



ВЕСТНИК

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
«ХПИ»**

21'2006

Харьков

**ВЕСТНИК
НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»**

**Сборник научных трудов
Тематический выпуск**

21'2006

**«ДИНАМИКА И
ПРОЧНОСТЬ МАШИН»**

Издание основано Национальным техническим университетом
«Харьковский политехнический институт» в 2001 году

Государственное издание

Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины

КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Председатель: Л.Л.Товажнянский, д-р техн. наук, проф.

Секретарь координационного совета: К.А.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;
Е.И.Сокол, д-р техн. наук, проф.;
Е.Е.Александров, д-р техн. наук, проф.;
А.В.Бойко, д-р техн. наук, проф.;
М.Д.Годлевский, д-р техн. наук, проф.;
А.И.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;
В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;
В.Д.Дмитриенко, д-р техн. наук, проф.;
В.В.Епифанов, д-р техн. наук, проф.;
П.А.Качанов, д-р техн. наук, проф.;
А.Ф.Кириченко, д-р техн. наук, проф.;
В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;
В.И.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;
О.К.Морачковский, д-р техн. наук, проф.;
В.И.Николаенко, канд. ист. наук, проф.;

П.Г.Перерва, д-р техн. наук, проф.;
Н.И.Погорелов, д-р техн. наук, проф.;
М.И.Рыщенко, д-р техн. наук, проф.;
В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;
В.П.Себко, д-р техн. наук, проф.;
В.И.Таран, д-р техн. наук, проф.;
М.А.Ткачук, д-р техн. наук, проф.;
М.П.Требин, д-р фил. наук, доц.;
Ю.В.Тимофеев, д-р техн. наук, проф.;
А.Ф.Шеховцов, д-р техн. наук, проф.;
Е.И.Юносова, д-р фил. наук, проф.

Адрес редколлегии: 61002, Харьков,
ул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПИ».
Каф. ДПМ, Тел. (057) 707-68-79.

Харьков 2006

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2006. – № 21. – 194 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ответственный редактор: О.К.Морачковский, д-р техн.наук,проф.

Ответственный секретарь: А.Г.Андреев, канд.техн.наук, доц.

Е.Е.Александров,	д-р техн.наук, проф.;
В.В.Бортовой,	канд.техн.наук, доц.;
Ю.С.Воробьев,	д-р техн.наук, проф.;
Е.Г.Голоскоков,	д-р техн.наук, проф.;
О.О.Горошко,	д-р физ.-мат.наук, проф.;
В.Б.Гринев,	д-р техн.наук, проф.;
В.А.Жовдак,	д-р техн. наук, проф.;
Г.И.Львов,	д-р техн. наук, проф.;
В.Л.Остапенко,	д-р физ.-мат.наук,проф.;
Л.А.Фильштинский,	д-р техн.наук,проф.;
Ю.М.Шевченко,	академик НАНУ

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».
Протокол № 7 від 26 травня 2006 р.

© Національний технічний університет «ХПІ»

А.А.ЛАРИН, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

О ТВОРЧЕСКОМ НАСЛЕДИИ ЛЬВА ИЗРАИЛЕВИЧА ШТЕЙНВОЛЬФА – УЧЕНОГО И ПЕДАГОГА

У статті представлено творчий путь відомого вченого із ХПІ – професора Л.І.Штейнвольфа. Прив'язчується до 90-ліття з дня народження.

In article the career of the known scientist from KhPI – professors Shtejnvolf L.I. is submitted. It is devoted to the 90-anniversary from birthday.



23 апреля 2006 года исполнилось 90 лет со дня рождения Льва Израилевича Штейнвольфа, известного ученого в области механики, динамики машин и прикладной теории колебаний, доктора технических наук, профессора кафедры теоретической механики Харьковского политехнического института.

Л.И.Штейнвольф родился в 1916 году в Днепропетровске в семье служащих. С 1924 года семья живет в Харькове, где Лев Израилевич оканчивает семилетнюю школу, а затем фабрично-заводское училище. В 1932 году он поступает на рабочий факультет при Харьковском механико-машиностроительном институте (ХММИ). После

окончания в 1934 году рабочего факультета Лев Израилевич становится студентом ХММИ. В 1939 году он поступает в аспирантуру ХММИ по специальности динамика машин. Однако учеба в аспирантуре была прервана войной, и вместе с институтом Л.И. Штейнвольф эвакуируется в город Красноуфимск, где работает старшим преподавателем кафедры Двигателей внутреннего сгорания. В 1942 году его призывает в армию, он оканчивает Военно-политическое училище, а затем преподает на курсах младших лейтенантов Московского военного округа.

Работу над кандидатской диссертацией, которую Лев Израилевич выполнял под руководством профессора Я.М. Майера, он продолжил после демобилизации в 1945 году. Успешная защита диссертации состоялась в 1947 году. В ней Л.И. Штейнвольф подробно рассмотрел применение маятникового демпфера для гашения крутильных колебаний валопроводов ДВС. В результате был предложен метод расчета нерезонансных вынужденных колебаний системы с присоединенным маятниковым демпфером и с учетом сопротивления системы. Для уточнения общих вопросов теории, методов расчета нерезонансных колебаний и эффективности воздействия маятниковых демпферов

впервые была использована экспериментальная установка. Эта установка оказалась универсальным средством, позволяющим исследовать целый ряд вопросов крутильных колебаний.

В ХММИ судьба свела Л.И. Штейнвольфа с Иваном Михайловичем Бабаковым – выдающимся ученым в области механики, создателем одной из первых научных школ по теории колебаний в Украине, прекрасным педагогом, организатором специальности динамика машин. И.М. Бабаков оказал огромное влияние на подготовку научно-педагогических кадров ХММИ, в том числе и на формирование Л.И. Штейнвольфа, как ученого и педагога, проработавшего с ним много лет на кафедре теоретической механики.

В 1956 году в ХПИ была открыта Проблемная лаборатория по динамике машин, которую возглавил известный ученый в области математики и механики, профессор А.П. Филиппов. Л.И. Штейнвольф был приглашен в эту лабораторию для организации и руководства научно-исследовательской группой силовых установок. Его научные интересы всегда были тесно связанными с практическими проблемами, и, в частности, с проблемами создания и совершенствовании транспортных машин, оснащенных двигателями внутреннего сгорания (ДВС). Наряду с задачами анализа решались также и задачи нового направления – синтеза механических систем, управления спектром собственных частот [1, 2, 3]. В 1967 году Л.И. Штейнвольф успешно защитил докторскую диссертацию на тему: «Динамика механических передач силовых установок тепловозов». В ней рассмотрены общие вопросы расчета свободных и вынужденных колебаний, переходных процессов, синтеза механических передач и расчета фрикционных автоколебаний. В работе также дан анализ существовавших тогда методов расчета собственных частот и форм колебаний. При расчете вынужденных колебаний рассмотрена замена нелинейного демпфирования эквивалентным линейным из условия равенства работ действительных демпфирующих сил и эквивалентных сил вязкого трения. В ходе работы были проведены динамические расчеты механических передач силовых установок тепловозов ТЭЗ, ТЭ10, и ТЭ40 производства Харьковского завода транспортного машиностроения имени В.А. Малышева и тепловозов 2ТЭ10Л, М62 и ТГ106 Луганского тепловозостроительного завода имени Октябрьской революции. В 1968 году Л.И. Штейнвольфу присвоено ученое звание профессора по кафедре теоретической механики.

Научные исследования по различным проблемам динамики силовых передач транспортных машин выполнялись Л.И. Штейнвольфом по наиболее актуальным направлениям развития транспортной техники, на базе современных достижений математики, механики и кибернетики. Группа, которую возглавлял Лев Израилевич, отличалась высокой работоспособностью, в ней царила прекрасная творческая атмосфера. За годы существования в Проблемной лаборатории небольшого по составу коллектива группы, в нем подготовлено два доктора и 16 кандидатов наук. Привлеченный со студенческих лет для научной работы в группе Владимир Николаевич Карабан под руководством Л.И. Штейнвольфа стал кандидатом, а затем доктором технических наук, заведующим кафедрой теоретической механики.

С 1950-х годов в практике научных исследований стали применяться электронные цифровые вычислительные машины (ЭЦВМ). С этого времени Лев Израилевич активно внедряет в практику расчетов колебаний машин вычислительные методы с программированием их для выполнения расчетов на ЭЦВМ. В работе [4] Л.И. Штейнвольфом дан обзор различных подходов к расчетам собственных частот и форм колебаний линейных механических систем и обоснована эффективность применения в программах для ЭЦВМ QR-алгоритма, предложенного в 1961 г. математиками В.Н. Кублановской и Френсисом. Далее это направление получило развитие в расчетах вынужденных колебаний, что отражено в его работе [5]. Отметим, что внедрение ЭЦВМ в практику расчетов на колебания механических систем способствовало заметному повышению эффективности в получении результатов при исследовании линейных дискретных систем. Наибольшей трудоемкостью при этом обладал этап составления вручную матриц инерции, жесткости и демпфирования систем уравнений, описывающих данные колебания. Поэтому, с начала 1970-х годов, Л.И. Штейнвольф совместно с В.Н. Митиным начали разрабатывать методы автоматизированного построения систем уравнений, основанного на применении, так называемых структурных матриц [8, 9], которые нашли воплощение к концу 1970-х годов сначала для так называемых «цепных систем», а затем получили дальнейшее развитие.

Важнейшим этапом научного творчества Л. И. Штейнвольфа стали исследования по нелинейным колебаниям в машинах, что было связано с усложнением транспортных и боевых машин и повышенными требованиями к их работе при эксплуатации. Под его руководством В.М. Шатохиным были разработаны алгоритмы и программы, реализующие применение итерационного метода Ньютона-Канторовича для нелинейных интегральных уравнений, описывающих свободные и вынужденные колебания дискретных систем [8, 9]. Затем этот подход был развит для исследований для решения задач оптимизации и синтеза и исследования переходных режимов в силовых передачах транспортных машин [10, 11, 12]. К этому направлению исследований примыкает разработка метода диагностики рабочего процесса ДВС по крутильным колебаниям его валопровода, который занимает особое место в научном творчестве Льва Израилевича Штейнвольфа [13, 14].

Исследования, начавшиеся с создания автоматизированного составления средствами ЭВМ уравнений колебаний в машинах, нашли продолжение при создании программного комплекса (ПК) «КИДИМ», имеющего важное прикладное значение. ПК «КИДИМ», являющийся дальнейшим развитием идеи структурных матриц, был основан на применении специально созданной системы компьютерной алгебры. Данный комплекс позволяет автоматизировать процессы построения математических моделей и отыскания решений задач кинематики, статики и динамики для широкого класса дискретных механических систем, в том числе и с нестационарными и неголономными связями [15, 16]. ПК «КИДИМ» можно считать самым главным научным достижением Льва Израилевича с учениками.

Профессор Л.И. Штейнвольф внес большой вклад в дело подготовки инженеров и научных работников. В разные годы он читал оригинальные курсы лекций по теоретической и аналитической механике, теории колебаний и динамике машин, что нашло свое выражение в издании монографии «Динамические расчеты машин и механизмов» [17]. Лев Израилевич являлся образцом принципиального и внимательного воспитателя молодежи, всегда отличался изысканными манерами человека уверенного, но доступного для общения, он был требовательным, но в то же время и снисходительным к огрехам учеников. Л.И. Штейнвольф пользовался заслуженным авторитетом коллектива всего университета, студентов и выпускников инженерно-физического факультета, специалистов в области динамики машин, многие из них навсегда сохранили память об этом замечательном педагоге и ученом. Лев Израилевич ушел из жизни в 1991 году после тяжелой продолжительной болезни, с которой боролся до самого конца.

Список литературы: 1. Глазман И.М., Штейнвольф Л.И. Освобождение резонансно-опасных зон от собственных частот вибрационной системы варьированием ее параметров // Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение. – 1964. – № 4. – С. 126-128. 2. Митин В.Н., Пономарев А.С., Штейнвольф Л.И. Синтез вибрационных систем при вынужденных колебаниях // Динамика и прочность машин. – 1973. – Вып. 18. – С. 58-62. 3. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Синтез дискретных вибрационных систем с максимально сжатым спектром // Прикладная математика и механика. – 1975. – Т.39, № 4. – С. 46-54. 4. Штейнвольф Л.И. Об алгоритмах расчета свободных крутильных колебаний на ЭЦВМ // Динамика и прочность машин. – 1967. – Вып. 6. – С. 106-109. 5. Штейнвольф Л.И., Карабан В.Н. О расчетах вынужденных крутильных колебаний на ЭЦВМ // Динамика и прочность машин. – Вып. 10. – 1969. – С. 80-84. 6. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структурные матрицы цепных вибрационных систем // Динамика и прочность машин. – Вып. 17. – С. 3-7. 7. Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Структуры дискретных механических моделей конструкций // Динамика и прочность машин. – Вып. 35. – 1982. – С. 3-6. 8. Карабан В.Н., Шатохин В.М., Штейнвольф Л.И. К вопросу применения итерационного метода для расчетов колебаний существенно нелинейных систем // Динамика и прочность машин. – 1981. – Вып. 33. – С. 54-63. 9. Карабан В.Н., Шатохин В.М., Штейнвольф Л.И. Исследование вынужденных колебаний в приводах механизмов циклового действия // Теория механизмов и машин. – 1983. – Вып. 34. – С. 61-66. 10. Дразун С.В., Карабан В.Н., Штейнвольф Л.И. Оптимизация моделей силовых передач в динамических расчетах // Проблемы машиностроения. – Вып. 17. – 1982. – С. 66-70. 11. Штейнвольф Л.И. Оптимальный синтез конструктивных параметров упругих соединений // Теория машин и механизмов. – 1974. – Вып. 17. – С. 102-107. 12. Андреев Ю.М., Штейнвольф Л.И. Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности // Динамика и прочность машин. – 1984. – Вып. 40. С. 50-56. 13. Ларин А.А., Митин В.Н., Штейнвольф Л.И. Использование цифрового имитатора для исследования систем вибрационной диагностики рабочего процесса ДВС // Двигатели внутреннего сгорания. – 1983. – Вып. 37. – С. 118-124. 14. Ларин А.А., Штейнвольф Л.И. Применение метода регуляризации в аналитической вибрационной диагностике машин // Динамика и прочность машин. – 1987. – Вып. 45. – С. 67-70. 15. Андреев Ю.М., Штейнвольф Л.И. Компьютерное моделирование задач механики голономных систем твердых тел со стационарными и нестационарными связями // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 53. – С. 96-102. 16. Андреев Ю.М., Штейнвольф Л.И. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем // Динамика и прочность машин. – 1993. – Вып. 54. – С. 93-98. 17. Штейнвольф Л.И. Динамические расчеты машин и механизмов. – М-К.: МАШГИЗ, 1961. – 340 с.

Поступила в редколлегию 22.05.2006

К.В.АВРАМОВ, докт.техн.наук; **Н.В.ШИРЯЕВА**;
Ю.А.ИЩУК, канд.техн.наук; **Л.В.РОЗОВА**, канд.техн.наук, НТУ «ХП»

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

У статті наведена система трьох диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описує изгибно-изгибно-крутильні коливання закрученого стержня. В статті припускається, що центр тяжіння та центр зрушення знаходяться у різних точках. Для дискретизації цієї системи застосовується метод нелінійних нормальних форм. Вільні нелінійні коливання досліджуються методом Шоу-П'єра.

The system of three partial differential equations describing flexural-flexural-torsional vibrations of pretwisted beam is introduced in this paper. An assumption that the center of gravity and the shear center are in different points is used here. Nonlinear modal analysis is used for discretization of this system. Free nonlinear oscillations are investigated by Shaw-Pierre method.

1. Введение. Вращающиеся стержни являются элементами ветровых энергетических установок, лопастей роторов вертолетов, лопаток турбомашин. Многие из этих элементов с достаточной для инженерных наук точностью могут описываться стержневыми моделями. Такие системы часто совершают колебания с амплитудами соизмеримыми с толщиной стержня [1]. Такие движения описываются геометрически нелинейными моделями.

Много было предпринято усилий для исследования колебаний вращающихся стержней. Одни из первых результатов по исследованию линейных колебаний вращающихся стержней были получены А.П. Филипповым и Ю.С. Воробьевым [2, 3]. Они рассматривали линейные колебания стержней, предполагая что центр тяжести и центр сдвига поперечного сечения находятся в разных точках. Уравнения геометрически нелинейных колебаний стержней рассматривались в работах [4, 5, 6]. В этих работах предполагалось, что центр тяжести и центр сдвига поперечного сечения находятся в одной точке.

В этой статье исследуются нелинейные колебания закрученных стержней, предполагая что центр тяжести поперечного сечения и центр сдвига находятся в разных точках.

2. Основные уравнения колебаний. В этой статье предполагается, что стержень является равномерно закрученным. Его угол закрученности определяется так $\alpha(x) = \alpha_0 + \tau_0 x$. Пространственные колебания стержня описываются тремя перемещениями u , v , w вдоль осей x , y , z и углом θ_x , который описывает крутильные колебания.

Кручение стержня происходит вокруг центра сдвига (рис. 2). В статье предполагается, что стержень вращается с постоянной угловой скоростью Ω . Применяя подход представленный в [4], получаем систему трех уравнений в частных производных, описывающую изгибно-изгибно-крутильные колебания

стержня. Эта система принимает следующий вид [7]:

$$E \frac{J_\zeta - J_\eta}{2} (w'' \sin 2\alpha)'' + EJ_\zeta (v'' \cos^2 \alpha)'' + EJ_\eta (v'' \sin^2 \alpha)'' + m\ddot{v} -$$

$$- m e \ddot{\theta}_x \sin \alpha + \Omega m (2\dot{v} + \Omega x) v' + m \Omega (e \theta_x \sin \alpha - v)'' \left(2 \int_x^L \dot{v} dx + \Omega \frac{L^2 - x^2}{2} \right) -$$

$$- em \Omega (\theta_x \sin \alpha)' (4\dot{v} + \Omega x) + em \Omega \theta_x \sin \alpha (\Omega - 2\dot{v}') - \Omega^2 m v + \quad (1a)$$

$$+ \frac{4\Omega^2 m^2}{EA} \int_0^x dx_1 \int_{x_1}^L \ddot{v} dx - 2\Omega m \int_0^x (v' \dot{v}' + w' \dot{w}') dx - 2\Omega m e \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (\theta_x v'' \sin \alpha - \theta_x w'' \cos \alpha) dx +$$

$$+ E (J_\zeta - J_\eta) (\theta_x w'' \cos 2\alpha)'' - E (J_\zeta - J_\eta) (\theta_x v'' \sin 2\alpha)'' = 0;$$

$$EJ_\zeta (w'' \sin^2 \alpha)'' + EJ_\eta (w'' \cos^2 \alpha)'' + E \frac{J_\zeta - J_\eta}{2} (v'' \sin 2\alpha)'' + m\ddot{w} +$$

$$+ m \ddot{\theta}_x e \cos \alpha + \Omega m (2\dot{w} + \Omega x) w' - m \Omega (w + e \theta_x \cos \alpha)'' \left(2 \int_x^L \dot{v} dx + \Omega \frac{L^2 - x^2}{2} \right) + \quad (1b)$$

$$+ em \Omega (\theta_x \cos \alpha)' (4\dot{w} + \Omega x) + 2\Omega em \theta_x \dot{v}' \cos \alpha +$$

$$+ E (J_\zeta - J_\eta) (\theta_x v'' \cos 2\alpha)'' + E (J_\zeta - J_\eta) (\theta_x w'' \sin 2\alpha)'' = 0;$$

$$- G (e^2 A + J_\zeta + J_\eta) \theta_x'' - em \ddot{v} \sin \alpha + em \ddot{w} \cos \alpha + \ddot{\theta}_x [m e^2 + \rho (J_\zeta + J_\eta)] +$$

$$+ m \Omega e (v'' \sin \alpha - w'' \cos \alpha) \left(2 \int_x^L \dot{v} dx + \Omega \frac{L^2 - x^2}{2} \right) + \Omega^2 x m e (w' \cos \alpha - v' \sin \alpha) + \quad (1c)$$

$$+ \Omega^2 \left[v e m \sin \alpha + \rho \frac{J_\zeta - J_\eta}{2} \sin 2\alpha \right] + E \frac{J_\zeta - J_\eta}{2} \sin(2\alpha) (w''^2 - v''^2) +$$

$$+ E (J_\zeta - J_\eta) \cos(2\alpha) w'' w'' = 0.$$

где $\frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}$; $\frac{\partial w}{\partial x} = w'$; L , A – длина и площадь поперечного сечения

стержня; E , G – модуль упругости и модуль сдвига; ρ – плотность материала; e – расстояние от центра тяжести поперечного сечения до центра сдвига; J_ζ , J_η – моменты инерции поперечного сечения, которые определяются так:

$$J_\zeta(x) = \int_A \eta^2 dA; \quad J_\eta(x) = \int_A \zeta^2 dA.$$

3. Линейные колебания незакрученного стержня. Мы рассматриваем балку со стандартным сечением НАСА 0012. На рис. 3 представлена модель поперечного сечения. Все параметры на этом рисунке представлены в сантиметрах. На это рисунке показано расстояние между центром тяжести поперечного сечения и центр жесткости e .

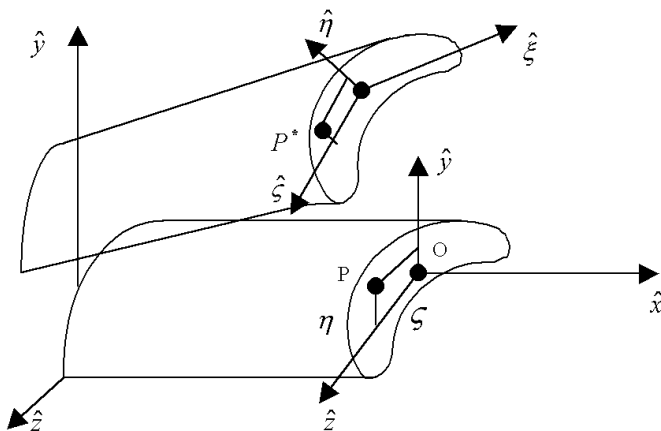


Рисунок 1 – Механическая система

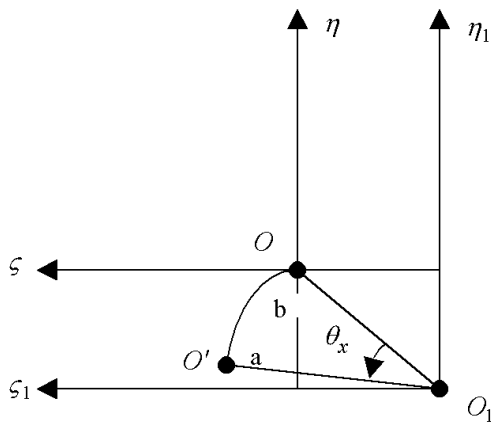


Рис 2 – Модель кручения стержня

Линейные свободные колебания невращающегося стержня представим так: $w = W(x)\sin(\omega t)$; $\theta_x = \theta(x)\sin(\omega t)$. Тогда собственные формы колебаний имеют следующий вид:

$$W_j = -\frac{A_1 s_2 + A_2}{\delta s_1} \sinh\left(\frac{s_1 x}{L}\right) + \chi_1 (s_2^4 - \lambda_B) \cosh\left(\frac{s_1 x}{L}\right) + \frac{A_1}{\delta} \sin\left(\frac{s_2 x}{L}\right) - \frac{\chi_2}{s_2} \cos\left(\frac{s_2 x}{L}\right) + (s_1^4 - s_2^4)(s_2^4 - \lambda_B) \frac{\chi_3}{s_3} \cos\left(\frac{s_3 x}{L}\right) + \frac{A_2}{\delta s_3} \sin\left(\frac{s_3 x}{L}\right); \quad (2a)$$

$$\theta_j = -\frac{(s_1^4 - \lambda_B)(A_1 s_2 + A_2)}{\lambda_B \delta s_1} \sinh\left(\frac{s_1 x}{L}\right) + \frac{1}{\lambda_B} (s_2^4 - \lambda_B)(s_1^4 - \lambda_B) \chi_1 \cosh\left(\frac{s_1 x}{L}\right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\chi_2 (s_2^4 - \lambda_B)}{\lambda_B s_2} \cos\left(\frac{s_2 x}{L}\right) + \\
& + \frac{\Delta_1}{\lambda_B \bar{\delta}} (s_2^4 - \lambda_B) \sin\left(\frac{s_2 x}{L}\right) + \eta^{(1)2} (s_1^4 - s_2^4) (s_2^4 - \lambda_B) \cos\left(\frac{s_3 x}{L}\right) + \frac{\Delta_2 \eta^{(1)2}}{\chi_3 \bar{\delta}} \sin\left(\frac{s_3 x}{L}\right), \quad (2b)
\end{aligned}$$

где j – номер собственной формы колебаний; параметры $\Delta_1, \Delta_2, \bar{\delta}, \chi_1, \chi_2, \chi_3, s_1, s_2, s_3$ не представлены для краткости изложения.

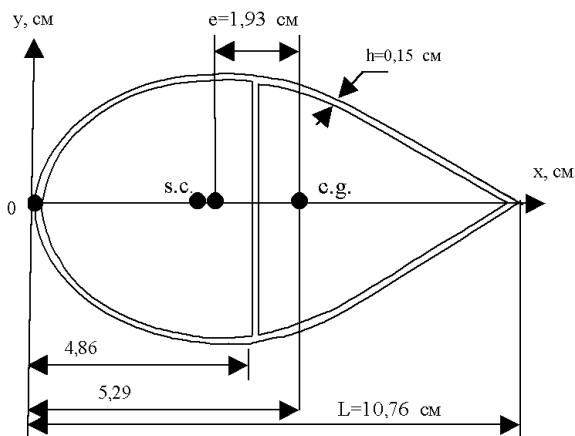


Рисунок 3 – Поперечное сечение стержня

Характеристики поперечного сечения балки таковы: $J_\eta = 0,57 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $J_\zeta = 29,94 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $A = 3,48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $\eta^{(1)} = -1,93 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $L = 1,22 \text{ м}$. Рассмотрим алюминиевую балку с параметрами: $E = 70 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $G = 27 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$; $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Удовлетворяя граничным условиям получаем частотное уравнение, которое представлено в работе [2]. Результаты расчета собственных частот колебаний представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний консольного стержня

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega_i, \text{рад/с}$	48,8	307,4	349,9	860,5	1686	2201	2784	3981	4160

4. Дискретная модель колебаний. Для исследования нелинейных колебаний вращающегося стержня континуальная система (1) приводится к дискретной модели. Для этого применяется метод Бубнова-Галеркина. Колебания представляются в следующем виде:

$$W(x,t) = \sum_{v=1}^7 q_v(t) W_v(x); \quad V(x,t) = \sum_{v=1}^2 q_{14+v}(t) V_v(x); \quad \theta_x(x,t) = \sum_{v=1}^7 q_{v+7}(t) \theta_v(x). \quad (3)$$

Функции $W(x,t)$, $\theta_x(x,t)$ раскладываются по собственным формам стержня, у которого центры тяжести и сдвига не совпадают. Так как центры тяжести и сдвига находятся на оси симметрии поперечного сечения, то для не закрученного стержня собственные формы изгибных колебаний $V(x,t)$ не зависят от колебаний $W(x,t)$, $\theta_x(x,t)$. Поэтому в качестве $V_v(x)$ выбираются балочные функции консольного стержня.

Дискретную модель колебаний системы с 16 степенями свободы представим так:

$$(M)\ddot{q} + (K)q + \Omega F(q, \dot{q}) + \Phi(q) + F_0 = 0, \quad (4)$$

где

$$(M) = \begin{pmatrix} M_1 \\ \dots \\ M_2 \end{pmatrix}; \quad M_1 = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1,16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{14,1} & M_{14,2} & \dots & M_{14,16} \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} M'_{15,1} & M'_{15,2} & \dots & M'_{15,16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M'_{16,1} & M'_{16,2} & \dots & M'_{16,16} \end{bmatrix};$$

$$M'_{jv} = M_{jv} + \Omega^2 \tilde{M}_{jv}, \quad j = \overline{15,16}, v = \overline{1,16}; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{16} \end{bmatrix};$$

$$f_l^{(0)} = \Omega^2 C_l, \quad l = \overline{8,14}; \quad K'_{\nu\mu} = K_{\nu\mu} + \Omega^2 R_{\mu}^{(\nu)}; \quad \nu = \overline{1,16}, \mu = \overline{1,16},$$

$$(K) = \begin{bmatrix} K'_{11} & \dots & K'_{1,16} \\ \dots & \dots & \dots \\ K'_{16,1} & \dots & K'_{16,16} \end{bmatrix}; \quad F_0 = \begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ \dots \\ f_{16}^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$f_v^{(0)} = 0, \quad (v = \overline{1,7}; 15,16); \quad \Omega F(q, \dot{q}) + \Phi(q) = \Omega \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{16} \end{bmatrix};$$

$$f_v = \sum_{\mu=1}^2 \sum_{j=1}^{14} D_{14+\mu,j}^{(v)} q_j \dot{q}_{14+\mu}, \quad v = \overline{1,7}; \quad f_l = \sum_{\nu=1}^{16} \sum_{\mu=1}^{16} D_{\nu\mu}^{(l)} \dot{q}_\nu q_\mu, \quad l = \overline{8,16};$$

$$\varphi_\nu = \sum_{\mu=1}^7 \sum_{j=1}^2 A_{\mu+7,14+j}^{(\nu)} q_{\mu+7} q_{14+j} + \sum_{\mu=1}^7 \sum_{j=1}^7 A_{\mu+7,j}^{(\nu)} q_{\mu+7} q_j; \quad (\nu = \overline{1,7}; 15,16);$$

$$\varphi_l = \sum_{r_1=1}^7 \sum_{r_2=1}^7 A_{r_1 r_2}^{(l)} q_{r_1} q_{r_2} + \sum_{r_1=1}^2 \sum_{r_2=1}^2 A_{14+r_1, 14+r_2}^{(l)} q_{14+r_1} q_{14+r_2} + \sum_{r_1=1}^2 \sum_{r_2=1}^7 A_{14+r_1, r_2}^{(l)} q_{14+r_1} q_{r_2}, \quad (l = \overline{8,14}).$$

Параметры системы (4) здесь не приводятся для краткости.

Вследствие вращения балки на нее действуют центробежные силы. Поэтому закрученный стержень претерпевает статические деформации. В результате этих деформаций стержень закручивается и изгибается. Перемеще-

ния стержня представим так: $w = q_1^{(0)} w_1(x)$; $v = q_{15}^{(0)} v_1(x)$; $\theta_x = q_8^{(0)} \theta_1(x)$. Эти соотношения вводятся в систему (4). В результате получается система трех нелинейных алгебраических уравнений относительно $q_1^{(0)}$, $q_8^{(0)}$, $q_{15}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} K_{1,1} q_1^{(0)} + K_{1,15} q_{15}^{(0)} + \Omega^2 R_1^{(1)} q_1^{(0)} + \Omega^2 R_8^{(1)} q_8^{(0)} + A_{8,15}^{(1)} q_8^{(0)} q_{15}^{(0)} + A_{8,1}^{(1)} q_8^{(0)} q_1^{(0)} &= 0; \\ K_{8,8} q_8^{(0)} + \Omega^2 R_1^{(8)} q_1^{(0)} + \Omega^2 R_{15}^{(8)} q_{15}^{(0)} + \Omega^2 C_8 + A_{11}^{(8)} q_1^{(0)2} + A_{15,15}^{(8)} q_{15}^{(0)2} + A_{15,1}^{(8)} q_{15}^{(0)} q_1^{(0)} &= 0 \\ K_{15,1} q_1^{(0)} + K_{15,15} q_{15}^{(0)} + \Omega^2 R_8^{(15)} q_8^{(0)} + \Omega^2 R_{15}^{(15)} q_{15}^{(0)} + A_{8,1}^{(15)} q_8^{(0)} q_1^{(0)} + A_{8,15}^{(15)} q_8^{(0)} q_{15}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) рассчитывается с параметрами, представленными выше и $\Omega = 72 \text{ рад/с}$. Результаты численного моделирования таковы:

$$(q_1^{(0)}, q_8^{(0)}, q_{15}^{(0)}) = (-0.18 \cdot 10^{-5}; -0.138 \cdot 10^{-3}; 0.238 \cdot 10^{-6}).$$

Эти данные свидетельствуют, что под действием растягивающейся силы закрученный стержень раскручивается. Этот вывод совпадает с результатами экспериментального и численного анализа, представленного в [3].

Теперь исследуем нелинейные колебания вращающегося стержня с умеренным амплитудами около положения статического равновесия $(q_1^{(0)}, q_8^{(0)}, q_{15}^{(0)})$. Тогда вводится следующая замена переменных:

$$q_i = \theta_i + q_i^{(0)}; i = \overline{1,16}; q_1^{(0)} \neq 0; q_8^{(0)} \neq 0; q_{15}^{(0)} \neq 0; q_v^{(0)} = 0; (v = \overline{2,7,9,14;16}). \quad (6)$$

Динамическую систему (4) запишем относительно координат $(\theta_1, \dots, \theta_{16})$.

Она принимает следующий вид:

$$(M)\ddot{\theta} + (K)\dot{\theta} + \Omega(G)\dot{\theta} + \Omega F(\theta, \dot{\theta}) + \Phi(\theta) = 0; \quad (7)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dots \\ \theta_{16} \end{bmatrix}; K'_{\nu\mu} = K_{\nu\mu} + \Omega^2 R_{\mu}^{(\nu)} + \tilde{K}_{\nu\mu}; (v = \overline{1,16}; \mu = \overline{1,16}), (K) = \begin{bmatrix} K'_{11} & \dots & K'_{1,16} \\ \dots & \dots & \dots \\ K'_{16,1} & \dots & K'_{16,16} \end{bmatrix};$$

$$f_v = \sum_{\mu=1}^2 \sum_{j=1}^{14} D_{14+\mu,j}^{(\nu)} \theta_j \dot{\theta}_{14+\mu}, \quad (v = \overline{1,7}); \quad f_l = \sum_{\nu=1}^{16} \sum_{\mu=1}^{16} D_{\nu\mu}^{(l)} \dot{\theta}_\nu \theta_\mu, \quad (l = \overline{8,16});$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & G_{1,15} & G_{1,16} \\ 0 & \dots & 0 & G_{2,15} & G_{2,16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & G_{14,15} & G_{14,16} \\ G_{15,1} & \dots & \dots & G_{15,15} & G_{15,16} \\ G_{16,1} & \dots & \dots & G_{16,15} & G_{16,16} \end{pmatrix};$$

$$\varphi_\nu = \sum_{\mu=1}^7 \sum_{j=1}^2 A_{\mu+7,14+j}^{(\nu)} \theta_{\mu+7} \theta_{14+j} + \sum_{\mu=1}^7 \sum_{j=1}^7 A_{\mu+7,j}^{(\nu)} \theta_{\mu+7} \theta_j; \quad (v = \overline{1,7;15,16});$$

$$\varphi_l = \sum_{r_1=1}^7 \sum_{r_2=1}^7 A_{r_1 r_2}^{(l)} \theta_{r_1} \theta_{r_2} + \sum_{r_1=1}^2 \sum_{r_2=1}^2 A_{14+r_1,14+r_2}^{(l)} \theta_{14+r_1} \theta_{14+r_2} + \sum_{r_1=1}^2 \sum_{r_2=1}^7 A_{14+r_1, r_2}^{(l)} \theta_{14+r_1} \theta_{r_2}, \quad l = \overline{8,14}.$$

На первом этапе система (7) линеаризуется и исследуются собственные колебания при различных значениях частоты вращения стержня. Результаты расчета представлены в табл. 2.

Таблица 2 – Собственные частоты вращающегося стержня

рад/с	$\Omega = 0$	$\Omega = 35$	$\Omega = 72$	$\Omega = 90$	$\Omega = 120$
p_1	49,08	61,63	91,05	106,8	137,6
p_2	299,5	309,02	330,9	339,6	348,3
p_3	366,9	370,2	386,8	404,2	447,4
p_4	1008,4	1019	1051,8	1075,2	1124,2
p_5	2007	2017,3	2050	2073,7	2123
p_6	2213,5	2215,2	2220	2225,1	2234,9
p_7	3316,1	3326,8	3361	3386	3439,4

5. Нелинейные колебания. Для исследования нелинейных колебаний системы (7) применяется метод нелинейных нормальных форм в форме Шоу – Пьера [8]. В результате использования этой процедуры получены скелетные кривые колебаний вращающегося стержня, которые приведены на рис. 4. Отметим, что первая и четвертая скелетные кривые являются мягкими (см. рис. 4, а; 4, г), а вторая и третья – жесткими (см. рис. 4, б; 4, в).

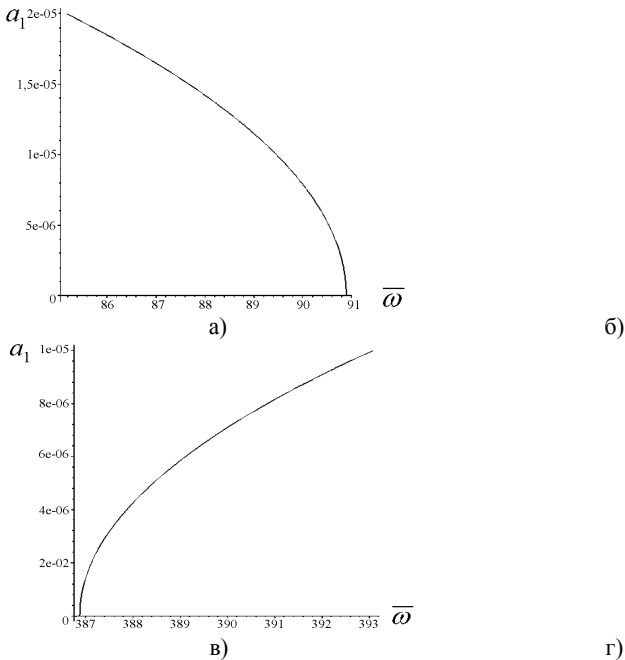


Рисунок 4 – Кривые свободных колебаний

Заклучение. В статье представлена процедура дискретизации для получения модели колебаний вращающегося стержня и исследованы линейные и нелинейные свободные колебания. В статье установлено, что первая и четвертая скелетные кривые являются жесткими, а вторая и третья мягкими.

Список литературы: 1. *Friedmann P.P.* 2004, «Rotary-wind aeroelasticity: current status and future trends» // *AIAA Journal* 42, 1953-1972. 2. *А.П.Филиппов.* Колебания деформируемых систем. – М.: «Машиностроение», 1970. – 376 с. 3. *Воробьев Ю.С.* Уточненные уравнения свободных колебаний вращающихся стержней. Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. – Киев: Наукова думка, 1965. – С. 11-27. 4. *Hodges D.H., Dowell E.H.* Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. – NASA TN D-7818, Washington, D.C., 1974. – 60 p. 5. *Crespo da Silva M.R.M.* A comprehensive analysis of the dynamics of a helicopter rotor blade // *Int. J. Solids Structures.* – 1998. – Vol. 35, No 7-8. – P. 619-635. 6. *Crespo da Silva M.R.M.* Nonlinear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams. – I. Formulation // *Int. J. Solids Structures,* 1988. – Vol. 24, No. 12. – P. 1225-1234. 7. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В., Ицук Ю.В., Розова Л. В., Воробьев Ю.С.* Модели нелинейной механики в прикладных задачах энергетического машиностроения / Учебно-методическое пособие. – Харьков, 2006. – 142 с. 8. *Аврамов К.В., Ицук Ю.А., Розова Л.В.* методы исследования нелинейных процессов в энергетическом оборудовании / Учебно-методическое пособие. – Харьков, 2006. – 64 с.

Поступила в редколлегию 17.04.2006

УДК 621.01

Ю.М.АНДРЕЕВ, канд.техн.наук; **Е.И.ДРУЖИНИН**, канд.техн.наук;
О.В.МИТИН; НТУ «ХПИ»

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА ФОРМОВОЧНОГО СТАНКА

Наводяться розрахунки, які ілюструють методику дослідження кінематики та динаміки пристроїв, що містять кулачкові механізми, на підставі використання комплексу кінематичних та динамічних досліджень (КИДИМ), який містить у собі систему аналітичних обчислювань.

It is resulted a technique of research of kinematics and dynamics of devices with Cam mechanisms, on the basis of use of a complex of kinematic and dynamic calculations (KIDYM), which comprises system of analytical calculations.

Вопросам проектирования кулачковых механизмов посвящена обширная литература, например, [1,2]. В настоящее время имеет смысл рассматривать только проблемы, связанные с реализацией разработанных методов в вычислительных алгоритмах. При проектировании кулачковых механизмов, входящих в состав машиностроительных конструкций, используются различные способы задания формы кулачка. В частности, форму кулачка можно определить набором точек, в подвижной системе координат, связанной с кулачком. Можно также воспользоваться набором дуг окружностей, для которых указаны координаты их центров (по отношению к указанной выше системе коор-

динат) и радиусы. В данной работе проведен сравнительный кинематический и динамический анализ работоспособности и эксплуатационной надежности формовочного станка для двух кулачков, формы контуров которых задавались различными способами, в том числе с использованием кубических сплайнов, при этом, последний способ по результатам исследований является более предпочтительным.

Рассмотрим схему формовочного станка, изображенную на рис.1. Здесь представлены пневмоцилиндры 1 и 2, ход которых приводит в движение весь механизм, кулачок 3, передающий движение через ролик 4 платформе 5.

Цель исследований состояла в проведении сравнительного кинематического и динамического анализа двух кулачков различной формы. Необходимо было решить задачи описания формы кулачка, составления кинематической и динамической моделей для проведения расчетов кинематики и динамики представленной на рис. 1 модели.

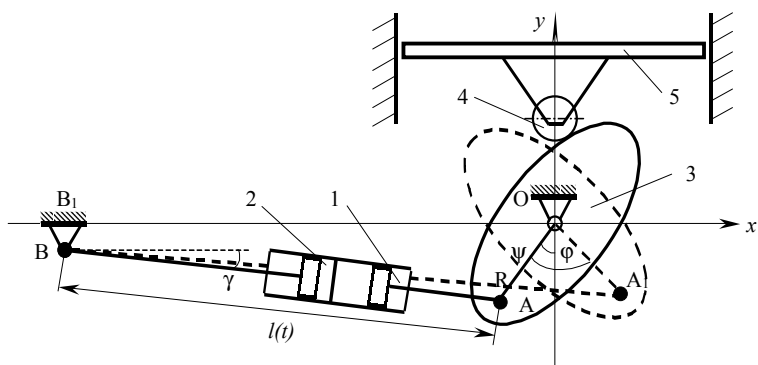


Рисунок 1

В процессе исследования были рассмотрены следующие представления формы кулачка: дискретным массивом точек и множеством дуг окружностей. Для первого кулачка использовались оба способа, для другого – только второй.

Для проведения всех расчетов кинематики и динамики указанных выше моделей использовался разработанный на кафедре программный комплекс КИДИМ, в основе которого лежит система аналитических вычислений. В связи с этим для определения скоростей и ускорений точек звеньев механизма необходимо иметь аналитическое описание формы кулачка. В первом из упомянутых способов требуется использовать один из методов интерполяции, во втором – уточнить координаты центров и радиусы дуг окружностей. Затем на основе полученного аналитического описания кулачка получить механические и математические модели и алгоритмы решения задач кинематики и динамики. При расчетах были использованы два метода интерполяции, встроенные в программный комплекс КИДИМ, – метод линейной интерполяции и метод интерполяции кубическими сплайнами.

Задание формы кулачка массивом дуг окружностей является простым и наглядным, широко используемым в конструкторской практике. Надлежащим выбором положений центров дуг и величин их радиусов можно обеспечить непрерывность линии формы кулачка и касательных в местах стыков. Кривизна же в точках сопряжения испытывает скачки первого рода. Это приводит к значительным погрешностям при расчетах ускорений точек звеньев станка, модель которого представлена на рис. 1. Более того, практическая неточность в формировании координат центров аппроксимирующих дуг и их радиусов приводит к скачкам формы линии кулачка и изломам касательных. В связи с этим более предпочтительным оказывается использование кубических сплайнов, которые проводятся через точки сопряжения дуг окружностей, что и было сделано при проведении расчетов по второму кулачку.

Несмотря на небольшое число точек, задающих форму кулачка, сплайн, проведенный через эти точки, достаточно гладкий, хорошо дифференцируется и дает приемлемые по точности результаты, о которых будет сказано ниже. Излишняя «густота» точек вместо улучшения описания формы кулачка может ухудшить его, так как сплайн, проведенный через такие близко расположенные точки, может оказаться весьма «извилистым» из-за погрешностей в задании координат точек. Такая ситуация встретилась при описании начального участка первого кулачка. Здесь для получения приемлемых результатов потребовалось «загрубить» точечное представление кулачка, уменьшив число точек.

Одним из критериев сравнения кулачков является величина угла, образованного вертикалью и нормалью к поверхности кулачка в точке контакта с роликом при его повороте на этапе подъема платформы [2]. На рис. 2 представлен график изменения этой величины для первого (сплошная линия) и второго (пунктир) кулачков в градусах.

Для решения задач кинематики механизма подъема платформы были сформулированы и решены следующие задачи: сглаживание формы кулачка, полученной при конструировании; получение алгоритма вычисления вертикальной координаты центра ролика y_C и угла наклона нормали в точке касания кулачка и ролика с вертикалью α от угла поворота кулачка φ для заданной формы кулачка; подбор законов движения пневмоцилиндров с учетом релейного характера наброса и сброса давления в них; построение функции $\varphi = f(l)$ - угла поворота кулачка φ в зависимости от длины шатуна AB (см. рис. 1), которая меняется из-за движения поршней пневмоцилиндров; расчет кинематических характеристик движения конструкции для двух видов проектируемых кулачков.

Для дискретно заданной формы кулачка надо получить аналитический алгоритм зависимости от угла поворота кулачка φ вертикальной координаты центра ролика y_C и угла α между вертикалью и общей нормалью в точке касания кулачка с роликом. Решение этой задачи на основе использования набора дуг окружностей дало неприемлемые результаты. Получим решение задачи, предполагая, что форма кулачка задана аналитической зависимостью $y = f(x)$ (см. рис. 3).

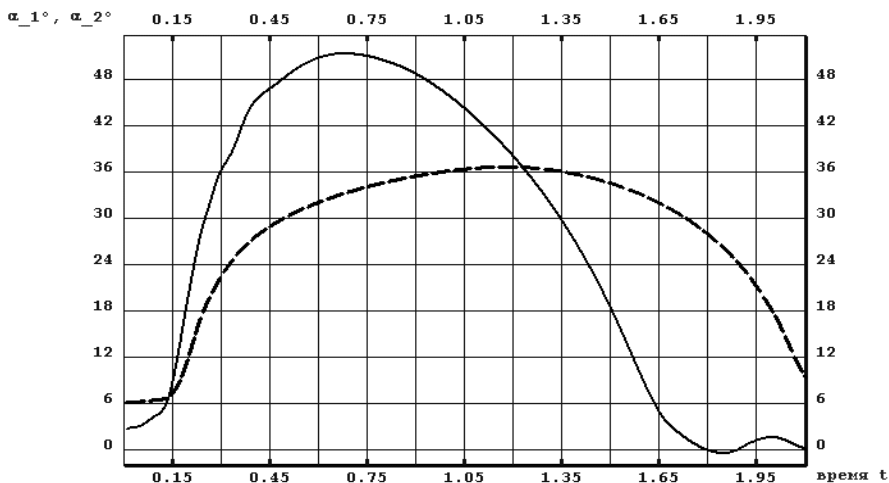


Рисунок 2

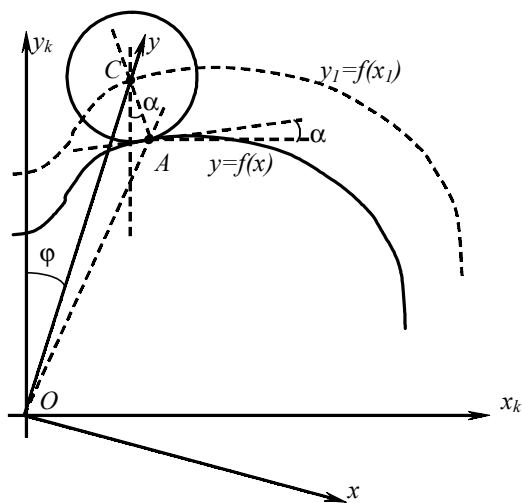


Рисунок 3

Здесь показано: сплошной кривой линией – контур кулачка, т. O – ось кулачка, т. A – точка касания ролика и кулачка, т. C – центр ролика, система координат $Ox_k y_k$ – «кулачковая» – жестко связана с кулачком, а система координат Oxy – неподвижная, φ – угол поворота кулачка (он повернут против часовой стрелки).

Для любой точки A контура кулачка наступит момент, когда с ней соприкоснется катящийся по кулачку ролик.

Обозначим $r = CA$ – радиус ролика, α – угол наклона радиуса ролика, проведенного в точку касания A , с вертикалью. Касательная к кулачку в т. A также составляет угол α с горизонталью. Но тогда $\operatorname{tg} \alpha = y'_x$, а координаты центра ролика найдутся из соотношений $x - x_1 = r \sin \alpha$, $y_1 - y = r \cos \alpha$.

При этом ордината центра ролика в неподвижной системе координат будет $y_c = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, а угол поворота кулачка $\varphi = \operatorname{arctg}(x_1/y_1)$.

Алгоритм вычисления зависимости ординаты центра ролика (высоты подъема платформы) от угла поворота кулачка φ состоит в следующем: для выбранной точки контура кулачка (т. А) – $\{x, y\}$ вычисляем

$$\alpha = \arctg(y'_x), \quad (1)$$

определяем координаты центра ролика в подвижной «кулачковой» системе координат $x_1 = x - r \sin \alpha$; $y_1 = y + r \cos \alpha$; (2)

получаем полярные координаты центра ролика в этой системе координат – они же будут ординатой центра ролика в неподвижной системе координат и углом поворота кулачка, отвечающем точке контакта ролика и кулачка в выбранной т. А $y_C = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$; $\varphi = \arctg(x_1/y_1)$. (3)

Полученные значения угла поворота кулачка φ и ординаты центра ролика y_C (3), а также значения угла поворота кулачка φ и значения угла α (1), дают возможность построить кубические сплайны и иметь, таким образом, аналитические дважды дифференцируемые зависимости $y_C(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$.

Для приведенной на рис. 1 кинематической схемы механизма подъема платформы получим зависимость угла поворота кулачка от перемещения поршней пневмоцилиндров. Приравнивая значения координат точки А, выраженные через геометрические параметры деталей слева и справа от нее, получим 2 уравнения

$$\begin{aligned} BB_1 + AB \sin \gamma &= R \cos \psi \\ OB_1 - AB \cos \gamma &= R \sin \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

из которых можно определить зависимость угла поворота кулачка ψ (угол между линией OA и вертикалью) и длиной шатуна AB , определяемой постоянной частью и перемещением поршней пневмоцилиндров. Уравнения (4) трансцендентны, но для малого угла γ эти уравнения решаются в общем виде. Заменим в уравнениях (4) $\sin \gamma \approx \gamma$, $\cos \gamma \approx 1$, получим

$$\gamma = \frac{R \cos \psi - BB_1}{AB}; \quad \psi = \arcsin\left(\frac{OB_1 - AB}{R}\right). \quad (5)$$

Запишем формулировку и алгоритм решения прямой задачи кинематики: при заданном законе перемещения поршня пневмоцилиндра 1 определить кинематические характеристики движения механизма подъема платформы: вертикальной координаты платформы - y_C , угла α между вертикалью и нормалью к кулачку в точке касания его с роликом, скорость и ускорение при вертикальном подъеме платформы.

В начале считаем, что поршень пневмоцилиндра 1 движется равномерно, в дальнейшем после решения второй задачи динамики для указанного механизма этот закон можно уточнить. Так как нашей задачей является сравнение поведения двух кулачков, то выводы, сделанные в рамках указанной гипотезы, очевидно, могут мало измениться при уточнении закона движения поршня.

Согласно выбранному закону движения ведущего звена (поршня пнев-

моцилиндра 1) запишем, $L_1(t) = v_1 t$, где L_1 – закон движения поршня, v_1 – его скорость; $v_1 = H_1/T_1$, где H_1, T_1 – ход и время перемещения;

$$AB = AB_0 + L_1 + L_2, \quad (6)$$

где AB_0 – начальная длина шатуна AB , когда поршни пневмоцилиндров еще не перемещались, L_2 – перемещение поршня пневмоцилиндра 2 (на первом этапе движения оно равно нулю);

$$\psi = \arcsin\left(\frac{OB_1 - AB}{R}\right), \quad (7)$$

где угол между вертикалью и радиусом R (см. рис. 1) $-90^\circ < \psi < 90^\circ$, поэтому функция \arcsin его однозначно определяет;

$$\varphi = \psi - \psi_0, \quad (8)$$

где угол поворота кулачка отсчитывается от начального значения угла $\psi = \psi_0$; наконец, имея зависимости $y_C(\varphi)$ и $\alpha(\varphi)$, вычислим y_C и α , а также ско-

$$\text{рость и ускорение платформы} \quad v_C = \frac{dy_C}{dt}, \quad a_C = \frac{dv_C}{dt}.$$

В соответствии с этим алгоритмом были получены кинематические характеристики для обоих кулачков.

Решение задачи по определению зависимости вертикального перемещения платформы от угла поворота кулачка, который, в свою очередь, определяется перемещением поршня пневмоцилиндра 1, полученное выше, позволяет поставить и решить задачу о вычислении законов движения звеньев механизма подъема с учетом инерционности параметров модели и действующих сил. Программный комплекс КИДИМ позволяет легко справиться с такой задачей. За обобщенную координату можно взять перемещение поршня пневмоцилиндра 1. Учтем силу давления воздуха на доньшко поршня пневмоцилиндра 1, силу тяжести кулачка и платформы, силы инерции при вращении кулачка в поступательном движении платформы. Угол поворота кулачка определится по формулам (6)-(8), вертикальное перемещение платформы – по формулам (1)-(3).

Для заданных параметров динамической модели: масса второго кулачка – $10,8 \text{ кг}$; его момент инерции относительно оси вращения – $0,18 \text{ кгм}^2$; масса платформы – 180 кг , сила давления на доньшко поршня пневмоцилиндра 1 – 7017 Н (716 кГ), были получены значения горизонтальной (сплошная линия) и вертикальной (пунктир) составляющих силы, действующей со стороны кулачка на ролик, которые приведены на рис. 4.

Представленные материалы работы позволяют сделать следующие выводы.

1. Проведено исследование кинематического и динамического поведения механизма подъема штамповочной платформы станка.
2. Выявлены недостатки в традиционном представлении формы кулачков совокупностью дуг окружностей, связанные с недостаточной сглаженностью линии формы кулачка, которая требуется для проведения указанных расчетов.

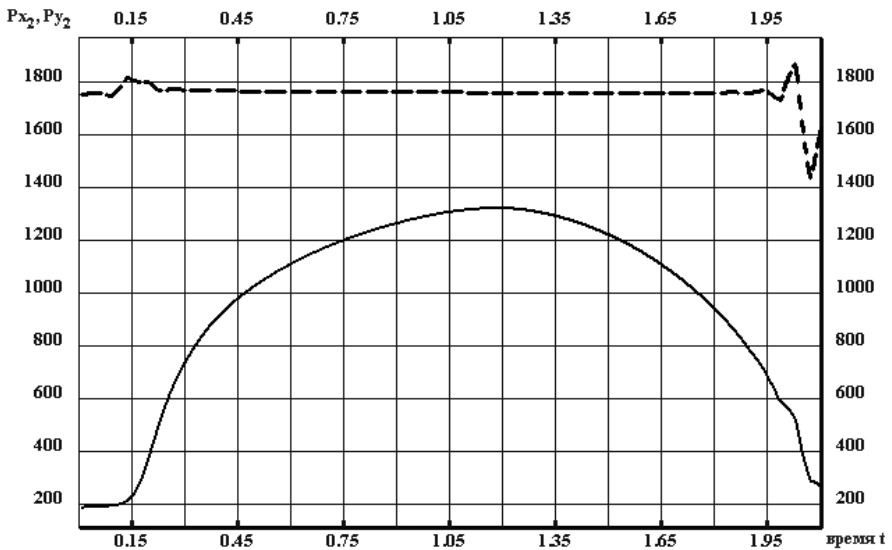


Рисунок 4

3. Предложен способ описания формы кулачка, основанный на сплайновом представлении его формы, удовлетворяющий требованиям задач кинематики и динамики.
4. Получены кинематические модели механизма подъема для двух кулачков. При этом в общем виде решена задача формирования аналитических зависимостей:
 - вертикального перемещения платформы от угла поворота кулачка;
 - угла между вертикалью и силой взаимодействия кулачка и ролика от угла поворота кулачка;
 - угла поворота кулачка от перемещения поршней первого и второго пневмоцилиндров.
5. Проведены кинематические расчеты перемещений, скоростей и ускорений платформы, углов между вертикалью и нормалью к кулачку в точке касания с роликом для двух кулачков при различных законах движения ведущего звена (поршня пневмоцилиндра 1), в том числе для закона движения, отвечающего решению задачи динамики.
6. Получены динамические модели механизма подъема для двух кулачков, для чего использованы результаты решения кинематических задач. Величина силы давления в пневмоцилиндре 1 считалась постоянной.
7. Проведены динамические расчеты механизма для второго кулачка, получены законы движения основных узлов механизма.
8. Проведена настройка используемого программного обеспечения для решения указанного круга задач.

Список литературы: 1. Артоболевский И.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. – М.: Гос. изд-во Физ. мат. лит-ры, 1959. – 1084 с. 2. Шаумян Г.А. Основы теории проектирования станков-автоматов и автоматических линий. – М.: Машгиз, 1949.

Поступила в редколлегию 03.05.2006

УДК 539.3

И.Д.БРЕСЛАВСКИЙ, ХНУ им. В.Н.Каразина;
К.В.АВРАМОВ докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

У статті знайдено нормальні форми системи з кубічною нелінійністю. Для дослідження їхньої стійкості використовуються рівняння у варіаціях.

The nonlinear normal modes of the system with cubic nonlinearity are studied. The variation equations are used to study stability.

1. Введение. Нелинейная динамика механических систем с несколькими степенями свободы до сих пор остается не решенным вопросом прикладной механики. С помощью теории нелинейных нормальных форм колебаний часто удается аналитически исследовать существенно нелинейные механические системы с несколькими степенями свободы. Эта теория развивалась в работах Розенберга, Маневича, Михлина, Вакакиса [1-3].

Новизна этой статьи заключается в том, что для исследования устойчивости используется модель, полученная после подстановки нулевого приближения по малому параметру в уравнения движения, то есть так называемая псевдоавтономная динамическая система.

2. Формулировка задачи. Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, представленную на рис. 1. Движение системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 = \varepsilon p(t); \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 + K_1(x_2 - x_1) + K_3(x_2 - x_1)^3 = 0,$$

где $p(t) = P \cos(\omega t)$. Динамическая система (1) при $\varepsilon = 0$ содержит две нелинейные формы колебаний:

$$x_2(x_1) = cx_1, \quad (2)$$

где $c = \pm 1$. Исследуются нелинейные формы при $\varepsilon \neq 0$. Они соответствуют вынужденным колебаниям системы. Для определения вынужденных колебаний

используется схема Раушера [2]. Тогда псевдоавтономная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 &= \varepsilon p(x_1); \\ \ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 + K_1(x_2 - x_1) + K_3(x_2 - x_1)^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

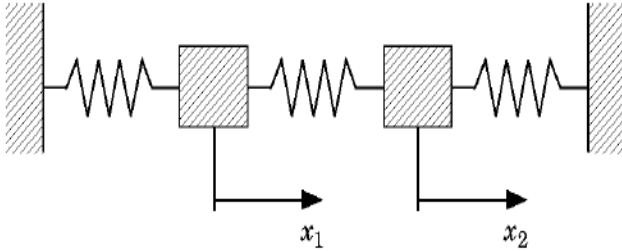


Рисунок 1 – Механическая система

В конфигурационном пространстве уравнения движения приобретают вид [2,3]:

$$\begin{aligned} -2\hat{x}_2 \left[\frac{(x_1^2 - X_1^2)(1 + K_1)}{2} + \frac{(x_1^4 - X_1^4)}{4} + \right. \\ \left. + \int_{x_1}^{x_1} (K_3(\xi - \hat{x}_2(\xi))^3 - K_1\hat{x}_2(\xi) - \varepsilon p(\xi)) d\xi \right] - \\ - \hat{x}_2'(x_1 + x_1^3 + K_1x_1 - K_1\hat{x}_2 + K_3(x_1 - \hat{x}_2)^3 - \varepsilon p(x_1)) + \\ + \hat{x}_2 + \hat{x}_2^3 - K_1\hat{x}_2 + K_3(\hat{x}_2 - x_1)^3 = 0. \end{aligned}$$

Нулевое приближение нормальной формы имеет вид

$$x_1(t) = X_1 cn(qt, k),$$

где $q^2 = 1 + K_1(1 - c) + (1 + K_3(1 - c^3))X_1^2$; $k^2 = \frac{(1 + K_3(1 - c^3))X_1^2}{2q^2}$; X_1 – амплитуда

колебаний. Введем обозначение $\varphi = am(qt, k)$. Так как возмущающая сила удовлетворяет условию $p(\pi + \varphi) = -p(\varphi)$, ее можно представить в виде ряда Фурье:

$$p(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \cos((2n+1)\varphi).$$

Перейдем от переменной t к φ :

$$\cos(\omega t) = \cos\left(\frac{\pi F(\varphi, k)}{2K(k)}\right);$$

$$A_n = \frac{4K(k)}{\pi^2} \int_0^\pi \cos(\psi) \left(am \left(\frac{2K(k)}{\pi} \psi \right) n \right) dn \left(\frac{2K(k)}{\pi} \psi \right) d\psi.$$

Воспользуемся следующим рядом Фурье [4]:

$$\begin{aligned} sn \left(\frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) &= \frac{2\pi}{kK(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{K'}{K}}}{1 - e^{-\left(2n+1\right)\pi\frac{K'}{K}}} \sin((2n+1)\psi), \\ sn^3 \left(\frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) &= \\ &= \frac{\pi}{4K^3 k^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\frac{K'}{K}} \left(4K^2(1+k^2) - \pi^2(2n-1)^2 \right)}{1 - e^{-\left(2n+1\right)\pi\frac{K'}{K}}} \sin((2n+1)\psi) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(\psi) sn \left(\frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) d\psi = \frac{\pi}{kK(k) sh \left(\frac{\pi K'(k)}{2K(k)} \right)}, \\ A_3 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi sn \left(\frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) \sin(\psi) d\psi - \frac{8}{3\pi} \int_0^\pi sn^3 \left(\frac{2K(k)\psi}{\pi} \right) \sin(\psi) d\psi = \\ &= \frac{\pi \left(2K^2(k)(k^2 - 2) + \pi^2 \right)}{6k^3 K^3(k) sh \left(\frac{\pi K'(k)}{2K(k)} \right)}. \end{aligned}$$

Нормальные формы представляются так:

$$x_2(x_1) = (c + \varepsilon a_1)x_1 + \varepsilon a_3 x_1^3 + \varepsilon a_5 x_1^5 + \dots \quad (5)$$

Применяя классическую процедуру метода нелинейных нормальных форм [3], получены коэффициенты нелинейной нормальной формы. На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики рассматриваемой системы.

3. Анализ устойчивости движений по Ляпунову. Так как $x_1(t) = X_1 cn(qt, k)$, то x_1/X_1 представим в виде ряда по $\cos((2n-1)\omega t)$; $n \in \mathbb{N}$. Амплитуды гармоник при $n = 2, 3, \dots$ малы. Приближенно можно считать

$$\frac{x_1}{X_1} = \frac{\pi}{kK(k) ch \left(-\pi \frac{K'(k)}{2K(k)} \right)} \cos(\omega t).$$

Тогда возмущающая сила может быть представлена так $p(x_1) = \frac{P(X_1)}{X_1} x_1$,

где $P(X_1) = kK(k)ch\left(-\pi \frac{K'(k)}{2K(k)}\right)\pi^{-1}$.

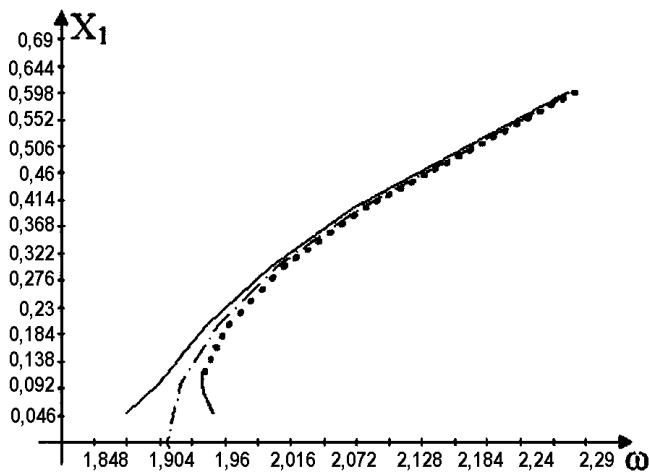
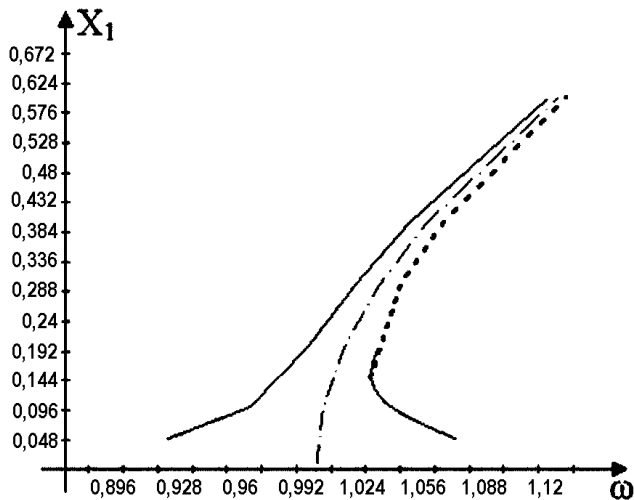


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика

Для дальнейшего анализа устойчивости систему (1) представим в векторной форме:

$$\dot{u} = f(u, t),$$

где $u \in R^4$. К переменной u добавим малое возмущение $\zeta(t)$. Эволюция с течением времени малых возмущений описывается уравнениями в вариациях:

$$\dot{\xi} = \frac{\partial f(u, t)}{\partial u} \xi. \quad (6)$$

Для оцінки устойчивости по Ляпунову рассчитывалась фундаментальная матрица $X(t)$, которая является решением системы (6) с начальными условиями $X(0) = E$. Решение фундаментальной матрицы в момент времени T является матрицей монодромии. По собственным значениям матрицы монодромии делается вывод об устойчивости колебаний $u(t)$. Если собственные значения по модулю меньше 1, то решение устойчиво по Ляпунову. Если хотя бы один мультипликатор больше 1, то решение неустойчиво.

Список литературы: 1. *Rosenberg R. M., Hsu C.S.* On the geometrisation of normal vibrations of nonlinear systems having many degree of freedom // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. – Киев, 1961. – С. 380-416. 2. *Маневич Л. И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М: Наука, 1989. – 280 с. 3. *Vakakis A., Manevich L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New York: Wiley Interscience, 1996. – 780 p. 4. *K.V.Avrarov, Yu.V.Mikhlin* Snap – through truss as an absorber of forced oscillations // Journal of Sound and Vibration. – 290 (2006). – P. 705-722.

Поступила в редколлегию 28.03.2006

УДК 669.018

О.О.БРЕСЛАВСЬКА, канд. техн. наук;
Ю.О.ЩУК, канд. техн. наук; НТУ «ХПІ»

РОЗРАХУНКИ ТА ПРОЕКТУВАННЯ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕРНЕТ-САЙТУ «МАРОЧНИК СТАЛЕЙ І СПЛАВІВ»

Стаття присвячена методиці використання спеціалізованого Інтернет-сайту, призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу та обробки даних про властивості металевих конструкційних матеріалів, у задачах розрахунку і проектування машинобудівних конструкцій.

