



ВЕСТНИК

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
«ХПИ»**

47'2005

Харьков

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ХПИ»

Сборник научных трудов
Тематический выпуск

47'2005

«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Издание основано Национальным техническим университетом
«Харьковский политехнический институт» в 2001 году

Государственное издание

Свидетельство Госкомитета по информационной политике Украины

КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Председатель: Л.Л.Товажнянский, д-р техн. наук, проф.

Секретарь координационного совета: К.А.Горбунов, канд. техн. наук, доц.

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;

Е.И.Сокол, д-р техн. наук, проф.;

Е.Е.Александров, д-р техн. наук, проф.;

Б.Т.Бойко, д-р техн. наук, проф.;

М.Д.Годлевский, д-р техн. наук, проф.;

А.И.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;

В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;

В.Д.Дмитриенко, д-р техн. наук, проф.;

П.А.Качанов, д-р техн. наук, проф.;

А.Ф.Кириченко, д-р техн. наук, проф.;

В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;

В.И.Кравченко, д-р техн. наук, проф.;

В.А.Лозовой, д-р фил. наук, проф.;

О.К.Морачковский, д-р техн. наук, проф.;

П.Г.Перерва, д-р техн. наук, проф.;

Н.И.Погорелов, д-р техн. наук, проф.;

М.И.Рыщенко, д-р техн. наук, проф.;

В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;

В.П.Себко, д-р техн. наук, проф.;

В.И.Таран, д-р техн. наук, проф.;

Ю.В.Тимофеев, д-р техн. наук, проф.;

А.Ф.Шеховцов, д-р техн. наук, проф.;

Е.И.Юносова, д-р фил. наук, проф.

Адрес редколлегии: 61002, Харьков,
ул. Фрунзе, 21. НТУ «ХПИ».

Каф. ДПМ, Тел. (057) 707-68-79.

Харьков 2005

Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2005. № 47 – 193 с.

В збірнику представлено теоретичні та практичні результати наукових досліджень та розробок, що виконані викладачами вищої школи, аспірантами, науковими співробітниками різних організацій та установ.

Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены теоретические и практические результаты исследований и разработок, выполненных преподавателями высшей школы, аспирантами, научными сотрудниками различных организаций и предприятий.

Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ответственный редактор: О.К.Морачковский, д-р техн.наук,проф.

Ответственный секретарь: А.Г.Андреев, канд.техн.наук, доц.

Е.Е.Александров,	д-р техн.наук, проф.;
В.В.Бортовой,	канд.техн.наук, доц.;
Ю.С.Воробьев,	д-р техн.наук, проф.;
Е.Г.Голоскоков,	д-р техн.наук, проф.;
О.О.Горошко,	д-р физ.-мат.наук, проф.;
В.Б.Гринев,	д-р техн.наук, проф.;
В.А.Жовдак,	д-р техн. наук, проф.;
Г.И.Львов,	д-р техн. наук, проф.;
В.Л.Остапенко,	д-р физ.-мат.наук,проф.;
Л.А.Фильштинський,	д-р техн.наук,проф.;
Ю.М.Шевченко,	академик НАНУ

Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ «ХПІ».

Протокол № 8 від 7 жовтня 2005 р.

© Національний технічний університет «ХПІ»

А.Г.АНДРЕЕВ, канд.техн.наук., НТУ «ХПИ»;

Н.К.РЕЗНИЧЕНКО, канд.техн.наук., Украинская инженерно-педагогическая академия, Харьков

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОБИРАЕМЫХ С НАТЯГОМ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАГРЕВА

Описана імітаційна модель, призначена для дослідження зборки конструкцій, що мають з'єднання з натягом, забезпечує виконання технологічних і міцностних вимог до конструкції. Наведені числові результати.

The created simulation model is intended for a research of assembly, ensures execution technological and strength of the requirements to a construction. The numerical results are indicated.

Постановка задачи. Технология сборки с натягом при использовании нагрева охватывающей детали применяется для ответственных изделий, поскольку она обеспечивает в 1,5-2 раза большую прочность сопряжения деталей, чем при обычной запрессовке. Конструкции таких изделий могут быть двухэлементными – охватываемая деталь (вал, ось или диск) соединена с той или иной охватывающей деталью (зубчатое колесо, полумуфта, бандаж и др.). Напряжения в деталях таких изделий рассчитывают различными по сложности способами в зависимости от требуемой точности, но в целом особой трудности они не представляют [1,2]. Если конструкция трехэлементная составная – например, на оси с натягом установлен диск, а на диске также по посадке с натягом установлен венец, то возникающие в деталях напряжения и деформации зависят от характеристик технологического процесса сборки. Технологические процессы могут быть двух типов:

– на ось (вал) устанавливают нагретый диск (центр) и после их скрепления в соединении и остывания устанавливают на диск (центр) нагретый венец (бандаж);

– на диск (центр) устанавливают нагретый венец (бандаж) и после их остывания данное «промежуточное» соединение устанавливают на ось (вал).

Целью данной работы является исследование напряженно-деформированного состояния составных конструкций (СК) соединенных с натягом, собираемых с использованием нагрева по двум различным технологическим процессам (ТП), для установления областей их применения в зависимости от размерных соотношений СК. Были выполнены следующие расчеты:

– напряжения в собранной конструкции, посаженной на ось, обусловленные соединением ее частей посадкой с натягом;

– напряжения в собранной модели при нагреве ступицы под посадку на ось, обусловленные неравномерным температурным полем и соединением ее

частей с натягом;

– напряжения в дисковой части модели при нагреве ступицы под посадку на ось (бандаж сажается после соединения дисковой части с осью).

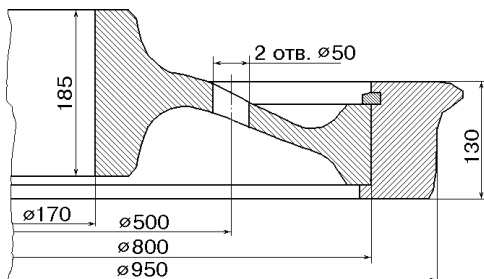


Рисунок 1 – Прототип математической модели

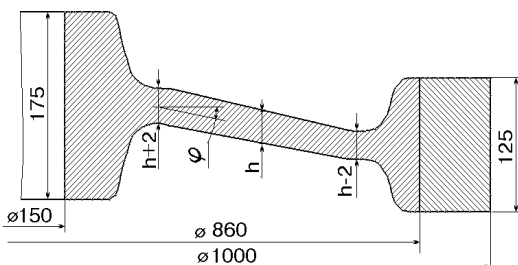


Рисунок 2 – Математическая модель

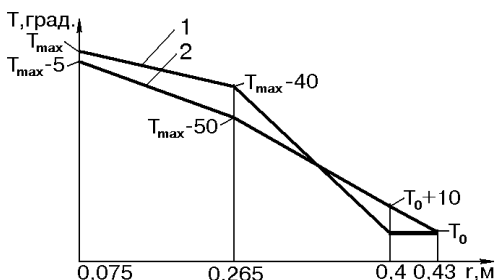


Рисунок 3 – Математическая модель температурного поля: 1 – поле в момент окончания нагрева (используется для определения максимальных температур и напряжений); 2 – поле в момент сборки – через 1 мин. после окончания нагрева (используется для определения расширения ступицы в момент сборки)

Метод решения. В качестве прототипа математической модели было взято колесо маневрового тепловоза (рис. 1) [3]. Модель (рис. 2) отличается от реального колеса переменным углом наклона дисковой части φ (от 0 до 30 град.), толщиной дисковой части h (от 0,02 до 0,05 м). При этом дисковая часть детали имеет линейно-переменную толщину: у ступицы она равна $h + 0,002$ м, в зоне перехода в бандаж – $h - 0,002$ м (в реальной конструкции $\varphi = 21^\circ$, $h = 0,031$ м). Величина натяга δ_1 в соединении диск-ось постоянна: $\delta_1 = 0,1$ мм; натяг δ_2 в соединении бандаж-диск составляет 0,2 или 0,4 мм, также рассматривается цельнокатаная конструкция. Все натяги даны как разность радиусов. Модель температурного поля построена на основе экспериментально полученного температурного поля нагрева ступицы колеса тепловоза под посадку на ось [4] (рис. 3). Модель представляется упругой системой, состоящей из колец и оболочек линейно-переменной толщины [1,5]. Угол наклона оболочки, ее толщина и значения натягов в модели могут изменяться. В расчетах

используется цилиндрическая система координат (r, z, θ) . Уровень максималь-

ных напряжений оценивается по эквивалентным напряжениям σ_e . Характеристики материала: модуль упругости $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; коэффициент температурного расширения $\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$, температура окружающей среды $T_0 = 20$ град. Все расчеты выполнены в предположении упругого деформирования конструкции.

Результаты расчета. На рис. 4 представлены графики максимальных эквивалентных напряжений σ_e в собранной модели, посаженной на ось в зависимости от ее формы (толщины оболочечной части h , угла наклона φ) и значений натягов. В графиках цельнокатаная конструкция обозначается индексом «Ц», соединения с натягом 0,2 мм – индексом «Н», с натягом 0,4 мм – «Н2». Напряжения показаны в зоне контакта оси и ступицы и в области перехода ступицы в дисковую часть, уровень напряжений в других частях конструкции существенно ниже.

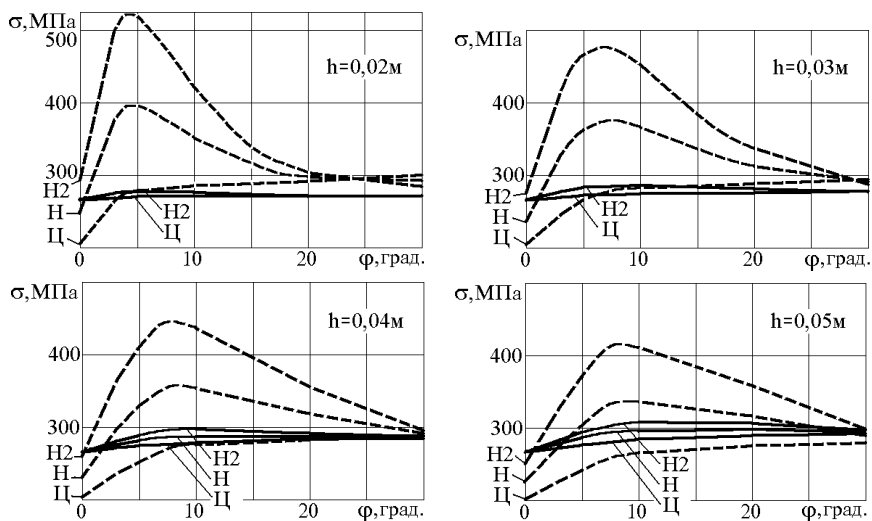


Рисунок 4 – Максимальные эквивалентные напряжения σ_e в собранной модели, посаженной на ось: — — зона контакта оси и ступицы; — — зона перехода ступицы в диск

На рис. 5 представлены максимальные эквивалентные напряжения σ_e в собранной модели при нагреве под посадку на ось в момент окончания нагрева, обусловленные неравномерным температурным полем и соединением ее частей с натягом. На рис. 6 приведены значения максимальных температур в конструкции в момент окончания нагрева в зависимости от формы модели и натяга в соединении колесного центра и бандажа, распределение температуры по радиусу детали см. рис. 3.

На рис. 7 представлены максимальные эквивалентные напряжения σ_e в

колесном центре при его нагреве под посадку на ось в момент окончания нагрева, на рис. 8 – максимальные температуры в момент окончания нагрева в зависимости от формы модели. При такой технологии сборки посадка бандажа осуществляется после соединения колесного центра с осью.

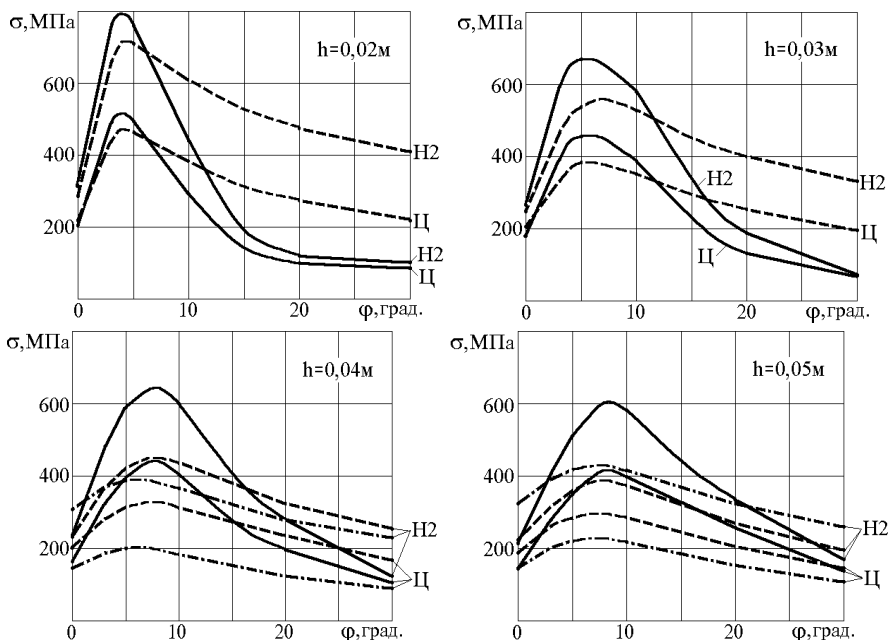


Рисунок 5 – Максимальные напряжения σ_c в собранной модели при нагреве ступицы под посадку на ось в момент окончания нагрева: — — зона перехода ступицы в диск, — — зона перехода ступицы в бандаж (венец); - · - зона контакта центра и бандажа

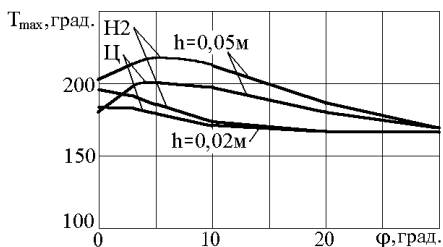


Рисунок 6 – Максимальные температуры в собранной конструкции при ее нагреве под посадку на ось в момент окончания нагрева

Таким образом, выполнено исследование напряженно-деформированного состояния характерной машиностроительной детали типа «обандаженный диск, посаженный на ось», включающей ступицу, дисковую часть, бандаж, с использованием математической модели в виде упругой системы нагруженной колец и оболочек линейно-переменной толщины.

Выводы. Исследовано влияние на НДС детали конструктивных факто-

ров (толщина дисковой части колесного центра, угол ее наклона) и технологических факторов (величина натяга соединения дисковая часть-бандаж в сопоставлении с монолитной конструкцией, максимальная температура нагрева). В модели были установлены зоны с высокими напряжениями:

- в зоне контакта оси и колесного центра;
- в зоне перехода ступицы в дисковую часть;
- в зоне перехода дисковой части в бандаж;
- в зоне контакта колесного центра и бандажа.

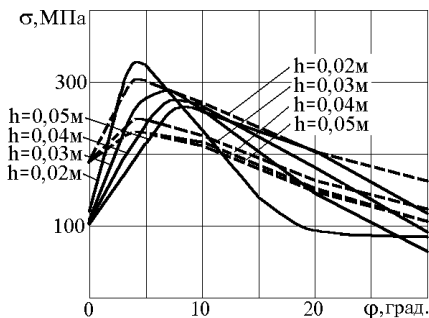


Рисунок 7 – Максимальные напряжения σ_e в колесном центре без бандажа при его нагреве под посадку на ось в момент окончания нагрева: — — зона перехода ступицы в диск, - - - зона перехода дисковой части в бандаж (венец)

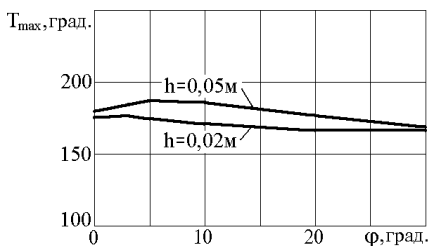


Рисунок 8 – Максимальные температуры в колесном центре без бандажа при нагреве ступицы под посадку на ось в момент окончания нагрева

-бандаж, толщина дисковой части и ее наклон практически не влияют на уровень напряжений в зоне соединения колесо-ось, в зоне перехода дисковой части в ступицу максимальные напряжения наблюдаются у диска с углом наклона 5-10°

Список литературы: 1. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Лобкова Н.А. Расчет конических оболочек линейно-переменной толщины. – Киев, Изд-во АН УССР, 1961. – 328 с. 2. Зенкевич О. Ме-

тод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. **3.** *А.Г.Андреев, Ю.М.Добровенский, С.В.Романов, О.В.Щепкин* Рациональное технологичное нагревания при сборці колісних пар залізничного рухомого складу // Вісник НТУ «ХП». – Вип. 31. – 2004. – С. 179-186. **4.** *Андреев А.Г., Щепкин А.В.* Оптимизация технологических нагревов бандажного колеса при сборке колесной пары тепловоза // Інформація по 2-й міжнародній науково-технічній конференції «Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве» Вісник інженерної академії України, Київ, 2000. – С. 415-418. **5.** *А.Г.Андреев, Г.Н.Багацкая, В.О.Галета, А.В.Щепкин* Исследование напряженно-деформированного состояния колеса тепловоза ТУ-7 при торможении // Отчет по х/т 21674, д.с. 986, N гос. регистрации 80052977, ВИНТИ N 0282.0062729, Харьков, 1982. – 149 с.

Поступила в редколлегию 18.04.2005

УДК (531.36+539.3):534.1

И.В.АНДРИАНОВ, докт.физ.-мат.наук,

А.О.ИВАНКОВ, канд.техн.наук, Приднепровская Академия
строительства и архитектуры, Днепропетровск;

М.В.МАТЯШ, канд.техн.наук, Днепропетровский национальный
университет

АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ И КОНТИНУАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ МАСС

Розглядаються різні континуальні моделі (КМ) для одновимірного середовища. Як приклад вибрано диференційно-різницеве рівняння, що описує систему зв'язаних осциляторів. Звичайна континуальна апроксимація (КА) дає гарні результати для нижньої частини спектра, але для змушених коливань погіршеність може бути дуже великою. Ми розглядаємо три можливих узагальнення КА: проміжні КМ отримані при заміні різницевого оператора (РО) диференціальним порядку $2k$, $k > 1$; квазі-КМ, що дають більш точне наближення РО за допомогою апроксимації Паде; двохточечні апроксимації Паде, які дають найбільш точні результати. Обговорено можливі додатки й узагальнення.

Various continuous models (CM) for 1D discrete media are under consideration. As example the difference-differential equation, describing a system of connected oscillators, is chosen. String-type approximation shows excellent results for low part of frequency spectra, but for forced oscillations the corresponding mistake can be very big. So, the more appropriate CM should be found. We analyze three following models: the intermediate CM are obtained by replacing the difference operator (DO) for the derivative operator of the order $2k$, $k > 1$; the quasi-CM are more accurate approximations of the DO via Padé approximates (PA); the two-point PA give the most precise results. Possibilities of the approach generalization and application are discussed.

Введение. Учет микроструктурных эффектов важен при моделировании кристаллических, полимерных и композитных материалов [1-3], в механике трещин [4,5], при описании эффектов гистерезиса [6], упрочнения и ослабления [9], в механике разрушения [5,9], молекулярной динамике [7], теории пластичности [8], теории фазовых переходов [12]. Дисперсия волн в гранулиро-

ванных материалах, особенно в грунтах, керамических материалах [5,9,13], также представляет пример влияния микроструктуры. Микроструктуру нужно учитывать при определении локальной деформации материалов [9]. Нельзя не упомянуть моделирование наноэффектов, таких как наноосцилляции и распространение трещин [10]. Наконец, построение теории упругости на основе атомарной теории – одна из важнейших задач физики твердого тела [11].

Указанные эффекты можно исследовать в рамках дискретных моделей, однако при этом даже современные компьютеры не всегда позволяют быстро и дешево получить искомый результат. Поэтому континуальное описание микро- и наноэффектов представляет большой интерес. Это тем более верно, что возможно построение смешанных дискретно-континуальных моделей, когда большая часть системы заменяется континуальной моделью, а некоторая локальная часть рассматривается дискретно [10].

При построении континуальных моделей можно выделить три основных подхода.

Феноменологический подход, когда некоторые дополнительные члены вводятся в функционал энергии или определяющие соотношения, причем структура и характер этих членов постулируются заранее [3], исходя из некоторых априорных соображений. Феноменологический подход удобен в некоторых приложениях, когда нужно быстро решить практически важную задачу. Однако прогресс механики требует построения соответствующих моделей, исходя из «первых принципов».

Статистический подход состоит в том, что отправляясь от исходной дискретной системы, в результате статистического осреднения получают некоторые континуальные модели [9]. К сожалению, большие математические трудности препятствуют пока последовательному применению этого метода.

Метод осреднения (гомогенизации) обычно основывается на так называемых Г- или G-осреднениях [7,11,12]. В этом направлении до настоящего времени получены, в основном, чисто математические результаты.

Применение всех описанных методов в динамике ограничено областью низких частот. Преодоление этой трудности возможно при помощи методов, основанных на аппроксимациях Паде.

Парадокс Курчанова-Мышкиса-Филимонова. Ограничимся одномерным случаем, а именно, рассмотрим цепочку из n материальных точек с одинаковыми массами m , расположенных в состоянии покоя в точках оси x с координатами jh ($j = 0, 1, \dots, n-1$) и соединенных упругими связями жесткости c (рис. 1,а). Исходные уравнения, описывающие движение цепочки, имеют такой вид:

$$m\ddot{y}_j(t) = \sigma_{j+1}(t) - \sigma_j(t), \quad (1)$$

где $y_j(t)$ – продольное перемещение j -й точки; $\sigma_j(t)$ – сила взаимодействия $(j-1)$ -й и j -й точек; $\sigma_j(t) = c(y_j(t) - y_{j-1}(t))$.

Пусть в момент времени $t = 0$ сила $f(t)$ приложена к нулевой точке:

$$\sigma_0(t) = -f(t), \quad \sigma_n(t) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Систему (1) нетрудно привести к виду

$$m\sigma_{j\bar{t}\bar{t}}(t) = c(\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

которой мы и будем пользоваться в дальнейшем. Для определенности зададим нулевые начальные условия

$$\sigma_j(t) = \sigma_{j\bar{t}}(t) = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (4)$$

Для больших значений n обычно используется непрерывная аппроксимация дискретной задачи (2)-(4):

$$m\sigma_{tt}(x, t) = ch^2\sigma_{xx}(x, t), \quad (5)$$

$$\sigma(0, t) = -f(t), \quad \sigma(l, t) = 0, \quad (6)$$

$$\sigma(x, 0) = \sigma_t(x, 0) = 0, \quad (7)$$

где $l = (n + 1)h$.

Имея решение краевой задачи (5)-(7), можно пересчитать решение для дискретной среды по формулам

$$\sigma_j(t) = \sigma(jh, t), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Полагая, без ограничения общности, $f(t) = -1$, нетрудно выписать точное решение указанной краевой задачи, используя метод Даламбера и операционное исчисление:

$$\sigma(x, t) = H \left(nh \arcsin \left| \sin \left(\frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{c}{m}} t \right) - x \right. \right), \quad (8)$$

где $H(\dots)$ – функция Хевисайда.

Отсюда непосредственно следует, что $|\sigma(x, t)| \leq 1$ для всех значений времени.

Подобная оценка, полученная, например, Н.Е. Жуковским, длительное время считалась сама собой разумеющейся. Однако в дальнейшем численные и аналитические исследования [14-16] показали, что нужно четко различать аппроксимацию глобальных и локальных характеристик дискретной системы. При исследовании нижней части спектра собственных частот дискретной системы переход к осредненной системе вполне оправдан, для вынужденных колебаний это может быть не так.

В исследованиях [14-16] численно показано, что для определенных значений масс в дискретной цепочке величина σ может существенно превысить значение 1. В частности, для некоторых значений n подобные превышения («всплески» или «пики») P_n таковы [16]:

П	8	16	32	64	128	256	$n \rightarrow \infty$
P_n	1,7561	2,0645	2,3468	2,6271	2,9078	3,1887	$P_n \rightarrow \infty$

С физической точки зрения в описанном явлении нет ничего удивительного. При вынужденных колебаниях в описании процесса участвуют как низкие, так и высокие гармоники, причем последние определяются осредненными соотношениями с большой погрешностью или даже принципиально не могут быть описаны уравнениями вида (5).

2. Собственные частоты. Полагая $f(t) = 0$, исследуем соотношение между собственными частотами колебаний дискретной (2)-(4) и непрерывной (5)-(7) систем.

Дискретная система имеет $n + 1$ собственных частот, описываемых следующей формулой (формула Лагранжа)

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{c}{m}} \sin \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (9)$$

Непрерывная система имеет дискретный бесконечный спектр

$$\alpha_k = \pi\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Выражения (10) аппроксимируют частоты колебаний дискретной системы (9), для первых частот – хорошо, для больших значений k – плохо, а скажем, ω_{n+1} определяется с погрешностью более 50% (числовой коэффициент π вместо 2). Точность аппроксимации (10) может быть повышена, об этом мы поговорим далее, а пока отметим следующее: частоты непрерывной системы ω_{n+2} , ω_{n+3} и т.д. никакого отношения к дискретной системе не имеют. Это – «паразитные частоты», и, если речь идет об исследовании дискретной системы (2)-(4), учитываться они не должны.

3. Вынужденные колебания. Перейдем к краевой задаче (5)-(7), полагая $f(t) = -1$. Решение будем разыскивать в виде

$$\sigma = 1 - \frac{x}{l} + u(x, t),$$

тогда функция $u(x, t)$ определяется соотношениями

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ch^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (11)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (12)$$

$$u(x, 0) = -1 + \frac{x}{l}; \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (13)$$

Решение краевой задачи (11)-(13) без труда находится методом Фурье:

$$u = \frac{-2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k} \cos(\alpha_k t). \quad (14)$$

Окончательно,

$$\sigma = \frac{-x}{l} + 1 - \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k} \cos(\alpha_k t). \quad (15)$$

Решение (15) описывает колебания струны или продольные колебания стержня. Если же мы хотим аппроксимировать движение цепочки частиц, то в бесконечной сумме нужно удерживать лишь $(n + 1)$ гармонику – остальные не имеют к движению цепочки масс никакого отношения. Это, по сути, не что иное как приближение Дебая [1,9]. Иными словами, движение дискретной системы (2)-(4) может быть приближенно описано при помощи выражения

$$\sigma = \frac{-x}{l} + 1 - \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k} \cos(\alpha_k t). \quad (16)$$

Численные расчеты с использованием выражения (16) показывают, что действительно имеют место обнаруженные в [14-16] «всплески», и σ может превосходить значение 1.

4. Промежуточные континуальные модели. Решение (16) качественно правильно описывает движение цепочки масс, однако количественно точность невысока, так как формы колебаний, близкие к $(n + 1)$ -й, описываются аппроксимацией (5) плохо.

Перепишем систему (1) в виде псевдодифференциального уравнения

$$m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + 4c \sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \sigma = 0. \quad (17)$$

Разложение разностного оператора $\sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right)$ в ряд Маклорена таково:

$$\sin^2 \left(-\frac{ih}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) = - \left(\frac{h^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{h^4}{48} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{h^6}{1440} \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \dots \right). \quad (18)$$

Удерживая в разложении (18) только первый член, получаем обычную континуальную аппроксимацию (5). Удерживая три члена, получаем аппроксимацию более высокого порядка

$$m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = ch^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 \sigma}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360} \frac{\partial^6 \sigma}{\partial x^6} \right). \quad (19)$$

Для уравнения (19) должны быть поставлены следующие краевые условия:

$$\sigma = \sigma_{,xx} = \sigma_{,xxx} = 0 \quad \text{при } x = 0, l. \quad (20)$$

Сравнение $(n + 1)$ -й частоты континуальной системы (19), (20) с соответствующей частотой дискретной системы показывает существенное увеличение точности (численный коэффициент 2,11 вместо 2 в точном решении, погрешность 5,5 %). Поэтому целесообразно использовать для описания движения цепочки масс решение (16), где, в соответствии с аппроксимацией (19),

$$\alpha_k = \pi \sqrt{\frac{c}{M} \frac{k}{n+1} \sqrt{1 - \frac{\pi^2 k^2}{12(n+1)^2} + \frac{\pi^4 k^4}{360(n+1)^4}}}. \quad (21)$$

Отметим, что оценка погрешности континуальной аппроксимации по погрешности определения максимальной для дискретной цепочки частоты весьма условна, однако наиболее проста. В общем случае подобная модель, названная в [16] промежуточной континуальной моделью, имеет вид

$$m \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 2c \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1} h^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} \sigma}{\partial x^{2k}} \quad (22)$$

$$\frac{\partial^{2k} \sigma}{\partial x^{2k}} = 0 \quad \text{при } x = 0, l; \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (23)$$

Для получения краевых условий (23) можно использовать вариационный принцип [16], либо следующие соображения. Уравнение (22) должно удовлетворяться для каждой степени $(h^2)^k$, начиная с нулевой (последнее – в силу исходных условий на концах цепочки (2)). Полагая $k = 0, 1, \dots, N-1$, приходим к граничным условиям (23).

Нетрудно убедиться, что корректность постановки краевой задачи требует, чтобы было выбрано $N = 2p + 1$ [16].

Применение промежуточных континуальных аппроксимаций позволяет уловить эффект всплесков [41].

5. Применение аппроксимаций Паде. Построение промежуточных континуальных моделей основано на разложении разностного оператора в ряд Тейлора. Между тем, более эффективной является аппроксимация по схеме Паде. По-видимому, впервые аппроксимации Паде были применены в теории цепочек (на интуитивном уровне, без употребления этого термина и теории аппроксимаций Паде) в [17]. В [18] предложено построение континуальных моделей (названных там квазиконтинуальной аппроксимацией) на основе одностепенных аппроксимаций Паде [19]. В частности по трем и пяти членам разложения (18) получаем выражения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left/ \left(1 - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right. \text{ и } \left(1 + \frac{h^2}{20} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left/ \left(1 - \frac{h^2}{30} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right.$$

Соответствующие модели квазиконтинуума таковы

$$m \left(1 - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{tt} - ch^2 \sigma_{xx} = 0; \quad (24)$$

$$m \left(1 - \frac{h^2}{30} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{tt} - ch^2 \left(1 + \frac{h^2}{20} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{xx} = 0. \quad (25)$$

Граничные условия для уравнения (24) имеют вид (6), для уравнения (25) следует задать

$$\sigma = \sigma_{xx} = 0 \quad \text{при } x = 0, l.$$

Погрешность в определении $(n + 1)$ -й частоты, по сравнению с дискретной цепочкой, составляет $\sim 16,5$ % для уравнения (24) и ~ 3 % для уравнения (25). Преимуществом уравнения (25) по сравнению с (19) является меньший порядок. Численное исследование подтверждает, что уравнения (24) и (25) улавливают эффект всплесков.

6. Применение двухточечных аппроксимаций Паде. Двухточечные аппроксимации Паде во многих случаях эффективнее одноточечных [19], поэтому естественно применить этот подход к построению континуальных аппроксимаций разностного оператора (18). Вторым предельным случаем при этом будут пилообразные колебания цепочки [20].

Построим двухточечную аппроксимацию разностного оператора, используя в качестве одного из предельных случаев первый член разложения (18) [21,22]. Кроме того, потребуем, чтобы $\alpha_{n+1} = 2\sqrt{c/m}$. Искомый оператор таков:

$$ch^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left/ \left(1 - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right.,$$

где $\alpha^2 = 0,25 - \pi^{-2}$.

Тогда континуальное приближение описывается уравнением

$$m \left(1 - \alpha^2 h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \sigma_{ii} - ch^2 \sigma_{xx} = 0 \quad (26)$$

с граничными условиями (6).

Наибольшая погрешность в определении собственных частот при этом достигается при $k = [0,5(n + 1)]$ и составляет менее 3 %. Существенно, что уравнение (26) имеет второй порядок по пространственной координате, то есть существенное повышение точности аппроксимации достигается не в результате повышения порядка дифференциального оператора, как это было в случае промежуточных континуальных моделей или для квазиконтинуальной аппроксимации. Уравнение (29) позволяет улавливать появление всплесков.

7. Особенности задачи для вынужденных колебаний. Система (2) – (4) допускает при $f(t) = -1$ точное решение [14]

$$\sigma_j(t) = \frac{l}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k j}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} (1 - \cos \omega_k t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Суммирование первой части отрезка ряда (27) позволяет перейти к такому выражению

$$\sigma_j = 1 - \frac{j l}{n+1} - \frac{l}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k j}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} \cos \omega_k t, \quad j = 0, 1, \dots, n+1. \quad (28)$$

Сравним выражение (28) и (15). Если разложить $\operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)}$ при малых k

$(k \ll n + 1)$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi k}{2(n+1)} = \frac{2(n+1)}{\pi k} - \frac{\pi k}{6(n+1)} - \dots$, и ограничиться первым членом разложения, то из формулы (28) имеем

$$\sigma_j \approx 1 - \frac{j l}{n+1} - \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k j}{n+1} \frac{\cos \omega_k t}{k}, \quad j = 0, 1, \dots, n+1. \quad (29)$$

Сравнение выражений (29) и (15) в точках $x = kl$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$) показывает, что мы имеем два источника погрешности непрерывной аппроксимации. Первая связана с погрешностью определения частот колебаний, и пути преодоления ее описаны выше. Вторая обусловлена погрешностью определения коэффициентов разложения. А именно, тем обстоятельством, что, разыскивая решение в виде бесконечного ряда Фурье (14), мы в дальнейшем ограничиваемся лишь начальным отрезком этого ряда (см. (16)). Эта погрешность может быть преодолена при помощи следующей процедуры.

Ищем решение краевой задачи (11) – (13) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{n+1} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\alpha_k t),$$

а для определения коэффициентов A_k используем метод коллокаций, точно удовлетворяя первому из начальных условий (13) в точках $x = kl$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$).

Возможные обобщения. Существуют широкие возможности обобщения полученных результатов. В первую очередь это двух- и трехмерные линейные решетки. Достаточно естественно выглядит обобщение на задачи, в которых параметры цепочки различаются на малую величину. При периодически меняющихся массах возникает явление фильтра частот, нашедшее широкое применение в современной технике.

Интересно обстоит дело с обобщениями на нелинейный случай. Как известно, в результате различных асимптотических упрощений можно получать различные приближенные нелинейные интегрируемые уравнения (КдВ, нелинейное уравнение Шредингера и т.д.) [23,24]. Далее эти уравнения интегрируются, что приводит к изящным солитонным решениям. Однако насколько обоснованы сами эти решения, в которых суммируются как низкие, так и высокие гармоники, заведомо чуждые для исходных уравнений, в настоящее время неясно.

Список литературы: 1. Борн М., Хуан Кунь Динамическая теория кристаллических решеток. – М. ИЛ, 1958. 2. *Aifantis E.C.* Gradient deformation models at nano, micro, and macro scales // ASME J. Engn. Mater. & Techn. 1999. – V. 121. – P. 189-202. 3. *Askes H., Metrikine A.V.* One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part I: Generic formulation // Eur. J. Mech. A /Solids. 2002. – V. 21. – P. 555-572. 4. *Askes H., Shyys L.J.* Explicit and implicit gradient series in damage mechanics // Eur. J. Mech. A /Solids. 2002. – V. 21. – P. 379-390. 5. *Chang C.S., Askes H., Shyys L.J.* Higher-order strain/higher-order stress gradient models derived from a discrete microstructure, with application to fracture // Eng. Fracture Mech. 2002. – V. 69. – P. 1907-1924. 6. *Rogers R.C., Truskinovsky L.* Discretization and hysteresis // Physica B. 1997. – V. 233. – P. 370-375. 7. *Blanc X., Bris C. Le, Lions P.-L.* From molecular models to continuum mechanics // Archive for Rational Mech. Anal. 2002. – V. 164. – P. 341-381. 8. *Fleck N.A.,*

Hutchinson J.W. A phenomenological theory for gradient effects in plasticity // *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. – V. 41. – P. 1825-1857. **9.** *Кунин И.А.* Теория упругих сред с микроструктурой: нелокальная теория упругости. – М., Наука, 1975. – 415с. **10.** *Dowell E.H., Tang D.* Multiscale, multiphenomena modelling and simulation at the nanoscale: on constructing reduced-order models for nonlinear dynamical systems with many degrees-of-freedom // *J. Appl. Mech.* 2003. – V. 70. – P. 328-338. **11.** *Paroni R.* From discrete to continuum: a Young measure approach // *ZAMP*. 2003. – V. 54. № 2. – P. 328-348. **12.** *Pagano S., Paroni R.* A simple model for phase transition: from the discrete to the continuum problem // *Quart. Appl. Math.* 2003. – V. 61. – P. 89-109. **13.** *Лизина С.А., Потанов А.И., Нестеренко В.Ф.* Нелинейная гранулированная среда с вращающимися частицами: одномерная модель // *Акустический журнал*. 2001. – Т. 47. № 5. – С. 685-693. **14.** *Курчанов П.Ф., Мышкис А.Д., Филимонов А.М.* Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера // *ПММ*. 1991. – Т. 55. № 6. – С. 989-995. **15.** *Filimonov A.* Some unexpected results on the classical problem of the string with N beads. The case of multiple frequencies // *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. Serie I*. 1992. – V.315. – P.957-961. **16.** *Filimonov A.M.* Continuous approximations of difference operators // *J.Difference Equations and Applications*. 1996. – V.2. № 4. – P.411-422. **17.** *Rosenau Ph.* Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit // *Physics Letters A*. 1986. – V. 118. № 5. – P. 222-227. **18.** *Duncan D.B., Eilbeck J.C., Feddersen H., Wattis J.A.D.* Solitons on lattices // *Physica D*. 1993. – V. 68. – P. 1-11. **19.** *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М., Мир, 1986. – 502 с. **20.** *Косевич А.М., Ковалев А.С.* Введение в нелинейную физическую механику. – Киев, Наукова думка, 1989. – 304 с. **21.** *Андрианов И.В.* Континуальная аппроксимация для высокочастотных колебаний цепочки // *ДАН УССР. Сер. А*. 1991. – С. 13-15. **22.** *Андрианов И.В.* Об особенностях предельного перехода от дискретной упругой среды к непрерывной // *ПММ*. 2002. – Т. 66. № 2. – С. 271-275. **23.** *Калякин Л.А.* Длинно-волновые асимптотики. Интегрируемые уравнения как асимптотический предел нелинейных систем // *УМН*. 1989. – Т. 44. № 1. – С. 5-33. **24.** *Manevitch L.I., Pervouchine V.P.* Transversal dynamics of one-dimensional chain on nonlinear asymmetric substrate // *Meccanica*. 2003. – V. 38. – P. 669-676.

Поступила в редколлегию 25.03.2005.

УДК 534.1:621.5

А.Е.БОЖКО, член-кор. НАНУ; **В.И.БЕЛЫХ**, канд.техн.наук;
О.А.ЗАЛИЗНЯК, ИПМаш НАН Украины, Харьков

ИСКЛЮЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ТУРБОАГРЕГАТОВ НА ПРОЦЕСС ДИАГНОСТИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Показано необхідність комплексного аналізу коливань опорного та упорного підшипників і контролю моментів зміни швидкості обертання ротора турбомашин при вібраційній діагностиці. Приведено систему контролю зміни швидкості обертання ротора для застосування її при часовій селекції вібраційного сигналу.

The necessity of the complex analysis of fluctuations of basic and persistent bearings and control of the moments of change of speed the circulation of a rotor turbo-machines is shown at vibrating diagnostics. The monitoring system of change of speed the circulation of a rotor for application it is indicated at temporary selection of a vibrating signal.

Задача идентификации сигналов вибропреобразователей при контроле продольных колебаний турбомашин является весьма актуальной. Действительно, при работе турбины часть энергии пара расходуется на создание осевого усилия, кото-

рое воспринимает упорный подшипник. При контроле продольной вибрации сигнал вибропреобразователя будет соответствовать осевому усилию, действующему на ротор и воспринимаемому упорным подшипником [1]

$$P_{OC} = P_L + P_D + P_V, \quad (1)$$

где P_L – суммарное осевое усилие на лопатки всех ступеней; P_D – суммарное осевое усилие на диски всех ступеней; P_V – суммарное осевое усилие на уступы ротора.

Комплексный метод вибродиагностики [2] включает в себя спектральный анализ продольных и поперечных колебаний опор и контроль изменения скорости вращения ротора.

Как известно, основными дефектами турбин являются трещина вала, дефекты лопаток, разрушение банджа, а также дефекты опор. В результате возникновения указанных дефектов увеличивается уровень вибрации в плоскости, перпендикулярной оси вращения турбины, однако получение информации о дефектах можно получить при анализе вибрационного сигнала и в продольном направлении. Покажем это на отдельных примерах.

В процессе формирования трещины упругие характеристики материала ротора будут изменяться и, следовательно, угол наклона оси (прогиб вала) будет увеличиваться в моменты, когда в нижней точке плоскости вращения находятся участки поверхности вала с более низкими упругими свойствами. Это, в свою очередь, приводит к увеличению давления на упорный подшипник. Таким образом, одновременный контроль вибрации в двух плоскостях дает возможность идентифицировать данный дефект до его возникновения.

Дефекты лопаток диагностируются по скачкообразному изменению дисбаланса ротора при контроле вибрации в плоскости вращения. Однако известно [3], что при формировании микротрещины в пластине, которой можно представить лопатку, изменяются ее упругие характеристики. Вследствие большого числа рабочих и неподвижных лопаток, а также высоких оборотов турбин возникающая вибрация будет высокочастотной [4]. Следовательно, в высокочастотной области спектра вибрационного сигнала, получаемого с вибропреобразователя, установленного на корпусе упорного подшипника, будет наблюдаться смещение информативных частот в сторону уменьшения, причем в процессе накопления усталости материалом лопатки изменение спектра будет более заметным. Таким образом, контроль высокочастотной вибрации в продольном направлении позволяет предотвратить поломку лопатки турбины.

Разрушение банджа можно определить в высокочастотной области вибрации при контроле продольных колебаний, а также по величине изменения окружной скорости вращения вала за счет неоднородности лобового сопротивления лопаток с разорванным банджом.

Дефекты каждой из опор турбины проявляются в той плоскости, для работы в которой предназначен данный подшипник.

В таблице приведены результаты анализа взаимосвязи вибрации в раз-

личных плоскостях ротора с возможными дефектами.

Идентификация дефектов турбомашин по комплексным показателям
(t – время; T – период вращения; + – наличие взаимосвязи)

№ п/п	Вид дефекта	Плоскость контроля				Изменение скорости вращения при $t < T$	Изменение скорости вращения при $t > T$
		попереч- ная		продоль- ная			
		Z	Y	X_Z	X_Y		
1	Трещина вала	+	+	+	-	+	-
2	Дефект лопаток	+	+	+	+	+	+
3	Дефект бандажа	-	-	+	+	-	+
4	Дефект опорного подшипника	+	+	-	-	-	+
5	Дефект упорного подшипника	-	-	+	+	-	+
6	Дисбаланс	+	+	-	-	-	-

Таким образом, комплексный анализ вибрации позволяет увеличить информативность диагностического сигнала, причем это достигается как за счет сравнения спектров в продольном и поперечном направлении, так и за счет контроля во временной области с учетом скорости изменения частоты вращения ротора.

Это можно пояснить следующим образом. В спектре продольной и поперечной вибрации имеются составляющие, связанные с переменными режимами работы турбоагрегата и не несущими информации о дефектах элементов турбины, то есть увеличивающими величину помехи. Исходя из этого, выражение (1) можно представить в следующем виде

$$P_{OC} = P_{ОСИ} + P_{ПРР}, \quad (2)$$

где $P_{ОСИ}$ – осевое усилие, несущее информацию о дефектах; $P_{ПРР}$ – осевое усилие, связанное с переменными режимами работы турбоагрегата

Переменные режимы работы турбоагрегатов приводят к изменению мощности и, следовательно, к изменению скорости вращения ротора. Основными факторами, вызывающими переменные режимы работы являются уменьшение давления подачи топлива, резкое изменение температурных режимов, отбор пара для технологических целей.

Если во временной области исключить эти составляющие, то отношение полезного сигнала и помехи в продольном направлении будет увеличиваться. Это можно достичь за счет использования временной селекции сигнала. В качестве критерия в этом случае может быть использованы моменты скачкообразных непериодических изменений скорости вращения ротора, вызванных переменными режимами работы турбоагрегата. На рис. 1 приведена блок-схема системы контроля изменения скорости вращения ротора.

Здесь ВП₁, ВП₂, ВП₃, ВП₄ – вибропреобразователи; СУ₁, СУ₂, СУ₃, СУ₄ – согласующие усилители; М₁, М₂, М₃, М₄ – блоки модуля; БД₁, БД₂ – блоки деления; БС – блок сравнения; БВМ₁, БВМ₂ – блоки выделения максимума; *arctg* – блок вычисления *arctg*; *d/dt* – блок вычисления производной; К₁, К₂ – управляемые ключи; БВВИ – блок выделения временного интервала; ЛЗ – линия задержки; БИ – блок индикации.

В представленной системе используются сигналы двух пар вибропреобразователей ВП₁, ВП₂ и ВП₃, ВП₄, которые устанавливают на опорном и упорном подшипниках соответственно. Это связано с тем, что при вращении ротора могут возникнуть прецессионные режимы работы. Обычно ротор турбины вращается во вкладышах опорных подшипников на масляном клине, давление в котором достаточно для того, чтобы приподнять вал и переместить его в сторону вращения. При увеличении скорости вращения ротора давление в клиновидном зазоре увеличивается и максимально возможное смещение центра вала влево может составить четверть диаметрального зазора.

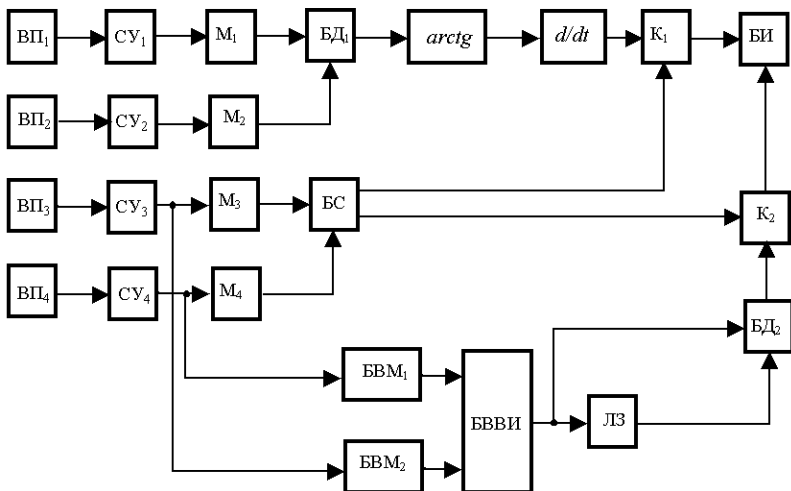


Рисунок 1 – Блок-схема системы контроля изменения скорости вращения ротора

При нормальном вращении ротора величина сигнала ВП₃, установленно-го в нижней точке опоры на оси θ_{1z_1} и измеряющего осевую вибрацию, всегда больше значения сигнала ВП₄, установленного на оси θ_{1y_1} . В результате этого ключ К₁ будет открыт, а ключ К₂ – закрыт и по сигналам вибропреобразователей ВП₁ и ВП₂ будет фиксироваться изменение скорости вращения вала в соответствии с выражением

$$\varepsilon = \frac{d}{dt} (\arctg \delta) = \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{|U_{ВП1}|}{|U_{ВП2}|} \right),$$

где δ – угол между линией приложения суммарного усилия к вкладышу опорного подшипника и осью $0_1 z_1$; $U_{ВП1}$, $U_{ВП2}$ – сигналы вибропреобразователей ВП₁ и ВП₂ соответственно (рис. 2).

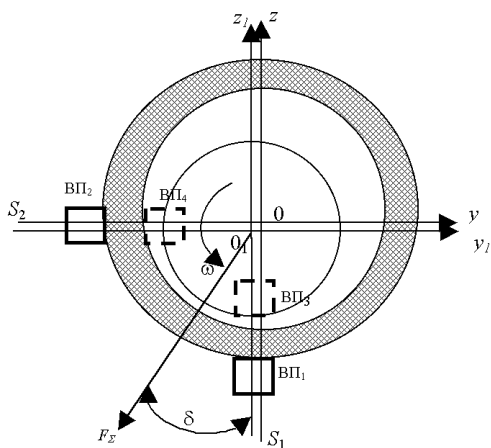


Рисунок 2 – Схема размещения вибропреобразователей по отношению к ротору

В случае прецессионного вращения вала изменение скорости вращения вала определяется по сигналам вибропреобразователей ВП₃ и ВП₄. В этом случае за период вращения возникает момент, когда $U_{ВП3} < U_{ВП4}$, тогда ключи K_1 и K_2 переключаются и на блок индикаторов поступает сигнал в виде отношения ω_2/ω_1 , причем выбор $\Delta\omega$ осуществляется подбором времени задержки.

Действительно, в этом случае время прохождения точки торца вала от ВП₃ до ВП₄, которые определяются блоком БВВИ, будет зависеть от скоро-

сти вращения ротора, а отношение текущего времени к предшествующему будет соответствовать отношению скоростей. Если дополнительно контролировать знак изменения скорости, то можно определить вид прецессионного движения.

Предложенный метод комплексного анализа вибрации турбомашин расширяет возможности диагностирования методом, рассмотренным в работе [5]. Предложенная система контроля изменения скорости вращения ротора может быть реализована на ЭВМ и иметь самостоятельное значение при исследовании различных режимов работы турбомашин.

Список литературы: 1. Смоленский А.Н. Паровые и газовые турбины. – М.: Машиностроение, 1977. – 288 с. 2. Божко А.Е., Белых В.И. Методика и система контроля подшипников скольжения газоперекачивающих агрегатов // Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования». – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2000. – С. 103. 3. Левин А.В. Боршанский К.Н., Консон Е.Д. Прочность и вибрация лопаток и дисков паровых турбин. – М.: Машиностроение, 1981. – 710 с. 4. Сидоренко М.К. Виброметрия газомоторных двигателей. – М.: Машиностроение, 1973. – 224 с. 5. Глебов И.А. Данилевич Я.Б. Диагностика турбоагрегатов. – Л.: Наука, 1989. – 119 с.

Поступила в редакцию 23.02.2005

В.Н.БОРЩЕВ, докт.техн.наук,

В.А.АНТОНОВА, канд.техн.наук,

А.М.ЛИСТРАТЕНКО, канд.техн.наук, ГП НИТИП, Харьков;

С.М.ШКОЛЬНИЙ, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков.

РАСЧЕТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КАРКАСОВ ПАНЕЛЕЙ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

В статті приведені результати, отримані при вирішенні проблеми проектування сотопластових каркасів сонячних батарей КА МС-2-8 з використанням вуглепластикових обшивок. Розв'язані задачі з отримання температурних полів та з отримання НДС для 3-D моделей таких каркасів.

In article the results received at the decision of a problem of designing honeycomb plastics of skeletons of solar batteries SA MS-2-8 with unseeing carbon fiber-reinforced plastic of coverings are given. Problems about reception of temperature fields and about reception of the IDC for 3-D models are solved

1. Введение и постановка задачи. Разработка солнечных батарей (СБ) для космических аппаратов (КА) непрерывно развивается в направлении увеличения коэффициента полезного действия, повышения надежности и снижения массы.

В результате поиска конструктивно-технологических решений по снижению массы каркасов СБ широкое применение получили трехслойные сотовые конструкции [1-4], которые состоят из двух тонких прочных облицовочных пластин – обшивок, толстой легкой сердцевины – сотового заполнителя, разделяющего несущие пластины и распределяющего нагрузку между ними, и адгезионных слоев, связывающих пластины с наполнителем и передающих нагрузку от заполнителя к облицовкам и обратно. Сотовый наполнитель работает на сдвиг и повышает изгибную жесткость системы.

Трехслойные конструкции обладают легкостью и жесткостью, хорошими звуко- и теплоизолирующими свойствами, высокой технологичностью, удовлетворительным качеством поверхности и формы, повышенной эксплуатационной надежностью вследствие отсутствия концентраторов напряжений, высокой вибростойкостью и стойкостью к атмосферным воздействиям.

Главными особенностями трехслойной конструкции является то, что она имеет момент инерции поперечного сечения значительно больший, чем однослойная той же массы, вследствие чего увеличивается поперечная жесткость и повышается критическое напряжение общей потери устойчивости [3]. При работе на поперечный изгиб трехслойная конструкция выгодна благодаря более высокому моменту сопротивления по сравнению с однослойной.

Основными функциями материалов для несущих пластин (обшивок) является обеспечение жесткости относительно изгиба и сдвига в плоскости пластин, а также передача нагрузок в той же плоскости [4]. В аэрокосмической

технике для обшивок используются композитные материалы, которые обеспечивают требования к таким важным характеристикам, как малая масса, высокие прочность и жесткость и хорошая стойкость к усталостным напряжениям.

Наиболее полно указанным требованиям удовлетворяют углепластиковые обшивки [2-4]. Углеродные волокна, входящие в состав углепластиков, кроме низкой плотности обладают высоким удельным модулем упругости и, следовательно, жесткостью в 7÷11 раз большей, чем у алюминия, титана и стали. Однако, несмотря на высокую жесткость графита, его работа на сжатие несколько ниже, чем работа на растяжение. Углепластики обладают по сравнению с стеклопластиками большей степенью черноты ϵ и более высокой теплопроводностью, что благоприятствует эффективному излучательному охлаждению СБ через поверхность.

Для углепластиков удельная прочность при растяжении $\sim 0,92$ ГПа (по сравнению с 0,2 ГПа для Al), модуль упругости – 84 ГПа, предел выносливости углеродных волокон составляет ~ 80 % от статической прочности по сравнению с 35 % у Al [4].

Следует отметить, что в аэрокосмической технике для углепластиков действуют температурные ограничения. В настоящее время имеются наибольшие достижения в области армирования волокнами, в то время как регулирование свойств матрицы все еще не достигло степени, при которой могли бы быть использованы все потенциальные возможности материала [4].

Несмотря на чрезвычайно низкие значения температурного коэффициента линейного расширения (ТКЛР) у графитовых волокон ($(0,6\div 1,0)\times 10^{-6}$ град⁻¹) [5,6], при изготовлении монослойных углепластиковых обшивок, в зависимости от технологии их изготовления и применяемых адгезивов, наблюдается значительное отличие ТКЛР в направлении основы (продольная ориентация волокон) и в направлении утка (поперечная ориентация волокон). В этом случае наличие даже небольшого температурного градиента по толщине каркаса может вызвать значительное его деформирование, что в свою очередь может стать возможной причиной разрушений токоведущих шин, коммутационных выводов и других конструктивных элементов СБ, изготовленных на таких каркасах, в условиях реального космического полета.

Для применения трехслойных сотовых конструкций с углепластиковыми обшивками и обеспечения их надежного и долговечного использования требуется проведение большого объема расчетных и экспериментальных исследований, включающих изучения механических свойств композитов и величин их разброса, разработку эффективных методов расчета, анализа и синтеза конструкций, исследование влияния температуры на механические свойства элементов каркаса, применяемых в условиях различного напряженно-деформационного состояния.

В качестве сотового каркаса для СБ КА МС-2-8 предложена трехслойная сотовая конструкция с двумя вариантами изготовления углепластико-

вых обшивок. При первом варианте обшивки сотопластового каркаса изготавливались из монослоя углеродной ленты ЭЛУР – 0,08. При втором варианте обшивки изготавливались из двух монослоев углеродной ленты ЭЛУР – 0,08 со схемой укладки слоев 0° ; 90° , то есть с взаимно перпендикулярным расположением углеродных волокон в слоях. Углеродные ленты пропитывались эпоксидным связующим ЭДТ – 10П. В качестве изоляционного покрытия поверхности углепластика использована полиимидная пленка марки ПМ-А толщиной 40 мкм.

Сотовый наполнитель изготовлен из алюминиевой фольги толщиной 23 мкм с ячейкой 6 мм. Клеевое соединение обшивок с сотовым наполнителем осуществлялось с помощью эпоксидного клея марки ЭПО-ФЛЕКС-04. Торцы каркаса залиты пеноклеем марки АЭРОПЛАСТ-400М.

Цель данной работы – проведение теплового расчета и расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) различных вариантов конструкций каркасов СБ для космического аппарата МС-2-8 и обоснование выбора необходимых конструктивно-технологических решений изготовления облегченных трехслойных сотовых каркасов с углепластиковыми обшивками.

2. Основная модель. Расчет тепловых полей и полей НДС каркаса проводился в трехмерной постановке с применением системы конечноэлементного анализа ANSYS.

Расчетная модель для определения температурного поля каркаса создавалась с использованием многослойных оболочечных конечных элементов SHELL131 с одной степенью свободы (температура TEMP в отдельном узле КЭ) и с использованием объемных конечных элементов SOLID70 с аналогичной степенью свободы в отдельном узле. Расчетная модель для проведения структурного анализа каркаса и определения его НДС создавалась с применением многослойных оболочечных элементов SHELL181 с шестью степенями свободы в одном узле (линейные перемещения UX,UY,UZ и углы поворота ROTX,ROTY,ROTZ), а также с применением объемных конечных элементов SOLID45 с тремя степенями свободы (линейные перемещения) в одном узле.

Геометрия расчетной модели каркаса создана с применением электронных копий проекта СБ. Общий вид части использованной для расчетов модели показан на рис. 1 (верхняя обшивка при этом сделана невидимой).

Физико-механические свойства материалов, входящих в состав конструкции, приведены в табл.1. Свойства алюминиевого сплава АМг2, применяемого для изготовления сотового наполнения и конструктивных элементов СБ, задавались как для изотропного материала. Необходимо отметить, что в диапазоне температур $\pm 100^\circ\text{C}$ некоторые характеристики как углепластиков так и алюминиевых сплавов имеют существенную зависимость от температуры. Для полученных решений по задачам теплового анализа такие зависимости были учтены как линейные.

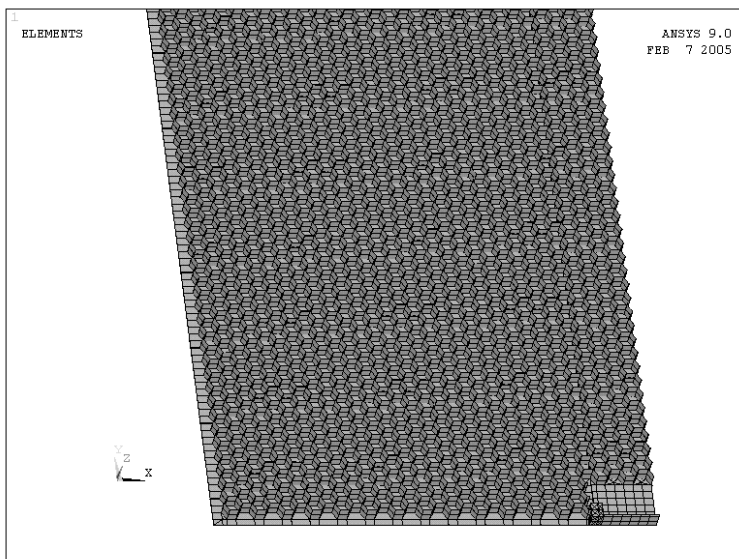


Рисунок 1 – Общий вид части конечноэлементной модели каркаса

Таблица 1 – Свойства материалов, входящих в состав конструкции каркаса СБ

Свойства материала	Материал	
	ЭЛУР-0,08	АМг2
1. Модуль упругости E_X , кг/мм ²	7522,5	6800,0
2. Модуль упругости E_Y , кг/мм ²	100,0	–
3. Модуль упругости E_Z , кг/мм ²	100,0	0,3
4. Коэффициент Пуассона ν_{XY}	$0,1994 \times 10^{-2}$	–
5. Коэффициент Пуассона ν_{YZ}	0,15	--
6. Коэффициент Пуассона ν_{XZ}	$0,1994 \times 10^{-2}$	--
7. Модуль сдвига G_{XY} , кг/мм ²	500,0	--
8. Модуль сдвига G_{YZ} , кг/мм ²	500,0	--
9. Модуль сдвига G_{XZ} , кг/мм ²	500,0	$0,268 \times 10^{-5}$
10. Плотность $DENS$, кг/мм ³	$0,15 \times 10^{-5}$	$0,242 \times 10^{-5}$
11. Температурный коэффициент линейного расширения $ALPX$, 1/°C	$0,5 \times 10^{-5}$	–
12. Температурный коэффициент линейного расширения $ALPY$, 1/°C	$0,14 \times 10^{-4}$	–
13. Температурный коэффициент линейного расширения $ALPZ$, 1/°C	$0,1 \times 10^{-4}$	0,175
14. Коэффициент теплопроводности K_{XX} , Вт/(мм · К)	$0,43 \times 10^{-2}$	–

Продолжение табл. 1

15. Коэффициент теплопроводности KYY, Вт/(мм · К)	$0,1 \times 10^{-1}$	–
16. Коэффициент теплопроводности KZZ, Вт/(мм · К)	$0,1 \times 10^{-1}$	–

Тепловой анализ для расчетной модели каркаса СБ с заданными условиями по температуре для наружных обшивок проводился достаточно быстро (несколько секунд), а результат помещался в файл типа *.RTN в базе данных задачи.

