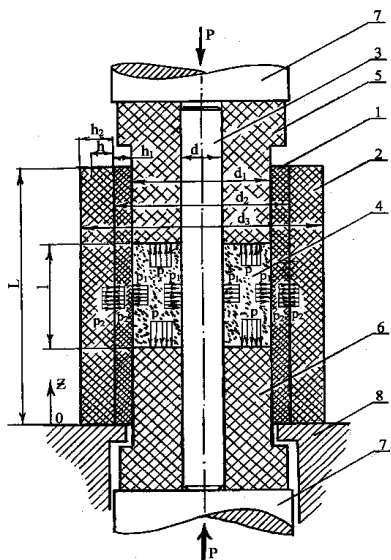


Рисунок 1 – Устройство для прессования изделий из порошков: 1 – вкладыш; 2 – матрица; 3 – центральный стержень; 4 – брикет из порошка; 5, 6 – пуансоны; 7 – поршни пресса; 8 – несущая рама

верхнего – (5) и нижнего – (6) пуансонов Т-образной формы в продольном сечении; поршней гидравлического пресса – (7), передающих сжимающую силу  $P$  на пуансоны; несущей рамы – (8) с пресс-формой.

Вкладыш посажен плотно без зазора в наружный цилиндр и формирует наружную поверхность брикета, а его внутреннюю поверхность формирует центральный стержень.

Подготовленная к прессованию пресс-форма находится в камере с нагревателями. Прессование проводится в нейтральной среде внутреннего объема камеры при равномерном нагреве пресс-формы до  $\sim 1800^\circ\text{C}$ . Нагружение ведется ступенчато с фиксацией усилия и вертикального перемещения поршней. Гидравлический пресс может создать продольную силу до 150 т. После прессования вкладыш и центральный стержень из графита разрушаются, матрица из УУКМ может выдержать несколько прессований.

**Метод расчета.** В работе рассмотрена математическая постановка задачи для упругого деформирования под внутренним давлением двухслойных контактирующих цилиндров, напряженное состояние которых при отсутствии объемных сил определяется системой дифференциальных уравнений равновесия [1]:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j = p_m, \quad \forall x \in L_p, \quad (1)$$

где  $L_p$  – поверхность, на которой действует давление в пресс-форме.

В общем случае, для точек, принадлежащих контактной поверхности, условия их сопряжения отвечают неравенствам [2]:

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m \leq 0, \quad \sigma_{nn}^m \leq 0, \quad (2)$$

где  $u_n^{m-1}, u_n^{m+1}, \delta_{on}^m$  – нормальные перемещения точек поверхностей контактируемых областей и начальный натяг (зазор),

$\sigma_{nn}^m$  – нормальные напряжения на контактирующих поверхностях.

Первое условие в (2) физически отвечает «не проникновению» контактируемых тел. При выборе зазора, между телами возникает контактное давление. Второе условие в (2) отвечает сжатию между стенками в пределах области контакта.

Механизмы контактного взаимодействия между соответствующими точками областей контактируемых поверхностей моделировались путем введения контактного слоя со специальными свойствами, количественно отвечающими механизму контакта [2]. В пределах возможной области контакта этот слой позволяет «внешнюю нелинейность» неравенств (2) свести к «внутренней нелинейности» контактного слоя и рассмотреть взаимодействие тел, разделенных слоем с известными нелинейными свойствами. С помощью описанного выше моделирования можно отразить такие механизмы взаимодействия контактирующих тел, как сцепление, проскальзывание, сухое трение и другие. В расчетах условия фрикционного взаимодействия приняты в форме законов Кулона или Зибеля в зависимости от типа возможного контакта.

Обобщенные уравнения состояния, которые устанавливают связь между напряжениями и деформациями в точках деформирующих тел, представлены тензорно-линейными соотношениями вида:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}\sigma_{kl} + \alpha_{ij}\Delta T, \quad (3)$$

где  $A_{ijkl}$ ,  $\alpha_{ij}$  – компоненты тензоров, отвечающие принятому закону свойств деформирования и температурного расширения-сжатия материала УУКМ.

В пределах линейной упругости материала, соотношение (3) отвечает обобщенному закону Гука. Для упруго-пластического деформирования при простом нагружении и при рассмотрении малых пластических деформаций, в соотношении (3)

$$A_{ijkl} = \frac{1}{E_*} \left[ (1 + \nu_*) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu_* \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (4)$$

где  $E_*$ ,  $\nu_*$  – переменные параметры упругости, которые определяются связью между интенсивностями напряжений  $\sigma_i$  и деформаций, соответственно диаграмме деформирования материала.

В этом случае (3), (4) отвечают деформационной теории малых упруго-пластических деформаций Ильюшина в форме переменных параметров упругости.

Далее, в расчетах использован вариационный принцип Лагранжа и конечно-элементная (КЭ) схема матрицы. Базовым КЭ принят четырех узловой изопараметрический элемент с билинейной аппроксимацией перемещений. Методика решения задач о деформировании стенки матрицы принята отвечающей единой итерационной схеме. С этой целью в расчетах принято пошаговое приложение давления, с итерационной схемой поиска неизвестных узловых перемещений, аналогичной методике переменных параметров упругости для решения задач упруго-пластического деформирования. На каждом шаге линеаризованная система уравнений МКЭ имела вид:

$$[K_{N-1}] \{U_N\} = \{F\} - \{F_{N-1}^{mem}\}, \quad (5)$$

где  $N$  – номер итерации,

$[K]$  – глобальная матрица жесткости КЭ модели,

- {**U**}
- {**F**}
- { $F^{temp}$ }

Итерационный процесс по определению зон контакта и пластичности продолжается до тех пор, пока не достигается наперед заданная точность выполнения условий (2). Предложенный метод реализован в программном модуле для программного комплекса SPACE-T.

**Результаты расчетов.** Данные о физико-механических свойствах материалов элементов пресс-формы приведены в литературе [1,3,4]. Расчеты на прочность стенок матрицы выполнены при следующих данных о свойствах материала ( $T = 1800$  °C). Первый слой – графит: предел прочности на растяжение – 15 МПа, предел прочности на сжатие – 51,5 МПа, модуль упругости –  $1,05 \cdot 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона – 0,2, коэффициент температурного расширения –  $6 \cdot 10^{-6}$  1/°C. Второй слой – УУКМ: предел прочности на растяжение – 110 МПа, предел прочности на сжатие – 100 МПа, модуль упругости –  $1,8 \cdot 10^4$  МПа, коэффициент Пуассона – 0,19, коэффициент температурного расширения –  $3,5 \cdot 10^{-6}$  1/°C. Данные расчетов напряженно-деформированного состояния матрицы приведены в табл. 1, 2, и на рис. 2-3.

Таблица 1 – Расчетные значения: интенсивности напряжений  $\sigma_i/p_1$  и продольных  $\sigma_z/p_1$  во вкладыше в зависимости от  $d_1/d_2, d_2/d_3$  и  $l/L$

$l/L$	$\sigma_i/p_1$ при $d_1/d_2, d_2/d_3$				$\sigma_z/p_1$ при $d_1/d_2, d_2/d_3$			
	0,919	0,787	0,850	0,851	0,919	0,787	0,850	0,851
0,250	2,15		2,26		-1,28		-1,27	
0,315	2,44		2,56		-1,32		-1,31 (1,34)	
0,395	2,72		2,86		-1,3 (1,32)		-1,29 (1,37)	
0,470	2,91		3,06		-1,22 (1,29)		-1,2 (1,4)	
0,550	3,05		3,20		-1,24 (1,59)		-1,24 (1,5)	

Таблица 2 – Расчетные значения интенсивности напряжений  $\sigma_i/p_1$ , продольных напряжений  $\sigma_z/p_1$  в матрице при давлении порошка на вкладыш  $p_1$  в зависимости от  $d_1/d_2, d_2/d_3$  и  $l/L$

$l/L$	$\sigma_i/p_1$ при $d_1/d_2$ и $d_2/d_3$				$\sigma_z/p_1$ при $d_1/d_2$ и $d_2/d_3$			
	0,918	0,787	0,850	0,851	0,918	0,787	0,850	0,851
0,25	1,92		1,67		1,50		1,60	
0,315	2,22		1,94		1,65		1,72	
0,395	2,52		2,22		1,70		1,74	
0,470	2,74		2,44		1,65		1,68	
0,550	2,90		2,61		1,59		1,61	

Расчетные значения интенсивности напряжений  $\sigma_i/p_1$  и продольных напряжений  $\sigma_z/p_1$  в матрице от давления порошка  $p_1$  на стенку вкладыша и радиального давления  $p_2$  на матрицы, в зависимости от толстостенности вкладыша

$d_1/d_2$ , матрицы  $d_2/d_3$  и длины нагруженного участка  $l/L$  для  $d_1 = 340\text{мм}$ ,  $d_3 = 470\text{мм}$ ,  $L = 380\text{мм}$ , приведены в табл. 2.

**Выводы.** В статье дано обоснование в использовании нового углерод - углеродного композита (УУКМ) в матрицах пресс-форм, предназначенных для прессования изделий из порошка при предельных давлениях, уровни которых превышают традиционные (до 100 МПа). Анализ прочности основан на методе конечных элементов (МКЭ). Приведены расчетные значения максимальных интенсивностей напряжений в зависимости от параметра толсто-стенности –  $d_1/d_2$  при разных значениях отношения длины нагруженного участка к общей длине матрицы ( $l/H$ ). По этим данным можно обоснованно выполнить проектирование пресс-форм для прессования тугоплавких соединений при высоких температурах ( $\approx 18000\text{ С}$ ) под давлением ( $p \approx 100\text{ МПа}$ ).

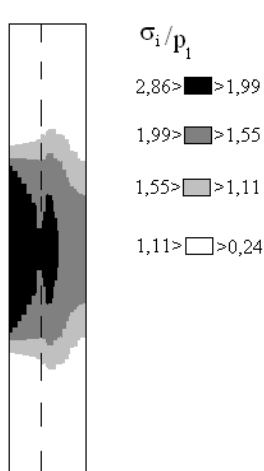


Рисунок 2 – распределение интенсивности напряжений в стенке матрицы при  $d_1/d_2 = 0,85$ ,  $d_2/d_3 = 0,851$

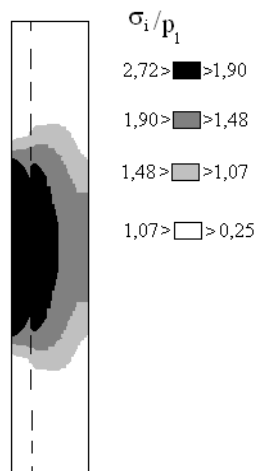


Рисунок 3 – распределение интенсивности напряжений в стенке матрицы при  $d_1/d_2 = 0,919$ ,  $d_2/d_3 = 0,787$

**Список литературы:** 1. Свойства конструкционных материалов на основе углерода // Справочник под ред. В.П. Седова. – М. «Металлургия», 1975. – 336 с. 2. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: «Наукова думка», 1988. – 735 с. 3. Николаев А.Н. Расчет и конструирование матриц для прессования металлических порошков // Труды горьковского политехнического института, металловедения и порошковой металлургии. – Т. XIX, вып. 1. – Горький. – 1963. – С. 11-15. 4. Миранский Д.С. Принцип конструирования аппаратов сверхвысокого давления. Принцип редуцирования радиального напряжения // Прикладная механика и механическая физика. – Москва. – № 2. – 1960. – С. 165-168.

Поступила в редколлегию 19.07.2006

**Д.В.БРЕСЛАВСКИЙ**, докт.техн.наук; **В.Н.КОНКИН**, канд.техн.наук;  
**В.Г.СУКИАСОВ**, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»;  
**Б.А.ПУСТОВОЙТ**, докт.мед.наук; **БАХА В.Ф. ЯХЬЯ**, Институт  
патологии позвоночника и суставов им. М.И.Ситенко АМН Украины

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШОЙ БЕРЦОВОЙ КОСТИ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФРОНТАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ЕЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ**

Розглянуто задачу статичного аналізу великої гомілкової кістки під дією фізіологічного навантаження. На базі скінченноелементних розрахунків тривимірних моделей проведено зіставлення напруженого стану здорової та закривленої кісток. Показано, що наявність фронтальної деформації призводить до значного підвищення рівня навантаженості кістки.

The problem of the tibia static analysis under action of physiological loading is considered. The comparison of stress state of the healthy and curved bones is carried out by finite element computation of three-dimensional models. It is shown, that presence of face-to-face deformation results in significant increase of bones loading level.

Актуальними проблемами в современной хирургии можно считать фронтальные деформации нижних конечностей. К ним относятся О-образная или варусная и Х-образная или вальгусная деформации. В норме механическая ось нижних конечностей проходит через центры тазобедренного, коленного и голеностопного суставов. В случае фронтальной деформации ось смещается на внутренний (варус) либо на наружный (вальгус) отделы коленного сустава, что со временем приводит к его разрушению вследствие перегрузки тканей [1-3]. Помимо этого вся конечность, особенно большая берцовая кость, за счет нарушения соосности испытывает при ходьбе повышенные напряжения, что существенно увеличивает риск травматизма. Детальные расчетные обоснования этого эффекта в литературе отсутствуют, поэтому представляет интерес выяснение изменения характера восприятия нижней конечностью физиологических нагрузок вследствие фронтальных деформаций.

Объектом исследования является большая берцовая кость под действием осевой нагрузки. Цель работы состоит в теоретическом изучении влияния фронтальной деформации на степень нагруженности кости при осевом сжатии путем сравнительных расчетов моделей здоровой и искривленной костей. Задача рассматривается в 3-мерной постановке, критерием для сравнения является уровень напряженного состояния в наиболее нагруженной зоне кости.

Эффективным средством численного анализа статического деформирования тел и конструкций сложной геометрии является метод конечных элементов. Его применение предполагает создание объемной модели средствами твердотельного моделирования с последующей дискретизацией. В частности, для исследуемых объектов применен 10-ти узловый тетраэдральный элемент. Уровень напряженного состояния удобно оценивать обобщенными характе-

ристиками, приводящими сложное напряженное состояние к эквивалентному по опасности разрушения одноосному растяжению. Наиболее употребительной среди подобных величин является интенсивность напряжений, определяемая по координатным компонентам относительно декартовой системы  $xuz$  формулой

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}.$$

Наибольшее значение интенсивности напряжений, полученное в результате расчета каждой из рассмотренных ниже моделей, дает возможность для их сопоставления с точки зрения уровня напряженного состояния, при этом важным моментом является максимально возможное обеспечение идентичности расчетных схем.

Твердотельная модель левой берцовой кости правильной геометрии показана на рис. 1. Рис. 2 иллюстрирует ее разбиение на конечные элементы, число которых порядка 85 тысяч. Для исключения жесткого смещения модели от действия внешней нагрузки должны быть заданы кинематические ограничения. С этой целью закреплена локальная поверхность в области голенистопа, как показано на рис. 3, слева. Так же закреплена и рассмотренная ниже модель искривленной кости. Сжимающая нагрузка вдоль оси  $x$  (см. рис. 1) приложена со стороны бедренной кости и суммарно составляет 500 Н, при этом предполагается, что на каждое из двух углублений в коленном суставе, выделенных на рис. 3, справа, приходится ровно 1/2 нагрузки, а их поверхности нагружены равномерно. Подробное распределение нагрузки по поверхностям соприкосновения бедренной и берцовой костей требует решения контактной задачи об их взаимодействии, что существенно увеличивает вычислительные затраты. В то же время известно, что на удалении от места действия нагрузки напряженное состояние практически не зависит от детального характера ее приложения, значение имеет только суммарная величина нагрузки. Это служит обоснованием представленного упрощенного способа нагружения модели, тем более что для целей сопоставления напряженного состояния исследуемых объектов имеет смысл обеспечить по возможности идентичные условия нагружения.

Для характеристик материала кости приняты следующие значения: модуль упругости  $E = 500$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,36$  (I. Heegard, Leuvgaz, A. Curnier и др., 1995). Решение системы линейных алгебраических уравнений для отыскания узловых неизвестных осуществляется модифицированным методом сопряженных градиентов.

Результаты расчета в виде полей интенсивности напряжений приведены на рис. 4, 5. Как следует из рисунков, наиболее нагруженный участок кости расположен в области лодыжки, при этом максимальная интенсивность напряжений составляет почти 12 МПа. Для оценки точности полученного решения выполнен расчет этой же модели с более мелким разбиением на конечные элементы, число которых составило порядка 135 тысяч, а отличие максимальных значений интенсивности напряжений для двух вариантов расчетной схе-

мы не превысило 4,5 %. Это позволяет считать первоначальное разбиение на элементы достаточным для получения достоверных результатов. Поэтому подобная густота разбиения с общим числом конечных элементов порядка 85 тысяч применена и для следующей модели.

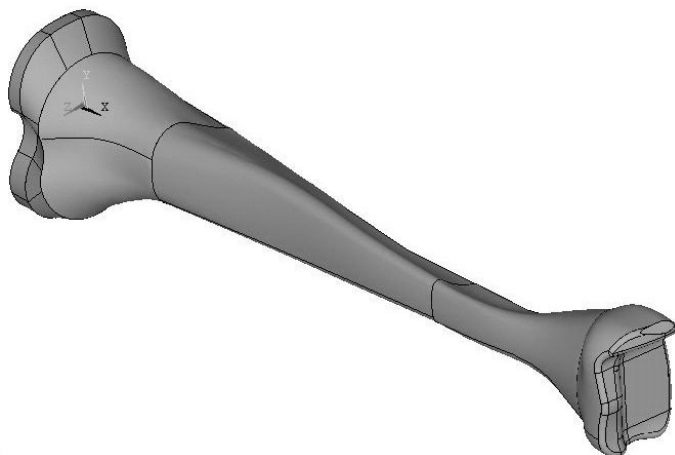


Рисунок 1

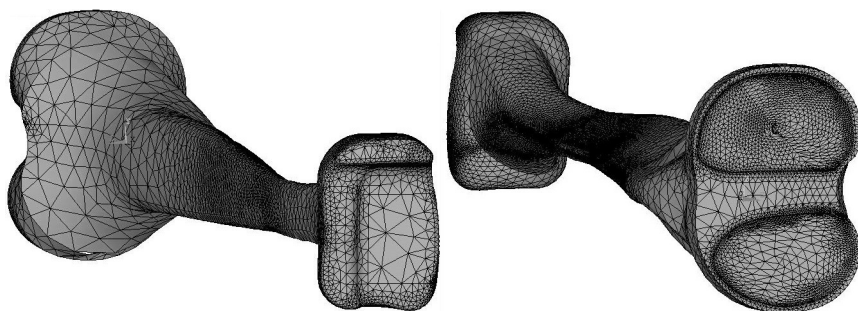


Рисунок 2

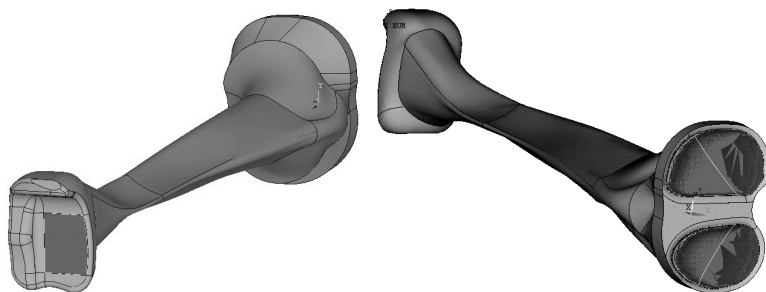


Рисунок 3



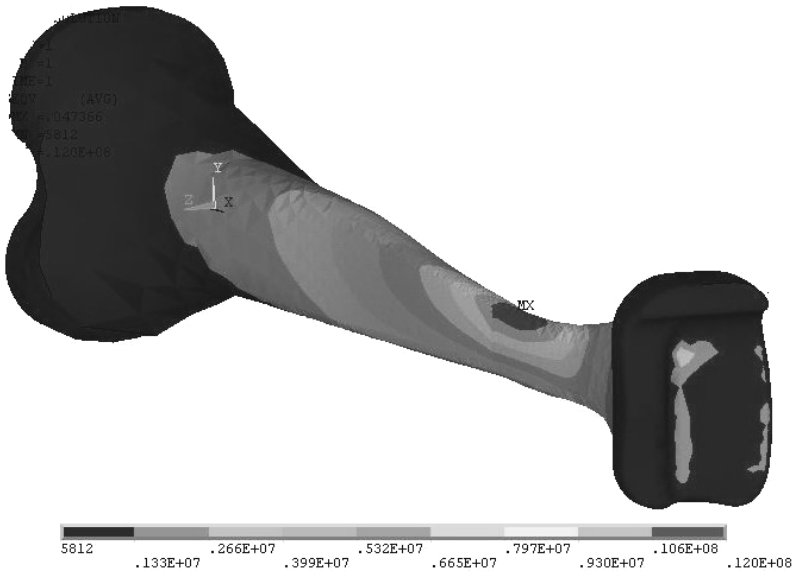


Рисунок 4

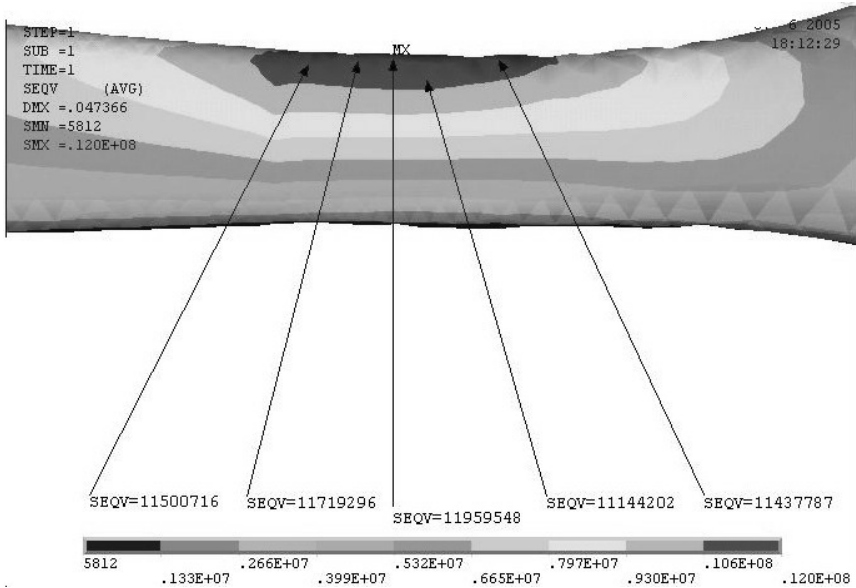


Рисунок 5

На рис. 6 показана модель искривленной кости с патологией типа вальгус, когда отклонение от механической оси достигает  $22^{\circ}$ , что значительно превышает допустимые пределы. Вследствие несоосности с бедром такая

кость нагружена неравномерно. Для расчета выбран самый неблагоприятный вариант, когда вся нагрузка приходится на одно углубление – с наружной стороны голени. Результаты расчета приведены на рис. 7, 8. Интенсивность напряжений в наиболее опасной зоне достигает величины 93,9 МПа, то есть кость испытывает в 7,8 раз большее напряжение по сравнению со здоровой.

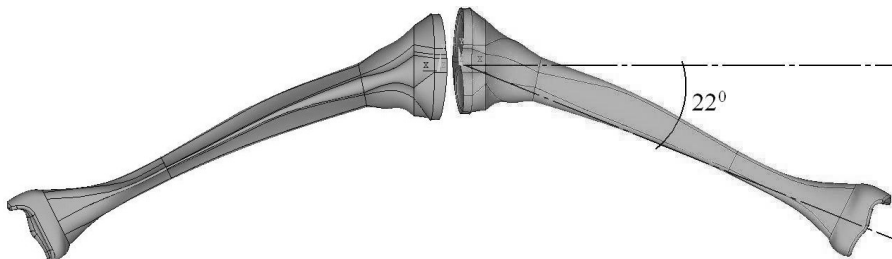


Рисунок 6

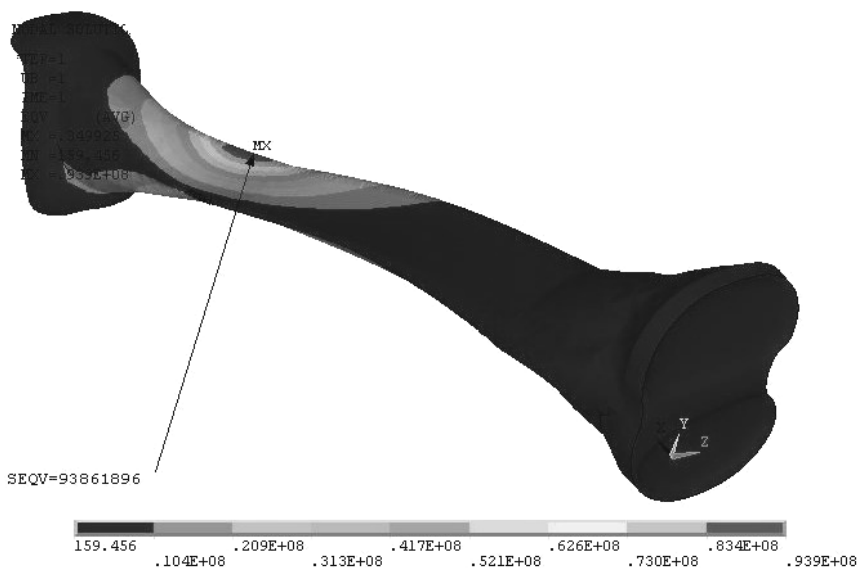


Рисунок 7

Таким образом, результаты проведенных расчетов позволяют сделать вывод о значительном возрастании уровня напряженного состояния искривленной большой берцовой кости по сравнению с недеформированной. Это может служить теоретическим обоснованием наблюдаемого в медицинской практике крайне неблагоприятного влияния фронтальной деформации и дополнительным аргументом в пользу ее оперативного исправления. Следующим этапом работы является исследование напряженного состояния оперированной кости с целью сопоставления последствий хирургической коррекции, выполненной различными способами.

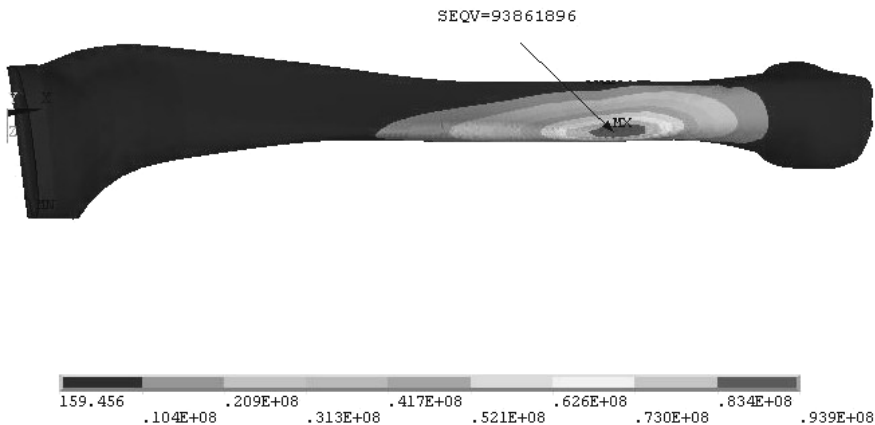


Рисунок 8

**Список литературы:** 1. *Freemann M.* Arthritis of the knee. – Berlin: Springer-Verlag, 1980. – P. 149-182. 2. *Maquet P.J.* Biomechanics of the knee. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 306 p. 3. *Пустовойт Б.А., Михайлов С.Р.* Биомеханическое обоснование фронтальной остеотомии костей голени при диспластической патологии // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2000. – №3. – С.20-25.

*Поступила в редколлегию 22.09.2006.*

УДК 681.3 (09)

**Д.В.БРЕСЛАВСКИЙ**, докт.техн.наук; **С.А.ГОРЕЛОВА**;  
**А.А.ЛАРИН**, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ХАРЬКОВСКОЙ ШКОЛЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Стаття присвячено історії зародження теорії автоматичного управління від перших робіт Максвелла, Вишнеградського та Стодоли. Розглянуто внесок харківських інженерів та вчених у її розвиток в системах регулювання в енергетиці та космічній техніці.

The paper is devoted to the genesis of Control Theory from first papers of Maxwell, Vyshnegradsky and Stodola. The contribution of Kharkiv engineers and scientists and the development of this Theory in control systems in power engineering and spacecraft technique are suggested.

Первые промышленные конструкции с характерными для систем автоматического регулирования признаками стали появляться на рубеже XVIII-XIX вв. В качестве примеров можно привести регулятор уровня воды парового котла И.И.Ползунова, устройство регулирования потока зерна на мельницах.

Однако началом систематического развития теории автоматического

управления принято считать конец XVIII века, когда практика использования паровых машин поставила задачу регулирования их хода. Именно в этот период Джеймс Уатт, используя центробежный регулятор, создает замкнутую систему регулирования, получившую широкое распространение. Центробежный регулятор Уатта послужил толчком к развитию теории автоматических систем. Был сформирован ряд принципов автоматических систем: регулирование по отклонению (принцип Ползунова-Уатта), регулирование по нагрузке (принцип Понселе). Характерным для этого периода был взгляд на регулятор, как на тахометр. Тихоходные и маломощные двигатели, большие маховики и легкие регуляторы делали актуальной только задачу получения равномерной скорости вращения машины при переменных внешних воздействиях. Первое систематическое изложение вопроса о маховых колесах и теории центробежных регуляторов дал Ж.В.Понселе, при этом работа регулятора рассматривалась только в статической постановке.

Развитие техники в XIX веке привело к увеличению мощности и скорости машин. При этом уменьшились размеры маховика и возросли требования к точности регулирования хода машин. Улучшение технологии изготовления регуляторов привело к уменьшению трения, и как следствие, к потере устойчивости. В результате на передний план выдвигается проблема устойчивости движения.

Дж. К. Максвелл в 1868 году впервые рассмотрел условия работы астаических (изохронных) регуляторов с учетом нелинейных факторов и указал, что проблема устойчивости равномерного вращения машины, снабженной регулятором, может решаться методами теории малых колебаний. Он получил условия устойчивости из анализа линеаризованных уравнений и поставил перед математиками проблему определения устойчивости линейных систем произвольной размерности.

Поскольку регулятор Уатта лишь приближенно может считаться изохронным, то П.Л.Чебышев впервые ставит вопрос о подборе параметров регулятора так, чтобы он соответствовал приближенно-изохронному и дает решение задачи соответствия каждой угловой скорости лишь для одного положения муфты [1, с. 197]. Появилось множество и других теоретических разработок, однако все они не удовлетворяли запросам практики, и стало ясно, что требуется иной подход к проблеме, а именно анализ динамического взаимодействия в системе объект-регулятор (машина-регулятор).

Этот шаг сделал видный русский ученый Иван Алексеевич Вышнеградский. Он рассматривал машину вместе с регулятором с учетом их взаимодействия как механическую систему с двумя степенями свободы и впервые применил динамический метод для исследования [2, с. 137]. В своих расчетах Вышнеградский пренебрегал силами трения, рекомендует при этом их уменьшать, улучшая качество обработки деталей. В результате Вышнеградский пришел к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка. Для устойчивости работы регулятора он предлагал применять катаракт (демпфер). Им впервые было введено понятие областей устойчивости в пространстве параметров регулятора.

Однако вопросы устойчивости, несмотря на то, что ими занимались мно-

гие видные ученые, не получили сколько-нибудь общего и строгого решения.

Уделяя большое внимание техническому образованию в России, И.А.Вышнеградский активно участвует в создании Харьковского технологического института (ХТИ) (1885 г.), директором которого становится ученик Вышнеградского Виктор Львович Кирпичев [3, с.12].

В это же время в звании приват-доцента кафедры механики в Харьковском университете был утвержден ученик Чебышева Александр Михайлович Ляпунов, который с 1887 г. работает и в ХТИ. В этот период А.М.Ляпунов приступает к разработке новой области науки – теории устойчивости движения, и уже в 1888 г. им была опубликована первая статья по этому вопросу. В этом направлении он провел глубокое и до сих пор непревзойденное исследование, дал определение устойчивости движения, удобное для решения практических задач и проведения теоретических исследований. Для исследования устойчивости нелинейных систем А.М. Ляпунов разработал два метода. Первый связан с интегрированием исходной системы с помощью специальных рядов по степеням начальных значений, а второй связан с использованием вспомогательных функций. Второй метод Ляпунова получил большое развитие в современной математике и механике, особенно в теоретической и технической кибернетике, теории автоматического регулирования.

С 1904 года начинает преподавательскую деятельность в ХТИ ученик Жуковского, в последствии академик и крупнейший ученый-гидродинамик, сыгравший большую роль в развитии научного потенциала в Харькове, Георгий Федорович Проскура. Он впервые разработал и издал в 1911 году курс теории автоматического регулирования.

В 1921 г. по инициативе проф. П.П. Копняева был открыт электротехнический факультет, который в 1929 г. был преобразован в Харьковский электротехнический институт (ХЭТИ). В 1934/35 на электромашиностроительном факультете была организована кафедра электрификации промышленности, которую возглавил проф. Т.П.Губенко. Исследования, проводимые на этой кафедре, были тесно связаны с задачами автоматизации, выдвигаемыми активно развивающейся промышленностью, и выполнялись в тесном контакте с такими предприятиями, как ХЭМЗ и др. Выполнение этих работ сопровождалось активным использованием идей и результатов научной деятельности Вышнеградского, Ляпунова и других ученых, стоявших у истоков теории автоматического управления.

Великая Отечественная война прервала деятельность ХЭТИ, которая начала возобновляться только в 1943 г. В послевоенные годы в ХЭТИ наряду с восстановлением материальной базы восстанавливался и научный потенциал. В эти годы, особенно концу 50-х г., активизируются работы по автоматическому управлению электроприводами на кафедре «Электрификация промышленных предприятий» (ЭПП) электромашиностроительного факультета ХПИ (после объединения институтов в 1949-1950 г.), которой руководил доц. В.А.Клемин-Шаронов. Активизация была обусловлена запросами бурно развивающейся энергетики, молодой, но быстро растущей, ракетно-космической отрасли и т. п.

Возникшие проблемы были связаны с большими габаритами обрабатываемых деталей и очень высокой точностью их обработки. Очевидно, силами одной или нескольких кафедр решить все эти проблемы было невозможно, поэтому в 1960 г. было принято решение о создании в Харькове, крупнейшем промышленном центре, Харьковского филиала института автоматике при Госплане УССР. Директором филиала и его заместителем по научной работе были назначены доценты кафедры ЭПП В.Г. Гулякин и А.И. Тупицын, организаторские способности которых позволили в кратчайшие сроки организовать работу филиала. Научные отделы филиала возглавили талантливые инженеры и ученые. Среди них лауреат Сталинской премии Шабанов В.А., к.т.н. Суярко С.В., к.т.н. Макеев Б.А. и др.

Основной контингент института составили выпускники 1960 г. электромашиностроительного и радиотехнического факультетов ХПИ. За короткое время вчерашние студенты стали профессионалами высокого уровня, многие из которых впоследствии стали кандидатами и докторами наук.

В институте были выполнены работы по автоматизации управления, в том числе и создание системы числового программного управления (ЧПУ), для ряда уникальных объектов: продольно-фрезерного станка для обработки лопастей гидротурбин, тяжелого токарного станка для обработки валов паровых турбин, тяжелого токарного станка для обработки корпусов тяжелых ракет с позиционированием угла поворота вала с точностью в 7", токарно-карусельного станка для обработки корпусов ракет диаметром 4 м и высотой до 15 м с точностью позиционирования – 0,02 мм.

Институт сотрудничал с такими машиностроительными гигантами, как ХТГЗ им. Кирова (Харьков), Краматорский завод тяжелых станков (КЗТС), Новокраматорский машиностроительный завод (НКМЗ), Ростсельмаш (Ростов на Дону), Завод тяжелых станков (ЗТС, Коломна), Азовское Производственное Объединение «Кузнечно-прессовое оборудование» (АзПО КПО, Азов) и многими др.

Уже через 3 года после организации института, по инициативе к.т.н. Макеева Б. А., в нем развернулись работы по созданию автоматизированных систем управления производством (АСУП). Это направление возглавил к.т.н. Гамзатов Х.Г. Вскоре институт был переведен в Минстанкопром СССР, получил статус всесоюзного и переименован в Научно-исследовательский институт автоматизации и управления производством (НИИАП).

Начало 60-х годов в СССР характеризуется мощным развитием аэрокосмической и энергетической отраслей. Для объектов этих отраслей характерны требования высокого быстродействия, точности и надежности, сами же объекты – весьма сложные комплексы. Осуществлять анализ и синтез систем управления такими объектами методами классической теории автоматического управления было очень трудно, а чаще всего – невозможно. Насущно требовалось развитие современной теории управления, базирующейся на методах пространства состояний с использованием мощной вычислительной техники, но еще более важной была задача подготовки специалистов такого профиля.

В это время в Харькове создается мощная и перспективная организация КБ «Электроприборостроения», ныне НПО «Хартрон», которой поручается

создание современных систем управления ракет – носителей, а позже и космических объектов. На протяжении более четверти века эту организацию возглавлял известный ученый, доктор технических наук, академик АН УССР, Лауреат Ленинской и Государственной премий, дважды Герой Социалистического Труда Владимир Григорьевич Сергеев. При наличии в Харькове такой современной организации с большим научным и техническим потенциалом, крупнейший технический вуз Украины ХПИ не мог остаться в стороне, не приняв участие в подготовке специалистов для аэрокосмической отрасли.

На основе тесного взаимодействия КБ «Электроприборостроения» и ХПИ в 1964 году на инженерно-физическом факультете открывается специальность «Динамика полета и управление движением ракет и космических аппаратов». Для обеспечения учебного процесса по этой специальности 1 февраля 1964 года открывается кафедра «Автоматическое управление движением» (АУД), которой поручается подготовка инженеров-механиков-исследователей по указанной специальности. Заведующим кафедрой становится д.т.н. профессор Дабагян Арег Вагаршакович. Тогда же в 1964 г. между КБ «Электроприборостроения» и ХПИ заключается договор о целевой подготовке институтом для КБ специалистов инженеров-механиков-исследователей по специальности «Динамика полета и управление».

При создании новой специальности ее организаторы опирались на опыт подготовки инженеров – исследователей, выпускавшихся на инженерно-физическом факультете кафедрами динамики и прочности машин (на которой и работала научная группа проф. Дабагыана А.В.) и физики металлов. Формируется оригинальный учебный план специальности, изюминкой которого являлось наличие мощной математической подготовки классического уровня и специальных разделов математики, в целом на уровне математического факультета университета, а также дисциплин современной теории управления.

В 1971 году на кафедре АУД открывается новая специальность «Автоматизированные системы управления производством» (АСУП). В связи с тем, что различия в программах подготовки по двум специальностям с течением времени становились все более существенными, руководством института и инженерно-физического факультета было принято решение о передаче подготовки инженеров специальности 0536 «Динамика полета и управление» на кафедру прикладной математики. В эти годы ее возглавлял декан инженерно-физического факультета д.т.н., проф. Голоскоков Евгений Григорьевич.

Кафедра, на которой проходила подготовка по специальности АСУП, в 1978 г. переименовывается в кафедру АСУ. Ее возглавляет профессор Дабагян А.В., а преподавательский состав в основном составляют выпускники специальности «Динамика полета и управление».

В начале 90-х годов в НПО «Хартрон», кроме космической тематики, решаются задачи создания систем управления «длинными» газо-, нефте- и продуктопроводами, создания систем управления энергоблоками АЭС, систем медицинской диагностики. К этим работам привлекаются специалисты - выпускники специальности «Динамика полета и управление». Тогда же, после 4-го курса, группы

начинают делиться на две подгруппы - «специализации», выпускники которых могли бы создавать системы управления ракет и космических аппаратов и систем управления энергоблоков АЭС и других объектов.

В 1992 году в результате соглашения между НПО «Хартрон» и ХПИ в связи с возросшим количеством различного рода объектов управления, для которых разрабатываются системы управления, на кафедре на базе специальности «Динамика полета и управление» создается специальность «Прикладная математика» с более широким спектром решаемых задач для управления различными техническими системами.

Начиная с выпуска 1968 г. (группа, которая была набрана на 3-й курс в 1964 г.), специальность «Динамика полета и управление» на сегодняшний день окончили более 820 инженеров – исследователей. Более 130 выпускников стали учеными – кандидатами и докторами наук, которые работают в различных отраслях народного хозяйства Украины, в том числе и в НТУ «ХПИ» (доктора технических наук, профессора – Годлевский М.Д., Куценко А.С., Александров Е.Е., доктор экономических наук, профессор Заруба В.Я.).



Рисунок 1 – Система «Энергия-Буран»



Рисунок 2 – Ракета-носитель «Зенит»

Большая часть выпускников трудится в НПО «Хартрон» (ранее КБ «Электроприборостроения»). Они составляют основной интеллектуальный потенциал предприятия. Многие из них принимали непосредственное участие в создании систем управления ракет – носителей и космических аппаратов для более, чем 800 объектов: к.т.н. Калногуз А.Н. – первый заместитель генерального директора, Макаренко А.Я. – с.н.с., Чигирев А.Г. - директор по финансам, к.т.н. Кузнецов Ю.А. – начальник сектора, Галкин Е.В. – ныне директор



по кадрам фирмы «Вестрон», Московченко В. П. – начальник сектора, и многие другие. Выпускниками кафедры разработаны и созданы системы управления такими космическими объектами, как ракетоноситель системы «Энергия-Буран», 1-й грузовой модуль «Заря» Международной научной станции «Альфа», всех пяти грузовых модулей «Квант», «Квант-2», «Спектр», «Природа» и «Кристалл» орбитального комплекса «Мир», осуществивших стыковку в автоматическом режиме и др. [4].

Приведенные факты свидетельствуют – Харьков, с самого зарождения современной теории управления, играет первостепенную роль в ее формировании, развитии и практическом воплощении. За этими фактами стоят судьбы многих замечательных людей, их идей и воплощений, о которых, к сожалению, мало что известно, а многое несправедливо забыто. Существование науки, как и общества, невозможно без знания истории их развития и это диктует необходимость тщательного изучения и исследования всего, что связано с приведенными фактами и того, что может возникнуть в результате этих исследований.

**Список литературы:** 1. История механики в России. – Киев: Наукова думка, 1987. – 392 с. 2. Геронимус Я.Л. Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: Гостехиздат, 1952. – 519 с. 3. Харьковский Политехнический институт 1885 – 1985. История развития. – Харьков, издательство при ХГУ Изд. объединения «Вища школа», 1985. 4. Научно-производственное предприятие Харптон-Аркос. Хроника дат и событий. 1958-2002 гг. – Харьков, 2002.

*Поступила в редколлегию 21.11.2006*

УДК 539.3

**Ю.С.БУХОЛДИН**, канд.техн.наук; **В.А.ЛЕВАШОВ**, канд.техн.наук;  
ОАО «Сумское НПО им Фрунзе»;  
**Г.И.ЛЬВОВ**, докт.техн.наук; **О.А.КОСТРОМИЦКАЯ**; НТУ «ХПИ»

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА НА ХАРАКТЕР ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАБОЧИХ КОЛЕС ЦЕНТРОБЕЖНЫХ КОМПРЕССОРОВ**

В роботі досліджується вплив величини границі текучості по напруженням на характер пружно-пластичного деформування і пружного розвантаження робочого колеса, що знаходиться під дією інерційного навантаження. За допомогою багатьох варіантів розрахунків методом скінчених елементів показано, що є, так би мовити, критичне значення границі текучості по напруженням. Матеріали, що мають границю текучості нижче цього критичного значення не рекомендується використовувати для виробництва робочих коліс відцентрових компресорів, бо це призведе до перерозподілу картини деформування, появи великих згинаючих моментів і переміщень, які після розвантаження колеса не зникають.

The influence of a yield stress value on character of elastoplastic deformation and elastic unloading of the working wheel under inertial loading is investigated. The realization of the large number of calcula-

tion variants by a of finite-element method shows, that there is a so-called critical value of a yield stress. It is not recommended to use materials having a yield stress lower of this critical value, for making of working wheels of centrifugal compressors, as it will result in redistribution of a deforming picture, appearance of the large bending moments and displacements, which after unloading do not disappear.

В работе исследуется влияние величины предела текучести на характер упругопластического деформирования и упругой разгрузки рабочего колеса при разгонных испытаниях и на рабочих оборотах вращения.

Варианты значений инерционной нагрузки и возможные варианты механических характеристик заданы исходя из реальных условий эксплуатации рабочих колес центробежных компрессоров и экспериментальных данных об отклонениях пределов прочности материалов.

Кроме того, в работе исследуется влияние посадки колеса на вал с точки зрения возникновения остаточных перемещений, приводящих к недопустимому для дальнейшей эксплуатации формоизменению рабочего колеса. Для этого решается контактная задача взаимодействия вала и основного диска рабочего колеса.

Весь процесс исследования условий, при которых возникают большие остаточные перемещения рабочих колес центробежного компрессора, сводится к решению трех задач:

- контактной задачи посадки колеса на вал;
- упругопластического деформирования рабочего колеса от действия инерционной нагрузки;
- упругой разгрузки колеса.

Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния рабочих колес, изготовленных из стали, величины пределов текучести и прочности которой варьируются в реальных интервалах. Показано, что существует некоторая критическая для данной конструкции величина предела текучести по напряжениям при фиксированном пределе прочности. Если предел текучести материала ниже указанного критического, при упругопластическом деформировании колеса возникают достаточно большие перемещения, почти на порядок больше перемещений колеса той же геометрии, но предел текучести материала которого выше критического. При разгрузке возникают большие остаточные перемещения.

Задача упругопластического деформирования рабочего колеса центробежного компрессора решается с применением деформационной теории пластичности. Пластические деформации могут быть определены по методу дополнительных деформаций, согласно которому задача деформационной теории пластичности приводится к задаче упругости с дополнительными деформациями [1].

Под дополнительными деформациями понимаем разность

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^0 \quad (1)$$

между действительными упругопластическими деформациями  $\varepsilon_{ij}$  и деформациями  $\varepsilon_{ij}^e$  упругого расчетного тела при одинаковых (действительных) напряжениях. При параметрах упругости, совпадающих с упругими характе-

ристикami действительного тела, дополнительные деформации  $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^p$  и определяются по формуле [1]:

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(1 - \frac{E_c}{E}\right) (\varepsilon_{ij} - \delta\varepsilon).$$

Решение задачи упругости при заданных внешних нагрузках и дополнительных деформациях совпадает с решением задачи деформационной теории пластичности.

Здесь приняты следующие обозначения.  $E_c$  – секущий модуль. Он вводится по аналогии с законом Гука:  $E_c = \sigma_i / \varepsilon_i$ . В отличие от модуля упругости  $E$ , зависящего для данного материала только от температуры, секущий модуль  $E_c$  зависит как от температуры, так и от достигнутой деформации. Через  $\varepsilon$  обозначена средняя деформация:

В процессе вращения с большой угловой скоростью в рабочем колесе предполагаются пластические деформации. Когда колесо останавливается, т.е. разгружается, угловая скорость становится равной нулю. Вследствие того, что процесс упругопластического деформирования при вращении колеса и упругая разгрузка происходят по различным физическим законам, в колесе могут иметь место остаточные напряжения.

Остаточные напряжения, деформации и перемещения определяются на основании теоремы А.А. Ильющина о разгрузке [2]. В соответствии с этой теоремой для определения остаточных напряжений, деформаций и перемещений необходимо решить задачу упругопластического деформирования для тела, нагруженного заданной системой внешних сил. Затем решить упругую задачу для этого тела, нагруженного той же системой внешних сил и силами, которые определяются из задачи упругопластического деформирования. Это состояние является фиктивным, так как мы предполагаем, что материал тела деформируется упруго при сколь угодно больших напряжениях.

В результате полной разгрузки тела в нем остаются напряжения, деформации и перемещения, равные разностям их значений в упругопластическом и фиктивном (упругом) состоянии. При этом предполагается, что остающиеся напряжения в результате разгрузки не выходят за предел текучести.

Установлено, что существует некоторая критическая для данной конструкции величина предела текучести при фиксированном пределе прочности. Если предел текучести материала ниже указанного критического, при упругопластическом деформировании колеса возникают достаточно большие перемещения, почти на порядок больше перемещений в колесе той же геометрии, но предел текучести материала которого выше критического. При разгрузке после этого возникают большие остаточные перемещения.

Для выяснения причины разного характера деформирования рабочего колеса для сталей с разными пределами текучести проведен ряд расчетов напряженно-деформированного состояния колеса при частоте вращения 1418,23 рад/с. На рис 1, 2 видно, что для предела текучести, начиная от 500 МПа и ниже, резко возрастают перемещения как ступицы покрывного диска (рис. 1), так и в целом рабочего колеса (рис. 2). Это происходит оттого, что характер

деформирования для материалов, у которых предел текучести менее 500 МПа, определяется изгибающими моментами вследствие немонотонного их возрастания. Это видно на рис. 3, здесь для предела текучести 375 МПа максимальные радиальные перемещения приходятся на ступицу покрывного диска и создают изгибающий момент относительно центра колеса. Затем при повышении предела текучести происходит перераспределение радиальных перемещений, максимальные значения последних сдвигаются ближе к центру колеса, изгибающий момент становится меньше, величины перемещений уменьшаются (рис. 5, предел текучести 1040 МПа). На рис. 4 показаны радиальные перемещения для промежуточного значения предела текучести 450 МПа.

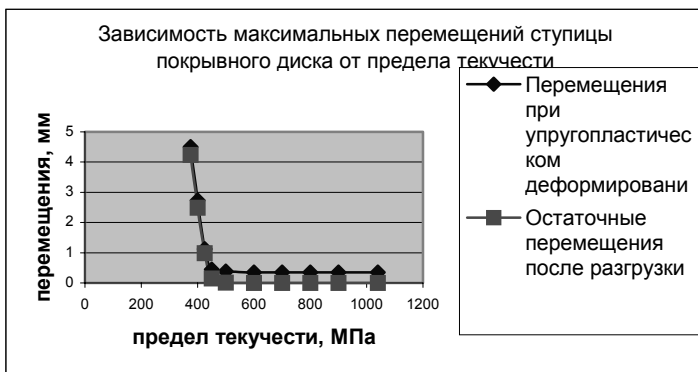


Рисунок 1 – График зависимости суммарных перемещений ступицы покрывного диска от предела текучести материала

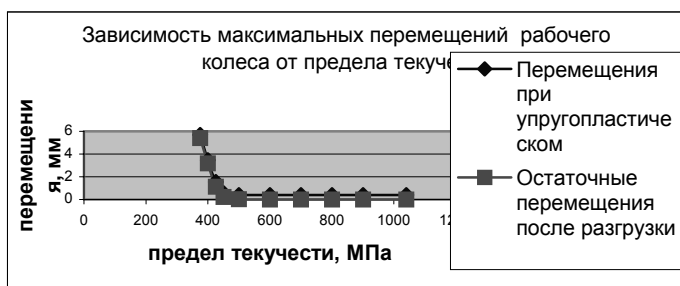


Рисунок 2 – График зависимости суммарных перемещений рабочего колеса от предела текучести материала

Благодаря большому количеству просчитанных вариантов стало возможным установить некоторые *обобщенные тенденции* поведения конструкции:

- Остаточные перемещения существенно зависят от отношения пределов текучести покрывного и основного дисков. Эта зависимость более наглядно отражена на рис. 6 и рис. 7. Видно, что перемещения более,

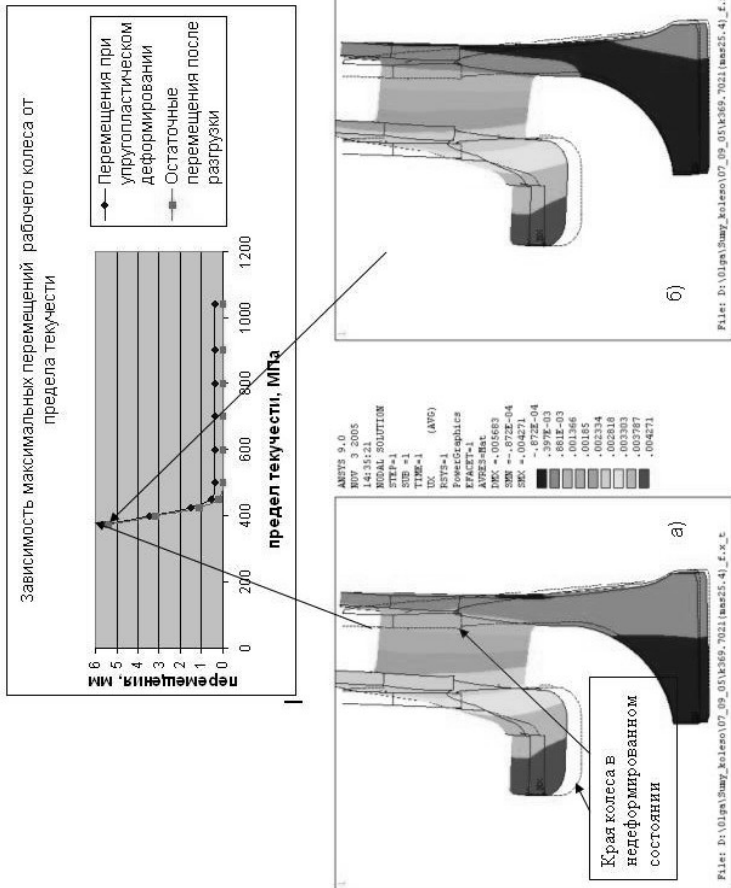


Рисунок 3 –  $\sigma_{\text{т}} = 375$  МПа. Радиальные перемещения, м.  
 а) при упругопластическом деформировании; б) после разгрузки.

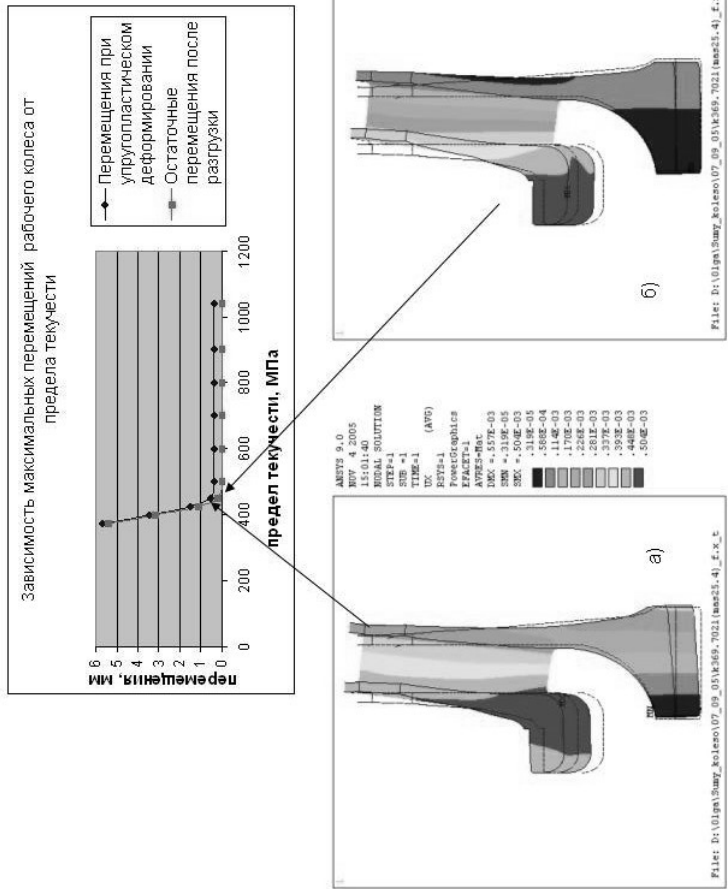


Рисунок 4 –  $\sigma_y = 450$  МПа. Радиальные перемещения, м.  
 а) при упругопластическом деформировании; б) после разгрузки

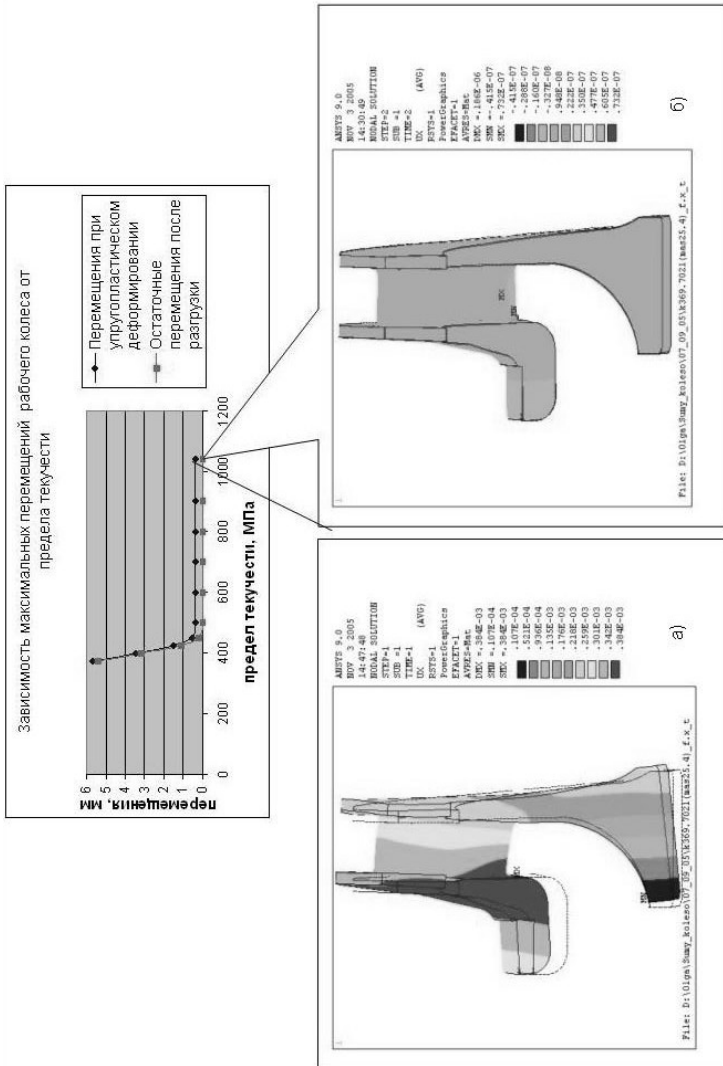


Рисунок 5 –  $\sigma_{T1} = 1040$  МПа. Радиальные перемещения, а) при упругопластическом деформировании; б) после разгрузки

чем в 10 раз отличаются в зависимости от того, упомянутое выше отношение меньше или больше единицы. Остаточные напряжения изменяются гораздо в меньшей степени, не более чем в 2,5 раза (рис. 8). Причем, как видно из рис. 8, эти напряжения уменьшаются с уменьшением пределов текучести основного и увеличением предела текучести покрывного диска.