The paper is devoted to the procedure of using the specialized Internet-site made for organization, saving, quick access and data processing of metal properties in the design and calculation of engineering structures.

Постановка проблеми. Є добре відомим, що специфіка проектно-конструкторських та розрахункових робіт у машинобудуванні дуже тісно пов'язана з необхідністю обробки та аналізу великої кількості експериментальних даних щодо фізичних, механічних, технологічних властивостей конструкційних матеріалів та їхнього хімічного складу. У теперішній час ці дані зосереджені у великій кількості довідників, виданих у різний час та, на жаль,

часто невеликим накладом. Вибір матеріалу з необхідними за умовами проекту властивостями часто перетворюється на достатньо складну задачу.

На сучасному етапі розвитку сучасних комп'ютерних технологій, таких, як бази й банки даних, web-програмування й інших з'являється можливість суттєво полегшати ці конструкторські операції шляхом створення спеціалізованого програмного засобу, призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу й обробки даних щодо властивостей конструкційних матеріалів. Широке розповсюдження Internet-технологій дозволяє спроектувати таку програму як web-сайт, що надасть можливість постійного оновлення інформації з метою її миттєвої доступності для усіх користувачів.

Аналіз стану проблеми. Швидкий розвиток інформаційних технологій не обійшов й металургійну галузь. За даними рейтингових програм, на теперішній час тільки у російськомовному Інтернеті налічується більш 800 спеціалізованих ресурсів, пов'язаних з металургійною тематикою. Однак практично всі вони носять рекламно-інформаційний характер: у першій, найбільш поширеній групі, Інтернет-сайти побудовано у формі описів відповідних підприємств галузі з переліком продукції, що випускається. Друга група представляє собою комерційні «дошки об'яв» з інформацією щодо запитів та пропозицій металопрокату й подібної продукції.

У той же час у всесвітній сеті відсутні програмні продукти, які містять можливість швидкого отримання інформації щодо фізико-механічних, технологічних й інших властивостей сталей і сплавів, які використовуються для виготовлення різноманітних машинобудівних конструкцій.

Мета роботи. Метою проведених співробітниками різних кафедр інженерно-фізичного факультету Національного технічного університету «ХП» робіт було створення спеціалізованого Інтернет-сайту, призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу й обробки даних щодо властивостей конструкційних матеріалів [1,2]. Створена програма може бути застосована інженерами, конструкторами, технологами й іншими спеціалістами у галузі машинобудування й металургії. Крім того, на сайті передбачено можливість заповнення бази даних зі структури продукції, що поставляється різними підприємствами металургійної галузі зі швидким виведенням на екран за запитом користувача відповідних властивостей виробів та заготовок, що поставляються.

Опис програми. Комп'ютерна програма «Марочник сталей та сплавів» є web-сайтом, який створено за допомогою серверної мови створення сценаріїв – PHP 4 зі вбудованої підтримкою системи управління та розробки баз даних (СУРБД) MySQL. Операційна система – Windows 98 та вище чи Linux. Сервер – Apache.

Передбачено можливість додавання у «Марочник» відомостей щодо виробників матеріалів, а також даних про призначення, замітники, види постачання, хімічний склад, температури критичних точок матеріалів, їхніх фізич-

них, механічних й технологічних властивостей, введення констант до законів, які описують деформування й руйнування матеріалів. Програма призначена для інженерів, конструкторів, технологів та інших фахівців у галузі машинобудування та металургії.

У процесі роботи з «Марочником сталей і сплавів» є можливість :

- знайти матеріал за назвою (за маркою матеріалу) ;
- тематично продивитись усі матеріали, які містяться у «Марочнику»;
- скласти запит шляхом вибору з «Марочнику» матеріалів за видом постачання й класифікації;
- продивитись список підприємств, а також обрати підприємства у залежності від продукції, що постачається.

Для підприємств передбачено можливість скласти перелік особистої продукції.

У «Марочнику» наведено наступні фізичні властивості матеріалів (в залежності від температури випробувань): модуль пружності першого роду; коефіцієнт температурного (лінійного) розширення (діапазон 20 °С – температура випробувань T); коефіцієнт теплопровідності (теплоємність матеріалу); питома вага матеріалу; питома теплоємність матеріалу (діапазон 20 °С – температура випробувань t); питомий електричний опір.

Механічні властивості наведено при 20 °С (в залежності від режиму термообробки, сортаменту, розмірів, напрямку вирізки зразку тощо). До них відносяться: границя короточасної міцності; границя пропорційності (умовна границя течіння для остаточної деформації) , відносне подовження при розриві; відносне зменшення поперечного розміру зразку; ударна в'язкість.

Відбито наступні технологічні властивості: характеристики зварювемо-сті; флокочутливість; здатність до відпускнуї крихкості.

«Марочник» оснащений спеціальним металургійним калькулятором, який дозволяє у інтерактивному режимі проводити розрахунки вагових, геометричних та інших характеристик арматури, труб, швелерів та усієї іншої номенклатури постачання металургійних підприємств.

Інтернет-сайт «Марочник сталей і сплавів» замінює довідники та збірки стандартів, допомагає прийняти безпомилкове рішення. Він дозволяє вирішити проблему знаходження аналогів закордонних марок сталей та сплавів як за властивостями , так й за хімічним складом.

Інтерфейс сайту є стандартним для WEB-програм, усі дії, що перелічені вище, є доступними з меню сайту, розміщеного горизонтально в верхній частині сторінки.

Приклад роботи програми. Наведемо опис типових дій інженера-конструктора при виконанні проектних робіт. Наприклад, за умовами завдання необхідно знайти конструкційну сталь, у якій модуль Юнга не перевищує $2.2 \cdot 10^6$ Мпа та питома вага не перевищує 7500 кг/м^3 . Після завантаження Інтернету та «Марочника сталей і сплавів» (за адресою <http://www.splav.kharkov.com>) необхідно обрати пункт головного меню

«Пошук» та вибрати його тип – за хімічним складом (звичайний чи розширений), за фізичним чи механічними властивостями. У випадку, що розглядається, необхідно обрати пошук за фізичними даними. Вікно вибору необхідних властивостей наведено на рис. 1.

Поиск по физическим свойствам материала

Область поиска:

Температура, при которой получены данные свойства	T	<input type="text" value="весь диапазон темп."/>	Град
Модуль упругости первого рода	E 10⁶	<input type="text" value="<= 22"/>	МПа
Коэффициент температурного (линейного) расширения	α 10⁶	<input type="text" value=""/>	1/Град
Коэффициент теплопроводности (теплоемкость материала)	λ	<input type="text" value=""/>	Вт/(м·Град)
Плотность материала	ρ	<input type="text" value="<= 7500"/>	кг/м ³
Удельная теплоемкость материала	C	<input type="text" value=""/>	Дж/(кг·град)
Удельное электросопротивление	R	<input type="text" value=""/>	Ом·м

Рисунок 1 – Типова форма пошуку

Обирається необхідна область пошуку – у даному випадку «Конструкційні матеріали» та задаються границі для пошуку.

Результати проведеного пошуку наводяться на рис. 2. За вибіркою бази даних «Марочнику» визначено, що існує дві конструкційних сталі, що задовольняють встановленим вимогам. Це конструкційна вуглецева якісна сталь 55 та конструкційна легована сталь 50Г2.

Далі можна активізувати посилання за маркою сталі та ретельно продивитись усі її властивості, а при необхідності повторити пошук за уточненими вимогами.

Поиск.

Произведен поиск материалов, которые соответствуют критериям:

Область поиска: Сталь конструкционная

Температура, при которой получены данные свойства	весь диапазон температур
Модуль упругости первого рода	E 10⁶ <= 22 МПа
Плотность материала	ρ <= 7500 кг/м³

Число найденных материалов = 2

Сталь конструкционная углеродистая качественная (1)
<ul style="list-style-type: none"> • 55
Сталь конструкционная легированная (1)
<ul style="list-style-type: none"> • 50Г2

Рисунок 2 – Результати пошуку

Висновки. У статті наведено опис спеціалізованого Інтернет-сайту «Марочник сталей і сплавів», призначеного для організації, зберігання, швидкого доступу й обробки даних щодо властивостей металевих конструкційних матеріалів. Програму розроблено для інженерів, конструкторів, технологів й інших спеціалістів у галузі машинобудування. Наведено опис типових дій інженерів при проектуванні за допомогою «Марочнику».

Список літератури: 1. *Бреславська О.О., Бреславський Д.В.* Комп'ютерна програма «Марочник статей та сплавів» // ОБ Державного Департаменту інтелектуальної власності МОН України «Авторське право і суміжні права». Свід. № 7533, Україна, 08.05.2003. – Київ, 2003. – № 3. – С. 317. 2. *Бреславський Д.В., Бреславская Е.А.* Специализированный Интернет-сайт «Марочник статей и сплавов» // Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве. Труды 8-й Международной научно-технической конференции, 9-10 декабря 2003 г. – Харьков, ХНПК «ФЭД», 2003. – С. 147-148.

Поступила до редколегії 20.03.2006

УДК 539.3

Д.В.БРЕСЛАВСЬКИЙ, докт.техн.наук; **О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ**,
докт.техн. наук; **О.А.ТАТАРІНОВА**; НТУ «ХП»

АНАЛІЗ ДЕФОРМАЦІЙ І НАПРУЖЕНЬ РЕТЧЕТІНГУ ПРИ БАГАТОЦИКЛОВОМУ ДЕФОРМУВАННІ ЗАЛІЗНИЧНИХ РЕЙОК

Стаття присвячена викладу методу розрахунку напружено-деформованого стану залізничних рейок з урахуванням циклічності впливів від минаючих потягів. Для рейки, яка розглядається як балка на пружній основі, розрахунки виконані з використанням раніше запропонованих авторами визначальних рівнянь для складного багатоциклового деформування. Приведені результати аналізу перерозподілу напружень.

The paper is devoted to the method for strain-stress state determination of railroad rails considering the cyclical character of train's influence. The calculations were performed for the rail, which considers as a beam on the elastic basement, by use of the constitutive equations had been suggested by the authors. The results of stress redistribution are presented.

1. Стан та актуальність теми. Для багатьох конструкцій експлуатаційні умови сприяють так званій втомі, яку у більшості розуміють як втрату робочих якостей чи здатності до функціонування після тривалої роботи без перерви. Іноді термін «втома» відноситься до тимчасового режиму, коли міцність відновлюється після деякої перерви в роботі (релаксації), а, також, може застосовуватися до довготривалих станів, у яких міцність не відновлюється ніколи. Безпосередній вплив втоми може здаватися не суттєвим, але якщо деформування повторюється увесь час, то робочі якості знижуються і, зрештою, можуть бути цілком утрачені, як це притаманно металам. Тому втома - це процес, що є незворотнім і який може, у кінцевому рахунку, привести до руйнування, таким як зламні залізничні рейки, загублені зуби в шестірнях, тріснутий вал двигуна вертольота, негерметичність корабельного дна і т.п. Для того щоб трапилась аварія, немає необхідності в надзвичайно складних умовах, за умов квазістатичного навантаження конструкції могли витримати і великі навантаження. Однак звичайною властивістю конструкцій є те, що вони можуть знаходитися в експлуатації значну частину їхнього проектного ресурсу.

су. Увесь час вони повторно піддаються зовнішньому впливу, день у день, рік за роком. Кожен період впливу вносить незначний, але незворотний внесок у процес втоми. Це може трапитися, якщо навіть усі викликані зовнішнім навантаженням напруження, безсумнівно, знаходяться в лінійної, пружний області, набагато нижчої за межу міцності матеріалу.

Основними зовнішніми впливами, що ведуть до втомного руйнування, є циклічні, тобто періодично змінюванні сили, вони вносять відповідні компоненти внутрішніх циклічних напружень. Сили такого роду зазвичай присутні в обертових механізмах, застосованих в автомобілях і верстатах.

У XIX-му столітті в перших паровозах відбувалися катастрофічні втомні руйнування. У зв'язку з цим, німецький залізничний інженер А. Велер (A. Woehler) провів перші систематичні лабораторні іспити на втому (приблизно 1860 р.). Втомні руйнування були також досліджені на сталевих тонкостінних конструкціях, таких як мости й опори, що часто піддані коливанням викликаним вітром і іншими факторами навколишньої середовища. У морських спорудженнях дія хвиль – це основне джерело втомних ушкоджень, проблема стала більш гострою з появою цілком зварених сталевих корпусів суден. Зварені з'єднання виявилися особливо чутливі до втоми. Однією з основних причин цього є більша імовірність того, що з'єднання містять неоднорідності, такі як включення, порожнини, шорсткстість поверхні й інші відомі фактори, що впливають на зародження тріщин. Другою причиною є те, що нагрів й охолодження під час зварювання веде до високих залишкових напружень, що ведуть до збільшення швидкості росту тріщин і ушкоджень.

Втомне руйнування припускає поділ на три етапи. На початковому етапі, чи етапі зародження, з'являються мікро-тріщини. На етапі росту тріщин, тріщини ростуть зі збільшенням швидкості під дією періодичних зовнішніх сил. На етапі руйнування, конструкція спонтанно руйнується, тому що поперечний перетин, що залишився, занадто малий для протидії зовнішнім силам. Раніше представлений початковий етап віднімає частина втомного ресурсу конструкції, від 50 до 75 %. Однак, більш точні дослідження на мікроскопічному рівні показали, що мікро-тріщини з'являються вже після вироблення 1 % ресурсу. До того ж, невеликі поверхневі дефекти, що виступають у ролі джерел зародження тріщин, уже можуть бути присутніми при постачанні виробу виробником.

Зазвичай розрізняють мало-циклову і багато-циклову втомність. При мало-цикловій втомі, остаточне руйнування відбувається примітно після сотні циклів і менш. При багато-цикловій втомі, руйнування відбувається після сотень циклів.

Існують різні підходи до прогнозування втомного ресурсу. З них поширено два, а саме, метод Палмгрена-Майнера (Palmgren-Miner), заснований на емпіричних S-N кривих і метод механіки руйнування, заснований на теорії Париса-Ергодана (Paris-Ergodan) з емпіричними da/dt кривими (a – розмір тріщини) [1]. Метод Палмгрена-Майнера призначено щодо прогнозування усього ресурсу елемента, включно як початковий етап, так і фазу розповсюдження. Метод механіки руйнування призначено щодо прогнозування поши-

рення вже існуючої тріщини.

Роботу присвячено створенню нового підходу щодо опису багатоциклової втоми та розрахунків деформацій та напружень в залізничних рейках, які циклічно деформуються з накопиченням незворотних деформацій. Модель рейок прийнято відповідною поперечного згину при циклічному навантаженні вільно обпертій балки на суцільній двосторонній пружній основі.

2. Постановка задачі та метод її розв’язування. Метою даної роботи є створення моделі, методу й алгоритму розрахунку деформацій та напружень в залізничних рейках, які циклічно деформуються з накопиченням незворотних деформацій. Добре відомо, що деформування залізничних рейок є циклічним процесом, що має дві складові, перша з яких змінюється повільно (вплив кожного потягу та добових коливань температури), а друга – швидко (її наявність обумовлена контактними напруженнями й високочастотними вібраціями залізничних рейок від взаємодії з колесами вагонів).

Типову зміну напруження в точці залізничної рейки, відповідно до найбільш послаблюючого циклу, наведено на рис. 1, а), де σ_a , σ_m – амплітудна та середня складові циклу, T_n^1 – час дії циклу (еквівалентна тривалість проходження потягів, яка приймається по найбільш впливовому типу потягу), T_n – еквівалентний термін у графіку часу проходження потягів. Еквівалентний цикл за умов нехтування релаксаційними процесами за час T_n можна прийняти безперервним, як наведено на рис. 1, б).

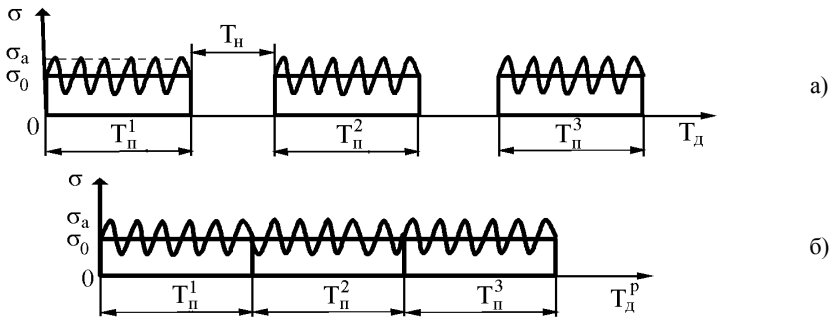


Рисунок 1

Далі приймаємо, що складова σ_m обумовлена статичним напруженням в точці поверхні рейки, а складову σ_a в цій точці визначимо за розв’язанням задачі про вимушені коливання залізничної рейки, при рухомій силі від дії колеса потягу.

За умов дії такої програми навантаження на поверхні залізничної рейки відбувається незворотне деформування унаслідок наклепу або так званого механізму «ретчетінгу» (Ratcheting) [1].

Як показано на рис. 2, ці деформації супроводжуються поступовим зростанням пластичної течії (наклеп) або за рахунок ретчетінгу (циклічна повзучість, кожний цикл напруження додасть більшу кількість пластичної деформації) та накопичуються від кожного проходу коліс. Можливості наклепу є лімітованою і коли її межа вичерпана може розвиватися ретчетінг, що ілюстровано на рис. 2.

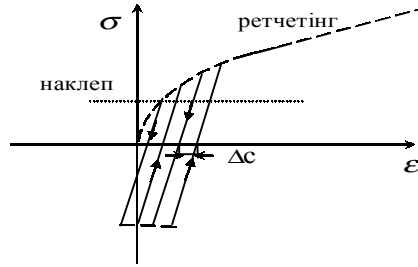


Рисунок 2

За феноменологічними даними процес ретчетінгу східний до циклічній повзучості, що дозволяє використати теорію циклічної повзучості, викладену у роботах [2, 3], для практичних інженерних розрахунків ретчетінгу залізничних рейок. Загальним для цих процесів є те, що в обох випадках відкликом матеріалу на циклічне навантаження є зростання рівня незворотних деформацій. Алгоритм щодо розв'язання задачі довготривалої міцності при циклічній повзучості можна застосовувати у розрахунках циклічного деформування з урахуванням механізму ретчетінгу залізничних рейок.

Для опису поведінки матеріалу застосуємо рівняння стану ретчетінгу, ототожнив них з відомими із [4] для циклічної повзучості, які у випадку спільної дії циклічних навантажень з великими та низькими частотами мають вид:

$$\dot{\sigma}_0 c_0^\alpha = \mathbf{B} \sigma_{2c}^n; \quad (1)$$

$$\sigma_{2c} = \langle \sigma \rangle = g_1 g_2 \sigma_0,$$

де $\dot{\sigma}$ – швидкість приросту деформації ретчетінгу за цикл навантаження,

$$g_1 = \left(\int_0^1 \left(1 + D \left(\frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi k \xi) \right) \right)^n d\xi \right)^{\frac{1}{n}}; \quad D = \frac{\sigma_D}{\sigma_0};$$

$$g_2 = \left(\int_0^1 (1 + A_2 \sin(2\pi \xi))^n d\xi \right)^{\frac{1}{n}}; \quad A = \frac{\sigma_a}{\sigma_0 g_1};$$

σ_a, σ_0 – амплітудне та статичне напруження.

Для програми навантаження, зображеної на рис. 1, б), функція $g_1 = 1$. Для визначення функції g_2 розглянемо рейку як нескінчену балку з перерізом у вигляді двотавру. При розрахунках за теорією згину балок та нехтуванні дотичними напруженнями коефіцієнт асиметрії циклу напруження – A визначається як відношення амплітудного напруження, визначеного за розв'язком задачі вимушених коливань, до статичного напруження, визначеного за розв'язком задачі згину балки під дією колеса потягу. В розрахунках приймалось, що на рейку діє 70 тон.

Після розв'язування задачі про поперечний згин вільно обпертої балки на суцільній пружній основі, жорсткістю k_p , що відповідає розташуванню під балкою великої кількості близько розташованих, не зв'язаних між собою, пружин (рис. 3) [5], знаходимо, що максимальне напруження дорівнює 77,1 МПа в точці поверхні залізничної рейки в перерізі, де діє максимальний момент 8412,5 Нм.

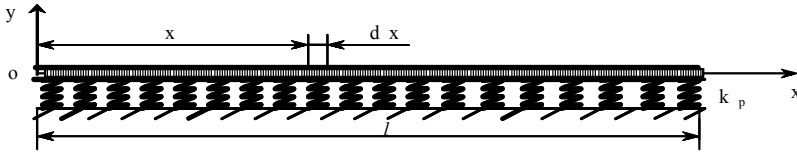


Рисунок 3

Розв'язуванням задачі про вимушені коливання [5] при дії на вільно обперту балку двотаврового поперечного перерізу, що лежить на суцільній пружній основі, рівномірно розподіленої поперечної сили з інтенсивністю $Q(t) = q_0 \sin(\omega t)$, встановлені дані про спектр частот та визначені амплітудні напруження для моменту часу, рівного одній четвертій періоду вимушених коливань. Проведемо аналіз навантаження q_0 так, щоб коефіцієнт асиметрії циклу напружень A дорівнював для звичайного режиму 0,1; 0,3 та 0,5. Тоді навантаження q_0 приймемо рівними 490 Н/м, 980 Н/м та 1225 Н/м відповідно.

Перша кругова частота балки $p_1 = 77,41 \text{ с}^{-1}$.

Амплітудні напруження для режиму, коли частота вимушених коливань $f = 3 \text{ Гц}$, дорівнюють $\sigma_a = 5,93; 23,77; 37,15 \text{ МПа}$, а для режиму, коли частота вимушених коливань $\omega = 0,55 p_1$ ($f = 6,75 \text{ Гц}$) – $\sigma_a = 10,81; 43,25; 67,59 \text{ МПа}$.

Знайдені значення амплітудних та середніх напружень мають бути застосовані для визначення функцій g_1 та g_2 у рівняннях стану (1).

Використовуючи наближений метод визначення несталої деформації ретчетінгу за схемою запропонованою Л.М. Качановим [6], вирішувалась задача циклічного деформування при чистому згині балки двотаврового поперечного перерізу, яка розташована на суцільній пружній основі. Напружений стан у всіх точках бруса одновісний, отже, питома потенційна енергія деформації може бути представлена у виді

$$U = \sigma^2/2E.$$

Тоді

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\sigma}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (2)$$

Обмежимося розглядом закону (1), приймаючи $g_1 = 1, n = 3$.

Використовуючи аналітичну залежність швидкості деформації пластичності від напруження та часу (1), додаткове розсіювання для задачі, що розв'язується, буде таким:

$$\Lambda = \frac{B}{4}(\sigma^4 + 3\sigma_a^2\sigma). \quad (3)$$

Підставляючи співвідношення (2) і (3) у формулу для додаткової потужності деформації, запропонованою Качановим, одержуємо

$$W = \frac{\sigma}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{B}{4}(\sigma^4 + 3\sigma_a^2\sigma^2). \quad (4)$$

Прийmemo нормальне напруження σ у формі:

$$\sigma = \sigma' + \chi(\sigma'' - \sigma'), \quad (5)$$

де σ'_{ij} – напруження в межах пружності;

σ''_{ij} – напруження, обчислені в припущенні сталої повзучості;

$\chi = \chi(t)$ – функція часу.

У розглядаємій задачі в межах пружності напруження буде дорівнювати

$$\sigma' = \frac{My}{J_x}, \quad (6)$$

а в умовах усталення перерозподілу σ'' визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{M|y|^{n-1}}{J_{nx}} y, \quad (7)$$

де M – максимальний момент, узятий зі статичного розрахунку згину балки на суцільній пружній основі;

J_x – момент інерції двотаврового перерізу,

$J_{nx} = \int_F |y|^{\frac{n+1}{n}} dF$ – узагальнений момент інерції.

Підставляючи вираження (6) і (7) у формулу (5), одержуємо

$$\sigma = \frac{My}{J_x} + \chi \left(\frac{My^{\frac{1}{n}}}{J_{nx}} - \frac{My}{J_x} \right). \quad (8)$$

Тоді додаткова потужність деформації прийме вид

$$W = \frac{M^2}{E} \left(\frac{y}{J_x} + \chi \left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{J_{nx}} - \frac{y}{J_x} \right) \right) \left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{J_{nx}} - \frac{y}{J_x} \right) \frac{d\chi}{dt} + \frac{BM^4}{4} \left(\frac{y}{J_x} + \chi \left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{J_{nx}} - \frac{y}{J_x} \right) \right)^4 + \frac{3BM^2\sigma_a^2}{4} \left(\frac{y}{J_x} + \chi \left(\frac{y^{\frac{1}{3}}}{J_{nx}} - \frac{y}{J_x} \right) \right)^2. \quad (9)$$

Підставляючи (9) в співвідношення для додаткової потужності деформації всього тіла, додаткова потужність деформації балки для двотаврового поперечного перерізу приймає наступний вид:

$$\tilde{W} = 2ld \int_0^{\frac{h-t}{2}} Wdy + 2lb \int_{\frac{h-t}{2}}^{\frac{h}{2}} Wdy . \quad (10)$$

Використовуючи умову мінімуму додаткової потужності і проводячи диференціювання та чисельне інтегрування, знаходимо на кожному кроці функцію часу χ , пораховану для двох режимів у випадку статичного ($\sigma_a = 0$) та циклічного навантаження для двох раніше обчислених значень σ_a .

3. Висновки та аналіз розрахунків. В даній статті створені математична модель та алгоритм розрахунків щодо визначення перерозподілу напруження ретчетінгу в залізничних рейках. Для їхнього застосування створені окремі допоміжні програмні засоби, що дозволило виконати розрахункові дослідження для встановлення закономірностей деформацій та напружень ретчетінгу в залізничних рейках. Так, наприклад, для сталюї балки довжиною $l = 20$ м аналізувалось 2 режими вимушених коливань: перший, коли частота вимушених коливань $f = 3$ Гц, зі значеннями коефіцієнту асиметрії циклу напружень 0; 0,1; 0,3; 0,5 та другий, коли частота вимушених коливань $\omega = 0,55$ р₁ = 42,4 с⁻¹ ($f = 6,75$ Гц), зі значеннями коефіцієнту асиметрії циклу напружень 0; 0,2; 0,6; 0,9.

На рис. 4 представлений графік функції $\chi = \chi(t)$ для звичайного режиму, де $B = 2 \cdot 10^{-31}$ Па⁻³ / с, крива -1 відповідає значенню $\sigma_a = 0$ МПа, 2 – $\sigma_a = 23,77$ МПа, 3 – $\sigma_a = 37,15$ МПа. На рис. 5 наведено графік релаксації максимального напруження у балці для різних значень амплітудної складової напруження. Аналіз результатів показує, що у розглянутих прикладах зі збільшенням коефіцієнту асиметрії циклу напружень швидкість релаксації напружень ретчетінгу теж збільшується (рис. 5).

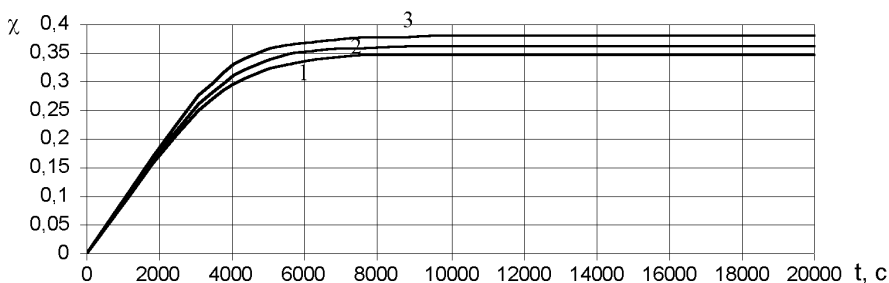
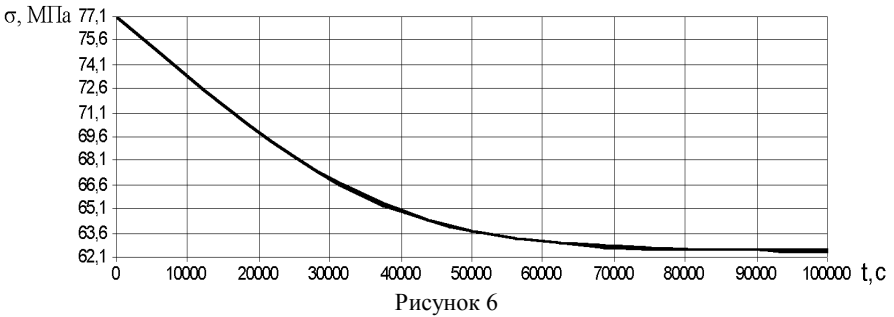
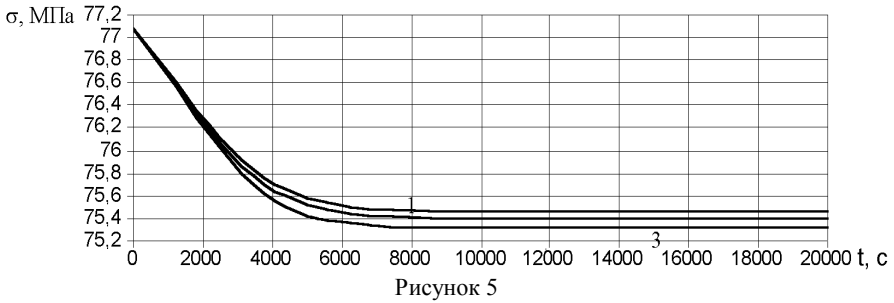


Рисунок 4

Для другого режиму, коли частота вимушених коливань дорівнює 6,75 Гц, вигляд функції $\chi = \chi(t)$ та епюри напружень для $\sigma_a = 10,81$ МПа аналогічні звичайному режиму, але швидкість деформування та релаксації більше.

Подібні розрахунки були проведені для матеріалу рейки з іншими влас-

тивостями ретчетінгу ($B = 2 \cdot 10^{-34} \text{ Па}^{-3} / \text{с}$, $n = 3$, $\sigma_a = 67,59 \text{ МПа}$). Рис. 6 містить результати розрахунку релаксації напружень для цього випадку.



Результати чисельно-аналітичного моделювання ретчетінгу у залізничних рейках свідчать, що його урахування може істотно уточнити дані для аналізу довготривалої міцності.

Список літератури: 1. *Eden K.* Railway vehicle and track system integration // The University of Birmingham and Manchester Metropolitan University Rail Deterioration Project TRAINS TR0421HCE003, 2003. – 27 p. 2. *Breslavsky D., Morachkovsky O.* New experiments in dynamic creep // Proc. 15th Symp. on Experimental Mechanics of Solids. – Warsaw: Warsaw Techn. Univ. – 1992. – P. 29-31. 3. *Breslavsky D., Morachkovsky O.* Cyclic creep constitutive equations with consideration of creep - fatigue interaction // Proc. of 1st International Conference on Mechanics of Time Dependent Materials. – Bethel: SEM. – 1995. – P. 61-66. 4. *Бреславский Д.В., Морачковский О.К., Уварова О.А.* Метод асимптотических разложений в задачах мало – и многоциклового ползучести материалов // Вісник НТУ «ХП». Збірник наукових праць. – Харків: НТУ «ХП». – 2004. – Вип. 19. – С. 23-32. 5. *Тимошенко, Янг, Уивер* Теория колебаний в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с 6. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности. – М., «Машиностроение», 1975. – 400 с.

Надійшла до редакції 12.04.2006

Ю.С.ВОРОБЬЕВ, докт.техн.наук; **В.П.ГОШКОДЕРЯ**, канд.техн.наук;
А.Н.ЦЫБА; ИПМаш НАН Украины

РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕЖЛОПАТОЧНЫХ СВЯЗЕЙ

Досліджена залежність частот різних форм коливань від розміщення одного міжлопаткового зв'язку. Дослідження ведеться в інтерактивному режимі. Комплекс програм відрізняється достатньою повнотою даних, простістю обслуговування та високою швидкістю розрахунків. Методика дозволяє ефективно здійснити відстроювання від резонансних режимів та досягти мінімальних утрат ККД від установки міжлопаткових зв'язків.

The dependence of different oscillation mode frequencies on the position of one blade link is investigated. Investigation is carried out in the interactive mode. The package of programs is distinguished by sufficient completeness of data, straightforward servicing, and high speed. The technique allows for effective offsetting from resonance regimes and ensure minimal efficiency loss when installing blade links.

Введение. Надежная работа лопаточного аппарата определяется механическими свойствами материала лопаток и бандажных связей, качеством их изготовления и облопачивания. Безаварийная и экономичная работа лопаток в паровой турбине во многом также зависит от напряженного состояния и, следовательно, степени отстройки их от опасных резонансных колебаний. Для снижения уровня напряжений в лопатках, а также для повышения возможности их вибрационной отстройки на диске рабочие лопатки скрепляются бандажными связями. Соединение лопаток с бандажами осуществляется: жесткими связями с помощью приклепанной ленты или припаянных проволок круглого и трубчатого сечения; свободными так называемыми демпферными связями с непаяными проволоками различной формы; комбинированными связями из жестких и непаяных или частично паяных бандажей и др.. Следует отметить, что в настоящее время все более широкое применение находят связи типа «полка», которые стыкуются между собой с различной степенью натяга. Такой широкий класс бандажных связей применяется на основании опыта, экспериментальных и расчетных исследований. Однако, практика требует обоснованного выбора соответствующей схемы бандажирования и сравнительной ее оценки. При этом наиболее существенными критериями оценки облопачивания является степень отстройки и экономичность ступени. Известно, что введение в проточную часть межлопаточных связей снижает КПД ступени [1], но может улучшить вибронпряженное состояние. В связи с этим актуальной является проблема тщательного анализа необходимости установки их в проточной части. И, если такая необходимость установлена, то так же тщательно выбирать расположение, конструкцию и материал, из которого они изготавливаются.

1. Постановка задачи. Комплекс программ, разработанный в ИПМаш НАН Украины, позволяет осуществлять анализ конструктивных схем облопачивания [2]. Эти схемы включают единичные лопатки, лопатки с бандажными

связями различных типов, диск с пакетами или с венцом лопаток. Основная проблема состоит в том, чтобы добиться качественной отстройки от резонансных режимов в соответствии с нормативными документами. При этом должны быть подобраны такие параметры межлопаточных связей, которые в наименьшей степени снижают экономичность ступени.

На рис. 1 показана схема модифицированного комплекса программ. С его помощью возможно не только осуществлять выбор конструктивных схем облапачивания, но и находить наиболее приемлемые, рациональные, параметры бандажных связей на основе предварительных исследований их влияния на спектр частот свободных колебаний. Расчеты ведутся в интерактивном режиме. Это позволяет легко изменять параметры расчетной модели, корректировать направление поиска и управлять качеством отстройки. Математическая модель лопатки построена на основе технической теории закрученных стержней, диска – на основе теории круглых толстых пластин. Математические модели бандажных связей и методика решения подробно изложены в работе [3].

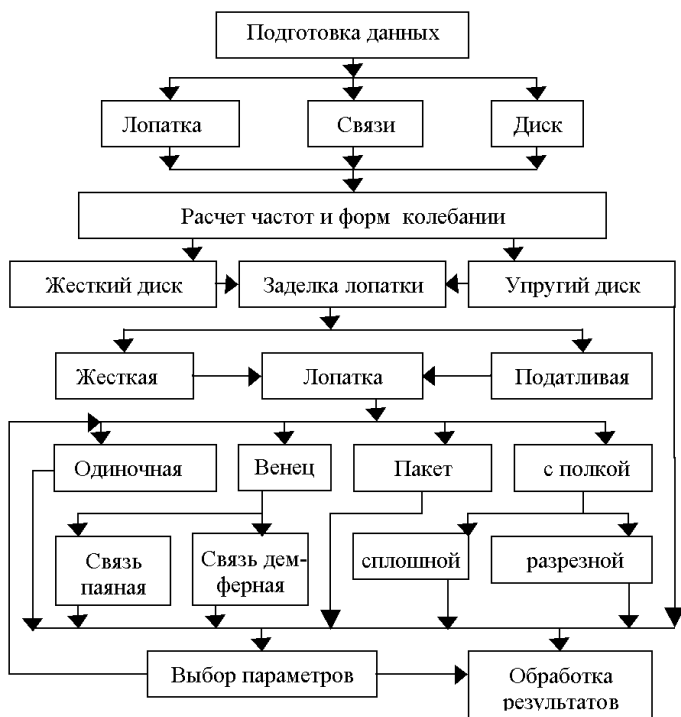


Рисунок 1 – Блок-схема комплекса программ расчета рабочих колес паровых турбин на колебания

2. Метод решения. Задача в наиболее общем виде может быть представлена

следующим образом [4]. Пусть существует исходная модель облопачивания. Можно допустить, что наилучшим условием настройки собственной частоты колебаний ω_i , $i = 1, 2, \dots, p$ является равная удаленность от ближайших значений частот нижних и верхних гармоник возмущающих сил при данной частоте вращения ротора Ω_p . Такое значение частоты обозначим ω_i^0 , $i = 1, 2, \dots, p$ и выражение для его определения можно записать в следующем виде [4, 5]

$$\omega_i^0 = (\bar{\omega}_i + \overline{\bar{\omega}}_i) / 2 \pm \varepsilon. \quad (1)$$

где $\bar{\omega}_i$ – нижняя граница допустимых значений частоты ω_i^0 ; $\overline{\bar{\omega}}_i$ – верхняя граница допустимых значений частоты ω_i^0 ; ε – некоторое допустимое значение отклонения от требуемого значения, которое определяется исходя из анализа нормативных документов на отстройку.

Если предположить, что $\bar{\omega}_i = K_i \Omega_p$, а $\overline{\bar{\omega}}_i = (K_i + 1) \Omega_p$, то в качестве целевого значения собственной частоты, используя (1), можно записать [4, 5]

$$\omega_i^0 = K_i \Omega_p \pm (\Omega_p / 2 + \varepsilon), \quad (2)$$

где K_i – номер гармоники, от которой следует осуществить отстройку.

3. Результаты численных экспериментов

Выбор параметров связей, например изменение положения, осуществляется в интерактивном режиме. При этом положение точки $k+1$ определится через значения частот в точке k .

Таким образом, имея на экране монитора изображение лопатки с числом связей равным n , их параметры и значения частот, мы можем легко определить направление поиска. Интерактивный режим позволяет изменять шаг поиска и добиваться наиболее качественной отстройки. Достоинством такого подхода является то, что, передвигая на экране монитора мышкой или щелчком клавиши межлопаточные связи в определенном направлении, мы здесь же получаем соответствующий результат и осуществляем его оценку.

Проведем исследование по выбору положения связи в интерактивном режиме для системы типа «диск с венцом лопаток». Рассмотрим лопатку длиной $l = 84$ см. Предположим, что для венца лопаток необходимо подобрать из всех возможных такое расположение связи, которое удовлетворяет условиям отстройки от резонанса по нескольким формам колебаний.

На рис. 2 показана зависимость спектра частот восьми форм колебаний от положения связи при ее перемещении в направлении от корневого сечения к периферийному.

На рис. 2, а представлены исследования влияния на спектр собственных частот положения замкнутой на круг связи для невращающейся лопатки, а на рис. 2, б – результаты для лопатки, которая вращается с угловой скоростью $\Omega = 3000$ об/мин. Положение связи относительно корневого сечения предварительно менялось с шагом 5 см в направлении от корневого сечения лопатки к периферии и обратно. После определения зоны, близкой к наиболее благоприятным значениям, шаг поиска уменьшается, а сам поиск возобновляется для найденной зоны. Легко

установить, что наибольших значений первых пяти частот мы можем достичь при расположении связи на расстоянии 74,5 см от корневого сечения лопатки.

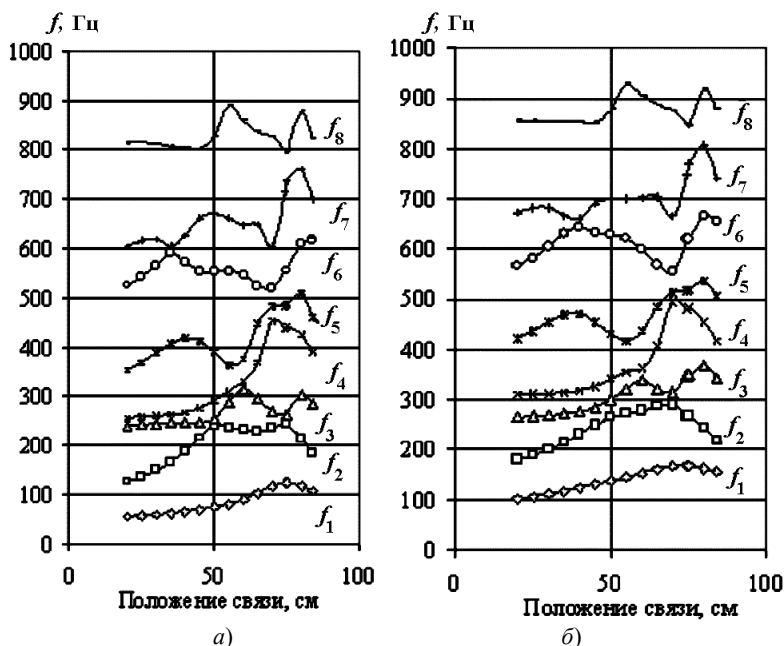


Рисунок 2 – Венец с одной связью, $m = 3$: а) $\Omega = 0$ об/мин; б) $\Omega = 3000$ об/мин

Выводы. Проведенные исследования подтверждают высокую эффективность расчетного комплекса и простоту его обслуживания. Поиск решения осуществляется при минимальных затратах времени на настройку существующих исходных данных для решения конкретной задачи. Основным преимуществом является возможность осуществлять решения самых различных задач «пересчета» [2] с визуальным контролем исходных параметров и результатов расчетов.

Список литературы: 1. Левин А.В. Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин / А.В.Левин, К.Н.Борищанский, Е.Д.Консон // Л.: Машиностроение, 1981. – 710 с. 2. Воробьев Ю.С. Влияние конструктивных факторов на спектр частот собственных колебаний системы диск-лопатки-связи / Ю.С.Воробьев, В.П.Гошкодеря, А.Н.Цыба // Физические и компьютерные технологии: Сб. тр. 11-й междуна. науч.-техн. конф., 2-3 июня 2005 г. – Харьков: Харьковская науч.-производственная корпорация ФЭД, – Харьков, 2005. – С. 157-160. 3. Воробьев Ю.С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин // Киев: Наукова думка, 1988. – 224 с. 4. Воробьев Ю.С. Отстройка лопаточного аппарата турбомашин с промежуточными связями / Ю.С.Воробьев, В.П.Гошкодеря, К.В.Вакуленко // Труды Одесского политехнического университета. – 2001. – Вып. 5. – С. 152-155. 5. Воробьев Ю.С. Оптимизация спектра собственных частот рабочих лопаток турбомашин с демпферными связями / Ю.С.Воробьев, В.Б.Гринева, В.П.Гошкодеря // Динамика и прочность машин. – 1977. – Вып. 25. – С. 62-66.

Поступило в редакцию 21.04.2006

С.М.ВЕРЕЩАКА, канд.техн.наук; *Д.А.ЖИГИЛИЙ*,
Сумской государственной университет

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРОВ СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ С МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

На основі дискретно-структурної теорії тонких оболонок запропонований варіант розрахункової моделі багат шарових тонкостінних елементів з декількох жорстких анізотропних шарів. Вважається, що напруження поперечного зсуву та обтиснення на границі контакту дорівнюють один одному. Припускається пружне проковзування на поверхні контакту суміжних шарів. Розв'язок задачі отримано в геометрично нелінійній постановці з урахуванням деформацій поперечного зсуву та обтиснення. Досліджено напружено-деформований стан двошарових трансверсально ізотропних циліндричних оболонок з міжфазними дефектами структури матеріалу. Результати теоретичних досліджень порівнюються з експериментальними даними.

On the basis of the discrete - structural theory of the thin shells the variant of the settlement model of multy-layer thin-walled elements from several rigid anisotropic layers is offered. It is considered, that the voltage of cross shift and pressure on the border of contact are equal among themselves. Elastic slipping is admitted on a surface of contact of adjacent layers. The decision of the task is got in vectorially nonlinear production with account of deformations' influence of cross shift and pressure. The status of two-layer transversally isotropic cylindrical shells with interphasal defects of material's structure is investigated. The results of the theoretical researches are compared to experimental data.

Контактные задачи механики многослойных пластинок и оболочек изучались в работах [1-5], где на основе дискретного подхода построены функционалы и получены системы уравнений для решения таких задач при условии неидеального контакта слоев. Метод решения нелинейных задач о контакте между двумя оболочками разной формы и эквидистантными слоями предложен в [6]. Подробный анализ последних результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзоре [7].

Известно, что разрушение стеклопластиковых оболочек из-за слабого сопротивления поперечному отрыву и межслойному сдвигу происходит, как правило, задолго до достижения напряжениями предельных значений. При действии нагрузки, ввиду особенностей технологического характера и физико-механических свойств армированных пластиков, на границах контакта сопряженных слоев происходит образование тонких неоднородных межфазных прослоек, различного рода несовершенств, например, участков отслоения или непроклея. В этом случае предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта может оказаться существенно нарушенным.

В данной работе для моделирования участков ослабленного контакта на межфазных границах рассматривается две модели решения контактной задачи сопряжения жестких анизотропных слоев.

Согласно первой модели контакт жестких слоев осуществляется при по-

мощи клеевой прослойки ненулевой толщины. Допускается, что на некотором локальном участке оболочки клеевая прослойка отсутствует, поэтому в этой области учитывается односторонний контакт между жесткими слоями.

Для второй модели характерно выполнение статических условий контакта по поверхности сопряжения отдельных слоев. Считается, что напряжения поперечно-го сдвига и обжатия на границе контакта равны между собой. При этом допускается упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев.

Постановка задачи. В соответствии с дискретно-структурной теорией математическая модель рассматриваемой здесь многослойной оболочки состоит из n тонких анизотропных слоев. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α^i ($i = 1, 2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\bar{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$; k – номер слоя. Индекс « z » при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\bar{u}_z^{(k)}$ точки жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек С.П.Тимошенко можно представить в виде

$$\bar{u}_z^{(k)} = \bar{u}^{(k)} + z^{(k)}\bar{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z)\bar{\psi}^{(k)}, \quad (1)$$

где $\bar{u}^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\bar{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон, перпендикулярных к недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [8]; $\bar{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\bar{u}^{(k)}$, $\bar{\gamma}^{(k)}$, $\bar{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений

$$\bar{u}^{(k)} = \bar{r}^{(k)i}u_i^{(k)} + \bar{m}^{(k)}w^{(k)}; \quad \bar{\gamma}^{(k)} = \bar{r}^{(k)i}\gamma_i^{(k)} + \bar{m}^{(k)}\gamma^{(k)}; \quad \bar{\psi}^{(k)} = \bar{r}^{(k)i}\psi_i^{(k)}. \quad (2)$$

Компоненты тензора конечных деформаций в точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ определяются как полу разности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$2\mathcal{E}_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}, \quad 2\mathcal{E}_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}, \quad 2\mathcal{E}_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \quad (3)$$

Считая, что в направлении нормали к срединным поверхностям отдельно взятых слоев оболочки осевые линии общей и локальных систем координат совмещаются и также совмещаются локальные координатные поверхности со срединными поверхностями слоев, вариационное уравнение принципа Рейснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta \left(\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)} \right) dV = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений коор-

динаты z от единицы до n . При этом $F^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации; $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

Если по сопряженным лицевым поверхностям слоя выполняются условия идеального контакта:

$$u_{\beta}^{(k,k-1)} = u_{\beta}^{(k-1,k)}, \quad X_{(k,k-1)}^{\beta} = X_{(k-1,k)}^{\beta}, \quad (5)$$

или в векторной форме –

$$\begin{aligned} \bar{u}_{z}^{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{u}_{z}^{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2), \\ \bar{X}_{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{X}_{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2) \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (6)$$

вариацию элементарной работы внешних сил δA_R можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta A_R &= \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iint_{S_{(k)}} (\bar{X}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(k)z}) dS + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{a}^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\psi}^{(k)}) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{a}^{(k)} + \bar{G}_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + (\bar{u}_{S'}^{(k)} - \bar{u}_{S''}^{(k)}) \delta \bar{\varphi}_{(k)} + \\ &+ (\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_{S'}^{(k)}) \delta \bar{G}_{(k)} + (\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_{S'}^{(k)}) \delta \bar{L}_{(k)}) dl \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $S^{(k)}$ – срединная поверхность слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – части контура $l^{(k)}$. Векторы внешних усилий $\bar{X}_{(k)}$, моментов $\bar{M}_{(k)}$ и дополнительных моментов $\bar{B}_{(k)}$, которые входят в уравнение (7), определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{(k)} &= \bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^- + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} dz, \quad \bar{M}_{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} z dz, \\ \bar{B}_{(k)} &= \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} \varphi^{(k)}(z) dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где векторы $\bar{X}_{(k)}^+$, $\bar{X}_{(k)}^-$ включают контравариантные компоненты тензора контактных напряжений $\sigma_{(k)}^{i3+}$, $\sigma_{(k)}^{i3-}$ ($i=1, 2, 3$):

$$\bar{X}_{(k)}^+ = \sigma_{(k)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33+} \bar{m}^{(k)*}, \quad \bar{X}_{(k)}^- = \sigma_{(k)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33-} \bar{m}^{(k)*} \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

В выражениях (8), (9) индексы «+» и «-» указывают на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности слоя. Аналогичную запись имеют векторы внешней нагрузки $\bar{q}_{(n)}^+$, $\bar{q}_{(1)}^-$:

$$\bar{q}_{(n)}^+ = q_{(n)}^{i3+} \bar{p}_i^{(n)*} + q_{(n)}^{33+} \bar{m}^{(n)*}, \quad \bar{q}_{(1)}^- = q_{(1)}^{i3-} \bar{p}_i^{(1)*} + q_{(1)}^{33-} \bar{m}^{(1)*} \quad (i=1, 2).$$

Вектор $\bar{P}^{(k)}$ учитывает влияние собственного веса.

Элементарная работа (7) также включает векторы усилия $\bar{\Phi}_{(k)}^S$, момента $\bar{G}_{(k)}^S$, дополнительного момента $\bar{L}_{(k)}^S$, которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на $l_1^{(k)}$. Векторы усилия $\bar{\Phi}_{(k)}$, момента $\bar{G}_{(k)}$, дополнительного момента $\bar{L}_{(k)}$, имеют место в точках контура $l_2^{(k)}$ при наличии заданного вектора перемещений точек контура $\bar{u}_S^{(k)}$.

Второе слагаемое уравнения (4) следует представить в виде

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^n (\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}) \delta\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dV, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{1R}^{(k)} &= \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)\neq} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta\varepsilon_{i3}^{(k)\neq} + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)\neq}) dV, \\ \delta\Pi_{2R}^{(k)} &= - \iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = - \iiint_{V^{(k)}} \{ (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{ij} - \varepsilon_{ij}^{(k)\neq}) \delta\sigma_{(k)}^{ij} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{i3} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\neq}) \times \\ &\quad \times \delta\sigma_{(k)}^{i3} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{33} - \varepsilon_{33}^{(k)\neq}) \delta\sigma_{(k)}^{33} \} dV \quad (i, j=1, 2). \end{aligned}$$

Подставив геометрические соотношения (3) в (4), (7), (10) на основе вариационного принципа Рейсснера несложно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки [9] значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий. Переход к физическим компонентам, используемых в данной работе тензоров, вывод уравнений равновесия и граничных условий можно найти в работе [10].

Выполняя кинематические и статические условия контакта (5) по сопряженным поверхностям при помощи метода штрафных функций [11], нетрудно составить полную систему разрешающих уравнений для решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек вращения.

Если между слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k, k+1)}$ могут возникать неизвестные векторы усилий $\bar{q}_{(k)}$, $\bar{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в вариационное уравнение принципа Рейсснера (4) необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу сил контактного [10].

Теоретические и экспериментальные результаты. На основе изложенного подхода исследовалось напряженное состояние цилиндров из стеклопластика диаметром 0,09 м и длиной 0,1 м при действии внутреннего давления. Цилиндры 1-го типа были выполнены из 4-х слоев стеклоткани TG 430 – С (100) (производитель – Латвия). В качестве связующего использовалась полиэфирная ортофталевая смола с пониженной эмиссией стирола Cristic 2 – 446 PA (производитель – Великобритания). Цилиндры 2-го типа отличаются от цилиндров 1-го типа начальным дефектом в виде участка непрочности в форме кольца по центру, который находился между вторым и третьим слоем. Участки непрочности были созданы в момент изготовления образцов при помощи тонкой полиэтиленовой пленки.

Физико-механические характеристики рассматриваемых оболочек из стеклопластика определялись в следующей последовательности. Вначале, согласно ГОСТ 25.601 – 80, определяется модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении образцов из стеклопластика. Проведенные механические испытания позволяют утверждать, что материал рассматриваемых пластинок можно классифицировать как трансверсально изотропный ($E_z = E_\theta = 1,5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{\theta z} = \nu_{z\theta} = 0,12$). Остальные физико-механические характеристики стеклопластика определялись интегрально для всего пакета слоев пластинки на основе зависимостей работы [8], когда модули упругости 1 – го рода, коэффициенты Пуассона волокон и матрицы соответственно равны: $E_B = 7,0 \cdot 10^4$ МПа, $E_M = 3,5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_B = 0,22$, $\nu_M = 0,35$.

Для проведения экспериментальных исследований была разработана и изготовлена испытательная установка. Измерение деформаций осуществлялась при помощи тензорезисторов марки КФ4П1-3-200 и КФ5П1-1-200–Б12 ТУ 3.06 Украины 7710–0001–93. Для измерения выходных сигналов тензорезисторов и представления отчетов в цифровом виде использовалась измерительная система СИИТ-3.

В качестве математической модели рассматривалась двухслойная пластина из двух жестких трансверсально изотропных слоев толщиной $h_{(1)} = h_{(2)} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ м. Между собой жесткие слои соединены тонкой клеевой прослойкой толщиной $h_{[0]} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м и $h_{[0]} = 0,25 \cdot 10^{-4}$ м (первая модель [12]).

Согласно второй модели влияние толщины клеевой прослойки на напряженное состояние пластины не рассматривалось, но при этом допускалось упругое проскальзывание по поверхности контакта смежных слоев. При этом решение задачи получено на основе метода ортогональной прогонки С.К. Годунова в геометрически нелинейной постановке.

Для качественной оценки предлагаемых вариантов модели расчет цилиндра по первой модели был проведен в пространственной осесимметричной постановке на основе метода конечных элементов (комплекс МКЭ ANSYS 8.0). Модель представлена прямоугольными 8-ми узловыми элементами. Дефект моделировался локальным кольцевым участком непрочности с учетом контакта жестких слоев.

Свойства материала жесткого слоя из стеклопластика определялись следующими параметрами: $E_\theta = 1,5 \cdot 10^4$ МПа; $E_z = 1,5 \cdot 10^4$ МПа; $E_r = 4,1 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_{\theta r} = 0,242$; $\nu_{zr} = 0,242$; $\nu_{\theta z} = 0,12$; $G_{zr} = 1,715 \cdot 10^3$ МПа; $G_{\theta r} = 1,715 \cdot 10^3$ МПа; $G_{\theta z} = 6,039 \cdot 10^3$ МПа. Клей считался изотропным материалом: $E = 3,5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu = 0,35$.

Результаты исследований цилиндров 1-го и 2-го типа без дефекта структуры материала и с локальным участком непрочлея в форме кольца длины $l_d = 5,0 \cdot 10^{-2}$ м по центру пластины представлены на рис. 1-6. Цилиндры, торцы которых жестко закреплены, испытывают действие равномерного внутреннего давления интенсивностью $q = 1,0$ МПа.

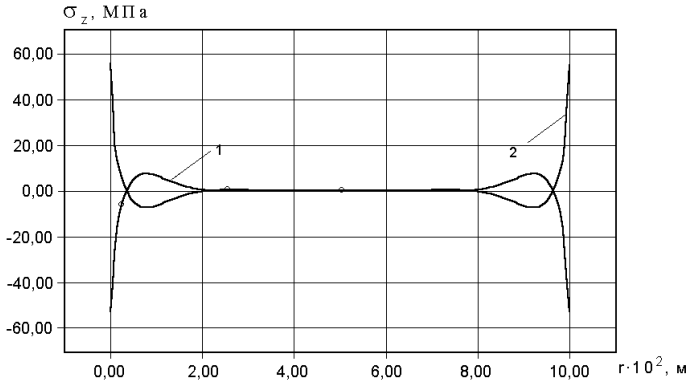


Рисунок 1 – Зависимость нормальных напряжений σ_z по лицевым поверхностям цилиндра 1-го типа (вторая модель) от координаты z (1, 2 – наружная и внутренняя поверхность соответственно; \circ – результаты эксперимента)

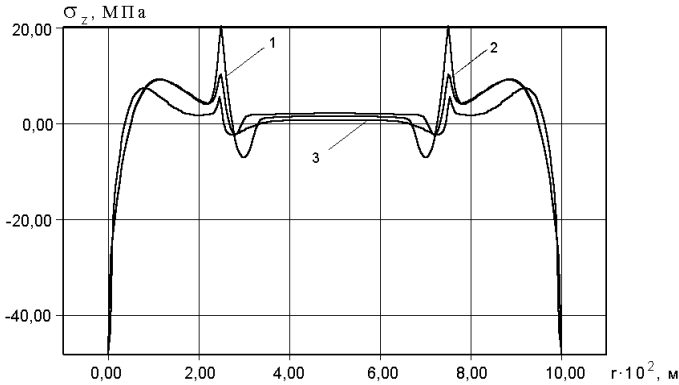


Рисунок 2 – Зависимость нормальных напряжений σ_z по наружной поверхности цилиндра 2-го типа от координаты z (1, 2 – двухслойная пластина с клеевой прослойкой толщиной $h_{[0]} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м и $h_{[0]} = 0,25 \cdot 10^{-4}$ м (первая модель) соответственно; 3 – двухслойная пластина (вторая модель))

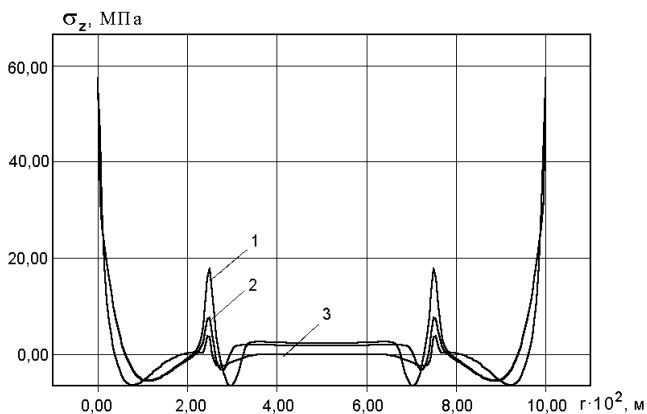


Рисунок 3 – Зависимость нормальных напряжений σ_z по внутренней поверхности цилиндра 2-го типа от координаты z (1, 2 – двухслойный цилиндр с клеевой прослойкой между слоями толщиной $h_{[0]} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ и $h_{[0]} = 0,25 \cdot 10^{-4}$ (первая модель) соответственно; 3 – двухслойная цилиндр (вторая модель))

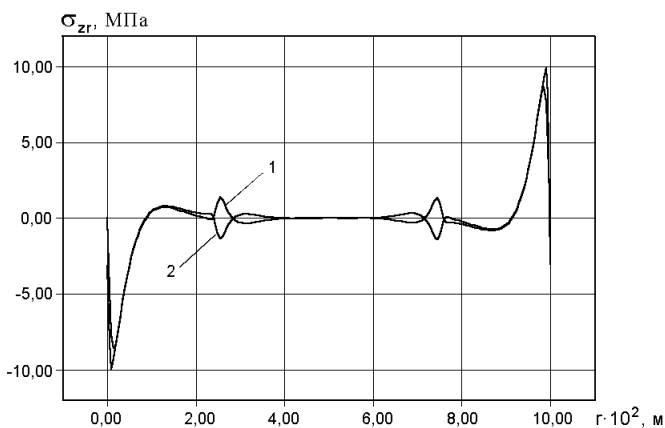


Рисунок 4 – Зависимость напряжений поперечного сдвига σ_{zr} по сопряженным поверхностям цилиндра 2-го типа от координаты z (1, 2 – поверхности внутреннего и наружного слоя соответственно)

Анализ результатов, представленных на рис. 1-6, показывает, что наиболее адекватно реальную работу трансверсально изотропных цилиндров отражает вторая модель. Следует отметить, что относительная погрешность теоретических значений и экспериментальных данных по нормальным напряжениям σ_z в направлении продольной оси цилиндра (вторая модель) рис. 1 не превысила 5 %. В зоне жесткого закрепления торцов оболочки и на границе участка непрочлея (рис. 2-3) имеет место локальный краевой эффект, который заметно изменяет картину напряженного состояния.

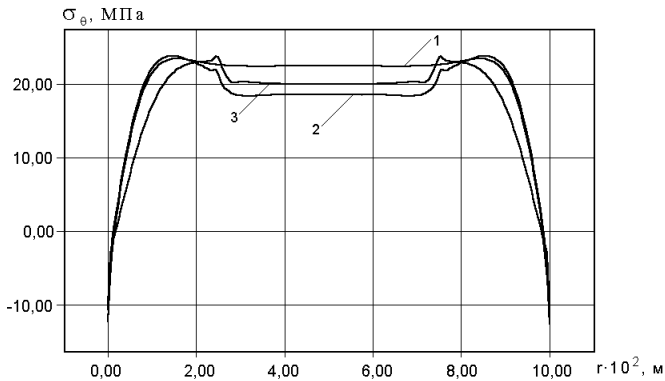


Рисунок 5 – Зависимость окружных напряжений σ_θ по наружной поверхности цилиндра 2-го типа от координаты z (1 – двухслойная цилиндр без участков непрочлея (вторая модель); 2, 3 – двухслойная пластина с клеевой прослойкой толщиной $h_{[0]} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ и $h_{[0]} = 0,25 \cdot 10^{-4}$ (первая модель))

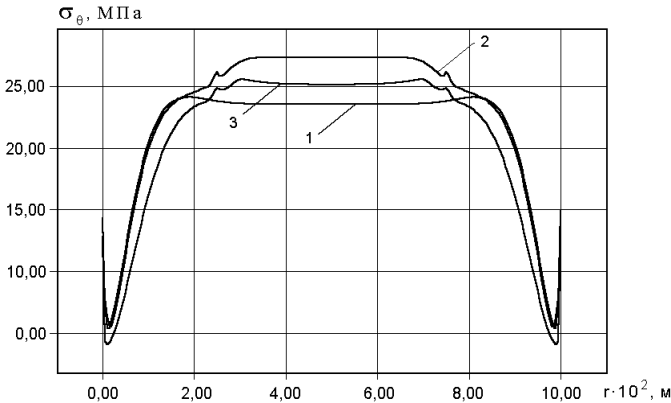


Рисунок 6 – Зависимость окружных напряжений σ_θ по внутренней поверхности цилиндра 2-го типа от координаты z (1 – двухслойная цилиндр без участков непрочлея (вторая модель); 2, 3 – двухслойная пластина с клеевой прослойкой толщиной $h_{[0]} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ и $h_{[0]} = 0,25 \cdot 10^{-4}$ (первая модель))

Выводы. Таким образом, в данной работе на основе геометрически нелинейной дискретно-структурной теории слоистых элементов конструкций проведено исследование напряженно-деформированное состояние анизотропных цилиндрических оболочек с дефектами структуры материала как элементов конструкций сосудов высокого давления. Сопряжение жестких анизотропных слоев на межфазных границах моделируются тремя расчетными моделями, в которых учитываются условия их идеального и ослабленного контакта. Численно и экспериментально исследовано напряженно-деформированное состояние трансверсально изотропных цилиндров без дефекта структуры материала и с локальным участком

кольцевого непрочья. В процессе анализа установлено, что изменение кинематических и статических условий контакта по сопряженным поверхностям жестких слоев анизотропных элементов тонкостенных конструкций существенно влияет на характер распределения деформаций поперечного сдвига и обжатия. Вариант модели, когда напряжения поперечного сдвига и обжатия на межфазных границах контакта равны между собой, но при этом допускается упругое проскальзывание этих слоев друг относительно друга, адекватно отражает работу слоистых тонкостенных конструкций при больших деформациях.

Список литературы: 1. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 832-836. 2. *Лазько В.А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77-84. 3. *Пелех Б.Л., Лазько В.А.* Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. 4. *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. 5. *Паймушин В.И.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочья // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23. № 11. – С. 32-38. 6. *Кантор Б.Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. 7. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56. 8. *Болотин В.В., Новичков Ю.И.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 9. *Галимов К.З.* Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З.Галимова. – Издательство Казанского университета, 1977. – С. 36 – 95. 10. *Верещака С.М.* К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 39-46. 11. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с. 12. *Верещака С.М., Львов Г.И.* Напряженное состояние анизотропных оболочек с учетом влияния участков локального непрочья // Проблемы машиностроения. – 2004. – Т. 7, № 1. – С. 61-70.

Поступила в редколлегию 25.03.2006.

УДК 531.1

О.С. ГАЛАС; К.В. АВРАМОВ, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»

К АКТИВНОМУ ГАШЕНИЮ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

В поданій роботі пропонується активний засіб гасіння коливань стрижня. До стрижня прикріплюється суттєво нелінійний гаситель коливань зі зворотним зв'язком. Для дослідження системи з активним гасителем застосовується метод гармонічного балансу. Проведено аналіз стійкості системи. Побудовано амплітудно-частотні характеристики стрижня та гасителя.

Method of the active damping of beam oscillations is proposed in this work. Essentially nonlinear absorber with the feedback is attached to the beam. Method of the harmonic balance is used to investigate the system with the active absorber. Analysis of system stability is performed. Amplitude-frequency characteristic of the beam and absorber is build.

1. Введение. Существует множество различных способов активного и пассивного гашения колебаний. В качестве пассивных элементов могут использоваться маятниковые антивибраторы, осцилляторы с существенно нелинейными упругими элементами, фермы Мизеса, нелинейные муфты [1-5]. Для анализа нелинейных колебаний в таких системах используется метод нелинейных нормальных форм, гармонического баланса, многих масштабов.

В последние годы все большее развитие приобретают активные способы гашения колебаний [6-11], которые снижают опасные вибрации с помощью систем управления приводами и компенсаторами. Активные системы считаются более эффективными, чем пассивные системы, однако применение активным систем ограничивается их высокой стоимостью.

В представленной работе предлагается активный способ гашения колебаний. К стержню прикрепляется существенно нелинейный гаситель колебаний с обратной связью. Для исследования системы с активным гасителем используется метод гармонического баланса.

2. Постановка задачи. Модель рассматриваемой механической системы представлена на рис. 1.

К стержню прикрепляется динамический гаситель, который является нелинейным механическим осциллятором. Масса гасителя предполагается существенно меньшей массы основной системы. Стержень и гаситель охватываются цепью нелинейной обратной связи. На конце стержня устанавливается датчик, который выдает сигнал пропорциональный отклонению объекта

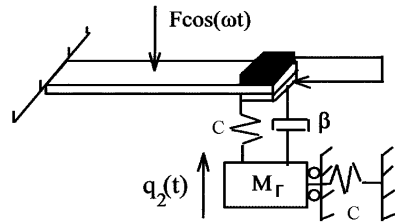


Рисунок 1

от положения равновесия на исполнительный механизм. Исполнительный механизм перемещает массу на соответствующее расстояние тем самым, компенсируя отклонение.

