



ВЕСТНИК

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
«ХПИ»**

31'2004

Харьков

ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА "ХПИ"

Сборник научных трудов

Тематический выпуск

31'2004

«ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН»

Издание основано Национальным техническим университетом "Харьковский политехнический институт" в 2001 году

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:

Председатель

Л.Л.Товажнянский, д-р техн. наук, проф.

Секретарь координационного совета

К.А.Горбунов, канд. техн. наук

А.П.Марченко, д-р техн. наук, проф.;

Е.И.Сокол, д-р техн. наук, проф.;

Е.Е.Александров, д-р техн. наук, проф.;

Т.С.Воропай, д-р фил. наук, проф.;

М.Д.Годлевский, д-р техн. наук, проф.;

А.И.Грабченко, д-р техн. наук, проф.;

В.Г.Данько, д-р техн. наук, проф.;

В.Д.Дмитриенко, д-р техн. наук, проф.;

В.Б.Клепиков, д-р техн. наук, проф.;

П.А.Качанов, д-р техн. наук, проф.;

В.А.Лозовой, д-р фил. наук, проф.;

О.К.Морачковский, д-р техн. наук, проф.;

П.Г.Перерва, д-р техн. наук, проф.;

Н.И.Погорелов, д-р техн. наук, проф.;

М.И.Рыщенко, д-р техн. наук, проф.;

В.Б.Самородов, д-р техн. наук, проф.;

В.П.Себко, д-р техн. наук, проф.;

В.И.Таран, д-р техн. наук, проф.;

Ю.В.Тимофеев, д-р техн. наук, проф.;

А.Ф.Шеховцов, д-р техн. наук, проф.;

Т.С.Воропай, д-р фил. наук, проф.;

Е.Е.Александров, д-р техн. наук, проф.

Государственное издание

Свидетельство Госкомитета по инфор-

мационной политике Украины

КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ответственный редактор:

О.К.Морачковский, д-р техн. наук, проф.

Ответственный секретарь:

А.Г.Андреев канд. техн. наук, доц.

Е.Е.Александров, д-р техн. наук, проф.;

В.В.Бортовой, канд. техн. наук, доц.;

Ю.С.Воробьев, д-р техн. наук, проф.;

Е.Г.Голоскоков, д-р техн. наук, проф.;

О.О.Горошко, д-р физ.-мат. наук, проф.;

В.Б.Гринев, д-р техн. наук, проф.;

В.А.Жовдак, д-р техн. наук, проф.;

Г.И.Львов, д-р техн. наук, проф.;

В.Л.Остапенко, д-р физ.-мат. наук, проф.;

Л.А.Фильштинский, д-р техн. наук, проф.;

Ю.М.Шевченко, академик НАНУ

Адрес редколлегии: 61002, Харьков,

ул. Фрунзе, 21. НТУ "ХПИ".

Каф. ДПМ, Тел. (057) 707-68-79.

Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2004. № 31 – 192 с.

В збірнику представлені результати досліджень статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок.
Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены результаты исследований статической и динамической прочности элементов конструкций современных машин и энергетических установок.
Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

**Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ "ХПІ";
Протокол № 7 від 7 липня 2004 р.**

© Національний технічний університет "ХПІ"

К.В.АВРАМОВ, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

МЕТОД РАСЧЕТА БИФУРКАЦИОННЫХ ЛИНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

У статті запропоновано метод розрахунку біфуркаційних кривих механічних систем, що здійснюють прихильні коливання. Приклад розрахунку силової передачі розглядається у статті.

The method for bifurcation curves of forced oscillations of mechanical system is suggested in this paper. The example of transmission calculations is given.

Введение. Математическая теория бифуркаций хорошо разработанная область прикладной математики [1,2]. Здесь уже открыты основные бифуркационные явления и изучены многие их свойства. Для исследования бифуркаций в динамических системах различной физической природы разработана группа численных методов [3,4]. Однако применение этих методов к механическим системам даже с малым числом степеней свободы требует чрезвычайно больших ресурсов компьютеров. Отметим, что исследования бифуркационного поведения механических систем чрезвычайно важная инженерная задача, так как бифуркации приводят к срывам колебаний, к возникновению почти периодических движений с большими амплитудами

В этой статье предлагается численный метод исследования бифуркаций на плоскости параметров системы, ориентированный на механические системы с конечным числом степеней свободы. В этой статье приводится пример расчета бифуркационных линий участка силовой передачи.

Метод исследования бифуркаций. Колебания механической системы опишем дифференциальными уравнениями относительно переменных состояния в векторной форме:

$$\dot{y} = f(y, t, \pi_1, \pi_2), \quad (1)$$

где $f(y, t + T, \pi_1, \pi_2) = f(y, t, \pi_1, \pi_2) - T$ – периодическая функция по явно входящему времени; $y = (y_1, \dots, y_n)$ – вектор состояний динамической системы; n – размерность фазового пространства; π_1, π_2 – управляющие параметры динамической системы. На плоскости этих управляющих параметров производится анализ бифуркаций. Периодические колебания системы (1) удовлетворяют граничным условиям:

$$y(0) = y(T). \quad (2)$$

Эти граничные условия отражают условия периодичности. Отметим, что установившиеся состояния могут быть периодическими, почти периодическими и хаотическими. Эти граничные условия выделяют из всего множества установившихся состояний только периодические.

Решение системы (1) при $t = 0$ обозначим $y_0 = y(0)$, а решение в момент $t = T - y_T(y_0)$. В этой статье на плоскости параметров будут исследоваться бифуркационные линии, которые описываются мультипликатором $\rho = 1$ (седло-

узловая бифуркация) и $\rho = -1$ (бифуркация удвоения периода). Мультипликаторы определяются из уравнения

$$F(y_0, \pi_1, \pi_2) = \det \left[\frac{\partial y_T}{\partial y_0} - \rho E \right] = 0, \quad (3)$$

где $\partial y_T / \partial y_0$ матрица Якоби; E – единичная матрица. Отметим, что функция (3) в зарубежной литературе получила название функции ветвления. Граничные условия запишем в виде системы n нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора начальных состояний y_0 :

$$y_T(y_0) - y_0 = 0. \quad (4)$$

Бифуркационные линии на плоскости параметров описываются системой $n + 1$ нелинейных алгебраических уравнений (3,4). Предположим, что управляющий параметр π_1 задается, а параметр π_2 определяется из решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона [3]. Для реализации метода Ньютона рассчитывается матрица Якоби, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{0n}} & \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial \pi_2} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial y_{0n}} & \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial \pi_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial F}{\partial y_{0n}} & \frac{\partial F}{\partial \pi_2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Как показали численные исследования, проведенные автором этой статьи, использование конечно-разностных формул для расчета матрицы (5) приводит к плохой сходимости метода Ньютона, поэтому в этом исследовании мы применяем другой подход, основанный на получении системы дифференциальных уравнений, решения которых описывают элементы матрицы Якоби.

Одна из подматриц, входящая в (3), описывается системой уравнений в вариациях:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) = Df(y, t, \pi_1, \pi_2) \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_{t=0} = E. \quad (6)$$

Решения матричной системы (6) при $t = T$ является элементами матрицы Якоби. Отметим, что n элементов матрицы Якоби удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial \pi_2} \right) = Df(y, t, \pi_1, \pi_2) \left(\frac{\partial y}{\partial \pi_2} \right) + \frac{\partial f}{\partial \pi_2}; \quad \frac{\partial f}{\partial \pi_2} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Элементы матрицы Якоби $\frac{\partial F}{\partial y_{01}} \dots \frac{\partial F}{\partial \pi_2}$ содержат вторые производные

от вектора состояния y . В качестве примера приведем соотношения для $\partial F / \partial \pi_2$:

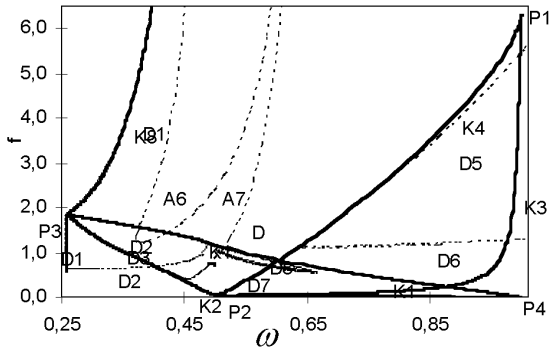


Рисунок 1 – Бифуркационные линии

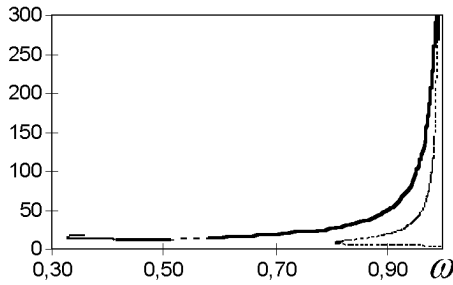


Рисунок 2 – АЧХ механической системы

$$\frac{\partial F}{\partial \pi_2} = \frac{\partial}{\partial \pi_2} \det \left[\frac{\partial y_T}{\partial y_0} - \rho E \right] =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_T^{(1)}}{\partial \pi_2 \partial y_0} & \dots & \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{0n}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y_T^{(n)}}{\partial \pi_2 \partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial y_T^{(n)}}{\partial y_{0n}} - \rho \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{0n}} - \rho & \dots & \frac{\partial^2 y_T^{(1)}}{\partial \pi_2 \partial y_{0n}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial y_T^{(1)}}{\partial y_{01}} & \dots & \frac{\partial^2 y_T^{(n)}}{\partial \pi_2 \partial y_{0n}} \end{bmatrix}.$$

Для определения этих производных составим системы дифференциальных уравнений, решения которой являются этими производными. Для получения этих систем (6, 7) дифференцируются относительно y_0 и π_2 . В результате получаем следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial y_{0l}} = Df(y, t) \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial y_{0l}} + D^2 f(y, t) \left(\frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0l}^2} \right)^2; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial y_{0l} \quad t=0} = 0;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial \pi_2} = D_y f(y, t) \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial \pi_2} + D_{y^2} f(y, t) \frac{\partial y}{\partial y_{0l}} \frac{\partial y}{\partial \pi_2} + D_{\pi_2 y}^2 f \frac{\partial y}{\partial y_{0l}}; \quad \frac{\partial^2 y_T}{\partial y_{0m} \partial \pi_2} = 0; \quad (9)$$

Используя решения уравнений (8) и (9) при $t = T$ и правило дифференцирования определителя получаем недостающие элементы матрицы Якоби. После расчета матрицы Якоби с помощью метода Ньютона определяем точку бифуркационной линии.

Для расчета всей бифуркационной линии воспользуемся алгоритмом продолжения, который изложен в статье работе [5].

3. Бифуркационные линии силовой передачи ДВС. Рассмотрим участок силовой передачи шестицилиндрового двигателя, который описывается дифференциальным уравнением с безразмерными параметрами и относительно безразмерных переменных:

$$\omega^2 \ddot{x} + 2\alpha\omega \dot{x} + H(x) = f \sin(t); \quad (10)$$

$$H(x) = \begin{cases} x + c(x + 1), & x > -1; \\ -1, -2\lambda - 1 < x < -1; \\ x + 2\lambda + c(x + 2\lambda + 1), & x < -2\lambda - 1, \end{cases}$$

где x – обобщенная координата, описывающая угол поворота коленчатого вала; m – момент инерции коленчатого вала; λ – величина зазора в шлицевом соединении. Возмущающая сила описывает крутящий момент, действующий на коленчатый вал. Безразмерные переменные имеют следующие значения: $\alpha = 0,005$; $\lambda = 5$; $c = 1$. Результаты расчетов бифуркационных линий представлены на рис. 1, а АЧХ, соответствующая этим бифуркационным линиям на рис. 2. На рис. 2 устойчивые колебания показываются сплошной линией, а неустойчивые пунктирной.

Заключение. В статье предложен метод для расчета бифуркационных линий в механической системе с произвольным, конечным числом степеней свободы. Приведен пример использования этого метода для исследования нелинейных колебаний участка силовой передачи.

Список литературы: 1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – М., 2002. – 600 с. 2. *Kuznetsov Y.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. – New York, 1996. – 643 P. 3. *Doedel E., Kelle H., Kernevez J.* Numerical Analysis and Control of bifurcation problems: (I) Bifurcation in finite dimensions // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. – № 1. 4. *Doedel E, Keller H., Kernevez J.* Numerical Analysis and Control of bifurcation problems: (II) Bifurcation in infinite dimensions // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. – № 1. 5. *Seydel R.* Tutorial on continuation // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1991. – № 1

Поступила в редколлегию 30.04.04

Л.В.АВТОНОМОВА, канд.техн.наук;
А.В.СТЕПУК, канд.физ.-мат.наук; НТУ «ХПИ»

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ И ТЕПЛОВОЙ ДИФФУЗИИ В МЕТАЛЛАХ

У роботі розглянута можливість локалізації енергії у металах при дифузії імпульсних магнітних полів. Досліджено характер розв'язання нелінійного параболічного рівняння при різних початкових і граничних умовах. Показано, що просторово-тимчасова локалізація енергії досягається в полях, що перевищують у 2-3 рази критичні, й при обмеженій швидкості наростання початкового магнітного поля.

It is considered the possibility for energy localization under the pulse magnetic field diffusion. The features of parabolic equation solutions under the vary initial and border conditions has been searched. It has been found that the energy time-space localization might be achieved in fields 2-3 times higher than critical ones and the limited time uprising for an initial magnetic field.

При воздействии на металл ИСМП с напряженностью магнитного поля, превышающей критическую, $H \geq H_C = \sqrt{2/\mu_0\beta}$, где $\beta = \alpha_p/c_v\rho$; α_p – температурный коэффициент сопротивления, диффузия магнитного поля становится существенной нелинейной. Уменьшение проводимости с ростом температуры $\sigma = \sigma(T_0)/(1 + \alpha T)$ приводит в этом случае к появлению локального максимума плотности тока $j = \sigma E$, смещающегося в глубь проводника, так называемому "пик-эффекту" [1,2]. Однако непосредственно этот эффект не приводит к локализации, т.е. ограниченности в пространстве и во времени, ни магнитного поля, ни джоулева тепловыделения. Чтобы это показать, можно рассмотреть особенности распространения максимума плотности тока для наиболее простого случая – диффузии магнитного поля в полупространство.