- Следующим по степени влияния фактором является прессовая посадка на вал. Заметное ее влияние прослеживается только на остаточных перемещениях в дисках с отношениями  $\sigma_{T \text{ покр}}/\sigma_{T \text{ осн}} > 1$ . Разница в перемещениях составляет 100 микрон.

Конструкция рассчитанных колес в наименьшей степени по сравнению с остальными факторами влияет на обнаруженные качественные тенденции. Все вышеперечисленные закономерности проявляются практически одинаково.

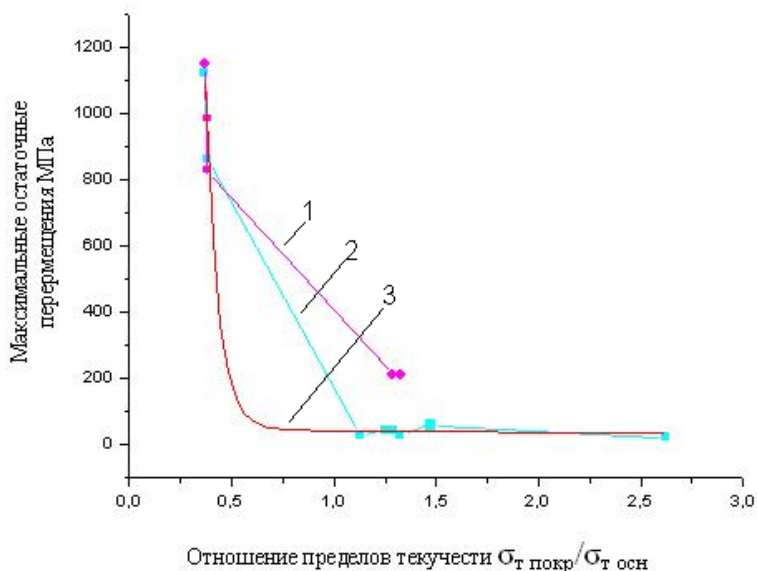


Рисунок 6 – Максимальные остаточные перемещения в зависимости от отношения пределов текучести материала

На рис. 6 представлены максимальные остаточные перемещения в зависимости от отношения пределов текучести материала покрывного и основного дисков рабочих колес при прессовой посадке на вал (кривая 1), при посадке без натяга на вал (кривая 2) и при аппроксимации остаточных перемещений экспоненциальной функцией вида [3] (кривая 3):

$$y=y_0+A_1e^{-x/t_1}+A_2e^{-x/t_2}$$

где

$$y_0 = 0; A_1 = 211306,73455; t_1 = 0,06959; A_2 = 38,54789; t_2 = -4,3061E139.$$



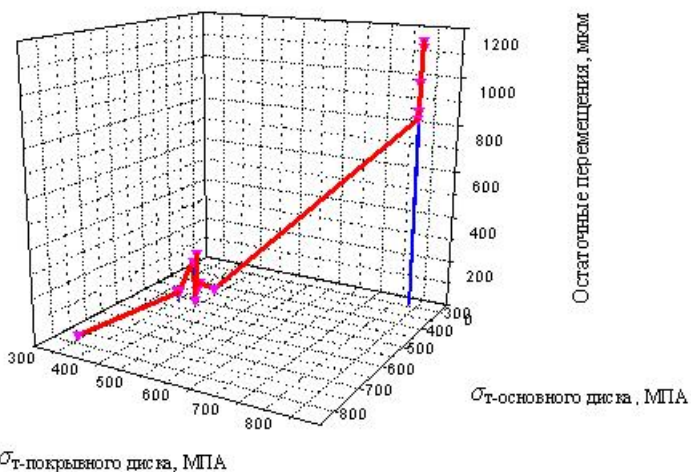


Рисунок 7 – Максимальные остаточные перемещения в зависимости от отношения пределов текучести материала

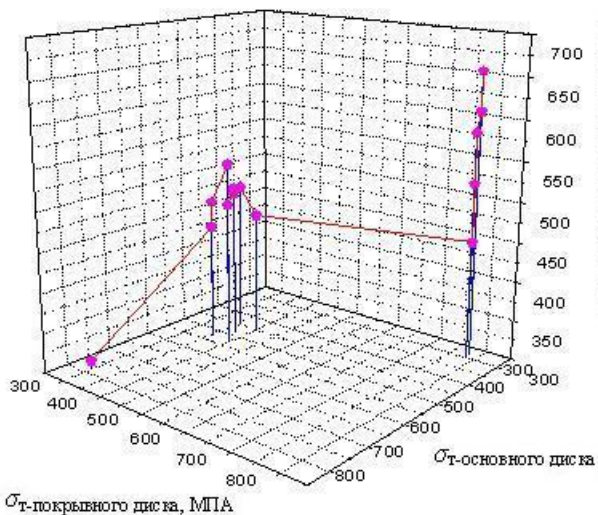


Рисунок 8 – Максимальные остаточные напряжения в рабочих колесах в зависимости от пределов текучести материала покрывного и основного дисков

## Выводы

1. Понижение пределов текучести материала колес ниже номинальных в подавляющем большинстве случаев увеличивает повреждаемость колес за счет первичных, а иногда и вторичных пластических деформаций и может привести к заметному понижению долговечности.

2. Полученные остаточные изменения диаметров в области лабиринтного уплотнения при некоторых соотношениях пределов текучести материалов совпадают с экспериментальными с точностью до 20%.
3. Установлено, что возникновение после разгонных испытаний остаточных перемещений более 10 мкм может свидетельствовать о значительном (на 50% и более) снижении пределов текучести от номинала.
4. Даже при пониженных пределах текучести материала остаточные перемещения относительно невелики, если пределы текучести материалов дисков и лопаток отличаются не более чем на 20-30%.
5. Учет степенного упрочнения в законах деформирования по сравнению с линейным упрочнением практически не влияет на результаты упругопластических расчетов рабочих колес.
6. Следует отметить, что при снижении пределов текучести, но сохранении пределов прочности на прежнем уровне аварийное разрушение диска в условиях эксплуатации не произойдет, так как деформации геометрии наступит раньше и компрессор будет остановлен по причине повышенной вибрации. Это утверждение доказано расчетом колеса с искусственно заниженным пределом текучести до 160 МПа. Остаточные перемещения достигают при этом почти 2.8 мм после разгрузки, а напряжения при разгоне колеса даже из такого материала не превышают предела прочности.
7. Большие (400-800 мкм) остаточные перемещения и напряжения (от 400 до 650 МПа) возможны, когда предел текучести покрывного диска меньше предела текучести основного диска. И наоборот, когда предел текучести основного меньше предела текучести покрывного диска, остаточные перемещения находятся на уровне 20-80 мкм, а остаточные напряжения при этом находятся в пределах от 300 до 550 МПа.
8. Можно утверждать, что при значениях пределов текучести ниже допустимых, ресурс колеса, безусловно, будет ограничен примерно 50 - 500 пусками – остановками вследствие малоциклового усталости. Для более точной оценки поведения конструкции после повторных пусков-остановок требуются результаты испытаний образцов на малоцикловую усталость.

**Список литературы:** 1. *Биргер И.А.* Термопрочность деталей машин. – М., Машиностроение, 1975. 2. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.-Л., Гостехиздат, 1948. 3. *Писаренко Г.С., Мозжаровский Н.С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1981.

*Поступила в редколлегию 10.11.2006.*

**С.М.ВЕРЕЩАКА**, канд.техн.наук, Сумской государственной университет

## **ОДИН ВАРИАНТ УРАВНЕНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ С МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

На основі дискретно-структурної теорії тонких оболонок запропонований варіант рівнянь стійкості розрахункової моделі багат шарових тонкостінних елементів з декількох жорстких анізотропних шарів. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту дорівнюють один одному. Припускається пружне проковзування на поверхні контакту суміжних шарів. Остаточні рівняння стійкості отримані з урахуванням геометрично нелінійних деформацій та деформацій поперечного зсуву і обтиснення.

On the basis of the discrete-structural theory of thin shells the variant of the equations of stability of settlement model of multy-layer thin-walled elements with several rigid anisotropic layers is offered. It is considered, that the pressure of cross shift and pressure on border of contact are equal among themselves. It is supposed elastic slipping on a surface of contact of adjacent layers. The permitting equations of stability are received with the account of nonlinear deformations and deformations of cross shift and pressure.

В большинстве работ, посвященных исследованию устойчивости оболочек из композитов, предполагается, что между слоями выполняется условие идеального контакта [1-3]. Это предположение является одной из идеализаций расчетной модели слоистой оболочки. На практике на границах слоев, как правило, имеют место локальные участки непрочности и отслоений. В этом случае предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта может оказаться существенно нарушенным.

Расчетная модель оболочек с расслоениями, в которой наличие межслоевых дефектов учитывается путем модификации выражения для изгибной жесткости, представляется наиболее простой и предлагается в работах [4]. Очевидно, что эта модель не позволяет проанализировать множество механических явлений, которые сопутствуют процессу докритического деформирования и потере устойчивости слоистых конструкций.

Решение задачи устойчивости элементов конструкций с расслоениями с учетом локальных эффектов дано в [5, 6]. Благодаря такой постановке, проведено исследование влияния размеров и расположения межслоевых дефектов на устойчивость цилиндрических и сферических оболочек. Многослойные оболочки вращения с зазорами между слоями рассматривались в [7].

Вопрос о точности результатов расчета устойчивости оболочек с расслоениями, полученных при помощи различного рода допущений, был изучен в [8]. Отмечается, что двумерная теория в задачах устойчивости слоистых оболочек с неидеальным контактом слоев приводит к более существенным погрешностям, чем в случае оболочек неоднородной структуры без дефекта. Подробный анализ последних результатов и направлений развития теории устойчивости слоистых пластин и оболочек можно найти в обзоре [9].

В данной работе для моделирования участков ослабленного контакта на межфазных границах рассматривается один из вариантов модели контактной

задачи сопряжения жестких анизотропных слоев. Для этого варианта модели характерно выполнение статических условий контакта по поверхности сопряжения отдельных слоев. Считается, что напряжения поперечного сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. При этом допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев. Если на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями [10].

**Постановка задачи.** В соответствии с дискретно-структурной теорией математическая модель рассматриваемой здесь многослойной оболочки состоит из  $n$  тонких анизотропных слоев. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат  $\alpha^i$  ( $i = 1, 2$ ),  $z^{(k)}$ . Координата  $z^{(k)}$  направлена по общей нормали  $\vec{m}^{(k)}$  к срединной поверхности  $S^{(k)}$  и эквидистантной поверхности  $S_z^{(k)}$ ;  $k$  – номер слоя. Индекс « $z$ » при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке  $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$  эквидистантной поверхности  $S_z^{(k)}$ .

Вектор полного перемещения  $\vec{u}_z^{(k)}$  точки жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек С.П.Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)}\vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z)\vec{\psi}^{(k)}, \quad (1)$$

где  $\vec{u}^{(k)}$  – вектор перемещения точек срединной поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\vec{\gamma}^{(k)}$  – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон, перпендикулярных к недеформированной срединной поверхности  $S^{(k)}$ ;  $\varphi^{(k)}(z)$  – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [11];  $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$  – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов  $\vec{u}^{(k)}$ ,  $\vec{\gamma}^{(k)}$ ,  $\vec{\psi}^{(k)}$  записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (2)$$

Компоненты тензора конечных деформаций в точке  $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$  определяются как полу разности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$2\varepsilon_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \quad 2\varepsilon_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \quad 2\varepsilon_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1. \quad (3)$$

С учетом введенных обозначений вариационное уравнение Рейснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}) dV = 0; \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты  $z$  от единицы до  $n$ . При этом  $F^{(k)}$  – удельная дополнительная работа деформации;  $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$  – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

Если по сопряженным лицевым поверхностям слоя выполняются усло-

вия идеального контакта:

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}, \quad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \quad (5)$$

вариацию элементарной работы внешних сил  $\delta A_R$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta A_R = & \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iint_{S^{(k)}} (\bar{X}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \epsilon_{33}^{(k)z}) dS + \\ & + \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{u}^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\psi}^{(k)}) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + \bar{G}_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + (\bar{u}^{(k)} - \bar{u}_S^{(k)}) \delta \bar{\Phi}_{(k)} + \\ & + (\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_S^{(k)}) \delta \bar{G}_{(k)} + (\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_S^{(k)}) \delta \bar{L}_{(k)}) dl. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $S^{(k)}$  – срединная поверхность слоя;  $l_1^{(k)}$ ,  $l_2^{(k)}$  – части контура  $l^{(k)}$ ;  $\bar{X}_{(k)}$ ,  $\bar{M}_{(k)}$ ,  $\bar{B}_{(k)}$  – векторы внешних усилий, моментов и дополнительных моментов соответственно.

Элементарная работа (6) также включает векторы усилия  $\bar{\Phi}_{(k)}^S$ , момента  $\bar{G}_{(k)}^S$ , дополнительного момента  $\bar{L}_{(k)}^S$ , которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на  $l_1^{(k)}$ . Векторы усилия  $\bar{\Phi}_{(k)}$ , момента  $\bar{G}_{(k)}$ , дополнительного момента  $\bar{L}_{(k)}$ , имеют место в точках контура  $l_2^{(k)}$  при наличии заданного вектора перемещений точек контура  $\bar{u}_S^{(k)}$ .

Второе слагаемое уравнения (4) следует представить в виде

$$\delta \Pi_R = \sum_{k=1}^n (\delta \Pi_{1R}^{(k)} + \delta \Pi_{2R}^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}) \delta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{1R}^{(k)} &= \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} \delta \epsilon_{ij}^{(k)\neq} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta \epsilon_{i3}^{(k)\neq} + \sigma_{(k)}^{33} \delta \epsilon_{33}^{(k)\neq}) dV, \\ \delta \Pi_{2R}^{(k)} &= - \iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = - \iiint_{V^{(k)}} \{ (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{ij} - \epsilon_{ij}^{(k)\neq}) \delta \sigma_{(k)}^{ij} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{i3} - 2\epsilon_{i3}^{(k)\neq}) \times \\ & \times \delta \sigma_{(k)}^{i3} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{33} - \epsilon_{33}^{(k)\neq}) \delta \sigma_{(k)}^{33} \} dV; \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Подставив геометрические соотношения (1) – (3) в (4), на основе вариационного принципа Рейснера несложно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий. Переход к физическим компонентам, используемых в данной работе тензоров, вывод уравнений равновесия и граничных условий можно найти в работе [10].

Линеаризованные уравнения устойчивости. Для вывода линеаризованных уравнений устойчивости многослойных оболочек вращения используют-

ся геометрически нелинейные уравнения дискретно-структурной теории [10] и статический критерий Эйлера, то есть допускаются смежные формы равновесия сжатого элемента конструкции, близкие к исходной, но отличные от нее. Критическая нагрузка определяется как наименьшая из нагрузок, при достижении которых наряду с исходной формой равновесия возможны смежные формы равновесия.

Пусть существование смежной равновесной конфигурации при действии внешней нагрузки определяется выражениями

$$\begin{aligned} & u_i^{(k)0} + u_i^{(k)}, \quad w^{(k)0} + w^{(k)}, \quad \gamma_i^{(k)0} + \gamma_i^{(k)}, \quad \psi_i^{(k)0} + \psi_i^{(k)}, \\ & \gamma^{(k)0} + \gamma^{(k)}, \quad T_{ii}^{(k)0} + T_{ii}^{(k)}, \quad T_{12}^{(k)0} + T_{12}^{(k)}, \quad R_{i3}^{(k)0} + R_{i3}^{(k)}, \quad M_{ii}^{(k)0} + M_{ii}^{(k)}, \\ & M_{12}^{(k)0} + M_{12}^{(k)}, \quad L_{ii}^{(k)0} + L_{ii}^{(k)}, \quad L_{12}^{(k)0} + L_{12}^{(k)}, \quad Q_i^{(k)0} + Q_i^{(k)}, \quad Q_3^{(k)0} + Q_3^{(k)}; \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь компоненты исходного докритического напряженно-деформированного состояния отмечены нулем на месте верхнего индекса, дополнительные компоненты перемещений и усилий возмущенного состояния указаны без индекса.

Подставляя (8) в уравнения равновесия работы [10] и вычитая из полученных соотношений уравнения равновесия исходного состояния, линеаризованные уравнения устойчивости  $k$ -го слоя многослойной оболочки, в которых позволяют учитывать деформации поперечного сдвига и обжатия, принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(B^{(k)}T_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}T_{12}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + T_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - T_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \\ & + A^{(k)}B^{(k)}k_1^{(k)}R_{13}^{(k)} = 0; \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\ & \frac{\partial(B^{(k)}R_{13}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}R_{23}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}(k_1^{(k)}T_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)}) = 0; \\ & \frac{\partial(B^{(k)}M_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}M_{12}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} - \\ & - A^{(k)}B^{(k)}(R_{13}^{(k)} - T_{11}^{(k)0}\omega_1^{(k)} - T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)} - T_{11}^{(k)}\omega_1^{(k)0} - T_{12}^{(k)}\omega_2^{(k)0}) = 0; \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\ & \frac{\partial(B^{(k)}L_{11}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}L_{12}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial\alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial\alpha_1^{(k)}} - \\ & - A^{(k)}B^{(k)}L_{13}^{(k)} = 0; \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}). \end{aligned} \quad (9)$$

При учете обжатия  $k$ -го слоя к системе (9) добавляется восьмое уравнение

$$\frac{\partial(B^{(k)}M_{13}^{(k)})}{\partial\alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial(A^{(k)}M_{23}^{(k)})}{\partial\alpha_2^{(k)}} - A^{(k)}B^{(k)}(k_1^{(k)}M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)}L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)}) = 0. \quad (10)$$

Аналогично уравнениям (9) – (10) линеаризуются и геометрические соотношения [10]:

$$\begin{aligned} 2\epsilon_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)0}; \quad 2\chi_{ij}^{(k)} = \nabla_i\gamma_j^{(k)} + \nabla_j\gamma_i^{(k)} - \sigma_i^{(k)}\gamma_j^{(k)} - \sigma_j^{(k)}\gamma_i^{(k)}, \\ 2\epsilon_{i3}^{(k)} &= 2\epsilon_{i3}^{(k)\gamma} + \varphi^{(k)'}(z)\psi_i^{(k)}; \quad \epsilon_{33}^{(k)z} = \gamma^{(k)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (9) – (10) следует дополнить граничными условиями, которые определяются из условий закрепления границ рассматриваемой пластины или оболочки.

При выводе уравнений (9) – (10) дополнительные перемещения  $u_i^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$  считались малыми величинами, что послужило достаточным основанием не учитывать эти величины выше первой степени. Поэтому на основе полученной системы уравнений можно найти только «верхние» значения критических нагрузок. Подчеркнутые слагаемые в четвертом и пятом уравнениях (9) при допущении о безмоментном докритическом состоянии обращаются в нуль.

На основе линеаризованных уравнений устойчивости (9) – (10), геометрических соотношений (11), физических соотношений и заданных граничных условий имеет место разрешающая система из 14-ти однородных дифференциальных уравнений в частных производных для  $k$ -го слоя оболочки

$$\frac{\partial \vec{Y}^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} = F \left( \alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \vec{Y}^{(k)}, \frac{\partial \vec{Y}^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} \right); \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где

$$\vec{Y}^{(k)} = \{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \dots, Y_{14}^{(k)}\}^T = \{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, I_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \Psi_1^{(k)}, \Psi_2^{(k)}\}^T$$

– вектор решений.

Полагая, что физико-механические и геометрические характеристики оболочек вращения не изменяются в направлении координаты  $\alpha_2$ , решение разрешающих уравнений (12) задачи устойчивости можно представить в виде рядов Фурье

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{1,n}^{(k)} \cos n \alpha_2; \quad \vec{Y}_2^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{Y}_{2,n}^{(k)} \sin n \alpha_2, \quad (13)$$

где

$$\vec{Y}_1^{(k)} = \{T_{11}^{(k)}, T_{22}^{(k)}, R_{13}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{22}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{22}^{(k)}, Q_3^{(k)}, u_1^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \Psi_1^{(k)}, \varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \chi_{11}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)}, \Psi_{11}^{(k)}, \Psi_{22}^{(k)}\}^T,$$

$$\vec{Y}_2^{(k)} = \{T_{12}^{(k)}, R_{23}^{(k)}, Q_2^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, I_{13}^{(k)}, L_{23}^{(k)}, u_2^{(k)}, \Psi_2^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)}, \Psi_{12}^{(k)}\}^T. \quad (14)$$

После подстановки (13) – (14) в систему уравнений (12) получается система обыкновенных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d \vec{Y}_n^{(k)}}{A_{(k)} d \alpha_1^{(k)}} = F_n^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, n, \vec{Y}_n^{(k)}); \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Здесь

$$\vec{Y}^{(k)} = \{Y_{1,n}^{(k)}, Y_{2,n}^{(k)}, \dots, Y_{14,n}^{(k)}\}^T = \{T_{11,n}^{(k)}, T_{12,n}^{(k)}, R_{13,n}^{(k)}, M_{11,n}^{(k)}, M_{12,n}^{(k)}, L_{11,n}^{(k)}, L_{12,n}^{(k)}, u_{1,n}^{(k)}, u_{2,n}^{(k)}, w_n^{(k)}, \gamma_{1,n}^{(k)}, \gamma_{2,n}^{(k)}, \Psi_{1,n}^{(k)}, \Psi_{2,n}^{(k)}\}^T$$

– вектор решений. Такая система для  $k$ -го слоя оболочки имеет четырнадцатый порядок.

Граничные условия, которые определяют условия закрепления торцов

$k$ -го слоя оболочки можно представить в матричной форме

$$B_0^{(k)} \bar{Y}_{(k)}(\alpha_{10}^{(k)}) = 0; \quad B_n^{(k)} \bar{Y}_{(k)}(\alpha_{1n}^{(k)}) = 0, \quad (16)$$

где  $B_0^{(k)}, B_n^{(k)}$  прямоугольные матрицы размерности  $7 \times 14$ .

Устойчивый вычислительный процесс при численном решении краевой задачи (15) – (16) обеспечивает метод ортогональной прогонки С.К.Годунова. В результате интегрирования представленных уравнений имеет место система семи алгебраических уравнений относительно компонент вектора произвольных постоянных  $\bar{C}^{(k)}$ :

$$B_n^{(k)} Z(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda) \bar{C}^{(k)} = 0.$$

Здесь  $Z(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda)$  – матрица размера  $7 \times 7$ , коэффициенты которой получены в результате ортогонализации и нормирования системы векторов решения на каждом шаге численного интегрирования,  $\lambda$  – собственное значение.

Для существования нетривиального решения задачи устойчивости (15) – (16) должно выполняться условие

$$|B_n^{(k)} Z(\alpha_{1n}^{(k)}, \lambda)| = 0. \quad (17)$$

Равенство нулю определителя (17) дает величину собственного значения задачи  $\lambda$ . Величина  $\lambda$  представляет собой верхнюю критическую нагрузку и находится методом подбора, пока для двух последующих итераций  $\lambda$  определитель (17) не будет менять знак. Уточняется величина собственного значения  $\lambda$  методом хорд до выполнения условия

$$\left| \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданное число, которое определяется с требуемой точностью решения,  $i$  – шаг итерации.

Если оболочка составлена из двух и более жестких слоев, то при составлении разрешающей системы уравнений устойчивости такой слоистой системы необходимо учесть статические и кинематические условия контакта по сопряженным поверхностям каждого слоя.

Кинематические и статические условия идеального контакта отдельных слоев тонкостенных элементов по лицевым сопряженным поверхностям записываются:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \phi^{(k+1)} \left( \frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \phi^{(k-1)} \left( \frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}, \quad (i = 1, 2);$$

$$2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}; \quad (18)$$

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+}; \quad (i = 1, 2);$$

$$\sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (19)$$

Выполняя кинематические (18) и статические (19) условия контакта по



лицевым сопряженным поверхностям при помощи метода штрафных функций, нетрудно составить полную систему разрешающих уравнений (15) для решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Вследствие того, что между жесткими слоями в процессе изготовления анизотропных оболочек образуется межфазный мягкий клеевой слой (толщину этого слоя, как правило, считают равной нулю), в предлагаемом варианте модели допускается упругое проскальзывание жестких слоев друг относительно друга, то есть по лицевым сопряженным поверхностям выполняются только статические условия контакта (19).

Система уравнений (9) включает усилия  $T_{11}^{(k)0}$ ,  $T_{12}^{(k)0}$ ,  $T_{22}^{(k)0}$ , перемещения и деформации сдвига координатной поверхности  $k$ -го слоя  $u_2^{(k)0}$ ,  $w^{(k)0}$ ,  $\gamma_1^{(k)0}$ ,  $2\epsilon_{13}^{(k)0}$  которые определяют докритическое напряженно-деформированное состояние.

Проведенное сопоставление систем разрешающих уравнений равновесия и уравнений устойчивости указывает на их подобие, что позволяет построить единый вычислительный процесс определения напряжений и деформаций нелинейного моментного докритического состояния оболочек вращения и вычисления критических параметров внешней нагрузки.

**Вывод.** На основе геометрически нелинейной дискретно-структурной теории слоистых элементов конструкций дан вывод линеаризованных уравнений устойчивости анизотропных оболочек с дефектами структуры. Сопряженные жестких анизотропных слоев на межфазных границах моделируются с учетом их идеального и ослабленного контакта. Предлагается вариант модели, когда напряжения поперечного сдвига и обжатия на межфазных границах контакта равны между собой, но при этом допускается упругое проскальзывание этих слоев друг относительно друга.

**Список литературы:** 1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение. – 1973. – 172 с. 2. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. / Под ред. А.Н.Гузя. – К.: Наукова думка, 1983. – Т.2. – 464 с. 3. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с. 4. Бабич Д.В. Влияние расслоения материала на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. – 1988. – Т. 2, № 10. – С. 52-56. 5. Андреев Л.В., Железко И.П., Ободан Н.И. О бифуркации равновесия сферических оболочек с расслоениями // Проблемы прочности. – 1986. – № 2. – С. 49-53. 6. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Механика композитных материалов. – 1984. – № 2. – С. 239-255. 7. Кантор Б. Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. 8. Гузь А.Н. Механика разрушения при сжатии композитных материалов. – К.: Наукова думка, 1990. – 630 с. 9. Бабич И.Ю., Семенюк Н.П. Устойчивость и начальное закритическое поведение оболочек из композитов // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 3-38. 10. Верещак С.М. К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематичный выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 39-47. 11. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

Поступила в редколлегию 25.10.2006.

**С.В.ГЛАДКОВ**, НТУ «ХПИ»; **К.В.НАУМЕНКО**, канд.техн.наук,  
 Университет Мартина Лютера, Халле, Германия

## СВОБОДНЫЕ ВРАЩЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

У статті розглядаються вільні ротації абсолютно твердого циліндра з урахуванням в'язкого тертя. Наведено аналітичне рішення для вектору правої кутової швидкості, та числове рішення для вектору положення тіла методом Рунге-Кутта 4-5 порядку в Maple. Проведено порівняння аналітичного рішення з числовим, та зроблено висновок про їх ідентичність. Високої точності числового рішення сприяло використання вектору ротації для опису поворотів тіла, а не тензору ротації чи кутів Ейлера.

Free rotations of rigid cylinder with viscous friction were considered in the article. It was given analytical solution for vector of right angular velocity and numerical solution for position vector using Runge-Kutta 4-5<sup>th</sup> order method in Maple. Analytical and numerical solutions were compared and it was shown high accuracy of numerical methodic, which was the result of using of rotation vector rather then rotation tensor or Euler's arcs.

**Введение.** В практической инженерной деятельности нашли широкое применение так называемые коротковолокнистые композиционные материалы (длина волокон 0,1-1 мм, диаметр не превышает 1/10 длины). Для многих геометрически сложных элементов конструкций одним же из самых удобных методов их создания является литье под давлением. Однако в процессе заливки полимерной суспензии в форму под давлением поток переносит и вращает волокна, в результате чего механические свойства готового изделия станут неоднородными и анизотропными.

В связи со сложностью задачи расчета положения волокон в полученной конструкции в зависимости от метода заливки имеет практический интерес задача исследования поведения одной отдельной частицы с учетом вязкого трения и разработки эффективного алгоритма расчета ее положения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим цилиндр с высотой  $h$ , радиусом  $R$  и состоящий из материала плотностью  $\rho$ , изображенный на рисунке. Вектор  $\vec{m}_0$  задает направление оси цилиндра, а произвольные его точки в различные моменты времени описываются вектором положения  $\vec{r}(t)$ .

Выберем систему отсчета так, чтобы центр масс тела в ней покоился, и, следовательно, его количество движения обращалось бы в нуль. В качестве полюса в теле выберем центр масс  $O$ . Центральный тензор инерции тела в начальном положении определяется выражением

$$\hat{C}_0 = \lambda \vec{m}_0 \otimes \vec{m}_0 + \mu (\hat{E} - \vec{m}_0 \otimes \vec{m}_0), \quad (1)$$

где  $\hat{E}$  – единичный тензор, а коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$  задаются следующими выражениями [1]:

$$\lambda = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 h; \quad \mu = \frac{1}{12} \rho \pi (3R^4 h + R^2 h^3). \quad (2)$$

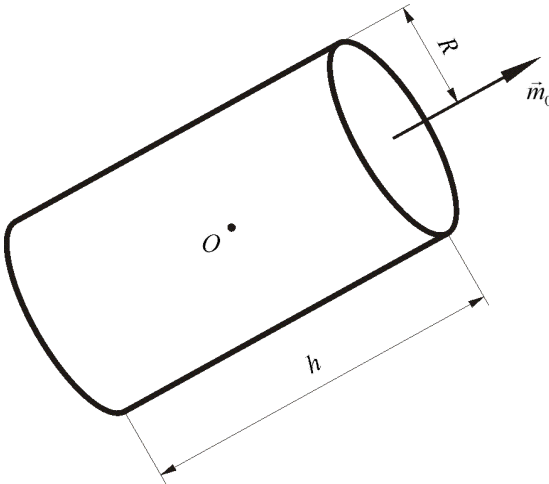
Тензор инерции в актуальном положении определяется формулой

$$\hat{C}(t) = \hat{P}(t) \cdot \hat{C}_0 \cdot \hat{P}^T(t), \quad (3)$$

где  $\hat{P}(t)$  – тензор поворота, и  $\hat{P}(0) = \hat{E}$ .

Введем в рассмотрение угловую скорость тела

$$\frac{d}{dt} \hat{P}(t) = \bar{\omega}(t) \times \hat{P}(t) = \hat{P}(t) \times \bar{\Omega}(t), \quad (4)$$



Рассматриваемый цилиндр

где  $\bar{\omega}(t)$  называется вектором левой угловой скорости, или просто вектором угловой скорости, а  $\bar{\Omega}(t)$  – вектором правой угловой скорости (эти уравнения называются уравнениями Пуассона). Между этими векторами существует простая связь

$$\bar{\omega}(t) = \hat{P}(t) \cdot \bar{\Omega}(t). \quad (5)$$

Кинетический момент тела определяется известной формулой:

$$\vec{K}_2(t) = \hat{C}(t) \cdot \bar{\omega}(t). \quad (6)$$

Сила трения действующая на тело равна

нулю. Вычислим момент сопротивления, действующий на тело. Для этого рассмотрим бесконечно малую часть поверхности цилиндра  $dA$ . Сила трения на этой площадке  $d\vec{F} = -\kappa \vec{v} dA$ , где  $\kappa$  – коэффициент трения. Скорость точек тела определяется выражением  $\vec{v} = \bar{\omega} \times \vec{r}$ . Следовательно, сила трения на малой площадке  $d\vec{F} = -\kappa (\bar{\omega} \times \vec{r}) dA$ , а момент силы трения всего тела:

$$\int_A \vec{r} \times d\vec{F} = -\kappa \int_A \vec{r} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) dA = -\kappa \bar{\omega} \cdot \int_A [r^2 \hat{E} - \vec{r} \otimes \vec{r}] dA. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение тензор вязкого трения

$$\hat{G}_0 = \kappa \int_A [r^2 \hat{E} - \vec{r} \otimes \vec{r}] dA. \quad (8)$$

Из соображений симметрии можно заключить, что этот тензор является трансверсально-изотропным и допускает представление

$$\hat{G}_0 = \alpha \hat{m}_0 \otimes \hat{m}_0 + \beta (\hat{E} - \hat{m}_0 \otimes \hat{m}_0), \quad (9)$$

где коэффициенты, после интегрирования выражения (8), равны

$$\alpha = \kappa\pi R(R^3 + 2R^2h),$$

$$\beta = \kappa\pi R\left(\frac{1}{2}R^3 + R^2h + \frac{1}{2}Rh^2 + \frac{1}{6}h^3\right). \quad (10)$$

Второй закон динамики для рассматриваемого тела примет вид

$$\frac{d}{dt}\bar{K}_2(t) = -\hat{G}(t) \cdot \bar{\omega}(t), \quad (11)$$

где  $\hat{G}(t) = \hat{P}(t) \cdot \hat{G}_0 \cdot \hat{P}^T(t)$ . Перепишем его в терминах правой угловой скорости  $\bar{\Omega}(t)$  используя формулы (3-6):

$$\hat{C}_0 \cdot \bar{\Omega}(t) + \bar{\Omega}(t) \times \hat{C}_0 \cdot \bar{\Omega}(t) = -\hat{G}_0 \cdot \bar{\Omega}(t). \quad (12)$$

Умножая обе части равенства (12) слева на  $\hat{C}_0^{-1}$  и учитывая некоторые тождества[1], получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\bar{\Omega}(t) + \frac{1}{\det \hat{C}_0} [\hat{C}_0 \cdot \bar{\Omega}(t)] \times [\hat{C}_0^2 \cdot \bar{\Omega}(t)] = -\hat{C}_0^{-1} \cdot \hat{G}_0 \cdot \bar{\Omega}(t). \quad (13)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение относительно неизвестного вектора правой угловой скорости  $\bar{\Omega}(t)$  с начальным условием  $\bar{\Omega}(0) = \bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0$ . Однако требуется определить также и вектор положения частицы  $\bar{m}(t)$  – такая задача называется задачей Дарбу. Его можно определить через неизвестный пока тензор поворота  $\hat{P}(t)$ :

$$\bar{m}(t) = \hat{P}(t) \cdot \bar{m}_0. \quad (14)$$

Для отыскания же этого неизвестного тензора поворота можно воспользоваться, например, уравнениями Пуассона (4). Однако мы поступим по-другому и введем вектор поворота

$$\bar{\theta} = \theta \bar{l}, \quad l=1, \quad (15)$$

где единичный вектор  $\bar{l}(t)$  определяет ось поворота, а величина  $\theta(t)$  задает угол поворота в радианах. Тогда тензор поворота можно представить в эквивалентном виде через вектор поворота:

$$\hat{P}(\bar{\theta}) = \frac{1 - \cos \theta(t)}{\theta^2(t)} \bar{\theta}(t) \otimes \bar{\theta}(t) + \frac{\sin \theta(t)}{\theta(t)} \bar{\theta}(t) \times \hat{E} + \cos \theta(t) \hat{E}. \quad (16)$$

Можно тогда показать [1], что в терминах вектора поворота правая задача Дарбу имеет вид

$$\frac{d}{dt}\bar{\theta}(t) = \bar{\Omega}(t) + \frac{1}{2}\bar{\theta}(t) \times \bar{\Omega}(t) + \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)}\bar{\theta}(t) \times [\bar{\theta}(t) \times \bar{\Omega}(t)],$$

$$g(t) = \frac{\theta(t) \sin \theta(t)}{2[1 - \cos \theta(t)]}, \quad (17)$$

$$\bar{\theta}(0) = \bar{\theta}_0.$$

**Аналитическое определение правой угловой скорости.** Аналитически решим задачу (13) относительно  $\bar{\Omega}(t)$ . Воспользуемся представлениями (1) и (9) для тензоров  $\hat{C}_0$  и  $\hat{G}_0$  соответственно, подставим их в задачу (13) и проделаем некоторые алгебраические преобразования. Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\Omega}(t) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) [\bar{\Omega}(t) \cdot \bar{m}_0] \bar{m}_0 \times \bar{\Omega}(t) + \\ + \left(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\beta}{\mu}\right) [\bar{\Omega}(t) \cdot \bar{m}_0] \bar{m}_0 + \frac{\beta}{\mu} \bar{\Omega}(t) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее представим вектор начальной угловой скорости  $\bar{\Omega}_0$  в виде разложения по двум ортогональным векторам  $\bar{m}_0$  и  $\bar{b}_0$ :

$$\bar{\Omega}_0 = a_1 \bar{m}_0 + a_2 \bar{b}_0, \quad \bar{m}_0 \cdot \bar{b}_0 = 0, \quad b_0 = 1. \quad (19)$$

Будем искать решение в виде разложения по ортонормированному базису  $\{\bar{m}_0, \bar{b}_0, \bar{m}_0 \times \bar{b}_0\}$ :

$$\bar{\Omega}(t) = \psi_1(t) \bar{m}_0 + \psi_2(t) \bar{b}_0 + \psi_3(t) [\bar{m}_0 \times \bar{b}_0]. \quad (20)$$

Подставим разложение (20) в уравнение (18), а затем скалярно домножим результат на векторы  $\{\bar{m}_0, \bar{b}_0, \bar{m}_0 \times \bar{b}_0\}$  – получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций  $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^3$  в разложении (20):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) + \frac{\alpha}{\lambda} \psi_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) - \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \psi_1(t) \psi_3(t) + \frac{\beta}{\mu} \psi_2(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_3(t) + \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \psi_1(t) \psi_2(t) + \frac{\beta}{\mu} \psi_3(t) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Ее решение

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= C_1 e^{\frac{-\alpha}{\lambda} t}, \\ \psi_2(t) &= e^{\frac{-\beta}{\mu} t} [C_2 \sin \gamma(t) + C_3 \cos \gamma(t)], \\ \psi_3(t) &= e^{\frac{-\beta}{\mu} t} [-C_2 \cos \gamma(t) + C_3 \sin \gamma(t)], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\gamma(t) = C_1 \left[ \frac{\lambda\mu - \lambda^2}{\alpha\mu} \right] e^{\frac{-\beta}{\mu} t}$ . Используя начальные условия (19) найдем

константы  $\{C_i\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_1, \\
C_2 &= a_2 \sin \gamma_0, \\
C_3 &= a_2 \cos \gamma_0,
\end{aligned}
\tag{23}$$

где  $\gamma_0 = a_1 \left[ \frac{\lambda\mu - \lambda^2}{\alpha\mu} \right]$ .

Таким образом, получено аналитическое решение задачи (13) для правой угловой скорости  $\vec{\Omega}(t)$ .

**Численное определение правой угловой скорости и положения частицы.**

Решим поставленную задачу численно. Для этого введем ортонормированный базис  $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$  – вектор  $\vec{e}_1$  для простоты направим по оси, натянутой на вектор начального положения  $\vec{m}_0$ ,  $\vec{e}_2$  расположим в плоскости, ортогональной  $\vec{e}_1$ , и  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ . Все используемые величины можно без труда записать в этой системе координат. Подставим их в уравнение баланса кинетического момента (13) и в задачу Дарбу (17). Получим 6 уравнений относительно компонент вектора правой угловой скорости  $\{\Omega_i(t)\}_{i=1}^3$  и компонент вектора поворота  $\{\theta_i(t)\}_{i=1}^3$ :

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}_1(t) &= -\frac{\alpha}{\lambda} \Omega_1(t), \\
\dot{\Omega}_2(t) &= \left[ 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right] \Omega_1(t) \Omega_3(t) - \frac{\beta}{\mu} \Omega_2(t), \\
\dot{\Omega}_3(t) &= -\left[ 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right] \Omega_1(t) \Omega_2(t) - \frac{\beta}{\mu} \Omega_3(t),
\end{aligned}
\tag{24}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_1(t) &= \Omega_1(t) + \frac{1}{2} \theta_2(t) \Omega_3(t) - \frac{1}{2} \theta_3(t) \Omega_2(t) + \\
&+ \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)} [\theta_1(t) \theta_2(t) \Omega_2(t) - \theta_2(t) \Omega_1(t) - \theta_3(t) \Omega_1(t) + \theta_1(t) \theta_3(t) \Omega_3(t)], \\
\dot{\theta}_2(t) &= \Omega_2(t) + \frac{1}{2} \theta_3(t) \Omega_1(t) - \frac{1}{2} \theta_1(t) \Omega_3(t) + \\
&+ \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)} [\theta_2(t) \theta_3(t) \Omega_3(t) - \theta_3(t) \Omega_2(t) - \theta_1(t) \Omega_2(t) + \theta_1(t) \theta_2(t) \Omega_1(t)], \\
\dot{\theta}_3(t) &= \Omega_3(t) + \frac{1}{2} \theta_1(t) \Omega_2(t) - \frac{1}{2} \theta_2(t) \Omega_1(t) + \\
&+ \frac{1-g(t)}{\theta^2(t)} [\theta_1(t) \theta_3(t) \Omega_1(t) - \theta_1(t) \Omega_3(t) - \theta_2(t) \Omega_3(t) + \theta_2(t) \theta_3(t) \Omega_2(t)],
\end{aligned}
\tag{25}$$

где  $\theta(t) = \sqrt{\theta_1^2(t) + \theta_2^2(t) + \theta_3^2(t)}$ ,  $g(t) = \frac{\theta(t) \sin \theta(t)}{2[1 - \cos \theta(t)]}$ . Решение этой сис-

темы связанных обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений проведем в Maple 8.0 используя метод Рунге-Кутты 4-5 порядка.

**Анализ результатов.** Сравним полученное аналитически выражение для правой угловой скорости (20, 22, 23) с численным. Для получения численного решения зададим конкретные значения для всех параметров в уравнениях (24, 25):  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $R = 0,05 \text{ м}$ ,  $h = 0,1 \text{ м}$ ,  $\kappa = 78 \text{ кг/(с·м}^2\text{)}$ . Начальные условия положим:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}(0) &= \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \\ \bar{\theta}(0) &= \bar{0}.\end{aligned}\tag{26}$$

Результаты расчетов и абсолютная погрешность вычислений приведены в таблице. Характеристикой для сравнения выбрана длина вектора правой угловой скорости  $\Omega(t)$ .

Из таблицы видно, что абсолютная погрешность очень мала и, к тому же, меньше погрешности метода интегрирования. Численное решение почти точно совпадает с аналитическим.

Сравнение аналитического и численного решения для  $\Omega(t)$

Время, с.	Аналитическое решение	Численное решение	Абсолютная погрешность
1	0,8226034382	0,8226033720	$0,662 \cdot 10^{-7}$
3	0,1113272693	0,1113271867	$0,826 \cdot 10^{-7}$
5	0,01506650752	0,01506646648	$0,41 \cdot 10^{-7}$
10	$0,1015173291 \cdot 10^{-3}$	$0,1014993235 \cdot 10^{-3}$	$0,18 \cdot 10^{-7}$

**Заключение.** В работе было получено аналитическое решение для вектора правой угловой скорости и численное для вектора положения свободно вращающейся частицы с учетом вязкого трения. Также была написана программа для визуальной симуляции поведения частицы при любых комбинациях начальных условий.

Полученное численное решение для вектора правой угловой скорости сравнивалось с аналитическим и был сделан вывод о его высокой точности. Следовательно, разработанную численную процедуру можно рекомендовать для других подобных расчетов. По мнению авторов, хорошему совпадению численных и аналитических результатов способствовало использование вектора поворота, а не тензора поворота или углов Эйлера для описания поворотов тела.

**Список литературы:** 1. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 1992. 2. Maple 8.0. Advance Programming Guide (в электронном виде). 3. Maple 8.0. Help (в электронном виде).

*Поступила в редколлегию 02.09.2006.*

*В.М.ГРИЩЕНКО*, к-т техн. наук, *Ю.М.ГАЛАГАН*, НТУ «ХПІ»

## **АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ОБМЕЖЕНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ R-ФУНКЦІЙ**

Запропоновано алгоритм рішення проблеми оптимального проектування конструкцій, характерною відмінністю якого є спосіб врахування обмежень-нерівностей. З цією метою використовуються властивості R-функцій.

The algorithm of the decision of a problem of optimum designing of designs which prominent feature is the way of the account of restrictions – inequalities is offered. With this purpose properties of R-functions are used.

**1. Актуальність проблеми.** Проблема пошуку оптимальних рішень є однією з найактуальніших в прикладній математиці, зокрема при проектуванні конструкцій, і пов'язана з підвищенням якості, надійності, економічності і таке інше. При цьому програмні засоби оптимального проектування в сучасних умовах стали невід'ємною складовою систем автоматизованого проектування (САПР), тобто складають розрахунковий супровід конструкторських робіт.

Вибір оптимального варіанту з математичної точки зору означає пошук таких значень параметрів систем, які забезпечують досягнення нею екстремальних значень критерію цілі. Значний клас задач параметричної оптимізації, який має практичне значення, зводиться до рішення задачі нелінійного програмування з монотонною по кожному з аргументів цільовою функцією і обмеженнями-нерівностями, яким підпорядковуються параметри проектування.

Звичайно, практичний інтерес приводить цю проблему до конструкцій, змодельованих у вигляді скінченно-елементної (СЕ) моделі. При СЕ-ідеалізації конструкцій, що оптимізуються, в число змінних задачі входять геометричні параметри, вагові характеристики, характеристики матеріалу, статичні, динамічні показники об'єкту і таке інше.

Зрозуміло також, що така складна задача має значну кількість проблем обчислювального характеру. Найважливіші з них такі:

- проблема наявності ефективного алгоритму і програмного засобу рішення задачі безумовного екстремуму функціоналу зі значною кількістю змінних;
- потреба в наявності ефективного алгоритму і програмного засобу рішення задачі умовного екстремуму функціоналу з обмеженнями типу рівностей та нерівностей на параметри проектування;
- вирішення проблеми високої трудоемності традиційного об'єднання чисельних методів рішення задач аналізу стану об'єкту великої розмірності та методів параметричної оптимізації. Об'єми обчислювальних задач для традиційного підходу оптимізації складових конструкцій можуть ставити під сумнів саму можливість рішення задачі;
- алгоритм оптимального проектування повинен відноситись до групи



методів нульового порядку (тобто потребувати обчислення значень тільки функціоналу), але в разі необхідності повинен враховувати особливості задачі, такі як обчислення вектору градієнту, рішення задачі лінійного програмування і таке інше.

Існує думка, що універсального алгоритму, за допомогою якого можна було б успішно вирішувати різноманітні задачі оптимізації не існує і для кожного конкретного класу задач потрібно використовувати «свої» чисельні методи. Такий погляд викликаний складністю пошуку універсального алгоритму. Дійсно, число публікацій присвячених розвитку теорії та алгоритмів чисельного рішення проблеми оптимізації дуже велике.

Як би там не було, а роботи на цю тему не закінчуються. В них шляхом взаємного збагачення ідеями, удосконаленням існуючих алгоритмів здійснюються кроки до універсалізації підходів чисельного рішення загальної проблеми пошуку оптимальних рішень.

**2. Постановка оптимізаційної задачі.** В даній роботі задача оптимізації конструкції ставиться як задача параметричної оптимізації: потрібно знайти вектор оптимальних параметрів проектування:

$$\vec{x}^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T, \quad (1)$$

якому відповідає мінімальне значення цільової функції:

$$\Phi(\vec{x}^*) = \min_{x \in \Omega} \Phi(\vec{x}), \quad (2)$$

де  $\Omega$  – область допустимих значень  $\vec{x}$ .

Вважається, що функціонал  $\Phi(\vec{x})$  є складною аналітичною функцією своїх аргументів, а обмеження на параметри проектування задаються у формі нерівностей:

$$\Omega_i(\vec{x}) \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

і також представляють собою складні функції від  $\vec{x}$ .

Як правило, у процесі пошуку оптимуму виникає необхідність рішення серії задач аналізу:

$$L(\vec{x})U = f. \quad (4)$$

В такому випадку вважається, що всі проблеми визначення їх рішення вирішені.

Припускається, що розмір вектору  $\vec{x}$  помірний і питань кількісних обмежень та проблем, пов'язаних з великою розмірністю задачі не виникає. В загальному випадку проблема ставиться як задача нелінійного програмування, хоча не виключаються частинні випадки, коли співвідношення (2), (3) стають лінійними функціями параметрів (задачі лінійного програмування). Алгоритм відноситься до методів нульового порядку, тобто пошук оптимальної точки здійснюється орієнтуючись лише на значення функціоналу цілі. Але існують можливості його адаптації в окремих випадках, коли надається можливість обчислення компонент вектору-градієнту або елементів матриці Гессе безпосередньо.

Дана робота присвячена розробці та дослідженню поведінки тільки тієї частини алгоритму, яка пов'язана з проблемою урахування обмежень-нерівностей на параметри проектування. З цією метою вивчається можливість використання чудових властивостей  $R$ -функцій, які дозволяють записати рівняння області допустимих параметрів проектування у вигляді єдиного аналітичного виразу, тоді як у вихідних даних  $\Omega$  представляється сукупністю обмежень-нерівностей (3), тобто множиною окремих аналітичних формул. Такий підхід в принципі повинен зняти суттєві проблеми побудови ефективного алгоритму і програмного засобу пошуку умовного екстремуму функціоналу з обмеженнями типу нерівностей і звести цю проблему до задачі пошуку безумовного екстремуму деякого модифікованого функціоналу цілі.

**3. Основні положення алгоритму.** Таким чином, в даній роботі поставлена задача пошуку вектору оптимальних параметрів проектування  $\vec{x}^*$ , якому відповідає мінімальне значення цільової функції  $\Phi(\vec{x})$ . Параметри проектування  $\vec{x}^*$  повинні задовольняти множині обмежень типу нерівностей  $\Omega_i(\vec{x}) \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Тобто сформульована задача нелінійного програмування, як багато параметрична задача на умовний екстремум функціоналу з обмеженнями-нерівностями. Вона відноситься до кола тих науково-технічних проблем, в постановці задач яких присутні два різні види інформації.

Аналітична сторона задачі пов'язана з розробкою різних аспектів чисельного рішення диференціальних рівнянь в частинних похідних. Поряд з нею присутня геометрична інформація. Це – форма області, конфігурація контактів, початкові та крайові умови, обмеження на параметри стану та параметри проектування і таке інше.

Ефективний метод рішення науково-технічної проблеми повинен в тому числі ефективно враховувати та перетворювати геометричну інформацію. Дуже важливо, щоб геометрична інформація була представлена у зручній формі, тобто у формі, яка прийнята в аналітичній геометрії – це язык рівнянь, нерівностей. Найкраще, коли б рівняння області параметрів  $\Phi(\vec{x})$  представляло собою єдиний аналітичний вираз. В деяких підходах для врахування особливостей геометрії задовольняються частинними випадками (вдалому вибору систем координат і таке інше). Заслуга Рвачова В.Л. в тому, що ним запропоновано для цих цілей прекрасний конструктивний апарат  $R$ -функцій, який фактично розширює коло елементарних функцій для зображення геометричних об'єктів складної форми [3].

Згідно з ним для побудови рівняння деякої області  $\Phi(\vec{x})$  потрібно спочатку записати предикатне рівняння цієї області (відповідну логічну формулу). Предикат (знак) – це правило, по кому встановлюється належність  $\vec{x} \in \Omega$ . Побудова предикатів складних областей здійснюється за допомогою 2-х значних предикатів окремих складових і служить базою для запису відповідних аналітичних  $R$ -функцій. Встановлена достатньо повна система  $R$ -функцій для побудови геометричних об'

ектів. В першу чергу нас буде цікавити одна з них – кон'юнкція:

$$\Omega_{12} = \Omega_1 \Lambda_0 \Omega_2 = \Omega_1 + \Omega_2 - \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}; \quad (5)$$

Це правило, яке встановлює належність  $\vec{x} \in \Omega_{12}$ , якщо  $\vec{x} \in \Omega_1$  і  $\vec{x} \in \Omega_2$ , а саме  $\Omega_{12}(\vec{x}) \geq 0$ , якщо  $\Omega_1(\vec{x}) \geq 0$  і  $\Omega_2(\vec{x}) \geq 0$ .

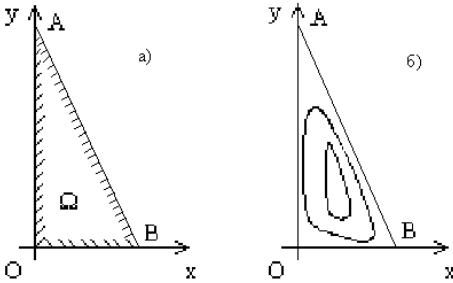


Рисунок 1

Наприклад, в просторі двох змінних для запису рівняння області  $\Omega$ , яка виділена трикутником АОВ (див. рис. 1). Потрібно спочатку записати предикати трьох окремих елементарних областей:

$$\Omega_1 = x \geq 0, \quad \sigma_1 = (\Omega_1 \geq 0),$$

$$\Omega_2 = y \geq 0, \quad \sigma_2 = (\Omega_2 \geq 0),$$

$$\Omega_3 = 1 - x - \frac{y}{2} \geq 0, \quad \sigma_3 = (\Omega_3 \geq 0),$$

Предикатне рівняння всієї області:

$$\sigma = \sigma_1 \Lambda_0 \sigma_2 \Lambda_0 \sigma_3 = \{(\Omega_1 \geq 0) \Lambda_0 (\Omega_2 \geq 0) \Lambda_0 (\Omega_3 \geq 0)\}$$

І наразті аналітичне рівняння  $R$ -функції для всієї області  $\Omega$ :

$$\Omega(\vec{x}) = \Omega_1 \Lambda_0 \Omega_2 \Lambda_0 \Omega_3 = \Omega_1 + \Omega_2 - \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} + \Omega_3 - \sqrt{\left(\Omega_1 + \Omega_2 - \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}\right)^2 + \Omega_3^2} \geq 0;$$

Або:

$$\Omega(\vec{x}) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} + \left(1 - x - \frac{y}{2}\right) - \sqrt{\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(1 - x - \frac{y}{2}\right)^2} \geq 0.$$

Термін «рівняння області  $\Phi(\vec{x})$ » означає, що для тих точок  $\vec{x} = \{x, y\}$ , які знаходяться в межах трикутника АОВ виконується умова  $\Phi(\vec{x}) \geq 0$ , а за межами –  $\Phi(\vec{x}) < 0$ . Сімейство ліній рівного рівня  $\Omega(\vec{x}) = \text{const}$  показано на рисунку 1,б. Виділимо характерну особливість побудованих рівнянь для використання в алгоритмі оптимізації:  $\Omega(\vec{x})$  неперервна функція своїх аргументів і для визначення напрямку руху від довільної точки  $\vec{x}_0$  до області допустимих значень  $\vec{x}$  (області точок  $\vec{x}$ , які задовольняють всім обмеженням  $\Omega(\vec{x}) \geq 0$ ) можливо використати процедуру пошуку безумовного екстремуму побудованої  $R$ -функції для області  $\Omega(\vec{x})$ . Причому, якщо в результаті аналізу буде встановлено, що в точці екстремуму функція  $\Omega(\vec{x}^*) < 0$ , це означатиме, що такої точки, яка задовольняла б усім обмеженням (3) не існує, і, якщо потрібно, треба шукати компромісний варіант.

Зауважимо, що приведений вище алгоритм врахування обмежень-нерівностей майже не залежить від складності області і розмірності задачі (поки що теоретично).