В общем виде уравнения движения системы без учета обратной связи имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}.$$

Кинетическую и потенциальную энергию системы представим так:

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^l \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} m_r \dot{q}_2^2; \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l w''^2 dx + \frac{1}{2} c(w(l, t) - q_2(t))^2 + \frac{c}{8l_0^2} q_2^4, \quad (2)$$

где $w(x, t)$ – изгибные перемещения стержня, $q_2(x, t)$ – обобщенная координата гасителя, m_r – масса гасителя, m – масса стержня, l_0 – длина пружины, l – длина стержня. Функцию $w(x, t)$ представим так:

$$w(x, t) = 2q_1(t) \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

где $1 - \cos \frac{\pi x}{2l}$ – приближенная первая форма колебаний консольного стержня [12]. Обобщенная сила Q_1 , соответствующая обобщенной координате q_1 , и функция F имеют такой вид:

$$Q_1 = 2F \cos(\omega t) \left(1 - \cos \frac{\pi l_1}{2l} \right); \quad F = \frac{1}{2} \beta (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2. \quad (3)$$

Подставим выражения (1), (2) и (3) в уравнения Лагранжа, обезразмерим полученные уравнения $\tilde{q}_i = \frac{q_i}{b}$ и, опуская волну в обозначении, получим:

$$\ddot{q}_1 + \frac{\beta \pi}{ml(3\pi - 8)} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k^2 q_1 - \frac{c\pi}{ml(3\pi - 8)} q_2 = \frac{F\pi \left(1 - \cos \frac{\pi l_1}{2l} \right)}{mlb(3\pi - 8)} \cos(\omega t); \quad (4)$$

$$\ddot{q}_2 - \frac{\beta}{m_r} (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \frac{c}{m_r} (2q_1 - q_2) + \frac{cb^2}{2l_0^2 m_r} q_2^3 = 0,$$

где b – ширина поперечного сечения стержня, l_1 – расстояние между левым концом стержня и точкой приложения периодической силы,

$k^2 = \frac{\left(\frac{1}{8} EI \frac{\pi^4}{l^3} + 4c \right) \pi}{2ml(3\pi - 8)}$. Введем безразмерное время $\tau = t k$, в результате полу-

чим динамическую систему относительно безразмерных параметров:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 + a_1 (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - a_2 q_2 &= f \cos(\omega \tau); \\ \ddot{q}_2 - b_1 (2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - b_2 (2q_1 - q_2) + b_3 q_2^3 &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{\beta \pi}{ml(3\pi - 8)k}, \quad b_1 = \frac{\beta}{m_r k}, \quad a_2 = \frac{c\pi}{ml(3\pi - 8)k^2}, \quad b_2 = \frac{c}{m_r k^2}, \quad b_3 = \frac{cb^2}{2l_0^2 m_r k^2},$$

$$f = \frac{F\pi \left(1 - \cos \frac{\pi l_1}{2l} \right)}{mlb(3\pi - 8)k^2}.$$

3. Периодические движения и их устойчивость

Следуя статье [8], введем в механическую систему (5) обратную связь. Тогда динамическая система примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + q_1 + a_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - a_2q_2 &= f \cos(\omega t) + \alpha_1 a_4 \dot{q}_1^2; \\ \ddot{q}_2 - b_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - b_2(2q_1 - q_2) + b_3q_2^3 &= \alpha_2 b_4 \dot{q}_1 \dot{q}_2,\end{aligned}\quad (6)$$

где $a_4 = \frac{b\pi}{2ml(3\pi - 8)}$, $b_4 = \frac{b}{m_r}$. Параметры α_i выбираются из условия устойчивости. Колебания системы (6) представим так:

$$\begin{aligned}q_1 &= A_1 + A_2 \cos(\omega t) + A_3 \sin(\omega t); \\ q_2 &= B_1 + B_2 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t).\end{aligned}\quad (7)$$

Введем (7) в систему (6). Тогда получим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha_1 a_4 \omega^2 (A_2^2 + A_3^2) - A_1 + a_2 B_1 &= 0; \\ (1 - \omega^2)A_2 + 2a_1 \omega A_3 - a_1 \omega B_3 - a_2 B_2 - f &= 0; \\ (1 - \omega^2)A_3 - 2a_1 \omega A_2 + a_1 \omega B_2 - a_2 B_3 &= 0; \\ b_3 B_1^3 + \frac{3}{2} b_3 B_1 (B_2^2 + B_3^2) - \frac{1}{2} \alpha_2 b_4 \omega^2 (A_2 B_2 + A_3 B_3) - 2b_2 A_1 + b_2 B_1 &= 0; \\ \frac{3}{4} b_3 B_2^3 + 3b_3 B_2 B_1^2 + \frac{3}{4} b_3 B_2 B_3^2 - \omega^2 B_2 - 2b_1 \omega A_3 + b_1 \omega B_3 - 2b_2 A_2 + b_2 B_2 &= 0; \\ \frac{3}{4} b_3 B_3^3 + 3b_3 B_3 B_1^2 + \frac{3}{4} b_3 B_3 B_2^2 - \omega^2 B_3 + 2b_1 \omega A_2 - b_1 \omega B_2 - 2b_2 A_3 + b_2 B_3 &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Для построения амплитудно-частотной характеристики система (8) решалась методом Ньютона [13]. Задавалось значение частоты ω , и находились шесть неизвестных системы (8). Для определения колебаний в области многозначности использовалась идея продолжения решения [13, 14]. Тогда не частота задавалась в качестве независимого параметра, а одна из амплитуд, а частота находилась из решения системы нелинейных алгебраических уравнений.

Исследуем устойчивость периодических колебаний. Зададим малые приращения ξ_1, ξ_2 от периодических движений:

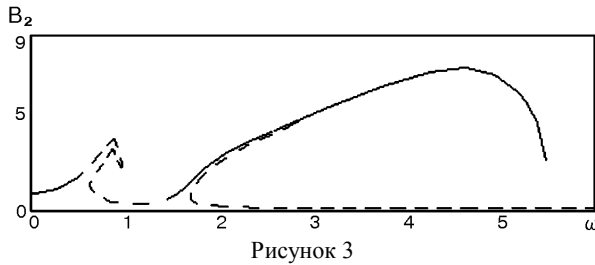
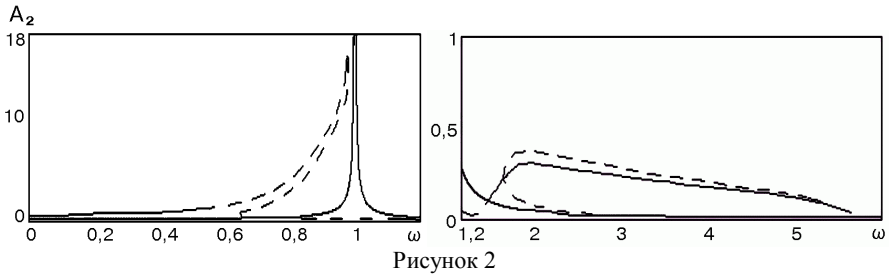
$$q_1 = q_1 + \xi_1; \quad q_2 = q_2 + \xi_2. \quad (9)$$

Подставим выражения (9) в уравнения (6). В результате преобразований получим систему уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned}\xi_1 + \xi_1 + a_1(2\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - a_2 \xi_2 &= 2\alpha_1 a_4 \dot{\xi}_1 (\omega A_3 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t)); \\ \xi_2 - b_1(2\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) - b_2(2\xi_1 - \xi_2) + 3b_3 \xi_2 (B_1 + B_2 \cos(\omega t) + B_3 \sin(\omega t))^2 &= \\ = \alpha_2 b_4 \dot{\xi}_2 (\omega A_3 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t)) + \alpha_2 b_4 \dot{\xi}_1 (\omega B_3 \cos(\omega t) - \omega B_2 \sin(\omega t)).\end{aligned}\quad (10)$$

Систему (10) запишем относительно фазовых переменных и численно определим значения матрицы монодромии при $t = T$. Собственные значения матрицы монодромии – мультипликаторы. По величинам мультипликаторов оценим устойчивость колебаний. Амплитудно-частотные характеристики

представлены на рис. 2 и рис. 3. На рис. 2 показана амплитудно-частотная характеристика системы с гасителем и без гасителя, на рис. 3 амплитудно-частотная характеристика гасителя. Сплошной линии соответствуют устойчивые участки, пунктирной неустойчивые.



Из анализа характеристик следует, что при присутствии гасителя основной резонанс сдвигается. В системе существует режим гашения, при котором гаситель совершает колебания с большой амплитудой, а основная система практически не колеблется.

Введем в систему (5) другой тип обратной связи, получим следующие уравнения:

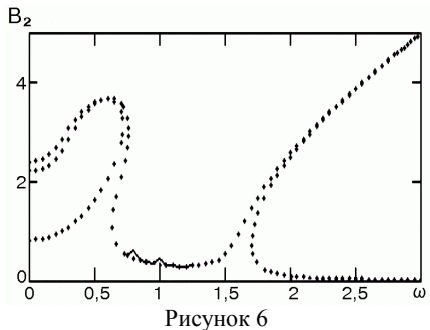
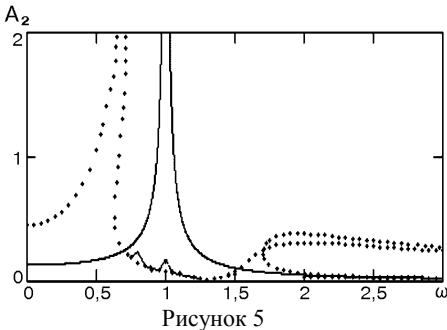
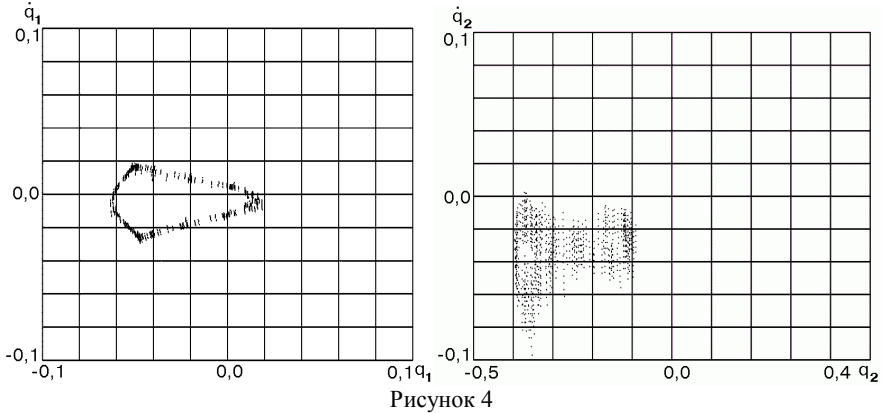
$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_1 + a_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - a_2q_2 &= f \cos(\omega t) + \alpha_1 a_4 q_1^2; \\ \ddot{q}_2 - b_1(2\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - b_2(2q_1 - q_2) + b_3q_2^3 &= \alpha_2 b_4 q_1 q_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $a_4 = \frac{b\pi}{2m(3\pi - 8)k^2}$, $b_4 = \frac{b}{m_1 k^2}$. Для системы (11) были проведены

расчеты аналогичные описанным выше. Возьмем на амплитудно-частотной характеристике точку, соответствующую частоте $\omega = 1$. По формулам (7) вычислим начальные условия и проинтегрируем уравнения (11). Построим стробоскопический фазовый портрет [15], который представлен на рис. 4 (на первом графике колебания основной системы, на втором гасителя).

Таким образом, в системе наблюдаются квазипериодические и хаотические колебания. Квазипериодические колебания возникают в результате бифуркации Неймарка [15]. При изменении частоты возмущающего воздействия такие колеба-

ния преобразуются в хаотические. Далее возьмем точки находящиеся в некоторой окрестности от точки $\omega = 1$. Проинтегрируем уравнения (11) с соответствующими начальными условиями. Определим максимальную амплитуду колебаний и наложим полученную кривую на амплитудно-частотную характеристику системы (11). Результаты представлены на рис. 5 и 6. На рис. 5 также представлена характеристика линейной системы без гасителя.



Как видно из графиков полученная кривая практически полностью совпадает с амплитудно-частотной характеристикой. В системе описанной уравнениями (11) также существует режим гашения.

Выводы. Как видно рассмотренный работе метод является эффективным для гашения колебаний стержней. Его можно использовать для гашения колебаний тонкостенных конструкций (пластинок, оболочек). В этом случае на системе должны быть размещены несколько таких гасителей.

Список литературы: 1. *K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin.* Forced oscillations of a system containing snap-through-truss, close to its equilibrium position // *Nonlinear dynamics.* – 2004. – V. 35. – P. 361-379. 2. *K.V.*

Avramov, Yu.V. Mikhlin. Snap-through-truss as a vibration absorber // Journal of vibration and control. – 2004. – V. 10. – P. 291-308. **3.** *K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin.* Snap-through truss as an absorber of forced oscillation // Journal of sound and vibration (в печати). **4.** *K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin.* Damping of the elastic vibrations in linear systems // International applied mechanics. – 2005. – V. 41. – № 2. – P. 203-209. **5.** *С.Н. Решетникова, О.С. Галас.* Анализ вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы, содержащей существенно нелинейный виброгаситель // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 12, т. 1. – С. 103-110. **6.** *S.S. Oueini, A.H. Nayfeh, J.R. Pratt.* A nonlinear vibration absorber for flexible structures // Nonlinear dynamics. – 1998. – № 15. – P. 259-282. **7.** *S.S. Oueini, A.H. Nayfeh, J.R. Pratt.* A review of development and implementation of an active nonlinear vibration absorber // Archive of applied mechanics. – 1999. – № 69. – P. 585-620. **8.** *S.S. Oueini, A.H. Nayfeh.* Analysis and application of a nonlinear vibration absorber // Journal of vibration and control. – 2000. – № 6. – P. 999-1016. **9.** *J.N. Juang, M.Phan.* Robust controller designs for second order dynamic system: a virtual passive approach // Journal of guidance, control and dynamics. – 1992. – № 15. – P. 1192-1198. **10.** *K.E. Rouch, S.G. Tewani, T.R. Massa, R.W. Stephenson, L.S. Stephens.* Active vibration control device // United States Patent No. 5170103. – 1992. **11.** *S. Lee, A. Sinha.* Design of an active vibration absorber // Journal of sound and vibration. – 1986. – № 109. – P. 347-352. **12.** *С.П. Тимошенко.* Устойчивость упругих систем. – М.-Л., ОГИЗ, 1946. – 450 с. **13.** *R. Seydel.* Nonlinear computation // Int. journal of bifurcation and chaos. World scientific. – 1997. – Vol. 7. – P. 2105-2126. **14.** *В.А. Якубович, В.М. Старжинский.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с. **15.** *В.С. Анищенко.* Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 346 с.

Поступила в редколлегию 15.12.2005.

УДК 539.3

Н.Г.ГАРМАШ, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХОПОРНОГО ЗАМКОВОГО СОЕДИНЕНИЯ ЛОПАТОК ПАРОВОЙ ТУРБИНЫ

Розглянуто задачу визначення термонапруженого стану замкового з'єднання грибовидного типу першого ступеня низького тиску турбіни К-300-240-2 у термоконтактній постановці. Показано, що врахування температурних деформацій при розв'язанні задачі несуттєво впливає на рівень контактних напружень, однак посилює нерівномірність їх розподілу, що необхідно враховувати при оцінці працездатності та тривалої міцності конструкцій.

The task of thermocontact interaction for lock connection as the first stage of low pressure of the turbine K-300-240-2 is consider. Is shown, that the registration of temperature strains unessentially influencing on a level of contact pressure, strengthens non-uniformity of its distribution. That it is necessary to take into account at an estimation of functionability of constructions.

Существующие в современном машиностроении виды замковых соединений лопаток турбомашин отличаются сложностью конструктивных форм. Технология их изготовления допускает некоторый разброс геометрических размеров между опорными площадками соединения, что приводит к появлению зазоров (натягов). Вследствие напряженного характера работы и конструктивных особенностей, картина распределения напряжений характеризует-

ся наличием зон высокой концентрации и неравномерностью усилий на опорных площадках замка. Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) замковых соединений является сложной пространственной контактной задачей, для решения которой использовались различные методы [1].

Замковые соединения лопаток с диском, являющиеся одними из наиболее напряженных и ответственных узлов турбомашин, обычно работают при повышенных температурах, в условиях неравномерного нагрева, как в осевом, так и в радиальном направлении, поэтому существенное влияние на их термонапряженное состояние оказывают тепловые поля.

Новые расчетные схемы, уточненные постановки задач, учитывающие термоконтakтное взаимодействие и теплообмен между узлами и элементами, позволяют довольно точно оценивать напряженное состояние, величину и характер распределения контактного давления в реальных конструкциях, подверженных температурным воздействиям [2-4].

Рассмотрим задачу взаимодействия узлов двухпорного замкового соединения грибовидного типа первой ступени низкого давления турбины К-300-240-2 в термоконтakтной постановке.

При разработке математической модели и расчетной схемы замка геометрия соединения, действующая нагрузка, граничные условия теплообмена задавались максимально приближенными к реальным для рассматриваемой конструкции. Решение задачи производилось методом конечных элементов. Использовался специальный термоконтakтный элемент [5], одной из характерных особенностей которого является возможность моделирования взаимодействия областей различных типов. Это позволяет рассматривать хвостовик лопатки в рамках плоского напряженного состояния во взаимодействии с осесимметричным диском. Для правильного вычисления центробежных сил, действующих на соединение, и корректной стыковки с диском учитывалась толщина хвостовика в окружном направлении. Задача решалась в упругой постановке для двух вариантов: без учета температурных деформаций и с

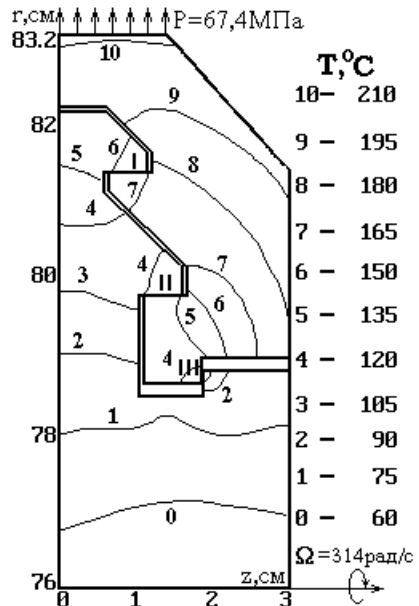


Рисунок 1 – Расчетная схема конструкции с распределением температурного поля

их учетом. Расчетная схема соединения представлена на рис. 1, где цифрами I, II, III обозначено расположение контактных площадок.

В качестве основной нагрузки, определяющей термонапряженное состояние соединения, принимались центробежные усилия от вращения ротора вокруг оси z с угловой скоростью $\Omega = 314$ рад/с. Центробежная лопаточная нагрузка задавалась равномерно распределенной по хвостовику в окружном и осевом направлениях и составляла $P = 67,4$ МПа. Для простоты анализа геометрии диска и действующая лопаточная нагрузка принимались симметричными относительно срединной плоскости диска, поэтому в сечении $z = 0$ задавались условия симметрии $u_z = 0$ и $\tau_{rz} = 0$. В качестве граничных условий для стороны $r = 0,76$ м служили значения перемещений $u_r = 0,058 \cdot 10^{-2}$ м и $\tau_{rz} = 0$ (для расчета без учета температурных деформаций) и $u_r = 0,221 \cdot 10^{-2}$ м и $\tau_{rz} = 0$ (температурные деформации учитываются), полученные из предварительного расчета облопаченного диска. Модули упругости, коэффициенты Пуассона, плотности материалов диска и лопатки соответственно составляли $E_d = 2,18 \cdot 10^5$ МПа; $E_l = 2,23 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_d = \nu_l = 0,3$; $\rho_d = \rho_l = 0,8 \cdot 10^4$ кг/м³. Теплофизические свойства материалов принимались следующими: коэффициенты теплопроводности $K_d = 0,24$ Вт/(см · град) и $K_l = 0,244$ Вт/(см · град), объемная теплоемкость материала $\rho_{с,d} = 3,91$ Вт · сек/(см³ · град), $\rho_{с,l} = 4,1$ Вт · сек/(см³ · град), коэффициенты линейного расширения от температуры $\alpha_d = 1,06 \cdot 10^{-5}$ 1/град и $\alpha_l = 1,115 \cdot 10^{-5}$ 1/град. В зоне контакта хвостовика с диском в районе зубьев вводился контактный слой с жесткостью по нормали к поверхности взаимодействия $C_n = 4 \cdot 10^6$ МПа, а в районе полки – $C_n = 1 \cdot 10^6$ МПа. Ввиду неопределенности технологических зазоров из-за неточности изготовления, они полагались нулевыми. По всем трем контактным площадкам принимались условия идеального проскальзывания. Там, где детали не контактируют между собой, для осуществления процесса теплообмена между ними, пространство заполнялось воздухом с коэффициентом теплопроводности $0,00035$ Вт/см · град.

Была рассмотрена нестационарная задача с учетом температурных деформаций, а также без учета их влияния. Температура, при которой отсутствовали температурные деформации, была принята равной нулю. Коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности облопачивания равен $\alpha = 0,25$ Вт/(см²град), на конической и боковой поверхности хвостовика – $\alpha = 0,0125$ Вт/(см²град), температура на них составляла $T = 217^\circ\text{C}$. В диске при $r = 0,76$ м – $\alpha = 0,0125$ Вт/(см²град), $T = 50^\circ\text{C}$. На остальных границах – теплоизоляция. Начальное температурное поле постоянно $T = 50^\circ\text{C}$. Распределение температур, установившееся в соединении через две минуты, представлено на рис. 1.

Для получения картины распределения напряжений на стационарном режиме при тех же граничных условиях, после шестого временного шага была решена стационарная задача. При этом температура диска при $r = 0,76$ м принималась равной $T = 210^\circ\text{C}$. На рис. 2 и 3 представлены картины распределения эквивалентных напряжений (интенсивности напряжений с учетом знака максимальной компоненты) для рассматриваемых случаев (без учета и с учетом температурных деформаций) на наиболее напряженном фрагменте схемы.

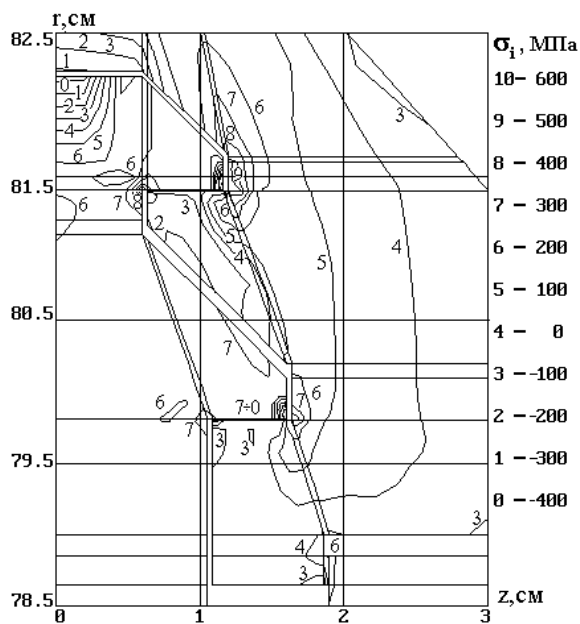


Рисунок 2

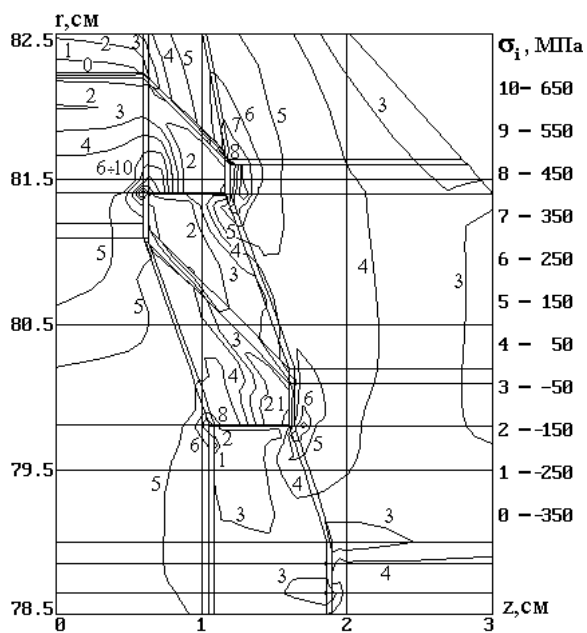


Рисунок 3

Очевидно, что зоны максимальной концентрации напряжений имеют место в районе зубьев, а в целом для соединения характерна неравномерность распределения усилий по опорным площадкам.

Усредненные значения контактного давления в центрах элементов для расчетов без учета и с учетом температурных деформаций приведены в таблице.

Распределение контактного давления (МПа)

номер контактной площадки	номер контактного элемента	без учета температурных деформаций	с учетом температурных деформаций			
			шаги по времени			
			1 мин	1,5 мин	2 мин	∞
I	1	250,0	283,9	281,8	279,0	247,6
	2	171,3	193,5	191,1	189,2	168,8
	3	150,3	167,3	164,5	162,5	146,9
	4	144,0	156,7	153,4	151,1	139,4
	5	138,8	146,7	143,1	140,3	133,0
	6	140,0	143,4	139,5	136,1	132,8
	7	168,7	168,5	164,0	159,4	159,6
	8	277,2	272,3	265,9	258,5	263,2
Среднее значение		163,3	174,3	170,7	167,7	157,6
II	1	145,9	191,8	185,0	182,6	156,1
	2	97,9	123,9	120,1	118,9	104,3
	3	88,0	100,6	99,2	99,2	93,1
	4	90,8	89,4	90,7	92,3	95,3
	5	103,7	86,9	91,3	94,7	108,2
	6	128,0	95,7	103,4	108,8	133,2
	7	172,7	122,3	134,2	142,1	179,8
	8	289,1	202,5	223,2	236,5	301,6
Среднее значение		122,7	111,4	115,1	118,2	128,7
III	1	0	0	26,9	17,5	0
	2	44,7	68,9	55,1	51,6	44,4
	3	135,4	94,3	95,8	97,1	121,9
Среднее значение		60,0	54,4	59,3	55,4	55,4

Отличие в значениях контактных напряжений на стационарном режиме можно объяснить в основном разницей между коэффициентами линейного температурного расширения лопатки и диска.

При воздействии тепла от теплового удара, который может быть вызван, например, подачей горячего пара, учет температурных деформаций оказывает незначительное влияние на величину контактных напряжений, однако неравномерность их распределения между контактными площадками усугубляется. В таблице также приведено усредненное значение контактного давления по

контактным площадкам соединения, то есть то его значение, которое имело бы место при равномерно распределенной по всей площадке контактной нагрузке. Поскольку при тепловом ударе вначале происходит более интенсивный подогрев хвостовика лопатки, верхний зуб соединения догружается, а на нижнем – напряжения падают. После дальнейшего прогрева конструкции контактные напряжения выравниваются.

Таким образом, расчет термонапряженного состояния замковых соединений с учетом воздействия тепловых потоков в рамках термоконтактной задачи существенно уточняет математическую модель конструкции, приближая ее к реальному объекту, что особенно важно для газотурбинных установок, где тепловые потоки интенсивны. Подобные расчеты позволяют исследовать влияние температурных воздействий и различных условий теплообмена на напряженное состояние соединений, на величину и характер распределения контактных давлений, что в свою очередь позволяет объяснить причины снижения длительной прочности машиностроительных конструкций.

Список литературы. 1. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / *А.Н.Подгорный, П.П.Гонтаровский, Б.Н.Киркач, Ю.И.Матюхин, Г.Л.Хавин*. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с. **2.** *Гармаш Н.Г.* Двовимірний скінченноелементний аналіз контактних задач із врахуванням теплообміну. – Автореф.дисерт. на здоб. наук. ступ. канд. техн. наук. – Харків, 1999. – 19 с. **3.** *Гармаш Н.Г.* Напряженное состояние замкового соединения лопаток газовой турбины в рамках термоконтактной задачи / *Н.Г.Гармаш, В.П.Гонтаровский* // Пробл. машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 3-4. – С. 12-16. **4.** *Гонтаровский П.П.* К решению контактных задач МКЭ с учетом фрикционного нагрева / *П.П.Гонтаровский, Н.Г.Гармаш* // Динаміка і міцність машин. – Харків. Вісник НТУ «ХП». – 2001. – № 25. – С. 67-74. **5.** *Гонтаровский П.П.* Расчет напряженно-деформированного состояния лопаток турбомашин с учетом термоконтактных взаимодействий/ *П.П.Гонтаровский, Н.Г.Гармаш* // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: Сб. тр. Межд. науч.-тех. конф. – Харьков, 29 сент. – 2 окт. 1997г. – Харьков. – 1997. – С. 533-536.

Поступила в редакцию 19.04.2006

УДК 532.595

В.И.ГНИТЬКО, канд. техн. наук;

Е.В.ЕСЕЛЕВА, канд. техн. наук; ИПМаш НАН Украины

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ

Запропоновано метод визначення власних частот і форм коливань пружних оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Форми коливань оболонки з рідиною визначаються як лінійна комбінація власних форм її коливань в вакуумі. Розв'язок задач гідропружності отримано з використанням методів граничних інтегральних рівнянь і скінченних елементів. Проведено чисельні дослідження гідропружних коливань напівсферичної оболонки.

The computational method for fluid shell interaction eigenproblems is proposed. Natural modes of the shell under fluid interaction are evaluated as superposition of its elastic natural modes. The methods of boundary and finite elements are applied for hydroelastic problem. As an interaction example, a hemispherical shell filled with fluid is demonstrated.

Задачи динамики тела с полостями, частично заполненными жидкостью, составляют один из важных для практики разделов механики. К их решению приводят проблемы определения силового взаимодействия подвижной цистерны и жидкости, расчета на прочность емкостей с жидкостью в сейсмоактивных районах, вопросы динамики и устойчивости танкеров и объектов аэрокосмической техники. Изучению динамических характеристик тел с полостями, заполненными жидкостью, посвящена обширная литература, в частности [1-5]. В большинстве из этих работ решение задачи ищется в виде ряда по системе специальных функций, такой подход сложно обобщить на случай оболочек вращения с произвольным меридианом. В данной работе для решения задачи о собственных гидроупругих колебаниях оболочки вращения предлагается подход, основанный на использовании методов граничных элементов (МГЭ) и конечных элементов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях упругой оболочки вращения, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью.

Матричное уравнение движения оболочки с жидкостью запишем в виде

$$LU + M\ddot{U} = P, \tag{1}$$

где L , M – матрицы жесткости и масс; $U = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор-функция перемещений; P – давление жидкости на смоченную поверхность оболочки.

При изучении собственных колебаний оболочки примем

$$U(P, t) = u(P)e^{i\Omega t}, \tag{2}$$

где Ω – собственная частота; u – собственная форма колебаний оболочки с жидкостью; $P(x, y, z)$ – точка на поверхности оболочки.

Как в работе [6], будем искать собственные формы колебаний оболочки с жидкостью в виде линейной комбинации собственных форм ее колебаний в вакууме

$$u = \sum_{k=1}^N c_k u_k, \tag{3}$$

где c_k – неизвестные коэффициенты; u_k – собственные формы колебаний оболочки в вакууме. Отметим, что выполняются следующие соотношения:

$$Lu_k = \omega_k^2 Mu_k, \quad (Mu_k, u_j) = \delta_{kj}. \tag{4}$$

где ω_k – k -я частота собственных колебаний в вакууме.

Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение (индуцированное колебаниями оболочки) является безвихревым. Эти допущения позволяют считать возмущенное движение жидкости потенциальным с потенциалом скоростей $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа. Заметим, что вектор давления P направлен по нормали к поверхности оболочки вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальное давление на смоченном теле. Обозначим $|P| = p$.

В случае гармонических колебаний жидкости примем

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)e^{i\Omega t}.$$

Давление жидкости определим в соответствии с интегралом Коши-Лагранжа [7] в предположении, что собственная скорость жидкости равна нулю:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -i\rho\Omega\varphi e^{i\Omega t}, \quad (5)$$

где ρ – плотность жидкости.

С учетом (2) и (5) уравнение (1) принимает вид

$$(\mathbf{L} - \Omega^2 \mathbf{M})\mathbf{u} = -i\rho\Omega\varphi. \quad (6)$$

Краевая задача для функции $\varphi(x, y, z)$ формулируется следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = i\Omega w, \quad P \in S_1, \quad (8)$$

$$p = -i\rho\Omega\varphi e^{i\Omega t} = 0, \quad P \in S_0, \quad (9)$$

Здесь w – нормальная составляющая перемещений оболочки, S_1 – смачиваемая поверхность оболочки, S_0 – свободная поверхность жидкости.

Таким образом, задача сводится к отысканию функций \mathbf{u} , φ , удовлетворяющих уравнению колебаний (6), условиям непротекания (8) на поверхности оболочки и отсутствия давления на свободной поверхности (9).

Обозначим через φ_k решение смешанной задачи для уравнения Лапласа (7)–(9). В символической форме это решение можно записать в виде

$$\varphi_k(P_0) = i\Omega \mathbf{H}(w_k(P_0)). \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{H}(w_k(P_0))$ – обратный оператор гидродинамической задачи; w_k – нормальные составляющие собственных форм колебаний оболочки в вакууме.

Подставим (3) в уравнение (6) и учтем, что в силу линейности задачи

$$\varphi = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k. \quad (11)$$

Получим

$$\mathbf{L} \left(\sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k \right) - \Omega^2 \mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k \right) = i\Omega \rho \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k. \quad (12)$$

В соотношении (12) подставим выражение (10) и умножим скалярно полученное равенство на w_j . Будем иметь, с учетом выполнения условий (4),

$$(\omega_k^2 \delta_{kj} + \delta_{kj}) c_j = \Omega^2 \rho \sum_{k=1}^N c_k (\mathbf{H}(w_k) \cdot w_j). \quad (13)$$

Соотношение (13) представляет собой обобщенную проблему собственных значений. Решив эту проблему, определим собственные частоты Ω_k колебаний оболочки с жидкостью и неизвестные коэффициенты c_k , которые являются коэффициентами при собственных формах колебаний оболочки в вакууме.

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к последовательному

определению частот ω_k и форм w_k оболочки в вакууме, решению смешанных задач для уравнения Лапласа (7), построению матрицы присоединенных масс жидкости $\rho(\mathbf{H}(w_k) \cdot w_j)$ и решению обобщенной проблемы собственных значений (13). Отметим, что определение гармонической функции φ можно осуществить разными методами. Например, в работе [5] для этой цели использован метод конечных элементов. Мы же будем использовать метод граничных интегральных уравнений.

2. Определение давления жидкости на оболочку. Для определения потенциала скоростей (11) и, следовательно, давления жидкости на оболочку требуется решить смешанную задачу для уравнения Лапласа (7)–(9).

Будем искать гармоническую функцию φ в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев [8], т. е. используем прямую формулировку метода граничных интегральных уравнений

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS. \quad (14)$$

Здесь предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$; точки P и P_0 принадлежат поверхности S . Величина $|P-P_0|$ представляет собой декартово расстояние между точками P и P_0 .

Для смешанной задачи (7)–(9) представление (14) приводит к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$2\pi\varphi(P_0) + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_1, \\ \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-P_0|} dS_1 - \iint_{S_0} q \frac{1}{|P-P_0|} dS_0 = \iint_{S_1} w \frac{1}{|P-P_0|} dS_1; \quad P_0 \in S_0 \quad (15)$$

относительно неизвестных функций φ и q . При этом функция φ , определенная на поверхности S_1 , представляет собой давление на смоченную поверхность оболочки, а функция q , определенная на поверхности S_0 , – нормальную составляющую скорости жидкости на свободной поверхности.

Поскольку S_1 – оболочка вращения, будем искать решение системы интегральных уравнений (15) в виде

$$w = w(r, z) \cos \alpha \theta, \quad \varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta.$$

Расстояние между точками оболочки вращения в цилиндрических координатах r, z, θ определяется формулой

$$|P-P_0| = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2 - 2rr_0 \cos(\theta-\theta_0)}.$$

В дальнейшем будем пользоваться стандартными обозначениями [9]

$$a = r^2 + r_0^2 + (z-z_0)^2; \quad b = 2rr_0; \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}.$$

Вычислим производную по нормали

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} = - \frac{n_r [r - r_0 \cos(\theta - \theta_0)] + n_z (z - z_0)}{(\sqrt{a - b \cos(\theta - \theta_0)})^3}, \quad (16)$$

где n_r, n_z – компоненты нормали к поверхности оболочки.

Выполним далее преобразования (16), подробно проведенные в [10], с целью сведения ядер в (15) к стандартным эллиптическим интегралам. После преобразований система (15) принимает окончательный вид

$$2\pi\varphi(z_0) + \int_{\Gamma} \varphi(z) \mathcal{Q}(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_1$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) \mathcal{Q}(z, z_0) r(z) d\Gamma - \int_0^R q(\rho) \Psi(P, P_0) \rho d\rho = \int_{\Gamma} w(z) \Psi(P, P_0) r(z) d\Gamma; P_0 \in S_0. \quad (17)$$

Здесь

$$\mathcal{Q}(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\};$$

$$\Psi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k).$$

$$F_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$E_{\alpha}(k) = (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2)^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad (18)$$

Γ – образующая поверхности S_1 , ρ – полярная координата на поверхности S_0 . Интегралы (17), (18) вычисляются численно по 6-точечным формулам Гаусса.

Для решения системы (17) использован метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией плотности на элементе [9].

Отметим, что для определения частот и форм собственных колебаний оболочки в вакууме используется полуаналитический метод конечных элементов. Незвестные функции представлены в виде рядов Фурье по окружной координате, таким образом, двумерная задача сводится к ряду одномерных. Геометрия конечного элемента и функции перемещений аппроксимируются кубическими полиномами [11].

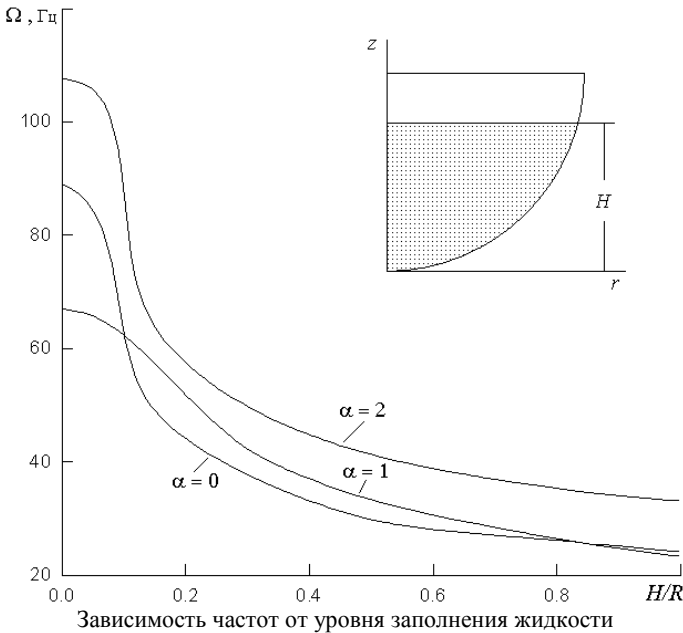
3. Собственные частоты колебаний полусферической оболочки с жидкостью. Рассмотрена задача о собственных колебаниях полусферической оболочки, заполненной жидкостью при различных уровнях H (см. рисунок). Оболочка имеет следующие параметры: радиус $R = 2,54$ м; толщина $h = 0,0254$ м; модуль упругости $E = 10$ Гпа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; плотность материала $\rho = 2770$ кг/м³. Плотность жидкости 1000 кг/м³. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.

В таблице приведены три первых собственных частоты колебаний оболочки, заполненной жидкостью при $H/R = 1$, для $\alpha=0$ (осесимметричные колебания). Сравнение полученных результатов с данными работы [5] показало их хорошее согласование.

На рисунке приведены графики изменения низшей частоты оболочки для $\alpha = 0; 1; 2$ в зависимости от уровня заполнения жидкости. Как видно, характер этих зависимостей является монотонным.

Собственные частоты колебаний оболочки, Гц

Ω	МГЭ	[5]
1	23,68	23,69
2	35,31	35,49
3	43,44	44,03



Проведенные численные исследования собственных частот и форм полусферической оболочки, заполненной жидкостью, подтверждают достоверность разработанного подхода. Полученные результаты станут основой для дальнейшего исследования поведения конструкций, взаимодействующих с жидкостью, при их динамическом нагружении.

Список литературы: 1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с. 2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твер-

дого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с. **3.** *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Nonlinear problems of the dynamics of elastic shells partially filled with a liquid // Intern. Appl. Mech. – 2000. – **36**, № 4. – P. 421–448. **4.** *Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.Е.* Введение в динамику сосудов с жидкостью. – Томск, Изд-во Томск. ун-та, 1977. – 144 с. **5.** *Мокеев В.В.* О решении матричных уравнений при конечно-элементном моделировании жидкости по Лагранжу в задачах гидроупругости // Динамика, прочность и износостойкость машин. – 1999. – № 6. – С.11-17. **6.** *Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А.* К теории собственных колебаний конструкций, содержащих жидкость // Доп. НАН України. – 2001. – № 10. – С. 61-65. **7.** *Валландер С.В.* Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. – 296 с. **8.** *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Физматгиз, 1968. – 576 с. **9.** *Бреббия К.,Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с. **10.** *Еселева Е.В., Гнисько В.И., Стрельникова Е.А.* Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью // Пробл. машиностроения. – 2006. – № 1. – С. 105-118. **11.** *Гнисько В.И., Мерзляков В.А.* Расчет неосесимметричного термоупругопластического состояния разветвленных оболочек вращения полуаналитическим методом конечных элементов // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 8. – С.105-115.

Поступила в редколлегию 01.03.2006

УДК 539.434

Є.М. ГОРАШ, НТУ «ХП»

ЗАСТОСУВАННЯ ІЗОТРОПНОЇ ТА АНІЗОТРОПНОЇ КОНЦЕПЦІЙ ПОШКОДЖУВАНОСТІ ДО РОЗРАХУНКУ ТРИВАЛОЇ МІЦНОСТІ РОТОРУ ПАРОВОЇ ТУРБІНИ В УМОВАХ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ПОВЗУЧОСТІ

У рамках дослідницької роботи дві типові моделі поведіння матеріалу, які описують ізотропну й анізотропну повзучість з урахуванням пошкоджуваності в металах і сплавах, застосовані для симуляції механічного поведіння ротора парової турбіни в його експлуатаційних умовах. Чисельні рішення початково-крайових задач одержують за допомогою МСЕ, використовуючи твердотільні вісесиметричні скінчені елементи. З метою адекватного розрахунку тривалої міцності обидві моделі повзучості були імплементовані в СЕ код програмного комплексу ANSYS. Отримані для ротора парової турбіни результати показують істотну залежність часу життя конструкції від типу моделі матеріалу.

Within the framework of the research work two typical material models describing isotropic and anisotropic creep-damage processes in metals and alloys are applied to the simulation of the mechanical behaviour of a steam turbine rotor in its service conditions. Numerical solutions of the initial-boundary value problems have been obtained by FEM using solid axisymmetrical type finite elements. For the purpose of adequate long-term strength analysis both isotropic and anisotropic creep-damage models have been implemented in FE-code of the universal CAE ANSYS. Obtained simulation results for a steam turbine rotor show the significant sensitivity of life-time assessment to the type of material model.

Огляд моделей високотемпературної повзучості. Повзучість супроводжується залежними від часу деформаціями й процесами пошкодження мікроструктури матеріалу конструкції, які включають зародження й ріст мікро-

скопичених тріщин і порожнин. Для того, що б належним чином охарактеризувати розвиток пошкодження матеріалу, та одночасно описати збільшення швидкості деформації повзучості протягом третьої стадії повзучості (стадія прискорюваної повзучості), була заснована механіка пошкоджуваності суцільного середовища, що продемонструвала свою спроможність, як потужного підходу до вивчення даного явища [1].

Велика кількість прикладів застосування механіки пошкоджуваності суцільного середовища пов'язана з прогнозами тривалої міцності конструктивних елементів електростанцій та хімічних об'єктів: 1) тонкостінні конструкції, такі як системи трубопроводів і коліна труб [2, 3], елементи силового устаткування та турбодвигунів [4, 5]. Попередні дослідження з пошкоджуваності при повзучості поперечно навантажених оболонок і пластин, такі як [6, 7], зазвичай беруть за основу ізотропну скалярну перемінну пошкоджуваності, запропоновану Качановим [8] і Работновим [9]. Концепція ізотропної пошкоджуваності добре підходить для опису поведінки пошкоджуваності при повзучості для деяких матеріалів, таких як сталі й алюмінієві сплави [10], і застосовна для простих напружених станів, які звичайно мають місце при одноосьових випробуваннях на повзучість [11]. У загальному випадку реалізації складних напружених станів за допомогою постійних або циклічних умов навантаження утворення порожнин відбувається на кордонах зерен, що може призвести до реалізації анізотропної третьої стадії повзучості з істотною залежністю від орієнтації навантаження. Анізотропна поведінка, що зумовлена пошкоджуваністю, спостерігалася в експериментах на повзучість під впливом непропорційного навантаження [12] або в експериментах з попередньо пошкодженими зразками для різних напрямків навантаження [13]. Внаслідок того, що природа пошкоджуваності, як правило, анізотропна, то явище ізотропної пошкоджуваності матеріалу варто розглядати як окремий випадок анізотропії пошкоджуваності. І навпаки, моделі ізотропної пошкоджуваності можуть бути розширені до моделей, які припускають пошкоджуваність, викликану анізотропією [14, 15].

Метою даної статті є визначення основних принципів ефективного застосування концепцій ізотропної та анізотропної пошкоджуваності до чисельних розрахунків тривалої міцності елементів конструкцій силового устаткування електростанцій в умовах високотемпературної повзучості на прикладі ротору секції високого тиску парової турбіни. Для порівняння ізотропної та анізотропної концепцій пошкоджуваності в розрахунках тривалої міцності ротору парової турбіни ми використовуємо класичну модель повзучості Качанова-Работнова-Хейхорста [1] з урахуванням ізотропної пошкоджуваності, а також розширення цієї моделі за допомогою тензору пошкоджуваності другого рангу, тобто модель Мураками-Оно [16]. Ці обидві моделі потребують однаковий набір констант повзучості [17]. З метою адекватного моделювання повзучості та розрахунку часу життя за допомогою МСЕ обидві зазначені моделі повзучості були імплементовані в інженерний програмний комплекс ANSYS за допомогою приєднаних підпрограм [18], що розробляються користува-

чем та програмується на мові FORTRAN.

Ізотропна модель повзучості. Розглянемо докладно найбільш використовувану в розрахунках ізотропну модель повзучості з урахуванням пошкоджуваності – модель Качанова-Работнова-Хейхьорста [1,8,9]. Внутрішні перемінні стану матеріалу і конкретна форма потенціалу повзучості для ізотропної поведінки матеріалу при повзучості можуть бути обрані, базуючись як на відомих механізмах деформації повзучості та еволюції пошкоджуваності, так і на можливостях проведення експериментальних вимірів та застосування для інженерних задач, наприклад [19]. Відповідно до відомих механізмів деформації швидкість деформації повзучості на першій та другій стадіях повзучості керується переважно інтенсивністю напружень за фон Мізесом. А на стадію прискорення повзучості має вплив ще і вид напруженого стану.

Перший крок при феноменологічному моделюванні повзучості являє собою формулювання емпіричних функцій, що описують чутливість мінімальної швидкості повзучості впродовж стадії сталої повзучості до рівня напружень та температури. Наступним кроком є модифікація функцій мінімальної швидкості повзучості за допомогою впровадження підходящих параметрів зміцнення та пошкоджуваності. Класична ізотропна концепція Качанова-Работнова-Хейхьорста [20] опирається на степеневу експоненціальну залежність для функції напружень та скалярний параметр пошкоджуваності. При цьому визначальне рівняння сталої повзучості для тензора швидкості деформації повзучості має вигляд [17]:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{екв}^{cr}}{\sigma_{vM}} S_{ij} \quad \text{та} \quad \dot{\epsilon}_{екв}^{cr} = A \left(\frac{\sigma_{vM}}{1-\omega} \right)^n, \quad (1)$$

де інтенсивність напружень за фон Мізесом має вигляд:

$$\sigma_{vM} = \left[\frac{3}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

А еволюційне рівняння для скалярного параметру пошкоджуваності може бути сформульовано наступним чином:

$$\dot{\omega} = B \left(\frac{\langle \sigma_{екв}^\omega \rangle}{(1-\omega)} \right)^m, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_*. \quad (3)$$

В цих формулах $\dot{\epsilon}_{ij}^{cr}$ – компоненти тензору швидкості деформації повзучості ($i, j = 1, 2, 3$), \mathbf{s} – девіатор тензору напружень та його компоненти s_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), A, B, n, m – константи повзучості матеріалу, ω – ізотропний параметр пошкоджуваності ($0 < \omega < 1$), і $\sigma_{екв}^\omega$ – еквівалентне напруження, що використовується в формі, запропонованій в [20]:

$$\sigma_{екв}^\omega = \alpha \sigma_l + (1-\alpha) \sigma_{vM}, \quad (4)$$

де σ_l – максимальне позитивне значення головних напружень, α – ваговий коефіцієнт або коефіцієнт впливу, що дозволяє визначити величину впливу головних механізмів пошкоджуваності на еволюцію пошкоджуваності (пе-

реважно визначається напруженнями – або σ_I або σ^{VM}).

Наведені вище рівняння моделі повзучості з пошкоджуваністю (1-3) виконують умову нестисливості. Тобто еволюція пошкоджуваності відбувається тільки при розтягувальному напруженні, і, отже, ніякої пошкоджуваності немає під дією стискального напруження:

$$\langle \sigma_{екв}^{\omega} \rangle = \sigma_{екв}^{\omega} \quad \text{для} \quad \sigma_{екв}^{\omega} > 0 \quad \text{та} \quad \langle \sigma_{екв}^{\omega} \rangle = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{екв}^{\omega} \leq 0. \quad (5)$$

Анізотропна модель повзучості. Розглянемо концепцію анізотропної пошкоджуваності, запропоновану С. Мураками та Н. Оно для того, щоб зробити висновки про вплив анізотропії, що викликана пошкоджуваністю, на результати аналізу тривалої міцності. До теперішнього часу не існує єдиного феноменологічного підходу в моделюванні повзучості з анізотропією, викликаною пошкоджуваністю через обмежену кількість експериментальних даних, які дозволяють перевірити вірність анізотропних моделей повзучості. Моделі анізотропної пошкоджуваності в основному сформульовані з використанням поняття тензора ефективних напружень [21].

Роблячи припущення, що головний механічний вплив повзучості з пошкоджуваністю має місце в результаті зменшення ефективної площі поперечного перетину, яке обумовлене утворенням порожнин на границях зерен у матеріалах, С. Мураками та Н. Оно [16] описали пошкоджений стан за допомогою симетричного тензора пошкоджуваності 2-го рангу Ω , що визначається тривимірною щільністю площі порожнин, і розробили теорію суцільного середовища стосовно повзучості з урахуванням пошкоджуваності для металів і сплавів. Тензор напружень σ збільшить своє значення і перетвориться на тензор ефективних напружень наступним чином:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma \cdot \Phi + \Phi \cdot \sigma), \quad \text{з урахуванням} \quad \Phi = [I - \Omega]^{-1}, \quad (6)$$

де I являє собою одиничний тензор другого рангу, а Ω – це симетричний тензор пошкоджуваності другого рангу.

Результати металографічних спостережень у міді та сталях показують, що порожнини, викликані повзучістю з пошкоджуваністю, розвиваються переважно на границях зерен, перпендикулярно максимальним розтягувальним напруженням [22]. Якщо припустити, що зменшення ефективної площі поперечного перерізу внаслідок формування порожнин відбувається переважно на площинах, перпендикулярних напрямку максимального розтягувального ефективного напруження $\tilde{\sigma}_I$, і швидкість цього формування порожнин керується величиною еквівалентного напруження, то аналогічно концепції повзучості з ізотропною пошкоджуваністю (1-3) можна сформулювати наступні рівняння:

$$\sigma_{\Omega}^{екв} = \alpha \tilde{\sigma}_I + (1 - \alpha) \tilde{\sigma}_{VM}, \quad \tilde{\sigma}_{VM} = \left[\frac{3}{2} \tilde{s} \cdot \tilde{s} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\langle \sigma_{\Omega}^{екв} \rangle = \sigma_{\Omega}^{екв} \quad \text{для} \quad \sigma_{\Omega}^{екв} > 0, \quad \langle \sigma_{\Omega}^{екв} \rangle = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{\Omega}^{екв} \leq 0,$$

де \tilde{s} позначає девіатор тензору ефективних напружень $\tilde{\sigma}$, а $\tilde{\sigma}_I$ — це максимальне позитивне значення $\tilde{\sigma}$, тобто перше головне ефективне напруження. Еволюційне рівняння для тензору пошкоджуваності може бути сформульоване наступним чином:

$$\dot{\Omega} = B \left[\langle \sigma_{\Omega}^{cr} \rangle \right]^k \left[tr(\Phi \cdot n_I \otimes n_I) \right]^{k-1} n_I \otimes n_I, \quad (8)$$

де n_I — це головний напрямок, що відповідає першому головному напруженню $\tilde{\sigma}_I$. З метою описання деформації пошкоджених матеріалів, що одночасно залежить і від зменшення ефективної площі поперечного перерізу і від відповідного об'ємного перерозподілу напружень, С. Мураками запропонував увести модифікований тензор напружень $\hat{\sigma}$ у визначальні рівняння повзучості пошкоджених матеріалів [16]. Якщо припустити, що відносна частка площі перерізу порожнин у матеріалі досліджуваної конструкції мала, і врахувати умову, що в непошкодженому стані модифікований тензор напружень $\hat{\sigma}$ повинен збігатися за значенням з σ , то $\hat{\sigma}$ варто припустити наступним чином:

$$\hat{\sigma} = \alpha_s \sigma + \frac{1}{2} \beta_s (\sigma \cdot \Phi + \Phi \cdot \sigma) + \frac{1}{2} (1 - \alpha_s - \beta_s) (\sigma \cdot \Phi^2 + \Phi^2 \cdot \sigma), \quad (9)$$

де α_s, β_s — це константи повзучості матеріалу. Якщо підставити модифікований тензор напружень $\hat{\sigma}$, та його девіаторну частину \hat{s} в рівняння закону Нортонна, то визначальне рівняння повзучості з урахуванням анізотропного характеру пошкоджуваності може бути записане в наступному вигляді [17]:

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{cr}^{cr}}{\dot{\sigma}_{VM}} \hat{s} \quad \text{та} \quad \dot{\epsilon}_{cr}^{cr} = A (\dot{\sigma}_{VM})^n, \quad (10)$$

де модифікована інтенсивність напружень за фон Мізесом:

$$\dot{\sigma}_{VM} = \left[\frac{3}{2} \hat{s} \cdot \hat{s} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Дослідження тривалої міцності ротору парової турбіни. В регулюючому ступені та першому компресорному ступені турбінної секції високого тиску парової турбіни К-500-166-1 потужністю 500 МВт (див. рис. 1) температура водяної пари значно вища за температуру пари в інших ступенях. Тому необхідно дослідити тривалу міцність ротору секції високого тиску та час життя до руйнування внаслідок незворотного процесу накопичення мікропошкоджень та мікротріщин через високотемпературну повзучість в матеріалі ротору — жароміцній високолігвованій сталі марки G-X 12CrMoWVNbN-10-11 (ливарна сталь 91). Досліджуваний ротор належить паровій турбіні моделі К-500-166-1 виробництва Радянського Союзу, що буду зроблена в період між 1977 та 1986 роками на бувшому Ленінградському Металічному заводі у Санкт-Петербурзі (Росія) [23]. У найбільш навантаженому елементі зазначеної турбіни, тобто у роторі секції високого тиску звичайно спостерігаються великі значення температурних градієнтів та отже і температурних напружень.

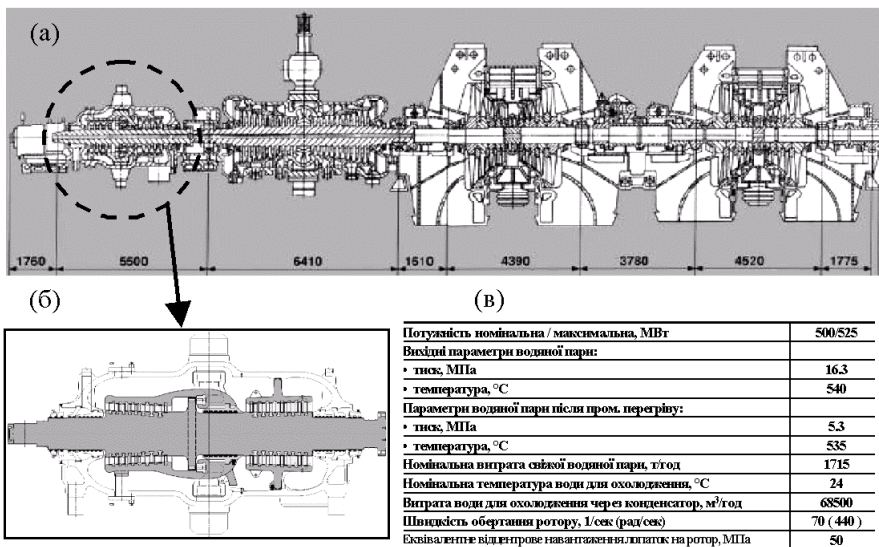


Рисунок 1 – Геометричні параметри та технічні характеристики парової турбіни К-500-166-1: (а) поздовжній переріз турбіни; (б) секція високого тиску турбіни К-500-166-1; (в) технічні параметри турбіни К-500-166-1

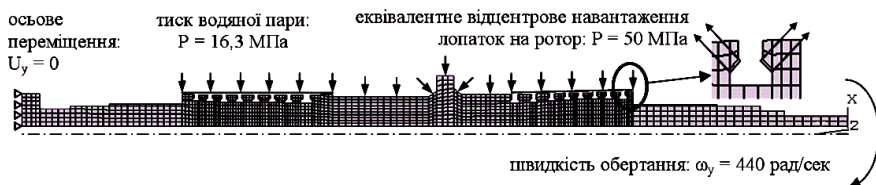


Рисунок 2 – Осесиметрична скінчено-елементна модель ротору секції високого тиску з граничними умовами та механічними навантаженнями

Таким чином, час робочої експлуатації парової турбіни К-500-166-1 до виходу із ладу залежить переважно від накопичення пошкоджень унаслідок повзучості у матеріалі конструкційних елементів турбінної секції високого тиску. Усі чисельні розрахунки ротору секції високого тиску, включаючи розрахунок спрощеного статичного температурного поля (див. рис. 3), початкових статичних полів пружних деформацій та напружень (див. рис. 4) та розрахунки повзучості з урахуванням пошкоджуваності (див. рис. 6-8), були виконані у скінчено-елементному програмному комплексі ANSYS. Найбільш підходящі моделі повзучості з урахуванням пошкоджуваності (ізотропна модель Качанова-Работнова-Хейхьорста та анізотропна модель Мураками-Оно), що потребують однаковий набір констант повзучості, були використані для прогнозу робочого часу життя ротору секції високого тиску до моменту руйнування. З метою адекватного моделювання повзучості та пошкоджуваності методом скінчених елементів обидві моделі повзучості були ім-

плементовані у програмний комплекс ANSYS за допомогою приєднаних під-програм, що розробляються користувачем та програмуються на мові COMPAQ VISUAL FORTRAN [18].

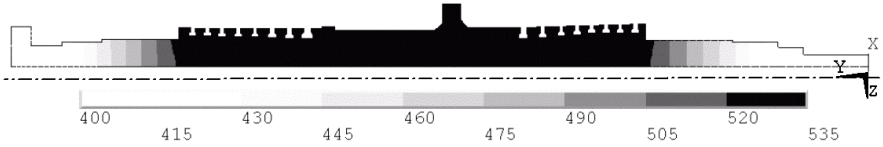


Рисунок 3 – Стационарне температурне поле у роторі турбінної секції високого тиску, °C

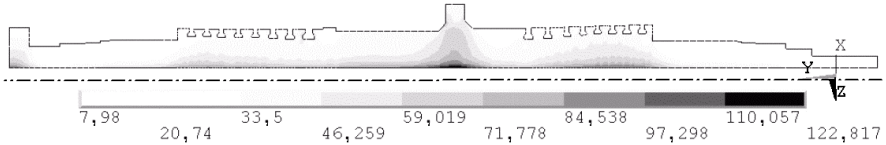


Рисунок 4 – Розподіл інтенсивності напружень за фон Мізеса [МПа] по об'єму ротору секції високого тиску в початковий момент часу

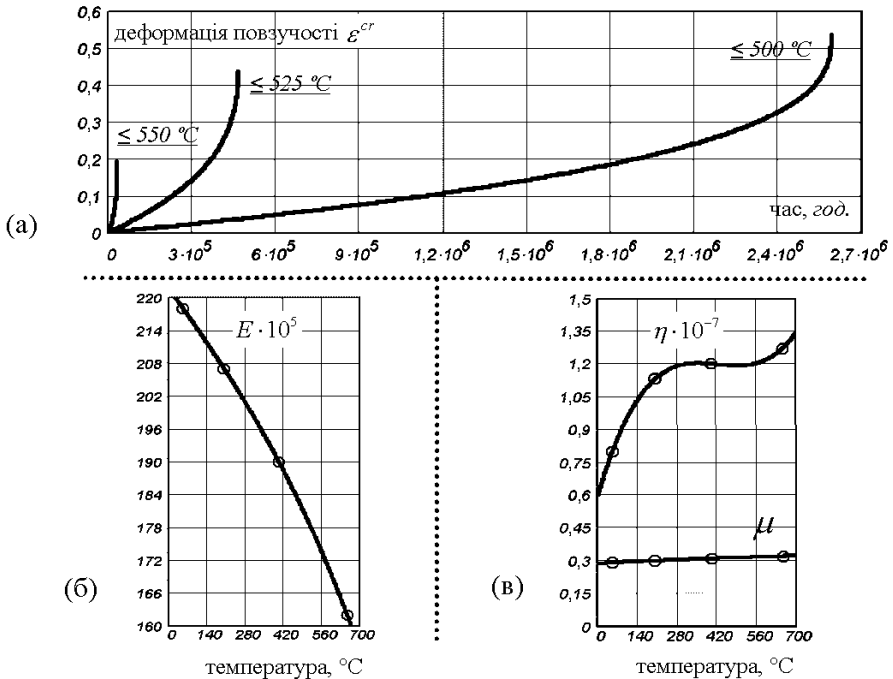


Рисунок 5 – Фізичні властивості сталі G-X 12CrMoWVNbN-10-11: (а) криві повзучості для різних температурних діапазонів; (б) модуль пружності Юнга E [кН/мм²]; (в) об'ємним коефіцієнтом температурного розширення η [K⁻¹] та коефіцієнт Пуассона μ

Вісесиметрична скінчено-елементна модель ротору секції високого тиску з граничними умовами та механічними навантаженнями, що використана для розрахунків на повзучість з урахуванням пошкоджуваності зображена на рис. 2. В скінчено-елементній моделі враховані різні властивості повзучості та пошкоджуваності для трьох областей ротору турбінної секції високого тиску з трьома різними температурними діапазонами: 1) 550-526°C; 2) 525-501°C; 3) 500-400°C (див. рис. 3). Необхідні набори констант повзучості матеріалу ротору, сталі G-X 12CrMoWVNbN-10-11, для послідовності значень робочих температур, що використовуються для розрахунків повзучості і пошкоджуваності методом скінчених елементів, визначені за допомогою методики обробки експериментальних кривих повзучості з використанням лінійної апроксимації методом найменших квадратів (див. табл.).

Температурний діапазон – T , [°C]	Константи повзучості матеріалу			
	A , [Mpa^{-n}/h]	n	B , [Mpa^{-m}/h]	m
400 – 500 °C	$3,9863 \cdot 10^{-21}$	6,3797	$2,3977 \cdot 10^{-26}$	8,7618
501 – 525 °C	$1,4541 \cdot 10^{-20}$	6,4384	$1,3327 \cdot 10^{-25}$	8,7629
526 – 550 °C	$8,2795 \cdot 10^{-18}$	5,4794	$3,5020 \cdot 10^{-20}$	6,7843

Ваговий коефіцієнт $\alpha = 0,3$, що визначає вплив першого головного напруження та інтенсивності напружень за фон Мізесом на еволюцію пошкоджуваності, взятий з [24] як усереднене значення для жароміцних сталей, що використовуються для виготовлення конструкційних елементів парових турбін. І остання константа повзучості $\omega_* = 0,9$ (критичне значення скалярного параметру повзучості для ізотропної моделі повзучості або головного значення тензору пошкоджуваності Ω для анізотропної моделі повзучості) має значення, що відповідає критичній межі пошкоджуваності більшості конструкційних сталей.

Одноосові криві повзучості матеріалу ротору для трьох різних температурних діапазонів наведені на рис. 5, а. Ізотропні пружні механічні властивості матеріалу ротору, жароміцної сталі марки G-X 12CrMoWVNbN-10-11, без впливу пошкоджуваності представлені модулем пружності Юнга (див. рис. 5, б), об'ємним коефіцієнтом температурного розширення η та коефіцієнтом Пуассона (див. рис. 5, в), чисельні значення яких були взяті з Інтернет-довідника фізичних властивостей металів та сплавів [25].

У якості результатів розрахунків несталої повзучості за допомогою методу скінчених елементів були отримані два значення розрахункового часу робочого життя ротору секції високого тиску – з урахуванням скалярного параметру пошкоджуваності (див. рис. 6) та з урахуванням тензорного параметру пошкоджуваності (див. рис. 7), а також поля розподілу напружень на деформацій по об'єму ротору під час процесу повзучості, наприклад рис. 8. Значення розрахункового часу робочого життя ротору парової турбіни наступні – 136 486 годин (15,6 років) для ізотропної моделі повзучості Качанова-Работнова-Хейхорста [20] та 183 573 годин (20,9 років) для анізотропної мо-

делі повзучості Муракамі-Оно [16].

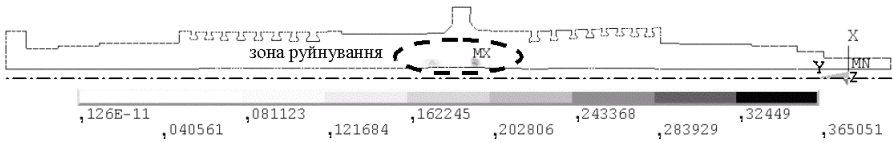


Рисунок 6 – Розподіл скалярного параметру пошкоджуваності ω по об'єму ротору секції високого тиску в останній момент часу перед руйнуванням (ізотропна модель Качанова-Работнова-Хейхорста)

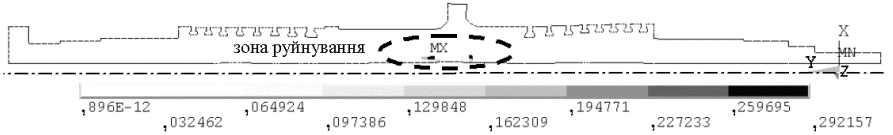


Рисунок 7 – Розподіл першого головного значення тензора пошкоджуваності Ω_1 по об'єму ротору секції високого тиску в останній момент часу перед руйнуванням (анізотропна модель Муракамі-Оно)

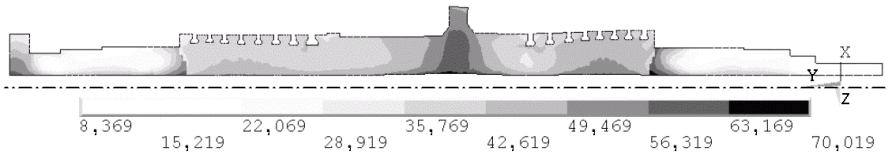


Рисунок 8 – Розподіл інтенсивності напружень за фон Мізесом [МПа] по об'єму ротору секції високого тиску перед руйнуванням

Висновки. Розраховане за допомогою ізотропної моделі повзучості Качанова-Работнова-Хейхорста та скалярного параметру пошкоджуваності значення часу робочого життя ротору секції високого тиску парової турбіни моделі К-500-166-1 на 25 % довше, ніж значення часу робочого життя, визначене за допомогою анізотропної моделі повзучості Муракамі-Оно та тензорного параметру пошкоджуваності. Розрахунковий час робочого життя ротору парової турбіни суттєво залежить від урахування спрямованого характеру пошкоджуваності, який мотивований складним і неоднорідним напружено-деформованим станом зазначеного елемента конструкції. Таким чином, модель повзучості Муракамі-Оно задовільно описує поведінку матеріалу конструкції при повзучості та цілком прийнятна для проведення чисельних розрахунків тривалої міцності методом скінченних елементів, що реалізований в універсальному інженерному програмному комплексі ANSYS.