Позже выяснилось, что использование полученных в тепловом анализе температурных полей каркаса СБ для определения его НДС, с учетом зависимости свойств материалов от температуры невозможно, поскольку как для половины модели, так и для его 1/4 части, имела место системная ошибка ANSYS, указывающая на недостаточность ресурсов используемой техники. Вместе с тем, для 1/7-й части модели такое решение было получено. Рассмотренные ограничения привели к необходимости непосредственного задания температурных полей для наружных обшивок каркаса и его срединной поверхности при проведении структурного анализа, вместе с граничными условиями задачи.

Решения тестовых задач для модели каркаса СБ (точнее, для его половины, при учете конструктивной симметрии) показали необходимую устойчивость и точность получаемых численных решений.

В качестве граничных условий по перемещениям для всех задач применено жесткое заземление в зоне крепления панели СБ к несущей раме спутника и условие, связанное с конструктивной симметрией каркаса СБ (равенство нулю перемещений по оси OX относительно плоскости симметрии).

3.Численный анализ тепловых полей и НДС каркаса. Для описанной выше конечноэлементной модели каркаса СБ были решены задачи термоупругого деформирования для нескольких значений температурного градиента по его толщине (перепад температур от 0°С до 200°С) в температурном диапазоне (-100... + 100)°С и для двух реализаций наружных обшивок каркаса СБ – с применением монослоя углеродной ленты ЭЛУР-0,08, и с применением двух слоев углеродной ленты ЭЛУР-0,08 с расположением основных несущих волокон каждого слоя под углом в 90 градусов друг к другу. И в том, и в другом случае учитывалась облицовка обшивки полиимидной пленкой толщиной 40мкм.

В обоих случаях средняя зона обшивок шириной 80мм укреплялась тройным слоем ленты ЭЛУР-0,08 с перекрестным армированием основных углеродных волокон по каждому слою.

Результаты расчетов параметров НДС двух моделей каркасов СБ при различных значениях температурного градиента по толщине приведены в табл. 2.

Таблица 2 – Результаты расчетов параметров НДС каркасов СБ

Выполнение обшивки каркаса СБ	Определяемые параметры НДС	Температурный градиент по толщине каркаса солнечной батареи, °С			
		0	60	100	200
1. Монослой	Максимальные перемещения:				
	UX, [мм]:	-0,19	-0,176	0,175	0,165
	UY, [мм]:	1,424	1,227	-1,225	0,772
	UZ, [мм]:	0,326	-13,486	-22,59	-45,04
	USUM, [мм]:	1,43	13,508	22,597	45,04
	Эквивалентные напряжения по Мизесу, SEQV, [кг/мм ²):	14,41	12,06	11,758	12,226
2. Двойной слой	Максимальные перемещения:				
	UX, [мм]:	-0,208	-0,18	0,177	0,162
	UY, [мм]:	0,54	0,49	-0,47	0,42
	UZ, [мм]:	0,066	-8,94	-14,89	-29,74
	USUM, [мм]:	0,566	8,94	14,89	29,74
	Эквивалентные напряжения по Мизесу, SEQV, [кг/мм ²):	18,65	14,13	11,085	7,82

Соответствующие поля суммарных перемещений каркасов для различных градиентов температур по толщине каркаса приведены на рис. 2-5.

4. Выводы. Анализ результатов, полученных для описанных выше вариантов температурного нагружения и конструктивных реализаций обшивок каркаса СБ, позволяет сделать следующие выводы:

- величина линейных перемещений каркаса СБ, связанная с его однородным температурным нагружением по наружным обшивкам и по срединной поверхности, определяется в основном градиентом температуры по толщине каркаса, увеличиваясь при его росте и наоборот;

- применение монослоев углепластика ЭЛУР-0,08 для наружных обшивок каркаса СБ не оправдано, поскольку наличие даже небольшого температурного градиента по толщине каркаса и различие свойств по основе и по утку отдельного монослоя вызывают значительное деформирование (перемещение по нормали при перепаде температур между обшивками в 60 °С составляет 13,5 мм, перепаде в 100 °С – 23 мм, 200 °С – 45 мм. При этом отсутствие градиента по толщине каркаса при его нагреве до 100°С вызывает перемещение в плоскости обшивки каркаса величиной до 1,5 мм), что при расстояниях между фотопреобразователями ~0,8

мм может приводить к разрушению коммутационных выводов;

– при аналогичных температурных режимах (нулевой градиент; нагрев до +100 °С) для каркаса с двухслойными обшивками (0 °С, 90 °С) перемещение по утку примерно в три раза меньше (см. табл. 2), что говорит о целесообразности использования именно обшивок на основе двухслойной углеродной ленты.

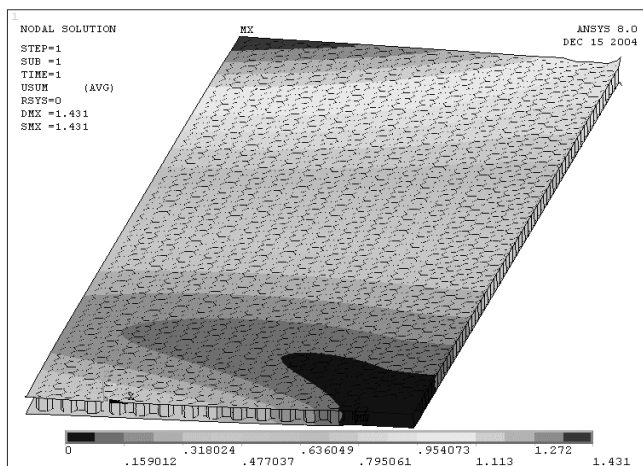


Рисунок 2 – Поле суммарных перемещений USUM для наружных обшивок каркаса изготовленных на основе монослоя углеродной ленты, при нулевом градиенте температур

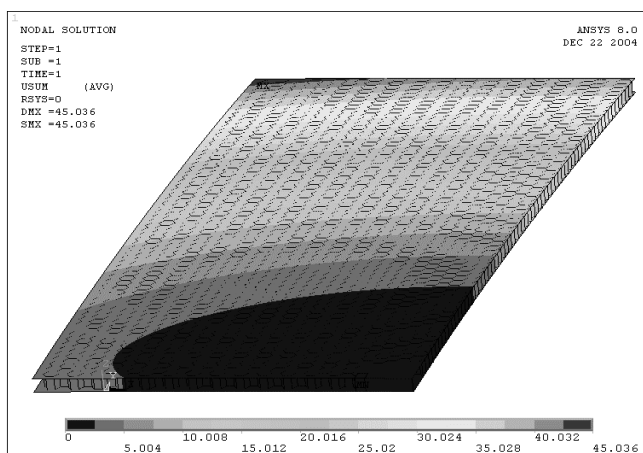


Рисунок 3 – Поле перемещений USUM для наружных обшивок, изготовленных на основе монослоя углеродной ленты, при перепаде температур между обшивками в 200 °С

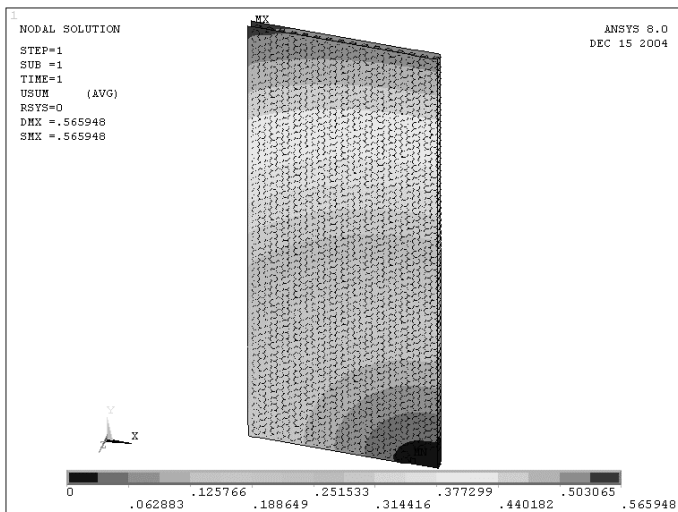


Рисунок 4 – Поле перемещений USUM для наружных обшивок, изготовленных на основе двойного слоя углеродной ленты, при нулевом градиенте температур

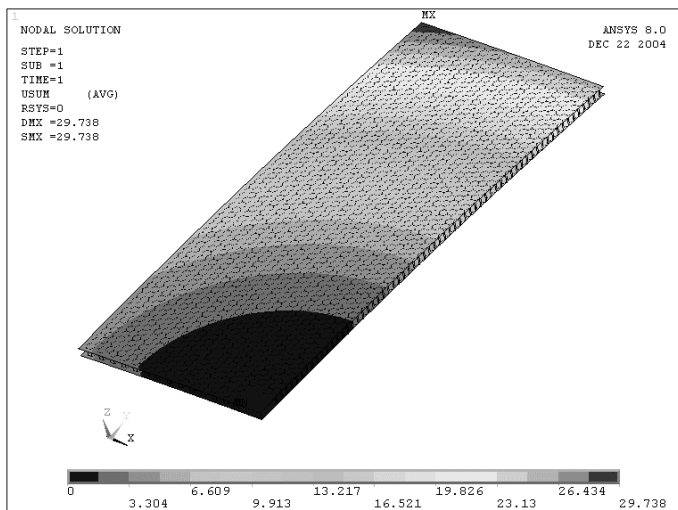


Рисунок 5 – Поле перемещений USUM для наружных обшивок, изготовленных на основе двойного слоя углеродной ленты, при перепаде температур в 200 °С

Необходимо подчеркнуть, что для полного теплового и структурного анализа СБ необходимо рассмотрение расчетных моделей, в которых учитывается влияние таких структурных элементов, как модули преобразователей

токосборных шин, коммутационные выводы и др. Такая работа в настоящее время проводится, она имеет более сложный характер, требует большего времени, хотя и не содержит принципиальных трудностей.

Список литературы: 1. Раушенбах Г. Справочник по проектированию солнечных батарей / Под ред. М.М. Колтуна. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с. 2. Белан Н.В., Безручко К.В., Елисеев В.Б. и др. Бортовые энергосистемы космических аппаратов на основе солнечных и химических батарей. Ч.1. – Харьков: ХАИ, 1992. – 192 с. 3. Безручко К.В., Гайдужов В.Р., Губин С.В. и др. Солнечные батареи автоматических космических аппаратов (компоновка на КА, конструкции узлов, проектировочные расчеты). – Харьков: Национальный аэрокосмический университет «ХАИ», 2001. – 276 с. 4. Справочник по композиционным материалам: в 2-х кн. Кн. 2. Пер. с англ. / Под ред. Б.Э. Геллера. – М.: Машиностроение, 1988. – 584 с. 5. Углеродные волокна / Под ред. С. Симамура. – М.: Мир, 1987. – 534 с. 6. Garter A.A., deOlivera R., Gandi A. Novel Thermal, Management Structures and their application in new Hybrid Technologies and Feed – Through Structure. Geneva 1999, CERN 99-08. – P. 1-4.

Поступила в редколлегию 20.02.2005.

УДК 539.3:612.76

Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ: МОДЕЛИ, ПОДХОДЫ, ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Ця стаття присвячена деяким механічним аспектам дослідження напружено-деформованого стану тіла хребця. Побудовані уточнені моделі тіла хребця, які можуть бути використані при подальших дослідженнях. Проведений якісний і кількісний аналіз впливу модуля пружності і коефіцієнтів анізотропії на поведінку хребця.

This article is devoted to some mechanical research aspects of vertebra body stressedly-deformed state. The specified models are built vertebra bodies, which can be used for further researches. The quality and quantitative influencing analysis of the elasticity modulus and anisotropy is conducted on the vertebra behaviour.

Актуальность

Биомеханические исследования костей и позвоночного столба в частности интенсивно ведутся последние 30 лет. Необходимость этих исследований вызвана целым рядом причин, таких как рост числа травм, попытками лечить такие повреждения, которые раньше были неоперабельными, а также достаточно большое число операций с послеоперационными осложнениями. Это стало возможно с появлением хорошо зарекомендовавших инструментов инженерных исследований, новых хирургических инструментов и роботов-манипуляторов. В совокупности они позволяют промоделировать и провести очень сложные операции.

Однако применять «в лобовую» инженерные методы исследования к биомеханическим системам практически невозможно, так как приходится учитывать ка-

чественно иную природу исследуемой системы. Ключевым моментом последней является сочетание в рамках одной системы «живой» биологической и чисто механической (металлической или керамической) частей. Биологические системы с одной стороны демонстрируют хорошую способность к самовосстановлению (при наличии соответствующих условий), с другой стороны характеризуются большим разбросом механических параметров. Первая особенность предоставляет врачу достаточно большую свободу в выборе способа лечения, ему требуется только «запрограммировать» процесс восстановления. А вторая особенность как раз приносит много проблем при учете индивидуальных особенностей, требуемом при лечении особо сложных случаев, так как при этом необходим очень точный выбор типа имплантанта, способа его установки и фиксации.

Эта статья посвящена некоторым механическим аспектам исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) тела позвонка и сегмента позвоночного столба, состоящего из нескольких позвонков. Автором был предпринят ряд попыток рассмотрения проблемы [1,2]. А именно, были построены в первом приближении геометрические и конечно-элементные модели как отдельного позвонка, так и сегментов из двух и трех позвонков, а также некоторых конструкций эндопротезов. Эти исследования, несмотря на достаточно достоверные результаты, показали необходимость уточнения в дальнейшем всех элементов системы позвонков-эндопротез-позвонков.

Постановка задачи

При исследовании системы позвонков-эндопротез-позвонков используется более точная модель тела позвонка (рис. 1), чем в предыдущих исследованиях [1-3]. Исследуется НДС поясничного отдела позвоночного столба, при этом отрабатывается методика исследования травм собственно тела позвонка, что позволяет учесть известное из литературы распределение усилий на 80 % и 20 % между телом позвонка и отростками.

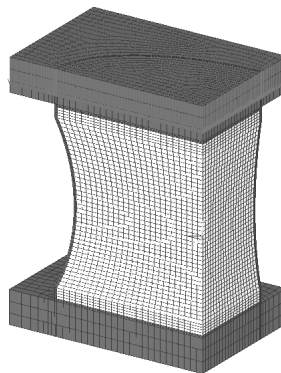


Рисунок 1 – Конечноэлементная модель тела позвонка

Таблица 1 – Свойства материалов

Материал	Модуль упругости E, МПа	Коэффициент Пуассона	Источник
Кортикальная кость	12000	0,3	[4,5]
Трабекулярная кость	67+/-45	0,2	[6]
	25	0,2	[4]
	100	0,2	[5]

Тело позвонка состоит из двух материалов: кортикальной и трабекулярной костей. Кортикальная кость является материалом оболочки тела позвонка, отростков и концевых пластинок. Основная часть позвонка состоит из трабекулярной кости. Трабекулярная кость – упругий и пористый, анизотропный материал с сильной неоднородностью. Его упругие и прочностные свойства сильно варьируются в зависимости от анатомического положения, возраста и заболеваний. Несмотря на то, что эти свойства очень сильно зависят от плотности, роль структуры и свойств материала ткани остается до сих пор малоизученной [6]. Размер поры – около 1 мм, а трабекулярная толщина – на порядок меньше. Трабекулярная микроструктура обычно ориентирована так, что «нити» ориентированы вдоль направлений наибольших механической жесткости и прочности. Направленность микроструктуры создает анизотропию механических свойств трабекулярной кости. Трабекулярная ткань, по сути, морфологически подобна кортикальной кости (анизотропный композит гидроксилатапата, коллагена, воды и некоторого количества других протеинов), но она собрана в «пакеты» пластичатых костей [7]. Подобно многим биологическим материалам, она демонстрирует зависимое от времени поведение, а также чувствительность к разрушению в процессе циклического нагружения.

Поскольку в литературе часто используются различные модели свойств трабекулярной ткани (в том числе изотропная модель, некоторая эквивалентная трансверсально анизотропная, а также микроизотропная с моделированием особенностей микрогеометрии), то для обоснования применения тех или иных моделей требуется сравнительное исследование поведения тела позвонка с разными свойствами трабекулярной кости под нагрузкой.

Таблица 2 – Коэффициенты анизотропии для расчета № 8 (см. табл. 3)

	Коэффициент анизотропии		Коэффициент анизотропии
E_{ZZ}	1,000	E_{XX}/E_{ZZ}	0,300
ν_{XY}	0,266	E_{YY}/E_{ZZ}	0,300
ν_{ZX}	0,117	G_{XY}/E_{ZZ}	0,153
ν_{ZY}	0,117	G_{XZ}/E_{ZZ}	0,150
		G_{YZ}/E_{ZZ}	0,150

Расчетные модели тела позвонка и результаты расчетов

В табл. 1 и 2 приведены физико-механические характеристики материала трабекулярной кости [4-6,8]. В табл. 3 – варианты расчетных моделей.

На основе трехмерного 20-узлового структурного конечного элемента была построена конечно-элементная модель четверти тела позвонка, состоящая из 29746 элементов. Влияние оставшейся части тела позвонка учитывалось условиями симметрии. Нагружение проводилось через две пластины. При этом нижняя пластина фиксировалась за нижнюю поверхность. Верхняя пластина нагружалась сжимающим усилием 500 Н.

Результаты расчетов сведены в табл. 4.

На рис. 2-4 сравнительные характеристики НДС для изотропных вариантов материала. На рис. 5-7 – результаты расчетов для различных значений модуля упругости изотропного материала трабекулярной кости. На рис. 8 – результаты для анизотропного материала трабекулярной кости.

Таблица 3 – Варианты расчетных моделей

№ серии	E, МПа	Примечание
1	22	Трабекулярная кость – изотропный материал
2	25	Трабекулярная кость – изотропный материал
3	67	Трабекулярная кость – изотропный материал
4	100	Трабекулярная кость – изотропный материал
5	112	Трабекулярная кость – изотропный материал
6	67	Все тело из одного материала
7	12000	Все тело из одного материала
8	анизотропия	Трабекулярная кость – анизотропный материал

Таблица 4 – Результаты расчетов

№ серии	max U_z , $1 \cdot 10^{-3}$ м	max SEQV* в трабекулярной кости, МПа	max SEQV в кортикальной кости, МПа
1	0,12417	0,4965	148,9900
2	0,12341	0,5515	145,4600
3	0,10866	1,1483	115,3000
4	0,103	1,4679	101,5100
5	0,10074	1,5629	97,4750
6	0,93673	4,3650	4,3650
7	$6,75 \cdot 10^{-3}$	12,9370	12,9370
8	0,11264	0,6652	130,0900

* эквивалентные по Мизесу напряжения

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. С увеличением модуля упругости трабекулярной кости наблюдается близкое к линейной зависимости уменьшение осевых перемещений точек верхней пластины позвонка. При этом увеличение модуля упругости с 22 до 112 МПа (в 5 раз) приводит к уменьшению перемещений с 0,125 мм до 0,10 мм (на 19 %).

2. С увеличением модуля упругости трабекулярной ткани напряжения в самой трабекулярной кости сильно растут примерно по линейной зависимости (с 0,49 МПа до 1,56 МПа). При этом практически в 1,5 раза снижаются напряжения в кортикальной кости.

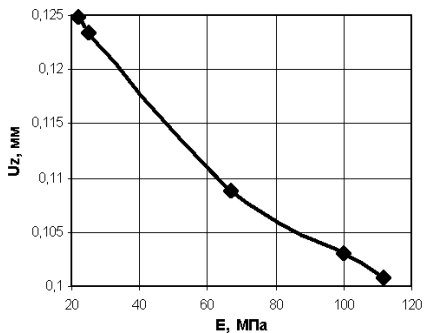


Рисунок 2 – Зависимость максимальных вертикальных перемещений от модуля упругости

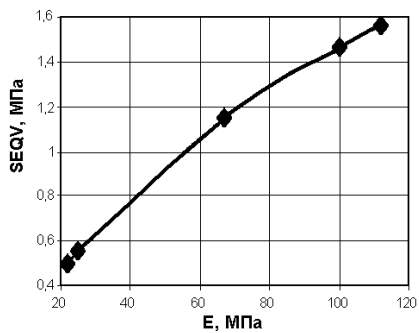


Рисунок 3 – Зависимость максимальных эквивалентных по Мизесу напряжений от модуля упругости в трабекулярной ткани

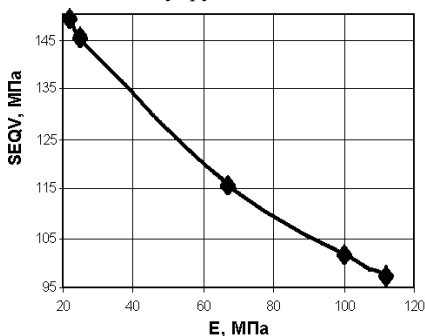


Рисунок 4 – Зависимость максимальных эквивалентных по Мизесу напряжений от модуля упругости в кортикальной оболочке

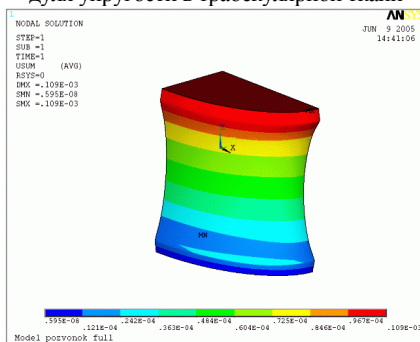


Рисунок 5 – Диаграмма распределения суммарных перемещений для первого расчета в теле позвонка (см.табл.3)

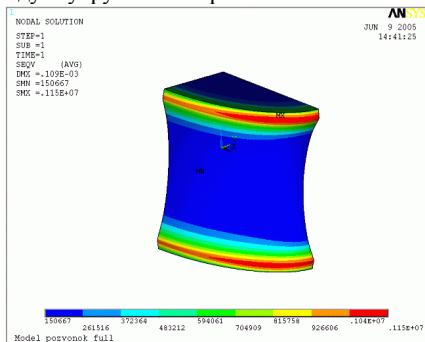


Рисунок 6 – Диаграмма распределения эквивалентных по Мизесу напряжений для первого расчета в трабекулярной ткани (см.табл.3)

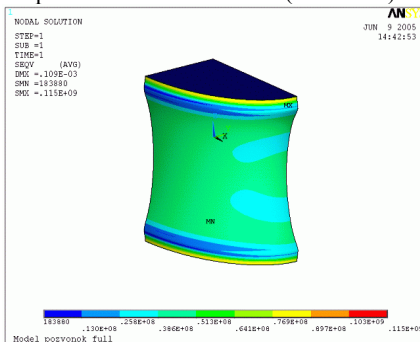


Рисунок 7 – Диаграмма распределения эквивалентных по Мизесу напряжений для первого расчета в кортик. оболочке (см.табл.3)

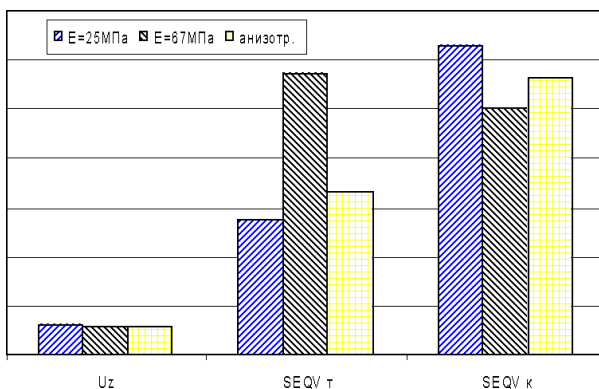


Рисунок 8 – Влияние анизотропии на НДС

3. При учете анизотропии материала трабекулярной кости перемещения и напряжения в кортикальной кости практически не меняются по сравнению с изотропным случаем при $E = 67$ МПа. А в трабекулярной ткани наблюдается практически 2-кратное уменьшение напряжения (почти уровень изотропного материала с $E = 25$ МПа).

Выводы и направления дальнейших исследований

Предложенная технология исследований реализована в виде соответствующего программного обеспечения, параметрических геометрических и конечно-элементных моделей позвонков. Получены результаты сравнительного анализа напряженно-деформированного состояния тел позвонков с различными свойствами трабекулярной ткани.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. Проверена работоспособность предложенной технологии исследования напряженно-деформированного состояния элементов биомеханических систем на ряде конкретных примеров.
2. Построены уточненные модели тела позвонка, которые могут быть использованы при дальнейших исследованиях.
3. Проведен качественный и количественный анализ влияния модуля упругости и коэффициентов анизотропии на поведение позвонка.
4. Полученные результаты и модели могут быть положены в основу при разработке критериев проектирования эндопротезов.

Все это позволяет заключить, что разработан достаточно мощный инструмент моделирования НДС биомеханических систем.

В качестве основных направлений дальнейших исследований предлагаются следующие.

1. Разработка уточненных моделей трабекулярной кости на основе экспериментальных данных и расчета напряженно-деформированного состояния микроструктур на уровне трабекул.

2. Разработка моделей биомеханических систем, включающих эндопротез и тела позвонков.

3. Разработка программного обеспечения для формирования специализированной системы автоматизированного анализа и синтеза элементов биомеханических систем.

Список литературы: 1. *Веретельник Ю.В.* Модели элементов биомеханических систем: решение прямых и обратных задач // *Механіка та машинобудування*. Науково-технічний журнал. – Харків: НТУ «ХПИ», 2004. – № 2. – С.63-67. 2. *Ткачук Н.А., Веретельник Ю.В.* К вопросу анализа и синтеза элементов биомеханических систем // *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПИ», 2004. – № 31. – С.149-152. 3. *Ткачук М.А., Радченко В.А., Веретельник Ю.В.* Узагальнений параметричний опис складних біомеханічних. Стаття опублікована в цьому збірнику. 4. *Tobias Pitzen, Fred H. Geisler, Dieter Matthis.* The influence of cancellous bone density on load sharing in human lumbar spine: a comparison between an intact and a surgically altered motion segment // *Eur. Spine J.* (2001). – 10: 23-29. 5. *V.K. Goel, Y.E. Kim, T.-H. Lim, J.N.Wienstein.* An analytical investigation of the mechanics of spinal instrumentation // *Spine vol. 13,* 9:1003-1011. 6. *Tony M. Keaveny, Elise F. Morgan, Glen L. Niebur, Oscar C. Yah.* Biomechanics of trabecular bone // *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 2001. – 3: 307-33. 7. *Choi K, Goldstein S.A.* A comparison of the fatigue behavior of human trabecular and cortical bone tissue // *J. Biomech.* 1992. – 25: 1371–81. 8. *Michael A.K. Liebschner, David L. Koppehdahl, William S. Rosenberg, Tony M. Keaveny* Finite element modeling of the human thoracolumbar spine // *Spine vol. 28,* 6:559-565.

Поступила в редколлегию 25.04.2005.

УДК 539.3

С.М.ВЕРЕЩАКА, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

К ИССЛЕДОВАНИЮ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА С МЕЖФАЗНЫМИ ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

Пропонується варіант геометрично нелінійної дискретно-структурної теорії багатосарових конструкцій досліджується напружено-деформований стан анізотропних елементів з міжфазними дефектами структури матеріалу. Рівняння рівноваги та геометричні співвідношення отримані з урахуванням впливу деформацій поперечного зсуву та обтиснення. Результати теоретичних досліджень порівнюються з експериментальними даними.

On the basis of the geometric nonlinear discrete - structural theory of multy-layer plates and shells the intense – deformed status of anisotropic elements with defects in structure of material is investigated. At the conclusion of the equations of balance and geometrical parity the influence of deformations of cross shift and cross-pressure is taken into account. The results of theoretical researches are compared with experimental data.

Значительное различие физико-механических характеристик отдельных компонент структуры слоистых тонкостенных элементов конструкций стало причиной создания адекватных дискретно-структурных теорий для расчета

такого класса задач.

Контактная задача механики многослойных пластинок и оболочек рассматривается в [1-5], где на основе дискретного подхода построены функционалы и получены системы уравнений для решения таких задач при условии неидеального контакта слоев. Метод решения нелинейных задач о контакте между двумя оболочками разной формы и эквидистантными слоями предложен в книге [6]. Подробный анализ последних результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзоре [7].

В данной работе предлагается вариант геометрически нелинейной дискретно-структурной теории слоистых элементов конструкции и исследуется характер изменения контактных напряжений при изгибе двухслойных пластин из стеклопластика с межфазными дефектами структуры материала. При выводе уравнений равновесия и геометрических соотношения учитывается влияние деформаций поперечного сдвига и обжатия. Результаты теоретических исследований сравниваются с экспериментальными данными.

Постановка задачи. В соответствии с дискретно-структурной теорией математическая модель рассматриваемой здесь многослойной оболочки состоит из n тонких анизотропных слоев. Объем n жестких слоев равен $V = \sum_{i=1}^n V_i$. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α^i ($i = 1, 2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$ k -го слоя. Индекс « z » при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$.

Вектор полного перемещения $\vec{u}_z^{(k)}$ точки k -го жесткого слоя согласно уточненной теории оболочек Тимошенко можно представить в виде

$$\vec{u}_z^{(k)} = \vec{u}^{(k)} + z^{(k)} \vec{\gamma}^{(k)} + \varphi^{(k)}(z) \vec{\psi}^{(k)}, \quad (1)$$

где $\vec{u}_z^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон по направлению нормали к недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$ в процессе деформации; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине k -го слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [8]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ – вектор-функция сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}$, $\vec{\gamma}^{(k)}$, $\vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (2)$$

Компоненты тензора конечных деформаций в точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ определяются как полуразности соответствующих компонент метрических тензоров

до, и после деформации

$$2\mathbf{\varepsilon}_{ij}^{(k)z} = \mathbf{g}_{ij}^{(k)*} - \mathbf{g}_{ij}^{(k)}, \quad 2\mathbf{\varepsilon}_{i3}^{(k)z} = \mathbf{g}_{i3}^{(k)*} - \mathbf{g}_{i3}^{(k)}, \quad 2\mathbf{\varepsilon}_{33}^{(k)z} = \mathbf{g}_{33}^{(k)*} - 1, \quad (3)$$

Считая, что в направлении нормали к срединным поверхностям отдельно взятых слоев оболочки осевые линии общей и локальных систем координат совмещаются и также совмещаются локальные координатные поверхности со срединными поверхностями слоев, вариационное уравнение принципа Рейснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint \delta (\sigma_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}) dV = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты z от единицы до n . При этом $F^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации k -го слоя, $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

Если по сопряженным лицевым поверхностям k -го слоя выполняются условия контакта:

$$\mathbf{u}_{\beta}^{(k, k-1)} = \mathbf{u}_{\beta}^{(k-1, k)}, \quad X_{(k, k-1)}^{\beta} = X_{(k-1, k)}^{\beta}, \quad (5)$$

или в векторной форме –

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_{\bar{z}}^{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{\mathbf{u}}_{\bar{z}}^{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2), \\ \bar{X}_{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{X}_{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (6)$$

вариацию элементарной работы внешних сил δA_R можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta A_R &= \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iint_{S_{(k)}} (\bar{X}_{(k)} \delta \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \varepsilon_{33}^{(k)z}) dS + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\psi}^{(k)}) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{\mathbf{u}}^{(k)} + G_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + \\ &+ (\bar{\mathbf{u}}^{(k)} - \bar{\mathbf{u}}_S^{(k)}) \delta \bar{\Phi}_{(k)} + (\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_S^{(k)}) \delta \bar{G}_{(k)} + (\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_S^{(k)}) \delta \bar{L}_{(k)}) dl. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $S_{(k)}$ – срединная поверхность k -го слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ – части контура $l^{(k)}$. Векторы внешних усилий $\bar{X}_{(k)}$, моментов $\bar{M}_{(k)}$ и дополнительных моментов $\bar{B}_{(k)}$, которые входят в уравнение (7), определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{(k)} &= \bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^- + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} dz, \quad \bar{M}_{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} z dz, \\ \bar{B}_{(k)} &= \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} \right) (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} \varphi^{(k)}(z) dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где векторы $\bar{X}_{(k)}^+$, $\bar{X}_{(k)}^-$ включают контравариантные компоненты тензора

контактных напряжений $\sigma_{(k)}^{i3+}$, $\sigma_{(k)}^{i3-}$ ($i = 1, 2, 3$) :

$$\bar{X}_{(k)}^+ = \sigma_{(k)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33+} \bar{m}^{(k)*}, \quad \bar{X}_{(k)}^- = \sigma_{(k)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33-} \bar{m}^{(k)*} \quad (i = 1, 2). \quad (9)$$

Индексы «+» и «-» указывают на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности k -го слоя. Аналогичную запись имеют векторы внешней нагрузки $\bar{q}_{(n)}^+$, $\bar{q}_{(1)}^-$:

$$\bar{q}_{(n)}^+ = q_{(n)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(n)*} + q_{(n)}^{33+} \bar{m}^{(n)*}, \quad \bar{q}_{(1)}^- = q_{(1)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(1)*} + q_{(1)}^{33-} \bar{m}^{(1)*} \quad (i = 1, 2). \quad (10)$$

Вектор $\bar{P}^{(k)}$ учитывает влияние собственного веса. Контравариантные компоненты $M_{(k)}^i$, $M_{(k)}^3$ вектор-момента $\bar{M}_{(k)}$ относительно базисных векторов $\bar{r}_i^{(k)*}$ и $\bar{m}^{(k)*}$ находятся согласно равенства

$$\bar{M}_{(k)} = M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)*} + \bar{m}^{(k)*} M_{(k)}^3. \quad (11)$$

Кроме этого, элементарная работа (7) k -го слоя оболочки характеризуется главным вектором $\bar{\Phi}_{(k)}^S$, главным моментом $\bar{G}_{(k)}^S$, дополнительным главным моментом $\bar{L}_{(k)}^S$, которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на $I_1^{(k)}$, а также главным вектором $\bar{\Phi}_{(k)}$, главным моментом $\bar{G}_{(k)}$, дополнительным главным моментом $\bar{L}_{(k)}$, связанных с напряжениями в точках контура $I_2^{(k)}$ из-за заданного смещения точек контура $\bar{u}_S^{(k)}$.

Второе слагаемое уравнения (4) следует представить в виде

$$\delta\Pi_R = \sum_{k=1}^n (\delta\Pi_{1R}^{(k)} + \delta\Pi_{2R}^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \iiint \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}) \delta\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{1R}^{(k)} &= \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta\eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)\#} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta\varepsilon_{i3}^{(k)\#} + \sigma_{(k)}^{33} \delta\varepsilon_{33}^{(k)\#}) dV, \\ \delta\Pi_{2R}^{(k)} &= -\iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = -\iiint_{V^{(k)}} \{ (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{ij} - \varepsilon_{ij}^{(k)\#}) \delta\sigma_{(k)}^{ij} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{i3} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\#}) \times \\ &\quad \times \delta\sigma_{(k)}^{i3} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{33} - \varepsilon_{33}^{(k)\#}) \delta\sigma_{(k)}^{33} \} dV \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned}$$

Подставив геометрические соотношения (3) в (4), (7), (12), на основе вариационного принципа Рейсснера несложно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки [9] значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий. Переход к физическим компонентам, используемых в данной работе тензоров, вывод уравнений равновесия и граничных условий можно найти в работе [10].

Для оболочки вращения, которая включает в себя n слоев с соосными

поверхностями вращения, разрешающая система уравнений в частных производных имеет вид

$$\frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} = D_0^{(k)} \bar{Y}^{(k)} + D_1^{(k)} \frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} + D_2^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)}^2 \partial \alpha_2^{(k)2}} + \bar{f}^{(k)}, \quad k=1,2..n, \quad (13)$$

где

$$\bar{Y}^{(k)} = \{T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}^{(k)}, M_{12}^{(k)}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)}\}^T, \\ \bar{f}^{(k)} = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{14}^{(k)}\}, \quad D_0^{(k)}, D_1^{(k)}, D_2^{(k)} - \text{квадратные матрицы 14-го порядка.}$$

В качестве основных неизвестных функций принимаются величины, которые определяют граничные условия на боковом контуре k -го слоя оболочки. Из-за ограниченного объема статьи показать разрешающую систему уравнений, физические и геометрические соотношения в развернутой форме не представляется возможным.

Кинематические и статические условия контакта (5) лицевых поверхностей k -го слоя и сопряженных с ними поверхностями $k+1$ и $k-1$ -го слоя, согласно с введенными ранее обозначениями принимают вид:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)} \left(\frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)} \left(\frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}, \\ (i=1,2); \quad 2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}; \quad (14)$$

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+}, \quad (i=1,2); \\ \sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}, \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (15)$$

Учитывая кинематические соотношения (14) при построении разрешающей системы уравнений (13) для всего пакета слоев элемента и выполняя статические условия контакта по лицевым сопряженным поверхностям (15) на основе метода штрафных функций [11], можно составить алгоритм решения контактной задачи дискретно-структурной теории многослойных оболочек.

Если между k и $k+1$ слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на участках сопряжения этих слоев $S_z^{(k, k+1)}$ могут возникать неизвестные векторы усилий $\bar{q}_{(k)}$, $\bar{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость: $\bar{q}_{(k)} = -\bar{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в вариационное уравнение принципа Рейсснера (4) необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу сил контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k, k-1)}} \bar{q}_{(m)} \bar{u}_z^{(m)} dS. \quad (16)$$

Усилия контактного взаимодействия $\bar{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \bar{m}^{(k)}$ возникают

при выполнении условия

$$(\bar{u}_z^{(k)} - \bar{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (17)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (17) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k, k+1)}$ в процессе деформации, контактное давление $\bar{q}_{(k)}$ в уравнениях (13) принимает значение $\bar{q}_{(k)} = 0$. Решая систему уравнений (13) несложно с заданной точностью найти значение контактного давления на основе итерационного метода, предложенного в [6].

Пример расчета. Для тестовых примеров исследовались пластины круглой форме в плане диаметром 0,16 м регулярной структуры из стеклопластика. Рассматриваемые пластины выполнялись из 4 – х слоев стеклоткани TG 430 – С (100) (производитель – Латвия). В качестве связующего использовалась полиэфирная ортофталевая смола с пониженной эмиссией стирола Cricstic 2 – 446 PA (производитель – Великобритания).

Физико-механические характеристики пластинок из стеклопластика определялись в следующей последовательности. Вначале, согласно ГОСТ 25.601 – 80, определяется модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении образцов из стеклопластика. Проведенные механические испытания позволяют утверждать, что материал рассматриваемых пластинок можно классифицировать как трансверсально изотропный ($E_{11} = E_{22} = 1,5 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{12} = \nu_{21} = 0,12$). Остальные физико-механические характеристика стеклопластика определялись интегрально для всего пакета слоев пластинки на основе зависимостей работы [8], когда модули упругости 1-го рода, коэффициенты Пуассона волокон и матрицы соответственно равны: $E_B = 7,0 \cdot 10^4$ МПа; $E_M = 3,5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu_B = 0,22$; $\nu_M = 0,35$.

Прогибы пластинки измерялись при помощи индикаторов часового типа с точностью до 0,01 мм. Для измерения деформаций использовались тензорезисторы КФ4П1-3-200. Наклейка тензорезисторов осуществлялась согласно инструкции по наклейке АЖВ2.782.001 ТО. Для измерения выходных сигналов тензорезисторов и представления отчетов в цифровом виде использовалась измерительная система СИИТ-3.

Математическая модель расчета представляет собой двухслойную пластину, составленную из двух жестких трансропных слоев толщиной $h_{(1)} = h_{(2)} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ м. При этом считается, что область межфазного контакта жестких слоев является весьма податливой, то есть допускается их «проскальзывание» друг относительно друга.

Результаты исследований изгиба пластинки при действии равномерного давления $q = 0,025$ Мпа представлены на рисунке 1-2. Относительная погрешность теоретического значения прогиба в центре пластины при сравнении с экспериментальными данными составила менее 3 %: $w_z = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м – для жестко защемленного контура; $w_s = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м – для свободно опертого контура.

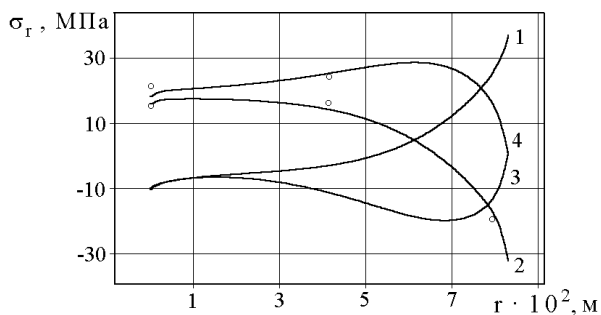


Рисунок 1 – Радиальные напряжения на лицевых поверхностях круглой пластины (1,2 – жестко защемленный контур; 3,4 – свободно опертый контур; \circ – данные эксперимента)

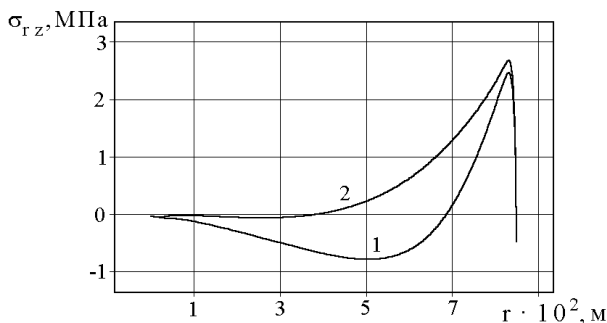


Рисунок 2 – Напряжения поперечного сдвига вдоль сопряженной поверхности контактирующих слоев круглой пластинки (1 –свободно опертый контур; 2 – жестко защемленный контур)

Выводы. Представленный вариант нелинейной дискретно-структурной теории адекватно отражает работу реальных конструкций. Получена удовлетворительное соответствие теоретических и экспериментальных данных. Величина контактных напряжений поперечного сдвига увеличивается в 4-5 раз в зоне опирания контура, что приводит к разрушению межфазного клеевого слоя. Таким образом, предлагаемая модель расчета позволяет определить зону контакта, величину контактного давления, изменение характера напряженного состояния на границе контакта.

Список литературы: 1. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – № 5. – С. 832-836. 2. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77-84. 3. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные

пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. **4.** *Паймушин В.И.* Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. **5.** *Паймушин В.И.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочекля // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 32-38. **6.** *Кантор Б. Я.* Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. **7.** *Пискунов В.Г., Расказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22-56. **8.** *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **9.** *Галимов К.З.* Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З.Галимова. – Издательство Казанского университета, 1977. – С. 36 – 95. **10.** *Верещака С.М.* К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематичний випуск: Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 31. – С. 39 – 46. **11.** *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Поступила в редколлегию 27.06.2005.

УДК 539.3

А.Ю.ВАСИЛЬЕВ, НТУ «ХПИ»

К ВОПРОСУ О ДЕФОРМИРОВАНИИ КОРПУСОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Запропоновано методіку дослідження корпусів транспортних засобів при дії ударних навантажень. Описані методи заміни процесів силовим еквівалентом. Також застосовано до поставленої задачі описані підходи Ейлера, Лагранжа, Лагранж-Ейлера, та метод структурно-рідинного скріплення.

A theoretical method to research of transport vehicles under the percussion action is offered. The methods of force-equivalent loading is described. Lagrange Formulation, Euler Formulation, Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation and method of Fluid-Structure Interaction is described too. Possibility of applying these methods to analyzing frame of transport vehicles are given

Введение

Любое транспортное средство в течение своей эксплуатации неоднократно подвергается действию ударных нагрузок [1]. Подобные нагрузки характерны большей опасностью по сравнению со статическими нагрузками подобной величины [2]. Данная статья посвящена обзору методов анализа динамического поведения объектов под действием ударных нагрузок разной природы применительно к исследованию корпусов транспортных средств.

В зависимости от природы динамического воздействия и необходимой точности моделирование может происходить при помощи различных подходов:

1. Для многих процессов достаточную точность может обеспечить замена ударного процесса на обычное силовое воздействие. То есть приложении к конкретным точкам конструкции системы сил, меняющихся по определенно-

му закону.

2. При невозможности подобрать эквивалентную силовую нагрузку необходимо полностью моделировать процесс, результатом которого будет динамическое воздействие на корпус.

В качестве примеров процессов, которые можно с высокой степенью достоверности заменить простым силовым воздействием, можно привести процессы наезда транспортным средством на препятствие или стрельбы из установленного на машине орудия [3, 4]. То есть это те процессы, в которых поведение источника динамической нагрузки слабо зависит от процесса деформирования корпуса, а также процессы, нагрузки от которых являются локальными по сравнению с исследуемой зоной деформирования.

Примером второго типа процессов может выступать явление соударения корпуса с препятствием, то есть процессы, в которых природа возникновения ударной нагрузки зависит от поведения конструкции. Для анализа подобных совместных явлений наиболее удобным в настоящее время является использование метода конечных элементов (МКЭ) в его явной и неявной постановке, многокомпонентная гидродинамика в эйлеровой постановке (Multimaterial Eulerian Hydrodynamics), вычислительная гидродинамика несжимаемых потоков, а также бессеточные методы: метод сглаженных частиц (SPH -Smoothed Particle Hydrodynamics), и метод, основанный на методе Галеркина (EFG - Element Free Galerkin method) [4, 5].

Основными подходами для математического описания движения деформируемой сплошной среды – лагранжев, однокомпонентные эйлеров и лагранж-эйлеров – подходы, многокомпонентные эйлеров и лагранж-эйлеров – подходы [5].

При решении сложных задач, в которых различные части рассматриваемой системы проявляют различные типы механического поведения, или с учетом возможности фазового перехода необходимо решать задачи не просто в лагранжевой или эйлеровой постановке, а использовать произвольные лагранж-эйлеровые сетки (ALE – Arbitrary Lagrangian-Eulerian) позволяющие учитывать большие деформации без вырождения элементов и подходы лагранж-эйлерового связывания и расчета многокомпонентных течений, сжимаемых сред на подвижных эйлеровых сетках.

Указанные подходы будут более детально описаны применительно к анализу динамического нагружения корпусов транспортных средств от ударных нагрузок, потому что корпуса транспортных средств состоят из пространственных элементов типа пластин стержней и некоторого количества объемных элементов.

1. Подход замены ударного воздействия силовым эквивалентом

Методика замены ударных явлений силовым эквивалентом, заключается в том, что контактное взаимодействие инородных объектов с корпусом транспортного средств, исходя из информации о характере поведения этих объектов, заменяются на силовую динамическую и статическую нагрузку, которая заставляет

корпус транспортного средства деформироваться аналогичным образом.

Таким образом, динамическое силовое воздействие может задаваться тремя законами:

- импульсная нагрузка,
- динамическое нагружение области исследуемой конструкции нагрузкой, изменение которой зависит только от времени,
- подвижная нагрузка: динамическое нагружение локальной области конструкции, или всей конструкции нагрузкой, изменение которой зависит как от времени, так и от координат.

Для формулировки исходной задачи можно использовать вариационный подход, а также непосредственно законы сохранения энергии, импульса и других фундаментальных величин; можно для вывода уравнений модели применять приближенное решение, полученное методом смягчения краевых условий [6].

Основные расчетные формулы метода для нахождения напряженно-деформированного состояния при статическом нагружении:

$$[K]\{X\} = \{P\}, \quad (1)$$

при импульсном нагружении:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = [F(t)] \cdot \delta(t), \quad (2)$$

при динамическом нагружении:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = [F(t)], \quad (3)$$

при воздействии подвижной нагрузки:

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = [F(\{R\} - \{V\}t)], \quad (4)$$

где: $[M]$ – глобальная матрица масс; $[K]$ – глобальная матрица жесткости конечно-элементной модели; $[C]$ – глобальная матрица демпфирования; $\{X\}$ – искомый вектор узловых перемещений модели; $\{P\}$ – глобальный вектор нагрузок, объединяющий векторы нагрузок отдельных конечных элементов; $[F(t)]$ – глобальный вектор нагрузок, при учете, что нагрузка зависит от времени; $[F(t)] \cdot \delta(t)$ – глобальный вектор импульсных нагрузок; $\{R\}$ – радиус вектор произвольной точки модели; $\{V\}$ – скорость перемещения подвижной нагрузки; $[F(\{R\} - \{V\}t)]$ – глобальный вектор нагрузок (при учете, что нагрузка зависит и от координат, и от времени).

Комбинация статической нагрузки и трех видов динамической нагрузки полностью охватывает круг задач о нахождении отклика корпусов транспортных средств от произвольной динамической нагрузки.

Методика построения матриц масс, жесткости, векторов нагрузок и других частей системы разрешающих уравнений более подробно рассматривается в разделе, посвященном описанию подхода Лагранжа.

2. Некоторые подходы к описанию движения деформируемой сплошной среды

При невозможности построения подходящего силового эквивалента не-

обходимо полностью моделировать процесс взаимодействия системы деформируемых сплошных сред.

В настоящее время известно несколько подходов к описанию движения деформируемой сплошной среды [5]. К ним относятся метод Лагранжа, метод Эйлера и лагранж-эйлеров подход. В иностранной литературе последний подход называется Arbitrary Lagrangian-Euleran Formulation (ALE). В связи с тем, что указанные подходы хорошо известны, коротко не вдаваясь в подробности, остановимся на основных положениях.

В ситуации, когда одна часть системы ведет себя как жидкость, а другая – как твердое тело, для описания движения твердой части может быть применен лагранжевый подход, а для описания движения жидкости – эйлеровый. В этом случае при моделировании взаимодействия рассматриваемых частей может быть использован алгоритм лагранжево-эйлерового связывания. В иностранной литературе он называется Fluid-Structure Interaction (FSI).

Рассмотрим более подробно особенности реализации каждого из перечисленных выше подходов применительно к транспортным средствам. При изложении материала будем следовать работе [5].

2.1 Лагранжев подход

В основе подхода Лагранжа лежат уравнения сохранения массы, количества движения и внутренней энергии, а также замыкающее эту систему определяющее соотношение. Затем рассмотрим особенности пространственно-временной дискретизации при решении перечисленных уравнений.

Уравнение сохранения массы:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}\{v\} = 0, \quad (5)$$

где ρ – плотность; $\{v\}$ – скорость.

Уравнение сохранения количества движения:

$$\rho \{\ddot{x}\} = \rho \{g\} + \operatorname{div}\{\sigma\}, \quad (6)$$

где $\{\ddot{x}\}$ – ускорение; $\{\sigma\}$ – тензор напряжений Коши; $\{g\}$ – ускорение свободного падения.

Уравнение сохранения энергии:

$$\rho \dot{u} = [\sigma] : [D] + \rho r - \nabla \cdot \{q\}, \quad (7)$$

где \dot{u} – скорость изменения внутренней энергии; $[D]$ – тензор деформации скорости; r – интенсивность объемного теплового источника; $\{q\}$ – тепловой поток; ∇ – оператор Гамильтона; « \cdot » – скалярное произведение; « \cdot » – двойное скалярное произведение.

Для решения задачи воспользуемся методами пространственной и временной дискретизации. В основе пространственной дискретизации лежит метод конечных элементов, в основе временной дискретизации – центральная дифференциальная схема интегрирования первого и второго порядка точности.

Пространственная дискретизация уравнения сохранения количества движения предполагает переход от решения дифференциального уравнения

(6) к решению выражения

$$\int_V (\rho \{\ddot{x}\} - \rho \{g\} - \text{div}[\sigma]) \cdot [\Phi] dv, \quad (8)$$

с соответствующими граничными условиями. С использованием известных процедур метода конечных элементов решение уравнения (8) сводится к решению дифференциального уравнения

$$[M]\{\ddot{d}\} = \{F_i\} + \{F_e\}, \quad (9)$$

где $\{\ddot{d}\}$ – вектор узловых ускорений; $[M]$ – матрица масс; $\{F_i\}$, $\{F_e\}$ – векторы внутренних и внешних сил.

Аналогично решение уравнения (7) сводится к решению дифференциального уравнения

$$[M^\theta]\{\dot{\theta}\} = \{F_i^\theta\} + \{F_e^\theta\}, \quad (10)$$

где $\{\theta\}$ – температура; $[M^\theta]$ – матрица теплоемкостей; $\{F_i^\theta\}$, $\{F_e^\theta\}$ – векторы внутренних и внешних тепловых нагрузок.

Вектор внутренних сил, находится следующим образом:

$$\{F_i\} = \int_V [\sigma] : (\nabla[\Phi]) dv. \quad (11)$$

Вектор F_i получается в результате суммирования внутренних сил для всех элементов, входящих в рассматриваемую систему. Для одного элемента вектор внутренних сил определяется следующим выражением:

$$\{f_i^e\} = \int_{V^e} \{B\}^T \{\bar{\sigma}\} dv, \quad (12)$$

где $\{B\}$ – производная от функций формы элемента; $\{\bar{\sigma}\}$ – вектор, составленный из шести компонентов тензора напряжений.

Вектор внешних сил $\{F_e\}$, который входит в дифференциальное уравнение (9), учитывает распределенные по поверхности тела нагрузки, объемные силы, такие как силы тяжести, контактные силы, реакции связей и другие силы.

Узловые ускорения могут быть определены из уравнения (9) и записаны следующим образом:

$$\{\ddot{d}\} = [M]^{-1}(\{F_i\} + \{F_e\}). \quad (13)$$

Использование центральной дифференциальной схемы интегрирования по времени второго порядка точности позволяет определить значения ускорений, скоростей и перемещений

Центральная дифференциальная схема интегрирования по времени второго порядка точности устойчива в том случае, если шаг интегрирования по времени не превышает значения

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}}, \quad (14)$$

где ω_{\max} – максимальная собственная частота рассматриваемой системы.

Скорость деформации определяется из:

$$\Delta[\varepsilon] = [D]\Delta t, \quad (15)$$

где $[D]$ – тензор деформации скорости, компоненты которого определяются по зависимости

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Для учета вращения среды как абсолютно жесткого тела при вычислении тензора напряжений Коши используем коротационную производную Яуманна:

$$[\dot{\sigma}] = [L]: [D] + [\sigma][W] - [W][\sigma], \quad (16)$$

где W – тензор-спин, компоненты которого равны

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Центральная дифференциальная схема интегрирования по времени второго порядка точности обладает дисперсией. Высокочастотные волны распространяются через сетку медленнее, чем скорость звука. Это создает проблему в описании распространения фронта ударных волн. Эта проблема может быть решена путем введения искусственной объемной вязкости:

$$q = \rho l (C_0 D_{kk}^2 + C_1 a D_{kk}), \quad (17)$$

где $l = V^{1/3}$ – характерный размер элемента; ρ – плотность; a – скорость звука; $D_{kk} = \text{tr} \text{ce} [D]$; C_0, C_1 – константы.

Петля интегрирования по времени дифференциальных уравнений включает следующие операции: вычисление узловых нагрузок, вычисление узловых ускорений, вычисление узловых скоростей, вычисление приращений перемещений и перемещений, вычисление деформаций в элементах, вычисление напряжений в элементах.

2.2 Однокомпонентный эйлеров и однокомпонентный ALE-подходы

Относительное движение между материалом и сеткой требует учета дополнительных членов в уравнениях сохранения. Следует заметить, что вместе с материалом через сетку переносится ряд переменных, которые характеризуют состояние и историю деформирования материальных частиц. К их числу относятся, например, плотность, температура, степень деформации и др. Эти переменные называются историческими переменными. Производная исторической переменной по времени в подвижной системе отсчета имеет вид

$$\dot{\phi} = \phi' + \nabla \phi \cdot (v - \dot{x}), \quad (18)$$

где ϕ' – производная исторической переменной по времени в неподвижной системе отсчета; v – скорость сетки; \dot{x} – скорость материальной частицы.

В эйлеровом и ALE-подходе узлы не следуют за течением материала. Имеет место перетекание материала между элементами. Это усложняет урав-

нение сохранения энергии (см. уравнение (7)):

$$\rho \dot{u} = \rho \nabla u \cdot (v - \dot{x}) + \sigma : D + \rho r - \nabla \cdot q . \quad (19)$$

Уравнение, описывающее перенос исторических переменных, похоже на уравнение (19). В этом уравнении $x = \sigma : D = \rho r = \nabla \cdot q = 0$ поэтому $\dot{u} = \nabla u \cdot v$. Отсюда следует, что $u_x(t_0) = u_x(t_1)$.

В ходе решения сначала вычисляется лагранжева производная по времени и исторические переменные. Затем определяется относительное движение между сеткой и материалом, а исторические переменные приводятся к узлам и элементам неподвижной сетки.

Усложненная петля интегрирования по времени дифференциальных уравнений включает следующие операции: вычисление узловых нагрузок, вычисление узловых ускорений, вычисление узловых скоростей, вычисление приращений перемещений и перемещений, выравнивание сетки, адвекционный шаг, вычисление деформаций в элементах, вычисление напряжений в элементах.

Изменение положения узлов, имеющее целью уменьшить искажение сетки, называется выравниванием сетки. В эйлеровом подходе, после выполнения лагранжевого шага узлы возвращаются в свое начальное положение. В однокомпонентном ALE-подходе имеется два способа выравнивания сетки после лагранжевого шага:

- прямой, в котором внутренние узлы сетки могут перемещаться вдоль определенных по двум узлам прямых;
- способ, основанный на итерационных выравнивающих алгоритмах.

Итерационные выравнивающие алгоритмы выполняют поиск нового положения узлов, которое бы минимизировало искажение сетки. В настоящее время реализовано два таких алгоритма: алгоритм простого усреднения и алгоритм эквипотенциального выравнивания.

2.3 Многокомпонентный эйлеровый подход

В многокомпонентном эйлеровом подходе два или более материала могут смешиваться в одном элементе. Каждый элемент эйлеровой сетки содержит определенную часть (фракцию) представленного в рассматриваемой системе материала. Границы заполненных материалом областей определяются по заданному предельному значению фракции.

Эффективный тензор напряжений σ^* вычисляется усреднением тензоров напряжений для каждой материальной группы, входящей в рассматриваемую систему:

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{nmat} \eta_k \sigma_k , \quad (20)$$

где σ_k – тензор напряжений для k -й материальной группы; η_k – вес материала k -й материальной группы в элементе, $\sum_{k=1}^{nmat} \eta_k = 1$.

2.4 Многокомпонентный ALE-подход

За счет движения сетки поток массы между элементами может быть уменьшен, а значит, и связанная с диссипацией ошибка также может быть уменьшена. Существует несколько способов задания движущихся и деформирующихся сеток:

- классическое простое усреднение или эквипотенциальное выравнивание;
- прямое выравнивание;
- предварительно определенное движение и/или деформирование сетки, заданное с помощью двенадцати функций времени;
- автоматическое задание движения сетки по средней скорости движения материала и ее распределения в пространстве;
- задание движения сетки в координатной системе, заданной тремя узлами;
- задание движения и/или деформирования сетки по двенадцати узлам.

2.5 Лагранж-эйлеровое связывание

Структурно-жидкостное связывание используется в том случае, когда моделируется взаимодействие двух частей, одна из которых описывается как лагранжева, другая как эйлерова или ALE. Наиболее распространенными методами лагранж-эйлерового связывания: метод ограничения и метод штрафа.

Метод ограничения напрямую изменяет скорости жидкости и структуры таким образом, что их движение становится согласованным. Алгоритм обеспечивает выполнение уравнения сохранения количества движения, но не обеспечивает выполнения уравнения сохранения энергии.

Метод штрафа основывается на определении относительного перемещения между жидкостью и структурой, по которому в систему добавляются пропорциональные этому перемещению силы. Они прилагаются и к структуре, и к жидкости. При этом движение структуры и жидкости становится согласованным. Этот метод обеспечивает выполнение уравнения сохранения энергии, но не так стабилен, как метод ограничения.

3. Выводы

Долгое время сложность моделирования ударных процессов и невысокая производительность вычислительных средств не позволяли проводить математическое моделирование сложных и сверхсложных механических систем, ярким примером которых являются транспортные средства, с необходимой точностью. Описанная методика позволяет получить решение об ударном воздействии на корпус транспортного средства с необходимой точностью. В зависимости от типов механического поведения описываемых процессов, следствием которых является ударное нагружение корпуса транспортного средства, и требуемой точности необходимо выбирать один из описанных методов. Основой для выбора одного из приведенных методов должно являться качественное сопоставление результатов расчета и результатов эксперимента.