Переходимо тепер до викладення тієї частини алгоритму, в якій задача пошуку умовного екстремуму функціоналу  $\Phi(\vec{x})$  з обмеженнями-нерівностями (3) зводиться до еквівалентної задачі на безумовний екстремум для деякого модифікованого функціоналу цілі. В загальному випадку цей перехід носить ітераційний характер і пов'язаний з переходом від однієї опорної точки  $\vec{x}_i$  до кращої  $\vec{x}_{i+1}$ . Призначимо деяку довільну стартову опорну точку  $\vec{x}_0$ . Можливо кращим першим кроком алгоритму буде наступний.

Побудуємо модифікований функціонал наступного виду:

$$\Phi_1(\vec{x}, \lambda) = \Phi(\vec{x}) + \lambda \cdot \Omega(\vec{x}), \quad (6)$$

де  $\lambda$  – невизначений множник Лагранжу. В якості першої опорної точки  $\vec{x}_1$  приймається та, якій відповідає безумовний екстремум функціоналу  $\Phi_1(\vec{x}, \lambda)$ :

$$\vec{x}_1 = \min \Phi_1(\vec{x}, \lambda). \quad (7)$$

Це точка мінімуму функціоналу  $\Phi(\vec{x})$  на границі області обмежень (3). Якщо вирішується задача лінійного програмування, то знайденим рішенням  $\vec{x}_1$  потрібно обмежитись. Якщо ж точка мінімуму функціоналу  $\Phi(\vec{x})$  знаходиться всередині області  $\Omega(\vec{x})$  (задача нелінійного програмування), то наступним кроком алгоритму буде такий: побудуємо рівняння області тих точок  $\vec{x}$ , в яких  $\Phi(\vec{x}) \leq \Phi(\vec{x}_1)$  і запишемо його як додаткове  $(m+1)$  обмеження до нерівностей (3):

$$\Omega^{(1)}_{m+1}(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}) \geq 0. \quad (8)$$

Тоді поставлена задача оптимального проектування конструкції в чисельному плані зводиться до задачі на безумовний екстремум модифікованого функціоналу  $\Phi_\Omega$ , який представляє собою  $R$ -функцію, побудовану на  $(m+1)$  обмеженні:

$$\Phi_\Omega = \Omega(\vec{x}) \Lambda_0 \Omega^{(1)}_{m+1}(\vec{x}) = \Omega_1(\vec{x}) \Lambda_0 \Omega_2(\vec{x}) \Lambda_0 \dots \Lambda_0 \Omega^{(1)}_{m+1}(\vec{x}) \geq 0. \quad (9)$$

В якості другої опорної точки  $\vec{x}_2$  береться екстремум модифікованого функціоналу:

$$\vec{x}_2 = \min(-\Phi_\Omega(\vec{x})). \quad (10)$$

Ця точка задовольняє групі обмежень (3), краща від  $\vec{x}_1$ , так як знаходиться в середині області  $\Omega^{(1)}_{m+1}(\vec{x})$ . Для уточнення оптимуму поставленої задачі можливо звзити область  $\Omega^{(1)}_{m+1}$ , якщо побудувати область  $\Omega^{(2)}_{m+1}(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}) \geq 0$ . Має місце нерівність  $\Omega^{(2)}_{m+1}(\vec{x}) \subset \Omega^{(1)}_{m+1}(\vec{x})$ . І продовжити ітеропроцес до задовільних результатів. Можливо, ту частину алгоритму, яка пов'язана з введенням  $\lambda$ , в цьому випадку не використовувати. Таким чином, намічено шлях модифікації загальної проблеми оптимального проектування з обмеженнями до послідовності еквівалентних задач на безумовний екстремум.

Тепер коротко розглянемо основні положення алгоритму пошуку безу-

мовного екстремуму функціоналу з  $n$  змінними. Для довільних задач одержати оптимум за скінченну кількість кроків неможливо. Природно, що оптимізаційна процедура носить ітераційний характер.

Вважатимемо також, як це прийнято в багатьох підходах квазиньютонівського типу, що функціонал в околиці стаціонарної точки добре апроксимується квадратичною формою:

$$f(\bar{x}) = c + x^T b + \frac{1}{2} x^T G x. \quad (11)$$

Подальші кроки алгоритму залежать від тих можливостей, які задані в задачі. Наприклад, чи надається можливість аналітичного обчислення вектора-градієнта  $g(x)$  (найшвидшої зміни функціоналу):

$$g(x) = b + Gx, \quad (12)$$

або в найкращому випадку, можливість аналітичного обчислення матриці Гессе.

Припускається надалі найгірший варіант, коли параметри квадратичної форми потрібно ідентифікувати лише по значенням функціоналу  $\Phi_\Omega$ . Ітераційна процедура пошуку безумовного мінімуму функціоналу складається з послідовності кроків досліджувального пошуку, розпочинаючи з деякої стартової точки  $\bar{x}_0$ , за яким виконується пошук по апроксимації. В точці  $\bar{x}_0$  призначаються деякі стартові значення матриці Гессе  $G_0$  і вектора градієнту  $g_0$ . Цієї інформації достатньо, щоб виконати пошук по апроксимації. Знаходяться координати поточної стаціонарної точки  $x_1$ , градієнту  $g_1$  функціоналу  $f(x)$ :

$$x_1 = x_0 - G_0^{-1} g_0. \quad (13)$$

Далі виконується досліджувальний пошук – одновимірний пошук в найкращому напрямку. Його вибір має вирішальне значення для ефективної роботи ітеропроцедури. За такий напрямок обирається вектор:

$$\bar{d}_1 = \frac{\overrightarrow{x_0 x_1}}{|x_0 x_1|}. \quad (14)$$

і досліджується поведінка функціоналу  $\Phi_\Omega$  вздовж нього.

Предметом дослідження являються значення функції  $\Phi_\Omega$  у вибраному напрямку, напрямках ортогональних до нього, а також знак її другої похідної. Результатом дослідження є точка  $\bar{x}_{1d}$  краща в напрямку  $\bar{d}_1$ . Інформація про поведінку  $\Phi_\Omega$  використовується для оновлення коефіцієнтів матриці Гессе  $G_1$  і вектору градієнту  $\bar{g}_{1d}$ . Цієї інформації достатньо, щоб виконати пошук апроксимації

$$x_2 = x_{1d} - G_1^{-1} g_{1d}. \quad (15)$$

Ітеропроцес продовжується до задовільних результатів.

**4.Результати апробації алгоритму на модельному прикладі та їх аналіз.** В цій роботі при чисельній апробації увага головним чином сконцентрована на тій частині алгоритму, яка пов'язана з урахуванням обмежень-

нерівностей, та поведінкою  $R$ -функцій, остання з яких представляє собою модифікований функціонал цілі. З цією метою розглянуто модель стрижня змінного поперечного розрізу, який зображено на рис. 2.

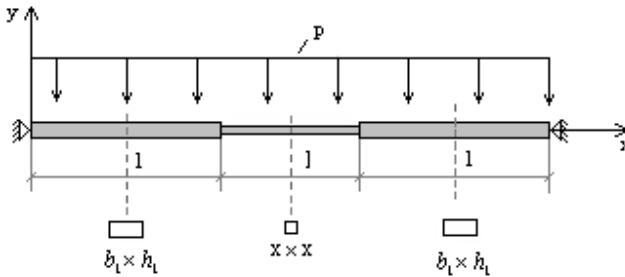


Рисунок 2

Стрижень шарнірно закріплений та знаходиться під дією рівномірного навантаження  $p = 400 \text{ Н/м}$ .

Геометричні та фізичні параметри системи прийнято такими:

$$l = 3 \text{ м}; \quad b_1 \times h_1 = 0,01 \times 0,1 \text{ м}^2; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad [\sigma] = 250 \text{ МПа}.$$

Розглядається однопараметрична задача оптимального проектування, пов'язана з мінімізацією ваги стрижня і чотирма обмеженнями-нерівностями ( $m = 4$ ). Згідно з позначеннями, приведеними вище, оптимізаційна задача формується так:

$$\tilde{\Phi}(x) = 2\rho \cdot g b_1 h_1 l + \rho \cdot g l x^2 \rightarrow \min;$$

$$\tilde{\Omega}_1(x) = x - h^- \geq 0;$$

$$\tilde{\Omega}_2(x) = h^+ - x \geq 0;$$

$$\tilde{\Omega}_3(x) = \omega - \omega^- \geq 0;$$

$$\tilde{\Omega}_4(x) = [\sigma] - \sigma_{\max} \geq 0;$$

Середній стрижень має квадратний розріз і його розмір  $x$  прийнято в якості варійованого параметру.

Перші два обмеження  $\tilde{\Omega}_1$  і  $\tilde{\Omega}_2$  – це обмеження на параметри проектування, де  $h^- = 0,02 \text{ м}$ ;  $h^+ = 0,1 \text{ м}$  – граничні розміри квадратного розрізу середнього стрижня.

$\tilde{\Omega}_3$  – обмеження на власну частоту коливання. Вона не повинна бути меншою ніж  $10 \text{ рад/с}$ .

Для обчислення обмеження  $\tilde{\Omega}_3$  потрібно мати можливість вирішувати задачу аналізу – проблему власних згинальних коливань цього стрижня. З ці-

єю метою використані можливості програмного комплексу ANSYS. Для дискретного набору параметрів  $x$  з області допустимих значень обчислено дискретний набір основної частоти власних коливань стрижня (див. табл.), і по трьом точкам побудовано інтерполяційну формулу для частоти.

$x, \text{ м}$	0,01	0,02	0,03	0,05	0,08
$\omega, \text{ рад/с}$	1,14	3,70	6,54	10,93	12,1

$$\omega(x) = 13 - \frac{1}{-0,432 + 90,668(x + 0,05)^2}$$

Ця формула досить добре інтерполює значення основної частоти  $\omega$  в діапазоні  $0,03 \leq x \leq 0,1$  (див. рис. 3).

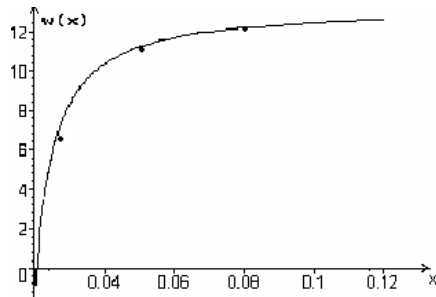
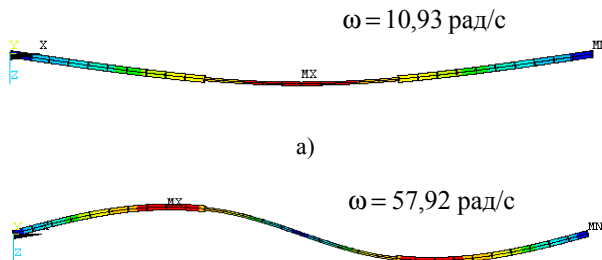


Рисунок 3

На рисунках 4, а; 4, б приведені перші дві форми згинальних коливань стрижня при  $x = 0,05 \text{ м}$ .



б)

Рисунок 4 – перша та друга форми коливань

$\tilde{\Omega}_4(x)$  – обмеження на міцність по допускаемим напруженням.

Для його обчислення в процесі оптимізації потрібно для відповідного  $x$

виконувати розрахунок напруженого стану стрижня під дією розподіленого навантаження. З цією метою проведена оцінка максимальних нормальних напружень в центрі стрижня методами опору матеріалів:

$$M_{\max} = \frac{9}{8} p l^2; \quad W = \frac{x^3}{6};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{6M_{\max}}{x^3} = \frac{0,0243}{x^3} \text{ МПа.} \quad (16)$$

Саме формула (16) використовується в обмеженні  $\tilde{\Omega}_4$  в процесі оптимального проектування. Таким чином, сформульовані необхідні компоненти оптимальної проблеми. При цьому потрібно зробити зауваження: сам функціонал та введені обмеження різномаштабні як по порядку чисел так і по розмірностям, але використовуються в  $R$ -функціях спільно.

Для того, щоб не виникало проблем обчислювального характеру виконуються їх масштабування, яке вирівнює порядки числових значень  $\tilde{\Omega}_i$  і робить їх безрозмірними.

Відповідна масштабована оптимізаційна задача має такий вигляд:

$$\Phi(x) = 200 \cdot (0,002 + x^2) \rightarrow \min;$$

$$\Omega_1 = 20 \cdot (x - 0,02) \geq 0;$$

$$\Omega_2 = 20 \cdot (0,1 - x) \geq 0;$$

$$\Omega_3 = 0,5 \cdot (\omega - 10) \geq 0;$$

$$\Omega_4 = 0,01 \cdot (250 - \sigma_{\max}) \geq 0.$$

Розглядається перший крок ітеропроцесу пошуку оптимального рішення. Вибирається довільне стартове значення варійованого параметру, наприклад  $x_0 = 0,12$ ;  $\Phi(x_0) = 3,28$ .

Розглядається область параметру  $x$ , в якій функціонал  $\Phi(x) \leq \Phi(x_0)$  і сформулюється у вигляді  $(m+1)$ -ої нерівності:

$$\Omega_{m+1}(x) = \Omega_5(x) = \Phi(x_0) - \Phi(x) = 200 \cdot (0,0144 - x^2) \geq 0.$$

Тепер перейдемо до аналізу відповідних  $R$ -функцій, які ідентифікують відповідні області – обмеження.

На рис. 5,а показані окремі області параметру  $x$ , які задовольняють обмеженням  $\Omega_1 \geq 0$  і  $\Omega_2 \geq 0$ . А штриховою лінією виділена крива  $\Omega_{12}$ , що ідентифікує ту ж саму область, а саме  $\Omega_{12} \geq 0$ , але відповідає єдиному аналітичному виразу.

На рис. 5,б приведена окрема область, яка відповідає обмеженню  $\Omega_3 \geq 0$ . Крива  $\Omega_3$  побудована з використанням інтерполяційної формули для  $\omega(x)$ . На цьому ж графіку виділена  $R$ -функція  $\Omega_{123}$ , яка ідентифікує об'єднання перших трьох обмежень.

На рис. 5,в показана вже область  $\Omega_{1234} \geq 0$ , яка задовольняє всім обмеженням – нерівностям.

На рис. 5,г показана область  $\Omega_5$  та сам функціонал ваги стрижня.



Область  $\Omega_5 \geq 0$  дозволяє виконати перехід до задачі на безумовний екстремум модифікованого функціоналу  $\Phi_\Omega$ , який представляє собою  $R$ -функцію вигляду:

$$\Phi_\Omega = \Omega_{1234} \Lambda_0 \Omega_5.$$

Модифікований функціонал  $(-\Phi_\Omega)$  неперервний, досить гладкий і зображений на рис. 5,д.

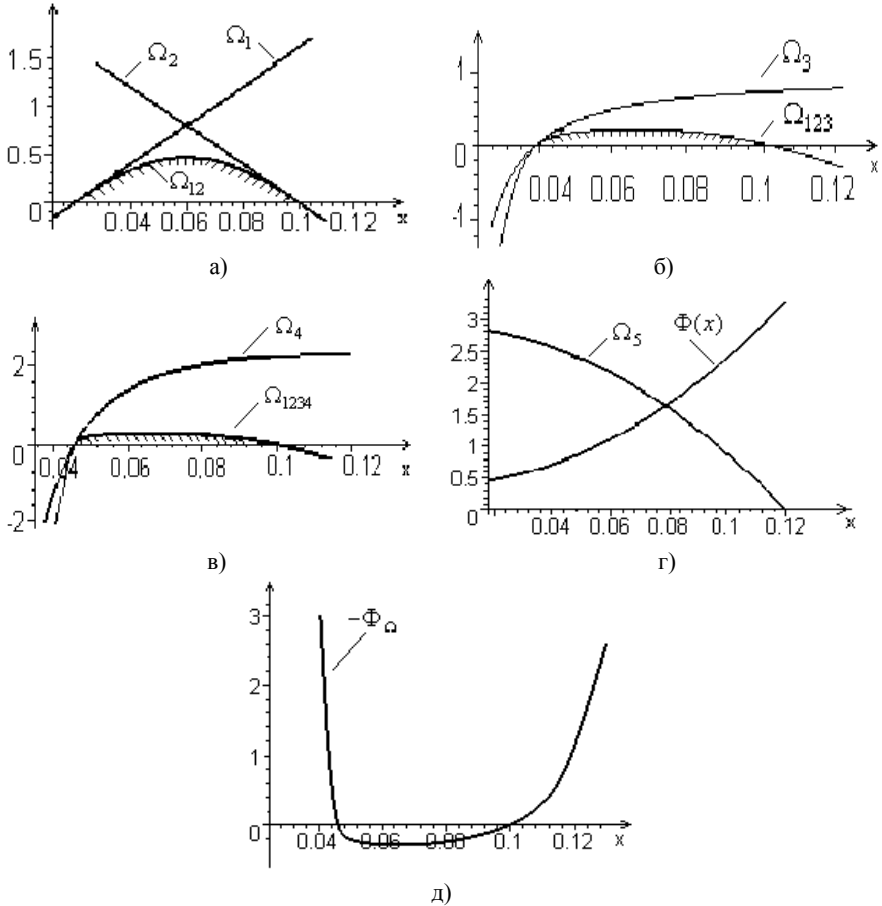


Рисунок 5

В першому наближенні він виділяє область параметру  $x$  ( $-\Phi_\Omega \leq 0$ ), яка може бути вже досить малою, і в якій знаходиться оптимум проблеми. Причому для обчислення  $x^*$  треба вирішувати проблему на безумовний екстремум функціоналу. Обчислення першого наближення  $x^*$  було виконано за допомогою оригінальної програми, яка використовує лише значення функціоналу

розпочинаючи з  $x_0 = 0,12$ ,  $\Phi_{\Omega}(x_0) = 3,28$ .

Результати першого наближення такі:

В процесі ітераційного пошуку знадобилось 9 звернень до процедури обчислення функції  $\Phi_{\Omega}$ . Знайдено оптимальне значення  $x^*$ , яке дорівнює 0,0662. Відповідно, функціонал  $(-\Phi_{\Omega})$  при даному значенні  $x$  дорівнює -0,3138. Мінімальна вага конструкції в першому наближенні при отриманій оптимальній товщині середнього стрижня дорівнює 1463,3851 Н.

Для уточнення результату потрібно продовжувати ітеропроцес, звуживши область пошуку згідно приведеного вище алгоритму.

**Висновки.** Запропоновано варіант алгоритму вирішення проблеми оптимального проектування конструкцій, в якому використано підходи, що ведуть до його універсалізації. Перші розрахунки модельних задач дають певний оптимізм у можливості позитивного результату.

Так як проблема дуже складна, то безумовно, цей оптимізм може перейти у впевненість лише при подоланні багатьох перешкод обчислювального характеру, корективі алгоритму і успішному рішенні більш складних задач.

**Список літератури:** 1. *Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К.* Оптимизация в технике. – в 2-х кн. – М.: Мир, 1986. 2. *Банди Б.* Методы оптимизации. – М.: «Радио и связь», 1988. 3. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982.

*Надійшла до редколегії 18.05.2006.*

УДК 621.432.4:534.16

**А.И.ЗАЙЦЕВ**, докт.фарм.наук;

**В.М.ШАТОХИН**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

### **О ВЛИЯНИИ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ И ПАРАМЕТРЫ ПОВОРОТА ГУСЕНИЧНОЙ МАШИНЫ С ГИДРООБЪЕМНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ**

Розроблено модель повороту гусеничної машини, що дозволяє досліджувати динамічні процеси в двигуні, трансмісії з диференціальними механізмами і гідрооб'ємною передачею, ходової частини як єдиної системі. Вона враховує пружність з'єднувальних валів, характеристики дороги, швидкість руху об'єкта, номер передачі, керування шайбою регульованої машини. Приведено результати розрахунково-експериментальних досліджень динамічних процесів.

Model of caterpillar machine turning, which permits to investigate dynamic processes in engine, transmission with differential mechanisms and hydrovolumetric transmission, running gear as a single whole system, are developed. It takes into account elasticity of connective shaft, road characteristics, object rate of movement, number of transmission, washer of regulable machine control. Results of dynamic processes design-experiment investigations are cited.

**Введение.** В отечественном и зарубежном транспортном машиностроении имеет место устойчивая тенденция по созданию высокоэффективных

двигателей и трансмиссий для колесных и гусеничных машин с использованием гидрообъемных передач (ГОП). Введение гидрообъемных машин (ГОМ) в привод компрессора расширяет зоны устойчивой работы турбопоршневых дизелей, а включение ГОП вместе с дифференциальными редукторами в механизм поворота гусеничной машины (ГМ) не только улучшает технические характеристики объекта (управляемость, маневренность) и снижает утомляемости водителя, но и придает ему новые качественные свойства (например, возможность поворота с любым фиксированным радиусом). Из всех типов ГОМ наилучшими габаритно-весовыми характеристиками обладают аксиально-поршневые ГОМ [1] (рис. 1). На характерных установившихся и переходных режимах, как показывает опыт доводки и эксплуатации машинных агрегатов с указанными устройствами для ГМ, возникали многочисленные опасные динамические процессы, обусловленные взаимодействием крутильных колебаний и гидродинамических процессов. Имел место чрезмерный износ поверхностей опор, башмаков, отрывы башмаков от опорных поверхностей, что практически приводило к преждевременному выходу из строя ГОП. При реализации поворотов на повышенных передачах происходило срабатывание перепускных клапанов (давления достигали предельных значений), что сопровождалось значительным ростом радиусов поворота, а следовательно и существенным замедлением процессов поворота.

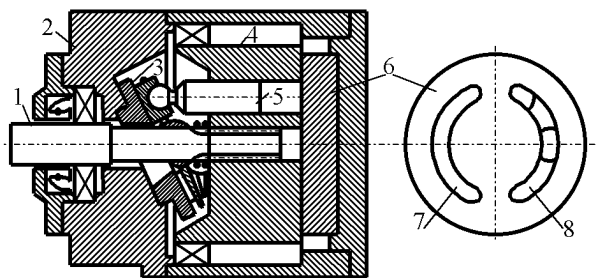


Рисунок 1 – Схема аксиально-поршневой ГОМ: 1 – вал; 2 – корпус; 3 – наклонная шайба; 4 – ротор; 5 – плунжер; 6 – плита с окнами; 7, 8 – серповидные окна

Вопросам моделирования ГОП на стационарных и нестационарных режимах посвящены многочисленные работы, в частности [1–6]. В них авторы по-разному подходят к решению одного из ключевых вопросов: вопросу моделирования жидкости – рабочего тела ГОМ. Для систем с короткими трубопроводами, как показано в [2], вполне пригодны модели с сосредоточенными параметрами. Относительная простота, достаточная с инженерной точки зрения точность результатов предопределили широкое использование именно таких моделей ГОП [1–4, 6]. Наличие дифференциальных механизмов в рассматриваемых силовых передачах при определенных условиях может порождать как прямой, так и обратный поток мощности проходящей через ГОП, что требует определенной корректировки указанных моделей.

В существующих работах [7, 8] динамические расчеты производятся от-

дельно для трансмиссии и процессов поворота; при наличии в силовой цепи ГОП не учитывается влияние упругости соединительных валов и сервопривода на развитие динамических процессов.

В статье разработана модель поворота гусеничной машины, которая позволяет исследовать динамические процессы в двигателе, трансмиссии с дифференциальными механизмами и ГОП, ходовой части как единой системе. Она учитывает упругость соединительных валов, характеристики дороги, скорость движения объекта и номер передачи. В ней отражена возможность изменения направления потока мощности через ГОП, управления шайбой регулируемой машины как непосредственно, так и через сервопривод. Предложенная модель – эффективное средство определения максимальных упругих моментов и давления в жидкости, кинематических характеристик процесса поворота, постоянной времени сервопривода и передаточного отношения между бортами, исключая забросы давления в магистралях. Приведены результаты расчетно-экспериментальных исследований динамических процессов при повороте гусеничной машины.

**1. Математические модели ГОМ.** В машинных агрегатах с гидромеханическими передачами мощность от источника к потребителю наряду с чисто механическими элементами передается также гидромашинами. Поскольку рабочим телом в ГОП является жидкость, то корректность математической модели гидромеханической силовой передачи существенно зависит от того, насколько правильно модель отражает физические свойства жидкости и протекающие в ней процессы. Так как в рассматриваемых ГОП магистрали являются сверхкороткими (0,1–0,15 м), инерция потока жидкости не учитывается [2]. Построение математической модели ГОП потребовало следующих соглашений. Разность давлений в магистралях гидросистемы является величиной алгебраической и определяется соотношением  $\Delta p = p_{дал} - p_{бл}$ . Здесь  $p_{дал}$  и  $p_{бл}$  – давление в «дальней» и «ближней» магистралях ГОП. Эти магистрали разделяются плоскостью симметрии ГОМ по отношению к серповидным окнам 7 и 8 на рис. 1. Эта плоскость совпадает с плоскостью чертежа в левой части этого рисунка. Магистраль, расположенная за плоскостью чертежа (соединена с серповидным окном 7) считается «дальней», перед плоскостью чертежа (соединена с серповидным окном 8) – «ближней». Положительные направления отсчета углов наклона шайб насоса (регулируемая гидромашина)  $\gamma_n$  и мотора (нерегулируемая гидромашина)  $\gamma_m$  указаны на рис. 2. В дальнейшем во всех выражениях нижний индекс «н» относится к регулируемой, а индекс «м» – к нерегулируемой машине.

Здесь же показано положительное направление отсчета углов поворота роторов насоса и мотора  $\vartheta_n$  и  $\vartheta_m$  соответственно. При этом  $\dot{\vartheta}_n > 0$ ,  $\dot{\vartheta}_m < 0$ , что отражают соответствующие векторы. Для указанных углов наклона шайб ГОМ и угловых скоростей их роторов в «дальней» магистрали будет низкое давление, в «ближней» – высокое, следовательно  $\Delta p < 0$ .

С учетом введенных определений и допущений, принятых в [9], систему

дифференциальных уравнений, описывающую работу замкнутой реверсируемой гидropередачи, представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} I_n \ddot{\vartheta}_n &= Q_{\vartheta_n} + M_{жн} ; \\ I_m \ddot{\vartheta}_m &= Q_{\vartheta_m} + M_{жм} ; \\ k_{унр} \frac{d(\Delta p)}{dt} + k_n \Delta p + q_n e_n \dot{\vartheta}_n + q_m e_m \dot{\vartheta}_m &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

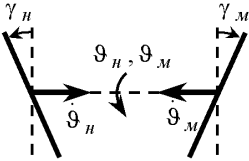


Рисунок 2 – Положительные направления отсчета углов

где  $I_n = I_m = 0,018 \text{ кгм}^2$  – моменты инерции роторов насоса и мотора;

$Q_{\vartheta_n}, Q_{\vartheta_m}$  – обобщенные силы, действующие на насос и мотор;

$M_{жн}, M_{жм}$  – моменты от жидкости, действующие на насос и мотор;

$k_{унр} = 1,208 \cdot 10^{-13} \text{ кг}^{-1} \text{ с}^2$  – коэффициент пропорциональности;

$q_n = q_m = 1,61 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$  – характерные объемы насоса и мотора;

$k_n = 1,135 \cdot 10^{-11} \text{ м}^5 \text{ Н}^{-1} \text{ с}^{-1}$  – коэффициент внешних утечек, отнесенный к единице давления;

$e_n = tg\gamma_n / tg\gamma_{n_{max}}, e_m = tg\gamma_m / tg\gamma_{m_{max}}$  – параметры управления производительностью насоса и мотора;

$\gamma_{n_{max}} = \gamma_{m_{max}} = 18^\circ$  – максимальные углы наклона шайб насоса и мотора ( $-\gamma_{n_{max}} \leq \gamma_n \leq \gamma_{n_{max}}$ ).

Последнее уравнение системы (1) представляет собой уравнение неразрывности потока жидкости в магистралях гидрообъемной машины [9].

Выражения для моментов, действующих на валы гидромашин со стороны жидкости, имеют вид [4, 9]:

$$\left. \begin{aligned} M_{жн} &= q_n e_n \Delta p - k_{zn} \dot{\vartheta}_n ; \\ M_{жм} &= q_m e_m \Delta p - k_{zm} \dot{\vartheta}_m , \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $k_{zn} = k_{zm} = 1,764 \cdot 10^{-4} \text{ Нмс}$  – коэффициенты гидромеханических потерь в насосе и моторе;

Таким образом для моделирования гидромеханических силовых передач следует использовать систему уравнений (1), к которой необходимо добавить уравнения, описывающие динамику механической части привода. Связь между уравнениями осуществляется через обобщенные силы  $Q_{\vartheta_n}$  и  $Q_{\vartheta_m}$ . Этот подход и реализован при моделировании динамических процессов в гидрообъемной передаче механизма поворота (ГОП МП) гусеничной машины.

**2. Описание динамических процессов в силовой цепи гусеничной машины при повороте.** Кинематическая схема силовой передачи с двигателем БТД-2 приведена на рис. 3 без низкочастотного контура привода к турбине и компрессору. Ее отличительной особенностью является наличие ГОП МП и двух дифференциальных редукторов. На схеме показаны выпускной вал двигателя, дифференциальные механизмы, регулируемая и нерегулируемая гидромашины, потребители мощности, шестерни и упругие безынерционные элементы с коэффициентами жесткости  $c_1 = 2,8 \cdot 10^3$  Нм,  $c_2 = 3,96 \cdot 10^4$  Нм,  $c_3 = 8,2 \cdot 10^3$  Нм,  $c_4 = 9,56 \cdot 10^3$  Нм. Приведены также обобщенных координаты, в качестве которых приняты разность давлений  $\Delta p$  в магистралях ГОП и углы поворота:  $\vartheta_{кв}$  – коленчатого вала, водил и шестерни  $z_4$  (число зубьев  $z_4 = 40$ );  $\vartheta_n$  и  $\vartheta_m$  – регулируемой и нерегулируемой гидромашин;  $\vartheta_{z_8}$ ,  $\vartheta_{z_3^*}$  и  $\vartheta_{z_3}$  – шестерен  $z_8 = 54$ , левой  $z_3^* = 25$  и правой  $z_3 = 25$ . Положительные направления отсчета обобщенных координат, кроме описанных выше, задаются вектором  $\omega_{кв}$ . Исследуемая модель является разновидностью двухпоточной гидромеханической силовой передачи с дифференциальным механизмом на выходе. Использование ГОП и двух дифференциальных механизмов позволяет обеспечить противофазное плавное изменение угловой скорости эпициклических шестерен и связанных с ними потребителей мощности при изменении  $\gamma_n$  – угла наклона шайбы насоса.

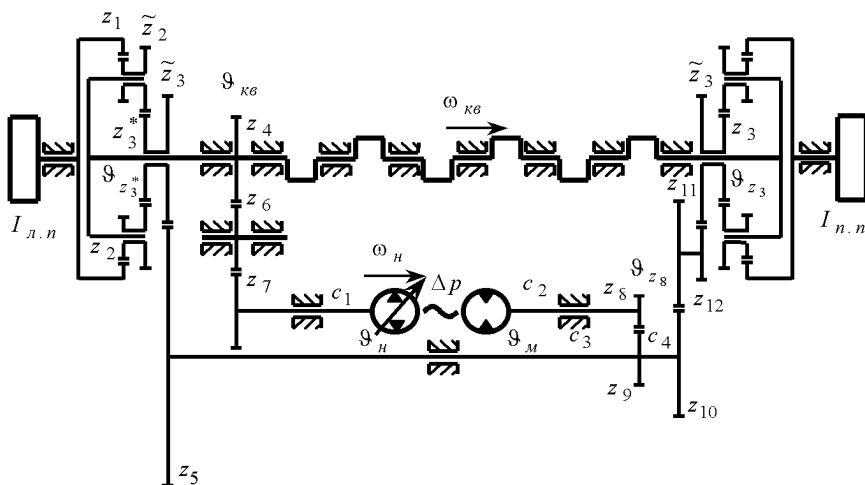


Рисунок 3 – Кинематическая схема силовой цепи с гидрообъемной передачей механизма поворота

Для значений  $\gamma_n > 0$  скорость левого эпицикла  $\omega_{л.э.}$  больше скорости правого эпицикла  $\omega_{п.э.}$ ; для  $\gamma_n < 0$  имеет место  $\omega_{л.э.} < \omega_{п.э.}$ ; для  $\gamma_n = 0$  и симметрич-

ной нагрузке на потребителях  $\omega_{л.э.} = \omega_{н.э.}$

Обычно поток мощности через ГОП проходит от насоса к мотору, однако при существенно несимметричном нагружении потребителей направление потока мощности может изменяться. В этом случае функцию гидронасоса выполняет нерегулируемая машина, гидромотора – регулируемая машина.

Введем необходимые для дальнейшего передаточные отношения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = 1 + \alpha_2; \quad \alpha_2 = \frac{z_2 z_3}{z_1 \tilde{z}_2}; \quad r_1 = \frac{z_8}{z_9}; \quad r_2 = \frac{\tilde{z}_3}{z_5}; \\ r_3 = \frac{\tilde{z}_3}{z_{12}} \frac{z_{11}}{z_{10}}; \quad r_4 = \frac{z_4}{z_7}; \quad r_5 = \frac{z_4}{z_6}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $z_1 = 89$ ;  $z_2 = 21$ ;  $\tilde{z}_2 = 30$ ;  $\tilde{z}_3 = 76$ ;  $z_5 = z_{12} = 24$ ;  $z_6 = 21$ ;  $z_7 = 36$ ;  $z_9 = 33$ ;  $z_{10} = 19$ ;  $z_{11} = 19$  – числа зубьев шестерен.

Для угловых скоростей левого и правого эпициклов справедливы следующие соотношения:

$$\dot{\vartheta}_{л.э.} = \alpha_1 \dot{\vartheta}_{кв} - \alpha_2 \dot{\vartheta}_{z_3^*}; \quad (4)$$

$$\dot{\vartheta}_{н.э.} = \alpha_1 \dot{\vartheta}_{кв} - \alpha_2 \dot{\vartheta}_{z_3}. \quad (5)$$

Выполнив стандартные действия по составлению уравнений Лагранжа, получим дифференциальные уравнения движения масс системы:

$$\left. \begin{aligned} I_{1,1} \ddot{\vartheta}_{кв} + I_{1,9} \ddot{\vartheta}_{z_3^*} + I_{1,11} \ddot{\vartheta}_{z_3} &= M_{дв} - \alpha_1 (M_l - M_n) - r_4 c_1 (r_4 \vartheta_{кв} - \vartheta_n); \\ I_{3,3} \ddot{\vartheta}_n &= M_{жн} - c_1 (\vartheta_n - r_4 \vartheta_{кв}); \\ I_{5,5} \ddot{\vartheta}_m &= M_{жм} - c_2 (\vartheta_m - \vartheta_{z_8}); \\ I_{7,7} \ddot{\vartheta}_{z_8} &= -c_2 (\vartheta_{z_8} - \vartheta_m) + r_1 c_3 (r_1 \vartheta_{z_8} - r_2 \vartheta_{z_3^*}) + r_1 c_4 (r_1 \vartheta_{z_8} - r_3 \vartheta_{z_3}); \\ I_{9,1} \ddot{\vartheta}_{кв} + I_{9,9} \ddot{\vartheta}_{z_3^*} &= \alpha_2 M_l - r_2 c_3 (r_2 \vartheta_{z_3^*} - r_1 \vartheta_{z_8}); \\ I_{11,1} \ddot{\vartheta}_{кв} + I_{11,11} \ddot{\vartheta}_{z_3} &= \alpha_2 M_n - r_3 c_4 (r_3 \vartheta_{z_3} - r_1 \vartheta_{z_8}), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $I_{1,1}$ ,  $I_{1,9}$ ,  $I_{1,11}$ ,  $I_{3,3}$ ,  $I_{5,5}$ ,  $I_{7,7}$ ,  $I_{9,1}$ ,  $I_{9,9}$ ,  $I_{11,1}$ ,  $I_{11,11}$  – ненулевые элементы матрицы инерции;

$M_{дв}$  – момент двигателя;

$M_l, M_n$  – моменты сопротивления на левой и правой гусеницах, приведенные к соответствующим эпициклам.

Через параметры модели элементы матрицы инерции выражаются следующим образом:

$$I_{1,1} = I_{н.э.} + I_{г.э.} + I_{г.н.} + 2I_{вод.} + I_{z_4} + r_5^2 I_{z_6} + r_4^2 I_{z_7} + \alpha_1^2 (I_{z_1} + I_{л.н.}) + \alpha_1^2 (I_{z_1} + I_{н.н.});$$

$$I_{3,3} = I_n; \quad I_{5,5} = I_m; \quad I_{7,7} = I_{z_8} + r_1^2 I_{z_9};$$

$$I_{9,9} = I_{z_3^*} + r_2^2 I_{z_5} + r_4^2 I_{z_7} + \alpha_2^2 (I_{z_1} + I_{л.н.});$$

$$I_{11,11} = I_{z_3} + r_3^2 I_{z_{10}} + r_2^2 I_{z_{11}z_{12}} + \alpha_2^2 (I_{z_1} + I_{н.н.});$$

$$I_{1,9} = I_{9,1} = -\alpha_1 \alpha_2 (I_{z_1} + I_{л.н.}); \quad I_{1,11} = I_{11,1} = -\alpha_1 \alpha_2 (I_{z_1} + I_{н.н.}),$$

где  $I_{н.в.} = I_{в.в.} = 0,3762 \text{ кгм}^2$ ,  $I_{з.н.} = 0,173 \text{ кгм}^2$ ,  $I_{вод.} = 0,1134 \text{ кгм}^2$  –

моменты инерции соответственно впускного и выпускного коленчатых валов, главной передачи, водила дифференциального механизма;

$$I_{z_1} = 0,3127 \text{ кгм}^2, \quad I_{z_3} = I_{z_3^*} = 0,1149 \text{ кгм}^2, \quad I_{z_4} = 3,64 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2,$$

$$I_{z_5} = 4,78 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2, \quad I_{z_6} = 1,69 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2, \quad I_{z_7} = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2,$$

$$I_{z_8} = 6,08 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2, \quad I_{z_9} = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2, \quad I_{z_{10}} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2,$$

$$I_{z_{11}z_{12}} = 6,44 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}^2$$
 – моменты инерции шестерен;

$I_{л.н.}$ ,  $I_{н.н.}$  – приведенные моменты инерции бортов гусеничной машины, значения которых вместе с передаточными отношениями  $i_k$  соответствующих передач приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Передаточные отношения и приведенные моменты инерции бортов

$k$	1	2	3	4	5	6	7
$i_k$	44,6	24	19	15	11	8	5,45
$I_{л.н.}; I_{н.н.}$ , кгм <sup>2</sup>	0,827	0,506	0,576	0,760	1,103	4,418	6,317

Вклад сателлитов в суммарную кинетическую энергию системы чрезвычайно мал, поэтому их параметры здесь не приведены.

Момент двигателя  $M_{об}$ , как функция частоты вращения коленчатого вала  $n_{кв}$ , задается семейством моментных характеристик  $M_{об}(n_{кв})$ , определяемых экспериментально. В расчетах для задания внешней моментной характеристики применялась кусочно-линейная интерполяция данных, представленных в табл. 2.

Таблица 2 – Внешняя моментная характеристика двигателя

$n_{кв} \cdot 10^{-2}$ , мин <sup>-1</sup>	12	14,2	15,9	16,8	18	19,1	20	22	22,9	23,4	24,2	25,6	28
$M_{об}$ , кНм	21,5	22,8	23,5	23,8	24,2	24,4	24,5	24,6	24,2	23,9	23,2	22,3	21

Левый и правый эпициклы кинематически связаны с ведущими звездочками левого и правого бортов известными передаточными отношениями, различными на разных передачах. Это дает возможность привести силы сопротивления, действующие на гусеницы машины, к коленчатому валу двигателя и получить единую динамическую модель: двигатель, силовая передача с ГОП МП, бортовые передачи, гусеничный движитель.

Для моментов  $M_l$  и  $M_n$  справедливы выражения:



$$M_l = M_{л.з.} / i_k ; \quad M_n = M_{н.з.} / i_k , \quad (7)$$

где  $M_{л.з.}$ ,  $M_{н.з.}$  – моменты сопротивления на ведущих звездочках левой и правой гусениц.

Моменты  $M_{л.з.}$ ,  $M_{н.з.}$  определяются по формулам:

$$M_{л.з.} = P_2 R_{г.к.} ; \quad M_{н.з.} = P_1 R_{г.к.} , \quad (8)$$

где  $P_1$ ,  $P_2$  – силы сопротивления на отстающей и забегающей гусеницах (для определенности рассматривается поворот направо);

$R_{г.к.} = 0,318$  м – радиус ведущих звездочек.

Для задания указанных сил использовались литературные данные [8].

В разработанной модели влияние поворота объекта на динамические процессы в ГОП МП учтено с помощью соответствующего дифференциального уравнения [8]. Это не сужает общности предложенного подхода, так как рассмотрение объекта как системы с тремя [8, 10] или пятью [8] степенями свободы, лишь увеличит порядок полной системы дифференциальных уравнений. Заметим, что использование более сложных моделей затруднено необходимостью получения дополнительных данных об объекте, трассе движения и т.д.

Для угловой скорости поворота объекта справедливо выражение

$$\dot{\vartheta}_n = (v_l - v_n) / B , \quad (9)$$

где  $v_l$ ,  $v_n$  – скорости левой и правой гусеницы;

$B = 2,43$  м – ширина колеи;

Выразив скорости  $v_l$  и  $v_n$  через угловые скорости водил  $\dot{\vartheta}_{кв}$  и солнечных шестерен  $\dot{\vartheta}_{z_3^*}$ ,  $\dot{\vartheta}_{z_3}$ , дифференциальное уравнение поворота объекта представим в виде

$$\dot{\vartheta}_n = \alpha_2 \left( \dot{\vartheta}_{z_3} - \dot{\vartheta}_{z_3^*} \right) R_{г.к.} / i_k B . \quad (10)$$

Переходные режимы в данной системе возникают как вследствие управляющих воздействий со стороны шайбы насоса, так и вследствие изменения характеристик сопротивления на гусеницах машины. При управляющем воздействии на ГОП МП, связанном с изменении угла наклона шайбы насоса, происходит изменение угловых скоростей правой и левой звездочек, а следовательно, изменение скоростей движения гусениц правого и левого борта. В свою очередь изменение скоростей гусениц изменяет силы, действующие на эпициклы дифференциальных механизмов ГОП МП. Достоверное изучение динамических процессов, таким образом, не возможно без учета управляющих воздействий.

Для описания управления через сервопривод воспользуемся дифференциальным уравнением

$$\dot{\gamma}_n = [u(t) - \gamma_n] / T_a , \quad (11)$$

где  $u(t)$  – управляющий сигнал на сервопривод;

$T_a$  – постоянная времени сервомотора.

Таким образом, изучение переходных режимом при повороте объекта,

требует совместного интегрирования уравнений ГОП МП (6), уравнения неразрывности (последнего уравнения (1)), уравнений поворота (12) и сервопривода (13). Предварительно их следует записать в форме Коши, что в свою очередь требует разделения переменных в системе уравнений (6). Это легко осуществить с помощью матрицы обратной к матрице инерции.

Начальными данными при исследовании переходных режимов поворота являются параметры прямолинейного движения объекта, которое предшествовало повороту. При этом для однозначного выбора устойчивого и реализуемого режима движения весьма удобным оказалось семейство внешних характеристик (их число равно числу передач бортовых коробок), преобразованных в функцию скорости прямолинейного движения.

Заметим, что для изучения только условий работы гидромашин при повороте объекта и кинематических характеристик движения во многих случаях достаточно упрощенной модели, не учитывающей упругости соединительных валов. Она без труда получается из разработанной модели.

**3. Расчетно-экспериментальные исследования поворота.** Эксперименты с поворотами на повышенных передачах выявили в исходной конструкции забросы давления в нагнетающей магистрали. В результате срабатывания перепускного клапана (рассчитан на давление  $p_{\max} = 50$  МПа), поворот существенно замедлялся, а радиус поворота значительно увеличивался. Орган управления перемещался в этом случае из нейтрального в крайнее положение, что соответствует отклонению шайбы насоса от  $\gamma_n = 0^\circ$  до  $\gamma_{n \max}$ . На рис. 4 показана осциллограмма с записями параметров системы при повороте вправо на четвертой передаче.

Записаны кривые, характеризующие положение органа управления ( $\gamma_n$ ), давление в нагнетающей магистрали ( $p$ ), давление подпитки ( $p_n$ ), частоты вращения солнечных шестерен ( $n_c$ ), коленчатого вала ( $n_{кв.}$ ), левого ( $n_{л.э.}$ ) и правого ( $n_{п.э.}$ ) эпициклов. После сопоставления результатов расчетов с экспериментом для уточнения моделей, проведены исследования по выбору рациональных значений параметров, обеспечивающих приемлемые характеристики поворота и динамических процессов.

В исследованиях переходных процессов в модели двигателя и трансмиссии было выполнено две серии расчетов: сначала изучалось развитие динамических процессов на различных режимах движения объекта без сервопривода при разных законах изменения угла поворота шайбы, затем оценивалось влияние сервопривода на динамические процессы, происходящие в модели. Варьировались тип дороги, скорость прямолинейного движения перед входом в поворот, коэффициенты сопротивления прямолинейному движению и боковому сдвигу [9], номер передачи и частота вращения вала двигателя.

Введение сервопривода, как показали исследования, значительно улучшает динамику ГОП МП. В частности позволяет убрать или значительно уменьшить забросы давления в гидросистеме. Угол отклонения шайбы формируется управляющим воздействием  $u(t)$  на сервопривод согласно

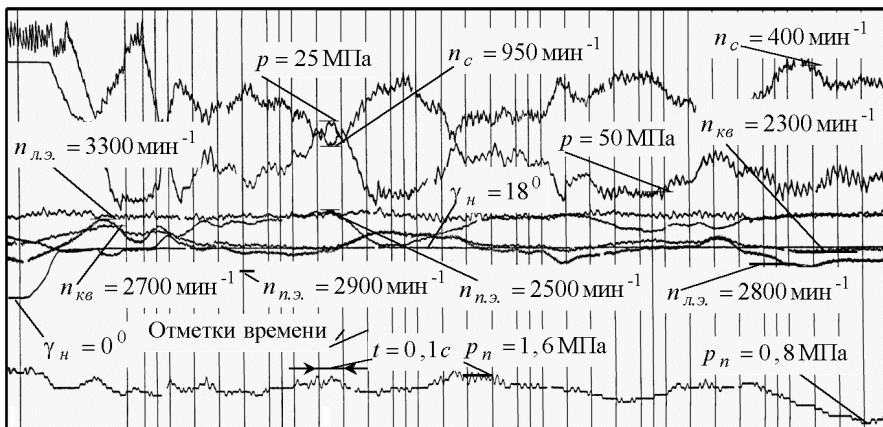


Рисунок 4 – Поворот вправо на четвертой передаче

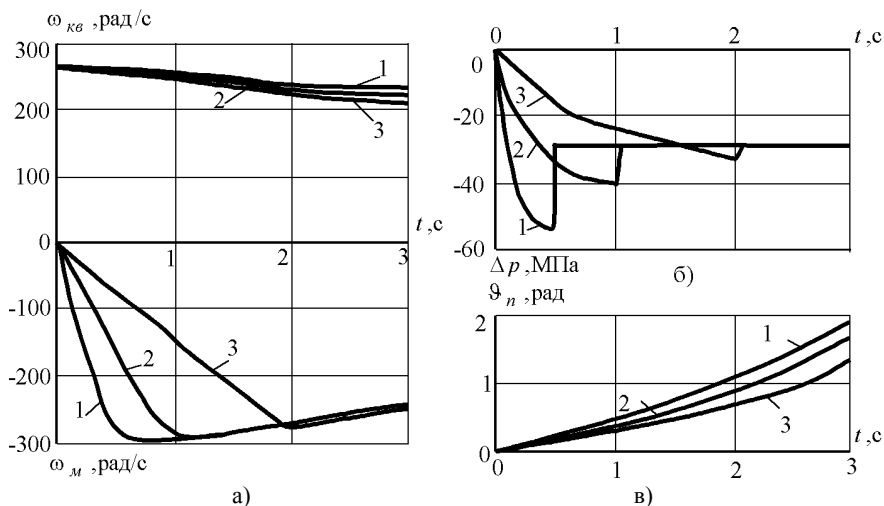


Рисунок 5 – Параметры движения объекта для разных скоростей угла поворота шайбы насоса: а) – угловые скорости двигателя и гидромотора; б) – разность давлений в магистралях; в) – угол поворота объекта

уравнению (13). Он зависит не только от воздействия водителя  $u(t)$ , но и от постоянной сервопривода  $T_a$ . На рис. 5 показан характер изменения параметров движения при повороте объекта на четвертой передаче ( $i_4 = 15$ ) для трех значений времени нарастания угла поворота шайбы от  $0^\circ$  до  $\gamma_{n \max}$ : 0,5с; 1с; 2с (кривые соответственно 1, 2, 3). Условия движения: песчаная дорога; скорость движения  $v = 25,1$  км/час; коэффициент сопротивления прямолинейному движению  $f_{mp} = 0,206$ ; максимальный коэффициент сопротивления боковому сдвигу  $\mu_{\max} = 0,3$ ;  $\omega_{кв} = 2600$  мин $^{-1}$ . Эти расчеты показывают, что хотя

характер изменения оборотов двигателя и угол поворота объекта слабо зависят от скорости нарастания  $\gamma_n$ , гидросистема объекта весьма чувствительна к скорости изменения угла поворота шайбы. Для времени 0,5 с заброс давления, в частности, в два раза превышает установившееся значение.

На рис. 6 приведены результаты расчетов поворота на второй передаче ( $i_2 = 24$ ). Условия движения: заснеженная дорога;  $v = 17,4$  км/час;  $f_{mp} = 0,305$ ;  $\mu_{max} = 0,3$ ;  $\omega_{кв} = 2840$  мин<sup>-1</sup>. Сплошными линиями показаны процессы, происходящие в системе при воздействии непосредственно на шайбу механизма при повороте, а штриховыми – эти же процессы при задании такого же управляющего воздействия на сервопривод с постоянной времени  $T_a = 0,5$  с. Без сервопривода давление достигает 41 МПа, с использованием же сервопривода – 23 МПа. Плавный характер изменения угла наклона шайбы, каким его генерирует сервопривод, заметно снижает угловую скорость мотора, что ведет к замедлению процесса поворота. Таким образом, существуют оптимальные значения постоянной времени сервопривода, компромиссно удовлетворяющие и условиям эксплуатации, и динамической прочности ГОП МП.

Разработанные модели позволяют также оценивать влияние разных компоновок механической части привода (дифференциальных механизмов и числа зубьев шестерен), характерных объемов гидромашины на параметры поворота и динамические нагрузки.

**Выводы.** 1. Предложена комплексная модель динамических процессов поворота гусеничной машин, которая включает двигатель, трансмиссию с дифференциальными механизмами и ГОП, ходовую часть.

2. Осуществлен выбор рациональной модели гидродинамических процессов в ГОП и ее корректировка.

3. Получены уравнения механической части силовой передачи с учетом податливости соединительных валов.

4. Введено уравнение, моделирующее управление шайбой гидронасоса и непосредственно, и при воздействии через сервопривод.

5. Проведена осциллограмма с записями параметров поворота объекта на повышенной передаче, когда имеют место забросы давлений.

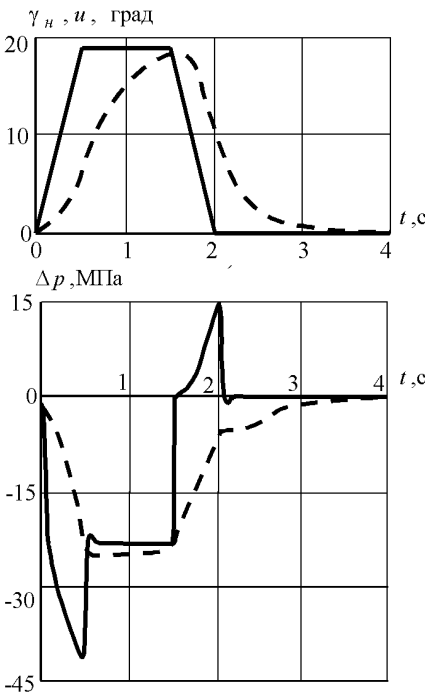


Рисунок 6 – Влияние сервопривода на:  
а) – угол поворота шайбы гидронасоса;  
б) – разность давлений в магистралях

6. Выработаны рекомендации по использованию упругого и жесткого варианта модели.

7. Исследованы возможности использования сервопривода, элементов дифференциальных механизмов, характерных объемов гидромашин для снижения динамических нагрузок и обеспечения необходимых параметров поворота объекта.

8. Изложенный подход перспективен при разработке и совершенствовании целого класса аналогичных конструкций.

**Список литературы:** 1. Башта Т.М. Объемные насосы и гидравлические двигатели гидросистем. – М.: Машиностроение, 1982. – 606 с. 2. Беренгард Ю.Г., Гайцгори М.М. К выбору математической модели трубопровода гидросистемы // Машиноведение. – 1978. – № 5. – С. 24-31. 3. Вейц В.Л., Кочура А.Е., Мартыненко А.М. Динамические расчеты приводов машин. – Л.: Машиностроение, 1971. – 352 с. 4. Кисточкин Е.С. Динамическая модель многопоточных бесступенчатых передач с гидрообъемным регулирующим контуром // Машиноведение. – 1978. – № 5. – С. 32-36. 5. Колебания элементов аксиально-поршневых гидромашин // Под ред. Фролова К.В. – М.: Машиностроение, 1973. – 280 с. 6. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. – М.: Машиностроение, 1982. – 240 с. 7. Гуськов В.В., Онейко А.Ф. Теория поворота гусеничных машин. – М.: Машиностроение, 1984. – 316 с. 8. Забавников Н.А. Основы теории транспортных гусеничных машин. – М.: Машиностроение, 1975. – 268 с. 9. Пасынков Р.М., Гайцгори М.М. Расчет гидрообъемных трансмиссий с учетом динамических нагрузок // Вестник машиностроения. – 1967. – №10. – С. 48-51. 10. Фаробин Я.Г. Теория поворота транспортных машин. – М.: Машиностроение, 1970. – 268 с.

*Поступила в редколлегию 15.04.2006.*

УДК 539:534

**С.В. КРАСНИКОВ**, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ВИБРАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОПОРНОЙ КОНСТРУКЦИИ ДЛИННОГО ВАЛОПРОВОДА**

Розглядаються питання, пов'язані зі створенням іспитових стендів для довгих валопроводів. На основі проведеного аналізу власних коливань різних варіантів системи валопровід-фундамент зроблено рекомендації щодо конструкції іспитового стенду. Математичні моделі та розрахунки виконано на основі методу скінчених елементів.

The problems, related with creation of test bed for lengthy rotor-system are considered. On the basis of the eigen-tones analysis of a several versions of a rotor – base system guidelines on a construction of the test bed are made. The mathematical models and calculations are executed on the basis of finite elements method.

Оборудование большинства энергетических станций на территории стран СНГ, уже давно исчерпало свой проектный ресурс и требует замены или модернизации [1,2]. Среди этого оборудования большой износ имеют валопроводы компрессоров, работающие в условиях повышенной вибрационной нагрузки и подверженных воздействию радиации. Длины этих валопроводов составляют более 10 м. Изготовление валопроводов большой длины связано с проведением их испытаний на стендах заводов [3]. Создание таких

стендов является актуальной и важной задачей.

Проектирование испытательных стендов длинных валопроводов осложняется следующим фактором. Реальная опорная конструкция является частью железобетонного здания высотой 20 м и толщинами стен не менее 0,8 м. Создание подобной конструкции в качестве испытательного стенда экономически не выгодно. Рамная конструкция стенда даже из стальных балок круглого поперечного сечения диаметром 0.5 м имеет жесткости опор валопровода на порядок меньше, чем у реальной опорной конструкции [4]. Учитывая стоимость изготовления такого стенда следует, что создание рамного стенда с жесткостями опор эквивалентными реальной опорной конструкции экономически не выгодно. Проведенные ранее исследования также показали, что указанная выше рамная конструкция стенда наибольшей жесткости и все рассмотренные ее варианты имеют три собственных частоты до рабочей частоты вращения ротора, а все собственные частоты реальной опорной конструкции значительно ее превышают [4]. В связи с этим становится актуальной задача проектирования рамной конструкции стенда с минимальным количеством собственных частот до рабочей частоты вращения валопровода и максимальной отстройкой от возможного резонанса.

Для проведения исследований были построены геометрические и конечно-элементные модели валопровода с диском компрессора. Валопровод является системой из труб и диска компрессора, поэтому для моделирования использовались стержневые и оболочечные конечные элементы. Конечно-элементная (КЭ) модель валопровода (рис. 1) была построена в двух вариантах: из сплошных труб и труб с диаметром внутреннего отверстия 40мм. Характеристики моделей: 78 конечных элементов, 71 узел, 305 степеней свободы. Для анализа собственных частот и форм валопровода в местах установки подшипника добавлено по 2 жесткостных стержневых конечных элемента, которые расположены перпендикулярно друг к другу и к валопроводу. Жесткостные характеристики этих конечных элементов взяты из расчетов податливости фундамента с трубами 377x30 [4].

Проведены расчеты собственных частот и форм двух вариантов валопровода. Полученные собственные частоты приведены в табл. 1.