Список літератури: 1. Hayhurst D.R. Computational continuum damage mechanics: its use in the prediction of creep in structures: past, present and future // Creep in Structures (ed. by Murakami, S. and Ohno, N.). – Dordrecht, Kluwer, 2001. – PP. 175-188. 2. Altenbach H. Creep Analysis of Thin-Walled Structures // ZAMM-Z. Angew. Math. Mech. – 82. – 2002. – PP. 507-533. 3. Naumenko K. On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations // Technische Mechanik. – 20(3). –

2000. – PP. 215-226. **4.** *JianPing J., Guanga M., Yi S. and SongBo X.* An effective continuum damage mechanics model for creep–fatigue life assessment of a steam turbine rotor // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – **80**. – 2003. – PP. 389-396. **5.** *Nowak G. and Rustin A.* Lifetime Deterioration of Turbine Components During Start-Ups // OMMI. – Vol. 3, issue 1, April 2004. – PP. 1-10. **6.** *Cocks A. and Leckie F.* Creep rupture of shell structures subjected to cyclic loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – PP. 294–298. **7.** *Altenbach H., Kushnrevsky V. and Naumenko K.* On the use of solid- and shell-type finite elements in creep-damage predictions of thin-walled structures // Arch. Appl. Mech. – 2001. – PP. 164-181. **8.** *Kachanov L.* On rupture time under condition of creep // Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekhn. Nauk. – 1958. – PP. 26-31. **9.** *Rabotnov Y.* Creep Problems in Structural Members // North Holland, Amsterdam, 1969. **10.** *Chaboche J.* Continuum damage mechanics a tool to describe phenomena before crack initiation // Nuclear Engineering and Design. – 1981. – PP. 233-247. **11.** *Murakami S.* A continuum mechanics theory of anisotropic damage // Yielding, damage and failure of anisotropic solids (edited by J. P. Boehler). Mechanical Engineering Publications. – London. – 1990. – PP. 465-482. **12.** *Betten J., El-Magd E., Meydanli S. and Palmen P.* Bestimmung der Materialkennwerte einer drei-dimensionalen Theorie zur Beschreibung des tertiären Kriechverhaltens austenitischer Stähle auf der Basis der Experimente // Arch. Appl. Mech. – **65**. – 1995. – PP. 110–120. **13.** *Murakami S. and Sanomura Y.* Creep and creep damage of copper under multiaxial states of stress // Plasticity today (edited by A. Sawczuk and G. Bianci), Elsevier Appl. Sci. – London. – 1985. – PP. 535–551. **14.** *Cordebois J. and Sidoroff F.* Damage induced elastic anisotropy. Mechanical behaviours of anisotropic solids (edited by J.P. Boehler) // Mattinns Nilhoff. – Boston. – 1983. – PP. 761–774. **15.** *Murakami S. and (Eds.) N.O.* Iutam symposium on creep in structures // Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht. – 2000. **16.** *Murakami S. and Ohno N.* A continuum theory of creep and creep damage // Creep in structures (edited by A.R.S. Ponter and D.R. Hayhurst). Springer Verlag, Hrsrg. – 1981. – PP. 422–443. **17.** *Altenbach H., Huang C.-X., Naumenko K.* Creep-damage prediction in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // J. Strain Analysis. – 2002. – **37**, no. 3. – PP. 265-275. **18.** ANSYS User's Manual for Revision 5.0. Volume IV. Theory // Edited by Peter Kohnke, PhD., Swanson Analysis Systems, Inc., 1994. – 1266 p. **19.** *Altenbach H.* Creep and damage in materials and structures // CISM Courses and Lectures. – no. 399. – Wein/New York: Springer. – 1999. **20.** *Leckie F.A., Hayhurst D.R.* Constitutive equations for creep rupture // Acta Metall. – **25**. – 1977. – PP. 1059-1070. **21.** *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics // Springer-Verlag, Berlin. – 1992. **22.** *Hayhurst D.R., Leckie F.E.* High temperature creep continuum damage in metals // Boehler, J.P. (Ed.), Yielding Damage and Failure of anisotropic Solids EGF5. – 1990. – PP. 445-464. **23.** *Hassa R.* The up-to-date turbine pool of VE-G: A guarantor of the competition in the European electricity market // OMMI. – Vol. 2, issue 3, December 2003. – PP. 1-14. **24.** *Hyde T.H., Sun W. and Williams J.A.* Creep analysis of pressurized circumferential pipe weldments – a review // J.Strain Analysis. – Vol. 38, no. 1. – PP. 1-29. **25.** <http://www.edelstahl-witten-krefeld.de> – Інтернет-довідник фізичних характеристик металів та сплавів фірми «Edelstahl Witten-Krefeld GmbH».

Надійшла до редколегії 30.03.2006

УДК 539.434

Е.Н. ГОРАШ, С.В. ЛЫСЕНКО, канд.техн.наук;
Г.И. ЛЬВОВ, докт.техн.наук; НТУ «ХПІ»

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ ПАРОВЫХ ТУРБИН

У рамках дослідження традиційна модель механіки руйнування суцільних середовищ Качанова-Работнова-Хейхерста розширена до варіанту, що враховує переміну температуру та деформаційне зміцнення. Обидві швидкості, як деформації, так і пошкоджваності, вважаються залежними від температури. Представлена методика обчислення констант повзучості матеріалу, що базуються на наявному сімействі експериментальних кривих повзучості. Отримана неізотермічна

модель повзучості з урахуванням пошкоджуваності та зміцнення вбудовується до SE-коду універсального пакету для інженерних розрахунків ABAQUS. Крім того, для визначення основних рис повзучості товстостінних елементів конструкцій наводиться приклад навантаженої внутрішнім тиском труби, що зазнає нерівномірного температурного впливу.

The conventional Kachanov-Rabotnov-Hayhurst type continuum damage mechanics creep model is extended to the case of variable temperature and strain hardening consideration. Both the creep and the damage rates are assumed temperature dependent. A technique for the identification of material creep constants based on the available family of experimental creep curves is presented. The resulting non-isothermal creep-damage constitutive model is incorporated into the FE-code of the universal CAE-system ABAQUS. Moreover, an example for a pressurized pipe exposed to the non-uniform heating is shown to illustrate basic features of creep-damage character in thick-walled structural components.

Введение. Многие важные конструкционные элементы паровых турбин функционируют в условиях повышенных температур и сложных нагрузок в течение длительного времени. Следовательно, расчет ползучести с учетом накопления повреждаемости и определение остаточного времени до разрушения являются важными критериями достоверного расчета длительной прочности конструкции.

Сложность физических процессов ползучести и повреждаемости приводит к необходимости применять феноменологический подход к составлению определяющих уравнений ползучести. Однако, используемые в последнее время модели ползучести, а также доступные результаты расчетов на длительную прочность обычно ограничены изотермическими условиями. Расширение имеющихся моделей до вариантов, учитывающих изменение температуры, требует дорогостоящих экспериментов на ползучесть и, как следствие, большого количества констант ползучести.

Металлографические исследования жаропрочных сталей показывают значительную сложность и разнообразие физических процессов на разных стадиях ползучести. С определенной степенью вероятности можно сделать вывод о преобладании диффузионно-управляемого перемещения дислокаций на второй стадии ползучести. Различные механизмы взаимодействия частиц и дислокаций, а также старения микроструктуры материала могут действовать в течение третьей стадии ползучести, приводя при этом к уменьшению прочности материала и, как следствие, к разрушению. Значения энергий активации для этих физических процессов в общем случае имеют различные виды и степени зависимости от температуры. Это физическое основание использовано для разработки модели ползучести с учетом повреждаемости и деформационного упрочнения для переменной температуры.

1. Анализ литературы. Накопление деформаций ползучести – это температурно-активируемый процесс. Явление элементарной деформации получает дополнительную энергию от локального теплового воздействия. Обычно принято, что при температуре выше $0,5 \cdot T_m$ (где T_m – это температура плавления) энергия активации установившейся деформации близка по значению к энергии активации самодиффузии. Для многих металлов было документально

зафиксировано хорошее соответствие между наблюдаемой энергией активации ползучести Q_c и энергией активации самодиффузии в кристаллической решетке Q_{sd} [1, 2].

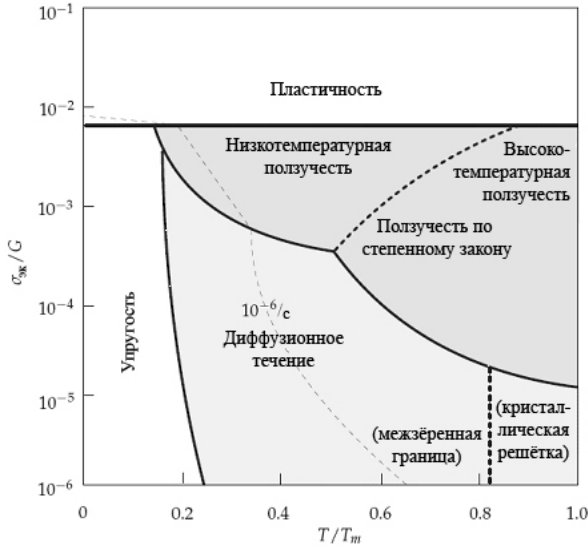


Рисунок 1 – Схематическое изображение карты деформационных механизмов

Для точного описания температурных зависимостей ползучести для широкого диапазона температур необходимо обсудить следующие вопросы. Во-первых, константы материала в определяющем уравнении для скорости ползучести и эволюционных уравнениях для переменных упрочнения и повреждаемости являются температурно-зависимыми. Для того, чтобы подобрать подходящие функции, зависящие от температуры, необходимы экспериментальные данные для широкого диапазона температур. Во-вторых, если допустить, что напряжение остается постоянным в течение эксперимента на ползучесть, изменение уровня температуры может привести к изменению деформации или механизма повреждаемости. Обзор карт деформационных механизмов можно найти в [3]. Контуры постоянных скоростей деформации представлены, как функции нормализованного эквивалентного напряжения $\sigma_{эк} / G$ и гомологичной температуры T/T_m , где G – модуль сдвига и T_m – температура плавления. На рис. 1 показана типичная деформационная карта. Карты деформационных механизмов описаны, например, в [4]. Примеры для нескольких металлов представлены в [3].

Физические исследования [5] показывают, что диффузионная ползучесть является главным механизмом деформации при низких напряжениях. Для температурного диапазона $0,5T_m - 0,9T_m$ и повышенных напряжений доминирующим механизмом ползучести является поперечное скольжение дислока-

ций. Для этого случая энергия активации отличается от энергии активации для диффузионной ползучести, например [5, 6].

В зависимости от выбора модели ползучести главной проблемой является определение констант ползучести для соответствующего материала. Для определения констант даже простые модели требуют большое количество экспериментов, как с одноосным нагружением, так и с многоосным.

В последние годы большое количество ученых и инженеров в энергомашиностроении интенсивно работают в направлении улучшения моделирования при исследовании процессов ползучести и повреждаемости в компонентах турбодвигателей, например, ЕССС [7, 8]. В настоящий момент, существует большое количество моделей, способных описать одноосные кривые ползучести для некоторых диапазонов напряжений и температур. И только некоторые из них считаются применимыми для расчетов ползучести с помощью МКЭ при многоосном напряженном состоянии. Целью данной статьи является описание неизотермической модели ползучести с учетом упрочнения и повреждаемости, которая применима для расчетов на ползучесть компонентов паровых турбин и другого силового оборудования, работающего в широком диапазоне температур и напряжений. Определяющее уравнение ползучести и эволюционное уравнение повреждаемости указанной модели встраивается в КЭ код инженерного программного комплекса ABAQUS [9, 10] для расчетов на ползучесть сложных конструкций.

2. Неизотермическая модель ползучести с учетом повреждаемости.

Рассмотрим далее расширенную модель ползучести с учетом повреждаемости на базе классической модели Качанова [11], Работнова [12] и Хейхерста [13] с учетом зависимости от температуры и деформационного упрочнения для одноосного и многоосного напряженного состояния. Эта модель описывает поведение материала при ползучести на первой, второй и третьей стадиях.

2.1. Одноосное напряженное состояние. Модель Качанова-Работнова-Хейхерста и физические механизмы ползучести типичных жаропрочных сталей представляют основу для представленной далее неизотермической модели ползучести с учетом повреждаемости. Стадия первичной ползучести характеризуется введением функции деформационного упрочнения в форме:

$$H(\varepsilon^{cr}) = 1 + C \cdot \exp(-\varepsilon^{cr}/k). \quad (1)$$

Для того, чтобы отразить различное влияние температуры на диффузионную ползучесть и поперечное скольжение дислокаций вводятся две разные функциональные зависимости – в определяющее уравнение для скорости деформации ползучести и в эволюционное уравнение, определяющее скорость повреждаемости. Для описания зависимостей от температуры используется функция Аррениуса [14]:

$$A(T) = A \cdot \exp(-Q_\alpha/R \cdot T) \quad \text{и} \quad B(T) = B \cdot \exp(-Q_\beta/R \cdot T). \quad (2)$$

Одноосная форма уравнений ползучести и повреждаемости с учетом деформационного упрочнения для полей переменной температуры:

$$\frac{d\varepsilon^{cr}}{dt} = A(T) \cdot H(\varepsilon^{cr}) \cdot \left(\frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n, \quad (3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = B(T) \cdot \frac{\sigma^m}{(1-\omega)^l}. \quad (4)$$

В уравнениях (1-4) ε^{cr} обозначает деформацию ползучести; t – время; σ – одноосное напряжение; Q_α и Q_β – энергии активации; T – абсолютную температуру; A, B, C, n, m, k, l – константы ползучести материала; ω – скалярный параметр повреждаемости ($0 \leq \omega \leq \omega^*$), где ω^* является критическим значением параметра повреждаемости, соответствующим значению времени до разрушения t^* .

Вместо трех констант, включая энергии активации ползучести и повреждаемости и универсальную газовую постоянную, введем в рассмотрение следующие две константы ползучести:

$$h = Q_\alpha / R \quad \text{и} \quad p = Q_\beta / R. \quad (5)$$

В общем случае, значения температурных энергий активации процесса ползучести Q_α и процесса повреждаемости Q_β для типичной жаропрочной стали являются различными. Вместе с другими константами материала они определяются с помощью набора экспериментальных кривых ползучести для широкого диапазона напряжений и температур.

Проинтегрировав по времени эволюционное уравнение повреждаемости (4), предполагая постоянные значения напряжения ($\sigma = \text{const}$) и температуры ($T = \text{const}$), получим функцию $\omega(t)$ в следующем виде:

$$\omega(t) = 1 - \left[1 - (l+1) \cdot B \cdot \exp(-p/T) \cdot \sigma^m \cdot t \right]^{1/(l+1)}. \quad (6)$$

Время до разрушения t^* может быть определено в предположении $\omega = 1$ в следующем виде:

$$t_* = 1 / \left[(l+1) \cdot B \cdot \exp(-p/T) \cdot \sigma^m \right]. \quad (7)$$

Учитывая функцию $\omega(t)$ в виде (6), определяющее уравнение (3) интегрируется в предположении постоянного напряжения ($\sigma = \text{const}$):

$$\varepsilon^{cr}(t) = k \cdot \ln \left[(1+C) \cdot \exp(\zeta(t)/k) - C \right],$$

$$\text{где } \zeta(t) = \frac{A \cdot \exp\left(\frac{p-h}{T}\right) \cdot \sigma^{n-m}}{B \cdot (n-l-1)} \cdot \left\{ \left[1 - (l+1) \cdot B \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \sigma^m \cdot t \right]^{\frac{l-n+1}{l+1}} - 1 \right\}. \quad (8)$$

2.2. Многоосное напряженное состояние. Внутренние переменные состояния материала и конкретная форма потенциала ползучести феноменологической модели изотропного поведения материала могут быть выбраны, базируясь на известные механизмы деформации ползучести и эволюции повреждаемости [15]. В соответствии с известными механизмами деформации ско-

рость деформации ползучести на первой и второй стадиях ползучести управляется в основном интенсивностью напряжений. А на третью стадию ползучести, ускоряемую повреждаемостью, дополнительно имеет влияние еще и вид напряженного состояния.

Классическая изотропная концепция Качанова-Работнова-Хейхерста [16] опирается на степенную зависимость для функции напряжений и скалярный параметр повреждаемости:

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{\text{эКв}}^{cr}}{\sigma_{vM}} s, \quad \dot{\varepsilon}_{\text{эКв}}^{cr} = A \cdot \exp\left(-\frac{h}{T}\right) \cdot \left(1 + C \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon_{\text{эКв}}^{cr}}{k}\right)\right) \cdot \left(\frac{\sigma_{vM}}{1-\omega}\right)^n, \quad (9)$$

$$\dot{\omega} = B \cdot \exp\left(-\frac{p}{T}\right) \cdot \frac{\left(\langle \sigma_{\text{эКв}}^{\omega} \rangle\right)^m}{(1-\omega)^l}. \quad (10)$$

В данных формулах $\dot{\varepsilon}^{cr}$ означает тензор скорости деформации ползучести; $\sigma_{vM} = \left[\frac{3}{2} s \cdot s\right]^{1/2}$ – интенсивность напряжений; s – девиатор тензора напряжений; $\sigma_{\text{эКв}}^{\omega}$ – эквивалентное напряжение, используемое в форме, предложенной в [17]:

$$\sigma_{\text{эКв}}^{\omega} = \alpha \sigma_I + (1-\alpha) \sigma_{vM}, \quad (11)$$

где σ_I означает максимальное главное напряжение; α – весовой коэффициент или коэффициент влияния, определяющий величину влияния главных механизмов повреждаемости на эволюцию повреждаемости (в основном определяется напряжениями σ_I или σ_{vM}). Коэффициент α принимаем равным 0,3 как усредненное значение для жаропрочных сталей [18], которые используются в производстве элементов паровых турбин.

Модель ползучести с учетом повреждаемости (9-10) выполняет условие несжимаемости. Таким образом, эволюция повреждаемости происходит только при положительном растягивающем напряжении:

$$\langle \sigma_{\text{эКв}}^{\omega} \rangle = \sigma_{\text{эКв}}^{\omega} \quad \text{для} \quad \sigma_{\text{эКв}}^{\omega} > 0 \quad \text{и} \quad \langle \sigma_{\text{эКв}}^{\omega} \rangle = 0 \quad \text{для} \quad \sigma_{\text{эКв}}^{\omega} \leq 0. \quad (12)$$

3. Процедура идентификации констант ползучести материала. Методика определения констант ползучести для одноосной модели разработана на основании семейства экспериментальных кривых ползучести, представляющего широкий диапазон температур и напряжений. Используемый при расчетах, набор из 9-ти констант ползучести, подходящий для неизотермической модели ползучести с учетом повреждаемости и упрочнения, соответствует одной типичной марке жаропрочной стали, широко используемой при производстве в энергомашиностроении.

Процедура определения констант ползучести материала при постоянной температуре описана в [16]. Для определения значений энергий активации процессов ползучести и повреждаемости, т.е. констант ползучести h и p , необходимо иметь экспериментальные данные, по крайней мере, для двух фиксированных значений температуры. Если имеются экспериментальные дан-

ные для более чем двух значений температуры, то необходимо использовать процедуру определения констант ползучести материала для неизотермической модели ползучести с учетом повреждаемости и деформационного упрочнения в следующем виде.

3.1. Шаг 1. Определение констант для второй стадии ползучести.

Стадия установившейся ползучести каждой кривой ползучести из набора экспериментальных кривых в виде массива данных $(\varepsilon_{d,t_d}), (\varepsilon_{d+1,t_{d+1}), \dots, (\varepsilon_q,t_q)$, где $d \geq 2$ и $q \leq f$ (f представляется собой количество экспериментальных измерений), аппроксимируется методом наименьших квадратов (МНК), используя линейную функцию следующего вида

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}_{\min}^{cr} t, \quad (13)$$

где минимальная скорость ползучести $\dot{\varepsilon}_{\min}^{cr}$ представляет собой коэффициент наклона, определяемый для линейной функции (13) в следующей форме:

$$\dot{\varepsilon}_{\min}^{cr} = \left[(q-d) \sum_{i=d}^q t_i \varepsilon_i - \left(\sum_{i=d}^q t_i \right) \left(\sum_{i=d}^q \varepsilon_i \right) \right] / \left[(q-d) \sum_{i=d}^q t_i^2 - \left(\sum_{i=d}^q t_i \right)^2 \right]. \quad (14)$$

Константы ползучести материала A и n для соотношения между скоростью деформации ползучести и напряжением $\dot{\varepsilon}^{cr} = A \cdot \sigma^n$ могут быть определены после обработки участка установившейся ползучести. В двойных логарифмических координатах минимальная скорость деформации ползучести и напряжение теоретически должны быть связаны линейной зависимостью (см. рис. 2), которая может быть аппроксимирована методом наименьших квадратов

$$\lg \dot{\varepsilon}_{\min}^{cr} = \lg A + n \lg \sigma, \quad (15)$$

где константа ползучести n – это коэффициент наклона функции (15).

Определив φ наборов значений минимальных скоростей ползучести $\dot{\varepsilon}_{\min 1}^{cr}, \dot{\varepsilon}_{\min 2}^{cr}, \dots, \dot{\varepsilon}_{\min \xi}^{cr}$, соответствующих фиксированным напряжениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\xi$ для фиксированных значений температуры $T_1, T_2, \dots, T_\varphi$ (где ξ – число экспериментальных напряжений, и φ – число экспериментальных температур, соответствующих экспериментальным кривым ползучести с явно выраженным участком установившейся ползучести), можно вычислить константу ползучести n и ряд температурно-зависимых констант ползучести A_j ($j = 1, 2, \dots, \varphi$), используя следующие выражения, полученные с помощью МНК и аппроксимирующей функции (15):

$$n = \left[\xi \sum_{i=1}^{\xi} (\lg \dot{\varepsilon}_{\min i}^{cr} \cdot \lg \sigma_i) - \left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \dot{\varepsilon}_{\min i}^{cr} \right) \left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i \right) \right] / \left[\xi \sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i \right)^2 \right]; \quad (16)$$

$$\lg A_j = \frac{\left[\left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \dot{\varepsilon}_{\min i}^{cr} \right) \left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{\xi} (\lg \dot{\varepsilon}_{\min i}^{cr} \cdot \lg \sigma_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i \right) \right]}{\left[\xi \cdot \sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\xi} \lg \sigma_i \right)^2 \right]}. \quad (17)$$

Массив данных (A_j, T_j) , где $j = 1, 2, \dots, \varphi$, который представляет собой тем-

пературную зависимость второй стадии ползучести, может быть довольно точно аппроксимирован МНК с использованием функции от температуры в форме закона Аррениуса в следующем виде:

$$A(T) = a \cdot \exp(-h/T), \quad (18)$$

которая является линейной в полулогарифмических координатах, и которая содержит константы ползучести материала a и h :

$$a = \frac{A(T_1)}{\exp(-h/T_1)} = \frac{A(T_2)}{\exp(-h/T_2)}, \quad h = \frac{T_1 \cdot T_2 \cdot \ln(A(T_1)/A(T_2))}{T_1 - T_2}. \quad (19)$$

3.2. Шаг 2. Определение констант для третьей стадии ползучести.

Константа ползучести l_j определяет величину кривизны участка третьей стадии кривых ползучести и управляет величинами критической деформации ползучести $(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_\psi^*)$, соответствующей времени до разрушения $(t_1^*, t_2^*, \dots, t_\psi^*)$ для диапазона фиксированных напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\psi)$, при которых имеется четко выраженная третья стадия ползучести, и диапазона фиксированных температур $T_1, T_2, \dots, T_\varphi$, следующим образом:

$$l_i(T_j) = n - 1 + \frac{n}{\left[\left(\frac{\varepsilon_i^*}{A \cdot \exp(-h/T_j) \cdot (\sigma_i^*)^n \cdot t_i^*} \right) - 1 \right]}, \quad (j = 1, 2, \dots, \varphi; i = 1, 2, \dots, \psi), \quad (20)$$

где ψ представляет собой количество экспериментальных значений напряжений, соответствующих экспериментальным кривым ползучести с явно выраженным участком третьей стадии ползучести, и φ представляет собой количество экспериментальных значений температуры.

Общее для всего экспериментального диапазона напряжений $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\psi)$, при которых имеется четко выраженная третья стадия ползучести, значение константы l_j ($j = 1, 2, \dots, \varphi$), соответствующее фиксированному значению температуры T_j , определяется как среднее арифметическое значение ряда $l_i(T_j)$ ($i = 1, 2, \dots, \psi$). Далее, общее для всех температур $(T_1, T_2, \dots, T_\varphi)$ значение константы ползучести l определяется, как среднее арифметическое значение ряда l_j ($j = 1, 2, \dots, \varphi$).

Кривые длительной прочности (см. рис. 3), которые соответствуют набору фиксированных значений температуры $(T_1, T_2, \dots, T_\varphi)$, или по-другому, зависимости времени до разрушения $(t_1^*, t_2^*, \dots, t_\psi^*)$ от приложенного напряжения $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\psi)$, могут быть аппроксимированы МНК используя следующую функцию, линейную в двойных логарифмических координатах:

$$\lg t^* = -\lg[(l+1) \cdot B] - m \lg \sigma, \quad (21)$$

где ψ представляет собой число экспериментальных значений напряжения, соответствующих имеющимся экспериментальным кривым ползучести с четко выраженным участком третьей стадии. Константа ползучести m , кото-

рая не зависит от температуры, характеризует наклон функции (21), которая является линейной в двойных логарифмических координатах.

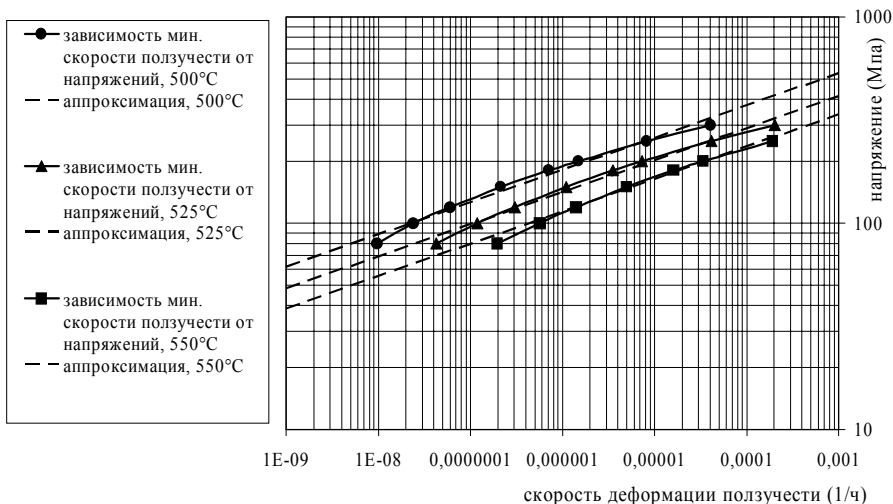


Рисунок 2 – Зависимости минимальной скорости деформации ползучести от напряжений на второй стадии ползучести для нескольких фиксированных температур

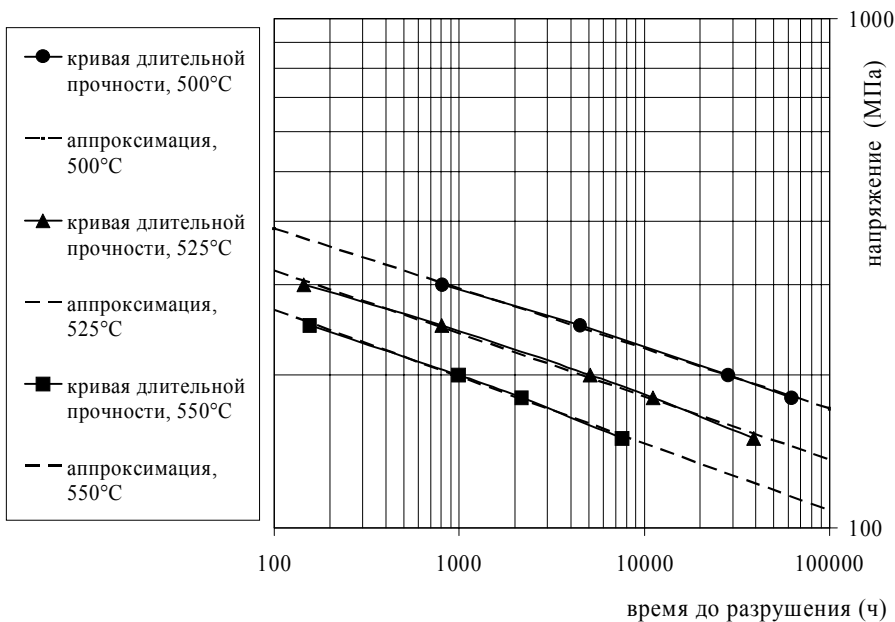


Рисунок 3 – Кривые длительной прочности для нескольких фиксированных температур

Константа ползучести m и набор зависимых от температуры констант B_j ($j = 1, 2, \dots, \varphi$) могут быть определены из следующих соотношений, полученных с помощью МНК, используя аппроксимирующую функцию (21):

$$m = - \left[\psi \sum_{i=1}^{\varphi} (\lg t_i^* \cdot \lg \sigma_i) - \left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg t_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i \right) \right] / \left[\psi \sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i \right)^2 \right], \quad (22)$$

$$\lg [(l+1) \cdot B_j] = - \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg t_i^* \right) \left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{\varphi} (\lg t_i^* \cdot \lg \sigma_i) \right) \left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i \right)}{\psi \sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{\varphi} \lg \sigma_i \right)^2} \right) \quad (23)$$

Массив данных (B_j, T_j) , где $j = 1, 2, \dots, \varphi$, представляющий собой температурную зависимость третьей стадии ползучести, может быть довольно точно аппроксимирован с помощью МНК, используя функцию в форме закона Аррениуса, в следующем виде:

$$B(T) = b \cdot \exp(-p/T), \quad (24)$$

которая является линейной в полулогарифмических координатах, и содержит константы ползучести материала b и p , определяемые выражениями:

$$b = \frac{B(T_1)}{\exp(-p/T_1)} = \frac{B(T_2)}{\exp(-p/T_2)}, \quad p = \frac{T_1 \cdot T_2 \cdot \ln(B(T_1)/B(T_2))}{T_1 - T_2}. \quad (25)$$

3.3. Шаг 3. Определение констант для первой стадии ползучести.

Аналитическое выражение деформации ползучести на первой стадии можно получить, если пренебречь влиянием второй и третьей стадий ползучести в аналитическом выражении (8) для всех трех стадий, в следующем виде:

$$\varepsilon = k \cdot \ln \left[(1+C) \cdot \exp \left(\frac{\theta}{k} \right) - C \right], \quad \text{где } \theta = A \cdot \exp \left(-\frac{h}{T} \right) \cdot \sigma^n \cdot t, \quad (26)$$

где C и k являются константами ползучести первой стадии, которые необходимо определить далее.

Для всего набора фиксированных значений экспериментальных температур $(T_1, T_2, \dots, T_\varphi)$, где φ является числом значений температуры, необходимо выбрать кривые ползучести с четко выраженным участком первой стадии ползучести. Затем для всей совокупности выбранных кривых определяются максимальные значения деформации ползучести в конце участков первой стадии для всех фиксированных значений температуры: $(\varepsilon_{\max 1}^{T_1}, \varepsilon_{\max 2}^{T_1}, \dots, \varepsilon_{\max \varphi}^{T_1})$, $(\varepsilon_{\max 1}^{T_2}, \varepsilon_{\max 2}^{T_2}, \dots, \varepsilon_{\max \varphi}^{T_2})$, \dots , $(\varepsilon_{\max 1}^{T_\varphi}, \varepsilon_{\max 2}^{T_\varphi}, \dots, \varepsilon_{\max \varphi}^{T_\varphi})$. Следующий шаг предполагает отбор из прежде выбранной совокупности набора из φ кривых ползучести с близкими по величине значениями максимальной деформации ползучести – по одной кривой для каждой температуры. Например, в результате подобного отбора кривых ползучести получаем следующий набор значений максимальной деформации ползучести: $\varepsilon_{\max 1}^{T_\varphi}, \varepsilon_{\max 2}^{T_2}, \dots, \varepsilon_{\max \varphi}^{T_1}$. Экспериментальные кривые ползучести, которые соответ-

ствуют ряду $(\varepsilon_{\max 1}^{T\varphi}, \varepsilon_{\max 2}^{T2}, \dots, \varepsilon_{\max \varphi}^{T1})$ аппроксимируются функцией (26) с помощью МНК с целью определения набора констант первой стадии ползучести – C_δ и k_δ ($\delta = 1, 2, \dots, \varphi$) для каждой из температур $T_1, T_2, \dots, T_\varphi$.

Общие значения констант C и k вычисляются как средние арифметические значения для последовательностей C_δ и k_δ ($\delta = 1, 2, \dots, \varphi$):

$$C = \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_\varphi}{\varphi}, \quad k = \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_\varphi}{\varphi}. \quad (27)$$

4. Пример расчета неизотермической ползучести. Предложенный метод решения задач неизотермической ползучести с учетом повреждаемости был апробирован на модельной задаче – ползучести толстостенного цилиндра, нагруженного равномерным внутренним давлением $p = 150$ МПа и находящегося в условиях плоской деформации. Неоднородное тепловое поле создавалось за счет граничных условий для температуры на внутренней и внешней поверхности цилиндра: $T_1 = 550$ °С, $T_2 = 500$ °С. Учитывалась только зависимость констант ползучести от температуры, а добавками термоупругих напряжений и деформаций от теплового расширения цилиндра пренебрегали.

Численные результаты расчета длительной прочности толстостенного цилиндра получены с помощью МКЭ в инженерном программном комплексе ABAQUS с использованием подпрограмм, интегрируемых в программный КЭ код, содержащих пользовательские модели поведения материала.

Анализировалось распределение деформаций ползучести, компонентов напряжений и параметра повреждаемости по толщине цилиндра в процессе ползучести для различных моментов времени, вплоть до разрушения конструкции. Если пользоваться соотношениями изотермической ползучести и соответствующими значениями констант ползучести, определенными в диапазоне температур $T = 500 \div 550$ °С, то можно получить значительный разброс результатов по времени разрушения – от 2 942 до 84 840 часов.

На рис. 4 представлены распределения скалярного параметра повреждаемости ω и окружного напряжения σ_{33} по толщине цилиндра в предположении усредненного однородного теплового поля, где использованы константы ползучести для температуры $T = 525$ °С. В этом случае параметр повреждаемости ω достигает своего критического значения на внутренней поверхности цилиндра в момент времени $t = 14\,600$ часов. Для сравнения на рис. 5 приведены результаты расчета неизотермической ползучести цилиндра, где учитывается реальное тепловое поле как итог решения задачи стационарной теплопроводности. Оказывается, что при такой постановке задачи параметр повреждаемости ω достигает своего критического значения на внешней (а не на внутренней) поверхности цилиндра в момент времени $t = 15\,926$ часов. Кроме увеличения времени разрушения цилиндра, качественно изменяется характер окончательного распределения параметра повреждаемости и напряжений по толщине цилиндра для уточненной постановки задачи.

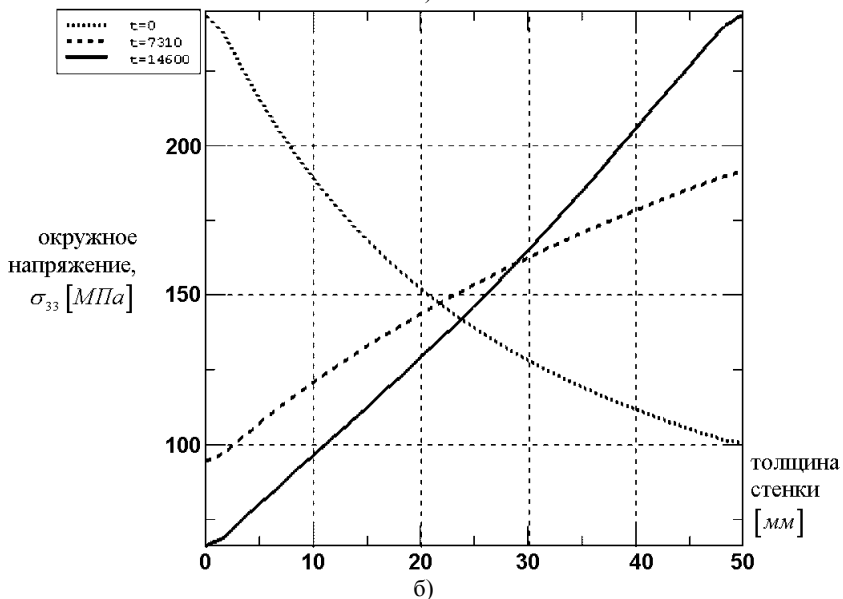
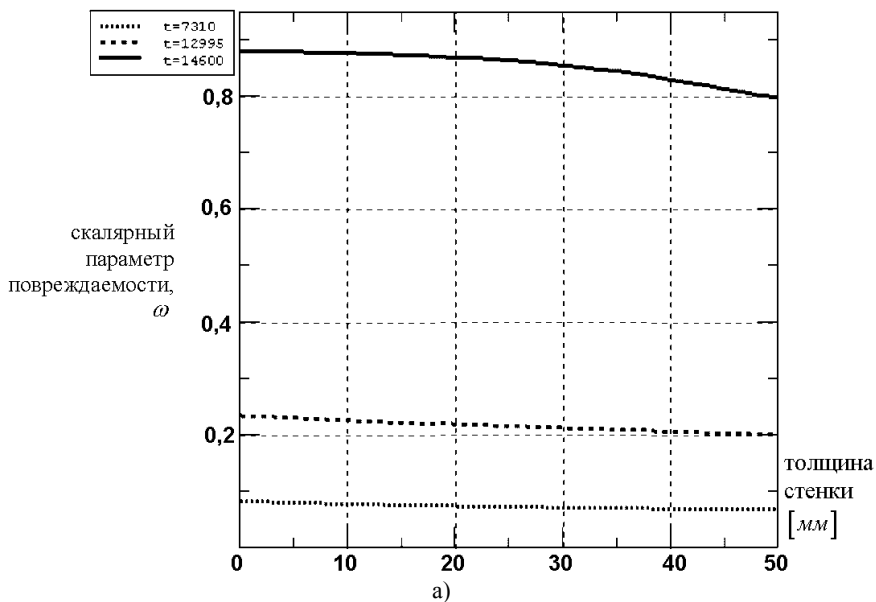


Рисунок 4 – Результаты расчета изотермической ползучести толстостенного цилиндра при $T = 525$ °С, распределение по толщине цилиндра [мм]: (а) параметра повреждаемости ω ; (б) окружных напряжений σ_{33} [МПа]

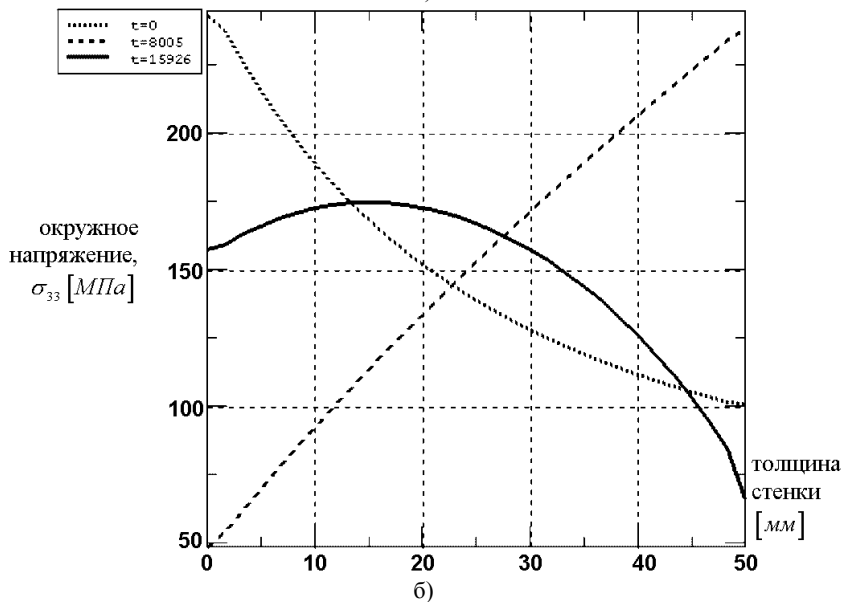
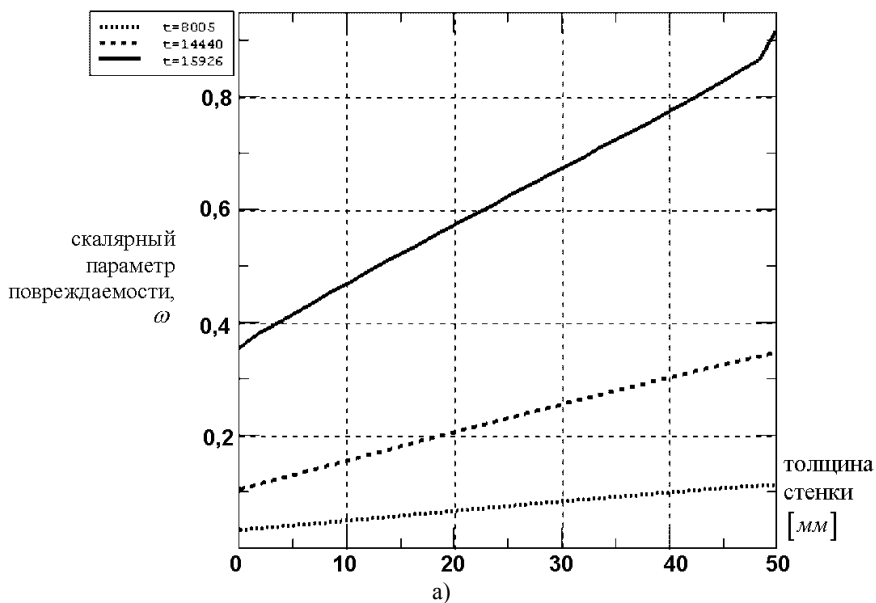


Рисунок 5 – Неизотермическая ползучесть толстостенного цилиндра, находящегося в неоднородном тепловом поле ($T = 500 \div 550$ °C), распределение по толщине цилиндра [мм]: (а) параметра повреждаемости ω ; (б) окружных напряжений σ_{33} [МПа]

Так параметр повреждаемости ω возрастает по толщине и инициирует процесс разрушения на внешней поверхности толстостенного цилиндра. Правильность полученных численных результатов подтверждается экспериментами и решениями подобных задач другими авторами [19]. Если окружные напряжения σ_{33} на внешней поверхности цилиндра в момент разрушения достигают минимального значения, то в упрощенной постановке эти же напряжения были максимальны.

Вывод. Постановка задачи неизотермической ползучести с учетом повреждаемости и деформационного упрочнения адекватна реальным процессам ползучести и повреждаемости, происходящим во времени в неравномерно нагретых элементах конструкций. Использование упрощенной изотермической постановки задачи может привести к существенным погрешностям определения времени до разрушения и местоположения трещины в конструкции.

Список литературы: 1. *Nix W.D., Earthman J.C., Eggeler G., Ilshner B.* The principal facet stress as a parameter for predicting creep rupture under multiaxial stresses // *Acta Metallurgica*, vol. 37(4), 1989, pp. 1067-1077. 2. *Levitin V.* High Temperature Strain of Metals and Alloys // Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2005, pp. 5-11. 3. *Frost H.J., Ashby M.F.* Deformation Mechanism Maps // Pergamon Press, Oxford et al., 1982. 4. *Riedel H.* Fracture at High Temperatures // *Materials Research and Engineering*, Springer, Berlin et al., 1987. 5. *Nabarro F.R.N., de Villiers H.L.* The Physics of Creep // Taylor & Francis, 1995. 6. *McLean D.* The physics of high temperature creep in metals // *Reports on Progress in Physics*, vol. 29(1), 1966, pp. 1-33. 7. *Holdsworth S.R., Merckling G.* ECCC Developments in the Assessment of Creep-Rupture Properties // 6th Inter. Ch. Parsons Turbine Conf., Dublin, Ireland, 2003, pp. 1-11. 8. *Brett S.J., Merckling G.* Comparative Applicability Evaluation of Specific Testing Techniques for Post Exposure Material Creep Behaviour Investigation // High Temp. Plant Integrity & Life Extension Conf., Cambridge, UK, 2004, pp. 1-11. 9. ABAQUS User's Manual, Version 6.5. 10. *Moberg F.* Implementation of constitutive equations for creep damage mechanics into the ABAQUS finite element code – Subroutine UMAT // SAQ/R&D Report, No. 95/05, Stockholm, 1995. 11. *Kachanov L.M.* *Izvestiya Akad. Nauk. SSSR, Otd. Teekh. Nauk.* // *Mechanics and Machinebuilding*, vol. 8, 1958, pp. 26-31. 12. *Rabotnov Y.N.* The problems of strength of materials and structures // Moscow: Science, 1959, pp. 5-7. 13. *Hayhurst D.R.* Computational continuum damage mechanics: its use in the prediction of creep in structures: past, present and future // *Creep in Structures* (ed. by Murakami, S. and Ohno, N.), Dordrecht, Kluwer, 2001, pp. 175–188. 14. *Perrin I.J., Hayhurst D.R.* Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675 °C // *Journal of Strain Analysis*, vol. 31, no. 4, IMechE, 1996, pp. 299-314. 15. *Altenbach H.* Creep and damage in materials and structures // *CISM Courses and Lectures*, vol. 399, Wein/New York: Springer, 1999, 348 p. 16. *Gorash E., Lvov G., Harder J., Kostenko Y., Wieghardt K.* Comparative analysis of the creep behaviour in a power plant component using different material models // *Creep and Fracture in High Temperature Components – Design and Life Assessment Issues*, ECCC, IMechE, London, UK, 2005, 12 p. 17. *Leckie F.A., Hayhurst D.R.* Constitutive equations for creep rupture, *Acta Metallurgica*, 25, Pergamon Press, 1977, pp. 1059-1070. 18. *Hyde T.H., Sun W. and Williams J.A.* Creep analysis of pressurized circumferential pipe weldments – a review // *J. Strain Analysis*, vol. 38, no. 1, IMechE, 2003, pp. 1-29. 19. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. – М.: Мир, 1986. – 360 с.

Поступила в редколлегию 1.06.2006

Я. Д.ДЕМУЗ; В.А.ЖОВДАК, докт.техн.наук;
А.С.СТЕПЧЕНКО, канд.техн наук, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУХ ЛОПАТОК С УЧЕТОМ КОНТАКТА В МЕЖБАНДАЖНОМ СОЕДИНЕНИИ

У цій роботі розглядається задача про змушені коливання двох лопаток з урахуванням контактної взаємодії в міжлопатковому з'єднанні. Розроблено алгоритм розрахунку нелінійних коливань з урахуванням контактної взаємодії й проведені числові дослідження.

In the given work the task about forced vibrations of blades is considered in view of contact interaction in blade-to-blade connection. The algorithm of calculation of non-linear vibrations designed in view of contact interaction.

Большинство поломок в турбомашине происходит из-за повреждений лопаточного аппарата. Современная технология сборки лопаточного аппарата последних ступеней паровых турбин приводит к значительным отклонениям в области соединения бандажных полок. Поэтому при стационарном режиме работы возникает неопределенность поведения лопаточного аппарата в области данного контактного соединения. Исследования вынужденных колебаний на этом режиме работы является актуальной задачей [1].

В данной работе ставится задача о вынужденных колебаниях двух лопаток под действием газодинамического потока с учетом центробежных сил и контактного взаимодействия в бандажных полках. Объектом исследования являются лопатки четвертой ступени корпуса низкого давления паровой турбины К-310-23,5, выпускаемой Харьковским турбинным заводом (ОАО «Турбоатом»).

1. Алгоритм решения задачи вынужденных колебаний двух лопаток, с учетом контактного взаимодействия

В данной работе была разработана методика расчета вынужденных колебаний лопаток с учетом контакта в бандажной полке, которая предполагает следующий алгоритм:

1. Построение пространственной конечно-элементной модели лопаток на основе современных программных комплексов (рис. 1, а).
2. Задание граничных условий.
3. Расчет статической контактной задачи в межлопаточном соединении и определение площадки контактирования под действием центробежных сил [2].
4. Расчет собственных частот с учетом контактного взаимодействия, которое достигается путем связывания узлов по всем степеням свободы, расположенных на площадке контактирования (рис. 1, б).
5. Расчет вынужденных колебаний проводится методом разложения по

собственным формам с наложением связей в виде одномерных контактных элементов на узлы предполагаемой площадки динамического контакта. На каждом шаге по времени проводится проверка на наличие контакта. Если контактирование происходит, формируются первичные нормальная и касательная силы, которые сохраняются в вектор нагрузок. Далее на основе итерационного алгоритма определяется истинный вектор нагрузок, который удерживает узлы в контакте. Данный алгоритм позволяет определять динамические контактные напряжения.

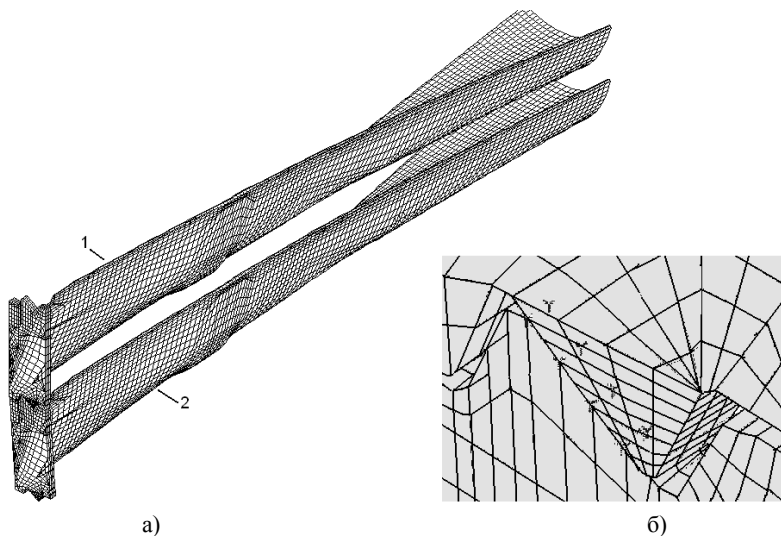


Рисунок 1 – КЭ-модель лопаток:
а) – лопатки; б) – учет контакта в межлопаточном соединении

2. Результаты расчета вынужденных колебаний

В результате расчета статической контактной задачи с учетом действия центробежных сил для двух лопаток [2], было определено, что для данной лопатки в контакт входят узлы верхней кромки бандажной полки, поэтому по верхней кромке бандажа узлы были связаны между собой. Анализировалось появление динамического контакта в узлах нижней кромки бандажной полки, где и были заданы динамические контактные конечные элементы. При этом в качестве вынуждающей нагрузки задано гармоническое воздействие в виде нормального давления 10 МПа, которое подается на «животик» каждой лопатки, с частотой, совпадающей с третьей собственной частотой рассматриваемой модели. В результате получены зависимости перемещений от времени для узлов, вступающих в контакт (рис. 2 – аксиальные перемещения, рис. 3 – тангенциальные перемещения). На рис. 2, 3 перемещения узла первой лопатки показаны линией 1, перемещения соответствующего узла второй лопатки линией 2.

Из рис. 2, 3 видно, что процесс колебаний со временем представляет установившийся квазигармонический процесс. Аксиальные перемещения синфазные, а тангенциальные противофазные.

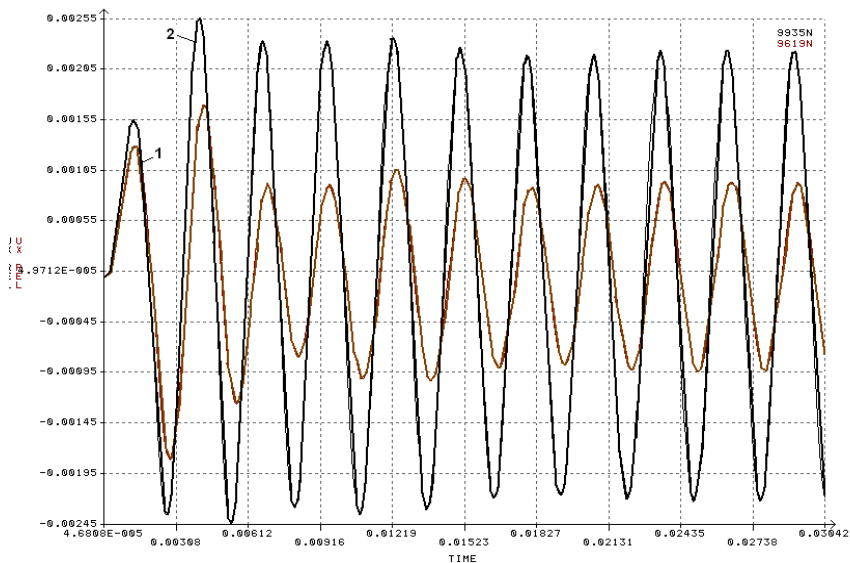


Рисунок 2 – Аксиальные перемещения контактирующей пары узлов

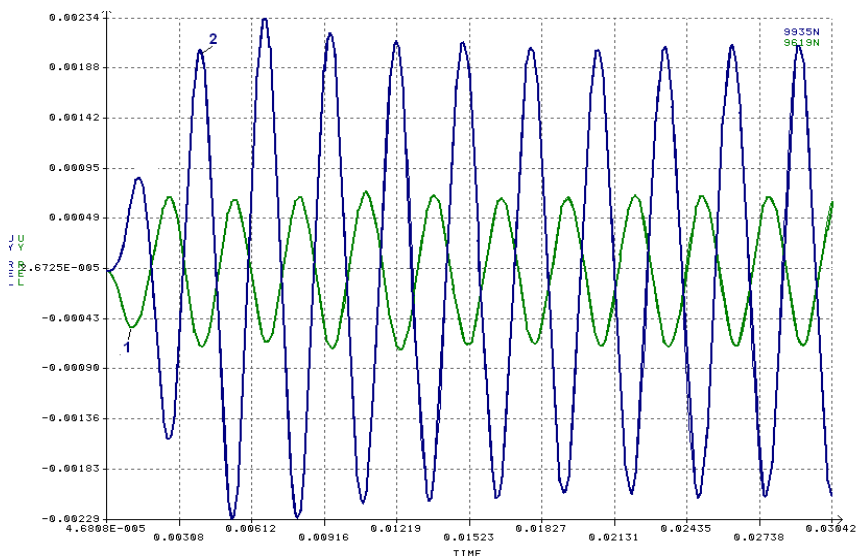


Рисунок 3 – Тангенциальные перемещения контактирующей пары узлов

Особый интерес представляет развитие характера контактирования за период колебаний установившегося процесса. Был выбран период с $t = 0,0267$ по $t = 0,0295$ с. Анализ деформированного состояния за период установившегося процесса показал, что развитие контакта с одинаковой картиной НДС повторяется дважды. Поэтому рассматривается изменение напряженно-деформированного состояния за полупериод. Интенсивность напряжений приведена на рис. 4-5.

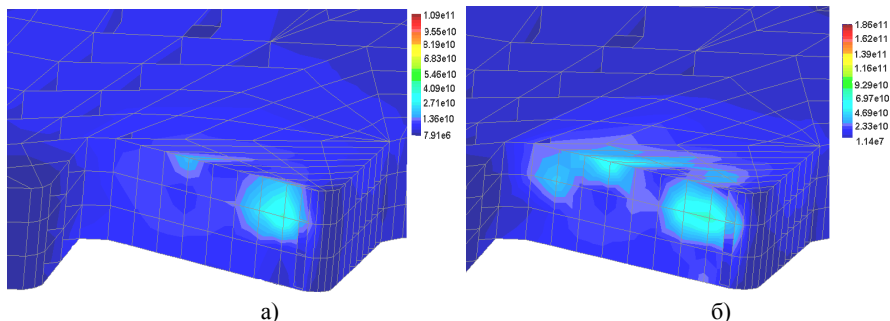


Рисунок 4 – Напряженно-деформированное состояние в бандажной полке 1-й лопатки:
а) – в момент времени $t = 0,0257$ с.; б) – в момент времени $t = 0,0259$ с.

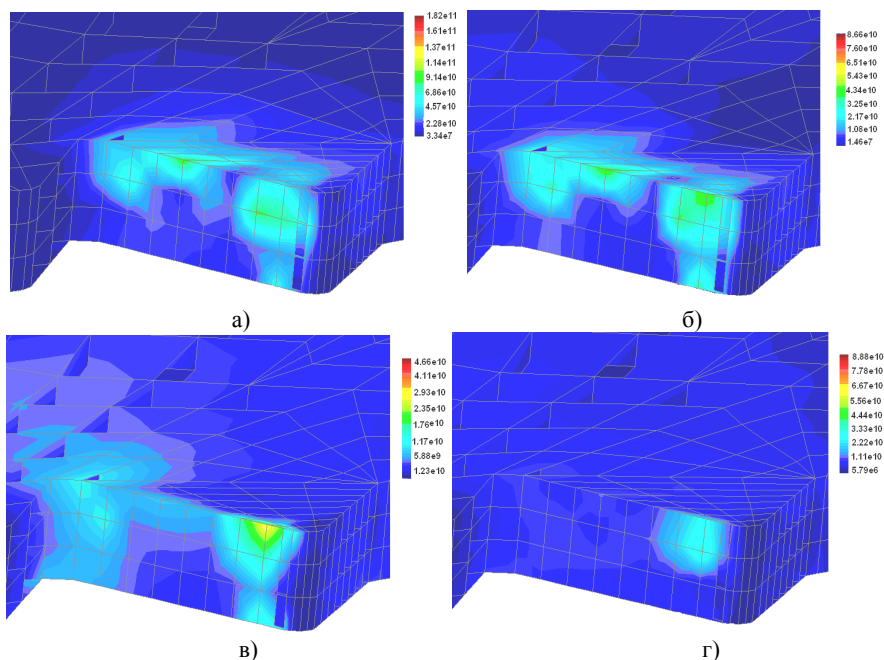


Рисунок 5 – Напряженно-деформированное состояние в бандажной полке 1-й лопатки:
а) – в момент времени $t = 0,02663$ с.; б) – в момент времени $t = 0,02677$ с.;
в) – в момент времени $t = 0,02696$ с.; г) – в момент времени $t = 0,02701$ с.

Были выбраны такие моменты времени полупериода, которые показывают развитие контактных напряжений. Из рис. 4 следует, что контактные напряжения возникают сначала в связанных узлах бандажной полки и они максимальны. На рис. 5 показано возникновение динамического контакта в паре узлов нижней кромки бандажной полки при снижении уровня интенсивности напряжений.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

- разработан алгоритм решения задачи о вынужденных колебаниях с учетом контактного взаимодействия в межлопаточном соединении.
- показано, что в процессе колебаний возникает динамический контакт в бандажной полке.
- получены перемещения контактирующих узлов под действием стационарной гармонической нагрузки, которые показали, что процесс колебаний со временем носит установившийся квазигармонический характер.

Список литературы: 1. *А.В.Петров, А.В. Шереметьев* Методика расчета динамических характеристик лопаток авиадвигателей при вынужденных нелинейных колебаниях // Вібрації в техніці та технологіях. – 2004. – № 6. 2. *Я.Д.Демуз, В.А.Жовдак, А.Ф.Кабанов, А.С.Степченко* Исследование влияния контакта в бандажном соединении на собственные частоты лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – № 21.

Поступило в редакцию 28.04.2006

УДК 539.3

Г.М.ИВАНЧЕНКО, канд.техн.наук, КНУСА, Киев

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ УПРУГОЙ ЛИНЗЫ НА ЕЕ ФОКУСИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА

Розглядаються випадки фокусування плоскої нестационарної розривної хвилі в трансверсально-ізотропному середовищі поверхня плоско-випуклої трансверсально-ізотропної пружної лінзи. Досліджується залежність положення зон фокусування хвилі від величин параметрів анізотропії середовища лінзи.

The cases of focusing of a plane unstationary discontinuous wave by the surfaces of a plane-convex transversally isotropic elastic lens in a transversally isotropic medium are examined. Dependence of position of focusing zones of the wave on the values of parameters of anisotropy of the lens medium is explored.

Явления фокусировки световых лучей оптическими приборами – линзами и зеркалами – широко используются для локального увеличения освещенности и концентрации световой энергии. Аналогичные эффекты проявляются и при распространении нестационарных разрывных волн в упругих средах. Для количественного описания таких явлений, а также для исследования их

особенностей применимы методы геометрической оптики [1-3].

Задача актуальна при исследовании особенностей распространения нестационарных разрывных волн в земной коре, порождаемых взрывами, землетрясением, где практический интерес представляют вопросы геометрического построения движущихся поверхностей разрывов первых производных полевых функций, которые часто называют ударными волнами или волнами сильного разрыва.

Для постановки и решения таких задач в теории упругости применимы методы геометрической оптики, в частности, нулевое приближение лучевого метода, который обеспечивает хорошее количественное описание многих волновых явлений различной физической природы [2, 3].

Лучевой метод предполагает выделение функции оптического пути волны, или эйконала, и построение с помощью уравнения эйконала системы лучей и фронтов ударной волны. Эта задача достаточно легко решается для изотропных сред, однако и там возникают некоторые осложнения, связанные с исследованием взаимодействия волны с поверхностями раздела сред, обладающими различными механическими свойствами (упругие отражатели, линзы, слоистые среды и др.), в результате чего образуются каустики, где фокусируется энергия и значительно возрастает интенсивность поля.

При исследовании распространения волн сильных разрывов в упругих анизотропных средах физическая картина динамических явлений резко усложняется, поскольку в этих случаях векторная полевая функция для каждого направления имеется три вида волн, отличающихся поляризацией; фазовые скорости волн зависят как от поляризации волны, так и от направления ее распространения; лучи, в общем случае, не ортогональны поверхности волнового фронта, а лучевые скорости отличаются от фазовых скоростей и между их направлениями не всегда имеется однозначное соответствие.

Постановка задачи. Состояние динамического равновесия упругой среды в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 определяется системой трех дифференциальных уравнений

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_p} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1,2,3), \quad (1)$$

где $\lambda_{ik,pq} = c_{ik,pq} / \rho$; $c_{ik,pq}$ – параметры упругости среды; ρ – ее плотность; u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора упругих смещений, t – время.

Учитывая то, что в анизотропных средах лучи в общем случае не ортогональны поверхностям волновых фронтов, будем различать векторы фазовой v и лучевой ξ скоростей, считая, что фронтом волны является поверхность постоянной фазы $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - v t = \text{const}$, где каждая элементарная площадка фронта движется вдоль местной единичной нормали \mathbf{n} со скоростью v . Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки фронта.

Фазовые скорости v волны и векторы ее поляризации \mathbf{A} для выбранного направления \mathbf{n} можно построить из однородной системы алгебраических

уравнений [2, 4]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (2)$$

как собственные числа и векторы матрицы ее коэффициентов.

Ненулевые решения системы (2) имеют место при выполнении условия

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (3)$$

при помощи которого для каждого направления нормали \mathbf{n} можно определить и расположить в порядке убывания три скорости различно поляризованных волн.

Придавая величине v^2 в системе (2) поочередно одно из найденных значений $v^2_r(\mathbf{n})$ ($r = 1,2,3$), можно определить компоненты векторов поляризации $\mathbf{A}^{(r)}$ трех волн, движущихся в рассматриваемом направлении \mathbf{n} со своими фазовыми скоростями $v_r(\mathbf{n})$. Поверхность фронта ударной волны определяется соотношением

$$\tau(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) - t = 0, \quad (4)$$

в котором функция τ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка [2]

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (5)$$

обобщающему уравнение эйконала геометрической оптики для упругих анизотропных волн.

Величины p_k ($k = 1,2,3$), входящие у уравнение (5), представляют собой компоненты вектора рефракции $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v_r(\mathbf{n})$ ($k = 1,2,3$).

Волновой фронт (4) ударной волны в анизотропной среде постоянной плотности строится после нахождения решения уравнения (5), которое методом характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= 0, \quad (k = 1,2,3). \end{aligned} \quad (6)$$

В системе (6) первая группа уравнений характеризует распространение волны вдоль луча с лучевой скоростью $\xi = \xi^{(r)}(\mathbf{n}, \mathbf{x}_k)$, а вторая – указывает на прямолинейность лучей в анизотропной среде с постоянной плотностью.

Методика решения. Будем рассматривать две трансверсально-изотропные среды в которых оси симметрии упругих параметров совпадают с осью Ox_2 декартовой системы координат. Благодаря свойствам симметрии, компоненты $c_{ik,pq}$ тензора упругих постоянных каждой среды можно представят в форме квадратной матрицы

$$(C_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu - p & \lambda - l & 0 & 0 & 0 \\ \lambda - l & \lambda - l & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где λ и μ – параметры Ламе, l, m, p – константы, отличающие среду от изотропной (параметры анизотропии).

Пусть в среде \bar{I} возбуждена плоская продольная ударная волна, вектор поляризации которой направлен вдоль оси Ox_2 . Исследуем дифракцию такой волны при ее взаимодействии с криволинейными осесимметричными границами G_1 и G_2 раздела сред, ось симметрии которой также совпадает с Ox_2 . Задача является осесимметричной, поэтому достаточно рассмотреть явления перестройки и формирования следов ударных волн на одной из плоскостей, например на плоскости $x_3 = 0$, которая содержит ось симметрии. Примем «локально-плоское приближение» [2], в соответствии с которым в месте падения волны на элементарную площадку разделяющей поверхности G_i в плоскости падения $x_3 = 0$, все отраженные и преломленные волны также будут принадлежать этой плоскости, т.е. третьи компоненты всех векторов поляризации равны нулю. Это позволяет применять обобщенный закон Снеллиуса, выражаемый равенствами [2, 4, 5]

$$\frac{\sin(\gamma)}{v} = \frac{\sin(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}} - \gamma)}{v_{\bar{v}}^{\bar{I}}(\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}})} = \frac{\sin(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}} + \gamma)}{v_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}(\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (8)$$

где γ – угол наклона касательной к поверхности G_1 в точке падения луча на границу раздела сред, $\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{v}}^{\bar{II}}$ – углы между осью Ox_2 и направлениями векторов фазовых скоростей квазипродольной qP и квазипоперечной qS волн, отраженных в среде \bar{I} ; $\Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$ – аналогичные углы для волн, преломленных в среду \bar{II} (в средний слой – линзу); $v, v_{\bar{v}}^{\bar{I}}, v_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$ – величины фазовые скорость падающей продольной волны, отраженных и преломленных (нижний индекс 1 отвечает квазипродольной, 2 – квазипоперечной волнам).

Для случаев анизотропных сред соотношения (8) закона Снеллиуса характеризуются тем, что знаменатели и числители являются функциями соответствующих углов $\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$ и неявно функциями угла γ . Значения углов $\Theta_{\bar{v}}^{\bar{I}}, \Theta_{\bar{\mu}}^{\bar{II}}$ ($v, \mu = 1, 2$) отражения и преломления луча в некоторой точке границы, определяются решением системы нелинейных уравнений (8) методом Ньютона совместно с алгоритмом продолжения решения по параметру [3]. Здесь в качестве ведущего параметра удобно выбрать угол наклона касательной γ . Тогда, например, для первого

уравнения системы (8) при некоторых известных величинах параметра $\gamma = \gamma^n$ и векторов $v_v = v_v^n$ малому приращению ведущего параметра $\Delta\gamma$ будут отвечать приращения направляющих углов фазовых скоростей упругих волн отраженных в среду \bar{I}

$$\Delta\Theta_v^{\bar{I}} = \frac{\cos\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}}) + \cos(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v}{\cos(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin(\gamma) \cdot dv_v(\Theta_v^{\bar{I}}) / d\Theta_v^{\bar{I}}} \cdot \Delta\gamma + r_v, \quad (9)$$

где $r_v = \sin(\Theta_v^{\bar{I}} - \gamma) \cdot v - \sin\gamma \cdot v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})$ – невязки на рассматриваемом шаге построения решения.