Список литературы: 1. Гриценко Г.Д., Малакей А.Н., Миргородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А. Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – 2002. – № 1. – С. 6-13. 2. Зукас Дж. А. Динамика удара. – М.: Мир, 1985. – 110 с. 3. Васильев А.Ю., Мартыненко А.В., Шаталов О.Е. Пелешко Е.В., Назарова О.П. Комплексный подход к модернизации корпусов легкобронированных машин с использованием современных программных комплексов // Праці, Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь: ТДАТА. – 2005. – 27. – С. 169-174. 4. Васильев А.Ю., Малакей А.Н., Пелешко Е.В., Шаталов О.Е. К вопросу интегрированных систем анализа динамических процессов в корпусах транспортных средств специального назначения // Механіка та машинобудування. – 2004.– № 1. – С. 46-55. 5. Музеймнек А.Ю., Богач А.А. Математическое моделирование процесса удара и взрыва в программе LS-DYNA: учебное пособие. – Пенза: Информационно издательский центр ПГУ, 2005. – 106 с. 6. Кандидов В.П., Чесноков С.С., Вислоух В.А. МКЭ в задачах динамики. – М.: Издательство МГУ, 1980. – 168 с.

Поступила в редколлегию 25.04.2005.

УДК 621.98

Н.А.ГОГОЛЬ; О.В.НАЗАРОВА, канд.техн.наук, Таврическая государственная агротехническая академия;
А.В.ТКАЧУК, канд.техн.наук; **О.В.КОХАНОВСКАЯ**, НТУ «ХПИ»

К ЗАДАЧЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ

Запропоновано загальну структуру спеціалізованої системи для аналізу напружено-деформованого стану елементів штампів. Досліджено напружено-деформований стан пуансонів, матриць та пуансон-матриць.

The general structure of specialized system for analysis of the stressed-deformed state of elements of stamps is presented. The stressed-deformed state of puncheons, moulds and puncheon - mould is investigated.

1. Введение

При проектировании элементов технологической оснастки (ЭТО) для изготовления деталей сложных машиностроительных изделий в условиях дефицита времени, средств, вычислительных ресурсов, а также в силу естественной целесообразности во многих случаях существует потребность в «экспресс-моделях» и «экспресс-системах» для оперативного решения возникающих задач анализа и синтеза. «Экспресс-модели» и «экспресс-системы» («ЭМ» и «ЭС») могут создаваться в виде аналитических зависимостей; баз данных, полученных на основе многовариантных расчетов или экспериментальных исследований исследуемых ЭТО; встроенных

компьютерных подсистем оперативного анализа и синтеза ЭТО; характеристик, полученных экспериментальным путем; таблиц; графических зависимостей.

Требования к «ЭМ» и «ЭС»:

1. Определять соответствие прочностных и жесткостных характеристик исследуемых ЭТО (при заданных конструктивных и технологических параметрах) задаваемому уровню этих характеристик для обеспечения точности изготовления деталей сложных машиностроительных изделий.

2. Определять структуру и параметры элементов технологической оснастки, обеспечивающие заданный уровень прочности и жесткости.

3. Высокая скорость работы (возможность работы в режиме «запрос-ответ»).

Пути решения задачи создания «экспресс-моделей» и «экспресс-систем»:

1. на основе полного цикла исследований по технологии [1-3]: цепочка «специализированная система анализа и синтеза – расчетно-экспериментальное исследование – уточнение параметров численных моделей с применением разработанного программно-аппаратного комплекса – определение рациональной структуры и конструктивных параметров – автоматизированное изготовление деталей оснастки и основных деталей»;

2. на основе сокращенного (обоснованно) цикла исследований.

Отдельный случай – когда многопараметрическую модель (причем *семейства конструкций*) с большим количеством параметров, условий и связей между ними предлагается привести к одно- или двухпараметрической единой модели. В данном случае приходится применить подход по принципу «минимакса»: создаваемые «ЭМ» и «ЭС» должны выдавать в качестве выхода семейство моделей или конструкций ЭТО, наименее жесткие и точные из которых удовлетворяют наиболее жестким требованиям по данным параметрам. В этом случае, когда неизбежно создаются конструкции «с запасом», важно определить область их применимости, по возможности очертив последнюю начальными проектными этапами.

Рассмотрим вопрос формирования расчетных схем на примере элементов технологических систем листовой штамповки, а также последующего создания базы данных характеристики прочности и жесткости как функций конструктивных и технологических параметров.

2. Структура технологической системы тонколистовой штамповки и типы возникающих задач исследований

Технологическую систему тонколистовой штамповки можно иерархизировать (рис. 1): структура 1-го уровня – «пресс-штамп», 2-го уровня – «блок-пакет», 3-го уровня – «режущие элементы-штампуемый материал». Требование полного исследования свойств данной технологической системы требует достаточно полного описания всех ее уровней.

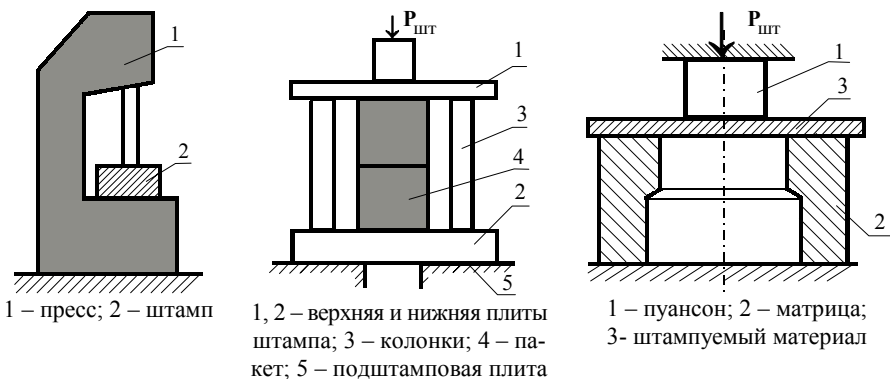


Рисунок 1 – Структура технологической системы тонколистовой штамповки

Тогда по данному классификационному признаку можно выделить следующие типы задач:

I. исследование системы «пресс-штамп»;

II. исследование прочностных и жесткостных характеристик системы «базовые плиты-стол пресса»;

III. исследование взаимодействия в системе «режущие элементы-заготовка».

В свою очередь, задача III может быть поставлена и решена со следующей степенью детализации:

1. определение напряженно-деформированного состояния (НДС) режущих элементов штампов при заданных усилиях штамповки, распределенных по эмпирически установленным законам распределения;

2. исследование контактного взаимодействия «пуансон – заготовка – матрица – пуансон-матрица» в области упругого или упруго-пластического деформирования материала заготовки;

3. исследование процесса разделения материала с применением критериев разрушения.

3. Структура специализированной интегрированной системы автоматизированного исследования элементов технологической оснастки тонколистовой штамповки

Для современного машиностроительного производства характерна тенденция интенсификации процессов проектирования, технологической подготовки производства и изготовления. Это приводит к необходимости интенсификации также и процессов исследования прочностных и жесткостных характеристик элементов технологических систем, используемых для изготовления продукции. В частности, актуальной является задача построения специализированных систем, сопряженных с существующими и разрабатываемыми САПР штампов для листовой штамповки. При этом их важнейшим свойством должен быть более полный учет специфики усло-

вий эксплуатации, нагружения и взаимодействия элементов исследуемых объектов.

При разработке комплекса методов, алгоритмов и программного обеспечения необходимо удовлетворить следующим требованиям: непосредственная связь с CAD/CAM системами; работа в режиме реального времени; автоматизация всех этапов исследований; учет контактного взаимодействия в технологических системах.

При этом схема решения задач в рамках систем автоматизированного анализа и синтеза (СААС) элементов технологических систем листовой штамповки (ЭТС-ЛС) предполагает решение следующего комплекса проблем: классификация объектов исследования; определение условий нагружения; определение условий сопряжения; идентификация расчетных моделей; расчет напряженно-деформированного состояния ЭТС-ЛС; обеспечение наглядности отображения; организация обратной связи в САПР. Данные этапы являются предметами самостоятельных исследований и оказывают существенное влияние на результаты исследований в целом.

В соответствие с предложенными в работах [1-3] подходами для определения искомых характеристик технологической системы тонколистовой штамповки может быть построена специализированная интегрированная система «ШТАМП – НДС» (рис. 2).



Рисунок 2 – Структура специализированной интегрированной системы автоматизированного исследования элементов технологической оснастки тонколистовой штамповки

Данная система позволяет решать практически весь комплекс задач анализа напряженно-деформированного состояния, а также синтеза конструктивных и технологических параметров штампов.

4. Объекты исследований

Наибольший интерес в качестве объекта исследований с точки зрения

обеспечения прочности, жесткости, долговечности представляют: режущие элементы штампов (пуансоны, матрицы, пуансон-матрицы); плиты штампов (верхняя, нижняя). Данные элементы представляют собой сложные конструкции, в состав которых входят тела вращения, пластины, стержневые конструкции и массивные тела. Соответственно выделяются 2 типа задач: расчет напряженно-деформированного состояния пуансонов, матриц и пуансон-матриц с целью обоснованного выбора технологических параметров процесса штамповки и прогнозирования ресурса инструмента; расчет напряженно-деформированного состояния плит с целью обоснованного выбора их конструктивных параметров.

На элементы штампов действуют усилия штамповки $P_{шт}$, распределенные по силовым элементам конструкции штампов. При этом не всегда возможно заранее установить закон распределения этих усилий, и это распределение становится искомым при решении задачи исследования напряженно-деформированного состояния элементов штампов.

Для определения напряженно-деформированного состояния деталей штампов используется метод конечных элементов. Конечно-элементная разбивка данных деталей производится по следующему алгоритму: для исследуемой группы деталей определяется набор типов конечных элементов и общая схема построения модели; в графическом редакторе производится сканирование указанной области пространства, информация хранится в согласованном формате; запрашиваются у пользователя параметры разбивки (густота разбивки); производится построение конечно-элементной модели группы объектов.

5. Исследование напряженно-деформированного состояния режущих элементов штампов

Для оперативного анализа напряженно-деформированного состояния пуансонов, матриц и пуансон-матриц как элементов единой системы «режущий инструмент – заготовка» была проведена серия многовариантных численных расчетов с варьированием различных параметров и конструктивных схем исполнения инструмента, свойств и толщины штампуемого материала.

На рис.3, а приведены расчетные схемы вырубной матрицы штампа. Здесь p_1 – контактное давление на режущей кромке матрицы, распределенное по кольцу шириной a ; p_2 – распирающее давление, действующее на внутреннюю цилиндрическую поверхность высотой b до момента скола штампуемой детали; F – усилие проталкивания, равное по величине силе трения между матрицей и деталью. Значение p_1 можно определить из соотношения

$$\int_{d_1/2}^{d_1/2+a} p_1(r) 2\pi r dr + F = P_1. \quad (1)$$

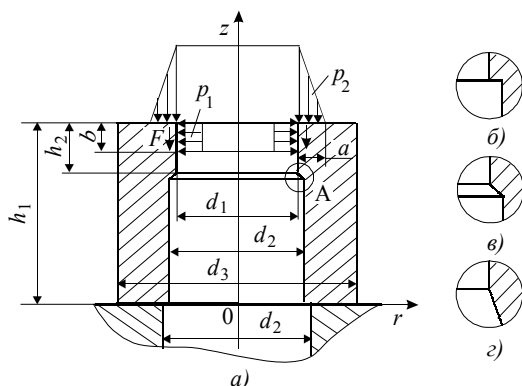


Рисунок 3 – Расчетные схемы вырубной матрицы штампа

Суммарная величина усилия вырубки P_1 определяется по классической формуле

$$P_1 = k \sigma_{cp} L^P t, \quad (2)$$

где k – коэффициент запаса, принимаемый обычно 1,2-1,3; σ_{cp} – сопротивление срезу штампуемого материала; L^P – периметр вырубаемого контура, в данном случае равный πd_1 ; t – толщина штампуемого материала.

Значения ширины кольца контакта a штампуемого материала с матрицей и глубины его внедрения b до момента скола были ранее определены экспериментально [4]. Установлено, что эти величины зависят от толщины, марки штампуемого материала, относительного зазора между режущими кромками и т.д. Однако в среднем с достаточной для практики точностью можно записать $a = 0,5 t$; $b = 0,1 t$. Величину распирающего усилия p_2 , равного $0,35 p_1$ [5], можно определить из соотношения

$$\int_{h_1-b}^{h_1} p_2(z) \pi d_1 dz = 0,35 p_1. \quad (3)$$

Давление p_2 на стенки матрицы ввиду малости участка распределения принято равномерным, то есть $p_2(z) = \text{const}$. Поэтому, принимая коэффициент трения между внутренней поверхностью матрицы и проталкиваемой деталью равным 0,3 [6], можно записать $F = 0,3 P_2$. На основании результатов экспериментов распределение контактного давления p_1 можно считать линейным, то есть $p_1(r) = k_1 r + l$. Выполнив необходимые преобразования, можно найти коэффициент k_1 и свободный член l и, таким образом, полностью определить выражения (1) и (3).

При исследовании напряженно-деформированного состояния вырубных матриц изучали влияние относительной толщины стенки (внутренние диаметры принимали значения 5, 10, 15, 20, 30, 50, 100 и 150 мм, для каждого из которых наружные варьировали от 1,03 до 5,0 d_1) конструктивного исполнения зоны A (см. рис.3, б, в, г) и толщины штампуемого материала на законы рас-

пределения и величины напряжений и перемещений (исследования проводили на вырубной матрице с размерами: $d_1 = 30$ мм; $d_2 = 31$ мм; $d_3 = 50$ мм; $h_1 = 30$ мм; $h_2 = 10$ мм).

Расчетная схема типовой пуансон-матрицы показана на рис. 4, а, характерной особенностью ее является наличие в нижней части кольцевых буртиков высотой h_3 и $h_5 - h_4 - h_3$. Такая конструкция пуансон-матрицы применяется в переналаживаемых штампах совмещенного действия, в которых режущий инструмент крепится при помощи композиционных материалов.

Поскольку в штампах любых конструкций основные конструктивные параметры (наружный и внутренний диаметры пуансон-матрицы) определяются размерами штампуемой детали, то при инженерных расчетах конструктору остается проверить величины возникающих напряжений и сравнить их с допускаемыми для используемой марки стали. Однако при выполнении данного исследования необходимо определить влияние законов нагружения пуансон-матриц $q_1(r)$ на их напряженно-деформированное состояние и величины максимальных напряжений в зоне режущих кромок. Рассмотренные варианты законов нагружения показаны на рис.4, б, в, г.

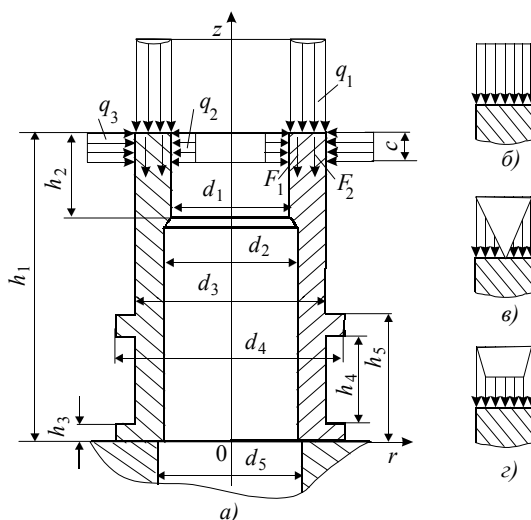


Рисунок 4 – Расчетная схемы пуансон-матрицы штампа

Расчетная схема пуансон-матрицы отличается от расчетной схемы матрицы, как следует из сопоставления рис. 3, а и рис.4, а наличием наружной режущей кромки, выполняющей роль пуансона. Поэтому все приведенные соотношения справедливы и для пуансон-матрицы, за исключением пределов интегрирования в выражении (1), принимающих теперь значения от $d_1/2$ до $d_3/2$, а также величины L в выражении (2), равной в данном случае $\pi(d_1 + d_3)$.

Кроме того, в левой части выражения (1) кроме силы трения на внутренней поверхности F_1 будет действовать сила трения на внешней поверхности F_2 , возникающая при вырубке от давления q_3 и определяемая аналогично.

При исследовании напряженно-деформированного состояния пуансон-матриц изучали влияние толщины стенки на величины возникающих напряжений и перемещений. При этом для внутреннего диаметра d_1 , равного 60 мм, наружный диаметр d_3 принимал такие значения, что отношение d_3/d_1 изменялось от 1,1 до 2,5. Общая высота пуансон-матрицы равнялась 70 мм.

Для удобства применения полученных результатов для штампуемых листовых материалов с любыми механическими характеристиками и любых толщин все расчеты производили при $\sigma_{cp} = 100$ МПа и 1000 МПа, $t = 1$ мм. В результате расчета получены все компоненты тензоров деформаций, напряжений и векторов перемещений для всех конечно-элементных моделей во всех рассмотренных конструктивных вариантах матриц и пуансон-матриц, то есть полностью охарактеризованы их напряженно-деформированные состояния.

При проведении исследования матриц установлено, что форма полости матрицы в зоне A (см. рис. 3) практически не влияет на величины максимальных напряжений, возникающих в области режущей кромки. Концентратор в виде прямого угла лишь незначительно изменяет закон распределения и увеличивает напряжения именно в этой зоне, однако здесь их абсолютные значения намного меньше по сравнению со значениями в области режущей кромки. Что касается перемещений, то в случае варианта (см. рис.3, б) несколько (на 20-25 %) увеличиваются их как осевые, так и радиальные составляющие. Конусное исполнение зоны A по варианту, приведенному на рис.3, з, трудоемко в изготовлении, а особых преимуществ не имеет. Наиболее приемлемым для практики является вариант, приведенный на рис.3, в.

Изменение толщины штампуемого материала от 1 до 10 мм в 10 раз и более увеличивает осевые и радиальные перемещения, нормальные и касательные напряжения по всему поперечному сечению, но практически не изменяет величины максимальных напряжений в зоне режущей кромки. Естественно, вне этой зоны напряжения увеличиваются пропорционально толщине, однако здесь они невелики по абсолютному значению. Эквивалентные напряжения вычисляли по энергетической гипотезе прочности.

На рис. 5 показаны графические зависимости относительных максимальных эквивалентных напряжений $\sigma_{z_{max}}(t = 1 \text{ мм}, \sigma_{cp} = 100 \text{ МПа})$ и максимальных осевых перемещений $u_{z_{max}}(t = 1 \text{ мм}, \sigma_{cp} = 1000 \text{ МПа})$ от относительной толщины стенки матрицы $\gamma = (d_3 - d_2)/2d_2$, где 1-8 соответственно $d_1 = 5; 10; 15; 20; 30; 50; 100; 150$ мм. Как следует из графиков, для уменьшения максимальных напряжений, возникающих в зоне режущей кромки, в большинстве случаев увеличивать толщину стенки матрицы имеет смысл лишь в интервале $0 < \gamma \leq 0,35$. Дальнейшее утолщение стенки лишь увеличивает габаритные размеры и металлоемкость матрицы.

В процессе исследования напряженно-деформированного состояния пуансон-матриц установлено, что характер приложения нагрузки к верхнему торцу существенно влияет на характер распределения и абсолютные значения максимальных перемещений и напряжений, возникающих в зонах режущих кромок. При удалении от верхнего торца пуансон-матрицы по оси Oz на 3-5 мм это влияние уменьшается, и закон распределения внешней нагрузки для общего напряженно-деформированного состояния практически уже не имеет значения. Однако здесь величины напряжений значительно меньше, поэтому прочностные расчеты следует проводить, исходя из максимальных значений напряжений, возникающих при наиболее неблагоприятном характере нагружения. Численные эксперименты показали, что наиболее неблагоприятным законом распределения исходных нагрузок на верхнем торце пуансон-матриц для напряженного состояния зон режущих кромок является вариант, приведенный на рис. 4, в. В качестве основного конструктивного варианта для исследования распределения напряжений и перемещений рассматривали пуансон-матрицу со следующими параметрами: $d_1 = 60$ мм; $d_2 = 61$ мм; $d_3 = 80$ мм; $d_4 = 96$ мм; $h_1 = 70$ мм; $h_2 = 20$ мм; $h_3 = 6$ мм; $h_4 = 15$ мм; $h_5 = 24$ мм.

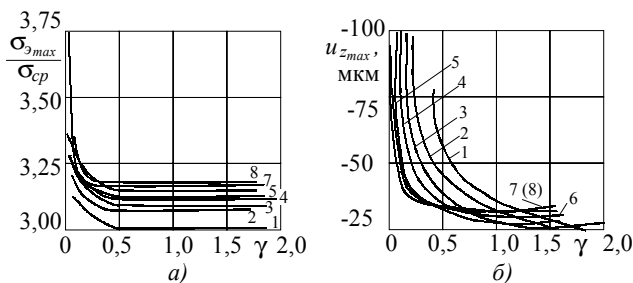


Рисунок 5 – Графические зависимости относительных максимальных эквивалентных напряжений и максимальных осевых перемещений u_{zmax}

На рис.6, а показано распределение эквивалентных напряжений по контуру пуансон-матрицы основного исполнения, а на рис. 6, б – схема ее деформирования при штамповке листового материала толщиной 1 мм с $\sigma_{cp} = 100$ МПа и 1000 МПа соответственно. В скобках даны величины радиальных и осевых перемещений в микронах.

Деформированное состояние пуансон-матрицы отличается от такового вырубной матрицы тем, что здесь радиальные перемещения во всем сечении направлены от центра, в то время как в матрице ее верхняя часть с режущей кромкой под воздействием сформировавшейся системы сил перемещается к центру. Но как в матрицах, так и в пуансон-матрицах вертикальные перемещения верхнего торца значительно (в среднем на порядок) выше радиальных.

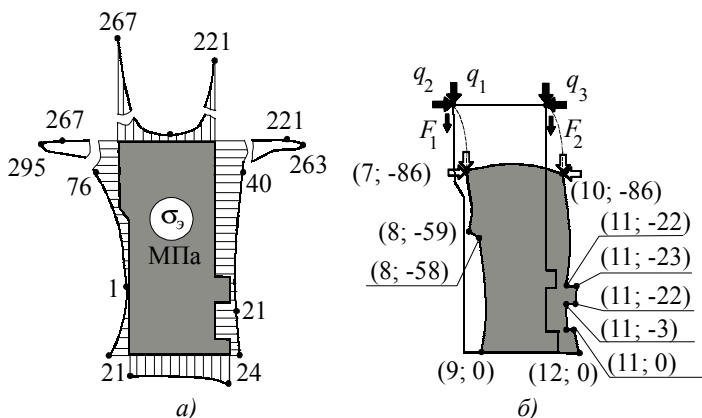


Рисунок 6 – Распределение эквивалентных напряжений по контуру пуансон-матрицы основного исполнения (а) и схема ее деформирования при штамповке листового материала (б)

Анализ результатов расчетов на жесткость вырубных матриц и пуансон-матриц с учетом характера деформирования пуансонов показывает, что при определенных усилиях штамповки и конструктивных параметрах режущего инструмента в процессе вырубки деталей за счет радиальных перемещений режущих кромок изменяется назначенный конструктором рабочий зазор. Так, например, при вырубке шайбы из стали 50ХГ ($\sigma_{cp} = 1200$ МПа) толщиной 4 мм с наружным диаметром 80 мм и внутренним 60 мм радиальное сближение режущих кромок между матрицей и пуансон-матрицей составит около 65 мкм, то есть 20 % величины одностороннего номинального зазора для данного случая, что изменит требуемую точность вырубки и ухудшит качество поверхности среза шайбы. Зазор между пуансоном и пуансон-матрицей увеличится на 7 мкм, то есть на 2 % номинального значения.

6. Выводы по результатам исследований

При проектировании рабочего инструмента следует рассчитать его прочность и жесткость, определить величины радиальных смещений режущих кромок и скорректировать величину номинального зазора. Что касается осевых перемещений между матрицей и пуансон-матрицей, то они практически не влияют на точность штампуемых деталей, качество поверхности среза и величину зазора. В данном случае вся система пуансон - матрица - штампуемый материал - пуансон-матрица, сжимаясь, смещается вниз на величину абсолютной осевой деформации пуансон-матрицы.

Расчеты показали, что изменение толщины стенки пуансон-матрицы практически не влияет на максимальные значения напряжений в зоне режущих кромок, а на расстоянии 3-5 мм от верхнего торца в тонких стенках могут возникать напряжения, превосходящие допустимые (в зоне режущих кромок

напряженное состояние, близкое к всестороннему сжатию, позволяет стенкам выдерживать величины напряжений, в несколько раз превосходящие допусковые). В частности, конструкторам не рекомендуется назначать толщину стенки пуансон-матрицы, при которой отношение d_3/d_1 было бы меньше 1,2. В противном случае при штамповке листового материала толщиной $t \geq 3$ мм и $\sigma_{cp} \geq 400$ МПа, может разрушиться пуансон-матрица уже на первых циклах нагружения.

Разработанные «ЭМ» и «ЭС» для анализа и синтеза элементов штампов позволяют оперативно решать весь комплекс задач, возникающих при проектировании данного типа оснастки для изготовления деталей сложных машиностроительных изделий. Кроме того, наличие такого инструмента дает возможность создать и расширять базу данных, получаемую при многовариантных расчетах НДС элементов штампов с варьированием конструктивных решений и параметров.

В качестве направлений дальнейших исследований предлагается анализ процесса разделения материала в системе «инструмент-заготовка».

Список литературы: 1. *Ткачук Н.А.* Комплексное экспериментальное определение параметров численных моделей элементов механических систем // *Механіка та машинобудування*. – 2001. – № 1,2. – С. 65-69. 2. *Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем // *Вісник Національного технічного університету «ХПИ»*. Тематичний випуск: «Динаміка і міцність машин». Збірник наукових праць НТУ «ХПИ». – Харків: НТУ «ХПИ», 2002. – № 10. – С. 126-132. 3. *Веретельник Ю.В., Миргородский Ю.Я., Пелешко Е.В., Ткачук Н.А.* Параметрические модели элементов сложных систем как основа построения специализированных расчетных систем // *Механіка та машинобудування*. – 2003. – № 1, т. 2. – С.3-8. 4. *Мовиович И.Я., Заярненко Е.И., Долгов В.А.* Исследование сопротивления срезу при штамповке листового материала // *Технология и организация производства*. – 1975. – № 2. – С. 28-30. 5. *Хмара С.М., Смолянинов В.П., Коломойцев А.А. и др.* О причинах выкрашивания твердосплавных вырезных матриц // *Кузнечно-штамповочное производство*. – 1965. – № 8. – С. 21-23. 6. *Хмара С.М., Смолянинов В.П., Коломойцев А.А. и др.* К определению напряжений на режущих кромках вырезных твердосплавных матриц // *Кузнечно-штамповочное производство*. – 1966. – № 6. – С.22-24.

Поступила в редколлегию 25.04.2005

В.А.ЖОВДАК, докт.техн.наук;
А.Б.БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, НТУ «ХПИ»

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ РАМ ТЕЛЕЖЕК ВАГОНОВ ЭЛЕКТРОПОЕЗДОВ

Розглядається задача визначення характеристик надійності рам візків вагонів електропоїздів з урахуванням випадковості навантаження та характеристик опору втоми. Прогнозування надійності проводиться на підставі вирішення задачі статистичної динаміки. Наведено методику та результати чисельних досліджень.

The problem of definition of reliability characteristics of bogie frames of transit vehicles taking into account the chance of loading and characteristics of fatigue resistance is considered. Prognostication of reliability is conducted on the basis of solution of statistical dynamics problem. The methods of solution and results of computational investigation are given.

Введение и анализ исследований. Железнодорожный транспорт является наиболее развитым в Украине, по общей длине путей он занимает четвертое место в мире (после США, России и Канады). По грузообороту он выполняет основные объемы перевозок – 40-50 %, а по пассажирообороту является неоспоримым лидером - на него приходится 50-70 % общего объема перевозок. В настоящее время большое количество рам тележек вагонов электропоездов исчерпали свой назначенный ресурс, но благодаря высокой надежности они продолжают эксплуатироваться. Также, в Украине существуют экономические трудности, которые не позволяют производить обновление подвижного состава. В связи с этим возникает вопрос о продлении ресурса рам тележек вагонов, которые исчерпали назначенный ресурс, при безусловном обеспечении требований безопасности движения электропоездов.

Решение задач прогнозирования надежности рам тележек вагонов поводкового типа проводилось в работах [1,2], где учитывался случайный разброс характеристик сопротивления усталости и нагруженности. Расчет наработки до отказа для шпинтонных тележек представлен в работе [3], в которой применялся МКЭ для получения статических напряжений от веса вагона, а значения динамических напряжений брались из работы [2]. При этом использовались детерминированные значения предела выносливости.

В представленных работах для получения статических и динамических напряжений, необходимых для прогнозирования надежности рам тележек, использовались или экспериментальные исследования, которые являются трудоемкими, особенно для тележек, находящихся в эксплуатации, или упрощенные конечно-элементные модели, не учитывающие всех особенностей геометрии конструкций.

1. Постановка задачи. Объектом исследования являются рамы тележек вагонов типа 81-717, широко применяемые в метрополитенах Украины и стран СНГ [4, 5]. Ставится задача прогнозирования надежности тележек типа 81-717 по прототипу (ЕЖ-3). Поскольку рамы тележек типа 81-717 имеют подобную технологию изготовления и эксплуатируются при похожих условиях нагружения, что и рамы тележек типа ЕЖ-3, то можно прогнозировать надежность рам тележек типа 81-717 по данным об отказах прототипа. Исходными данными для проведения расчета служили экспериментальные данные об отказах рам тележек типа ЕЖ-3 [6], результаты решения задачи статистической динамики для тележек двух типов и литературные данные о характеристиках сопротивления усталости [1-3].

Поставленная задача решалась с использованием численных исследований характеристик надежности рам тележек вагонов электропоездов на основе трехмерных конечно-элементных моделей. При этом учитывался случайный характер нагружения и случайный разброс предела выносливости.

2. Решение прямой задачи надежности. Прямая задача прогнозирования надежности рам тележек заключается в определении вероятностных характеристик надежности рам тележек при известных вероятностных характеристиках сопротивления усталости и нагруженности. Для прогнозирования характеристик надежности рассмотрим выражение для пробега тележки вагона до появления усталостной трещины при детерминированном блочном нагружении и детерминированном значении предела выносливости [1-3]:

$$L = L_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \right)^m, \quad (1)$$

где $L_0 = \frac{N_0 V_c}{3600 f_e}$ (N_0, m – параметры кривой усталости, V_c – средняя скорость, f_e – эффективная частота), $\sigma_{-1} = \varphi_\sigma \sigma_{-1D}$ (σ_{-1} – предел выносливости тележки с учетом асимметрии цикла, σ_{-1D} – предел выносливости конструкции, φ_σ – коэффициент асимметрии цикла при схематизации диаграммы по способу Серенсена-Киносашвили), $\sigma_a = \sum_i \frac{P_i V_c}{V_i} \sigma_{ai}$ (σ_a – приведенная амплитуда напряжений, σ_{ai} – амплитуда напряжений при i -м режиме нагружения, которая удовлетворяет неравенству $\sigma_{ai} \geq \sigma_{-1D}$, P_i – вероятность появления скорости движения V_i в эксплуатации).

Введем безразмерные переменные s и r следующим образом:

$$s = r^m = \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \right)^m = \frac{L}{L_0}, \quad r = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a} \leq 1. \quad (2)$$

Для решения задачи применяется метод условных плотностей вероятностей [7]. При определении плотности вероятности $f(\sigma_a)$ используется метод статистиче-

ского моделирования амплитуд напряжений σ_{ai} [8]. Согласно этому методу для моделирования стационарного релейского случайного процесса

$$f(\sigma_{ai}) = \frac{\sigma_{ai}}{\sigma_{\sigma_i}^2} \exp\left\{-\frac{\sigma_{ai}^2}{2\sigma_{\sigma_i}^2}\right\}$$

применялся датчик случайных чисел, генерирующий

реализации случайной величины u , распределенной равномерно в интервале $[0, 1]$. Реализации амплитуд напряжений при релейской плотности вероятности будут равны $\sigma_{ai} = \sigma_{\sigma_i} \sqrt{-2 \ln u_i}$, где значения среднеквадратичных отклонений (СКО)

σ_{ai} определяются из решения задачи статистической динамики рам тележек. При этом проводилась проверка каждой амплитуды напряжений условию $\sigma_{ai} \geq \sigma_{-1}$, если это условие не удовлетворялось, то $\sigma_{ai} = 0$. В соответствии с центральной предельной теоремой [8] плотность вероятности приведенной амплитуды напряжений подчиняется нормальному закону. Поэтому выражение для условной плотности вероятности введенной безразмерной переменной r при условии, что σ_{-1} – фиксированное значение, получается на основе использования функционального преобразования [9] случайных величин (2) и предположения о нормальности распределения приведенной амплитуды напряжений $f(\sigma_a)$:

$$f_y(r/\sigma_{-1}) = f\left(\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{r}\right) \frac{\sigma_{-1}}{r^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\sigma} \exp\left[-\frac{\left((\sigma_{-1}/r) - m_\sigma\right)^2}{2\sigma_\sigma^2}\right] \frac{\sigma_{-1}}{r^2}. \quad (3)$$

Тогда безусловная плотность вероятности переменной r определяется следующим выражением:

$$f(r) = \int_a^b f_y(r/\sigma_{-1}) f(\sigma_{-1}) d\sigma_{-1}, \quad (4)$$

где $f(\sigma_{-1})$ – плотность вероятности предела выносливости.

Пределы интегрирования a и b для интеграла (4) определяются из рис. 1 следующим образом:

$$\begin{cases} a = \sigma_{-1H}, & b = \sigma_{aB} \cdot r \quad \text{при } r_{\min} \leq r \leq r'; \\ a = \sigma_{aH}, & b = r\sigma_{-1B} \quad \text{при } r' \leq r \leq 1, \end{cases} \quad (5)$$

где σ_{-1H} , σ_{aH} , σ_{-1B} , σ_{aB} – минимальные и максимальные значения предела выносливости и приведенной амплитуды напряжений, $r_{\min} = \sigma_{-1H} / \sigma_{aB}$, $r' = \sigma_{-1B} / \sigma_{aB}$.

Выражение для плотности вероятности переменной s согласно формул функционального преобразования [9] случайных величин (2) имеет вид:

$$f(s) = f\left(r = s^{1/m}\right) \frac{1}{m} s^{-\frac{1-m}{m}}. \quad (6)$$

Таким образом, получены основные соотношения для решения прямой задачи надежности: $[\sigma_{-1}, \sigma_a] \rightarrow [s]$. Для определения плотностей вероятности

стей приведенных амплитуд напряжений применялся метод статистического моделирования амплитуд напряжений, где значения СКО амплитуд напряжений определялись из решения задачи статистической динамики рам тележек.

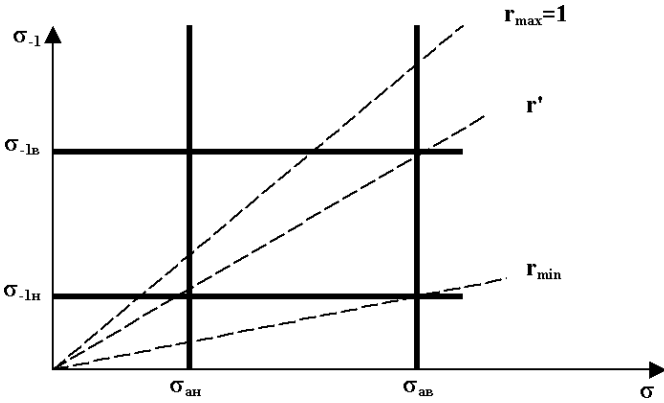


Рисунок 1 – Пределы интегрирования для прямой задачи надежности

3. Решение обратной задачи надежности. Обратная задача надежности рам тележек заключается в определении (идентификации) вероятностных характеристик нагруженности конструкции по известным вероятностным характеристикам надежности и сопротивления усталости: $[s, \sigma_{-1}] \rightarrow [\sigma_a]$.

Для решения данной задачи использовался подход, аналогичный изложенному в разд. 2. Выражение для плотности вероятности переменной r согласно формул функционального преобразования случайных величин имеет вид:

$$f(r) = f(s = r^m) m r^{m-1} = \frac{m \cdot r^{m-1}}{\sqrt{2\pi} \sigma_s} \exp\left[-\frac{(r^m - m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right], \quad r \leq 1. \quad (7)$$

Введем условную плотность вероятности приведенных амплитуд напряжений при условии, что $\sigma_{-1} \leq \sigma_a$, согласно введенным обозначениям (2):

$$f_y(\sigma_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_s} \exp\left[-\frac{((\sigma_{-1}/\sigma_a)^m - m_s)^2}{2\sigma_s^2}\right] m \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a}\right)^{m-1} \cdot \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a^2}. \quad (8)$$

Тогда безусловная плотность вероятности приведенных амплитуд напряжений определяется из выражения:

$$f(\sigma_a) = \int_c^d f_y(\sigma_a) f(\sigma_{-1}) d\sigma_{-1}. \quad (9)$$

Пределы интегрирования c и d для интеграла (9) определяются из рис. 2 следующим образом:

$$\begin{cases} c = \sigma_{-1H}, & d = \sigma_a & \text{при } \sigma_a \leq \sigma_{-1B}; \\ c = \sigma_{-1H}, & d = \sigma_{-1B} & \text{при } \sigma_a > \sigma_{-1B}. \end{cases} \quad (10)$$

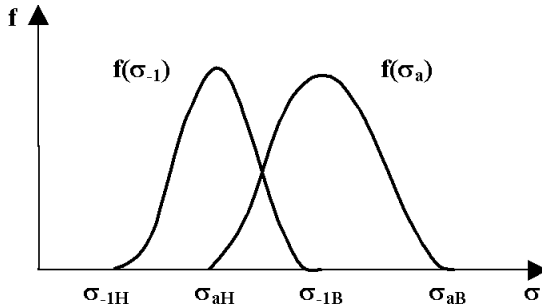


Рисунок 2 – Пределы интегрирования для обратной задачи надежности

4. Численные исследования

4.1. Прямая задача надежности. Рассмотрим решение прямой задачи прогнозирования надежности для рам тележек типа ЕЖ-3 при использовании метода статистического моделирования амплитуд напряжений. Моделирование случайных величин производилось с использованием ПК MATLAB 5.2.

Для расчетов принимались следующие параметры: базовое число циклов до разрушения $N_0 = 10^7$, показатель степени кривой усталости $m = 3,5$, коэффициент влияния асимметрии цикла $\varphi_\sigma = 0,77$, эффективная частота случайного процесса $f_e = 1,4$ Гц. Из экспериментальных данных об отказах рам тележек следует бимодальность закона распределения пробегов рам тележек, которая объясняется бимодальностью предела выносливости, связанной с несовершенством технологии изготовления рам тележек, вследствие чего возникают технологические дефекты первого и второго рода. Предполагалось, что плотность вероятности предела выносливости подчиняется нормальному закону [1, 2] со следующими параметрами: математические ожидания (МО) $\bar{m} = 23$ МПа и $\bar{m} = 40$ МПа, СКО $\sigma_{\sigma-1} = 2,28$ МПа. Из результатов численных исследований следует, что плотность вероятности приведенной амплитуды напряжений подчиняется нормальному закону. Параметры нормального закона для приведенных амплитуд напряжений при двух значениях МО и СКО предела выносливости представлены в табл. 1.

Для оценки полученных результатов использовались экспериментальные данные метрополитена г. Харькова (см. рис. 3) [6]. Анализ данных показывает, что зависимость имеет явно выраженную бимодальность, обусловленную наличием максимумов при двух значениях переменной $s = 0,25$ и $s = 0,6$. Наличие двух максимумов можно объяснить существованием в рамах тележек технологических дефектов первого и второго рода.

Проводилось сравнение расчетной плотности вероятности $f(s)$ с эксперимен-

тальными данными (см. рис. 3). Как следует из рис. 3, расчетная плотность вероятности $f(s)$ хорошо согласуется с экспериментальной плотностью вероятностью для рам тележек типа ЕЖ-3, что позволяет сделать вывод о достоверности разработанной методики решения прямой задачи надежности рам при использовании метода статистического моделирования амплитуд напряжений.

Таблица 1 – Параметры нормального закона для приведенных амплитуд напряжений

№	Предел выносливости, МПа		Приведенная амплитуда напряжений, МПа	
	МО	СКО	МО	СКО
1	23	2,28	26,5	3,4
2	40	2,28	34,3	3,4

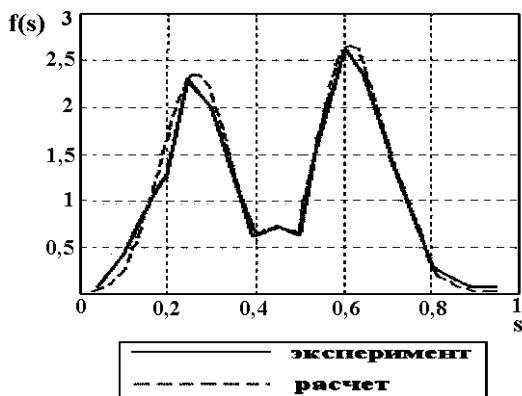


Рисунок 3 – Плотность вероятности переменной s

Далее проводилось решение прямой задачи прогнозирования надежности рам тележек типа 81-717. В результате усовершенствования технологии изготовления рам тележек удалось повысить сопротивляемость конструкции усталостному разрушению. Гарантированная оценка для пробега тележек типа 81-717 до появления усталостных трещин, полученная из условий эксплуатации вагонов метрополитена г. Харькова, составляет $L = 1,9$ млн. км ($s = 0,4$). Это значение принято за нижнюю границу плотности вероятности пробегов. Следовательно, средний ресурс рам тележек данного типа должен быть выше на 28 % по сравнению с тележками типа ЕЖ-3 при равных СКО пробегов для тележек ЕЖ-3 и 81-717 (см. рис. 4).

Поскольку дефекты первого рода в рамах тележек не проявляются, то при расчетах принимались следующие параметры нормального закона для предела выносливости: МО $\bar{m} = 40$ МПа, СКО $\sigma_{\sigma-1} = 2,28$ МПа, параметры

нормального закона для переменной s : МО $m_s = 0,685$ МПа, СКО $\sigma_s = 0,07$ МПа. Расчетные плотности вероятностей $f(s)$ при использовании метода статистического моделирования амплитуд напряжений σ_{ai} представлены на рис. 5, из которого следует, что МО случайной величины s при одинаковых СКО отличаются на 2 %. Данный результат позволяет сделать вывод о достоверности решения задачи статистической динамики рам тележек. Такие же результаты для вероятностных характеристик приведенных амплитуд напряжений получены и для рам тележек типа ЕЖ-3.

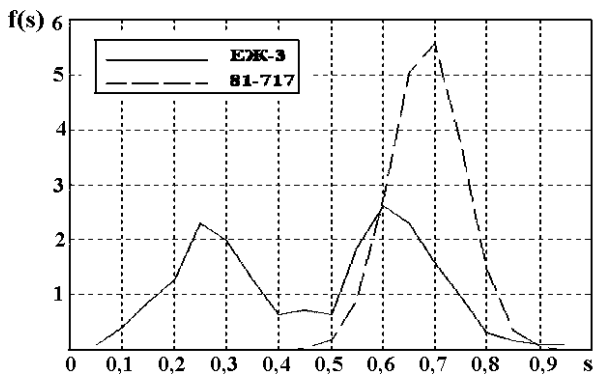


Рисунок 4 – Плотности вероятностей $f(s)$ для рам тележек серий ЕЖ-3 и 81-717

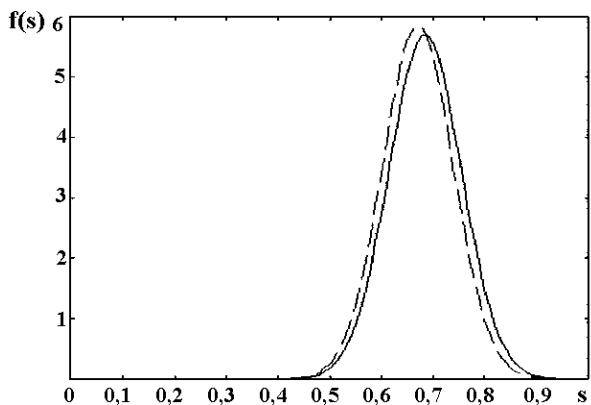


Рисунок 5 – Расчетная плотность вероятности $f(s)$

4.2. Обратная задача надежности. Рассмотрим решение обратной задачи надежности для рам тележек вагонов типа ЕЖ-3. Представим плотность вероятности переменной s (см. рис. 3) в виде суммы двух нормальных законов: $f(s) = k_1 f_1(s) + k_2 f_2(s)$, где $k_1 = 0,46$; $k_2 = 0,54$;

$$f_i(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Si}} \exp\left[-\frac{(r^m - m_{Si})^2}{2\sigma_{Si}^2}\right], \quad i = 1, 2 \quad (m_{Si} - \text{МО переменной } s, \sigma_{Si} - \text{СКО}$$

переменной s .

График плотностей вероятностей приведенных амплитуд напряжений и их аппроксимаций в виде нормального закона показан на рис. 6, из которого следует, что расчетная плотность вероятности приведенных амплитуд напряжений хорошо аппроксимируется нормальным законом для принятой плотности вероятности предела выносливости. Такие же результаты для вероятностных характеристик приведенных амплитуд напряжений дает и метод статистического моделирования.

Результаты расчета МО приведенных амплитуд напряжений с учетом одинаковых значений СКО при решении обратной задачи надежности рам тележек с использованием метода статистического моделирования представлены в табл. 2

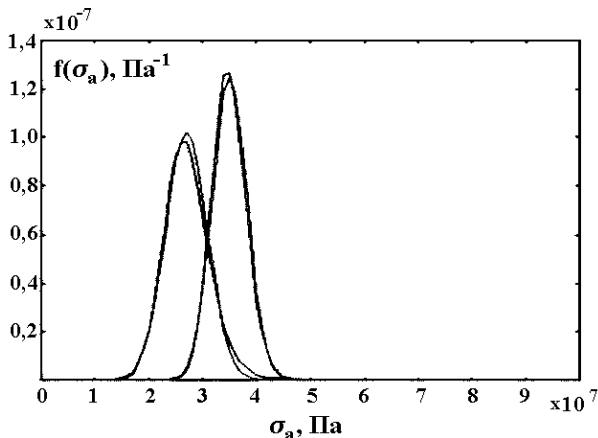


Рисунок 6 – Плотности вероятностей $f(\sigma_a)$ и их аппроксимации в виде нормального закона

Таблица 2 – МО приведенных амплитуд напряжений

№	Значение МО, МПа		Отличие, %
	обратная задача надежности	статистическое моделирование	
1	27	26,5	1,8
2	35	34,3	2

Как следует из табл. 2, наибольшее отличие в МО приведенных амплитуд напряжений, полученных при использовании двух методов расчета, не превышает

2 %, то есть для получения вероятностных характеристик нагруженности рам тележек можно использовать как метод статистического моделирования амплитуд напряжений, так и решение обратной задачи надежности рам тележек.

Затем было выполнено решение обратной задачи надежности для рам тележек типа 81-717. График плотностей вероятностей приведенных амплитуд напряжений и их аппроксимаций в виде нормального закона показан на рис. 7, из которого следует, что расчетная плотность вероятности приведенных амплитуд напряжений для рам тележек типа 81-717 хорошо аппроксимируется нормальным законом для принятой плотности $f(\sigma_{-1})$.

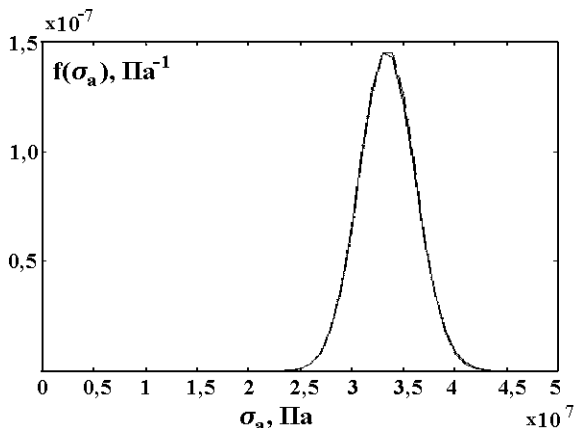


Рисунок 7 – Плотности вероятностей амплитуд напряжений и их аппроксимаций

Выводы. Разработаны методы решения прямых и обратных задач надежности рам тележек вагонов электропоездов и проведены численные исследования характеристик надежности. Выполнено сопоставление расчетной и экспериментальной плотностей вероятностей пробегов рам тележек до появления усталостных трещин, которое показало достоверность разработанных методов. Проведен расчет характеристик надежности рам тележек по прототипу и выполнены численные исследования.

Список литературы: 1. Механическая часть тягового подвижного состава: Учебник для вузов ж.-д. трансп. / И.В.Бирюков, А.Н.Савоськин, Г.П.Бурчак и др. / Под ред. И.В.Бирюкова. – М.: Транспорт, 1992. – 440 с. 2. Прочность и безотказность подвижного состава железных дорог / А.Н. Савоськин, Г.П.Бурчак, А.П.Матвеевичев и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 288 с. 3. Егоренков А.В. Обоснование технических решений по повышению усталостной долговечности рам шпинтонного типа тележек вагонов метро: Автореф. дис... канд.техн.наук: 05.22.07 / БГТУ. – М., 2002. – 21 с. 4. Добровольская Э.М. Вагоны метрополитена типа Е. Устройство и обслуживание. – М.: Транспорт, 1989. – 302 с. 5. Раков В.А. Локомотивы отечественных железных дорог (1956-1975 гг.). – М.: Транспорт, 1999. – 443 с. 6. Жовдак В.А., Смирнов М.М., Ломакин А.Н. и др. Прогнозирование остаточного ресурса элементов конструкций вагонов метрополитена // Тр. Междунар. конф. «Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций». – Киев,

2000. – Т. 1. – С. 883-888. 7. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с. 8. *Жовдак В.А, Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкций с учетом технологических и эксплуатационных факторов: Монография. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 120 с. 9. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1974. – 552 с.

Поступила в редколлегию 29.05.2005

УДК 62-192.624.041

В.А.ЖОВДАК, докт.техн.наук, ***Л.Ф.ТАРАСОВА***, НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ПРИ УСТАЛОСТНЫХ ОТКАЗАХ

Запропоновано методику прогнозування залишкового ресурсу елементів конструкцій на основі використання кінетичних рівнянь для опису міри пошкодження і математичного апарату теорії марковських процесів. У результаті визначаються найбільш інформативні показники залишкового ресурсу – ймовірність безвідмовної роботи й щільність імовірності відмовлень. Методика дозволяє враховувати випадковість процесу навантаження, зниження границі витривалості

The approach of the construction element's residual resource prediction, based on the use of kinetic equations for description of the measure of damage and the mathematical tool for Markoff's process theory is proposed. As the result, the most informative reliability characteristics, such as no-failure operation probability and probability density of failures, are determined. This approach allows take proper account of the random loading, fatigue point decrease.

На этапе проектирования различных конструкций, как правило, производится прогнозирование их ресурса. Это так называемый проектный ресурс должен быть обеспечен на этапах изготовления и эксплуатации путем соблюдения соответствующих регламентируемых норм. Однако, как показывает практика эксплуатации машиностроительных конструкций, проектный ресурс может существенно отличаться от фактического ресурса в силу недостоверности или неполноты исходной информации, используемой при проектировании о реальных условиях эксплуатации и свойствах материала конструкции. В связи с этим возникает актуальная проблема оценки остаточного ресурса различных конструкций после определенного срока эксплуатации.

В данной работе предлагается подход к прогнозированию остаточного ресурса элементов конструкций при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов.

Постановка задачи. Предполагается, что процесс нагружения $y(t)$ является узкополосным случайным процессом с огибающей $\lambda(t)$ и несущей частотой ω .

Введем меру накопления повреждений $z(t)$ в элементах конструкций при случайном воздействии и постепенных отказах, происходящих в результате накопления различного рода повреждений. В момент времени t_k $z(t_k) = z_0$, а в момент разрушения $t = t^*$ $z(t^*) = z^*$. Кинетическое уравнение повреждаемости (КУП), описывающее процесс накопления повреждений при постепенных отказах механического происхождения, в самом общем виде можно представить [1, 2]

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z(t), \lambda(t), y_m, R(t)], \quad (1)$$

здесь $F[\dots]$ – детерминированная неотрицательная для кумулятивных моделей отказов скалярная линейная или нелинейная функция, $\lambda(t)$ – амплитудное значение параметра нагруженности при гармоническом нагружении, y_m – среднее значение, $R(t)$ – вектор характеристик конструкционной прочности. Кинетические уравнения, описывающие скорость накопления повреждений, классифицируются в зависимости от модели, заложенной в них: линейные, нелинейные и автомодельные. В дальнейшем рассматривается автомодельная гипотеза накопления повреждений, для которой в правой части КУП можно выделить явную зависимость от функции меры повреждений [1, 2] и уравнение (1) записывается в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z, \lambda] = F_1[\lambda]F_2[z] = Cz\lambda^m, \quad \lambda \geq \sigma_{-1}, \quad (2)$$

где $C = \frac{\omega}{2\pi N_0 \sigma_{-1}^m}$; N_0 , σ_{-1}^m , m – константы, определяемые по кривой Веллера.

Процесс накопления повреждений $z(t)$ будем считать марковским процессом, условия применимости этой гипотезы обосновываются в работах [2,3]. В этом случае одномерная плотность вероятности $f(z,t)$ определенная в момент времени t на интервале $z \in [0, \Delta]$, удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [5]

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}[A(z)f(z,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}[B(z)f(z,t)] = -\frac{\partial}{\partial z}G(z,t), \quad (3)$$

где $G(z,t)$ – поток вероятности

$$G(z,t) = A(z)f(z,t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z}[B(z)f(z,t)]. \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\lim_{z \rightarrow 0, \Delta} G(z,t) = 0, \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow 0, \Delta} f(z,t) = 0. \quad (5)$$

Начальные условия:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(z,t) = f_0(z), \quad (6)$$

где $f_0(z) = f(z, t_k)$ – значение плотности меры повреждений в момент времени t_k .

Коэффициенты $A(z)$, $B(z)$ уравнения (3) определяются в соответствии со сто-

хастическим дифференциальным уравнением (1) при условии временной симметрии функции F и стационарности процесса $\lambda(t)$ по следующим формулам

$$A(z) = \langle F[\dots] \rangle + \frac{1}{4} \frac{dB(z)}{dz(z)} = A^*(z) + \frac{1}{4} \frac{dB(z)}{dz(z)}, \quad (7)$$

$$B(z) = 2 \int_0^{\infty} K_{FF}(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где $A^*(z) = \langle F[\dots] \rangle$ – среднее значение функции F , вычисленное при условии $z(t) = \text{const}$, K_{FF} – корреляционная функция F .

При использовании КУП в виде (2) коэффициенты $A^*(z)$ и $B(z)$ в соответствии с соотношениями (7) и (8) определяются следующими выражениями

$$A^*(z) = C(2\sigma^2)^{m/2} z \left[\Gamma(m/2 + 1) - \Gamma^*(m/2 + 1) \right] = \tilde{A}z, \quad (9)$$

$$B(z) = \frac{C^2 z^2 (2\sigma^2)^m}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!(k!)^2} \left[\Gamma(m/2 + k + 1) - \Gamma^*(m/2 + k + 1) \right] \right\}^2 = \tilde{B}z^2, \quad (10)$$

где $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} \exp(-x) dx$ – гамма-функция, $\Gamma^*(m)$ – неполная гамма-функция, σ^2 – дисперсия процесса нагружения, α – коэффициент затухания корреляционной функции огибающей.

При получении соотношений (9), (10) предполагалось, что $y(t)$ – нормальный процесс, огибающая процесса – $\lambda(t)$ подчиняется релеевскому закону, а также использовалось разложение двумерной релеевской плотности вероятности в ряд по полиномам Лагера нулевого порядка.

Уровни динамических напряжений в элементах конструкций, как правило, ниже предела выносливости, несмотря на это, имеют место усталостные повреждения, причиной которых, как известно, является снижение в процессе эксплуатации прочностных характеристик материала, в частности снижение предела выносливости. Учет этого фактора осуществляется путем представления предела выносливости в виде убывающей функции времени

$$\sigma_{-1}(t) = \phi(t)\sigma_{-1}, \quad (11)$$

здесь $\phi(t)$ – убывающая функция времени.

Коэффициенты уравнения ФПК в этом случае также будут зависеть от времени

$$A(z, t) = \left(\frac{\tilde{A}}{\phi^m(t)} + \frac{\tilde{B}}{2\phi^{2m}(t)} \right) z = \bar{A}(t)z, \quad (12)$$

$$B(z, t) = \frac{\tilde{B}}{\phi^{2m}(t)} z^2 = \bar{B}(t)z^2. \quad (13)$$

Метод решения. Для решения уравнения ФПК используется метод ха-

ракетистических функций [3]. В соответствии с используемым методом умножим соотношение (2) на $e^{i\omega z}$ и проинтегрируем по z в пределах $z \in [0, \Delta]$. Произведя интегрирование по частям в правой части уравнения (2) с учетом удовлетворения граничных условий (4), получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = i\omega \int_0^{\Delta} A(z, t) f(z, t) e^{i\omega z} dz - \frac{\omega^2}{2} \int_0^{\Delta} B(z, t) f(z, t) e^{i\omega z} dz. \quad (14)$$

Плотность вероятности может быть выражена через значения характеристической функции в дискретном ряде точек $\Theta(\omega_k, t)$ [4]

$$f(z, t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-N}^N \Theta(\omega_k, t) e^{-i\omega_k z}, \quad (15)$$

$$\omega_k = 2\pi k / \Delta. \quad (16)$$

Используя выражение (15) уравнение (14) можно представить

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-N}^N \Theta(\omega_k, t) \left[i\omega \int_0^{\Delta} A(z, t) e^{i\omega z} e^{-i\omega_k z} dz - \frac{\omega^2}{2} \int_0^{\Delta} B(z, t) e^{i\omega z} e^{-i\omega_k z} dz \right]. \quad (17)$$

Запишем полученное уравнение в виде

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = \sum_{k=-N}^N d_k(\omega, t) \Theta(\omega_k, t), \quad (18)$$

$$\text{где} \quad d_k(\omega, t) = \frac{1}{\Delta} \left[i\omega a_k(\omega, t) - \frac{\omega^2}{2} b_k(\omega, t) \right], \quad (19)$$

$$a_k(\omega, t) = \int_0^{\Delta} A(z, t) e^{iz(\omega - \omega_k)} dz, \quad b_k(\omega, t) = \int_0^{\Delta} B(z, t) e^{iz(\omega - \omega_k)} dz. \quad (20)$$

Для любого значения $\omega = \omega_m = 2\pi m / \Delta$ можно записать уравнение (18). Варьируя $m = \overline{1, 2N+1}$, получим систему $2N+1$ дифференциальных уравнений. Запишем полученную систему в матричном виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \mathbf{D} \Theta, \quad (21)$$

где Θ – вектор с элементами $\Theta(\omega_m, t)$, \mathbf{D} – матрица с элементами $D_{mk} = d_k(\omega_m, t)$. Система дифференциальных уравнений (21) решается численно. В случае независимости матрицы \mathbf{D} от времени существует аналитическое решение уравнения (21)

$$\Theta = \Theta_0 \exp(\mathbf{D}t), \quad (22)$$

где Θ_0 – вектор начальных условий.

Определение основных показателей надежности. Полученные значения характеристической функции в дискретном ряде точек $\Theta(\omega_m, t)$, позволяют получить плотность вероятности меры повреждений $f(z, t)$, по которым определяются на отрезке времени $[t_k, t]$ основные показатели надежности для кумулятивных мо-

делей накопления повреждений [1, 3]: вероятность безотказной работы (ВБР)

$$P(t) = \int_0^{z_{np}} f(z, t) dz, \quad t \in [t_k, t] \quad (23)$$

и плотность вероятности отказов (ПВО)

$$q(t) = -\frac{dP(t)}{dt}, \quad t \in [t_k, t]. \quad (24)$$

Получим соотношение для ВБР через значения характеристической функции в дискретном ряде точек. Для этого воспользуемся соотношением для плотности вероятности повреждаемости (15), в суммировании выделим особую точку $k=0$, учитывая, что $\Theta(0) = 1$ и производя интегрирование, имеем

$$P(t) = \frac{1}{\Delta} \left\{ z_{np} + \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \Theta(\omega_k, t) \left(\frac{1 - e^{-i\omega_k z_{np}}}{i\omega_k} \right) \right\}, \quad t \in [t_k, t]. \quad (25)$$

Используя полученное соотношение (25) и уравнение (18) запишем соотношение для ПВО

$$q(t) = -\frac{1}{\Delta} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \sum_{m=-N}^N d_k(\omega_m) \Theta(\omega_k, t) \left(\frac{1 - e^{-i\omega_k z_{np}}}{i\omega_k} \right), \quad t \in [t_k, t]. \quad (26)$$

Таким образом, полученные соотношения позволяют определять основные характеристики надежности системы.