Система нелинейных параболических уравнений, включающая уравнения Максвелла и уравнение теплового баланса, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial E/\partial x &= -\partial H/\partial t; & \partial H/\partial t &= \partial[(\sigma\partial H/\partial x)/(1+\beta Q)]/\partial x; \\ \partial H/\partial x &= -j; \quad j = \sigma E/(1+\beta Q), \quad \text{или} & \partial j/\partial t &= \partial^2[j(1+\beta Q)/\sigma]/\partial x^2; \\ \partial Q/\partial t &= \sigma E/(1+\beta Q) & \partial Q/\partial t &= j^2(1+\beta Q)/\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

Используя далее разделение переменных $1+Q = \varphi(t) \cdot \phi(x)$ и то, что $\partial j/\partial x = 0$; $j = j_m(t)$, получим:

$$(\beta j_m^3/\sigma) dj_m/dt = j_m^2 \cdot d^2 j_m/dt^2 - (dj_m/dt)^2, \quad (2)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения относительно j_m после подстановки $y = dj_m/dt$; $d^2 j_m/dt^2 = y dy/dj_m$ получим в виде суммы общего и частного решений:

$$y = a j_m + \beta j_m^3/2\sigma; \quad j_m = \sqrt{2\sigma a / (\beta(e^{-2at} - 1))}, \quad \text{где } a < 0, \quad (3)$$

здесь при интегрировании по t пределы интегрирования взяты от ∞ до t .

Как видно из найденного, амплитуда плотности тока быстро затухает со временем, причем наименьшая скорость затухания достигается при $a = 0$. Для по-

лучения решения выполним предельный переход $a \rightarrow 0$. Тогда, $j_m = \sqrt{\sigma/\beta t}$. Оценивая величину напряженности магнитного поля в области максимума плотности тока, воспользуемся тем, что глубина скин-слоя $\delta = 2\sqrt{\chi t}$, где $\chi = 1/\sigma\mu_0$ – коэффициент диффузии магнитного поля [1]: $H_m \approx j_m \delta = 2/\sqrt{\mu_0\beta} = \sqrt{2} \cdot H_c$. В частности, для меди найдем: $j_m \approx 2,2 \cdot 10^5/\sqrt{t}$ [мкс] [А/мм²] и $H_m \approx 57 \cdot T$. Интегрируя далее уравнение теплового баланса с учетом найденных зависимостей, определим время, в течение которого протекание тока "максимальной" плотности вызовет плавление металла: $t = t_m \cdot (1 + \beta Q_n)/2$, где Q_n – удельная теплота при плавлении, и, например, для меди $t \approx 2t_m$, где t_m – определяется из $H_m(0, t_m) = H_c$. Как правило, длительность воздействия импульсов СМП с амплитудой, большей критического поля, не превышает $10^{-6} \dots 10^{-4}$ с. Поэтому влиянием "пик-эффекта" на процесс диффузии магнитного и теплового полей, в том числе плавление, можно пренебречь при $H/H_m < 2 \dots 3$.

Возможность локализации тепловыделения и магнитного поля в ограниченной области проводящей среды (например, металла) представляет практический интерес с целью достижения высоких плотностей энергии. При анализе нелинейного скин-эффекта [1,3,4] обычно используются граничные условия типа экспоненциальной или степенной функций: $H \approx t^\alpha$ или $H \approx e^{\alpha t}$ для $\alpha > 0$. Это приводит к реализации HS-режима (High Speed) электромагнитного и теплового полей, при котором $H(x,t)|_{t \rightarrow \infty} = \infty$; $\forall x \in [0, \infty)$. Однако, при определенных условиях возможно осуществление S и LS-режимов (Speed и Low Speed), для которых $H(x,t)|_{t \rightarrow \infty} = \infty$; $\forall x \in [0, x_s]$, (здесь x_s – так называемая эффективная глубина локализации [5]). Для получения необходимых граничных условий и соответствующей глубины локализации можно воспользоваться приближенными автомодельными решениями (п.а.р.), которые асимптотически сходятся к точным, и теоремами сравнения (леммы Негумо) решений нелинейных параболических уравнений.

Рассмотрим систему уравнений (1). Известно, что, если для квазилинейного параболического уравнения $u_t = (k(u)u_x)_x$ задан граничный режим без обострения, т.е. $u(t,0) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то для всех $x \in [0, \infty)$ при $t \rightarrow \infty$, $u(t,x) \rightarrow \infty$ и локализация отсутствует (HS-режим). Поэтому далее в качестве граничного условия выберем режим с обострением $\lim_{t \rightarrow \tau} u(t, x) = \infty$. Тогда, если $u \rightarrow \infty$ лишь при $x = 0$, то осуществляется LS-режим; если же для всех $x \in [0, x_s]$, то – S-режим. Зависимость проводимости от температуры, определяющая нелинейность процесса вплоть до плазменного состояния, является убывающей ограниченной функцией. Обычно полагают $\sigma = \sigma_0/(1 + \beta Q)$, где $Q = c, \theta$ – теплосодержание, или $\sigma = \sigma/(1 + H^2/H_c^2)$ [6]. Следовательно, можно приближенно считать, что нелинейная проводимость – это монотонно убывающая функция, ограниченная в пределах $\sigma_0 = \sigma(0) \geq \sigma(Q) \geq \sigma(Q_{пл}) = \sigma_m$ или $1/\mu\sigma_0 \leq k(u) \leq 1/\mu\sigma_m$ (здесь $k(u)$ – коэффициент диффузии квазилинейного параболического уравнения $u_t = (k(u)u_x)_x$).

Воспользуемся далее некоторыми свойствами решений таких уравнений [7]. Необходимым и достаточным условием финитности по x решения задачи Коши таких уравнений является сходимость интеграла $\int_0^1 k(u)du/u < \infty$. В данном случае

интеграл расходится и скорость распространения возмущения – электромагнитного и теплового – бесконечна. Эта особенность является следствием пренебрежения в уравнениях Максвелла токами смещения и незначительно влияет на распространение основного импульса СМП. В связи с этим строгая локализация магнитного поля и тепловыделения невозможна, так как для $x > 0$ при $t > 0$; $u > 0$ (здесь u – H или Q). Однако если множество $\Omega = \{x > 0; \lim_{t \rightarrow \tau} u(t, x) = \infty\}$ ограничено, то может иметь место эффективная локализация и $x_s = \text{mes } \Omega$ называют эффективной глубиной локализации. Этот эффект достигается для любого граничного режима с обострением при выполнении условия $\int_0^1 k(u)du/u < \infty$ согласно гипотезе, приведенной в [3]. В

частности для граничных условий $U_0(1 - t/\tau)^n$: – при $k(u) = k_0 u^\zeta$ реализуется LS-режим, если $n > -1/\zeta$; S – режим, если $n = -1/\zeta$ и HS-режим (локализация отсутствует), если $n < -1/\zeta$. Глубина локализации ограничена величиной $1 \leq x_s = \sqrt{2k_0 U_0 \zeta (2 + \zeta) / \zeta} \cdot \tau^{(1+n\zeta)/2}$ – при $k(u) = k_0$, $\zeta = 0$ реализуется LS-режим, если $n < 0$.

С учетом ограниченности и непрерывности изменения проводимости можно положить, что для коэффициента диффузии справедливо ограничение: $k_0 \leq k \leq k_m$. По теореме сравнения [7], если функции удовлетворяют неравенствам $\partial u_- / \partial t \leq A(u_-)$, $\partial u_+ / \partial t \geq A(u_+)$ в области $(0, T) \times \Omega$, где A – нелинейный параболический оператор и, кроме того, $u(0, x) \leq u_0(x) \leq u_+(0, x)$ и $\forall x \in \Omega$ и $u_-(t, x) \leq u_1(t, x) \leq u_+(t, x)$; $\forall t \in [0, T]$ и $x \in \delta\Omega$, тогда: $u_- \leq u \leq u_+$ в $[0, T] \times \Omega$. Следовательно, если u – решение уравнения $k(u) = k_0 u^\zeta$, а u_+ – уравнения $k(u) = k_m$, то они также будут соответствовать нижнему и верхнему решениям уравнения $k(u) = k$. Отсюда же следует, что для граничного режима с обострением $u(t, 0) = U_0(1 - t/\tau)^n$ при $0 > n > -1/2$ для решений этих уравнений осуществляется локализация – LS-режим. Эффективная глубина локализации будет при этом ограничена величиной $x_s = 2U_0 \sqrt{T/\mu\zeta_0}$, а граничное значение – зависеть только от n и ζ . Вводя в качестве параметра скорость возрастания граничного режима (логарифмическая производная), условия локализации для S- и LS-режимов можно представить следующим образом: $0 < \partial u / \partial t \leq 1/2(\tau - t)$. Если используются граничные условия без обострения, например, $U_0(t/\tau)^n$ для $U_0 > 0$; $n > 0$; $t > 0$, то автомодельное решение уравнения $u_t = (k_0 u^\zeta u_x)_x$ представимо в виде $u_a(t, x) = t^m \theta\left(x/\sqrt{t^{1+m\zeta}}\right)$. Здесь неизвестная функция θ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка после подстановки автомодельного решения в параболическое уравнение с граничными условиями $\theta(0) = 1$ и $\theta(\infty) = 0$. В этом случае глубина проникновения волны электромагнит-

ного и теплового поля $x_{ef} = \xi \sqrt{t^{1+m\xi}}$, где $\theta(\xi) = 1/2$ и, соответственно, какая-либо локализация этих полей отсутствует.

На рис. 1 представлены качественные зависимости магнитного поля, плотности тока и тепловыделения от времени для граничных условий с обострением (а) и без обострения (б). Глубина эффективной локализации x_s и траектория движения магнитного или теплового возмущения по уровню 0,5 от амплитуды показаны светлыми линиями. "Выход" на автомодельные закономерности, как показывают численные расчеты для подобных задач [5], устанавливается при росте граничной функции $u(t,0)$ в 5...10 раз по сравнению с начальным значением. Граничные режимы выявляют инерционность процесса диффузии магнитного и теплового полей, создавая и поддерживая соответствующие локализованные профили температуры и поля. В S-режиме скорость поступления энергии так согласована со свойствами среды, что поле распределяется по всему профилю. При более "медленном" подводе энергии поле сосредоточивается в основном вблизи границы, профиль получается более "вогнутым" и реализуется LS-режим.

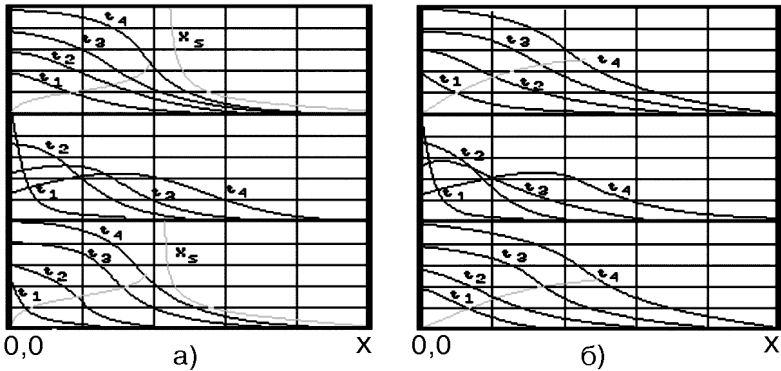


Рисунок 1 – Эволюция автомодельных решений нелинейного скин-эффекта ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$) для граничных режимов: а) без обострения – $H(0,t) = t^n$; $n > 0$; HS-режим; б) с обострением – $H(0,t) = (\tau - t)^{-n}$; $n > 0$; LS-режим

Формирование инерционных профилей происходит на глубине локализации, определяемой параметрами задачи. С приближением волны поля к границе области локализации выпуклый распространяющийся профиль перестраивается на вогнутый, что видно на рис. 1а. С этого момента проявляется эффект локализации: размер области с максимальной энергией изменяется весьма незначительно, полуширина постоянна или сокращается, тепловая и магнитная волны фактически не проникают за глубину локализации. При вводе энергии ИСМП в более быстром темпе, чем в случае S-режима, образуется выпуклый профиль напряженности магнитного поля и температуры, область, занятая волной поля, увеличивается, локализация отсутствует и реализуется HS-режим. Следует отметить, что действие граничных режимов без

обострения всегда создает выпуклые профили и локализация отсутствует.

Таким образом, эффект локализации электромагнитного и теплового полей связан не только со скоростью протекания процесса. Соотношение между темпом нагрева и поступления энергии магнитного поля, а также свойствами среды определяет характер формирующихся профилей поля – инерционных или не обладающих этим свойством. Локализация (инерция) тепла и магнитного поля дает возможность достижения высоких температур и высоких концентраций энергии в ограниченной части среды и удержания их в течение конечного времени практически без распространения из области локализации. Это свойство инерционности процесса диффузии при нелинейном скин-эффекте может быть использовано во многих приложениях.

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы:

– локализация плотности тока на фронте распространяющегося ИСМП ("пик-эффект") достигается в полях, превышающих критическую напряженность поля H_c , причем ее максимум по мере проникновения в глубину проводящей среды затухает пропорционально \sqrt{t} ;

– влияние пик-эффекта на плавление металла достигается в ИСМП, не менее чем в 2-3 раза превышающих H_c ;

– при воздействии ИСМП с обострением $\lim_{t \rightarrow \tau} H(t,0) = \infty$ на металл воз-

можно достижение локализации магнитного поля и джоулева тепловыделения в ограниченной приповерхностной области $H_j, Q(x,t)$;

– для достижения локализации за конечное время необходимо ограничить скорость нарастания ИСМП $\partial H(t,0)/H(0,0)\partial t \leq 1/2(\tau - t)$, при этом глубина эффективной локализации $x_s = 2H(0,0)\sqrt{\tau}/\sigma\mu$, а $H(t,x_s) = G$, где G – постоянная, зависящая только от n для граничного режима $H(t,0) = H_0(1 - t/\tau)^n$;

– верхний предел локализованной энергии и температуры в рассматриваемом приближении ограничен плотностью энергии испарения, поскольку при кипении металла в ИСМП уже необходим учет эффектов магнитной гидро- и газодинамики, кинетики испарения.

Список литературы: 1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. Методы генерации и физические эффекты, связанные с созданием импульсных полей мегаэрстедного диапазона. – М.: Мир, 1972. – 391 с. 2. *Miuro N., Herlach F.* Pulsed and Ultrastrong Magnetic Fields. – In [9]. – P. 247-349. 3. Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 200 с. 4. Биченков Е.И., Войтенко А.Е. Автомодельный электрический скиновый взрыв проводника. – ПМТФ, 1969. – № 3. – С.21-26. 5. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А.Д.Самарский, В.А.Галактионов, С.И.Курдюмов, А.П.Михайлов. – М.: Наука, 1987. – 480 с. 6. *Herlach F.* Megagauss Generators for Application to Solidstate Experiments. – In [63]. – P. 84-119. 7. Альтшулер Л.В. Применение ударных волн в физике высоких давлений // УФН, 1965. – Т. 85, Вып. 2. – С. 197-258. 8. Сахаров А.Д. Взрывомагнитные генераторы // УФН, 1966. – Т. 88, Вып. 4. – С. 725-734.