На поверхность раздела G_2 падают лучи квазипродольной и квазипоперечной волн, исходящие из некоторой точки взаимодействия исходного луча с первой границей раздела сред. На второй границе раздела сред оба луча также подчинены соотношениям Снеллиуса

$$\frac{\sin(\Theta - \varphi)}{v(\Theta)} = \frac{\sin(\Theta_v^{\bar{\mu}} + \varphi)}{v_v^{\bar{\mu}}(\Theta_v^{\bar{\mu}})} = \frac{\sin(\Theta_\mu^{\bar{I}} - \varphi)}{v_\mu^{\bar{I}}(\Theta_\mu^{\bar{I}})}, \quad v, \mu = 1, 2, \quad (10)$$

где φ – угол наклона касательной к поверхности G_2 в точке падения соответствующего луча квазипродольной или квазипоперечной волны, $\Theta_v^{\bar{I}}, \Theta_\mu^{\bar{I}}$ – углы между осью Ox_2 и направлениями векторов фазовых скоростей квазипродольной и квазипоперечной волн, преломленных в среду \bar{I} ; $\Theta_v^{\bar{\mu}}, \Theta_\mu^{\bar{\mu}}$ – аналогичные углы для волн, отраженных в средний слой $\bar{\mu}$; $v, v_v^{\bar{I}}, v_\mu^{\bar{I}}$ – величины фазовых скоростей падающей волны на поверхность, преломленных в среду \bar{I} и отраженных в среду $\bar{\mu}$ волн.

Решение системы (10) также формируется пошагово. Например, малое изменение угла наклона касательной к поверхности G_2 на величину $\Delta\varphi = \Delta\varphi^n$ повлечет приращения направляющих углов векторов фазовых скоростей отраженных волн обоих типов

$$\Delta\Theta_v^{\bar{\mu}} = \frac{f_1 \cdot \Delta\Theta + f_2 \cdot \Delta\varphi}{f_3} + r_v. \quad (11)$$

Здесь обозначены функции

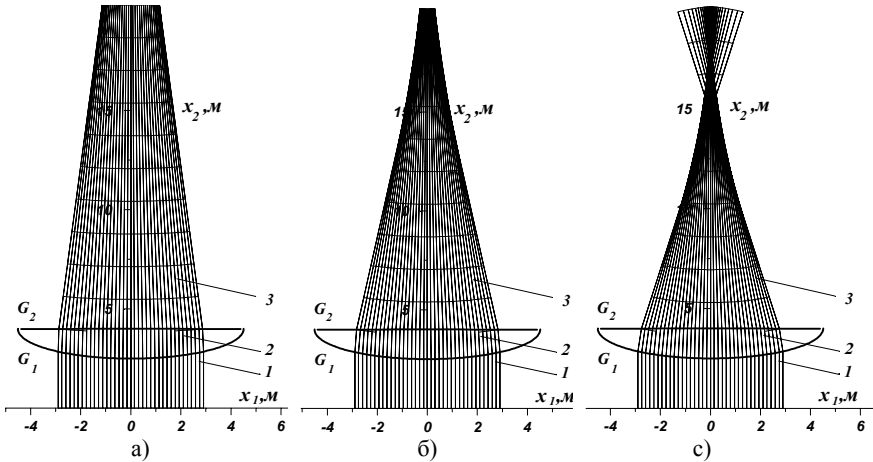
$$\begin{aligned} f_1 &= \sin\left(\Theta_v^{\bar{\mu}} + \varphi\right) \cdot \frac{dv(\Theta)}{d\Theta} - \cos(\Theta - \varphi) \cdot v_v^{\bar{\mu}}(\Theta_v^{\bar{\mu}}), \\ f_2 &= \cos(\Theta - \varphi) \cdot v_v^{\bar{\mu}}(\Theta_v^{\bar{\mu}}) + \cos(\Theta_v^{\bar{\mu}} + \varphi) \cdot v(\Theta), \\ f_3 &= \sin(\Theta - \varphi) \cdot \frac{dv_v^{\bar{\mu}}(\Theta_v^{\bar{\mu}})}{d\Theta_v^{\bar{\mu}}} - \cos(\Theta_v^{\bar{\mu}} + \varphi) \cdot v(\Theta) \end{aligned}$$

и невязка уравнения (11) $r_v = \sin(\Theta_v^{\bar{\Pi}} + \gamma) \cdot v(\Theta) - \sin(\Theta - \gamma) \cdot v_v^{\bar{\Pi}}(\Theta_v^{\bar{\Pi}})$.

Вычисления по формулам вида (9), (11) возможны при наличии некоторого начального состояния $\gamma^0, v^0, \left(\Theta_v^{\bar{I}}\right)^0, \left[v_v^{\bar{I}}(\Theta_v^{\bar{I}})\right]^0, \left(\Theta_v^{\bar{\Pi}}\right)^0, \left[v_v^{\bar{\Pi}}(\Theta_v^{\bar{\Pi}})\right]^0$.

Для рассматриваемых случаев с осесимметричным средним слоем (линзой) удобно начинать построение семейства падающих, отраженных и преломленных лучей с луча, ориентированного вдоль оси Ox_2 .

Результаты исследований. Рассмотрена задача об исследовании влияния параметров анизотропии l, m, p упругой плоско-выпуклой линзы на ее фокусирующую способность.



При решении задачи принято: $\rho_1 = 2,650 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_1 = 4,972 \times 10^{10} \text{ Па}$, $\mu_1 = 3,906 \times 10^{10} \text{ Па}$ для среды \bar{I} и $\rho_2 = 2,760 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_2 = 3,409 \times 10^9 \text{ Па}$, $\mu_2 = 1.364 \times 10^{10} \text{ Па}$ для среды $\bar{\Pi}$ (линзы). Коэффициенты анизотропии для первой среды постоянны: $m_1 = 0,1\mu_1$, $l_2 = 0,3\lambda_2$ и $p_1 = 0,1(\lambda_1 + 2\mu_1)$, а для линзы они варьировались. Установлено, что степень и равномерность фокусирования или рассеивания дважды преломленных лучей зависят не только от геометрии поверхностей G_1, G_2 и упругих характеристик сред, но и в значительной мере от параметров анизотропии. Это видно на рисунке, где показаны лучи падающей (1) и преломленной в линзу (2) квазипродольной волны а также лучи и эволюция фронта преломленной за линзой (3) квазипродольной волны. Для упругих линз одинаковой геометрии принимались $m_2 = 0,3\mu_2$, $l_2 = -0,4\lambda_2$, $p_2 = -0,6(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,а), $m_2 = 0,1\mu_2$, $l_2 = -0,2\lambda_2$, $p_2 = -0,3(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,б) и $m_2 = 0,1\mu_2$,

$I_2 = 0,2\lambda_2$, $p_2 = 0,05(\lambda_2 + 2\mu_2)$ (рис. 1,в). При этом плотность и коэффициенты Ламе среды линзы оставались постоянными.

Список литературы: 1. *Кравцов Ю.А. Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. – Г., Наука, 1980. – 304 с. 2. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. – Ленинград, Наука, 1980. – 280 с. 3. *Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К.* Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. – К., Наукова думка, 1988. – 220 с. 4. *Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В.* Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т. 64, № 3.– С. 394-402. 5. *Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M.* Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media // International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.

Поступила в редколлегию 27.12.2005

УДК 534; 629.7

Е.А.КУРИЛОВ, НТУ «ХПИ»

ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС НА ДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Розглядається аеропружність стійкість циліндричної оболонки з приєднаними масами в надзвуковому потоці газу. Рівняння теорії пологих оболонок Донела-Муштарі-Власова використано для аналізу динаміки оболонки. Взаємодію потоку та оболонки описано за допомогою лінійної поршневої теорії. Дискретизацію проведено за допомогою методу Бубнова-Гальоркіна. Проаналізовано ефект віброгасіння.

The aeroelastic stability of simply supported cylindrical shell with localized masses in supersonic flow is investigated. The Donnell-Mushtari-Vlasov nonlinear shallow-shell theory is used to describe the shell dynamics. Linear piston theory is applied to describe the fluid-structure interaction. The system is discretized by the Bubnov-Galerkin procedure. The dumping effect is analyzed.

Введение. На протяжении последних десятилетий существует повышенный интерес к проблемам динамики цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Причина этого заключается в том, что упругие оболочки являются важнейшими несущими элементами в конструкциях летательных аппаратов или других технических объектов, находящихся под действием интенсивных аэродинамических сил. Подавляющее большинство работ посвящено исследованию оболочек идеальной формы. Однако анализ динамического поведения реальных тонкостенных конструкций при обтекании их сверхзвуковым потоком свидетельствует о существенном влиянии на их устойчивость и прочность локальных неоднородностей типа присоединенных масс, представляющих собой в реальной конструкции различные датчики и другие элементы. При определенных условиях действие этих элементов экви-

валентно действию динамических гасителей колебаний [2]. Таким образом, проблема распределения элементов конструкции по несущей поверхности а также (при необходимости) добавление в конструкцию новых элементов является важнейшей задачей проектирования летательных аппаратов.

В данной работе поведение оболочки с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке газа рассматривается с использованием нелинейной теории пологих оболочек и так называемой «поршневой теории» [7,8], которая применяется для описания аэроупругих взаимодействий. Такой подход обеспечивает достаточную точность анализа в широком диапазоне внешних нагрузок и амплитуд колебаний, а также позволяет выделить важные режимы движения упругой системы.

1. Постановка задачи. Общая постановка задачи нелинейных колебаний упругих цилиндрических оболочек с присоединенными массами, обтекаемых потоком газа, довольно сложная. Это связано с необходимостью рассмотрения связанной динамической системы типа «оболочка – абсолютно твердое тело (жестко или упруго присоединенное к оболочке) – газовый поток», непрерывно изменяющей свои динамические характеристики. Задача флаттера по своей природе является существенно нелинейной.

В качестве исходных разрешающих уравнений оболочки используются хорошо известные уравнения Доннелла-Муштари-Власова [6-8,12,14]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{P}{h} - \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(x - x_i, y - y_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь w – динамический прогиб; Φ – функция напряжений в срединной поверхности; x, y – продольная и окружная координаты срединной поверхности соответственно; $L(w, \Phi)$ и ∇^4 – хорошо известные дифференциальные операторы; h – толщина оболочки; D – цилиндрическая жесткость; ρ – плотность материала; R – радиус оболочки. Связь между усилиями, действующими в срединном слое оболочки, и перемещениями имеет вид [15]:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}; \\ N_y &= \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{w}{R} + \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}; \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

Аэродинамическое давление P аппроксимируется следующим выраже-

нием в соответствии с линейной «поршневой теорией» [6,16]:

$$P = \chi P_\infty \left[\frac{1}{a_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad (1.2)$$

где χ – показатель политропы; P_∞, a_∞ – давление и скорость в невозмущенном потоке; M_∞ – число Маха в невозмущенном воздушном потоке.

Линейная «поршневая теория» (или «закон плоских сечений») – наиболее простой вариант приближенных теорий определения зависимости аэродинамических сил от возмущений обтекаемой поверхности. При достаточно больших сверхзвуковых скоростях поршневая теория дает вполне приемлемые результаты, согласующиеся с экспериментальными данными [3-5,17,18].

Взаимодействие оболочки с жестко присоединенными осцилляторами описывается с помощью двумерного оператора Дирака $\delta(x-x_i, y-y_i)$ [1], где x_i, y_i – координаты точек крепления осцилляторов на поверхности оболочки; в уравнениях (1.1) μ_i представляет собой массу i -го осциллятора, N – количество осцилляторов.

Уравнения Доннелла-Муштари-Власова дают приемлемый результат только при выполнении условия $h \ll R$. Перемещения в плоскости должны быть малы, т.е. $|u| \ll h, |v| \ll h$, тогда как прогиб w может иметь тот же порядок что и толщина оболочки, $|w| = O(h)$.

Если пользоваться гипотезой прямых нормалей, то для каждой точки контура необходимо удовлетворить четырем граничным условиям.

В данной работе рассматриваются бесконечно длинные периодически опертые оболочки, и во внимание берется область оболочки длины L , лежащая между двумя опорами. В этом случае на концах оболочки должны быть удовлетворены следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь M_x – изгибающий момент. Два других условия имеют вид:

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (1.4)$$

Более того, u, v, w должны быть непрерывны по координате y .

2. Дискретизация задачи. В общем случае точное аналитическое решение сформулированной задачи пока не получено. Как и при решении задач нелинейной динамики оболочек с присоединенными массами в покоящейся среде, приходится прибегать к использованию различных приближенных подходов. Как правило, на первом этапе задача с распределенными параметрами сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Чаще всего для этого применяется метод Бубнова-Галеркина.

Для расчета колебаний оболочки в потоке газа ограничимся учетом четырех форм изгибных колебаний [8]:

$$w = f_1 \sin rx \sin sy + f_2 \sin rx \cos sy + f_3 \sin 2rx \sin sy + f_4 \sin 2rx \cos sy + f^*(x, t) \quad (2.1)$$

Здесь $s = n/R$, $r = m\pi/L$, причем $m = 1$. n представляет собой число полных волн по окружности, m – число полуволн по области оболочки длины L . Функция f^* отражает вклад нелинейных факторов в динамический прогиб. Для ее определения используем условие непрерывности (замкнутости) окружных перемещений по контуру [6-8]:

$$\int_0^{2\pi R} \left(-\frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dy = 0. \quad (2.2)$$

В результате приходим к зависимости

$$f^*(x, t) = \frac{n^2}{4R} [(f_1 \sin rx + f_3 \sin 2rx)^2 + (f_2 \sin rx + f_4 \sin 2rx)^2]. \quad (2.3)$$

Следует отметить неслучайность выбора четырехмодовой аппроксимации функции прогиба. В предшествующих работах было показано [8], что учет меньшего числа форм изгибных колебаний не позволяет достоверно исследовать связанную систему «упругая оболочка – газовый поток». Использование же большего числа членов ряда приводит к заметному усложнению аналитического исследования системы, не оказывая при этом существенного влияния на результаты исследования.

Очевидно, что колебания с наибольшими амплитудами реализуются по первой форме, и, следовательно, эта форма представляет наибольший в плане ее гашения интерес. В связи с этим в качестве точки крепления осцилляторов по продольной координате примем $x_i = L/2$, что также существенно облегчит дискретизацию задачи. В тоже время координаты крепления осцилляторов по окружности (а также их количество) примем произвольным.

Применяя метод Бубнова-Галеркина к системе (1.1), получаем уравнения движения, связывающие неизвестные функции $f_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} (1 + \gamma_1)\ddot{f}_1 + \gamma_3\ddot{f}_2 + \omega_1^2 f_1 + \alpha\dot{f}_1 - \beta f_3 &= Z_1; \\ (1 + \gamma_2)\ddot{f}_2 + \gamma_3\dot{f}_1 + \omega_2^2 f_2 + \alpha\dot{f}_2 - \beta f_4 &= Z_2; \\ \ddot{f}_3 + \omega_2^2 f_3 + \alpha\dot{f}_3 + \beta f_1 &= Z_3; \\ \ddot{f}_4 + \omega_2^2 f_4 + \alpha\dot{f}_4 + \beta f_2 &= Z_4. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь ω_i – собственные частоты линейных колебаний оболочки;

$$\alpha = \frac{\chi P_\infty}{\rho h a_\infty}; \quad \beta = \frac{8}{3} \frac{\chi P_\infty M_\infty}{L h \rho}; \quad (2.5)$$

Z_i – нелинейные относительно обобщенных перемещений f_i и их производных функции ($i = 1, 2, 3, 4$). Явные выражения для этих функций здесь не представлены из-за их громоздкости.

Коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ представляют собой вклад сосредоточенных масс в линейную часть системы:

$$\gamma_1 = 2 \sum_{i=1}^N (\text{sign}(2\pi R - y_i) + \text{sign}(y_i)) \frac{\mu_i}{M_0} \sin^2 \left(\frac{y_i}{R} \right);$$

$$\gamma_2 = 2 \sum_{i=1}^N (\text{sign}(2\pi R - y_i) + \text{sign}(y_i)) \frac{\mu_i}{M_0} \cos^2 \left(\frac{y_i}{R} \right);$$

$$\gamma_3 = 2 \sum_{i=1}^N (\text{sign}(2\pi R - y_i) + \text{sign}(y_i)) \frac{\mu_i}{M_0} \sin \left(\frac{y_i}{R} \right) \cos \left(\frac{y_i}{R} \right),$$

где $M_0 = 2\pi R L h \rho$ – масса незагруженной оболочки. В данной работе отношение μ_i/M_0 принималось порядка 0,1-0,2 % с суммарной массой всех осцилляторов не превышающей 2 % от массы незагруженной оболочки.

3. Граница устойчивости. Для нахождения линейной границы устойчивости положения равновесия системы (2.4) линеаризуем систему и полагаем $f_i \sim e^{kt}$. Решая задачу на собственные значения

$$\begin{vmatrix} (1 + \gamma_1)k^2 + \omega_1^2 + k\alpha & \gamma_3 k^2 & -\beta & 0 \\ \gamma_3 k^2 & (1 + \gamma_2)k^2 + \omega_2^2 + k\alpha & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & k^2 + \omega_2^2 + k\alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & k^2 + \omega_2^2 + k\alpha \end{vmatrix} = 0$$

и рассматривая все возможные случаи, когда их вещественная часть становится положительной, строим границу флаттера.

При численном расчете физические и геометрические параметры системы были приняты постоянными,

$$\rho = 8905,37 \text{ кг/м}^3; \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \quad \mu = 0,35; \quad n = 21; \quad \chi = 1,4;$$

$$M_\infty = 3; \quad a_\infty = 213 \text{ м/с}; \quad R = 0,2 \text{ м}; \quad L = 0,4 \text{ м}; \quad h = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Следует отметить, что выбранное здесь число волн в окружном направлении $n = 21$ не является случайным. Для выбранных параметров системы оно соответствует нижней границе появления флаттера для гладкой оболочки [9].

Для простоты расчетов в данной работе все μ_i приняты одинаковыми. Крепление осцилляторов по окружности контура – симметричное, на равном расстоянии друг от друга.

На рис. 3.1 приведены критические значения аэродинамического давления (при котором тривиальное положение равновесия становится неустойчивым и возбуждаются автоколебания) для различного числа осцилляторов N (от 1 до 6). Как показывают расчеты, для системы с сосредоточенными массами количеством от 1 до 3 граница устойчивости практически не различается и близка к границе для гладкой оболочки. Начиная же с $N = 4$ граница начинает существенно повышаться. Причем, как показывает прямое численное интегрирование нелинейной системы (2.4), как и в случае гладкой оболочки, полученная линейная граница возникновения флаттера оказывается завышенной. В линеаризованной системе при докритических (дофлаттерных) значениях давления набегающего потока движение системы будет носить затухающий характер, при закритических наступает динамическая неустойчивость. В случае же, когда нелинейные члены Z_i учтены, колебания в области флаттера перестают носить периодический характер. А именно,

на достаточно большом промежутке времени возникающий предельный цикл становится неустойчивым и в системе реализуется переход от этого предельного цикла к колебаниям типа биений.

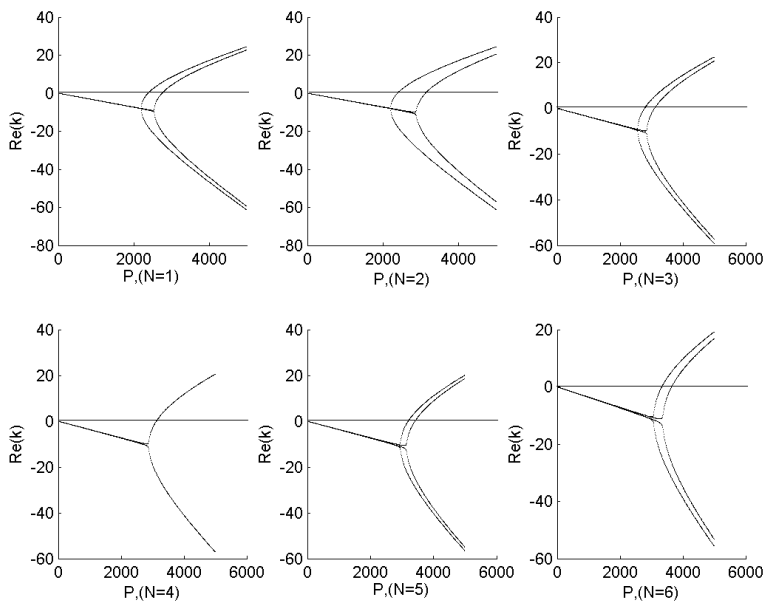


Рисунок 3.1

Как видно из рис. 3.1, с ростом числа сосредоточенных масс растет и граница возникновения флаттера. Однако в данном случае рост числа осцилляторов означает и рост их суммарной массы, что может быть недопустимо при проектировании реальной конструкции с точки зрения экономичности. В связи с этим встает вопрос о поиске некоего оптимального отношения «численность осцилляторов – суммарная масса».

На рис. 3.2 приведены значения критического аэродинамического давления для систем, несущих различное количество присоединенных масс в случае, когда их суммарная масса остается неизменной (в данном случае составляющая 1% от массы незагруженной оболочки).

Из рисунка видно, что наилучший эффект «поднятия» границы возникновения флаттера дает случай, когда число осцилляторов $N = 4$, т.е. минимальное для достижения эффекта виброгашения число осцилляторов в то же время является и оптимальным.

Выводы. Была проведена дискретизация исходной модели нелинейных колебаний цилиндрической оболочки с сосредоточенными массами в сверхзвуковом потоке, в результате чего задача была сведена к анализу системы с

четырьмя степенями свободы. Получены границы флаттера для оболочек с различным числом осцилляторов. Определено оптимальное для виброгашения число осцилляторов N .

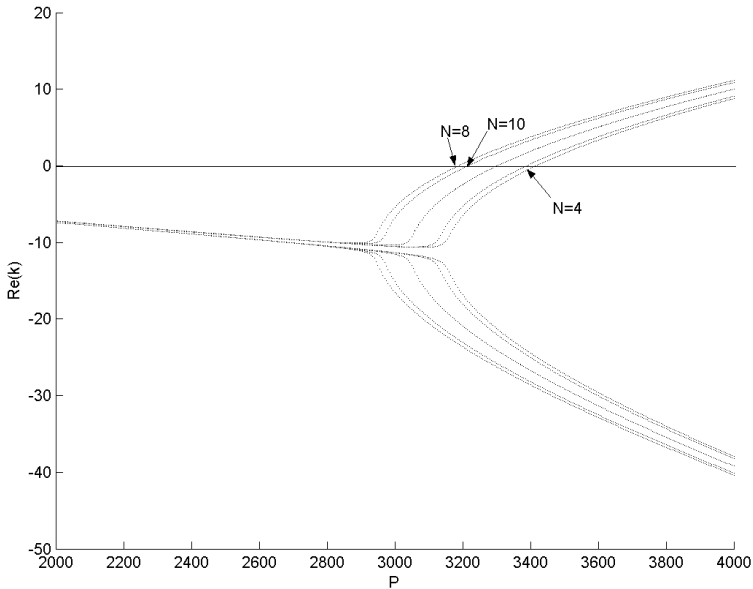


Рисунок 3.2

Список литературы: 1. Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 200 с. 2. Бидерман В.И. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1977. – 488 с. 3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340 с. 4. Болотин В.В. Нестационарный флаттер пластин и пологих оболочек в потоке газа // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1962. – № 3. – С. 106-114. 5. Болотин В.В. Эффекты стабилизации и дестабилизации в задачах устойчивости упругих систем. – Новосибирск: Наука, 1977. – С. 7-18. 6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 7. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. – М.: Наука, 1976. – 410 с. 8. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснополянская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наукова думка, 1984. – 220 с. 9. Курилов Е.А. Аэроупругая устойчивость и нелинейные нормальные колебания цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Вестник НТУ «ХПИ». – № 20. – 2004. – С. 29-38. 10. Малкин И.Г. Некоторые проблемы теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с. 11. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. 12. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1978. – Т. 11. – С. 67-122. 13. Тонкостенные оболочечные конструкции / Под ред. Э.И.Григолоука. – М.: Машиностроение, 1980. – 608 с. 14. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с. 15. Amabili M., Pellicano F. Nonlinear supersonic flutter of circular cylindrical shells // AIAA Journal. – Vol. 39, No. 4. – April 2001. – P. 564-572. 16. Matsuzaki Y., Kobayashi S. Nonlinear analysis of supersonic panel flutter of circular cylindrical shells // Ibid. – № 18. – P. 103-111. 17. Olson M.D., Fung Y.C. Supersonic flutter of circular shells subjected to internal pressure and axial compression // Ibid.4. – № 4. – 1966. – P. 858-864. 18. Olson M.D., Fung Y.C. Comparing theory and

experiment for the supersonic flutter of circular shell // *Ibid.*5. – № 10. – 1967. – PP. 1849-1856. **19.** *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.* Normal Modes and Localizations in Nonlinear Systems. – Wiley, New York, 1996.

Поступила в редколлегию 13.04.2006

УДК 539.3

Б.Я.КАНТОР, докт. техн. наук, ИПМаш НАН Украины;
Е.Ю.МИСЮРА, ХНЭУ

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЧТИ НЕСЖИМАЕМЫХ НЕОДНОРОДНО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Викладена методика чисельного розв'язання осесиметричних (зі скрутом та без нього) фізично та геометрично нелінійних задач для майже нестисливих кусково-однорідних неоднорідно трансверсально-ізотропних та ізотропних гіперупругих тіл обертання на основі варіаційного принципу можливих переміщень у приращеннях, який реалізується кроковим алгоритмом методу скінченних елементів. Вірогідність результатів, що одержуються за допомогою цієї методики, підтверджена збігом чисельних і точних розв'язків лінійних (Ламе) і нелінійних (О.І.Лур'є) задач деформування порожнистих циліндра і сфери під внутрішнім тиском. Запропонована методика використана для вивчення НДС двох типів об'єктів: гумовотехнічних конструкцій (броньований шланг, різні види гумових опор і амортизаторів з обмеженням радіальних переміщень гумових блоків) та математичної моделі лівого шлуночка серця.

The numerical solution methodics of axisymmetric (with and without the torsion) physically and geometrically nonlinear problems for nearly incompressible piecewise-homogeneous nonhomogeneously transversely isotropic and isotropic hyperelastic bodies of revolution on the base of the variational principle of possible displacements in the increments which realized of the stepping algorithm of the finite element method was stated. The reliability of the results which received with the help of this methodics was confirmed by coincidence of numerical and analytic solutions of the linear (Lame) and nonlinear (A.I. Lurie) problems of deformation of the hollow cylinder and sphere loaded by the internal pressure. The proposed methodics was used for study of the stress-strain state of two types objects: the rubber-technical structures (armoured hose, different kinds of rubber support and shock-absorbers with restriction of the radial displacement of the rubber blocks) and mathematical model of the heart left ventricle.

Анализ НДС гиперупругих тел вращения сложной формы и неоднородной структуры в физически и геометрически нелинейной постановке является сложной прикладной проблемой механики деформируемого твердого тела. Интерес к этой области исследований вызван внутренними стимулами развития науки и запросами практики. Задачи деформирования гиперупругих тел являются физически и геометрически нелинейными. Большой вклад в их изучение внесли А.И. Лурье [1], К.Ф. Черных [2], И.Н. Снеддон и др. [3], Л.И. Седов [4] и др. Нелинейность обусловлена поведением материала и наличием больших деформаций. Кроме того, к существенному усложнению приводят неклассическая форма тела, неоднородность его механических свойств, анизотропия и т.п. В таких случаях необходимо использовать численные методы, основанные на вариационных принципах меха-

ники, в частности МКЭ.

Изложим методику решения осесимметричных (с кручением и без него) физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных неоднородно трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения на основе вариационного принципа возможных перемещений в приращениях, реализуемого шаговым алгоритмом МКЭ.

Отнесем тело к цилиндрической системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$ соответствует r, φ, z). Тензор деформаций Коши-Грина имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(u_{i,k} + u_{k,i} + u_{j,i} u_{j,k} \right), \quad i, k = r, \varphi, z, \quad (1)$$

где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора перемещений, матричный вид которого $\{\mathbf{u}\} = \left\{ u_r(r, z) \quad u_\varphi(r, z) \quad u_z(r, z) \right\}^T$, $u_{2,2} = \frac{u_r}{r}$.

Производные от компонент v_i вектора приращений перемещений $\{v\}$ по координатам следующие: $\{v_{,j}\} = [L_i]\{v\}$; $L_{1ij} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial r}$; $L_{2ij} = \delta_{ij} \frac{1}{r}$, $L_{2ij} = 0$ при $i = j = 2, 3$; $L_{3ij} = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial z}$.

Приращение деформаций e_{ik} за один шаг по параметру нагрузки будет

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} v_{j,i} v_{j,k}, \quad \tilde{e}_{ik} = \frac{1}{2} \left[v_{j,i} \left(\delta_{jk} + u_{j,k} \right) + v_{j,k} \left(\delta_{ji} + u_{j,i} \right) \right], \quad i, j, k = r, \varphi, z. \quad (2)$$

где u_i – полные перемещения, накопленные на предыдущих шагах.

Представим (2) в матричном виде с помощью операторной матрицы $[\tilde{L}]$

$$\{\tilde{e}\} = [\tilde{L}]\{v\}, \quad (3)$$

$$[\tilde{L}] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \left(1 + \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \left(1 + \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} & \left(1 + \frac{u_r}{r} \right) \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{bmatrix}.$$

Физический закон гиперупругого материала определяется потенциалом W

$$t^{ik} = \frac{1}{J} \sigma^{ik} = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}, \quad (4)$$

где t^{ik} – тензор истинных напряжений (тензор Коши), $J = \sqrt{G/g}$ (G и g – третьи инварианты тензоров меры деформации Коши-Грина G_{ik} и метрического тензора среды до деформации g_{ik} соответственно), σ^{ik} – тензор напряжений Пиолы-Киргоффа; в общем случае $W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})$, $\gamma_{ik} = 2\varepsilon_{ik}$, $i \neq k$.

Связь компонент приращений напряжений Пиолы-Киргоффа s^{ik} и деформаций e_{ik} есть

$$s^{ik} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} e_{lm}. \quad (5)$$

Заменяя индексы в векторах $\{\mathbf{e}\} = \{e_{11}, e_{22}, e_{33}, \tilde{\gamma}_{12}, \tilde{\gamma}_{23}, \tilde{\gamma}_{31}\}^T$, $\tilde{\gamma}_{ik} = 2e_{ik}$, $i \neq k$ и $\{\mathbf{s}\} = \{s^{11}, s^{22}, s^{33}, s^{12}, s^{23}, s^{31}\}^T$ на $1, \dots, 6$ и вводя матрицу 6×6 касательных модулей упругости $[\tilde{E}]$ с компонентами $\tilde{E}_{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}$, запишем (5) в

матричном виде $\{\mathbf{s}\} = [\tilde{E}]\{\mathbf{e}\}$.

Приведем потенциалы гиперупругих материалов. Потенциал Муни-Ривлина

$$W = \mu(J_1 - 3) - \frac{\mu}{2}(J_2 - 3) + \frac{\lambda + 2\mu}{2}(J - 1)^2, \quad (6)$$

где J_1, J_2, J_3 – инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина.

Потенциал Джона (полулинейный материал)

$$W = \frac{1}{2} \left[\lambda (\lambda_r + \lambda_\varphi + \lambda_z)^2 + 2\mu (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2) \right], \quad (7)$$

где $\lambda_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{kk}}$ – удлинения, $k = r, \varphi, z$ (по k нет суммирования).

Для исследования поведения почти несжимаемых трансверсально-изотропных гиперупругих материалов обычно применяют потенциалы

$$W = \frac{1}{2} C [\exp(Q) - 1] + c_c (J - 1)^2, \quad (8)$$

$$W = \frac{1}{2} C [\exp(Q) - 1] + c_c (J \ln J - J + 1), \quad (9)$$

$$Q = b_1 \varepsilon_{ff}^2 + b_2 \left(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{cc}^2 + 2\varepsilon_{rc}^2 \right) + 2b_3 \left(\varepsilon_{fr}^2 + \varepsilon_{fc}^2 \right),$$

где f – индекс оси изотропии, два других – индексы осей в нормальной к

ней плоскости (плоскости изотропии). Вторые слагаемые в (8) и (9) являются функциями штрафа, пропорциональные квадрату объемной деформации при инфинитезимальных деформациях.

Физический закон гиперупругого материала при $\epsilon_{ik} \rightarrow 0$, $i, k = 1, 2, 3$ должен стремиться к закону Гука для анизотропного материала. Структура матриц, получаемых из (8) и (9), не отвечает указанному требованию.

Введем новый потенциал, лишенный указанного недостатка [5]

$$W = C \left\{ \left[\exp(\alpha W_0) - 1 \right] / \alpha + c_c (J - 1)^2 \right\}, \quad (10)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} \left(c_1 \epsilon_{11}^2 + c_2 \epsilon_{22}^2 + c_3 \epsilon_{33}^2 + c_4 \epsilon_{11} \epsilon_{22} + c_5 \epsilon_{22} \epsilon_{33} + \right.$$

$$\left. + c_6 \epsilon_{33} \epsilon_{11} + c_7 \gamma_{12}^2 + c_8 \gamma_{23}^2 + c_9 \gamma_{31}^2 \right),$$

где C – константа с размерностью напряжения; α , c_c и $c_1 - c_9$ – безразмерные.

Функция W_0 отличается от Q введением смешанных произведений линейных деформаций с коэффициентами c_4, c_5, c_6 , что позволяет точно описать изотропный, трансверсально-изотропный или ортотропный материал. Множитель C определяет жесткость материала, показатель α управляет степенью нелинейности жесткости, рост c_c увеличивает степень несжимаемости материала. Напомним, что здесь деформации отнесены к правой материальной системе координат (ее оси совпадают с осями трансверсальной изотропии материала).

При расчетах НДС тел вращения, обладающих неоднородной трансверсальной изотропией, надо учитывать, что материальная («вмороженная») система координат не совпадает с исходной, цилиндрической. Установим связь между цилиндрической и материальной системами координат.

Так как аргументами потенциалов трансверсально-изотропного материала являются компоненты тензора деформаций в материальной системе координат, на определенном этапе алгоритма необходимо преобразовывать тензор деформаций от цилиндрической системы к материальной. Свяжем направление меридиана со второй осью материальной системы координат x', y', z' , а плоскость изотропии – с первой и третьей осями. Пусть угол между осью γ и нормалью к меридиану стенки тела вращения есть ψ , а γ – угол между касательной ко второй (окружной) координате цилиндрической системы координат и второй координатой материальной системы координат. Тогда матрицы поворота $[A_1]$ и $[A_2]$ на углы γ и ψ , соответственно, будут [6]

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad [A_2] = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix},$$

а преобразование от цилиндрической к материальной системе координат будет выполняться умножением матрицы деформаций в цилиндрической сис-

теме координат на матрицу

$$[B] = [A_1][A_2] = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ -\sin \psi \sin \gamma & \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \gamma & -\sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица $[B]$ ортогональна, ее определитель равен единице, обратная ей матрица – транспонированная. С точностью до обозначений матрица $[B]$ совпадает с матрицей поворота, указанной в статье [7]. Заметим, что дифференцирование потенциала по компонентам тензора деформаций в материальной системе координат дает компоненты тензора напряжений в той же системе. Преобразование от материальной системы координат к цилиндрической выполняется с помощью матрицы, обратной к $[B]$.

Для построения метода решения исходим из вариационного принципа возможных перемещений. В соответствии с ним в состоянии равновесия вариация полной энергии системы, состоящей из потенциальной энергии деформации U и работы A внешних сил, равна нулю

$$\delta(U + A) = 0. \quad (11)$$

Запишем формулы для вариации U и A на m - и $m+1$ -м шаге

$$\begin{aligned} \delta U_m &= \int_{V_0} \sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV_0, & \delta A_m &= - \int_{S_m} q \delta u_n dS_m, \\ \delta U_{m+1} &= \int_{V_0} (\sigma^{ik} + s^{ik}) \delta (\varepsilon_{ik} + e_{ik}) dV_0, \\ \delta A_{m+1} &= - \int_{S_{m+1}} (q_m + \Delta q) \delta (u_n + v_n) dS_{m+1}, \end{aligned}$$

где V_0 – объем тела до деформации, S_m – поверхность деформированного тела на m -ом шаге, q – внешнее давление, заданное на поверхности S_m , u_n – перемещение по нормали к поверхности S_m , Δq – приращение давления за шаг, v_n – приращение перемещения по нормали к поверхности S_{m+1} .

В состоянии равновесия $\delta \varepsilon_{ik} = \delta u_n = 0$. Сохраняя лишь квадратичные относительно приращений перемещений слагаемые, преобразуем (11) так:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \left[\tilde{D}^{iklm} \tilde{e}_{lm} \delta \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} \sigma^{ik} (\delta v_{j,i} v_{j,k} + v_{j,i} \delta v_{j,k}) \right] dV_0 - \\ - \int_{S_{m+1}} \Delta q \delta v_n dS_{m+1} + \delta R_{m+1} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } \delta R_{m+1} = \int_{V_0} \sigma^{ik} \delta \tilde{e}_{ik} dV_0 - \int_{S_m} q_m \delta v_n dS_m.$$

При решении задач в контактной постановке в вариационный принцип (12) вводится дополнительное слагаемое $\frac{C_0 E}{R} \int_{S_c} v_n \delta v_n \psi dS_c$, где C_0 – безразмерная

константа, E_0 и R – характерные значения модуля упругости и радиуса резины, v_n – приращение перемещения по нормали к поверхности контакта S_c , функция $\psi = \frac{1}{2} [1 + (u_n(z) - d(z))]$ равна единице в области контакта и нулю вне ее.

Для применения МКЭ представим (12) в матричном виде

$$\int_{V_0} \{\delta v\}^T [\tilde{L}]^T [\tilde{E}] [\tilde{L}] \{v\} + \frac{1}{2} (\{\delta v\}^T [L_i]^T [\sigma^{ik}] [L_k] \{v\} + \{\delta v\}^T [L_k]^T [\sigma^{ki}] [L_i] \{v\}) dV_0 = \int_{S_{m+1}} \{\delta v\}^T \{\Delta Q\} dS_{m+1} - \int_{S_{m+1}} \{\delta v\}^T \{R\} dS_{m+1}, \quad (13)$$

где $[\sigma^{ik}]$ – матрица 3×3 компонент σ^{ik} тензора полных напряжений; первый и второй интегралы правой части – вектор-столбцы, отвечающие нагружению и корректирующей решение невязке.

Далее с помощью МКЭ проводим алгебраизацию принципа возможных перемещений в приращениях. Введем для определенности четырехугольный восьмиузловой конечный элемент (КЭ). Вектор перемещений его произвольной точки будет

$$\{\tilde{u}\} = [N] \{\tilde{u}\}, \quad \{\tilde{u}\} = \{u_{r1} \quad u_{\phi 1} \quad u_{z1} \quad \dots \quad u_{r8} \quad u_{\phi 8} \quad u_{z8}\}^T,$$

где $[N]$ – матрица функций формы КЭ, $\{\tilde{u}\}$ – вектор узловых перемещений элемента. Тогда соотношения для v_i и \tilde{e}_{ik} будут

$$\{v\} = [N] \{\tilde{v}\}, \quad \{\tilde{e}\} = [\tilde{L}] [N] \{\tilde{v}\}, \quad (14)$$

где $\{\tilde{v}\}$ – вектор приращений узловых перемещений.

Подставляя (14) в уравнение (13), получим

$$\{\delta \tilde{v}\}^T \left\{ \int_{V_0^e} \left[[N]^T [\tilde{L}]^T [\tilde{E}] [\tilde{L}] [N] + \frac{1}{2} ([N]^T [L_i]^T [\sigma^{ik}] [L_k] [N] + [N]^T [L_k]^T [\sigma^{ki}] [L_i] [N]) \right] dV_0^e \right\} \{\tilde{v}\} = \int_{S_{m+1}} \{\delta \tilde{v}\}^T [N]^T \{\Delta Q\} dS_{m+1} - \int_{S_{m+1}} \{\delta \tilde{v}\}^T [N]^T \{R\} dS_{m+1}. \quad (15)$$

Суммируя (15) по всем КЭ и приравнявая нулю множители при $\{\delta \tilde{v}\}$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$[K] \{\tilde{v}\} = \{Q\} - \{R\}, \quad (16)$$

где $[K]$ – матрица жесткости; $\{Q\}$ и $\{R\}$ – векторы-столбцы приращений нагрузок и невязок уравнений равновесия.

Кинематические граничные условия вводим в (16) путем замены диагональных компонент $[K]$, отвечающих равным нулю компонентам вектора перемещений, значениями существенно большими, чем другие компоненты матрицы, а

также аннулирую соответствующие элементы вектора правой части.

Основные этапы алгоритма численного решения вариационной задачи МКЭ состоят в следующем. По исходной информации о форме и размерах поперечного сечения тела и числе КЭ строится сетка КЭ. При этом образуется информационный массив, указывающий на уровень жесткости материала элемента (он необходим для расчета кусочно-однородных тел). Так как расчет выполняется шаговым методом по параметру нагрузки, на каждом шаге имеем линеаризованную задачу МКЭ относительно приращений узловых перемещений. Исходное состояние тела считаем свободным от нагрузки (недеформированным). Далее в соответствии с (15) численным интегрированием по Гауссу вычисляются элементы матриц жесткости КЭ и производится их накопление в матрицу жесткости тела. На следующем этапе подсчитываются элементы вектора правой части СЛАУ, отвечающего заданному приращению давления на нагруженной поверхности тела. Затем вводятся кинематические граничные условия – условия закрепления тела, т. е. равенства нулю узловых перемещений в определенных узлах. Таким образом, приходим к СЛАУ. Матрица полученной системы симметричная, положительно определенная и имеет ленточную структуру, поэтому хранится в виде верхней правой полуленты. Для ее решения применяем метод Холецкого [7]. Для уточнения решения используем итеративный процесс метода Ньютона-Рафсона [9]. Полное решение СЛАУ выполняется только на первой итерации, на последующих – лишь обратный ход. Указанные вычисления повторяются заданное число шагов по нагрузке, что дает возможность проследить за НДС тела на протяжении всего процесса нагружения.

Полученные приращения компонент вектора узловых перемещений прибавляются к массиву накопленных на предыдущих шагах (полных) перемещений, что позволяет вычислять новые координаты узлов деформированной сетки КЭ. Полные деформации в узлах определяются как произведение модифицированной введением коэффициентов $1/2$ матрицы $[L]$ (3), умноженной на вектор узловых значений полных перемещений. При этом реализуется точная формула (1). Компоненты тензора напряжений в узлах сетки определяются из (4), а затем – физические компоненты тензора напряжений Коши.

Для проверки достоверности результатов, получаемых предложенным методом, были решены линейная и нелинейная задачи деформирования толстостенного цилиндра и полый сферы под действием внутреннего давления. Результаты решения линейных задач сравнивались с точными решениями задач Ламе [10], а нелинейной – с точными решениями А.И. Лурье [1] для цилиндра [11] и сферы, выполненных из полулинейного материала Джона (7). Численные решения линейной и нелинейной задач совпали с точными с относительной погрешностью 10^{-4} при пяти итерациях по методу Ньютона-Рафсона.

Предложенная методика численного решения задач использована для изучения НДС двух типов объектов: резинотехнических изделий (бронированный шланг [12], опоры [13] и амортизаторы [14] с ограничением радиальных перемещений резиновых блоков) и математической модели левого желу-

дочка сердца [15-17], которые связаны некой общностью, а именно: кусочной однородностью и гиперупругостью материала. Для исследования НДС резинотехнических изделий применялся потенциал Муни-Ривлина (6), для модели левого желудочка сердца – (10).

Список литературы: 1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: 1980. – 512 с. 2. *Черных К.Ф.* Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с. 3. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 219 с. 4. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – 584 с. 5. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Потенциал почти несжимаемого трансверсально-изотропного гиперупругого материала // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 20. – С. 111-120. 6. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 279 с. 7. *Nielsen P.M.F., Le Grice L.J.* eds. Mathematical model of geometry and fibrous structure of the heart // *Am. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol. 29)* – 1991. – 260. – P. H1365 –H1378. 8. *Уилкинсон Р.* Линейная алгебра: Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с. 9. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский и др. – Киев: Вища школа, 1982. – 480 с. 10. *Хан Х.* Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с. 11. *Мисюра Е.Ю.* Численное решение геометрически нелинейной задачи для толстостенного цилиндра, выполненного из материала Джона // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2004. – №19. – С. 141–148. 12. *Мисюра Е.Ю.* Нелинейное деформирование бронированного шланга // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2005. – № 47. – С. 107-112. 13. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Об управлении нелинейной жесткостью цилиндрических резиновых опор // Пробл. машиностроения. – 2005. – № 2, т. 8. – С. 50-56. 14. Патент 9984 Украина, МКИ³ 7 F16F3/00. Амортизатор / Б.Я. Кантор, Г.И. Львов, Е.Ю. Мисюра (Украина); № u 2005 04269; Заявлено 04.05.2005; Опубл. 17.10.2005, Бюл. № 10. – 2005. – С. 4. 15. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и – 2004. – № 1(10). – С. 23–31. 16. *Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И., Мисюра Е.Ю.* Исследование НДС толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца) // Вестник НТУ «ХПИ»: Динамика и прочность машин. – 2004. – №31. – С. 106-117. 17. *Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю.* Нелинейное моделирование напряженно-деформированного состояния левого желудочка сердца в хронической стадии инфаркта миокарда // Пробл. машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 79–87.

Поступила в редколлегию 03.04.2006

УДК 539.3

Л.В.КУРПА, докт.техн.наук; *Г.Н.ТИМЧЕНКО*; НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ R-ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Розглядається задача про нелінійні вільні коливання композитних багатощарових пластин складної форми, при різних способах закріплення. Математична постановка задачі розглядається в рамках теорії типу Тимошенко. Розв'язання задачі виконано за допомогою теорії R-функцій, варіаційних методів і метода Бубнова-Гальоркіна. Наведено порівняння одержаних результатів для композитної пластини, з відомими результатами, що свідчить про вірогідність запропонованого методу.

The problem of nonlinear free vibrations of composite laminated plates with complex planform and different boundary conditions is considered. The mathematical statement of the task is carried out using the Timoshenko type theory. The problem was solved by the R-function theory, variational methods and the Bubnov-Galyorkin method. The comparison of obtained results for composite plate, with known results is carried out, that confirms effectiveness and reliability of the offered method.

Нахождение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и исследование их поведения при различных граничных условиях, для многослойных пластин является одной из актуальных проблем нелинейной динамики композитных пластин. Обзор литературы показывает, что для пластин сложной планформы этот вопрос изучен недостаточно. В настоящей работе для решения данной задачи предлагается алгоритм, который базируется на теории R-функций [1], вариационных методах и методе Бубнова-Галеркина. С помощью предложенного подхода изучено влияние геометрии, граничных условий, вида материала слоев пластины на АЧХ.

Постановка задачи. Рассматривается задача о нелинейных колебаниях многослойных пластин постоянной толщины h , в рамках уточненной теории типа Тимошенко. В соответствии с этой теорией, уравнения движения [3] многослойной пластины представляются в виде:

$$L_{11}(C_{ij}, D_{ij})\psi_x + L_{12}(D_{ij})\psi_y + L_{13}(C_{ij})w = \frac{\gamma}{g} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$L_{21}(D_{ij})\psi_x + L_{22}(C_{ij}, D_{ij})\psi_y + L_{13}(C_{ij})w = \frac{\gamma}{g} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$L_{31}(C_{ij})\psi_x + L_{32}(C_{ij})\psi_y + L_{33}(C_{ij})w = -Nl_1(C_{ij}) + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (3)$$

$$L_{41}(C_{ij})u + L_{42}(C_{ij})v = -Nl_2(C_{ij})w + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$L_{51}(C_{ij})u + L_{52}(C_{ij})v = -Nl_3(C_{ij})w + \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (5)$$

где u, v, w – перемещения точек координатной поверхности; ψ_x, ψ_y – углы поворота прямолинейного элемента [3], а дифференциальные операторы L_{ij}, Nl_i ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) имеют вид:

$$L_{11}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_5^2 C_{55}; \quad L_{22}(C_{ij}, D_{ij}) = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k_4^2 C_{44};$$

$$L_{12}(D_{ij}) = L_{21}(D_{ij}) = (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad L_{13}(C_{ij}) = L_{31}(C_{ij}) = -k_5^2 C_{55} \frac{\partial}{\partial x};$$

$$L_{23}(C_{ij}) = L_{32}(C_{ij}) = -k_4^2 C_{44} \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{33}(C_{ij}) = k_1^2 C_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_4^2 C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{41}(C_{ij}) = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad L_{51}(C_{ij}) = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$L_{42}(C_{ij}) = L_{52}(C_{ij}) = (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y};$$

$$Nl_1(C_{ij}) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left\{ C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left\{ C_{22} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + v_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\};$$

$$Nl_2(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\};$$

$$Nl_3(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\};$$

здесь C_{ij}, D_{ij} – приведенные жесткостные характеристики [2] k_i ($i = 4, 5$) – коэффициенты сдвига.

Система дифференциальных уравнений (1) – (5) дополняется соответствующими граничными, а также начальными условиями вида:

$$w = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Метод решения. На первом этапе выполняется решение линейной задачи о колебаниях многослойной пластины с помощью теории R-функций [1] и вариационных методов. Такой подход позволяет находить собственные функции в аналитическом виде, которые на последующих этапах используются как базисные.

Например, с помощью основного собственного вектора линейной задачи искомое решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y); & \psi_x(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{x1}(x, y); \\ \psi_y(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{y1}(x, y); & u(x, y, t) &= y_1^2(t) \cdot u_2(x, y); \end{aligned} \quad (7)$$

$$v(x, y, t) = y_1^2(t) \cdot v_2(x, y),$$

где $\psi_{x1}(x, y), \psi_{y1}(x, y), w_1(x, y)$ – компоненты собственного вектора соответствующего основной собственной частоте ω_L , а функции $u_2(x, y), v_2(x, y)$ являются решением задачи теории упругости, в предположении, что силами инерции в уравнениях (4), (5) можно пренебречь. Вариационная постановка задачи теории упругости сводится к нахождению минимума следующего функционала:

$$\begin{aligned}
J(\vec{U}_2) = & \int_{\Omega} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 + C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} + C_{66} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 \right\} + \\
& + (N_2(C_{ij})w_1)u_2 + (N_3(C_{ij})w_1)v_2 \} d\Omega - \\
- & \int_{\partial\Omega} \left\{ \left[\frac{1}{2} \left((C_{11}l^2 + C_{12}m^2) \cdot \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + (C_{12}l^2 + C_{22}m^2) \cdot \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + 2C_{66} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} lm \right] U_{2n} + \right. \\
+ & \left. \left[\frac{1}{2} \left((C_{12} - C_{11}) \cdot \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + (C_{22} - C_{12}) \cdot \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) lm + C_{66} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} (l^2 - m^2) \right] V_{2n} \right\} dS,
\end{aligned}$$

где $U_{2n} = u_2 l + v_2 m$, $V_{2n} = -u_2 m + v_2 l$. При численной реализации направляющие косинусы l, m нормали к границе области Ω удобно заменить как $l = -\frac{\partial \omega}{\partial x}$, и $m = -\frac{\partial \omega}{\partial y}$, где $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное до первого порядка [1] уравнение границы области.

Дискретизацию функционала будем осуществлять также с использованием метода Ритца и теории R- функций.

После подстановки (7) в уравнение (3) и применения процедуры Бубнова-Галеркина задача сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению:

$$y_1''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + \beta \cdot y_1^3(t) = 0. \quad (8)$$

Коэффициент β уравнения (8) определяется по формуле:

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} (N_1(C_{ij}, u_2, v_2, w_1)) \cdot w_1 d\Omega}{\rho h \|w_1\|^2}.$$

Выражение N_1 имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
N_1(C_{ij}) = & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + v_2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \left\{ C_{66} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left\{ C_{22} \left[\frac{\partial v_2}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + v_1 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

На последнем этапе выполняется решение уравнения (2.1) с начальными условиями (1.6). Для этого использован метод Бубнова-Галеркина. В результате чего получена зависимость между отношением нелинейной частоты к линейной и амплитудой в следующем виде:

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta \cdot A^2}.$$

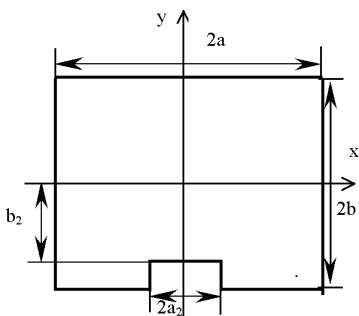


Рисунок 1

Геометрические характеристики $b/a = 1$; $h/2a = 0,001$; $a_2/2a = 0,3$. Предполагается, что пластина может быть изготовлена из материалов двух видов ($G_{12} = G_{23} = G_{13}$):

- материал 1: $E_1/E_2 = 10$; $G_{12}/E_2 = 1/3$; $\nu_{12} = 0,3$;
- материал 2: $E_1/E_2 = 40$; $G_{12}/E_2 = 0,5$; $\nu_{12} = 0,25$.

При этом рассмотрены различные способы закрепления пластины:

1-й способ закрепления соответствует граничным условиям:

$w = 0$; $M_n = 0$; $\psi_\tau = 0$, где n и τ – нормаль и касательная к границе области $\partial\Omega$.

2-й способ – $w = 0$; $\psi_x = \psi_y = 0$.

На рис. 2 приведены АЧХ для различных значений параметра b_2 : $b_2/2a = 1$ (кривая L_2), $b_2/2a = 0,49$ (кривая L_3), $b_2/2a = 0,45$ (кривая L_4). На рисунке видно, что при уменьшении глубины вреза соответствующие кривые стремятся к кривой для квадратной пластины L_1 . Данный факт, а также сравнение полученных результатов с известными [4] для квадратной пластины (кривая L_1) использован для подтверждения достоверности предложенного метода.

На рис. 3 приведены АЧХ соответствующие второму типу укладки слоев и второму способу закрепления границы области. При этом рассмотрены два типа материала.

Кривая L_2 соответствует значению $b_2/2a = 0,45$ и материалу 1; L_3 – $b_2/2a = 0,45$, материалу 1; L_5 – $b_2/2a = 0,45$, материалу 2; L_6 – $b_2/2a = 0,45$, материалу 2.

Как видно из рис. 3 при уменьшении глубины вреза $b_2 \rightarrow b$ АЧХ стремятся к АЧХ для квадратной пластины (кривые L_1, L_4), что и показано на рисунке. Этот факт также подтверждает достоверность предложенного метода.

Заключение. В работе впервые в рамках уточненной теории Тимошенко с помощью теории R-функций решены задачи о геометрически нелинейных колебаниях многослойных пластин имеющих сложную форму плана и разные способы закрепления. С помощью данного метода проведено исследование влияния геометрии пластины на амплитудно-частотные характеристики.

Численные результаты. Численная реализация предложенного подхода выполнена в рамках системы POLE-RL [1]. Для проверки достоверности разработанного программного обеспечения было выполнено сравнение полученных результатов с известными в литературе. Ниже предложенный подход использован для исследования двухслойных пластин со сложной формой плана (рис. 1). Способ укладки слоев определяется отношением: 1 тип – $(45^0/-45^0)$; 2 тип – $(0^0/90^0)$.

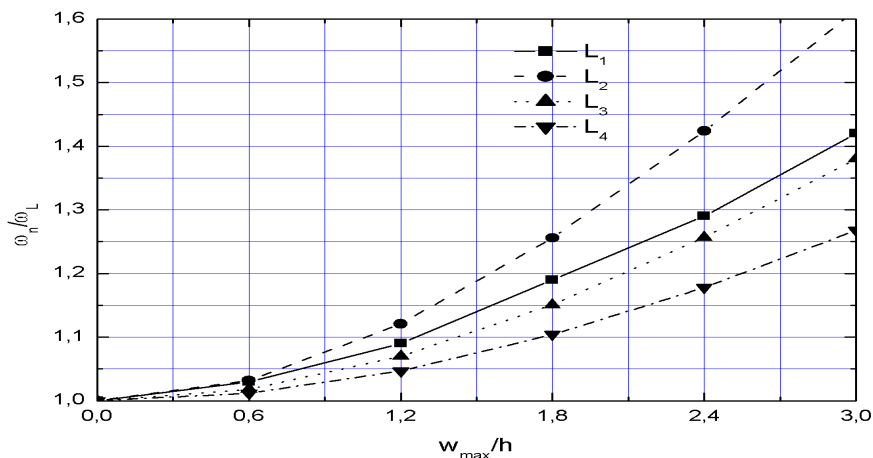


Рисунок 2 – АЧХ соответствующие граничным условиям 1, типу материала 1, способу укладки слоев1

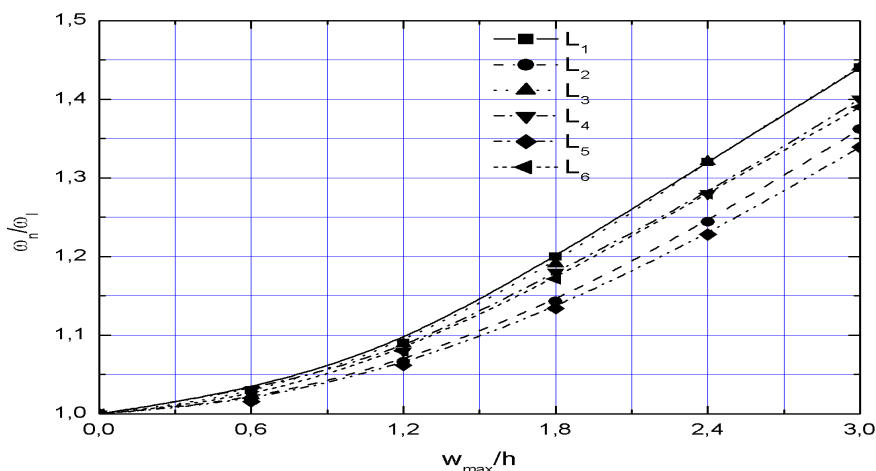


Рисунок 3 – АЧХ соответствующие граничным условиям 2, способу укладки слоев2

Список литературы: 1. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1987. – 176 с. 2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с. 3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 4. Reddy J.N., Chao W.C. Nonlinear Oscillations of Laminated, Anisotropic, Rectangular Plates // Journal of Applied Mechanics. – 1982. – Vol. 104. – PP. 396-401. 5. Курпа Л.В., Чистилина А.В. Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане. – Киев, 2003. – № 2. – С. 112-125. 6. L.Kurpa, O.Onufrienko, T.Smatko Researcher of nonlinear vibration of orthotropic plates with arbitrary form by the R-function method //Work of 2 international conference of «Research and Education». – Miskolsi Egyetem Sokszorosito Üzeme Press number: – 2004 GT-239; GD- 240.ME. – PP.109-114.

Поступила в редколлегию 04.05.2006

Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, канд.техн.наук; *Л.М.СКРЫНЬКА*;
М.М.СМИРНОВ, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»;
А.Д.ПИРОГОВ, ОАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе»

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ СНИЖЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ОСНАТКЕ ДЛЯ ЗАКАЛКИ ВАЛОВ

У роботі проведено дослідження з визначення можливості недопущення нагромадження залишкових пластичних деформацій у технологічному оснащенні, що використовується для загартування валів. Показано, що термонапруження є причиною нагромадження залишкових деформацій. Запропоновано способи зниження рівня термонапружень за рахунок застосування термоізоляційних матеріалів.

In work the researches by definition of the barring opportunity of residual plastic accumulation deformations in technological equipment have been carried out which are used for shaft, rotors etc hardening. It is shown, that thermotensions are the reason of accumulation of residual deformations. The ways of the level thermotensions decreasing at the expense of application thermo-insulating materials have offered.

Введение. Технологическая оснастка при мелкосерийном и единичном производстве ложится серьезным бременем на себестоимость продукции. Особенно это касается термообработки металлоемких деталей [1,2]. Дело в том, что технологические операции при термообработке неизбежно подвергают элементы конструкции технологической оснастки разрушающему воздействию высоких температур с последующим резким охлаждением, что приводит к потере нужной геометрической формы за счет упругопластического деформирования и ползучести, появлению трещин и разрушению.

Конечно, можно было бы применить жаропрочные и коррозионностойкие стали, но такой путь приводит, зачастую, к такому повышению стоимости оснастки, которая становится соизмеримой со стоимостью самой детали, что совершенно недопустимо в современных экономических условиях.

Поэтому создание таких, по возможности многоцелевых конструкций технологической оснастки из относительно недорогих материалов, которые при прочих равных условиях имели бы максимальный ресурс при термоциклировании, является малоисследованным благодарным полем для инженеров-исследователей.

Осуществление технологического процесса термообработки длинномерных деталей, таких как валы роторов и т.д., предполагает использование шахтных печей, для помещения заготовки в которые используется специальная технологическая оснастка (рис. 1).

Процесс закалки стальных деталей или заготовок можно условно разделить на несколько этапов. На первом этапе заготовка крепится к оснастке и с помощью крана помещается в шахтную печь, в которой после ее разогрева до

определенной температуры выдерживается заданное время. Далее разогретая заготовка с помощью той же технологической оснастки транспортируется и помещается в емкость с маслом или водой для ее остывания. При этом существует две модификации техпроцесса: 1) заготовка при помещении ее в печь не отсоединяется от технологической оснастки, которая при этом также нагревается, 2) заготовка после помещения в печь отсоединяется от оснастки, а затем после нагрева и выдержки снова присоединяется для транспортировки.



а)



б)

Рисунок 1 – Оснастка для термообработки деталей
(а – для закалки; б – для цементации [3])

На ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе» в производстве закалка применяется для термообработки заготовок роторов турбомашин, валов и других длинномерных деталей. При этом используется вторая разновидность техпроцесса и несколько типов конструкции технологической оснастки (подвески), два из которых и являются предметом исследования (рис. 2 а, б).

Необходимость проведения исследований обусловлена тем, что в процессе эксплуатации оснастки происходит ее деформирование с накоплением остаточных деформаций, которое приводит к потере формы и невозможности дальнейшей эксплуатации (рис. 3). Справедливо предположить, что, так как нижняя часть подвески при разогреве находится длительное время в условиях высокой температуры, то причиной возникновения необратимых пластических деформаций является ползучесть.

1. Постановка задачи. В данной работе предлагается методика и исследу-

дугается причина возникновения и возможность снижения или недопущения накопления остаточных деформаций в процессе работы двух типов технологической оснастки, используемой для закалки заготовок валов, применяемых на ОАО «Сумское НПО им. М.В. Фрунзе».

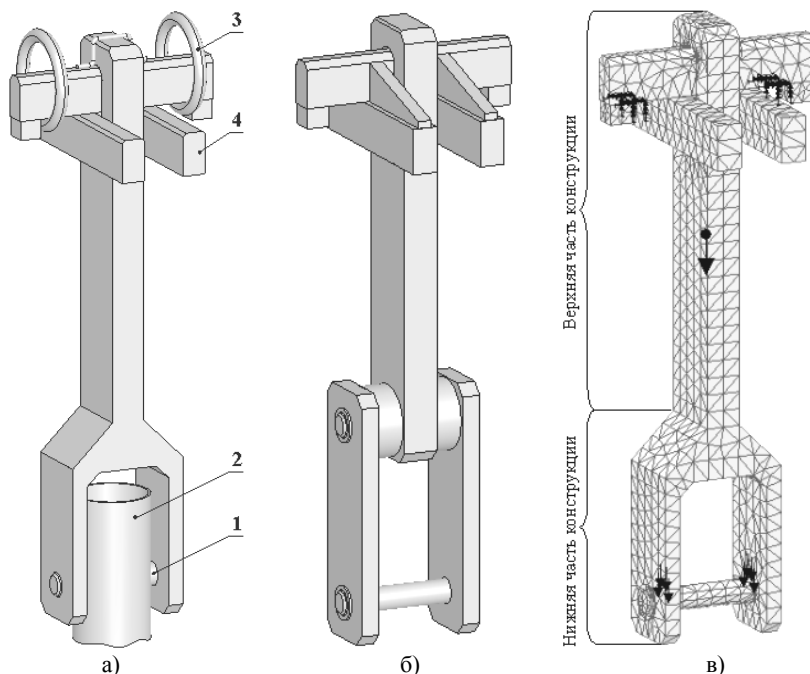


Рисунок 2 – Технологическая оснастка для закалки валов (а, б – первый и второй тип конструкции; в – расчетная модель и условное разделение конструкции)

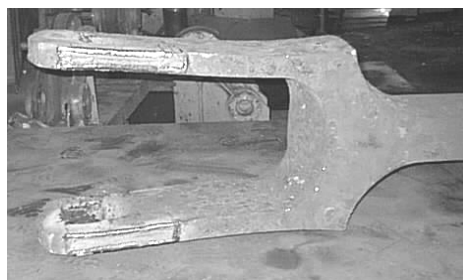


Рисунок 3 – Пример потери формы элемента оснастки при эксплуатации

Предлагаемым методом борьбы с накоплением остаточных деформаций является изменение технологического процесса закалки, а именно использование второго способа, при котором заготовка помещается в печь, после чего

отсоединяется от подвески. После разогрева до требуемой температуры заготовка снова крепится к подвеске и транспортируется с помощью крана к емкости с маслом для ее закалки.

Однако следует отметить, что применение такого способа возможно только для относительно коротких заготовок валов, труб и т.д., так как при установке, а не подвешивании в шахтную печь длинных заготовок, при разогреве их до температур закалки, возможна потеря прямолинейной формы за счет ползучести.

В таком случае работу технологической оснастки при закалке с момента разогрева заготовки до требуемой температуры можно условно разделить на три фазы (рис. 2а):

1. Горячая заготовка 2 соединяется с подвеской фиксирующим стальным пальцем 1;
2. Кран при помощи колец 3 переносит горячую заготовку от печи к емкости с маслом;
3. Заготовка и часть подвески опускается в масло, при помощи планок 4 подвеска устанавливается на емкость с маслом.

При этом возникает вопрос, каким образом изменение технологического процесса повлияет на работоспособность конструкции при ее многократном использовании.

Ответ можно определить, если располагать информацией о напряженно-деформированном состоянии конструкции во всем диапазоне времени от выемки заготовки из печи до момента ее остывания (закалки) в емкости с маслом с учетом распределения температуры и установить факт и причину возникновения остаточных деформаций.

Напряженно-деформированное состояние может быть определено решением задач нестационарной теплопроводности и термоупругости [4] в конечно-элементной постановке [5,6], в которых будет смоделирован предполагаемый технологический процесс.

2. Расчетная схема и модель. Для задачи статики механическое закрепление конструкции осуществляется в местах крепления колец крана, нагружения включают в себя однонаправленное давление, приложенное на палец, эквивалентное весу трубы, и собственный вес конструкции (рис. 2 в). Граничные условия тепловых задач прикладываются в соответствии с фазами работы конструкции, при этом конструкция условно разделяется на верхнюю и нижнюю часть (рис. 2 в). При этом тепловые граничные условия, соответствующие второй фазе – на верхнюю часть прикладывается температура, равная температуре окружающей среды, а нижняя находится в условии конвективного теплообмена с воздухом. Тепловые граничные условия, соответствующие третьей фазе – верхняя часть находится в условии конвективного теплообмена с воздухом, нижняя – с маслом. В обоих случаях на палец прикладывается температура, равная температуре заготовки, при выемке ее из печи.

Для того, чтобы расчетная модель адекватно отображала реальную си-

туацию в плане теплопередачи между элементами конструкции при подвешенной трубе, а также обеспечивала возможность механического взаимосмещения щек, шайб и пальцев и жесткость конструкции в местах крепления этих элементов конструкции друг к другу, расчетная модель выполнена как сборка, в которой зазоры между деталями заполнены модельными материалами: первый – с тепловыми характеристиками воздуха, и специально назначенными механическими, а именно модулем упругости на несколько порядков ниже, чем у стали (для обеспечения возможности взаимосмещения деталей); второй материал – с тепловыми характеристиками стали, а механическими воздуха (для корректной передачи тепла) см. рис. 4.