Численные исследования Соотношения (12), (13) позволяют получить аналитические выражения для $a_k(\omega)$, $b_k(\omega)$ путем интегрирования (20)

$$a_k(\omega, t) = \begin{cases} \frac{\Delta}{i(\omega - \omega_k)} \bar{A}(t), & \omega \neq \omega_k \\ \frac{\Delta^2}{2} \bar{A}(t), & \omega = \omega_k \end{cases}, \quad (27)$$

$$b_k(\omega, t) = \begin{cases} \left[\frac{\Delta^2}{i(\omega - \omega_k)} + \frac{2\Delta}{(\omega - \omega_k)^2} \right] \bar{B}(t), & \omega \neq \omega_k \\ \frac{\Delta^3}{3} \bar{B}(t), & \omega = \omega_k \end{cases}. \quad (28)$$

Подставляя соотношения (27), (28) в (19) и производя соответствующие преобразования с учетом (16), получим

$$D_{km} = \begin{cases} \frac{m}{m-k} \bar{A}(t) - \left(\frac{\pi m^2}{i(m-k)} + \frac{m^2}{(m-k)^2} \right) \bar{B}(t), & m \neq k \\ i\pi m \bar{A}(t) - \frac{2}{3} \pi^2 m^2 \bar{B}(t), & m = k \end{cases}. \quad (29)$$

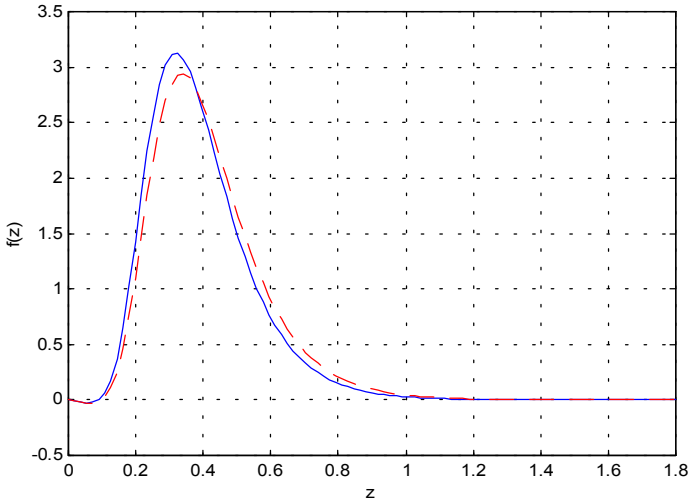


Рисунок 1– Плотности вероятности меры повреждений

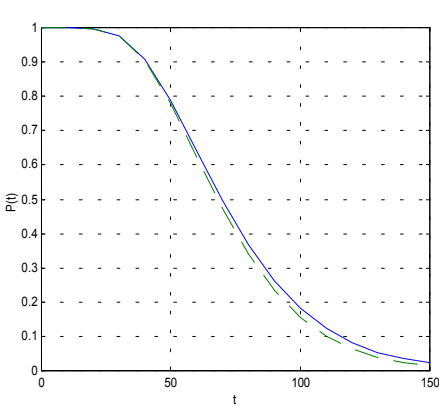


Рисунок 2 – ВБР

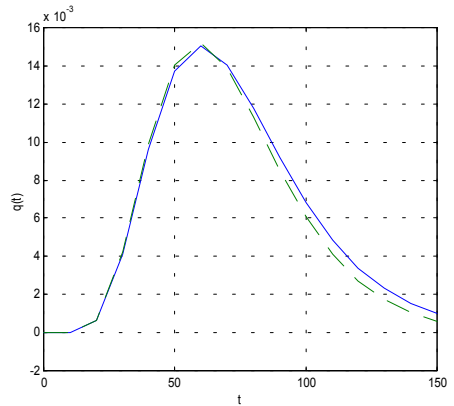


Рисунок 3 – ПВО

Дальнейший алгоритм реализован численно в системе MATLAB 5.2. Численное интегрирование уравнения (21) осуществлялось методом Рунге-Кутты, начальные условия задавались нормальным законом со следующими значениями параметров: $m_0 = z_0 = 0,1$; $\sigma_{z_0}^2 = 0.0001$. Зависимость от времени коэффициентов ФПК задавалась в следующем виде $\bar{A}(t) = 0.01 + k_a t$, $\bar{B}(t) = 0.001 + k_b t^2$. Расчеты производились для двух вариантов значений k_a , k_b . Полученные в результате численных исследований плотности вероятности меры повреждений, ВБР, ПВО приведены на рис. 1-6. Пунктирные линии со-

ответствуют расчетам с учетом снижения предела выносливости, сплошные – соответствуют расчетам с постоянным пределом выносливости. На рис. 1-3 приведены результаты расчетов при следующих значениях $k_a = 7 \cdot 10^{-6}$, $k_b = 6 \cdot 10^{-10}$.

Аналогично на рис. 4-6 приведены результаты расчетов при следующих значениях $k_a = 2 \cdot 10^{-5}$, $k_a = 7 \cdot 10^{-6}$.

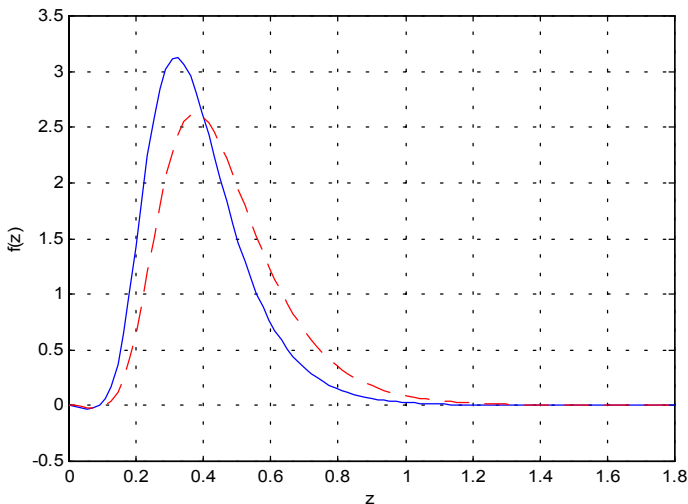


Рисунок 4 – Плотности вероятности меры повреждений

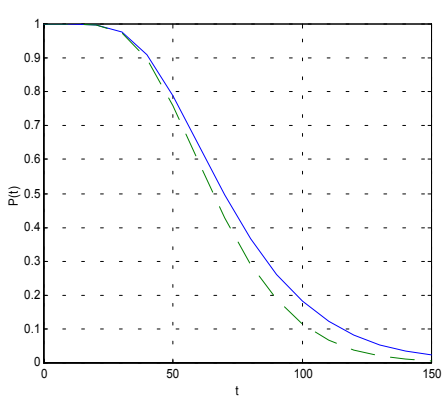


Рисунок 5 – ВБР

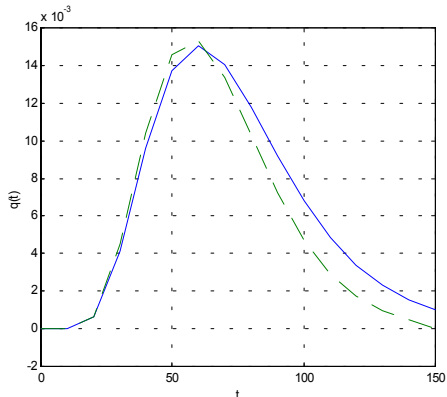


Рисунок 6 – ПВО

Выводы. Решена задача прогнозирования остаточного ресурса при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата

теории марковских процессов. Предложенная методика позволяет получить наиболее информативные показатели остаточного ресурса – вероятность безотказной работы и плотность вероятности отказов с учетом снижения предела выносливости в виде произвольной функции времени, а также учитывать различные модели накопления повреждений и различные законов распределения накопленной меры повреждения в диагностируемый момент времени.

Список литературы: 1. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М. Машиностроение, 1984. – 312 с. 2. *Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с. 3. *Жовдак В.А., Мищенко И.В.* Прогнозирование надежности элементов конструкции с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Харьков: ХГПУ, 1999. – 120 с. 4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. –М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. 5. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М. :Сов. радио,1977. – 488 с.

Поступила в редколлегию 25.05.2005

УДК 539.3

О.О.ЗАМУЛА, НТУ «ХП»

УРАХУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ У РОЗРАХУНКАХ НА ПОВЗУЧІСТЬ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

В роботі надано метод розв'язування геометрично нелінійних початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання, що побудовані на базі методу скінченних елементів (МСЕ) та рівнянь стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. В оболонках враховано деформацію поперечного зсуву. Розглянуто приклад, за яким встановлено якісні відмінності розв'язків задач у геометрично лінійній і нелінійній постановках.

In article the method of the solution of the initial-boundary value problems of the creep theory of shells of revolution is given, which one are constructed on the basis of finite element method (FEM) and equations of state with allowance creep-damage process. The shells with deformation of transversal shift and geometrical nonlinearity are reviewed at final normal displacements. The example of geometrical nonlinearity calculation is given.

Актуальність теми. Тонкостінні оболонки є важливими елементами різноманітних конструкцій, що найбільш поширені у турбінобудуванні, космічній, авіаційній техніці. Тонкостінними оболонками є герметичні відсіки, баки, трубопроводи і багато інших конструкцій. У процесі їхньої тривалої експлуатації виникає явище повзучості, що є складною науковою проблемою. Методи розв'язування задач повзучості об'єктів, математичними моделями яких є оболонки обертання, добре відомі з літератури, наприклад [1-4]. Разом з цим, за аналізом публікацій можна зробити висновок, що залишаються недостатньо вивченими такі питання, як врахування деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійно-

сті в оболонках при повзучості з пошкоджуваністю. Ці питання є актуальними в механіці оболонок. В роботі запропоновано підхід щодо побудови розв'язувальних рівнянь повзучості оболонок обертання з урахуванням пошкоджуваності матеріалу, деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійності. Дані рівняння побудовані із використанням методу скінченних елементів.

Постановка проблеми. У роботі розглядаються тіла у вигляді тонкостінних оболонок обертання (рис. 1), що деформуються в умовах осьосиметричного навантаження. Тут вісь x є віссю обертання, θ – кут між дотичною до твірної і віссю обертання. Локальною системою координат є ортогональна система координат (z, s) , при цьому вісь z направлено по нормалі до твірної, а s – вздовж дотичної до твірної. Основні кінематичні і статичні рівняння теорії тонких оболонок сформульовано в роботі в межах гіпотез Тимошенка при скінченних нормальних прогинах [5]:

$$e_{ss} = \Omega_{ss} + z\chi_{ss}; \quad e_{\varphi\varphi} = \Omega_{\varphi\varphi} + z\chi_{\varphi\varphi}; \quad e_{sz} = \Omega_{sz}, \quad (1)$$

де e_{ss} , $e_{\varphi\varphi}$, e_{sz} – повні деформації – осьова, колова і зсувна, відповідно, у довільній точці оболонки;

Ω_{ss} , $\Omega_{\varphi\varphi}$ – деформації серединної поверхні, осьова і колова, відповідно;

χ_{ss} , $\chi_{\varphi\varphi}$ – зміни кривизн серединної поверхні оболонки.

Співвідношення для них мають вигляд [5]:

$$\Omega_{ss} = \frac{du}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2, \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (u \cdot \sin\theta + w \cdot \cos\theta), \quad 2\Omega_{sz} = \gamma_{sz} + \frac{dw}{ds}, \quad (2)$$

$$\chi_{ss} = \frac{d\gamma_{sz}}{ds}, \quad \chi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left[\gamma_{sz} \sin\theta + \frac{\cos\theta}{r} (u \cdot \sin\theta + w \cdot \cos\theta) \right],$$

де u , w – переміщення точок серединної поверхні оболонки вздовж осей s і z , відповідно;

γ_{sz} – кут повороту нормального до серединної поверхні елемента під час деформування у напрямку s .

Підкресленою лінією в (2) позначено геометрично нелінійну складову.

Оболонку обертання апроксимуємо конічними оболонками, що з'єднані вздовж твірної, яка утворює серединну поверхню оболонки. Товщина стінки h є сталою в межах одного скінченного елемента. Елемент оболонки показано на рис. 2.

Кожний вузол має шість степенів вільності (рис. 2). У локальній системі координат елемента у якості степенів вільності виступають компоненти вектору v :

$$v^T = \{u, w, \gamma_{sz}\} \quad (3)$$

та їхні похідні за координатою s у відповідному вузлі:

$$q_i^T = \{q_1, q_2, \dots, q_6\} = \{u(0), u'(0), w(0), w'(0), \gamma_{sz}(0), \gamma'_{sz}(0)\},$$

$$q_j^T = \{q_7, q_8, \dots, q_{12}\} = \{u(L), u'(L), w(L), w'(L), \gamma_{sz}(L), \gamma'_{sz}(L)\}. \quad (4)$$

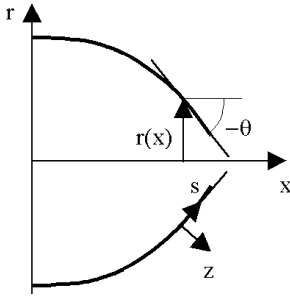


Рисунок 1

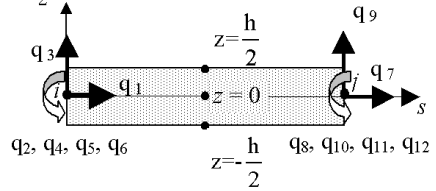


Рисунок 2

Використання такої кількості узагальнених координат (3) потребує апроксимації компонент (3) кубічними поліномами. Внаслідок того, що більш зручними у процесі розв'язування задачі є нормовані координати, зроблено перехід від $s \in [0, L]$ до $\xi \in [-1; 1]$. Тоді:

$$\begin{aligned} u &= q_1 N_1 + \frac{L}{2} q_2 N_2 + q_7 N_3 + \frac{L}{2} q_8 N_4, \\ w &= q_3 N_1 + \frac{L}{2} q_4 N_2 + q_9 N_3 + \frac{L}{2} q_{10} N_4, \\ \gamma_{sz} &= q_5 N_1 + \frac{L}{2} q_6 N_2 + q_{11} N_3 + \frac{L}{2} q_{12} N_4, \end{aligned} \quad (5)$$

де N_i – ермітові поліноми третього порядку:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)^2 (2+\xi)/4, \quad N_2 = (\xi-1)(\xi^2-1)/4, \\ N_3 &= (1+\xi)^2 (2-\xi)/4, \quad N_4 = (\xi-1)(\xi+1)^2/4. \end{aligned} \quad (6)$$

При розв'язуванні задачі методом скінченних елементів на базі принципу мінімуму потенціальної енергії за основу приймається повна потенціальна енергія скінченного елемента, яка визначається різницею енергії пружної деформації U і роботи зовнішніх сил A :

$$\Pi = U - A. \quad (7)$$

Функціонал енергії пружної деформації оболонки як тривимірного тіла має вигляд інтеграла за об'ємом V :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV. \quad (8)$$

Вектор напруження в оболонці σ визначено за законом Гука:

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (9)$$

де D – матриця пружних констант матеріалу,

Вектор пружної деформації ε можна записати як різницю повної деформації ε і деформації повзучості c :

$$\varepsilon = \varepsilon_L + \tilde{\varepsilon} - c. \quad (10)$$

У рівності (10) враховано, що у вектору повної деформації $e = \varepsilon + c$, де $c^T = \{c_{ss}, c_{\varphi\varphi}, 2c_{sz}\}$, відокремлено лінійну та нелінійну складові, відповідно до (2):

$$\varepsilon_L^T = \{\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, 2\varepsilon_{sz}\}, \quad \tilde{\varepsilon}^T = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \quad 0 \quad 0 \right\}, \quad (11)$$

У подальшому для стислості, якщо у задачі не враховується геометрично нелінійна складова (11) використовуватимемо позначення $\tilde{\varepsilon} = 0$, у протилежному випадку $\tilde{\varepsilon} \neq 0$.

Робота зовнішніх сил p , які прикладені до серединної поверхні оболонки S , має вигляд скалярного добутку цих сил на спричинені ними переміщення v :

$$A = \int_S v^T p dS. \quad (12)$$

Рівновага одного скінченного елемента оболонки в довільний час відбувається за умов мінімуму повної потенційної енергії Π за відомих для цього часу деформацій повзучості [5]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{\partial (U - A)}{\partial q} = 0. \quad (13)$$

З урахуванням (8)-(10), (12) функціонал (7) запишеться відносно векторів деформацій (11) та вектору переміщення (3):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_L^T D \varepsilon_L + \tilde{\varepsilon}^T D \tilde{\varepsilon} + c^T D c) dV + \\ & + \int_V (\tilde{\varepsilon}^T D \varepsilon_L - \varepsilon_L^T D c - \tilde{\varepsilon} D c) dV - \int_S v^T p dS. \end{aligned} \quad (14)$$

Виконуючи перетворення в (14), шляхом підстановки до нього (11) з урахуванням співвідношень (1), (2), (5), отримуємо варіацію за узагальненими незалежними координатами цього функціонала для оболонки в цілому. З умови мінімуму повної потенційної енергії (13) із функціоналу (14) одержимо розв'язувальне рівняння МСЕ відносно глобальних координат, яке буде нелінійним відносно вектора q , складеного з узагальнених координат в точках твірної оболонки, де елементи з'єднані:

$$\tilde{K}(q, c) + Kq = P + P_c, \quad (15)$$

де $\tilde{K}(q, c)$ – нелінійно залежна від q вектор-функція;

P – вектор зведених до вузлів узагальнених сил, що діють на оболонку;

P_c – вектор фіктивних сил, що пов'язаний з повзучістю.

K – матриця, яка у випадку $\tilde{\varepsilon} = 0$ є глобальною матрицею жорсткості системи $Kq = P + P_c$.

Розв'язувальне рівняння (15) повинно доповнитися рівняннями стану матеріалу оболонки при повзучості з пошкоджуваністю для визначення вектору деформацій повзучості c на кожному кроці у часі:

$$\dot{c}_{ss}(\sigma_i, \omega) = \frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \left(\sigma_{ss} - \frac{1}{2}\sigma_{\varphi\varphi} \right), (s \leftrightarrow \varphi); 2\dot{c}_{sz}(\sigma_i, \omega) = \frac{3B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \sigma_{sz},$$

$$\dot{\omega}(\sigma_e, \omega) = \frac{A(\alpha \times \max\{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\} + (1-\alpha)\sigma_i)^k}{(1-\omega^r)^p}, \omega(0)=0, \omega(t_*)=\omega_*, \quad (16)$$

де $c_{ss}, c_{\varphi\varphi}, c_{sz}, \sigma_{ss}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{sz}$ – компоненти тензорів деформацій повзучості та напружень;

$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ – еквівалентні за Мізесом та головні напруження;

ω, t_* – параметр пошкоджуваності та час до руйнування.

Різні матеріали оболонки можна конкретизувати прийняттям значень для матеріальних сталей $A, B, n, r, m, l, k, \alpha$, що отримали назву констант повзучості, та, зазвичай, E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона.

Метод розв'язування системи (15) надано у роботі [6]. Для розгляду процесу повзучості у запропонованому методі використано схему покроково-го подовження у часі за параметром вектора деформацій повзучості, за допомогою чисельного інтегрування рівнянь стану на кроці методом Рунге-Кути-Мерсона [3, 7].

Приклад. Розглянемо повзучість циліндричної оболонки, розрахункову схему якої подано на рис. 3. Навантаження здійснюється осьовою силою на краю з рухомим шарніром. Величина цієї сили за модулем $|T| = 174,3$ кН/м. Товщина стінки є сталюю і становить $h = 0,4$ см. Інші геометричні параметри: $R = 1$ м, $L = 0,5$ м. Пластина виготовлена з ізотропного матеріалу D16AT, пружні характеристики якого такі: модуль пружності $E = 65$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; а константи повзучості матеріалу, що входять до рівнянь стану (16), при температурі 300 °С мають наступні значення: $B = 0,34 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻ⁿ/год, $A = 1,9 \cdot 10^{-7}$ МПа^{-k}/год, $r = 1,379, \alpha = 0, n = m = k = p = 2,93$.

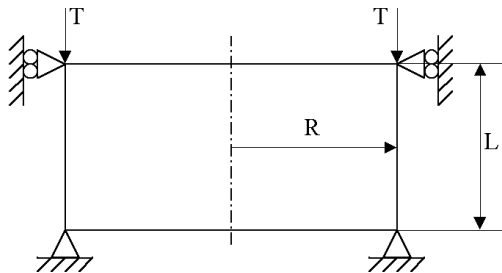


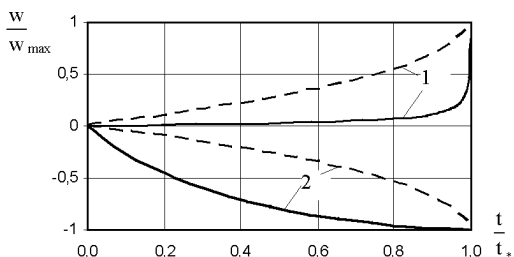
Рисунок 3 – Розрахункова схема

Розрахунки проводились для двох випадків: $\tilde{\epsilon}=0$ і $\tilde{\epsilon} \neq 0$. У кожному з них розглядалася задача, у якій сила T прикладена як розтягувальна

($T = 174,3$ кН/м) і як стискувальна ($T = -174,3$ кН/м), тобто сили є однаковими за модулем. При розв'язуванні задачі було виявлено такі закономірності: у випадку, коли геометрично нелінійна складова не враховується ($\tilde{\epsilon}=0$), при прикладенні різних за знаками але однакових за модулем сил отримано однаковий час до руйнування. При врахуванні геометричної нелінійності ($\tilde{\epsilon} \neq 0$) у задачі, де діє стискувальна сила, час до руйнування є значно меншим, а у задачі, де діє розтягувальна сила, час до руйнування є більшим від того значення, що отримано при $\tilde{\epsilon}=0$. У таблиці наведено результати цих розрахунків.

Характер зростання у часі максимальних прогинів w_{\max} до моменту руйнування t_* для цих чотирьох випадків приведено на рис. 4. Графіки побудовано у нормованих координатах. Штриховими лініями позначено результати, що отримані при $\tilde{\epsilon}=0$, суцільними – при $\tilde{\epsilon} \neq 0$. Криві 1, що лежать вище осі абсцис, отримані у задачі, де діє стискувальна сила. Нижні криві 2 отримані у задачі, де осьова сила є розтягувальною.

Час до руйнування, год		
	T, кН/м	
	174,3	-174,3
$\tilde{\epsilon}=0$	27,62	27,62
$\tilde{\epsilon} \neq 0$	39,58	1,67



Рисуюнок 4 – Зростання максимальних прогинів у часі

Як це видно із рис. 4, врахування геометричної нелінійності у задачі призводить не лише до кількісно, але і до якісно інших розв'язків. Так, при $\tilde{\epsilon}=0$ отримуємо симетричні графіки відносно осі абсцис, тоді як при врахуванні геометричної нелінійності графіки 1 і 2 суттєво відрізняються один від одного. Очевидно, це пояснюється тим, що дія стискувальної сили призводить до підвищеного моментного стану у оболонці. Внаслідок цього процес повзучості відбувається інтенсивніше, ніж при розтязі.

Висновок. У багатьох роботах, наприклад, [5,7] було встановлено, що нехтування геометричною нелінійністю у задачах теорії пружності може при-

звести до спотворених результатів. Розв'язки, що отримано для розглянутого у статті прикладу, наочно ілюструють важливість врахування геометричної нелінійності і у задачах на повзучість для наближення математичної моделі об'єкту до його реального змісту.

Список літератури: 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М., Наука, 1966. – 752 с. 2. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep life-time estimations // *Tech. Mech.*, 20, (2000). – P. 215-226. 3. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep - damage conditions // *Arch. Appl. Mech.*, 67, (1997). – P. 339-352. 4. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 311 с. 5. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с. 6. *Морачковский О.К., Замула О.О.* Метод розв'язування задач повзучості геометрично нелінійних оболонок обертання // *Вісник НТУ «ХП»*. Збірка наукових праць. Харків: – 2004. – Вип.31. – С. 123-127. 7. *Мяченко В.И., Фролов А.Н., Кармишин А.В. и др.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.

Надійшла до редколегії 30.06.2005

УДК 539.3

С.П.ИГЛИН, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков, Украина
А.Е.КУЛАЧЕНКО, Ph. D., Mid Sweden University, Sundsvall, Sweden
А.М.СЯРОВ, канд.техн.наук, Экономический университет, Варна, Болгария

СЖАТИЕ ГИБКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ДУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

Розв'язана задача про стиснення абсолютно гнучкої сферичної оболонки, накачаної газом, між двома площинами. Враховуються великі прогини, зменшення товщини оболонки при її розтягненні та нелінійні фізичні співвідношення. Початковий радіус надутої оболонки знаходиться з розв'язання системи нелінійних рівнянь. Процес стискання проводиться крок за кроком, з лінеаризацією рівнянь на кожному кроці. Наведений числовий приклад.

The problem about tightening between two plains of an absolutely flexible spherical shell, pumped by gas, is decided. The large displacements, decrease of a shell thickness in an process of its tension and non-linear physical ratios are allowed. Primary radius of a pumped shell receives from a solution of a system of non-linear equations. The compression process is carried out step by step, with a linearization of equations on each step. The numerical example is presented.

1. Постановка задачи

Предметом исследования в данной статье является абсолютно гибкая сферическая оболочка, толщина которой в ненагруженном состоянии постоянна. Ее материал воспринимает только растягивающие усилия и не работает на сжатие, изгиб и сдвиг. Вначале она накачивается газом и находится под внутренним давлением. Затем оболочка сжимается между двумя плоскостями. Исследуется поведение такой оболочки в процессе сжатия. Целью иссле-

дования является нахождение ее прогиба при заданной величине сжимающей силы, максимальной интенсивности напряжений в ней, максимальной силы, которую она может выдержать. Подобные задачи возникают при проектировании элементов пассивной безопасности автомобилей, пневматических амортизаторов при сбрасывании предметов с высоты и в других областях.

Вывод основных уравнений теории гибких пластин и оболочек рассмотрен в [1]. Один из вариантов расчета для осесимметричного случая есть в [2]: там задача решается путем интегрирования системы дифференциальных уравнений вдоль меридиана. В [3-7] рассмотрены различные приложения данной задачи: надувные тела, мембраны, воздушные подушки, для расчета которых применяется метод конечных элементов.

В настоящей работе предлагается метод последовательного нагружения, который для сферической оболочки является более простым, чем описанные в литературе. Решение задачи разбивается на два этапа в соответствии с деформированием оболочки. На первом этапе, при закачивании оболочки газом, она остается сферической, и ее напряженно-деформированное состояние определяется решением соответствующей системы уравнений. На втором этапе сжимающие плоскости сдвигаются, и малому сближению плоскостей соответствует малое изменение всех параметров напряженно-деформированного состояния. Все уравнения, описывающие поведение оболочки и газа в ней, варьируются в окрестности текущего состояния. Таким образом, поведение оболочки в следующий момент деформирования находится методом последовательной линеаризации.

2. Обозначения

В статье используются следующие обозначения, которые приведены ниже в алфавитном порядке:

- a [$\text{Па}^{1/2} \cdot \text{м}^3/\text{моль}$] – постоянная уравнения Ван-дер-Ваальса;
- b [$\text{м}^3/\text{моль}$] – постоянная уравнения Ван-дер-Ваальса;
- E [Па] – модуль упругости;
- F [Н] – сжимающая сила;
- f_h [м] – функция, описывающая зависимость толщины оболочки h от других параметров;
- f_σ [Па] – функция, описывающая зависимость напряжения σ в сферической оболочке от других параметров;
- $f_{1\sigma}$ [Па] – функция, описывающая зависимость меридионального напряжения σ_1 от других параметров;
- $f_{2\sigma}$ [Па] – функция, описывающая зависимость окружного напряжения σ_2 от других параметров;
- h [м] – переменная толщина деформированной оболочки;
- h_0 [м] – начальная толщина оболочки;
- i [1] – номер точки или участка меридиана;
- k_1 [м^{-1}] – кривизна оболочки в меридиональном направлении;

- $k_2 [m^{-1}]$ – кривизна оболочки в окружном направлении;
- $l [m]$ – длина элемента;
- $m [kg]$ – масса газа в оболочке;
- $n [1]$ – общее количество участков, на которые разбивается меридиан при дискретизации задачи;
- $p [Pa]$ – давление газа в оболочке;
- $R = 8,314 \text{ Дж/(К·моль)}$ – универсальная газовая постоянная;
- $R_1 [m]$ – радиус кривизны оболочки в меридиональном направлении;
- $R_2 [m]$ – радиус кривизны оболочки в окружном направлении;
- $r [m]$ – радиус сферической оболочки после ее накачки;
- $r_0 [m]$ – начальный радиус сферической оболочки;
- $S [m^2]$ – площадь элемента оболочки;
- $T [K]$ – температура газа;
- $T_1 [H/m]$ – растягивающее усилие в меридиональном направлении;
- $T_2 [H/m]$ – растягивающее усилие в окружном направлении;
- $V [m^3]$ – объем газа внутри оболочки;
- $x [m]$ – радиальная координата оболочки;
- $y [m]$ – осевая координата оболочки;
- $\alpha [rad]$ – угол наклона меридиана к оси Ox ;
- $\Delta [m]$ – перемещение сжимающей плоскости;
- $\delta [1]$ – бесконечно малое приращение любой величины;
- $\varepsilon [1]$ – деформация в сферической оболочке;
- $\varepsilon_1 [1]$ – деформация в меридиональном направлении;
- $\varepsilon_2 [1]$ – деформация в окружном направлении;
- $\lambda_1 [1]$ – относительное удлинение в меридиональном направлении;
- $\lambda_2 [1]$ – относительное удлинение в окружном направлении;
- $\mu [kg/моль]$ – молярная масса газа;
- $\nu [1]$ – коэффициент Пуассона;
- $\sigma [Pa]$ – растягивающее напряжение в сферической оболочке;
- $\sigma_0 [Pa]$ – максимально допустимое напряжение при простом растяжении;
- $\sigma_1 [Pa]$ – растягивающее напряжение в меридиональном направлении;
- $\sigma_2 [Pa]$ – растягивающее напряжение в окружном направлении.

3. Начальное нагружение оболочки

Пусть начальный радиус сферической оболочки r_0 , а толщина h_0 . В нее закачивается заданное количество (масса) газа m , объем которого при атмосферном давлении больше внутреннего объема оболочки в исходном состоянии. В результате этого она растягивается до радиуса r , а толщина ее уменьшается до h . Газ в ней будет иметь давление p , а в материале оболочки возникает растягивающее напряжение σ . На этом этапе напряженно-деформированное состояние оболочки остается сферически-симметричным, поэтому

любой малый ее элемент испытывает равномерное растяжение во всех направлениях, а толщина h будет постоянной. Состояние оболочки перед приложением сжимающей силы F показано на рис. 1.

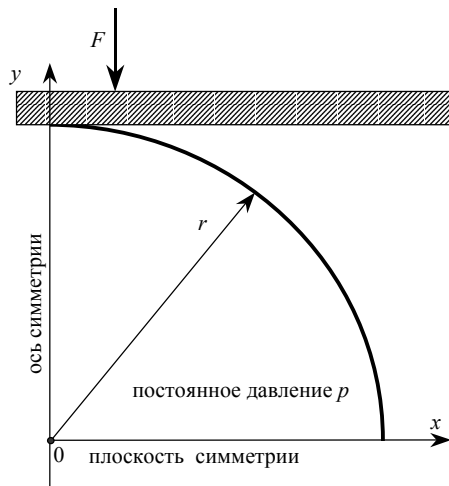


Рисунок 1 – Исходное состояние накаченной сферической оболочки

Напряженно-деформированное состояние оболочки после ее закачивания газом определяется следующими соотношениями:

- уравнением состояния газа:

$$\left(p + \left(\frac{ma}{\mu V} \right)^2 \right) \left(V - \frac{mb}{\mu} \right) = \frac{m}{\mu} RT; \quad (1)$$

- заданным законом изменения толщины в зависимости от радиуса и коэффициента Пуассона:

$$h = f_h(h_0, r_0, r, \nu); \quad (2)$$

- соотношением между внутренним объемом оболочки и ее радиусом:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3; \quad (3)$$

- уравнением равновесия бесконечно малого элемента оболочки:

$$\frac{2\sigma h}{r} = p; \quad (4)$$

- физическим законом деформирования:

$$\sigma = f_\sigma(\varepsilon, E, \nu, \sigma_0) \quad (5)$$

- и выражением для деформации:

$$\varepsilon = \frac{r}{r_0} - 1. \quad (6)$$

Неизвестными величинами в этих шести уравнениях являются p , V , r , h , σ и ε , то есть система замыкается. Для ее решения вначале подставим (6) в (5), а затем полученное выражение и (2) в (4):

$$\frac{2f_\sigma \left(\frac{r}{r_0} - 1, E, \nu, \sigma_0 \right) f_h(h_0, r_0, r, \nu)}{r} = p. \quad (7)$$

Теперь в уравнение Ван-дер-Ваальса (1) подставим выражение (7) для p и (3) для V :

$$\left(\frac{2f_\sigma \left(\frac{r}{r_0} - 1, E, \nu, \sigma_0 \right) f_h(h_0, r_0, r, \nu)}{r} + \frac{9m^2 a^2}{16\mu^2 \pi^2 r^6} \right) \left(\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{mb}{\mu} \right) = \frac{m}{\mu} RT. \quad (8)$$

Если задать конкретные выражения для закона изменения толщины (2) и физического закона деформирования (5), то полученное уравнение (8) можно рассматривать как неявную зависимость радиуса r от массы m . Решив это нелинейное уравнение, найдем $r(m)$. Затем можно вычислить давление p и напряжение σ .

4. Сжатие оболочки

После закачивания газа в оболочку на нее давит с силой F плоская площадка достаточных размеров. Будем предполагать, что площадка все время остается горизонтальной и перемещается вертикально, а сила приложена квазистатически. Напряженно-деформированное состояние оболочки при таком деформировании перестает быть сферически симметричным, но остается осесимметричным. Горизонтальная плоскость симметрии также сохранится (рис. 2). В данной работе считается, что на плоскости контакта материал оболочки прилипает к давящей поверхности. Возможны и другие варианты контакта оболочки со сжимающими плоскостями: отсутствие трения или трение с заданным коэффициентом. Здесь они не рассматриваются: это может быть предметом дальнейших исследований. Сила F сдавливает оболочку на величину Δ . Система координат привязана в плоскости и оси симметрии, поэтому на рис. 2 указано сдавливание $\Delta/2$.

При заданной величине сдавливания Δ неизвестными являются форма меридиана вне площадки контакта, толщина h и давление газа p . Другие величины могут быть найдены через них. Например, объем V определяется формой меридиана, сила F – давлением p и радиусом площадки контакта (то есть опять-таки формой меридиана), и т.д. Для определения неизвестных у нас есть следующие уравнения:

- уравнение состояния газа (1);
- уравнение равновесия бесконечно малого элемента деформированной поверхности осесимметричной оболочки:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = p; \quad (9)$$

- выражение для растягивающего усилия в меридиональном направлении:

$$T_1 = \frac{px}{2 \sin \alpha}; \quad (10)$$

- выражения для кривизн и радиусов кривизн:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\alpha}{dl}; \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\sin \alpha}{x}; \quad (11)$$

- соотношения между усилиями и деформациями (физический закон деформирования):

$$T_1 = hf_{1\sigma}(\epsilon_1, \epsilon_2, E, \nu, \sigma_0); \quad T_2 = hf_{2\sigma}(\epsilon_1, \epsilon_2, E, \nu, \sigma_0); \quad (12)$$

- связь между деформациями и относительными удлинениями:

$$\lambda_1 = 1 + \epsilon_1; \quad \lambda_2 = 1 + \epsilon_2; \quad (13)$$

- зависимость толщины от относительных удлинений и коэффициента Пуассона:

$$h = f_h(\lambda_1, \lambda_2, \nu); \quad (14)$$

- граничные условия в начальной и конечной точках.

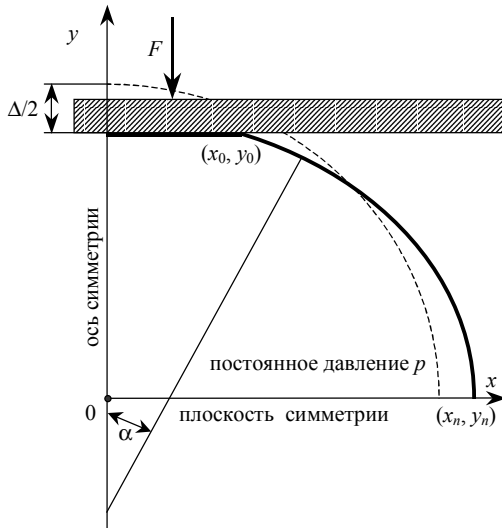


Рисунок 2 – Деформированное состояние оболочки

При изменении сжатия Δ на малую величину $\delta\Delta$ каждый из параметров напряженно-деформированного состояния также изменяется на малую величину, при этом вышеуказанные соотношения между ними сохраняются. Поэтому при малом дополнительном сжатии можно проварьировать все уравнения и перейти тем самым к линейной системе уравнений. Для этого дискретизируем задачу: разобьем криволинейный участок меридиана на n малых прямых отрезков, и обозначим координаты узловых точек x_i и y_i (всего имеем $n+1$ точек, крайние показаны на рис. 2). На каждом шаге решения задачи имеем $2n+3$ неизвестных: приращения координат всех точек δx_i , δy_i и приращение давления δp . Для их определения у нас есть такие проварьированные уравнения: n уравнений (9) (по одному на каждом участке), n уравнений (10), также по одному на каждом участке, и уравнение состояния газа (1) – всего $2n+1$ уравнение. Еще 2 уравнения дают граничные условия: $\delta x_0=0$ (отсутствие скольжения между оболочкой и сжимающей плоскостью) и условие симметрии $\delta y_n=0$.

Разрешающая система уравнений выводится следующим образом. Приращения координат узловых точек δx_i , δy_i вызывают приращения длины δl_i и угла поворота меридиана $\delta\alpha_i$, как показано на рис. 3. Изменяется также толщина оболочки на данном участке.

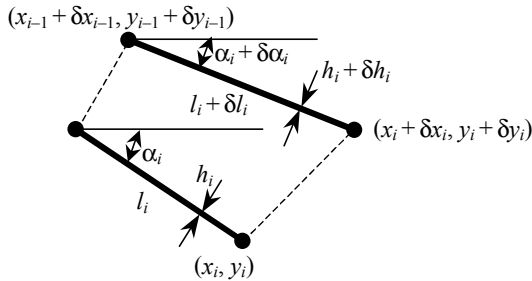


Рисунок 3 – Деформирование участка меридиана

Длина элемента l_i и угол наклона меридиана α_i выражаются известными геометрическими соотношениями, которые могут быть проварьированы. Так мы вычисляем δl_i , $\delta\alpha_i$ и δV . Величины δl_i и $\delta\alpha_i$, в свою очередь, вызывают изменения кривизн δk_{1i} и δk_{2i} . Их находим, варьируя уравнения (11). Приращения относительных удлинений в меридиональном и окружном направлениях $\delta\lambda_{1i}$ и $\delta\lambda_{2i}$ вычисляем, зная удлинение участка меридиана в обоих направлениях из рис. 3. Далее, варьируя (14), находим приращение толщины δh_i , а из варьирования (12) – δT_{1i} и δT_{2i} . Все найденные приращения являются в конечном счете линейными комбинациями δx_i , δy_i и δp . Подставляем их в проварьированные уравнения (9, 10) (по одному на каждом из n участков) и (1) (одно уравнение). Из-за квазистатического приложения сжимающей силы F

при варьировании уравнения Ван-дер-Ваальса (1) температуру T считаем постоянной. Таким образом, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных δx_i , δy_i и δp . Всего здесь $2n + 1$ уравнений относительно $2n + 3$ неизвестных. Еще два уравнения дают граничные условия: $\delta x_0 = 0$ и $\delta y_n = 0$.

Тривиальное решение полученной однородной системы отражает тот очевидный факт, что данная пневмомеханическая система находится в равновесии. Для получения нетривиального решения нужно задать значения некоторых переменных и отбросить соответствующие уравнения. На каждом этапе последовательного нагружения мы даем такую величину сдвигания $\Delta/2$, при которой еще один участок меридиана начинает соприкасаться с плоскостью. Поэтому мы задаем $\delta y_0 = y_1 - y_0$ и $\delta y_1 = 0$. Вычислив правую часть системы уравнений при этих значениях переменных, и ограничив соответствующие степени свободы в матрице коэффициентов, находим все остальные приращения.

После пересчета координат меридиана можно найти толщины h_i , усилия T_{1i} и T_{2i} , напряжения σ_{1i} и σ_{2i} , давление p , сжимающую силу F , ее работу при сжатии оболочки и другие параметры.

5. Численный пример

В качестве примера рассмотрим сферическую оболочку с начальными размерами: $r_0 = 0.1$ м; $h_0 = 10^{-3}$ м. Она наполняется азотом с $\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль при $T = 300$ К. Для этого газа постоянные уравнения Ван-дер-Ваальса $a^2 = 0,1408$ м⁶Па/моль²; $b = 39,13 \cdot 10^{-6}$ м³/моль. Материал оболочки полагаем изотропным. Закон деформирования (12) аппроксимируется кривой, предложенной в [8]:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\sigma_0 h}{1 - \nu^2} \left(1 - \exp \left(- \frac{E (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)}{\sigma_0} \right) \right); \\ T_2 = \frac{\sigma_0 h}{1 - \nu^2} \left(1 - \exp \left(- \frac{E (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)}{\sigma_0} \right) \right); \end{cases} \quad (15)$$

где $\sigma_0 = 8 \cdot 10^5$ Па; $E = 10^6$ Па; $\nu = 0,45$. Будем считать, что зависимость (15) описывает упругое деформирование только до некоторого предела, меньшего σ_0 , а далее наступают пластические деформации. Мы рассматриваем только упругие деформации, и считаем, что материал хорошо растягивается, поэтому примем величину $0,99\sigma_0$ как допускаемое напряжение при одноосном напряженном состоянии.

Для закона изменения толщины (14) примем следующую гипотезу. Известно, что при $\nu = 0$ толщина оболочки при растяжении вообще не меняется, а при $\nu = 0,5$ постоянным остается объем малого элемента. Будем считать, что при промежуточных значениях ν имеет место линейная зависимость от ν между этими двумя крайними случаями:

$$h_i + \delta h_i = (1 - 2\nu)h_i + 2\nu \frac{h_i S_i}{S_i + \delta S_i}; \quad (16)$$

где площадь элемента S_i вычисляется в соответствии с рис. 3 как боковая поверхность усеченного конуса.

Для сферически-симметричного напряженно-деформированного состояния $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$; $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$; и тогда из (15) имеем:

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - \nu^2} \left(1 - \exp \left(- \frac{E(1 + \nu)\varepsilon}{\sigma_0} \right) \right). \quad (17)$$

Закон изменения толщины (16) для частного случая сферически-симметричного напряженно-деформированного состояния имеет вид:

$$h = (1 - 2\nu)h_0 + \frac{2\nu h_0 r_0^2}{r^2}. \quad (18)$$

Нелинейное уравнение (8) при заданных функциях (17,18) решалось численно при различных значениях подаваемой массы воздуха m до тех пор, пока интенсивность напряжений в оболочке не достигала величины $0,99 \sigma_0 / (1 - \nu^2)$. На рис. 4 показана зависимость радиуса r от массы закаченного воздуха m , на рис. 5 – давление в оболочке, а на рис. 6 – напряжение. Предельное состояние, соответствующее $\sigma = 0,99 \sigma_0 / (1 - \nu^2)$, достигается при $m = 2,011$ г. Оно отмечено на каждом из рисунков точкой.

Начиная примерно с $m = 0,5$ г, растяжение оболочки ускоряется и сопровождается уменьшением давления в ней.

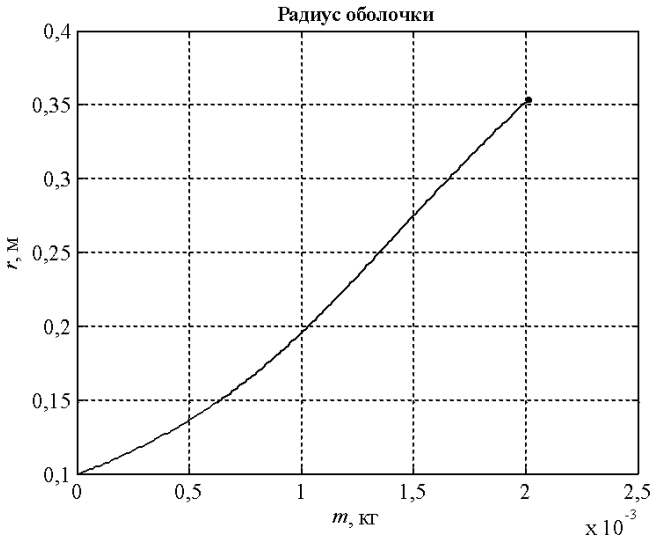


Рисунок 4 – Зависимость радиуса оболочки r от массы закаченного газа m

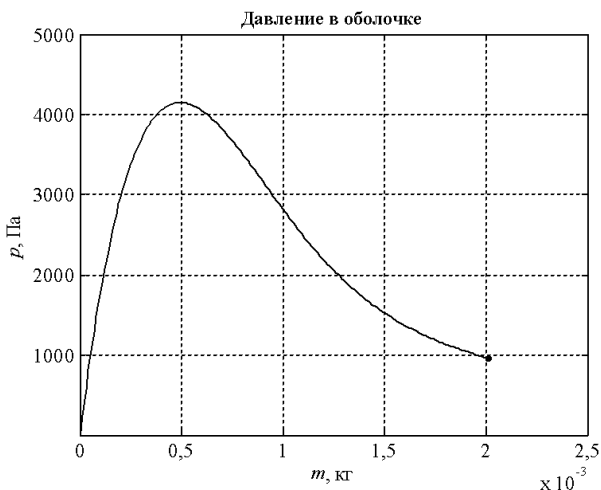


Рисунок 5 – Зависимость давления в оболочке p от массы закаченного газа m

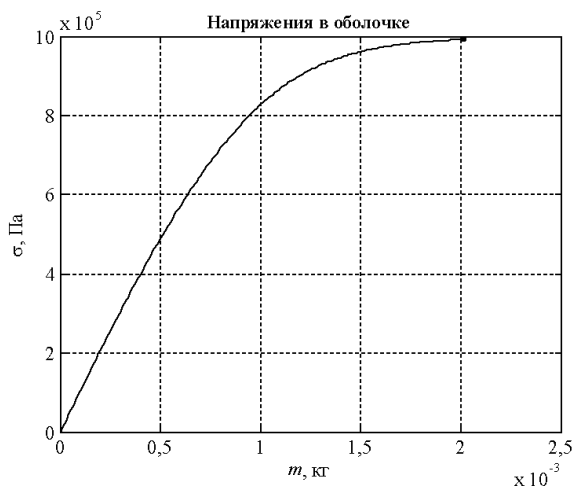


Рисунок 6 – Зависимость напряжений в оболочке σ от массы закаченного газа m

Учитывая, что при $m = 2,011$ г наступает разрыв оболочки даже без предварительного сжатия, количество газа в ней было ограничено величиной $m = 1,95$ г, что соответствует ее растяжению примерно в 3,5 раза. Для такой оболочки была решена задача о сжатии ее двумя плоскостями. Первоначальный меридиан (четверть окружности) разбивался на $n = 20$ участков, и на каждом шаге последовательного нагружения очередной участок прилипал к давящей плоскости. Сдавливание проводилось до тех пор, пока максимальная интенсивность напряжений не превышала предельно допустимое напряжение.

Результаты приведены на рис. 7-10. Разрыв оболочки везде отмечен точкой.

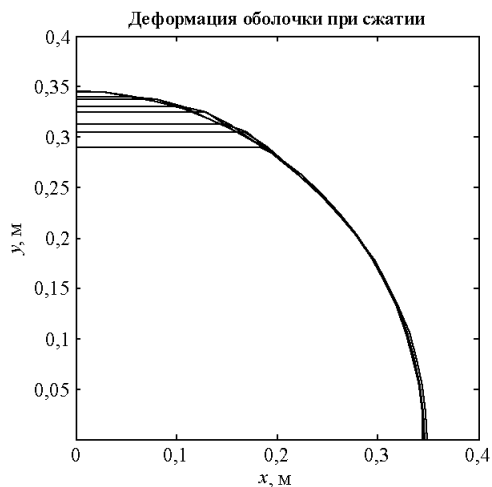


Рисунок 7 – Изменение формы меридиана при сжатии сферической оболочки

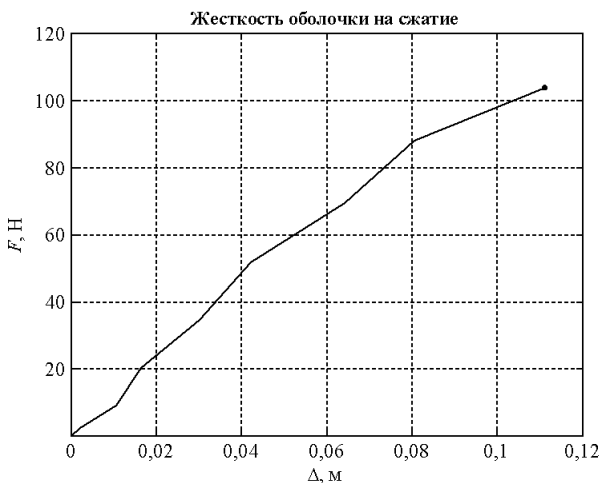


Рисунок 8 – Зависимость силы сжатия F от его величины Δ

На рис. 7 показано изменение формы меридиана при сдавливании оболочки. Интересным представляется здесь то, что на начальных этапах деформирования раздутие оболочки происходит вблизи плоскостей сдавливания, а максимальный диаметр (в плоскости симметрии) практически не изменяется. Этот факт легко проверить: достаточно слегка сжать между ладонями воздушный шарик и посмотреть, как изменяется его форма. Картина в точности

повторит изображенную на рис. 7. Но при дальнейшем сжатии оболочка начинает раздуваться и в плоскости симметрии.

На рис. 8 приведен график жесткости оболочки при сдавливании. Жесткость оказывается почти линейной, с небольшой выпуклостью вверх. Работа силы F , подсчитанная как площадь под графиком, равна 6,588 Дж.

Зависимость давления p от величины сдавливания Δ , показанная на рис. 9, существенно нелинейная. Из-за большой гибкости оболочка растягивается, и давление в ней падает. Такой же характер носит зависимость p от F , которая здесь не приводится.

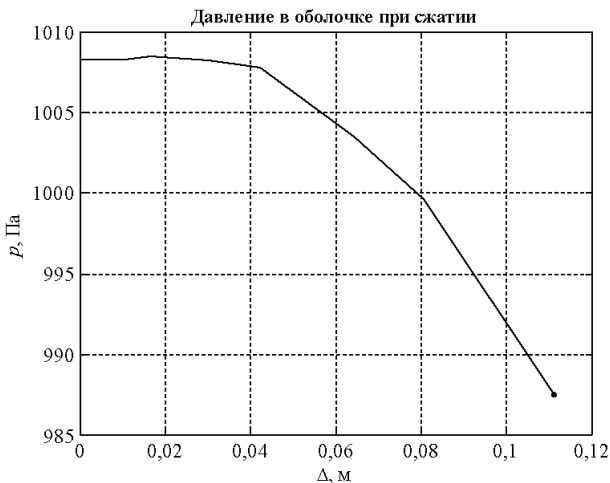


Рисунок 9 – Зависимость давления p от величины сжатия Δ

И, наконец, на рис. 10 изображена зависимость максимальной интенсивности напряжения в оболочке от Δ . На всем протяжении процесса сжатия оболочки максимальным является меридиональное напряжение на первом участке, в районе соприкосновения оболочки и сжимающей плоскости.

6. Выводы

В статье предложен простой и эффективный метод исследования напряженно-деформированного состояния гибких сферических оболочек при их сжатии двумя плоскостями. Он основан на последовательном нагружении и линеаризации всех уравнений в окрестности параметров текущего состояния. Метод применим при любом законе изменения толщины в зависимости от деформаций, и при любом физическом законе деформирования.

В примере для конкретных законов деформирования и изменения толщины показаны задачи, которые можно решать с помощью этого метода: определение размеров оболочки, давления в ней и напряжений при первоначальной накачке ее

газом; исследование формы меридиана, изменение давления и напряжений в ней при последующем сжатии двумя плоскостями. Определяются также максимальное количество газа, которое можно закачать в оболочку до ее разрушения, максимальные сжимающая сила, ее работа и величина сжатия, которые выдерживает оболочка, накаченная заданным количеством газа.

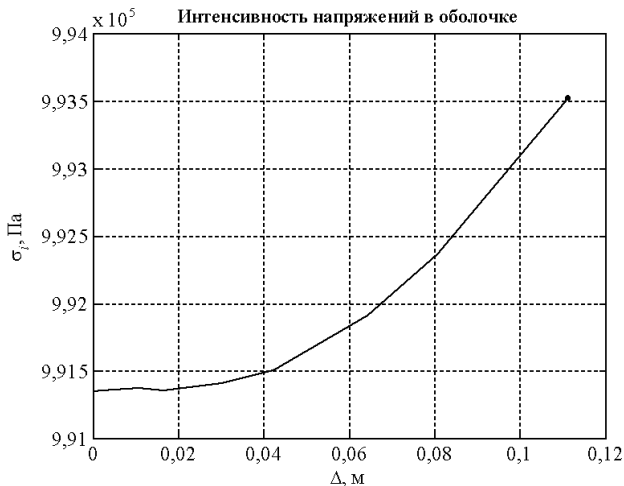


Рисунок 10 – Зависимость максимальной интенсивности напряжений от величины сжатия Δ

Целью дальнейших исследований может быть развитие этого метода для оболочек другой формы и другого вида поверхности вдавливания, решение задачи быстрого (неизотермического) сжатия, исследование пластичности, ползучести и других форм неидеального поведения.

Список литературы: 1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420 с. 2. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с. 3. *Natori M. C., Higuchi K. etc.* Adaptivity demonstration of inflatable rigidized integrated structures (IRIS). – Acta Astronautica. – Vol. 37, 1995. – P. 59-67. 4. *Cadogan D., Sandy C., Grahne M.* Development and evaluation of the Mars pathfinder inflatable airbag landing system. – Acta Astronautica. – Vol. 50, 2002. – P. 633-640. 5. *Bouzidi R., Ravaut Y., Wielgosz C.* Finite elements for 2D problems of pressurized membranes. – Computers & Structures. – Vol. 81, 2003. – P. 2479-2490. 6. *Boverie S., Devy M., Lerasle F.* Comparison of structured light and stereovision sensors for new airbag generations. – Control Engineering Practice. – Vol. 11, 2003. – P. 1413-1421. 7. *Prada y Nogueira I. A., Forlivesi F., Morel Q.* The FEM applicability for the first-stage design of inflatable bodies. Iteration methodology between FD and FEM for the inherently safe re-entry capsule for YES 2. The BREOGAN leakage protection system. – Acta Astronautica. – Vol. 55, 2004. – P. 375-387. 8. *Rui Pedro Ramos Cardoso.* Development of one point quadrature shell elements with anisotropic material models for sheet metal forming analysis. – Universidade de Aveiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2002. – 227 p.

Поступила в редколлегию 27.03.2005

А.Ф.КИРИЧЕНКО, докт.техн.наук; *В.А.БЕРЕЖНОЙ*, НТУ «ХПИ»

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЖЕСТКОСТИ ПРЯМЫХ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗУБЬЕВ МОДИФИЦИРОВАННЫХ В ВИДЕ КРУГОВЫХ КАНАВОК НА ТОРЦАХ КОЛЕСА

Розглядається один із шляхів підвищення працездатності прямозубих коліс. Виконується розрахунок об'ємного пружно-деформованого стану модифікованих прямозубих коліс методом скінчених елементів. Отримані результати розрахунків напруги та жорсткості модифікованих прямозубих коліс з круговими канавками на торцях зубчатого колеса.

The increasing way of spur gears capacity to work are studied. Gear tooth calculation of volumetric stress strain state of modification spur gears by method of finite element is performed. The stress and rigidity calculation results of modification spur gears with by circle sharpening on spur gears have been calculated.

Введение

Одним из главных факторов для эвольвентных зубчатых передач, во многом определяющих требования к конструкции и технологии изготовления передачи, а также величину расчетной нагрузки, является неравномерность распределения передаваемой нагрузки по контактным линиям [1, 2]. Концентрация нагрузки на отдельных участках контактных линий происходит из-за деформации зубчатых колес, валов, подшипников, корпуса, а также неточностей изготовления и монтажа передачи и приводит к увеличению динамических нагрузок и выходу передачи из работоспособного состояния [3]. Одним из возможных путей улучшения неравномерности распределения передаваемой нагрузки между зубьями является применение модифицированных зубчатых колес. Снижение жесткости зацепления за счет модификации колес приводит к повышению податливости зубьев, а следовательно к улучшению динамических характеристик передачи и более равномерному распределению нагрузки по контактным линиям. В настоящее время накоплен огромный парк различных модификации зубчатых колес [4]. Однако рекомендаций по выбору их оптимальных параметров базирующихся на последних достижениях теории упругости и широко использовании возможностей ЭВМ, позволяющих учитывать действительную геометрию зуба, на данный момент нет.

1. Постановка задачи

Повысить равномерность распределения нагрузки по длине контактных линий, улучшить динамические характеристики передачи, снизить ее вибрационную и акустическую активность можно посредством применения модификации в виде круговых канавок на торцах колеса (см. рис. 1).

Цель статьи – провести исследование влияния модификации прямозубого колеса в виде круговых канавок на торцах, как на жесткость зуба, так и на напряжения изгиба на переходной кривой этого же зуба [5].

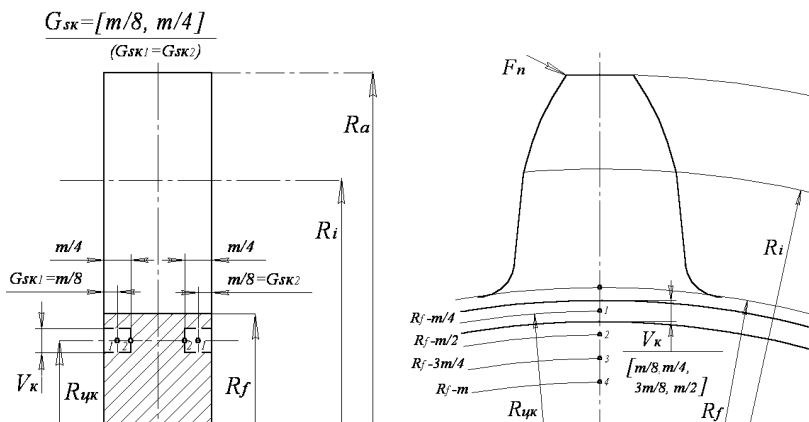


Рисунок 1 – Модификация в виде круговых канавок на торцах колеса

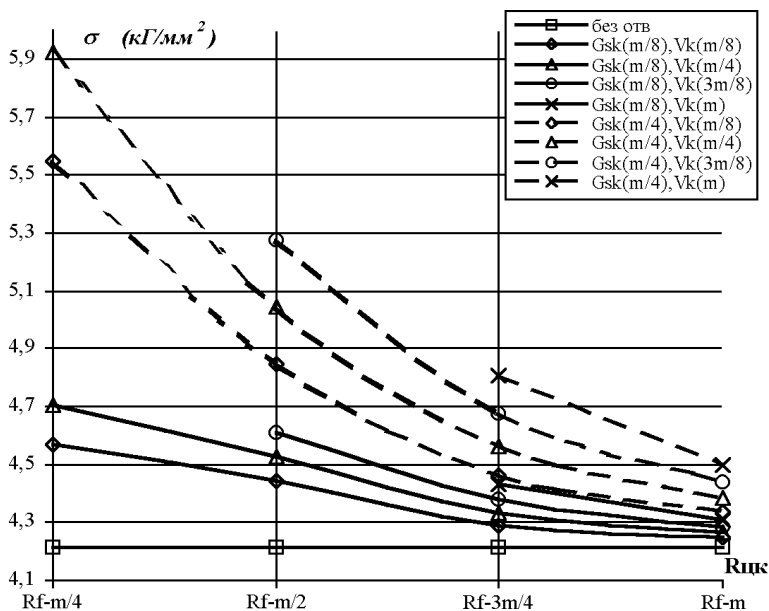


Рисунок 2 – Зависимость напряжений изгиба зуба от $R_{цк}$, V_k и G_{sk}

2. Метод решения задачи

Одним из наиболее эффективных численных методов решения объемных задач теории упругости является метод конечных элементов. На современном этапе развития вычислительной техники стало возможным применить с достаточно высокой точностью метод конечных элементов для расчета объемного напряженно-деформированного состояния зубьев эвольвентных мо-

дифицированных прямозубых колес [6].