Поступила в редколлегию 30.04.04

В.Н.АЛТУХОВ, канд.техн.наук, Донбасский
горно-металлургический институт

К ВОПРОСУ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЦЕНТРОБЕЖНО-УДАРНЫХ ДРОБИЛОК

Стаття присвячена дослідженню закономірностей робочого процесу роторних дробарок, вибору оптимальних структури і параметрів, що забезпечують зниження динамічних навантажень і підвищення технічного рівня дробильних машин. У роботі дане нове рішення актуальної наукової задачі, що полягає в розвитку теорії робочих процесів роторних дробарок, що дозволяє на стадії проектування встановити раціональну структуру і параметри дробарки, прогнозувати енергетичні характеристики процесу дроблення, продуктивність і гранулометричний склад продукту для конкретних умов експлуатації.

The article is devoted to the research of the working process of rotary crushers, choice of the optimum structure and parameters providing lowering of dynamic loads and rise of the technological level of crushing engines. In operation the new solution of the actual scientific task encompassing by development of the theory of working process of rotary crushers allows to install the rational structure and parameters of the crusher at the stage of designing, to forecast the power characteristics of the process of subdivision, productivity and grain composition of the product for the concrete operation conditions.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами.

Потребность в дробильно-измельчительном оборудовании в металлургической, горнорудной, строительной, химической и других отраслях промышленности, использование вторичного сырья в условиях, когда основные разработчики и производители дробильной техники расположены за пределами Украины, определяют актуальность разработки нового и совершенствование известного дробильного оборудования. Сокращение энергопотребления и повышение эффективности производства является важной научной и практической задачей, что особенно важно в условиях роста добычи полезных ископаемых.

Правильный выбор дробильно-измельчительной машины позволяет оптимизировать процесс дробления, снизить энергозатраты, рационально использовать природные ресурсы, улучшить условия производства и проживания людей. Использование улучшенных конструкций и рациональных режимов работы дробильно-измельчительных машин позволит использовать энергию без расходования ее на лишнее переизмельчение материала, что сократит энергозатраты на 20-50 %.

Эффективность работы и низкие энергозатраты при дроблении материала в центробежно-ударных дробилках ставят их в ряд наиболее перспективных. Преимущества дробления хрупких материалов свободным ударом отмечались исследователями [1,2,3], однако широкое применение машин с принудительным разгоном материала сдерживается отсутствием освоенных технических решений и трудностью обеспечения требуемого гранулометрического

состава готового продукта.

Анализ последних достижений и публикаций, в которых начато решение данной проблемы и на которые ссылается автор.

В публикациях [1,2,3] отмечаются высокие показатели работы центробежно-ударных дробилок (в сравнении с другими типами дробилок - меньшие энергозатраты, высокая производительность, низкий удельный износ контактных поверхностей). При этом, в связи с отсутствием оптимизации параметров работы машин (хаотичность распределения материала в рабочей камере, несогласованность энергии разрушения с физико-механическими свойствами материалов и их структурой, трудностью подачи материала в рабочую камеру в оптимальном количестве) наблюдается значительный разброс по крупности дробленого материала, что существенно ограничивает область применения дробильного оборудования такого типа.

Разработаны различные конструктивные варианты по реализации свободно-го удара в центробежно-ударных дробилках. В рабочей камере транспортировка материала к отбойным плитам может осуществляться однопоточным способом без разделения потока внутри рабочей камеры [2], однопоточным способом с разделением потока материала [4] и двухпоточным способом [5, 6]. Двухпоточное дробление материалов в дробилках с разгонным ротором показало возможность расширения технологических показателей, снижения энергоемкости и металлоемкости. Усовершенствование конструкции роторно-ударной дробилки позволяет улучшить гранулометрические характеристики готового продукта, снизить запыленность помещения, расширить область использования дробилок такого вида, повысить производительность, снизить энергозатраты.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящается данная статья.

Неясность некоторых теоретических закономерностей сдерживает широкое применение центробежно-ударных дробилок, не дает возможности выявить оптимальный путь совершенствования машин, сократить затраты на проектирование новой техники, снизить себестоимость готового продукта. Не решена проблема взаимосвязи между размерами рабочей камеры центробежно-ударной дробилки, частотой вращения ротора и силой удара кусков измельчаемого материала об отбойное кольцо; существует значительное расхождение по гранулометрическому составу готового продукта у различных исследователей; имеются трудности по выбору оптимальной конструкции центробежно-ударной дробилки для измельчения различных материалов, отсутствуют четкие рекомендации по реализации при дроблении прямого удара материала об отбойное кольцо.

Формулирование целей статьи (постановка задачи).

Целью статьи является исследование особенностей процесса дробления материалов и работы центробежно-ударных дробилок, теоретический анализ связи между размерами центробежно-ударной дробилки, частотой вращения ротора и

силой удара кусков измельчаемого материала об отбойное кольцо; изучение granulometric composition готового продукта при измельчении доменного шлака на однопоточной роторной дробилке; повышение производительности и снижение энергозатрат при дроблении материала; повышение эффективности дробления за счет реализации принципа приоритетности единичного удара; оптимизации конструктивного выполнения отбойных колец с целью реализации при дроблении прямого удара кусков материала об отбойное кольцо.

Изложение основного материала исследования с полным обоснованием полученных научных результатов.

Сложность задачи по расчету энергоемкости процесса измельчения заключается в том, что в настоящее время нет аналитических методов, позволяющих определить количество и размер частей, на которые распадается исходный кусок материала, находящийся под известными силовыми воздействиями. При этом измельчаемый материал обычно представлен в виде сыпучей среды, состоящей из однородных по химическому составу, но весьма разнородных по форме и размеру отдельных кусков. Трудности точного расчета энергозатрат на измельчение в значительной степени обусловлены хаотическим распределением кусков материала между собой и значительным влиянием на процесс разрушения дефектов структуры материала, скрытых и видимых трещин.

Повысить эффективность измельчения материала можно путем обеспечения условий для реализации в центробежно-ударных дробилках прямого удара, при котором вектор скорости куска измельчаемого материала в начале удара направлен по нормали к поверхности отбойного кольца.

Известно [3], что теоретическая скорость вылета кусков измельчаемого материала V из ротора с радиальными лопастями (без учета сил трения) в $1,41$ раза больше окружной скорости V_n концов лопастей. А с учетом коэффициента трения f между измельчаемым материалом и лопастями ротора V больше V_n в $1,25-1,62$ раза.

Окружная скорость V_n , м/с

$$V_n = \frac{\pi n R}{30},$$

где n – частота вращения ротора, об/мин;

R – радиус окружности, описываемой концом лопасти, м.

Поскольку отбойные кольца закреплены на корпусе дробилки, а сама дробилка закреплена на фундаменте, то можно считать, что отбойные кольца до и после удара об них измельчаемого материала неподвижны (вибрацию в расчете не учитываем). В процессе работы центробежной дробилки куски измельчаемого материала под действием сил инерции движутся в направлении отбойных колец со скоростью V и ударяются в отбойные кольца.

Согласно теореме Карно [8], кинетическая энергия, потерянная телами при неупругом ударе, равна кинетической энергии тел, соответствующей их потерянными скоростям.

Рассматривая удар измельчаемого материала об отбойное кольцо, запишем уравнение кинетической энергии:

$$T_o - T = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_{\kappa}^2}{2},$$

где T_o – кинетическая энергия материала до удара;

T – кинетическая энергия разрушенных частиц материала после удара;

m – масса материала;

V_{κ} – средняя скорость частиц после удара измельчаемого материала об отбойные кольца и его разрушения.

Ориентировочно скорость частиц материала после удара и разрушения на два порядка меньше скорости измельчаемого материала до удара, поэтому можно считать, что кинетическая энергия материала T после удара составляет 1-2 % от T_o .

Как известно [8], коэффициент полезного действия машины равен отношению полезной работы к работе, затрачиваемой на приведение машины в движение. В данном случае полезной является работа, израсходованная на разрушение измельчаемого материала. Эта работа равна потере кинетической энергии материала при ударе.

Работа A , израсходованная на разрушение измельчаемого материала

$$A = (0,98-0,99)T_o$$

Таким образом, работа A будет зависеть от массы измельчаемых кусков материала, при этом, если кусок материала будет иметь малую массу, то работа A может быть недостаточна для разрушения материала. Нужно отметить, что попадающиеся в исходном материале мелкие частицы и без измельчения уже могут иметь крупность, аналогичную крупности готового продукта.

Изменение скоростей исходных кусков измельчаемого материала при ударе связано с большими ударными ускорениями, возникновение которых требует больших ударных сил. Ударная сила быстро возрастает от нуля, в момент начала удара, до максимального значения, затем так же быстро уменьшается, обычно по другому закону, до нуля в конце удара.

При ударе кусков измельчаемого материала об отбойные кольца в месте их соприкосновения возникают деформации, и, следовательно, перемещения частиц материала, обусловленные деформациями [9]. Деформацией отбойных колец, ввиду малых величин, можно пренебречь. А деформация кусков материала приводит к их разрушению. Если считать, что работа, израсходованная на разрушение, будет выполнена ударной силой F на перемещении S , то

$$A = FS.$$

Тогда ударная сила F

$$F = A/S.$$

Из данной зависимости следует, что ударная сила F будет тем больше, чем меньше перемещение S . При ударе об отбойное кольцо измельчаемый материал вступает в контакт с преградой и получает точку опоры, в то же время на боковых участках куска материала точки опоры нет, и распределенная на куске материала сила F стремится отколоть частицы материала от исходного куска. Особенность разрушения материала состоит в разрыве связей, осуществляющих сцепление в

материале. Если возникающие напряжения больше допусковых материалом, то частицы откалываются и происходит разрушение исходного куска материала. Сложность данного расчета состоит в том, что на различных участках измельчаемого материала могут возникать напряжения сжатия, сдвига, изгиба, растяжения, смятия. Какой конкретно вид напряжений приведет к разрушению материала, будет зависеть от многих факторов: геометрической формы кусков исходного материала; конфигурации поверхностей отбойных колец и кусков материала, контактирующих друг с другом в момент удара; вида удара (прямой или косой); прочности связей между частицами в исходном материале; наличия дефектов структуры материала, скрытых и видимых трещин.

Для реализации в центробежных дробилках прямого удара на отбойных кольцах можно выполнить зубчатую футеровку. На рис. 1 показана схема движения куска материала, движущегося с лопасти ротора к отбойному кольцу. Для обеспечения прямого удара рекомендуется брать угол подъема зубьев равным $47 - 56^\circ$ по направлению вращения ротора [6]. Схема профилирования зубьев футеровки представлена на рис. 2.

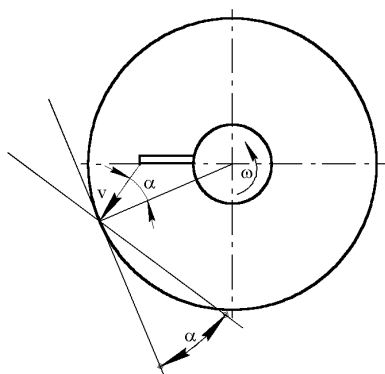


Рисунок 1 – Схема движения куска материала

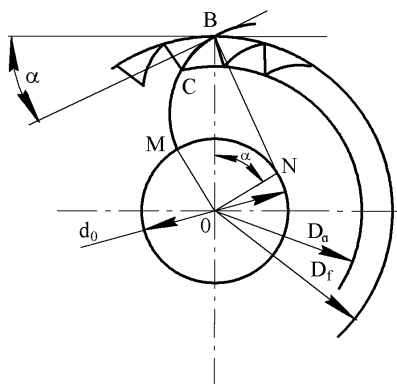


Рисунок 2 – Схема профилирования футеровки.

Поскольку при отдалении эвольвенты от оси ротора угол α между касательной к эвольвенте в рассматриваемой точке и касательной к окружности, проходящей через эту точку, уменьшается, то, для обеспечения наиболее эффективного процесса дробления путем реализации прямого удара, угол α между касательной к эвольвенте в точке B и касательной к окружности диаметром D_f , проходящей через точку B , должен быть не менее 47° , а угол α между касательной к эвольвенте в точке C и касательной к окружности диаметром D_a , проходящей через точку C , должен быть не более 56° . Профиль зубьев футеровки выполняется по эвольвенте, эволютой которой является окружность с диаметром d_o , определяемым по формуле:

$$D_f \sin 47^\circ \geq d_o \geq D_a \sin 56^\circ,$$

где D_a и D_f – соответственно диаметры окружностей вершин и впадин зубьев футеровки.

Изготовление такой футеровки несложно, поскольку не требуется высокой точности и можно ее получать литьем.

В Научно-исследовательском и проектно-конструкторском институте проблем дробления и измельчения материалов при Донбасском горно-металлургическом институте (г. Алчевск) при испытаниях опытного образца роторно-ударной дробилки для рудных и нерудных материалов, разработанной под руководством Королева П.П., (в этой дробилке транспортировка материала к отбойным плитам осуществлялась однопоточным способом без разделения потока внутри рабочей камеры), была достигнута производительность 12,3 т/ч при измельчении доменного шлака (крупность исходного материала от 40 до 120 мм, влажность – 8,4 %). Угловая скорость ротора 30,7 с⁻¹. Мощность установившегося режима холостого хода – 16,3 кВт. Мощность рабочего хода: 36,841 кВт. Энергозатраты при дроблении составили 2,9-3,4 кВтч/т. Среднеарифметический гранулометрический состав по пяти пробам приведен в таблице 1.

Таблица 1 – Гранулометрический состав при измельчении доменного шлака

Размеры ячеек сит, мм	20	10	5	2,5	1,6	1,0	0,63	0,4	0,316	0,2	0,16	0,1	0,063	0,05
Остаток на ситах, %	8,6	5,4	22	12,1	8,9	8,0	7,1	6,6	4,5	5,3	3,4	2,4	2,8	3
Суммарный %	100	91,4	86	64	51,9	43	35	28	21,4	16,9	11,6	8,2	5,8	3,6

Недостатком такой мельницы является то, что при высокой производительности материал будет перемещаться по диску в несколько слоев, тогда верхние слои материала будут иметь скорость меньше, чем у нижнего слоя, что ухудшает процесс дробления.

Так, анализ проведенных экспериментальных исследований [6] двухпоточной роторно-ударной дробилки показал, что оптимальной производительностью дробилки является 10-12 т/ч. Гранулометрический состав дробленого материала (при оптимальной производительности) при загрузке двумя потоками по сравнению с гранулометрическим составом материала, дробленого при оптимальной однопоточной загрузке, имеет небольшое (до 2-3 %) смещение в сторону более крупных фракций.

Это обусловлено тем, что периодически материал, перемещаемый по нижней ступени, будет попадать в отскачившие от отбойного кольца и па-

дающие вниз разрушенные частицы материала верхней ступени, что понизит эффективность измельчения.

При достижении на двухпоточной дробилке мгновенной производительности в 21,7 т/ч степень дробления исходного материала резко снизилась, было зафиксировано множество кусков крупностью 40 мм и более.