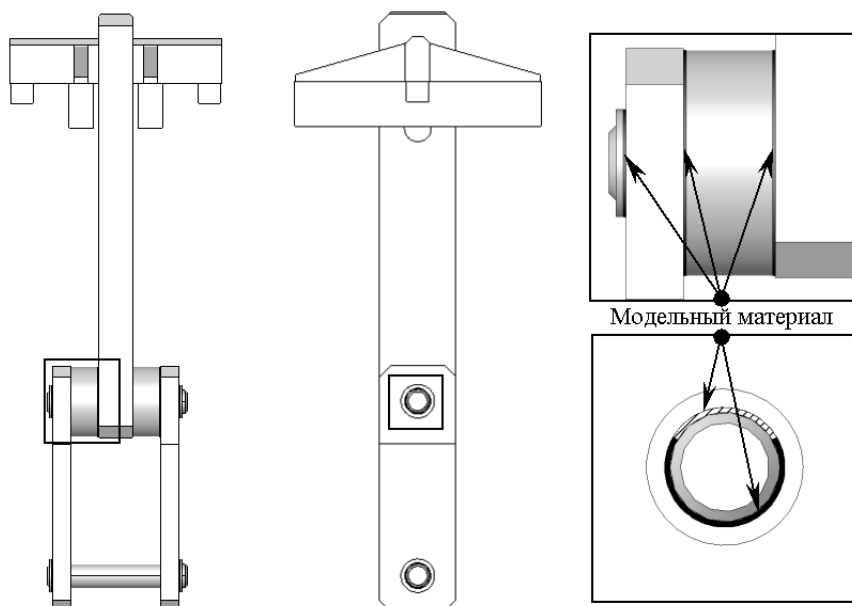


Рисунок 4 – Области размещения модельных материалов

3. Численные исследования. На начальном этапе были проведены расчетные исследования с целью выбора более предпочтительного варианта конструкции из двух (рис. 2 а, б) для проведения в дальнейшем подробного анализа поведения конструкции в условиях нестационарного теплообмена, а также определения причин возникновения больших значений напряжений.

На основе статических расчетов в линейно-упругой постановке определено, что для первого типа конструкции зоны максимальных напряжений располагаются в месте перехода корпуса от стержня прямоугольного поперечного сечения в вилку (рис. 5 а). Зоны максимальных напряжений и их величины свидетельствуют о нерациональном распределении жесткостных параметров данного типа конструкции, что в большей степени и приводит к возникнове-

нию пластических деформаций в данных зонах.

Во втором типе конструкции в данных областях уровень напряжений ниже, так как за счет подвижного крепления щек к штанге с помощью верхнего пальца жесткость снижена. Перераспределение жесткостных параметров приводит к смене местоположения областей максимальных напряжений и перемещению их на палец и места крепления пальца и щек (рис. 5 б).

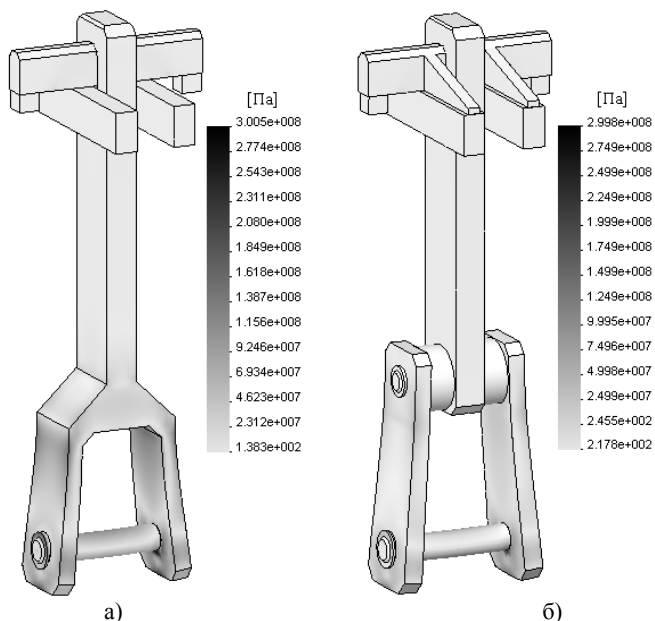


Рисунок 5 – Решение задачи термоупругости в линейно-упругой постановке – напряженное состояние (а – конструкция первого типа; б – конструкция второго типа)

Сравнение решений задач с учетом температурного распределения (рис. 5) и без (рис. 6) позволило определить, что термонапряжения вносят существенный вклад в общую картину напряженного состояния, в значительной степени из-за больших значений термоградиента. Отсюда следует, что от того, насколько правильно определены максимальные значения температур и их градиентов, зависит точность определения напряженного состояния и выводы о работоспособности конструкции.

Дальнейшему анализу подвергалась конструкция второго типа (рис. 2 б). На начальном этапе исследования в качестве термонагрузок в задачах термоупругости задавались распределения температур, соответствующие решениям стационарных задач теплопроводности, однако, максимальные значения градиента температуры могут наблюдаться не в стационарном решении, а в некоторый момент времени работы конструкции, которая характеризуется переменным во времени распределением температуры,

обусловленным также и сменой тепловых граничных условий. Поэтому вторая часть расчетных исследований посвящена решению задачи нестационарной теплопроводности, моделирующей процесс второй и третьей фазы работы конструкции.

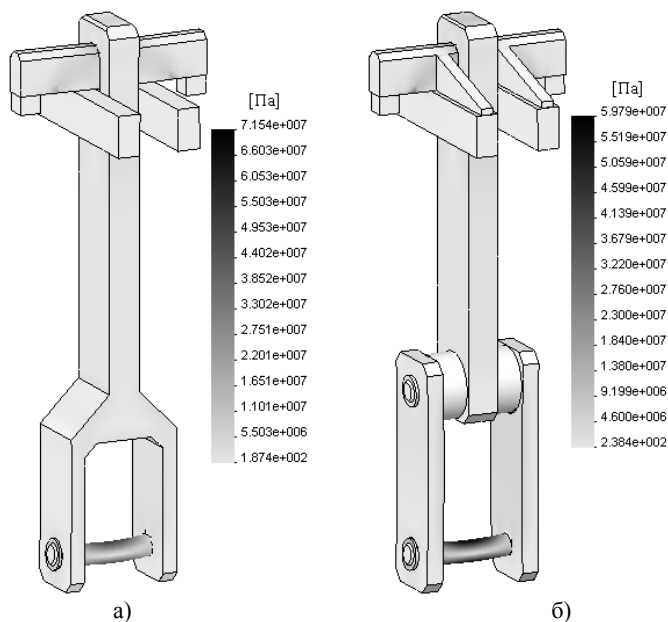


Рисунок 6 – Решение задачи статики в линейно-упругой постановке без учета распределения температуры – напряженное состояние (а – конструкция первого типа; б – конструкция второго типа)

Поставленная задача выполнялась путем последовательного решения задач теплопроводности и термоупругости. Этот способ предполагает на **первом этапе** решение задачи нестационарной теплопроводности с учетом изменения в некоторые моменты времени граничных условий, а на **втором** – решение задачи термоупругости, т.е. проведение статических анализов с учетом механических граничных условий и распределения температуры в моменты времени, соответствующие каждому шагу решения задачи нестационарной теплопроводности, полученного на первом этапе.

Исходя из того, что наибольший интерес представляют моменты времени, в которые температурный градиент имеет максимальное значение, а значит, в эти же моменты ожидаются наибольшие термонапряжения, выполнение второго этапа производилось только с использованием тех шагов решения задачи нестационарной теплопроводности, которые отвечают указанным требованиям.

Ранее определено, что самым опасным является напряженное состоя-

ние нижнего пальца и щек, в местах их соединения. Для определения моментов времени, в которые температурный градиент имеет наибольшее значение, построены графики изменения температуры во времени (рис. 7) в близко расположенных точках (рис. 8) на нижнем пальце и щеках. Эти моменты времени (t_1 - t_6) показаны вертикальными пунктирными линиями (рис. 7).

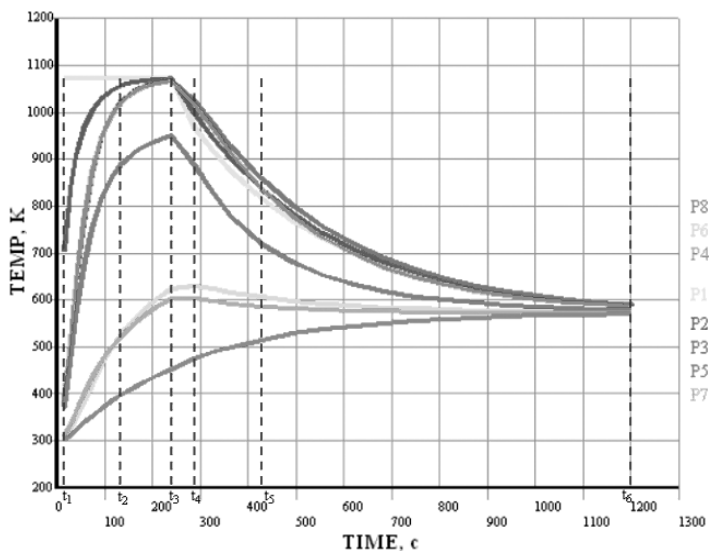


Рисунок 7 – Изменение температуры во времени в точках P1-P8

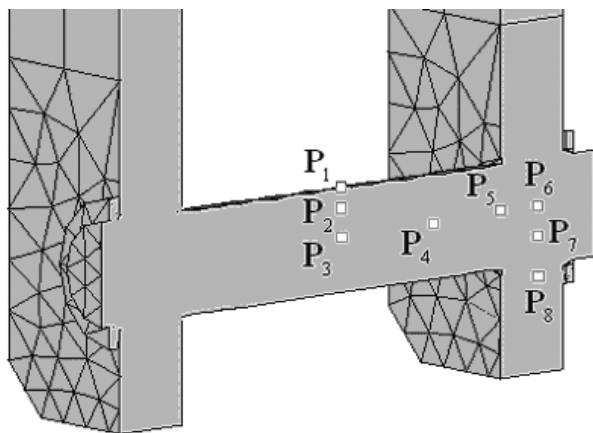


Рисунок 8 – Контрольные точки

При решении задачи термоупругости распределение температуры, соот-

ответствующее моментам времени (t_1-t_0), задавалось как нагрузка в задаче статики в линейно-упругой постановке.

Также для элементов конструкции было учтено, что модуль упругости материала зависит от температуры (рис. 9), а при оценке результатов (рис. 10–13) учитывалась еще и зависимость предела текучести от температуры [7].

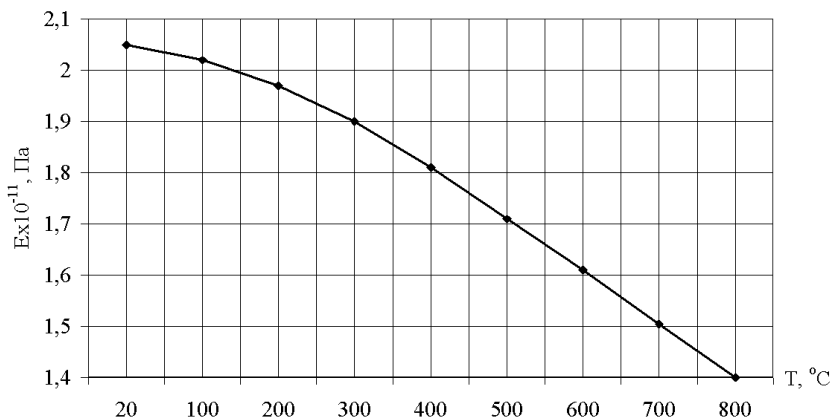


Рисунок 9 – Зависимость модуля упругости стали 12Х18Н10Т от температуры

Анализ напряженного состояния позволил сделать вывод, что и при изменении технологического процесса не исключена возможность возникновения и накопления остаточных пластических деформаций в процессе работы конструкции, причиной которых являются термонапряжения. Поэтому, только если уровень термонапряжений будет значительно снижен, то возможна работа конструкции в упругой области (рис. 6 б).

Закключение. Так как причиной термонапряжений является значительный температурный градиент, то одним из возможных способов снижения их значений, а значит и снижения остаточных деформаций, есть термоизоляция конструкции от источника повышенных температур, то есть заготовки трубы или вала, с помощью применения термоизоляционных материалов. Так возникает предложение – покрыть палец термоизоляцией на том отрезке, где он соприкасается с горячей заготовкой, как показано на рис. 14 а, в качестве которой может быть выбран, например, керамический фарфор.

Исследование данного предположения было выполнено путем решения задачи нестационарной теплопроводности. Результаты решения в момент времени, соответствующий смене второй и третьей фаз работы конструкции (рис. 14 б), свидетельствуют о том, что большой градиент возникает только в области изоляционного материала, что не представляет опасности.

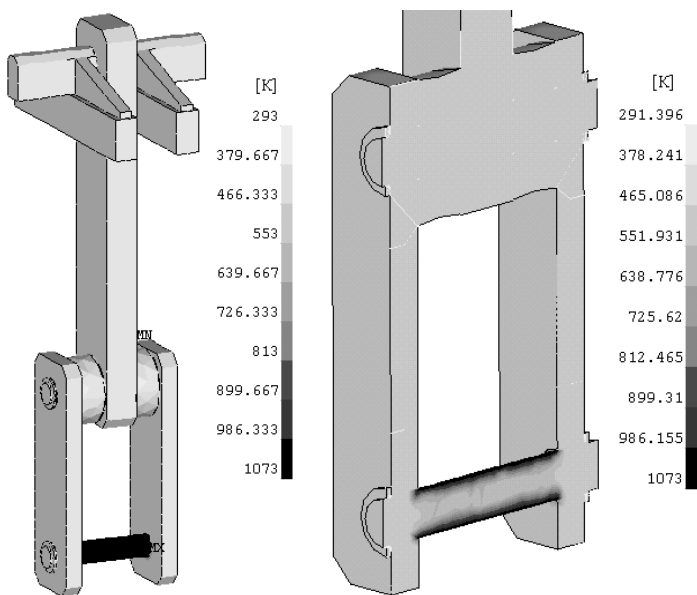


Рисунок 10 – Распределение температуры в момент времени $t_1 = 16$ с

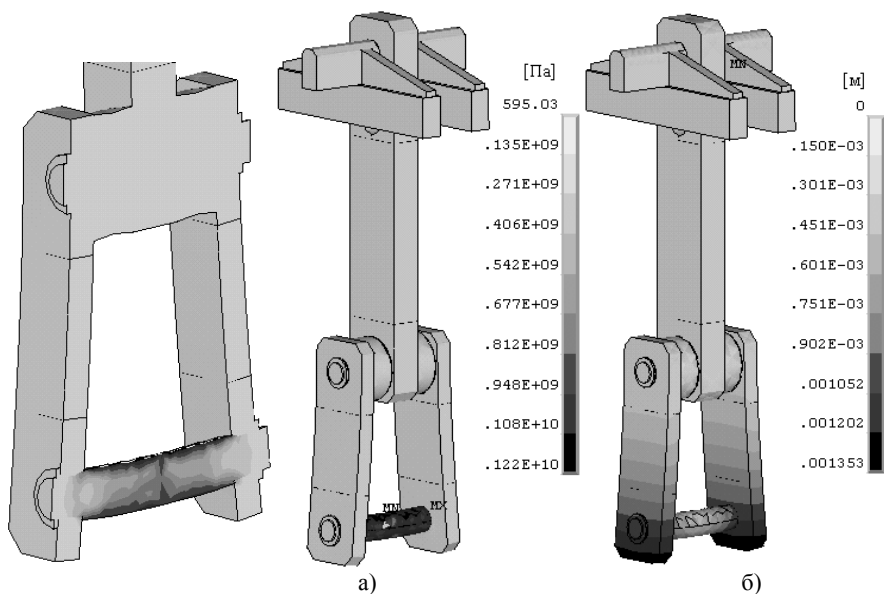


Рисунок 11 – Напряженно-деформированное состояние в момент времени $t_1=16$ с (а – напряжения по критерию Мизеса; б – суммарные перемещения)

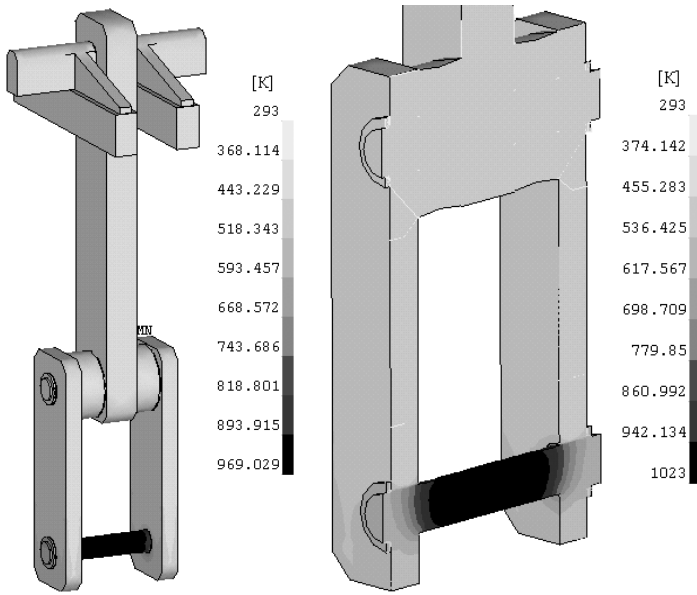


Рисунок 12 – Распределение температуры в момент времени $t_4 = 288$ с

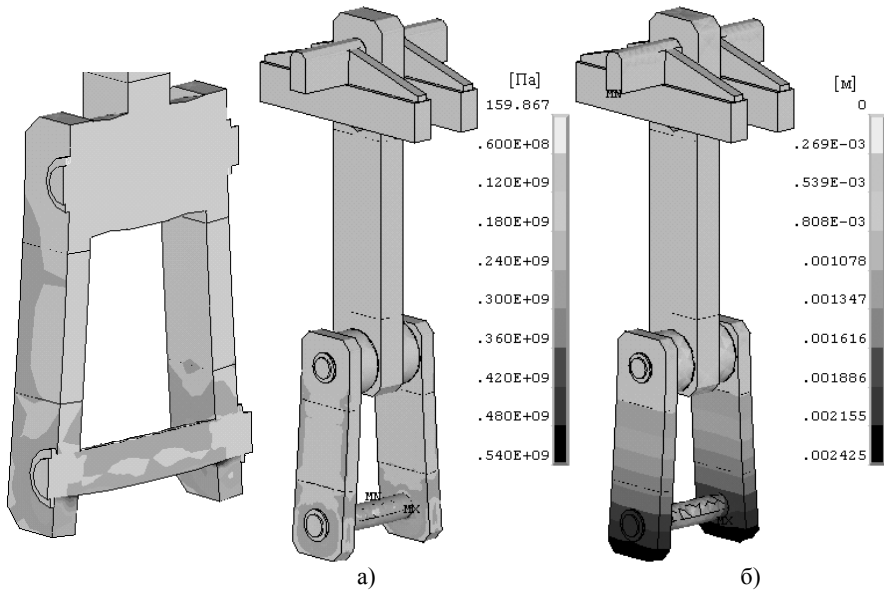


Рисунок 13 – Напряженно-деформированное состояние в момент времени $t_4=288$ с (а – напряжения по критерию Мизеса; б – суммарные перемещения)

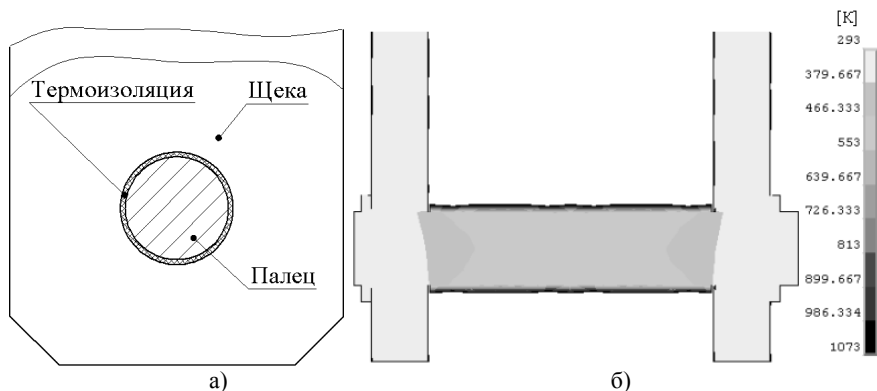


Рисунок 14 – Применение термоизоляционного материала
(а – схема; б – решение задачи теплопроводности)

Список литературы: 1. Справочник металлиста. В 5-ти т. Т.1. // Под ред. С.А.Чернавского и В.Ф.Рецикова. – М.: Машиностроение, 1976. – 768 с. 2. URL: <http://www.kombat.com.ua/> (Термическая обработка стали). 3. Heat processing technology and industrial furnaces. Рекламный проспект Swiss Association of Machinery Manufacturers (VSM). Published by the «Industrial Furnace Group» of the VSM, Kirchenweg 4, CH-8032 Zurich-Switzerland. 4. Коваленко А.Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с. 5. В.И.Мяченков, В.П.Мальцев и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В.И.Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с. 6. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с. 7. Гохфельд Д.А., Гецов Л.Б. и др. Механические свойства сталей и сплавов при нестационарном нагружении. Справочник. – Екатеринбург: УрО РАН, 1996. – 405 с.

Поступила в редколлегию 10.05.2006

УДК 534; 629.113

Ю.В.МИХЛИН, докт. физ.-мат. наук; **С.Г.МИТРОХИН**, НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ АВТОМОБИЛЯ МЕТОДОМ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРУЖИН ПОДВЕСКИ

В роботі проведено дослідження свободних загасаючих коливань у автомобілі з нелінійною характеристикою підвіски. Розглянуто нелінійну модель з 7 степенями волі. В результаті дослідження отримано нелінійні форми коливань і відповідні скелетні криві. Описані перехідні процеси у системі. Отримані результати порівняно з рішеннями лінеаризованої системи.

Free damped oscillations in the automobile with a nonlinear response of the suspension are considered. The 7-DOF nonlinear model is considered. As a result, nonlinear vibration modes and the corresponding skeleton curves are obtained. The transient is described in this system. The obtained results are compared with solutions of the corresponding linearized system.

1. Введение. Ходовая часть автомобиля является одной из наиболее важных частей автомобиля с точки зрения безопасности. Создание подвески, которая одновременно обеспечивает плавность хода и безопасность, представляет сложную проблему, как для исследователей, так и для конструкторов. Анализ колебательных процессов в автомобиле необходим для оценки поведения машины при ее движении. Такое исследование позволяет оценить качество подвески, прежде всего, а также представить колебательный процесс во времени. Создание новых аналитических методов, а также использование современной техники вычислений позволяет решать подобные задачи и в нелинейной постановке.

Не имея возможности сослаться на многочисленные публикации по динамике автомобиля, упомянем лишь фундаментальные работы [1,2], а также некоторые работы последних лет [3-5]. Следует отметить, что в в связи со сложностью задачи исследования динамики подвески в нелинейной постановке, в большинстве работ рассматривается лишь упрощенная модель симметричных колебаний автомобиля (так называемая «quarter-car» модель).

В настоящей работе на основе модели динамики автомобиля с семью степенями свободы, в которой учтены нелинейные характеристики пружин подвески, построены нелинейные формы колебаний автомобиля и соответствующие скелетные кривые. Проведен также расчет переходных режимов движения.

2. Постановка задачи. На рис. 1 изображена эквивалентная модель легкового автомобиля с независимой подвеской, которая рассматривалась в работе [6]. Исследование динамического процесса проводится в двух плоскостях: продольной вертикальной (xOz) и поперечной (yOz).

В представленной модели автомобиля шины представляются в виде жесткостных элементов с линейными характеристиками. Подвеска характеризуется демпфирующими элементами и нелинейными характеристиками передних и задних пружин (см. рис. 2). Силы, возникающие в передней и задней подвесках при растяжении-сжатии пружин, описываются полиномами седьмой степени. Эти характеристики являются типичными, полученными в результате экспериментов. Некоторые данные по характеристикам пружин приведены в работе [7].

Для представленной выше модели предполагается:

- провести анализ свободных колебаний автомобиля с трением в нелинейной постановке;
- построить нелинейные нормальные формы колебаний и представить их графически;
- построить соответствующие скелетные кривые;
- сравнить свободные колебания исходной нелинейной и линеаризованной систем.

3. Математическая модель. Колебания в представленной модели описываются семью обобщенными координатами. Колебания кузова характеризуется вектором обобщенных координат $x = \{z \ \alpha \ \beta\}^T$, а колебания частей подвески – векто-

ром $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$. Матрицы масс кузова M_C и частей подвески M_S , матрица жесткости шин C и матрица демпфирования K имеют диагональный вид.

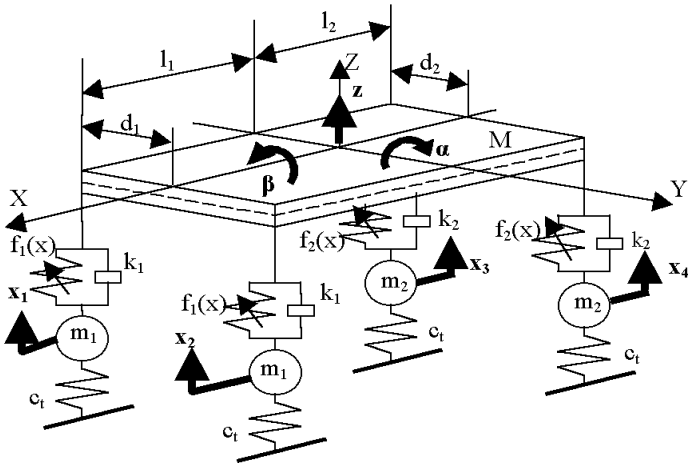


Рисунок 1 – Модель легкового автомобиля с независимой подвеской

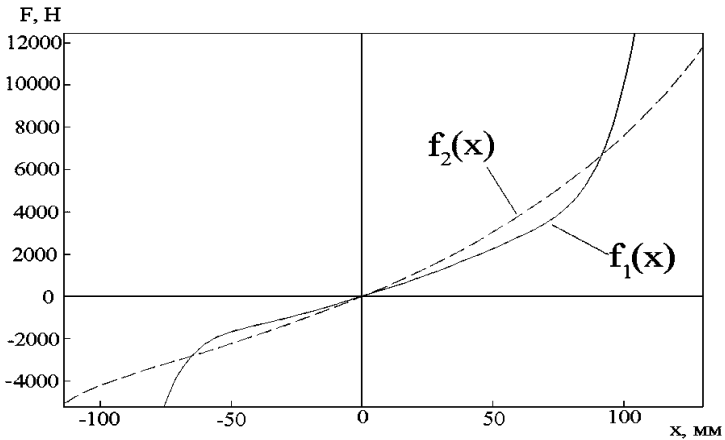


Рисунок 2 – Нелинейные характеристики пружин передней $f_1(x)$ и задней $f_2(x)$ подвесок

Перемещения углов кузова можно выразить через перемещение центра тяжести кузова с помощью следующей матрицы перехода:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & -l_1 & d_1 \\ 1 & -l_1 & -d_1 \\ 1 & l_2 & d_2 \\ 1 & l_2 & -d_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

С помощью матрицы перехода (1) запишем выражения для разности перемещений $U = Hq - x$ и скоростей $V = H\dot{q} - \dot{x}$ между кузовом и частями подвески. С учетом разницы перемещений вектор нелинейных характеристик будет иметь вид:

$$C_{NL} = \{f_1(U_1) \quad f_1(U_2) \quad f_2(U_3) \quad f_2(U_4)\}^T. \quad (2)$$

Окончательно получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в матричном виде, описывающую свободные колебания автомобиля:

$$\begin{cases} M_c \ddot{q} + H^T C_{NL} + H^T KV = 0, \\ M_s \ddot{x} - C_{NL} + Cx - KV = 0. \end{cases} \quad (3)$$

4. Методика решения. Для исследования свободных колебаний нелинейной системы (3) воспользуемся методом нормальных форм Пьера-Шоу [8,9]. Для того, чтобы использовать этот метод, исходная система N дифференциальных уравнений второго порядка $\ddot{x} - f(x, \dot{x}) = 0$ должна быть приведена к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = f(x, y). \end{cases} \quad (4)$$

где $x = \{x_1 \dots x_N\}^T$ – вектор обобщенных координат, $y = \{y_1 \dots y_N\}^T$ – вектор обобщенных скоростей и $f = \{f_1 \dots f_N\}^T$ – вектор сил системы.

Выберем пару новых независимых переменных (u, v) , где u – некоторая обобщенная координата, а v – соответствующая обобщенная скорость. Нормальная форма колебаний в концепции Пьера-Шоу – это такой колебательный режим, когда все остальные обобщенные координаты и скорости являются однозначными функциями выделенной пары переменных. В нелинейном случае нормальные формы колебаний представляют собой обобщение нормальных (главных) колебаний линейных систем.

Выбирая в качестве выделенной пары переменных координату и скорость с индексом 1, запишем представление соответствующей формы колебаний в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_N \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ X_2(u, v) \\ Y_2(u, v) \\ \vdots \\ X_N(u, v) \\ Y_N(u, v) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Вычисляя производную по времени для каждой из переменных системы (5), учитывая, что $u = u(t)$ и $v = v(t)$, и подставляя полученные выражения в систему (4), получаем, с учетом уравнений движения (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} v + \frac{\partial X_i}{\partial v} f_1(x, y) &= Y_i(u, v), \\ \frac{\partial Y_i}{\partial u} v + \frac{\partial Y_i}{\partial v} f_1(x, y) &= f_i(x, y), \\ i &= \overline{1..N}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение системы уравнений в частных производных (6) будем искать в виде степенных рядов (в конкретных вычислениях сохраняются члены до седьмой степени включительно по переменным u и v):

$$\begin{aligned} x_i &= X_i(u, v) = a_{1i}u + a_{2i}v + a_{3i}u^2 + a_{4i}uv + a_{5i}v^2 + \dots, \\ y_i &= Y_i(u, v) = b_{1i}u + b_{2i}v + b_{3i}u^2 + b_{4i}uv + b_{5i}v^2 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ряды (7) подставляются в (6) и коэффициенты при одинаковых степенях приравниваются, образуя рекуррентные системы алгебраических уравнений. Решая системы, находим коэффициенты разложений (7), и, таким образом, определяется первая форма колебаний.

Полученная форма колебаний в виде рядов (7) подставляется в те дифференциальные уравнения системы (4), которые соответствуют выбранной паре переменных u и v . При этом получается система уравнений следующего вида: $\dot{u} = v$, $\dot{v} = f_1(u, v)$. Отсюда можно определить скелетную кривую, соответствующую этой форме колебаний.

Таким же образом, выбирая другие пары новых независимых переменных, можно определить другие формы колебаний системы. В рассматриваемой системе существует семь нелинейных нормальных форм колебаний. Коэффициенты рядов, отвечающие всем этим формам колебаний, здесь не приводятся.

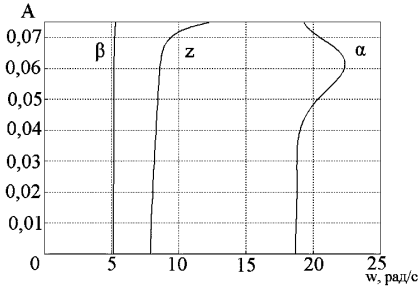
5. Анализ результатов. В этом разделе приведены графические представления нелинейных форм колебаний, полученных указанным методом.

Для построения скелетных кривых, то есть, амплитудно-частотных характеристик нелинейной системы использовался метод гармонической линеаризации с движением по параметру [10]. Метод применялся для каждой системы дифференциальных уравнений, описывающих выделенную пару независимых переменных, соответствующих одной из форм колебаний. Скелетные кривые представлены на рис. 3.

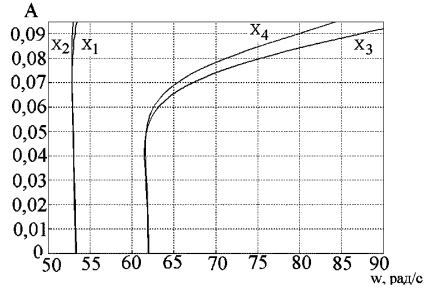
На рис. 4 показана первая форма колебаний, причем в качестве независимой переменной выбрана координата z .

На рис. 5-9 представлены результаты расчета переходных процессов в подвеске автомобиля. На рисунках изображены режимы движения как для нелинейной, так и для линеаризованной систем. В некоторых случаях наблюдалось уменьшение амплитуд нелинейных колебаний частот авто-

мобиля по сравнению с линейными колебаниями. При больших начальных смещениях частота колебаний неподрессоренных масс снижается быстрее, и все формы колебаний приближаются к низкочастотным формам колебаний кузова. При малых отклонениях свободные колебания нелинейной системы почти не отличаются от линейных колебаний, поскольку характеристика пружин около положения равновесия описывается линейным законом.

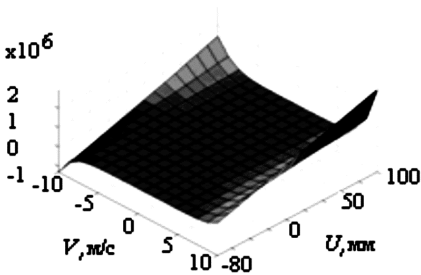


а) Для координат кузова

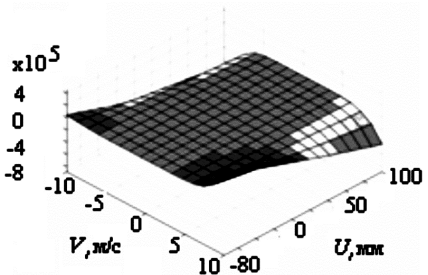


б) Для координат частей подвески

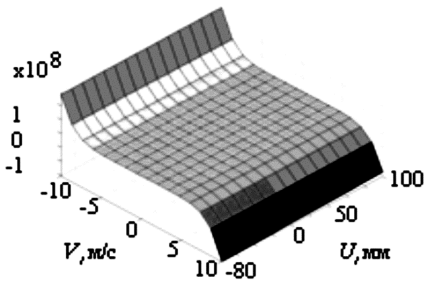
Рисунок 3 – Скелетные кривые нелинейной системы



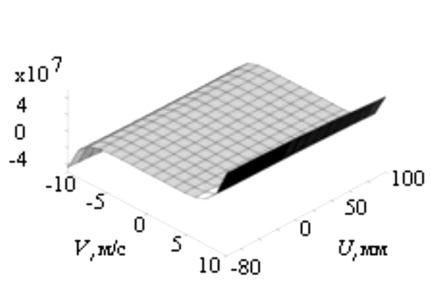
а) Изменение угла поворота α в зависимости от u и v



б) Изменение перемещения x_1 в зависимости от u и v



в) Скорость переменной α в зависимости от u и v



г) Скорость переменной x_1 в зависимости от u и v

Рисунок 4 – Первая форма колебаний (независимая координата z)

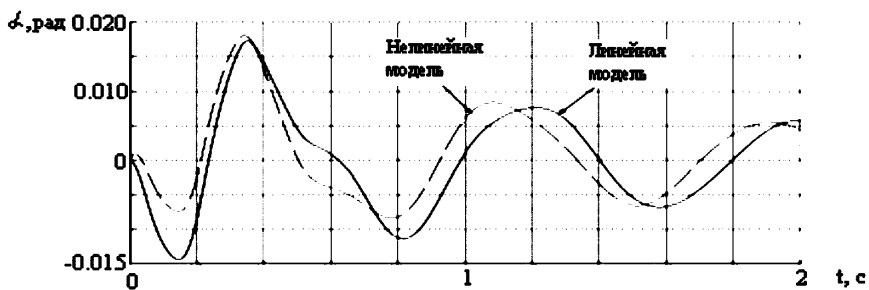


Рисунок 5 – Изменение угла поворота $\alpha(t)$ (Начальное условие $z(0) = 100$ мм)

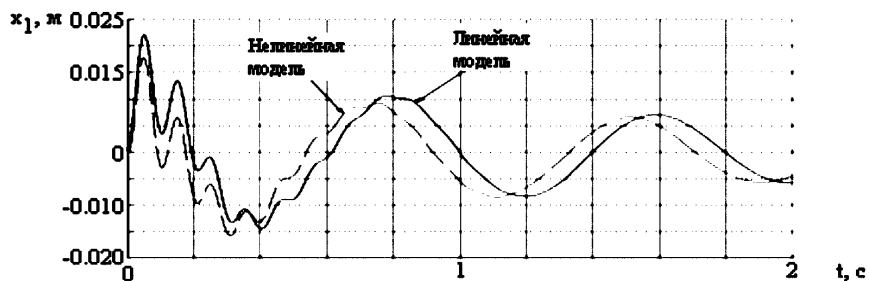


Рисунок 6 – Изменение перемещения $x_1(t)$ (Начальное условие $z(0) = 100$ мм)

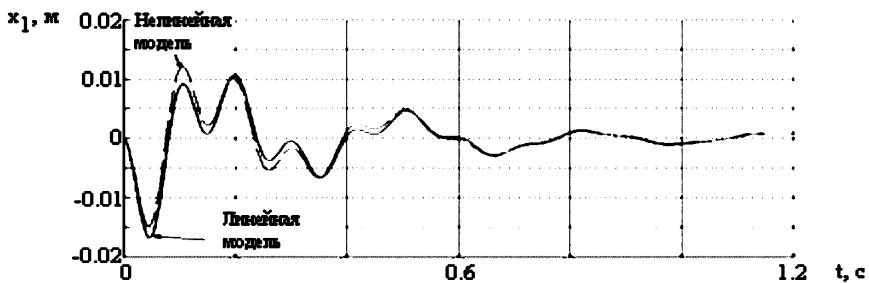


Рисунок 7 – Изменение перемещения $x_1(t)$ (Начальное условие $\alpha(0) = 3,5^\circ$)

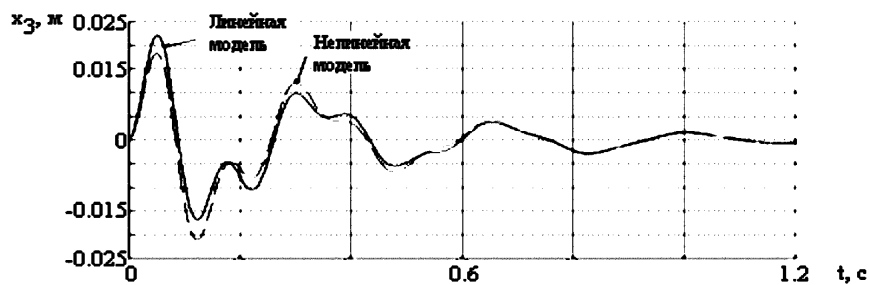


Рисунок 8 – Изменение перемещения $x_3(t)$ (Начальное условие $\alpha(0) = 3,5^\circ$)

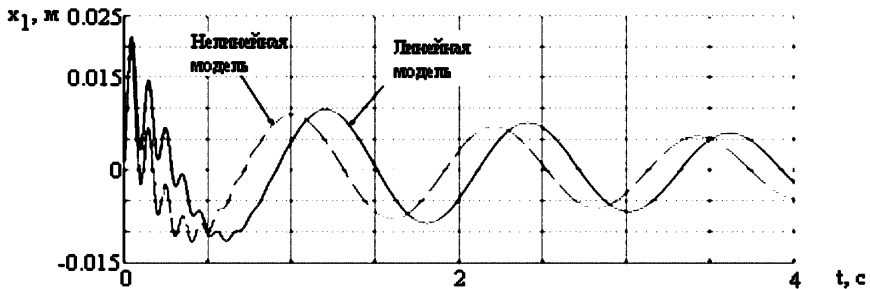


Рисунок 9 – Изменение перемещения $x_1(t)$ (Начальное условие $\beta(0) = 6^\circ$)

Выводы. В работе приведены результаты расчета динамики автомобиля на основе нелинейной модели с 7 степенями свободы. Для расчета нелинейных форм колебаний использовался метод, предложенный в работах Пьера и Шоу. Результаты расчета форм колебаний, а также переходных процессов в подвеске, показали значительное влияние нелинейных характеристик пружин на колебательный процесс при значительных начальных отклонениях кузова.

Список литературы: 1. *Потенберг П.В.* Подвеска автомобиля. – М., Машиностроение, 1972. 2. *Гайцгори М.М., Малиновский Е.Ю.* К исследованию динамики системы «дорога-машина-человек». – М.: Машиноведение, 1968. 3. *D.Hrovat.* Optimal Active Suspension Structures for Quarter-car Vehicle Models. // Automatica. – Vol. 26, No. 5. – 1990. – P. 845-860. 4. *Semiha Turkey, Huseyin Akcay.* A study of random vibration characteristics of the quarter-car model // Journal of Sound and Vibration. – 282 (2005). – P. 111-124. 5. *Muhammad Haroona, Douglas E. Adams, Yiu Wah Luk, Aldo A. Ferri.* A time and frequency domain approach for identifying nonlinear mechanical system models in the absence of an input measurement // Journal of Sound and Vibration. – 283 (2005). – P. 1137-1155. 6. *Hyo-Jun Kim, Hyun Seok Yang, Young-Pil Park.* Improving the vehicle performance with active suspension using road-sensing algorithm // Computers and Structures. – 80 (2002). – P. 1569-1577. 7. *Lu, DePoyster.* Multiobjective optimal suspension control. // IEEE Transactions on control systems technology. – Vol. 10, No. 6. – November 2002. 8. *S.W.Shaw, C.Pierre.* Normal modes for non-linear vibratory systems // Journal of Sound and Vibration 164(1) (1993), P. 85-124. 9. *D.Jiang, C.Pierre, S.W.Show.* Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems // Journal of Sound and Vibration. – 272. – 2004. – P. 869-891. 10. *В.Н. Карабан, А.С. Беломытцев.* Вынужденные колебания систем с конечным числом степеней свободы. – Киев, УМК ВО, 1990.

Поступила в редколлегию 21.04.2006

УДК 539.3

О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн. наук; **В.Н.СОБОЛЬ**; НТУ «ХПИ»

ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ДИСКА ТУРБИНЫ

У статті розглянута постановка задачі і метод рішення задачі тривалої міцності диска турбіни. Для дисків постійної товщини і перемінного перетину, що ушкоджуються внаслідок повзучості, приведені результати розрахунків напружено-деформованого стану для різних моментів часу аж до руйнування. Проведено аналіз впливу форми перетину диска на час до руйнування.

The problem statement and solution method of creep-damage lifetime prediction for the turbine disk are presented in the paper. The creep-damage calculation results for the disks with constant thickness and variable section are given in the various time moments. The influence analyses of the disk section form on the rupture time have been done.

1. Актуальность темы. Вращающиеся диски являются важнейшим элементом многих машин. Поэтому расчеты прочности и долговечности дисков служат критерием получения высоких параметров работы машин, обеспечивая необходимый срок их службы. При таких расчетах в основном на диски действуют центробежные силы, возникающие при вращении. Определение напряженно-деформированного состояния от центробежных сил – главный этап в расчетах дисков.

В большинстве современных турбомашин турбинные диски и диски компрессоров высокого давления подвергаются действию высоких температур, с чем связано возникновение деформаций ползучести. Поэтому расчеты повреждающихся вследствие ползучести вращающихся дисков и анализ срока эксплуатации дисков турбин вплоть до разрушения – важная научно-техническая проблема.

2. Анализ состояния и постановка проблемы. Диски газовых и паровых турбин, работающие длительное время при высоких температурах и высоких нагрузках, как отмечено выше, испытывают деформации ползучести [1]. Зачастую в расчетах длительной прочности таких дисков пользуются моделями в виде круглых пластин переменной толщины с использованием гипотез жесткой нормали, а влияние ползучести учитывается лишь в рамках деформационной теории [1-4]. Однако такие предположения не позволяют достаточно точно исследовать кинетику напряженно-деформированного состояния дисков в процессе эксплуатации. Более того, как показывают экспериментальные [2] и численные [1] данные, напряженно-деформированное состояние в реальных дисках при ползучести носит явно выраженный пространственный характер.

В статье рассматривается длительная прочность диска турбины постоянного и переменного сечения. Для решения начально-краевой задачи повреждающегося вследствие ползучести диска используется вариационно-структурный метод для смешанного вариационного функционала и численный метод Рунге-Кутты-Мерсона, подробное описание которых рассмотрено в работах [5-7].

3. Постановка и метод решения задачи. Рассмотрим диск турбины, нагруженный центробежными силами и распределенной растягивающей силой p на наружном контуре. Материал диска – сплав ХН77ТЮР при температуре $700\text{ }^\circ\text{C}$, модуль упругости $E = 1,67 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Вначале рассмотрим ползучесть диска турбины постоянной толщины. Геометрические параметры и значение распределенной нагрузки, заменяющей действие лопатки на обод диска, для такого случая примем равными: толщина $h = 0,0216$ м, $R_1 = 0,0765$ м, $R_2 = 0,2379$ м, $p = 122,6$ МПа. Частота вращения диска $n = 11620$ об/мин, плотность материала $\rho = 8200$ кг/м³.

В расчетах использованы кинетические уравнения ползучести и повреждаемости инкрементального типа, приведенные в работах [5-7]. Для данного уравнения принимаем значения материальных констант равными: $B = 5,0 \cdot 10^{-18}$ МПа⁻ⁿ/ч; $D = 5,09 \cdot 10^{-17}$ МПа^{-k}/ч; $n = k = 5$; $l = m = 5,27$; $r = 1$; $\alpha = 0$. Критическое значение параметра повреждаемости примем равным $\omega_* = 0,9$.

Параметры пространственно-временной дискретизации оказываются достаточными для обеспечения внутренней сходимости полученного решения и равны следующим значениям: начальный шаг интегрирования $2 \cdot 10^{-4}$ часа, точности интегрирования параметра повреждаемости – $eps = 10^{-5}$, число точек дискретизации области принято равным 61 вдоль длины и по толщине диска. При удержании 8-ми базисных функций в структурах решений напряжений и перемещений значения функционалов для момента времени $t_0 = 0$ часов практически совпадают и равны: $\frac{I_R}{2\pi} \approx \frac{I_L}{2\pi} \approx \frac{I_C}{2\pi} \approx -715.42$ Дж.

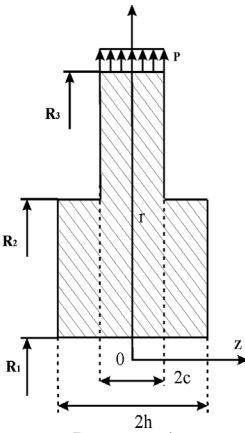


Рисунок 1

Далее рассмотрим ползучесть диска турбины переменного сечения, модель которого представлена на рис. 1. Материал диска, физико-механические параметры и значение распределенной нагрузки для такого случая оставим неизменными. Геометрические параметры примем равными: $2h = 0,06$ м, $2c = 0,0263$ м, $R_1 = 0,0765$ м, $R_2 = 0,1425$ м, $R_3 = 0,2379$ м. При этом следует отметить равенство площадей поперечного сечения и объемов дисков постоянного и переменного сечения.

Число точек дискретизации области выберем равным 64 точкам вдоль длины и 128 точкам по толщине диска. В структурах решений удержано 5 базисных функций.

Для удовлетворения всех граничных условий структуры решения для данной задачи были приняты в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z) &= -pw_1(r)w_2(r) + w_1(r)w_3(r)\Omega_{r1}(r, z) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} R_i(r) Z_j(z); \\ \sigma_{\theta\theta}(r, z) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} R_i(r) Z_j(z); \quad \sigma_{zz}(r, z) = \omega_h(z)\Omega_{r2}(r, z) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(3)} R_i(r) Z_j(z); \\ \sigma_{zr}(r, z) &= \omega_h(z)w_1(r)w_3(r)\Omega_{r1}(r, z)\Omega_{r2}(r, z) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} R_i(r) \bar{Z}_j(z); \quad (1) \\ U_r(r, z) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(5)} R_i(r) Z_j(z); \quad U_z(r, z) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(6)} R_i(r) \bar{Z}_j(z), \\ \text{где } w_1 &= \frac{r - R_1}{R_3 - R_1}; \quad w_2 = \frac{r - R_2}{R_3 - R_2}; \quad w_3 = \frac{r - R_3}{R_1 - R_3}; \quad \omega_h = 1 - \frac{z^2}{h^2}; \quad \omega_c = 1 - \frac{z^2}{c^2}; \end{aligned}$$

$$w_{23} = \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) \left(1 - \frac{r}{R_3}\right); \quad \Omega_{r21} = w_2 + \omega_c + \sqrt{w_2^2 + \omega_c^2}; \quad \Omega_{r22} = w_{23} + \omega_c + \sqrt{w_{23}^2 + \omega_c^2}.$$

4. Результаты расчета. Рассмотрим результаты расчета повреждающегося вследствие ползучести диска турбины вплоть до разрушения постоянного и переменного сечения.

Для диска постоянной толщины на рис. 2 представлены распределения радиальных напряжений для различных моментов времени: $t_0 = 0$ ч. – время соответствующее упругому деформированию диска, $t_1 = 80$ ч. – время соответствующее достижению параметра повреждаемости значения $\omega = 0,3$. Время до разрушения диска, при котором параметр повреждаемости равен $\omega^* = 0,9$, составляет $t_3 = 125$ ч. Следует заметить, что можно ограничиться исследованиями до момента времени $t_2 = 80$ часа, так как в дальнейшем перераспределение напряжений практически не происходит.

Из анализа рис. 2 можно сделать вывод, что рост деформаций ползучести в значительной мере влияет на перераспределение радиальных напряжений вдоль радиуса диска. Аналогично на рис. 3 представлены распределения окружных напряжений в сечении диска.

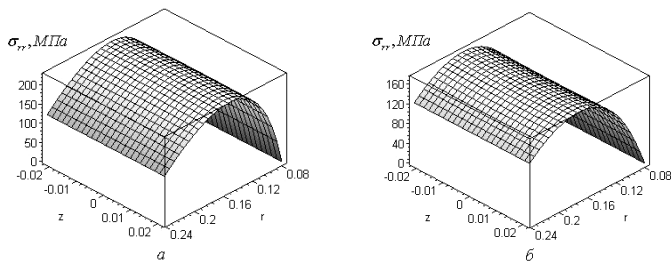


Рисунок 2 – Перераспределения радиальных напряжений: а) $t_0 = 0$ ч; б) $t_1 = 80$ ч

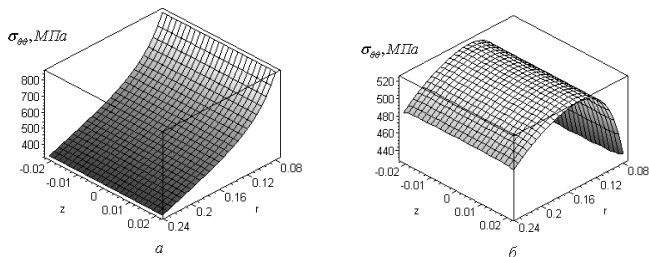


Рисунок 3 – Перераспределения окружных напряжений: а) $t_0 = 0$ ч; б) $t_1 = 80$ ч

Как и для случая радиальных напряжений, рост деформаций ползучести приводит к значительному перераспределению окружных напряжений вдоль длины диска. Особенно сильно происходит изменение окружных напряжений

на внутреннем и внешнем радиусе диска.

Наблюдается также рост осевых и радиальных перемещений по всему сечению диска. Значения окружных и осевых напряжений незначительны и со временем практически не изменяются.

Приведенные выше результаты расчетов позволяют оценить влияние роста деформаций ползучести на изменение напряженно-деформированного состояния в процессе работы диска, сделать прогноз срока службы диска вплоть до разрушения.

Рассмотрим результаты расчета диска переменного сечения (см. рис. 1) повреждающегося вследствие ползучести. Для такого случая на рис. 4 представлены распределения радиальных напряжений в сечении диска при $R_1 \leq r \leq R_2$ и $-h \leq z \leq h$, а на рис. 5 при $R_2 \leq r \leq R_3$ и $-c \leq z \leq c$ для моментов времени: $t_0 = 0$ ч., $t_1 = 283$ ч. Время до разрушения диска составляет $t_2 = 342$ ч. Перераспределение радиальных напряжений в данном сечении происходит незначительно. Наблюдается понижение уровня напряжений в средней части диска.

На рис. 6 и рис. 7 представлены распределения окружных напряжений.

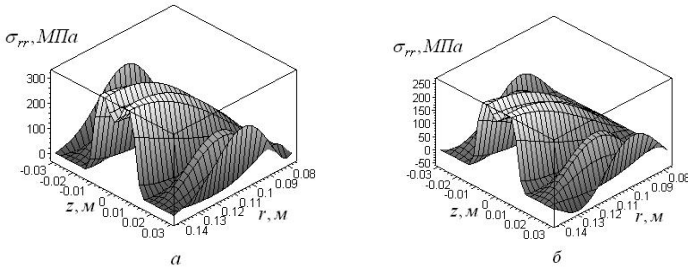


Рисунок 4 – Распределения σ_{rr} ($R_1 \leq r \leq R_2$, $-h \leq z \leq h$): а) $t_0 = 0$ ч; б) $t_1 = 283$ ч

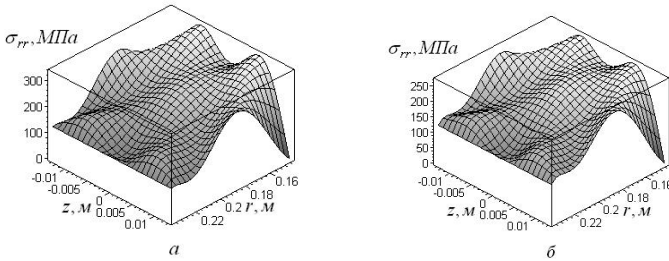


Рисунок 5 – Распределения σ_{rr} ($R_2 \leq r \leq R_3$, $-c \leq z \leq c$): а) $t_0 = 0$ ч; б) $t_1 = 283$ ч

Следует отметить падение уровня и нелинейное перераспределение окружных напряжений с течением времени. Перераспределение осевых и касательных напряжений практически не происходит. При этом уровень этих напряжений не превышает 40 МПа. Радиальные перемещения возрастают в 7 раз по сравнению с начальными (упругими) перемещениями. Осевые перемещения возрастают практически в 10 раз.

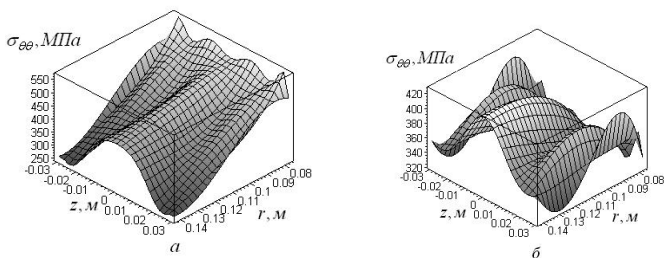


Рисунок 6 – Перераспределения $\sigma_{\theta\theta}$ ($R_1 \leq r \leq R_2$, $-h \leq z \leq h$): а) $t_0 = 0$ ч; б) $t_1 = 283$ ч

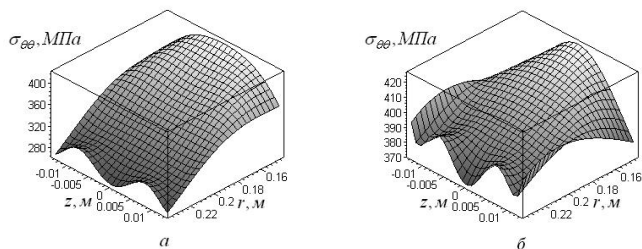


Рисунок 7 – Распределения $\sigma_{\theta\theta}$ ($R_2 \leq r \leq R_3$, $-c \leq z \leq c$): а) $t_0 = 0$ ч; б) $t_1 = 283$ ч

5. Заключение. В статье представлена постановка задач и приведены численные данные расчета ползучести диска турбины переменного и постоянного сечения.

Анализ полученных результатов расчета диска переменного сечения позволяет сделать вывод о значительном влиянии на время до разрушения формы сечения. Пренебрежение формой сечения может привести к заниженным оценкам времени до разрушения вследствие ползучести. Приведенные выше результаты расчетов позволяют также оценить влияние роста деформаций ползучести на изменение напряженно-деформированного состояния в процессе работы диска турбины, спрогнозировать срок его службы вплоть до разрушения.

Список литературы: 1. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с. 2. Напряжения и деформации в деталях паровых турбин / Под ред. А.Н.Подгорного. – Киев: Наук. Думка, 1978. – 275 с. 3. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / Подгорный А.Н., Бортовой В.В., Гонтаровский П.П. и др.; под ред. А.Н.Подгорного. – Киев: Наукова думка, 1984. – 264 с. 4. Трояновский Б.М., Филлипов Г.А., Булкин А.Е. Паровые и газовые турбины атомных электростанций. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 256 с. 5. Морачковский О.К., Соболев В.Н. Метод решения задач ползучести тел на основе смешанного вариационного принципа // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2003. – № 12, т. 1. – 193 с. 6. Морачковский О.К., Соболев В.Н. Исследования сходимости решений задач ползучести тел вращения вариационным методом // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 20. – 162 с. 7. Ромашов Ю.В., Соболев В.Н. Расчеты повреждающихся при ползучести толстостенных цилиндров // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 47. – 144 с.

Поступила в редколлегию 27.04.2006

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, докт. физ.-мат. наук, АГЗУ;
С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, НТУ «ХПИ»

ЭФФЕКТ ОТРАЖЕНИЯ МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ ИСПАРЯЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ ВСТРЕЧНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

Розглянуто рух краплі, що випаровується, як матеріальної точки змінної маси. У припущенні, що сила аеродинамічної взаємодії краплі з газовим середовищем пропорційна квадрату швидкості обтікання, одержано у спеціальних функціях наближені аналітичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь руху. Вивчено ефект відбиття краплі, тобто зміну напрямку її руху, зустрічним газовим потоком.

The movement of a drop is considered which evaporates, as material point of variable weight. In the assumption, that the force of aerodynamic interaction of a drop with gas environment is proportional to a square of speed of a flow, the approached analytical decisions of the nonlinear differential equations of movement are received, in special functions. The effect of reflection of a drop is investigated, that is change of her direction movement, counter gas flow is exacter.

Актуальность темы. Нередко на практике движение мелких испаряющихся капель происходит в газовой среде. Это движение частиц топлива при впрыске в цилиндр двигателя внутреннего сгорания [1], частиц жидких огне-тушащих веществ при их подаче в область горения [2, 3] и пр. Если встречная скорость газа большая, то его поток может не только притормозить движение капель, а и поменять направление их движения. В этом суть эффекта отражения. Он оказывает существенное влияние на точность и дальность подачи испаряющихся капель, а поэтому заслуживает отдельного изучения.

Анализ имеющихся публикаций. Отражение твердых мелких частиц встречным потоком газа рассматривалось в работах [4-6]. В них показано, что при наличии такого потока траектории твердых тел могут подгибаться вниз или загигаться вверх. Во втором случае возможно соударение неотраженных частиц с отраженными, что дополнительно тормозит движение и сопутствует их витанию в газе. Но эти закономерности нельзя формально распространить на случай испаряющихся капель, масса которых убывает во времени в связи с испарением. Для частиц переменной массы требуется отдельное изучение процесса движения, о чем и пойдет речь ниже.

Теоретическое моделирование эффекта отражения. Предполагаем, что истечение капли в виде сферы начального радиуса r_0 происходит под углом θ_0 к горизонту с начальной скоростью \vec{v}_0 .

Проекции скорости истечения имеют значения $v_1 = v_0 \cdot \cos \theta_0$ и $v_2 = v_0 \cdot \sin \theta_0$ (см. рис. 1).

По аналогии с работами [2, 3] радиус капли принимаем линейно зависящим от времени, так что $r(t) = r_0 - \gamma t$, где γ – скорость испарения.

Считаем, что движение капли происходит навстречу горизонтальному газовому (или воздушному) потоку, который имеет постоянную скорость V_1 . Как и в работах [2, 3], силу аэродинамического воздействия среды на движущуюся части-

цу принимаем пропорциональной квадрату скорости обтекания ее потоком газа.

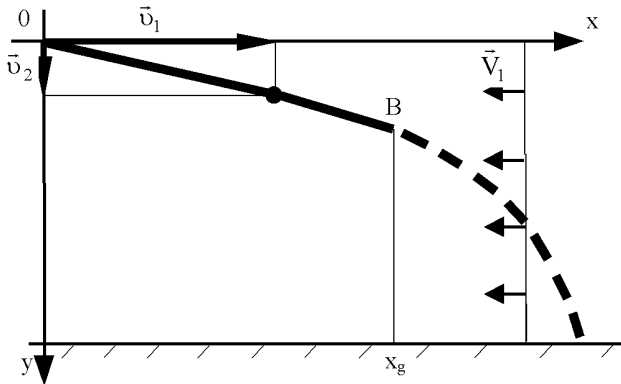


Рисунок 1 – Расчетная схема

В этих предположениях движение капли описывается системой двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k(\dot{x} + V_1)}{r_0 - \gamma t} [(\dot{x} + V_1)^2 + \dot{y}^2]^{1/2} &= 0; \\ \ddot{y} + \frac{k\dot{y}}{r_0 - \gamma t} [(\dot{x} + V_1)^2 + \dot{y}^2]^{1/2} &= g. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь k – приведенный коэффициент аэродинамического сопротивления; g – ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по t .

Уравнения (1) имеют физический смысл лишь при $t < r_0 \gamma^{-1}$. При больших t капля полностью испаряется, т.е. прекращает свое существование, в чем принципиальное отличие ее движения от движения твердой частицы постоянной массы.

Капли обычно имеют большую начальную скорость движения и непродолжительное время полета на траектории. Из-за малого веса частицы, за короткий промежуток времени гравитация не успевает сильно искривить траекторию. Поэтому с небольшой погрешностью, особенно на начальном участке движения, в уравнениях (1) можно принять $\dot{y}(\dot{x} + V_1)^{-1} \approx \text{const} = v_2 (v_1 + V_1)^{-1}$. В результате такого упрощения система (1) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \frac{\beta \dot{x}_1^2}{r_0 - \gamma t} = 0; \quad \ddot{y} + \frac{\beta \dot{x}_1 \dot{y}}{r_0 - \gamma t} = g. \quad (2)$$

Здесь $\dot{x}_1 = \dot{x} + V_1$; $\beta = k \left[1 + \left(\frac{v_2}{v_1 + V_1} \right)^2 \right]^{1/2}$.

Кроме уравнений (2) движение капли удовлетворяет начальным условиям

$$\dot{x}_1(0) = v_1 + V_1; \quad \dot{y}(0) = v_2; \quad x_1(0) = 0; \quad y(0) = 0. \quad (3)$$

Первыми интегралами уравнений (2) являются

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (v_1 + V_1) \left[1 - \frac{\beta(v_1 + V_1)}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right) \right]^{-1} - V_1; \\ \dot{y}(t) &= \frac{v_2 + \frac{g}{\gamma} [r_0 + \beta(v_1 + V_1)t]}{1 - \frac{\beta(v_1 + V_1)}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right)} - \frac{g}{\gamma} (r_0 - \gamma t). \end{aligned} \quad (4)$$

Вторые интегралы удается выразить с помощью табулированной интегральной показательной функции $Ei(-x)$, благодаря выражению [7]

$$\int_0^u \frac{e^{-\mu x} dx}{x + \omega} = e^{\mu\omega} [Ei(-\mu u - \mu\omega) - Ei(-\mu\omega)].$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{r_0}{\beta} e^{\omega} \left[Ei \left(-\omega - \ln \frac{r_0}{r_0 - \gamma t} \right) - Ei(-\omega) \right] - V_1 t; \\ y(t) &= \frac{1}{v_1 + V_1} \left[v_2 + \frac{(\omega + 1)gr_0}{\omega\gamma} \right] [x(t) + V_1 t] + \frac{gr_0^2}{\gamma^2} \times \\ &\times \left\{ e^{2\omega} \left[Ei(-2\omega) - Ei \left(-2\omega - 2 \ln \frac{r_0}{r_0 - \gamma t} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\omega = \gamma [\beta(v_1 + V_1)]^{-1}$.

При $t = r_0\gamma^{-1}$, учитывая, что $Ei(-\infty) = 0$, для координат конечной точки траектории (x_k, y_k) находим

$$\begin{aligned} x_k &= -\frac{r_0}{\beta} e^{\omega} Ei(-\omega) - V_1 r_0 \gamma^{-1}; \\ y_k &= \frac{1}{v_1 + V_1} \left[v_2 + \frac{(\omega + 1)gr_0}{\omega\gamma} \right] \left(x_k + \frac{V_1 r_0}{\gamma} \right) + \frac{gr_0^2}{\gamma^2} \times \left[e^{2\omega} Ei(-2\omega) - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Практический интерес в пожарном деле представляет вычисление предельно допустимой дальности подачи испаряющихся капель огнетушащих веществ. Это расстояние, пролетев которое, за счет испарения, капля уменьшает в два раза свой исходный радиус. Чтобы вычислить координаты такой точки (x_g, y_g) на траектории в формулах (5) следует положить $t = t_g = r_0(2\gamma)^{-1}$.

Тогда

$$\begin{aligned} x_g &= \frac{r_0}{\beta} e^{\omega} [Ei(-\omega - \ln 2) - Ei(-\omega)] - \frac{V_1 r_0}{2\gamma}; \\ y_g &= \frac{1}{v_1 + V_1} \left[v_2 + \frac{(\omega + 1)gr_0}{\omega\gamma} \right] \left(x_g + \frac{V_1 r_0}{2\gamma} \right) + \frac{gr_0^2}{\gamma^2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ e^{2\omega} \cdot [\text{Ei}(-2\omega) - \text{Ei}(-2\omega - 2 \ln 2)] - \frac{3}{8} \right\}.$$

Для проведения расчетов нужно иметь таблицы интегральной показательной функции, которые есть в [8, 9] и других справочниках по специальным функциям.

Однако, в интервале $0 \leq t \leq t_g$, расчет траектории движения капли можно приближенно провести и без таблиц специальных функций. С целью получения упрощенных решений воспользуемся аппроксимацией типа Паде

$$\ln(1-z) \approx -\frac{z}{1-az}, \quad z \in [0; 0,5], \quad a = 0,557.$$

Заменив логарифмические функции в (4) их приближениями, после вычисления интегралов

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(t) dt; \quad y(t) = \int_0^t \dot{y}(t) dt; ,$$

получаем

$$x(t) \approx (v_1 + V_1) \left\{ \frac{br_0}{\gamma(b-a)^2} \ln \left[1 + (b-a) \frac{\gamma t}{r_0} \right] - \frac{at}{b-a} \right\} - V_1 t; \quad (6)$$

$$y(t) \approx \frac{ac}{b-a} \left\{ \left[\frac{1}{b-a} \left(\frac{G}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) + \frac{G}{ac} \right] \ln \left[1 + (b-a) \frac{\gamma t}{r_0} \right] - \frac{1}{2} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\gamma t}{r_0} \right)^2 - \left(\frac{G}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b-a} \right) \cdot \frac{\gamma t}{r_0} \right\} + \frac{gr_0^2}{2\gamma^2} \left[\left(1 - \frac{\gamma t}{r_0} \right)^2 - 1 \right].$$

$$\text{Здесь } b = \frac{\beta \cdot (v_1 + V_1)}{\gamma}; \quad c = bgr_0^2 \gamma^{-2}; \quad G = \frac{r_0}{\gamma} \left(v_2 + \frac{gr_0}{\gamma} \right).$$

Для проверки точности приближенных решений (6) проведены вычисления $x(t)$ и $y(t)$ при $r_0 = 8 \cdot 10^{-5}$ м; $\gamma = 10^{-4}$ м/с; $\theta_0 = 0$; $\beta = 10^{-5}$; $v_0 = 120$ м/с; $V_1 = 0; 5; 10$ м/с. Результаты расчета записаны в табл. 1. В числители помещены значения, полученные численным интегрированием уравнений (1) при начальных условиях (3), а в знаменатели – координаты вычисленные по формулам (6). Ввиду слабой зависимости $y(t)$ от величины V_1 ординаты приведены в табл. 1 только для $V_1 = 0$.

Расхождение результатов, полученных двумя способами, незначительны, что подтверждает пригодность формул (6) к проведению технических расчетов в интервале $0 \leq t \leq t_g$.