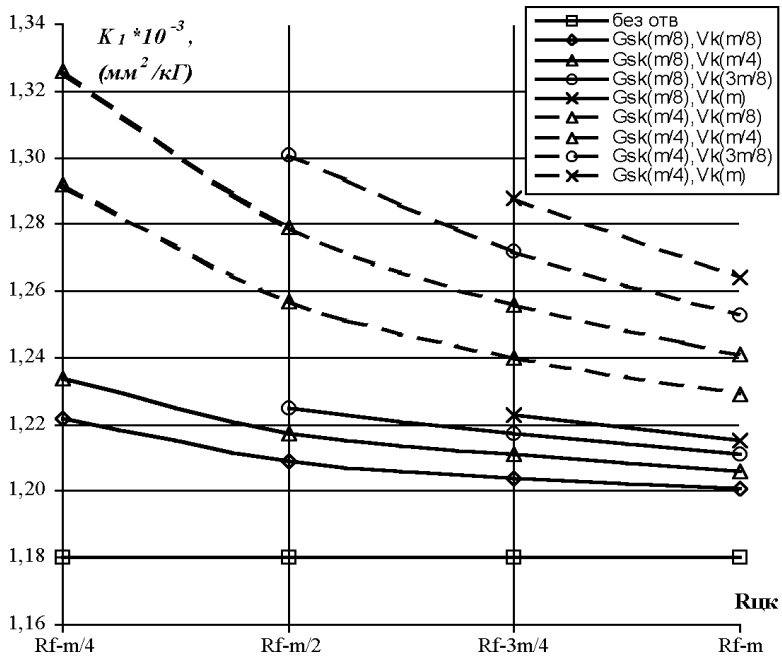


Рисунок 3 – Зависимость податливости зуба от $R_{цк}$, Vk и Gsk

3. Влияние параметров модификации $R_{цк}$, Vk и Gsk на жесткостные и прочностные характеристики зубьев прямозубых колес

Рассмотрим конструкцию зубчатых колес с модификацией в виде круговых канавок на торцах колеса (см. рис.1) [5]. Основными варьируемыми параметрами модификации являются: радиус центра канавки $R_{цк}$, высота канавки Vk и глубина канавки Gsk . Диапазоном изменения для радиуса центра канавки $R_{цк}$ является 4 точки по оси симметрии зуба: $[Rf-m/4, \dots, Rf-m]$ с шагом $m/4$, 4 значения для высоты канавки Vk [$m/8, m/4, 3m/8, m/2$], и 2 глубины канавки Gsk [$m/8, m/4$], причем $Gso1 = Gso2$.

Исследования проводились на специально разработанных конечно-элементных моделях [7] модифицированных (в виде круговых канавок на торцах колеса) прямозубых колес с зубьями стандартного исходного контура нагруженных в вершине силой $F_n = 1 \text{ кГ/мм}$, при этом были приняты $m = \text{мм}$, $z = 20$, $bw = 1 \text{ м}$, и сопоставлены с подобными результатами, полученными для эвольвентного зуба прямозубого колеса без модификации. На рис. 2-3 приведены в виде графиков результаты расчетов изгибных напряжений и податливости зубьев модифицированных колес.

Выводы

Получено, что модификация в виде круговых канавок на торцах зубчатого колеса при определенных значениях параметров $R_{\text{цк}}$, V_k и $G_{\text{ск}}$ позволяет увеличить податливость зубьев (см. рис.3) и добиться более равномерного распределения нагрузки по контактными линиям между зубьями. Однако, ухудшение напряжений на переходной кривой зуба (см. рис.2) сужает диапазон применения модификации в виде круговых канавок на торцах зубчатого колеса [5].

Список литературы: 1. Александров А.И. Артеменко Н.П. Костюк Д.И. Цилиндрические зубчатые колеса. – Харьков, Изд-во ХГУ им. Горького, 1956. – 318 с. 2. Устиненко В.Л. Напряженное состояние зубьев цилиндрических прямозубых колес. – М.: Машиностроение, 1972. – 91 с. 3. Заблонский К.И. Жесткость зубчатых передач. – Харьков, «Коммунист», 1967. – 260 с. 4. Сухоруков Ю.Н. Модификация эвольвентных цилиндрических зубчатых колес. – Киев, «Техника», 1992. – 200 с. 5. Берестнев О.В., Жук И.В., Неделькин А.Н. Зубчатые передачи с повышенной податливостью зубьев. – Минск: Наука и техника, 1993. – 184 с. 6. Розин Л.А. Основы метода конечных элементов в теории упругости: Пер. с англ. – Ленинград: Машиностроение, 1972. – 438 с. 7. Lashkari M. COSMOS/M USER GUIDE Stress, vibration, buckling, dynamics and heat transfer analyses. – S.P.A.C. 1988. – 1246 p.

Поступила в редколлегию 16.06.2005

УДК 539.3

А.В.МАРТЫНЕНКО; А.В.ТКАЧУК, канд.техн.наук;
А.А.ЗАРУБИНА; А.Ю.ВАСИЛЬЕВ, НТУ «ХПИ»

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГИДРООБЪЕМНЫХ ПЕРЕДАЧ

Запропоновано параметричний підхід до дослідження елементів транспортних машин. Запропоновано теоретичні й експериментальні методи визначення їх напружено-деформованого стану. На основі запропонованого методу був створений алгоритм програмного комплексу. Приведено результати чисельних й експериментальних досліджень.

Parametrical approach to research of transport machines elements is offered. Theoretical and experimental methods of the HVT elements stress-strain state determination are proposed. The algorithm for software complex on its base is created. The computational and experimental results are presented, conclusions are made.

1. Постановка задачи

В настоящее время перспективным направлением в проектировании трансмиссий транспортных средств специального назначения является установка гидрообъемных передач, которые значительно увеличивают удобство управления транспортным средством. Перед внедрением передачи необходимо провести широкий спектр проектно-конструкторских работ, в число которых должны входить подробный анализ условий ее эксплуатации, математическое моделирование физико-механических процессов и определение экс-

плуатационных нагрузок на различные элементы передачи [1-3]. Например, при анализе силовых потоков в гидрообъемной передаче ГОП-900 [4] выяснилось, что одним из наиболее нагруженных и ответственных элементов является блок цилиндров. При передаче мощности на него одновременно действуют: крутящий момент, давление в рабочих цилиндрах, контактная сила от шаровых поршней, давление статической разгрузки, усилие в сопряжении со втулкой, а также объемные силы, вызванных высокими частотами вращения входного вала. В результате этого блок цилиндров находится в сложном напряженно-деформированном состоянии. Характер распределения напряжений по времени в каждой точке блока цилиндров соответствует асимметричному многоцикловому нагружению. Поскольку требуемый заказчиком ресурс ГОП-900 достаточно высок, соответствующее количество пульсаций может достигать десятков и сотен мегациклов.

Так как гидронасос гидрообъемной передачи представляет собой сложную конструкцию, состоящую из большого числа элементов, а законы нагружения, действующие на него, плохо поддаются аналитическому описанию, для определения его напряженно-деформированного состояния целесообразным является использование численных методов. Наибольшее распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) [5], который глубоко исследован и реализован в большом количестве доступных инженерных программных комплексов. Именно поэтому он предлагается для анализа напряженно-деформированного состояния блока цилиндров гидронасоса ГОП-900.

Для определения достоверности результатов численных исследований напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса ГОП-900, проведенных методом конечных элементов, необходимы экспериментальные исследования. В качестве экспериментального метода предлагается воспользоваться методом голографической интерферометрии. [6] Он дает возможность получать с высокой точностью непрерывные поля перемещений, что отвечает предъявляемым требованиям.

2. Методика проведения исследований

Для организации расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем [7] необходимо решить следующие задачи:

- создать программную оболочку, которая позволяет с использованием систем автоматизированного проектирования (САПР) Pro/ENGINEER и Ansys проводить параметрическое моделирование геометрии, нагрузки, свойств материалов и конечно-элементной разбивки;
- разработать параметрические геометрические и конечно-элементные модели наиболее ответственных элементов гидрообъемной передачи;
- разработать методику экспериментального исследования деформации исследуемых элементов гидрообъемной передачи и оценки точности проведенных экспериментальных исследований.

Все эти этапы были проделаны в ходе выполнения работы.

3. Система параметрического моделирования

Современная технология автоматического проектирования машиностроительных конструкций имеет следующие особенности:

- сжатые сроки проектирования;
- интеграция конструкторских, технологических и исследовательских этапов работ;
- гибкость и возможность оперативного изменения проектов.

В связи с этим этапы исследования прочности и жесткости элементов машиностроительных конструкций неразрывно увязаны как в современных САПР, так и в практике проектирования со всем комплексом проектных работ. Для дальнейшего ускорения данных процессов необходимо максимально упростить интерфейс имеющихся комплексов. Особенно при учете реалий нашего производства, когда большинство конструкторов слабо знакомы с каким-либо из программных продуктов САПР. И наиболее приемлемым выходом из сложившейся ситуации является написание специализированной программной оболочки.

Специальное программное обеспечение создается на основе комплексной автоматизированной системы конструкторско-технологической подготовки производства, базирующейся на связке программных продуктов Pro/Engineer – Ansys. Оно упрощает взаимодействие между системами и берет на себя большую часть «рутинных» операций по изменению требуемых параметров, на которые уходит много времени. Выбор основан на том, что данные программные продукты являются признанными лидерами в своих областях. В результате многолетнего сотрудничества между их производителями была достигнута простота и удобство обмена данными, что облегчает процесс исследований. Также обеспечивается поддержка параметризации моделей с проведением множественных расчетов.

Данная программа используется на этапе проектирования, поэтому технология создания конечно-элементной модели должна обладать гибкостью и оперативностью, что позволяет перестраивать модели в соответствии с новыми значениями конструктивных параметров. При этом дополнительные трудности вызывает то, что итоговая конечно-элементная модель должна удовлетворять следующим требованиям:

- неравномерное расположение узлов конечно-элементной сетки;
- зоны сгущения должны быть расположены в областях резких изменений геометрической формы конструкции;
- необходимо использовать конечные элементы с аппроксимирующими полиномами более высоких степеней, если это возможно;
- необходимо легко варьировать как геометрию, так и действующие на конструкцию нагрузки.

Общий алгоритм работы данной программы и схема взаимодействия систем представлена на рис. 1.



Рисунок 1 – Алгоритм параметрического расчета

4. Параметрические модели фрагментов блока цилиндров

Для отработки методики и проверки работоспособности связи комплексов была построена упрощенная модель блока цилиндров с учетом симметрии и особенностей напряженно-деформированного состояния конструкции. Параметрическая твердотельная модель и созданная на ее основе конечно-элементная модель (КЭ) приведены на рис. 2.

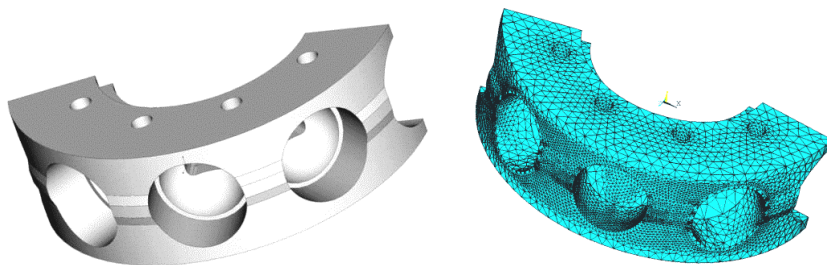


Рисунок 2 – Фрагмент блока цилиндров. Твердотельная и конечно-элементная модели

5. Результаты численного анализа НДС фрагментов блока цилиндров

Наглядное представление НДС в виде графиков в двумерном пространстве или сложных поверхностей в пространствах большей размерности позволяет наиболее точно оценить влияние каждого параметра. Поэтому полученные результаты целесообразно представлять в виде таблиц, рисунков и графиков.

В ходе выполнения тестовых расчетов на основе построенных моделей определялось влияние на напряженно-деформированное состояние фрагмента блока цилиндров следующих параметров, которые варьировались в указанных пределах:

- величина натяга втулки, при ее посадке в корпус насоса (Δ , мкм): от

50 до 200 микрон;

- модуль упругости материала втулки: от $0,1 \cdot 10^{11}$ до $10 \cdot 10^{11}$ Па;
- угловая скорость вращения корпуса насоса (ω , с^{-1}): от 25 до 100 с^{-1} .

Дополнительно втулка нагружалась давлением на внутреннюю поверхность величиной $3,5 \cdot 10^7$ Па.

Всего было проведено 3 серии расчетов с варьированием различных параметров. Общая картина перемещений, характерная для всех расчетов без числовых значений приведена на рис. 3 (суммарные перемещения точек модели) и рис. 4 (эквивалентные напряжения по Мизесу).

Более подробный анализ результатов численных исследований приведен в работе [8].

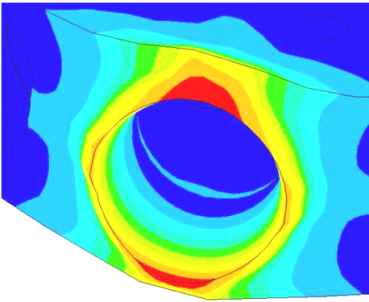


Рисунок 3 – Суммарные перемещения

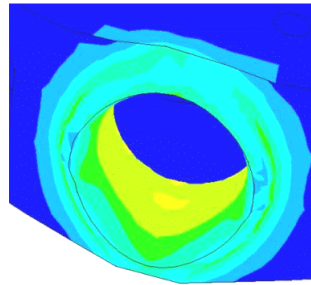


Рисунок 4 – Эквивалентные напряжения по Мизесу

6. Экспериментальная оценка достоверности расчетных моделей

Для экспериментальной оценки достоверности результатов численных исследований напряженно-деформированного состояния корпуса гидронасоса были проведены исследования фрагмента блока цилиндров методом голографической интерферометрии [5]. Данные методы обладают высокой чувствительностью, хорошей разрешающей способностью, большим объемом информации на одном материальном носителе, наглядностью и другими, менее значительными преимуществами. Одной из основных причин, тормозящих процесс широкого внедрения этих методов в производство, является сложность, трудоемкость, в ряде случаев неоднозначность количественной интерпретации интерференционных картин, получаемых при измерениях. Поэтому в последнее время все более широкое применение для измерения полей перемещений и деформаций диффузно отражающих объектов находит спекл-интерферометрия, у которой отсутствуют многие из указанных выше недостатков.

Экспериментальные работы проводились на голографической установке СИН, укомплектованной гелий-неоновым лазером ЛГН–215 (рис. 5, 6). Модель циклического фрагмента блока цилиндров изготовлена из плексигласа (модуль упругости $E = 0,069$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,23$) в реальном масштабе

без воспроизведения отдельных мелких деталей по твердотельной модели, выполненной в САПР SolidWorks (соответственно рис. 7 и рис. 8.) Давление рабочего тела моделировалось при помощи гидронасоса (см рис. 6) и подбиралось из условия четкости и наглядности картин интерференционных полос. Сам объект жестко закреплялся на столе СИИ-1 при помощи специальных призм. Контролировались перемещения точек боковой поверхности, противоположащей отверстию для подачи масла, в котором находится форсунка (см. рис. 8).



Рисунок 5 – Голографическая установка СИИ-1



Рисунок 6 – Гидронасос для моделирования давления рабочего тела

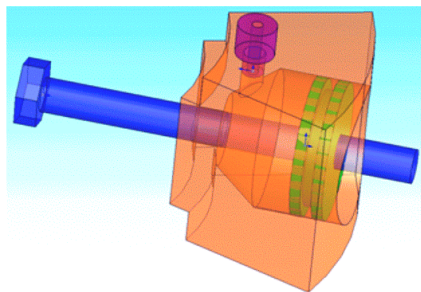


Рисунок 7 – Твердотельная модель исследуемого объекта



Рисунок 8 – Изготовленная модель

Получаемые интерферограммы, приведенные на рис. 9, дают возможность построить распределения относительных перемещений. Ниже находятся результаты численных исследований (рис. 10). На приведенных рисунках хорошо видно качественное совпадение распределений перемещений и удовлетворительное их количественное соответствие. Анализ результатов, полученных в серии численных исследований, позволяет сделать вывод о высокой (7-10 %) точности конечно-элементного моделирования. Численные значения перемещений и напряжений для натурального объекта из какого-либо сплава получаются путем умножения на коэффициент, полученный из численного расчета фрагмента блока цилиндров, изго-

товленного из данного материала [8].

Парадоксальные особенности деформирования исследуемой поверхности, обнаруженные в ходе экспериментов (прогиб в сторону, противоположную внутреннему давлению рабочего тела в зоне), совпадают с полученными численно. Они обусловлены характером приложенных к исследуемому образцу граничных условий.

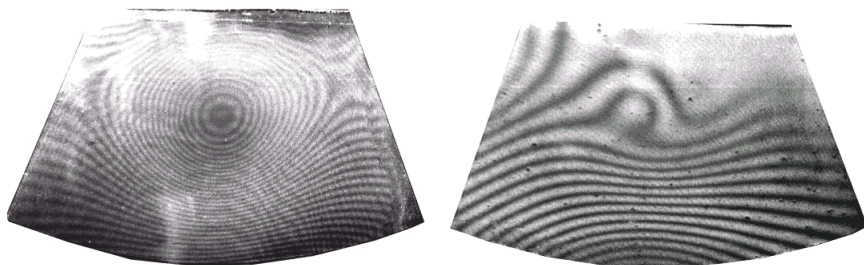


Рисунок 9 – Интерферограммы боковой поверхности, полученные в ходе выполнения эксперимента

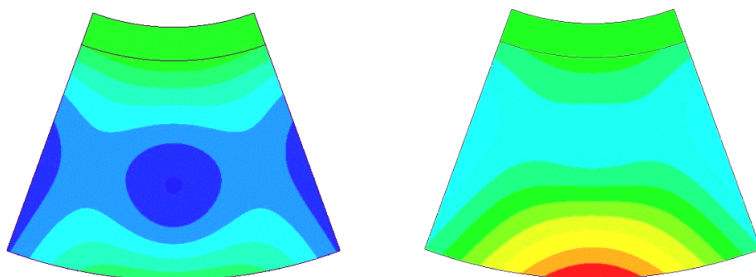


Рисунок 10 – Относительные перемещения модели фрагмента КГН ГОП-900, полученные по результатам численных исследований

7. Заключение

По полученным результатам исследования блока цилиндров ГОП-900 можно сделать следующие выводы:

1. Реализованная технология расчетно-экспериментальных исследований дает широкие возможности параметрического анализа и синтеза различных машиностроительных конструкций, а также построения их достоверных расчетных моделей по результатам экспериментов.
2. Исследования подтверждает высокую точность используемых в процессе выполнения численных исследований конечно-элементных моделей.
3. Напряженно-деформированное состояние блока цилиндров гидронасоса ГОП-900 при принятых граничных условиях можно исследовать

отдельно для каждого цилиндра с погрешностью, не превышающей 10%, в широком диапазоне эксплуатационных нагрузок.

4. При обеспечении адекватных граничных условий моделирование напряженно-деформированного состояния блока цилиндров можно проводить на модели одного цилиндра.

Таким разом описанное в данной статье исследование, включающее расчетный и экспериментальный этапы, позволяет оценить точность конечно-элементного моделирования всего множества различных элементов гидромашин. Данный метод может применяться для моделирования широкого диапазона пневмомеханических, гидромеханических и электромеханических систем.

В дальнейшем планируется разработать САПР элементов гидрообъемных передач с более широкими функциональными возможностями.

Список литературы: 1. *Самородов В.Б.* Математическое моделирование быстроходных объемных радиально-поршневых гидромашин – элементов гидрообъемно-механических трансмиссий // *Механика та машинобудування*. – 1999. – № 1. – С. 181-187. 2. *Самородов В.Б.* Общая постановка параметрического синтеза гидрообъемно-механических трансмиссий // *Механика та машинобудування*. – 2000. – № 1,2. – С. 144-151. 3. *Самородов В.Б., Рогов А.В.* Результаты параметрического синтеза гидрообъемно-механических трансмиссий гусеничных машин // *Механика та машинобудування*. – 2000. – № 1,2. – С. 151-159. 4. *Аврунин Г.А., Кабаненко И.В., Хавиль В.В.* и др. Объемная гидropередача с шариковыми поршнями ГОП-900: характеристики и технический уровень // *Механика та машинобудування*. – 2004. – № 1. – С. 14-22. 5. *Сабонадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л.* Метод конечных элементов и САПР. – М.: «Мир», 1989. 6. *Капустин А.А.* Теория спекл-голографических измерений напряженно-деформированного состояния элементов натуральных конструкций // *Материалы XI Всесоюзной школы по голографии, ЛИЯФ, Ленинград*. – 1979. – С. 137-159. 7. *Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем // *Динамика и прочность машин*. – 2002. – № 10. – С. 126-132. 8. *Ткачук А.В., Васильев А.Ю., Мартыненко А.В., Веретельник Ю.В.* Влияние конструктивных факторов на напряженно-деформированное состояние корпусов гидрообъемных передач // *Механика та машинобудування*. – 2004. – № 1. – С. 78-85.

Поступило в редколлегию 25.04.2005

Е.Ю.МИСЮРА, аспирант, ХНУ им. В.Н. Каразина

НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ БРОНИРОВАННОГО ШЛАНГА

У статті досліджено напружено-деформований стан навантаженого внутрішнім тиском броньованого шланга (шланга з обплетенням). Шланг представлений шматочко-однорідним ізотропним товстостінним циліндром, який створено за товщиною з двох шарів – гумового (внутрішнього) та металевого (зовнішнього). Методом скінчених елементів на основі принципу можливих переміщень у природних вирішених осесиметрична статична задача про плоский деформований стан у фізичній та геометричній нелінійній постановці. Одержані результати дозволили додатково тестувати розроблені раніше методичку та програму, а також виявити вплив обплетення на міцність шланга.

This paper is concerned with the study of the stress-strain state of the armoured hose loaded by the internal pressure. The hose is a piecewise-homogenous isotropic thick-wall cylinder formed by two layers – rubber (inner) and metallic (external) ones. The statically axisymmetric problem of the plane deformed state in the physically and geometrically nonlinear formulation was solved by means of the finite element method on the base of the principle of possible displacements in the increments. The obtained numerical results made it possible to test the methodics and the program elaborated early and also to reveal the influence of the braid on the strength of the hose.

Цилиндрические тела вращения являются одними из самых распространенных деталей в машиностроении, они встречаются также в конструкциях авиационной, горнодобывающей, нефтяной, газовой промышленности и т.п. Большое внимание привлекают цилиндры, изготовленные из двух и более материалов, определение их напряженно-деформированного состояния (НДС). Для механики деформируемого твердого тела представляют интерес исследование и анализ НДС физически и геометрически нелинейных изотропных кусочно-однородных цилиндрических тел вращения.

В данной статье излагается подход к решению задачи о НДС кусочно-однородного изотропного цилиндрического тела вращения при равномерно распределенном по внутренней поверхности давлении с учетом физической и геометрической нелинейностей.

Во многих работах рассматривается физически и геометрически линейные задачи с неоднородной структурой тела вращения. В работе [1] приведены результаты экспериментальных исследований НДС полых цилиндров, составленных по длине из трех различных материалов, подверженных внутреннему давлению. С помощью метода конечных элементов (МКЭ) исследованы напряжения и деформации в местах контакта разномодульных частей. В работах [2, 3] методом конечных разностей исследовано НДС массивного тела вращения в форме цилиндра, состоящего из кольцевых осесимметричных материалов с разными упругими характеристиками. Исследование влияния густоты сетки на решение задачи о нагруженном внутренним давлением толстостенном цилиндре, заключенном в тон-

кую металлическую оболочку, проведено в работе [4].

В работе [5] в физической и геометрически нелинейной постановке рассматривается задача о НДС изотропного толстостенного цилиндра, составленного из двух слоев – резины и металла. Решение задачи получено с помощью МКЭ. Во всех упомянутых работах изучались осесимметричные задачи для тел вращения.

В настоящей статье рассматривается двухслойный шланг, представленный кусочно-однородным изотропным толстостенным цилиндром. Наружный слой модели образован металлической оплеткой, внутренний – наполненной резиной, и значительно толще металлического. Шланг нагружен внутренним давлением. Решается осесимметричная статическая задача о плоском деформированном состоянии в физической и геометрически нелинейной постановке.

При нахождении решения данной задачи использован МКЭ на основе вариационного принципа возможных перемещений в приращениях [6, 7]. На каждом шаге задача линеаризуется, при этом учитывается НДС на предыдущих шагах. Задача решается в цилиндрической системе координат.

Ввиду того, что резиновый слой работает в области больших деформаций, то свойства резины описываются с помощью потенциала энергии деформации. В данной работе применяем потенциал Муни-Ривлина [8]

$$W = C_1(J_1 - 3) + C_2(J_2 - 3) + C_3(\sqrt{J_3} - 1)^2,$$

где J_1, J_2, J_3 – инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина деформированного состояния \hat{G} . Так как при решении задачи используется тензор деформаций Коши-Грина \hat{C} , то перейдем от инвариантов тензора \hat{G} к I_1, I_2, I_3 – инвариантам тензора \hat{C} . Запишем связь между инвариантами данных тензоров

$$J_1 = 2I_1 + 3; \quad J_2 = 4(I_1 + I_2) + 3; \quad J_3 = 1 + 2I_1 + 4I_2 + 8I_3.$$

Связь компонент σ^{sk} тензора истинных напряжений с компонентами ϵ_{sk} тензора \hat{C} является нелинейной [4]

$$\sigma^{sk} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{sk}} = 2\sqrt{\frac{g}{G}} \left(k_1 g^{sk} - k_2 G_{ij} g^{si} g^{kj} + k_3 G_{ij} G_{mn} g^{jn} g^{is} g^{mk} \right);$$

$$k_1 = \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_1 \frac{\partial W}{\partial J_2} + J_2 \frac{\partial W}{\partial J_3}; \quad k_2 = \frac{\partial W}{\partial J_2} + J_1 \frac{\partial W}{\partial J_3}; \quad k_3 = \frac{\partial W}{\partial J_3}.$$

Здесь g^{sk} – компоненты метрического тензора; g, G – определители соответствующих тензоров. При малых деформациях должен выполняться закон Гука. Из условия, что напряжения равны нулю при отсутствии деформаций, следует связь между константами C_1, C_2, C_3 и параметрами Ламе μ, λ

$$C_1 = \mu; \quad C_2 = -\frac{\mu}{2}; \quad C_3 = \frac{\lambda + 2\mu}{2}.$$

Изучено НДС модели двухслойного шланга в виде полого кругового цилиндрического тела вращения со стенкой постоянной толщины. Внутренний

радиус r_0 цилиндра равен 1 см, толщина резинового слоя составляет 0,5 см, металлического – 0,1 см. Для внутреннего слоя приняты следующие механические характеристики: $E = 10$ МПа, $\nu = 0,4995$, для наружного – $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$. К внутренней поверхности приложено давление q , равное 1 МПа. Стенка модели шланга дискретизируется четырехугольными восьмиузловыми конечными элементами, по высоте расположен 1 элемент, по радиусу – 20. Выполнено 10 шагов по нагрузке. Дальнейшее увеличение числа элементов и шагов практически не изменяет результатов.

Приведем графики распределения перемещений (рис. 1, а, б), деформаций (рис. 2, а, б) и напряжений (рис. 3, а, б) резины для шланга без оплетки (а) и с оплеткой (б).

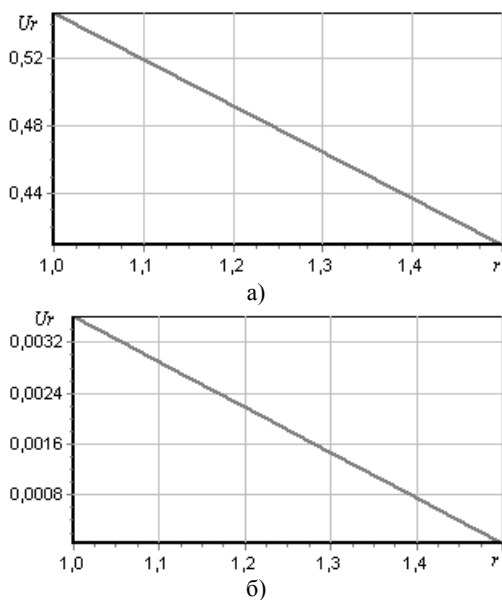
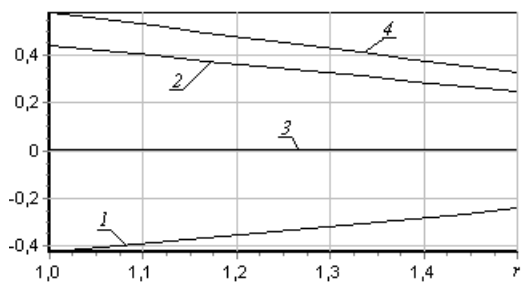


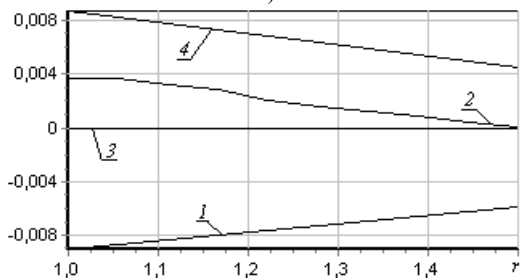
Рисунок 1 – График распределения радиального перемещения резины

Из рис. 1,б; 2,б; 3,б видно, что при наличии металлической оплетки на шланге перемещения и деформации резины ничтожно малы, так что нагрузка воспринимается металлической оплеткой. Шланг без оплетки претерпевает деформацию до 60 % и не может выдержать большой нагрузки.

Нормальные напряжения в резине шланга с оплеткой практически совпадают по модулю с давлением, а деформации весьма малы, что соответствует слабой сжимаемости материала. Таким образом, в резине давление близко к гидростатическому. Окружное напряжение в оплетке близко к $q \cdot R/h$ (R , h – средний радиус и толщина оплетки).

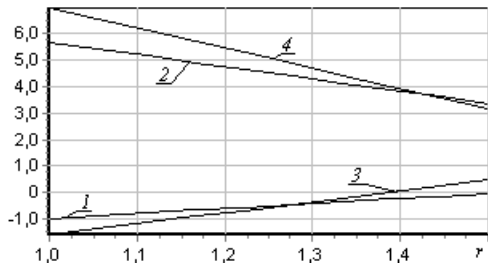


а)

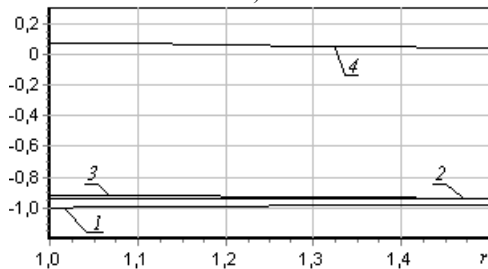


б)

Рисунок 2 – График распределения деформаций и интенсивности деформаций резины: 1 – ϵ_r , 2 – ϵ_ϕ , 3 – ϵ_z , 4 – ϵ_i .



а)



б)

Рисунок 3 – График распределения нормальных напряжений и интенсивности напряжений резины: 1 – σ_r , 2 – σ_ϕ , 3 – σ_z , 4 – σ_i .

В шланге без оплетки в полной мере проявляется нелинейность зависимости напряжений от деформаций и радиального перемещения от давления (см. рис. 4, 5).

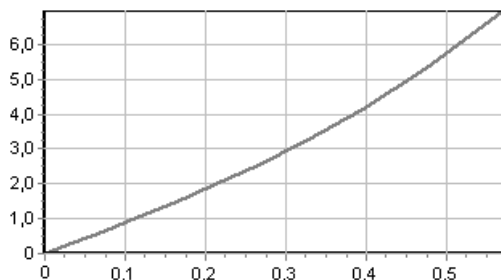


Рис. 4. Зависимость интенсивности напряжений (ось ординат) от интенсивности деформаций (ось абсцисс) при $r = r_0$

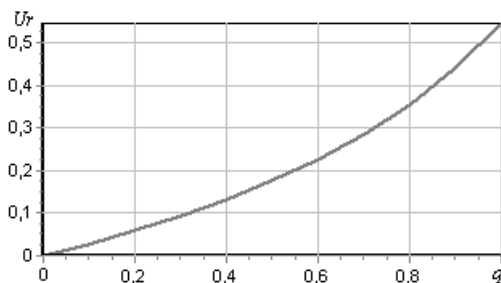


Рисунок 5 – Зависимость радиального перемещения от давления при $r = r_0$

Решения для шланга с оплеткой, полученные в данной работе и книге [4], практически совпадают. Отметим, что степень обусловленности матриц жесткости МКЭ существенно уменьшается при увеличении отношения модулей упругости различных областей (слоев) модели, однако в рассмотренной задаче при $E_M/E_p = 2,1 \cdot 10^4$ это явление не отразилось на точности решения.

Результаты, полученные в статье, позволили дополнительно тестировать разработанные в [6,7] методику и программу, а также более четко выявить влияние оплетки на прочность шланга.

Список литературы: 1. Ворошко П.П., Квитка А.Л., Новиков Н.В. Решение осесимметричных задач теории упругости для неоднородных сред. Сообщение 1 // Пробл. прочности. – 1973. – № 3. – С. 95-96. 2. Бобрицкая С.Д., Квитка А.Л. Пространственная деформация массивных неоднородных тел вращения. Сообщение 1 // Пробл. прочности. – 1970. – № 11. – С. 45-48. 3. Бобрицкая С.Д., Квитка А.Л. Пространственная деформация массивных неоднородных тел вращения. Сообщение 2 // Пробл. прочности. – 1970. – № 11. – С. 49-50. 4. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – К.: Наук. думка, 2002. – 655 с. 5. Пацко Н.Л. К расчету напряженно-деформированного состояния осесимметричных резиноталлических изделий //

Прикл. механика. – 1994. – 30, № 1. – С. 18-25. **6.** Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и ... – 2004. – №1(10). – С. 23-31. **7.** Кантор Б.Я., Яблунский Н.И., Мисюра Е.Ю. Исследование НДС толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца) // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ». Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2004. – № 31. – С. 106-117. **8.** Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.

Поступила в редколлегию 29.04.2005

УДК 539.3

А.М.НАЗАРЕНКО, канд.физ.-мат.наук; **Б.Е.ПАНЧЕНКО**, канд.физ.-мат. наук; **А.М.ЛОЖКИН**, Сумской государственный университет

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УПРУГИХ ВОЛН С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Розглядається задача дифракції пружних хвиль на циліндричній порожнині. Задача зведена до розв'язання сингулярних рівнянь, що реалізується чисельно. Приведено залежності напруг на границі порожнини від динамічних, механічних і геометричних характеристик.

The problem of elastic waves diffraction on a cylindrical space is dealt with. The problem is brought to solving singular equations, which are calculated numerically. Dependence of the space boundary voltage on dynamic, mechanical and geometrical characteristics are presented.

1. Введение. Современные конструкции работают в условиях не только статических, но и динамических нагрузок. Для практики представляет интерес исследование концентрации напряжений вблизи различного рода препятствий в условиях динамического нагружения.

Проблема дифракции плоских гармонических волн на цилиндрических неоднородностях изучалась многими авторами. В [1] использован метод разложения в ряд по собственным функциям. В [2] построены интегральные представления для упругих потенциалов, через которые выражаются компоненты вектора перемещений и тензора напряжений.

В настоящей работе развивается методика, предложенная в [3], где основной характеристикой напряженно-деформированного состояния выступает вектор перемещений.

2. Математическая модель. Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечный вдоль оси OZ полый цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова. Пусть из бесконечности набегают на цилиндр монохроматическая P -волна (P -случай)

$$U_1^{(0)} = 0, \quad U_2^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_1 y}, \quad \gamma_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1)$$

или SV -волна (SV -случай)

$$U_1^{(0)} = \tau e^{-i\gamma_2 y}, \quad U_2^{(0)} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь c_1, c_2 – скорости продольной и поперечной волн, ω – частота колебаний, t – время, λ и μ – постоянные Ляме, ρ – плотность среды, i – мнимая единица ($i^2 = -1$), зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия приходящей волны с цилиндрической полостью возникает сложное волновое поле. Амплитуды отраженных продольной и поперечной волн перемещений будем обозначать U_1 и U_2 . Тогда общее поле амплитуд перемещений равно

$$U = U_1^{(0)} + U_1, \quad V = U_2^{(0)} + U_2. \quad (3)$$

В случае установившихся волновых движений амплитудные значения компонент вектора перемещений удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 U &= 0, \\ \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \rho \omega^2 V &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Амплитудные значения напряжений связаны с амплитудами перемещений U и V формулами ($z = x + iy, \bar{z} = x - iy$)

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \tau_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U - iV)}{\partial z}, \quad \tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12} = -4\mu \frac{\partial(U + iV)}{\partial \bar{z}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть L – некоторая кривая в поперечном сечении цилиндра. Обозначим через S_1 и S_2 амплитуды тангенциальной и нормальной компонент вектора напряжений на L . Тогда в произвольной точке кривой $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$ эти напряжения выражаются через компоненты тензора амплитуд напряжений следующим образом

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} - 2i\tau_{12})e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\tau_{11} + \tau_{22})e^{-i\varphi_0} + (\tau_{22} - \tau_{11} + 2i\tau_{12})e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где φ_0 – угол положительной касательной к L в точке $\zeta_0 \in L$ с осью Ox .

На границе тела представляют интерес распределения компонент тензора амплитуд напряжений $\tau_{s_0}, \tau_{n_0}, \tau_{n_0 s_0}$, которые будем находить по формулам

$$\tau_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \tau_{s_0} = (\tau_{11} + \tau_{22}) - \tau_{n_0}, \quad (7)$$

$$\tau_{n_0 s_0} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0.$$

Запишем интегральные представления амплитуд перемещений возмущенного поля, исходя из которых будем решать поставленную задачу дифракции. Они имеют вид (суммирование по k)

$$\begin{aligned} U_m(x, y) &= \int_L U_m^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \\ \tau_{mn}(x, y) &= \int_L \tau_{mn}^{(k)}(x, y, \xi, \eta) f_k(s) ds, \quad m, n, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $f_k(s)$ – неизвестные функции, $U_m^{(k)}$ – функции Грина, представляющие собой амплитуды перемещений в среде при действии гармонической сосредоточенной силы, приложенной в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ и направленной вдоль оси Ox ($k = 1$) или Oy ($k = 2$). С учетом условий излучения на бесконечности для них получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} + iU_2^{(1)} &= U_1^{(2)} - iU_2^{(2)} = d \left(\frac{\chi}{4} \Phi_{20} - c \Phi_{00} \right), \\ U_1^{(1)} - iU_2^{(1)} &= \frac{d}{4} e^{-2i\alpha} \Phi_{22}, \quad U_1^{(2)} + iU_2^{(2)} = \frac{d}{4} e^{2i\alpha} \Phi_{22}, \\ d &= \frac{i}{4\mu(1-\nu)}, \quad \chi = 3 - 4\nu, \quad c = \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \gamma_2^2, \\ z - \zeta = re^{i\alpha}, \quad \Phi_{kj} &= \frac{\gamma_1^k H_j^{(1)}(\gamma_1 r) - \gamma_2^k H_j^{(1)}(\gamma_2 r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $H_j^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1-го рода j -го порядка.

Очевидно представления (8) удовлетворяют уравнениям движения (4). Кроме того, за счет выбора функции $U_m^{(k)}$ (9), они выполняют условия излучения на бесконечности, то есть представляют собой расходящиеся волны. Остается удовлетворить граничные условия на контуре полости, которые запишем в виде

$$S_1 \pm iS_2 = 0 \quad \text{на } L. \quad (10)$$

Выпишем необходимые для (10) производные:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(1)} + iU_2^{(1)}) &= e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(2)} - iU_2^{(2)}) = -\frac{d}{8} (\chi \Phi_{31} - 4c \Phi_{11}), \\ e^{i\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(1)} - iU_2^{(1)}) &= e^{-i\alpha} \frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(2)} + iU_2^{(2)}) = \frac{d}{8} \Phi_{31}. \end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что ядро Φ_{11} является непрерывным, а ядро Φ_{31} также, как и ядро Φ_{33} , сингулярно. Имеем

$$\Phi_{31} = \frac{2i}{\pi r} + F_{31}, \quad \Phi_{33} = \frac{2i}{\pi r} + F_{33} \quad \text{где } F_{31} \text{ и } F_{33} \text{ – непрерывные функции.}$$

Используя производные (11), можно вычислить ядра интегральных представлений (8) $\tau_{mn}^{(k)}$ – амплитуд тензора напряжений возмущенного поля с помощью формул (5), подставляя в них вместо U и V функции Грина $U_m^{(k)}$. Выделяя в ядрах полученных интегралов сингулярные члены и используя предельные значения интегралов типа Коши [4], приводим граничные условия (10) к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}f_1(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{11}(s, s_0) + f_2(s)E_{12}(s, s_0))ds &= K_1(s_0), \\ -\frac{1}{2}f_2(s_0) + \int_L (f_1(s)E_{21}(s, s_0) + f_2(s)E_{22}(s, s_0))ds &= K_2(s_0), \end{aligned} \quad (12)$$

$$E_{11} = h \left(d_1 + \frac{1}{4}d_2F_{31} - d_3\Phi_{11} \right), \quad E_{12} = h \left(-\bar{d}_4 + \left(\frac{1}{4}F_{31} - \frac{\gamma_2^2}{4}\Phi_{11} \right) e^{i(\alpha_0 + \varphi_0)} - \frac{1}{4}F_{33}e^{i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right),$$

$$E_{21} = h \left(d_4 + \left(\frac{1}{4}F_{31} - \frac{\gamma_2^2}{4}\Phi_{11} \right) e^{-i(\alpha_0 + \varphi_0)} - \frac{1}{4}F_{33}e^{-i(3\alpha_0 - \varphi_0)} \right), \quad E_{22} = h \left(-\bar{d}_1 + \frac{1}{4}\bar{d}_2F_{31} - \bar{d}_3\Phi_{11} \right),$$

$$d_1 = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} - \chi \frac{e^{-i\varphi_0}}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} \right), \quad d_2 = e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - \chi e^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)},$$

$$d_3 = \frac{\gamma_2^2}{4} e^{i(\varphi_0 - \alpha_0)} - ce^{-i(\varphi_0 - \alpha_0)}, \quad d_4 = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\varphi_0} - e^{-i(2\alpha_0 - \varphi_0)}}{\zeta - \zeta_0},$$

$$h = \frac{1}{4(1-\nu)}, \quad \zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad K_1(s_0) = S_1^{(0)} + iS_2^{(0)}, \quad K_2(s_0) = S_1^{(0)} - iS_2^{(0)},$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = \frac{\mu\gamma_1\tau}{\frac{1}{2} - \nu} e^{-i\gamma_1\eta_0} [\pm(1-\nu)\cos\varphi_0 + i\nu\sin\varphi_0] \quad \text{в } P\text{-случае,}$$

$$S_1^{(0)} \pm iS_2^{(0)} = -i\mu\gamma_2\tau e^{-i\gamma_2\eta_0} e^{\mp i\varphi_0} \quad \text{в } SV\text{-случае.}$$

Здесь \bar{d} – величина, сопряженная к комплексной величине d , ядра E_{11} и E_{22} являются сингулярными, E_{12} и E_{21} – непрерывны. Следовательно, уравнения (12) являются сингулярными интегральными уравнениями 2-го рода.

Численная реализация. Для численной реализации алгоритма в настоящей работе использован метод, теоретически обоснованный в работе [5] и основанный на приближении плотностей интегральных уравнений тригонометрическими многочленами и в последующем точном вычислении интегралов с непрерывными и сингулярными ядрами.

Проведем параметризацию контура L по формулам

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad 0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi.$$

Интерполяционный многочлен для неизвестных плотностей интегральных уравнений (12) имеет вид

$$f(\beta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) \sin \frac{N(\beta_k - \beta)}{2} \cdot \frac{1}{g(\beta)}, \quad \beta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad (13)$$

где $g(\beta) = tg \frac{\beta_k - \beta}{2}$ в случае четного числа узлов $N = 2n$ и

$g(\beta) = \sin \frac{\beta_k - \beta}{2}$ в случае нечетного $N = 2n + 1$.

Подстановка (13) в интегралы с сингулярными ядрами дает

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) R(\beta, \beta_0^m) d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) R(\beta_k, \beta_0^m), \quad \beta_0^m = \frac{2m-1}{N} \pi, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (14)$$

если $R(\beta, \beta_0)$ – непрерывное ядро, и

$$\int_0^{2\pi} f(\beta) ctg \frac{\beta - \beta_0^m}{2} d\beta \approx \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(\beta_k) ctg \frac{\beta_k - \beta_0^m}{2}, \quad (15)$$

в случае ядра Гильберта, причем квадратурные формулы (14), (15) имеют место как при четном, так и нечетном числе узлов разбиения контура L .

Отметим, что формула (15) аналогична правилу приближенного вычисления регулярных интегралов (14). По этой причине при численной реализации сингулярных интегралов ядро Гильберта выделять из сингулярного ядра необязательно. В работе как для регулярных, так и для сингулярных интегралов использовалась квадратурная формула (14).

В качестве примера рассматривалась среда, содержащая цилиндрическую полость эллиптического поперечного сечения

$$\xi = a \sin \beta, \quad \eta = -b \cos \beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (18)$$

На контуре включения проводилось вычисление напряжений

$$\sigma_n = |\tau_{n_0}| / P, \quad \sigma_\beta = |\tau_{s_0}| / P, \quad \sigma_{n\beta} = |\tau_{n_0 s_0}| / P,$$

где компоненты тензора амплитуд напряжений τ_{n_0} , τ_{s_0} , $\tau_{n_0 s_0}$ находились по формулам (7), P – максимальное значение напряжения в падающей волне, равное $\gamma_1 \tau(\lambda + 2\mu)$ в случае излучения P -волны (1) и $\gamma_2 \tau \mu$ – в случае излучения SV -волны (2).

На рис. 1,2 и 3,4 представлены результаты расчетов напряжения σ_β на контуре эллиптической полости для случаев излучения из бесконечности P -волны ($\gamma_1 a = 1$) и SV -волны ($\gamma_2 a = 1$) соответственно.

Кривые 1,2,3 и 4 на рис. 1, 3 отвечают значениям параметра b/a , равным 0,5; 1,0; 2,0 и 5,0 соответственно, при этом значение коэффициента Пуассона среды $\nu = 0,3$. Расчеты показывают, что в случае $b/a \leq 1$, то есть когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки соскальзывания ($\beta = 90^\circ$) напряжение σ_β имеет локальный максимум, при излучении P -волны и локальный минимум – в случае SV -волны. При значениях $b/a \geq 1$, то есть когда эллиптическая полость вытянута вдоль оси, перпендикулярной фронту падающей волны, с увеличением параметра b/a характер изменения σ_β усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

Кривые 1, 2 и 3 на рис. 2,4 отвечают значениям коэффициента Пуассона среды $\nu = 0,2; 0,3$ и $0,4$ соответственно, при этом значение параметра $b/a = 2$. Видно, что в случае набега на цилиндр P -волны с увеличением ν напряжение σ_β вблизи теневой ($\beta = 0^\circ$) и лобовой ($\beta = 180^\circ$) точек увеличивается, а вблизи точки соскальзывания ($\beta = 90^\circ$) уменьшается. В случае излучения SV -волны влияние параметра ν на σ_β незначительно.

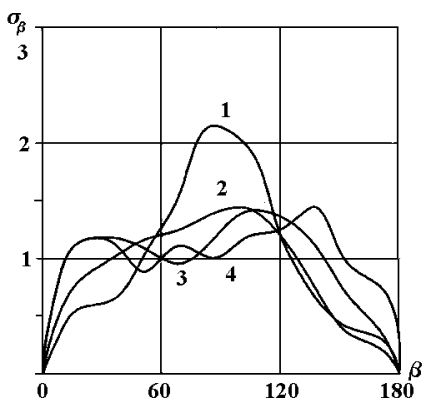


Рисунок 1

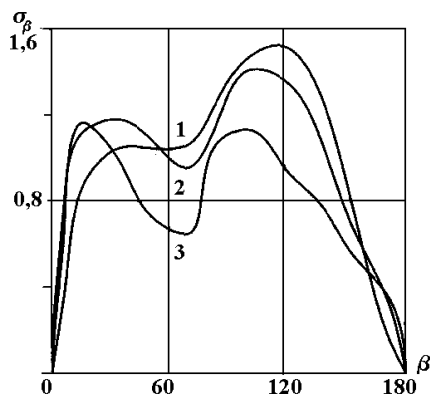


Рисунок 2

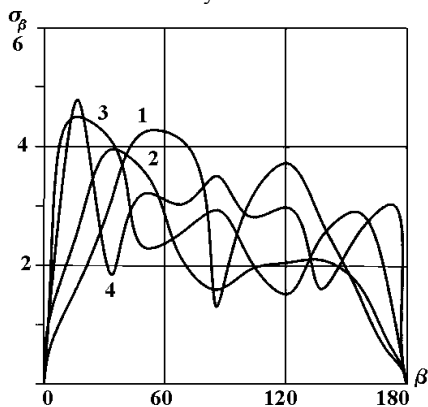


Рисунок 3

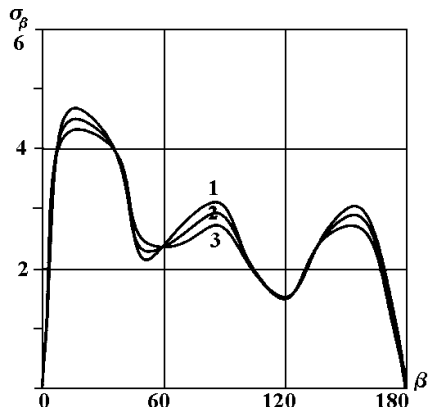


Рисунок 4

Список литературы: 1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев.: Наукова думка, 1978. – 307 с. 2. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Мех. твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119-127. 3. Назаренко А.М., Панченко Б.Е. Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения // Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1991. – Вып. 52. – С. 38-45. 4. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.

Поступила в редколлегию 28.06.2004.

А.М.НИКИТИН, НТУ «ХПИ»

ЛАЗЕРНАЯ ДИАГНОСТИКА ПОТОКОВ. ЧАСТЬ 2. ПАРАМЕТРЫ ЭЛЕМЕНТОВ ОПТИЧЕСКИХ СХЕМ ЛДИС

В статті приведено результати оцінних розрахунків параметрів оптичних схем ЛДВШ, адаптованих до вимірювання характеристик потоків частково прозорих рідин. Показано ефективність алгоритму на етапі компонування оптичних схем ЛДВШ.

In this article estimations of the optical parameters schemes LDA adapted to measuring of stream performances of restricted transparency fluids are reduced. Efficiency of algorithm at a phase of layout LDA optical schemes is shown.

Лазерные доплеровские измерители скорости (ЛДИС), разработанные в [1, 2] для конкретных задач измерений, ориентированы на получение характеристик движения среды и реализуют набор требований, соответствующих данным задачам. Особенности различных экспериментальных задач препятствуют созданию универсальных схем измерителей, удовлетворяющих массовым требованиям [1]. Учитывая ограничения и особенности доступа к потокам рабочих сред в каналах теплоэнергетического оборудования, в первом приближении, компоновка оптическая схема (ОС) должна удовлетворять специфическим требованиям [1]. Расстояние от поверхности выходной линзы до измерительного объема не менее $f_{\text{ИО}}$. Размер разделяющего оптического окна в стенке канала не более d_K . Диапазон измеряемых скоростей $[V_{\text{min}} \div V_{\text{max}}]$ определяется условиями эксплуатации изучаемого канала.

Сравнение и анализ реализованных вариантов ОС [1,2] позволяет выбрать интерференционные схемы ЛДИС, приведенные на рис. 1, с регистрацией рассеянного (ОС1) и отраженного (ОС2) сигнала как наиболее применимых в изложенных условиях измерений. Обе ОС имеют простую конструкцию и высокую оптическую эффективность. Лазерный пучок акустооптическим модулятором (АОМ) разделяется на несколько лучей с индивидуальными частотами модуляции и пространственными параметрами. Выбранные с помощью оптического коммутатора (ОК) лучи участвуют в формировании параметров измерительного объема. Количество и последовательность комбинаций модулированных лучей, формирующих ИО, задается подвижной частью ОК. Объектив L_1 направляет лучи в фокус, расположенный в области измерений, тем самым формирует измерительный объем (ИО) ЛДИС. Параметры измерительного объема, как сенсорного элемента зависят от характеристик излучателя, частот модуляции формирующих лучей, а также от апертуры и фокусного расстояния формирующего объектива. В ОС с регистрацией отраженного излучения свет, рассеянный против направления оптической оси схемы, собирается тем же объективом L_1 и затем с помощью зеркала направ-

ляется на фотоприемник. Объектив L_2 , вместе с диафрагмой M_2 служит для отображения состояния ИО на фотодетектор. Диафрагма M_2 , установленная перед детектором, ограничивает наблюдаемую область. В ОС с регистрацией рассеянного излучения свет, проходящий сквозь область течения, собирается объективом L_2 на диафрагму M_2 .

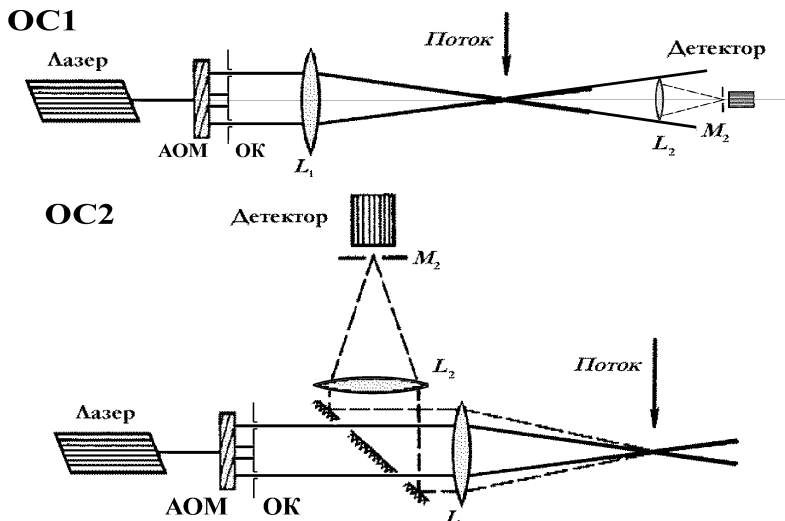


Рисунок 1 – Интерференционные оптические схемы ЛДИС

Если использовать алгоритм расчета параметров компонентов ОС, описанный в [4], с учетом соотношения мощности отраженного и рассеянного излучения в потоке как 13/82 [1], то оптические схемы с регистрацией рассеянного излучения обладают некоторым преимуществом по сравнению с системами, которые используют отраженный поток пучок. Ожидаемое для таких схем уменьшение мощности излучателя при сохранении полной работоспособности может быть до 6 раз, что во многих случаях становится существенным. Это соотношение для конкретных потоков изменяется в меньшую сторону, так как уменьшение мощности излучения ИО не линейно зависит от прозрачности потока, величины фокусного расстояния приемного объектива L_2 и концентрации рассеивающих частиц в потоке.

Использование модулирующих устройств, описанных в [5], в составе оптических схем ЛДИС позволяет создать оригинальное распределение электромагнитного поля излучателя в области чувствительного объема. Формирующая и приемная части ОС, сконструированные соответствующими методами [3], выполняют часть базовой задачи метода ЛДА и удовлетворяют условиям совместности измерений. Согласно [1] метод лазерной анемометрии сводится к реализации комплекса частных задач, направленных

ных на решение обратной задачи взаимодействия когерентного излучения с движущейся средой в малой области измерительного объема. Очевидно, компоновка ОС детерминирована набором условий, выполнение которых гарантирует получение сигналов, однозначно соответствующих состоянию ИО в исследуемом потоке.

Вид интерференционных структур, получаемых в области измерительного объема при использовании трех формирующих лучей, каждый из которых модулирован индивидуальной частотой, можно проиллюстрировать рисунками 2 и 3.

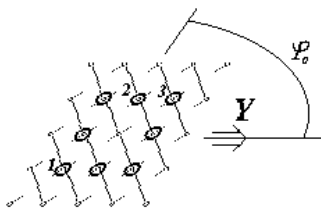


Рисунок 2 – Дифракционная картинка при не ортогональной модуляции

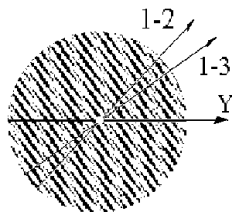


Рисунок 3 – Ориентация интерференционных максимумов в ИО.

В качестве лучей, формирующих интерференционную структуру, выбраны дифракционные максимумы 1, 2 и 3 (рис. 2). Направляющие векторы интерференционных волн соответствуют направлениям 1-2, 1-3 и 2-3. Направление 2-3 совпадает с направлением оси Y в системе координат ИО [5].

Схема на рис. 3 соответствует мгновенному состоянию интенсивности излучения в измерительном объеме. Учитывая частоты модуляции $\omega_1 = -2\omega_q$, $\omega_2 = \omega_q$ и $\omega_3 = 2\omega_q$, минимальная частота диапазона чувствительности ЛДИС определена как $\omega_{min} = \omega_q - V_{max} 4\pi \sin\theta/\lambda$, верхний предел диапазона – $\omega_{max} = 4\omega_q + V_{max} 4\pi \sin\theta/\lambda$. Очевидно, максимальная частота аналогового канала обработки сигнала ЛДИС должна превышать ω_{max} . Ширина единичного максимума на схеме составляет около 3 мкм. Максимальная скорость смещения интерференционной волны в направлении 1-3 достигает 60 м/с, скорость смещения вдоль оси Y примерно 16 м/с.

Приведенные параметры являются определяющими при оценке состояния ИО ЛДИС. Данный пример не может претендовать на полноту описания состояния измерительного объема во время измерений и показывает волновую структуру, полученную сложением трех бегущих интерференционных волн.

Для учета частичной прозрачности рабочих сред, в первом приближении, можно ввести в рассмотрение функцию оценки потерь мощности излучения при прохождении через область потока, согласно пути прохождения излучения на рис. 1,

$$\vartheta = 1 - \chi_f \left(\frac{f_{L1}}{\cos\theta} + f_{L2} \right), \text{ для ОС1 и} \quad (1)$$

$$\vartheta = 1 - \chi_f f_{L1} \left(1 + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} \right), \text{ для ОС2,}$$

где f_{L1} и f_{L2} – фокусные расстояния объективов; θ – угол сведения лучей; χ_f – экспериментально определяемый коэффициент прозрачности потока.

Величина χ_f учитывает часть мощности излучения ИО, которая потеряна на вторичных переотражениях и поглощена рабочей средой в области течения, отнесенную к единице пути прохождения лучей в потоке. Оценка предельных значений χ_f в экспериментах с различными рабочими средами может проводиться в фазе подготовки эксперимента. Для потока дистиллированной воды, содержащей в качестве рассеивателей $2,5 \cdot 10^{-4}$ весовые части порошка АСТТ χ_f оставалась меньше 10^{-4} в течение трех месяцев. Для неочищенной водопроводной воды с той же концентрацией рассеивателей по истечению трех месяцев величина χ_f достигала 0,074, а в потоке дистиллированной воды с добавлением молока в качестве рассеивающей добавки условия регистрации сигналов ЛДИС нарушались в течение недели. Учет влияния прозрачности становится необходимым при проектировании экспериментальных установок, использующих среды естественного происхождения либо среды с органическими рассеивателями.

Определение мощности источника излучения, измерителя проектируемого для экспериментов в частично прозрачных рабочих средах возможно по алгоритму, приведенному в [4]. Формирование ИО более, чем двумя модулированными лучами приводит к пропорциональному увеличению интенсивности излучения в интерференционных максимумах

$$P_l = \frac{\vartheta \cdot N_m P_f}{N_f (1 - \delta P)^s} \quad (2)$$

где N_m – число эквивалентных максимумов на выходе модулятора [3], работающего в режиме дифракции Рамана-Ната; P_f – мощность излучения, сфокусированная в ИО; N_f – количество формирующих ИО лучей; s – число границ оптических поверхностей элементов ОС; δP – средние потери на разделах фаз.

В составе ОС ЛДИС традиционно используются лазеры малой и средней мощности видимого диапазона спектра. Наиболее распространены He-Ne генераторы с длиной волны $\lambda = 6,328$ мкм. В схемах с регистрацией рассеянного излучения (ОС1, рис. 1) по конструктивным соображениям объектив L_2 обычно имеет большее фокусное расстояние, чем L_1 , и расстояние от оптической поверхности L_2 до ИО также больше чем расстояние до L_1 . Поэтому влияние загрязнения движущейся среды на качество принимаемых сигналов существенно, и контроль прозрачности потока становится важным при длительных измерениях.

Для ОС2, приведенной на рис. 1, с учетом четырех границ разделительного окна, ограничивающего область течения число поверхностей, встречаемых лучом в оптическом канале ЛДИС $s = 15$ [4]. В оценочном расчете можно принять это же число и для ОС1, это удобно при сравнении двух типов схем.