Это обусловлено тем, что при высокой производительности материал будет перемещаться по обеим дискам ротора в несколько слоев, тогда верхние слои материала будут иметь скорость меньше, чем нижние, кроме того, когда перемещаемого материала много, он, при движении к отбойной плите, будет ударяться об куски материала, отскочившие от отбойной плиты, и разрушаться значительно хуже, чем при ударе об отбойную плиту.

Этот недостаток устранен в дробилке [3], которая показана на рис. 3.

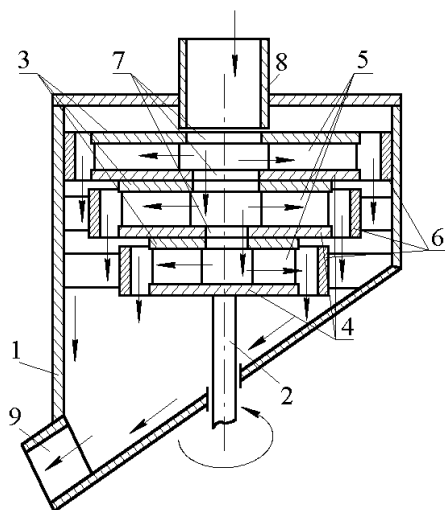


Рисунок 3 – Центробежная дробилка

Указанная дробилка реализует принцип приоритетности единичного удара. Она содержит корпус 1, внутри которого установлен ротор 2. Дробилка содержит несколько ступеней измельчения, каждая из которых выполнена в виде установленных на роторе верхнего 3 и нижнего 4 дисков, между которыми расположены разгонные перегородки 5, и размещенного в корпусе отбойного кольца 6. Каждая ступень измельчения снабжена центральным загрузочным отверстием 7. Диаметры дисков 3 и 4, центральных загрузочных отверстий 7 и отбойных колец 6 уменьшаются по ступеням в направлении сверху вниз. В верхней части корпуса 1 установлена загрузочная воронка 8, а в нижней части корпуса выполнен разгрузочный желоб 9.

В связи с тем, что измельчаемый материал распределяется на потоки внутри ротора, а затем ударяется при вылете из него об соответствующие отбойные кольца (контакт продукта с вновь вылетающим материалом исключен), конечный

продукт имеет более ровный гранулометрический состав. При этом максимально исключается многослойность удара и значительно улучшаются условия разрушения материала, однако сложность конструкции возрастает.

Работая как центробежный вентилятор, роторно-ударная дробилка формирует устойчивый воздушный поток, который играет отрицательную роль как носитель пыли. Поток определяется конструкцией ротора, загрузочного и разгрузочного устройств и рабочей камеры, где происходит дробление. Снизить объем воздушного потока можно путем искусственного создания замкнутых воздушных потоков внутри дробилки.

Современное дробильно-измельчительное оборудование по своим санитарно-гигиеническим показателям полностью не удовлетворяет установленным требованиям и нормам обеспечения нормальных условий работы обслуживающего персонала. Дробление и измельчение материалов связано со значительным шумом, вибрацией, пылеобразованием. Внесение усовершенствований в существующие конструкции машин, а также разработка новых, может позволить одновременно с повышением эффективности процесса измельчения улучшить динамические характеристики машин, уменьшить шум, вибрации, снизить пылеобразование.

Выводы из данного исследования и перспективы дальнейших работ в данном направлении.

Теоретическое исследование особенностей процесса дробления материалов в центробежно-ударных дробилках позволило получить зависимость ударной силы F от размеров ротора центробежно-ударной дробилки и его частоты вращения, получены результаты по гранулометрическому составу готового продукта при измельчении доменного шлака на однопоточной роторной дробилке; исследованы возможности повышения эффективности дробления материалов за счет реализации принципа приоритетности единичного удара при высокой производительности и низких энергозатратах, проведена работа по реализации в центробежно-ударной дробилке прямого удара путем выполнения зубчатой футеровки, причем профиль зубьев выполняется по эвольвенте.

Учитывая пониженные энергозатраты на измельчение в центробежных дробилках и их высокую производительность, целесообразны дальнейшие теоретические и экспериментальные работы в этом направлении.

Список литературы: 1. Барон Л.И., Хмельковский И.Е. Разрушение горных пород свободным ударом. – М.: Наука, 1971. – 203 с. 2. Создание опытного образца роторно-ударной ДИМ для рудных и нерудных материалов производительностью до 10 т/ч: Отчет о НИР/НИПКИ «Параметр» при ДГМИ: Руководитель П.П. Королев. – Тема № 4: ГР № 0193 У024515. Инв. № 0294И002393. – Алчевск, 1993. – 17 с. 3. Оскаленко Г.Н. Исследование дробления и измельчения силикатных и других материалов в центробежной роторной мельнице-дробилке: Автореф. дисс. канд. техн. наук: 05.05.06. – Днепропетровск, 1965. – 27 с. 4. А.с. № 1808372 СССР. Центробежная дробилка /В.Н. Алтухов. - № 4915172/33. Заявлено 15.04.93. Опубл. 10.10.92. – Бюл. № 14. 5. Королев П.П., Алтухов В.Н., Левченко Э.П. Разработка и исследование роторно-ударной дробилки. / Сб. научных трудов Национальной горной академии Украины. – Днепропетровск, 2002.

– № 13. – С. 36-39. 6. *Королев П.П., Алтухов В.Н. Левченко Э.П.* Исследования по роторно-ударным дробилкам / Сборник научных трудов Донбасского горно-металлургического института. Вып. 16. – Алчевск: ДГМИ, 2002. – С. 180-184. 7. А.с. № 1761265 СССР. Центробежная дробилка / *П.П. Королев, В.Н. Алтухов, А.Н. Онощенко.* -№ 4887543. Заявлено 04.12.90. Опубл. 15.09.92. – Бюл. № 34. 8. *Яблонский А.А., Никифорова В.М.* Курс теоретической механики. – М.: Издательство «Лань», 2002. – 768 с. 9. *Багян Э.Р.* Исследование и разработка способа механического дробления хрупких материалов свободным ударом с использованием центробежного ускорителя. Автореф. дис.канд. техн. наук. Институт геотехнической механики АН УССР. – Днепропетровск, 1986.

Поступила в редколлегию 15.04.2004.

УДК 534.1

А.Б.БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, НТУ «ХПИ»

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАМ ТЕЛЕЖЕК ВАГОНОВ МЕТРОПОЛИТЕНА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Розглядається задача визначення стохастичних характеристик рам візків вагонів метрополітену при випадковому впливі, викликаному нерівностями шляху, з урахуванням запізнювання. Зовнішній вплив моделюється стаціонарним випадковим процесом. Розрахунок виконано методом кінцевих елементів і методом спектральних представлень, використовувався програмний комплекс ANSYS 6.0. Також розроблена програма на мові Турбо Паскаль для розрахунків запізнювання.

The problem of definition of probability performances of the bogie frames of transit vehicles at random action with delay is considered. The random action is caused by track irregularities. The external load is modelled by the stationary random process. The calculation is executed by the finite element method and the method of spectral representations. The program system ANSYS 6.0 was used. Also the program on Turbo Pascal for delay has been developed.

1. Постановка задачи

Эта работа является продолжением исследований по случайным колебаниям рам тележек вагонов метрополитена с учетом неровности пути [1]. В работе исследуются вынужденные колебания рамы тележки вагона метрополитена ЕЖ-3 при случайном воздействии, вызванном неровностями пути, с учетом запаздывания. Движущийся вагон испытывает действие разнообразных возмущений, главными из которых являются воздействия со стороны пути. Последние зависят от многих, в большинстве случайных, факторов, таких как: непостоянство по длине пути его инерционных, упругих и диссипативных свойств, наличие люфтов, просадок, стыков, неравномерного износа рельсов, ползунов, дисбаланса и других несовершенств колес, воздействие воздушной среды и т.д. Пусть возмущения, действующие на вагон, состоят из ряда некоррелированных между собой составляющих. При этом выражение

для спектральной плотности записывается в виде

$$S(\omega) = \sum_{r=1}^m S_r(\omega), \quad (1)$$

где $S_r(\omega)$ – спектральная плотность r – ой составляющей возмущения, m – число составляющих.

Для спектральных плотностей наиболее существенных составляющих из (1) при исследовании вынужденных колебаний вагонов метрополитена с учетом запаздывания в качестве случайного воздействия в работе используются широкополосные случайные неровности, которые моделировались процессом типа белый шум по ускорению с интенсивностью $0,016 \text{ м}^2/(\text{с}^4\text{Гц})$ [2].

Уравнение вынужденных колебаний конечно-элементной модели конструкции рамы тележки вагона метрополитена при случайном воздействии, вызванном неровностями пути, записывается в виде:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = -(MA + M_1)\ddot{\eta}, \quad (2)$$

где M , C , K – матрицы масс, демпфирования и жесткости конечно-элементной модели (КЭМ) конструкции, A – матрица псевдостатических коэффициентов влияния, определяемая соотношением $A = -K^{-1}K_1$, M_1 и K_1 – подматрицы, позволяющие выразить усилия, действующие на систему, через известные ускорения и перемещения кинематически возбуждаемых отметок конструкции, q – вектор обобщенных перемещений КЭМ, $\ddot{\eta}$ – вторая производная от неровности по времени.

Решение уравнения (2) представим в виде ряда по формам собственных колебаний:

$$q = \sum_{i=1}^n y_i \phi_i, \quad (3)$$

где n – число степеней свободы системы, ϕ_i – вектор i -й собственной формы колебаний, y_i – коэффициент разложения в ряд, зависящий от времени.

При подстановке выражения (3) в (2) получаем систему независимых дифференциальных уравнений:

$$\ddot{y}_i + 2\xi_i \dot{y}_i + p_i^2 y_i = F_i, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (4)$$

где n – число степеней свободы системы, p_i – i -я собственная частота, ξ_i – модальный коэффициент затухания, F_i – модальная нагрузка, которая определяется по формуле:

$$F_i = G_i^T \ddot{\eta}, \quad (5)$$

где $G_i = -(MA + M_1)^T \phi_i$.

Конструкция рамы тележки вагона была разбита на пластинчатые 4-х узловые конечные элементы.

Аппроксимирующий полином для узловых перемещений пластинчатого конечного элемента имеет следующий вид:

$$w(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 +$$

$$+ a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 x y^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y + a_{12} y^3 x, \quad (6)$$

где $\overline{a_1, a_{12}}$ - константы полинома, которые определяются с помощью узловых значений функций перемещений.

Конструкция рамы с разбивкой на конечные элементы представлена на рис. 1.

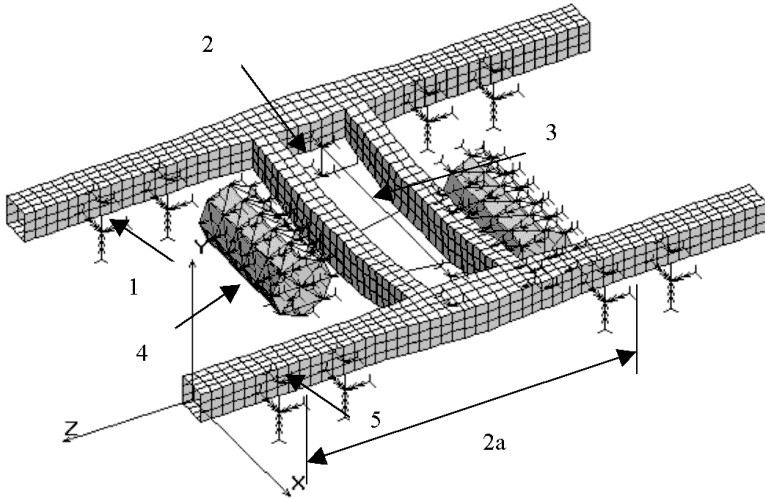


Рисунок 1 – Конструкция рамы: 1 – пружина буксового подвешивания (8 шт.), 2 – пружина центрального подвешивания с массой кузова вагона, 3 – центральная балка, 4 – тяговый электродвигатель, 2а – база тележки (расстояние между колесными парами).

2. Исследование собственных колебаний

Решение задачи нахождения собственных частот и форм колебаний конструкции сводится к решению частотного уравнения и уравнения форм соответственно [1,2]:

$$\det(K - p^2 M) = 0; \quad (7)$$

$$(K - p^2 M)q_0 = 0, \quad (8)$$

где p – вектор, содержащий собственные частоты конструкции.

В отличие от работы [1], в этой работе используется обычная матрица масс, которая включает помимо диагональных и недиагональные элементы. Значения первых четырех собственных частот рамы тележки вагона метрополитена, полученных в этой работе и в работе [1], представлены в табл.1.

Как видно из табл. 1, различия в значениях первой собственной частоты, полученных с использованием двух моделей матриц масс, составляет 0,67 %. Это обстоятельство объясняется тем, что форма колебаний на первой собственной частоте соответствует подпрыгиванию кузова вагона [1], т.е. в формуле (7) участвует диагональный элемент матрицы масс. По этой же причине отличие в значе-

ниях для третьей собственной частоте составляет 3,5 %. Для второй и четвертой собственных частот отличие в значениях составляет 68% и 3.5% соответственно, поскольку формы собственных колебаний соответствуют боковой качке вагона [1]. Поэтому в (7), помимо диагональных, будут участвовать и недиагональные элементы матрицы масс – массовые моменты инерции, которые не учитывались в [1]. Это делает расчет собственных частот тележки более достоверным.

Таблица 1 – Собственные частоты рамы тележки

№ частоты	Значение частоты, Гц		Отличие, %
	обычная матрица масс	диагональная матрица масс	
1	1,49	1,48	0,67
2	2,79	1,66	68
3	5,72	5,52	3,5
4	7,89	7,51	4,82

3. Исследование случайных колебаний системы с учетом запаздывания

Задача случайных колебаний решается методом спектральных представлений, с помощью которого выражение для спектральной плотности выходных процессов q_i при возмущении η имеет вид [1,2,3]:

$$S_{q_i}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \phi_{ij} \phi_{ik} G_j^2 H_j^*(\omega) H_k(\omega) S_{\eta}(\omega), \quad (i = \overline{1, n}) \quad (9)$$

где $S_{\eta}(\omega)$ – спектральная плотность ускорения возмущения η , $H_j(\omega)$ – передаточная функция. Выражение (9) можно записать и в следующем виде:

$$S_{q_j}(\omega) = S_{\eta}(\omega) |H_j(i\omega)|^2, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (10)$$

где $|H_j(i\omega)|$ – модуль амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) системы для обобщенной координаты q_j и ускорения возмущения η

$$|H_j(i\omega)|^2 = \sum_{\lambda=1}^r \sum_{\mu=1}^r H_{j\lambda}(i\omega) H_{j\mu}(-i\omega) \exp(-i\omega\tau_{\lambda\mu}), \quad (11)$$

$H_{j\lambda, \mu}(i\omega)$ – АЧХ системы для j -го выхода и λ -го (μ -го) входа [3], $\tau_{\lambda\mu}$ – время запаздывания возмущения между λ -м и μ -м входами ($\tau_{\lambda\mu} = l_{\lambda\mu}/V$, где $l_{\lambda\mu}$ – расстояние между входами, V – скорость), r – количество входов.