Чтобы найти время t_0 , когда капля будет остановлена встречным потоком газа, приравняем нулю $\dot{x}(t)$ в выражениях (4). Это дает уравнение, из которого следует, что

$$t_0 = \frac{r_0}{\gamma} \left[1 - \exp \left(- \frac{\gamma v_1}{\beta V_1 (v_1 + V_1)} \right) \right].$$

Если $t_0 < t_g$, то предельно допустимая дальность полета капле будет ограничена не испарением, а эффектом отражения. Так будет, например, при $r_0 = 8 \cdot 10^{-5}$ м; $\gamma = 10^{-4}$ м/с; $\beta = 10^{-5}$; $v_1 = 120$ м/с; $v_2 = 0$; $V_1 = 20$ м/с, когда $t_0 \approx 0,28$ с, а $t_g = 0,4$ с. Если скорость встречного потока газа $V_1 = 10$ м/с, то $t_0 \approx 0,48$ с, что больше t_g , т.е. эффект отражения не окажет влияния. Таким образом, существует граничная скорость встречного потока V_{lr} , за пределами которой ($V_1 > V_{lr}$) газ отразит движение капли раньше, чем испарение уменьшит в два раза ее диаметр. Это граничное значение легко оценить по формуле

$$V_{lr} \approx \frac{v_1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\gamma}{kv_1 \ln 2}} - 1 \right).$$

Таблица 1 – Координаты траектории капли, полученные численным интегрированием уравнений (1) (числители) и по формулам (6) (знаменатели)

t, с	$V_1 = 0, \text{ м/с}$	$V_1 = 5, \text{ м/с}$	$V_1 = 10, \text{ м/с}$	$V_1 = 0, \text{ м/с}$
	Значения x(t), м			y(t), м
0,05	<u>4,46</u>	<u>4,35</u>	<u>4,24</u>	<u>0,01</u>
	4,45	4,34	4,23	0,01
0,1	<u>7,24</u>	<u>6,93</u>	<u>6,62</u>	<u>0,04</u>
	7,23	6,92	6,61	0,04
0,2	<u>10,74</u>	<u>9,98</u>	<u>9,21</u>	<u>0,13</u>
	10,72	9,95	9,18	0,12
0,3	<u>12,95</u>	<u>11,70</u>	<u>10,45</u>	<u>0,27</u>
	12,91	11,66	10,40	0,26
0,4	<u>14,47</u>	<u>12,74</u>	<u>10,99</u>	<u>0,45</u>
	14,43	12,69	10,94	0,43

Для использованных выше исходных данных $V_{lr} \approx 13,02$ м/с.

С целью анализа процесса движения капли в условиях отражения проведен расчет координат ее траектории при $r_0 = 10^{-4}$ м; $\gamma = 2 \cdot 10^{-4}$ м/с; $k = 10^{-5}$; $v_0 = 130$ м/с; $\theta_0 = -20^0$; $V_1 = 30$ м/с. Вычисленные тремя способами координаты в различные моменты времени представлены в табл. 2. Для принятых исходных данных $t_0 \approx 0,2$ с, а $t_g \approx 0,25$ с. В пределах промежутка $0 \leq t \leq t_g$ все три способа вычислений дают близкие результаты. Наиболее простым из них является расчет по формулам (6).

С момента $t = 0,2$ с начинается уменьшение координат x(t) во времени и оно продолжается вплоть до полного испарения капли при $t = 0,5$ с. Траектория движения оказалась загнутой вверх. Но она может быть и загнутой вниз, в

зависимости от угла истечения капли θ_0 . Это подтверждают траектории, представленные на рис. 2. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 получены численным интегрированием уравнений (1) при $\theta_0 = -30^\circ; -20^\circ; -10^\circ; 0^\circ$ и 10° соответственно на интервале $0 \leq t \leq 0,25$ с. Другие параметры истечения капли сохранялись прежними. Три траектории движения, вследствие проявления эффекта отражения, загнуты вверх, а две – вниз.

Таблица 2 – Координаты траектории капли, вычисленные тремя способами

t, с	Численное интегрирование уравнений (1)		Формулы (5)		Формулы (6)	
	x, м	-y, м	x, м	-y, м	x, м	-y, м
0,01	1,11	0,41	1,11	0,41	1,11	0,41
0,05	4,06	1,61	4,06	1,61	4,06	1,61
0,10	5,93	2,57	5,93	2,57	5,91	2,57
0,15	6,77	3,22	6,76	3,22	6,73	3,21
0,20	7,00	3,67	6,99	3,67	6,95	3,66
0,25	6,83	4,00	6,82	4,00	6,77	3,99
0,30	6,38	4,24	6,36	4,23	6,32	4,23
0,35	5,71	4,40	5,68	4,40	5,66	4,39
0,40	4,85	4,51	4,82	4,50	4,84	4,50
0,45	3,83	4,57	3,79	4,56	3,89	4,56

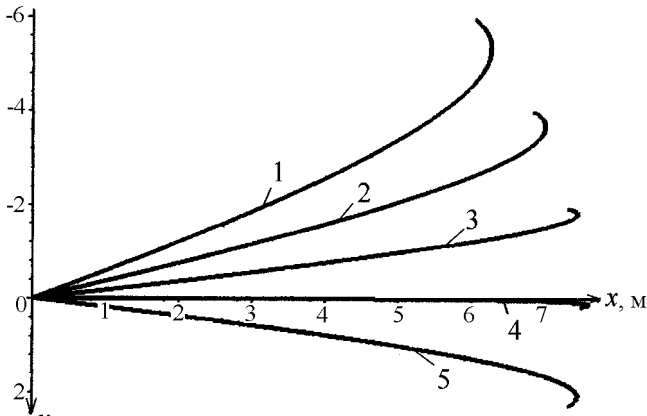


Рисунок 2 – Траектории отражений капли

О характере деформирования траектории можно судить без ее построения по знаку $\dot{y}(t_0)$. Если $\dot{y}(t_0) < 0$, то траектория загнута вверх, а при $\dot{y}(t_0) > 0$ она подгибается вниз.

Выводы. При наличии встречного потока газа эффективная дальность

полета капли может быть ограничена не ее испарением, а отражением встречным потоком. Это обстоятельство следует учитывать при организации пожаротушения мелкодисперсными жидкими веществами, а также при подаче топлива в цилиндры двигателей внутреннего сгорания.

Список литературы: 1. *Льшевский А.С.* Распыливание топлива в судовых дизелях. – Л.: Судостроение, 1971. – 284 с. 2. *Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А.* Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с. 3. *Севериков В.В. Карпенко В.А., Севериков И.В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Изд-во «СевГТУ», 1996. – 260 с. 4. *Ольшанский В.П.* Об отражении частиц огнетушащего порошка встречным потоком газа // Проблемы пожарной безопасности. – Харьков: Фолио, 2004. – Вып. 16. – С. 164-168. 5. *Ольшанский В.П.* О траектории движения частиц огнетушащего порошка, отраженной встречным потоком газа // Геометрические компьютерные моделирования. Вып. 8. – Харків: ХДУХТ, 2004. – С. 13-18. 6. *Ольшанский В.П., Дубовик О.А.* Вопросы внешней баллистики огнетушащих веществ. – Харьков: Митеть, 2005. – 236 с. 7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с. 8. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 9. *Янке Е., Эмде Ф., Леи Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редколлегию 22.12.2005.

УДК 539.3

А.В.ОНИЩЕНКО, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Досліджується явище накопичення пошкодження в тонкій прямокутній пластині постійної товщини що знаходиться під дією циклічних ударних навантажень. За один цикл приймається однократний удар. Підсумовування пошкоджень вважається лінійним. Задачу удару на кожному циклі розв'язано чисельно-ітераційним методом: визначення величини сили ударної взаємодії проводиться з застосуванням різницевої схеми, визначення деформованого стану пластини виконується аналітично за теорією зсуву Тимошенко. Наведено приклади розрахунків.

The paper is devoted to the investigation of damage accumulation in thin plate with constant thickness, which is under impact loading. The single impact is presented in the one cycle. The linear damage summation is considered. The impact problem on the each cycle is solved by numerical-iterative method: the impact force value was found by use of finite difference scheme, the deformed plate state was determined analytically by shear Timoshenko's theory. The numerical examples are given.

1. Введение. Исследование поведения механических конструкций при ударном нагружении является важным этапом прочностных расчетов. В работе [1,2] рассматривается решение задач удара по тонким пластинам. Для использования теории удара предложенной Тимошенко в данных работах аналитически решается задача о колебаниях пластины. С помощью предложенного метода можно оценить

прочность конструкций при однократных ударных взаимодействиях. Реальные механические конструкции часто подвергаются действию циклических нагрузок, в том числе и ударных. При циклическом нагружении разрушение элементов конструкции может произойти при упругом деформировании в следствии накопления повреждений. Поэтому для таких конструкций необходимо проводить расчеты на много и мало цикловую усталость.

2.Постановка задачи. Рассматривается задача учета накопления повреждаемости для тонкой прямоугольной пластины постоянной толщины, шарнирно опертой по всем сторонам, находящейся под действием циклической ударной нагрузки. Необходимо определить количество циклов до разрушения пластины. Понятие повреждаемости применяется для отражения различных процессов происходящих на микро уровне при деформировании материалов. Даже при упругом деформировании в материале образуются микро трещины. При циклическом нагружении идет их развитие и увеличение, что в конечном итоге приводит к образованию макро дефектов и разрушению материала. Этот процесс известен как накопление повреждаемости [3].

На рис. 1 показано некоторое сечение материала, площадь которого равна S . Площадь S_D соответствует суммарной площади дефектов. Тогда повреждаемость материала в направлении n можно определить как:

$$D_n = \frac{S_D}{S} = \frac{S - S^*}{S},$$

где S^* – действительная площадь сечения материала;
 D_n – параметр повреждаемости в направлении n .

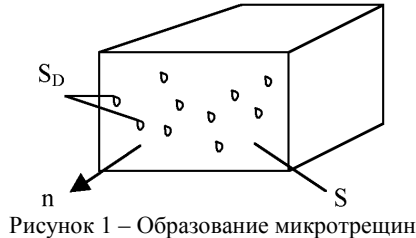


Рисунок 1 – Образование микротрещин

Физическая интерпретация параметра повреждаемости приведенная выше, была впервые предложена Л.М.Качановым. В такой постановке, параметр повреждаемости изменяется в диапазоне $0 \leq D \leq 1$. Значение $D = 0$ соответствует исходному неповрежденному состоянию материала, а $D = 1$ – соответствует окончанию процесса скрытого разрушения.

В связи с уменьшением поперечного сечения материала в теории повреждаемости вводится понятие действующего напряжения:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D},$$

где σ – условное напряжение без учета повреждаемости;

$\bar{\sigma}$ – действующие напряжения, учитывающее изменение сечения.

Уравнение состояния материала с повреждаемостью можно записать по принципу эквивалентности напряжений [4], как уравнение без учета повреждаемости путем замены обычных напряжений на действующие.

В работе [5] мера повреждаемости при циклическом нагружении вводится как:

$$D = \frac{N}{N_F},$$

где D – повреждаемость,

N – количество циклов,

N_F – количество циклов до разрушения.

В соответствии с такой постановкой при нулевом количестве циклов повреждаемость также равна нулю. Когда количество циклов нагружения достигает значения N_F , то материал полностью разрушается. На практике для металлов критическое значение параметра повреждаемости лежит в пределах $0,2 \leq D \leq 0,8$.

В соответствии с законом Коффина-Мэнсона повреждаемость можно принять как:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \left(\frac{\Delta \sigma}{C_2} \right)^{\gamma_2},$$

где $\Delta \sigma$ – амплитуда напряжений,

C_2, γ_2 – эмпирические константы материала.

3.Метод решения. Принимаем гипотезу линейного суммирования для параметра повреждаемости,

$$D = \sum_{i=1} \delta D_i.$$

Его приращение на каждом цикле определяется следующим образом:

$$\delta D_i = \left(\frac{\Delta \sigma_i}{C_2} \right)^{\gamma_2}.$$

Здесь $\Delta \sigma_i$ – амплитуда эффективных напряжений на i -том цикле. Для плоского напряженного состояния, реализующегося в пластинах, используем значение интенсивности напряжений.

Расчет проводим следующим образом. На первом шаге решается задача удара и определяется амплитуда напряжений. После этого определяется приращение повреждаемости. Далее решается задача удара на следующем цикле с учетом повреждаемости, и определяется новое приращение. Таким образом, расчет ведется до тех пор, пока параметр повреждаемости не достигнет критического значения. Количество итераций вычислений будет являться количеством циклов до разрушения.

Решая задачу предложенным методом на каждом шаге вычислений учитывается накопленная повреждаемость на предыдущих итерациях за счет вычисления действующих напряжений.

4.Пример расчетов. Ниже приведен результат расчетов накопления повреждаемости при ударном циклическом нагружении. Стальной шар радиусом $R = 0,02$ (м) ударяет по шарнирно опертой стальной пластине размером $0,2/0,2/0,008$ (м) при начальной скорости шара $v_0 = 13$ (м/с). Коэффициенты закона Коффина-Мэнсона для данного материала равны [5]:

$$C_2 = 1925 \text{ (МПа)}; \quad \gamma_2 = 9,6.$$

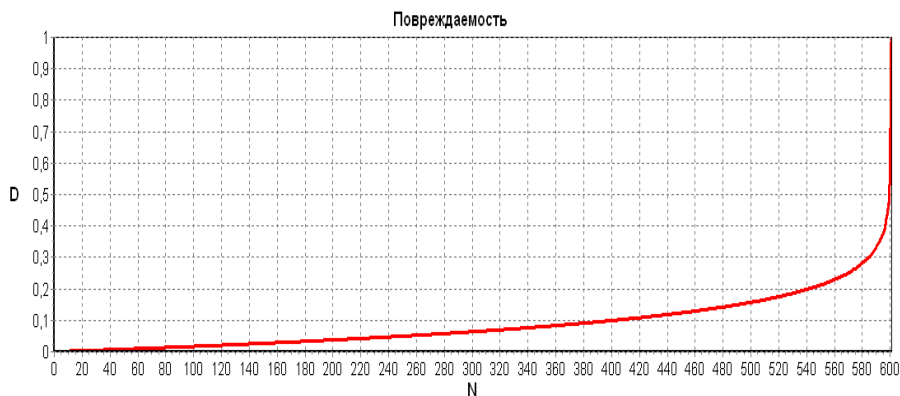


Рисунок 2 – Процесс накопления повреждаемости

На рис. 2 показана зависимость параметра повреждаемости от количества циклов нагружения. Число циклов до разрушения в данном примере равно $N_F = 601$.

Выводы. В данной статье рассмотрена контактная задача об ударе сферического тела по тонкой прямоугольной пластине с учетом повреждаемости при циклической нагрузке. На основе теоретических исследований разработан программный комплекс для решения поставленной задачи. Приведены результаты тестовой задачи.

Список литературы: 1. *Бреславский Д.В., Онищенко А.В.* Удар сферического тела по ортотропной пластине // Вестник НТУ «ХПИ», Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – №8, т. 2, 3 – 10 с. 2. *Онищенко А.В.* Моделирование ударных явлений по анизотропным пластинам // Вестник НТУ «ХПИ». Харьков: НТУ «ХПИ», 2005. – №21, 97 – 102 с. 3. *J.L. Chaboche.* Continuum damage mechanics. Nuclear Engineering and Design. – 1987. – Р. 19-33. 4. Физико-математическая теория процессов обработки материалов и технологии машиностроения / Под ред. *Новикова Ф.В., Якимова А.В.* В десяти томах. – Т. 5. Обработка металлов методами пластического деформирования. – О: ОНПУ, 2004. – 522 с. 5. *Lemaitre J., J.-L. Chaboche.* Mechanics of solid materials. – Cambridge: University press, 1994. – 556 p. 6. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяе-

мых тел. – М., 1965. – 451 с. 7. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев., 1977. – 340 с. 8. *Филиппов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г.* Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок. – К.: Наукова думка, 1978. – 184 с.

Поступила в редколлегию 03.04.2006

УДК 839.4:02

В.О.ПОВГОРОДНИЙ, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ПРИБОРНОГО БЛОКА САМОЛЕТА ПО ВИБРОУСКОРЕНИЯМ

Розглянуто числові характеристики показників безвідмовності з урахуванням віброприскорень, власних частот та термонапружень. Задачі вирішуються з використанням методу скінченних елементів та теорії викидів. Результати досягнуто для нового приладового блоку літака, що уявляє собою пакет плат з електронними радіотехнічними елементами (ЕРЕ).

In this article are introduced number's index of the fail-safe including vibration accelerations, free frequencies and thermal stresses. The problem is solved by the finite element's method and method of the theory of throw outs. The results for the new device of aircraft, which introduce the pocket of plates with electronical radiotechnical elements.

Результаты расчета показателей надежности по каждой плате и корпусу, входящим в блок воздушных параметров (БВП) [1], при изменении времени непрерывной работы (времени полета) t_n от 0 до 12 ч с учетом внезапных отказов (вибрационных – по виброускорениям) приведены в табл. 1, 2.

Функции надежности по виброускорениям, полученные с использованием теории выбросов по каждой из плат и корпусу, входящим в блок БВП, по которым можно спрогнозировать вероятность безотказной работы (ВБР) и наработку на отказ:

$$\begin{aligned} P_k(t) &\approx 1 - 0,00000000000038 \cdot t; \\ P_1(t) &\approx 1 - 0,000000646 \cdot t; \\ P_2(t) &\approx 1 - 0,000000661 \cdot t; \\ P_3(t) &\approx 1 - 0,000000741 \cdot t. \\ P_4(t) &\approx 1 - 0,000000688 \cdot t; \\ P_5(t) &\approx 1 - 0,000000689 \cdot t. \end{aligned} \tag{1}$$

По статической прочности для БВП получают большие значения показателей безотказности (конструкция высоконадежная). Поэтому эти данные в таблицах не приводим. Значения показателей надежности (безотказности) по виброперемещениям аналогичны значениям по виброускорениям и значения наработки на отказ получены при доверительной вероятности $\gamma=0,99$ [2,3].

Таблица 1 – Результаты расчетов пластины (платы с ЭРЭ)

№ точки	Расчет						
	Собственная частота, Гц	Виброперемещения, 10^{-3} м	Дисперсия виброперемещений, 10^{-6} м ²	Виброскорости, г	Дисперсия виброускорений, г ²	Напряжения, Па	Дисперсия напряжений, Па ²
1	2	3	4	5	6	7	8
1	120,0	1,0486	0,478	60,4	1,03	19268	52465,5
	160,0	0,140625	0,201	14,4	1,37	2583,98	22061,9
	169,0	0,0455	0,171	5,2	1,45	836,1	18769
	174,06	0,0396	0,156	4,8	1,49	727,65	17122,6
1	204,0	0,0276	0,097	4,6	1,75	507,15	10646,8
	228,8	0,0501	0,068	10,5	1,96	920,6	7463,7
	242,0	0,0141	0,058	3,3	2,1	259,1	6366,1
	260,0	0,0096	0,046	2,6	2,2	1764	5048,98
	274,9	0,00364	0,04	1,1	2,4	66,9	4390,4
	284,7	0,0031	0,035	0,99	2,44	56,96	3841,6
	286,3	0,0034	0,0035	1,1	2,45	62,5	3841,5
	311,0	0,08814	0,027	34,1	2,66	1619,6	2963,5
	324,0	0,0555	0,024	23,3	2,77	1019,8	2634,25
	329,0	0,036955	0,023	16,0	2,82	6791	2524,5
	330,6	0,03202	0,022	14,0	2,83	588,4	2414,7
	337,0	0,0293	0,021	13,3	2,89	538,4	2305
	343,0	0,0136	0,02	6,4	2,94	249,9	2195,2
	349,5	0,0072	0,019	3,5	2,99	132,3	2085,4
	357,0	0,01216	0,018	6,2	3,1	223,4	1975,7
	369,0	0,0066	0,016	3,6	3,16	121,3	1756,2
	385,0	0,0071	0,014	4,2	3,3	130,5	1536,6
	425,0	0,00166	0,010	1,2	3,64	30,5	1097,6
426,0	0,00135	0,01	0,98	3,65	24,8	1097,5	
2	120,1	0,8943	0,346	51,6	0,75	16432,8	37977
	159,7	0,0921	0,087	9,4	0,59	1692,3	9549,2
	169,0	0,0298	0,073	3,4	0,62	547,6	8012,5
	175,0	0,01959	0,037	2,4	0,37	360,0	4061
	203,0	0,00758	0,007	1,25	0,13	139,3	768,3
	227,0	0,01378	0,005	2,84	0,14	253,2	548,8
	240,0	0,0021	0,001	0,48	0,045	38,6	109,76
	259,0	0,0037	0,006	0,995	0,32	68,0	658,6

Продолжение табл. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	274,0	0,0014	0,005	0,42	0,35	25,7	548,8
	284,5	0,0031	0,035	0,99	2,44	57,0	3841,6
	286,0	0,0013	0,005	0,42	0,36	23,9	548,9
	310,0	0,0341	0,004	13,1	0,39	626,9	439
	323,0	0,0082	0,00052	3,4	0,059	150,7	57,1
	328,0	0,00999	0,001	4,3	0,21	183,6	109,76
	330,0	0,0087	0,001	3,8	0,21	159,9	109,76
	336,0	0,0147	0,005	6,65	0,72	270	548,8
	342,0	0,0089	0,008	4,18	1,255	163,5	878
	349,0	0,0047	0,008	2,3	1,276	86,4	878
358,0	0,0103	0,004	5,3	2,26	189,3	439	
3	120,0	0,096875	0,407	55,8	0,879	17800,8	44672,5
	159,8	0,09986	0,101	10,2	0,685	1834,9	11085,8
	230,0	0,03497	0,033	7,4	0,98	642,57	3622,1
	242,0	0,00538	0,008	1,26	0,31	98,86	878,1
	259,0	0,00969	0,047	2,6	2,2	178,1	5158,7
	311,0	0,08814	0,027	34,1	2,66	1619,6	2963,5
	324,0	0,0212	0,003	8,9	0,41	389,55	329,3
	328,0	0,02626	0,011	11,3	1,41	482,5	1207,4
	349,5	0,0051	0,009	2,48	1,5	93,7	987,8
	357,4	0,0112	0,015	5,73	2,65	2058	1646,4

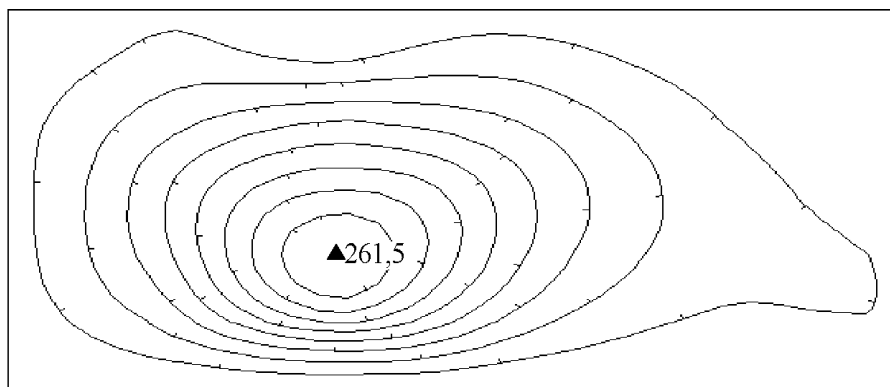


Рисунок 1 – Определение опасной с точки зрения надежности точки корпуса (маркером отмечен экстремум, рядом приведено значение виброперемещения, 10^{-3} м), исходя из линии уровня виброрельефа на 1-ом резонансе ($F_1 = 304,8$ Гц)

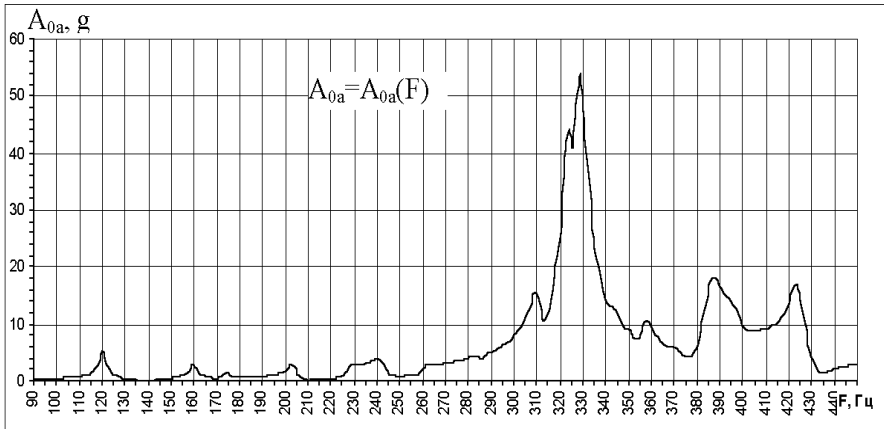


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика в средней точке корпуса блока воздушных параметров

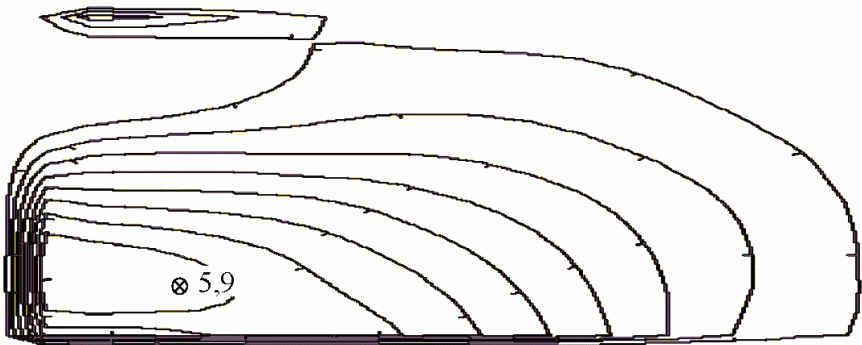


Рисунок 3 – Определение опасной с точки зрения надежности точки платы модуля давления (маркером отмечен экстремум, рядом приведено значение виброперемещения, 10^{-3} м), исходя из линии уровня виброрельефа на 1-ом резонансе ($F_1 = 180$ Гц)

Таблица 2 – Результаты расчета показателей надежности каждой платы для блока воздушных параметров по виброускорениям

№ п/п	Показатели безотказности	
	Вероятность безотказной работы	Наработка до Γ^0 отказа, ч
1	0,99916	$2,2 \cdot 10^8$
2	0,99917	1290
3	0,99919	1261
4	0,99917	1125
5	0,99917	1211
6	0,99917	1210

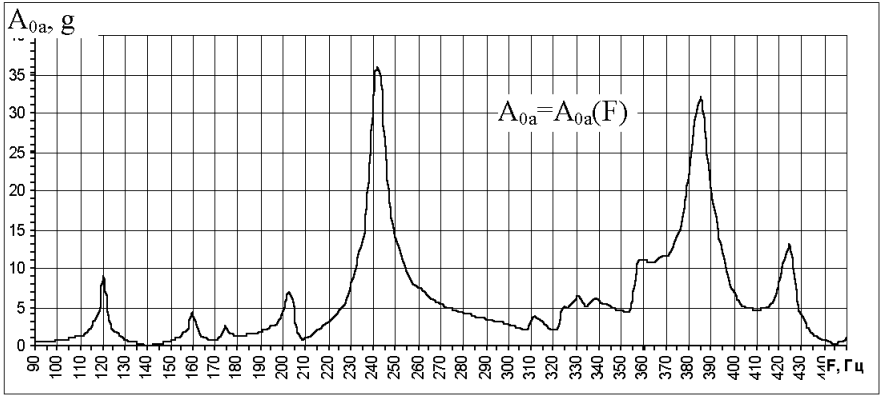


Рисунок 4 – Амплитудно-частотная характеристика платы модуля давления в средней точке

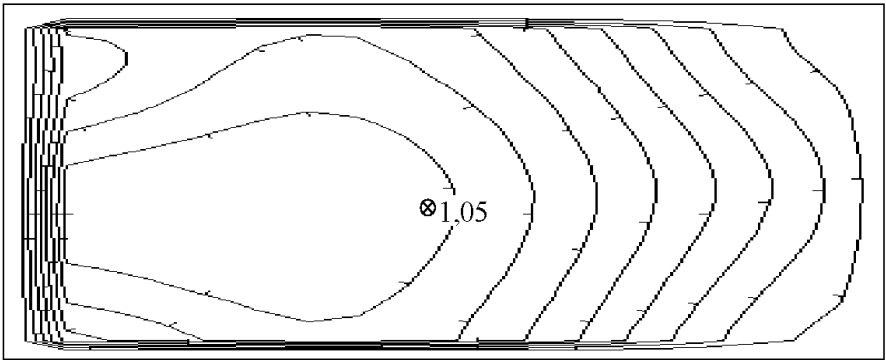


Рисунок 5 – Определение опасной с точки зрения надежности точки платы разовых команд (маркером отмечен экстремум, рядом приведено значение виброперемещения, 10^{-3} м), исходя из линии уровня виброрельефа на 1-ом резонансе ($F1 = 120$ Гц)

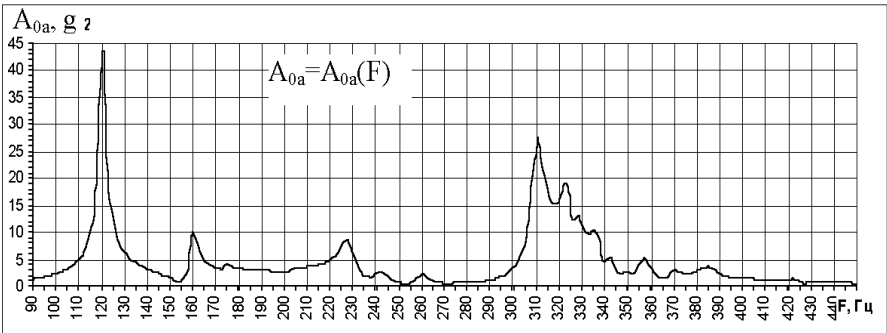


Рисунок 6 – Амплитудно-частотная характеристика платы разовых команд в средней точке

Таблица 3 – Вероятность безотказной работы по виброускорениям с учетом первой собственной формы для блока воздушных параметров

t полета, ч	Вероятность безотказной работы P (виброускорения)					
	Корпус	Плата 1	Плата 2	Плата 3	Плата 4	Плата 5
1	2	3	4	5	6	7
1	0,9 ₁₁ 38	0,9 ₆ 353	0,9 ₆ 34	0,9 ₆ 258	0,9 ₆ 31	0,9 ₆ 31
2	0,9 ₁₁ 24	0,9 ₅ 87	0,9 ₅ 87	0,9 ₅ 85	0,9 ₅ 86	0,9 ₅ 86
3	0,9 ₁₀ 88	0,9 ₅ 81	0,9 ₅ 81	0,9 ₅ 78	0,9 ₅ 79	0,9 ₅ 79
4	0,9 ₁₀ 85	0,9 ₅ 74	0,9 ₅ 74	0,9 ₅ 70	0,9 ₅ 73	0,9 ₅ 73
5	0,9 ₁₀ 81	0,9 ₅ 68	0,9 ₅ 67	0,9 ₅ 63	0,9 ₅ 66	0,9 ₅ 66
6	0,9 ₁₀ 77	0,9 ₅ 61	0,9 ₅ 60	0,9 ₅ 55	0,9 ₅ 59	0,9 ₅ 59
7	0,9 ₁₀ 74	0,9 ₅ 54	0,9 ₅ 54	0,9 ₅ 48	0,9 ₅ 52	0,9 ₅ 52
8	0,9 ₁₀ 70	0,9 ₅ 48	0,9 ₅ 47	0,9 ₅ 41	0,9 ₅ 45	0,9 ₅ 45
9	0,9 ₁₀ 66	0,9 ₅ 42	0,9 ₅ 41	0,9 ₅ 33	0,9 ₅ 38	0,9 ₅ 38
10	0,9 ₁₀ 62	0,9 ₅ 35	0,9 ₅ 34	0,9 ₅ 26	0,9 ₅ 31	0,9 ₅ 31
11	0,9 ₁₀ 58	0,9 ₅ 29	0,9 ₅ 27	0,9 ₅ 19	0,9 ₅ 24	0,9 ₅ 24
12	0,9 ₁₀ 54	0,9 ₅ 22	0,9 ₅ 21	0,9 ₅ 11	0,9 ₅ 17	0,9 ₅ 17

Таблица 4 – Нарботка на отказ по виброускорениям с учетом первой собственной формы для блока воздушных параметров

t полета, ч	Нарботка на отказ T (виброускорения), ч					
	Корпус	Плата 1	Плата 2	Плата 3	Плата 4	Плата 5
1	$2,6 \cdot 10^9$	15456,5	15106	13493	14535	14514
2	$1,3 \cdot 10^9$	7740	7564	6748	7268	7257
3	$8,75 \cdot 10^8$	5160	5043	4498	4845	4838
4	$6,6 \cdot 10^8$	3870	3782	3374	3634	3629
5	$5,75 \cdot 10^8$	3096	3026	2699	2907	2903
6	$4,3 \cdot 10^8$	2580	2521	2249	2422,5	2419
7	$3,75 \cdot 10^8$	2211,4	2161	1928	2076	2073
8	$3,28 \cdot 10^8$	1935	1891	1687	1817	1814
9	$2,9 \cdot 10^8$	1720	1681	1499,5	1615	1613
10	$2,6 \cdot 10^8$	1548	1513	1349,5	1454	1451
11	$2,4 \cdot 10^8$	1407	1375	1227	1321	1319
12	$2,2 \cdot 10^8$	1290	1261	1125	1211	1210

Зависимости вероятности безотказной работы по виброускорениям от времени непрерывной работы для наиболее опасного элемента конструкции (ЭК) БВП–платы разовых команд (ПРК) – приведены на рис. 7. Также для ПРК в наиболее опасной средней точке приведены зависимости наработки на отказ и дисперсий виброускорений от логарифмического декремента колебаний, соответственно, на рис. 4 и рис. 5, а также зависимость наработки на отказ от дисперсий виброускорений – на рис. 6. Видно, что с увеличением логарифмического декремента колебаний показатели надежности (безотказности)

улучшаются (ВБР и наработка на отказ) увеличиваются, при увеличении дисперсий виброускорений показатели безотказности ухудшаются, что соответствует формуле (1). Наиболее подходящий логарифмический декремент в соответствии с требованиями технического задания (ТЗ) (а, именно, ВБР) будет $\delta = 0,052$. Зависимость ВБР от времени непрерывной работы в наиболее опасной точке БВП – средней точке ПРК представлена на рис. 7.

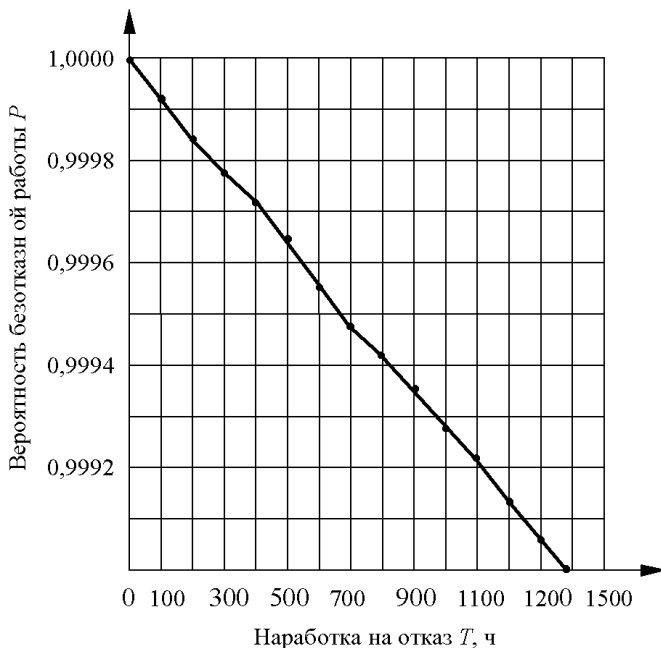


Рисунок 7 – Зависимость вероятности безотказной работы от наработки до первого отказа для платы разовых команд

Выводы. Определены показатели надежности (ВБР, наработка на отказ) с учетом вибрационных отказов (виброускорения), а также отказов статической прочности. На основе разработанных в работе подходов и программного обеспечения для ПЭВМ решены задачи статистической динамики и прогнозирования надежности при внезапных отказах рассматриваемой пространственной коробчатой конструкции – БВП при действии случайной нагрузки в виде «белого шума». Задача динамики решается в отдельных точках конструкции с использованием МКЭ, а задачи прогнозирования надежности – с использованием математического аппарата теории выбросов. Проведен анализ опасных мест конструкции БВП с учетом динамического НДС, который показал, что к ним относятся области в средней точке платы 4 (ПРК). Определены показатели надежности с учетом различных значений логарифмического декремента колебаний и вероятностного задания кривых усталости. Полученные

значения показателей надежности согласуются с нормами, действующими на этапе конструкторско-технологической доводки приборного бортового оборудования ЛА, в соответствии с НЛГС. Метод с использованием теории выбросов, примененный к новой конструкции, имеет следующие достоинства: простота оценки показателей безотказности; простота реализации на ЭВМ; возможность исследования и определения ВБР как функции времени $P(t)$ [4].

Список литературы: 1. *Повгородний В.О.* Прогнозирование показателей надежности механических конструкций бортовой аппаратуры Автореф. дис. канд. техн. наук: Харьков, 2004. – 20 с. 2. *Жовдак В.А.* Прогнозирование ресурса, прочности и надежности элементов машиностроительных конструкций. – Киев, 1989. – 95 с. 3. *Стенин П.А.* Сопротивление материалов. – М.: Интеграл-пресс, 1997. – 320 с. 4. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. – М.: Наука, 1970. – 437 с.

Поступила в редакцию 25.04.2006

УДК 621.891.031

О.Г.ПРИЙМАКОВ, канд. техн. наук; **Ю.О.ГРАДИСЬКИЙ**; ХУПС

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРАЦЕЗДАТНОСТІ КОЛІНЧАСТИХ ВАЛІВ ТА ЦИЛІНДРО-ПОРШНЕВИХ ГРУП ДИЗЕЛІВ АВІАЦІЙНОЇ НАЗЕМНОЇ ТЕХНІКИ

У статті приведені результати тривалих стендових випробувань дизельних двигунів авіаційної наземної техніки з метою визначення експлуатаційних властивостей, що забезпечують працездатність та надійність деталей і складових одиниць в межах гарантійного наробітку.

In this article there are results long-term tests of diesel engines of the aviation ground technique. It has the purpose of determination of supply of operating properties that provide efficiency and reliability of details and assembling units within the limits of guarantee work.

Для авіаційної наземної техніки (АНТ) в Збройних Силах України найчастіше використовуються такі моделі дизельних двигунів, як В-46, КАМАЗ-740, ЯМЗ-238, СМД-14, Д-12 та деякі інші.

Відомо [1-4], що в процесі експлуатації таких двигунів на першому етапі використання ресурсу найбільш піддаються зношуванню пари «шип колінчастого валу - вкладиш опори ковзання», а на другому етапі деталі циліндро-поршневої групи. Отже, тільки повне комплексне експериментальне дослідження працездатності обох груп може об'єктивно показати дійсну працездатність дизелів АНТ, що прогнозується апостеріорно.

Таким апостеріорним прогнозом слугує логістична схема прогнозування, побудована на базі рекурсивного адаптивного фільтру калманівської оцінки зі зворотнім зв'язком, в якому інтегральні енергетичний R та кінематичний N показники додаються як стохастичні параметри, причому враховуються зов-

нішні (інтенсивність зношування I_h визначальних пар тертя) та внутрішні чинники впливу на працездатність дизелів АНТ [5].

Метою випробувань дизелів АНТ на прикладі типового їх представника - V-подібного двигуна В-46-6 є комплексне експериментальне дослідження працездатності двигунів впродовж всього ресурсу роботи і експериментальне підтвердження правильності апостеріорного прогнозування [6-8].

Експериментальне визначення працездатності дизелів АНТ виконувалося в рамках договору про науково-технічне співробітництво між ХУПС ім. І.Кожедуба та Харківським спеціалізованим конструкторським бюро дизельних двигунів (ХКБД) при ДП «Завод ім. Малишева» (м. Харків).

Для визначення працездатності двигуна В-46-6 №У03 АТ-5645, що пройшов обкаточні, регулювальні та приймально-здатні випробування після капітального ремонту на моторному мастилі Галол М-4042 ТД по ТУ У00151650.40-97 передбачалось проведення тривалих стендових випробувань терміном, що дорівнює гарантійному наробітку двигуна – 350 годин. Методика та порядок проведення випробувань регламентовані ТУ ОС-32 Р-2 «Періодичні випробування». Самі випробування проводились на випробувальному стенді КП ХКБД (РД 99 С7.641) [9].

Мастило Галол М-4042 ТД являє собою суміш мінерального базового мастила з композицією багатофункціональних присадок. Базове мастило складається з суміші дистильтного та залишкового компонентів у співвідношенні, яке забезпечує заданий рівень в'язкості моторних мастил для форсування дизельних двигунів. Композиція присадок надає мастилу високі антинагарні, миючі, диспергуючі, антикислотні, протизносні властивості та включає в себе наступні багатофункціональні бар'єрні присадки: АСВ КАСП-13, Борин та Галад-30, а також депресорну присадку Явизоль 1015Н, антипінну присадку ПМС-200А.

Фізико-механічні показники мастила Галол М-4042 ТД в порівнянні з мастилом М-16П ГОСТ 6360-83, допущеного до застосування на двигунах типу В-46-6 в якості дублюючої марки приведено в табл. 1.

Наведені дані засвідчують, що всі показники мастила Галол М-4042 ТД практично ідентичні мастилу М-16 ІХП-3. Слід відмітити, що ці масла перевершують мастило МТ-16П за експлуатаційними властивостями: вони мають великі значення індексу в'язкості, кращі миючі властивості по ПЗВ, менші значення ступеня чистоти. В'язкісно-температурні характеристики мастила Галол М4042 ТД та М-16 ІХП-3 близькі між собою. Проведені випробування показали, що мастило Галол М-4042 ТД сумісне з моторними мастилами М-16 ІХП-3, МТ-16 та М-8В₂С, що дозволяє переходити від однієї марки на іншу без спеціальної промивки масляної системи.

Відповідно до програми стендові випробування двигуна зі встановленими вихлопними колекторами проводяться на модернізованому стенді, 10-ти годинними «холодними» і «гарячими» етапами на режимах зовнішньої характеристики $n = 2000, 1800$ і 1400 хв⁻¹. На кожному етапі після пуску повітря

двигун прогрівається протягом 30 хвилин до температури води і мастила на виході не менш 55°C на режимах приведених в табл. 2.

Таблиця 1 – Фізико-механічні показники моторних масел

Найменування показників	Моторні масла		
	Галол М-4042 ТД	М-16 ІХП-3	МТ-16П
1	2	3	4
Кінематична в'язкість при 100°C, мм ² /с	15,5-16,5	15,5-16,5	15,5-16,5
Індекс в'язкості, не менше	95	90	80
Зональна сульфатна %, не більше	1,25	1,25	0,6-1,0
Масова доля механічних домішок %, не більше	0,013	0,013	0,015
Масова доля води %, не більше	сліди	сліди	сліди
Лужне число мг КОН/г, не менше	4,5	4,0	4,0
Температура спалаху у відкритому тиглі °С	225	225	210
Температура застигання °С, не вище	25	-25	-25
Корозійність на пластинах зі свинцю г/м ³	відс	9,0	5,0
Термоокислювальна стабільність (250°C), хв	100	100	-
Миючі властивості ПЗВ бали, не більше	0,5	0,5	1,0
Ступінь чистоти мг на 100 г масла, не більше	300	320	600
Колір масла на калориметрі ЦНТ з разб. 15:85 од. ЦНТ, не більше	5,0	6,0	7,0
Миючий потенціал, не менше	80	80	-
Масова доля активних елементів %, не менше	0,6	0,6	-

Таблиця 2 – Фактичні параметри отримані при випробуванні двигуна

Етап	n ₂ , хв ⁻¹	N _с , к.с.	G _т , кг/год	g _в , г/елсч	G _в , кг/с	t _R , °С лів/прав	P _{г.л.м.} , кг/см ²	P _{карт.} , мм.вод ст.	g _м , г/елсч
35	2000	719*	144	200,2*	1,130	604/610	9,2	+60	-
35	1800	706	129,6	183,6	0,964	610/608	9,4	+50	4,2
35	1400	600	105	175	0,688	613/615	10,6	+20	-

* – вказані величини параметрів після приведення до стандартних умов дорівнювали Me₀ = 764 к.с., g_{с0} = 189 г/елсч

У процесі випробувань контроль за роботою двигуна здійснюється по зміні параметрів двигуна, фізико-хімічних показників і вмісту продуктів зносу

в поетапних пробах мастила. Перелік вимірюваних і контрольованих параметрів, величини цих параметрів, періодичність їх вимірів і запису в протоколі іспитів дані в табл. 3 - 5 програми випробувань.

Знос двигуна в процесі випробувань оцінюється по зміні концентрації заліза, хрому, міді, свинцю й алюмінію в поетапних пробах мастила, а також вмістом цих елементів у відкладеннях з ротора МЦФ, що перевіряються через кожні 50 годин роботи двигуна. За критерій оцінки зносу прийнято питоме надходження продуктів зносу в мастило (мг/елсч), що чисельно дорівнює сумарному накопиченню продуктів зносу в мастилi підрахованому з урахуванням чаду і доливу свіжого мастила для кожного елемента за час випробувань, віднесеному до ефективної потужності двигуна. Оцінка зносу проводиться шляхом зіставлення отриманих даних з аналогічними результатами випробувань мастила Галол М-4042ТД на двигунах 5ТДФ і 6ТД.

На першому й останньому етапах проводяться контрольні випробування, під час яких знімаються зовнішня і навантажувальна характеристики, перевіряється робота двигуна на мінімально стійких і максимальних частотах обертання колінчастого валу програми випробувань. Оцінка результатів іспитів проводиться по зміні фактичних і приведених параметрів двигуна. На номінальному режимі ефективна потужність двигуна і питома ефективна витрата палива приводяться до нормальних атмосферних умов згідно ТУ ОС-11-6 ПМР з урахуванням поправок на температуру й атмосферний тиск повітря, відносну вологість повітря, щільність і температуру палива, відмінних від нормальних умов. Крім того, вносяться поправки на опір повітря перед нагнітачем і на протитиск у вихлопних колекторах, що розраховуються по ОСТ У 3-1509-81.

Після закінчення іспитів двигун В-46-6 розбирається і проводиться оцінка його технічного стану. У відповідності з вимогами технічних умов на капітальний ремонт дизелів АНТ виконуються мікрометричні обмірювання робочих поверхонь найбільш навантажених деталей циліндро-поршневої групи відповідно до карт обмірювань, а також, оцінка зносу цих деталей і їхнього стану по золо-, лако- і чадовідкладенням.

Двигун вважається таким, що витримав випробування, за умови, якщо:

У процесі випробувань параметри двигуна - потужність, момент обертання, витрата палива, мастила, температура води і мастила та тиск мастила знаходяться в припустимих межах вимог технічних умов.

За час випробувань двигун не мав дефектів, що вимагали заміни окремих агрегатів чи деталей, пов'язаних із застосуванням мастила Галол М-4042 ТД.

За час випробувань зниження потужності на номінальному режимі не перевищує 5 %.

Основні деталі циліндро-поршневої групи по величині зносу робочих поверхонь, золо-, лако- і чадовідкладенням знаходяться в задовільному стані і придатні до подальшої роботи.

Зміна фізико-хімічних властивостей мастила знаходиться в межах, що забезпечують його роботу протягом гарантійного терміну без заміни.

При контрольних випробуваннях на стенді КП ХКБД параметри двигуна

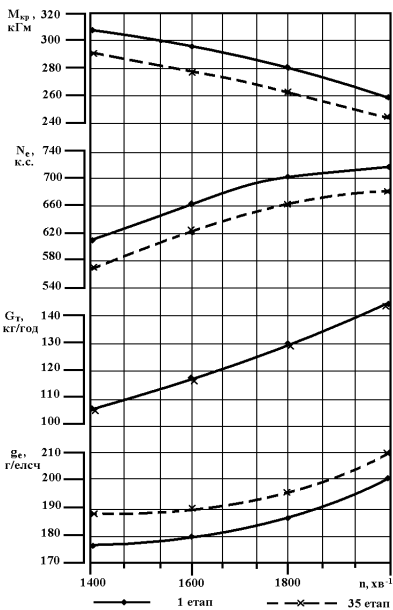
відповідали паспортним даним, одержаним при здавальних випробуваннях. Результати цих випробувань представлені в табл. 2, де надані фактичні значення параметрів.

Тривалі стендові випробування мастила Галол М-4042 ТД у двигуні В-46-6 проводилися в період з 12.11.2002 р. по 14.03.2003 р. у повній відповідності з програмою випробувань № 171/14. У ході тривалих випробувань зауважень по роботі двигуна, пов'язаних із застосуванням мастила не було. На початку випробувань спостерігалось розрідження мастила паливом. Після випробувань двигун знаходився в працездатному стані.

У ході випробувань параметри двигуна змінювалися незначно. Отримані відхилення потужності на етапах роботи двигуна стосовно першого етапу обумовлені, в основному, погіршенням паливної економічності і зміною температури і тиску навколишнього середовища.

За результатами контрольних випробувань двигуна на 1 і 35 етапах зміна за час випробувань приведених значень потужності і питомої витрати палива на номінальному режимі склала $\Delta Ne_0 = -3,9 \%$ і $\Delta g_{eo} = +3,7 \%$, що знаходиться в межах вимог технічних умов ТУ ОС-34Р-2.

Інші контрольовані параметри двигуна - витрата мастила на чад, тиск мастила в головній магістралі й у розподільних валах, тиск газів у картері, тиск надування, температура вихлопних газів – за час випробувань змінювалися незначно, і до кінця випробувань знаходилися в припустимих межах вимог технічних умов. У табл. 3-5 представлені фактичні параметри двигуна на режимах зовнішньої характеристики при роботі на 1, 10, 20, 30 і 35 етапах. На рисунку для порівняння показані зовнішні характеристики двигуна на 1 і 35 етапах його роботи. Система охолодження стенда була заправлена охолоджувальною рідиною з антикорозійними присадками, виготовленої відповідно до вимог 4591 ПМ-1. Випробування проводилися без заміни мастила. Після кожного етапу проводився відбір проб мастила для аналізу з доливанням свіжого мастила до постійного рівня маслобаку. Результати контрольних аналізів свідчать про те, що в процесі іспитів вода в мастило не потрапляла, кінематична в'язкість мастила при 100 °С змінювалася в межах 12,7...13,5 мм²/с. Зниження в'язкості і температури спалаху мастила на перших етапах роботи двигуна свідчить про попадання в мастило дизельного палива. Після усунення течії палива розрідження мастила практично не спостерігалось, показники мастила стабілізувалися і протягом подальших випробувань в'язкість і температура спалаху мастила склали 13,13...12,28 мм²/с і 166...150 °С відповідно. Показники, що характеризують окислювання мастила Галол М-4042 ТД, у процесі іспитів змінювалися так: лужне число 4,5...3,49 мгкон/м, кислотне число 0...0,49 мгкон/м. Ці значення знаходяться в межах, визначених для мастила М-16 ІХП-3 при аналогічних випробуваннях двигунів 5ТДФ і 6ТД. Забруднення мастила, оцінюване показниками «вміст нерозчинних добавок у бензині» і «диспергуюча здатність», також знаходилося на рівні, що спостерігається для мастила М-16 ІХП-3. Максимальні значення цих показників до кінця випробувань склали 1,2% і 4 бали відповідно.



Зовнішні характеристики двигуна В-46-6 №У03 АТ-5645 на початку і на кінці випробувань ($t_0 = 6...8\text{ }^\circ\text{C}$; $t_r = 10...12\text{ }^\circ\text{C}$; $\gamma_r = 0,82\text{ г/см}^3$).

Сумарне накопичення продуктів зносу, віднесене до ефективної потужності двигуна, що проходив випробування на мастилі Галол М-4042ТД протягом 350 годин, не перевищує значень, після аналогічних випробувань двигунів 5ТДФ і 6ТД на цьому ж мастилі і складає для продуктів зносу, що містять залізо, хром і алюміній 76×10^{-3} , $7,1 \times 10^{-3}$, 30×10^{-3} мг/елсч відповідно. При стендових іспитах серійного двигуна ЯМЗ-236 питомий ваговий знос значно перевершує приведені значення для двигуна В-46-6 і складає 410×10^{-3} і 100×10^{-3} мг/елсч для заліза й алюмінію.

При розбиранні двигуна, огляді стану деталей, вузлів і агрегатів встановлено наступне:

1. Поршні в зборі знаходяться в задовільному технічному стані. Поверхні «спідниці», кільцевих перемичок поршнів лівих і правих груп чисті, без лако-, чадовідкладень. Поверхня денця всіх поршнів з боку камери згоряння зольних відкладень практично не містить. На денці і голівці окремих поршнів спостерігаються вуглекислі відкладення плямистої форми паливного походження. На робочих поверхнях усіх поршнів натирів, рисок чи задирирів не має і відсутні лакові відкладення. Канавки кілець чисті. Знос поршневих кілець за 350 годин роботи на мастилі Галол М-4042 ТД незначний. Зазори в замку після іспитів знаходяться в межах 1,0...1,15 мм для поршнів лівої групи і 0,95...1,25мм – для поршнів правої групи, що знаходиться в межах вимог тех-

Результати спектрального аналізу проб мастила і відкладень з ротора МЦФ на вміст продуктів зносу представлені в табл.6. Видно, що в поетапних пробах мастила продукти зносу, що містять елементи залізо, хром, мідь, алюміній і свинець, знаходилися в невеликих кількостях – на рівні концентрацій, що спостерігаються при нормальній роботі 5ТДФ і 6ТД.

За результатами аналізу відкладень видно, що в ході випробувань спостерігалось збільшення маси відкладень у роторі за рахунок росту їх органічної частини, однак процентний вміст продуктів зносу знаходився приблизно на одному рівні, що свідчить про рівномірний характер зносу. Це підтверджується даними сумарного накопичення продуктів зносу в мастилі, підрахованими з урахуванням чаду, доливання свіжого мастила, накопичення продуктів зносу у відкладеннях з ротора МЦФ. Криві накопичення по всіх елементах мають лінійний характер, тобто швидкість зносу постійна.

нічної документації для складання двигуна після ремонту. Площа прилягання поршневих кілець до дзеркала циліндра складає більш 85 %. Поршні в зборі придатні для подальшої роботи.

2. Гільзи циліндрів (у запресованому стані) знаходяться в задовільному стані, на дзеркальній робочій поверхні натирів, рисок чи інших дефектів не виявлено. У першому і другому поясах у двох взаємно перпендикулярних площинах овальність дзеркала незначна і знаходиться в межах 0,01...0,06 мм для гільз лівої і правої груп, що знаходиться в припустимих межах вимог технічної документації при складанні двигуна після ремонту. Гільзи всіх циліндрів придатні для подальшої роботи.

3. Поршневі пальці і втулки верхньої голівки шатунів знаходяться в задовільному стані. На робочих поверхнях видно сліди нормального приробітку, знос робочих поверхонь незначний, на поверхнях втулок ВГШ збереглося припрацьовочне свинцьоване покриття.

Таблиця 3 – Параметри двигуна В-46-6 № У03 АТ-5645 при $n = 2000$ об/хв

№	Найменування параметрів	Позначення	Розмірність	Етапи роботи				
				1	10	20	30	35
1	Крутячий момент	$M_{кр}$	кг м	257,5	251	245	243	246
2	Потужність	N_e	к.с.	719	700	684	676	687
3	Годинна витрата палива	G_T	кг/год	144	143	142	142	144
4	Питома витрата палива	g_e	г/елсч	200,3	204,3	207,6	210,0	209,6
5	Тиск повітря після нагнітача	P_K	кгс/см ²	1,803	1,84	1,785	1,82	1,79
6	Витрата повітря через двигун	G_B	кг/с	1,13	1,123	1,094	1,099	1,09
7	Сум. коеф. надлишку повітря	$\phi\alpha$	-	1,95	1,95	1,91	1,92	1,88
8	Температура відправ. газів	$t_{г\text{лів}}$	°С	604	604	635	624	633
		$t_{г\text{прав}}$	°С	610	604	632	632	634
9	Температура повітря на вході	$t_{вс}$	°С	6	4	3	2	4
10	Атмосферний тиск	B_o	мм.рт.ст	738	754	740	741	749
11	Відносна вологість повітря	ϕ	%	70	75	72	80	75
12	Щільність палива	ρ_T	кг/см ³	0,833	0,820	0,818	0,820	0,817
13	Тиск газів в картері	$P_{карт.}$	мм.в.ст	+60	+50	+50	+60	+50
14	Розрідж. пов. перед нагнітач.	$H_{вс}$	мм.в.ст	-485	-480	-450	-465	-460
15	Температура води та мастила на виході з двигуна	$t_{вих}$	°С	104	80	90	88	84
		$t_{Мвих}$	°С	110	985	101	80	90
16	Темп. пал. на вході в дв.	$t_{г\text{вх.}}$	°С	11	12	12	8	8
17	Тиск мастила в головній маг	$P_{г\text{л.м}}$	кг/см ²	9,2	9,4	9,7	9,8	9,4
18	Тиск мастила в розподільчих валах	$P_{г\text{л.м.лів}}$	кг/см ²	1,05	0,8	1,0	1,0	0,95
		$P_{г\text{л.мпр}}$	кг/см ²	1,1	0,9	1,0	1,1	1,0
19	Прокачка води через двигун	$G_{води}$	т/ч	26	23	24,5	25	25

Таблиця 4 – Параметри двигуна В-46-6 № У03 АТ-5645 при $n = 1800$ об/хв

№	Найменування параметрів	По-значення	Розмірність	Етапи роботи				
				1	10	20	30	35
1	Крутячий момент	$M_{кр}$	кгм	281	270	263	259	264
2	Потужність	N_e	к.с.	706	678,5	660	650	663,5
3	Годинна витрата палива	G_T	кг/год	129,6	130,4	130	130	131
4	Питома витрата палива	g_c	г/елсч	183,6	191,5	197	200	197,4
5	Тиск повітря після нагнітача	P_k	кгс/см ²	1,62	1,67	1,66	1,62	1,64
6	Витрата повітря через двигун	G_v	кг/с	0,964	0,988	0,971	0,941	0,955
7	Сум. коеф. надлишку повітря	$\phi\alpha$	-	1,85	1,88	1,85	1,80	1,81
8	Температура відправ. газів	$t_{г\text{лів}}$	°С	610	602	620	627	636
		$t_{г\text{прав}}$	°С	605	606	627	632	634
9	Температура повітря на вході	$t^{вс}$	°С	12	13	12	10	9
10	Атмосферний тиск	B^o	мм.рт.ст	738	754	740	741	749
11	Відносна вологість повітря	ϕ	%	70	75	72	80	75
12	Щільність палива	ρ_T	кг/см ³	0,833	0,820	0,818	0,820	0,817
13	Тиск газів в картері	$P_{карт}$	мм.в.ст	+60	+50	+60	+50	+50
14	Розрідж.пов.перед нагнітачем	$H_{вс}$	мм.в.ст	-355	-360	-345	-325	-340
15	Температура води та мастила на виході з двигуна	$t_{В\text{вих}}$	°С	98	88	94	92	94
		$t_{М\text{вих}}$	°С	103	91	94	85	90
16	Темп. пал. на вході в дв.	$t_{Т\text{вх}}$	°С	12	13	12	10	9
17	Тиск мастила в гол. магістралі	$P_{г\text{лм}}$	кг/см ²	9,4	10,2	9,5	10,2	9,9
18	Тиск мастила в розподільчих валах	$P_{г\text{лів}}$	кг/см ²	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
		$P_{г\text{л.пр}}$	кг/см ²	1,1	1,1	1,0	1,0	1,0
19	Прокачка води через двигун	$G_{води}$	т/ч	4,2	4,7	4,5	4,6	4,5

4. Підшипники розподільних валів знаходяться в задовільному стані. Робочі поверхні підшипників зауважень не мають і придатні до подальшої роботи.

5. Вкладиші корінних підшипників колінчастого вала знаходяться в задовільному стані, на робочих поверхнях вкладишів збереглося свинцювате покриття, за винятком вкладиша четвертої опори, де виявлено натир до свинцебронзи площею $\approx 1 \text{ см}^2$. Вкладиші придатні до подальшої роботи.

6. Корпусні деталі, агрегати (нижні картери, блок, розподільні вали, колінчастий вал і ін.) після випробувань були чисті, мазеподібних відкладень не мали.

7. Агрегати – масляний насос, масляний відцентровий фільтр, нагнітач, паливний насос у процесі тривалої роботи на мастилі Галол М-4042 ТД забезпечили параметри в межах вимог технічних умов, після випробувань знаходяться в задовільному технічному стані і придатні до подальшої роботи.

Результати оцінки технічного стану двигуна В-46-6 свідчать про те, що

він має достатній запас експлуатаційних властивостей, що забезпечують працездатність двигуна і надійність його деталей і складальних одиниць протягом гарантійного наробітку, що є підтвердженням правильності апостеріорного діагностування за логістичною схемою.

Таблиця 5 – Параметри двигуна В-46-6 № У03 АТ-5645 при $n = 1400$ об/хв

№	Найменування параметрів	Позначення	Розмірність	Етапи роботи				
				1	10	20	30	35
1	Крутячий момент	$M_{кр}$	кгм	307	298	288	284	286,5
2	Потужність	N_e	к.с.	600	582	563	555	560
3	Годинна витрата палива	G_T	кг/год	105	105,3	103	104	106
4	Питома витрата палива	g_e	г/елсч	175	180,9	182,9	187,4	189,3
5	Тиск повітря після нагнітача	P_k	кгс/см ²	1,403	1,42	1,40	1,39	1,40
6	Витрата повітря через двигун	G_v	кг/с	0,688	0,701	0,682	0,695	0,677
7	Сум. коеф. надлишку повітря	$\phi\alpha$	-	1,63	1,65	1,64	1,66	1,58
8	Температура відпрацьованих газів	$t_{г\text{лів}}$	°С	613	601	630	636	655
		$t_{г\text{прав}}$	°С	645	605	645	645	658
9	Температура повітря на вході	$t_{вс}$	°С	8	6	3	6	7
10	Атмосферний тиск	V_o	мм.рт.ст	738	754	740	741	749
11	Відносна вологість повітря	ϕ	%	70	75	72	80	75
12	Щільність палива	ρ_T	кг/см ³	0,833	0,820	0,818	0,820	0,817
13	Тиск газів в картері	$P_{карт}$	мм.в.ст.	+20	+20	+30	+20	+20
14	Розрідж. пов. перед нагніт.	$H_{вс}$	мм.в.ст.	-185	-190	-180	-180	-190
15	Температура води та мастила на виході з двигуна	$t_{в\text{вих}}$	°С	104	78	90	92	78
		$t_{м\text{вих}}$	°С	90	82	84	85	80
16	Темпер. пал. на вході в дв.	$t_{Твх}$	°С	13	12	14	14	10
17	Тиск мастила в гол. магіст.	$P_{г\text{лм}}$	кг/см ²	10,6	10,8	10,1	10,5	10,9
18	Тиск мастила в розподільчих валах	$P_{г\text{лмлв}}$	кг/см ²	1,1	1,0	0,9	1,0	1,0
		$P_{г\text{лмпр}}$	кг/см ²	1,1	1,1	0,9	1,0	1,05
19	Прокачка води через двигун	$G_{води}$	т/ч	4,2	4,7	4,5	4,6	4,5

Висновки стендових випробувань:

1. Моторне мастило Галол М-4042 ТД забезпечило працездатність двигуна В-46-6 в обсязі гарантійного терміну 350 годин без зауважень. Після випробувань двигун знаходиться в працездатному стані.

2. За час випробувань потужність двигуна на номінальному режимі зменшилася на 3,9%, а питома витрата палива збільшилася на 3,7%, що знаходиться в припустимих межах вимог технічних умов ТУ ОС-34Р-2. Інші контрольовані параметри двигуна – витрата мастила на чад, тиск мастила в головній магістралі, температури води й мастила, тиску в картерах і ін. - у процесі випробувань знаходилися в припустимих межах.

Таблиця 6 – Вміст продуктів зносу в мастилi та відкладеннях з МЦФ (В-46-6)

Етапи	Вміст продуктів зносу в мастилi, г/т					Вміст продуктів зносу у відкладеннях з МЦФ, %						
	Fe	Cr	Cu	Pb	Al	Загальна вага відкладень, г	% неорганічної частини	Fe	Cr	Cu	Pb	Al
1	13,5	1,1	8,2	1,73	3,5	-	-	-	-	-	-	-
5	14,6	1,33	12,7	2,36	4,8	-	-	-	-	-	-	-
7	16,2	1,67	12,0	2,48	6,5	190,0	30,0	2,5	0,2	1,0	0,5	0,8
8	11,0	1,03	8,9	3,64	3,3	-	-	-	-	-	-	-
9	21,7	1,43	10,6	2,8	6,3	-	-	-	-	-	-	-
10	22,4	1,49	15,2	2,68	5,3	-	-	-	-	-	-	-
12	7,7	0,85	6,5	1,77	2,9	-	-	-	-	-	-	-
14	10,7	1,11	5,7	2,44	3,4	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	250,0	33,2	2,2	0,14	1,22	0,58	0,63
17	17,2	1,58	7,7	1,86	6,8	-	-	-	-	-	-	-
19	11,0	1,13	5,6	1,94	4,2	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	339,0	25,1	0,64	0,05	0,34	0,11	0,17
22	11,0	0,93	3,8	1,85	4,5	-	-	-	-	-	-	-
24	16,1	1,25	9,7	2,1	4,4	-	-	-	-	-	-	-
26	-	-	-	-	-	356,5	15,4	0,34	0,03	0,195	0,06	0,1
28	14,8	1,02	6,7	1,58	5,4	-	-	-	-	-	-	-
30	17,3	1,17	5,3	1,28	3,8	293,0	25,1	0,25	0,02 7	0,11	0,04	0,075
34	9,2	0,78	3,4	1,4	2,3	-	-	-	-	-	-	-
35	13,0	0,9	4,6	1,32	3,3	260,0	61,8	1,08	0,07 5	0,44	0,15	0,26

3. Двигун після випробувань знаходився в задовільному технічному стані, що свідчить про високий рівень експлуатаційних властивостей мастила Галол М-4042 ТД. Знос найбільш навантажених деталей циліндро-поршневої групи незначний (зазори в замку поршневих кілець знаходяться в межах 0,95...1,25 мм, площа прилягання кілець до дзеркала циліндра складає більш 85%, овальність дзеркала циліндрів 0,01...0,06 мм). Геометричні розміри робочих поверхонь циліндра, поршнів, пальців і втулок ВГШ, вкладишів корінних підшипників після тривалих випробувань збереглися в межах вимог технічних умов на складання двигуна В-46-6 після капітального ремонту. Деталі, складальні одиниці й агрегати зауважень не мають і придатні до подальшої роботи. Гумово - технічні вироби - у працездатному стані.

4. Золо-, лако- і чадовідкладення на деталях циліндро-поршневої групи практично відсутні. Поршні лівої і правої групи чисті. Рухливість поршневих кілець збереглася. Корпусні деталі, колінчатий вал, розподільчі вали, шатуни

чисті, без мазеподібних відкладень.

5. Фізико-хімічні показники мастила Галол М-4042 ТД залишалися в межах, що забезпечили проведення випробувань двигуна В-46-6 в обсязі гарантійного наробітку без заміни мастила.

6. Результати описаних стендових випробувань можуть бути поширені на весь спектр дизелів АНТ.

Список літератури: 1. Двигатели внутреннего сгорания: Номенклатурный справочник. Ч.1. – М.: ЦНИИТЗИтяжмаш, 1979. – 88 с. 2. Двигатели внутреннего сгорания: Номенклатурный справочник. Ч.1. – М.: ЦНИИТЗИтяжмаш, 1996. – 81 с. 3. *Костин А.К.* Способ оценки ресурса дизеля до первой переборки // Двигателестроение, 1981. – № 11. – С. 47-48. 4. *Іващенко І.І., Приймаков О.Г., Шунайлов А.Г.* Розробка інтегральних показників діагностування технічного стану дизельних двигунів // Двигатели внутреннего сгорания. – Харків: НТУ «ХПІ». – № 1-2. – 2003. – С. 57-61. 5. *Іващенко І.І., Приймаков О.Г.* Прогнозування залишкового ресурсу та надійності дизелів авіаційної наземної техніки // Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. – 2003. – № 4. – С. 11-17. 6. *Приймаков О.Г., Іващенко І.І.* Математичне моделювання процесу вібродіагностики // Вестник науки и техники. – 2002. – № 4. – С. 11-17. 7. *Іващенко І.І., Приймаков О.Г.* Діагностування працездатності опор ковзання для авіаційної наземної техніки. // Вестник науки и техники. – 2003. – № 1. – С. 9-14. 8. *Іващенко І.І.* Розробка методики визначення технічного стану дизельних двигунів комплексним вібраційним методом // Матеріали V Міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2003». – № 3. – С. 34.37-34.40. 9. ТУ ОС - 32 Р - 2 «Періодичні випробування». – Харків: вид. ХКБД, 1997. – 254 с.