Из табл. 1 видно, что первые собственные частоты валопроводов примерно в два раза превышают рабочую частоту, то есть валопровод в любом из вариантов является жестким. Также видно, что различия собственных частот двух вариантов валопровода незначительно.

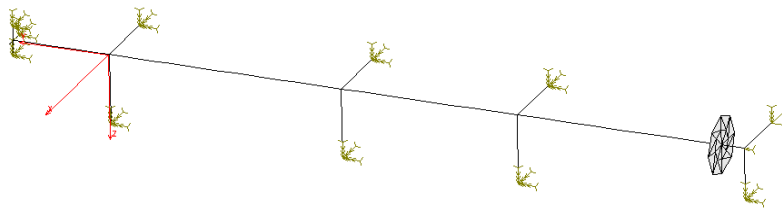


Рисунок 1 – КЭ модель валопровода

Таблица 1 – Собственные частоты валопровода (Гц)

№	КЭ модель валопровода, наружный диаметр 190 мм	1	2	3
1	Сплошной	19,81	22,08	22,2
2	Полый, внутренний диаметр 40 мм	19,82	22,38	22,44

На основе разработанной КЭ модели валопровода и КЭ модели фундамента из работы [4] были построены КЭ модели системы фундамент-валопровод со следующими характеристиками: 2504 конечных элементов, 1961 узлов, 11741 степеней свободы. КЭ модели системы отличаются вариантом валопровода (1 – сплошной, 2 – полый, см. табл. 1), размерами труб фундамента, конструкциями фундамента – однородной (из одинаковых труб) и комбинированной (верхняя часть из труб одного размера, нижняя – из труб другого размера).

Были проведены расчеты собственных частот и форм, результаты представлены в табл. 2 и на рис. 2.

Таблица 2 – Собственные частоты системы фундамент-валопровод (Гц).

№ модели системы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
№ модели валопровода	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	
Размер труб верхн. части фундамента	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	377 x	
Размер труб нижн. части фундамента	30	30	20	20	10	10	10	10	20	20	377 x	377 x	377 x	
Заполнение труб бетоном	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	
№	№ рис.													
1		5,9	5,9	5,6	5,6	4,8	4,8	4,2	4,2	4,6	4,6	5,2	5,2	4,2
2		6,9	6,9	6,5	6,5	5,6	5,6	5,0	5,0	5,4	5,4	6,1	6,1	4,9
3	2 слева	9,5	9,5	9,6	9,6	9,5	9,5	7,0	7,0	7,3	7,3	10,8	10,8	10,2
4	2 справа	13,7	13,7	13,6	13,6	13,1	13,1	9,4	9,4	10,1	10,1	14,2	14,2	13,7
5		15,2	15,2	15,0	15,0	14,3	14,4	10,4	10,4	11,2	11,2	15,5	15,6	14,5
6		21,5	21,8	21,3	21,5	18,6	18,6	16,3	16,3	18,5	18,6	19,2	19,2	14,7
7		21,8	22,1	21,6	21,9	20,5	20,7	17,5	17,5	20,4	20,5	21,2	21,4	19,4
8		23,0	23,0	23,3	23,3	20,9	21,1	19,5	19,6	23,0	23,2	21,6	21,8	19,6
9		25,9	25,9	23,4	23,4	23,4	23,4	21,5	21,5	23,4	23,4	23,2	23,2	21,3

Из табл. 2 видно следующее:

- различие спектров собственных частот систем валопровод-фундамент с полым и сплошным валопроводом практически отсутствуют;
- заполнение труб бетоном приводит к увеличению собственных частот

до рабочей частоты вращения валопровода 9,9 Гц, кроме этого не приводит к увеличению дистанции рабочей частоты от ближайшей собственной частоты системы;

- использование комбинированной конструкции фундамента (с различными размерами труб верхней и нижней части) приводит к уменьшению количества собственных частот до рабочей частоты 9,9 Гц (две частоты вместо 3-х) и увеличению дистанции между ближайшей собственной частотой системы и рабочей частотой вращения валопровода.

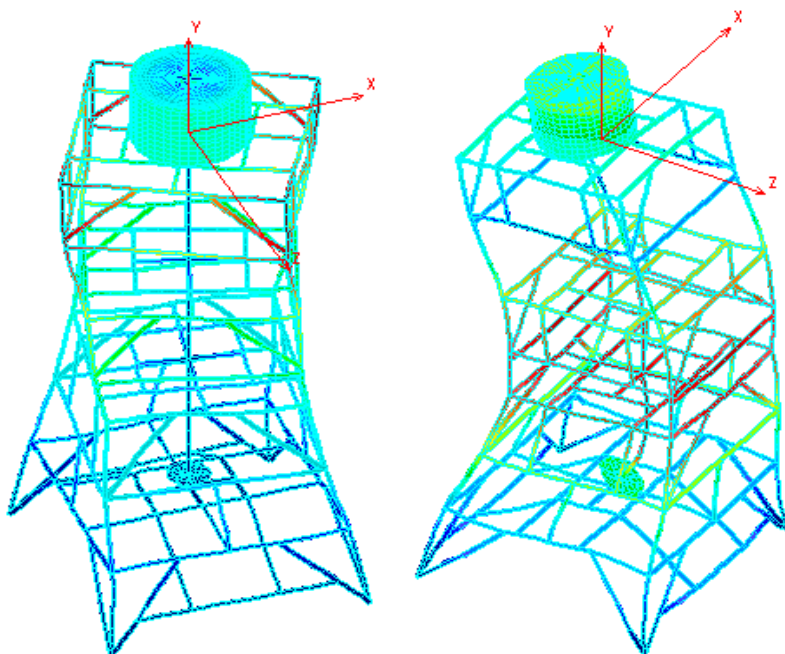


Рисунок 2 – Собственные формы колебаний системы фундамент-валопровод.

Первые две собственные формы колебаний системы валопровод-фундамент характеризуются изгибными деформациями (колебания вдоль осей Z (1-я), X (2-я)) и подобны первой изгибной собственной форме стержня жестко заземленного с одной стороны и со свободным концом на противоположной.

Третья собственная форма колебаний системы (рис. 2 слева) подобна кручению стержня. Она практически не приводит к деформированию валопровода, поэтому является наиболее допустимой для испытательного стенда.

Четвертая (рис. 2 справа) и пятая собственные формы характеризуются изгибными деформациями, подобны второй изгибной собственной форме консольно закрепленного стержня. Среди рассмотренных форм колебаний эти собственные формы колебаний наиболее опасны, поскольку приводят к наибольшему деформированию валопровода.



Из анализа собственных форм колебаний следует:

- заполнение труб фундамента бетоном приводит к появлению вблизи рабочей частоты 9,9 Гц двух собственных частот с наиболее опасными собственными формами колебаний (четвертая и пятая), что нежелательно;
- в конструкции без заполнения труб бетоном ближайшей к 9,9 Гц собственной частоте системы соответствует третья собственная форма колебаний (крутильная), которая является наименее опасной для валопровода.

Проведенное исследование собственных частот и форм различных вариантов системы валопровод-фундамент позволяет сделать следующие выводы:

- заполнение труб фундамента бетоном приводит к увеличению количества собственных частот до рабочей частоты вращения валопровода и появлению вблизи нее собственных частот с наиболее опасными формами колебаний, поэтому использование подобного заполнения не рекомендуется;
- использование комбинированной конструкции фундамента вместо однородной приводит к уменьшению количества собственных частот до рабочей частоты;
- среди рассмотренных вариантов системы валопровод-фундамент наилучшей является конструкция с полым валопроводом и комбинированным фундаментом (табл. 2, № 12).

**Список литературы:** 1. Богомолов С.И., Журавлева А.М. Колебания сложных механических систем. – Харьков: Вища школа, 1978. – 136 с. 2. Штромберг Ю.Ю., Понасечкин С.А., Копсов А.Я. Показатели работы отечественных теплотехнических блоков мощностью 300 МВт // Электрические станции. – 2000. – № 2. – С. 2-4. 3. Абашидзе А.И., Сапожников Ф.В., Казанджян А.Т. Фундаменты машин тепловых электростанций. – М.: Энергия, 1975. – 256 с. 4. Красников С.В. Моделирование опорной конструкции длинного валопровода // Вісник НТУ «ХП». – 2005. – № 20. – С. 121-124.

*Поступила в редколлегию 30.08.2006.*

УДК 539.3

*Л.В.КУРПА*, докт.техн.наук; *Е.И.ЛЮБИЦКАЯ*, НТУ «ХПИ»

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ**

Досліджено геометрично нелінійну поведінку пологих оболонок, виконаних із ортотропних матеріалів, які знаходяться під впливом поперечного навантаження. Пропонується метод лінеаризації нелінійних рівнянь та визначення верхнього та нижнього критичного навантаження, який базується на поєднанні варіаційних методів та теорії R-функцій. Алгоритм застосовано для дослідження ортотропної сферичної пологої оболонки складної форми в плані. Тестові результати для ізотропного матеріалу порівняно із наведеними в літературі.

Geometrically nonlinear behavior of orthotropic shallow shells subjected to the transverse load is investigated. The method of linearization of nonlinear equations and finding of upper and lower critical load, which is based on the combination of variational methods and R-function theory, is proposed. The algorithm is applied to solve problems of orthotropic spherical shallow shells with complex plan form. Test results of isotropic case are compared with those available in the literature.

Данная работа посвящена решению геометрически нелинейных задач изгиба ортотропных пологих оболочек. Нахождение точных решений для системы уравнений с частными производными, описывающей нелинейное поведение тонких пологих оболочек, в общем случае связаны с большими математическими трудностями, поэтому для решения подобных задач применяются различные приближенные методы. Следует заметить, что решение нелинейных краевых задач в рамках геометрически нелинейной теории пластин для областей неканонической формы затруднительно даже при использовании приближенных методов. В данной работе предлагается один из возможных способов решения указанной проблемы. В основу предложенного подхода положены теория R-функций и вариационные методы. Для линейаризации разрешающей системы нелинейных уравнений предложено использовать методы последовательных нагружений и Ньютона-Рафсона [1,2]. На каждом этапе нагружения решение ищется на гиперплоскости, которая строится перпендикулярно прямой, содержащей решения двух предыдущих этапов [3]. Таким образом, последовательно строится вся кривая деформирования оболочки.

Рассмотрим ортотропную пологую оболочку постоянной толщины  $h$ , на которую действует равномерно распределенная поперечная нагрузка  $q$ . В рамках геометрически нелинейной теории разрешающая система дифференциальных уравнений в смешанной форме может быть записана в безразмерном виде:

$$\frac{E_1}{12E_2(1-\nu_1\nu_2)} \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2 \left( \frac{\nu_2 E_1}{12E_2(1-\nu_1\nu_2)} + 2 \frac{G}{12E_2} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{12(1-\nu_1\nu_2)} \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4} + \bar{k}_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \bar{k}_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = Q; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} + \left( -2\nu_1 \frac{E_2}{E_1} + \frac{E_2}{G} \right) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \eta^4} + \bar{k}_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \bar{k}_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (2)$$

Разрешающая система уравнений дополняется граничными условиями, которые в случае жесткой заделки имеют вид:

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} + (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n \partial \tau^2} = 0. \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$W = w/h, \quad \Phi = \frac{\varphi}{E_2 h^3}, \quad Q = \frac{qb^4}{E_2 h^4}; \quad \xi = x/b, \quad \eta = y/b; \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 b^2}{h}; \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 b^2}{h}, \quad (4)$$

где  $w$  – прогиб,  $\varphi$  – функция напряжений,  $k_1, k_2$  – главные кривизны оболочки,  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона,  $E_1, E_2$  – модули упругости материала в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно,  $G$  – модуль сдвига.

Линеаризацию нелинейных уравнений (1), (2) предлагается выполнять методом последовательных нагружений, в ходе которого суммарное нагружение разбивается на ряд этапов. На каждом этапе решается линейная задача. Ввиду накопления погрешностей в результате многократного повторения процедуры нагружения, полученное решение рекомендуется уточнять. В данной работе решение уточняется методом Ньютона, который предусматривает следующую линеаризацию:

$$L_1(D_{ij})W_{n+1} - L(W_{n+1}, \Phi_n) - L(W_n, \Phi_{n+1}) = Q - L(W_n, \Phi_n);$$

$$L_2(A_{ij})\Phi_{n+1} + L(W_{n+1}, W_n) = -\frac{1}{2}L(W_n, W_n), \quad (5)$$

где  $W_n, \Phi_n$  – значения искомым функций на предыдущей итерации,  $Q$  – значение нагрузки, для которой получено решение по методу последовательных нагружений. Более детальное описание этого итерационного процесса может быть найдено в работе [4].

Таким образом, исходная нелинейная задача преобразовывается в последовательность линейных задач, для решения каждой из которых применен вариационно-структурный метод. Согласно вариационному методу Ритца, функции прогиба и напряжений представляются в виде разложения в ряд по полной системе координатных функций:

$$W = \sum_{i=1}^{N_1} a_i W_i, \quad \Phi = \sum_{i=1}^{N_2} a_i \Phi_i. \quad (6)$$

Здесь  $\{W_i\}, \{\Phi_i\}$  – последовательности координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям,  $a_i$  – неопределенные коэффициенты, которые определяются из условия стационарности соответствующего поставленной задаче функционала.

Для построения последовательностей координатных функций в работе используется теория R-функций, которая позволяет выполнять такие построения для конструктивных элементов со сложной геометрией области, с различными условиями закрепления. Реализация алгоритма выполнена в специализированной программирующей системе POLE-RL [5]. Согласно методу R-функций, строятся структурные формулы, удовлетворяющие заданным граничным условиям. В данной работе используются структурные формулы, удовлетворяющие только главным краевым условиям для заделки:

$$W = \omega^2 P_1; \quad \Phi = P_2. \quad (7)$$

Здесь  $\omega(\xi, \eta) = 0$  – уравнение границы рассматриваемой области,  $P_1, P_2$  –

неопределенные компоненты структурных формул, представляют собой разложения по некоторой полной системе функций, например, по степенным полиномам  $\{\varphi_i\}$ ,  $\{\psi_i\}$ :

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i ; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i \psi_i . \quad (8)$$

Выполняя подстановку (8) в (7), получаем системы координатных функций для разложения в ряд функции напряжений и прогиба.

При решении задач нелинейного изгиба пологих оболочек возникают трудности с прохождением через критические точки для нагрузки, которые обусловлены неоднозначной зависимостью функции прогиба от параметра нагружения. В настоящей работе эта проблема решена с помощью подхода, предложенного в [3], суть которого описана ниже.

В результате дискретизации задачи вариационно-структурным методом, линейаризованная система разрешающих дифференциальных уравнений (5) запишется в виде системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij} z_j = Q + b_i , \quad i = \overline{1, N_2} , \quad (9)$$

где  $N_2$  переменных  $z_j$  – коэффициенты неопределенных компонент структурных формул (8),  $z_{N_2+1} = Q$  – внешняя нагрузка, которая представляется следующим образом:

$$Q = \alpha Q_0 , \quad (10)$$

где  $\alpha$  – неизвестная постоянная,  $Q_0$  – заданная функция, которая определяет вид нагружения.

В силу линейности системы (9) допустимо такое представление ее решения:

$$z_j = \alpha \xi_{1j} + \xi_{2j} , \quad (11)$$

то есть (9) разделяется на две системы:

$$\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij} \xi_{1j} = Q_0 ; \quad \sum_{j=1}^{N_2} C_{ij} \xi_{2j} = b_i . \quad (12)$$

В  $(N_2 + 1)$ -мерном пространстве переменных решение системы (9) ищется итерационно. Пусть на двух шагах нагружения получены решения. В качестве таких решений можно взять тривиальное  $z_{1j} = 0$  и решение линейной задачи  $z_{2j}$ . Через точки  $z_{1j}$  и  $z_{2j}$  строим прямую и определяем на ней точку  $z_j = z_{1j} + \lambda(z_{2j} - z_{1j})$ , где  $\lambda$  – некий параметр, выбираемый специальным образом [4]. Перпендикулярно к прямой строим плоскость, содержащую выбранную точку:

$$\sum_{j=1}^{N_2+1} (z_{2j} - z_{1j}) [z_j - z_{1j} - \lambda(z_{2j} - z_{1j})] = 0 . \quad (13)$$

Параметр нагрузки определяем, выполнив подстановку (11) в (13):

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N_2+1} (z_{2j} - z_{1j}) \left[ z_{1j} + \lambda (z_{2j} - z_{1j}) - \xi_{2j} \right] / \sum_{j=1}^{N_2+1} (z_{2j} - z_{1j}) \xi_{1j}.$$

Сходимость итерационного процесса контролируется выполнением неравенства

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left( \frac{W_i^{(n+1)} - W_i^{(n)}}{W_i^{(n+1)}} \right)^2 + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \left( \frac{\Phi_i^{(n+1)} - \Phi_i^{(n)}}{\Phi_i^{(n+1)}} \right)^2 \leq \varepsilon, \quad (14)$$

где  $\varepsilon$  – заданная величина относительной погрешности, где  $n, n+1$  – номера двух соседних итераций.

Предложенный алгоритм протестирован на ряде примеров. В данной работе в качестве теста рассмотрена задача о геометрически нелинейном изгибе равномерно распределенной нагрузкой  $q$  изотропной ( $E = 1$ ;  $\nu = 0,3$ ) полой сферической оболочки толщины  $h$ , кривизны  $k$ , опирающейся на круглый план радиуса  $R$ . Край оболочки жестко закреплен (рис. 1).

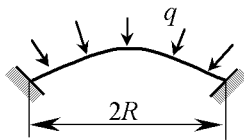


Рисунок 1

$\bar{k}$		4	5	6	7	8
[6]	$Q_B$	11,2	17,0	24,9	35,3	49,4
	$Q_H$	10,0	12,0	15,1	18,0	20,9
Данная работа	$Q_B$	11,3	17,0	24,8	35,3	49,4
	$Q_H$	10,2	12,5	15,1	18,1	21,2

Для различных значений кривизны оболочки в безразмерном виде найдены верхнее и нижнее критические значения действующей нагрузки; результаты представлены в таблице, где они сравниваются с данными, полученными ранее в работе [6]. Различие между результатами не превышает 4 %.

Зависимость «нагрузка-прогиб в центре» ортотропной полой оболочки с круглой формой плана, изготовленной из эпоксиборопласта ( $E_1/E_2 = 10$ ;  $G/E_2 = 1/3$ ;  $\nu_{12} = 0,22$ ), жестко заземленной по всему контуру, представлены на рис. 2.

Универсальность разработанного алгоритма относительно формы плана иллюстрируется на примерах сферических оболочек с формой плана, представленной на рис. 3. где  $d/R = 0,7$ ;  $c/R = 0,6$ . Предполагается, что контур оболочки жестко закреплен. Расчеты выполнены для изотропного материала и эпоксиборопласта. Полученные графики зависимостей «нагрузка-прогиб в центре» представлены на рис. 4 (изотропный материал), и рис. 5 (эпоксиборопласт).

Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы: значения верхней и нижней критических нагрузок для рассмотренного ортотропного материала значительно выше по сравнению с  $Q_B$  и  $Q_H$  для изотропного материала.

При наличии в оболочке боковых вырезов графики зависимостей нагрузка-прогиб имеют более плавный характер, разность между значениями  $Q_B$  и  $Q_H$  уменьшается, а сами значения критических нагрузок выше, чем для полой оболочки круглой формы плана.

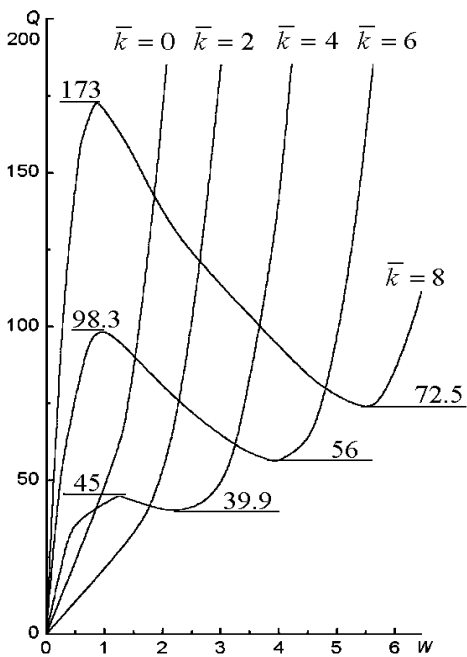


Рисунок 2

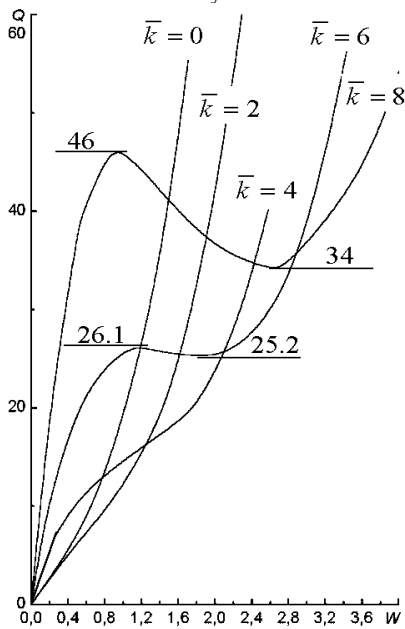


Рисунок 4

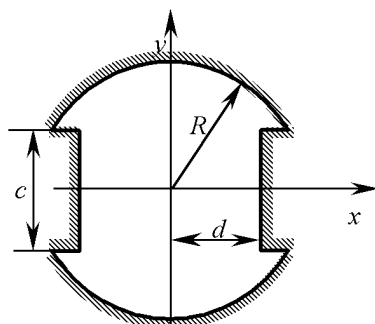


Рисунок 3

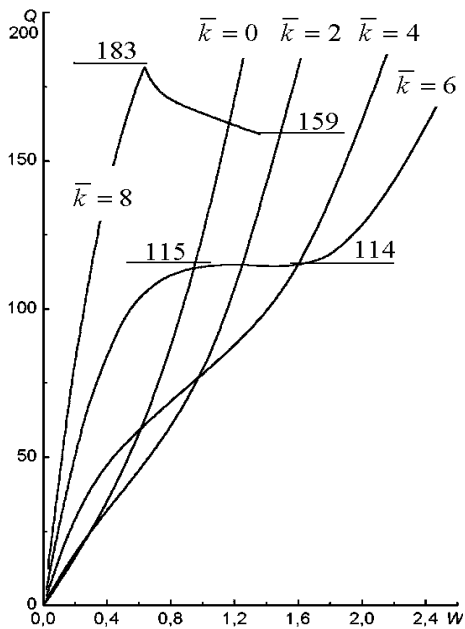


Рисунок 5

**Список литературы:** 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., 1982. – 552 с. 2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с. 3. Трошин В.Г. Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек // Прикладная математика и механика. –Т. 47, вып. 1. – 1983. – С. 101-107. 4. Курпа Л.В., Морачковская И.О., Склепус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории пологих оболочек // Проблемы машиностроения. – Т. 4, №1-2. – 2001. – С. 58-77. 5. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – К, 1988. – 198 с. 6. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М., 1963. – 880 с. 7. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К., 1987. – 176 с. 8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974. – 448 с.

*Поступила в редколлегию 1.06.2006.*

УДК 539.3

**Г.И.ЛВОВ**, докт.техн.наук; **А.Н.ТКАЧУК**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **О ВЛИЯНИИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ НА ХАРАКТЕР КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ**

Стаття присвячена дослідженню типів взаємодії тонкої циліндричної оболонки з жорстким бандажем, посадженням без попереднього натягу. Відшукані можливі конфігурації зон контакту та отримані розміри контактних зон при різних параметрах оболонки з урахуванням різних гіпотез деформування. Отримані результати відображені у вигляді діаграм на площині варіюваних параметрів.

The article is devoted to research of contact interaction between thin cylindrical shell and rigid bandage. All possible types of contact interaction and lengths of contact zones are obtained for different shell parameters and shell formulations. The obtained results are given by means of diagrams on parameter plane.

**Введение.** Как известно, в контактных задачах гипотезы деформирования оболочек существенно влияют на результат моделирования, а их применение приводит к различным качественным особенностям [1-8]. Так, решения, полученные с помощью гипотез Кирхгофа-Лява (далее – классическая теория оболочек), имеют сосредоточенные силы на границах зон контакта, а также возможно касание в точке или по линии с ненулевой контактной реакцией. Учет поперечного сдвига устраняет скачок в перерезывающей силе, а касание в точке или по линии реализуется с нулевой контактной силой. Однако на границах зон контакта контактное давление не обращается в ноль. Одной из причин этого является, например, то, что кинематические условия контакта записывается относительно перемещения срединной поверхности, а не лицевой, по которой и происходит контакт. Теории с учетом поперечного обжатия позволяют в первом приближении учесть этот фактор, и при их применении характерно обращение в ноль контактного давления на границах зон контакта и в точках касания. Отдельно следует отметить особенности решения при контакте в угловых точках, где классическая теория и теория с уче-

том сдвига дают сосредоточенную реакцию, теория с учетом обжатия – конечное контактное давление. Данные особенности приводят также к тому, что конфигурации зон контакта для одной и той же задачи, решенной с применением разных моделей, могут отличаться.

Вопросы, связанные с возможными конфигурациями зон контакта, рассмотрены в работах [1, 2, 8]. Так, было показано [8], что для бандажка контакт по всей ширине для классической теории оболочек и типа Тимошенко не реализуется.

При изменении исходных параметров задачи конфигурации зон контакта существенно изменяются, что усложняет решение, так как для идентификации конфигурации зон контакта необходимо перебрать все возможные их варианты. С учетом этого актуальной является задача исследования изменения конфигурации зон контакта при варьировании параметров и типа используемой модели оболочки. Ниже рассмотрены модели оболочек на основе классической теории, теории типа Тимошенко и теории Рейсснера-Власова, учитывающей обжатие оболочки.

**Постановка задачи.** В качестве объекта исследования была выбрана задача о контакте жесткого бандажка и бесконечной цилиндрической оболочки. Рассматривается тонкостенная изотропная цилиндрическая оболочка радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , нагруженная постоянным внутренним давлением  $p$  (рис. 1). В недеформированном состоянии на оболочку посажен без зазора и натяга массивный бандаж шириной  $2a$ , односторонний

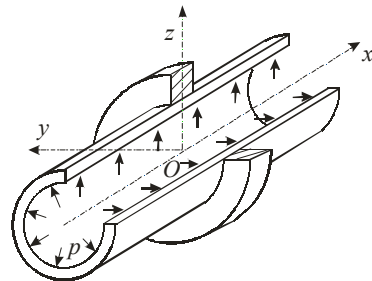


Рисунок 1 – Цилиндрическая оболочка с посаженным бандажом

контакт с которым стесняет деформирование оболочки. Наличием трения в контакте и продольным усилием в оболочке пренебрегается. Задача решается в осесимметричной постановке с учетом симметрии относительно плоскости  $yoz$ .

Ставится задача обнаружения возможных конфигураций зон контакта, а также определения соотношения параметров, при которых они реализуются.

**Теории оболочек.** Для решения контактных задач предложено множество теорий оболочек, в основу которых положены различные гипотезы деформирования. Кратко отметим основные соотношения данных теорий оболочек: дифференциальные уравнения изгиба в области контакта и свободной от контакта; физические соотношения; граничные условия и условия сопряжения решений на соседних участках.

Обозначим прогиб оболочки через  $w$ , а для теории типа Тимошенко поворот сечения – через  $\gamma$ . На промежутке, свободном от контакта, прогиб удовлетворяет уравнению осесимметричного изгиба цилиндрической оболочки вида [3]

$$Lw = p + Y \frac{d^2 p}{dx^2}, \quad (1)$$



где  $p$  – величина внутреннего давления,  $L$  – оператор задачи, общий вид которого:

$$L = D \frac{d^4}{dx^4} + P \frac{d^2}{dx^2} + K, \quad (2)$$

где  $D, P, K, Y$  – параметры оболочки, сведенные в таблице. Здесь же приведены физические соотношения, выражающие связь между моментами  $M$ , перерезывающими силами  $Q$  и перемещениями.

Общее решение в случае постоянной нагрузки на  $i$ -м участке оболочки представляется в виде:

$$w_i = e^{-sx} \left( c_1^{(i)} \cos rx + c_2^{(i)} \sin rx \right) + e^{sx} \left( c_3^{(i)} \cos rx + c_4^{(i)} \sin rx \right) + \frac{P}{K}. \quad (5)$$

Параметры оболочек и физические соотношения

Тип теории	$D$	$P$	$K$	$Y$	$M$	$Q$
Классическая/ Рейсснера-Власова	$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	0	$\frac{Eh}{R^2}$	0	$D \frac{d^2 w}{dx^2}$	$D \frac{d^3 w}{dx^3}$
Типа Тимошенко	$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	$\frac{Eh^3}{5R^2(1-\nu^2)}$	$\frac{Eh}{R^2}$	$\frac{h^2}{5(1-\nu)}$	$D \frac{d\gamma}{dx}$	$\Lambda \left( \gamma + \frac{dw}{dx} \right)$

Примечание:  $\Lambda = 5hG/6$  – жесткость на сдвиг;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, а  $E$  – модуль упругости материала оболочки.

В области контакта с бандажом модель для классической теории дает прогиб  $w = 0$ , давление на внутреннюю поверхность передается на бандаж через оболочку, контактное давление равно внутреннему. Для теории типа Тимошенко прогиб также равен нулю, однако дифференциальное уравнение (1) и физическое соотношение, содержащее  $Q$ , в этом случае принимает вид:

$$\begin{cases} Y \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + \gamma = 0; \\ \Lambda \frac{d\gamma}{dx} = p + p_k, \end{cases} \quad (6)$$

где  $p_k$  – величина контактного давления. Из системы дифференциальных уравнений (6) определяется контактное давление и деформация сдвига. Система уравнений (6) имеет второй порядок, и общее решение для  $\gamma$  имеет вид:

$$\gamma = c_1 ch \frac{x}{\sqrt{Y}} + c_2 sh \frac{x}{\sqrt{Y}}. \quad (7)$$

Для теории с учетом обжатия учитываются деформации  $\varepsilon_z$ . Проинтегрировав  $\varepsilon_z$  от срединной поверхности до внешней, получаем дифференциальное уравнение в области контакта:

$$Lw = p - cw - b \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (8)$$

где для теории Рейсснера-Власова  $c = \frac{32E}{13h}$ ,  $b = \frac{\nu h^2 E}{8R}$  [3]. Уравнение имеет четвертый порядок, и его решением служит функция, определенная выражением (5).

При  $x = 0$  имеется 2 граничных условия, выражающие симметрию решения:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \text{ и } Q = 0. \quad (9)$$

При  $x = \infty$  реализуется безмоментное состояние:

$$M = 0 \text{ и } Q = 0. \quad (10)$$

Для оболочек условия совместности деформаций зависят от выбора модели деформирования:

- для классической теории и теории Рейсснера-Власова прогиб и производная от прогиба непрерывны;
- для теории типа Тимошенко прогиб и угол поворота непрерывны.

Условия сопряжения в точках выхода из контакта для классической теории требуют непрерывности момента, теории Рейсснера-Власова и теории типа Тимошенко – момента и перерезывающей силы.

Области контакта соответствуют точкам или отрезкам на оси  $0x$ . Если конфигурация зон контакта известна, то всю область задачи можно разбить на  $m$  промежутков  $(a_i, a_{i+1})$ , внутри которых оболочка по всей длине свободно от контакта или находится в контакте, кроме того, в некоторых точках  $a_i$  оболочка может касаться бандажа. Для каждого промежутка решение можно представить в аналитическом виде, а на всем промежутке – в виде кусочно заданной функции  $w = w_i$ ,  $x \in (a_i, a_{i+1})$ , при этом  $a_0 = 0$ ,  $a_{m-1} = a$ ,  $a_m = \infty$ .

Таким образом, задача сводится к отысканию границ контакта зон  $a_i$  и постоянных интегрирования, которые определяются из граничных условий ( $x = 0$ ,  $x = \infty$ ) и условий сопряжений ( $x = a_i$ ,  $i = 1, m - 1$ ).

**Возможные типы решений.** В случае классической теории и теории типа Тимошенко безотрывный контакт для рассматриваемой задачи невозможен [8]. Наличие трех и более зон отрыва энергетически невыгодно и для обеих теорий не реализуется. Таким образом, для классической теории и теории типа Тимошенко возможны 3 конфигурации зон контакта, для которых прогибы оболочек схематически изображены на рис. 2.

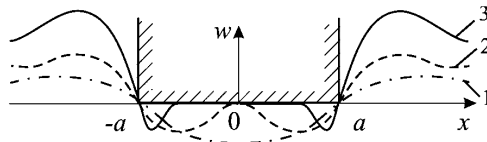


Рисунок 2 – Возможные конфигурации зон контакта: 1 – контакт в угловой точке бандажа; 2 – контакт в угловой точке бандажа и в центральной точке; 3 – контакт в угловой точке бандажа и на промежутке в центральной части

Для теории Рейсснера-Власова реализуется три качественных типа взаимодействия. Два из них аналогичны решениям 1, 3 (см. рис. 2) с тем отличием, что контактное взаимодействие в угловой точке происходит на отрезке конечной длины. Обозначим их как тип решения **а**, **в** соответственно. Третий тип реализуется при безотрывном контакте по всей ширине бандажа (тип **б**).

**Диаграммы типов решений.** Рассмотрим влияние параметров задачи на тип решения для классической теории. Для этого изучим первый тип решения.

Прогибы  $w_0$  и  $w_1$  определяются по формуле (5) при  $s = r = \beta = \sqrt[3]{3(1-v^2)}/R^2 h^2$ . Для определения 8 постоянных интегрирования используется 4 граничных условия и 4 условия сопряжения. Решение этой системы уравнений для постоянных  $c_{1,2,3,4}^{(i)}$  линейно зависит от величины давления и непрерывно от величины  $\alpha\beta$ . Как следствие, качественная картина взаимодействия не зависит от величины давления  $p$ , и прогиб в каждой точке непрерывно зависит от  $\alpha\beta$ .

Такой тип решения остается справедливым, если  $w_0 < 0$  на промежутке  $[0, a)$ . С ростом безразмерной ширины бандажа  $\alpha\beta$  прогиб в средней части уменьшается до тех пор, пока не достигает нуля и не появляется точка касания в центре бандажа. А это означает переход ко второму типу решения. Таким образом, переход от первого типа решения ко второму осуществляется через промежуточный тип решения, сочетающий свойства обоих типов решения, когда происходит касание с нулевой силой. Предельному состоянию соответствует условие касания при  $x = 0$   $w_0 = 0$ , из которого определяем предельное значение  $\alpha\beta$ , равное 0,9293.

Система уравнений для второго типа решения также обладает непрерывностью от параметра  $\alpha\beta$ . Переход от второго типа решения к третьему происходит через очередной промежуточный тип решения, когда кривизна в осевом направлении в точке касания достигает нуля, и соответствует значению параметра  $\alpha\beta = 1,1872$ . При дальнейшем увеличении  $\alpha\beta$  область контакта расширяется, однако при этом форма решения на втором и третьем участке не меняется.

Таким образом, определена качественная картина для зон контакта:

- при  $\alpha\beta < 0,9293$  реализуется первый тип решения;
- при  $0,9293 < \alpha\beta < 1,1872$  – второй;
- при  $\alpha\beta > 1,1872$  – третий.

Анализ качественной картины показал, что *сочетания параметров, обеспечивающих определенный тип решения, образуют сплошные области в пространстве параметров, а границы этих областей задаются множеством точек, соответствующих промежуточным решениям.*

Применим высказанную выше идею к модели типа Тимошенко. Рассмотрим решение для первого типа. Общее решение уравнения для прогибов  $w_0$  и  $w_1$  определяется по формуле (5) при  $s^2 = \beta^2(1 + kh/R)$ ;  $r^2 = \beta^2(1 - kh/R)$ ; где  $k = \frac{3}{5\sqrt{3(1-v^2)}}$ .

Для определения 8-ми постоянных интегрирования имеется 4 граничных условия и 4 условия сопряжения. Анализ этой системы уравнений показал,

что постоянные интегрирования  $c_{1,2,3,4}^{(i)}$  и значение прогиба в каждой точке изменяется линейно по  $p$  и зависят непрерывно от  $a\beta$  и  $k h/R$ .

Рассмотрим влияние на тип решения параметра  $a\beta$  при фиксированном значении  $k h/R$ . Для узких бандажей реализуется первый тип решения. С увеличением  $a\beta$  происходит касание при  $x = 0$  и переход в промежуточный тип решения. Однако для модели типа Тимошенко контакт с гладким телом по линии дает нулевую реакцию, и с ростом ширины  $a\beta$  сразу появляется зона контакта, то есть второй тип решения является промежуточным при переходе от первого к третьему. Такому состоянию соответствует условие касания при  $x = 0$ , исходя из которого определяется граница областей параметров, соответствующих решению первого и третьего типа.

Графически области можно представить в виде диаграммы (рис. 3). Для определенности здесь принято значение  $\nu = 0,3$ .

Для данной диаграммы характерно:

- при  $h/r \rightarrow 0$  граница областей типов решения стремится к предельной точке для классической теории ( $a\beta \approx 0,9293$ );
- учет фактора сдвига приводит к уменьшению относительной ширины бандажа, при котором происходит переходное состояние между типами решения.

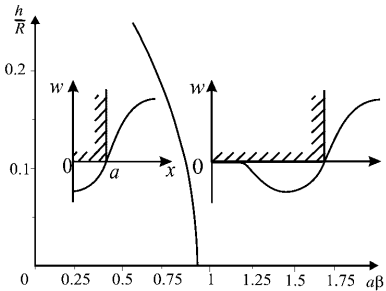


Рисунок 3 – Диаграмма решений для теории типа Тимошенко

Более сложная картина наблюдается для теории Рейсснера-Власова. Рассмотрение начнем со случая безотрывного контакта.

Общее решение уравнения для прогиба  $w_0$  определяется по формуле (5) при  $s = r = \beta(1 + 32R^2/13h^2)^{0,25}$  и для  $w_0$  при  $s = r = \beta$ . Для определения 8-ми постоянных интегрирования имеется 4 граничных условия и 4 условия сопряжения. Решение этой системы непрерывно зависит от параметров  $h/R$  и  $a\beta$ .

Такой тип решения остается справедливым, если  $w_0 > 0$  на промежутке  $[0, a]$ . При одновременном варьировании  $a$  и  $a\beta$  возможен переход этого в тип решения с отрывом от бандажа в средней части или на периферии. Отрыв в средней части соответствует предельному решению с условием касания при  $x = 0$ , исходя из которого определяется граница типов решений (а) и (б).

Свободная от контакта зона начинает возникать в точке  $a_1$ , в которой выполняются условия:

$$x = a_1 : w_0 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dw_0}{dx} = 0. \quad (11)$$

Исходя из этих условий определяется граница типов решений (б) и (в). Также рассматривается предельное решение при переходе (а) – (в). При этом необходимо определить 12 постоянных интегрирования и неизвестную ширину контакта  $a_1$ . Для этого используется 4 граничных условия и 9 условий сопряжения.

В ходе численного исследования данной системы были получены границы областей типов решения (рис. 4). Сами области обозначены соответствующими типам решения буквами.

Для полученной диаграммы можно отметить следующие свойства:

- при  $h/r \rightarrow 0$  граница областей (а) и (в) типов решения стремится к предельной точке для классической теории ( $a\beta \approx 0,9293$ );
- на диаграмме присутствует «тройная точка», в которой решение сочетает свойства всех трех типов, и при варьировании параметров в окрестности этой точки типы решений последовательно чередуются.

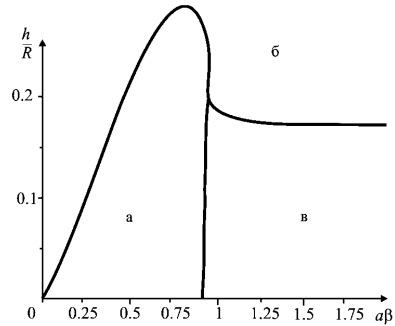


Рисунок 4 – Диаграмма решений для теории Рейсснера-Власова

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- качественная картина взаимодействия не зависит от величины давления  $p$ ;
- учет обжатия качественно изменяет конфигурацию зон контакта;
- зоны контакта при учете сдвига для тонких оболочек слабо зависят от  $h/r$ ;
- учет сдвига или обжатия регулирует модель Кирхгофа-Лява с параметром  $h/r$ , и при  $h/r \rightarrow 0$  решения по уточненным моделям стремятся к решению по гипотезам Кирхгофа-Лява, а на диаграммах соответствующие границы имеют свои аналоги;
- найденные в широком диапазоне параметров точные решения могут служить эталоном при верификации численных моделей оболочек при решении контактных задач;
- полученные диаграммы дают возможность заранее определять конфигурацию решения при заданных геометрических параметрах.

Предложенный подход представляется целесообразным для качественного анализа поведения решений контактных задач тонкостенных элементов при наличии нескольких возможных типов распределения контактных зон и давлений.

**Список литературы:** 1. *Пелех Б.Л., Сухорольский Н.А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наукова думка, 1980. – 216 с. 2. *Григолок Э.И., Толкачев В.М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с. 3. *Блох М.Б.* К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикладная механика. – 1977. – том XIII. – Вып. 5. – С. 34-42. 4. *Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М.* Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с. 5. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с. 6. *Василенко А.Т., Беспалова Е.И., Урусова Г.П.* О контактном взаимодействии между слоистой оболочкой вращения и жестким или упругим основанием // Прикладная механика. – 2005. – Том 41, № 5. – С. 68-75. 7. *Львов Г.И.* Взаимодействие упругопластической оболочки с жестким штампом // Прикладная механика. – 1980. – Том 16. – № 11. 8. *Детинко Ф.М., Фастовский В.М.* О посадке бандажа на цилиндрическую оболочку // Прикладная механика. – 1975. – Том II, вып. 2. – С.124-126.

Поступила в редколлегию 26.06.2006

**А.Н.ЛАРИН**, докт.техн.наук; **В.Б.КОХАНЕНКО**, канд.техн.наук,  
Академия гражданской обороны, Харьков;  
**В.И.КОНОХОВ**, канд.техн. наук; **С.М.ШКОЛЬНЫЙ**, канд.техн.наук;  
НТУ «ХПИ»

## **АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ ШИН**

Вирішення питань стомленої міцності та характеру зруйнування для пневматичних шин є досить складною проблемою по багатьом аспектам. Сучасні системи кінцево-елементного аналізу дозволяють отримати рішення для ряду моментів цієї проблеми.

Decided of problems of fatigue and type of failure for tires there are large complex in connections of many aspects. The contemporary systems of finite element analysis allow to obtained of solutions for the several moments of this total problem.

Решение контактной задачи для шины, подверженной локальным эксплуатационным нагрузкам, а также проектирование новых перспективных моделей не может осуществляться без ясного представления о характере распределения усилий в нитях корда и об особенностях деформирования наиболее ответственных элементов шины при ее нагружении внутренним давлением.

Эта задача всегда вызывала и продолжает вызывать неизменный интерес со стороны многих ученых, так как позволяет путем несложных расчетов выяснить работоспособность той или иной модели пневматической шины и тем самым оценить достоверность положенных в ее основу гипотез.

Основные виды разрушения резин в элементах пневматических шин связаны с усталостными явлениями, возникающими в результате динамических циклических деформаций элементов шины при качении по дороге.

Закономерности усталостного разрушения резины являются чрезвычайно сложными и до сих пор не выяснены, несмотря на большое количество работ, посвященных их исследованию.

Во многих элементах шины уже на стадии изготовления появляются внутренние дефекты, которые в процессе эксплуатации под действием циклического нагружения увеличиваются и в результате служат причиной внезапного разрушения. Кроме того, наличие резкой концентрации напряжений приводит к возникновению усталостной трещины уже на самой ранней стадии эксплуатации шины.

Среди основных эксплуатационных факторов, оказывающих влияние на работоспособность шин, можно выделить такие как: нагрузка на шину, углы установки управляемых колес, состояние дорожного покрытия, давление воздуха в шине.

Шину, как оболочку, в принципе, можно было бы учесть и непосредственно, что, однако, в случае нестационарного качения оказывается довольно сложным делом. Конструкция деформируемой периферии допускает математическое описание

в форме совокупности дифференциальных операторов, которые можно рассматривать как математическую модель деформируемого колеса.

Для колеса с пневматической шиной на результат составления определяющих уравнений в теории качения должны влиять такие особенности шины, как-то, что она является оболочкой переменной толщины, неоднородной, конструктивно анизотропной из-за различного расположения нитей корда и слоев каркаса. При этом следует учитывать, что оболочка не является тонкой, что существенное влияние имеют также давление, внутреннее трение, температурные факторы и большие деформации.

Задача о нахождении реакции в области контакта с учетом всех указанных особенностей в нестационарном режиме качения представляется весьма сложной. Как известно, даже случай статического нагружения колеса, с учетом всех названных факторов, вертикальной нагрузкой требует специальных методов расчета.

Преимущества феноменологического подхода заключаются в его относительной простоте и большей доступности с точки зрения понимания, так как здесь довольно свободно можно оперировать различными гипотезами, которые позволяют записать определяющие уравнения теории качения, не вникая во все тонкости сложных механических явлений, наблюдающихся в контактной области колеса.

При этом большинство констант теории, а их оказывается немало, приходится находить из опыта. Однако, если не удалось правильно угадать вид исходных зависимостей, то феноменологическая теория может давать существенные погрешности, а в попытке определить коэффициенты, которые предполагались постоянными, мы приходим к противоречиям. И это является очевидным недостатком феноменологического описания.

Проблема описания автомобильных шин с высокими технико-экономическими показателями требует тщательного изучения их прочности на этапе проведения проектных работ. Это в свою очередь вызывает необходимость в разработке математических моделей, алгоритмов и программ расчета шин при различных видах их нагружения.

Сложность решения контактной задачи для пневматической шины, подверженной действию эксплуатационных нагрузок, предполагает использование численных методов: тригонометрических рядов; локальных вариаций; конечных разностей; конечных элементов.

Исторически сложилось так, что метод представления вектора решений в виде тригонометрических рядов был первым из применяющихся в контактной задаче [1].

Приложение метода локальных вариаций к решению обсуждаемых задач дано в работе [2], в которой разработан усовершенствованный вариант метода, основанный на блочном варьировании неизвестных как по объему конструкции, так и между собой, что позволило уменьшить затраты машинного времени примерно на порядок.

Перспективным методом исследования контактной задачи является метод

конечных разностей. Определенный интерес вызывает работа [3], в которой показана возможность эффективного решения методом конечных разностей контактной задачи для предварительно напряженной шины в линейной и нелинейной постановках.

В последнее десятилетие метод конечных элементов начал применяться к расчету шин [4]. Этому способствовало и то обстоятельство, что за рубежом, в частности в США, были созданы программные комплексы, которыми можно пользоваться, не вдаваясь в детали самого метода.

К настоящему времени метод конечных элементов так и не удалось применить для решения контактной задачи, поставленной в полном объеме с учетом упомянутых особенностей современных шин.

Исследования шин в таксомоторных парках г. Харькова за 1985–1994 годы показал, что до 80 % шин выходят из эксплуатации по причине усталостных разрушений в конструкции шины и их восстановление нецелесообразно. Выход из строя шин по производственным дефектам не превышает 2 % от общего числа шин и ограничивается внутриводским контролем качества изготовления шин. Механические повреждения наблюдаются до 20 % случаев выхода шин от общего числа и сильно зависят от условий эксплуатации и величины пробега. До 50 % от общего числа шин выходит из строя по причинам усталостных разрушений (отрыв протектора, расслоение слоев шины, появление трещин на боковине).

Результаты, полученные в работе [5], по мнению авторов, позволяют оценить работоспособность выбранной конструкции шины. Приведено достаточно большое количество иллюстрационного материала по результатам расчетов. На рис. 1 приведено распределение поля распределения контактных давлений при одевании шины на обод, задании рабочего давления и нагружении радиальной нагрузкой (таблица справа отображает численное значение давлений). Однако при расчетах применялась двумерная модель шины, что по нашему мнению, приводит к неточностям в конечных результатах.

Расчет контактной задачи был выполнен авторами работы, для аналогичной шины, в трехмерной постановке и полученные результаты частично опубликованы в работе [6]. На рис. 2 показано вычисленное «пятно» контакта шины с дорогой, полученное путем обжатия шины на плоскости.

Решение контактной задачи было выполнено авторами работы, для аналогичной шины, в трехмерной постановке, а полученные результаты частично опубликованы в работе [6]. На рис. 2 показано вычисленное «пятно» контакта шины с дорогой, полученное путем обжатия шины на плоскости.

Нагружение бортовой зоны шины, которое было получено в работе [5], и представленное в табл. 1, характеризуется большим разбросом полученных расчетных величин и значительно превышает результаты, полученные различными авторами при теоретическом и экспериментальном исследованиях.

Результаты по исследованию нагружения бортовой зоны шины (рис.3), представленные в работах [7,8], были получены на достаточно простой модели боковины шины в виде переменного поперечного сечения единичной ширины



и хорошо согласуются с известными результатами других авторов, что характеризует неточность применения плоской модели шины при использовании метода конечных элементов.

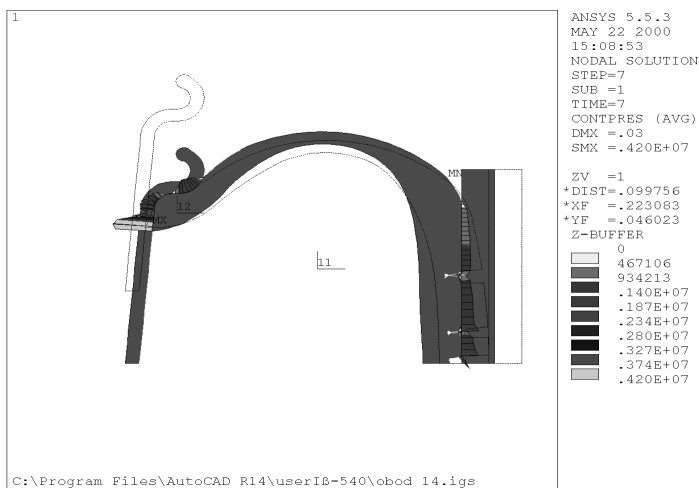


Рисунок 1 – Распределение контактных давлений при нагружении шины радиальной нагрузкой



Рисунок 2 – Контакт шины с дорогой

Таблица 1 – Величины напряжений и контактных давлений по борту шины

Варианты конструктивно-го исполнения шины	Контактные давления, Па	Напряжения в наполнительном шнуре, Па
1	420E+07	543683
2	287E+07	423169
3	428E+07	397012

Экспериментальные исследования являются пока единственным средством оценки нагруженности элементов шины в условиях эксплуатации, когда на шину действуют многие случайные факторы: состояние дорожного покрытия, режимы движения автомобиля, его техническое состояние и так далее. Для

экспериментального исследования нагруженности борта и боковины шины были изготовлены датчики больших деформаций из токопроводящей резины, которые не вносили значительного изменения в конструкцию шины.

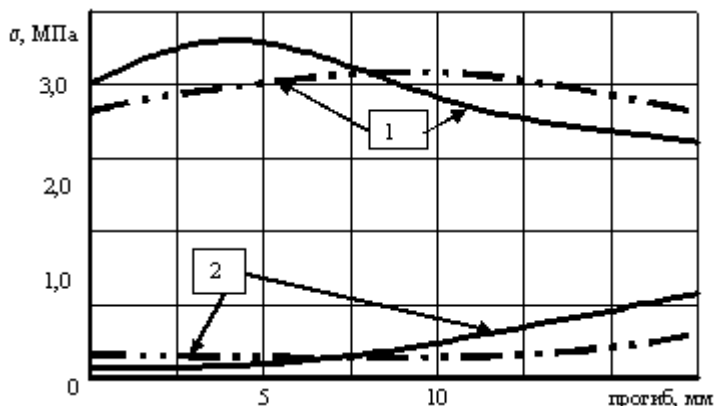


Рисунок 3 – Напряжения на поверхности шины в зоне борта для шины 205/70R14 (1 – наружная поверхность; 2 – внутренняя поверхность; пунктиром – 175/70R13)

Датчики укладывались в шинах на стадии сборки в виде розетки и регистрировали деформации в локальной зоне. Розетки размещались на кромках брекера, на каркасе, на боковине шины и в зоне борта шины. Эти зоны шины являются концентраторами напряжений, в которых больше всего выявляются дефекты разрушения. Исследования проводились на барабанном стенде в ведомом режиме движения колеса с различным сочетанием давления воздуха и нагрузки.

Для передачи электрического сигнала с тензометрических датчиков, установленных на вращающейся шине, был изготовлен специальный вал, на котором устанавливалась испытуемая шина. На валу были установлены специальные электрические разъемы и токоъемник.

На рис. 4-6 представлены результаты исследования шин различной конструкции бортового кольца при различном расположении датчиков деформаций. Самыми опасными сечениями являются зоны плеча и область бортового кольца.

Представленные в работе материалы позволяют сделать следующие выводы.

1. Имеющийся опыт работы с современными системами конечно-элементного анализа типа COSMOS/M, ANSYS при расчетах напряженно-деформированного состояния автомобильных шин дает основание признать, что вряд ли возможно делать уверенное прогнозирование улучшения эксплуатационных характеристик данных изделий при проведении расчетов для моделей в двухмерной постановке задач. Авторы работы [5] признают данный факт, ссылаясь на имеющийся дефицит ресурсов вычислительной техники, но вместе

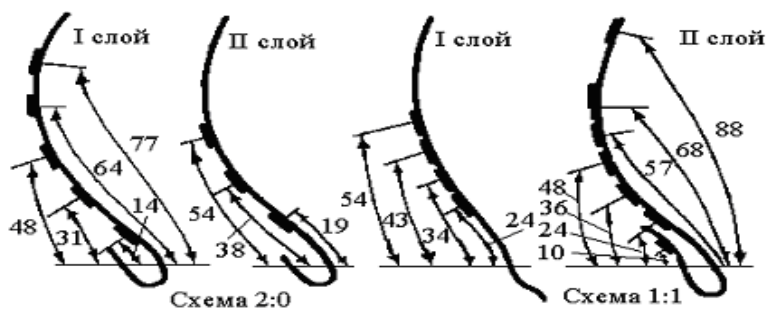


Рисунок 4 – Схема укладки датчиков деформаций по слоям боковины шины 205/70R14 модели ИД-220

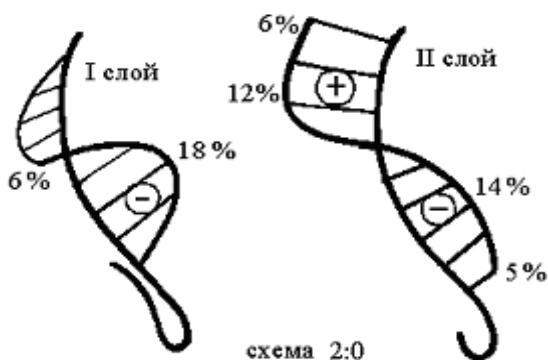


Рисунок 5 – Эпюры распределения деформаций боковины шины 205/70R13 модели ИД-220 со стандартной конструкцией бортового кольца

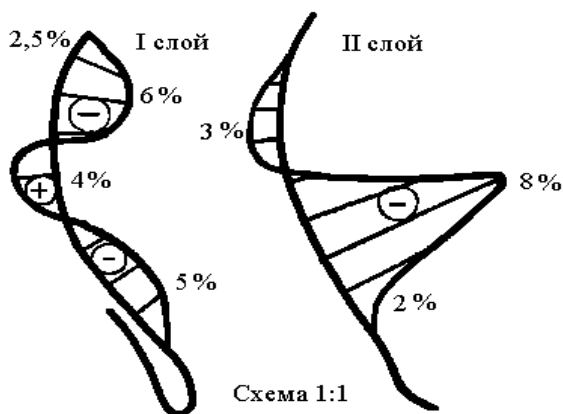


Рисунок 6 – Эпюры распределения деформаций боковины шины 205/70R13 модели ИД-220 с измененной конструкцией бортового кольца

с тем делают достаточно уверенные и точные прогнозы увеличения величины пробега проектируемых автомобильных шин, что вряд ли достаточно правомерно.

2. Современные системы конечно-элементного анализа позволяют создавать практически адекватные по конструктивной точности трехмерные расчетные модели автомобильных шин, что дает возможность получать решения для напряженно-деформированного состояния (НДС) в окружном направлении для каждой структурной составляющей изделия (гермослоя, слоев брекера, каркасного слоя, резины и т.д.), жесткостные характеристики которых в окружном направлении существенно отличаются.

3. Деформирование шины даже при обычном контакте с опорной поверхностью приводит к несимметричному напряженному состоянию, создавая значительные градиенты по окружным компонентам НДС, что особенно опасно в переходных зонах для различных материалов.

4. Основная сложность при постановке и решении проблем такого типа сводится к необходимости решения задач, объем которых по сравнению с задачами при обычной дискретизации возрастает на порядки. Кроме этого, необходимо производить уточнение и учет нелинейностей как физических, так и геометрических, а также учет зависимостей от температуры свойств составляющих структуру материалов, что требует значительных ресурсов применяемой компьютерной техники. И, наконец, хорошо известно, что реальное нагружение любой шины имеет практически вероятностный характер, а диапазон нагрузок при этом на 100% определяется качеством дорог.