3.1. Случайные колебания балки

Для отладки методики была решена задача о случайных колебаниях балки с учетом запаздывания. КЭМ балки представлена на рис. 2.

Исходные данные для расчета: балка круглого поперечного сечения, диаметр сечения $d = 0,04$ м, длина балки $2a = 1$ м, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, плотность материала $\rho = 7800$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Опоры балки испытывают одинаковое ускорение $\ddot{\eta}$, представляющее собой случайный

стационарный процесс в виде белого шума по ускорению с интенсивностью 1 в направлении оси y (рис. 2,3), декремент затухания $\delta = 0,1$.

Собственные частоты и формы колебаний балки представлены на рис. 4.

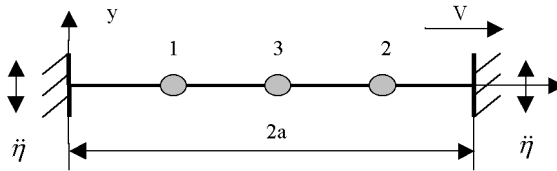


Рисунок 2

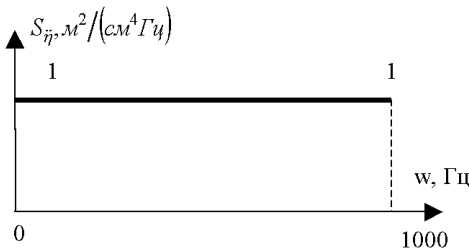


Рисунок 3

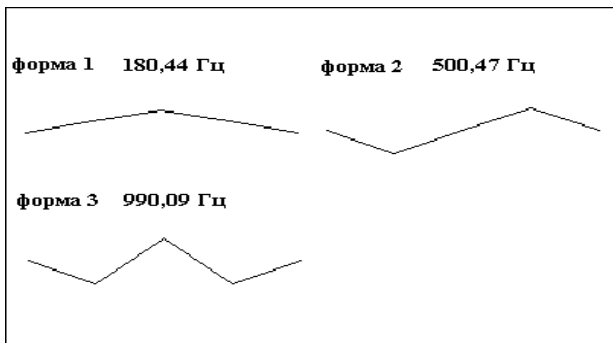


Рисунок 4

Спектральная плотность перемещений в узле № 3 КЭМ балки определяется выражением (10), а квадрат модуля АЧХ КЭМ балки в узле № 3 – по формуле (11), причем число входов $r = 2$. Поскольку первая форма колебаний балки является симметричной (рис. 4), то АЧХ от воздействий в узлах №1 и 2 будут равны, и уравнение (10) примет вид:

$$S_3(\omega) = 2 |H_{31}(i\omega)|^2 (1 + \cos(\omega\tau)), \quad (12)$$

где $|H_{31}(i\omega)|$ – модуль АЧХ КЭМ балки в узле № 3 от воздействия в узле № 1.

Исследуем спектральную плотность перемещений узла № 3 КЭМ балки

на первой собственной частоте. Рассмотрим спектральную плотность перемещений КЭМ балки в узле № 3 при наличии запаздывания колебаний 2-й опоры для скорости $V = 10$ м/с и при одновременных колебаниях опор балки ($V = 5000$ м/с) на интервале частот $[0, 250]$ Гц (рис. 5).

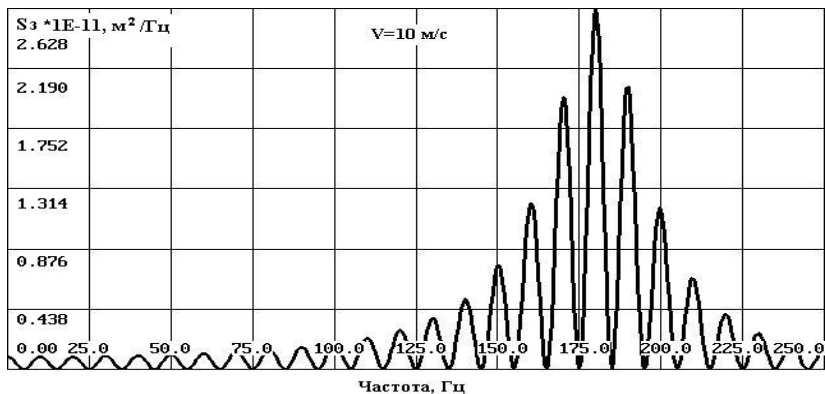


Рисунок 5

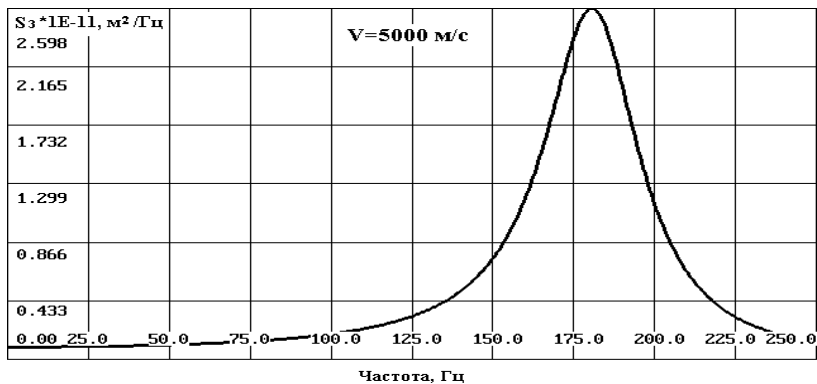


Рисунок 6

На рис. 5 наблюдается изрезанность графиков и наличие нулевых точек, что обусловлено разностью фаз при подаче воздействия на левую и правую опоры балки. Первая нулевая точка на графике появляется на частоте $V/(4a)$, последующие – через $\Delta f = V/(2a)$ [4]. Из рис. 6 видно, что при одновременных колебаниях опор балки ($V \rightarrow \infty$) спектральная плотность перемещений КЭМ балки в узле № 3 соответствует спектральной плотности системы без запаздывания.

Найдем, при какой скорости движения балки значение спектральной плотности перемещений в узле № 3 КЭМ балки будет таким, как показано на рис. 6. Для этого рассмотрим зависимость спектральной плотности перемещений в узле № 3 от скорости движения балки V при $\omega_1 = 180,55$ Гц в диапа-

зонах скоростей [0, 120] (рис. 7) и [120, 2000] (рис. 8).

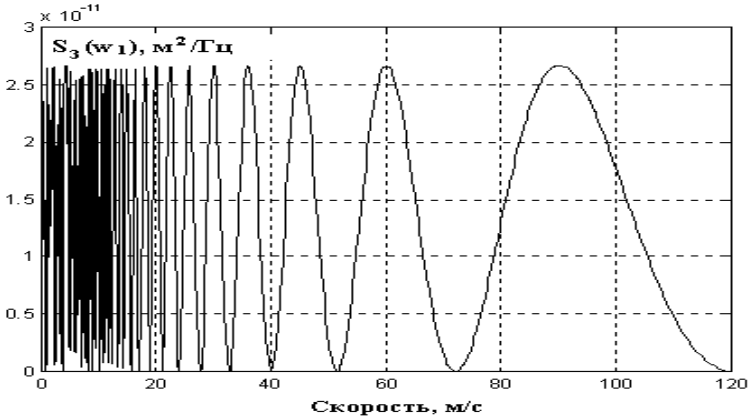


Рисунок 7

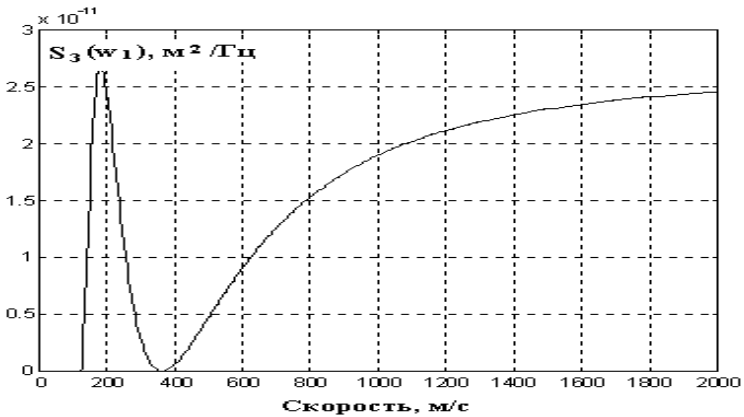


Рисунок 8

Из рис. 7 видно, что при скоростях $V = \omega_1/n, n = 0, 1, \dots$ и частоте $\omega_1 = 180,44$ Гц спектральная плотность перемещений принимает максимальное значение ($\cos(\omega\tau) = 1$ в (12)), а при скоростях $V = 2\omega_1/(1 + 2n), n = 0, 1, \dots$ – минимальное значение ($\cos(\omega\tau) = -1$ – физически это означает, что запаздывающие колебания 2-й опоры балки находятся в противофазе с колебаниями 1-й опоры балки). Из рис. 8 видно, что при увеличении скорости движения балки спектральная плотность перемещений асимптотически приближается к некоторому постоянному значению, равному $4 \cdot |H(i180,44)|^2$ (одновременные колебания опор балки). Та же закономерность наблюдается и для третьей собственной частоты $\omega_3 = 990,09$ Гц.

3.2. Случайные колебания рамы тележки вагона метрополитена

Рассматривается задача о случайных колебаниях рамы тележки вагона метрополитена с учетом запаздывания (рис. 1).

Спектральная плотность вертикальных перемещений в узле КЭМ рамы тележки, соответствующему кузову вагона (поз. 3, рис. 1), определяется выражением (10) с учетом того, что $S_{\eta}(\omega) = 0,016 \text{ м}^2/(\text{с}^4\text{Гц})$. Поскольку модель рамы тележки вагона метрополитена имеет восемь входов (пружин буксового подвешивания) (рис. 1), то квадрат модуля АЧХ системы примет вид:

$$\begin{aligned} |H_j(i\omega)|^2 = & \sum_{k=1}^8 \{ \text{Re}^2 [H_{jk}(i\omega)] + \text{Im}^2 [H_{jk}(i\omega)] \} + \\ & + 2 \left[\sum_{k=2}^8 H \binom{j1}{jk} + \sum_{k=3}^8 H \binom{j2}{jk} + \sum_{k=4}^8 H \binom{j3}{jk} + \sum_{k=5}^8 H \binom{j4}{jk} \right] + \\ & + \sum_{k=6}^8 H \binom{j5}{jk} + \sum_{k=7}^8 H \binom{j6}{jk} + H \binom{j7}{j8} \Bigg], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} H \binom{jm}{jl} = & \{ \text{Re}[H_{jm}(i\omega)]\text{Re}[H_{jl}(i\omega)] + \text{Im}[H_{jm}(i\omega)]\text{Im}[H_{jl}(i\omega)] \} \cos(\omega\tau_{ml}) + \\ & + \{ \text{Re}[H_{jl}(i\omega)]\text{Im}[H_{jm}(i\omega)] - \text{Re}[H_{jm}(i\omega)]\text{Im}[H_{jl}(i\omega)] \} \sin(\omega\tau_{ml}) \quad (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (14)$$

Спектральные плотности вертикальных перемещений для узла КЭМ, соответствующего кузову вагона (поз. 3, рис. 1), для скоростей движения 0,5; 1; 20 м/с в диапазоне частот [0, 4] Гц представлены на рис. 9, 10, 11.

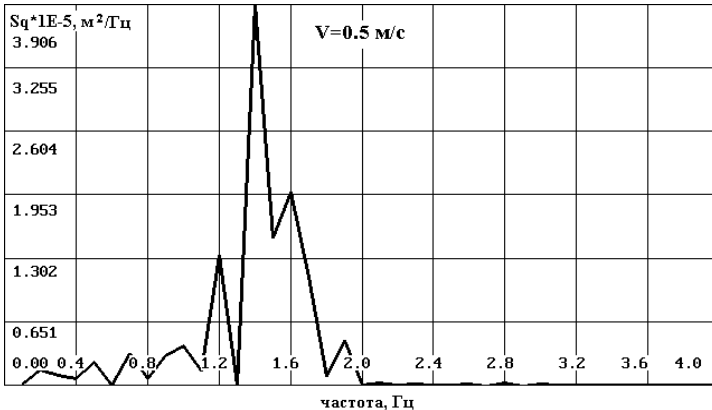
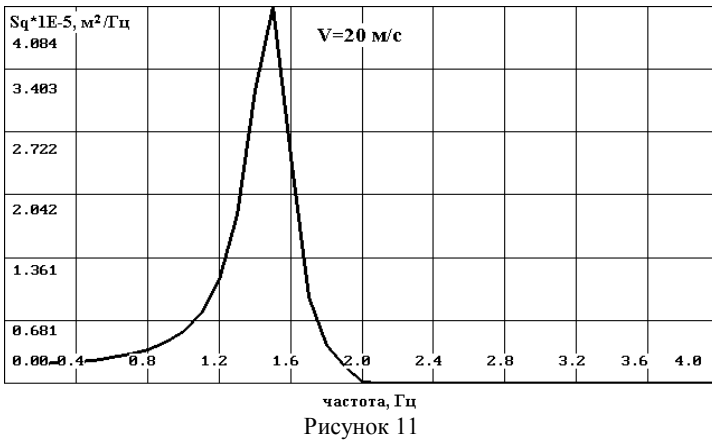
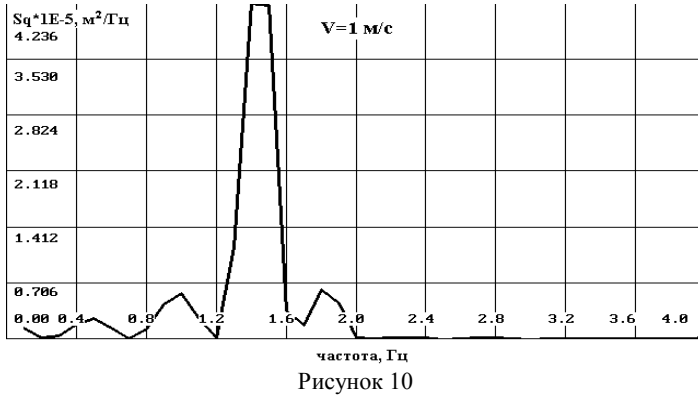


Рисунок 9

На рис. 9, 10 наблюдается изрезанность графиков и наличие нулевых точек, что обусловлено разностью фаз при подаче воздействия через первую и вторую

колесные пары. С увеличением скорости движения электропоезда сглаживается изрезанность графиков, расстояние между нулевыми точками увеличивается (рис. 11). Из рис. 9-11 видно, что максимум спектральной плотности перемещений узла КЭМ достигается на первой собственной частоте, так как на этой частоте рама совершает вертикальные колебания (подпрыгивания).