Результаты расчетов компонентов оптических схем ЛДИС (рис. 1) для измерения скорости потоков частично прозрачных жидкостей в каналах с ограниченным доступом с диапазоном измерений от -1 до 1 м/с приведены в таблице.

Параметры компонентов ОС ЛДИС

Параметр	Ед. изм.	ОС1 ФЭУ 49	ОС1 ФТ2	ОС2 ФЭУ 49	ОС2 ФТ2
Лазер					
<i>Длина волны излучения</i>	м	$6,328 \cdot 10^{-7}$	$6,328 \cdot 10^{-7}$	$6,328 \cdot 10^{-7}$	$6,328 \cdot 10^{-7}$
<i>Мощность (не менее)</i>	Вт	$12 \cdot 10^{-3}$	$77 \cdot 10^{-3}$	$93 \cdot 10^{-3}$	1,28
Модулятор					
<i>Базовая частота модуляции</i>	Гц	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
<i>Число активных максимумов</i>	шт.	16	16	16	16
Объектив L_1					
<i>Фокусное расстояние</i>	м	$0,25 \pm 0,3$	$0,25 \pm 0,3$	$0,25 \pm 0,3$	$0,25 \pm 0,3$
<i>Апертура</i>	м	$0,04 \pm 0,05$	$0,04 \pm 0,05$	$0,04 \pm 0,05$	$0,04 \pm 0,05$
<i>Относительное отверстие</i>		2	2	2	2
Объектив L_2					
<i>Фокусное расстояние</i>	м	0,35	0,35	0,028	0,028
<i>Апертура</i>	м	$0,02 \pm 0,05$	$0,02 \pm 0,05$	$0,02 \pm 0,05$	$0,02 \pm 0,05$
<i>Относительное отверстие</i>		4	4	2,4	2,4
Система обработки					
<i>Частотный диапазон</i>	Гц	$1,2 \cdot 12 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 12 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 12 \cdot 10^6$	$1,2 \cdot 12 \cdot 10^6$
<i>Временное разрешение</i>	с	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$

Данные, приведенные в таблице, рассчитаны при $\chi_L = 0,1$, что примерно соответствует прозрачности рабочей среды, содержащей в качестве рассеивателей молоко, по истечению 3-4 суток. Мощность лазера является базовой величиной, применение просветленных объективов L_1 и L_2 и тщательно выполненная процедура юстировки уменьшает расчетное значение в 1,5 раза. Предлагаемый расчет может использоваться на стадии проектирования ОС ЛДИС или при контроле и подборе компонентов в процессе наладки.

Оптические схемы экспериментальных установок, опубликованных в [5,6], компоновались с учетом изложенных алгоритмов. Как показывает практика использования приведенных оценочных расчетов, их результаты являются базовыми для процесса сборки ОС. При наладке ЛДИС оптимизировались параметры, зависящие от состояния всех систем измерителя, такие как пространственное и частотное разрешение, соотношение сигнал-шум и другие. Приведенные расчеты можно рассматривать как страховку от наиболее неприятной и трудоемкой процедуры замены компонентов ОС, повторной ю-

тировки и переналадке всего комплекса измерителя.

Результаты оценочного расчета показывают, что ЛДИС с оптическими схемами ОС1-ФТ2 и ОС2-ФЭУ49 возможно реализовать с применением ОКГ ЛГ-38 с паспортной мощностью излучения 80 мВт. Схема ОС1-ФЭУ49 может быть реализована с источником типа ЛГ-55 с паспортной мощностью излучения 15 мВт. Эффективность изложенного подхода подтверждается многократным его применением. В [6] приведена конфигурация оптической схемы практически совпадающей с примером расчета ОС1-ФЭУ49. Оптическая схема экспериментального ЛДИС опубликованная в [5] соответствует расчету ОС2-ФЭУ49.

Список литературы: 1. Дубнищев Ю.Н., Ринкевичус Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. – М.: Наука. 1982. – 304 с. 2. Дюррани Т., Грейтид К. Лазерные системы в гидродинамических измерениях: Пер. с англ. – М.: Энергия, 1980. – 336 с. 3. Мустель Э.Р., Парыгин В.Н. Методы модуляции и сканирования света. – М.: Наука, 1970. – 295 с. 4. Никитин А.М. Расчет мощности лазера и параметров оптических схем // Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск: «Радиофизика и ионосфера». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 23. – С. 73-79. 5. Товажнянский Л.Л., Никитин А. М. и др. Лазерная диагностика потоков. Часть 1. Двумерные модуляторы лазерного излучения // Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематический выпуск: «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2003. – № 12, т.1. – С. 139-146. 6. Товажнянский Л.Л., Никитин А.М. и др. Исследование гидродинамики турбулентных потоков в моделях пластинчатых теплообменников // Тезисы докладов всесоюзной научной конференции «Повышение эффективности, совершенствование процессов и аппаратов химических производств» 11-13 июня 1985 г. – Харьков, 1985. – С. 46-47.

Поступила в редколлегию 20.04.2005

УДК 614.84:664

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, докт.физ.-мат.наук; **И.В.МИЩЕНКО**,
канд.техн.наук, Академия гражданской защиты, Харьков;
С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, НТУ «ХПИ»

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА БАЛЛИСТИКИ СВОБОДНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СТРУИ

Визначено умови витікання стаціонарного струменя, за яких його траєкторія проходить через задану точку вертикальної площини під прямим кутом до неї, а частинки рідини в цій точці мають задану швидкість руху.

The conditions of the expiration of a stationary jet are determined, at which its trajectory passed through the given point of a vertical plane under a direct angle to it, and the particles of a liquid in this point have the given speed of movement.

Состояние и актуальность проблемы. В технических расчетах балли-

стики свободных гидравлических струй их траектории описывают с помощью решений дифференциальных уравнений движения материальной точки [1-5]. Такой подход позволяет сравнительно просто и приемлемой точностью рассчитывать параметры полета жидкости. Кроме того, открывается возможность решать задачи синтеза траекторий, то есть находить такие условия истечения струи, при которых ее траектория удовлетворяет определенным ограничениям геометрического или физического характера. В частности, авторами работ [6,7] с помощью специальной функции Ламберта и компьютерной программы в среде «MAPLE» удалось рассчитать начальный напор и угол истечения струи, при которых ее траектория проходит через две заданные точки. Аналогичная задача, но другим способом, решена в работе [4]. С практической точки зрения решение задач синтеза траекторий позволяет повысить точность доставки (попадания) жидкости в назначенную область, что важно в деле пожаротушения, полива растений, дистанционной мойки и дезактивации техники и пр. Поэтому решение обратных задач динамики свободных гидравлических струй представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Постановка задачи синтеза траектории и ее аналитическое решение на базе простейшей модели движения. Простейшей называем модель, в которой не учитывается аэродинамическое сопротивление потоку жидкости. Она позволяет получить замкнутое аналитическое решение, которое можно использовать для грубых оценочных расчетов.

В работе [4] решена задача прохождения траектории струи через заданную точку вертикальной плоскости под прямым углом к ней. Но там не ставилось ограничений на скорость движения частиц жидкости в этой точке. На практике важно, чтобы струя не просто прошла через заданную точку, а имела в ней еще и определенный запас энергии движения. Поэтому здесь обобщим решенную в [4] задачу синтеза путем введения дополнительного требования к скорости движения частиц жидкости.

Итак, пусть истечение струи происходит в начале прямоугольной системы координат XOY , с начальной скоростью v_0 под углом θ_0 к горизонту (см. рис. 1).

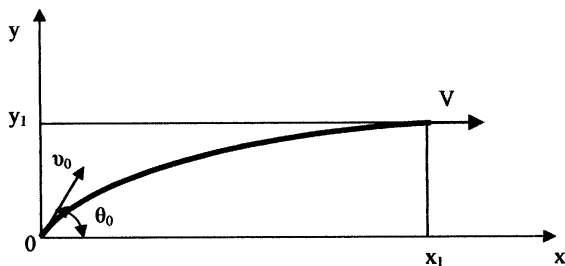


Рисунок 1 – Фрагмент траектории струи

Проекции скорости истечения струи v_1 и v_2 связаны с эффективным напором H соотношениями

$$v_1 = \sqrt{2gH} \cos \theta_0, \quad v_2 = \sqrt{2gH} \sin \theta_0,$$

где g – ускорение свободного падения. Ставится задача найти такие значения H , θ_0 и x_1 , при которых траектория пройдет через точку (x_1, y_1) . Кроме того, траектория в этой точке должна иметь горизонтальную касательную, а частицы жидкости – заданную скорость V .

Предполагается, что выбранная точка (x_1, y_1) неподвижна в пространстве и принадлежит плоскости движения струи, а изменение x_1 достигается горизонтальным перемещением начала координат (среза ствола, образующего струю).

Без учета аэродинамического сопротивления потоку жидкости траектория стационарной струи является параболой и описывается выражением [4,8]

$$y(x) = \frac{x}{v_1} \left(v_2 - \frac{g}{2} \cdot \frac{x}{v_1} \right). \quad (1)$$

По условию задачи синтеза точка (x_1, y_1) должна быть точкой максимума кривой (1). Из условия экстремума следует

$$x_1 = \frac{v_1 v_2}{g}; \quad y_1 = \frac{v_2^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gy_1}.$$

Учитывая, что в принятой модели движения $v_1 = \text{const}$ и по ограничению $v_1 = V$, приходим к аналитическому решению обратной задачи

$$x_1 = V \sqrt{\frac{2y_1}{g}}; \quad \theta_0 = \arctg \frac{\sqrt{2gy_1}}{V}; \quad H = y_1 + \frac{V^2}{2g}. \quad (2)$$

Используя полученное решение, определим, какими должны быть параметры истечения струи, чтобы $y_1 = 14$ м; $V = 20$ м/с. Вычисления по формулам (2) дают: $x_1 \approx 33,79$ м; $\theta_0 \approx 39,65^\circ$; $H \approx 34,39$ м.

Если в исходных данных в ограничении на скорость принять $V = 10$ м/с, то $x_1 \approx 16,89$ м; $\theta_0 \approx 58,89^\circ$; $H \approx 19,10$ м. Изменение V существенно повлияло на параметры истечения струи.

Выясним, как изменятся результаты синтеза при учете аэродинамического сопротивления. С этой целью используем более точную модель движения жидкости.

Решение обратной задачи динамики с учетом потерь энергии. Согласно теории линейного сопротивления движению траектория стационарной струи описывается выражением [2,4]

$$y(x) = \frac{g + \alpha v_2}{\alpha v_1} x + \frac{g}{\alpha^2} \ln \left(1 - \frac{\alpha x}{v_1} \right), \quad (3)$$

в котором α – приведенный коэффициент аэродинамического сопротивления.

Точка максимума функции (3) имеет координаты [4, стр.48]

$$x_1 = \frac{v_1 v_2}{g + \alpha v_2}; \quad y_1 = \frac{v_2}{\alpha} - \frac{g}{\alpha^2} \ln \left(1 + \frac{\alpha v_2}{g} \right). \quad (4)$$

Зависимость горизонтальной проекции скорости $v_1(x)$ от абсциссы x является линейной $v_1(x) = v_1 - \alpha x$. Поэтому по условию обратной задачи

$$v_1 - \alpha x_1 = V \Leftrightarrow v_1 = \alpha x_1 + V.$$

Введем далее безразмерные параметры: $X = \alpha v_2 g^{-1}$; $Y = \alpha^2 y_1 g^{-1}$ и представим второе уравнение (4) в безразмерном виде

$$X - \ln(1 + X) = Y.$$

Приближенные значения корней этого трансцендентного уравнения можно находить с помощью графиков (см. рис. 2, 3).

Учитывая некорректность обратной задачи, особенно при малых α , желательно взятое из графика значение X принять за начальное приближение X_0 , а далее уточнить его методом итераций

$$X_{n+1} = X_n - \frac{(1 + X_n)[X_n - \ln(1 + X_n) - Y]}{X_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

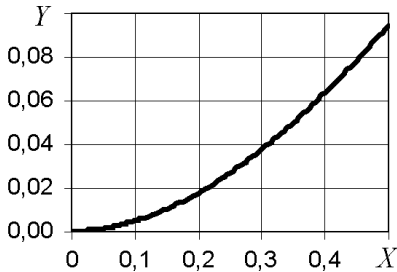


Рисунок 2 – Зависимость Y от X

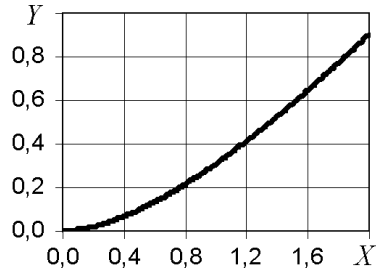


Рисунок 3 – Расширенный интервал зависимости Y от X

Определив с заданной точностью X_n , далее легко вычислить остальные неизвестные, поскольку

$$v_2 = (gX_n)/\alpha; \quad v_1 = V(1 + X_n); \quad x_1 = \frac{1}{\alpha}(v_1 - V);$$

$$H = \frac{1}{2g}(v_1^2 + v_2^2); \quad \theta_0 = \arctg(v_2 v_1^{-1}). \quad (6)$$

Рассмотрим примеры применения полученных решений.

Пример 1. Найдем требуемые параметры истечения струи при $\alpha = 0,2 \text{ с}^{-1}$; $y_1 = 14 \text{ м}$; $V = 20 \text{ м/с}$. Для них $Y \approx 0,057$. По графику (см рис. 2) находим

$X_0 \approx 0,38$. Уточнение с помощью формулы (5) дает $X_1 \approx 0,377$; $X_2 \approx 0,377$. Ограничиваясь этой точностью, по формулам (6) получаем $v_2 \approx 18,49$ м/с; $v_1 \approx 27,54$ м/с; $x_1 \approx 37,70$ м; $H \approx 56,08$ м; $\theta_0 \approx 33,88^\circ$. Если в исходных данных принять значение $V = 10$ м/с, то расчетные параметры истечения будут следующими $x_1 \approx 18,85$ м; $H \approx 27,09$ м; $\theta_0 \approx 53,33^\circ$. Как видим и при учете аэродинамического сопротивления ограничение на скорость V существенно влияет на результаты синтеза.

Пример 2. Увеличив сопротивление движению струи, определим параметры ее истечения при $\alpha = 0,2$ с⁻¹, $y_1 = 14$ м, $V = 20$ м/с. Этим исходным данным соответствует $Y \approx 0,228$. Согласно графику (см рис.3) начальным приближением является $X_0 \approx 0,84$. Уточняя его, по формуле (5) получаем $X_1 \approx 0,835$; $X_2 \approx 0,835$. Последующий расчет по формулам (6) дает: $v_2 \approx 20,48$ м/с; $v_1 \approx 36,70$ м/с; $x_1 \approx 41,75$ м; $H \approx 90,03$ м; $\theta_0 \approx 29,16^\circ$.

Расчеты показывают, что величина коэффициента аэродинамического сопротивления потоку жидкости существенно влияет на величину потребного напора и другие параметры

Выводы.

Построенные решения обратной задачи баллистики струи позволяют рассчитывать значения параметров истечения, при которых траектория движения жидкости удовлетворяет поставленным требованиям.

Поскольку результаты синтеза существенно зависят от величины приведенного коэффициента аэродинамического сопротивления, его следует экспериментально уточнять для конкретных стволов, создающих струи, а затем использовать в проектировочных расчетах.

Список литературы: 1. *Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А.* Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с. 2. *Куценко Л.М., Бобов С.В., Росоха С.В.* Методы геометричного моделирования в задачах пожарной безопасности. – Харків: Академія цивільного захисту України, 2004. – 175 с. 3. *Севериков В.В., Карпенко В.А., Севериков И.В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты. – Севастополь: Изд-во СевГТУ, 1996. – 260 с. 4. *Ольшанский В.П., Халына В.М., Дубовик О.А.* Приближенные методы расчета гидравлических пожарных струй. – Харьков: Митець, 2004. – 116 с. 5. *Ольшанский В.П.* О пологой траектории гидравлической пожарной струи // Вестник НТУ «ХПИ» Динамика и прочность машин. Вып. 20. –2004. – С. 81-86. 6. *Рева Г.В., Куценко Л.М., Росоха С.В.* Анімаційне комп'ютерне моделювання деяких процесів в задачах пожарной безопасности // Проблемы пожарной безопасности. Юбилейный выпуск. – Харьков: АПБУ, 2003. – С. 147-163. 7. *Запольський Л.Л.* Моделирования траекторії доставки засобів пожежегасіння методом метання // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Вип. 5. – Харків: ХДУХТ, 2004. – С. 106-113. 8. *Тарасов-Агалаков Н.А.* Практическая гидравлика в пожарном деле. – М.: Изд-во Министерства коммунального хозяйства РСФСР, 1959. – 262 с.

Поступила в редколлегию 21.06.2005.

Е.В. ПЕЛЕШКО, НТУ «ХПИ»

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОРПУСОВ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Розв'язана задача розробки методики аналізу і розв'язання задачі синтезу різних типів корпусів транспортних засобів спеціального призначення. Запропонована схема спеціалізованої інтегрованої системи аналізу і синтезу корпусів, а також інтегральні характеристики міцності і жорсткості.

The analysis procedure development problem and the synthesis solution problem of different types of special-purpose vehicle hulls is solved. The specialized integrated system scheme of the analysis and a synthesis of hulls, and also integrated performances of strength and stiffness is offered.

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При модернизации транспортных средств специального назначения очень часто возникает необходимость решать множество однотипных задач с небольшими или существенными изменениями исходных данных. При этом возникает необходимость создания собственной надстройки. В работах [1-5] разработаны некоторые подходы к исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС), параметрическому анализу и синтезу корпусов по критериям жесткости и прочности. В частности, в работе [6] было предложено применение наряду с универсальными проектно-расчетными программными пакетами также специализированных расчетных модулей для анализа напряженно-деформированного состояния корпуса транспортного средства специального назначения при воздействии различных нагрузок. Специализированные модули позволяют учитывать особенности задачи, такие как действующие на конструкцию нагрузки, граничные условия и другие.

В то же время для решения вопроса о модернизации существующих транспортных средств или создания новых отсутствуют достаточно универсальные критерии оценки НДС, прочностных и жесткостных характеристик различных типов корпусов. Возникает вопрос о создании методики универсальной оценки и разработки методов анализа и решения задач синтеза различных корпусов транспортных средств специального назначения.

Ставится задача разработки прочностных и жесткостных характеристик НДС как целевой функции или ограничительного фактора в задачах синтеза.

Для этого предлагается на примере корпуса БТР-80 исследовать поведение характерных прочностных и жесткостных параметров как функций конструктивных параметров и режимов силового воздействия.

2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Предлагается обобщенный параметрический подход к описанию классов

проектируемых, исследуемых и изготавливаемых деталей, систем, узлов и агрегатов. Его суть в том, что в качестве обобщенных параметров принимаются не только геометрические параметры, величины сил, физико-механические характеристики (т.е. параметры в традиционном понимании), но и виды конструкторских решений, характерные особенности расчетных схем, применяемые способы дискретизации задач анализа.

Для построения параметрических геометрических моделей предлагается использовать универсальную систему автоматизированного проектирования (CAD) высокого уровня Pro/ENGINEER. Для расчета НДС корпусов транспортных средств специального назначения при варьировании различных конструктивных параметров и конструктивных решений используются системы Pro/Mechanica и ANSYS.

Для взаимодействия между различными системами, варьирования параметров и задания нагрузок предлагается использовать специализированный модуль, являющийся управляющим для универсальных систем (рис. 1).

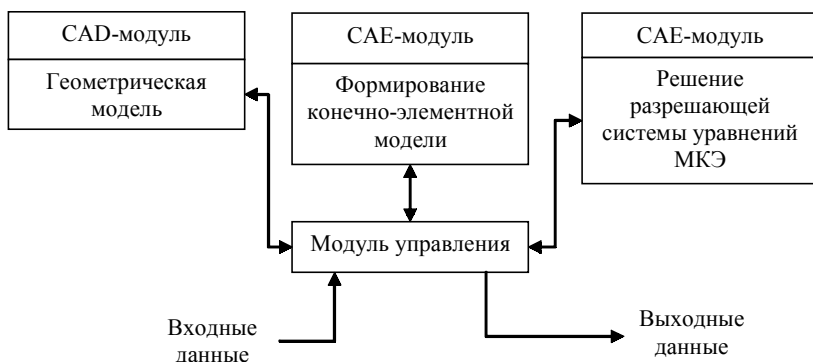


Рисунок 1 – Схема специализированной интегрированной системы автоматизированного анализа и синтеза

В качестве силового воздействия при расчете напряженно-деформированного состояния корпусов предлагается использовать режимы эксплуатации транспортных средств специального назначения: ведение стрельбы очередью из орудия в различных направлениях, диагональное вывешивание, переезд широкого рва, поворот на косяге, воздействие взрывной волны, движение по пересеченной местности и т.д.

Для оценки НДС корпуса в качестве характерных жесткостных параметров на основе опыта предлагается взять перемещения, углы поворота и напряжения в характерных точках (рис. 2).

После получения значений жесткостных параметров находятся относительные податливости конструкции.

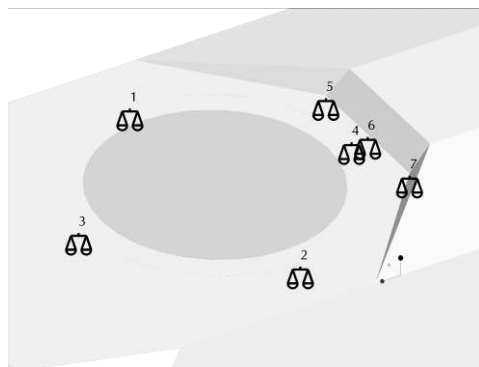


Рисунок 2 – Характерные точки, значения НДС в которых выступают в качестве жесткостных параметров

$$\begin{cases} w = c_w \cdot P \\ \varphi_x = c_{\varphi x} \cdot P \\ \varphi_y = c_{\varphi y} \cdot P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_w = w / P \\ c_{\varphi x} = \varphi_x / P \\ c_{\varphi y} = \varphi_y / P, \end{cases}$$

где: w, φ_x, φ_y – жесткостные параметры;
 P – нагрузка;
 $c_w, c_{\varphi x}, c_{\varphi y}$ – податливости конструкции.

Для сравнения различных типов корпусов предлагается ввести относительные податливости корпуса, например отнесенные к массе корпуса при варьировании толщин листов, дополнительных балок и т.д.:

$$C^* = C/M,$$

где: C^* – относительные податливости корпуса,
 M – масса корпуса,
 C – податливости корпуса.

Полученные относительные податливости корпуса позволяют сравнивать различные типы корпусов для разных характеров нагружения при варьировании конструктивных параметров.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Построена параметрическая модель корпуса БТР-80 в универсальной САПР-системе Pro/ENGINEER. В качестве варьируемых параметров могут выступать податливость подвески, толщины бронелистов, материал, а также различные конструктивные решения, такие как опорные и поперечные балки, коконовая схема усиления и др. Нагрузка представляется в виде разложения на силу и момент. Точка приложения нагрузки показана на рис. 3.

Для корпуса БТР-80 были получены расчеты НДС корпуса в характерных точках при варьировании различными конструктивными параметрами. Характер перемещения корпуса при динамической нагрузке в характерной

точке показан на рис. 4.

Варьирование режимов стрельбы осуществляется в виде изменения двух параметров (углов) направления приложения сил и моментов. Результаты для точки (3) представлены на рис. 5.

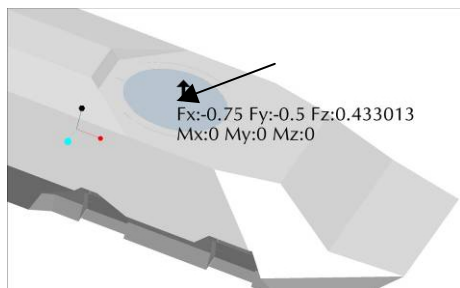


Рисунок 3 – Характер нагружения (силы и моменты)

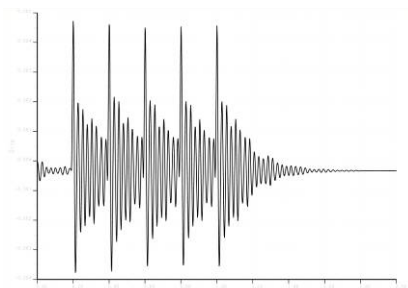


Рисунок 4 – Характер перемещения корпуса при динамической нагрузке в точке (1)

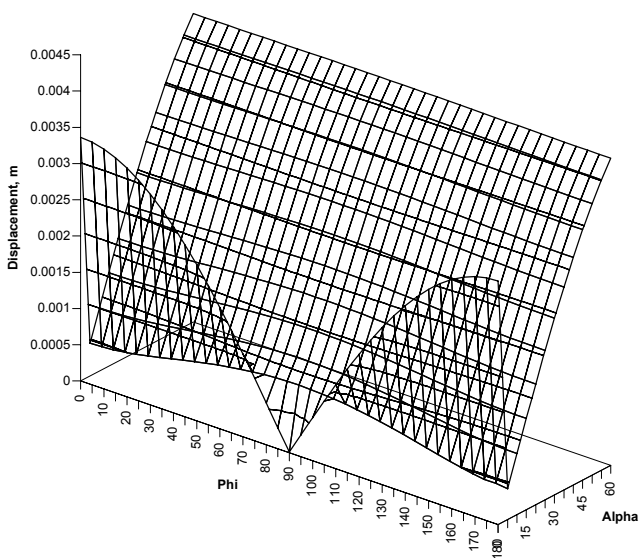


Рисунок 5 – Максимальные перемещения в точке (3) при варьировании режимов стрельбы

На рис. 6. показано влияние жесткости подвески транспортного средства на максимальные перемещения в точке (3).

Одним из вариантов увеличения жесткости корпуса является так называемый «пояс», представляющий собой дополнительные листы, опоя-

сывающие место крепления боевого модуля. Результаты (максимальные перемещения в точке (3)) при варьировании толщины «пояса» изображены на рис. 7.

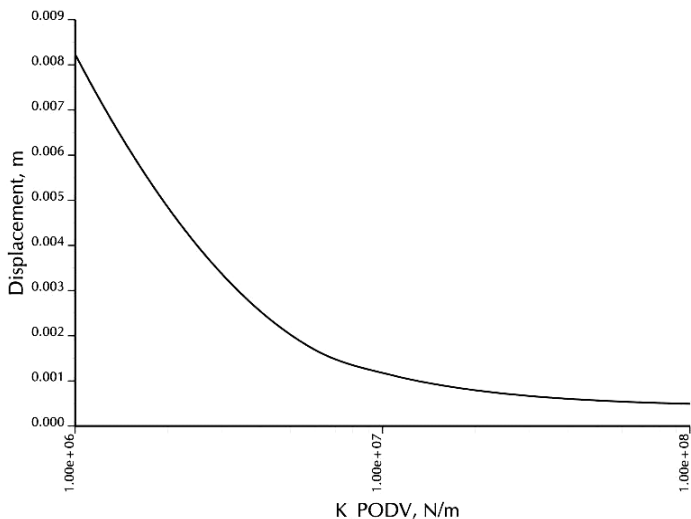


Рисунок 6 – Максимальные перемещения в точке (3) при варьировании жесткости подвески

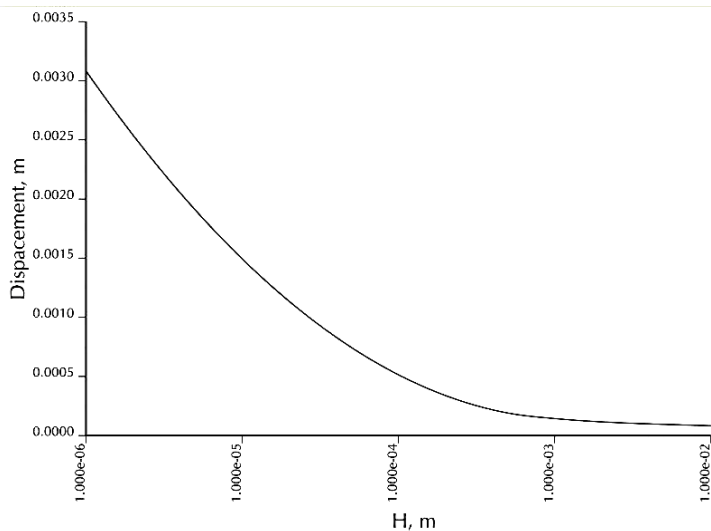


Рисунок 7 – Максимальные перемещения в точке (3) при варьировании толщины «пояса»

Полученные данные могут быть использованы для получения относительных параметров жесткости. На основе относительных параметров могут быть составлены критерии оценки корпусов. В свою очередь на основе этих критериев осуществляется дальнейшее сравнение различных типов корпусов транспортных средств специального назначения.

4. ВЫВОДЫ

1. В статье разработана методика анализа и решения задачи синтеза различных типов корпусов транспортных средств специального назначения.
2. Предложена схема специализированной интегрированной системы анализа и синтеза корпусов транспортных средств специального назначения.
3. Построены параметрические модели различных типов корпусов транспортных средств специального назначения.
4. Предложены интегральные характеристики прочности и жесткости, которые естественно и непрерывно зависят от варьируемых параметров.

С использованием предложенных систем, моделей, характеристик возможна постановка и решение задач параметрического анализа и синтеза различных типов корпусов транспортных средств специального назначения.

Список литературы: 1. *Гриценко Г.Д.* Интегрированная схема создания параметрических конечно-элементных моделей корпуса БТР для исследования его собственных колебаний // *Машинобудування: Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні.* – Харків: НТУ «ХП». – 2001. – № 7. – С. 56-59. 2. *Ткачук Н.А., Пономарев Е.П., Медведева А.В., Миргородский Ю.Я., Малакей А.Н., Гриценко Г.Д.* Определение рациональных параметров элементов механических систем // *Механіка та машинобудування.* – 2001. – № 1,2. – С. 308-314. 3. *Веретельник Ю.В., Миргородский Ю.Я., Пелешко Е.В., Ткачук Н.А.* Параметрические модели элементов сложных систем как основа построения специализированных расчетных систем // *Механіка та машинобудування.* – 2003. – №1. – Том 2. – С. 3-7. 4. *Васильев А.Ю., Пелешко Е.В.* Построение параметрических моделей корпусов многоцелевых транспортеров для расчета их прочностных и жесткостных характеристик // *Вісник НТУ «ХП».* Збірник наукових праць. Тематичний випуск «Колісні та гусеничні машини спеціального призначення». – Харків: НТУ «ХП». – 2003. – № 27 – С. 102-112 5. *Васильев А.Ю., Малакей А.Н., Пелешко Е.В., Шталов О.Е.* К вопросу интегрированных систем анализа динамических процессов в корпусах транспортных средств специального назначения // *Механіка та машинобудування.* – 2004. – № 1. С. 46-55. 6. *Гриценко Г.Д., Малакей А.Н., Миргородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А.* Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // *Механіка та машинобудування.* – 2002. – № 1. – С. 6-13.

Поступила в редколлегию 14.06.2005.

А.С.ПЕТРОВ, докт.техн.наук, ВНУ им. В.Даля, Луганск;
М.Л.БУРКА, ОАО ХК «Лугансктепловоз»;
О.В.РОМАНЕНКО, ВНУ им. В.Даля, Луганск;
В.И.НЕСТЕРЕНКО, ОАО ХК «Лугансктепловоз»

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛА ПЕРЕКОСА ОСИ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ РЕЛЬСОВОЙ КОЛЕИ

У статті описаний спосіб виміру кута перекосу осі колісної пари транспортного засобу щодо по-
здовжньої осі рейкової колії

This article is about the method of the definition of a corner of a skew of an axis of the wheel pair of
railway transport relatively to longitudinal axis of a rail track

Для повышения точности замера угла перекоса и возможности проводить измерения на пути большей протяженности, необходимо усовершенствовать способ определения угла перекоса оси колесной пары относительно продольной оси. Это можно выполнить путем упрощения процесса измерения за счет уменьшения регистрирующих приборов.

Известный способ определения положения железнодорожного колеса относительно рельса, заключается в том, что регистрируют изображение части колеса и определяют величину бокового смещения колеса относительно рельса на уровне оси колеса в направлении от рельса к оси колеса для двух выбранных точек. Затем величину смещения вычисляют по измеренным величинам, а угол набегания по разности [1].

Недостатком этого способа является сложность его реализации, обусловленная значительным количеством приборов, размещенных в разных плоскостях, на различном уровне (на шпалах киносъемочная камера, регистрирующее зеркало под рельсом, регистрирующая рейка на зеркале).

Такая установка регистрирующих приборов приводит к неточности измеренных параметров из-за внесения погрешности отдельных элементов (неточность установки регистрирующего зеркала и рейки под колесом, искажения, полученные смещением колеса из-за вибрации регистрирующего зеркала под головкой рельса).

Следует отметить также ограниченность применения измерений только на фиксированном участке пути (прямой или кривой участок пути).

Наиболее близким по технической сущности и достигаемому результату техническим решением является способ измерения угла набегания колеса на рельс (угла перекоса оси колесной пары относительно продольной оси рельсовой колеи) описанного [2], в котором два регистрирующих прибора закреп-

ляются на буксе по обе стороны колеса, прижимая движки (передаточный механизм) приборов к рабочей боковой грани головки рельса. Затем измеряют перемещения буксы относительно рельсовой колеи, угол перекаса определяют по разности перемещений, фиксируемых одновременно двумя регистрирующими приборами.

Недостатком этого способа является низкая точность замеров и сложность реализации способа.

Низкая точность замера угла перекаса оси колесной пары транспортного средства относительно продольной оси рельсовой колеи обусловлена следующим:

- невозможность установки параллельно двух регистрирующих прибора на корпусе буксы по обе стороны колеса и перпендикулярно относительно рельсовой колеи, что приводит к существенным погрешностям измеряемых боковых смещений букс относительно рельсовой колеи (по величинам, которые определяют угол перекаса);

- невозможность обеспечения постоянного контакта передаточных механизмов (движков) регистрирующих приборов в рельсовой колеи из-за геометрических и упругих неровностей рельсов, и как следствие, невозможна одновременная регистрация сигналов с приборов при прохождении транспортного средства неровностей в прямых, кривых и стрелочных переводах;

- недостаточная чувствительность регистрирующих приборов к поперечным перемещениям буксы относительно рельсовой колеи, из-за наличия осевого зазора (разбега) между торпом оси колесной пары и корпусом буксы;

- сложность установки приборов, обеспечивающих одновременно параллельность между собой и перпендикулярность передаточных механизмов (движков) относительно рельсовой колеи;

- сложность передаточных механизмов (движков) регистрирующих приборов, обеспечивающих постоянную взаимосвязь и взаимодействие букс и рельсовой колеи посредством нажимных устройств и роликов, которые должны быть постоянно прижаты к рельсовой колеи.

С учетом выше перечисленных недостатков существующих способов замеров нами было предложено следующее: при определении угла перекаса оси колесной пары, регистрирующие приборы необходимо размещать в одной плоскости между рамой тележки и корпусом буксы. Затем нужно приводить во взаимодействие приборы с корпусом буксы в продольном направлении оси пути перпендикулярно оси колесной пары, после чего регистрировать продольные смещения корпуса буксы относительно рамы тележки и по полученным данным определять угол перекаса. Благодаря этому обеспечивается повышение точности замера угла перекаса и упрощение способа замера.

Способ осуществляется следующим образом: При движении транспортного средства по рельсовой колее 1, колесная пара 2 при взаимодействии с рельсовой колеей 1 устанавливается под определенным углом перекаса из положения $x-x$ в положение $x'-x'$ под углом α , рис. 1. Установленный на раме

тележки 3 регистрирующий прибор 4 приводят во взаимодействие с корпусом буквы 5 в продольном направлении в точке А и регистрируют сигналы с прибора 4. Эти сигналы несут информацию о продольном перемещении буквы 5 относительно рамы тележки 3 при установке оси колесной пары с перекосом на угол α . Величину угла перекоса определяют по формуле:

$$\alpha = \arctg \frac{\Delta L}{b}, \quad (1)$$

где ΔL – продольное перемещение корпуса буквы относительно рамы тележки, мм; b – расстояние от центра оси колесной пары до установки регистрирующего прибора, мм.

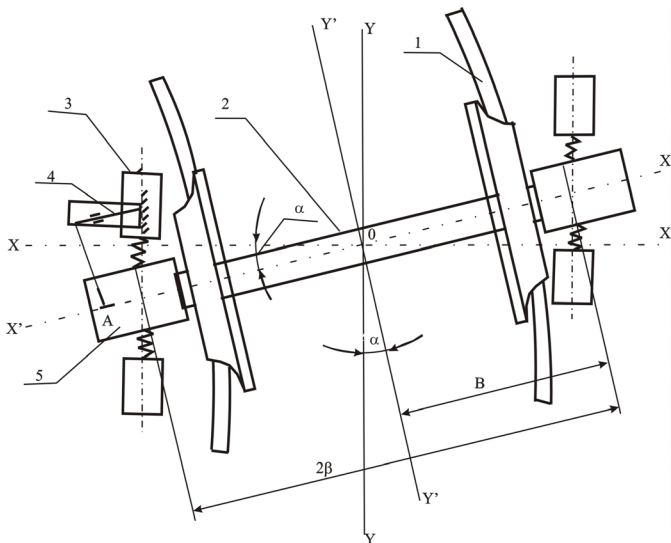


Рисунок 1– Колесная пара на рельсовой колее

Данный способ был реализован при проведении ходовых динамических испытаний по выявлению механизма образования износа гребней бандажей колесных пар тепловоза 2ТЭ116-895 с эксплуатационным пробегом более 200 тыс. км.

Программой и методикой 26-89-02 ПМ было предусмотрено оборудование направляющих колесных пар приборами, регистрирующими перекосы осей колесных пар относительно рельсовой колее.

Испытания проводились на эксплуатационном участке Донецкой ж.д., содержащем различный профиль пути- прямые, кривые, стрелочные переводы, при различных скоростях движения. Замеры регистрирующих перекосов осей велись непрерывно, с записью на многоканальный осциллограф 11.043.1.

Результаты измерений угла перекоса (угла набегания) для направляющей первой колесной пары приведены в таблице.

Результаты измерений угла перекоса оси колесных пар тепловоза 2ТЭ116-895

Скорость движения, км/ч	Угол перекоса оси колесной пары относительно оси колеи (угол набегания) α , рад.		
	прямая	$R = 600$ м	$R = 300$ м
10	-	-	0,016 0,013
20	0,001 0,0009	0,0007	-
40	0,0012 0,0008	0,001 0,0009	-
50	-	-	0,002 0,0021
60	0,0019 0,0015 0,0018	0,0021 0,0019	-
70	-	-	0,006 0,0069
80	0,0032 0,003	0,0054 0,0045	-
100	0,005 0,0048	0,0099	-

Величины значений угла перекоса определены по формуле (1), на основании табличных данных построены графики зависимости угла перекоса от скорости движения экипажа в прямой, кривой радиуса 300 м и 600 м, графики приведены на рис. 2.

Из рис. 2. следует, что угол перекоса от колесной пары относительно пути зависит от геометрии пути, то есть от радиуса кривых и скорости движения экипажа. Следует отметить, что изменение угла перекоса колесной пары от скорости движения экипажа обусловлено ростом амплитуды виляния колеса, то есть увеличивается величина продольного смещения корпуса буксы относительно рамы тележки. Полученные результаты исследований подтверждаются теорией движения одиночной колесной пары [3].

Использование описанного технического решения по сравнению с существующими позволяет:

- повысить точность измерений из-за размещения регистрирующих приборов в одной плоскости между рамой тележки и корпусом буксы и взаимодействие с корпусом буксы в продольном направлении оси пути перпендикулярно оси колесной пары;

- упрощение способа замера из-за уменьшения количества регистрирующих приборов и элементов, расположенных в различных плоскостях и регистрация смещения одним прибором;

– сокращение времени на установку и оборудование регистрирующих приборов и определение измеряемых величин;

– расширение функциональных возможностей:

а) непрерывная регистрация угла перекоса в пути различного профиля с кривыми различных радиусов и стрелочных переводов без перекладки на установку регистрирующих приборов;

б) определение вписывания экипажа в кривых участках пути, при установке регистрирующих приборов на направляющих колесных парах тележек;

в) оценка фактора износа гребней бандажей колесных пар в прямых, кривых и стрелочных переводах при следовании по участку пути без перекладки на установку регистрирующих приборов, и определяют по формуле:

$$\Phi = \alpha \cdot Y, \text{ где } \alpha - \text{ угол перекоса оси, } Y - \text{ боковая сила.}$$

г) определение изменений динамической упругой жесткости в продольном направлении связей колесных пар с рамой тележки.

д) определение показателя (при оценке) безопасности движения транспортного средства с точки зрения схода колеса с рельсов:

$$T \geq d_0 / (v \sin \alpha),$$

где T – время необходимое для схода колеса с рельсов;

d_0 – длина прямолинейного участка гребня, при $\alpha = 0$;

v – скорость движения набегающего колеса.

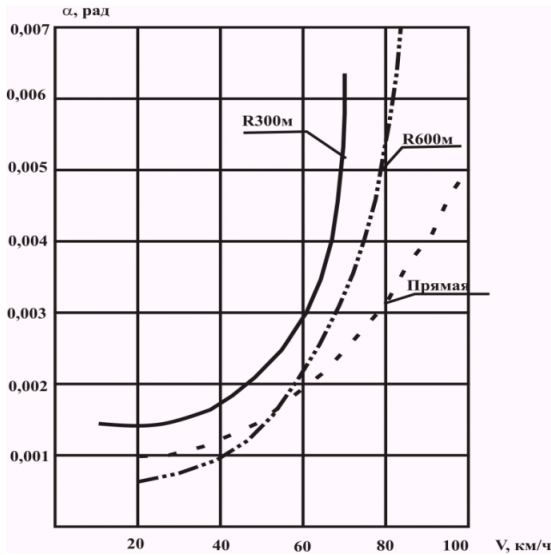


Рисунок 2 – График измерения угла перекоса колесной пары относительно оси рельсовой колеи при движении экипажа в кривой радиуса 300 м, 600м и на прямом участке пути в зависимости от скорости экипажа

На описанный способ определения угла перекоса колесной пары транспортного средства относительно продольной оси рельсовой колеи получен патент [4].

Список литературы: 1. А.С. СССР №1516770 А1 G 01 В 11/01 опубл. в бюл.№39, 23.10.89 г. 2. *Матусовский Г.М.* Об исследовании выкатывания колеса гребнем на рельс в пути, имеющем неровности // Тр. ВНИИЖТ. – 1978. – Вып. 592. – С. 114-121. 3. Конструкция и динамика тепловоза / Под. редакцией *В.Н.Иванова*. – Москва, Транспорт, 1974. – С. 306-309. 4. UA 5144 U G01B11/02 опубл. в бюл. № 2, 15.02.2005г.

Поступила в редколлегию 25.04.2005

УДК 539.4:01

В.О.ПОВГОРОДНИЙ, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ДАТЧИКА ДАВЛЕНИЯ – ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Розглянуто питання визначення показників параметричної надійності, зокрема, показників безвідмовності. Використано нові підходи в механіці та надійності, що базуються на використанні коефіцієнтів надійності (простого графічного методу) для елементів конструкцій як простих двовимірних (наприклад, плат з електрорадіоелементами), так і тривимірних пластинно-стрижневих та циліндричних.

The article devoted to problems of definition parametrical reliability and probable operability. The work develops a new approach in mechanics and reliability based on evaluation of parametrical reliability (namely, reliability coefficients) and operability of structural elements, simple two dimensional structures (for example, boards with radio components) as well as complex three-dimensional lamellar-bar and cylindrical structures.

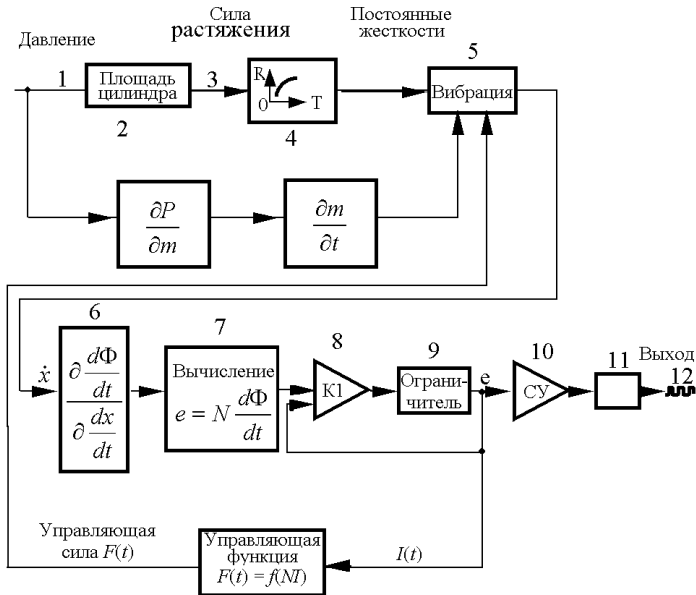
Принцип действия, конструкция и схема прибора

В качестве примера рассмотрим задачу определения параметрической надежности цилиндрического резонатора. Существует два вида напряженного состояния: плоское напряженное и изгиб [1]. Вместе они составляют сложное напряженное состояние. Рассмотрим состояние изгиба на примере цилиндрического резонатора.

Основу нового частотного датчика давления (ДД), разработанного американской корпорацией United Aircraft составляет вибрирующий цилиндр, резонансная частота которого изменяется при вариации давления газа в полости датчика. Данное устройство может быть в системах промышленной автоматики, в лабораторных установках, при проверке и испытаниях измерительной аппаратуры. Представляется перспективным применение датчика для решения таких задач, как измерение высоты, скорости, давления при полете самолетов на больших высотах, а также контроль расхода природного газа в тру-

бопроводах. Рассмотрим подробнее этот датчик.

Блок-схема ДД на основе вибрирующего цилиндра приведена на рисунке.



Блок-схема датчика давления на основе вибрирующего цилиндра:

1 – входное давление; 2 – эффективная площадь цилиндра; 3 – усилие на стенку цилиндра (TF), создаваемое входным давлением; 4 – блок преобразования силы (TF) в жесткость k , 5 – постоянная жесткости; 6 – вибрирующий цилиндр, x – амплитуда вибрации на стенке цилиндра, \dot{x} – скорость, \ddot{x} – ускорение вибрации, $F(t)$ – возбуждающая сила; 7 – обмотка съема сигнала; 8, 10 – усилители; 9 – ограничитель амплитуды; 11 – каскады ограничения и формирования; 12 – выход схемы (выходные импульсы имеют прямоугольную форму, частота их следования определяется величиной давления); $I(t)$ – ток в обмотке возбуждения; 1 – Э.Д.С. на обмотке съема 7 (величина Э.Д.С. пропорциональна числу витков N обмотки и скорости измерения потока $d\Phi/dt$).

Благодаря наличию контура обратной связи в схеме поддерживаются устойчивые автоколебания на частоте, близкой к собственной частоте вибрирующего цилиндра. Зависимость между входным давлением P и текущим значением выходной частоты f_P носит явно выраженный нелинейный характер

$$P = A(f_P - f_0) + B(f_P - f_0)^2 + C(f_P - f_0)^3, \quad (1)$$

где A, B, C – коэффициенты, рассчитываемые по результатам калибровки датчика, а f_0 – значение частоты при нулевом значении на входе. Обычно максимальная девиация частоты не превышает 20 %, поскольку большие статические механические напряжения цилиндрической оболочки приводят к ползучести металла резонатора и дрейфу характеристик прибора.

Сигнал на выходе датчика имеет амплитуду 5В и представляет собой последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2. Измерение давления производится, как обычно, посредством измерения частоты следования выходных импульсов либо интервала времени (периода) между этими импульсами. В последнем случае измерение сводится к подсчету числа импульсов, поступивших в счетчик от высокочастотного опорного генератора за один или несколько периодов измеряемой частоты. При этом погрешность счета составляет 1 импульс. Если в счетчике оказываются записанными N импульсов опорной частоты, то разрешающая способность равна $1/N$.

По отношению к входному параметру (давлению), как нетрудно показать, разрешение датчика определяется из соотношения

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{(T_0 - T_p) \cdot f_c \cdot N_t}, \quad (2)$$

где T_0 и T_p – периоды измеряемой частоты, соответственно, при нулевом давлении и давлении P , f_c – частота опорного генератора, N_t – число периодов измеряемой частоты, в течение которых происходит накопление в счетчике.

Если $f_0 = 4500$ Гц, $T_0 = 222,2 \cdot 10^{-6}$ с, а при давлении $1,4$ кг/см², $f_0 = 5500$ Гц, $T_0 = 181,6 \cdot 10^{-6}$ с, $f_c = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Гц, $N = 64$ периода, то из (2) $\frac{1}{N} = \frac{1}{38784}$ или составляет 0,0026 % от максимального значения.

Информация от частотного датчика может быть введена в цифровой вычислитель, выполняющий линеаризацию характеристики «давление – двоичный код». Вычислитель может формировать также сигналы для вывода информации на цифровые индикаторы.

Наряду с функциями линеаризации и управления индикаторами вычислитель может обеспечивать и коррекцию выходных данных в соответствии с вариациями температуры и других воздействий. Точность и стабильность автогенераторного датчика существенным образом определяются добротностью резонансной системы. Добротность Q определяется

по формуле
$$Q = \frac{f_n}{f_2 - f_1}.$$

Величина добротности вибрирующего цилиндра, используемого в датчике давления, превышает 5000, то есть ширина резонансного промежутка $f_2 - f_1$ составляет на частоте 5 кГц всего 1 Гц. Колебательная система, таким образом, обладает малым демпфированием, а это, как известно, предопределяет высокую стабильность частоты генерации.

Явление же ползучести материала возникает вследствие одновременного действия трех факторов – механических напряжений, температуры и времени. Максимальная рабочая температура рассматриваемого датчика ограничена 130 °С, а максимальные рабочие напряжения составляют менее 6 % от предела текучести. В этих условиях влияние ползучести оказывается пренебрежи-

тельно малым. Можно утверждать, что суммарная погрешность датчика от действия статического давления составляет менее 10^{-4} % от максимально измеряемой величины.

Долговременная стабильность является важной характеристикой измерительного устройства, поскольку определяет требуемую частоту тарирования датчика. Экспериментально установлено, что для рассматриваемого прибора годовая нестабильность частоты составляет $\pm 0,0060$ % от максимального значения. Эта величина весьма невелика, тем не менее можно указать причины, порождающие медленный уход характеристик. Наиболее существенным источником дрейфа является пористость свариваемых электронным пучком швов, приводящая к изменениям давления в герметизированном объеме между внутренним и внешним цилиндрами (давление около 10^{-5} мм.рт.ст.). Скорость утечки, как показывают эксперименты, составляет около $1,45 \cdot 10^{-12}$ мм.рт.ст. · л/с. Следует отметить, что примерно с такой скоростью происходит дегазация стали (выделение газа из стенок в герметический объем). Хотя еще нельзя утверждать окончательно, но, по-видимому, дегазация стенок и пористость сварных швов являются наиболее важными источниками долговременной нестабильности прибора.

Как уже указывалось выше, зависимость между выходной частотой датчика и давлением на его входе носит нелинейный характер и с достаточной степенью точности аппроксимируется уравнением третьей степени (1). В ходе исследований было установлено, что введение в (1) членов четвертого и более высоких порядков повышает точность аппроксимации чрезвычайно незначительно. Коэффициенты A , B и C в (1) могут быть найдены путем измерений частоты f_p при трех значениях давления и последующего решения системы из трех уравнений. Однако, точность определения коэффициентов при этом недостаточна. Лучшие результаты достигаются при калибровке в большем числе точек (обычно, достаточно 10 точек). Коэффициенты A , B и C находятся по результатам калибровки стандартными методами. Эта процедура позволяет надежно оценить и нелинейность характеристики датчика. При изменении давления от 0 до $1,4$ кг/см² нелинейность разработанного прибора лежит в пределах $\pm 0,0080$ %.

Калибровка высокоточного датчика представляет достаточно серьезную проблему, так как трудно определить, имеет ли эталонное устройство более высокую точность, чем проверяемый датчик. Вариация показаний датчика, связанная с изменением плотности газа, может быть всегда учтена в процессе калибровки при измерениях на газе требуемого состава.

Температура окружающей среды изменяет как упругие постоянные вибрирующего цилиндра, так и плотность контактирующего с ним газа. Частота колебаний цилиндра пропорциональна квадратному корню из отношения эффективной упругой константы к плотности. Таким образом, температурные нестабильности упругости и плотности дают вклад в температурную нестабильность частоты с противоположными знаками и частично взаимно ком-

пенсироваться. Однако, полная компенсация не достигается.

Температурный дрейф Δ описывается выражением

$$\Delta = \pm[0,000232P + 0,00035] \times \frac{5}{3}, \% / ^\circ\text{C}.$$

Снижение температурного дрейфа частоты достигается путем коррекции показаний вычислителя по температуре. Компенсация такого рода позволяет снизить погрешность до $\pm 0,005$ % от текущего значения, что соответствует точности поддержания температуры $\pm 0,6$ °С. Датчик может быть также выполнен с системой термостатирования, для чего внутри стержневого элемента размещается нагревательная обмотка. Схема регулирования обеспечивает стабилизацию температуры внутри цилиндра путем изменения тепловой мощности, рассеиваемой нагревателем. Обычно, рабочая температура термостата выбирается равной 78 °С, что снимает проблемы, связанные с конденсацией газа. Для термостатированного датчика на давление 1,4 кг/см² абсолютная погрешность Δ_a описывается выражением

$$\Delta_a = \pm[0,0000465P + 0,00014] \%$$

При давлении 1,4 кг/см² эта погрешность составляет $\pm 0,001$ %. Как уже указывалось выше, вибрирующий цилиндр колеблется в симметричной моде, характеризующейся наличием 8 узловых точек в каждом сечении. Вследствие этой особенности эффекты от поперечных вибраций обмоток возбуждения и съема сигнала взаимно компенсируются. Конструкция в целом обладает значительной жесткостью и свободна от поперечных резонансов вплоть до частоты 2 кГц. Резонансы конструкции на частотах выше 2 кГц связаны с консольным изгибом элементов, присоединенных к основанию. Ошибки в измерениях, возникающие при боковых вибрациях, носят случайный характер, и при больших временах усреднения показаний оказываются невелики. Осевые вибрации на работу датчика влияния не оказывают.

Предположим, что рассматриваемый датчик предназначен для работы в диапазоне входных давлений $0 \pm 1,4$ кг/см², термостатирован, а вычислительное устройство обеспечивает идеальную линеаризацию рабочей характеристики прибора. Пусть частота эталонного генератора равна 15 МГц, а цикл накопления импульсов эталонной частоты в счетчике длится 64 периода частоты датчика. Тогда отдельные факторы будут давать вклад в суммарную погрешность прибора со следующими весами:

- | | |
|--------------------------------|----------------|
| 1. Демпфирование | $\pm 0,0018$ % |
| 2. Калибровка | $\pm 0,0073$ % |
| 3. Линейность | $\pm 0,008$ % |
| 4. Повторяемость | $\pm 0,0001$ % |
| 5. Разрешение по давлению | $\pm 0,0026$ % |
| 6. Долговременная стабильность | $\pm 0,006$ % |
| 7. Окружающая температура | $\pm 0,001$ % |

Среднеквадратичная суммарная ошибка в процентах при давлении 1, 4 кг/см², таким образом, составляет $\pm 0,0128$ %.

Теперь остановимся немного на теории этого датчика.

Собственная частота столба газа, заключенного в трубе с жесткими стенками и представляющего собой резонатор с равномерно распределенной по длине $L_{ст}$ массой и жесткостью, определяется скоростью распространения возмущения, то есть скоростью звука в среде, заполняющей резонатор, и длиной последнего.

Скорость звука в газе определяется соотношением

$$c = \sqrt{\frac{R \cdot \Theta \cdot \gamma}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}}, \quad (3)$$

где R – универсальная газовая постоянная, равная 8,314 Дж/(моль · К); Θ – абсолютная температур, К; $\gamma = 1,4$ – для воздуха – отношение теплоемкостей при $P = \text{const}$ и $V = \text{const}$; M – молекулярная масса газа, кг/моль; P – давление газа, Па ($P = 20000$ Па); ρ – плотность газа, кг/м³.

Акустический резонанс наступает при такой частоте, при которой звуковая волна за период T_0 успевает пройти длину $L_{ст}$ в одном направлении, отразиться от противоположной стенки и пройти $L_{ст}$ в обратном направлении. При распространении волны со скоростью на это требуется время

$$T_0 = \frac{2 \cdot L_{ст}}{c}.$$

Отсюда, собственная частота такого резонатора

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{c}{2 \cdot L_{ст}} = \frac{1}{2 \cdot L_{ст}} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot \Theta \cdot \gamma}{M}} = \frac{1}{2 \cdot L_{ст}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{S}}, \quad (4)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня (балки), м².

Определим параметрическую надежность резонатора простым графическим методом (ПГМ), изложенным выше. Имеем исходные данные для расчета, взятые из ТУ, на высотомер ВБК:

– материал:	Ст. 45 НХТ среднеуглеродистая;
– длина цилиндра:	$L = 0,05 \pm 0,00016$ м;
– диаметр:	$d = 0,018 \pm 0,000018$ м;
– толщина:	$H = 0,00006 \pm 0,0000006$ м;
– давление воздушного потока из ПВД:	$P = 120125 \pm \frac{115425}{5175}$ Па.

Характеристики материала:

предел прочности:	$\sigma_B = 500$ МПа = $5 \cdot 10^8$ Па;
предел текучести:	$\sigma_T = 480$ МПа = $4,8 \cdot 10^8$ Па;
плотность:	$\rho = 7,85 \cdot 10^3$ кг/м ³ ;
модуль упругости (Юнга):	$E = 1,9 \cdot 10^{11}$ Па;
коэффициент Пуассона:	$\mu = 0,3$;

декремент затухания колебаний:

$$\delta = 0,02;$$

диапазон:

$$T_{\text{коп}} = 100-500 \text{ мкс.}$$

Кроме того, согласно ТЗ среднее время наработки на неисправность системы (всего высотомера ВБК), обнаруженную в полете и на земле, должно быть не менее 2740 ч., то есть $T_n \geq 2740$ ч. Восстанавливаемые кратковременные сбои 1-й секунды при оценке величины наработки на отказ T не учитываются. Подтверждение заданных уровней надежности ($\gamma = 2$) осуществляется:

- расчетом с использованием показателей надежности серийных изделий-аналогов на этапе проектирования;
- проведением натуральных и ускоренных испытаний на надежность опытных образцов;
- по результатам первых трех лет эксплуатации серийных образцов.

Результаты расчета параметрической надежности с использованием приведены далее.

Исходя из проведенных расчетов, можно сделать некоторые выводы:

1. увеличение декремента колебаний ($\delta \uparrow$) способствует увеличению надежности по прочности ($H_{\text{пр}} \uparrow$), надежности по жесткости ($H_{\text{жест}} \uparrow$) и надежности по устойчивости ($H_{\text{уст}} \uparrow$) в среднем в 1,7 раза;
2. увеличение нагрузки вызывает уменьшение надежности по прочности, жесткости и устойчивости в среднем в 1,2 раза;
3. параметрическая надежность напрямую зависит от материала конструкции (плотности, коэффициента Пуассона, модуля Юнга и т.д.).

Далее сравниваем расчетные показатели надежности (T_p и $N_{\text{адр}}$) или T_p и H_p , соответственно, с показателями надежности, взятыми из нормативных документов: ТЗ или ТУ ($H_{\text{н0}}$).

$$\left. \begin{array}{l} T_p = 2740 \text{ ч и } T_{\text{н0}} = 2740 \text{ ч} \\ H_p = 0,9956 \text{ и } H_{\text{н0}} = 0,9956 \end{array} \right\} \text{ то есть } \begin{array}{l} T_p = T_{\text{н0}} \\ H_p = H_{\text{н0}} \end{array}$$

Значит, данный ЧЭ (цилиндрический резонатор) можно использовать при эксплуатации.

Если $T_p < T_{\text{н0}}$ и $H_p < H_{\text{н0}}$, то требует пересмотреть данные в нормативно-технической документации или геометрические характеристики прибора (длину цилиндра L , его толщину H , диаметр D и т.д.), или выбрать другой материал а, именно, изменить физические характеристики (плотность, модуль Юнга, декремент колебаний и т.д.). Таким образом, приходится решать для каждого параметра задачу перебора, что может занять много времени. Устранить этот недостаток позволяет метод граничных линейных моделей, который предполагает комплексное решение данной задачи.

Список литературы: 1. Тарасов Ю.Л., Минорский Э.И., Дуплянкин В.М. Надежность элементов конст-

рукций летательных аппаратов. Методология обеспечения. – М.: Машиностроение, 1992. – 223 с. 2. Сухоробрий В.Г. Инженерные методы проектной оценки вероятности разрушения авиационных конструкций // Авиационно-космическая техника и технология. Труды ХАИ. – Харьков: 1998. – С. 75-84.