**Список литературы:** 1. Бухин Б.Л. Расчет напряжений и деформаций в пневматических шинах при их вращении // Расчеты на прочность. – 1960. – № 6. – С. 56-66. 2. Кваша Э.Н. Контактная задача для опоясанной тороидальной оболочки // Расчет напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек. – Саратов: Изд-во СГУ. – 1981. – С. 10-12. 3. Николаев И.К. Математическая модель и численный метод для расчета шин на осесимметричную нагрузку // Труды междунар. конф. по каучуку и резине «Механика резины, конструирование и испытание резиновых изделий». – Секция В, Вып.2. – Киев, НИИШП. – 1978. – С. В19. 4. Akasaka T. Structural mechanics of radial tires // Rubber Chemistry and Technology. – 1981. – Vol. 54. – № 3. – P. 461-492. 5. Исследование вариантов напряженно-деформированного состояния шины 185/65 R14 модель Я-540 при различной топологии борта, методом конечных элементов, с целью выявления причин низкого пробега, в результате разрушения бортовой зоны каркаса // Отчет по НИР ОАО «Ярославский шинный завод»: Ярославль. – 2000. – 27 с. 6. Ларин А.Н., Школьный С.М. Контактная задача пневматической шины как слоистой анизотропной оболочки // Динамика и прочность машин: Сб. научн. тр. Харьковского государственного политехнического университета, вып. 57. – Харьков: ХГПУ. – 2000. – С. 35-43. 7. Ольшанский В.П., Ларин А.Н. Об изгибе боковины шины // Автомобильный транспорт: Сб. научн. тр., вып. 1. – Харьков: ХГАДТУ, 1998. – С. 38-40. 8. Ольшанский В.П., Ларин А.Н., Коханенко В.Б. О распределении изгибных напряжений в боковине шины температуры // Информационные технологии: наука, техника, образование, здоровье: Сб. научн. тр. ХГПУ. вып. 7. в четырех частях. ч.1. – Харьков: Харьк. гос. политехн. ун-т. – 1999. – С. 341-344.

*Поступила в редколлегию 08.06.2006*

*О.С.МАЗУР*, НТУ «ХПИ»

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В роботі запропоновано метод побудови областей динамічної нестійкості (ОДН) у випадку коливань пластин складної геометрії. В основу запропонованого методу покладено використання теорії R-функцій та варіаційних методів. Отримані нові чисельні результати для пластин складної форми.

The method of construction of dynamic instability region for plates with complex form is offered. The proposed approach is based on application R-function method and variational one. New numerical results for plates with complex form are obtained.

В работе рассматривается задача о параметрических колебаниях пластин сложной формы. Исследованию этого вопроса посвящено достаточно большое количество публикаций [1,2,6,7]. В данной статье излагается методика построения областей динамической неустойчивости для пластин сложной геометрии. Результаты подобных исследований можно найти в монографии [1]. В этой работе решается задача построения областей динамической неустойчивости для пластин и оболочек канонической формы, также в работе указано на допустимость определения границ ОДН исходя из линеаризованных уравнений движения.

Предложенный в данной работе метод основан на использовании теории R-функций [5], что позволяет исследовать пластины сложной геометрии с различными типами краевых условий.

**Постановка задачи.** Рассмотрим изотропную пластину постоянной толщины  $h$ , нагруженную равномерно распределенной продольной нагрузкой  $P = P_0 + P_1 \cos \theta t$ . Система дифференциальных уравнений движения [1], в безразмерной форме может быть представлена следующим образом:

$$A\bar{U} = \bar{N}I(w), \quad (1)$$

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = NL_1(u, v, w) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\text{где } \bar{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix};$$

$$\bar{N}I(w) = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (w_{,x}^2 + \mu w_{,y}^2)_{,x} + \frac{1-\mu}{2} (w_{,x} w_{,y})_{,y} \\ \frac{1-\mu}{2} (w_{,x} w_{,y})_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,y}^2 + \mu w_{,x}^2)_{,y} \end{pmatrix},$$

$$NL_1(u, v, w) = w_{,xx} N_x(u, v, w) + 2w_{,xy} N_{xy}(u, v, w) + w_{,yy} N_y(u, v, w),$$

$\mu$  – коэффициент Пуассона,  $N_x, N_y, N_{xy}$  – усилия в срединной плоскости.

Связь между размерными и безразмерными параметрами имеет следующий вид

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; \quad y = \frac{\bar{y}}{a}; \quad w = \frac{\bar{w}}{h}; \quad u = \frac{\bar{u}a}{h^2}; \quad v = \frac{\bar{v}a}{h^2}; \quad N_x = \frac{\bar{N}_x a^2}{Eh^3};$$

$$N_y = \frac{\bar{N}_y a^2}{Eh^3}; \quad N_{xy} = \frac{\bar{N}_{xy} a^2}{Eh^3}; \quad t = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t; \quad P = \frac{\bar{P} a^2}{Eh^3},$$

где  $\rho$  – плотность пластины,  $E$  – модуль Юнга.

**Метод решения.** Для удобства изложения метода введем некоторые обозначения:

1. Представим нормальное и касательное усилия в виде суммы линейной составляющей и нелинейной добавки

$$N_n = N_n^L + N_n^D; \quad S_n = S_n^L + S_n^D,$$

где

$$N_n^L = \frac{1}{(1-\mu^2)} [u_{,n} l + v_{,n} m + \mu(v_{,\tau} l - u_{,\tau} m)]; \quad N_n^D = \frac{1}{2(1-\mu^2)} [w_{,n}^2 + \mu w_{,\tau}^2];$$

$$S_n^L = \frac{1}{2(1+\mu)} [-u_{,n} m + v_{,n} l + u_{,\tau} l + v_{,\tau} m]; \quad S_n^D = \frac{1}{2(1+\mu)} w_{,n} w_{,\tau}.$$

Здесь  $n, \tau$  – нормаль и касательная к границе области  $\partial\Omega$ ,  $l, m$  – направляющие косинусы нормали.

2. Через  $NL_2(u, v, w)$  обозначим следующее выражение

$$NL_2(u, v, w) = w_{,xx} N_x^L(u, v) + 2w_{,xy} N_{xy}^L(u, v) + w_{,yy} N_y^L(u, v),$$

где

$$N_x^L = \frac{1}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \quad N_y^L = \frac{1}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad N_{xy}^L = \frac{1}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

Решение системы (1-2) представим в виде

$$w(x, y, t) = y(t) w_1(x, y),$$

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) + u_{0t}(x, y) \cdot \cos \theta t + y^2(t) u_1(x, y),$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y) + v_{0t}(x, y) \cdot \cos \theta t + y^2(t) v_1(x, y),$$

где вектор  $\bar{U}_0 = (u_0, v_0)^T$  — решение плоской задачи теории упругости

$$A\bar{U}_0 = 0$$

с граничными условиями для нагруженного участка

$$N_n^L(u_0, v_0) = -P_0; \quad S_n^L(u_0, v_0) = 0$$

и для остальной части

$$N_n^L(u_0, v_0) = 0; \quad S_n^L(u_0, v_0) = 0;$$

вектор  $\bar{U}_{0t} = (u_{0t}, v_{0t})^T$  – решение плоской задачи теории упругости

$$A\bar{U}_{0t} = 0$$

с граничными условиями для нагруженного участка

$$N_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = -P_t; \quad S_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = 0$$

и для остальной части

$$N_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = 0; \quad S_n^L(u_{0t}, v_{0t}) = 0;$$

$w_1$  – основная форма линейных колебаний сжимаемой пластины, удовле-

творяющая заданным граничным условиям для прогиба; вектор  $\bar{U}_1 = (u_1, v_1)^T$  – решение плоской задачи теории упругости

$$A\bar{U}_1 = \bar{N}L(w_1),$$

с граничными условиями

$$N_n^L(u_1, v_1) = -N_n^D(w_1); \quad S_n^L(u_1, v_1) = -S_n^D(w_1).$$

Подставляя выражения для  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – в уравнение (2) получаем дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами

$$y_t''(t) + \omega_L^2 (1 - \alpha - \beta \cdot \cos \theta t) y(t) + \gamma y^3(t) = 0, \quad (3)$$

где  $\omega_L$  – основная частота линейных колебаний пластины, коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  определяются как

$$\alpha = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} NL_2(u_0, v_0, w_1) w_1 d\Omega;$$

$$\beta = \frac{1}{\omega_L^2 \|w_1\|^2} \iint_{\Omega} NL_2(u_{0t}, v_{0t}, w_1) w_1 d\Omega;$$

$$\gamma = -\frac{1}{\|w_1\|^2} \iint_{\Omega} NL_1(u_1, v_1, w_1) w_1 d\Omega.$$

Векторы  $\bar{U}_0$ ,  $\bar{U}_{0t}$ ,  $\bar{U}_1$ , функция  $w_1$  и частота  $\omega_L$  определяются средствами теории R-функций в сочетании с методом Ритца.

Полагая в (3)  $\gamma = 0$ , получаем уравнение

$$y_t''(t) + \omega_L^2 (1 - \alpha - \beta \cdot \cos \theta t) y(t) = 0.$$

Преобразуем его к виду

$$y_t''(t) + \Omega^2 (1 - 2k \cdot \sin(\theta t)) y(t) = 0, \quad (4)$$

где

$$\Omega^2 = \omega_L^2 (1 - \alpha)$$

– частота собственных колебаний пластины, нагруженной постоянной составляющей продольной нагрузки,

$$k = \frac{\beta}{2(1-\alpha)}$$

– коэффициент возбуждения.

Свойства уравнения (4) (уравнение Матье) хорошо изучены. При некоторых сочетаниях параметров  $\Omega$  и  $k$ , уравнение имеет неограниченно возрастающие решения. Области устойчивых и неустойчивых решений заключены между кривыми, подробное описание построения которых можно найти, например, в [1].

В данной работе мы исследуем главную область динамической неустойчивости, лежащую вблизи  $\theta = 2\Omega$ . Границы главной ОДН

$$\theta = 2\Omega\sqrt{1-k}, \quad \theta = 2\Omega\sqrt{1+k}. \quad (5)$$

Как видно из формул (5), границы области динамической неустойчивости определяются постоянной составляющей нагрузки  $P_0$ .

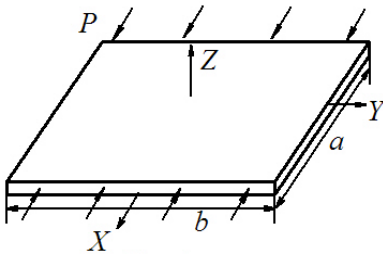


Рисунок 1

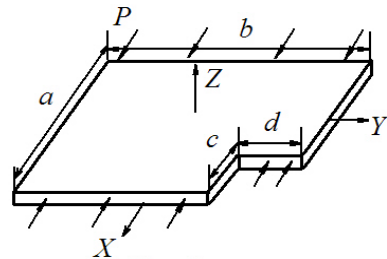


Рисунок 2

**Численные результаты.** Для иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим прямоугольную пластину, сжимаемую периодической нагрузкой  $P = P_0 + P_t \cos \theta t$  вдоль сторон параллельных оси  $OY$  (рис. 1). Граничные условия для рассматриваемой задачи положим следующие: на сторонах  $y = b/2$ ;  $y = -b/2 - v = 0$ ;  $S_n = 0$ , на сторонах  $x = a/2$ ;  $x = -a/2 - N_n = -P$ ;

$S_n = 0$ , для прогиба вдоль всего контура выполняются условия  $w = 0$ ;  $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$ .

Для рассматриваемой задачи, были получены следующие значения коэффициентов.

Для сравнения результатов, в табл. 1 приведены значения частоты и коэффициента возмущения, полученные в работе [1].

Рассчитав по формулам (5), получаем критические частоты для главной ОДН.

Пример 2. Рассмотрим пластину сложной геометрии, сжимаемую периодическими усилиями (рис. 2). Краевые усилия для данной задачи рассмотрим следующие: на сторонах  $y = b/2$ ;  $y = -b/2 - v = 0$ ;  $S_n = 0$ , на участках контура параллельных оси  $OY - N_n = -P$ ,  $S_n = 0$ , на остальной части контура  $N_n = 0$ ,



$S_n = 0$ . Для  $w$  выполняются условия  $w = 0$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$ .

Таблица 1

$P_0$		0,5	1	1
$P_t$		0,5	0,5	1
$\alpha$		0,18	0,36	0,36
$\beta$		0,18	0,18	0,36
$\gamma$		20,59	20,59	20,59
$\Omega$	RFM	5,40	4,78	4,78
	[1]	5,41	4,78	478
$k$	RFM	0,11	0,14	0,28
	[1]	0,11	0,14	0,28

Таблица 2

$P_0$	0,5	1	1
$P_t$	0,5	0,5	1
$\theta_1$	10,21	8,87	8,11
$\theta_2$	11,40	10,21	10,82

В случае рассматриваемых краевых условий для решения плоских задач теории упругости была построена структура решения, удовлетворяющая главным граничным условиям в виде

$$u_i = P_i; \quad v_i = \omega_1 P_{i+2}; \quad i = 0, 1; \quad u_{0t} = P_4; \quad v_{0t} = \omega_1 P_5.$$

Для функции прогиба  $w_1$ , структура выбрана в виде

$$w_1 = \omega P_6.$$

В формулах  $P_i$   $i = 1 \dots 6$  – неопределенные компоненты структуры решения, представляющие собой разложение по некоторой полной системе функций;  $\omega(x, y) = 0$  – нормализованное уравнение всей границы области, то есть функция  $\omega(x, y)$  удовлетворяет условиям

$$\omega(x, y) = 0; \quad (x, y) \in \partial\Omega;$$

$$\omega(x, y) > 0; \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial n} = 1; \quad (x, y) \in \partial\Omega;$$

$\omega_1(x, y) = 0$  – нормализованное уравнение вертикальной полосы. Построение функции  $\omega(x, y) = 0$  выполнено средствами теории R-функций:

$$\omega(x, y) = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4), \quad (6)$$

где

$$f_1 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right); \quad f_2 = \frac{1}{b} \left( \left( \frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right); \quad f_3 = y - d; \quad f_4 = x - c.$$

В формуле (6) используются R-операции, которые определяются как [5]

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2} ; \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Численные исследования проводились при различных значениях геометрических параметров  $c$  и  $d$ , с целью анализа влияния выреза на ОДН. В табл. 3 приведены значения частоты  $\Omega$  полученные для пластины нагруженной статической нагрузкой  $P_0 = 1$ .

На рис. 3 представлены ОДН (заштрихованная область) для различных значений геометрических параметров  $c$  и  $d$ . Не сложно заметить, что с уменьшением выреза пластины область динамической неустойчивости смещается по оси ординат вниз (рис. 3).

Таблица 3

	I	II	III	IV
$c/a$	0,4	0,3	0,2	0,1
$d/a$	0,4	0,3	0,2	0,1
$P_0 = 1$				
$\Omega$	10,22	7,60	5,99	5,06

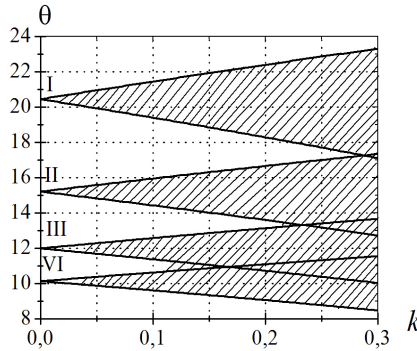


Рисунок 3

В табл. 4 представлены значения коэффициента возбуждения  $k$ , критических частот  $\theta_1, \theta_2$ , для  $P_t = 0,5; 1$ .

Рассмотрим задачу о параметрических колебаниях в нелинейной постановке. Как отмечалось ранее, решение этой задачи сводится к исследованию нелинейного дифференциального уравнения (3). В табл. 5 представлены значения коэффициента  $\gamma$ , полученного для различной величины выреза. На рис. 4 построены амплитудно-частотные характеристики  $A/\theta$  ( $A = w_{\max}/h$ ) для случая  $c/a = d/a = 0,3$ . По оси ординат отложено максимальное значение амплитуды колебаний ( $t \in [0, 200]$ ,  $w_0 = 0,0001$ ) для каждой фиксированной частоты. Для каждого из случаев рассматриваются интервалы частот покрывающие ОДН.

Анализируя полученные результаты, замечаем, что в пределах ОДН амплитуда возрастает, за пределами ОДН амплитуда параметрических колебаний такого же

порядка, что и начальный прогиб  $w_0$ . Полученные амплитудно-частотные характеристики подтверждают утверждение о допустимости определения границ ОДН исходя из уравнений линейной теории колебаний в случае пластин сложной формы. Таким образом, исследование линейных параметрических колебаний является предварительным этапом для решения нелинейной задачи.

Таблица 4

	I	II	III	IV
$c/a$	0,4	0,3	0,2	0,1
$d/a$	0,4	0,3	0,2	0,1
$P_0 = 1, P_1 = 0,5$				
$k$	0,04	0,07	0,09	0,13
$\theta_1$	19,95	14,68	11,39	9,46
$\theta_2$	20,86	15,69	12,52	10,74
$P_0 = 1, P_1 = 1$				
$k$	0,09	0,13	0,19	0,25
$\theta_1$	19,50	14,15	10,79	8,76
$\theta_2$	21,32	16,17	13,06	11,32

Таблица 5

	I	II	III	IV
$c/a$	0,4	0,3	0,2	0,1
$d/a$	0,4	0,3	0,2	0,1
$\gamma$	31,82	25,98	22,82	20,81

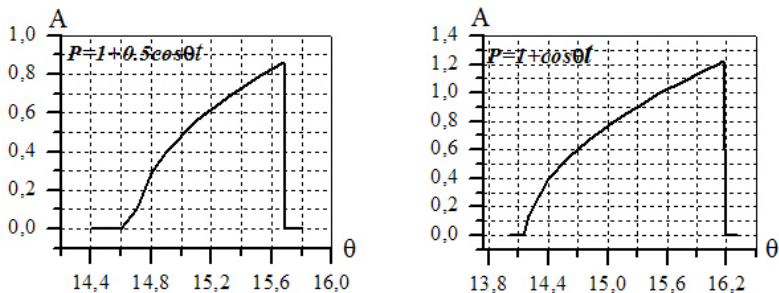


Рисунок 4

**Список литературы:** 1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М: Гостехиздат, 1956. 2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М: Наука, 1972. – 432 с. 3. Григоренко Я.М., Гуляев В. И., Дяхтерюк Е. С., Чемолаев В. В. Устойчивость нелинейных колебаний пологих прямоугольных в плане цилиндрических оболочек // Механика твердого тела. – 1983. – № 6. – С. 137-142. 4. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикладная механика. – 1998. – 34. – С. 3-31. 5. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К.: Наукова думка, 1987. – 175 с. 6. Шмидт Г. Параметрические колебания. – М.: Мир, 1978. – 336 с. 7. Awrejcewicz J., Krysko A. V. Analysis of complex parametric vibrations of plates and shells using Bubnov-Galerkin approach // Applied Mechanics. – 2003. – 73. – PP. 495-504.

Поступила в редколлегию 22.05.2006

*С.А. НАЗАРЕНКО*, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»

## **АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ**

В статті пропонуються методи аналізу чутливості складних скінченноелементних моделей при дії фізичних полів різної природи. Досліджено обчислювальні етапи одержання градієнтів функціоналів механічних систем за наявності силової, електромагнітної і теплової дій. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарату.

Coupled-field analyses are useful for solving problems where the coupled interaction of phenomena from various disciplines of physical science is significant. There are basically two methods of coupling distinguished by the finite element formulation techniques used to develop the matrix equations. Complicated finite-element models with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis methods are given in this article. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Интенсификация рабочих процессов, усложнение конструктивных форм, применение новых конструкционных материалов и технологий обуславливают необходимость расширения интеграции и взаимодействия математических моделей высокого уровня, обеспечивающих инновационные решения широкого спектра multidisciplinary проблем жизненного цикла изделий [1,2]. Анализ чувствительности позволяет производить оценку изменений без перестройки всей конструкции. Анализ чувствительности позволяет решить целый ряд практических задач на всех этапах жизненного цикла конструкций – от проектирования до контроля эффективной эксплуатации [3]. В настоящее время практически отсутствуют работы, посвященные multidisciplinary анализу чувствительности конструкций.

Целью проведенных исследований была разработка методики анализа чувствительности сложных конечноэлементных моделей при воздействии физических полей различной природы; ориентированной на большие размерности векторов переменных состояния и проектирования. Предпосылкой данной разработки является предположение о том, что всеобъемлющая теория multidisciplinary анализа чувствительности может быть рассмотрена при помощи единого подхода, т.к. задачи теории поля (теплопроводность, гидромеханика, расчет электрических или магнитных полей и т.д.) сводятся к системе уравнений, аналогичной соотношениям МКЭ для задач механики деформируемого твердого тела, являющегося наиболее мощным, универсальным и распространенным методом расчета.

Разработанная методика анализа чувствительности предполагает следующую последовательность вычислительных этапов: КЭ дискретизация задачи анализа; введение вектора сопряженных переменных; введение пространственных проектных переменных; вычисление градиентов функционалов.

Рассмотрим особенности анализа чувствительности мультифизических конечноэлементных моделей конструкций различной степени связанности: последовательная (при одностороннем взаимодействии), слабая с учетом обрат-

ных связей(при двустороннем взаимодействии), сильная (полная). Основным отличием моделей последовательной(слабой) степени связанности от сильной является отсутствие внедиагональных блоков связи глобальных матриц состояния различных физических задач.

Примерами конструкций, для которых важен учет воздействия сильносвязанных физических полей различной природы, являются пьезоэлектрические устройства акустоэлектроники. Исходными соотношениями состояния для данной задачи будут уравнения пьезоэффекта, отражающие взаимосвязь тензоров механических напряжений и деформаций, векторов электрической индукции и напряженности; квазистатические уравнения Максвелла; уравнения движения элемента среды; а также соотношения Коши. После применения вариационного принципа и конечноэлементной дискретизации, конечноэлементные соотношения для задачи о собственных колебаниях в матричной форме для пьезоэлемента представляются в виде  $K_{yy} \cdot \vec{y} + K_{y\phi} \vec{\phi} - \omega^2 M_{yy} \cdot \vec{y} = 0$ ;  $K_{y\phi}^T \vec{y} + K_{\phi\phi} \vec{\phi} = 0$ , где  $K_{yy}$ ;  $K_{y\phi}$ ;  $K_{\phi\phi}$  – соответственно матрицы жесткости; пьезоэлектрической связи; диэлектрической проницаемости,  $M$  – матрица масс системы;  $\vec{y}$  и  $\vec{\phi}$  – вектора узловых перемещений и потенциалов электрического поля в пьезоэлектрике.

Градиент собственного значения имеет вид [4]  $\lambda'_{i_i} = \vec{y}^T [K' - \lambda M'] \vec{y} / \vec{y}^T M \vec{y}$

(1). Рассмотрим особенности дифференцирования матриц жесткости объемного изопараметрического конечного элемента по координатам точек поверхности. Отметим что, матрицы  $K_{yy}$ ;  $K_{y\phi}$ ;  $K_{\phi\phi}$  вычисляются одновременно как «обобщенная» матрица жесткости, при этом в каждом узле элемента считаются неизвестными три перемещения и потенциал электрического поля. В соответствии с правилами дифференцирования сложных функций можно записать следующие соотношения

$$\frac{d[K^e]}{dx_{il}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{dB^T}{dx_{il}} DB \det[J] + B^T D \frac{dB}{dx_{il}} \det[J] + B^T DB \frac{d \det[J]}{dx_{il}} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad \text{где}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} C^E & -P \\ -P^T & E^s \end{bmatrix}, \quad C^E - \text{матрица модулей упругости, измеренных при постоянной}$$

напряженности электрического поля;  $P$  – матрица пьезоэлектрических коэффициентов;  $E^s$  – матрица коэффициентов диэлектрической проницаемости, измеренных при постоянной механической деформации.

Примерами конструкций, для которых важен учет воздействия последовательносвязанных физических полей различной природы, являются колеса турбины, нагруженные тепловым потоком от выхлопных газов цилиндров ДВС. Уравнения состояния термоупругости получаются согласно гипотезе Дюамеля-Неймана, путем замены вектора упругих деформаций вектором  $(\vec{\epsilon} - \delta T)$ , где  $\delta$  – коэффициент теплового расширения,  $T$  – приращение температур, зависящее от координат и времени. Температурное нагружение оказывает двоякое действие: вызывает дополнительные статические напряжения,

связанные с градиентом температур, и приводит к изменениям физико-механических характеристик материала. Задача анализа включает в себя: 1) задачу стационарной теплопроводности  $\Lambda \vec{T} = \vec{Q}$ , где  $\Lambda$  – матрица теплопроводности,  $\vec{Q}$  – вектор обобщенной тепловой нагрузки; 2) задачу термоупругости  $K\vec{Y} = \vec{F}_0$ , где  $\vec{Y}$  – обобщенный вектор термоупругих перемещений. Совместное решение задачи теплофизики и механики позволяет, с одной стороны, возможность экономии времени (например, за счет генерации единой КЭ сетки), а с другой стороны – более точно задавать нагрузки. Анализ проводился с использованием циклической симметрии. Температурные напряжения для колеса турбины ТКР-8.5-ТВ. составляют порядка 5...7 % напряжений от центробежных сил. Полная модель колеса турбины связана также с решением задач термогазодинамики и колебаний.

Задача анализа резонансного состояния колеса турбины в поле центробежных сил, представляет собой матричную проблему  $K(\vec{u})\vec{y}_s = \vec{F}(\vec{u})$ ,  $[K + G(\vec{y}_s) - \lambda M]\vec{y}_d = 0$  (2), где  $G(\vec{y}_s, \vec{u})$  – матрица «геометрической» жесткости (приведенных начальных напряжений), формируемая на решении  $\vec{y}_s$  статической задачи;  $\vec{u}$  – вектор варьируемых конструктивных параметров системы. После дифференцирования (2) и введения сопряженных задач вида:

$$K\vec{\psi}_s = \frac{\partial (\vec{\psi}_d^T G \vec{y}_d)}{\partial \vec{y}_s}; [K + G - \lambda M]\vec{\psi}_d = \frac{\partial J}{\partial \vec{y}_d} - \mu^* M \vec{y}_d \quad (3)$$

значения принимает вид:  $\vec{\nabla} \lambda = \left\{ \vec{y}_d^T (K' + G' - \lambda M') \vec{y}_d - \vec{\psi}_{s\lambda}^T (K \vec{y}_s - F') \right\}_{\vec{u}=\vec{u}_n}$  (4), где  $\vec{\psi}_{s\lambda}$  – обозначено решение сопряженной задачи (3), в которой  $\vec{\psi}_d$  заменяется на  $\vec{y}_d$ . Сравнение соотношений (1) и (4) наглядно показывает различия в подходах к анализу чувствительности для сильно- и последовательно связанных моделей.

Примерами конструкций, для которых важен учет воздействия слабосвязанных физических полей различной природы, являются резонансные приборы. Особенностью таких задач является учет обратных связей (при двустороннем взаимодействии) и необходимость нескольких итераций при решении нелинейной задачи. Ультразвуковые колебания высокой интенсивности вызывают существенный разогрев системы. Соответствующая связанная нелинейная математическая модель включает стационарные уравнения теплопроводности, в которых функция тепловых источников строится по форме резонансных динамических напряжений как доля интенсивности гистерезисных потерь и уравнения собственных колебаний, включающие зависимость физико-механических характеристик и геометрии элемента от распределения температуры:  $\Lambda \vec{T}^0 = \vec{Q}(\vec{\sigma}(\vec{y}))$ ;  $[K(\vec{T}^0) - \omega^2 M(\vec{T}^0)]\vec{y} = 0$ .

На рис. 1 и 2 приведены для примера картины функциональных производных конструкций к добавлению материала (нормальным перемещениям точек поверхности). При исследованиях использовались трехмерные КЭ.

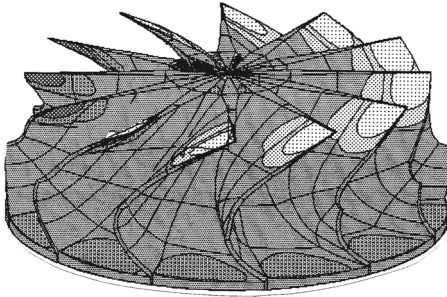


Рисунок 1 – 15-ая собственная частота рабочего колеса турбины ТКР-8.5-ТВ.

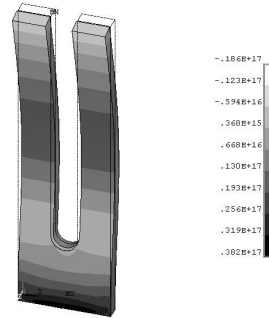


Рисунок 2 – 5-ая собственная частот пьезоэлектрического резонатора

Данное исследование позволило провести классификацию задач анализа чувствительности мультифизических конечноэлементных моделей различной степени связанности и успешно апробировать анализ градиентов функционалов на ряде практических задач. Дальнейшим направлением исследований является применение разработанного математического аппарата при исследовании жизненного цикла ряда современных конструкций.

**Список литературы:** 1. Автономова Л.В., Лавинский В.И. Бондарь С.В. Узагальнена математична модель структурно зв'язаних систем // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2003. – Вип. 12, т.1. – С. 160-164. 2. Xu B. and Jiang J. S.. Integrated optimization of structure and control for piezoelectric intelligent trusses with uncertain placement of actuators and sensors // Computational Mechanics. – 2004. – Vol. 33, № 5. – P. 406-412. 3. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин, А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б. Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 77-82. 4. Богомолов С.И., Назаренко С.А., Симсон Э.А. Расчет и оптимизация оболочек общей формы на базе смешанного подхода МКЭ // Динамика и прочность тяжелых машин. – 1986. – С. 91-97.

*Поступила в редколлегию 04.10.2006.*

УДК 839.04:03

**В.О.ПОВГОРОДНИЙ**, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины;  
**С.В.ЗАЙМАК**, НТУ «ХПИ»

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ МЕТАЛЛО-КЕРАМИЧЕСКОГО НАГРЕВАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Розглянуто шляхи розв'язання геометричних обернених задач термопружності. Задачі вирішуються з використанням методу скінчених елементів для металокерамічного нагрівального елемента.

In this article the determine of the geometrical inverse problem of thermoelasticity. This problem is determined by the finite element method. This problem is determined to the electrical hearts elements.

Металлокерамический нагревательный элемент (МКНЭ) представляет собой керамическую алюмооксидную пластину, в теле которой расположен резистивный элемент в виде металлизированных дорожек, как правило прямоугольной формы (рис. 1).

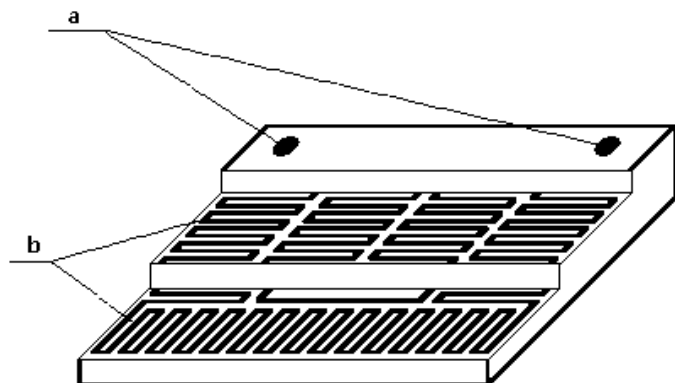


Рисунок 1 – Размещение резистивного элемента в теле нагревателя:  
а – контактные площадки для подключения электропитания;  
б – срезы по уровням размещения резистивного элемента

Технология изготовления МКНЭ заключается в следующем. Аллюмооксидная паста укладывается в несколько слоев и тем самым формируется тело нагревательного элемента. При этом между некоторыми слоями керамики с помощью трафарета наносится резистивная паста, которая образуется при добавлении в алюмооксидную пасту порошков металла (вольфрама и молибдена).

Резистивный элемент может наноситься в несколько слоев, соединенных последовательно. Затем полученная конструкция запекается в печи, после чего шлифуется и на поверхность пластины в местах вывода резистивных дорожек наносятся металлизированные контактные площадки [1].

**1. Математическая модель.** Используется метод конечных элементов (МКЭ). В рассмотрение был представлен один уровень МКНЭ. Геометрическая модель резистивного элемента в виде линий показана на рис. 2.

При современной технологии нанесения металлизированных дорожек на керамическое основание имеются следующие ограничения:

- минимальная толщина дорожки  $1,5 \cdot 10^{-5}$  м;
- минимальная ширина дорожки  $3,5 \cdot 10^{-4}$  м;
- толщина резистивного элемента 0,015 мм;
- размеры пластины нагревательного элемента  $100 \cdot 100 \cdot 2$  мм.

Материал резистивного элемента – вольфрам, физические характеристики которого представлены в табл. 1.

Материал пластины – керамика, физические характеристики которого представлены в табл. 2.



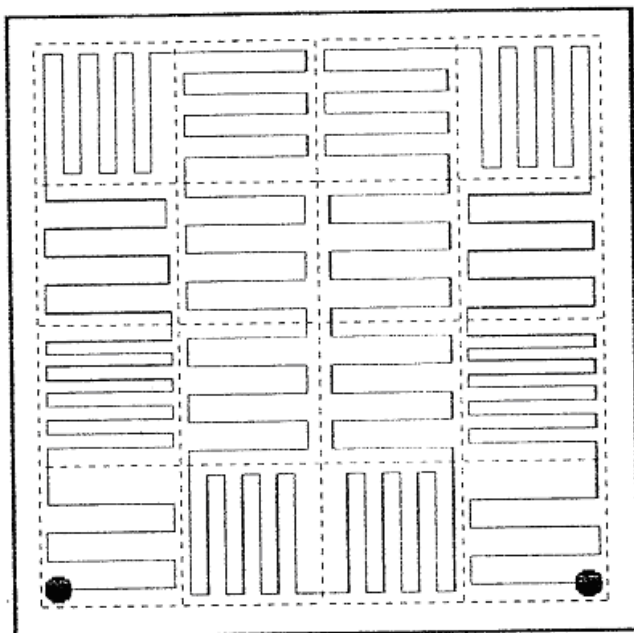


Рисунок 2 – Геометрическая модель резистивного элемента в виде линий

Таблица 1 – Теплофизические характеристики вольфрама

Модуль Юнга, E	Н/м <sup>2</sup>	$1,24 \cdot 10^{+11}$
Модуль упругости, G	Н/м <sup>2</sup>	$1,6 \cdot 10^{+11}$
Теплопроводность	Вт/м · °С	180
удельная теплоемкость	Кдж/кг · °С	0,134

Таблица 2 – Теплофизические характеристики керамики

Модуль Юнга, E	Н/м <sup>2</sup>	$2,2059 \cdot 10^{+11}$
Модуль упругости, G	Н/м <sup>2</sup>	$9,04 \cdot 10^{+10}$
Теплопроводность	Вт/м · °С	40
удельная теплоемкость	Кдж/кг · °С	0,122
Предел прочности при растяжении	Н/м <sup>2</sup>	$1,72 \cdot 10^{+08}$
Предел прочности при сжатии	Н/м <sup>2</sup>	$5,51 \cdot 10^{+08}$

При исследовании резистивный элемент рассматривался в виде линии, на которую равномерно действует температура от источника мощности.

При эксплуатации МКНЭ бывают отказы, которые можно разбить на три группы: разрушение керамической пластины, разрыв резистивной дорожки и нарушение крепления нагревательного элемента или его внешних выводов. Первый вид отказов происходит из-за превышения допустимой величины тер-

монапряжений. При превышении допустимой величины термонапряжений керамическая пластина разрушается вдоль линии, которая отражает наиболее слабые связи между компонентами керамики.

В принципе, для определения температурных напряжений в МКНЭ необходимо решать задачу термоупругости [см. 2]. Однако, допустимые термонапряжения многослойной керамики в настоящий момент неизвестны, а их измерение приводит к большим техническим сложностям. Кроме того, теория обратных задач термомеханики, с помощью решения которых можно по допустимым термонапряжениям определить допустимые пределы изменения входных параметров, не достаточно развита и в настоящий момент авторы статьи занимаются этой проблемой.

Разрыв резистивной дорожки происходит из-за больших термических напряжений. Если связь между резистивной дорожкой и керамикой слабая, то большое термонапряжение может привести к местному разрушению связующих звеньев. При этом нагрузка на остальные звенья может не превысить предельной, и керамическая пластина останется целой, а резистивная дорожка разорвется [3]. Этот случай происходит чаще всего, так как локальный нагрев из-за большой величины плотности электрического тока вызывает большие термонапряжения, которые могут привести к обрыву резистивной дорожки или даже разрушению всей керамической пластины (рис. 3).

На резистивный элемент, изготовленный из вольфрамовой нити диаметром 0,015 мм, действует постоянный электрический ток силой 5А и напряжением 36В. Максимальная температура на резистивном элементе определяется формулой

$$T_{\max} = \sqrt[5]{\frac{U^2}{\alpha R_0 \sigma S}},$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана  $\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8}$  Вт/м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>;

$S = \pi dl = 3,14 \cdot 0,015 \cdot 10^{-3} \cdot 1,75 = 8,24 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup> – площадь поверхности проводника;

$\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления;

$U$  – напряжение;

$R_0$  – сопротивление.

Сопротивление выражается по формуле

$$R_0 = \rho \frac{l}{S_F} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1,75}{7,06 \cdot 10^{-10}} = 495,75 \text{ Ом},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление проводника;

$l$  – длина проводника;

$S_F = \pi d^2 = 3,14 \cdot (0,015 \cdot 10^{-3})^2 = 7,06 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup> – площадь поперечного сечения.

Максимальная температура проводника:

$$T_{\max} = \sqrt[5]{\frac{U^2}{\alpha R_0 \sigma S}} = \sqrt[5]{\frac{36^2}{4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 495,75 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 8,24 \cdot 10^{-5}}} = 678 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Интенсивность теплообмена на поверхности нагревателя  $30 \text{ Вт/м} \cdot \text{°C}$  при температуре среды  $T_c = 50 \text{ °C}$ , а температура нагревателя  $678 \text{ °C}$  (рис. 4).

В качестве внешней нагрузки, прикладывалась температура внутри пластины. Пластина была закреплена жестко нижней частью. Конечно-элементная модель пластины состоит из 2288 элементов (без учета контактных) и 22918 узлов (рис. 5).

После проведения расчетов были получены графические результаты, приведенные на рис. 6-8.

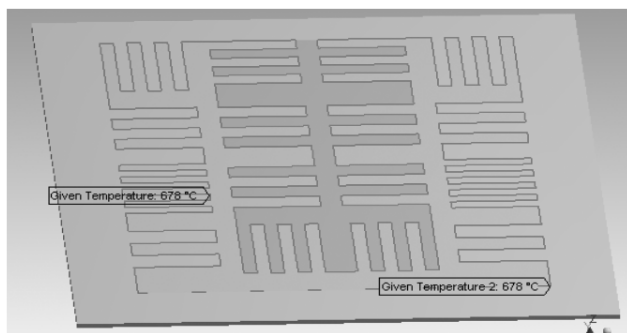


Рисунок 4 – Распределение температуры на нагревателе  $678 \text{ °C}$

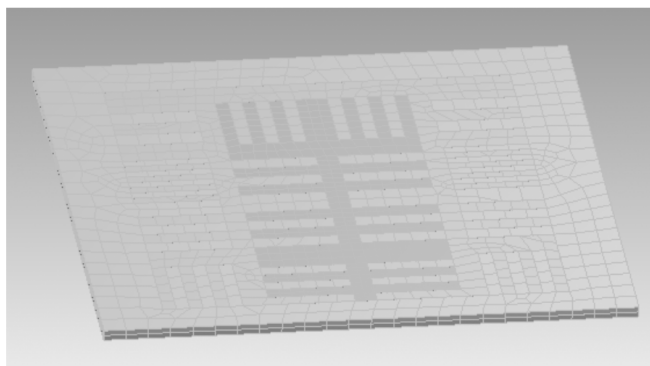


Рисунок 5 – Конечно-элементная модель керамической пластины, состоящая из 2288 элементов (без учета контактных) и 22918 узлов

**Выводы.** Проектирование МКНЭ можно рассматривать как задачу выбора такого размещения резистивного элемента, при котором получаются требуемые характеристики нагревателя и теплофизические характеристики материала нагревателя. Поэтому, задачу проектирования нагревательного элемента можно рассматривать как обратную задачу термоупругости, в которой варьируемыми параметрами являются как параметры размещения резистивных дорожек в теле нагревателя, так и теплофизические характеристики материала с ограничением на максимальные температурные напряжения [4].

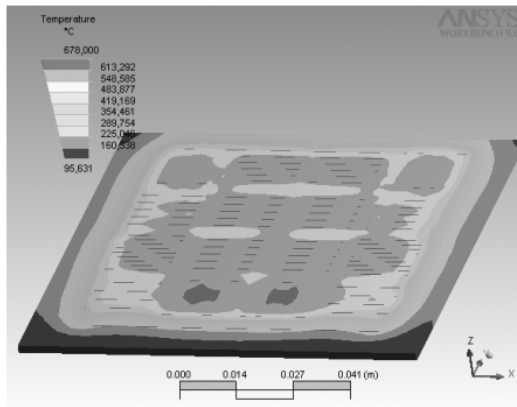
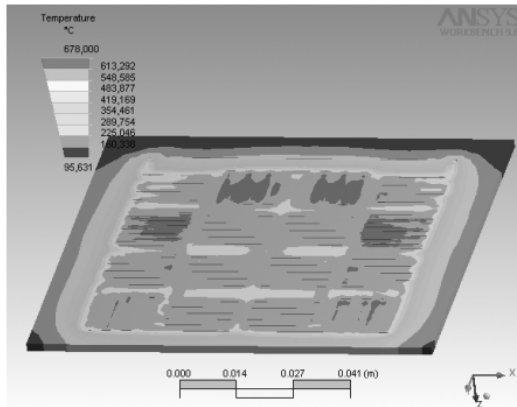


Рисунок 6 – Распределение температуры на пластине сверху и снизу

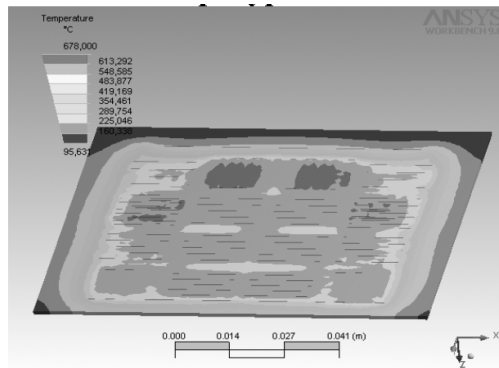


Рисунок 7 – Распределение температуры внутри пластины

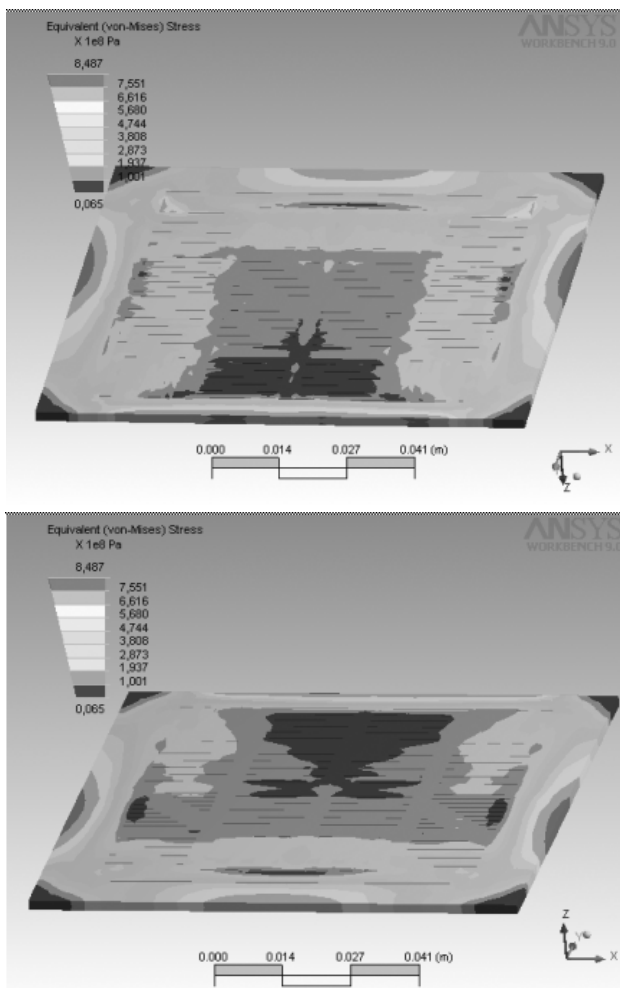


Рисунок 8 – Распределение эквивалентных напряжений (по Мизесу) на пластине сверху и снизу

**Список литературы:** 1. С.В. Кузнецов, А.В. Петров Рекомендации для конструирования нагревательных устройств // Информационный листок Карельского ЦНТИ № 77-97. – 1997. 2. Коваленко А.Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с. 3. Глушицкий И.В. Охлаждение бортовой аппаратуры авиационной техники. – М.: Машиностроение, 1987. – 184 с. 4. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наукова думка, 1988. – 312 с.

Поступила в редакцию 15.04.2006

**А.Г.ПРИЙМАКОВ**, канд.техн.наук, ХУВС;  
**А.В.УСТИНЕНКО**, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

## **ВЫБОР ДОПУСКАЕМЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ АБРАЗИВНОГО ИЗНАШИВАНИЯ**

Дано критеріальну оцінку порівняльної зносостійкості матеріалів з урахуванням структурної адаптації до умов середовища. Кількісно оцінений рівень анізотропії й складність структурного стану поверхонь абразивного зношування за допомогою Фур'є-аналізу. Показано, як здійснити вибір допустимих напруг при наявності абразиву в зоні тертя.

The criteria estimation of comparative endurance of materials is given in view of structural adaptation to conditions of a working environment. The level of an anisotropy and complexity of a structural condition of surfaces of abrasive chafing, with the help of the Fourier-assaying is quantitatively estimated. It is shown how to realize a choice of supposed stress at presence of an abrasive in a friction zone.

**Введение.** В машиностроении при выборе допускаемых напряжений необходимо учитывать факт практически неизбежного абразивного изнашивания поверхностей трения контактирующих тел из-за попадания абразива или продуктов износа в зону контакта. Кроме того, по мере изнашивания меняется уровень анизотропии свойств и ориентации блоков структуры поверхности трения, что, в свою очередь, изменяет ее уровень напряженно-деформированного состояния. Очевидно, эти процессы требуют количественной и качественной оценки и учета при выборе допускаемых напряжений.

**Анализ литературы.** Анализ литературных источников, [1-11], показывает, что в такой постановке данная задача решается впервые; имеются лишь разрозненные данные справочного характера.

**Цель статьи.** Таким образом, целью статьи служит разработка и описание способа рационального определения допускаемых напряжений в условиях и с учетом абразивного изнашивания поверхностей трения.

**Критерий оценки работы в условиях абразивного изнашивания.** Использование различных концепций в моделировании процесса изнашивания материалов привело к созданию полумпирических выражений, которые на протяжении последней четверти века составляют основную расчетную базу для проведения оценок изнашивания. Это связано, во-первых, с достаточной простотой использования полученных зависимостей и, во-вторых, с возможностью качественного и количественного анализа процесса изнашивания. В основу этих моделей, часто простроенных на основе физических соображений с учетом теории размерностей, легли следующие предположения:

- износ пропорционален пути трения;
- износ пропорционален работе сил трения;
- износ определяется физическими параметрами процесса и механическими свойствами материалов.

Выбор сочетания материалов по результатам сравнительных испытаний на износостойкость в значительной степени обоснован обусловленностью критерия оценки относительной износостойкости. Следует заметить, что универсального критерия, который бы мог охватить все разнообразие материалов, видов износа и т.д. нет, за исключением, пожалуй, критериев, полученных в рамках общего термодинамического подхода. При разработке такого критерия наиболее эффективным, с нашей точки зрения, является концептуальный подход. Не рассматривая всех концепций, принятых на сегодняшний день в трибологии, остановимся на энергетическом подходе, в рамках которого В.Д.Кузнецовым [1] для оценки относительной износостойкости предложен критерий, связывающий величину износа с работой силы трения. Рассмотрим данный критерий с позиции применения для оценки абразивного износа.

В.Д.Кузнецов [1] под интенсивностью изнашивания  $I$  понимал величину износа детали или образца металла, проходящегося на единицу работы силы трения:

$$I = \frac{V}{\mu p L}, \quad (1)$$

где  $V$  – износ материала твердого тела за время опыта;  $\mu$  – коэффициент трения;  $p$  – нормальная нагрузка;  $L$  – путь трения.

В качестве критерия оценки относительной износостойкости принята удельная работа изнашивания  $A_u$ , представляющая отношение работы  $A$ , затраченной на удаление массы  $\Delta n$ , к этой массе:

$$A_u = \frac{A}{\Delta n}, \left[ \frac{\text{Н} \cdot \text{М}}{\text{М}^3} \right]. \quad (2)$$

Эта величина наиболее тесно связана с истинной (физической) твердостью материала при трении и в полной мере характеризует процесс диспергирования материала при абразивном износе.

Следует отметить, что данный критерий не может быть использован для раскрытия самого механизма изнашивания, учесть влияние теплового, реологического, химического, масштабного факторов. Для раскрытия механизма изнашивания целесообразно рассматривать функцию износа в зависимости от этих факторов.

В нашем случае сравнительный анализ износостойкости проводится при фиксировании масштабного и физико-химического факторов. К масштабному фактору следует отнести размер испытываемых образцов и размеры абразивных частиц. К физико-химическому фактору следует отнести рабочую среду, которая при сравнительных испытаниях различных материалов также фиксировалась.

Известно [1-4], что относительная абразивная износостойкость материалов зависит также от соотношения твердостей абразива  $H_a$  и металла  $H_m$ . При  $H_a < kH_m$  в диапазоне  $k = 0,7 \dots 1$  износ незначительный, при  $H_a > kH_m$  в диапазоне  $k = 1,3 \dots 1,7$  относительная износостойкость не зависит от твердости абразива.

В качестве допущения принимаем соблюдение второго условия для всех материалов при всех сочетаниях испытываемых пар трения. Достижение этого

условия, по сути, является реализацией принципа структурной адаптации материалов в условиях абразивного изнашивания с учетом состава и свойств рабочей среды.

Наиболее обоснованным в оценке абразивного износа, на наш взгляд, является подход, принятый в работе В.А.Войтова [11]. Суть данного подхода заключается в распределении парциального теплового потока между элементами трибосопряжений, который определяет величину износа каждого из элементов, а также величину суммарного износа трибосопряжения.

Различие в подходах заключается в критериальной оценке величины теплового потока. В первом случае тепловой поток формируется изменением теплового сопротивления каждого из элементов, обусловленного физико-механическими свойствами поверхностного слоя и параметрами микрорельефа (шероховатостью  $R_a$ ). Во втором случае парциальное распределение тепла достигалось соотношением объемов элементов трибосопряжения и площадей контакта, а физико-механические свойства учитывались делением пар трения на прямые и обратные.

Не рассматривая достоинств и недостатков каждого из подходов, отметим один общий, на наш взгляд, недостаток такого подхода. Он заключается в не учете явления структурной адаптации за счет изменения реологических характеристик материалов трибосопряжения. При абразивном износе микрорельеф и реология материалов формируется за счет механического взаимодействия абразивных частиц и компонентов рабочей среды, в которых они находятся.

Структурообразование при абразивном износе обусловлено процессами упрочнения и разупрочнения поверхностей трения, которые, по сути, являются регулятором в балансе подводимой и рассеиваемой энергии. Таким образом, принятый нами подход в большей степени соответствует работам [4, 8], в которых рассматривается проблема адаптации материалов к внешним динамическим воздействиям.

Для случая абразивного изнашивания между энергетическими критериями износостойкости материала [10] и его твердостью можно принять наличие прямой корреляции  $HV/A_{\gamma 0} = C = \text{const}$ . Справедливость этого выражения рассматривается в рамках принятых допущений. С учетом изменения твердости как подвижного, так и неподвижного образца в процессе приработки линейный износ подвижного образца  $I_1$ , неподвижного образца  $I_2$  и суммарный износ  $I_{1+2}$  будет зависеть от изменения микротвердостей каждого из элементов трибосопряжения.

Введем безразмерный коэффициент структурной адаптации, который для неподвижного и подвижного элементов трибосопряжения представлены выражениями

$$K_{ca1} = \frac{H_{01}}{H_{K1} - H_{01}}; \quad (3)$$

$$K_{ca2} = \frac{H_{02}}{H_{K2} - H_{02}}, \quad (4)$$



где  $H_{01}$  и  $H_{02}$  – начальные значения твердости подвижного и неподвижного образцов соответственно;  $H_{K1}$  и  $H_{K2}$  – значения микротвердостей, достигнутые после приработки подвижным и неподвижным образцом соответственно.

При постоянном режиме трения и износа приработанных тел линейный износ подвижного и неподвижного образцов и суммарный износ могут быть записаны в частном случае:

$$I_1 = \frac{C}{H_a} K_{ca1} \frac{1}{S_1} N f V_C t ; \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{C}{H_a} K_{ca2} \frac{1}{S_2} N f V_C t ; \quad (6)$$

$$I_{1+2} = \frac{C}{H_a} \frac{S_2 K_{ca1} + S_1 K_{ca2}}{S_1 S_2} N f V_C t , \quad (7)$$

где  $H_a$  – твердость абразива;  $N$  – нагрузка;  $f$  – коэффициент трения;  $V_C$  – скорость скольжения;  $t$  – время испытаний;  $S_1$  и  $S_2$  – площади рабочих поверхностей подвижного и неподвижного образцов соответственно.

Величина

$$K_{ca} = \frac{S_2 K_{ca1} + S_1 K_{ca2}}{S_1 S_2} \quad (8)$$

названа нами коэффициент структурной адаптации трибосопряжения. Он формирует парциальное распределение теплового потока между рабочей абразивной средой и элементами пары трения. Тепловой поток в свою очередь является сигналом обратной связи в саморегулирующей системе через упрочнение и разупрочнение поверхностей трения в трибосопряжении. В отличие от коэффициентов  $K_{ca1}$  и  $K_{ca2}$  коэффициент  $K_{ca}$  величина размерная [1/м] и имеет такую же размерность, как и коэффициент формы в работе В.А. Войтова [11]. С учетом первого множителя эта величина характеризует диссипацию внешней подводимой энергии по тепловому каналу.

Согласно экстремальным принципам термодинамики необратимых процессов, устойчивость стационарного состояния соответствует минимуму работы диссипативных сил и характеризует максимум скорости порождения энтропии. При этом под скоростью порождения энтропии понимается ее поток, передаваемый окружающей среде.

Данная величина может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Если  $K_{ca} > 0$ , то данное трибосопряжение адаптируется к условиям абразивной среды. Если  $K_{ca} < 0$ , то такая адаптация не происходит, и в таком сочетании материалов в данной абразивной среде трибосопряжение будет работать с повышенным износом в режиме микрорезания.

Таким образом,  $K_{ca}$  является объективным критерием оценки работы конструкционных материалов в условиях абразивного изнашивания.

**Исследование поверхностей трения при помощи Фурье-анализа.** Для качественной и количественной оценки уровня анизотропии свойств и слож-

ности структурного состояния в условиях абразивного изнашивания наиболее эффективен Фурье-анализ поверхностей трения [7, 10].

Следует отметить, что для проведения Фурье-анализа авторы использовали единственную пока на Украине лабораторную установку Института электросварки им. Е.О.Патона Национальной АН Украины (г. Киев). Особый интерес представляет программа SIA 1.00, адаптированная авторами для выбора допускаемых напряжений.

В данной программе анализируется двухмерный Фурье-спектр. Различные участки структуры по-разному отражают сканирующий луч, что и служит причиной изменения регистрируемого сигнала.

Данная программа работает в двух режимах. В первом режиме количественно оценивается уровень анизотропии и ориентации блоков структуры относительно главных действующих напряжений с помощью автокорреляционного и спектрального анализа фрактограмм поверхности. Во втором режиме качественно по ширине и сложности фрактограммы оценивается сложность структурного состояния (количество коэффициентов в уравнении Фурье), степень анизотропии главных действующих напряжений и количественная оценка степени упорядоченности структуры на поверхности трения (фазовый анализ). По математическому ожиданию и величине средней мощности оптической плотности устанавливается принадлежность спектральной плотности к конкретным фазам исследуемой структуры.

Задачу нахождения угла ориентации элементов изображения (ЭИ) относительно избранного направления, совпадающего с осью абсцисс (программа SIA 1.00), можно интерпретировать, как задачу нахождения оси некоторого замкнутого однородного тела, относительно которой осевой момент инерции минимален.

Известно, что момент инерции тела относительно оси равняется 
$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2,$$

где  $r_i$  – расстояние от  $i$ -й точки с массой  $m_i$  до оси. Плоскость, ограниченную некоторым замкнутым контуром, можно представить как совокупность ограниченного

числа точек с единичными массами. Тогда 
$$I = \sum_{i=1}^n r_i^2.$$

Таким образом, приходим к задаче нахождения такой прямой, относительно которой сумма квадратов отклонений всех точек плоской фигуры была бы минимальной.