Рассмотрим, как изменяется спектральная плотность перемещений для узла КЭМ, находящегося на кузове вагона, при частоте $\omega = 1,5$ Гц с увеличением скорости движения электропоезда от 0 до 40 м/с для двух моделей случайного воздействия: с одновременными колебаниями колесных пар рамы и запаздыванием колебаний второй колесной пары (рис. 12).

Из рис. 12 видно, что при увеличении скорости движения электропоезда спектральная плотность перемещений асимптотически приближается к некоторому постоянному значению, равному $S_{ij}(\omega) \sum_{\lambda=1}^r \sum_{\mu=1}^r H_{j\lambda}(i\omega) H_{j\mu}(-i\omega)$ (одно-

временные колебания). И так, при повышении скорости движения электропоезда амплитуда вертикальных колебаний непрерывно увеличивается. Физически это объясняется тем, что при увеличении скорости движения время запаздывания воздействия на другие колеса по отношению к переднему колесу уменьшается, т.е. увеличивается одновременность воздействия. Перемещение центра тяжести при одновременном перемещении всех колес в одном направлении будет значительно больше, чем в том случае, когда перемещаются только одни, например передние колеса, а остальные находятся в покое.



Рисунок 12

Заключение

Получены собственные частоты и формы колебаний рам тележек вагонов метрополитена с использованием программного комплекса ANSYS 6.0. Разработана методика, алгоритм и программа на языке Турбо Паскаль, позволяющие проводить расчет вынужденных колебаний рам тележек при случайном стационарном воздействии с учетом запаздывания. Полученные численные результаты могут быть использованы для прогнозирования остаточного ресурса эксплуатируемых вагонов метрополитена с учетом усталостных отказов.

Список литературы: 1. Белоцерковский А.Б., Жовдак В.А., Черных О.В., Ярошок Ю.А. Случайные колебания рам тележек вагонов метрополитена с учетом неровности пути // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 12. – С. 10-17. 2. Макеев В.П., Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С. Статистические задачи динамики упругих конструкций. – М.: Наука, 1984. – 232 с. 3. Коротенко Г.М. Определение закона изменения регулируемых параметров рессорного подвешивания рельсовых экипажей // Колебания и прочность механических систем. – Киев: Наукова думка, 1986. – С. 133-137. 4. Механическая часть тягового подвижного состава: Учебник для вузов ж.-д. трансп. / И.В. Бирюков, А.Н. Савоськин, Г.П. Бурчак и др. – М.: Транспорт, 1992. – 440 с.

Поступила в редколлегию 18.11.03

А.И.БОХОНСКИЙ, Е.В.ХРОМОВ Севастопольский национальный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПЕРЕМОТКЕ ПРОВОЛОК И ПРЯДЕЙ В КАНАТНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Виконано дослідження вимушених коливальних процесів, які виникають при включенні приводів в канатному виробництві.

Investigate torsion oscillations in act of twist ropes of ropeweaving machines

Анализ сложных смешанных крутильных колебаний питающих катушек при перемотке проволок либо свивке прядей в канат в канатовьющем производстве приведен в [1,2]. В [1] исследована возможность использования управляемых динамических гасителей колебаний катушки и показано, что применение динамического гасителя позволяет эффективно устранять крутильные колебания катушек за достаточно малый промежуток времени.

Исследования переходных процессов при включении и выключении двигателей в системах перемотки длинномерных изделий и при изготовлении прядей либо канатов до настоящего времени не проводилось.

Теории смешанных колебаний существенно нелинейных механических систем, взаимодействующих с источником энергии, посвящена, например, работа [3], в которой исследуется поведение автоколебательных систем, а также систем, в которых возможны одновременно автоколебания и параметрические колебания.

В данной статье исследуется поведение автоколебательной системы с двумя степенями свободы с нелинейной характеристикой трения при наличии источника энергии (привода – асинхронного двигателя). Для описания колебательных процессов необходимо задать силовую характеристику $M = M(\omega)$, где M – крутящий момент; ω – угловая скорость вращения ротора двигателя. С этой целью графики зависимости $M = f(\omega)$, приведенные в [4], аппроксимировались аналитической функцией вида:

$$M = M_H \left[\frac{(a\omega^3 - b)e^{-a\omega}}{b} + 1 \right], \quad (1)$$

где M_H – вращающий момент в установившемся режиме; ω – угловая скорость вращения ротора двигателя; a, b – константы, которые находятся с использованием процедуры замены реальной характеристики асинхронного двигателя аналитической функцией (1). На рис. 1 изображена зависимость M/M_H от частоты вращения ротора.

Если задать только постоянную полезную нагрузку на валу (постоянный момент) и пропорциональное скорости сопротивление вращению, то дифференциальное уравнение вращения ротора запишется как:

$$J \frac{d\omega}{dt} = f(\omega) - k\omega - M_*, \quad (2)$$

где J – физический момент инерции; k – коэффициент сопротивления; M_* – полезная постоянная нагрузка (момент). Для уравнения (2) аналитическое решение не найдено. Поэтому было получено численное решение с использованием метода Рунге-Кутты IV-го порядка (Mathcad).

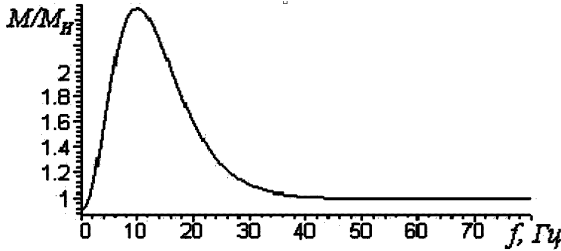


Рисунок 1 – График зависимости относительного момента от частоты вращения ротора ($M/M_n = M/M_n(f)$).

Пример. Исходные данные: $J = 1 \text{ кгм}^2$; $a = 0,3 \text{ с}^3$; $b = 10,0$; $M_n = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $M_* = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$; $k = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$. Начальное условие: при $t = 0$, $\omega(0) = 0$. График зависимости $\omega = \omega(t)$ изображен на рис. 2,а; график зависимости угла поворота от времени $\varphi = \varphi(t)$ изображен на рис. 3.

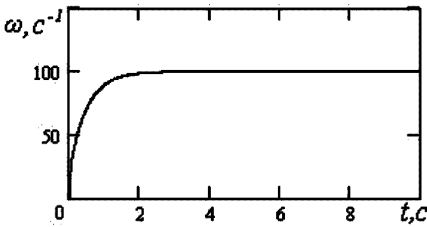


Рисунок 2 – График функции $\omega = \omega(t)$.

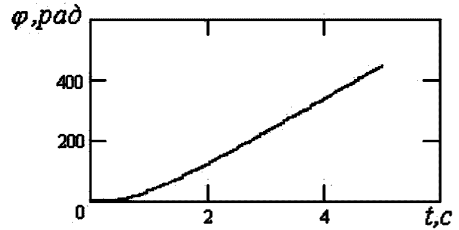


Рисунок 3 – График функции $\varphi = \varphi(t)$.

Как следует из графиков, переходный процесс состоит в плавном достижении постоянной скорости в установившемся режиме; при этом, естественно, что угол поворота возрастает практически линейно (до бесконечности).

Предварительно рассмотрена известная автоколебательная система с двумя степенями свободы, представляющая собой твердое тело на непрерывной нерастяжимой ленте транспортера (рис. 4); учитывается линейно-вязкое сопротивление и сухое трение. Вращающий момент двигателя принят в виде (1). Дифференциальные уравнения системы (рис. 4) имеют следующий вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx = q(\text{sign}(r\dot{\varphi} - \dot{x}) - \alpha_1(r\dot{\varphi} - \dot{x}) + \alpha_3(r\dot{\varphi} - \dot{x})^3) - k_1 \dot{x},$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M(\dot{\varphi}) - k_3 \dot{\varphi} - r[\text{sign}(r\dot{\varphi} - \dot{x}) - \alpha_1(r\dot{\varphi} - \dot{x}) + \alpha_3(r\dot{\varphi} - \dot{x})^3], \quad (3)$$

где x, φ – соответственно перемещение груза и угол поворота ротора; m – масса груза; c – коэффициент жесткости упругой связи; q, α_1, α_3 – константы; J – момент инерции ротора асинхронного двигателя и других вращающихся вместе с ним частей; r – радиус шкива; k_1, k_3 – коэффициенты демпфирования; $M(\dot{\varphi})$ – вращающий момент, как функция угловой скорости ротора асинхронного двигателя (согласно зависимости (1)).

Пример. Исходные данные: $c = 10^5$ Н/м; $r = 0,2$ м; $m = 100$ кг; $J = 0,133$ кг · м²; $\alpha_1 = 0,2$ кг/с; $\alpha_3 = 0,1$ кг · с²/м²; $q = 0,005$; $k_1 = 6,325$ кг/с; $k_3 = 12,649$ кг · м²/с²; $M_u = 2000$ Н · м; $a = 0,3$; $b = 10,0$. Начальные условия: при $t = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0; \varphi(0) = 0; \dot{\varphi}(0) = 0$, т.е. система движется из состояния покоя.

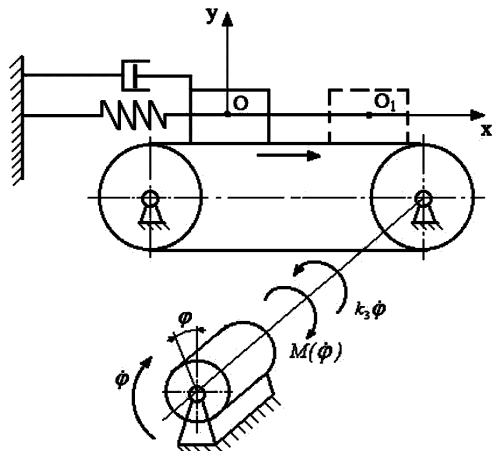


Рисунок 4 – Схема фрикционной автоколебательной системы.

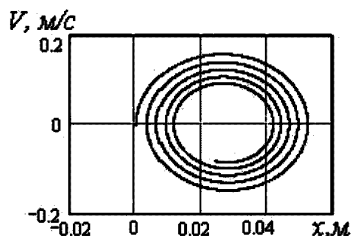


Рисунок 5 – Фазовый портрет движения груза ($V = V(x)$).

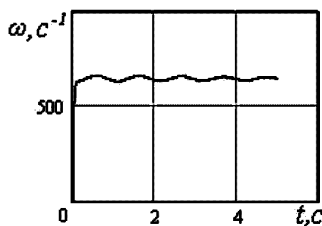


Рисунок 6 – График зависимости угловой скорости вращения ротора двигателя от времени $\omega = \omega(t)$.

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс перематки проволоки (рис. 7), записываются в виде:

$$\begin{aligned} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + c(r_2\varphi_2 - r_1\varphi_1)r_1 + n_0fr_0(\text{sign}\dot{\varphi}_1 - \alpha_1\dot{\varphi}_1 + \alpha_2\dot{\varphi}_1^3) &= m_1ge_1 \sin(\dot{\varphi}_1t), \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + k\dot{\varphi}_2 - c(r_2\varphi_2 - r_1\varphi_1)r_2 &= M(\dot{\varphi}_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где J_1 – момент инерции катушки; J_2 – момент инерции катушки, ротора двигателя и всех дополнительно вращающихся частей; φ_1, φ_2 – углы поворота катушек; $c = EF/l$ – коэффициент жесткости перематываемой проволоки; F – площадь поперечного сечения проволоки; l – расстояние между центрами катушек; r_1, r_2 – радиусы катушек; r_0 – радиус тормозного шкива; n_0 – давление в тормозной колодке; f – коэффициент трения скольжения; α_1, α_2 – положительные константы; масса катушки; e_1 – возможный эксцентриситет катушки (несовпадение центра масс катушки с осью ее вращения); g – ускорение силы тяжести; k – коэффициент демпфирования; $M(\dot{\varphi}_2)$ – вращающий момент двигателя, принимаемый согласно зависимости (1).

Если не учитывать упругие свойства перематываемой проволоки и ее возможное провисание, то система, изображенная на рис. 7, обладает одной степенью свободы и ее поведение в переходном процессе близко к поведению системы, описываемой уравнением (2). При учете упругости перематываемого изделия исследование переходного процесса при интегрировании уравнений численным методом вызывает некоторые трудности в связи с наличием относительно «медленных» движений (разгон системы) и достаточно «быстрых» колебаний перематываемого изделия при наличии нелинейной характеристики трения.

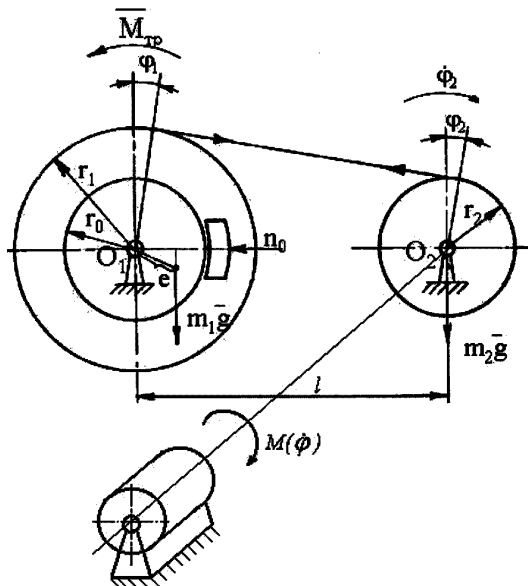


Рисунок 7 – Схема перематки проволоки в канатовьюющем производстве.

При проведении численных экспериментов с использованием метода Рунге-Кутты для интегрирования уравнений (4) использовались исходные данные, приведенные в [1,2]. Один из графиков зависимости $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ в переходном процессе, когда движение начинается из состояния покоя и проволока не натянута, изображен на рис. 8. Характерно, что при непрерывном нарастании угловой скорости и угла φ_1 малые изменения φ_1 в связи с колебаниями практически не заметны на графике. Поэтому вполне обоснованным было изучение колебательных процессов в работах [1,2] в установившемся режиме перемотки проволок и прядей около некоторого квазистатического положения равновесия.

При численном эксперименте в диапазоне возможного изменения параметров процесса перемотки проволок (при рабочем натяжении) не выявлено заметного изменения частоты вращения ротора двигателя (колебаний) в установившемся режиме в связи с автоколебаниями катушек, которые обусловлены нелинейной характеристикой трения.

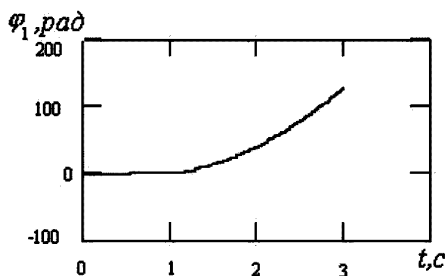


Рисунок 8 – График зависимости угла поворота катушки от времени.