Надійшла до редакції 12.04.2006

УДК 621.165

В.Н.ПУСТОВАЛОВ, канд.техн.наук;

В.В.НАВРОЦКИЙ, канд.техн.наук; **Т.И.МИХАЙЛЕНКО**, НТУ «ХПІ»

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Наведено наближене рішення нестационарної задачі теплопровідності для циліндра кінцевої довжини. Метод рішення пов'язаний з переходом в осесиметричному диференційному рівнянні до нової змінної у вигляді середньоінтегрального значення температури. Порівняльні розрахунки точного та наближеного рішень свідчать про достатню ефективність і зручність методу для практичних розрахунків.

The approximate solution of non-steady thermal conductivity for the final dimension cylinder is resulted. The method of solution is related to transition in the axis - symmetric differential solution to new variable as the overall integral value of temperature. Comparative computations of exact and approximate decisions testify to sufficient efficiency and convenience of method for practical computations.

Температурное поле цилиндра конечных размеров может быть определено как произведение относительных температур неограниченной пластины толщиной $2l$ (l – полутолщина) и неограниченного цилиндра радиуса R при одинаковой начальной температуре t_0 , одинаковом коэффициенте теплоотда-

чи на поверхностях α , и одинаковой температуре окружающей среды t_f .

Для осесимметричной задачи

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (1)$$

решение отыскиваем в виде

$$\frac{t(x, r, \tau) - t_f}{t_0 - t_f} = \frac{t(x, \tau) - t_f}{t_0 - t_f} \cdot \frac{t(r, \tau)}{t_0 - t_f}, \quad (2)$$

где x – координата по толщине пластины, r – текущий радиус цилиндра, t_f – температура среды, в дальнейшем принимаем равной нулю [1].

Для неограниченной пластины и неограниченного цилиндра решения, если ограничиться первыми членами рядов, имеют вид

$$\frac{t_x - t_f}{t_0 - t_f} = \frac{4 \sin \mu_1}{2\mu_1 + \sin 2\mu_1} \cdot \cos\left(\frac{\mu_1}{l} x\right) e^{-a\left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2 \tau}; \quad \text{ctg} \mu_1 = \frac{\mu_1}{\text{Bi}_1}; \quad \text{Bi}_1 = \frac{\alpha l}{\lambda}; \quad (3)$$

$$\frac{t_r - t_f}{t_0 - t_f} = \frac{2J_1(\mu_2)}{\mu_2 [J_0^2(\mu_2) - J_1^2(\mu_2)]} \cdot J_0\left(\frac{\mu_2}{R} r\right) e^{-a\left(\frac{\mu_2}{R}\right)^2 \tau}; \quad \frac{J_1(\mu_2)}{J_0(\mu_2)} = \frac{\mu_2}{\text{Bi}_2}; \quad \text{Bi}_2 = \frac{\alpha R}{\lambda}, \quad (4)$$

где μ_1 и μ_2 – первые корни трансцендентных уравнений $\text{ctg} \mu_1 = \frac{\mu_1}{\text{Bi}_1}$,

$\frac{J_1(\mu_2)}{J_0(\mu_2)} = \frac{\mu_2}{\text{Bi}_2}$, $J_1(\mu_2)$, $J_0(\mu_2)$ – бесселевы функции первого и нулевого порядка.

Задача существенно упрощается, если рассмотреть нестационарные среднеинтегральные по поперечным сечениям цилиндра температуры

$$\theta = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \tau dr. \quad (5)$$

Чтобы получить дифференциальное уравнение для новой переменной уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (6)$$

и проинтегрируем в пределах от 0 до R , предварительно умножив на $2/R$. Почленное интегрирование дает:

$$\frac{2}{aR^2} \int_0^R r \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} dr = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad (7)$$

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R r \frac{\partial \theta}{\partial r} dr = \frac{2}{R} \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (8)$$

$$\frac{2}{R^2} \int_0^R r \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} dr = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (9)$$

Производную в правой части равенства (8) исключим, подставив граничные условия 3^{-го} рода

$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} (t_R - t_f). \quad (10)$$

Если допустить, что температура боковой поверхности цилиндра $t(R, z, \tau)$ равна среднеинтегральной температуре $\theta(z, \tau)$ [2], то

$$\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{\alpha}{\lambda} (\theta - t_f), \quad (11)$$

и уравнение (6) принимает вид

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{2\alpha}{\lambda R} (\theta - t_f). \quad (12)$$

Решение уравнения (12) при граничных условиях (симметричных относительно оси z)

$$\tau = 0 \quad \theta(0) = \theta_0, \quad z = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad z = l \quad \alpha \theta = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (13)$$

находим методом разделения переменных

$$T_z = \frac{\theta - t_f}{\theta_0 - t_f} = \frac{4 \sin \mu_1}{2\mu_1 + \sin 2\mu_1} \cdot \cos\left(\frac{\mu_1}{l} z\right) \exp\left[-a \left(m^2 + \left(\frac{\mu_1}{l}\right)^2\right) \tau\right], \quad (14)$$

где $m^2 = \frac{2\alpha}{\lambda R}$, $\operatorname{ctg} \mu_1 = \frac{\mu_1}{Bi}$, $Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$.

Искомое решение

$$\theta = T_z (\theta_0 - t_f) + t_f. \quad (15)$$

Сравнение приближенных и точных решений проведено для двух вариантов исходных данных, приведенных в табл. 1.

Результаты расчетов представлены в табл. 2. Приняты следующие условные обозначения: T – параметр (14), используемый в уравнении (15), θ – искомое решение (15), t – точное решение (2), (3), (4), Δt – расхождение результатов, z – текущая координата.

Таблица 1 – Исходные данные для сравнительных расчетов

№ варианта	d	l	2·l	l/d	t ₀	t _f	λ	a·10 ⁵	α	τ
	мм	мм	мм	-	°C	°C	Вт/(м·К)	м ² /с	Вт/(м ² ·К)	мин
1	150	150	300	1,0	900	250	38	1,25	152	15
2	75	150	300	2,0	900	250	75	1,25	20	15

Сравнение точных и приближенных значений температуры свидетельствуют о приемлемой для инженерных расчетов точности приближенных решений. Примером инженерного использования предлагаемого метода расчета

может служить определение температурного удлинения цельнокованого ротора турбины с заменой дисков приведенными значениями коэффициентов теплоотдачи (см. [2], стр. 287).

Таблица 2 – Результаты сравнительных расчетов

z, мм	Вариант 1				Вариант 2			
	T	Θ , °C	t, °C	Δt , %	T	θ , °C	t, °C	Δt , %
0	0,254	415	417	0,48	0,844	799	798	0,13
75	0,238	405	406	0,26	0,840	796	795	0,13
150	0,193	375	377	0,53	0,823	785	787	0,25

Список литературы: 1. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С., Теплопередача. – М.: Энергия, 1965. – 424 с. 2. Шнез Я.И., Капинос В.М., Котляр И.В. Газовые турбины. Том 1. – Киев: Вища школа, 1974. – 295 с.

Поступила в редколлегию 11.07.2005

УДК 539.3

Э.А.СИМСОН, докт.техн.наук; **С.А.НАЗАРЕНКО**, канд.техн.наук;
А.В.БЕЛОЗЕРОВ; НТУ «ХПИ»

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ С ПОВОРОТНОЙ СИММЕТРИЕЙ ПРИ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

У статті пропонуються методи аналізу чутливості та оптимізації скінченоелементних моделей циклічносиметричних систем з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на високі розмірності векторів перемінних стану і проектування. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарата.

Complicated finite-element models of cyclic symmetry structure with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis and optimization methods are given in this article. The methods have guiding to orientate on high dimensions of state and design variables. Computation stages of constructions gradients functional derivation are investigated. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Задача расчета регулярных конструкций, и как частный случай систем с циклической (поворотной) симметрией (ЦСК), неоднократно привлекала внимание исследователей [1-4]. Это обусловлено с одной стороны широким распространением таких конструкций в машиностроении и механике, с другой - спецификой расчетов статических и динамических характеристик симметричных систем, которая позволяет перейти от общих методов анализа конструкций к специальным, значительно меньшей размерности, что требует развития оригинальных теорий и численных методов. Задача достаточно хо-

рошо разработана и апробирована для случая симметричного нагружения конструкций, когда порядок симметрии нагрузки и геометрической структуры совпадают. Однако практически не исследованы особенности условий оптимальности и соотношений анализа чувствительности для конечноэлементных моделей систем с циклической симметрией[5].

Анализ чувствительности ЦСК характерен тем, что полный набор варьируемых параметров проектирования \bar{u} определяется набором, описывающим переменные проектирования одной секции, а функциональные производные находятся для всей конструкции. Принципиальной особенностью систем с циклической симметрией является кратный резонанс. Анализ чувствительности систем с кратным спектром принципиально осложняется недифференцируемостью кратной собственной частоты в произвольной окрестности «подозреваемой на оптимальность» точки полного пространства варьируемых параметров (в смысле Фреше), но дифференцируемостью по направлению (в смысле Гато). Соответствующий математический аппарат разрабатывается на примере кратности 2. Очевидна возможность распространения основных результатов на случаи более высокой кратности.

Пусть \bar{y}_1, \bar{y}_2 – два нормированных, взаимно ортогональных собственных вектора, соответствующих кратному значению $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. При этом пространство решений исходной задачи содержит два произвольных параметра $\bar{y} = \gamma_1 \bar{y}_1 + \gamma_2 \bar{y}_2 = A(\bar{y}_1 \cos \varphi + \bar{y}_2 \sin \varphi)$, характеризующих норму собственного вектора (A) и его поворот (φ) в подпространстве собственных форм. В силу этого для определенности \bar{y}_1, \bar{y}_2 наряду с условиями нормировки и ортогональности

$$\bar{y}_j^T M \bar{y}_i = \delta_{ij}; \quad i, j=1,2 \quad (1)$$

необходимо зафиксировать «угловое» положение одной из форм

$$\bar{n}^T M \bar{y}_1 = 0. \quad (2)$$

Анализ возмущенного $(\bar{u} + \delta \bar{u})$ матричного уравнения $[K - \lambda M] \bar{y} = \bar{0}$ приводит к следующему уравнению «расщепления» кратного собственного значения

$$\delta \lambda_{1,2} = 0,5(\alpha_{11} + \alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11} - \alpha_{22})^2 + \alpha_{12}^2}); \quad (3)$$

$$\alpha_{ij} = \bar{y}_i^T (\delta K - \lambda \delta M) \bar{y}_j; \quad \delta K_{r,s} = \delta \bar{u}^T \bar{V}_u K_{r,s}, \quad \delta M_{r,s} = \delta \bar{u}^T \bar{V}_u M_{r,s}.$$

Принципиальным результатом является сохранение однозначной линейной связи между $\delta \bar{y}, \delta \lambda$ и $\delta \bar{u}$ в подпространстве \bar{u} кратного резонанса

$$\delta \lambda_1 = \delta \lambda_2 = \delta \lambda. \quad (4).$$

Последнее накладывает на вариацию конструктивных параметров дополнительные ограничения $\alpha_{11} = \alpha_{22}; \alpha_{12} = 0$.

Совместная разрешимость исходной и сопряженных задач $[K - \lambda M] \bar{y}_{1,2} = \frac{\partial J}{\partial \bar{y}_{1,2}}$ приводит к условиям $\bar{y}_i^T \frac{\partial J}{\partial \bar{y}_j} = 0$, физический смысл которых – независимость резонансного функционала от нормы A и угла φ . При

использовании функционалов, для которых эти условия не выполняются автоматически, условия (1), (2) вводятся в структуру соотношений анализа чувствительности.

Полные соотношения для градиента ∇J в подпространстве кратных форм образуются суммированием одностипных выражений $\bar{\nabla}_u J = -\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \bar{\psi}^T M \bar{y}$ и обладают фильтрующим свойством по отношению к общей части сопряженных решений: $\bar{\psi}_1 = \gamma_{11} \bar{y}_1 + \gamma_{12} \bar{y}_2 + \bar{\psi}_1^*$, $\bar{\psi}_2 = \gamma_{21} \bar{y}_1 + \gamma_{22} \bar{y}_2 + \bar{\psi}_2^*$.

Отклонения конструктивно-технологических параметров можно условно разделить на два вида: 1) при котором конструкция сохраняет свойства циклической симметрии (т.е. будучи повернутой относительно оси вращения на любой угол, кратный $360/N$, сохранит инвариантность своих геометрических и физических характеристик); 2) при котором нарушается свойство строгой циклической симметрии. Отклонениям могут способствовать и условия работы; окружная неоднородность статических деформаций. Отклонения реальных конструкций от строгой симметрии по вышеприведенным причинам чаще всего нестабильны, трудно уловимы и носят случайный характер. Отклонение от строгой симметрии у реальных конструкций может закладываться еще на этапе их проектирования и являться следствием удовлетворения тем или иным дополнительным требованиям, предъявленным к конкретной конструкции. Нарушения симметрии вызывают различные нецентральные отверстия в дисках, предназначенные, например, для транспортировки; постановка и снятие балансированных масс и т. п. Когда речь идет о технологических несовершенствах, разделяют регулярные и нерегулярные погрешности изготовления. Первые, возникающие, например, при литье колес в пресс-формы, изготовленные по идентичным вытеснителям, повторяются в каждом из циклов симметрии, нерегулярные - характеризуются нарушением симметрии. В этих случаях при анализе чувствительности собственных частот и вибрационных характеристик ЦСК, зависящих от собственных форм, существует принципиальная разница. В первом случае изменяются параметры повторяемого сектора ЦСК, соответствующие вариации K и M обладают квазициклической структурой, в силу чего выполняется условие (4) нерасщепления спектра и сохраняются соотношения для производных по Фреше. Второй случай характеризуется нарушением симметрии, расщеплением кратного спектра, «привязкой» форм в окружном направлении, нелинейными соотношениями для вариаций частот и форм колебаний (3) и эффектами перегрузки при вынужденных колебаниях.

С целью демонстрации предлагаемого подхода приведем примеры решенных задач. В качестве объекта исследования был выбран параболический отражатель спутниковой антенны диаметром 0,7 м. Отражатель представляет собой трехслойную оболочку с сотовым алюминиевым наполнителем и несущими слоями, изготовленными из стеклотекстолита. Отражатель жестко закреплен в центре по окружности радиусом 0,02 м. При исследовании использовались многослойные оболочечные конечные элементы (КЭ). Узловыми параметрами КЭ являются перемещения срединной поверхности оболочки, а также углы поворота.

Толщина несущих слоев изменяется линейно относительно радиуса. Технические характеристики стеклотекстолита следующие: модуль упругости – $3,1 \cdot 10^{10}$ Н/м², плотность – $1,8 \cdot 10^3$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$. Производные по проектным переменным (коэффициенты чувствительности) характеризуют направление и скорость изменения функционалов качества изделия при изменении этих переменных. Распределение полей коэффициентов чувствительностей собственных частот к нормальным перемещениям точек поверхности взаимодействующих конструктивных элементов приведено на рис. 1 и 2.

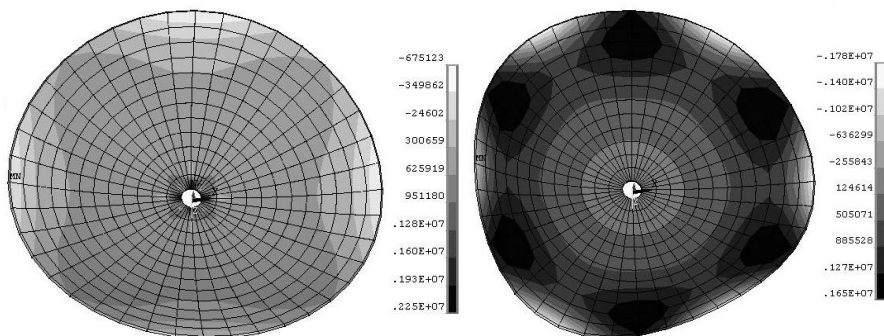


Рисунок 1 – Анализ чувствительности 3 и 5-ой собственных частот(кратных) параболического отражателя

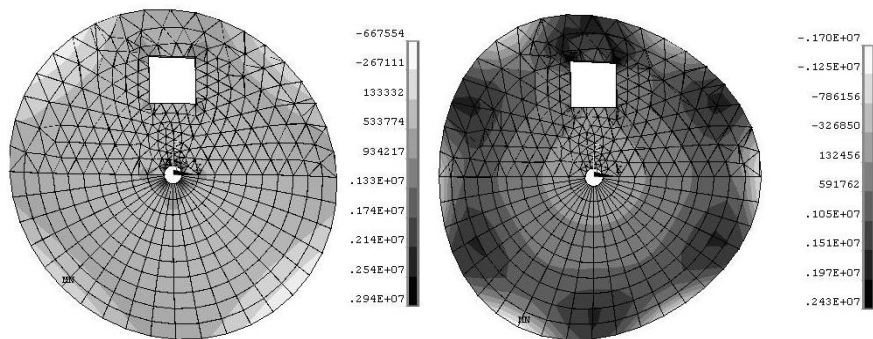


Рисунок 2 – Анализ чувствительности 3 и 5-ой собственных частот(некратных) параболического отражателя при изменении его формы

В работе предложены методы анализа чувствительности конечноэлементных моделей поворотносимметричных систем. Исследованы особенности вычисления градиентов кратных частот. Дальнейшим направлением исследований являются связанные проектно-технологические задачи ЦСК.

Список литературы: 1. *Бобылев Д.С.* Колебания циклически симметричных систем // Проблемы стрит. механики и прочн. летательных аппаратов. – М., Моск. авиац. ин-т. – 1990. – С. 4-7. 2. *Гуляр А.И.*,

Ильченко Е.Н., Шалыгин С.А. Численная оценка сходимости традиционного и полуаналитического вариантов МКЭ при расчете циклически симметричных тел // Сопроотивление матер. и теория сооруж. 1989. – С. 40-42. 3. Qiu Chunhang, Wu Gaofeng Coupling analysis of substructures with different symmetries // Comput. and struct. – 1988. – № 30, Т. 4. – P. 861-863. 4. Dickens John M., Pool Kirby V. Dynamic response analysis of cyclic symmetry structure to periodic time domain loading // AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 31st Struct., Struct. Dyn. and Mater. Conf., Long Beach, Calif., 1990: Techn. Pap. Pt.1. – Washington (D.C.). – 1990. – P. 436-443. 5. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., Любецкая В.Б. Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НГУ «ХПИ». – 2003. – № 8, Т. 3. – С. 77-82.

Поступила в редколлегию 25.04.2006

УДК 539.3

Н.В.СМЕТАНКИНА, канд.техн.наук, **Е.В.СВЕТ**,
А.Н.ШУПИКОВ, докт.техн.наук; ИПМаш НАН Украины

РАСЧЕТ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Пропонується метод розв'язання задачі стаціонарної термопружності багат шарових пластин неканонічної форми в плані, контур яких складений із прямих і дуг кіл. Температурні навантаження одержані у результаті розв'язання задачі теплопровідності багат шарових пластин. Досліджено температурні напруження у п'ятишаровій пластині.

A method for solution of a stationary termoelasticity problem of multilayer plates of non-canonical plan form which contour formed by straight lines and arches of circles is offered. Thermal loadings are obtained as result of solution of multilayer plate heat conduction problem. Thermal stresses in a five-layer plate are analyzed.

Введение. Широкое применение многослойных элементов конструкций в различных отраслях техники связано с необходимостью разработки методов их расчета при различных нагружениях, в том числе при тепловых воздействиях. Как показывает анализ литературных источников, наиболее исследованы однородные конструкции [1-5]. Задачи термоупругости многослойных пластин и оболочек чаще всего решаются для объектов канонической формы, а также, когда закон распределения температуры по толщине и поверхности конструкции задан, а не получен из решения задачи теплопроводности этих элементов конструкций [6-9].

В настоящей работе предлагается метод решения задачи термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане при воздействии температурных полей, которые определяются из решения задачи стационарной теплопроводности.

Основные соотношения. Рассматривается многослойная пластина, собранная из l слоев постоянной толщины и отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя. На коор-

динатной поверхности пластина занимает область G , ограниченную контуром L . На пластину действует система силовых и тепловых нагрузок.

Поведение пластины описывается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига [10, 11]. Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Перемещения точек пластины представляются в виде

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \Psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \Psi_x^i; \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \Psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \Psi_y^i; \\ w^i = w; \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j; \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i; \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ – перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных осей; $\Psi_x^i = \Psi_x^i(x, y)$, $\Psi_y^i = \Psi_y^i(x, y)$ – углы поворота нормального элемента в i -м слое вокруг осей Ox и Oy ; h_j – толщина j -го слоя. Деформации слоев $\epsilon_x^i, \epsilon_y^i, \gamma_{xy}^i, \gamma_{xz}^i, \gamma_{yz}^i$ определяются согласно формулам Коши [10]. Напряжения и деформации в i -м слое связаны законом Гука

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_x^i + \nu_i \epsilon_y^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i' T_i; \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\epsilon_y^i + \nu_i \epsilon_x^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i' T_i; \\ \tau_{xy}^i = G_i \gamma_{xy}^i; \quad \tau_{xz}^i = G_i \gamma_{xz}^i; \quad \tau_{yz}^i = G_i \gamma_{yz}^i; \quad i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

где $G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}$; E_i – модуль Юнга материала i -го слоя; ν_i – коэффициент Пуассона; α_i' – коэффициент линейного температурного расширения материала i -го слоя; T_i – изменение температуры по отношению к температуре ненапряженного состояния.

На основе вариационного принципа виртуальной работы получены уравнения равновесия многослойной пластины

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{Q}^t - \mathbf{Q}; \quad (x, y) \in G, \quad (3)$$

а также соответствующие граничные условия

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{U} = \mathbf{Q}^L. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{Q} – вектор силовых нагрузок, \mathbf{U} – вектор искомых функций перемещений,

$$\mathbf{U} = \{u, v, w, \Psi_x^i, \Psi_y^i\}^T; \quad \mathbf{Q}^t = \{C_{t,x}^i, C_{t,y}^i, 0, D_{t,x}^i, D_{t,y}^i\}^T; \quad \mathbf{Q}^L = \{C_t^i, 0, 0, D_t^i, 0\}^T; \\ C_t^i = \sum_{j=1}^i N_j^i; \quad D_t^i = h_i \sum_{j=1}^{i-1} N_j^{j+1} + M_j^i; \\ N_t^i = \frac{E_i \alpha_i'}{1-\nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz; \quad M_T^i = \frac{E_i \alpha_i'}{1-\nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz; \quad i = \overline{1, I}.$$

Элементы симметричной матрицы \mathbf{C} (3) приведены в работе [11], эле-

менты матрицы $\Gamma(4)$ – в работе [10].

Метод решения. Решение поставленной задачи термоупругости опирается на метод погружения, ранее разработанный для решения задач нестационарной динамики многослойных пластин [12]. Исходная многослойная пластина произвольной формы в плане погружается во вспомогательную охватывающую многослойную пластину с такой же композицией слоев. Форма охватывающей пластины выбирается таким образом, чтобы возможно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе в качестве вспомогательной принимается прямоугольная многослойная шарнирно опертая пластина. Условия нагружения вспомогательной пластины в области G совпадают с условиями нагружения исходной пластины.

Чтобы обеспечить выполнение действительных граничных условий (4), к вспомогательной пластине по следу контура L прилагаются дополнительные компенсирующие усилия и моменты $\mathbf{Q}^c = \{q_j^c(x, y)\}$, $(x, y) \in L$, $j = \overline{1, 2I+3}$. В уравнения термоупругого равновесия (3) функции компенсирующих нагрузок входят в виде интегральных соотношений:

$$p_j^c(x, y) = \int_0^{s^*} q_j^c(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (5)$$

где $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – двумерная δ -функция Дирака; $L: x_L = x(s), y_L = y(s), 0 \leq s \leq s^*$; s – текущая длина дуги; s^* – периметр пластины.

Граничные условия (4) с учетом (5) приводят к системе интегральных уравнений для определения интенсивностей компенсирующих нагрузок

$$\Gamma \mathbf{U}[\mathbf{Q}^c(x, y)] = \mathbf{Q}^L, \quad (x, y) \in L. \quad (6)$$

Метод решения системы (6) состоит в том, что функции перемещений \mathbf{U} , силовых \mathbf{Q} , температурных \mathbf{Q}^t и компенсирующих \mathbf{P}^c (5) нагрузок разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания вспомогательной прямоугольной пластины

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jmn} B_{jmn}(x, y); \quad q_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{jmn} B_{jmn}(x, y);$$

$$q_j^t(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{jmn}^t B_{jmn}(x, y); \quad p_j^c(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^c B_{jmn}(x, y); \quad (7)$$

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}; \quad B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B};$$

$$B_{3+i, mn} = B_{1mn}; \quad B_{3+I+i, mn} = B_{2mn}; \quad i = \overline{1, I}; \quad j = \overline{1, 2I+3},$$

A и B – геометрические размеры пластины в направлении координатных осей.

Одновременно, функции компенсирующих нагрузок и функции, входя-

щие в граничные условия (4), разлагаются в ряд вдоль следа контура L [12]

$$q_j^c(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s); \quad u_j(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} u_{j\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s); \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad (8)$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)]; \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)]; \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \int_0^{s^*} d\tilde{s}; \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

В результате разложений (7), (8) и дальнейших преобразований система интегральных уравнений (6) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих нагрузок $f_{j\alpha\mu}$, решение которой позволяет определить значения компенсирующих нагрузок. Окончательно, решение задачи (3), (4) можно представить в виде

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2I+3} \eta_{jk}^{mn} \left[q_{jmn} - q_{jmn}^t + \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} f_{j\alpha\mu} \theta_{j\alpha\mu}^{mn} \right] B_{jmn}; \quad j = \overline{1, 2I+3},$$

где η_{jk}^{mn} – коэффициенты обратной матрицы, полученной при разложении функций перемещений, входящих в уравнения равновесия (3), в ряды по функциям, удовлетворяющим условиям шарнирного опирания вспомогательной прямоугольной пластины;

$$\theta_{j\alpha\mu}^{mn} = \frac{4}{AB} \int_0^{s^*} d_{\alpha\mu}(s) B_{jmn}(x_L, y_L) ds; \quad j = \overline{1, 2I+3}.$$

Численные результаты. Работоспособность и эффективность разработанного метода проиллюстрирована на примере решения задачи термоупругости многослойной пластины, контур которой составлен из K отрезков прямых и сопряженных с ними K дуг окружностей ($K=4$). Участки контура s_{2k-1} , представляющие собой отрезки прямых, задаются следующими уравнениями:

$$x_L = x_{2k-1} + (S - S_{2(k-1)}) \cos \alpha_{2k-1}; \quad y_L = y_{2k-1} + (S - S_{2(k-1)}) \sin \alpha_{2k-1}; \quad k = \overline{1, K},$$

где точка с координатами (x_{2k-1}, y_{2k-1}) – начало $(2k-1)$ -го отрезка прямой.

Участки контура s_{2k} , представляющие собой дуги окружностей, задаются соотношениями:

$$x_L = x_{2k} + R_k \left[\sin \left(\frac{S - S_{2k-1}}{R_k} + \alpha_{2k-1} \right) - \sin \alpha_{2k-1} \right];$$

$$y_L = y_{2k} - R_k \left[\cos \left(\frac{S - S_{2k-1}}{R_k} + \alpha_{2k-1} \right) - \cos \alpha_{2k-1} \right]; \quad k = \overline{1, K},$$

где точка (x_{2k}, y_{2k}) – конец $(2k-1)$ -го отрезка прямой, α_{2k-1} – угол между $(2k-1)$ -м отрезком прямой на контуре и положительным направлением оси Ox , S – длина участка контура от начала отсчета [точка (x_1, y_1)] до текущей

точки (x, y) на данном участке контура; $S_k = \sum_{i=1}^k s_i$, $S_0 = 0$.

На рис. 1 приведена расчетная схема пластины, $l_1 = 74$ мм, $l_2 = 53$ мм, $l_3 = 77$ мм, $l_4 = 60$ мм, $R_i = 30$ мм, $i = \overline{1, 4}$. Слои пластины выполнены из материалов со следующими характеристиками: $E_i = 6,8 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_i = 0,22$, $\alpha_i' = 9 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $i = 1, 3, 5$; $E_i = 2,2 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_i = 0,38$, $\alpha_i' = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $i = 2, 4$; $h_1 = 5$ мм, $h_2 = 3$ мм, $h_3 = 19$ мм, $h_4 = 2$ мм, $h_5 = 12$ мм.

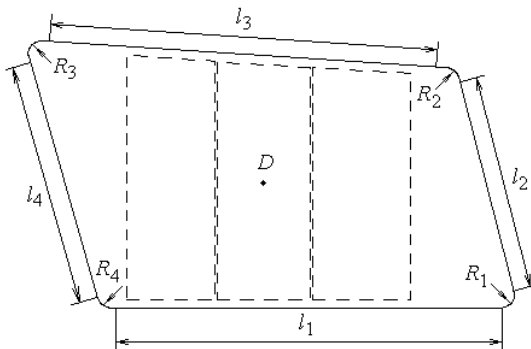


Рисунок 1 – Расчетная схема

Предполагается, что силовые нагрузки отсутствуют. Поле температурных нагрузок получается из решения задачи теплопроводности многослойных пластин [13] с учетом воздействия пленочного источника тепла. Боковая поверхность пластины считается идеально теплоизолированной. Задача теплопроводности решена с такими исходными данными: $k_i = 1,08$ Вт/(м·°C), $i = 1, 3, 5$; $k_i = 0,22$ Вт/(м·°C), $i = 2, 4$ (коэффициенты теплопроводности материала i -го слоя); $H_1 = 433$ Вт/(м²·°C), $H_2 = 20$ Вт/(м²·°C) (коэффициенты конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях пластины); $T_1 = -30^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$ (температура среды на границе с верхней и нижней поверхностями). Пленочный источник тепла мощностью $q = 6$ кВт/м² расположен между первым и вторым слоями пластины. Расположение источника показано на рис. 1 штриховой линией.

На рис. 2 представлено распределение температуры и главного напряжения σ_1^i ($i = \overline{1, 5}$) по толщине пластины в точке D (см. рис. 1), расположенной посередине области, занимаемой источником тепла. Также показана композиция слоев. На поверхности раздела первого и второго слоев пластины наблюдается резкое изменение температуры и напряжения, вызванное наличием источника тепла.

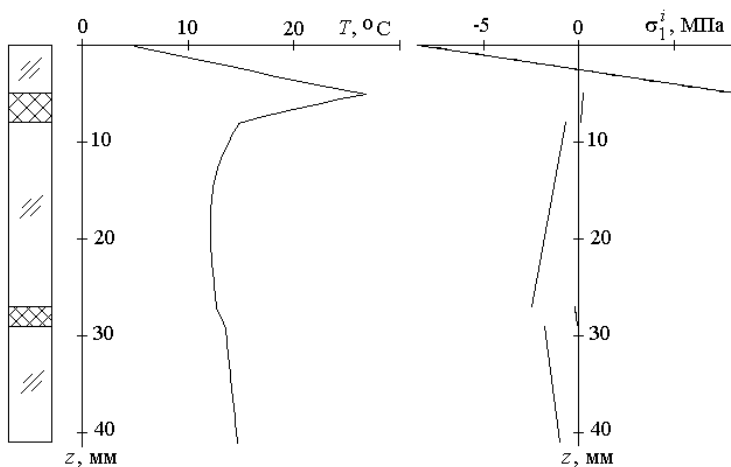


Рисунок 2 – Распределение температуры и напряжения по толщине пластины

Выводы. Разработан метод решения задач термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане, позволяющий представить решение задачи в аналитической форме. Предложенный подход может быть применен при проектировании систем обогрева многослойного остекления различных транспортных средств.

Список литературы: 1. *Новацкий В.* Вопросы термоупругости. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с. 2. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с. 3. *Подстригац Я.С., Швец Р.Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наукова думка, 1978. – 344 с. 4. *Рвачев В.Л., Тицкий В.П., Шевченко А.Н.* К решению одной задачи термоупругости для тонких изотропных пластин сложной геометрии // Матем. методы и физико-механич. поля. – 1984.– Вып. 19. – С. 62-65. 5. *Мотовиловец И.А., Козлов В.И.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т. – Т. 1. Термоупругость. – Киев: Наукова думка, 1987. – 264 с. 6. *Пискунов В.Г., Сипетов В.С.* Об одном подходе к решению задач термоупругости слоистых пластин // Строит. механика и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С. 28-31. 7. *Khdeir A.A.* On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates // J. Applied Mechanics. – 1997. – V. 64, № 1. – P. 229-233. 8. *Verijenko V.E., Tauchert T.R., Tabakov P.Y.* Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems // J. Thermal Stresses. – 1999.– V. 22, № 1. – P. 75-100. 9. *Oguatanam D.C.D., Hansen J.S., Heppler G.R.* Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels // J. Applied Mechanics. – 2004. – V. 71, № 1. – P. 49-56. 10. *Сметанкина Н.В., Свет Е.В., Шуников А.Н.* Термоупругое деформирование многослойных пластин // Вестник НТУ «ХПИ». – Динамика и прочность машин. – 2001.– Вып. 25. – С. 135-140. 11. *Сметанкина Н.В., Свет Е.В., Шуников А.Н.* Термонапряженное состояние многослойных пластин // Вестник НТУ «ХПИ». – Динамика и прочность машин. – 2002. – Т. 9, № 9. – С. 59-64. 12. *Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / Шуников А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В. и др.* – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с. 13. *Сметанкина Н.В., Свет Е.В., Шуников А.Н.* Задача стационарной теплопроводности многослойных пластин со сложной формой // Проблемы машиностроения. – 2004. – Т. 7, № 3. – С. 25-31.

Поступила в редколлегию 11.04.2006

А.А.ТЕСЛЕНКО, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

НЕКОТОРЫЕ ПОДРОБНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОТОУПРУГОСТИ

У роботі розглядаються основи нової модифікації методу фотоупругості та можливості її модельного дослідження. Суть нової модифікації полягає в поєднанні можливостей традиційного методу фотоупругості й методу скінчених елементів. Вироблена оцінка впливу точності установки досліджуваного тіла на точність у визначенні напружень в умовах конкретної речовини і схеми вимірювання.

Bases of a new modification of photoelasticity method and possibility of its model research are examined in work. Essence of a new modification consists of combination of possibilities of traditional photoelasticity method and finite-element method. Estimation of influencing of exactness of setting of the explored body on exactness in determination of tensions in the conditions of particular matter and chart of measuring is produced.

В настоящее время возрос интерес к методу фотоупругости после периода некоторого затишья в конце 90-х годов. Возникла потребность поточного определения напряжений в тонких пластинах стекол. Такая потребность возникает, например, при получении стекол для TFT мониторов. Имеется два направления развития технологии применения метода фотоупругости. Первая – развитие технологии измерений поляризационных параметров, вторая – развитие методов интерпретации измерений. В самом общем смысле томография представляет собой методологию получения новых знаний о распределении чего-то в объеме на основе имеющихся знаний о распределении чего-то на плоскости или поверхности. Применительно к поляризационно-оптической томографии это распределение напряжений в объеме на основе плоского распределения поляризационно-оптических параметров. В этой области подход к решению томографических задач еще не устоялся. В данной работе развивается направление, впервые представленное в [1,2], а именно, представление решения задачи поляризационной томографии в конечно-элементном виде. Развитие метода конечных элементов дает в руки разработчиков большой набор уже развитых и апробированных средств. В этой работе в отличие от [1,2] предложены новые методы получения результата.

В работах [1,2] описываются основы подхода к поляризационно-оптической томографии с использованием метода конечных элементов. Подход состоит в учете граничных условий и условий равновесия напряжений с помощью метода конечных элементов (МКЭ). С точки зрения МКЭ это - новая модификация метода, в которой элементы обладают не только упругими, но и пьезооптическими свойствами. Непосредственно наработки МКЭ переносить в метод фотоупругости нецелесообразно, т.к. МКЭ в теории упругости твердого деформируемого тела развивался для задач с совместными деформациями (выполняются дифференциальные условия совместности деформации)

ций [4]). Главным достоинством метода фотоупругости является его способность определять остаточные напряжения. Условие совместности деформаций в присутствии остаточных напряжений не выполняются. Традиционные вариационные постановки МКЭ содержат это условие и в этом случае неприменимы. В данной работе использовано условие равенства нулю дивергенции:

$$\operatorname{div}(\bar{\sigma}_{i*}) = 0, \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}_{i*}$ – вектор силы с координатами $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$; σ_{ij} – тензор напряжений. Если граница свободна от напряжений:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\bar{\sigma}_{i*}) dV = 0. \quad (2)$$

Это соотношение выполняется для любой области внутри тела. Разобьем тело на области (конечные элементы) [3]. Для каждого конечного элемента будет выполняться условие (2). σ_{ij} в произвольной точке тела будет представлено интерполяционной формулой для соответствующего конечного элемента [3].

$$\sigma_{ij} = \sum_{\ell=1}^m N_{\ell} \sigma_{ij}^{\ell}, \quad (3)$$

где N_{ℓ} – функции формы элемента; σ_{ij}^{ℓ} – искомые величины напряжений в узлах конечных элементов, m – количество узлов в элементе, ℓ – номер узла в элементе. В тонкой пластине, без градиента напряжений по ее толщине, для линейного треугольного элемента соотношение (2) будет записано в виде:

$$\iint_S \sum_{\ell=1}^3 \left(\sigma_{i1}^{\ell} \frac{\partial L_{\ell}}{\partial x} + \sigma_{i2}^{\ell} \frac{\partial L_{\ell}}{\partial y} \right) dS = 0 \quad (4)$$

или

$$\iint_S \sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) dS = 0, \quad (5)$$

L_{ℓ} – функции формы элемента [3]:

$$L_{\ell} = (a_{\ell} + b_{\ell}x + c_{\ell}y) / D,$$

$a_{\ell}, b_{\ell}, c_{\ell}$ – коэффициенты линейного разложения функции формы, D – площадь элемента. Условие равновесия для одного элемента окончательно примет вид

$$\sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) = 0. \quad (6)$$

Узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} для всех узлов могут определяться решением системы уравнений (6), записанных для всех элементов и уравнений фотоупругости

$$A_{ij}^{\bar{n}} \sigma_{ij}^{\ell} = \delta^{\bar{n}} \cos(2\varphi^{\bar{n}}), \quad (7)$$

определенных для направления \bar{n} в узле ℓ . Уравнения (7) представляют собой обычные уравнения, связывающие напряжения и измеряемые парамет-

ры описанные, например, в [1]. В формуле (7)

$\delta^{\bar{n}}$ – оптическая разность хода;

$\varphi^{\bar{n}}$ – оптический параметр угла изоклины;

$A_{ij}^{\bar{n}}$ – коэффициенты, являющиеся функцией пьезооптических коэффициентов, показателя преломления, толщины просвечиваемого слоя, ориентации направления просвечивания и ориентации системы координат, в которой определяются напряжения. Аналогично получаются соотношения для квадратичного элемента.

Решением систем линейных уравнений (6,7) будем получать искомые узловые напряжения σ_{ij}^{ℓ} . Полученные таким образом значения σ_{ij}^{ℓ} устойчивы. Если сравнить σ_{ij}^{ℓ} , полученные решением системы уравнений (6,7) (метод МКЭ), с решением системы уравнений состоящей только из (7) (метод наклонного просвечивания), даже с избыточным числом измерений, то МКЭ обнаруживает большую устойчивость. В [1] был показан простейший имитационный эксперимент, доказывающий этот факт в частном случае напряженного состояния и нормально распределенной ошибкой в измеряемых параметрах. В данной работе исследуется влияние ошибки, связанной с точностью установки исследуемого предмета относительно измеряемой аппаратуры. В [1] исследовалась относительно сложная модель напряжений, что не способствовало пониманию результатов работы. В данном случае применение сложноподвижной модели ничем не оправдано. Логичнее взять для модельного исследования равномерно напряженное тело. В этом случае более наглядны будут отклонения измеренных напряжений от модельных. Конкретно, в данной работе было задано осевое сжатие, равномерно распределенное по квадратной пластине с размерами 10x10x1см. Исходя из заданного напряжения определялись, измеряемые параметры: $\delta^{\bar{n}}$ – оптическая разность хода и $\varphi^{\bar{n}}$ – оптический параметр угла изоклины, имея ввиду константы среды, соответствующие LiF. Кристаллографические плоскости считались направленными параллельно граням пластины. В уравнениях (7) в качестве $A_{ij}^{\bar{n}}$ использовались значения соответствующие ориентациям просвечивания отклоненным от заданных в модели по которой определялись $\delta^{\bar{n}}$ и $\varphi^{\bar{n}}$. Величина отклонения различна в различных точках, случайна с нормальным законом распределения, равным нулю математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением равным 1 градусу. Как и в [1] имеется ввиду, что просвечивание производится монохроматическим светом с длиной волны 640 нм и для оценки погрешности используется следующая модификация относительной погрешности $\zeta(x) = \left| \frac{x - x^T}{\max} \right|$, где x – исследуемое значение, x^T – точное значение, \max – максимальное по модулю зна-

чение x . Результаты приводятся в виде теневых картин, где численные значения величин увеличиваются от темного к светлому. Разбиение пластины производилось на прямоугольные четырехузловые изопараметрические элементы (10x10). Элементы имеют своими узловыми значениями независимые переменные σ_{ij}^e .

При указанном разбиении, МКЭ дает распределение $\zeta(\sigma_{11})$, показанное на рисунке. Оно внешне почти не отличается от полученного методом наклонного просвечивания (поэтому, здесь не приводится).

Количественное отличие имеется. Для МКЭ максимум $\zeta(\sigma_{11}) - 1,46$, дисперсия этой величины - 0,0021. Для метода наклонного просвечивания максимум $\zeta(\sigma_{11}) - 1,86$, дисперсия этой величины - 0,0042. Из этих результатов видно, что ошибка установки исследуемого тела в полярископ несколько компенсируется учетом условий равновесия.

Если новый метод сравнивать с применяемым методом разности касательных напряжений (МРКН), то, как уже указывалось в [1], МРКН имеет следующие очевидные недостатки:

1. результат МРКН зависит от выбора пути интегрирования;
2. МРКН не связывает воедино, в отличие от МКЭ, напряженное состояние во всех точках тела. Напряжения найденные на различных путях интегрирования независимы.

Устойчивость МРКН модельно не изучалась. Мы не знаем, насколько этот метод устойчив к неточности установки образца в поляриметре. Подробные исследования этого не производились (по крайней мере, автору они не известны). Есть еще один аспект применения данных исследований. Если напряжения уже определены, можно исследовать точность полученных результатов аналогичным приведенному выше способом.



Распределение (максимальное - 1,46).

Список литературы: 1. Тесленко А.А. / Заводская лаборатория 2. - 1998. - Т. 64, № 8. - С. 42-44. 2. Гаврилюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В. / Функциональные материалы 2. - 1995. - № 4. - С. 543. 3. Тесленко А.А. Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. - Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Харьков, 1991. - 22 с. 4. Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л. и др. / Заводская лаборатория. - 1993. - Т. 59, № 2. - С.64-66.

Поступила в редколлегию 03.08.2005.

В.Б.УСПЕНСКИЙ, канд.техн.наук; **И.А.БАГМУТ**, НТУ «ХПИ»

УПРОЩЕНИЕ МОДЕЛИ ОШИБОК ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Досліджувати спостережуваність інструментальних похибок чутливих елементів (ЧЕ) безплатформної інерціальної навігаційної системи (БІНС) без спрощення вихідної моделі помилок інерціальної навігації практично неможливо. У той же час є припущення, що при певних маневрах літального апарата деякими похибками ЧЕ можна буде зневажити, й отже одержати більш прості моделі помилок БІНС. Тому становить практичний інтерес одержати спрощені моделі помилок БІНС, придатні для наступного аналізу спостережуваності інструментальних похибок ЧЕ.

To research observability of tool errors of sensitive elements strapdown inertial navigating system without simplification of initial model of errors of strapdown inertial navigating system it is practically impossible. At the same time there is an assumption, that at the certain maneuvers of the air flying device, corresponding errors of sensitive elements can be neglected and therefore will be possible to receive much more simple models of errors of strapdown inertial navigating system. Therefore represents practical interest to receive the simplified models of errors of strapdown inertial navigating system suitable for the subsequent analysis tool errors of sensitive elements observability.

Постановка проблемы. При исследовании наблюдаемости инструментальных погрешностей (ИП) инерциальных датчиков (ИД) бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) с использованием критерия полной наблюдаемости системы [1] необходимо, в частности, провести аналитические преобразования над матрицей системы уравнений, описывающей модель ошибок инерциальной навигации (ИН). Следует отметить, что на ошибки определения навигационных параметров в БИНС влияет взаимодействие ряда факторов, среди которых можно выделить ошибки выставки, инструментальные погрешности ИД, а также характер движения, совершаемого летательным аппаратом (ЛА). Данное взаимодействие в общем случае носит сложный характер, поэтому система уравнений, описывающих модель ошибок автономной БИНС, является достаточно сложной, вследствие чего использовать указанный критерий практически невозможно.

В работе [2] был сделан вывод о том, что существует зависимость между влиянием определенных ИП и типом маневра, совершаемого ЛА, на ошибки инерциальной навигации. Следовательно можно предположить, что в зависимости от типа движения ЛА некоторые инструментальные погрешности будут оказывать достаточно слабое влияние на точность БИНС, и, следовательно, ими можно будет пренебречь. В этих условиях исходная модель ошибок может стать существенно проще, вследствие чего появится возможность исследовать наблюдаемость инструментальных погрешностей ИД.

Анализ последних исследований и публикаций. Аналогичная пробле-

ма применительно к морским подвижным объектам рассмотрена, в частности, в [3]. Для летательных аппаратов, такая проблема является актуальной.

Цель и постановка задачи. Целью данной работы является получение упрощенных моделей ошибок инерциальной навигации при различных видах движения ЛА, необходимых для исследования наблюдаемости инструментальных погрешностей ИБ системы по текущим измерениям ошибок счисления скорости и координат, в рамках интегрированных навигационных систем.

Изложение материала. В данной работе используются следующие системы координат (СК):

- Географическая декартова СК с осями N, H, E, в дальнейшем обозначаемая символом $\{X_N\}$.
- Связанная с ВЛА система координат $\{X_C\}$ с началом в его центре масс и осями x, y и z , совпадающими с соответствующими осями чувствительности акселерометров (АК).
- Система координат, связанная с осями чувствительности гироскопов (ГС) x_G, y_G и z_G . Начало этой системы отсчета совпадает с началом отсчета СК $\{X_C\}$. Оси данной СК могут совпадать с одноименными осями СК $\{X_C\}$, однако, как правило, имеет место незначительное рассогласование данных осей. Данное рассогласование задается шестью углами φ_{ij} , $i \in \{X, Y, Z\}$, $j \in \{X, Y, Z\}$, $i \neq j$, где i указывает на оси, между которыми есть рассогласование, j обозначает ось поворота, соответствующего данному углу рассогласования.

Модель ошибок ИН, записанная в потребительских параметрах для сферической модели Земли, задается системой уравнений [4, 5]:

$$\delta\dot{\varphi} = -\frac{v_N}{R^2} \delta h + \frac{\delta v_N}{R}; \quad \delta\dot{h} = \delta v_H; \quad \delta\dot{\lambda} = -\frac{v_E \cdot \sin \varphi}{R \cdot \cos^2 \varphi} \delta\varphi - \frac{v_E}{R^2 \cos \varphi} \delta h + \frac{\delta v_E}{R \cos \varphi}; \quad (1-3)$$

$$\delta\dot{v}_N = \delta a_N + \omega_E \cdot \delta v_H - (\Omega_H + \omega_H) \cdot \delta v_E + v_H \cdot \delta \omega_E - v_E \cdot (\delta \Omega_H + \delta \omega_H); \quad (4)$$

$$\delta\dot{v}_H = \delta a_H + \delta g_H + (\Omega_N + \omega_N) \cdot \delta v_E - \omega_E \cdot \delta v_N + v_E (\delta \Omega_N + \delta \omega_N) - v_N \cdot \delta \omega_E; \quad (5)$$

$$\delta\dot{v}_E = \delta a_E + (\Omega_H + \omega_H) \cdot \delta v_N - (\Omega_N + \omega_N) \cdot \delta v_H + v_N \cdot (\delta \Omega_H + \delta \omega_H) - v_H \cdot (\delta \Omega_N + \delta \omega_N); \quad (6)$$

$$\delta\dot{\psi} = -tg \theta (\omega_E \cos \psi - \omega_N \sin \psi) \cdot \delta\psi + \frac{1}{\cos^2 \theta} [\sin \theta (\omega_z \sin \gamma - \omega_y \cos \gamma) - (\omega_E \sin \psi + \omega_N \cos \psi)] \cdot \delta\theta + \frac{1}{\cos \theta} (\omega_z \cos \gamma + \omega_y \sin \gamma) \cdot \delta\gamma - \quad (7)$$

$$- \frac{\cos \gamma}{\cos \theta} \delta \omega_y + \frac{\sin \gamma}{\cos \theta} \delta \omega_z - tg \theta \cos \psi \cdot \delta \omega_N - tg \theta \sin \psi \cdot \delta \omega_E + \delta \omega_H;$$

$$\delta\dot{\theta} = (\omega_N \cos\psi + \omega_E \sin\psi) \cdot \delta\psi + (\omega_Y \cos\gamma - \omega_Z \sin\gamma) \cdot \delta\gamma + \sin\gamma \cdot \delta\omega_Y + \cos\gamma \cdot \delta\omega_Z + \sin\psi \cdot \delta\omega_N - \cos\psi \cdot \delta\omega_E; \quad (8)$$

$$\delta\dot{\gamma} = -\frac{1}{\cos\theta} (\omega_E \cos\psi - \omega_N \sin\psi) \cdot \delta\psi + \frac{1}{\cos^2\theta} [\omega_Z \sin\gamma - \omega_Y \cos\gamma - \sin\theta (\omega_E \sin\psi + \omega_N \cos\psi)] \cdot \delta\theta + tg\theta (\omega_Z \cos\gamma + \omega_Y \sin\gamma) \cdot \delta\gamma + \delta\omega_X - tg\theta \cos\gamma \cdot \delta\omega_Y + tg\theta \sin\gamma \cdot \delta\omega_Z - \frac{\cos\psi}{\cos\theta} \delta\omega_N - \frac{\sin\psi}{\cos\theta} \delta\omega_E, \quad (9)$$

где φ, h, λ – географические широта, долгота и высота; $\delta\varphi, \delta h, \delta\lambda$ – ошибки определения соответствующих координат; $R = R_0 + h, R_0$ – радиус земного сфероида; $v_N, v_H, v_E, \delta v_N, \delta v_H, \delta v_E$ – северная, высотная и восточная составляющие относительной скорости ЛА, а также ошибки их определения; $\Omega_N = \Omega \cdot \cos\varphi, \Omega_H = \Omega \cdot \sin\varphi$ – северная и высотная проекции вектора угловой скорости вращения Земли $\bar{\Omega}, \Omega = 7292115 \cdot 10^{-11}$ рад/с; $\omega_N = \Omega_N + \frac{v_E}{R}, \omega_H = \Omega_H + \frac{v_E}{R} \cdot tg\varphi, \omega_E = -\frac{v_N}{R}$ – проекции вектора абсолютной угловой скорости сопровождающего трехгранника на оси географической СК, $\delta\omega_N, \delta\omega_H, \delta\omega_E$ – ошибки вычисления этих проекций; $\delta g_H \approx \frac{2g_0}{R} \delta h$ – ошибка вычисления вертикальной проекции вектора силы тяжести в СК $\{X_N\}$, $g_0 = 9,78049$ м/с² – ускорение силы тяжести на экваторе земного сфероида; $\delta a_N, \delta a_H, \delta a_E$ – ошибки вычисления проекций вектора кажущегося ускорения $\delta \bar{a}_{\{X_N\}}$ на географические оси:

$$\delta \bar{a}_{\{X_N\}} = A^T \delta \bar{a}_{\{X_C\}} + (A_Y A_\theta \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi})^T \bar{a}_{\{X_C\}} \delta\psi + (A_Y \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} A_\psi)^T \bar{a}_{\{X_C\}} \delta\theta + (\frac{\partial A_Y}{\partial \gamma} A_\theta A_\psi)^T \bar{a}_{\{X_C\}} \delta\gamma,$$

где $\delta \bar{a}_{\{X_C\}}$ – вектор ошибок измерений кажущегося ускорения $\bar{a}_{\{X_C\}}$ (смещения нулей АК) в проекциях на СК $\{X_C\}$; $A = A_Y A_\theta A_\psi$ – матрица поворота от географической системы координат к СК $\{X_C\}$; $\delta\psi, \delta\theta, \delta\gamma$ – соответственно текущие ошибки определения углов курса ψ , тангажа θ и крена γ ; $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ – проекции измеренной абсолютной угловой скорости вращения объекта $\bar{\omega}_{\{X_C\}}$ на оси СК $\{X_C\}$; $\delta\omega_X, \delta\omega_Y, \delta\omega_Z$ – ошибки этих проекций:

$$\delta\omega_X \equiv \Delta\omega_X - \varphi_{XY} \cdot \omega_Z + \varphi_{XZ} \cdot \omega_Y, \delta\omega_Y \equiv \Delta\omega_Y + \varphi_{YX} \cdot \omega_Z - \varphi_{YZ} \cdot \omega_X; \delta\omega_Z \equiv \Delta\omega_Z - \varphi_{ZX} \cdot \omega_Y + \varphi_{ZY} \cdot \omega_X,$$

где $\Delta\omega_X, \Delta\omega_Y, \Delta\omega_Z$ – дрейфы x -го, y -го и z -го гироскопов в проекциях на связанную с ВЛА СК.

Погрешности инерциальных датчиков – дрейфы ГС, смещения нулей АК, а также углы рассогласования будем считать константами, случайными в каждом запуске навигационной системы, а их значения – на уровне датчиков одного класса точности. Дрейф y_1 -ГС и смещение y_1 -АК будут полагаться равными нулю, т.к. они хорошо оцениваются во время выставки навигационной системы на неподвижном основании, и их всегда можно алгоритмически компенсировать. Без нарушения общности будет считать, что ЛА движется в районе экватора ($\varphi \approx 0$). Рассмотрим несколько «типовых» движений ЛА.

1) Горизонтальное прямолинейное движение ЛА с произвольным углом курса и с малыми углами тангажа и крена. После горизонтирования системы, проведенного по показаниям акселерометров, значения углов θ и γ будут определены с начальными ошибками, зависящими от смещений АК:

$$\delta\theta_0 = \frac{\delta a_X}{g}, \quad \delta\gamma_0 = -\frac{\delta a_Z}{g}.$$

При неизменной ориентации ЛА по углам тангажа и крена, влияние смещений акселерометров на скоростные и угловые ошибки будет компенсироваться ошибками горизонтирования [6]. Проекция угловой скорости на ось z при горизонтальном прямолинейном движении пропорциональна горизонтальной проекции относительной скорости v_{NE} :

$\omega_3 = -\Omega \cdot \cos \psi + \frac{v_{NE}}{R}$. Учитывая, что скорость ЛА в полете, как правило, составляет величину порядка сотен м/с, значение ω_3 будет соизмеримо со значением угловой скорости вращения Земли. Проекция ω_2 в данном случае будет равна нулю, а $\omega_1 = \Omega \cdot \cos \psi$. Ошибки измерения проекций вектора угловой скорости $\bar{\omega}_{\{X_C\}}$, создаваемые влиянием углов рассогласования с учетом указанных значений $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, будут на несколько порядков меньше, чем аналогичные ошибки, обусловленные дрейфами ГС, поэтому данными инструментальными погрешностями можно пренебречь. Таким образом, на ошибки инерциальной навигации при данном типе движения будут влиять, в основном, горизонтальные дрейфы гироскопов. В этих условиях уравнения модель ошибок инерциальной навигации принимают вид:

$$\delta\dot{v}_N = (-a_X \cdot \sin \psi - a_Z \cdot \cos \psi) \cdot \delta\psi - a_Y \cdot \cos \psi \cdot \delta\theta + a_Y \cdot \sin \psi \cdot \delta\gamma;$$

$$\delta\dot{v}_E = (a_X \cdot \cos \psi - a_Z \cdot \sin \psi) \cdot \delta\psi - a_Y \cdot \sin \psi \cdot \delta\theta + a_Y \cdot \cos \psi \cdot \delta\gamma;$$

$$\delta\dot{\psi} = (-\omega_N \cdot \cos \psi + \frac{v_N \cdot \sin \psi}{R}) \cdot \delta\theta + \omega_3 \cdot \delta\gamma;$$

$$\delta\dot{\theta} = (\omega_N \cdot \cos \psi - \frac{v_N \cdot \sin \psi}{R}) \cdot \delta\psi + \frac{\cos \psi}{R} \cdot \delta v_N + \frac{\sin \psi}{R} \cdot \delta v_E + \Delta\omega_Z;$$

$$\delta\dot{\gamma} = (-\omega_N \cdot \sin \psi - \frac{v_N \cdot \cos \psi}{R}) \cdot \delta\psi + \frac{\sin \psi}{R} \cdot \delta v_N - \frac{\cos \psi}{R} \cdot \delta v_E + \Delta\omega_X.$$

2) Прямолинейное движение ЛА с маневром по углу тангажа при малом

угле крена. В данном случае влияние смещения нуля z-го акселерометра уже не будет компенсироваться начальной ошибкой тангажа. Это объясняется тем, что величина δa_z будет входить в уравнение (4) с коэффициентом $\cos \theta$, а в уравнение (5) с коэффициентом $\sin \theta$. Причем, чем больше будет разница между начальным углом тангажа на выставке и углом тангажа во время маневра, тем сильнее данная погрешность будет влиять на ошибки навигации. Кроме того, в данном случае на ошибки навигации существенное влияние станут оказывать углы рассогласования φ_{XY} , φ_{YX} ; их влияние будет зависеть от динамики объекта – в данном случае от величины ω_3 . Также на ошибки навигации по-прежнему будут влиять дрейфы ГС. В предположении, что ВЛА движется на север ($\psi \approx 0$), модель ошибок ИН:

$$\begin{aligned} \delta \dot{h} &= \delta v_H; & \delta \dot{v}_N &= -(a_X \cdot \sin \theta + a_Y \cdot \cos \theta) \cdot \delta \theta + \cos \theta \cdot \delta a_X; \\ \delta \dot{v}_H &= \left(\frac{2 \cdot g_0}{R} \right) \cdot \delta h + \sin \theta \cdot \delta a_X; \\ \delta \dot{v}_E &= (a_X \cdot \cos \theta - a_Y \cdot \sin \theta) \cdot \delta \psi + a_Y \cdot \delta \gamma; \\ \delta \dot{\psi} &= -\Omega \cdot \delta \theta + \omega_Z \cdot \delta \gamma + \frac{\omega_Z \cdot \varphi_{YX}}{\cos \theta}; & \delta \dot{\theta} &= \frac{\delta v_N}{R} + \Delta \omega_Z; \\ \delta \dot{\gamma} &= -\frac{\delta v_N}{R} - \omega_Z \cdot \varphi_{XY} + \omega_Z \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \varphi_{YX} + \Delta \omega_X. \end{aligned}$$

3) Прямолинейное движение ЛА с маневром по углу крена при малом угле тангажа. По аналогии с предыдущим типом движения, на ошибки инерциальной навигации, кроме дрейфов ГС, будут влиять δa_X , а также углы φ_{YZ} и φ_{ZY} . При $\psi \approx 0$ модель ошибок для данного типа движения принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta \dot{h} &= \delta v_H; & \delta \dot{v}_N &= -a_Y \cdot \sin \gamma \cdot \delta \psi - a_Y \cdot \cos \gamma \cdot \delta \theta; \\ \delta \dot{v}_H &= \left(\frac{2 \cdot g_0}{R} \right) \cdot \delta h - \sin \gamma \cdot \delta a_X; \\ \delta \dot{v}_E &= a_X \cdot \delta \psi + a_Y \cdot \cos \gamma \cdot \delta \gamma + \cos \gamma \cdot \delta a_Z; \\ \delta \dot{\psi} &= -\Omega \cdot \delta \theta + \omega_Z \cdot \cos \gamma \cdot \delta \gamma - \omega_X \cdot \cos \gamma \cdot \varphi_{YZ} + \omega_X \cdot \sin \gamma \cdot \varphi_{ZY} + \sin \gamma \cdot \Delta \omega_Z; \\ \delta \dot{\theta} &= \frac{\delta v_N}{R} - \omega_Z \cdot \sin \gamma \cdot \delta \gamma - \omega_X \cdot \sin \gamma \cdot \varphi_{YZ} + \omega_X \cdot \cos \gamma \cdot \varphi_{ZY} - \cos \gamma \cdot \Delta \omega_Z; \\ \delta \dot{\gamma} &= -\frac{\delta v_E}{R} - \frac{v_N}{R} \cdot \delta \psi + \omega_Z \cdot \sin \gamma \cdot \delta \theta + \Delta \omega_X. \end{aligned}$$

4) Поворот ЛА по углу курса при малых углах тангажа и крена. При данном виде маневра, основное влияние на ошибки навигации будут оказывать дрейфы ГС и углы рассогласования φ_{XZ} и φ_{ZX} . В этих условиях модель ошибок инерциальной навигации можно упростить до вида:

$$\delta \dot{v}_N = -a_Y \cdot \cos \psi \cdot \delta \theta - a_Y \cdot \sin \psi \cdot \delta \gamma;$$

$$\delta \dot{v}_E = -a_y \cdot \sin \psi \cdot \delta \theta + a_y \cdot \cos \psi \cdot \delta \gamma ;$$

$$\delta \dot{\theta} = \frac{\cos \psi}{R} \cdot \delta v_N + \frac{\sin \psi}{R} \cdot \delta v_E + \omega_Y \cdot \delta \gamma + \Delta \omega_Z - \omega_Y \cdot \varphi_{ZX} ;$$

$$\delta \dot{\gamma} = \frac{\sin \psi}{R} \cdot \delta v_N - \frac{\cos \psi}{R} \cdot \delta v_E - \omega_Y \cdot \delta \theta + \Delta \omega_X + \omega_Y \cdot \varphi_{XZ} .$$

Выводы. Численное моделирование полученных упрощенных моделей подтверждает их адекватность полной динамической модели в условиях рассматриваемых видов движения ВЛА. Таким образом, данные модели ошибок можно использовать в дальнейшем для анализа наблюдаемости погрешностей инерциальных датчиков.

Список литературы: 1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с. 2. И.А. Багмут Влияние инструментальных погрешностей чувствительных элементов в бесплатформенной инерциальной навигационной системе на точность определения навигационных параметров // Вісник НТУ «ХП». Зб. наук. пр. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХП». – 2004. – № 19. – С. 17-22. 3. Организация взаимодействия спутниковых и автономных навигационных морских объектов / В.И. Резниченко, В.И. Лапина / Под ред. докт.техн.наук В.И. Резниченко – СПб., 2004. – 88 с. 4. Бромберг П. В. Теория инерциальных систем навигации. – М.: Наука, 1979. – 296 с. 5. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / О.Н. Анучин, Г.И. Емельянов / Под общей ред. чл.-кор. РАН В.Г.Пешехонова. – СПб., 1999. – 357 с. 6. Успенский В.Б., Пугачев Р.В. Методика формирования требований к погрешностям датчиков бесплатформенной инерциальной навигационной системы // Зб. Наукових праць ХВУ. – Вип. 3 (50). – 2004. – С. 97-102.

Поступила в редколлегию 07.04.2006

СОДЕРЖАНИЕ

А.А.Ларин О творческом наследии Льва Израилевича Штейнвольфа – ученого и педагога	3
К.В.Аврамов, Н.В.Ширяева, Ю.А.Ищук, Л.В.Розова Нелинейные свободные колебания закрученных вращающихся стержней	7
Ю.М.Андреев, Е.И.Дружинин, О.В.Митин Кинематический и динамический анализ кулачкового механизма формовочного станка	14
И.Д.Бреславский, К.В.Аврамов Устойчивость нелинейных форм вынужденных колебаний в дискретной системе с кубической нелинейностью	21
О.О.Бреславська, Ю.О.Ищук Розрахунки та проектування машинобудівних конструкцій за допомогою Інтернет-сайту "Марочник сталей і сплавів"	25
Д.В.Бреславський, О.К.Морачковський, О.А.Татарінова Аналіз деформацій і напружень ретчетінгу при багатоциклового деформуванні залізничних рейок	29
Ю.С.Воробьев, В.П.Гошкодеря, А.Н.Цыба Рациональный выбор конструктивных параметров межлопаточных связей	37
С.М.Верещака, Д.А.Жигилий Напряженное состояние цилиндров слоистой структуры с межфазными дефектами	41
О.С.Галас, К.В.Аврамов К активному гашению колебаний упругих систем	49
Н.Г.Гармаш Моделирование термонапряженного состояния двухопорного замкового соединения лопаток паровой турбины	55
В.И.Гнитко, Е.В.Еселева Собственные колебания оболочек вращения, частично заполненных жидкостью	60
Є.М. Гораш Застосування ізотропної та анізотропної концепцій пошкоджуваності до розрахунку тривалої міцності ротору парової турбіни в умовах високотемпературної повзучості	66
Е.Н.Гораш, С.В.Лысенко, Г.И. Львов Неизотермическая ползучесть и повреждаемость элементов паровых турбин	75
Я.Д.Демуз, В.А.Жовдак, А.С.Степченко Исследование вынужденных колебаний двух лопаток с учетом контакта в межбандажном соединении	89
Г.М.Иванченко Влияние параметров анизотропии упругой линзы на ее фокусирующие свойства	93

Е.А.Курилов Влияние присоединенных масс на динамическую устойчивость цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке	99
Б.Я.Кантор, Е.Ю.Мисюра Методика решения осесимметричных нелинейных задач для почти несжимаемых неоднородно трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения	106
Л.В.Курпа, Г.Н.Тимченко Применение теории г-функций к исследованию нелинейных колебаний композитных пластин сложной формы . .	113
Г.Ю.Мартыненко, Л.М.Скрынька, М.М.Смирнов, А.Д.Пирогов Исследование возможности снижения остаточных деформаций в технологической оснастке для закалки валов	119
Ю.В.Михлин, С.Г.Митрохин Исследование динамики автомобиля методом нормальных форм с учетом нелинейных характеристик пружин подвески	130
О.К.Морачковский, В.Н.Соболь Длительная прочность диска турбины	137
В.П.Ольшанский, С.В.Ольшанский Эффект отражения мелкодисперсных испаряющихся капель встречным потоком газа . . .	143
А.В.Онищенко Моделирование процессов накопления повреждаемости в тонких пластинах при действии ударных нагрузок	149
В.О.Повгородний Исследование надежности приборного блока самолета по виброускорениям	153
О.Г.Приймаков, Ю.О.Градиський Експериментальне дослідження працездатності колінчастих валів та циліндро-поршневих груп дизелів авіаційної наземної техніки	160
В.Н.Пустовалов, В.В.Навроцкий, Т.И.Михайленко Приближенное определение нестационарного температурного поля в цилиндре конечной длины	170
Э.А.Симсон, С.А.Назаренко, А.В.Белозеров Динамические характеристики систем с поворотной симметрией при нерегулярной вариации параметров	173
Н.В.Сметанкина, Е.В.Свет, А.Н.Шупиков Расчет термонапряженного состояния многослойных пластин неканонической формы в плане . .	177
А.А.Тесленко Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости	183
В.Б.Успенский, И.А.Багмут Упрощение модели ошибок инерциальной навигации при различных видах движения летательного аппарата	187

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»

Збірник наукових праць № 21

Науковий редактор д-р техн. наук, проф. О.К.Морачковський

Технічний редактор Щепкін О.В.

Відповідальний за випуск В.М.Луньова

Обл.вид. № 98-06.

Підп.до друку 00.00.2006 р. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.
Друк-ризографія. Гарнітура Таймс. Умов.друк.арк. 10,0. Облік.вид. арк. 9,2.
Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ «ХПІ», 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