При прямом сканировании электронного луча по поверхности изображения определяется угол между осью инерции и осью абсцисс каждого из ЭИ. При обратном сканировании для указанных геометрических признаков рассчитывается гистограмма длин хорд ЭИ для каждого из выделенных на изображении угловых диапазонов (от 0 до 180° с интервалом в 10°) (рис. 1). Гистограмму строят путем подсчета числа попаданий случайной величины (в этом случае – длин осей инерции ЭИ) в заданные разряды. Статистический анализ ориентации ЭИ обобщен главным вектором ориентации ЭИ относительно выбранного направления сканирования, соединенного с осью абсцисс.

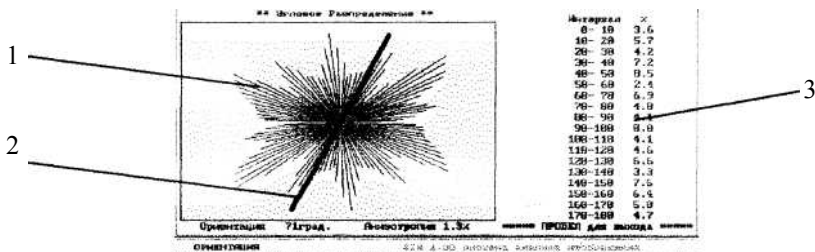


Рисунок 1 – Гистограмма ориентации ЭИ, построенная с помощью SIA 1.00:  
 1 – длины хорд ЭИ для каждого углового диапазона; 2 – главный вектор ориентации структурных ЭИ; 3 – количество блоков структурных составляющих для каждого углового диапазона, %

Анализ сложности структурного состояния и реологических особенностей поверхности трения проводили по двумерному дифракционному спектру (ДДС). Он определяет усредненные размеры структурных составляющих, расстояние между ними, концентрацию, длину межфазовых границ и позволяет исследовать анизотропию структуры в целом, связанную с анизотропией оптических, механических и др. свойств. Интенсивность ДДС определяется выражением

$$I_{\text{ДДС}}(H_x; H_y) = \left[ \frac{A}{\lambda f} \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(H_x x + H_y y)} I_{\text{об}}(x, y) dx dy \right],$$

где  $I_{\text{ДДС}}$  – интенсивность ДДС в единицах оптической плотности;  $H_x = \alpha N$ ;  $H_y = \beta N$  – координаты точек на плоскости ДДС;  $\alpha$ ,  $\beta$  – направляющие косинусы;  $A$ ,  $\lambda$  – амплитуда и длина волны излучения;  $f$  – коэффициент, учитывающий увеличение электронно-растрового изображения;  $I_{\text{об}}(x, y)$  – функция, характеризующая распределение интенсивности ДДС анализируемой поверхности.

Как один из признаков, количественно характеризующих структуру по электронно-растровому изображению, использовалось среднее значение частоты  $\bar{r}_x$ , определяемое по формуле  $\bar{r}_x = \Delta r_i / N$ , где  $\Delta r_i$  – интервал пространственных частот ДДС в области диапазона от минимального до максимального размера структурных составных анализируемой поверхности;  $N$  – число «пику» в данном интервале пространственных частот.

Графически результаты двумерного дифракционного анализа представляют зависимости дифференциальной частотной характеристики  $I_{\text{ДЧХ}}$  от среднего значения частоты  $\bar{r}_x$  (рис. 2).

Данная зависимость отображает изменение формы, размера и расстояния между элементами изображения в избранном направлении, т.е. среднее значение  $\bar{r}_x$  отображает усредненный морфологический параметр исследуемой поверхности (ее анизотропию).

Результаты сравнительного анализа гистограмм поверхности при одинаковых увеличениях и направлении сканирования на электронно-растровом изображении позволяют оценивать характер расположения и размер элемен-

тов структуры в избранном направлении, и производить сравнительную оценку анизотропии исследуемых поверхностей по ширине гистограммы и количеству максимумов на ней.

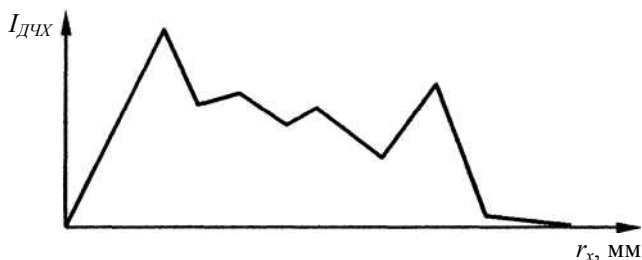


Рисунок 2 – Изображение двумерного дифракционного анализа поверхности, полученное с помощью программы SIA 1.00

Одновременно с анализом анизотропии поверхности трения проводился качественный анализ ее текстурированности по фоновым признакам: яркость, размер, форма, пространственная ориентация.

Текстурированность характеризует ориентацию напряжений по границам структурных составляющих. В программе SIA 1.00 она оценивается с помощью двумерной матрицы смежности по пространственной взаимосвязи значений яркости элементов изображения, размещенных для каждого углового направления.

Параметры текстуры вычисляются из матрицы смежности, и их численные значения зависят от дисперсности изображения. Грубодисперсная структура характеризуется группами граничащих точек с одинаковой или близкой оптической плотностью (яркостью), вследствие чего, небольшие вероятности перехода группируются на диагонали матрицы или вблизи нее.

Отсутствие диагонали матрицы свидетельствует о псевдоаморфном состоянии поверхности изображения с отсутствием четкой ориентации напряжений по границам структурных составляющих. И наоборот, наличие четко сгруппированных точек относительно диагонали матрицы свидетельствует об ориентации межфазных границ, а, следовательно, и напряжений (рис. 3).

Группировки характеризуются коэффициентом анизотропии  $\eta = c/d$ . Если  $\eta \approx 1$  – поверхность изотропная; если  $\eta \rightarrow \infty$  – максимально анизотропная. Количество точек на плоскости сканирования связано с величиной структурной энтропии, оцениваемой по параметру  $\sum_{ij} P_{ij} \log P_{ij}$ .

Рентгеновский и оптико-структурный методы объединяет следующее допущение: главные направления эллипсоида деформации совпадают с осями координат объекта в пределах отражающего слоя. Отличает эти два метода то, что в первом случае количественно определяем величину напряжений, усредненную на определенную глубину, а во втором – получаем качественную картину распределения напряжений по поверхности.

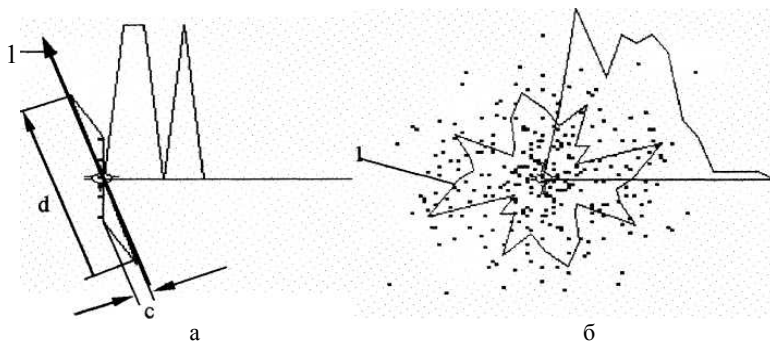


Рисунок 3 – Графическое изображение оценки текстурированности и ориентации напряжений поверхности, полученное с помощью программы SIA 1.00 (а – анизотропная поверхность, б – изотропная поверхность):  
 l – направление ориентации напряжений

Совсем другую картину дал оптико-структурный метод (рис. 4). Вектор главных действующих напряжений на образцах, обработанных в соответствии с математической статистикой, развернут перпендикулярно к направлению трения, значительно увеличилось количество мелких объектов (рис. 4, б). А после месячного простоя этой пары трения резко выросшая анизотропия ориентации поверхностных напряжений, их результирующий вектор развернулся под углом  $\approx 45^\circ$  к направлению трения (рис. 4, в).

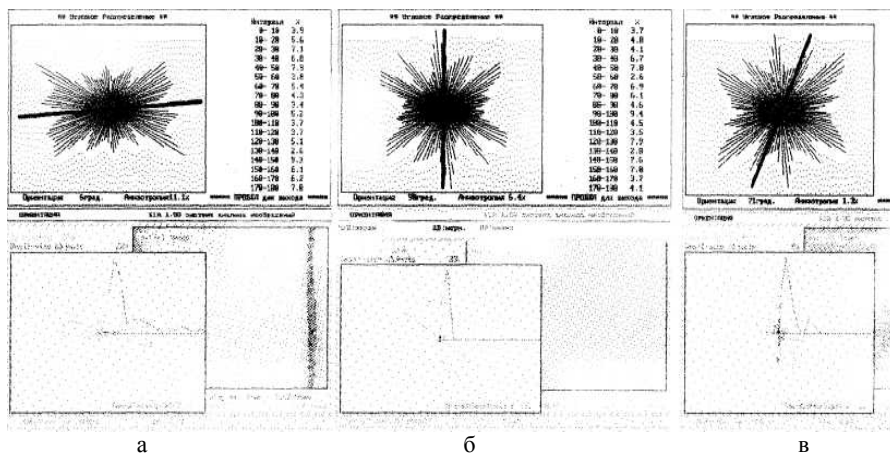


Рисунок 4 – Ориентация блоков и анизотропия структуры поверхностного слоя в процессе модифицирования ревитализантом (программа SIA 1.00):  
 а – обычная пара трения; б – модифицированная пара трения через 1 час после обработки; в – через 30 суток простоя после модифицирования

**Завершая работу, авторы сделали следующие выводы:**

1. При выборе допускаемых напряжений конструкционных материалов,

работающих в условиях абразивного изнашивания, следует эквивалентные напряжения, действующие на поверхности трения, домножать в соответствии с рекомендациями [1, 2] на коэффициент структурной адаптации трибосопряжения  $K_{ca}$  и коэффициент достигнутой анизотропии  $\eta$ .

2. Коэффициент структурной адаптации  $K_{ca}$  является объективным показателем работы трибосопряжений в условиях абразивного изнашивания.

3. Изменение анизотропии свойств, реологические и синергетические явления, и, связанное с ними изменение НДС поверхности трения, определяется коэффициентом анизотропии  $\eta$ , для определения которого и разработана универсальная программа SIA 1.00.

**Список литературы:** 1. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с. 2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с. 3. Качанов Д.М. Основы механики разрушений. – М.: Наука, 1974. – 311 с. 4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с. 5. Григорьев Ю.П. Сопротивление материалов и строительная механика авиационных конструкций. – М.: Воен. изд. МО СССР, 1977. – 512 с. 6. Приймаков А.Г. Усталостные испытания силовых трехволновых зубчатых передач с металлополимерными гибкими колесами // Проблемы трения и изнашивания. – 1985. – Вып. 27. – С. 48-51. 7. Приймаков А.Г. Применение ускоренных методов испытаний на выносливость волновых зубчатых передач // Теория механизмов и машин. – 1990. – № 48. – С. 39-44. 8. Приймаков О.Г., Молякко О.И. Втомленість авіаційних конструкцій та засоби її попередження // Інтегральні технології та енергозбереження. – 2002. – № 1. – С. 32-41. 9. Приймаков О.Г., Лисяк О.О., Приймаков Г.О. Прогнозування надійності та довговічності авіаційної техніки // Вестник науки и техники. – 2003. – № 1. – С. 12-19. 10. Приймаков О.Г., Бобровицький О.В., Приймаков Г.О. Витривалість кольорових сплавів та її експериментальні дослідження // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2002. – Вып. 14. – С.155-161. 11. Войтов В.А. и др. Конструктивная износостойкость узлов трения гидромашин. – Харьков: изд. Центра им. Л.Курбаса, 1996. – 140 с.

*Поступила в редколлегию 28.04.2006*

УДК 681.3

**И.Г.СУВОРОВА**, докт.техн.наук;  
**С.С.ХОЛОБЦЕВ**; ИПМаш НАН Украины

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СЛОЖНОПОЛОСТНЫХ СИСТЕМАХ**

Математична модель течії в'язкої нестискаємої рідини, збудована методом R – функцій та її комп'ютерна реалізація, дозволила в рамках системи ПОЛЕ провести чисельне дослідження в гідродинамічних каналах із складним профілем, отримати якісні картини течії, оцінити вплив чисел Рейнольдса (Re)

The mathematic model current of the tough incompressible fluid and her computer realization in POLE system allowed making the numerical research into hydrodynamics canals with compound profile building by R-function method. Qualitative pictures currents are received. The influence of Reynolds number (Re) is valued.

Над формулировкой основных уравнений движения вязкой жидкости, представляющих математическую модель законов сохранения импульса и

массы, работали Л.Навье, С.Пуассон, Б.Сен-Венан и Дж. Г.Стокс. При этом был использован обобщенный закон трения Ньютона, предполагающий, что для движущихся жидкостей и газов напряжения пропорциональны скоростям деформаций, а также соображения о действии межмолекулярных сил.

Основные краевые задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, течений со свободными поверхностями, в струях и следах за телами, с обтеканием тел. При этом интегрирование уравнений Навье-Стокса проводится в областях (конечных или бесконечных), на границе которых ставятся условия из соображений физического характера (условия прилипания или скольжения по поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и др.). Для нестационарных задач помимо граничных условий должны задаваться начальные условия.

Плоское стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в замкнутой области описывается следующей системой уравнений:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \Delta U = 0; \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \nu \Delta V = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Здесь (1), (2) – уравнения Навье-Стокса, (3) – уравнение неразрывности движения [1–3].

Переходя к безразмерным параметрам, промасштабировав по характерным размерам длины и скорости и вводя функцию тока  $\psi$  и вихрь  $\omega$  с помощью следующих соотношений

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \omega = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}$$

система (1)-(3) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению относительно функции тока  $\psi$

$$\frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Искомые функции тока и вихря зависят от числа Рейнольдса (Re), характеризующего отношение сил инерции к силам вязкости и определяющего интенсивность вынужденной конвекции [1-3].

При решении уравнения (4) возникают трудности, связанные с наличием малого параметра при старшей производной  $\left( \frac{1}{\text{Re}} \right)$  и нелинейностью исходного оператора задачи.

Наличие малого параметра при старшей производной приводит к боль-

шим кривизнам (резкому перепаду градиентов) решения, что соответствует появлению у стенок областей при больших  $Re$  пограничного слоя, толщина которого пропорциональна  $\frac{1}{Re}$ .

Нелинейность оператора (4), типичная для систем гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения.

Все это приводит при  $Re \gg 1$  к образованию весьма сложных течений и в ряде случаев явление вычислительной неустойчивости трудно отличить от возможного сложного поведения решения [4,5].

В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел  $Re$  существует единственное устойчивое стационарное решение уравнений Навье-Стокса, для получения которого можно использовать либо стационарные уравнения, либо нестационарные при  $t \rightarrow \infty$  (метод установления). При увеличении числа  $Re$  стационарное течение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных данных.

Для нахождения функции тока  $\psi$  в некоторой области задаются соответствующие физике процесса граничные и начальные условия. Учет геометрических и динамических параметров при решении уравнения (4) создает дополнительные трудности. Избежать многие трудности при решении уравнения (4) позволяет метод R-функций, разработанный академиком В.Л.Рвачевым и система POLE [6,7].

Решение уравнения (4) представим в виде  $\psi = \psi_1 + \psi_0$ , где  $\psi_1 = \omega_1^2 P$ ,  $\psi_0 = \omega_2 \varphi_0$ , соответственно однородная и неоднородная части структуры,  $\varphi_0$  – продолжение граничных условий внутрь области, полученное с помощью формулы «склейки» [6].

В терминах  $\psi_1, \psi_0$  уравнение (4) будет иметь вид:

$$\frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi - \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} \right\} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = - \frac{1}{Re} \Delta \Delta \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y}. \quad (5)$$

Для проведения вычислительного процесса нелинейное уравнение (4) представлялось в виде последовательности линейных уравнений как по методу Озеена, так и по методу Ньютона-Канторовича, которому в силу вычислительной устойчивости, подтвержденной численным экспериментом, было отдано предпочтение.

Линеаризация по Ньютону-Канторовичу есть практически линеаризация нелинейного выражения  $A(\psi_1)$  ( $A$  – оператор задачи) в виде разложения по формуле Тейлора:

$$L = A(\psi_n) + \frac{A(\psi_n + \delta\psi_n) - A(\psi_n)}{\delta\psi_n} \delta\psi_n = \left( \frac{A}{(n=0,1,\dots)} \right) (\psi_n + \delta\psi_n), \quad (6)$$



где  $\{\psi_n\}$  – последовательные приближения к решению.

Применим данный процесс к уравнению (5)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta (\psi_n + \delta \psi_n) - \left\{ \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} - \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} + \frac{\partial (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta (\psi_n + \delta \psi_n)}{\partial y} = - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (7)$$

Проведя несложные преобразования получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_n - \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial y} - \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \delta \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_n}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

или, воспользовавшись  $\delta \psi_n = \delta \psi_{n+1} - \psi_n$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_{n+1} - \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial \delta \psi_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y} \right\} - \\ & - \frac{\partial \delta \psi_{n+1}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \delta \psi_{n+1}}{\partial y} = - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \Delta \psi_0 + \\ & + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial y} - \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta \psi_n}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9)$$

В качестве начального приближения использовалось как  $\psi_0 = 0$  ( $C_i = 0; i = 0, \dots, N$ ), так и  $\psi_0 = \omega^2$  ( $C_0 = 1, C_i = 0; i = 1, \dots, N$ ).

Кроме того, оказалось, что с ростом числа  $\text{Re}$  наиболее эффективным является использование в качестве начального приближения значение функции тока, полученное при другом, меньшем числе  $\text{Re}$  [8,9].

Проводился численный эксперимент, моделирующий течение жидкости при обтекании уступа рис. 1 при значениях  $\text{Re}$  равных 1, 10, 100, 1000, 1500.

На рис. 1 представлена область уступа, где Г1 – нижняя граница области, задающая уступ, Г2 – верхняя граница области, Г3 – входная граница области, Г4 – выходная граница области.

Граничные условия формулируются как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости близлежащими точками поверхности, так и касательных составляющих относительной скорости, то есть отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. На входе в канал известно  $v_y = v_1(y); v_x = 0$ , а на выходе имеем в

общем случае  $\int_0^b v_1(y) \cdot dy = \int_{-c}^b v_2(y) \cdot dy$ , что следует из равенства расхода жид-

кости через входное и выходное сечение канала.

$$\psi|_{\Gamma_1} = 0,$$

$\psi|_{\Gamma_2} = \text{const}$  – на твердой стенке, где и радиальная, и осевая составляющие скоростей равны нулю в случае вязкой жидкости,

$$\psi|_{\Gamma_3} = \frac{A \cdot y^3}{3} + \frac{B \cdot y^2}{2} + C \cdot y, \text{ где } A, B, C \text{ – постоянные, значения которых}$$

зависят от желаемого типа профиля скорости втекающего потока (параболический или однородный),

$\psi|_{\Gamma_4}$  – естественное условие, либо находится из равенства расхода жидкости.

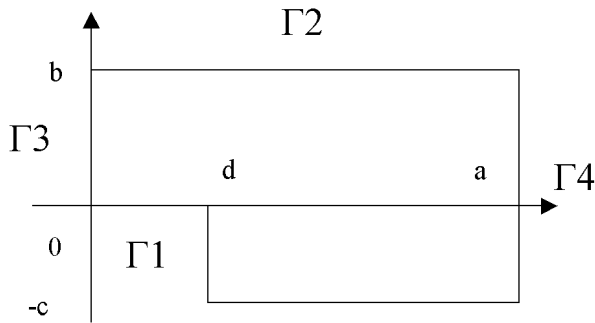


Рисунок 1 – Границы расчетной области

В результате численного эксперимента были получены поля распределения функции тока, скорости и давления при различных числах Рейнольдса, которые позволяют качественно оценить результаты и составить картину в целом о физике процесса.

Распределение функции тока  $\psi$  показано на рис. 2-6.

Распределение скорости  $V$  показано на рис. 7-11.

Распределение давления  $P$  показано на рис. 12-16.

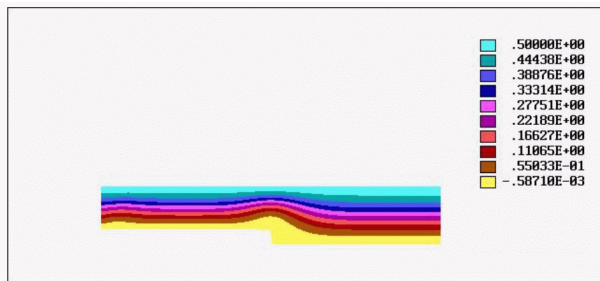


Рисунок 2 –  $Re = 1$

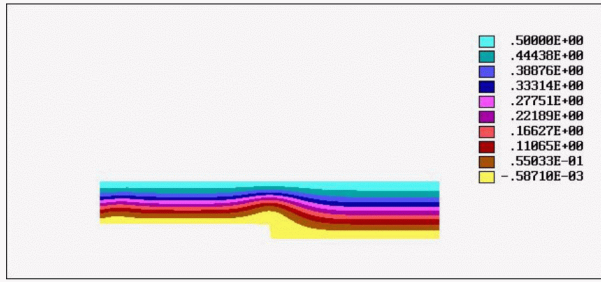


Рисунок 3 –  $Re = 10$

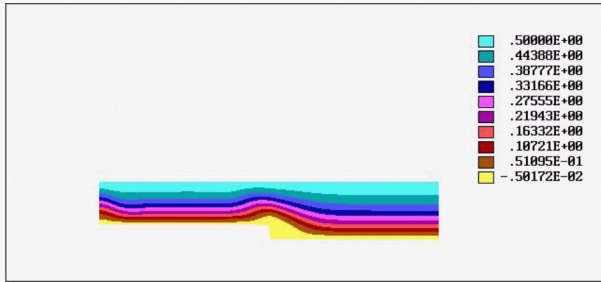


Рисунок 4 –  $Re = 100$

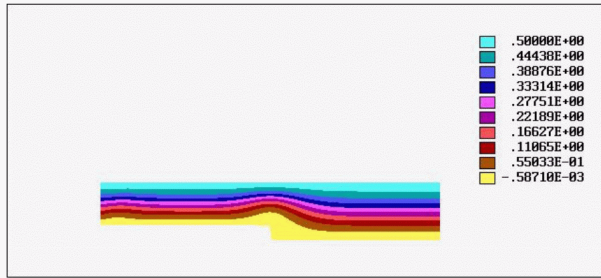


Рисунок 5 –  $Re = 1000$

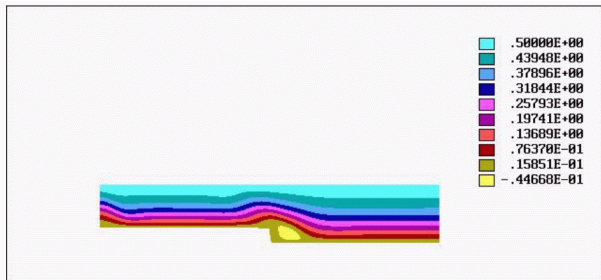


Рисунок 6 –  $Re = 1500$

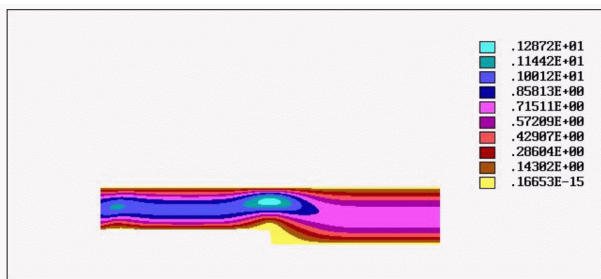


Рисунок 7 –  $Re = 1$

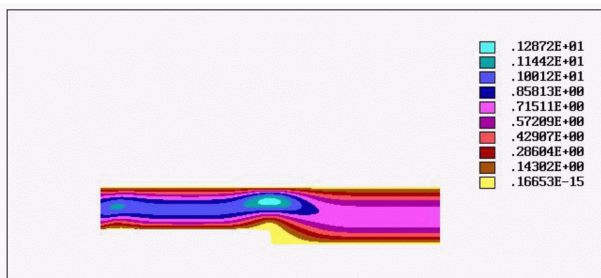


Рисунок 8 –  $Re = 10$

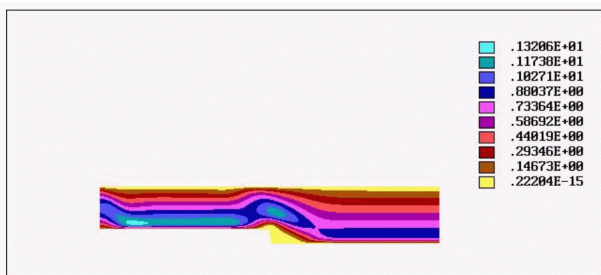


Рисунок 9 –  $Re = 100$

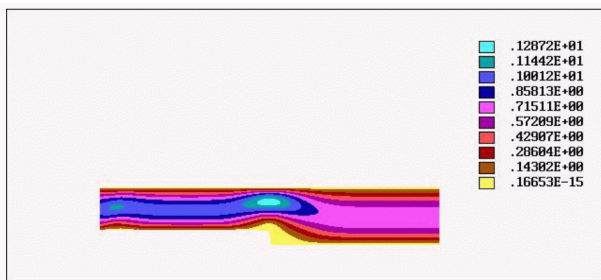


Рисунок 10 –  $Re = 1000$

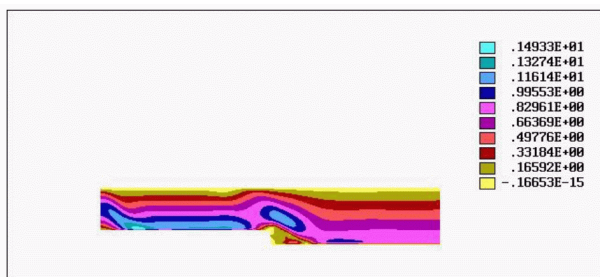


Рисунок 11 –  $Re = 1500$

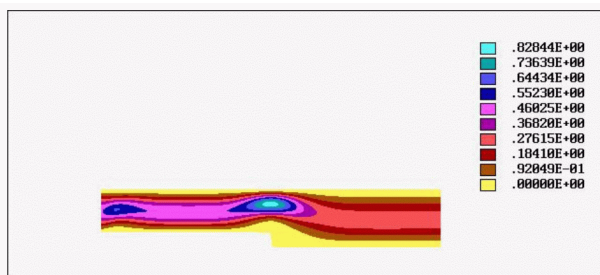


Рисунок 12 –  $Re = 1$

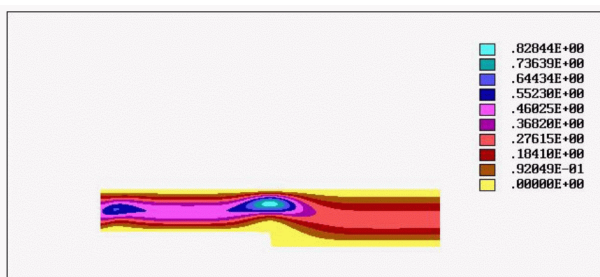


Рисунок 13 –  $Re = 10$

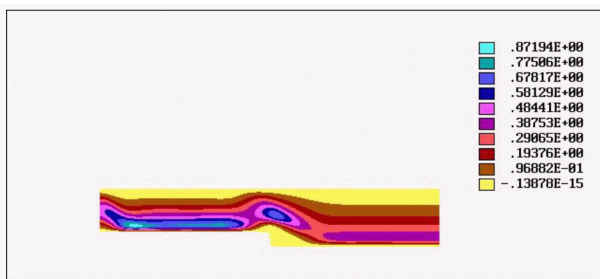


Рисунок 14 –  $Re = 100$



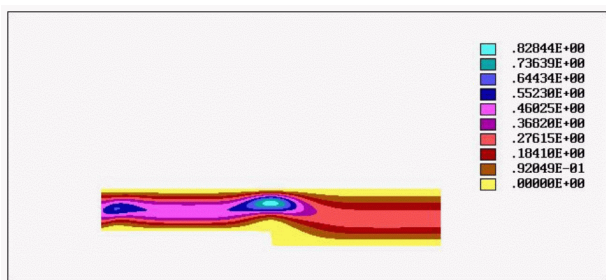


Рисунок 15 –  $Re = 1000$

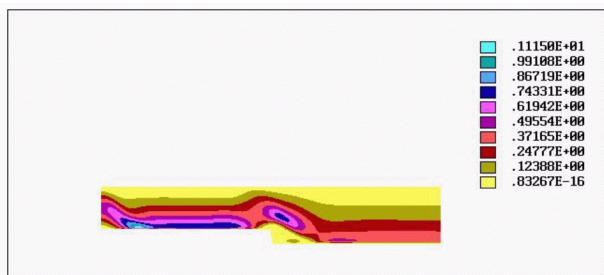


Рисунок 16 –  $Re = 1500$

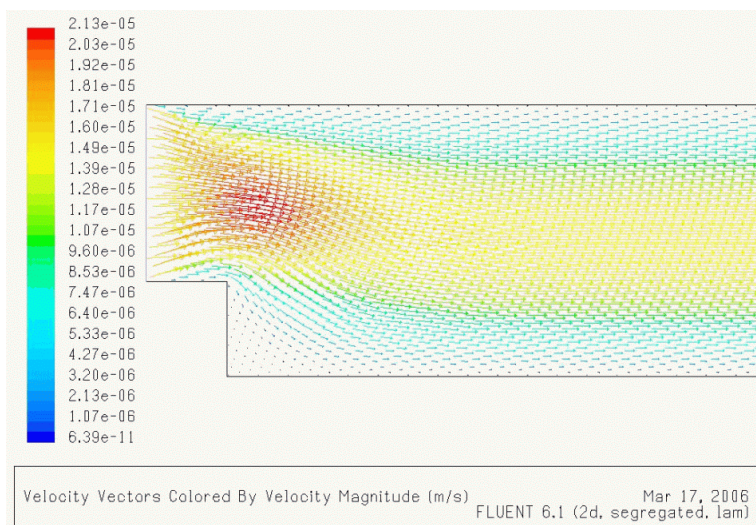


Рисунок 17 –  $Re = 1$

По данным эксперимента можно сделать вывод, что при увеличении числа Рейнольдса происходит зарождение вихря за уступом (отчетливо виден при  $Re = 1500$ ). И уже при малых числах Рейнольдса видно вытеснение по-

грансля вблизи угла уступа (особой точки).

Течение в донной области разделяется в поперечном направлении на слой смещения с внешним потоком и ядро с существенно меньшей завихренностью.

Течение в непосредственной близости за кромкой (уступом) или вообще за телом можно разделить в продольном направлении на донную область, ближний след и дальний след. Донная область рассматривается в широком смысле, как расположенная за телом часть возвратного течения с относительно

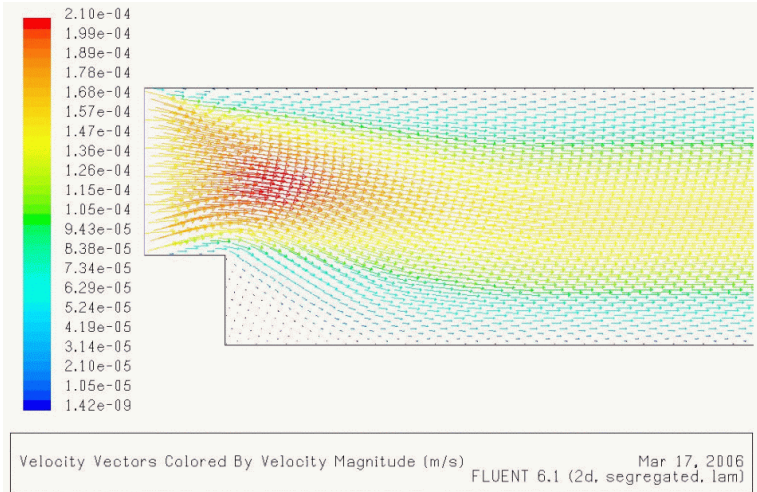


Рисунок 18 –  $Re = 10$

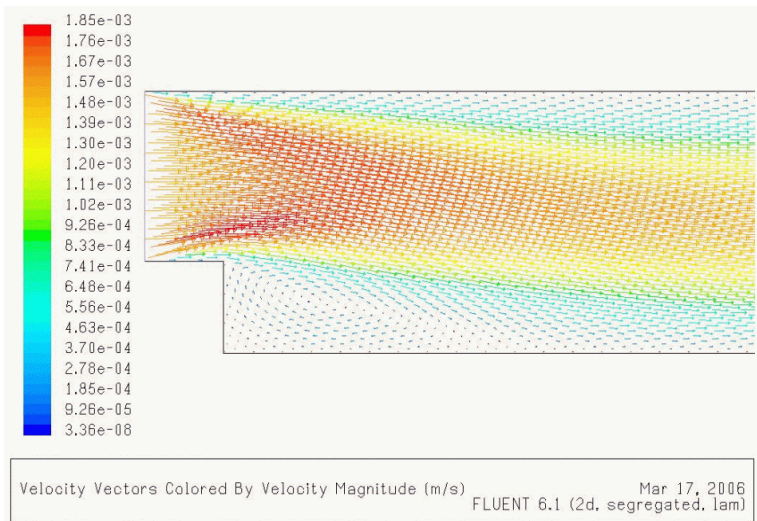


Рисунок 19 –  $Re = 100$

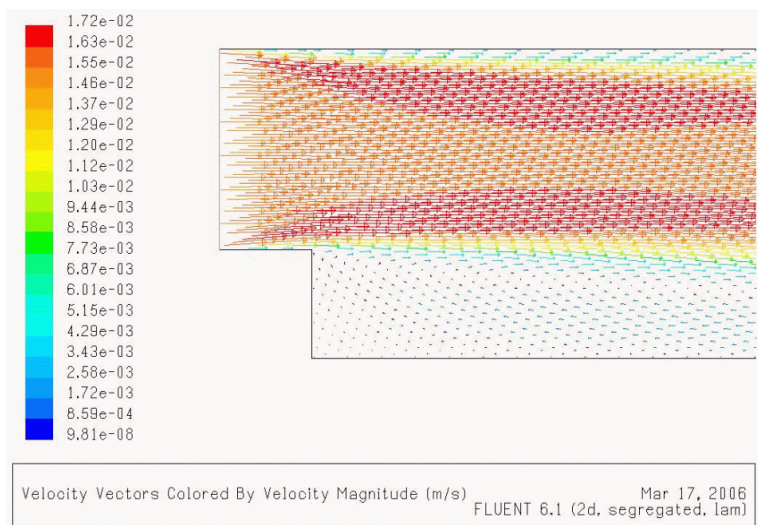


Рисунок 20 –  $Re = 1000$

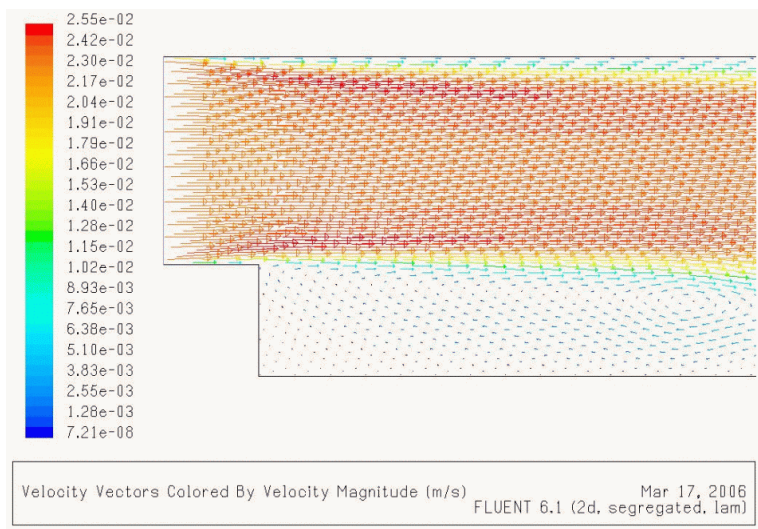


Рисунок 21 –  $Re = 1500$

слабой завихренностью, ограниченная в поперечном направлении свободными слоями смешения, а в продольном направлении торцом тела и ближним следом с существенно большей завихренностью.

Аналогичная задача решалась в прикладном программном пакете Fluent. Результаты представлены ниже.



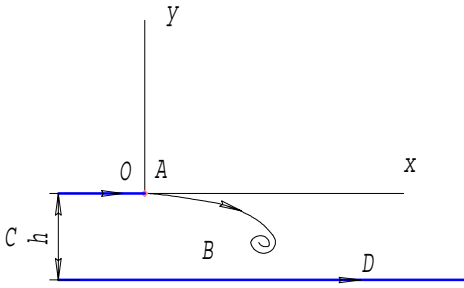


Рисунок 22 – Схема обтекания уступа

Распределение поля скоростей показано на рис. 17-21.

В теории вязко-невязкого взаимодействия была предложена схема обтекания препятствия (рассмотрена в) [10]. Обтекания по результатам численного эксперимента имеют тот же характер что и схема.

**Список литературы:** 1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 456 с. 2. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. – М.: ОГИЗ, 1948. – 432 с. 3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1967. – 287 с. 4. Численные методы в динамике жидкостей (материалы кармановских чтений) / Под ред. О.М. Белоцерковского и В.П.Шидловского. – М.: Мир, 1981. – 320 с. 5. Oberkampf W.L. Domain Mappings for the Numerical Solution of Partial Differential Equations//Int. J. Numer Methods Eng. – 1976. – 10. – P. 211-223. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с. 7. Суворова И.Г. Автоматизация расчетов методом R-функций применительно к задачам стройиндустрии / Суворова И.Г., Шевченко А.Н. – Киев: Учеб.-метод. каб. высш. образования, 1991. – 60 с. 8. Рвачев В.Л. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе ПОЛЕ-3 / Рвачев В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Львов, 1991. – № 33. – С. 95-99. 9. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы //Вестник НТУ ХПИ. – Харьков, 2004. – № 31. – С.141-148. 10. Гогши Л.В. Отрывные и кавитационные течения: основные свойства и расчетные модели / Гогши Л.В., Степанов Г.Ю. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

Поступила в редколлегию 20.05.2006

УДК 539.3

**А.А.СТЕПУК**, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия;  
**А.В.СТЕПУК**, канд.физ.-мат.наук;  
**Л.В.АВТОНОМОВА**, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОРФОЛОГИЯ БИОКЕРАМИКИ

Гідроксилатапіт кальцію (ГАП) має склад близький за фізико-хімічними параметрами до кісткової тканини й застосовується для різних цілей як кераміка, цемент, композитні імпланти у медицині. Показано, що термічна обробка зразків призводить до модифікації форми й структури кристалітів. Вивчено морфологію кристалітів, яка впливає на структурно-механічні властивості ГАП.

The Calcium Hydroxyapatite (HAp), which physical and chemical properties are similar to bone tissue, is applied in various medicine areas as ceramics, cements and composite implants. It is exposed that thermo treatment leads to crystallites form and structure modification. It is examined the crystallites morphology, that influence to structural and mechanical HAп properties.

Гидроксилapatит кальция  $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$  (ГАП) и родственные ему фосфаты кальция представляют значительный интерес для медицины в роли биосовместимых материалов, поскольку ГАП является основным компонентом костной ткани, зубов [1,2]. Благодаря близости состава ГАП костному минералу и уникальным физико-химическим характеристикам, материалы на основе фосфатов кальция находят широкое использование в виде керамики, цемента и композитов.

Кристаллы синтетического апатита и его биологического аналога различаются по форме и размерам [1]. Так, апатит костной ткани представлен уплощенными кристаллами с размерами в плоскости менее 50 нм. Наиболее типичная форма кристаллов синтетического апатита – удлиненные гексагональные призмы. Поскольку практическое применение ГАП (в том числе и медико-биологическое) часто обусловлено состоянием и свойствами порошка, то контроль морфологии кристаллов ГАП, прочностных свойств представляется чрезвычайно важным [2].

Механические свойства ГАП определяются морфологией синтезированной биокерамики, которая, в свою очередь, зависит от начальной концентрации растворов, pH, температуры синтеза, ионной силы раствора и концентрации иона-модификатора. Последние приходится выбирать при планировании любого варианта осаждения ГАП из раствора. В работе предполагалось, что модифицирующее действие аниона на морфологию кристаллов ГАП может быть вызвано наличием специфического взаимодействия аниона с растущим кристаллом: а) адсорбцией аниона на поверхности апатита, б) замещением данным анионом фосфат- или гидроксид-иона в решетке ГАП.

Наиболее устойчивые кристаллиты ГАП и термически стабильные порошки получались при отжиге в муфельной печи при температурах (500, 700, 900, 1100 °C).

Рентгенографические исследования порошков проводили на дифрактометре ДРОН-3М в  $\text{Cu K}\alpha$  излучении (ср. длина волны  $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$ , никелевый  $\beta$ -фильтр). Регистрация проводилась в пошаговом режиме на интервале углов  $2\theta = 20\text{-}60^\circ$  с шагом 0,1 при экспозиции в точке 2 сек – для фазового анализа, и 0,03 с экспозицией 6 сек в диапазоне  $2\theta = 24\text{-}27^\circ$  – для исследования профилей дифракционных пиков.

По данным рентгенофазового анализа (РФА) при синтезе гидроксилapatита из разных кальциевых солей во всех случаях в качестве основного продукта был получен ГАП.

Значительная ширина линий на дифрактограммах свидетельствует о малых размерах частиц (табл. 1). Оценка средних размеров частиц проводилась при помощи формулы Дебая-Шеррера.

Рентгенографический анализ образцов показал, что в результате отжига порошков при температурах 500-1100°C размер кристаллов возрастает, о чем свидетельствует уменьшение ширины дифракционных пиков (см. табл.1). Увеличение размеров кристаллов является закономерным следствием усиления процессов массопереноса с увеличением температуры. Порошкообразная

система стремится минимизировать избыточную поверхностную энергию за счет укрупнения частиц. В результате рекристаллизации происходит рост более крупных частиц за счет поглощения малых.

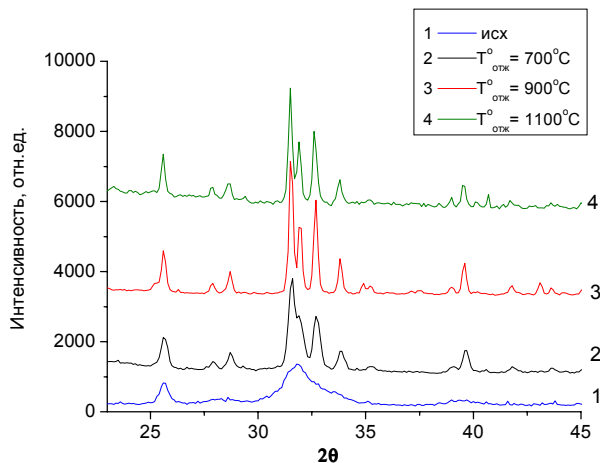


Рисунок 1 – Рентгенограмма образцов ГАП, полученного по реакции (1) из ацетата кальция

Таблица 1 – Размеры кристаллов образцов, полученных из разных кальциевых солей

CaX <sub>2</sub>	Исходный образец	T <sub>отж</sub> = 500 °C	T <sub>отж</sub> = 700 °C	T <sub>отж</sub> = 900 °C	T <sub>отж</sub> = 1100 °C
Хлорид	25нм	25нм	40 нм	85 нм	60 нм
Нитрат	15 нм	30 нм	40 нм	50 нм	70нм
Ацетат	25 нм	25 нм	40 нм	55 нм	80 нм

Согласно результатам РФА фазового состава образцов, прокаленных при T = 500-1100 °C, позволяет судить о термической стабильности биокерамики и косвенно оценивать их стехиометрию.

Исследование микроструктуры порошков проводили на сканирующем электронном микроскопе с автоэмиссионным источником LEO SUPRA 50VP. ИК-спектры поглощения образцов фиксировали на спектрометре Spectrum One (Perkin Elmer, США) в диапазоне 400-4000 см<sup>-1</sup> с шагом сканирования 4 см<sup>-1</sup>. Образцы прессовали в таблетки диаметром 13 мм с бромистым калием (давление ручного пресса – 7 метрических тонн) из расчета 1 мг порошка на 150 мг КВг. Во всех образцах по данным ИК-спектров содержание карбонатных ионов во всех образцах практически одинаково. Следует отметить, что апатит кости также содержит карбонатные группы (до 4 % масс.) [3].

На снимке микрофотографии исходного образца ГАП заметны крупные агрегаты с размерами в несколько мкм, состоящие из частиц нанометрового размера

(рис. 2). Таким образом, методом осаждения из водных растворов солей кальция были синтезированы порошки гидроксилалатита с размером первичных частиц 25 нм и высокой степенью агрегации. Микроморфология полученных образцов менялась в зависимости от природы исходных анионов (хлорид, нитрат, ацетат): пластинки, иглы, равноосные частицы. Термическая обработка порошков при 500-1100 °С в течение 2 ч. приводит к огрублению частиц – увеличение размера кристаллитов до 2 мкм и появлению огранки. Форма конечных частиц в существенной степени определяется структурой первичных агрегатов.

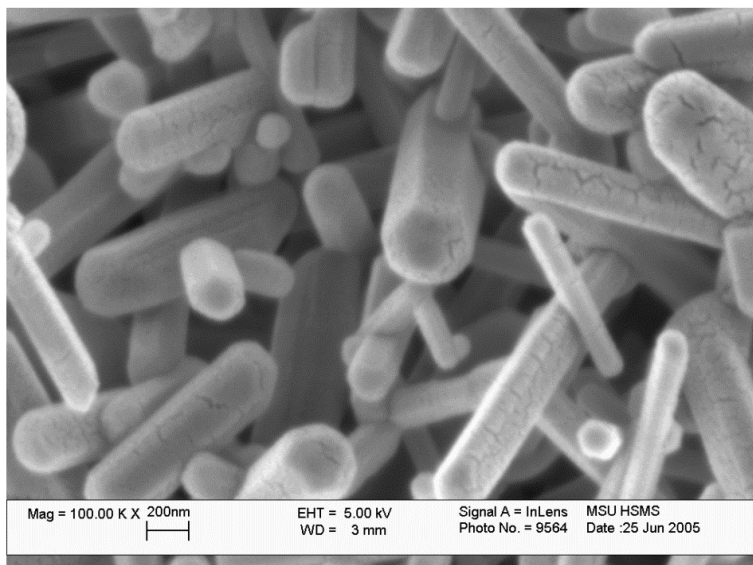


Рисунок 2 – Микрофотография кристаллов ГАП, синтезированных из нитрата кальция, после отжига при 900 °С.

Таким образом, методом осаждения из водных растворов солей кальция были синтезированы порошки гидроксилалатита с размером первичных частиц 25 нм и высокой степенью агрегации. Микроморфология полученных образцов менялась в зависимости от природы исходных анионов (хлорид, нитрат, ацетат): пластинки, иглы, равноосные частицы.

При проведении механических исследований и определении структурно-механических свойств выполнялось измерение прочности на сжатие и определение микротвердости (табл. 2) для образцов, прошедших различные режимы термообработки (рис. 3).

Результаты измерений прочности на сжатие хорошо коррелируют с измерениями микротвердости образцов. Были получены максимальные значения нагрузок для образцов с хитозаном порядка 130 МПа.

Возможности формирования различной текстуры ГАП позволяют модифицировать прочностные свойства полученной биокерамики, что подтверждается

широким диапазоном достигнутых прочностных свойств и микротвердости. В частности, концентрация и размеры сформированных кристаллитов, перспективы получения анизотропных структур могут быть использованы в качестве оптимизационных параметров для достижения высоких прочностных свойств такой керамики в рамках модели хрупкого разрушения Гриффитса.

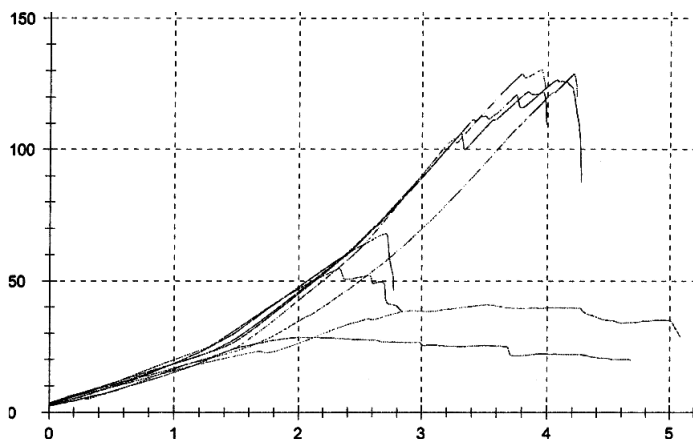


Рисунок 3 – Зависимость прочности на сжатие керамики ГАП (в МПа) от морфологии образцов при различных температурах отжига

Таблица 2 – Зависимость микротвердости при различном нагружении (в МПа) от морфологии образцов, ТСР с ГАП (10 %)

№ обр	Нагр, МПа	Сред. знач.	№ обр	Нагр, МПа	Сред. знач.	№ обр	Нагр, МПа	Сред. знач.
1	13,63	12,98	2	5,44	9,32	3	16,33	14,9
	13,56			4,83			16,61	
	14			7,8			11,66	
	10,09			9,99			14	
	15,02			5,44			16,27	
	12,4			4,83			15,5	
	11,16			10,75			21,71	
	13,96			16,19				
				7,48				
				15,71				
			6,72					
			8,32					

**Список литературы:** 1. Suchanek W., Yoshimura M. Processing and properties of hydroxyapatite-based biomaterials for use as hard tissue replacement implants. – J. Mater. Res. – 1998. – Vol. 13, No. 1. – P. 94-117. 2. Dorozhkin S.V., Epple M. Biological and medical significance of calcium phosphates. – Angew. Chem. Int. Ed. – 2002. – Vol. 41. – P. 3130-3146. 3. L.M.Rodriguez-Lorenzo, M.Vallet-Regi Controlled Crystallization of calcium phosphate apatites. – J. Chem. Mater. – 2000. – Vol. 12. – P. 2460-2465.

Поступила в редколлегию 22.09.2006.

*А.А. ТЕСЛЕНКО*, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

## АВТОМАТИЗАЦИЯ ПЬЕЗООПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

У роботі імітаційними методами досліджується точність методу фотопружності для випадку методики, використовуваної при автоматизації вимірювань. Показані обмеження застосовності методики, пов'язані з точністю визначення орієнтації досліджуваного виробу.

In simulation methods work being presented, the photoelasticity method accuracy is investigated for methods used under measurements automation. Besides, the method application limitations related to the investigated product orientation accuracy evaluation are shown

**1. Введение.** В настоящее время продолжается процесс внедрения в конвейерное производство автоматических методов измерения качества прозрачных материалов. Важным параметром для стекол и кристаллов является низкий уровень остаточных напряжений. Следствием этого есть развитие конвейерных методов пьезооптических измерений. В данной статье исследуются проблемы автоматизации измерений методами численного моделирования. Проводимое здесь исследование является продолжением исследований, представленных в [1-5].

**2. Актуальность рассматриваемой проблемы.** Методы численного моделирования позволяют предсказать и исследовать проблемы пьезооптических измерений, не создавая самих приборов. Некоторые проблемы, решения которых в практических измерениях найти очень трудно, легко исследуются модельным образом. В данной работе предлагается пример такого исследования.

**3. Исследуемая методика измерений.** В данной методике измерений свет проходит оптическую систему, состоящую из источника света, поляризатора, исследуемого плоского тела, второго поляризатора, скрещенного с предыдущим и устройства, измеряющего интенсивность полученного света. Таких измерений делается два. Первое – с исходной ориентацией скрещенных поляроидов, другое – с ориентацией, повернутой на  $45^\circ$ . В каждой паре таких измерений определяются оптический параметр изоклины (или угол изоклины) и разность фаз. Для определения плоских напряжений нужно две пары таких измерений. Одна делается обычно перпендикулярно плоскости исследуемого тела, другая – под наклоном к его поверхности. Теоретические основы методики описаны в [6]. Далее приводятся только конечные формулы для определения угла изоклины ( $\varphi$  – угла между анализатором и быстрой оптической осью исследуемого тела в конкретной точке) и разности фаз ( $\Theta$ ):

$$\sin^2 \frac{\Theta}{2} = \frac{I_1 + I_2}{I_0} \quad \text{и} \quad \sin^2 2\varphi = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

Здесь  $I_1$  – интенсивность света, полученная в первом просвечивании,  $I_2$  – интенсивность для повернутых скрещенных поляроидов на  $45^\circ$ .

**4. Метод конечных фотоупругих элементов (МКФЭ).** В данной работе решение ищется в конечноэлементном виде и называется «методом конечных фотоупругих элементов». С точки зрения МКЭ метод конечных фотоупругих элементов - новая модификация метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Эта модификация описана в [1,2,5] и здесь считается известной. Измерения производятся непосредственно в местах расположения узлов, и роль МКЭ в этой работе сводится к интерполяции данных.

**5. Численный эксперимент.** В данном численном эксперименте погрешность была заложена в неточности установки исследуемого тела в поляриметр, а именно, считался неточно заданным угол наклона луча света поляриметра. Большая погрешность может реализовываться, если исследуемые тела являются изделиями производства, находящимися на конвейере и автоматически подающимися в измерительную установку. Еще большие погрешности возникают при измерениях в процессе движения изделий на конвейере, когда имеют место вибрации изделий.

В качестве модели исследуемого изделия взята модель сосредоточенной силы, действующей на поверхность бесконечной полуплоскости.  $\sigma_r = 2 P \sin \alpha / (\pi r)$ . Геометрическое место точек равных напряжений получим из условия  $\sin \alpha / r = \text{const}$  для любого круга, который в точке O касается края (рис. 1).

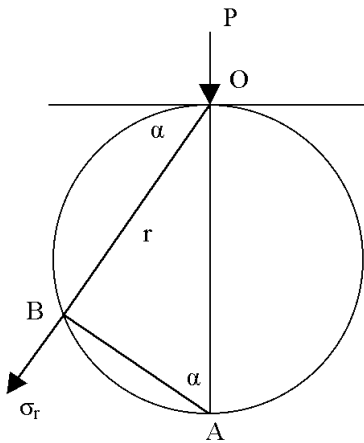


Рисунок 1

Предполагается, что изделие помещается в (или проходит сквозь) поляриметр, где через него проходят два луча по описанной ранее методике. Один – перпендикулярно, другой – под углом в  $27^\circ$ . Считается, что угол наклона перпендикулярного и наклонного просвечивания известен с точностью до нормально распределенной величины со среднеквадратическим отклонением в  $0,1^\circ$ . В результате имеем две пары оптических параметров:  $\delta$  – оптическая разность хода и  $\varphi$  – оптический параметр угла изоклины. По этим двум парам оптических параметров определяем узловые значения напряжений.

**6. Обсуждение результатов.** Результирующая картина напряжений приближена по двум причинам. Картина напряжений приближена в связи с интерполяционным характером метода конечных элементов. Картина напряжений приближена в связи с ошибками измерений, которые генерируются в имитационном эксперименте. Исходная картина напряжений иллюстрируется рисунком распределения компоненты  $\sigma_r$ , соответствующей рассматриваемой модели (рис. 2).

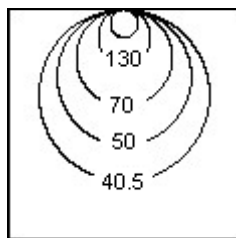


Рисунок 2

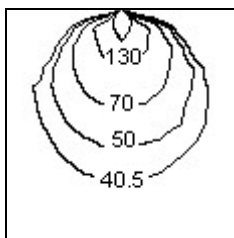


Рисунок 3



Рисунок 4

Остальные компоненты равны нулю. В точке приложения сосредоточенной силы напряжение равно 950 Па. После имитационных измерений и последующего расчета получаем распределение, показанное на рис. 3.

Картина распределения погрешности – рис. 4.

Максимальная погрешность 1,3 Па, минимальная – 1,91 Па.

Погрешности в  $\sigma_{ff}$  и  $\sigma_{fr}$  имеют распределение – рис. 5, 6.



Рисунок 5

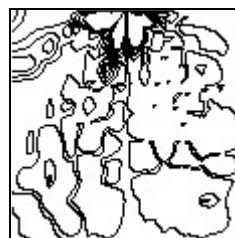


Рисунок 6

Максимальная погрешность в  $\sigma_{ff}$  равняется 1,3 Па, в  $\sigma_{fr}$  – 0,75 Па. Погрешности распределены хаотично. Поэтому величины изолиний не подписаны.

Однако при погрешности в угле наклона в  $1^\circ$ , погрешность в  $\sigma_{fr}$  возрастает до 130 Па. Такая чувствительность к ошибке требует либо очень тщательной установки образца в устройство, либо менее чувствительной к ошибкам методики измерений.