В будущем определенный теоретический и практический интерес представляет задача исследования переходных процессов в канатовьюющих машинах, возникающих при сбоях в электронике.

Список литературы: 1. *Бохонский А.И., Хромов Е.В.* Анализ колебательных процессов при перемотке длинномерных изделий // Оптимизация производственных процессов. – Вестник СевГТУ, Вып. 3. – Севастополь, 2000. – С.70-73. 2. *Бохонский А.И., Хромов Е.В.* Колебания катушек в канатовьюющих машинах // Вісник Національного технічного університету «ХПІ»: Зб.наук.пр. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків, 2001. – Вып. 25. – С.53-56. 3. *Алифов А.А., Фролов К.В.* Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источником энергии. – М.: Наука, 1985. – 328 с. 4. *Брускин Д.Э.* и др. Электрические машины. Часть первая. / Д.Э. Брускин, А.Е. Зорохович, В.С. Хвостов. – М.: Высшая школа, 1987. – 319 с.

Поступила в редколлегию 05.01.04

К.В. ВАКУЛЕНКО; С.Ю. СОТРИХИН, канд. техн. наук.;
М.В. ЧЕРНОБРЫВКО, канд. техн. наук; НТУ «ХПИ»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПАЙКИ ПРИ СОЗДАНИИ ВЫСОКОПРОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Розглядається задача з'єднання двох товстих стрижнів. Розв'язано рівняння нестационарної теплопровідності, результати якого дають можливість оцінити необхідні температурні умови пайки конструкційних елементів.

The problem of connection of two thick cores is considered. The equation of non-stationary heat conductivity is solved. Results of the decision allow to estimate necessary temperature conditions of the soldering of constructional elements.

Состояние проблемы. В современном транспортном машиностроении требования, предъявляемые к прочностным свойствам сварных и паяных швов, диктуются необходимостью обеспечения надежности и безопасности грузоперевозок и пассажиропотоков, а также требованию долговечности получаемых конструкций. Известно, что при получении сварного шва основной материал конструкции подвергается значительным термонагрузениям [1]. Это, в свою очередь, может приводить к изменениям его прочностных свойств. Хорошо известно [2], что качество получаемого сварного шва зависит от целого ряда факторов, обеспечение которых порой затруднено. Также можно заметить, что конструкционные элементы, работающие в условиях повышенной влажности, подвержены усиленной коррозии в зоне сварного соединения. Все вышеизложенное привело к тому, что наряду со сваркой широкое распространение также получила пайка. Важнейшее достоинство пайки – возможность проведения процесса с сохранением механической структуры и прочности соединяемых элементов. Однако, прочностные свойства получаемой конструкции в целом зависят от припоя, применяемого при ее изготовлении. С появлением высокопрочных припоев стала возможной технология высокотемпературной пайки, при которой прочность получаемого соединения не уступает, а порой и превосходит прочность основного материала.

Применение высокотемпературных припоев требует жесткого контроля за температурой протекающего процесса, так как недостаточный разогрев не даст прочного соединения, а перегрев конструкции ведет к разупрочнению и даже хрупкости основного материала. Этих эффектов можно избежать, используя разогрев конструкции импульсными источниками тепла, например, импульсным током, так как кратковременность термонагружения позволяет прогреть слой припоя до необходимых температур, не изменив физических свойств материала основной конструкции в силу теплооттока.

Исследования в области высокоскоростных процессов деформирования контактирующих поверхностей и динамического термоупругопластического напряженного состояния [3], а также в области пайки [4] показали возмож-

ность осуществления пайки и сварки-пайки.

Однако, связанная динамическая задача термоупругопластического деформирования конструктивных элементов цилиндрической формы не нашла своего достаточного отражения в научной литературе. Решение такой задачи связано с целым рядом трудностей, вызванных сильной нелинейностью исходных уравнений. Одной из составных частей ее решения есть задача нестационарной теплопроводности многослойной конструкции при кратковременном температурном нагреве. Решению этой задачи и посвящена данная статья.

Физическая постановка задачи. Рассматриваются два толстых стержня одинакового радиуса из однородного изотропного металла. Между их торцами прокладывается лента из листового высокопрочного припоя по которой пропускают сильный импульсный ток от энергетической установки. В результате этого происходит разогрев припоя и соприкасающихся к нему краев стержней. На рис.1 показано расположение составных элементов при пайке встык: 1, 2 – соединяемые стержни; 3 – лента припоя; 4 – зона пайки.

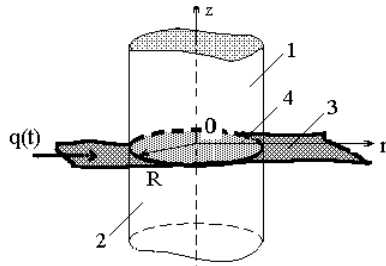


Рисунок 1 – Схема расположения конструктивных элементов

Необходимо нагреть слой припоя до температуры плавления. Величина теплового потока зависит от величины пропускаемого по припою тока и должна выбираться из результатов численного эксперимента для каждой конкретной толщины слоя припоя и величины тока, достаточной для его расплавления. Исследуя температурное поле в плоскости припоя, можно прогнозировать поведение последнего под действием температурного нагружения.

Математическая постановка задачи. Итак, исследуется задача нестационарной теплопроводности для толстых стержней в цилиндрической системе координат. В силу осевой симметрии конструкции выбираем систему уравнений в двумерной постановке. Математическая формулировка задачи имеет следующий вид [7]:

$$\frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a_r} \frac{\partial T(r, z, t)}{\partial t}. \quad (1)$$

где $T = T(r, z, t)$ – температура системы;

t – время;

r, z – цилиндрические координаты;
 a_T – коэффициент температуропроводности.
Начальное условие:

$$T(r, z, 0) = T_0 = const, \quad (2)$$

где T_0 – начальная температура конструкции.

Граничное условие по радиусу:

$$\left. \frac{dT_{np}}{dn} \right|_{\substack{r=R \\ z=0}} = q(t), \quad (3)$$

где $T_{np} = T_{np}(r, z, t)$ – температура припоя; n – направление внутренней нормали к поверхности цилиндра в области припоя; $q(t)$ – функция, характеризующая интенсивность теплового потока, определяемая из условий прогрева стержней.

В предположении идеального теплового контакта между торцами стержней и слоем листового припоя, остальные граничные условия запишутся в следующем виде:

$$T_1 = T_2 = T_{np}; \quad (4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = \lambda_{np} \frac{\partial T_{np}}{\partial z}, \quad (5)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{np}$ – коэффициенты теплопроводности первого, второго стержней и слоя припоя соответственно; T_1, T_2, T_{np} – температура вышеуказанных составляющих конструкции.

Решение уравнения нестационарной теплопроводности (1) с начальным (2) и граничными (3-5) условиями, выбираем в виде [8]:

$$T = T_{cp} - \frac{1}{T_{cp} - T_0} (T_{cp} - T_I) (T_{cp} - T_{II}), \quad (7)$$

где T_{cp} – температура среды, предполагаем, что $T_{cp} = const$; $T_I = T_I(r, t)$; $T_{II} = T_{II}(z, t)$.

Таким образом, задача распадается на две независимые. Первая – распределение температурного поля вдоль радиальной координаты во времени, а вторая – вдоль длины цилиндра во времени.

Дальнейшее решение задачи проводится численно-аналитическими методами согласно известных методик решения задач нестационарной теплопроводности.

Численные примеры. Рассматривался случай сваривания двух металлических стержней из стали X18H10T с радиусом $R = 10$ мм листовым аморфным припоем никелевой группы, толщиной 1,5 мм. Источником импульсного тока служила магнитно-импульсная установка МИУ-20 со следующими основными параметрами: максимальная запасаемая энергия 20 кДж, номинальное напряжение емкостного накопителя 20 кВ, емкость накопителя 100 мкФ, собственная индуктивность разрядного контура 120 нГн.

На рис. 2 представлены графики разогрева слоя припоя в точках с коор-

динамиками $r = R$ (кривая 1), $r = R/2$ (кривая 2) и $r = 0$ (кривая 3) при воздействии нагрузки в течение 100 мкс.

Анализ графика дает возможность определить момент прогревания слоя припоя до температуры плавления и отследить интервал времени, необходимый для соединения слоев. Причем, расчет разогрева стержневой конструкции производился с учетом теплооттока по координате z .

Рассмотренная задача решалась в предположении малости толщины слоя припоя по отношению к величине радиуса конструкции. Если же это отношение не мало, то модель задачи необходимо рассматривать с точки зрения прогревания трехслойной конструкции. Поскольку, если толщина припоя окажется много больше толщины скин-слоя (определяющегося, как известно, параметрами энергетической установки), разогрев припоя будет происходить неравномерно по его толщине от границ контакта с торцами стержней до срединной поверхности. В этом случае граничащие со стержнями слои, вследствие концентрации тока будут иметь температуру несколько выше.

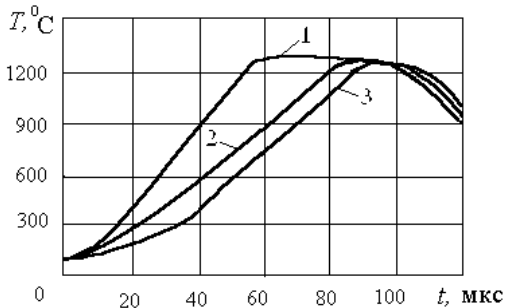


Рисунок 2 – Температура прогревания слоя припоя.

Выводы. Решение поставленной задачи теплопроводности позволяет оценить температурные характеристики технологического процесса пайки стержневых конструкционных элементов, выработать оптимальные параметры энергетической установки и подобрать материал припоя. Она является составной частью исследования прочностных свойств паяного соединения. Однако, не следует забывать, что контроль и оптимизация термонапряжений всей конструкции требует дальнейшего использования полученных результатов для решения задачи связанной термоупругопластичности.

Список литературы: 1. Харченко В.В. Моделирование процессов высокоскоростного деформирования материалов с учетом вязкопластических эффектов. – Киев.: ИПП НАН Украины, 1999. – 280 с. 2. Дерибас А.А. Физика упрочнения и сварки взрывом. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с. 3. Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Севрюков В.И. и др. Скоростное деформирование элементов конструкций. – К.: Наукова думка, 1989. – 192 с. 4. Колодяжный А.В., Вакуленко К.В., Чернобрышко М.В. Исследование температурных напряжений коаксиальных цилиндров при высокоскоростном деформировании // Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. – 2003. вип. 18. “Підвищення надійності відновлюємих деталей машин. Фізичні та комп’ютерні технології”. – С. 120-

125. 5. Колоджный А.В., Вакуленко К.В., Чернобрышко М.В. Яреченко В.Г. Учет тепловыделения при соударении цилиндрических оболочек с различными скоростями скольжения // Физические и компьютерные технологии в народном хозяйстве: Труды 6-й Международной научно-технической конференции, 10-11 октября 2002 г. – Харьков: ХНПК "ФЭД", 2002. – С. 272-275. 6. Петрунин И.Е. Металловедение пайки / Петрунин И.Е., Маркова И.Ю., Екатова А.С. – М.: Металлургия, 1976. – 263 с. 7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 8. Коваленко А.Д. Термоупругость пластин и оболочек. – Киев: Изд-во Киевского университета, 1971. – 284 с.

Поступило в редколлегию 27.05.04

УДК 539.3

С.М.ВЕРЕЩАКА, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

К ДИСКРЕТНО-СТРУКТУРНОЙ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ДЕФЕКТАМИ СТРУКТУРЫ

Пропонується варіант дискретно-структурної теорії багат шарових анізотропних оболонок обертання з дефектами структури у вигляді локальних ділянок непроклею. Рівняння рівноваги та геометричні співвідношення отримані з урахуванням впливу деформацій поперечного зсуву та обтіснення на напружено-деформований стан суцільностінчатих конструкцій із композиційних матеріалів у геометрично нелінійній постановці.

The variant of the discrete - structural theory of the multilayered anisotropic of shells of rotation with defects of structure such as local sites non-gluе is offered. At a conclusion of the equations of balance and geometrical ratio the influence of deformations of cross shift and transverse pressure on is intense – is deformed a status of thin-walled designs from composite materials in vectorially nonlinear production is taken into account.

Постановка контактної задачі механіки многослойних пластинок і оболонок дані в [1-5], где на основі дискретного підходу побудовані функціонали і отримані системи рівнянь для рішення таких задач при умови неідеального контакту шарів. Метод рішення нелінійних задач о контакте между двумя оболочками різної форми і еквідистантними шарами пропонується в книзі [6]. Детальний аналіз останніх результатів і напрямлений розвитку дискретно-структурної теорії шаруватих пластин і оболонок можна знайти в огляді [7].

В даній роботі пропонується варіант дискретно-структурної теорії многослойних анізотропних оболонок обертання з дефектами структури типу локальних ділянок непроклею. При виведенні рівнянь рівноваги і геометричних співвідношень враховується вплив деформацій поперечного зсуву і обжаття на напружено-деформований стан тонкостінних конструкцій із композиційних матеріалів в геометрично нелінійній постановці.