Поступила в редколлегию 05.03.2005

УДК 624.04-50

М.К.РЕЗНИЧЕНКО, канд.техн.наук., Українська інженерно-педагогічна академія, Харків; **О.В.ЩЕПКИН**, НТУ «ХПІ»

ДО ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ КОЛІС РУХОМОГО СКЛАДУ ЗАЛІЗНИЦЬ ПРИ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Виконано систематичне чисельне дослідження залізничного колеса при його зборці з використанням індукційних нагрівальних пристроїв при технологічному нагріванні, що приводило до виникнення в колесі напружень і деформацій під час зборки.

The systematic numerical research of railroad car wheel were made using technological heating by induction-heating devices which allowed the establishment of the laws of the stress-strain state of the wheel set elements, during its thermal assembly.

Актуальність теми. На даний час у залізничному транспорті спостерігається ріст швидкостей перевезень, що вимагає підвищення показників надійності й безпеки рухливого складу. Ці показники істотно залежать від конструкції колісних пар [1-3], зокрема, від якості з'єднань із натягом і технології їхнього складання. Для формування таких з'єднань, як правило, використовується тепловий спосіб із застосуванням індукційно-нагрівальних пристроїв [4].

Методи розрахунку теплової посадки з урахуванням геометрії конструкції, властивостей матеріалу недостатньо вивчені, тому не завжди можливий обґрунтований вибір технологічних режимів теплового складання й гарантувати якість з'єднання при подальшій експлуатації виробів. Тому розробка нових, науково обґрунтованих методів розрахунку теплових полів, контактних напружень на поверхнях з'єднуваних деталей і методів аналізу конструктивної міцності таких виробів в експлуатаційних режимах є актуальною в науковому та практичному відношеннях. Технологічні процеси складання можуть бути двох типів:

1. на вісь установлюють нагрітий колісний центр і після їх скріплення в з'єднання та остигання встановлюють на диск нагрітий бандаж;

2. на колісний центр установлюють нагрітий бандаж і після їх остигання зібране колесо саджають на вісь.

У зв'язку з цим становить інтерес така постановка задачі: оцінка впливу

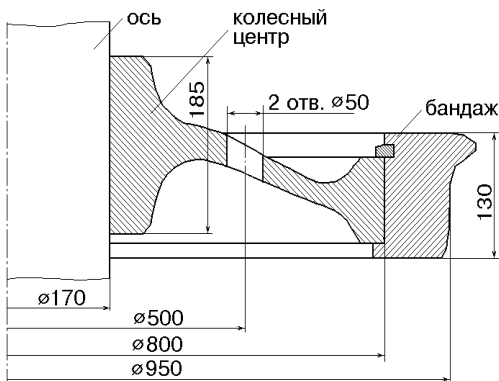


Рисунок 1 – Колесо маневрового тепловоза

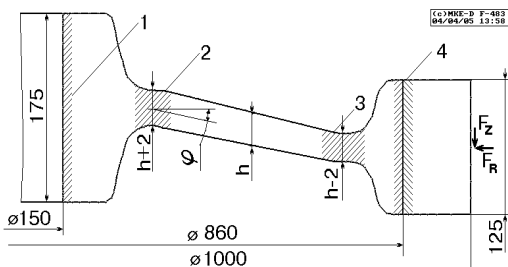


Рисунок 2 – Математична модель. 1-4 – зони максимальних напружень у конструкції: 1 – зона контакту осі й колісного центра; 2 – перехід маточини в дискову частину колісного центра; 3 – перехід дискової частини в бандаж; 4 – зона контакту колісного центра й бандажа; F_R , F_Z – зосереджені сили, що прикладаються при визначенні піддатливості конструкції

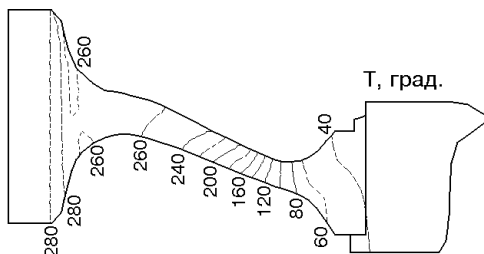


Рисунок 3 – Прототип температурного поля

на напружено-деформований стан характерної для машинобудування деталі, що включає маточину, дискову частину та бандаж, конструктивних факторів (конфігурація деталей, взаємного положення складових її елементів і ін.) і технологічних параметрів (величини натягів у з'єднаннях; термічного впливу при складальних процесах). Як прототип математичної моделі було узятє колесо маневрового тепловоза (рис. 1) [5].

Метою цієї роботи є дослідження напружено-деформованого стану математичної моделі типу складеного залізничного колеса, що збирається з використанням нагрівання двома різними технологічними процесами, для встановлення областей застосування таких технологій у залежності від розмірних співвідношень конструкції.

Модель (рис. 2) відрізняється від реального колеса перемінним кутом нахилу дискової частини φ (від 0 до 30 град.) та її товщиною h (від 0,02 до 0,05 м). При цьому дискова частина деталі (колісний центр) має лінійно-перемінну товщину: у маточини вона дорівнює $h + 0,002$ м, у зоні переходу в бандаж – $h - 0,002$ м. Відзначимо, що в реальній конструкції $\varphi = 21$ град., $h = 0,031$ м.

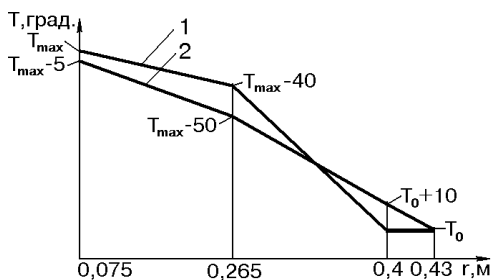


Рисунок 4 – Математична модель температурного поля: 1 – поле в момент закінчення нагрівання (використовується для визначення максимальних температур і напружень); 2 – поле в момент складання конструкції – через 1 хв. після закінчення нагрівання (використовується для визначення розширення маточини)

Як показали дослідження, максимальні напруження в конструкції виникають в одній з чотирьох зон (див. рис. 2). На графіках ці зони позначаються цифрами 1–4 відповідно. Усі розрахунки виконані в припущенні пружного деформування конструкції, коефіцієнт температурного розширення α не залежить від температури.

Характеристики матеріалу: модуль пружності $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; коефіцієнт температурного розширення $\alpha = 0,1 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$; температура навколишнього середовища $T_0 = 20$ град.

Для розрахунку напружено-деформованого стану й розв'язання температурної задачі був застосований МСЕ [6], який дозволяє врахувати складну конфігурацію досліджуваного об'єкта. Досліджувана конструкція апроксимується торіодальними скінченими елементами трикутного поперечного перерізу з трьома вузлами, а також використовуються одномірні стикувальні елементи для моделювання стану сила-зсув-теплопередача на поверхнях деталей конструкції [7]. Для врахування неосесиметричних навантажень застосовується розкладання в ряд Фур'є величин, перемінних в окружному напрямку. На рис. 5 представлена розбивка моделі на кінцеві елементи ($h = 0,03$ м, $\varphi = 0$).

На рис. 6 представлені максимальні еквівалентні напруження σ_e в колісному центрі при нагріванні маточини під посадку на вісь у момент закінчення нагрівання, які обумовлені нерівномірним температурним полем при посадці на вісь колісний центра без бандажа. Напруження показані для зон 2 і 3 (див. рис. 2), у зонах 1,4 вони близькі до нуля. На рис. 7 наведені значення максимальної температури у момент закінчення нагрівання, необхідної для складання моделі в залежності від форми її колісного центра.

На рис. 8 представлені максимальні еквівалентні напруження σ_e в зібраній моделі при нагріванні маточини під посадку на вісь у момент закінчення

Величина натягу у з'єднанні диск-вісь $\delta_1 = 0,1$ мм; натяг δ_2 у з'єднанні бандаж-колісний центр складає 0,2 або 0,4 мм, також розглядається суцільнокатана конструкція. Усі натяги дані як різниця радіусів.

Як прототип температурного поля було прийняте експериментально отримане температурне поле при нагріванні маточини колеса тепловоза ТГМ-40 під посадку на вісь [5] (рис. 3). На рис. 4 представлені температурні поля, використовувані в розрахунках.

нагрівання, обумовлені нерівномірним температурним полем та з'єднанням частин колеса з натягом – складання відповідно до другого типу технології. Напруження показані для зон 2 і 3 (див. рис. 2), рівень напружень у зонах 1,4 істотно нижче. У графіках суцільнокатана конструкція позначається індексом «Ц», з'єднання з натягом 0,2 мм – індексом «Н», із натягом 0,4 мм – «Н2».

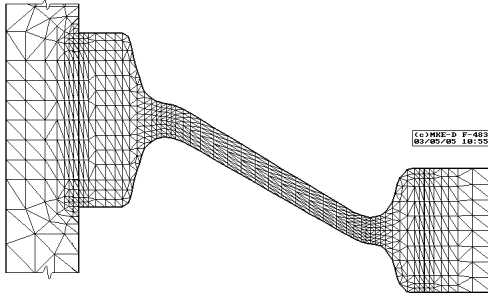


Рисунок 5 – Розбивка на СЕ моделі, з'єднаної з віссю

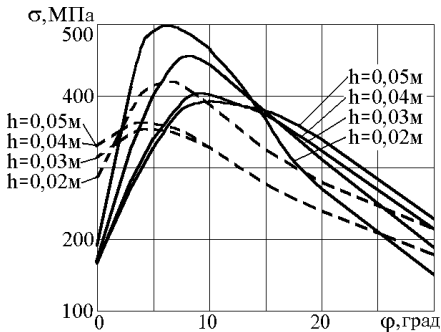


Рисунок 6 – Максимальні напруження в дисковій частині моделі при нагріванні маточини під посадку на вісь у момент закінчення нагрівання: суцільна лінія – зона 2, пунктир – зона 3

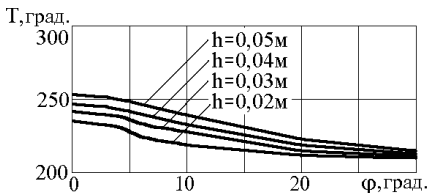


Рисунок 7 – Максимальна температура в колісному центрі без бандажа, необхідна для складання моделі при нагріванні маточини під посадку на вісь

На рис. 9 приведені значення максимальної температури, необхідної для складання моделі у момент закінчення нагрівання в залежності від форми колісного центра зібраної моделі для посадки на вісь.

На рис. 10 представлені графіки максимальних еквівалентних напружень σ_e в зібраній моделі, посадженої на вісь у залежності від форми її дискової частини (товщини h , кута нахилу ϕ) та значень натягів. Величина натягу у з'єднанні диск-вісь є $\delta_1 = 0,1$ мм; натяг δ_2 у з'єднанні бандаж-диск складає 0,2 або 0,4 мм, також розглядається суцільнокатана конструкція. Напруження дані для зон 1 і 2 (див. рис. 2), рівень напружень у зонах 3,4 істотно нижчий.

До числа важливих експлуатаційних характеристик конструкції відноситься також її піддатливість (жорсткість) під дією осьової та радіальної зосередженої сили (наприклад, сили взаємодії колеса й рейки для залізничних коліс). На рис. 11 показане радіальне U і осьове V переміщення поверхні кочення колеса під дією радіальної сили $F_R = 100$ кН у залежності від розмірних співвідношень конструкції. На мал. 12 показані переміщення U, V від дії осьової сили $F_Z = 10$ кН.

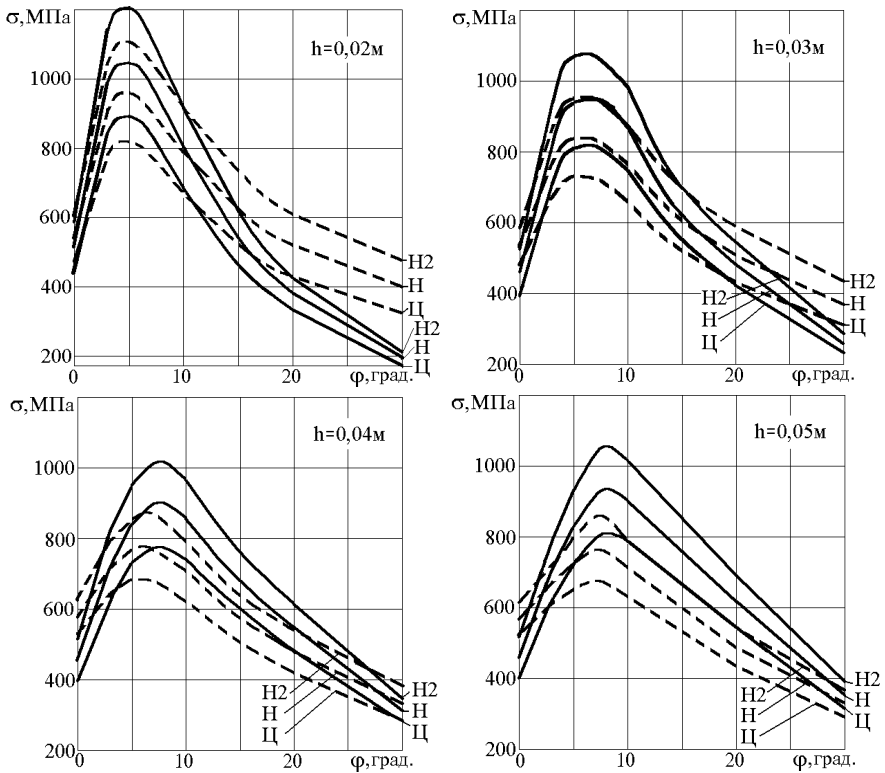


Рисунок 8 – Максимальні напруження в зібраній моделі при нагріванні маточини під посадку на вісь у момент закінчення нагрівання: суцільна лінія – зона 2, пунктир – зона 3

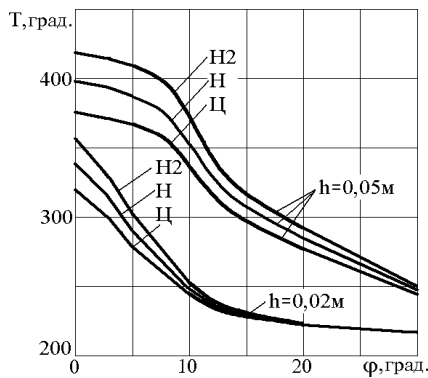


Рисунок 9 – Максимальна температура в моделі, необхідна для складання моделі при нагріванні маточини зібраної моделі під посадку на вісь

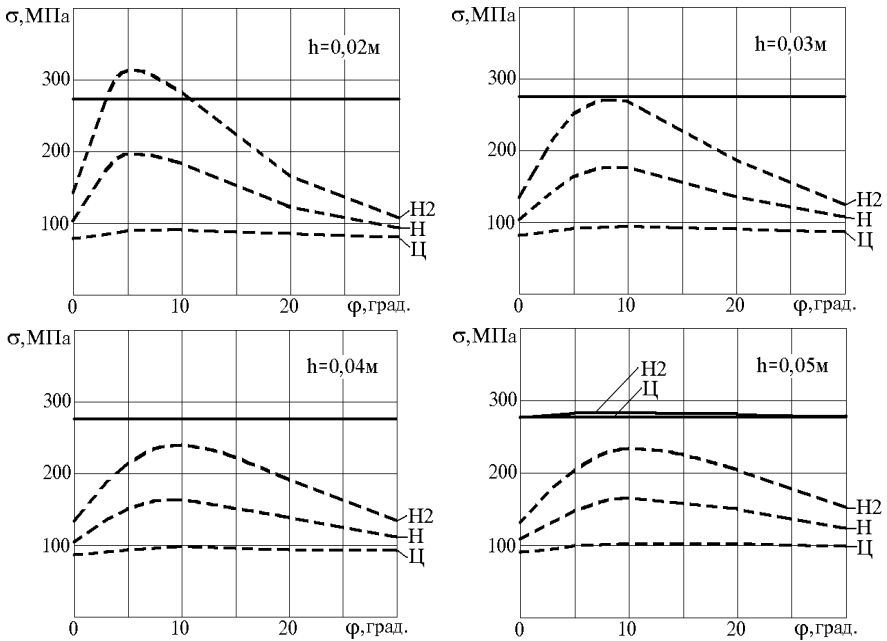


Рисунок 10 – Максимальні еквівалентні напруження σ_e в зібраній моделі, посадженій на вісь: суцільна лінія – зона 1, пунктир – зона 2

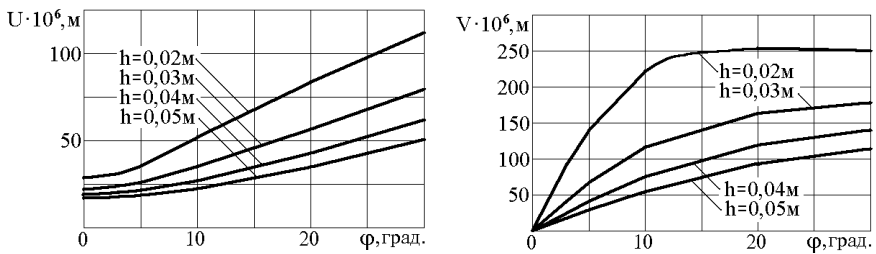


Рисунок 11 – Переміщення поверхні кочення коліс під дією радіальної сили $F_R = 100$ кН у залежності від розмірних співвідношень конструкції

Проведене дослідження показало:

1. При нагріванні під посадку дискової частини без бандажу на вісь товщина й нахил диска змінюють необхідну максимальну температуру нагрівання на 45 град, найбільше нагрівання вимагає прямий диск максимальної товщини (див. рис. 7). Максимальні напруження найбільші для деталей з кутом нахилу від 3 до 15 град (рис. 6).

2. При нагріванні маточини зібраного колеса під посадку на вісь максимальна температура нагрівання спостерігається в деталі з прямим диском

($\varphi = 0$). Товщина дискової частини й величина натягу в з'єднанні бандаж-колісний центр істотно впливають на температуру, необхідну для складання, лише при малих кутах нахилу дискової частини (0-10 град., див. рис. 9). При кутах нахилу дискової частини більше 30 град. величина натягу майже не впливає на температуру складання, збільшення товщини дискової частини з 0,02 до 0,05 дає збільшення температури на 70 град. Максимальні напруження в конструкції можуть вважатися прийнятними лише при кутах нахилу більше 20 град. чи в конструкції із прямим диском (див. рис. 8).

3. У зібраному колесі, посадженому на вісь, максимальні напруження, як правило, виникають у зоні з'єднання колесо-вісь (див. рис. 10), причому рівень напружень у цій зоні практично не залежить від форми дискової частини деталі. Лише при кутах нахилу 3-10 град. та товщині $h = 0,02$ м рівень напружень у зоні переходу дискової частини в маточину трохи вищий, ніж у зоні з'єднання колесо-вісь.

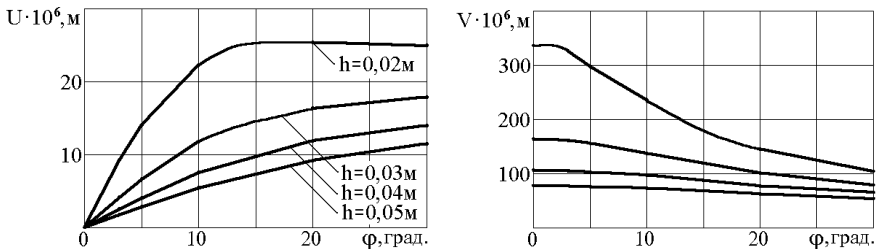


Рисунок 12 – Переміщення поверхні кочення коліс під дією осевої сили $F_z = 10$ кН у залежності від розмірних співвідношень конструкції

Висновки. Виконано дослідження напружено-деформованого стану характерної машинобудівної деталі типу «обандажений диск, посажений на вісь», що включає маточину, дискову частину, бандаж із використанням математичної моделі, заснованої на МСЕ. Досліджувався складальний процес деталі по двох технологіях. Показано вплив на НДС деталі конструктивних факторів (товщина дискової частини, кут її нахилу) та технологічних (величина натягу дискова частина-бандаж у зіставленні з монолітною конструкцією, максимальна температура нагрівання). У моделі були встановлені зони з високими напруженнями. Отримані співвідношення дозволяють підбирати геометрію конструкції у залежності від області її застосування й очікуваних навантажень.

Список літератури: 1. Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар. – Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1965. – 227 с. 2. І.Л.Оборський Нова конструкція і технологія з'єднання бандаж-центр колеса електровагона // Залізничний транспорт України. – 2003. – № 5. – С. 9-10. 3. Вагони / Л.А.Шадр, И.И.Челноков, Л.Н.Николевский и др. – М.: Транспорт, 1980. – 439 с. 4. А.с. СССР № 1682113. Способ сборки соединений с натягом / Андреев А.Г., Арпентьев Б.М., Манохин В.А., Пуйденко И.В. Опубл. 07.10.1991. Бюлл. № 37. 5. Андреев А.Г., Щепкин А.В. О рации-

нальном технологическом нагреве бандажного колеса при сборке колесной пары тепловоза // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сб. научных трудов ХГПУ. – Вып. 7. Ч. 1. – 1999. – С. 240-243. 6. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – Москва, Мир, 1975. – 541 с. 7. *Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н.* и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1989. – 232 с.

Надійшла до редколегії 25.04.2005

УДК 531:629

С.Ю. ПОГОРЕЛОВ, канд. техн. наук; ***К.Ю. СЧАСТЛИВЕЦ***

УТОЧНЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРНОГО ГИРОСКОПА НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

У запропонованій роботі досліджено питання точності моделювання теплових процесів у кільцевому лазерному гіроскопі. Проведено експеримент з визначення теплових полів у реальному гіроскопі. Створено розрахункову модель, що відповідає умовам експерименту. Експериментальні та розрахункові температурні поля були порівняні між собою. Як наслідок, параметри розрахункової моделі були уточнені, а відповідність розрахункового температурного поля реальному полю температур стала більш повною.

In the proposed paper the analyze model accuracy of ring laser gyro has been researched. The temperature fields of real laser gyro have been determinate during the experiment. The analyze model of laser gyro corresponding experiment conditions was create. Difference between experimental and modeling results was analyzed. As result, the analyze model parameters of laser gyro has been adjust and adequacy between experimental and modeling heat processes became more full.

Описание проблемы. Для исследований, связанных с определением влияния тепловых воздействий на точностные характеристики кольцевого лазерного гироскопа (КЛГ), была создана его расчетная модель. Расчетная модель включает в себя 3-х мерную твердотельную модель КЛГ и конфигурацию источников теплового поля. Ценность модели определяется точностью, с которой она воспроизводит тепловые процессы в реальном объекте, и которая может быть оценена, в частности, на основе данных эксперимента. Источником погрешности расчетной модели являлось то, что не было точно известно, как распределена мощность между тепловыми источниками, а также, какая доля их мощности идет на нагрев КЛГ. Целью исследования было: постановка эксперимента по получению поля температур реального КЛГ, решение задачи теплопроводности на основе расчетной модели КЛГ, адаптированной под условия эксперимента, сравнение полученных расчетных и экспериментальных температурных полей и внесение уточнений в расчетную модель с целью достижения более точного соответствия данных эксперимента и расчета.

Описание объекта исследования. Основной деталью КЛГ является резонатор, который конструктивно представляет собой 3-х мерный объект сложной формы. Внутри резонатора выполнена четырехугольная полая трубка с ответвлениями. Два ответвления трубки заканчиваются анодами, а два других ответвления выходят во внутреннюю полость цилиндрической формы, где расположен катод. Цилиндрическая полость катода и трубка заполнена гелий-неоновой смесью под низким давлением. Во время работы КЛГ между анодами и катодом возникают два симметричных газовых разряда, являющимися источниками теплового поля. Тепловыделение также проходит и в полости катода. Кроме данного источника, на поверхности резонатора смонтированы электронные компоненты – резисторы, выделяемая которыми тепловая энергия частично шла на нагрев резонатора, а частично рассеивалась в пространство.

Экспериментальная часть. Для получения термографических данных был использован термограф с диафрагмой 38°, объективом диаметром 50 мм и фокусным расстоянием 50 мм, охлаждаемый жидким азотом. Размерность матрицы кадра составила 128x128 точек. Тарировка термографа производилась на основе контрольных замеров известных температур.

Программа эксперимента состояла в получении нескольких серии термографических снимков работающего КЛГ, начиная с момента включения из холодного состояния (температура КЛГ равна температуре окружающей среды). Каждая серия фиксировала динамический температурный процесс КЛГ, находящимся в определенном ракурсе: вид сверху, вид спереди, вид сбоку, вид снизу и промежуточный ракурс между видом спереди и видом сбоку. Периоды между снимками в серии были одинаковы, а от серии к серии изменялись 0,5 до 10 секунд, в зависимости от задачи серии.

Во время эксперимента КЛГ находился на картонной подложке в условиях естественного конвекционного теплообмена с окружающей средой, температура которой составляла примерно 18,5°C. Кадр с температурным полем для КЛГ в промежуточном ракурсе представлен на рис. 1.

Расчетная модель. В общем виде уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{c_v \rho},$$

где: a – изохорическая теплопроводность, $a = \frac{\lambda}{c_v \rho}$, q – удельная мощность внутренних источников, c_v – теплоемкость, ρ – плотность, λ – теплопроводность.

Для соответствия расчетной модели условиям эксперимента были приняты следующие допущения. Рассматривается нестационарный тепловой

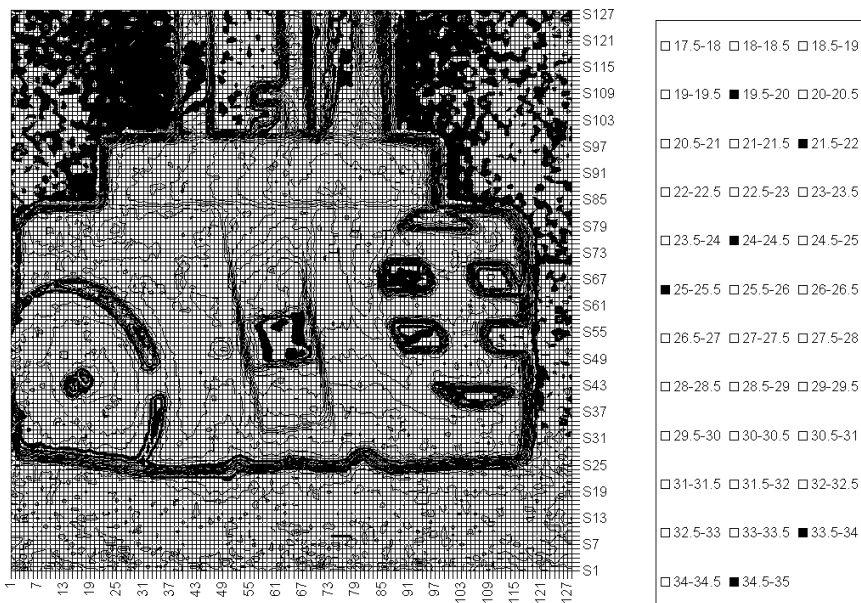


Рисунок 1 – Термография. Промежуточный ракурс. 2200 секунда

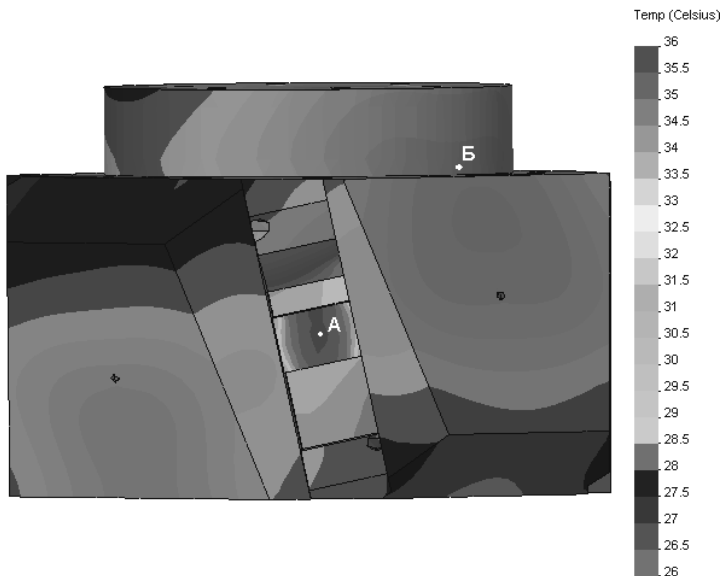


Рисунок 2 – Расчет. Промежуточный ракурс. 2200 секунда

процесс. Теплообмен с окружающей средой происходил двумя способами – естественной конвекцией с боковых и верхних граней резонатора и путем теплопроводности через картонную подложку на нижней грани.

Для моделирования теплообмена через теплопроводность для грани резонатора Γ_i справедливо следующее граничное условие:

$$q_t|_{\Gamma_i} = \frac{\lambda}{\delta}(t_1 - t_2),$$

где: q_t – удельная мощность теплового потока через подложку, t_2 принято равным температуре окружающей среды, а значение на внутренней границе подложки было взято на основании данных эксперимента.

Для моделирования теплообмена через естественную конвекцию было применено следующее граничное условие (формула Ньютона):

$$q_c|_{\Gamma_i} = \alpha_k(t_b - t_s),$$

где: q_c – удельная мощность теплового потока, α_k – коэффициент теплоотдачи, t_b – температура теплоносителя, t_s – температура грани.

Коэффициент теплоотдачи отражает характер движения окружающей среды и определяется для вертикальных граней и горизонтальных граней, обращенных нагретой стороной вверх *законом 1/4 степени*, соответственно:

$$\alpha_k = A_2 \left(\frac{t_s - t_b}{h} \right)^{1/4}, \quad \alpha_k = 1.3 A_2 \left(\frac{t_s - t_b}{L} \right)^{1/4}$$

где h – высота вертикальной поверхности, L – наименьшая сторона горизонтальной поверхности, A_2 – коэффициент, характеризующий физические параметры среды, значения которого табулированы и находятся в диапазоне $A_2 = 1,40 - 1,245$ при $0,5(t_s + t_b) = 10 - 150$ °С.

На основании чертежа резонатора была создана 3-мерная твердотельная модель резонатора КЛГ. Для решения поставленной задачи методом МКЭ была создана конечноэлементная модель ЛГ, состоящая из 177590 четырехугольных тетраэдров.

Материал модели – СО115М «астроситалл» со следующими характеристиками: теплопроводность $KX = 1,18$ W/(m · K), теплоемкость $c_v = 20$ J/(kg · K), плотность $\rho = 2457$ kg/m³. Теплопроводность картонной подложки $\lambda = 0,063$ J/(m² · °C · sec/m)

Для достижения адекватности результатов моделирования и данных эксперимента варьировались следующие параметры расчетной модели: распределение мощности между катодом и газовым разрядом, мощность резисторов, идущая на нагрев модели. Первоначальные значения варьируемых параметров модели были приняты следующие: катод 1,0 Вт, газовый разряд 1,5 Вт, тепловыделение резисторов составляет 0,2 Вт каждый.

Сравнение температурных полей. Температурные поля, полученные в результате эксперимента и моделирования, сравнивались по значениям тем-

ператур в контрольных точках во время динамического температурного процесса (рис. 3). Контрольные точки сравнения можно сгруппировать в два типа: точки, где преобладающим является влияние одного теплового источника (точка А), промежуточные точки между источниками (точка Б).

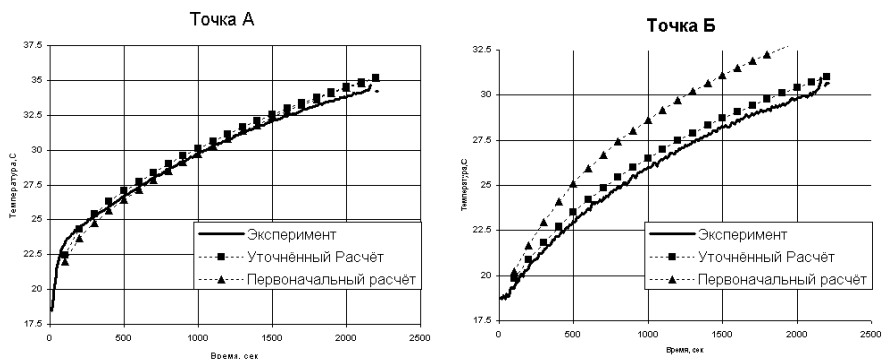


Рисунок 3 – Сравнение температурного тренда в контролируемых точках

Из приведенного рисунка видно, что в первоначальном варианте модели точка Б имела сильный перегрев. Путем изменения мощности тепловыделения резисторов и перераспределения мощности между катодом и газовым разрядом, данное несоответствие было устранено.

Заключение. В результате проведенного анализа была уточнены следующие параметры расчетной модели:

Мощность тепловыделения	Первоначальное значение (Вт)	Уточненное значение (Вт)
Резистора	0,2	0,1
Катода	1	0,75
Газового разряда	1,5	1,75

В уточненной расчетной модели погрешность воспроизведения динамических тепловых процессов составила в 25 контролируемых точках на ракурс не более одного градуса, что составило менее 6% от температурного диапазона.

Таким образом, после уточнения параметров расчетной модели на основе данных эксперимента по получению температурного поля резонатора КЛГ, расчетная модель стала адекватно воспроизводить тепловые процессы, происходящие в реальном гироскопе, и может быть использована для изучения влияния тепловых воздействий на точностные характеристики КЛГ.

Список литературы: 1. Джашишов В.Э., Панкратов В.М. Математические модели теплового дрейфа гироскопических датчиков инерциальных систем. – СПб.: ГНЦ РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 2001. – 150 с. 2. Джашишов В.Э., Панкратов В.М. и др. Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий. – СПб.: ГНЦ

РФ – ЦНИИ «Электроприбор», 2005. – 404 с. 3. Мухачев Г.А., Щукин В.К. Термодинамика и теплопередача. – М.: Высш.шк., 1991. – 480 с. 4. Мяченков В.И., Мальцев В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с. 5. Smythsonian Physical Tables. Ninth Revised Edition. – New York, Norwich: Knovel, 2003. – 792 p.

Поступила в редколлегию 25.04.2005

УДК 539.3

Э.А.СИМСОН, докт.техн.наук; **С.А.НАЗАРЕНКО**, канд.техн.наук;
А.Ю.ЗЮЗИН, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ КВАРЦЕВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

У статті пропонуються методи аналізу чутливості та оптимізації скінченоелементних моделей кварцевих резонаторів з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на високі розмірності векторів перемінних стану і проектування. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарата.

Complicated finite-element models of quartz resonators with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis and optimization methods are given in this article. The methods have guiding to orientate on high dimensions of state and design variables. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Кварцевые резонаторы (фильтры, стабилизаторы частоты) являются базовым элементом многих устройств радиоэлектронной, микропроцессорной и измерительной техники. Основными требованиями на стадии проектирования к ним являются: обеспечение заданной резонансной частоты, максимально возможная отстройка от паразитных резонансов, минимальный уровень потерь в пьезоэлементе и системе крепления (максимизация добротности), слабая температурно-частотная зависимость, удовлетворение габаритным, компоновочным, конструктивным ограничениям и т.д. [1,2]. Часть этих требований может быть сформулирована в виде функциональных и геометрических ограничений, другие носят экстремальный характер.

Проектирование кварцевого резонатора связано с выбором геометрической формы пьезоэлемента и электродов. При этом первой задачей, возникающей при проектировании, является определение резонансных частот и форм колебаний. Для расчета спектра разработано несколько теорий, дающих решение для пьезоэлементов простой формы [3]. Изменение геометрической формы в широких пределах, необходимость вычисления функциональных производных делает трудоемким применение аналитических методов и накладывает жесткие требования к эффективности реализации конечноэлементного алгоритма. Большинство колебательных систем в зоне рабочих частот

имеют весьма плотный или кратный спектр, что в рабочем режиме приводит к переходу на нежелательные формы колебаний, как правило, неприемлемые с точки зрения эффективности, динамических и прочностных характеристик.

Число нежелательных резонансов и их близость к рабочей частоте в значительной мере определяют качество резонатора по частотной характеристике. Рассмотрим задачу увеличения полосы частот, свободной от «паразитных» резонансов, за счет оптимизации геометрической формы пьезоэлемента.

Задача оптимизации заключается в отыскании вектора \vec{h} , который принадлежит допустимой области $U: h_i^- \leq h_i \leq h_i^+ \quad i = 1, N$ и обеспечивает максимум функционалу качества $J = |\lambda^n - \lambda^P|$, где λ^P – рабочая частота резонатора, λ^n – ближайшая к ней «паразитная».

Целью проведенных исследований была разработка методики анализа чувствительности и оптимизации сложных конечноэлементных моделей кварцевых резонаторов; ориентированной на большие размерности векторов переменных состояния и проектирования, минимальное число обращений к процедуре прямого расчета. Разработанная методика анализа чувствительности предполагает следующую последовательность вычислительных этапов: КЭ дискретизация задачи анализа; введение вектора сопряженных переменных; введение пространства проектных переменных; вычисление градиентов функционалов. Вычисление градиентов от критерия оптимизации (или критериев в Парето-постановке) и функциональных ограничений включает, во-первых, технику дифференцирования уравнений состояния[4], во-вторых, способ введения проектных переменных и связанные с ним соотношения для производных от конечноэлементных матриц системы.

Наибольшая эффективность описания поведения механических элементов резонансной вибрационной техники, работающих в области высоких частот с плотным или кратным спектром, достигается использованием объемных конечных элементов, позволяющих достаточно точно описывать геометрические особенности конструкции, поля динамических деформаций и напряжений. Рассмотрим дифференцирование матриц жесткости и масс объемного изопараметрического конечного элемента. В соответствии с правилами дифференцирования сложных функций можно записать следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d[K^e]}{dx_{il}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{dB^T}{dx_{il}} DB \det[J] + B^T D \frac{dB}{dx_{il}} \det[J] + B^T DB \frac{d \det[J]}{dx_{il}} \right) d\xi d\eta d\zeta \\ \frac{d[M^e]}{dx_{il}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \rho N \frac{d \det[J]}{dx_{il}} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (1)$$

где [D] содержит упругие модули, пьезоэлектрические и диэлектрические коэффициенты

$$[D] = \begin{bmatrix} C^E & -P \\ -P^T & E^s \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где C^E – матрица модулей упругости, измеренных при постоянной напряженности электрического поля; P – матрица пьезоэлектрических коэффициентов; E^S – матрица коэффициентов диэлектрической проницаемости, измеренных при постоянной механической деформации. Отметим что, матрицы жесткости, пьезоэлектрической и диэлектрической жесткости вычисляются одновременно как «обобщенная» матрица жесткости, при этом в каждом узле элемента считаются неизвестными три перемещения и потенциал электрического поля.

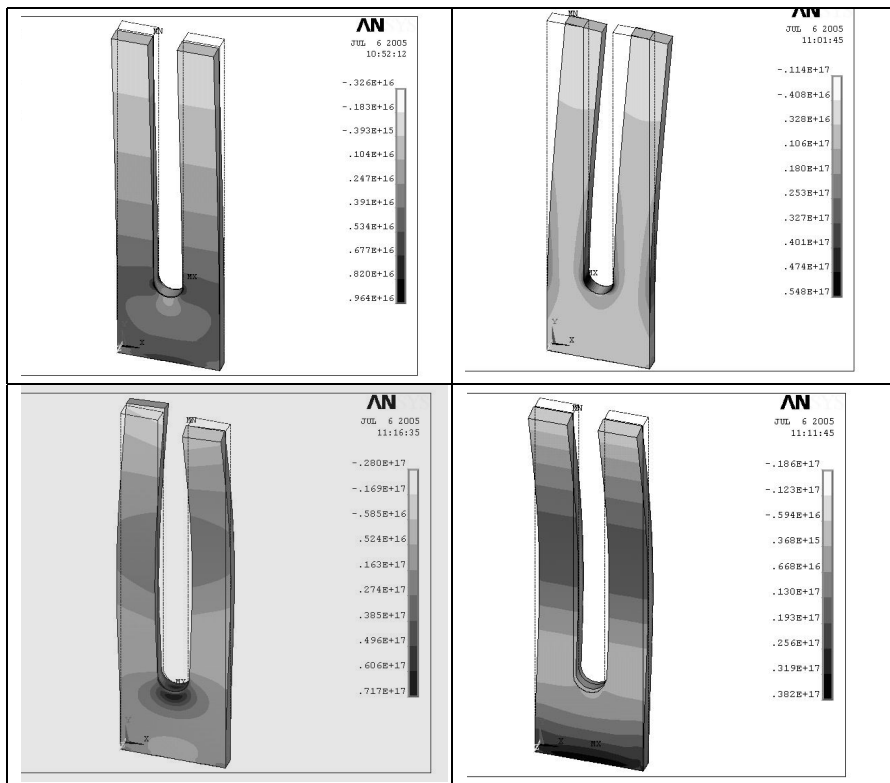
Заметим что вычисление $\frac{dB}{dx_{il}}$ требует вычисления $\frac{dJ^{-1}}{dx_{il}}$, которое может быть осуществлено в соответствии с представлением $\frac{dJ^{-1}}{dx_{il}} = J^{-1} \frac{dJ}{dx_{il}} J^{-1}$, где $\frac{dJ}{dx_{il}}$ – матрица с нулевыми элементами, за исключением i -ого столбца, который имеет вид $\left[\frac{dN_l}{d\xi}, \frac{dN_l}{d\eta}, \frac{dN_l}{d\zeta} \right]^T$.

Производная от определителя матрицы Якоби может быть получена как $\frac{d \det[J]}{dx_{il}} = \det[\bar{J}]$, где $[\bar{J}]$ – матрица, совпадающая с матрицей Якоби, за исключением i -ого столбца.

С целью демонстрации эффективности предлагаемого подхода приведем примеры решенных задач управления спектром колебаний. Распределение полей коэффициентов чувствительностей собственных частот высокочастотного кварцевого резонатора к нормальным перемещениям точек поверхности взаимодействующих конструктивных элементов приведено на рисунке. Показаны соответствующие формы колебаний.

Наименьшей зависимостью частоты от температуры обладают резонаторы АТ-среза, совершающие сдвиговые колебания по толщине. Использование в задачах оптимальной отстройки специализированного конечного элемента с линейной аппроксимацией для перемещений в плоскости элемента, квадратичной для изгибных и тригонометрической – для аппроксимации перемещений по толщине позволил выделить из общего плотного спектра только интересующие изгибно-сдвиговые частоты и формы, которые возбуждались переменным электрическим полем. Ближайшими к рабочей являлись частоты ангармоник (1,1,2) и (1,2,1) а наиболее интенсивными – (1,1,3) и (1,3,1). Функционалы отстройки записывались в дифференцируемой форме, используя предельное свойство степенной нормы $\max \{ J_j = (\lambda_{11j}^{-n} + \lambda_{1j1}^{-n})^{-1/n} - \lambda_{111} \}$. Характер проектных переменных (толщины специализированных элементов h_j), учитывающий $K_e^i = h_i^e K_1^e + h_i^{-1} K_2^e$ и аддитивность гамильтониана, позволил приме-

нить вычислительную технологию выпуклых аппроксимаций и дискретного принципа максимума. «Чистая» от ангармоник окрестность рабочей частоты расширена в 3 раза. Точность модели подтверждена экспериментально.



Анализ чувствительности 1, 3, 5, 6-ой собственных частот

В статье приводятся результаты анализа чувствительности и оптимизации высокочастотных кварцевых резонаторов. Дальнейшие перспективы исследований состоят в создании системы оптимального проектирования, позволяющей учесть механические, электромагнитные, температурные и другие характеристики.

Список литературы: 1. *Аронов Б.С.* Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 272 с. 2. *Зеленка И.* Пьезоэлектрические резонаторы на объемных и поверхностных акустических волнах. – М.: Мир, 1990.– 584 с. 3. *Lerch R.* Finite element analysis of piezoelectric transducers // IEEE Ultrasonic Symp. – 1988. – P. 643-654. 4. *Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б.* Анализ чувствительности к конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 77-82.

Поступила в редколлегию 25.06.2005.

Н.А.ТКАЧУК, докт.техн.наук; *Е.А.ОРЛОВ*, НТУ «ХПИ»;
Л.С.ЛИПОВЕЦКИЙ, Харьковский государственный сервисный центр
«СТЭМ»; *А.Н.МАЛАКЕЙ*, ГП «Завод им. Малышева»

К ВОПРОСУ РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано розвиток розрахунково-експериментального методу для дослідження напружено-деформованого стану елементів складних механічних систем. Описано схеми досліджень із застосуванням методу скінчених елементів та спекл-голографічної інтерферометрії.

Development of calculation-experimental method for research of stressed-deformed state of elements of complicated mechanical systems is presented. The charts of researches with application of method of finite elements and speckle-holographic interferometry are described.

1. Введение

В процессе автоматизированного проектирования сложных машиностроительных конструкций возникают задачи обеспечения достоверности расчетных схем и моделей, применяемых для численного исследования напряженно-деформированного состояния их элементов. Применение расчетных схем в методе конечных элементов требует в качестве исходных данных знания: параметров конечно-элементной разбивки исследуемых объектов, граничных условий и нагрузок. Точность исходных данных обеспечивает высокую точность численных результатов. В последующем при использовании данных моделей в специализированных интегрированных системах автоматизированного анализа и синтеза элементов сложных механических систем обеспечивается и точность исследований, и высокие жесткостные и прочностные характеристики проектируемых изделий.

Существующие в настоящее время численные методы исследования напряженно-деформированного состояния, среди которых лидирующее положение занимает метод конечных элементов (МКЭ), не обеспечивают только за счет внутренних средств контроль точности результатов моделирования по сравнению с поведением реальных объектов. Актуальной становится задача обеспечения достоверности используемых расчетных схем при численном исследовании элементов сложных механических систем. В работе предлагается развитие расчетно-экспериментального метода (РЭМ) исследований, при использовании которого в качестве основного результата выступают достоверные и точные расчетные модели исследуемых элементов сложных механических систем (ЭСМС) [1-7].

2. Постановка задачи синтеза расчетных моделей на базе метода конечных элементов и метода голографической интерферометрии

Задачу исследования напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем можно рассмотреть следующим образом. Пусть \mathbf{R} – реальный объект, поведение которого формально описывается при помощи в общем случае неизвестного оператора L_R :

$$L_R(u_R, P_R, f, t) = 0, \quad (1)$$

где u_R, P_R, f, t – переменные состояния, параметры, внешняя нагрузка и время соответственно. Математическую модель \mathbf{M} , получаемую в результате процесса идеализации I , описывает известный оператор L_M :

$$L_M(u_M, P_M, f, t) = 0, \quad (2)$$

где в скобках – переменные состояния, параметры, внешняя нагрузка и время соответственно. Численную модель \mathbf{N} , получаемую в результате процесса дискретизации D , описывает в каждом конкретном случае оператор L_N :

$$L_N(u_N, P_N, f, t) = 0. \quad (3)$$

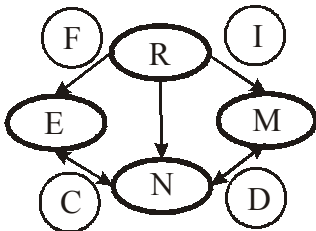
Индексы N в данном выражении соответствуют некоторой создаваемой численной модели исследуемого объекта и явления.

Численная модель подразумевает совокупность собственно дискретизированных уравнений, численных методов их решения, алгоритмов и программного обеспечения.

Если объект или его физическая модель (при физическом моделировании F) подвергаются экспериментальному исследованию, то сам объект или его модель, метод исследований, измерительные схемы (регистрация, усиление, расшифровка, представление) и измерительная аппаратура образуют экспериментальную модель E , поведение которой в операторном виде можно записать следующим образом:

$$L_E(u_E, P_E, f, t) = 0. \quad (4)$$

Соотношения (1)-(4) описывают различные формы реального объекта и исследуемого явления (на рис. 1 приведена схема исследования). В схеме на рис. 1 процесс сравнения данных численных и экспериментальных исследований обозначен через C .



- \mathbf{R} – реальный объект;
- \mathbf{M} – математическая модель;
- \mathbf{N} – численная модель;
- \mathbf{E} – экспериментальная модель;
- \mathbf{F} – физическое моделирование;
- \mathbf{I} – идеализация;
- \mathbf{D} – дискретизация;
- \mathbf{C} – сравнение, верификация

Рисунок 1 – Общая схема соотношения этапов исследования элементов сложных механических систем

Ставится задача разработки математического аппарата для расчетно-экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем в автоматизированном режиме.

3. Формализация задачи

При выборе метода экспериментального исследования для расчетно-экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем в автоматизированном режиме предпочтение было отдано методу спекл-голографической интерферометрии (МСГИ), который является одним из наиболее точных и информативных методов исследований [8]. Как показывает практика, именно этап сравнения результатов численных и экспериментальных результатов, причем в автоматизированном режиме, разработан недостаточно: нет отработанных механизмов *сравнения полей* u_R, u_M, u_N, u_E ; не производится *верификация* модели в части достоверности параметров P, f ; не определяется *полнота* модели (полнота множества P, f); не проводится *рационализация* моделей (определение значимых факторов).

Исходя из предположений: этап **I** – достаточно корректен; этап **D** – в принципе в настоящее время развития технологии исследований – отработанный в литературе этап; этап **F** – при использовании МСГИ достаточно точен, требование соответствия результатов исследований **R, M, N, E** предполагает соответствие результатов в звене **C** (см. рис. 1).

В реальных случаях в силу того, что:

- этап **I** – недостаточно «полный», подробный;
- на этапе **F** присутствуют погрешности физического моделирования, измерений, расшифровки;
- на этапе **D** нельзя избежать погрешностей дискретизации (размеры и расположение сетки конечных элементов, типы КЭ, методы решения систем уравнений),

возникает несоответствие в конкретной цепочке **C**.

Поскольку в схеме на рис. 1 этап **I** – это аппарат механики деформированного твердого тела, достаточно разработанный для большей части спектра возникающих задач моделирования реакции сложных механических систем на различные типы воздействий; этап **M** – метод спекл-голографической интерферометрии, который дает интегральную точность измерения до долей микрона, в том числе на *реальном* объекте; этап **D** – МКЭ, который в *принципе* дает достаточно точное и полное описание любой сложности математической модели процесса в механических системах, то на первый взгляд ошибки в цепочках этапов **I-M-D** должны быть сведены (в принципе) к минимуму. Однако при этом узким местом является *обоснованный выбор* на различных этапах следующего:

- этап **D**: *задание параметров дискретизации* (то есть например, поиск минимально необходимой сетки, описывающей адекватный процесс в мате-

матической модели (сгущение и сравнение поведения решения при этом не всегда оправданно, так как применяемые конечные элементы, например, не дают возможности в полной мере описать тот или иной процесс));

● этап **I**: *определение значимых параметров* (в случае очень большого количества параметров P возникает вопрос их минимизации, то есть поиска необходимого (или оптимального, или рекомендуемого) набора параметров);

● этапы **I, D**: *степени полноты множества* (существенные параметры в модели могут быть проигнорированы (например: модель строится на основе Shell-элементов, а требуется – Solid; в модели использовано жесткое защемление, а требуется – упругое); отсюда возникает необходимость обоснованного *пополнения* набора параметров модели).

Сведя к минимуму погрешности в цепочке этапа **F** (физическое моделирование и измерение), а также обоснованно допустив возможность добиться структурного и параметрического изменения математической и численной модели таким образом, чтобы обеспечить адекватное описание R , исходную задачу можно представить в виде определения такой рациональной структуры и множества параметров значений P_N , чтобы с заданной точностью описать поведение реального объекта:

$$P_N^*, f_N^* : I(u_N - u_E) \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где I – некоторая мера, определяющая несоответствие результатов экспериментальных и численных исследований ($\Delta u_{NE} = u_N - u_E$).

При этом можно выделить следующие типы задач:

- 1) Определение типа численных моделей и (или) характеристик конечно-элементных разбивок;
- 2) Определение величины, структуры, типов и (или) закона распределения нагрузок на ЭСМС;
- 3) Определение граничных условий и условий сопряжения;
- 4) Определение свойств материалов;
- 5) Определение значимых параметров моделей;
- 6) Определение полноты множества значимых параметров;
- 7) Определение минимального полного множества параметров;
- 8) Определение границ применимости моделей;
- 9) Определение чувствительности моделей к изменению параметров;
- 10) Определение зависимости характеристик модели (например, прочностных и жесткостных) от конструктивных или иных параметров модели во всем или в выделенном диапазоне изменения;
- 11) Построение «экспресс-моделей» (обоснованно структурно упрощенных на основе многовариантных исследований) и «экспресс-систем» оценки прочностных и жесткостных характеристик отдельных ЭСМС (аналитических зависимостей, графиков, таблиц, программных модулей или баз данных), в том числе для семейства объектов.

4. Обобщение исходной постановки при разработке расчетно-экспериментального метода исследований

Исходная постановка задачи по сравнению с соотношениями (5) может быть расширена. В частности, возможны следующие обобщения предлагаемого подхода.

Для классов конструкций или для множеств моделей при исследовании напряженно-деформированного состояния элементов механических систем во многих случаях возникает проблема оценки достоверности результатов, получаемых при численном моделировании реакции исследуемых систем на различные виды воздействий. Чаще всего эта проблема разрешается сравнением полученных результатов с данными, полученными другим способом (численно, аналитически, экспериментально). Естественно, что данные, полученные в ходе экспериментальных исследований (при соблюдении определенных требований к условиям их проведения, а также характеристикам используемой регистрирующей и измерительной аппаратуры) представляют особый интерес, поскольку при этом могут проявиться такие свойства объекта, которые учитываются исходной математической моделью или не в полной мере, или вообще ею не учитываются. Анализ результатов экспериментальных исследований может также заставить изменить используемые при исследовании численные модели (например, при использовании метода конечных элементов – типы применяемых конечных элементов, их размеры, расположение зон сгущения-разрежения конечно-элементных сеток). Существенными являются и следующие факторы: характер зависимости напряженно-деформированного состояния от времени, степень влияния на него условий контактного сопряжения, параметров окружающей среды и т.д.

В связи с этим большое развитие в последнее время получили методы исследований прочностных и жесткостных характеристик элементов механических систем, сочетающие численные и экспериментальные этапы. Традиционный подход к расчетно-экспериментальным исследованиям (рис. 2) направленный на исследование конкретного объекта, параметра, эффекта, предполагает сопоставление результатов исследований «по горизонтали», то есть полученных для одного объекта каким-либо из численных методов (или несколькими) и каким-либо из экспериментальных методов (или несколькими).



Рисунок 2 – Традиционная схема расчетно-экспериментальных исследований

Данный подход эффективен во многих случаях, когда поведение исследуемого объекта достаточно полно описывается одним или небольшим количеством определяющих параметров. Однако при исследовании реальных механических систем в большинстве случаев имеет место ситуация, когда в исследуемом объекте нельзя заранее выделить эти определяющие параметры. Машина или механизм, состоящие из единиц, десятков и сотен основных элементов, находящихся в десятках, сотнях и тысячах взаимосвязей между собой и с внешней средой, описываются достаточно сложной математической моделью.

При использовании традиционной схемы происходит сопоставление как параметров P_M, P_N, P_E , так и зависимостей между ними, описываемых L_M, L_N, L_E , и последующая корректировка моделей до получения удовлетворительного соответствия. Одновременно может производиться как обоснованное расширение, так и сужение набора определяющих параметров, усложнение или упрощение зависимостей между ними.

Предлагается новая схема организации исследований, в которой можно устанавливать взаимосвязь не только между параметрами P_M, P_N, P_E , и операторами L_M, L_N, L_E , а и между множествами тех и других (рис. 3).

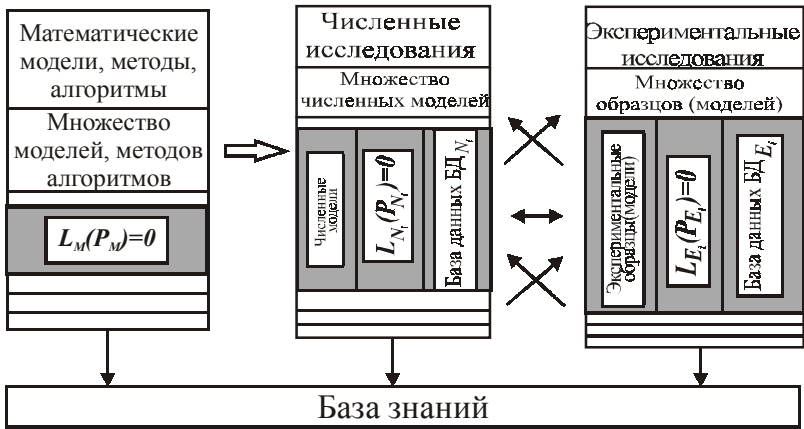


Рисунок 3 – Предлагаемая схема расчетно-экспериментальных исследований

Это позволяет использовать при организации баз данных, содержащих результаты численных и экспериментальных исследований, описывающих различные механические системы, проводимые в различное время различными исследователями с применением различной аппаратуры, различных численных методов, различных вычислительных методов и средств для установления искомых зависимостей. Более того, избыточность информации (которая имеет место в некоторых случаях) на самом деле не приводит к противоречиям, а служит дополнительным источником повышения достоверности результатов, степени адекватности моделей и точности методов. Причем сопос-

тавление результатов можно производить как между элементами множеств M , N и E (математические модели, результаты численных и экспериментальных исследований, соответственно), так и внутри множеств, используя при этом различные весовые коэффициенты для выделения результатов более значимых исследований.

Получаемая в результате база знаний за счет постоянного пополнения множеств M , N и E не только растет в объеме, но и повышает достоверность содержащихся в ней элементов знаний.

Естественно, что предложенная схема нуждается в определенной формализации. Отдельной крупной задачей является организация, создание и проведение баз данных хотя бы по отдельным классам объектов, по тем или иным областям. Кроме того, еще одной важной проблемой является выбор критериев сопоставимости различных элементов различных множеств. Более того, в большом количестве случаев могут выявиться противоречия между сопоставляемыми данными, причем они могут на первый взгляд просто взаимно исключать друг друга. Однако такое состояние предлагаемой схемы соответствует в общих чертах состоянию знаний во многих отраслях науки и техники. Это нормальный процесс установления новых, уточнения и опровержения старых представлений о поведении объекта (машин, узлов, механизмов, агрегатов и т.д.). В практике проектировщиков нередки случаи, когда конструкторы, исследователи с большим опытом работы по памяти устанавливают аналогии между элементами нового проекта, находящегося в разработке, с элементами своих или чужих проектов, выполненных гораздо раньше. Это находит в последующем подтверждение при сопоставлении моделей и результатов. Таким образом, предлагаемый подход является в некоторой степени схемой, действующей в практике проектирования: накопление данных, выявление аналогий и установление зависимостей.

Естественно, что данный подход требует особой организации соответствующих баз данных, поскольку количество учитываемых факторов, параметров, воздействий и взаимосвязей в механических системах чрезвычайно велико, даже если ограничиться отдельным классом объектов. Лавинообразного роста информации можно избежать, используя иерархические структуры ее хранения, основанные на различных типах классификаций исследуемых объектов: по форме, по составу, по типам внешних воздействий, по функциональному назначению и т.д. При этом можно устанавливать различные виды соответствия: внутри определенного класса, подкласса, подподкласса, а также между элементами разных классов, подклассов, подподклассов и т.д.

Формализация предложенного подхода может быть следующей. Пусть множество R – объединение элементов \bar{R}^i . Тогда множество параметров $\bar{P} = \bigcup \bar{P}_i$, то есть множество параметров \bar{P} является объединением множеств отдельных параметров отдельных представителей класса (для каждой из типов моделей R , N , M , E), и задача (5) записывается в виде

$$\bar{P}_N^* : I(\bar{P}, \bar{P}_N, \Delta u_{NE}) \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Для *расширенного множества параметров*, исходя из идеи о формальной равноправности параметров P_E, P_N, P_M , можно формировать *расширенное обобщенное параметрическое пространство*, из которого можно выделять подпространства *варьируемых параметров, уточняемых параметров, критериальных параметров, ограничительных параметров*. При этом в процессе исследований все эти категории могут быть пересекающимися, перетекающими друг в друга. Тогда задача (5) записывается в виде

$$\bar{P}_V^* : I(\bar{P}, \bar{P}_V, \Delta u_{NE}) \leq \varepsilon, \quad (7)$$

где \bar{P}_V – множество варьируемых параметров.

На случай динамического процесса обобщение задачи на динамический процесс

$$P_N^*, f^* : I(t) \leq \varepsilon \quad (8)$$

предполагает формирование критерия, позволяющего распространить функционал на некоторый характерный интервал времени.

На случай нелинейного процесса предлагается формулировка

$$P_N^*, \tau^* : I(\tau) \leq \varepsilon, \quad (9)$$

где τ – множество параметров, описывающих нелинейный процесс (например, параметры нагружения при упруго-пластическом деформировании).