**7. Выводы.** Компонента  $\sigma_{fr}$  определяется в данном численном эксперименте с точностью до 10 % от своего максимального значения при среднеквадратической ошибке в угле наклона луча  $0,1^\circ$ . Если в эксперименте необходимо контролировать только максимальное напряжение, что верно в некоторых приложениях, то такая погрешность вполне допустима. Однако, как видно из экспериментов, ошибка в сдвиговых напряжениях становится отличной от нуля в условиях этого опыта. Величина отличия равна тем же 10 % от максимальных нормальных напряжений. Появление отличных от нуля сдвиговых компонент может для многих приложений быть неприемлемым. В таких случаях данный измерительный подход применить будет нельзя, и необходима разработка методики для конкретного случая формы тела и даже распределения напряжений.



**Список литературы:** 1. Тесленко А.А. / Заводская лаборатория. – 1998. – Т. 64, № 8. – С. 42-44. 2. Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы. – 1995. – №4. – С. 543. 3. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. 4. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. 5. Тесленко А.А. Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 6. Александров А.Я., Ахмензянов М.Х. / В кн.: Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. – Москва: Наука, 1973. – С. 146.

*Поступила в редколлегию 17.04.2006.*

УДК 539.3:629.833: 621.9.042

**Н.Н.ТКАЧУК**, НТУ «ХПИ»

## **ТОПОЛОГИЧЕСКИ РЕГУЛЯРНЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ СЕТКИ ДЛЯ ТЕЛ С КИНЕМАТИЧЕСКИ ГЕНЕРИРУЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ**

В роботі запропоновано технологію побудови топологічно регулярних скінченно-елементних моделей тіл зі складною геометрією. Вона дозволяє отримувати параметризовані скінченно-елементні моделі в рамках процедури синтезу геометрії досліджуваних об'єктів і може бути реалізована у САЕ-комплексах.

In the paper a technology of topological regular finite element models generation for bodies with complicated geometry is proposed. It enables to achieve parameterized finite element models within the framework of researched objects' geometry synthesis procedure and can be implemented in CAE software.

**Введение.** Обширный класс машиностроительных конструкций содержит детали и узлы, форма поверхности которых проектируется в соответствии с функциональными и эксплуатационными требованиями к сопряжению и взаимодействию их с другими элементами конструкции. В этом случае в процессе проектирования необходимо учитывать и функциональные, и прочностные требования и ограничения, причем во взаимосвязи. Наибольшие трудности подобная взаимосвязанность геометрических и прочностных параметров представляет для элементов конструкций сложной формы, в которых под действием рабочих нагрузок реализуется сложное напряженно-деформированное состояние.

Для решения задач подобного класса была предложена технология, соединяющая в рамках единого итерационного процесса уточнения параметров этапы синтеза кинематически генерируемых поверхностей (КГП) и анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) сложнопрофильных тел (СПТ) с учетом контактного взаимодействия [1, 2]. Проблемным этапом при организации многовариантных исследований НДС являются операции с конечно-элементной моделью (КЭМ) исследуемого СПТ. Особенно это относится к управлению разбивкой на конечные элементы (КЭ) и считыванию ре-

зультатов конечно-элементного моделирования НДС. Широко используемые для построения КЭМ инструменты автоматизированной генерации конечно-элементных сеток наряду с очевидными преимуществами обладают и многими недостатками. Во-первых, имеется весьма ограниченный набор средств управления параметрами конечно-элементной разбивки, часть из которых неприменима для областей со сложной геометрией. Во-вторых, алгоритмы, заложенные в программных пакетах, универсальны и не учитывают особенности геометрии исследуемого объекта, следовательно, конфигурация элементов не всегда будет рациональной. В-третьих, численные результаты (значения перемещений, напряжений и т.д.), полученные с помощью автоматически построенных сеток, трудно передаваемы в другие этапы цикла исследований и требуют при такой передаче адаптации формата данных.

Указанные замечания приводят к необходимости разработки методов и алгоритмов построения конечно-элементных моделей тел, ограниченных поверхностями, определяемыми кинематическими соотношениями. От получаемых КЭМ требуется параметризуемость и связанность с геометрической моделью посредством набора общих параметров. Процедура генерирования конечно-элементной сетки должна быть удобно реализуема в пакетах конечно-элементного моделирования (CAE), сопрягаться со средствами геометрического моделирования (CAD) и управляться специально разработанными приложениями, нацеленными на решение связанных задач синтеза данного класса объектов.

В статье предлагается технология генерирования конечно-элементных сеток, которая удобно встраивается в общую схему проектирования. На примере решения задач синтеза геометрии рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач [2, 3] и анализа их НДС показана реализация следующих этапов: разработка схемы параметрического описания геометрии и конечно-элементных моделей тел с кинематически генерируемыми поверхностями; создание алгоритма генерации топологически регулярных конечно-элементных сеток; оценка качества получаемых конечно-элементных моделей.

**Алгоритм решения связанной задачи синтеза геометрии и анализа напряженно-деформированного состояния.** Для решения задач анализа контактного взаимодействия тел, ограниченных КПП, и синтеза их конструктивных параметров предложена схема, описанная ранее в работе [1]. Эта схема позволяет решить задачу с выполнением поставленных требований к процессу решения: параметризованность всех применяемых моделей общими параметрами, наличие общего формата данных для всех этапов исследования, управляемость параметрами и удобство представления и анализа полученных результатов. Схема не имеет строгого порядка исполнения, однако каждый ее цикл состоит из синтеза геометрии по исходным параметрам, анализа НДС полученных тел и синтеза новых параметров на основе результатов анализа.

На первом этапе применяются кинематические соотношения, которые позволяют определить пары контактирующих точек поверхностей тел, находящихся в том или ином относительноном положении. Эти отношения неявно

задают форму рабочих поверхностей, от которых в первую очередь зависит характер контакта исследуемых тел. Разрешение кинематических соотношений в конечном числе относительных положений приводит к дискретному семейству точек на поверхности исследуемых тел с радиус-векторами:

$$r_{ij} = r(\varphi_i, u_j), \quad (1)$$

для которых  $\varphi_i, u_j$  могут быть значениями естественных для каждой из поверхностей параметров  $\varphi$  и  $u$ , отвечающих тому взаиморасположению тел, при котором контакт происходит в точке  $r(\varphi, u)$  рабочей поверхности. Если каждый из параметров независимо от другого пробегает определенное множество значений, то полученное семейство точек образует дискретную сетку, линии которой близки к координатным линиям на действительной рабочей поверхности.

На втором этапе осуществляется анализ НДС при контактном взаимодействии элементов исследуемой системы. С этой целью решается контактная задача, исходными данными в которой являются координаты точек поверхностей тел и прочие геометрические характеристики (кривизны, направления и т.д.). Полученные из решения задачи синтеза геометрические данные могут или непосредственно быть переданы в процедуру решения, или подвергаться последующей обработке, заключающейся, например, в создании конечно-элементной модели.

**Технология генерации топологически регулярных сеток.** Основной характерной особенностью КПП является сложность их описания традиционным (принятым в настоящее время в CAD/CAE-системах) способом. Этот способ соответствует следующим этапам [4]:

1. строится дискретный набор точек  $M_p, p = 1, \dots, N_M$ , с некоторой точностью  $\varepsilon_M$  приближающих идеальную поверхность  $S_{id}$ ;

2. на построенное облако точек натягивается некоторая аппроксимирующая поверхность  $S_{ap}$ , при этом допускается погрешность  $\varepsilon_{ap}$  в определении координат текущей точки  $M_{ap}$  общего положения (в том числе и узлов КЭ):

$$|M_{ap} - M_{id}| \leq \varepsilon_{ap} \left( M_{ap} \right), \quad M_{ap} \in S_{ap}, \quad M_{id} \in S_{id}, \quad (2)$$

где  $M_{id}$  – ближайшая к  $M_{ap}$  точка на идеальной поверхности;

3. полученная поверхность  $S_{ap}$  либо отдельно, либо согласованно с другими поверхностями, с которыми она образует некоторый объем, разбивается в автоматическом или полуавтоматическом режиме на конечные элементы; при этом грани КЭ, выходящие всеми своими узлами на поверхность  $S_{ap}$ , отклоняются в своих пределах от нее на величину  $\varepsilon_e$ , обусловленную локальным характером поведения  $S_{ap}$  и формой соответствующей грани КЭ.

Таким образом, в рамках традиционной технологии на самом деле используются следующие поверхности:  $S_{id}$  – идеальная, точная; поверхность  $S_M$ , представленная дискретным набором точек  $M$ , близких к  $S_{id}$ ; аппроксимационная поверхность  $S_{ap}$ , натянутая на точки  $M$ ; граневая поверхность  $S_G$ , образованная множеством граней, узлы которых принадлежат  $S_{ap}$  и в общем случае не лежат на поверхности  $S_{id}$ . Допускается суммарная «поверхностно-

узловая» погрешность:

$$\varepsilon_{\Sigma} = |\varepsilon_M| + |\varepsilon_{ap}| + |\varepsilon_e|. \quad (3)$$

основная погрешность в описании формы поверхности заложена в слагаемых  $\varepsilon_M$ ,  $\varepsilon_{ap}$ . Важно не только то, что они могут быть значительными, а и то, что для погрешностей  $\varepsilon_M$ ,  $\varepsilon_{ap}$  трудно установить априорные оценки; для управления данными величинами нет явных механизмов; при полностью автоматизированной разбивке в САЕ-системах эти величины практически бесконтрольны. В результате получаемое множество узлов конечно-элементной модели может иметь непредсказуемую и напрямую не управляемую погрешность расположения относительно идеальной поверхности.

Получаемая КЭМ в итоге имеет также непредсказуемую и напрямую неуправляемую «элементную» погрешность, обусловленную типом и формой используемых конечных элементов.

Естественно, что суммарное воздействие 2-х типов результирующих погрешностей (и «поверхностно-узловая», и «элементная» компоненты) может привести к значительному искажению результатов конечно-элементного моделирования НДС.

Для устранения возможных проблем предлагается алгоритм полуавтоматической генерации топологически регулярных сеток тел с КПП, который включает этапы: генерирование топологически регулярной сетки узлов КЭ с использованием свойств КПП с наперед заданной точностью на поверхности  $S_{id}$ , заданной в этом случае в своих естественных координатах; последующее создание множества КЭ, преимущественно состоящего из шестигранников (для этого требуется, например, соответствующая разбивка 6-ти участков поверхностей, в т.ч. КПП).

В данном случае можно пренебречь погрешностью  $\varepsilon_M$ , так как в большинстве случаев алгоритм синтеза точек КПП обладает достаточно высокой точностью. Суммарная погрешность «поверхностно-узловой» компоненты общей погрешности определяется только степенью отклонения формы «граневой» поверхности  $S_G$  от идеальной  $S_{id}$ . И хотя и в этом случае не всегда можно получить априорную оценку  $\varepsilon_e$ , можно получить практически точную апостериорную. Действительно, коль скоро заранее известна параметризация области посредством естественных кинематических параметров (обозначим их  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ , рис. 1), а также форма «граневой» поверхности конечно-элементной модели, то при размещении узлов КЭ на координатных линиях имеем:

$$\varepsilon_e = \max_{G \in S_G} \min_{I \in S_{id}} |\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_{id}| \cong \max_{\kappa_1, \kappa_2} |\mathbf{r}_G(\kappa_1, \kappa_2) - \mathbf{r}_{id}(\kappa_1, \kappa_2)|, \quad (4)$$

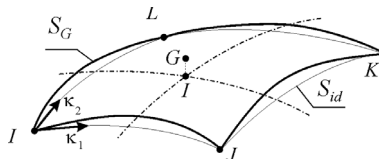


Рисунок 1 – К оценке погрешности «граневой» поверхности

где  $\mathbf{r}_G(\kappa_1, \kappa_2)$  – радиус-вектор точки  $G$  «граневой» поверхности, для которой ближайшая точка идеальной поверхности  $I$  имеет координаты  $(\kappa_1, \kappa_2)$ , так что  $\overrightarrow{GI} \perp S_{id}$ . Имея полный контроль над процессом разбивки, можно управлять погрешностью КЭМ. Для вычисления отклонения  $\varepsilon_e$  поверхности граней сгенерированных КЭ от «идеальной» поверхности  $S_{id}$  можем воспользоваться точным значением координат некоторых точек этой поверхности, расположенных внутри грани (это может быть одна центральная точка или набор точек внутри грани и на ее ребрах) [5]. В результате становится принципиально возможным построение набора узлов, задающих КЭМ, аппроксимирующую кинематически генерируемую поверхность с наперед заданной точностью.

В отдельных случаях можно избежать вычислений, связанных с построением семейства КЭМ и нахождением для них отклонения  $\varepsilon_e$ , а заранее указать оптимальные параметры разбиения поверхности. Так, для трилинейных восьмиузловых элементов, грани которых представляют собой поверхности второго порядка, можно привести достаточно точные эмпирические верхние оценки для  $\varepsilon_e$ . Их можно получить, представив точную поверхность на том ее участке, который аппроксимирует одна грань конечного элемента, эллиптическим параболоидом с вершиной в средней точке участка  $M$ , координаты которой на поверхности равны  $\varphi_{i+1/2}$  и  $u_{j+1/2}$  (рис. 2).

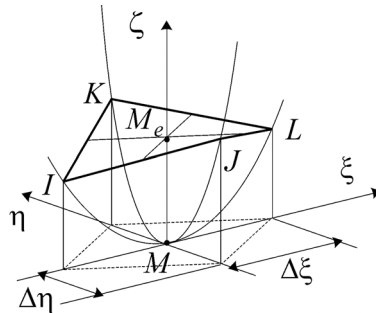


Рисунок 2 – Оценка отклонения грани трилинейного элемента от действительной поверхности

Предположив, что проекции вершин грани на касательную плоскость образуют параллелограмм с центром в точке  $M$ , можем выразить их отклонение по нормали от касательной плоскости через длины диагоналей, равные  $2\Delta\xi$  и  $2\Delta\eta$ :

$$\zeta_I = \zeta_K = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \Delta \xi^2; \quad (5)$$

$$\zeta_J = \zeta_L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \Delta \eta^2. \quad (6)$$

Вторые производные функции  $\zeta$ , содержащиеся в выражениях (5,6) представляют собой нормальные кривизны в сечениях, проходящих через диагонали:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = k_\xi, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = k_\eta. \quad (7)$$

Поскольку средняя точка грани элемента  $M_e$ , отстоящая по нормали от лежащей на действительной поверхности точки  $M$ , находится для вышеуказанного восьмиузловой элемента как пересечение отрезков, соединяющих середины противоположных ребер грани, то значение ее координаты  $\zeta_{M_e}$ :

$$\zeta_{M_e} = (\zeta_I + \zeta_J + \zeta_K + \zeta_L) / 4 = \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \Delta \xi^2 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \Delta \eta^2 \right) / 4. \quad (8)$$

Абсолютное значение этой величины можно оценить следующим образом:

$$|\zeta_{M_e}| \leq \frac{1}{4} k_{\max} (\Delta \xi^2 + \Delta \eta^2) \leq \frac{1}{4} k_{\max} s_{\max}, \quad (9)$$

где  $k_{\max}$  – максимальное из абсолютных значений главных кривизн,  $s_{\max}$  – длина большего ребра грани. оценка (9), не будучи строгой, оказывается справедливой и для максимального отклонения точек грани КЭ от идеальной поверхности  $\varepsilon_e$ .

Что касается «элементарной» компоненты итоговой погрешности конечно-элементного моделирования НДС, то наиболее значимой для нее является форма конечных элементов, вернее, во-первых, вопрос ее влияния на точность конечно-элементного моделирования, а во-вторых, вопрос возможности управления формой КЭ или хотя бы ее контроля, что будет рассмотрено ниже.

Генерация узлов топологически регулярной конечно-элементной сетки может осуществляться при помощи различных алгоритмов. Для зубьев двухпараметрических передач может быть предложена следующая схема построения КЭМ. пусть имеются две исходные сети точек, определяемые в параметрах  $\varphi$  и  $u$  по формуле (1):

$$r_{ij}^f = r^f(\varphi_i, u_j); \quad r_{ij}^r = r^r(\varphi_i, u_j). \quad (10)$$

В формулах (10) индексы  $f$  и  $r$  отвечают, соответственно, лицевой и тыльной рабочей поверхности зубца колеса двухпараметрической передачи. Особенностью параметризации обеих поверхностей является то, что диапазоны изменения параметров  $\varphi$  и  $u$  на каждой из сторон зубца можно выбрать одинаковыми, и, как следствие, задать сеть точек на каждом из колес по совпадающим наборам узловых значений параметров  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n, \{u_j\}_{j=1}^n$ . Следует заметить, что расположенные топологически регулярно во внутренних координатах  $\varphi$  и  $u$  (рис. 3) узлы на поверхности размещаются в общем случае неравномерно. Перейдя к дискретным координатам  $i$  и  $j$ , параметры  $\varphi_i, u_j$  можно задать дискретными функциями  $\varphi_i = \Phi(i, j)$  и  $u_j = U(i, j)$ , определяющими расположение зон сгущения-разрежения сетки на КПП. В простейшем случае равномерного распределения  $\varphi_i = \varphi_0 + (i-1)\Delta\varphi$ ;  $u_j = u_0 + (j-1)\Delta u$ . Внутренние узлы сетки  $r_{ijk}$  предлагается строить, размещая их на линиях  $\gamma_{ij}$ , соединяющих точки  $r_{ij}^f, r_{ij}^r$  рабочих поверхностей зубца:

$$\gamma_{ij}(w): \gamma_{ij}(0) = r_{ij}^f, \gamma_{ij}(1) = r_{ij}^r, r_{ijk} = \gamma_{ij}(W(k)), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l},$$

где  $W$  – дискретная функция, с помощью которой можно управлять плотностью распределения узлов по ширине зуба. В простейшем случае в качестве кривых  $\gamma_{ij}$  можно брать прямые линии, на которых равномерно по длине располагать внутренние узлы. Полученная в результате сетка, в действительности, будет топологически эквивалентна разбиению параллелепипеда в декартовых координатах с тем отличием, что для ее построения использованы криволинейные координаты области зуба, ограниченного его рабочими поверхностями  $r^f(\varphi, u)$  и  $r^r(\varphi, u)$  (на рис. 3 – пример разбивки).

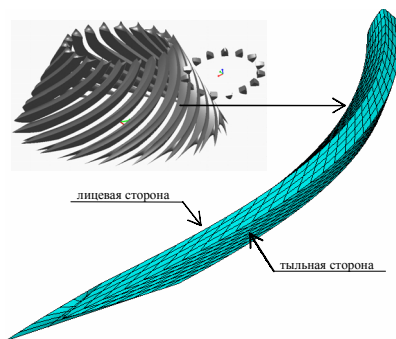


Рисунок 3 – КЭМ зуба колеса двухпараметрической передачи

**Форма конечных элементов: управление, описание, диагностирование, оценка результирующей погрешности.** Как известно [6], форма КЭ сказывается на точности конечно-элементного моделирования НДС, устойчивости и скорости сходимости приближенного решения. диагностика конечных элементов является стандартным этапом создания КЭМ. Осуществляется она средствами препроцессора САЕ-системы, который оперирует исключительно геометрическими данными.

Наличие элементов с сильно искаженной формой, у которых некоторые геометрические характеристики превышают условленные допустимые значения, не всегда приводит к возрастанию ошибки. Проверяемые величины только входят в коэффициенты асимптотических оценок и связаны с источниками погрешности МКЭ не напрямую. С искажением формы конечных элементов связаны в числе других следующие источники погрешности: зависимость аппроксимационных свойств конечно-элементного базиса от формы КЭ (I); применение процедуры численного интегрирования для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок (II).

К сожалению, даже имеющиеся оценки погрешности, вызываемой факторами I и II, описывают лишь тенденцию изменения ошибки при уменьшении диаметра разбиения исследуемой области  $\Omega$  и изменении формы КЭ. В связи с этим предлагается вместо отсутствующих теоретических данных использовать для оценки возникающих погрешностей методику численного

эксперимента на тестовых задачах: для реальных конечно-элементных сеток варьируется форма КЭ, а затем производится оценка конечной точности численного моделирования.

Если задаться типом используемых КЭ, то для него можно найти соответствующий набор общепринятых параметров и их ограничительных значений [4]. Так, для призматических шестигранных элементов в САЕ-комплексе ANSYS проверяются значения следующих контрольных параметров: Aspect Ratio, Parallel Deviation, Max Corner Angle, Warping Factor, Jacobian Ratio. Первые четыре вычисляются отдельно для каждой из граней элемента и еще трех дополнительных четырехугольных сечений. Так, например, Warping Factor вычисляется по проекциям вершин на плоскость, проходящую через их центр тяжести и ортогональную векторному произведению двух диагоналей грани элемента. Разница высот вершин, отстоящих от этой плоскости на одинаковое расстояние, но в разных направлениях, делится на квадратный корень площади проекции грани. Результирующая величина (Warping Factor) служит мерой того, насколько форма грани элемента или контрольного сечения отличается от плоской.

Из всего множества факторов, характеризующих форму КЭ, во многих случаях можно, исходя из специфики конкретного объекта выделить несколько наиболее влияющих факторов. Например, для зуба конического колеса двухпараметрической передачи (см. рис. 3) в качестве таких значимых факторов можно принять угол  $\theta$  при вершине четырехугольников, порождаемых разбивкой лицевой и тыльной рабочих поверхностей, а также угол относительного поворота  $\alpha$  противоположных граней шестигранного конечного элемента (рис. 4). Такой выбор конструктивных параметров дает возможность установить связь с контрольными параметрами. Например, показанные на рис. 5 элементы при различных значениях  $\alpha$  и  $\theta$  ( $\rho$  положено равным 1) и соответствующие им значения Warping Factor позволяют установить максимальный угол закручивания  $\alpha$  для различных  $\theta$ , при которых Warping Factor не превышает ограничения 0,4. Кроме этого полученная зависимость позволяет выбирать значения конструктивных параметров  $\alpha$ ,  $\theta$  и  $\rho$ , при которых значение указанного контрольного параметра принимает заданную величину.

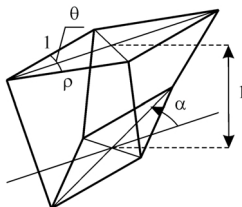


Рисунок 4 – Упрощенное описание шестигранного элемента

Таким образом, предложен механизм внешнего (по отношению к САЕ-системе) управления формой конечных элементов, а также получены непрерывные зависимости внутренних (в данном случае – для САЕ-



системы ANSYS) контрольных характеристик качества формы КЭ от внешних конструктивных.

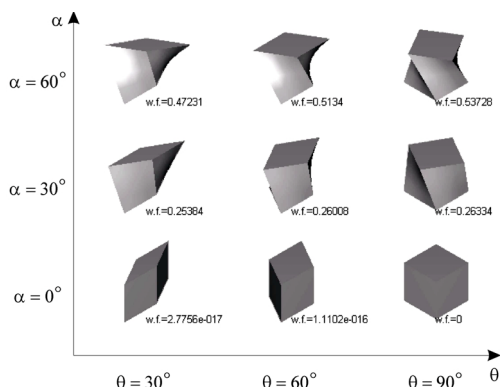


Рисунок 5 – Зависимость значения Warping Factor от конструктивных параметров элементов

После установления зависимостей значений контрольных параметров от конструктивных в принципе можно оперировать с предварительными оценками качества сетки. поскольку представляет интерес именно конечная точность моделирования НДС, а инструмент варьирования формой КЭ при помощи конструктивных параметров уже предложен, можно вычислять меру погрешности  $\delta$ :

$$\delta(p_\phi) = \|u_N - u\| / \|u\|, \quad (11)$$

где  $u_N$  – численное решение при текущем наборе параметров управления формой КЭ  $p_\phi$ ;  $u$  – известное решение тестовой задачи;  $\|\bullet\|$  – некоторая норма.

**Тестовая задача.** Для группы параметров, изображенных на рис. 5, была проведена серия тестовых расчетов, целью которых было установление зависимости (11). Выбор набора параметров был обоснован ранее. Тестовая задача была поставлена таким образом, чтобы максимально выделить ошибку, вызванную искажением формы элементов, которая описывается этим набором параметров. Приведем результаты, полученные отдельно для угла закручивания  $\alpha$  при фиксированных значениях остальных параметров ( $\theta = 90^\circ, \rho = 1$ ).

В единичном кубе было построено множество горизонтальных слоев. В середине каждого слоя располагается область, разбитая на искаженные элементы (рис. 6). Она образована двумя квадратными гранями со стороной 0,1, повернутыми относительно друг друга на угол  $\alpha$  (см. рис. 6). На верхней грани куба на площадке внутреннего квадрата, стороны которого параллельны ребрам куба, прикладывается пирамидально распределенная нагрузка. На боковых и нижней грани задано нулевое перемещение. При всех значениях угла  $\alpha$  разбиение верхней грани куба остается одинаковым. Линейный закон рас-

пределения давления на гранях деформированных элементов позволяет исключить ошибку вычисления вектора правых частей, так как используемый восьмиузловой элемент SOLID45 допускает билинейное распределение напряжений на плоских гранях, и в нем производится точное интегрирование такой нагрузки.

Результаты значений перемещения  $u_z$  в центральной точке верхней грани для различных  $\alpha$ , отнесенные к точному значению, изображены на рис. 7. Превышение этим отношением единицы указывает на то, что источником ошибки помимо точности аппроксимации служит также численное интегрирование. Следует отметить, что связанная с ним ошибка не уменьшится с измельчением сетки, если угол закручивания останется постоянным.

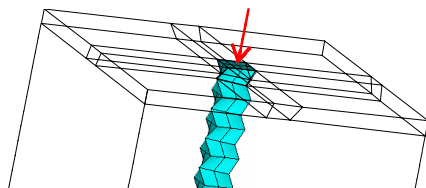


Рисунок 6 – Схема тестовой задачи

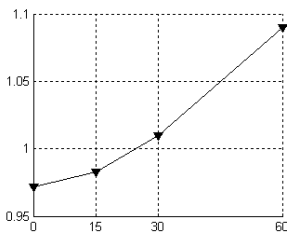


Рисунок 7 – Отношение перемещения к точному значению в зависимости от угла закручивания  $\alpha$  (град.)

**Моделирование зуба конического колеса цилиндрико-конической двухпараметрической передачи.** В завершение приведены результаты сравнительного расчета НДС зуба конического колеса, произведенного с помощью модели, построенной по предлагаемой в работе схеме с учетом полученных рекомендаций, и КЭМ, построенной средствами CAE комплекса ANSYS на базе геометрической модели со сплайн-поверхностями. Для того, чтобы избежать различий, связанных с приложением усилий к узлам моделей, была приложена объемная весовая нагрузка к закрепленному по основанию зубу. Для сравнения приводится распределение относительной разности суммарных перемещений вдоль верхней кромки зуба из КЭМ, полученных предложенным и стандартным способами (рис. 8). При одинаковом количестве элементов отличие результатов оказалось малым, что подтверждает применимость предложенной схемы построения топологически регулярных сеток для проведения дальнейших расчетов.

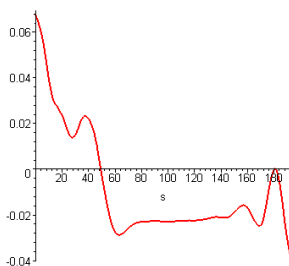


Рисунок 8 – Относительная разность перемещений,  
 $s$  – расстояние от текущей точки до нижней вдоль кромки зуба (мм)

**Закключение.** В статье предложена новая технология конечно-элементного моделирования НДС сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями. Она отличается следующими особенностями:

1. Реализуется общий единый подход к решению разнотипных задач проектирования и исследования НДС на основе параметрического описания геометрии и конечно-элементной сетки, обеспечивающий оперативность исследований, бесконфликтность обмена данными и интегрируемость с универсальными САПР.

2. Предложен инструмент внешнего по отношению с САЕ-системе управления конечно-элементными сетками.

3. Исключением (по сравнению с традиционной технологией) промежуточных этапов построения КЭМ исследуемого объекта, что резко увеличивает точность описания его формы.

Переход к исследованию новых типов объектов не предполагает разработки новой системы автоматизированного анализа НДС, а требует лишь добавления к созданному ядру модуля, учитывающего специфику исследуемого объекта.

Полученные положительные результаты оправдывают перспективность развития данных методов исследования. Описанные подходы и алгоритмы в дальнейшем планируется реализовывать в виде комплекса специализированных систем автоматизированного исследования напряженно-деформированного состояния сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями с учетом контактного взаимодействия.

**Список литературы. 1.** *Ткачук Н.Н.* Оценка контактных напряжений в сопряжении сложнопрофильных деталей // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – Вып. 24. – С. 137-151. **2.** *Ткачук Н.Н.* Особенности реализации кинематического метода расчета двухпараметрических передач // Вестник НТУ «ХПИ». Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – Вып. 3. – С. 133-151. **3.** *Ковалюх В.Р.* Синтез зубчатых вариаторов на основе колес с равновысокоширокими зубьями и впадинами.: Дисс. канд.техн. наук // Харьков, 1982. – 156 с. **4.** <http://www.ansys.com>. **5.** *Barone S.* Gear Geometric Design by B-Spline Curve Fitting and Sweep Surface Modelling // Engineering with Computers. – Springer-Verlag London Limited. – 2001. – Vol. 17. – P. 66-74. **6.** *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

Поступила в редколлегию 28.09.2006.

**С.В. ФИЛИПКОВСКИЙ**, канд. техн. наук

## **ЭФФЕКТИВНАЯ МЕТОДИКА АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ**

Розглянуто пружньо-демпферні підвіски агрегатів літаків. Досліджено ефективність методів розрахунку перехідних коливальних процесів підвісок при дії на них короткочасних і раптових навантажень. Визначено точність, збіжність і витрата машинного часу в методах Рунге-Кутта, Ньюмарка і Вілсона. Запропоновано модифікації методів Ньюмарка і Вілсона для розрахунку нелінійних систем. Виконано розрахунки підвісок з конструкційним розсіюванням енергії і сухим тертям. Розроблені методика і програми призначені для оптимального проектування підвісок.

The airplanes aggregates elastic-damped suspensions are reviewed. The efficiency of computational methods of transient analysis of suspensions at an operation on them of short-lived and sudden loads is investigated. Accuracy, convergence and expenses of a machining time in Runge-Kutta, Newmark and Wilson methods are determined. The modifications of Newmark and Wilson methods for calculation of non-linear systems are offered. The calculations of suspensions with constructional dispersion of energy and dry friction are executed. A designed technique and the programs are intended for optimal designing of suspensions.

Системы с нелинейным демпфированием имеют широкое применение в технике, поскольку они позволяют более эффективно снижать перегрузки объектов при ударах и вибрации, чем линейные амортизаторы [1, 2]. Помимо эффективной защиты от перегрузок подвески агрегатов должны иметь минимальный вес и габариты, а также удовлетворяют множеству конструктивных и функциональных ограничений. Удовлетворение таким противоречивым требованиям возможно лишь при оптимальном проектировании. Оптимизация представляет собой многократное поочередное решение задач синтеза и анализа конструкций в процессе нахождения оптимальных значений варьируемых параметров [3]. Поэтому к решению задачи анализа предъявляются требования высокой точности и скорости счета.

Целью исследований является создание эффективного метода анализа нелинейных динамических систем. В соответствии с этим решаются задачи определения точности и затрат машинного времени разных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений; выбора наиболее точного метода с наименьшими затратами машинного времени; доработки этого метода для нелинейных уравнений движения.

Объектом исследований является упруго-демпферная подвеска агрегата, которая обычно применяется в летательных аппаратах.

Расчет движения линейной системы сводится к решению уравнения

$$[K]\{U\} + [C]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где  $[K]$ ,  $[C]$  и  $[M]$  – соответственно матрицы жесткости, демпфирования и массы, а  $\{U\}$  и  $\{F(t)\}$  – векторы обобщенных перемещений и возмущающих воздействий. Коэффициенты матриц являются постоянными величинами.

Уравнение движения системы с нелинейным демпфированием имеет вид

$$[K]\{U\} + [C(U, \dot{U})]\{\dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\}, \quad (2)$$

Коэффициенты матрицы  $[C(U, \dot{U})]$  зависят от перемещений и их производных.

Для конструкционного рассеяния энергии  $c = \psi k |u| \text{sign } \dot{u}$ , где  $c$  – коэффициент матрицы демпфирования,  $\psi$  – коэффициент поглощения энергии материала амортизатора,  $k$  – соответствующий коэффициент матрицы жесткости,  $u$  – перемещение [4]. Для амортизатора сухого трения  $c = f_T \cdot \text{sign } \dot{u}$ , где  $f_T$  – сила трения [4].

Для решения уравнения (1) чаще всего применяют метод Ньюмарка и  $\Theta$ -метод Вилсона [5]. Их алгоритмы предполагают предварительное вычисление эффективной матрицы жесткости и приведение ее к треугольному виду, что возможно только для постоянных матриц линейной задачи.

Для нелинейных задач удобно использовать метод Рунге-Кутта [6]. В этом случае уравнение (2) приводится к виду

$$\{\dot{Y}\} = \{R\} - [A]\{Y\}, \quad (3)$$

где

$$\{\dot{Y}\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{V}\} \\ \{\dot{U}\} \end{Bmatrix}, \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} [M]^{-1}\{F(t)\} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [E] & 0 \end{bmatrix}, \quad \{V\} = \{\dot{U}\},$$

$[E]$  – единичная матрица.

В процессе интегрирования уравнений (3) в каждый заданный момент времени можно вычислить искомые векторы независимо от вида коэффициентов матриц. Однако в методе 4-го порядка на каждом шаге интегрирования необходимо четыре раза вычислять производные, а в методе 5-го порядка – шесть раз, что увеличивает время счета по сравнению с методами Ньюмарка и Вилсона.

При решении задач с большим нелинейным демпфированием по методу Рунге-Кутта замечено снижение точности вычислений. Программа с автоматическим выбором шага RK45 [6] измельчает шаг интегрирования и еще больше затягивает время счета.

Было проведено сравнение результатов решения линейных и нелинейных задач с большим демпфированием тремя названными методами. Во всех методах использовался одинаковый постоянный шаг интегрирования.

Рассчитаны колебания жесткого блока, закрепленного на четырех опорах. Чтобы система совершала колебания только по одной координате взято тело с симметричным распределением масс и расположением амортизаторов. Масса тела  $m = 2$  кг, коэффициент жесткости каждого амортизатора  $k = 200$  Н/м. Нагрузка действует по вертикальной оси и задана полуволной синусоиды  $F(t) = 10g \cdot \sin(10t)$  при  $t < (\pi/10)$  с,  $F(t) = 0$  при  $t > (\pi/10)$  с,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>.

В табл. 1 показаны результаты решения уравнений движения с вязким демпфированием. Коэффициент демпфирования амортизатора  $c = 16 \text{ Н·с/м}$

Наибольшие значения перемещений  $u_{max}$ , скоростей  $v_{max}$  и ускорений  $a_{max}$ , полученные всеми численными методами совпадают с точным решением до пятого знака. Моменты времени, в которые наблюдаются максимумы исследуемых функций ( $t_{U, max}$ ,  $t_{V, max}$ ,  $t_{a, max}$ ) для методов Ньюмарка и Вилсона совпадают с точным решением, а для метода Рунге-Кутта отличаются на 1-2% при этом время счета  $T$  по методу Рунге-Кутта в четыре-пять раз превышает время счета по методам Ньюмарка и Вилсона.

Таблица 1

Метод решения	$u_{max}$ , м	$t_{U, max}$ , с	$v_{max}$ , м/с	$t_{V, max}$ , с	$a_{max}$ , м/с <sup>2</sup>	$t_{a, max}$ , с	$T$ , с
Точное	-0,33526	0,21598	3,9258	0,32070	-59,384	0,39270	
Рунге-Кутта	-0,33526	0,21926	3,9258	0,32398	-59,384	0,39597	7,25
Ньюмарка	-0,33526	0,21598	3,9258	0,32070	-59,384	0,39270	1,43
Вилсона	-0,33526	0,21598	3,9258	0,32070	-59,384	0,39270	1,70

Для решения нелинейных задач сделаны доработки методов Ньюмарка и Вилсона. В алгоритме решения линейной задачи по этим методам сначала выполняются общие для всего процесса вычисления: формируются матрицы, задаются начальные значения переменных, выбирается временной шаг  $\Delta t$  и вычисляются постоянные интегрирования, формируется эффективная матрица жесткости. После этого для каждого временного шага вычисляется эффективная нагрузка в момент времени  $t + \Delta t$ . Для этого момента решается система линейных алгебраических уравнений и определяются перемещения, а через них ускорения и скорости [5].

В нелинейных системах матрицы меняются в процессе интегрирования, поэтому вычисление эффективной матрицы производится заново на каждом шаге. Незвестные векторы  $\{U\}$  и  $\{\dot{U}\}$  входят в матрицы левой и правой части, поэтому уравнение для нахождения  $\{U\}_{t+\Delta t}$  становится нелинейным. Для решения такой задачи каждый шаг интегрирования выполняется за две итерации. На первой итерации принимаем допущение о том, что матрица  $[C(U, \dot{U})]$  остается постоянной, такой как вычислена в конце предыдущего шага. В результате уравнение для определения  $\{U\}_{t+\Delta t}$  получается линейным. Вычислив  $\{U\}_{t+\Delta t}$ , в соответствии с алгоритмом определяем векторы  $\{\dot{U}\}_{t+\Delta t}$ ,  $\{U\}_{t+\Delta t}$  и уточненную матрицу  $[C(U, \dot{U})]$  в момент  $t + \Delta t$ . Далее выполняем вторую итерацию с новыми значениями нелинейных матриц и получаем уточненные значения  $\{U\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  и  $\{U\}$  в момент  $t + \Delta t$ . Итерации решения на каждом временном шаге можно продолжать, однако численные эксперименты показали, что вычисленные с точностью до пяти знаков значения искомым пе-

ременных после первой и второй итераций не отличаются друг от друга.

Для системы с конструкционным рассеянием энергии уравнение движения будет иметь вид:

$$[K]\{U\} + \psi[K]\{U \text{ sign } \dot{U}\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\}. \quad (4)$$

В соответствии с предложенным алгоритмом считаем во втором слагаемом (4) все величины постоянными. Тогда его можно перенести в правую часть как добавку к внешней нагрузке

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\} - \psi[K]\{U \text{ sign } \dot{U}\}. \quad (5)$$

Аналогично уравнение движения с сухим трением примет вид:

$$[K]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{F(t)\} - \{f_T \text{ sign } \dot{U}\} \quad (6)$$

где нелинейный вектор сил трения в правой части считаем постоянным на каждом временном шаге.

В алгоритме интегрирования уравнений (5) или (6) методом Ньюмарка общими для всех шагов будут следующие вычисления:

- 1) формирование матриц  $[K]$  и  $[M]$ ;
- 2) задание начальных значений  $\{U_0\}$ ,  $\{\dot{U}_0\}$  и  $\{\ddot{U}_0\}$ ;
- 3) выбор временного шага  $\Delta t$ , параметров  $\alpha$  и  $\delta$  ( $\delta \geq 0,50$ ,  $\alpha \geq 0,25(0,5 + \delta)^2$ ) и вычисление постоянных  $a_0 = 1 / (\alpha \cdot \Delta t^2)$ ,  $a_1 = \delta / (\alpha \cdot \Delta t)$ ,  $a_2 = 1 / (\alpha \cdot \Delta t)$ ,  $a_3 = 1 / 2\alpha - 1$ ,  $a_4 = \delta / \alpha - 1$ ,  $a_5 = (\delta / \alpha - 2) \cdot \Delta t / 2$ ,  $a_6 = \Delta t \cdot (1 - \delta)$ ,  $a_7 = \delta \cdot \Delta t$ ;

- 4) формирование эффективной матрицы жесткости  $[\hat{K}]$

$$[\hat{K}] = [K] + a_0[M].$$

После этого для каждого временного шага выполняем:

- 1) вычисление линейной части вектора эффективной нагрузки для момента времени  $t + \Delta t$

$$\{\hat{R}\}_{t+\Delta t} = \{R\}_{t+\Delta t} + [M](a_0\{\dot{U}\}_t + a_2\{\ddot{U}\}_t + a_3\{\ddot{\ddot{U}}\}_t);$$

- 2) вычисление нелинейной добавки первой итерации

$$\{\hat{R}\}_1 = \psi[K]\{U \text{ sign } \dot{U}\}_t \quad \text{или} \quad \{\hat{R}\}_1 = \{f_T \text{ sign } \dot{U}\}_t;$$

- 3) решение системы алгебраических уравнений

$$[\hat{K}]\{U\}_{t+\Delta t} = (\{\hat{R}\}_{t+\Delta t} + \{\hat{R}\}_1);$$

- 4) вычисление ускорений и скоростей для момента времени  $t + \Delta t$ :

$$\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} = a_0(U_{t+\Delta t} - U_t) - a_2\dot{U}_t - a_3\ddot{U}_t,$$

$$\{\dot{U}\}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + a_6\{U\}_t + a_7\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t};$$

- 5) вычисление нелинейной добавки второй итерации

$$\{\hat{R}\}_2 = \psi[K]\{U \text{ sign } \dot{U}\}_{t+\Delta t} \quad \text{или} \quad \{\hat{R}\}_2 = \{f_T \text{ sign } \dot{U}\}_{t+\Delta t};$$

- 6) повторение третьего и четвертого шагов с нелинейной добавкой  $\{\hat{R}\}_2$ .

Модифицированный алгоритм решения уравнений (5) или (6) методом

Вилсона аналогичен.

В табл. 2 показаны результаты расчета той же задачи с конструкционным демпфированием. Коэффициент рассеяния энергии материалом амортизатора  $\psi = 0,48$ . В табл. 3 показаны результаты расчетов с сухим трением. Сила трения  $f_T = 44,2$  Н. В этих случаях эквивалентное вязкое демпфирование близко к вязкому демпфированию первой задачи.

Все три метода интегрирования дают близкие значения искомых величин. При этом результаты, полученные по методам Ньюмарка и Вилсона, совпадают между собой. Затраты машинного времени у этих методов в три-четыре раза меньше, чем у метода Рунге-Кутты. Для проверки сходимости методов расчеты были повторены с шагом, уменьшенным в десять раз. Результаты с точностью до пятого знака не изменились.

Таблица 2

Метод решения	$u_{max}$ , м	$t_{U, max}$ , с	$v_{max}$ , м/с	$t_{V, max}$ , с	$a_{max}$ , м/с <sup>2</sup>	$t_{a, max}$ , с	$T$ , с
Рунге-Кутта	-0,33384	0,19962	4,6801	0,35026	-39,790	0,065451	6,48
Ньюмарка	-0,36526	0,21926	5,2343	0,32725	-40,314	0,081821	1,21
Вилсона	-0,33900	0,19635	4,8193	0,34688	-40,449	0,062177	1,70

Таблица 3

Метод решения	$u_{max}$ , м	$t_{U, max}$ , с	$v_{max}$ , м/с	$t_{V, max}$ , с	$a_{max}$ , м/с <sup>2</sup>	$t_{a, max}$ , с	$T$ , с
Рунге-Кутта	-0,35866	0,22253	5,0240	0,33052	-39,618	0,085081	8,23
Ньюмарка	-0,36526	0,21926	5,2343	0,32725	-40,314	0,081812	1,42
Вилсона	-0,36525	0,21926	5,2338	0,32725	-40,310	0,081812	1,37

Таким образом, на основе методов Ньюмарка и Вилсона разработаны эффективные численные методы для анализа переходных процессов с нелинейным демпфированием. Проверена точность и сходимость этих методов на исследовании движения систем с конструкционным демпфированием и сухим трением. Предложенные методы и программы предназначены для оптимального проектирования агрегатов самолетов и ракетно-космической техники.

**Список литературы:** 1. Виброзащитные системы с квазиулеевой жесткостью / Алибуджиев П.М., Гритчин А.А., Ким Л.И., Мизиренко Г.С., Хом В.Ф., Степанов П.Т. – Л.: Машиностроение, 1986. – 96 с. 2. Виброзащита радиоэлектронной аппаратуры полимерными компаундами / Зеленец Ю.В., Кирилин А.А., Слободник Э.Б., Галицкий Е.Н. – М.: Радио и связь, 1984. – 120 с. 3. Филипповский С.В., Шелудько Г.А. Оптимизация виброзащитных элементов самолетных систем // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2002. – Вып. 9, т. 9. – С. 77–84. 4. Филипповский С.В., Шелудько Г.А. Виброзащита элементов самолетных систем комбинированными демпферами // Вестник Нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2003. – Вып. 8, т. 3. – С. 111–116. 5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с. 6. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

Поступила в редколлегию 19.05.2006.



**А.В.ШАПОВАЛОВ**, канд.техн.наук;  
**В.М.ШАТОХИН**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ**

Досліджено особливості крутильних коливань стержня під дією системи рівних регулярно розташованих на окружності сил, лінії дії яких перпендикулярні площини окружності й осі стержня. Точки їхнього прикладання рівномірно рухаються по зазначеній окружності. Отримано критерії відсутності резонансів, а також умови виникнення полірезонансу.

Peculiarities of rod torsion oscillations under the influence of equal regularly located on circumference force system are investigated. Force lines of action are perpendicular to circumference plane and rod axle. Points of their application evenly move on stated circumference. Criteria of resonance lack and conditions of polyresonance beginnings are received.

**Введение.** К числу актуальных проблем теории колебаний деформируемых систем относится проблема изучения колебаний конструкций под действием нагрузок, место приложения которых меняется в зависимости от времени [1-3]. В динамике машин значительное внимание уделяется вопросам колебаний элементов машин, вращающихся в подшипниках качения и скольжения. При этом действие подшипника на опору заменяют сосредоточенной статической нагрузкой в то время как подшипник является источником динамических усилий на конструкцию. Последнее обстоятельство может привести к тому, что на определенных режимах работы податливые упругие опоры могут испытывать интенсивные колебания от действующих усилий в подшипниках. Исследования динамических процессов в конструкциях, находящихся под действием вращающейся нагрузки, в настоящее время находятся на начальном этапе.

В данной работе рассматривается задача возбуждения крутильных колебаний стержня от нагрузки, которая передается со стороны упорного шарикоподшипника, расположенного на его поверхности. Рассматривается стержень постоянного поперечного сечения под действием системы равных регулярно расположенных на окружности сил, линии действия которых перпендикулярны плоскости окружности и оси стержня. Точки их приложения равномерно движутся по указанной окружности (рис. 1).

**1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний и метод его решения.** Пусть крутильные колебания балки описываются следующим дифференциальным уравнением [4]

$$J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = M(x, t), \quad (1)$$

где  $J$  – погонный момент инерции относительно оси стержня;

$D$  – крутильная жесткость;

$M(x,t)$  – интенсивность моментной нагрузки.

Поместив начало системы координат  $xOy$  в левый конец балки (рис. 1) так, чтобы ось  $Ox$  совпадала с продольной осью балки, разложим угол закрутки стержня в ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right), \quad (2)$$

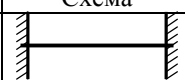
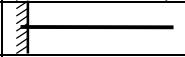
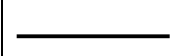
где  $l$  – длина балки.

Постоянные величины  $a_1$ ,  $a_2$  и параметры  $\lambda_n$  определяются из краевых условий задачи. Данные по характерным типам конструкций приведены в табл. 1.

Внешнюю нагрузку аналогично (2) представим рядом

$$M(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right). \quad (3)$$

Таблица 1

Схема	$\lambda_n$	$a_1$	$a_2$
	$n\pi$	1	0
	$(2n-1)\pi$	1	0
	$n\pi$	0	1

Для рассматриваемого случая имеем следующее. Из рис. 1 видно, что крутящий момент от силы, приложенной в точке с координатами  $x_i = x_i(t)$ ;  $y_i = y_i(t)$ , может быть задан выражением

$$M_i = P y_i \delta(x - x_i),$$

где  $\delta$  – функция Дирака.

Тогда общая нагрузка на стержень от  $m$  сил, вращающихся по окружности радиуса  $r$  с центром в точке  $(a,b)$  будет

$$M(x,t) = P \sum_{i=1}^m y_i \delta(x - x_i). \quad (4)$$

Из сравнения выражений (3), (4) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right) = P \sum_{i=1}^m y_i \delta(x - x_i). \quad (5)$$

Для нахождения коэффициентов разложения умножим левую и правую часть (5) на  $a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x$ . Возьмем интегралы от обеих частей полученного выражения по  $x$  в пределах от 0 до  $l$ . Тогда с учетом свойства ортогональности собственных форм, получим

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \sum_{i=1}^m y_i \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x_i + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x_i \right). \quad (6)$$

После соответствующих преобразований с учетом того, что  $x_i = \xi_i + a$ ;  $y_i = \eta_i + b$ ;  $\alpha = \lambda_n/l$ , выражение (6) приобретает вид

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \left[ (a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) \left( b \sum_i^m \cos \alpha \xi_i + \sum_i^m \eta_i \cos \alpha \xi_i \right) + (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a) \left( b \sum_i^m \sin \alpha \xi_i + \sum_i^m \eta_i \sin \alpha \xi_i \right) \right]. \quad (7)$$

Переходя к полярной системе координат, положение точки  $(x_i, y_i)$  на окружности радиуса  $r$  определим углом  $\varphi_i$  по формулам

$$\xi_i = r \sin \varphi_i; \quad \eta_i = r \cos \varphi_i; \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда будем иметь

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \left\{ (a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) \left[ b \sum_i^m \cos(\alpha r \sin \varphi_i) + r \sum_i^m \cos \varphi_i \cos(\alpha r \sin \varphi_i) \right] + (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a) \left[ b \sum_i^m \sin(\alpha r \sin \varphi_i) + r \sum_i^m \cos \varphi_i \sin(\alpha r \sin \varphi_i) \right] \right\}. \quad (8)$$

Преобразуем выражение (8), используя известные разложения [5]

$$\cos(z \sin \vartheta) = J_0(z) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} J_{2j}(z) \cos 2j\vartheta;$$

$$\sin(z \sin \vartheta) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} J_{2j-1}(z) \sin(2j-1)\vartheta,$$

где  $J_v$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) – функция Бесселя первого рода.

В результате соответствующих преобразований имеем

$$B_n(t) = \frac{2P}{l} \left\{ mbJ_0(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{1j} \sum_{i=1}^m \cos 2j\varphi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{2j} \sum_{i=1}^m \sin(2j-1)\varphi_i + J_0(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a + a_2 \sin \alpha a) \sum_{i=1}^m \cos \varphi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{3j} \sum_{i=1}^m [\cos(2j+1)\varphi_i + \cos(2j-1)\varphi_i] + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{4j} \sum_{i=1}^m [\sin 2j\varphi_i + \sin(2j-2)\varphi_i] \right\}, \quad (9)$$

где

$$\lambda_{1j} = 2bJ_{2j}(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \quad \lambda_{2j} = 2bJ_{2j-1}(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a);$$

$$\lambda_{3j} = rJ_{2j}(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \quad \lambda_{4j} = rJ_{2j-1}(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a).$$

Легко показать, что для регулярного расположения сил

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + i\Delta\varphi \quad (i = \overline{0, m-1})$$

из формул [5, 6]

$$\sum_{i=1}^{m-1} \cos(u + iv) = \cos\left(u + \frac{m-1}{2}v\right) \sin \frac{mv}{2} \operatorname{cosec} \frac{v}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin(u + iv) = \sin\left(u + \frac{m-1}{2}v\right) \sin \frac{mv}{2} \operatorname{cosec} \frac{v}{2}$$

следует

$$\sum_{i=1}^m \cos 2j\varphi_i = \begin{cases} m \cos ms\varphi_1, & j = ms/2, \\ 0, & j \neq ms/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{2k} \cos 2j\varphi_i = 2k \cos 2ks\varphi_1, \quad j = ks;$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \cos 2j\varphi_i = (2k-1) \cos(2k-1)2s\varphi_1, \quad j = (2k-1)s;$$

$$\sum_{i=1}^m \sin 2j\varphi_i = \begin{cases} m \sin ms\varphi_1, & j = ms/2, \\ 0, & j \neq ms/2; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m \cos(2j+1)\varphi_i = \begin{cases} m\delta_m \cos(2s-1)m\varphi_1, & j = [(2s-1)m-1]/2, \\ 0, & j \neq [(2s-1)m-1]/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{2k} \cos(2j+1)\varphi_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \cos(2j+1)\varphi_i = (2k-1) \cos(2k-1)(2s-1)\varphi_1, \quad j = [(2k-1)(2s-1)-1]/2;$$

$$\sum_{i=1}^m \cos(2j-1)\varphi_i = \begin{cases} m\delta_m \cos(2s-1)m\varphi_1, & j = [(2s-1)m+1]/2, \\ 0, & j \neq [(2s-1)m+1]/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{2k} \cos(2j-1)\varphi_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2k-1} \cos(2j-1)\varphi_i = (2k-1) \cos(2k-1)(2s-1)\varphi_1, \quad j = [(2k-1)(2s-1)+1]/2;$$

$$\sum_{i=1}^m \sin(2j-1)\varphi_i = \begin{cases} m\delta_m \cos(2s-1)m\varphi_1, & j = [(2s-1)m+1]/2, \\ 0, & j \neq [(2s-1)m+1]/2; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^m \sin(2j-2)\varphi_i = \begin{cases} m \sin ms\varphi_1, & j = (ms+2)/2, \\ 0, & j \neq (ms+2)/2; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^m \cos\varphi_i = 0, \quad m > 0.$$

В этих формулах  $s \in N$  ( $N$  – множество натуральных чисел);  $\delta_m = 1$  для  $m = 2r - 1$ ;  $\delta_m = 0$  для  $m = 2r$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ).

Так как для постоянной скорости вращения  $\varphi_1 = \omega t$ , то с учетом приведенных формул выражение (9) упрощается

$$B_n(t) = \frac{2Pm}{l} \left[ bJ_0(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a) + \sum_{i=1}^{\infty} L_i \cos i\omega t + \right.$$

$$+ \left. \sum_{i=1}^{\infty} M_i \sin im\omega t + \delta_m \sum_{i=1}^{\infty} N_i \cos(2i-1)m\omega t + \delta_m \sum_{i=1}^{\infty} T_i \sin(2i-1)m\omega t \right], \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_i &= 2bJ_{im}(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \\ M_i &= 2J_{im}(\alpha r) \frac{im}{\alpha} (a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a); \\ N_i &= 2J_{(2i-1)m}(\alpha r) \frac{(2m-1)m}{\alpha} (a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a); \\ T_i &= 2bJ_{(2i-1)m}(\alpha r)(a_1 \cos \alpha a - a_2 \sin \alpha a). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив ряды (2), (3) в уравнение (1), приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\ddot{A}_n + \Omega_n^2 A_n = J^{-1} B_n(t), \quad (12)$$

где  $\Omega_n^2 = \frac{D}{J} \alpha^2$  – квадрат собственных частот колебаний стержня.

Ограничиваясь рассмотрением установившихся вынужденных колебаний, решение  $n$ -го уравнения с учетом разложения (10) ищем в виде

$$\begin{aligned} A_n = & C_{n0} + \sum_{i=1}^{\infty} C_{ni} \cos im\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} E_{ni} \sin im\omega t + \sum_{i=1}^{\infty} F_{ni} \cos(2i-1)m\omega t + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} H_{ni} \cos(2i-1)m\omega t. \end{aligned}$$

Подставив это выражение в уравнение (12), после сравнения коэффициентов при одинаковых гармониках слева и справа с учетом (10), получим для искомых коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} C_{n0} &= \frac{2Pm}{l} \frac{bJ_0(\alpha r)(a_1 \sin \alpha a + a_2 \cos \alpha a)}{D\alpha^2}; \\ C_{ni} &= \frac{2Pm}{Jl} \frac{L_i}{\Omega_n^2 - (im\omega)^2}; \quad E_{ni} = \frac{2Pm}{Jl} \frac{M_i}{\Omega_n^2 - (im\omega)^2}; \\ F_{ni} &= \frac{2Pm}{Jl} \frac{\delta_m N_i}{\Omega_n^2 - [(2i-1)m\omega]^2}; \quad H_{ni} = \frac{2Pm}{Jl} \frac{\delta_m T_i}{\Omega_n^2 - [(2i-1)m\omega]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, в установившемся режиме стержень, получив статическую закрутку, равную

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n0} \left( a_1 \sin \frac{\lambda_n}{l} x + a_2 \cos \frac{\lambda_n}{l} x \right),$$

будет совершать колебания с частотой  $im\omega$  и  $(2i-1)m\omega$ . Угол закручива-

ния пропорционален смещению  $J_0b$  и произведению  $2Pm$ . Следовательно, он зависит от суммарного внешнего усилия, передаваемого стержню.

**2. Анализ характера резонансных режимов.** Проанализируем теперь амплитуды возбуждения колебаний (11). В силу того, что максимальные значения функций Бесселя  $J_\nu(z)$  убывают с ростом  $\nu$ , увеличение количества сил при сохранении величины нагрузки  $mP$ , уменьшает амплитуды возбуждения. Таким образом, увеличение количества сил без изменения статического угла закрутки стержня приводит к снижению уровня возможных вибраций.