На случай резко возрастающих требований к вычислительным ресурсам возникает проблема, если требование увеличения точности вступает в противоречие с существующими в распоряжении исследователя вычислительными ресурсами R_S (выступает в качестве штрафа: величина его резко возрастает при приближении к ограничению на имеющиеся ресурсы):

$$P_N^*, f^* : I(P_N, f) + R_S(P_N, f) \leq \varepsilon. \quad (10)$$

На случай сравнения состояний объекта через большие промежутки времени можно использовать идею *хронологического «портретирования»* (то есть серия «снимков» объекта через большие промежутки времени, а отсюда – определение или изменения самого объекта, или физико-механических характеристик материала). Происходит как бы «привязка» «ромба» (см. рис. 1) предлагаемого РЭМ к разделенным моментам времени. В данном случае

$$P_N^*, f^* : I(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Здесь t_1, t_2, \dots, t_n – моменты времени, при которых производится сравнение состояний объекта.

Для формирования баз данных, знаний и экспертных систем на основе расчетно-экспериментальных исследований во многих случаях самостоятельную ценность имеют не только и не столько экспериментально проверенные результаты численных исследований, но и рационально сбалансированная достоверная численная модель объекта.

Конечно-элементная модель сложного объекта может иметь также и большую коммерческую ценность. Кроме того, предложенная методика может быть положена в основу иерархической базы данных и знаний о том или ином классе объектов, причем объектами сравнения могут быть множества баз данных (как численных, так и экспериментальных). Здесь также могут быть введены соответствующие критерии улучшения модели, причем для сравнения могут быть взяты модели, полученные независимо из различных источников и в разное время.

Окончательным результатом исследования является достоверная численная модель для определения напряженно-деформированного состояния тех или иных объектов или классов объектов. При решении поставленной задачи при помощи предложенного расчетно-экспериментального метода ее можно обратить: пусть имеется достаточно точный инструмент исследования численных моделей, однако существует сомнение в применимости тех или иных математических моделей. То же – на любом участке цепи «математическая модель – численная модель – экспериментальная модель с измерительной аппаратурой». В этом случае можно: определить структуру и параметры той или иной модели (*узкая задача*); определить в пространстве варьируемых параметров области, в пределах которых справедливы различные модели (*широкая задача*).

Формально в процессе исследований можно «уравнять в правах» все типы моделей, выделив группу уточняющих моделей и уточняемую модель. Кроме того, возможна и постановка «смешанной» задачи, то есть задачи, в которой объектом уточнения является множество параметров, представляющее совокупность параметров из различных типов моделей. В этом случае вместо уточняющих и уточняемых моделей (и их параметров) в качестве основных объектов выступают соответственно подмножества параметров. Более того, состав этих множеств может изменяться за счет «миграции» параметров из группы в группу.

Предлагаемый метод изучения напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем допускает глубокую степень формализации, однако большую роль в процессе исследований играет сам исследователь (или группа исследователей). В его компетенции – определение, изменение (удаление, пополнение) множества параметров, а также границ их изменения, разрешение коллизий, а также текущий контроль над процессом. Это обусловлено, во-первых, невозможностью на данном этапе полной формализации предлагаемой технологии исследований, во-вторых, необходимостью исключения тупиковых ситуаций и, в-третьих, очень высокой стоимостью ошибки (например, неоправданное усложнение плана экспериментальных исследований может повлечь такой рост общей стоимости всего комплекса исследований группы или класса конструкций, что он превысит стоимость аналогичных работ по традиционному способу).

Предложенные схемы расчетно-экспериментальных исследований позволяют оперативно проводить *серии* исследований групп конструкций, причем наиболее трудоемкая часть, а именно экспериментальная, проводится в минимально возможном объеме.

Используя преимущества INTERNET-технологий, исследования с применением предложенного расчетно-экспериментального метода можно, во-первых, распараллелить (то есть одновременно выполнять отдельные этапы и подэтапы силами различных исследователей и исследовательских групп), а, во-вторых, разнести географически и хронологически. При организации сервера баз данных возможна также определенная организация хранения результатов исследований, позволяющая создавать банки данных по тем или иным группам конструкций. Придав таким базам данных свойства открытости и доступности, на определенной стадии их развития можно создавать «верификационные эталоны» для различных видов механических систем. Это в свою очередь позволяет создавать экспертные системы, само существование которых избавило бы от необходимости проводить большую часть экспериментальных исследований, поскольку перед предстоящим циклом исследований всегда была бы возможность обратиться к соответствующей (и все время пополняемой) базе знаний. Чем полнее и совершеннее эта база, тем больше вероятность получить необходимые рекомендации для построения достоверной численной модели исследуемой механической системы.

Естественно, что при проведении расчетно-экспериментальных исследований в предложенной постановке одним из требований является некоторая степень *избыточности* экспериментальных данных, которая позволяет повысить степень точности и полноты создаваемой численной модели.

Таким образом, предложенный подход позволяет устранить существующие недостатки традиционной технологии расчетных и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем, а именно формализовать процесс сравнения, автоматизировать процесс улучшения численной модели и повысить оперативность всего цикла исследований с привлечением современных информационных технологий, что дает возможность провести географическое и временное разделение процесса исследований.

5. Выводы

Предложена новая технология расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем, для которой характерны следующие особенности.

1. Предложенный расчетно-экспериментальный метод дает возможность организовывать самокорректирующийся процесс расчетно-экспериментальных исследований, основным результатом которого является достоверная расчетная параметрическая модель элементов сложных механических систем.

2. Предложенный расчетно-экспериментальный метод устраняет противоречие, следующее из линейного характера процесса исследований в традиционной их постановке.

3. Разработанная технология расчетно-экспериментальных исследований встраивается в цикл проектирования, исследования, технологической подготовки производства и изготовления современных сложных машиностроительных конструкций.

4. Предложена схема определения значимых факторов расчетных моделей элементов сложных механических систем по результатам экспериментальных исследований. Для изучения влияния конструктивных, технологических и эксплуатационных параметров на напряженно-деформированное состояние наиболее нагруженных и ответственных деталей ЭСМС предлагается производить комплекс экспериментальных исследований, в которых при варьировании условий определяется реакция исследуемого объекта. При этом представляется возможным построение сбалансированных расчетных моделей с необходимым уровнем детализации.

Применение предложенного подхода приводит к многократному сокращению сроков, стоимости исследований, дает сбалансированную модель для анализа и оптимизации конструкций элементов сложных механических систем. В дальнейшем необходимо разработать механизм сопряжения данной технологии исследований с современными CAD/CAM/CAE/PDM-системами, что позволит организовать замкнутые циклы «проектирование-исследование-изготовление» изделий с высокими техническими характеристиками на отечественных предприятиях.

Список литературы: 1. *Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем // *Динамика и прочность машин*, 2002. – № 10, т. 2. – С. 126-131. 2. *Ткачук Н.А.* Интенсивная схема экспериментальных исследований элементов технологических систем // *Динамика и прочность машин*, 1998. – № 56. – С. 175-181. 3. *Капустин А.А., Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальный метод исследования деформаций элементов механических систем // *Вестник ХГПУ*, 1999. – № 53. – С. 148-155. 4. *Ткачук Н.А., Гриценко Г.Д., Глуценко Э.В., Ткачук А.В.* Программно-аппаратный комплекс для анализа и синтеза моделей элементов сложных механических систем // *Динамика и прочность машин*, 2004. – № 31. – С. 154-165. 5. *Ткачук Н.А.* Экспериментальное определение характера граничных условий в сложных механических системах // *Механика та машинобудування*, 2000. – №1. – С. 28-34. 6. *Гриценко Г.Д., Ткачук А.В., Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальные параметрические модели для исследования напряженно-деформированного состояния элементов механических систем // *Вестник ХГПУ*, 2000. – № 101. – С. 78-85. 7. *Ткачук Н.А.* Расчетно-экспериментальные методы анализа напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем на основе методов спекл-голографической интерферометрии и конечных элементов // *Вестник НТУ «ХПИ»*, Тем. выпуск «Технології в машинобудуванні», 2001. – № 7. – С. 243-247. 8. *Вест Ч.* Голографическая интерферометрия. – М: Мир, 1982. – 504 с.

Поступила в редакцию 25.04.2005

М.А.ТКАЧУК, докт.техн.наук, НТУ «ХП»;

В.О.РАДЧЕНКО, докт.мед.наук, Інститут патології хребта й суглобів ім. проф. М.І.Ситенка; **Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК**, НТУ «ХП»

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧНИЙ ОПИС СКЛАДНИХ БІОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Пропонується узагальнений параметричний підхід до моделювання біомеханічних систем. Описана структура спеціалізованого програмно-апаратного комплексу для моделювання операцій ендопротезування опорно-рухового апарату та хребта, розрахунків міцності та жорсткості протезованих елементів та наслідків операції для вибору оптимальної схеми операції та параметрів ендопротезів.

It is proposed generalized parametrical approach for biomechanical system modelling. Structure of the specialized soft hardware complex for spatial modelling of locomotorium and spine endoprosthesis operations, prosthesis elements strength and rigidity as well as results of prostheses optimal behaviour scheme choice for best operation and prostheses scheme is presented.

1. Суть проблеми

На даний час підвищення ефективності оперативного втручання для ендопротезування опорно-рухового апарату стримується відсутністю засобів передопераційного моделювання самої операції, розрахунків міцності та жорсткості елементів, а також прогнозування поведінки опорно-рухового апарату після операції в реальних умовах життєдіяльності людини. В той же час росте потреба в таких операціях в усьому світі. Це приводить до необхідності розробляти принципово нові схеми операцій. Параметри ендопротезів та схеми оперативного втручання при цьому відпрацьовуються протягом тривалого часу. В той же час при цьому утруднено врахування індивідуальних особливостей пацієнта. Всі ці проблеми може усунути комп'ютерне об'ємне параметричне моделювання, що використовує методи, алгоритми та програмне забезпечення моделювання елементів та систем машинобудівних конструкцій. Ці підходи дозволяють оперувати з об'єктами складної форми, матеріал котрих суттєво неоднорідний, анізотропний та має нелінійності фізико-механічних характеристик.

Таким чином, набутий досвід моделювання та розрахунків складних машинобудівних конструкцій дає змогу створити автоматизовану установку для глибокого та індивідуалізованого моделювання, аналізу та синтезу операцій. В той же час виникає і впливає на перший план проблема опису біомеханічної системи, що утворюється внаслідок оперативного втручання. Дійсно, необхідно в межах єдиного підходу, що на даний час відсутній, описати і геометрію, і фізико-механічні властивості матеріалу, і умови взаємодії елементів суттєво різної природи: механічна складова та біологічні тканини. Це породжує значну наукову проблему, що має насамперед загальнометодологічний характер.

2. Постановка задачі

Розглянемо довільну біомеханічну систему (БМС) S_{BM} . При розв'язанні задач аналізу напружено-деформованого стану (НДС), рухливості, стабільності, травматичності для цієї системи виникає потреба у створенні: 1) математичної моделі (ММ), що досить адекватно описує поведінку БМС; 2) числової моделі (ЧМ), що крім дискретних аналогів величин ММ містить параметри скінченно-елементної моделі та інструменти управління процесом дискретизації; 3) фізичної моделі (ФМ), яка додатково характеризує властивості вимірювальної апаратури, методів досліджень та схем реєстрації. Бажано, щоб усі ці моделі формально можна було записати на основі єдиного методу. Це дасть змогу подолати різнотипність не тільки при описі біологічної та механічної складових, але й різнотипність моделей, що використовуються на різних етапах досліджень.

3. Формалізація задачі

Для опису поведінки біомеханічних систем пропонується розвинути узагальнений параметричний підхід [1-3]. Цей спосіб полягає у тому, що для опису властивостей досліджуваної БМС на всіх етапах моделювання застосовується множина узагальнених параметрів V : $S_{BM} = S_{BM}(V)$, де

$$V = \{P_\alpha\}, \quad \alpha = 1, \dots, N_p. \quad (1)$$

Тут узагальнені параметри (УП) $\{P_\alpha\}$ описують всі значимі параметри як реальної біомеханічної системи, так і її моделей. Як УП можуть виступати числові величини, структура БМС, властивості матеріалів, типи скінченних елементів, варіанти конструктивного виконання ендопротезу.

Такий підхід дає змогу ставити та вирішувати різні типи задач:

1) узагальненого параметричного аналізу, коли досліджуються залежності характеристик H_i БМС від окремих параметрів P_α чи деякої підмножини цих параметрів:

$$H_i = H_i(P_\alpha), \quad (2)$$

2) визначення достовірних параметрів числових чи математичних моделей БМС за результатами експериментальних досліджень:

$$P_\alpha^* = \{P_\alpha : \|u^{N(M)} - u^E\| \leq \varepsilon\}, \quad (3)$$

де індекси N , M , E відносяться до числових, математичних та експериментальних моделей досліджуваної БМС, u – змінна стану (переміщення, деформація, напруження); ε – задана межа невідповідності.

3) визначення індивідуальних параметрів біомеханічної системи (тип ендопротеза, його конструктивна схема, конструктивні параметри) за певними критеріями (міцність, жорсткість, рухливість):

$$P_\alpha^* = \{P_\alpha : Y(N_\alpha) = 0\}. \quad (4)$$

Перевагою запропонованого методу є його нечутливість до типу параметру, складу множини V , а також можливість формально оперувати з P_α як зі

звичайними параметрами у широких межах.

4. Параметричний опис біомеханічної системи

Для визначеності будемо надалі розглядати біомеханічну систему на прикладі системи «хребець-ендопротез-хребець» [4-6]. Як і будь-яка інша БМС, дана біомеханічна система має принципово відмінні складові: біологічні та механічні.

Принципові відмінності складових – на рис. 1.

Принципові відмінності біологічних та механічних складових біомеханічної системи		
Фактори	Біологічні	Механічні
Форма	Задана природою; індивідуальна за параметрами, але топологічно однотипна	Штучно створюється; індивідуальні параметри відшукуються при проектуванні; розміри обмежені; топологія варіюється
Матеріал	Неоднорідний, анізотропний, неваріюємий	Однорідний, ізотропний, варіюється
Комп'ютерне геометричне та скінчено-елементне моделювання	Ускладнене із-за форми та властивостей матеріалу	Не виникає принципових проблем

Рисунок 1

Як відзначалося, досліджувана система S_{BM} може бути розділена на складові за декількома «параметричними» ознаками. Насамперед, досліджувана система S описується множиною параметрів $V = \{P_{Biol}, P_{Surg}, P_{Mech}, P_{Mod}\}$ де P_{Biol} – множина параметрів, що описують параметри **біологічного** об'єкта (у даному випадку – конкретного людського організму); P_{Mech} – множина параметрів, що описують параметри **механічних** складових біомеханічної системи (ендопротез); P_{Surg} – множина параметрів, що описують **схеми оперативних втручань**; P_{Mod} – множина параметрів математичної, геометричної та числової **моделей**, які використовуються для дослідження поведінки біомеханічної системи (наприклад, параметри скінчено-елементної моделі хребець – ендопротез).

Взаємозв'язок параметрів – на рис. 2.

Крім того, параметри можуть бути згруповані за належністю до реально-го об'єкта R , математичної моделі M , числової (N) та експериментальної моделі (E): $V = \{P^R, P^M, P^N, P^E\}$. З точки зору варіюємості множина параметрів залежно від постановки задачі в тому чи іншому випадку розділяється на фіксовані та змінні параметри: $V = \{P_{const}, P_{var}\}$.

Наведені приклади розподілу множини узагальнених параметрів носять не тільки ілюстративний характер. Вони дають змогу наочно продемонструвати можливість створення на базі запропонованого підходу технологій та інструментів для визначення нових схем ендопротезування та індивідуально підібраних ендопротезів.

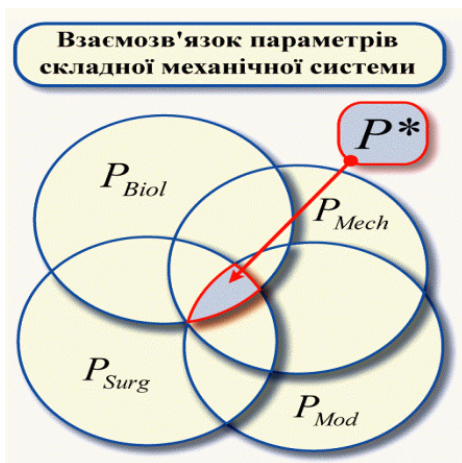


Рисунок 2

5. Автоматизована система індивідуального проектування ендопротезів

На основі запропонованого підходу пропонується структура автоматизованої системи індивідуалізованого проектування ендопротезів (рис. 3).



Рисунок 3

Дана комп'ютерна система для моделювання хірургічних операцій ендопротезування хребта та дослідження напружено-деформованого стану елементів системи «хребет-ендопротез» дає змогу оптимально підбирати параметри

ендопротезів та схеми хірургічних операцій з урахуванням індивідуальних особливостей пацієнтів.

Для досягнення мети необхідні наступні дослідження:

I. Дослідження геометрії та створення бази даних *параметричних* моделей елементів хребта.

II. Дослідження типів конструкцій *ендопротезів* та створення бази даних їх параметричних моделей.

III. Дослідження, класифікація та створення бази даних *травм (патологій) хребта*.

IV. Розробка *математичної моделі* для параметричного опису поведінки біомеханічної системи «елементи хребта-ендопротез».

V. Розробка *загальної параметричної моделі* біомеханічної системи «елементи хребта-ендопротез».

VI. Розробка *комп'ютерної системи* для моделювання *геометрії* та *напружено-деформованого стану* хребта та ендопротезів.

VII. Дослідження зразків *ендопротезів* методом скінченних елементів та методом голографічної інтерферометрії.

VIII. Розробка *схем хірургічних операцій* з ендопротезування за допомогою розробленої комп'ютерної системи та дослідження результатів у клінічних умовах.

Умовна наочна схема взаємодії етапів – на рис. 4.

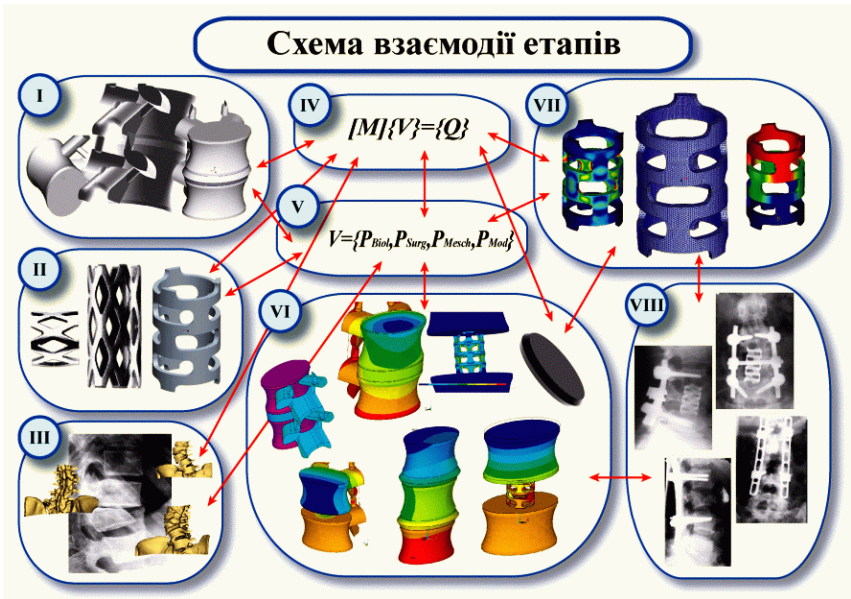


Рисунок 4

Для геометричного моделювання елементів біомеханічних систем пропонується застосовувати CAD-систему Pro/ENGINEER, для скінченно-елементного моделювання – CAE-систему LS-DYNA. Індивідуальні характеристики отримуються за допомогою відповідних рентгенограм та томограм. Експериментальне дослідження виконується на голографічній установці методом голографічної інтерферометрії. База даних та взаємозв'язок даних забезпечуються спеціально створеною програмною оболонкою.

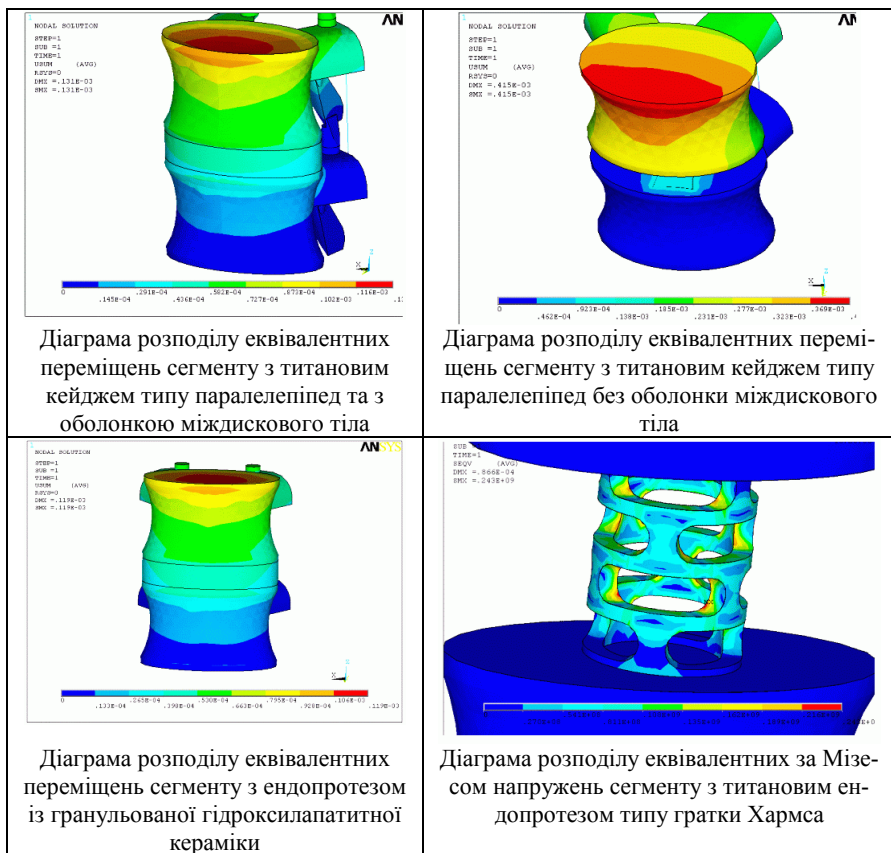


Рисунок 5 – Картини напружено-деформованого стану сегмента хребта

6. Приклади моделювання елементів біомеханічних систем

Модулі та блоки створеної автоматизованої системи були застосовані для визначення напружено-деформованого стану системи «хребець-імплантат-хребець» з різними типами імплантатів: титановий кейдж типу паралелепіпед, блоки та гранульована гідроксилапатитна кераміка (ГАК), тита-

новий ендопротез типу ґратки Хармса. На рис. 5 – приклади результатів проведених розрахунків.

Отримані в результаті багатоваріантних досліджень результати дають змогу обґрунтовано вирішувати весь комплекс задач при моделюванні процесу ендопротезування. Переваги даного підходу полягають ще й у тому, що виникає можливість створення баз даних та знань з параметричного опису поведінки біомеханічних систем досить широкого охопту (рис. 6). Таким чином, розв’язуються задачі як індивідуалізованого спрямування, так і створення узагальнених моделей БМС.



Рисунок 6 – Застосування узагальненого параметричного підходу при моделюванні поведінки біомеханічних систем

7. Напрями подальших досліджень

Запропоновані методи, системи та моделі планується розгорнути у вигляді спеціалізованого програмно-апаратного комплексу, основні складові якого розвиваються в Інституті патології хребта та суглобів ім.проф.Сітенка Академії медичних наук України та Національному технічному університеті «Харківський політехнічний інститут» (НТУ «ХПІ»). Зокрема, для забезпечення проведення скінченно-елементного моделювання складних біомеханічних систем, що потребує значних обчислювальних ресурсів, використовуються можливості страто-кластера «Політехнік-120», що розгорнений на базі центру «Тензор» НТУ «ХПІ» (<http://tensor.kharkiv.com>, tma@kpi.kharkov.ua).

Список літератури: 1. Ткачук Н.А. Комплексное экспериментальное определение параметров численных моделей элементов механических систем // Механіка та машинобудування.– 2001.– № 1,2. – С.65-69. 2. Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Тематичний випуск.: «Динаміка і міцність машин». Збірник наукових праць НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ», 2002.– № 10. – С.126-132. 3. Веретельник

Ю.В., Миргородский Ю.Я., Пелешко Е.В., Ткачук Н.А. Параметрические модели элементов сложных систем как основа построения специализированных расчетных систем // Механіка та машинобудування. – 2003. – № 1, т. 2. – С. 3–8. 4. Радченко В.А., Корж Н.А. Практикум по стабилизации грудного и поясничного отделов позвоночника. – Харьков: Прапор, 2004. – 160 с. 5. Костная и металлическая фиксация позвоночника при заболеваниях, травмах и их последствиях / Под ред. Г.Д.Никитин, Н.В.Корнилов, К.Н.Коваленко и др. – С.-П.: Русская графика, 1998. – 442 с. 6. V. Radchenko, Z. Zyman, V. Filippenko, V. Glushko, V. Mezentsev Nonstoichiometric hydroxapatite granules for orthopaedic applications // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2003. – № 1. – С.101-107.

Поступила до редколегії 25.04.2005

УДК 539.3

Н.В.ШИРЯЕВА; К.В.АВРАМОВ, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

Стаття присвячена дослідженню геометрично нелінійних повздожньо-ізгибних коливань стержнів, що обертаються. Стержень моделюється із застосуванням гіпотез Ейлера-Бернулї. Коливання стержня подаються у вигляді ряду по власним формам лінійних коливань нерухомого стержню. У роботі були виведені звичайні диференційні рівняння нелінійних коливань.

Nonlinear axial-bending vibrations of rotating beams are investigated here. Euler-Bernuly hypothesis are used for modeling of a beam. Beam's vibrations are represented in the form of line of natural frequencies nonrotating beam. Ordinary differential equations of nonlinear vibrations are obtained here.

1. Введение

Как показывают экспериментальные исследования лопаток турбомашин и лопастей вертолетов, в таких конструкциях часто наблюдаются геометрически нелинейные колебания с амплитудами, соизмеримыми с толщинами стержней [1]. Линейные колебания закрученных стержней с учетом несовпадения центра тяжести поперечного сечения и центра упругости исследуются в монографии [2]. Одной из первых геометрически нелинейная модель гибких стержней была получена В.А.Светлицким [3]. Колебания вращающихся стержней рассмотрены В.И.Гуляевым [4]. В работе [5] рассмотрены нелинейные колебания балки, нагруженной периодической силой, в условиях комбинированного резонанса. Параметрические колебания стержня с тремя положениями статического равновесия асимптотическими методами исследуются в [6].

В этой статье исследуются геометрически нелинейные продольно-изгибные колебания вращающихся стержней. Колебания стержня представляются в виде ряда по собственным формам линейных колебаний невращающегося стержня. В статье получены обыкновенные дифференциальные уравнения нелинейных колебаний.

2. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассматриваемая механическая система представлена на рис. 1. Стержень моделируется с использованием гипотез Эйлера-Бернулли. В модели стержня не учитывается инерция вращения поперечных сечений. Предполагается, что собственные частоты крутильных колебаний существенно выше изгибных, поэтому в модели стержня учтены только изгибные и продольные движения. Потенциальную энергию U и кинетическую энергию T стержня представим так:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + m\Omega^2 (h + x + u)^2 dx, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(w_{,xx})^2 + EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)^2 dx, \quad (2)$$

где $u(x,t)$ и $w(x,t)$ – продольное и поперечное смещения, $(\cdot)_{,x}$ – производная по x , \dot{u} , \dot{w} – производные по времени, h – радиус куба, Ω – постоянная угловая скорость балки, m – масса на единицу длины, и E , A , I и L – модуль упругости первого рода, площадь поперечного сечения, момент инерции и длина, соответственно.

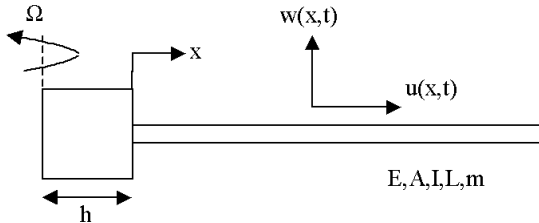


Рисунок 1 – Вращающийся гибкий стержень

Используя принцип Гамильтона, получим уравнения движения в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -m\ddot{w}\delta w - EIw_{,xxx}\delta w_{,xx} - EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)w_{,x}\delta w_{,x} \right\} + \left[-m\ddot{u}\delta u + m\Omega^2(h+x+u)\delta u - EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)\delta u_{,x} \right] dxdt = 0, \quad (3)$$

где $\delta(\cdot)$ – изохронная вариация. Соотношение (3) представим в виде:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ [-m\ddot{w} - EIw_{,xxx}]\delta w - \left[EA\left(u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2\right)w_{,x} \right]\delta w_{,x} + [-m\ddot{u} + m\Omega^2(h+x+u) + EAu_{,xx}]\delta u - \left[EA\left(\frac{1}{2}(w_{,x})^2\right) \right]\delta u_{,x} \right\} dxdt = 0, \quad (4)$$

Используя формы линейных продольных и изгибных колебаний для вращающегося линейного стержня, колебания стержня представим так:

$$u = \sum_{i=1}^{N_u} q_i(t) \theta_i(x); \quad (5)$$

$$w = \sum_{j=1}^{N_w} q_{N_u+j}(t) \Psi_j(x). \quad (6)$$

В дальнейших расчетах нами принимается $N_u = 2$; $N_w = 2$. Формы собственных линейных продольных и изгибных колебаний выбираются так:

$$\theta_i(x) = \sin \frac{2k-1}{2} \frac{\pi x}{l}; \quad \Psi_i(x) = K_2(\lambda_i) \cdot K_3\left(\lambda_i \frac{x}{l}\right) - K_1(\lambda_i) \cdot K_4\left(\lambda_i \frac{x}{l}\right);$$

$$\lambda_k = \frac{2k-1}{2} \cdot \pi; \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2).$$

где $K_1(\lambda_k), K_2(\lambda_k), K_3\left(\lambda_k \frac{x}{l}\right), K_4\left(\lambda_k \frac{x}{l}\right)$ – функции Крылова [7]. Далее, подставим (5) и (6) в (4) и получим:

$$\int_0^L \int_0^L \left\{ [-m\ddot{w} - EI w_{,xxxx}] \cdot [\Psi_1 \delta q_3(t) + \Psi_2 \delta q_4(t)] - \right.$$

$$\left. - \left[EA \left(u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right) w_{,x} \right] \cdot [\Psi_{1,x} \delta q_3(t) + \Psi_{2,x} \delta q_4(t)] + \right.$$

$$\left. + [-m\ddot{u} + m\Omega^2(h+x+u) + EA u_{,xx}] \cdot [\theta_1 \delta q_1(t) + \theta_2 \delta q_2(t)] - \right.$$

$$\left. - \left[EA \left(\frac{1}{2} (w_{,x})^2 \right) \right] \cdot [\theta_{1,x} \delta q_1(t) + \theta_{2,x} \delta q_2(t)] \right\} dx dt = 0, \quad (7)$$

Систему дифференциальных уравнений, описывающую колебания стержня, в общем виде представим так:

$$M \cdot \ddot{q} + C \cdot q + F(q) = 0, \quad (8)$$

где M – матрица масс системы; C – матрица жесткости; $F(q)$ – нелинейная функция, выражающая геометрически нелинейные свойства стержня.

3. Анализ линейных колебаний.

В линейном приближении продольные и изгибные колебаний не связаны, так как центр тяжести поперечного сечения стержня совпадает с центром жесткости. Получим аналитическую формулу для определения продольных частот системы. Для этого представим $u(x,t)$ в виде статической и динамической составляющей:

$$u(x,t) = u_s(x) + u_d(x,t), \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), и, пренебрегая нелинейными слагаемыми, получим линейное дифференциальное уравнение для вращающегося стерж-

ня в виде:

$$m\ddot{u}_d - m\Omega^2 u_d - EAu_{d,xx} = 0$$

Тогда собственная частота линейных колебаний определяется так :

$$\omega = EA \frac{\pi^2}{xl^2} - \Omega^2. \quad (10)$$

Рассмотрим вращающийся гибкий стержень со следующими параметрами: $L = 9$ м; $EI = 3,99 \cdot 10^5$ Н · м²; $EA = 2,23 \cdot 10^8$ Н; $\Omega = 30$ рад/с, $h = 0,5$ м. Матрица масс и жесткости имеют вид:

$$M = \begin{pmatrix} 44.98 & 0.456 & 0 & 0 \\ 0.456 & 44.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96.29 & 0.092 \\ 0 & 0 & 0.092 & 16183.78 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.305 - 44.98 \cdot \Omega^2 & 278801.72 - 0.46 \cdot \Omega^2 & 0 & 0 \\ 30977.97 - 0.47 \cdot \Omega^2 & 0.24 \cdot 10^9 - 44.98 \cdot \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7237.71 & 272.37 \\ 0 & 0 & 6.93 & 0.48 \cdot 10^8 \end{pmatrix}.$$

Собственные частоты колебаний для различных значений Ω представлены в таблице. На рис. 2 представлены зависимости собственных частот от угловой скорости вращения стержня.

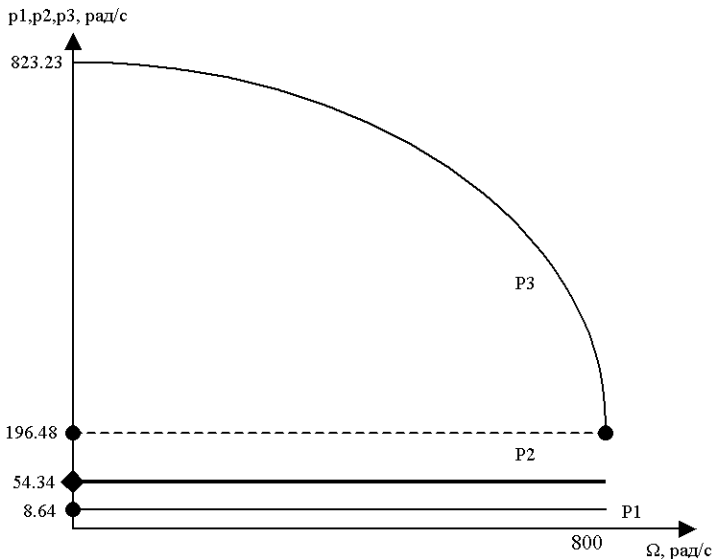


Рисунок 2 – Собственные частоты системы p_i , ($i = 1, \dots, 3$)

Собственные частоты системы

	p_1	p_2	p_3	p_4
$\Omega=30$ рад/с	8,64	54,34	823,23	2471,28
$\Omega=100$ рад/с	8,64	54,34	817,68	2469,43
$\Omega=200$ рад/с	8,64	54,34	799,13	2463,35
$\Omega=400$ рад/с	8,64	54,34	720,14	2438,87
$\Omega=800$ рад/с	8,64	54,34	196,49	2338,4

4. Выводы

В работе получены обыкновенные дифференциальные уравнения нелинейных колебаний вращающихся стержней. Эти уравнения могут использоваться для анализа нелинейных колебаний лопастей вертолетов и лопаток турбомашин. Отметим, что собственные частоты изгибных колебаний не зависят от частоты вращения стержня, а собственные частоты продольных колебаний зависят от этой величины.

Список литературы: 1. Ю.М.Темис, В.В.Карабан Геометрически нелинейная конечноэлементная модель закрученного стержня в задачах статических и динамических расчетов лопаток. 2. Ю.С.Воробьев, Б.Ф.Шорр Теория закрученных стержней. – К., «Наукова думка», 1983. 3. В.А.Светлицкий Механика гибких стержней и нитей. – М., Машиностроение, 1978. 4. В.И.Гуляев, В.В.Гайдайчук, В.Л.Кошкин Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – К., «Наукова думка», 1992. 5. Avramov K.V. Non-linear beam oscillations excited by lateral force at combination resonance // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – 257(2). – P. 337-359. 6. Avramov K.V. Bifurcations of parametric oscillations of beams with three equilibrium // Acta Mechanica. – 2003. – V. 164. – P. 115-138. 7. В.Л.Бидерман Прикладная теория механических колебаний. – М., «Высшая школа», 1972.

Поступила в редколлегию 16.03.2005

УДК 539.5

В.Н.КОНКИН, канд.техн.наук; **В.И.ЛАВИНСКИЙ**, докт.техн.наук;
НТУ «ХПИ»

ТЕРМОУСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ И ПЛАСТИНЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Представлені результати дослідження граничних станів і втрати стійкості прямолінійної форми стрижня і плоскої форми круглї пластинки з урахуванням температурної залежності модуля пружності матеріалів елементів.

The research results of maximum fortunes and steadiness loss of rectilinear bar form and flat form of round plate with calculation of temperature elements materials resiliency module dependence are represented.

Для стержневых и пластинчатых элементов конструкций наряду расчетов несущей способности по термпрочности, важное практическое значение имеют расчеты на термоустойчивость и определение характера поведения конструкции в закритической стадии. Решение задач в условиях неравномерного нагрева с учетом изменяющихся механических характеристик материала является сложным, так как связано с решением систем нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Если задачу определения критических температур, при которых элемент теряет устойчивость, возможно решить в линейном приближении, то вторую задачу, связанную с определением характеристик процессов и поведения конструкции после потери устойчивости, необходимо решать только в нелинейной постановке.

Отметим еще один важный практический аспект использования указанных предельных характеристик, заключающийся в прогнозе огнестойкости элементов конструкций в условиях огневого воздействия при пожаре. За предел огнестойкости элементов строительных конструкций принимается время, отвечающее интервалу от начала огневого воздействия до появления одного из предельных состояний [1,2]. Для стандартных условий пожара рекомендована скорректированная зависимость на восходящей ветви распределения «температура – время» [2]:

$$T_p = 345 \cdot \psi \cdot \lg(8 \tau + 1), \quad (1)$$

где T_p – температура реального пожара, °С; τ – время от начала пожара, мин.; ψ – коэффициент коррекции.

Достаточно широко в современной периодике представлены методы определения огнестойкости по исчерпанию несущей способности в элементах строительных конструкций [1,2]. Отметим, что наряду с исчерпанием несущей способности возможно наступление предельного состояния, отвечающего потере устойчивости при температурном воздействии. В настоящее время практически отсутствуют работы, в которых изучены вопросы исследования огнестойкости, связанные с потерей устойчивости. Последнее замечание определяет актуальность темы исследования.

Если выполнить моделирование условий пожара для решения задачи по определению характеристик распределений тепловых источников и тепловых потоков, действующих на элемент конструкции, то далее задачу можно свести к расчету стержней и пластинок при неравномерном нагреве.

После потери термоустойчивости элементы конструкций не выходят их строя, если их деформации, возникшие от выпучивания, в условиях продолжающегося пожара по эксплуатационным требованиям допустимы при достаточном запасе прочности и выполняют функциональное назначение. Решение такой задачи позволит прогнозировать продолжительность остаточного ресурса конструкции при развивающемся пожаре.

Поэтому при решении первой задачи достаточно определить критическую температуру $T_{кр}$, отвечающую потере термоустойчивости пластинки, а далее из уравнения (1) вычислить время $\tau_{кр}$ достижения этой температуры.

Полученное значение времени $\tau_{кр}$ и представляет собой оценку предела огнестойкости стержневого или пластинчатого элемента конструкции в условиях реального пожара. В реальных условиях истинное значение предела огнестойкости, как правило, ниже по сравнению со значением, определенным из теоретического анализа термоустойчивости. Это связано с рядом факторов, которые условно можно разделить на две группы. К первой группе отнесем факторы случайной природы. Среди них можно выделить случайный характер тепловых процессов при пожаре, неконтролируемые отклонения в геометрических размерах конструкций (незначительные отклонения оси несущих стоек строительных конструкций от прямолинейной формы, отклонения в толщине днища резервуара и пр.), случайный разброс теплофизических и механических характеристик материалов. Вторая группа факторов, влияющая на предел огнестойкости элемента конструкции при потере устойчивости, носит детерминированный характер. К таким факторам можно отнести, например, температурную зависимость теплофизических и механических характеристик материала. Весьма характерна для механических параметров материалов зависимость их от высоких температур. Многообразная зависимость механических свойств материалов от воздействия тепла делает расчет стержневых и пластинчатых элементов достаточно сложным. Учесть влияние всех факторов, воздействующих на механические свойства материалов, при расчетах термпрочности и термоустойчивости в настоящий момент невозможно.

Для конструкционных сталей в интервале температур до 500°C зависимость модуля упругости достаточно корректно описывается линейной зависимостью $E = E_0 - \beta_{Г1}T$, где E_0 – модуль упругости материала при комнатной температуре; $\beta_{Г1}$ – коэффициент, зависящий от материала, для малоуглеродистой стали $\beta_{Г1} \approx 10^8 \text{ Н/м}^2 \cdot \text{град}$. Коэффициент линейного расширения α для большинства металлов и сплавов с повышением температуры возрастает. С достаточной для практических расчетов степенью точности такую зависимость можно аппроксимировать в виде линейной функции $\alpha = \alpha_0 + k_{\alpha}T$, где α_0 – коэффициент линейного расширения при комнатной температуре; для сталей $k_{\alpha} = 0,6 \cdot 10^{-8} \text{ град}^{-2}$.

Примем, что круглая стальная пластинка радиуса R и постоянной толщины h имеет шарнирно закрепленный наружный контур. Пластинка не нагружена внешней поперечной нагрузкой. Поэтому начало отклонения срединной плоскости, отвечает потере устойчивости, вызванной действием тепловых осесимметричных источников. Для определенности введем закон распределения стационарной температуры по поверхности пластины в виде параболического:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (2)$$

где T_0 – температура в центре пластинки.

Для линейной постановки задачи для прогибов $w = f(r)$ пластинки при осесимметричном изгибе необходимо получить условия ненулевого решения

следующего уравнения [3,4]:

$$D_T \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla^2 M_T + 2 \frac{dD_T}{dr} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} + \left(\nabla^2 D_T + \frac{1+\mu}{r} \cdot \frac{dD_T}{dr} \right) \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(\frac{\mu}{r} \cdot \frac{d^2 D_T}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dD_T}{dr} \right) \cdot \frac{dw}{dr} = 0. \quad (3)$$

Здесь $D_T = \frac{1}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(r, z) z^2 dz$ – цилиндрическая жесткость пластинки

при переменном модуле упругости за счет температурной зависимости;

$M_T = \frac{1}{1-\mu} \int_{-h/2}^{h/2} E(r, z) \alpha(r, z) T(r, z) z dz$ – изгибающий момент, вызванный тем-

пературным воздействием; μ – коэффициент Пуассона материала.

Для определения критических параметров, в частности, критической температуры – $T_{кр}$, необходимо проанализировать условия существования ненулевого решения уравнения в прогибах $w = f(r)$ [4] при соответствующих граничных условиях. Первое граничное условие в виду условий осевой сим-

метрии имеет вид – при $r = 0$; $\frac{dw}{dr} = 0$. Второе граничное условие выбирается

для конкретного опирания внешнего контура.

Для решения сформулированной задачи устойчивости при температурном воздействии применяются приближенные методы, в частности метод Бубнова-Галеркина [3]. Для случая шарнирного опирания контура решение уравнения (3) представим в виде произвольного степенного ряда:

$$v(r) = \left[(2+\mu) \cdot \rho - (1+\mu) \cdot \rho^2 \right] \cdot v_R + \rho(\rho-1)^2 \sum_{j=1}^n A_j \cdot \rho^{j-1}, \quad (4)$$

где $v = \frac{dw}{dr}$; $\rho = \frac{r}{R}$; v_R – значение угла поворота на контуре пластинки.

Найдем величину критической температуры $T_{окр}$, при достижении которой пластина теряет устойчивость. Примем линейный закон температурной зависимости модуля упругости и следующие параметры для расчета: $\mu = 0,3$; $\alpha = 0,12 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$; $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $h/R = 0,02$. Далее применяя схему метода Бубнова-Галеркина и ограничиваясь в разложении (4) двумя слагаемыми, получаем алгебраическое уравнение. Приближенное решение его приводит к критическому значению температуры $T_{окр} = 351$ °С. При постоянном модуле упругости ($\beta_T = 0$) критическое значение температуры равняется 493 °С. С учетом температурной зависимости модуля упругости материала критическая температура снижается на 28,2 %. Аналогичная тенденция наблюдается в расчетах термоустойчивости стержней.

Список литературы: 1. *Милованов А.Ф.* Огнестойкость железобетонных конструкций. – М.: Стройиздат, 1986. – 224 с. 2. *Фомін С.Л., Григор'ян Б.Б.* Розрахунок вогнестійкості будівельних конструкцій за реальним режимом пожежі // Бюлетень пожежної безпеки. – № 2. – 2002. – С. 9-10. 3. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – К.: Наук. думка, 1972. – 302 с. 4. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

Поступила в редколлегию 25.07.2005.

УДК 538.04

Л.В.АВТОНОМОВА, канд.техн.наук;
А.В.СТЕПУК, канд.физ.-мат.наук; НТУ «ХПИ»

ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

У роботі досліджені механізми деформування при впливі імпульсних магнітних полів. Показано, що: процес деформування металів неоднорідний через термічні ефекти скін-шару, що розігрівається; границя текучості росте від поверхні всередину металу, де досягає значень динамічної границі текучості; нульовий тиск магнітного полючи на поверхні металу не охороняє його від структурних змін при деформуванні.

Deformation mechanisms in pulse high magnetic fields are considered in the researching. The basic conclusions are as follows: non-uniformity of metals' deformation resulted on thermal effects of skin heating; raising of plasticity limit from surface to the sample depth up to its dynamic value; zero magnetic field pressure on surface does not prevent the metal structural modifications.

Основными механизмами пластической деформации при воздействии ИСМП являются скольжение и двойникование, причем каждый из них проявляется в зависимости от свойств деформируемых материалов, в различной форме и соответственно влияет на формируемые структурные свойства.

1. Анализ скольжения в металлах заключался в определении индексов кристаллографических плоскостей, по которым идет скольжение, числа таких плоскостей, а также взаимодействия дислокаций, действующих в разных системах. Как известно [1], условием действия какой-либо системы скольжения является достижение скальвующего напряжения по плоскости – критического, которое равно $t_{кр} = s \cdot \cos v \cdot \cos l$, где s – нормальное действующее напряжение; v – угол между направлением приложенного напряжения и нормалью к плоскости скольжения; l – угол между направлением приложенного напряжения и нормалью к плоскости скольжения. То есть действие тех или иных систем скольжения будет определяется фактором Шмидта – произведением $\cos v \cdot \cos l$.

Особенности скольжения изучались на монокристалле меди, выращенном в направлении [110] при деформации в ИСМП амплитудой 160 кЭ и дли-

тельностью 100 мкс. Монокристалл в виде конуса помещался в матрицу с таким же отверстием, жестко соединенную с плоским спиральным индуктором. Через индуктор от батареи конденсаторов пропускался ток амплитудой 80 кА и частотой 15 кГц. В результате обработки кристалл деформировался так, что плоское основание приняло вогнутую форму. На фотографиях, снятых после электролитического шлифования поверхности участков, смещенных на расстояния 2,7 и 3,9 мм от оси роста кристалла видно, что в первом случае полосы скольжения сгруппированы в равномерные пачки скольжения, а во втором проявляются дополнительные системы скольжения. Это вызвано влиянием краевых эффектов вблизи границы касания кристалла и матрицы - из-за наличия концентраторов напряжения. По дифрактограммам участков поверхности вблизи оси симметрии кристалла и вблизи жесткого закрепления с медной матрицей видно, что разориентировка субзерен в исходном состоянии и после обработки возрастает примерно в два раза. По величине уширения рефлекса (422) в приближении хаотического распределения дислокаций найдены размеры ОКР – 300 Å и 500 Å, а также плотность дислокаций $\rho = 10^8 \text{ см}^{-2}$ и 10^{10} см^{-2} , соответственно.

Для всех октаэдрических систем скольжения при ориентировке кристаллов по [110], а также и по [111] фактор Шмида имеет одно и то же значение – 0,41 и 0,27 соответственно. Поэтому увеличение скорости и величины деформации не может изменить число систем скольжения. Поскольку вблизи матрицы ориентировка действующих напряжений не совпадает с осью [110], то даже при малом, не равном нулю, факторе Шмида касательные напряжения могут достигать критических и становится возможным скольжение по кристаллографическим плоскостям, не входящим в совокупность {111}. В результате, кроме первичной системы скольжения с фактором Шмида 0,406 – {111} в направлении <101>, реализовывалась система скольжения с малым фактором Шмида 0,136 – {100} в направлении <001>. Угол между плоскостями семейства {111} и {100} составляет 35,4°. По микрофотографиям измеренные углы между полосами скольжения составляют $36 \pm 1^\circ$, что позволяет идентифицировать вышеуказанные системы скольжения. В поликристаллах число систем скольжения возрастает еще больше, поскольку каждое зерно испытывает фактически всестороннее нагружение.

2. Для двойникового характерен полярный направленный механизм процесса деформирования, то есть однородный сдвиг одной части кристалла по отношению к другой, параллельный какой-нибудь кристаллографической плоскости. Тогда при сжатии образца будут действовать те системы двойникового, которые приводят к отрицательной деформации, а при растяжении – к положительной. Давление, при котором начинается двойникование зависит от кристаллографического направления, в котором оно приложено. Двойникование в металлах с о.ц.к. решеткой обычно идет по кристаллографическим плоскостям {112} в направлении [111]. С повышением давления объемная

доля двойников быстро стабилизируется, причем знак приложенного напряжения, например при разгрузке, может вообще изменить характер процессов, происходящих при деформации. Температурная и скоростная зависимости критических касательных напряжений скольжения и двойникового свидельствуют о том, что с ростом температуры (уменьшением скорости деформирования) двойникование становится преобладающим механизмом. Наибольшую склонность к двойникованию проявляют металлы с о.ц.к. и г.п.у. решетками и сплавы с г.ц.к. решеткой, имеющие малую энергию дефектов упаковки.

Следы двойникования заметны на микрофотографиях шлифов α - β латуни (ЛС63) и стали 12Х18Н10Т после воздействия ИСМП амплитудой 230 кЭ и длительностью 150 мкс в многовитковом соленоиде с концентратором потока. Двойникование в первую очередь определяет уровень упрочнения в α -латунях и нержавеющей сталях. В α -Fe склонность к двойникованию проявляется при понижении температуры и повышении скорости деформации, то есть увеличении энергии магнитного поля. Стали с решеткой g-Fe, вследствие легирования, имеют малую энергию дефектов упаковки и поэтому также склонны к двойникованию. Однако низкая проводимость и большая глубина скин-слоя при воздействии ИСМП не позволяют эффективно деформировать их непосредственно магнитным полем.

3. Упрочнение. Среди факторов, влияющих на динамические свойства и необратимые изменения в структуре можно выделить как общие для любых видов деформирования: изменение плотности дислокаций и точечных дефектов, увеличение силы трения при движении дислокаций и высокой скорости деформирования в ИСМП; так и частные: свойства деформируемого материала - тип кристаллической решетки, температура плавления и рекристаллизации, энергия дефектов упаковки и др., условия деформирования – скорость, температура и схема нагружения. С этой точки зрения процесс деформирования в ИСМП существенно неоднороден, поскольку наблюдаемая деформация характеризуется высокой температурой в поверхностных слоях (джоулево тепловыделение) и высокими скоростями в глубинных (малая скорость проникновения тепловой волны). Такие особенности способствуют появлению новых систем скольжения, образованию двойников и дефектов упаковки. Эффект динамического упрочнения для одного и того же сплава будет зависеть от исходной структуры материала и от преобладающих механизмов деформирования, то есть скольжения или двойникования при воздействии ИСМП.

Известно, что при высокоскоростном деформировании повышаются предел текучести и временное сопротивление, а пластичность падает. Отличие диаграммы деформации высокоскоростной от низкотемпературной заключается лишь в меньшей разности между пределом текучести и временным сопротивлением. Кроме того, для углеродистых сталей появляется нижний и верхний пределы текучести, а диаграммы меди и алюминия и их сплавов –

латуни и дуралюмина принимают промежуточный характер между высоко- и низкотемпературными. Несмотря на различия в химических составах, в типах кристаллических решеток, температурах деформирования различных металлов, связь между температурой и скоростью деформирования в общем виде достаточно точно описывается соотношением [3,4]:

$$(\partial \ln \tau / \partial \ln \dot{\epsilon})_T / T \approx \sigma_T \cdot G_{T0} / \sigma_{T0} \cdot G_T, \quad (1)$$

где G_T – модуль сдвига при температуре T ; σ_T – предел текучести при температуре T ; $\dot{\epsilon}$ – скорость деформирования. Поскольку в ИСМП $T \approx K_1 \cdot W_M$ и $\dot{\epsilon} \approx K_2 \cdot W_M$, где W_M – энергия магнитного поля, из указанного соотношения легко получить, что в поверхностных слоях

$$(\partial \ln \tau / \partial \dot{\epsilon}) \approx K \cdot \sigma_T \cdot G_{T0} / \sigma_{T0} \cdot G_T, \quad (2)$$

Таким образом, зависимость предела текучести от энергии магнитного поля линейна (это не относится к слоям металла, лежащим на больших по сравнению с глубиной скин-слоя расстояниях от поверхности). Соотношение (2) подтверждается тем, что при численном моделировании деформирования в ИСМП конического кристалла меди принимался квазистатический предел текучести и линейное упрочнение. Интенсивность остаточных деформаций определялась по величине микротвердости. По экспериментальным результатам получено близкое соответствие расчетных и, измеренных по величине микротвердости, значений интенсивности напряжений.

На основе приведенных выше данных можно сделать следующие выводы:

- механизмы деформирования при воздействии ИСМП идентичны наблюдаемым при других видах высокоскоростного деформирования;
- процесс деформирования металлов существенно неоднороден из-за разогрева поверхностного скин-слоя;
- изменение предела текучести мало у поверхности и достигает динамического предела текучести в глубинных слоях металла;
- структурные изменения при деформировании в ИСМП протекают и на поверхности металла, где давление магнитного поля равно нулю.

Список литературы: 1. Бублик В.Т., Дубровина А.Н. Методы исследования структуры полупроводников и металлов. – М.: Металлургия, 1978. – 272 с. 2. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов: Справочник / Н.Н.Рыкалин, А.А.Углов, И.В.Зуев, А.Н.Кокора. – М.: Машиностроение, 1985. – 496 с. 3. Миркин Л.И., Смылова Е.П., Смыслов Е.Ф. Структура и свойства металлов после импульсных воздействий. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 168 с. 4. Действие излучения большой мощности на металлы / С.И.Анисимов, Я.А.Имас и др.; Под ред. А.М.Бонч-Бруевича и М.А. Ельашевича. – М.: Наука, 1970. – 272 с. 5. Спицын В.И., Троицкий О.А. Электропластическая деформация металлов. – М.: Наука, 1985. – 160 с. 6. А.Г.Григорьянц Основы лазерной обработки материалов. – М.; Машиностроение, 1989. – 304 с. 7. Короткина М.Р. Электромагнитоупругость. – М.; Изд-во МГУ. 1988. – 304 с. 8. М.Л.Бернштейн Структура деформированных металлов. – М.; Металлургия, 1977. – 431 с. 9. Воздействие лазерного излучения на материалы / Отв. ред. Е.П. Велихов. – М.: Наука. – 367 с. 10. Кольт Г., Фридман А. Сильные магнитные поля // УФН. – 1966. – Т. 88. – Вып. 4. – С. 703-723. 11. Шнейерсон Г.А. Поверхностный эффект в сверхсильном магнитном поле // ЖТФ. – Т. 37. – 1967. – № 3. – С. 513-522.

Поступила в редколлегию 18.07.2005.

СОДЕРЖАНИЕ

А.Г.АНДРЕЕВ, Н.К.РЕЗНИЧЕНКО Напряженно-деформированное состояние составных осесимметричных конструкций, собираемых с натягом при использовании нагрева	3
И.В.АНДРИАНОВ, А.О.ИВАНКОВ, М.В.МАТЯШ Аппроксимации паде и континуализация для одномерной цепочки масс	8
А.Е.БОЖКО, В.И.БЕЛЫХ, О.А.ЗАЛИЗНЯК Исключение влияния переменных режимов работы турбоагрегатов на процесс диагностирования комплексным методом	16
В.Н.БОРЩЕВ, В.А.АНТОНОВА, А.М.ЛИСТРАТЕНКО, С.М.ШКОЛЬНЫЙ Расчетные исследования каркасов панелей солнечных батарей космического аппарата	21
Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК Моделирование свойств материалов биомеханических систем: модели, подходы, численный эксперимент	29
С.М.ВЕРЕЩАКА К исследованию контактных напряжений при изгибе двухслойных пластин из стеклопластика с межфазными дефектами структуры	35
А.Ю.ВАСИЛЬЕВ К вопросу о деформировании корпусов транспортных средств при действии ударных нагрузок	42
Н.А.ГОГОЛЬ; О.В.НАЗАРОВА, А.В.ТКАЧУК, О.В.КОХАНОВСКАЯ К задаче формирования расчетных схем элементов технологических систем листовой штамповки	50
В.А.ЖОВДАК, А.Б.БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ Прогнозирование надежности рам тележек вагонов электропоездов	61
В.А.ЖОВДАК, Л.Ф.ТАРАСОВА Применение марковских моделей для расчета остаточного ресурса при усталостных отказах	70
О.О.ЗАМУЛА Урахування геометричної нелінійності у розрахунках на повзучість тонкостінних елементів конструкцій	77
С.П.ИГЛИН, А.Е.КУЛАЧЕНКО, А.М.СЯРОВ Сжатие гибкой сферической оболочки двумя плоскостями	83
А.Ф.КИРИЧЕНКО, В.А.БЕРЕЖНОЙ К вопросу об изменении жесткости прямых эвольвентных зубьев модифицированных в виде круговых канавок на торцах колеса	96
А.В.МАРТЫНЕНКО, А.В.ТКАЧУК, А.А.ЗАРУБИНА, А.Ю.ВАСИЛЬЕВ Расчетно-экспериментальное исследование элементов гидрообъемных передач	99
Е.Ю.МИСЮРА Нелинейное деформирование бронированного шланга	107
А.М.НАЗАРЕНКО, Б.Е.ПАНЧЕНКО, А.М.ЛОЖКИН Взаимодействие упругих волн с цилиндрической полостью в условиях плоской деформации	112

А.М.НИКИТИН Лазерная диагностика потоков. Часть 2. Параметры элементов оптических схем ЛДИС	118
В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, И.В.МИЩЕНКО, С.В.ОЛЬШАНСКИЙ Обратная задача баллистики свободной гидравлической струи	123
Е.В.ПЕЛЕШКО Интегральные характеристики напряженно-деформированного состояния корпусов транспортных средств специального назначения	128
А.С.ПЕТРОВ, М.Л.БУРКА, О.В.РОМАНЕНКО, В.И.НЕСТЕРЕНКО Способ определения угла перекоса оси колесной пары железнодорожного транспортного средства относительно продольной оси рельсовой колеи	134
В.О.ПОВГОРОДНИЙ Определение показателей надежности чувствительного элемента датчика давления – цилиндрического резонатора	139
М.К.РЕЗНИЧЕНКО, О.В.ЩЕПКИН До оптимального проектування коліс рухомого складу залізниць при технологічних та експлуатаційних навантаженнях	146
С.Ю.ПОГОРЕЛОВ, К.Ю.СЧАСТЛИВЕЦ Уточнение расчетной модели кольцевого лазерного гироскопа на основе экспериментальных данных	153
Э.А.СИМСОН, С.А.НАЗАРЕНКО, А.Ю.ЗЮЗИН Анализ чувствительности и оптимизация кварцевых резонаторов	158
Н.А.ТКАЧУК, Е.А.ОРЛОВ, Л.С.ЛИПОВЕЦКИЙ, А.Н.МАЛАКЕЙ К вопросу расчетно-экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем	162
М.А.ТКАЧУК, В.О.РАДЧЕНКО, Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК Узагальнений параметричний опис складних біомеханічних систем	173
Н.В.ШИРЯЕВА, К.В.АВРАМОВ Нелинейные изгибно-продольные колебания вращающихся стержней	180
В.Н.КОНКИН, В.И.ЛАВИНСКИЙ Термоустойчивость стержневых и пластинчатых элементов конструкций	184
Л.В.АВТОНОМОВА, А.В.СТЕПУК Особенности деформации металлов в сильных магнитных полях	188

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ «ХПІ»

Тематичний випуск
«Динаміка і міцність машин»
Збірник наукових праць № 47
Технічний редактор Щепкін О.В.

Обл.вид. № 122-05

Підп.до друку 22.10.2005 р. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.
Друк-ризографія. Гарнітура Таймс. Умов.друк.арк. 9,2. Облік.вид. арк. 12,3.
Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 311. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ «ХПІ», 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