Из выражений (13) следуют условия резонансов в рассматриваемой системе:

для четного количества сил ( $m = 2k$ )

$$\Omega_n^2 - (2ik\omega)^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_n}{2ik}, \quad i, k = 1, 2, 3, \dots; \quad (14)$$

для нечетного количества сил ( $m = 2k - 1$ )

$$\left. \begin{aligned} \Omega_n^2 - [2i(2k-1)\omega]^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_n}{2i(2k-1)}; \\ \Omega_n^2 - [(2i-1)(2k-1)\omega]^2 = 0 \quad \text{или} \quad \omega = \frac{\Omega_n}{(2i-1)(2k-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Отсюда следует, что при заданной скорости вращения  $\omega_1$  системы, состоящей из  $m$  сил, резонанс невозможен на собственных частотах стержня, удовлетворяющих условиям:  $\Omega_n < \Omega_k$  при четном числе сил, где  $\Omega_k = 2k\omega_1$ ;  $\Omega_n < \Omega_k$  при нечетном числе сил, где  $\Omega_k = (2k-1)\omega_1$ .

При стремлении  $i$  и  $m$  к бесконечности имеется возможность наступления резонансов даже при  $\omega \rightarrow 0$ . Однако при этом возрастают индексы функции Бесселя и, как отмечено выше, убывают амплитуды полигармонического возбуждения. Следует ожидать, что они окажутся недостаточными, чтобы вызывать заметные колебания в системах, где существует значительное рассеяние энергии.

О том, как с ростом количества сил убывают амплитуды полигармонического возбуждения, позволяет судить табл. 2, в которой приведены данные расчета двух амплитуд полигармонического возбуждения для случая жесткого закрепления концов балки при следующих параметрах:  $a = 1$  м;  $l = 3a$ ;  $b = 0,2a$ ;  $r = 0,05a$ .

Из таблицы видно, что вращение большого числа регулярно расположенных на окружности сил не является опасным с точки зрения возбуждения крутильных колебаний. Амплитуды колебаний могут достигать заметных величин только при нарушении регулярности расположения нагрузки, например, когда одна из сил по величине окажется больше других, что возможно в упорном шарикоподшипнике при нарушении перпендикулярности оси вращения торцевой опорной поверхности. В этом случае получим дополнительное возбуждение типа одной вращающейся силы, которому соответствуют большие значения коэффициентов  $L_1$  и  $T_1$ .

Таблица 2

$n$	$m$	$L_1$	$T_1$
1	1	$0,1187 \cdot 10^{-3}$	$0,0523 \cdot 10^{-1}$
	3	$0,1549 \cdot 10^{-12}$	$0,0598 \cdot 10^{-5}$
	5	$0,1444 \cdot 10^{-22}$	$0,2050 \cdot 10^{-10}$
	7	$0,2823 \cdot 10^{-33}$	$0,3345 \cdot 10^{-15}$
2	1	$0,4744 \cdot 10^{-3}$	$-0,1046 \cdot 10^{-1}$
	3	$0,0991 \cdot 10^{-10}$	$-0,4782 \cdot 10^{-5}$
	5	$0,1478 \cdot 10^{-19}$	$-0,0656 \cdot 10^{-8}$
	7	$0,4625 \cdot 10^{-29}$	$0,4281 \cdot 10^{-13}$

Остановимся в заключении на одном свойстве рассматриваемой системы. Поскольку собственные частоты заделанной по торцам балки связаны соотношением  $\Omega_n = n\Omega_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), из условий резонанса для группы, состоящей из  $m$  сил, получим

$$\omega = \frac{\Omega_n}{sm} = \frac{\Omega_1}{m},$$

так как  $s = 1, 2, 3, \dots$ .

Таким образом, если группу сил вращать со скоростью  $\Omega_1/m$ , в системе наступает одновременно резонанс на всех собственных частотах колебаний. Явление полирезонанса присуще так же балке с другими граничными условиями.

### Выводы.

1. Построено дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня под действием вращающейся системы регулярно расположенных на окружности сил, моделирующих действие упорного шарикоподшипника.
2. Получена система обыкновенных дифференциальных уравнений для формирования его решения.
3. Найдено решение указанных уравнений для установившихся колебаний стержня.
4. Установлено, что увеличение количества сил при сохранении суммарной нагрузки приводит к снижению уровня вибраций.
5. Получены условия возникновения и отсутствия резонансов для четного и нечетного количества сил.
6. Показано, что нарушение регулярности расположения сил может быть причиной возрастания динамических нагрузок.
7. Сформулированы условия возникновения в стержне явления полирезонанса.

**Список литературы:** 1. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с. 2. *Филлипов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 3. *Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с. 4. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с. 5. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с. 6. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1973. – 228 с.

*Поступила в редколлегию 15.09.2006.*

*Г.Ю.МАРТЫНЕНКО*, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

## **УТОЧНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РОТОРА НА ЭМП ЗА СЧЕТ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ЗАЗОРОВ ПОД ПОЛЮСАМИ С УЧЕТОМ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ СМЕЩЕНИЙ В РАДИАЛЬНОМ И ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИЯХ**

У роботі розглянута математична модель ротора на магнітному підвісі з включенням у неї уточнених нелінійних виражень для магнітних провідностей зазорів радіальних і осевих ЕМП. Приведено приклад розрахунку провідностей зазорів запропонованим способом і за допомогою спрощених виражень. Дано оцінку границь застосовності різних методів їхнього обчислення.

In work the mathematical model of a rotor on magnetic bracket with inclusion in it of the specified nonlinear expressions for permeances of gaps of radial and axial electromagnetic bearing is examined. The example of calculation of permeances of gaps by the offered way and by means of the simplified expressions is described.

**Введение.** Управляемые электромагнитные подшипники (ЭМП) являются альтернативой подшипникам качения, скольжения, газодинамическим и обладают по сравнению с ними целым рядом преимуществ (отсутствие смазочных систем, повышение надежности, снижение потерь на трение, отсутствие механического изнашивания, сравнительно большой зазор и т.д.).

Ввиду перечисленных преимуществ разработкой и производством управляемых электромагнитных подшипников роторных машин в настоящее время занимается ряд компаний и фирм, как за рубежом, так и в странах СНГ: Societe de Mecanique Magnetique – S2M (Франция), Revolve Magnetic Bearings Inc. (Канада), Научно-производственное предприятие всероссийский научно-исследовательский институт электромеханики с заводом – НПП ВНИИЭМ им. А.Г.Иосифьяна (Россия), ООО «ГАЗХОЛОДТЕХНИКА» (Россия) и др. В теоретическом плане перед разработчиками стоят следующие проблемы: адекватное математическое моделирование системы ротор – управляемые ЭМП и взаимосвязанных магнитомеханических явлений происходящих в ней; разработка и оптимизация методов и алгоритмов управления ЭМП; исследование динамического поведения системы с определением резонансных режимов и последующей отстройкой от них. Решению этих и других задач посвящено множество публикаций в научных журналах, патентов, а также докладов на шести международных симпозиумах по магнитному подвесу «Int. Symposium on Magnetic Bearings» с 1988 г. и конференциях по применению магнитных подшипников проводимых университетом штата Вирджиния (США) с 1991 г. Отдельного внимания заслуживают монографии: G.Schweitzer, H.Bleuler and A. Traxler «Active magnetic bearings» (Швейцария, 1994 г.) [1]; Maslen E.H. «Magnetic bearings» (США, 2000 г.) [2], Журавлев Ю.Н. «Активные магнитные подшипники: теория, расчет, применение» (Россия, 2003 г.) [3]. В первых двух работах даны основные идеи, понятия, некоторые упрощенные линейные методы построения и моделирования управляемого электромагнитного подвеса ротора и алгоритмов управления. В последней делается попытка всесторонне охва-



тить проблему построения управляемых (активных) магнитных подшипников. В ней кратко дается описание различных видов ЭМП, конструкций, приводятся методики расчета, магнитных цепей, методы математического моделирования, синтеза и анализа активных магнитных подшипников (АМП). Однако, моделирование магнитомеханической системы ротор – АМП осуществляется с помощью дифференциальных уравнений движения и дифференциальных уравнения для токов в линейном приближении с применением линейных систем управления. При этом линеаризуются в окрестности положения равновесия токи в цепях, управляющие напряжения на обмотках, а при определении магнитных проводимостей зазоров применяется разложение в степенной ряд и неучет слагаемых со степенями выше второй, а также последующее определение с их помощью индуктивностей с точностью до квадратичных членов в разложениях по степеням поступательных и угловых перемещений ротора. Таким образом, линейная модель подвеса получена в предположении малости отклонений переменных от их номинальных значений. В действительности эти отклонения могут быть значительными, а значит в предельных режимах – насыщение магнитной цепи, нулевой ток, нулевой зазор и т.д. линейная модель подвеса теряет смысл, на что указывает и сам автор [3]. Так в области близкой к насыщению магнитной цепи использование линеаризованной математической модели не позволяет корректно описывать процессы, происходящие в рассматриваемой магнитомеханической системе, а именно существенно нелинейный характер намагничивания. При токах в цепях близких к нулевым значениям линеаризация в окрестности положения равновесия некорректна. Некорректной также является математическая модель при смещениях ротора сравнимых с номинальным зазором. Эти же недостатки присущи и физическим системам управления движением ротора, построенным на линеаризованных математических моделях. Кроме того, все перечисленные факторы приводят к увеличению времени отладки систем управления построенных на таких расчетных схемах.

Таким образом, разработка уточненных нелинейных математических моделей позволит установить реальные границы применения линейных и нелинейных алгоритмов управления, увеличить достоверность имитационных моделей [4], расширить область устойчивых движений ротора в зазоре ЭМП.

**1. Постановка задачи.** Предметом данной статьи является уточнение математической модели «ротор на ЭМП» за счет нахождения нелинейных выражений магнитных проводимостей зазоров радиальных и осевых ЭМП, расчет и оценка расхождения значений проводимостей вычисленных с учетом и без учета взаимовлияния поступательных и угловых перемещений ротора, а также выяснение границ применимости упрощенных выражений этих величин.

**2. Математическая модель ротора на ЭМП.** Рассмотрим пространственную расчетную схему вращающегося абсолютно жесткого ротора на магнитном подвесе (рис. 1), который состоит из двух радиальных управляемых электромагнитных подшипников (ЭМП1 и ЭМП2) и одного осевого (ЭМП3). Для однозначного позиционирования ротора в пространстве введем неподвижную прямоугольную правую систему координат, начало которой  $O^*$  расположено на геометриче-

ской продольной оси ротора находящегося в центральном положении по отношению к полюсам статоров ЭМП1 и ЭМП2. Оси координат свяжем с ротором в данном положении так: ось  $O^*z$  – совпадает с геометрической продольной осью ротора, оси  $O^*x$  и  $O^*y$  проходят через геометрический центр поперечного сечения проходящего через центр тяжести ротора  $C$ , при этом  $O^*x$  направлена горизонтально, а  $O^*y$  – вертикально (рис. 1). Обозначим для ротора в некотором произвольном положении через  $O_0(x_0, y_0, z_0)$  геометрический центр поперечного сечения проходящего через центр тяжести ротора, а центры опорных участков ротора на ЭМП1 и ЭМП2 в осях  $x$  и  $y$  через  $O_1(x_1, y_1)$  и  $O_2(x_2, y_2)$  соответственно (рис. 1), причем расстояние между  $O$  и  $O_1$  равно  $l_1$ , а между  $O$  и  $O_2$  равно  $l_2$ . В центральном положении ротора зазоры равны номинальным значениям – зазоры между цапфой и каждым полюсом статора радиальных опор (ЭМП1 и ЭМП2) равны  $\delta_r$ , а зазоры между статором и диском осевой опоры (ЭМП3) с обеих сторон равны  $\delta_a$ .

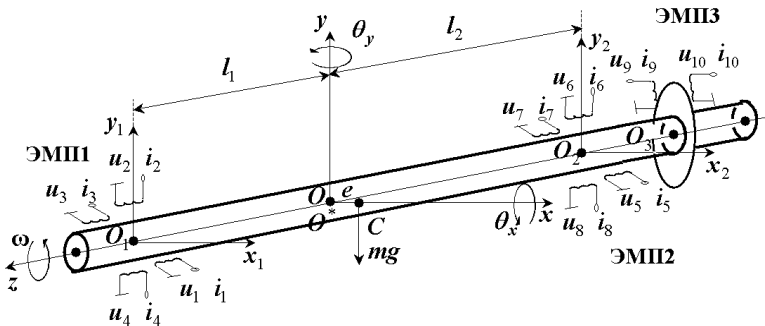


Рисунок 1 – Пространственная расчетная схема вращающегося абсолютно жесткого ротора на магнитном подвесе

Математическая модель вращающегося абсолютно жесткого ротора на управляемых электромагнитных опорах, при числе обобщенных механических координат  $M = 5$  и числе управляемых электромагнитных контуров с токами  $N = 10$ , в общем случае описывается взаимосвязанной магнитомеханической нелинейной системой 5 дифференциальных уравнений 2-го порядка (1) и 10 дифференциальных уравнений 1-го порядка (2) [3-5]:

1. механические уравнения движения ротора:

$$\begin{aligned}
 m(d^2 x_0 / dt^2) &= Q_1 + m e \omega^2 \cos \omega t, & m(d^2 y_0 / dt^2) &= Q_2 + m e \omega^2 \sin \omega t; \\
 m(d^2 z_0 / dt^2) &= Q_3; \\
 J_1(d^2 \theta_x / dt^2) + J_3 \omega (d\theta_y / dt) &= Q_4 - (J_1 - J_3) \gamma \omega^2 \sin \omega t; \\
 J_1(d^2 \theta_y / dt^2) - J_3 \omega (d\theta_x / dt) &= Q_5 + (J_1 - J_3) \gamma \omega^2 \cos \omega t,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $m$  – масса ротора,  $Q_1, \dots, Q_5$  – обобщенные силы,  $e$  и  $\gamma$  – линейный и угловой параметры неуравновешенности,  $J_1, J_3$  – экваториальный и полярный моменты инерции ротора;  $\omega$  – угловая скорость;

2. уравнения для токов:

$$\sum_{s=1}^N L_{ks} (di_s / dt) + \sum_{j=1}^M \sum_{s=1}^N \frac{\partial L_{ks}}{\partial \xi_j} (d\xi_j / dt) i_s + r_k i_k = u_k, k = 1, \dots, N. \quad (2)$$

где  $i = (i_1, \dots, i_N)^T$ ,  $u = (u_1, \dots, u_N)^T$  –  $N$ -мерные вектор-столбцы токов и управлений соответственно (см. [4-7]),  $r_k$  – активные сопротивления в цепях;  $L_{ks}$  – индуктивности, а обобщенные силы  $Q_j$  складываются из электромагнитной реакции подвеса  $P_j$  и заданных сил: постоянной силы  $Q_{jc}$ , возмущающей силы  $F_j(t)$ , линейных, упругих и диссипативных составляющих, то есть

$$Q_j = P_j + Q_{jc} + F_j(t) - \sum_{r=1}^M c_{jr} \xi_r - \sum_{r=1}^M b_{jr} (d\xi_r / dt), j = 1, \dots, M, \quad (3)$$

а электромагнитная реакция подвеса имеет вид:

$$P_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^N \frac{\partial L_{ks}(\xi_j)}{\partial \xi_j} i_k i_s, j = 1 \dots M. \quad (4)$$

Для определения положения ротора могут использоваться две группы обобщенных координат  $\xi = (x_0, \psi, y_0, v, z_0)$  или  $q = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_0)$  и, как следствие две формы записи СДУ, причем  $\xi$  – координаты центра сечения, проходящего через центр масс  $C$ , и углы поворотов вокруг осей  $x$  и  $y$ , а  $q$  – координаты точек ротора  $O_1$  и  $O_2$ , а также координата  $z$  точки  $O$  (рис. 1).

**3. Определение индуктивностей.** Рассмотрим один из возможных вариантов полного магнитного подвеса ротора [5].

Геометрия, схемы соединения катушек и схемы магнитных цепей радиальных ЭМП показаны на рис. 2, где 1 – пакет шихтованного железа статора, 2 – полюса и полюсные катушки, 3 – направление магнитного потока, 4 – ротор в центральном положении, 5 – воздушный зазор в центральном положении ротора ( $\delta_r$ ), 6 – положение ротора в некоторый момент времени, 7 – высота зазора  $h_{xy1}$  (ЭМП1) и  $h_{xy2}$  (ЭМП2) под элементарной площадью полюса  $dS$ .

Статоры радиальных ЭМП представляют собой восьмиполюсники с номерами полюсов 1-8 (ЭМП1) и 9-16 (ЭМП2). Каждый из этих ЭМП образует четыре электромагнита за счет последовательного включения полюсных катушек с токами в проводниках этих катушек  $i_1 - i_4$  (ЭМП1) и  $i_5 - i_8$  (ЭМП2) и управляющими напряжениями  $u_1 - u_4$  (ЭМП1) и  $u_5 - u_8$  (ЭМП2). На опорных участках ротора расположены цапфы радиуса  $R$ .

Геометрия, схемы соединения катушек и схемы магнитных цепей осевого ЭМП показаны на рис. 3, где 1 – статор, 2 – полюса и полюсные катушки, 3 – направление магнитного потока, 4 – ротор в центральном положении, 5 – воздушный зазор в центральном положении ротора ( $\delta_a$ ), 6 – высота зазора  $h_{z3}$  под элементарной площадью полюса  $dS$ , 7 – диск осевого ЭМП, расположенный на роторе.

Статоры осевого ЭМП представляют собой фигуры вращения, выпол-

ненные из стали каждый с двумя полюсами – внешним и внутренним: 17-18 и

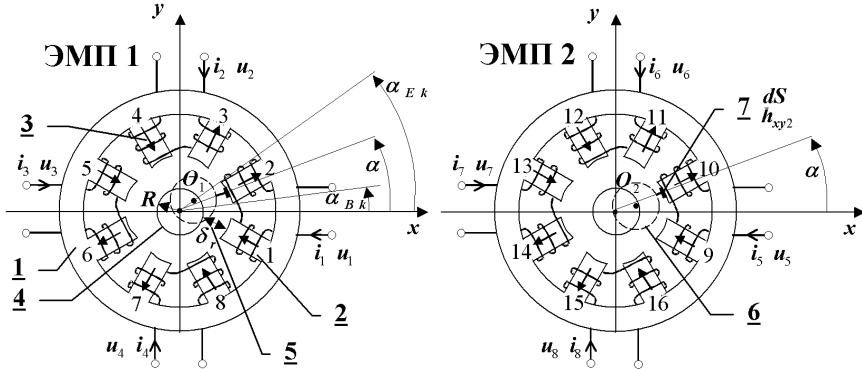


Рисунок 2 – Геометрия, схема соединения катушек и схема магнитной цепи радиальных ЭМП

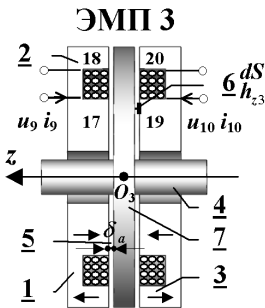


Рисунок 3 – Геометрия, схема соединения катушек и схема магнитной цепи осевого ЭМП

19-20 соответственно. Между полюсами статоров ЭМП3 расположены катушки с токами в проводниках этих катушек  $i_9$  и  $i_{10}$  и управляющими напряжениями  $u_9$  и  $i_{10}$ .

Индуктивности без учета магнитного сопротивления магнитопровода определяются через магнитные проводимости воздушных зазоров под полюсами [3,5]. Так для каждого радиального – ЭМП1 и ЭМП2 они равны:

$$L_{kk} = w^2 [g_{2k-1} + g_{2k} - (g_{2k-1} - g_{2k})^2 / G],$$

$$k = 1..4 \text{ (ЭМП1)} \text{ и } 5..8 \text{ (ЭМП2)}; \quad (5)$$

$$L_{ks} = (-1)^{k+s} w^2 (g_{2k} - g_{2k-1})(g_{2s-1} - g_{2s}) / G, \quad k \neq s,$$

а для осевого ЭМП3:

$$L_{kk} = w^2 g_k g_{k\pm 1} / (g_k + g_{k\pm 1}), \quad k = 17..18 \text{ и } 19..20, \quad (6)$$

где  $w$  – число витков обмотки,  $g_k$  – магнитная проводимость зазора  $k$ -го полюса,  $G$  – суммарная магнитная проводимость зазоров ЭМП1 или ЭМП2.

Таким образом, от точности определения проводимостей воздушных зазоров существенным образом зависит корректность определения индуктивностей, а значит электромагнитных реакций подвеса и адекватность математической модели вращающегося абсолютно жесткого ротора на управляемых электромагнитных опорах в целом.

**4. Определение магнитной проводимости воздушных зазоров.** Рассмотрим один из возможных вариантов полного магнитного подвеса ротора (например, [4]).

В общем случае магнитная проводимость зазора  $k$ -го полюса при некотором положении ротора в пространстве зависит от площади поверхности

этого полюса  $S_k$  и пути магнитного потока в воздухе, который в свою очередь зависит от зазора  $h$  между поверхностью цапфы или диска и поверхностью полюса при текущем положении ротора в пространстве (см. рис. 2, 3) [8]:

$$g_k = \mu_0 \int_{S_k} \frac{dS}{h}. \quad (7)$$

Из данного выражения следует, что точность определения магнитной проводимости напрямую зависит от точности вычисления высоты зазора под элементарной площадью полюса, для корректного нахождения которой рассмотрим геометрию всего электромагнитного подвеса ротора показанную на рис. 4, где **1** – положение ротора в некоторый момент времени, **2** – цапфы, середины которых – точки на оси ротора  $O_1$  и  $O_2$ , **3** – статоры радиальных ЭМП, причем их начальная  $z_B$  и конечная  $z_E$  координаты связаны следующими соотношениями:  $(z_{E1} + z_{B1})/2 = l_1$  и  $(z_{E2} + z_{B2})/2 = l_2$ , **4** – диск осевого ЭМП, расположенный на роторе, причем точка  $O_3$  – точка пересечения оси ротора и срединной плоскости этого диска, **5** – статор осевого ЭМП, **6** – датчики радиальных перемещений, определяющие радиальные отклонения ротора в некоторый момент времени или иначе – координаты  $x$  и  $y$  точек  $O_{s1}$  и  $O_{s2}$ , расположенных на оси ротора, у которых  $z = l_{s1}$  и  $z = l_{s2}$  соответственно, **7** – датчик осевого перемещения ротора, определяющий осевое отклонение, или иначе – координату  $z$  точки  $O_{s3}(l_{s3x}, l_{s3y}, z)$ , расположенной на срединной плоскости диска осевого датчика **8**, при этом точка  $O_4$  является точкой пересечения оси ротора и срединной поверхности этого диска.

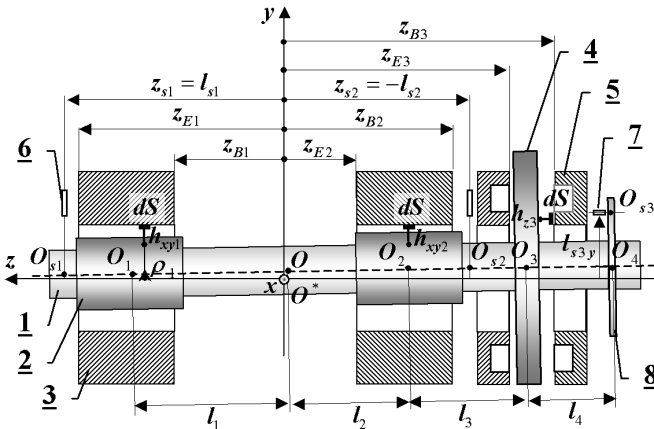


Рисунок 4 – Геометрия подвеса ротора на ЭМП

На рис. 5 изображена схема определения высоты зазора под элементарной площадью, где **1** – полюс статора ЭМП, **2** – положение ротора в центральном положении (для  $a$  – сечения цапфы), **3** – положение ротора в некоторый момент времени (для  $a$  – сечения цапфы), **4** – проекция сечения цапфы (его центра) на луч, проведенный под углом  $\alpha$  к оси  $O^*$ .

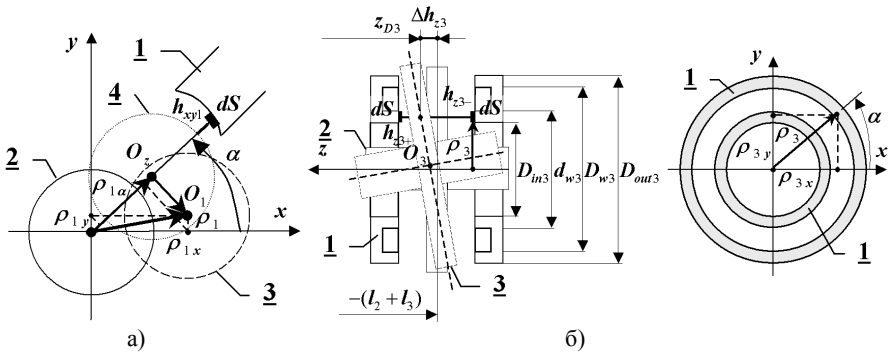


Рисунок 5 – Схема определения высоты зазора под элементарной площадью поверхности полюса и расчета проводимости зазора:  
а – радиальный ЭМП1, б – осевой ЭМП3

Рассмотрение геометрии ЭМП (рис. 2, 3) и всего подвеса в целом (рис. 4), а также схемы (рис. 5) позволяет прийти к следующим выражениям магнитной проводимости зазора. Так для радиальных ЭМП1, ЭМП2 проводимость зазора  $k$ -го полюса равна:

$$g_k = \mu_0 (R + \delta_r / 2) \int_{z_{B1}}^{z_{E1}} \int_{\alpha_{Bk}}^{\alpha_{Ek}} \frac{d\alpha dz}{h_{xy1}(\alpha, z)}, k = 1..8; \quad (8)$$

$$g_k = \mu_0 (R + \delta_r / 2) \int_{z_{B2}}^{z_{E2}} \int_{\alpha_{Bk}}^{\alpha_{Ek}} \frac{d\alpha dz}{h_{xy2}(\alpha, z)}, k = 9..16, \quad (9)$$

где  $\alpha$  – угловая координата, отсчитываемая от оси  $O^*x$ ,  $\alpha_{Bk}$ ,  $\alpha_{Ek}$  – угловые координаты начала и конца  $k$ -го полюса соответственно (см. рис. 2).

Для осевого ЭМП3 магнитная проводимость зазора  $k$ -го полюса равна:

$$g_k = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_{D_{in3}/2}^{d_{w3}/2} \frac{\rho_3 d\rho_3 d\alpha}{h_{z3\pm}(\rho_3, \alpha)}, k = 17(h_{z3+}), 19(h_{z3-}); \quad (10)$$

$$g_k = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_{D_{w3}/2}^{D_{out3}/2} \frac{\rho_3 d\rho_3 d\alpha}{h_{z3\pm}(\rho_3, \alpha)}, k = 18(h_{z3+}), 20(h_{z3-}). \quad (11)$$

где  $\rho_3$  – радиус вектор,  $\alpha$  – полярный угол,  $h_{z3+}$  и  $h_{z3-}$  – высота зазора под элементарной площадью полюсов ЭМП3, расположенных со стороны положительного и отрицательного направлений оси  $z$  соответственно (см. рис. 5).

Определение высоты зазора сводится к отысканию длины пути магнитного потока в воздухе, точный математический расчет которого практически невозможен, так путь потока не ограничивается формой имеющей простое математическое выражение. При определении путей потока следует помнить, что силовые линии в воздухе между двумя поверхностями всегда направлены так, чтобы при данной магнитодвижущей силе был максимум возможного по-

тока, иначе, чтобы магнитная проводимость воздушного пути между поверхностями была максимальной [8-9]. В связи с этим расчеты магнитных проводимостей, за исключением некоторых частных случаев, производятся путем введения упрощающих предположений относительно путей потока.

В нашем случае при определении путей потока считается, что существует только полезный поток между поверхностями полюса и цапфы (ЭМП1, ЭМП2) или диска (ЭМП3), а потоками выпучивания и утечки между полюсами пренебрегается.

Рассмотрим дополнительные упрощения, которые вводятся при вычислении высоты зазора под элементарной площадью полюса.

Для ЭМП1 и ЭМП2 высота зазора определяется как разница между номинальным зазором  $\delta_r$  и смещением центра сечения цапфы  $\rho_{1\alpha}$  (ЭМП1) или  $\rho_{2\alpha}$  (ЭМП2) (при некотором  $z$ ), которые отложены на луче проведенном под углом  $\alpha$  и лежащем в плоскости параллельной  $Oxy$  (рис. 5, а), то есть зазор вычисляется не между полюсом и текущим положением сечения цапфы, а между полюсом и проекцией сечения цапфы (его центра) на луч под углом  $\alpha$ :

$$h_{xy1}(\alpha, z) = \delta_r - \rho_{1\alpha}(\alpha, z), \quad h_{xy2}(\alpha, z) = \delta_r - \rho_{2\alpha}(\alpha, z). \quad (12)$$

Так как проекция ( $\rho_{1\alpha}$  или  $\rho_{2\alpha}$ ) на луч под углом  $\alpha$  вектора ( $\rho_1$  или  $\rho_2$ ) равна сумме проекций на этот луч проекций вектора на координатные оси ( $\rho_{1x}, \rho_{1y}$  или  $\rho_{2x}, \rho_{2y}$ ), то справедливо:

$$\begin{aligned} \rho_{1\alpha}(\alpha, z) &= \rho_{1x}(z) \cos \alpha + \rho_{1y}(z) \sin \alpha; \\ \rho_{2\alpha}(\alpha, z) &= \rho_{2x}(z) \cos \alpha + \rho_{2y}(z) \sin \alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

где проекции вектора на координатные оси есть функции ( $f_{axis1}, f_{axis2}$ ) переменной  $z$ , которые могут быть получены из уравнения прямой (оси ротора):

$$\rho_{1,2x}(z) = f_{axis1}(z); \quad \rho_{1,2y}(z) = f_{axis2}(z). \quad (14)$$

Такой подход позволяет прийти к ситуации, когда нормаль к элементарной площади поверхности полюса совпадает с нормалью к поверхности цапфы в точке интегрирования, но вносит некоторую погрешность.

Для ЭМП3 высота зазора определяется как разница между номинальным зазором  $\delta_a$  и смещением  $\Delta h_{z3}$  точки срединной плоскости диска, расположенной под элементарной площадью (см. рис. 5, б):

$$h_{z3\pm}(\rho_3, \alpha) = \delta_a \mp \Delta h_{z3}, \quad (15)$$

а смещение  $\Delta h_{z3}$  как расстояние между точками с одинаковыми координатами ( $x, y$ ) и расположенными на срединных поверхностях диска в текущем и центральном положениях (см. рис. 5, б):

$$\Delta h_{z3} = z_{D3} + (l_2 + l_3), \quad (16)$$

где  $z_{D3}$  есть функция  $f_{disk3}$  переменных  $x, y$  и может быть получена из уравнения плоскости в пространстве – срединной поверхности диска ЭМП3:

$$z_{D3} = f_{disk3}(x, y), \quad \text{при } x = \rho_3 \cos \alpha; \quad y = \rho_3 \sin \alpha. \quad (17)$$

Такой подход также не учитывает реального пути магнитного потока и предполагает, что силовая линия на всем протяжении перпендикулярна поверхности полюса. При этом также вносится дополнительная погрешность,

связанная с применением в качестве модели диска плоскости, то есть не учитывается «увеличение толщины» (вдоль оси  $O^*z$ ) наклоненного диска.

Введение упрощений при определении высоты зазоров позволяет перейти к модели ротора состоящей из линии – оси ротора и перпендикулярной к ней плоскости – срединной поверхности диска осевого ЭМП для нахождения функций  $f_{axis1}$ ,  $f_{axis2}$ ,  $f_{disk3}$ , но требует проверки с целью определения величины погрешности вычисления зазора под элементарной площадью  $dS$ , возникающей при этом.

Расчетные исследования, посвященные такой проверке, позволили получить графики зависимости относительной погрешности (рис. 6), где на рис. 6, а изображена погрешность вычисления зазора между поверхностями полюса радиального ЭМП и цапфы ( $\Delta_r$ ) в зависимости от радиуса цапфы  $R$  и номинального зазора  $\delta_r$ , а на рис. 6, б – погрешность вычисления зазора между поверхностями полюсов осевого ЭМП ( $\Delta_a$ ) в зависимости от внешнего диаметра статора  $D_{out2}$  и номинального зазора  $\delta_a$ . Данные относительные погрешности вычислялись при том положении ротора, при котором эти погрешности имеют наибольшее значение из всех геометрически возможных положений.

Анализ результатов показывает, что погрешность не превышает 0,25 % для возможных сочетаний геометрических размеров ЭМП1, ЭМП2 и ЭМП3 (см., напр., [3], с.196-197) и позволяет сделать вывод о допустимости введения предложенных упрощений при определении высоты зазора.

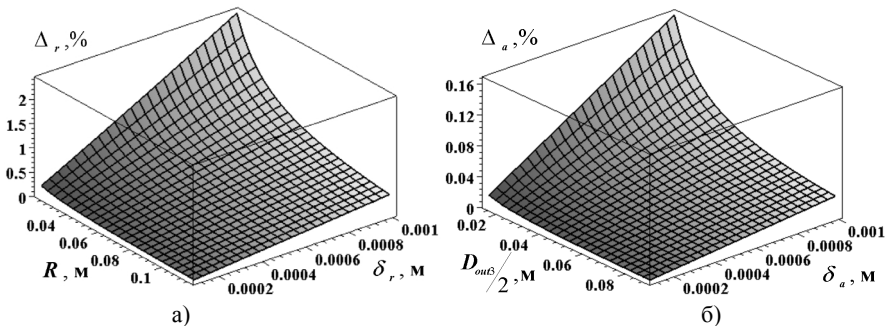


Рисунок 6 – Относительная погрешность вычисления зазора, обусловленная введением упрощающих допущений: а – радиальный ЭМП, б – осевой ЭМП.

**5. Линейно-плоскостная модель ротора.** Для нахождения функций  $f_{axis1}$ ,  $f_{axis2}$ ,  $f_{disk3}$  предлагается перейти к модели ротора, в которой сам ротор (см. рис. 4) заменяется пространственной линией – его осью, а диски осевого ЭМП и датчика осевого положения заменяются пространственными плоскостями, перпендикулярными этой оси и пересекающимися с ней в точках  $O_3$  и  $O_4$  соответственно. Предлагаемая модель показана на рис. 7.

Тогда уравнение оси ротора – линии в пространстве [10]:

$$\frac{x - x_{s2}}{x_{s1} - x_{s2}} = \frac{y - y_{s2}}{y_{s1} - y_{s2}} = \frac{z - z_{s2}}{z_{s1} - z_{s2}} \Rightarrow \frac{x - x_{s2}}{x_{s1} - x_{s2}} = \frac{y - y_{s2}}{y_{s1} - y_{s2}} = \frac{z - (-l_{s2})}{z_{s1} - (-l_{s2})}. \quad (18)$$



а проекции направленного отрезка  $\overline{O_{s2}O_{s1}}$  на оси координат, выраженные через направляющие косинусы [10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_x = x_{s1} - x_{s2} = d \cos \beta_x, \\ d_y = y_{s1} - y_{s2} = d \cos \beta_y, \\ d_z = z_{s1} - z_{s2} = d \cos \beta_z, \\ d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = d^2, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta_x = (x_{s1} - x_{s2})/d, \\ \cos \beta_y = (y_{s1} - y_{s2})/d, \\ \cos \beta_z = (z_{s1} - z_{s2})/d, \\ d = \sqrt{(x_{s1} - x_{s2})^2 + (y_{s1} - y_{s2})^2 + L_s^2}, \end{array} \right. \quad (19)$$

где  $l_{s1} + l_{s2} = L_s$ .

На рис. 8 представлены проекции оси ротора на координатные плоскости  $O^*xz$  и  $O^*yz$  неподвижной системы координат.

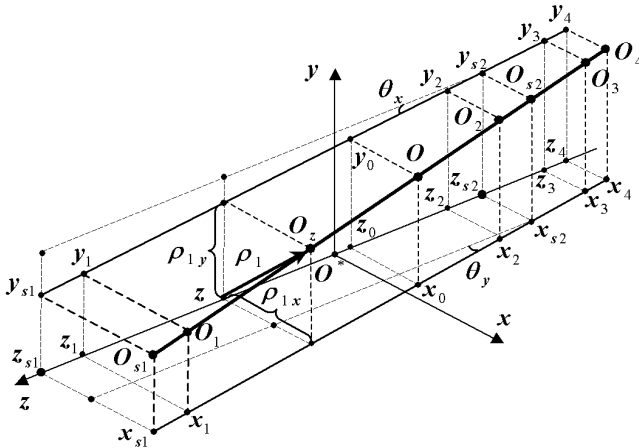


Рисунок 7 – Пространственная линейно-плоскостная модель ротора

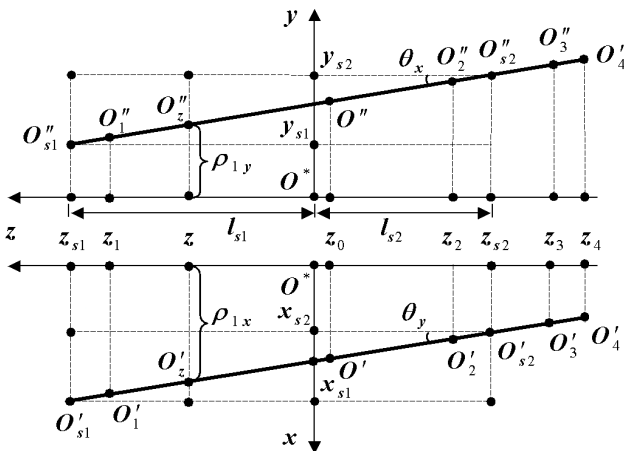


Рисунок 8 – Проекция оси ротора на координатные плоскости

Так как точки измерений радиальных отклонений  $O_{s1}$  и  $O_{s2}$  расположены по оси  $z$  на  $l_{s1}$  и  $-l_{s2}$  соответственно, то, учитывая выражения (20)

$$\frac{y_{s2} - y_{s1}}{l_{s2} + l_{s1}} = \tan \theta_x, \quad \frac{x_{s1} - x_{s2}}{l_{s2} + l_{s1}} = \tan \theta_y, \quad (20)$$

приходим к выражениям, позволяющим получить проекции векторов  $\rho_1$  и  $\rho_2$  на оси  $x$  (21) и  $y$  (22):

$$\begin{aligned} \frac{x_{s1} - \rho_{1x}}{l_{s1} - z} = \tan \theta_y & \Rightarrow \rho_{1x} = x_{s1} - (l_{s1} - z) \frac{x_{s1} - x_{s2}}{L_s} = \rho_{2x}; \\ \frac{\rho_{1x} - x_{s2}}{l_{s2} + z} = \tan \theta_y & \Rightarrow \rho_{1x} = x_{s2} + (l_{s2} + z) \frac{x_{s1} - x_{s2}}{L_s} = \rho_{2x}; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{1y} - y_{s1}}{l_{s1} - z} = \tan \theta_x & \Rightarrow \rho_{1y} = y_{s1} + (l_{s1} - z) \frac{y_{s2} - y_{s1}}{L_s} = \rho_{2y}; \\ \frac{y_{s2} - \rho_{1y}}{l_{s2} + z} = \tan \theta_x & \Rightarrow \rho_{1y} = y_{s2} - (l_{s2} + z) \frac{y_{s2} - y_{s1}}{L_s} = \rho_{2y}; \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, искомые функции  $f_{axis1}$  и  $f_{axis2}$  в (14) найдены.

При определении функции  $f_{disk3}$  в (17) необходимо принять во внимание, что точка измерения осевых отклонений  $O_{s3}$  (см. рис. 4) расположена по оси  $x$  на  $l_{s3x}$  и по оси  $y$  на  $l_{s3y}$ , которые являются константами, а при измерениях определяется  $z_{s3}$ .

Через точку  $O_{s3}$  проходит плоскость перпендикулярная оси ротора, которая является срединной плоскостью диска датчика осевого перемещения, пересекает ось в точке  $O_4$  (см. рис. 4) и описывается уравнением [10]:

$$A(x - l_{s3x}) + B(y - l_{s3y}) + C(z - z_{s3}) = 0. \quad (23)$$

Учитывая, что  $A = d_x$ ,  $B = d_y$ ,  $C = d_z$  и выражения (19), приходим к:

$$(x_{s1} - x_{s2})(x - l_{s3x}) + (y_{s1} - y_{s2})(y - l_{s3y}) + L_s(z - z_{s3}) = 0. \quad (24)$$

Координаты точки  $O_4(x_4, y_4, z_4)$  могут быть найдены как решение следующей системы трех уравнений, см. (18) и (24):

$$\begin{cases} \frac{x_4 - x_{s2}}{x_{s1} - x_{s2}} = \frac{z_4 + l_{s2}}{L_s}; & \frac{y_4 - y_{s2}}{y_{s1} - y_{s2}} = \frac{z_4 + l_{s2}}{L_s}; \\ (x_{s1} - x_{s2})(x_4 - l_{s3x}) + (y_{s1} - y_{s2})(y_4 - l_{s3y}) + L_s(z_4 - z_{s3}) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Для нахождения координат точки  $O_3(x_3, y_3, z_3)$  – точки пересечения срединной плоскости диска осевого ЭМПЗ с осью ротора, необходимо записать проекции направленного отрезка  $\overline{O_4O_3}$  на оси координат. Тогда с учетом того, что значения направляющих косинусов известны, см. (19), приходим к следующим выражениям [10]:

$$\begin{cases} x_3 - x_4 = l_4 \cos \beta_x, \\ y_3 - y_4 = l_4 \cos \beta_y, \\ z_3 - z_4 = l_4 \cos \beta_z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = x_4 + l_4 \cos \beta_x, \\ y_3 = y_4 + l_4 \cos \beta_y, \\ z_3 = z_4 + l_4 \cos \beta_z. \end{cases} \quad (26)$$

Аналогично, при необходимости, могут быть найдены координаты точек

$O(x_0, y_0, z_0)$ ,  $O_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $O_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\begin{cases} x_0 = x_4 + d_{04} \cos \beta_x \\ y_0 = y_4 + d_{04} \cos \beta_y \\ z_0 = z_4 + d_{04} \cos \beta_z \end{cases}, \begin{cases} x_1 = x_4 + d_{14} \cos \beta_x \\ y_1 = y_4 + d_{14} \cos \beta_y \\ z_1 = z_4 + d_{14} \cos \beta_z \end{cases}, \begin{cases} x_2 = x_4 + d_{24} \cos \beta_x \\ y_2 = y_4 + d_{24} \cos \beta_y \\ z_2 = z_4 + d_{24} \cos \beta_z \end{cases}, \quad (27)$$

где  $d_{04} = l_2 + l_3 + l_4$ ,  $d_{14} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ ,  $d_{24} = l_3 + l_4$ .

Тогда, с учетом (26), можно записать уравнение срединной плоскости диска осевого ЭМПЗ, пересекающего ось ротора в точке  $O_3(x_3, y_3, z_3)$  [10]:

$$A(x - x_3) + B(y - y_3) + C(z - z_3) = 0 \quad (28)$$

и найти из него функцию  $f_{\text{disk}3}$ , а значит и  $z_{D3}$  в (16):

$$z_{D3} = z_3 - \frac{A}{C}(x - x_3) + \frac{B}{C}(y - y_3), \quad (29)$$

где  $A = d_x$ ,  $B = d_y$ ,  $C = d_z$ , см. (19).

**6. Расчетные исследования** проводились с целью установления границ применимости различных способов вычисления магнитных проводимостей зазоров. Первый предполагает использование приведенных выше выражений (8-11), где высота зазора под полюсом определяется из (12-17) и (21), (22), (29). Второй – использование тех же выражений (8-11), но с применением упрощенных формул для определения высоты зазора под элементом площади поверхности полюса, не учитывающих взаимовлияние смещений в радиальном и осевом направлениях [3,5]:

$$h_{xy1}(\alpha) = \delta_r - x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha; \quad h_{xy2}(\alpha) = \delta_r - x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha; \quad (30)$$

$$h_{z\pm}(z_3) = \delta_a \mp (z_3 + l_2 + l_3). \quad (31)$$

При проведении численных экспериментов, результаты которых представлены на рис. 9-10, для одного из вариантов электромагнитного подвеса ротора с параметрами приведенными в [4] определялись проводимости воздушных зазоров под полюсом радиального ЭМП1 (рис. 9) и под полюсом осевого ЭМПЗ (рис. 10). На графиках непрерывными линиями большей толщины показаны проводимости, вычисленные с помощью первого из указанных выше способов, а линиями с нанесенными на них точками с помощью второго.

Моделировались следующие ситуации:

1. Пространственный поворот, который обеспечивался одновременным изменением  $x_1$  от  $-\delta_r$  до  $+\delta_r$  и  $x_2$  от  $+\delta_r$  до  $-\delta_r$  при  $y_1 = y_2 = 0$  – рис. 9, а;
2. Поворот вокруг центра масс цапфы ЭМП1, который обеспечивался изменением  $x_2$  от  $-\delta_r$  до  $+\delta_r$  при неизменных  $x_1 = y_1 = y_2 = 0$  – рис. 9, б;
3. Осевое смещение ротора, повернутого вокруг оси  $Ox$ , которое обеспечивалось изменением  $z_0$  от 0 до  $+\delta_a$  при неизменных  $x_1 = x_2 = y_2 = 0$  и  $y_1 = -\delta_r$  – рис. 10, а;
4. Поворот вокруг центра масс диска осевого ЭМП, который обеспечивался при проведении расчетных исследований искусственным размещением дисков осевого ЭМПЗ и датчика осевого перемещения ( $l_3 = l_4 = 0$ ) и изменением  $y_1$  от  $-\delta_r$  до  $+\delta_r$  при  $x_1 = x_2 = y_2 = 0$  – рис. 10, б.

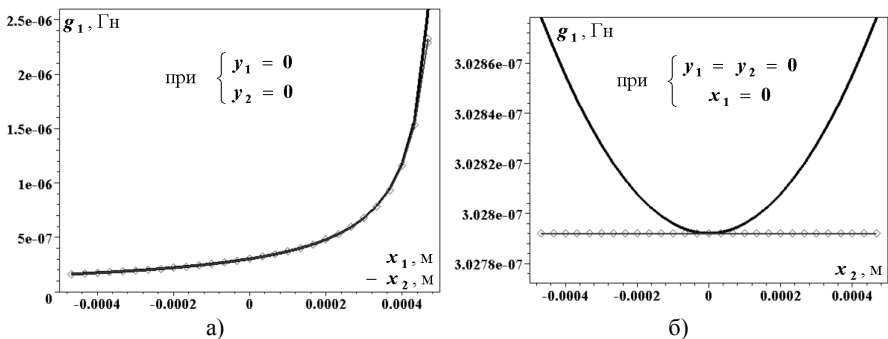


Рисунок 9 – Проводимость зазора под полюсом радиального ЭМПТ:  
 а – при пространственном повороте, б – при повороте вокруг центра масс цапфы.

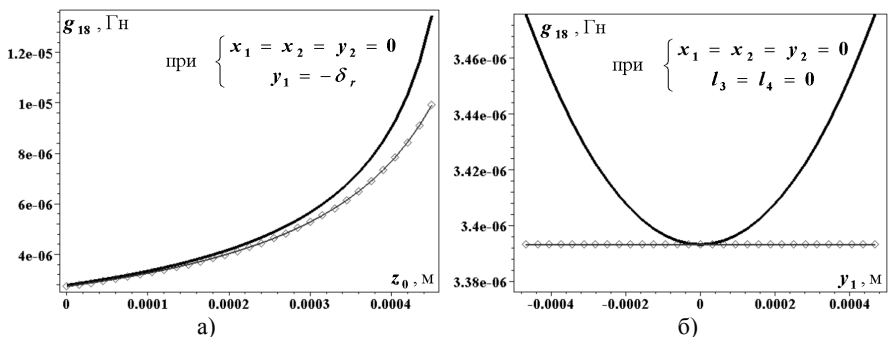


Рисунок 10. Проводимость зазора под полюсом осевого ЭМПТ:  
 а – при осевом смещении ротора, повернутого вокруг оси  $O^*$ ,  
 б – при повороте вокруг центра масс диска осевого ЭМПТ.

Анализ результатов показывает, что вблизи центрального положения ротора ( $\pm\delta/2$ ) значения проводимостей, полученные двумя указанными способами, отличаются менее чем на 0,5 % и могут считаться совпадающими.

Однако погрешность вычисления проводимостей зазоров с помощью упрощенных выражений при стремлении реального зазора к 0 в некоторых случаях достигает 20 % (рис. 9, а, 10, а). Это может привести к неточности определения индуктивностей (5-6), а значит и значений электромагнитных реакций подвеса (4), что вносит ошибку в математическую модель, которой нельзя пренебречь. Неучет данного факта при проектировании системы регулирования и определении ее параметров и параметров алгоритма управления может привести к сужению реального диапазона устойчивости движения.

**Заключение.** Исходя из анализа результатов могут быть определены границы применимости различных способов расчета проводимостей зазоров. Так при движении ротора с максимальными отклонениями, не превышающими половину номинального зазора, в математической модели могут использо-

ваться упрощенные выражения. Если же работа системы регулирования допускает более значительные отклонения, то нельзя гарантировать корректность параметров управления определенных с помощью такой математической модели. В этом случае в математической модели должны использоваться выражения для определения магнитных проводимостей зазоров, учитывающие взаимовлияние смещений в радиальном и осевом направлениях.

Кроме того, при обоих способах расчета проводимостей, в предельном состоянии, таком как нулевой реальный зазор, данная математическая модель подвеса теряет смысл, см. (8-9), и при определении индуктивностей обязательно должны учитываться магнитные сопротивления магнитопроводов.

**Список литературы:** 1. *G.Schweitzer, H.Bleuler, A.Traxler* Active magnetic bearings. – Zurich: ETH, 1994. – 244 p. 2. *Maslen E.H.* Magnetic bearings. – University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. – 229 p. 3. *Журавлев Ю.Н.* Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 4. *Мартыненко Г.Ю.* Исследование устойчивости движения ротора в управляемых электромагнитных подшипниках с помощью нелинейной имитационной вычислительной модели / Проблемы машиностроения. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2005. – Т. 8, № 1. – С. 47-58. 5. *Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М.* Построение связанной многомерной нелинейной модели вращающегося ротора с управляемыми электромагнитными подшипниками // Вестник НТУ «ХПИ». – № 9, т. 8. – С. 143-151. 6. *Мартыненко Г.Ю.* Исследование устойчивых движений роторов на электромагнитных подшипниках при различных вариантах управления с помощью имитационной вычислительной модели / Интегрированные технологии и энергосбережение. – Харьков: ХГПУ, 2000. – № 2. – С. 88-96. 7. Патент № 2277190. Российская Федерация. МПК F16C 32/04. Способ дискретного управления электромагнитным подвесом вращающихся роторов / ОАО «Сумское научно-производственное объединение им. М.В.Фрунзе», НТУ «ХПИ»; *Роговой Е.Д., Бухолдин Ю.С., Левашов В.А., Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М.* – № 2003121317/11. – Заявл. 10.07.2003 г. Опубл. 27.05.2006 г. // Изобретения. Официальный бюллетень, 2006. – № 15. 8. *Роттерс* Электромагнитные механизмы. – М.: Государственное энергетическое из-во, 1949. – 521 с. 9. *Мартыненко Ю.Г.* Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. – М.: Наука, 1988. – 386 с. 10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 831 с.

*Поступила в редколлегию 14.11.2006.*

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>А.Г.АНДРЕСЬВ, М.К.РЕЗНИЧЕНКО, О.В.ЩЕПКИН</b> Оптимізація нагріву при роз'єднанні деталей . . . . .	3
<b>А.Г.АНДРЕЕВ, А.П.ЗВОНАРЕВА, А.В.ЩЕПКИН</b> Способ разборки прессовых соединений . . . . .	8
<b>К.В.АСТАХОВА, В.А.ЖОВДАК, В.В.ТАТЬКОВ, А.И.ТРУБАЕВ, И.М.ФЕДОРЕНКО</b> Вынужденные колебания трубопроводов гидросистемы копрowego прессы . . . . .	16
<b>О.В.БІРЮКОВ, О.Ф.КОВПІК, Є.О.КОРНІЛОВ, С.Ю.САЄНКО, О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ, О.О.ЗАМУЛА</b> Аналіз міцності розмежувальної стінки камери виводу пучків заряджених частинок з прискорювача в атмосферу . . . . .	23
<b>О.В.БИРЮКОВ, С.Ю.САЕНКО, В.В.КОЛОСЕНКО, Д.В.ЛАВИНСКИЙ, В.Н.СОБОЛЬ, О.К.МОРАЧКОВСКИЙ</b> Статический анализ прочности конструктивных элементов пресс-форм для прессования изделий из порошков . . . . .	28
<b>Д.В.БРЕСЛАВСКИЙ, В.Н.КОНКИН, В.Г.СУКИАСОВ, Б.А.ПУСТОВОЙТ, БАХА В.Ф.ЯХЬЯ</b> Моделирование большой берцовой кости и численный анализ влияния фронтальной деформации на ее напряженное состояние . . . . .	33
<b>Д.В.БРЕСЛАВСКИЙ, С.А.ГОРЕЛОВА, А.А.ЛАРИН</b> Зарождение и развитие харьковской школы теории управления . . . . .	38
<b>Ю.С.БУХОЛДИН, В.А.ЛЕВАШОВ, Г.И.ЛЬВОВ, О.А.КОСТРОМИЦКАЯ</b> Исследование влияния механических характеристик материала на характер деформирования рабочих колес центробежных компрессоров . . . . .	44
<b>С.М.ВЕРЕЩАКА</b> Один вариант уравнений устойчивости оболочек слоистой структуры с межфазными дефектами . . . . .	54
<b>С.В.ГЛАДКОВ, К.В.НАУМЕНКО</b> Свободные вращения абсолютно твердого цилиндра с учетом вязкого трения . . . . .	61
<b>В.М.ГРИЩЕНКО, Ю.М.ГАЛАГАН</b> Алгоритм чисельної оптимізації конструкцій з урахуванням обмежень за допомогою R-функцій . . . . .	67
<b>А.И.ЗАЙЦЕВ, В.М.ШАТОХИН</b> О влиянии управляющих воздействий на динамические нагрузки и параметры поворота гусеничной машины с гидрообъемной передачей . . . . .	77
<b>С.В.КРАСНИКОВ</b> Исследование вибрационных характеристик опорной конструкции длинного валопровода . . . . .	88

<b>Л.В.КУРПА, Е.И.ЛЮБИЦКАЯ</b> Исследование закритического поведения ортотропных пологих оболочек сложной формы в плане . . .	92
<b>Г.И.ЛЬВОВ, А.Н.ТКАЧУК</b> О влиянии кинематических гипотез на характер контактного взаимодействия цилиндрической оболочки с бандажом . . . . .	98
<b>А.Н.ЛАРИН, В.Б.КОХАНЕНКО, В.И.КОНОХОВ, С.М.ШКОЛЬНЫЙ</b> Анализ расчетных методов оценки работоспособности элементов автомобильных шин . . . . .	105
<b>О.С.МАЗУР</b> Определение областей динамической неустойчивости для пластин сложной геометрии . . . . .	112
<b>С.А.НАЗАРЕНКО</b> Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы . . . . .	119
<b>В.О.ПОВГОРОДНИЙ, С.В.ЗАЙМАК</b> Исследование термоупругости металлокерамического нагревательного элемента . . . . .	122
<b>А.Г.ПРИЙМАКОВ, А.В.УСТИНЕНКО</b> Выбор допускаемых напряжений в условиях абразивного изнашивания . . . . .	129
<b>И.Г.СУВОРОВА, С.С.ХОЛОБЦЕВ</b> Математическое и компьютерное моделирование в гидродинамических сложнополостных системах . . .	137
<b>А.А.СТЕПУК, А.В.СТЕПУК, Л.В.АВТОНОМОВА</b> Структурно-механические свойства и морфология биокерамики . . . . .	148
<b>А.А.ТЕСЛЕНКО</b> Автоматизация пьезооптических измерений . . . . .	153
<b>Н.Н.ТКАЧУК</b> Топологически регулярные конечно-элементные сетки для тел с кинематически генерируемыми поверхностями . . . . .	156
<b>С.В.ФИЛИПКОВСКИЙ</b> Эффективная методика анализа динамических систем с нелинейным демпфированием . . . . .	167
<b>А.В.ШАПОВАЛОВ, В.М.ШАТОХИН</b> Крутильные колебания стержня, вызванные движущейся нагрузкой . . . . .	172
<b>Г.Ю.МАРТЫНЕНКО</b> Уточнение математической модели ротора на ЭМП за счет определения магнитной проводимости зазоров под полюсами с учетом взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях . . . . .	179

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск  
«Динаміка і міцність машин»

Збірник наукових праць № 32

Науковий редактор д-р техн.наук,проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор Щепкін О.В.

Відповідальний за випуск В.М.Луньова

Обл.вид. № 171-06.

Підп.до друку 30.11.2006 р. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.  
Друк-ризографія. Гарнітура Таймс. Умов.друк.арк. 9,1. Облік.вид. арк. 10,2.  
Наклад 100 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 408. Ціна договірна.

---

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Друкарня НТУ «ХПІ», 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---