Постановка задачі. В відповідності з дискретно-структурної теорією математична модель розглядаємої тут многослойної оболочкі складається з n тонких анізотропних шарів (рис. 1). Тонкою вважається оболочка(шар), якщо величиною відносної товщини h/R_{min} (R_{min} – мінімальне значення одного из

где $\vec{u}^{(k)}$ – вектор перемещения точек срединной поверхности $S^{(k)}$; $\vec{\gamma}^{(k)}$ – вектор-функция углов поворота и обжатия волокон по направлению нормали к недеформированной срединной поверхности $S^{(k)}$ в процессе деформации; $\varphi^{(k)}(z)$ – нелинейная непрерывная функция распределения тангенциальных перемещений по толщине k -го слоя, анализ и аппроксимация которой приведены в [8]; $\vec{\psi}^{(k)}(\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)})$ – вектор функций сдвига. Ковариантные компоненты векторов $\vec{u}^{(k)}$, $\vec{\gamma}^{(k)}$, $\vec{\psi}^{(k)}$ записываются при помощи следующих выражений

$$\vec{u}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} u_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} w^{(k)}; \quad \vec{\gamma}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \gamma_i^{(k)} + \vec{m}^{(k)} \gamma^{(k)}; \quad \vec{\psi}^{(k)} = \vec{r}^{(k)i} \psi_i^{(k)}. \quad (5)$$

Тогда радиус-вектор точки k -го слоя оболочки после деформации запишется

$$\vec{\rho}^{(k)*} = \vec{\rho}^{(k)} + \vec{u}_z^{(k)}, \quad (6)$$

а соответствующие ему базисные векторы –

$$\vec{\rho}_i^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial \alpha^i}, \quad \vec{\rho}_3^{(k)*} = \vec{m}^{(k)} + \frac{\partial \vec{u}_z^{(k)}}{\partial z}. \quad (7)$$

Ковариантные компоненты тензора конечных деформаций в точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ определяются как полуразности компонентов метрических тензоров до, и после деформации

$$2\mathcal{E}_{ij}^{(k)z} = g_{ij}^{(k)*} - g_{ij}^{(k)}; \quad 2\mathcal{E}_{i3}^{(k)z} = g_{i3}^{(k)*} - g_{i3}^{(k)}; \quad 2\mathcal{E}_{33}^{(k)z} = g_{33}^{(k)*} - 1, \quad (8)$$

где

$$g_{ij}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_j^{(k)}; \quad g_{ij}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_j^{(k)*}; \quad g_{i3}^{(k)} = \vec{\rho}_i^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)};$$

$$g_{i3}^{(k)*} = \vec{\rho}_i^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}; \quad g_{33}^{(k)} = \vec{\rho}_3^{(k)} \vec{\rho}_3^{(k)} = \vec{m}^{(k)} \vec{m}^{(k)} = 1;$$

$$g_{33}^{(k)*} = \vec{\rho}_3^{(k)*} \vec{\rho}_3^{(k)*}, \quad (i = 1, 2; \quad j = 1, 2). \quad (9)$$

Подставляя в (8) и (9) выражения базисных векторов (2),(7), нетрудно найти геометрические зависимости между деформациями и перемещениями

Вывод уравнений равновесия и граничных условий для решения контактных задач слоистых оболочек, как правило, осуществляется на основе вариационного принципа Рейсснера. Считая, что в направлении нормали к срединным поверхностям отдельно взятых слоев оболочки осевые линии общей и локальных систем координат совмещаются и также совмещаются локальные координатные поверхности со срединными поверхностями слоев, вариационное уравнение принципа Рейсснера для многослойной оболочки запишется

$$\delta R = \sum_{k=1}^n \delta R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \delta (\sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} - F^{(k)}) dV = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Нумерация слоев начинается со стороны отрицательных значений координаты z от единицы до n . При этом $F^{(k)}$ – удельная дополнительная работа деформации k -го слоя, $\sigma_{(k)}^{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений и тензора деформаций.

В общем виде вариация работы внешних сил $\delta A_R^{(k)}$ определяется для двух вариантов граничных условий k -го слоя – статических с индексом «1» и геометрических с индексом «2»:

$$\begin{aligned}
\delta A_R^{(k)} = & \iint_{S_1^{(k,k-1)}} (X_{(k,k-1)}^{S\beta} - X_{(k,k-1)}^\beta) \delta u_\beta^{(k,k-1)} dS + \iint_{S_2^{(k,k-1)}} (u_\beta^{(k,k-1)} - u_{S\beta}^{(k,k-1)}) \delta X_{(k,k-1)}^\beta dS + \\
& + \iint_{S_1^{(k,k+1)}} (X_{(k,k+1)}^\beta - X_{(k,k+1)}^{S\beta}) \delta u_\beta^{(k,k+1)} dS + \iint_{S_2^{(k,k+1)}} (u_\beta^{(k,k+1)} - u_{S\beta}^{(k,k+1)}) \delta X_{(k,k+1)}^\beta dS + \\
& + \iint_{l_1^{(k)}} (\Phi_{(k)}^{S\beta} - \Phi_{(k)}^\beta) \delta u_\beta^{(k)} dl + \iint_{l_2^{(k)}} (u_\beta^{(k)} - u_{S\beta}^{(k)}) \delta \Phi_{(k)}^\beta dl + \iiint_{V^{(k)}} P_{(k)}^\beta \delta u_\beta^{(k)} dV . \quad (11)
\end{aligned}$$

Индексом «S» в (11) обозначены заданные величины; индексы «k, k-1», «k, k+1» указывают на нижнюю и верхнюю поверхность k -го слоя. Если считать, что по сопряженным лицевым поверхностям k -го слоя выполняются условия идеального контакта (рис. 1):

$$u_\beta^{(k,k-1)} = u_\beta^{(k-1,k)}; \quad X_{(k,k-1)}^\beta = X_{(k-1,k)}^\beta, \quad (12)$$

или в векторном форме -

$$\begin{aligned}
\bar{u}_z^{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{u}_z^{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2); \\
\bar{X}_{(k)}(\alpha_i^{(k)}, -h^{(k)}/2) &= \bar{X}_{(k-1)}(\alpha_i^{(k-1)}, h^{(k-1)}/2), \quad (i=1,2), \quad (13)
\end{aligned}$$

тогда вариацию элементарной работы внешних сил δA_R можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\delta A_R = & \sum_{k=1}^n \delta A_R^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iint_{S_{(k)}} (\bar{X}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + B_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)} \delta \bar{\psi}^{(k)} + M_{(k)}^3 \delta \epsilon_{33}^{(k)}) dS + \\
& + \sum_{k=1}^n \int_{l_1^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)}^S \delta \bar{u}^{(k)} + \bar{G}_{(k)}^S \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)}^S \delta \bar{\nu}^{(k)}) dl + \sum_{k=1}^n \int_{l_2^{(k)}} (\bar{\Phi}_{(k)} \delta \bar{u}^{(k)} + G_{(k)} \delta \bar{\gamma}^{(k)} + \bar{L}_{(k)} \delta \bar{\nu}^{(k)} + (\bar{u}^{(k)} - \bar{u}_S^{(k)}) \delta \bar{\Phi}_{(k)} + \\
& + (\bar{\gamma}^{(k)} - \bar{\gamma}_S^{(k)}) \delta \bar{G}_{(k)} + (\bar{\psi}^{(k)} - \bar{\psi}_S^{(k)}) \delta \bar{L}_{(k)}) dl . \quad (14)
\end{aligned}$$

Здесь $S_{(k)}$ - срединная поверхность k -го слоя; $l_1^{(k)}$, $l_2^{(k)}$ - части контура $l^{(k)}$.

Векторы внешних усилий $\bar{X}_{(k)}$, моментов $\bar{M}_{(k)}$ и дополнительных моментов $\bar{B}_{(k)}$, которые входят в уравнение (14), определяются равенствами:

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{(k)} = \bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^- + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} d\bar{z}; \quad \bar{M}_{(k)} = \frac{h^{(k)}}{2} (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} \bar{z} d\bar{z}; \\
\bar{B}_{(k)} = \varphi^{(k)} \left(\frac{h^{(k)}}{2} (\bar{X}_{(k)}^+ - \bar{X}_{(k)}^-) + \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \bar{P}^{(k)} \varphi^{(k)}(z) d\bar{z} \right), \quad (15)
\end{aligned}$$

где векторы $\bar{X}_{(k)}^+$, $\bar{X}_{(k)}^-$ включают контравариантные компоненты тензора контактных напряжений $\sigma_{(k)}^{i3+}$, $\sigma_{(k)}^{i3-}$ ($i=1,2,3$):

$$\bar{X}_{(k)}^+ = \sigma_{(k)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33+} \bar{m}^{(k)*}, \quad \bar{X}_{(k)}^- = \sigma_{(k)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(k)*} + \sigma_{(k)}^{33-} \bar{m}^{(k)*}, \quad (i=1,2). \quad (16)$$

Индексы «+» и «-» указывают на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности k -го слоя. Аналогичную запись имеют векторы внешней нагрузки $\bar{q}_{(n)}^+$, $\bar{q}_{(1)}^-$:

$$\bar{q}_{(n)}^+ = q_{(n)}^{i3+} \bar{\rho}_i^{(n)*} + q_{(n)}^{33+} \bar{m}^{(n)*}; \quad \bar{q}_{(1)}^- = q_{(1)}^{i3-} \bar{\rho}_i^{(1)*} + q_{(1)}^{33-} \bar{m}^{(1)*}, \quad (i=1,2). \quad (17)$$

Вектор $\bar{P}^{(k)}$ учитывает влияние собственного веса. Контравариантные компоненты $M_{(k)}^i, M_{(k)}^3$ вектор-момента $\bar{M}_{(k)}$ относительно базисных векторов $\bar{r}_i^{(k)*}$ и $\bar{m}^{(k)*}$ находятся согласно равенства

$$\bar{M}_{(k)} = M_{(k)}^i \bar{r}_i^{(k)*} + \bar{m}^{(k)*} M_{(k)}^3. \quad (18)$$

Кроме этого, элементарная работа (14) k -го слоя оболочки характеризуется главным вектором $\bar{\Phi}_{(k)}^S$, главным моментом $\bar{G}_{(k)}^S$, дополнительным главным моментом $\bar{L}_{(k)}^S$, которые возникают от действия заданных внешних контурных сил на $l_1^{(k)}$, а также главным вектором $\bar{\Phi}_{(k)}$, главным моментом $\bar{G}_{(k)}$, дополнительным главным моментом $\bar{L}_{(k)}$, связанных с напряжениями в точках контура $l_2^{(k)}$ из-за заданного смещения точек контура $\bar{u}_S^{(k)}$.

Второе слагаемое уравнения (10) следует представить в виде

$$\delta \Pi_R = \sum_{k=1}^n (\delta \Pi_{1R}^{(k)} + \delta \Pi_{2R}^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV - \sum_{k=1}^n \iiint_{V^{(k)}} (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta}^{(k)}) \delta \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} dV, \quad (20)$$

$$\text{где } \delta \Pi_{1R}^{(k)} = \iiint_{V^{(k)}} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} \delta \eta_{\alpha\beta}^{(k)} dV = \iiint_{V^{(k)}} (\sigma_{(k)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)\#} + 2\sigma_{(k)}^{i3} \delta \varepsilon_{i3}^{(k)\#} + \sigma_{(k)}^{33} \delta \varepsilon_{33}^{(k)\#}) dV,$$

$$\delta \Pi_{2R}^{(k)} = - \iiint_{V^{(k)}} \delta W_{(k)}^f dV = - \iiint_{V^{(k)}} \{ (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{ij} - \varepsilon_{ij}^{(k)\#}) \delta \sigma_{(k)}^{ij} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{i3} - 2\varepsilon_{i3}^{(k)\#}) \times \\ \times \delta \sigma_{(k)}^{i3} + (\partial F^{(k)} / \partial \sigma_{(k)}^{33} - \varepsilon_{33}^{(k)\#}) \delta \sigma_{(k)}^{33} \} dV, \quad (i, j = 1, 2).$$

Тогда, подставляя геометрические соотношения (8) в (10),(15),(20) и варьируя независимыми между собой перемещениями и напряжениями, можно получить для каждого отдельно взятого слоя оболочки систему уравнений равновесия, физические соотношения, статические и кинематические граничные условия. Применение обобщенного закона Гука, нелинейной теории среднего изгиба оболочки [9] значительно упрощает вывод уравнений равновесия и граничных условий.

Переходя к физическим компонентам используемых в данной работе тензоров, уравнения равновесия относительно недеформированной ортогональной системы координат k -го слоя оболочки принимают вид

$$\frac{\partial (B^{(k)} R_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} R_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + R_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - R_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\ + A^{(k)} B^{(k)} (k_1^{(k)} R_{13}^{(k)} + X_1^{(k)}) = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2; \quad A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\ \frac{\partial (B^{(k)} R_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} R_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} - A^{(k)} B^{(k)} (k_1^{(k)} R_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} R_{22}^{(k)} - X_3^{(k)}) = 0; \\ \frac{\partial (B^{(k)} M_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - M_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} +$$

$$\begin{aligned}
& + A^{(k)} B^{(k)} (M_1^{(k)} - Q_1^{(k)}) = 0 \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \\
& \frac{\partial (B^{(k)} L_{11}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} L_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} + L_{12}^{(k)} \frac{\partial A^{(k)}}{\partial \alpha_2^{(k)}} - L_{22}^{(k)} \frac{\partial B^{(k)}}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \\
& + A^{(k)} B^{(k)} (B_1^{(k)} - L_{13}^{(k)}) = 0, \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}). \quad (21)
\end{aligned}$$

При учете обжатия k -го слоя к семи уравнениям системы (21) добавляется восьмое уравнение равновесия

$$\frac{\partial (B^{(k)} M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1^{(k)}} + \frac{\partial (A^{(k)} M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2^{(k)}} - A^{(k)} B^{(k)} (k_1^{(k)} M_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} M_{22}^{(k)} + k_1^{(k)} L_{11}^{(k)} + k_2^{(k)} L_{22}^{(k)} + Q_3^{(k)} - M_3^{(k)}) = 0. \quad (22)$$

При выводе уравнений (21),(22) не учитывается влияние мембранных деформаций на компоненты изгибной деформации. После отбрасывания нелинейных слагаемых более высокого порядка малости физические компоненты тензора тангенциальных усилий $R_{ij}^{(k)}$ и усилий поперечного сдвига $R_{i3}^{(k)}$ запишутся

$$\begin{aligned}
R_{11}^{(k)} &\approx T_{11}^{(k)}; \quad R_{22}^{(k)} \approx T_{22}^{(k)}; \quad R_{12}^{(k)} \approx T_{12}^{(k)} + M_{12}^{(k)} k_2^{(k)}; \quad R_{21}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)} + M_{21}^{(k)} k_1^{(k)}; \\
R_{13}^{(k)} &\approx T_{11}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{12}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_1^{(k)}; \quad R_{23}^{(k)} \approx T_{21}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{22}^{(k)} \omega_2^{(k)} + Q_2^{(k)}, \quad (23)
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_i^{(k)} = 2\varepsilon_{i3}^{(k)} - \omega_i^{(k)}; \quad \omega_1^{(k)} = \frac{\partial w^{(k)}}{A^{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} - k_1^{(k)} u_1^{(k)}, \quad (1 \leftrightarrow 2; A^{(k)} \leftrightarrow B^{(k)}), \quad (24)$$

$k_1^{(k)}, k_2^{(k)}$ – главные кривизны, $A^{(k)}, B^{(k)}$ – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности k -го слоя.

Кроме уравнений равновесия дополнительно имеют место восемь статических –

$$\begin{aligned}
\Phi_n^{(k)S} &= R_n^{(k)}; \quad \Phi_\tau^{(k)S} = R_\tau^{(k)}; \quad \Phi_m^{(k)} = R_m^{(k)}; \quad G_{(k)}^{Sn} = G_{(k)}^n; \quad H_{(k)}^{S\tau} = H_{(k)}^\tau; \quad L_{(k)}^{Sn} = L_{(k)}^n; \quad L_{(k)}^{S\tau} = L_{(k)}^\tau; \\
M_{(k)S}^{3n} + L_{(k)S}^{3n} &= M_{(k)}^{i3} n_i^{(k)}, \quad (25)
\end{aligned}$$

и восемь геометрических –

$$\bar{u}_S^{(k)} = \bar{u}^{(k)}; \quad \gamma_n^{(k)S} = \gamma_n^{(k)}; \quad \gamma_\tau^{(k)S} = \gamma_\tau^{(k)}; \quad \psi_n^{(k)S} = \psi_n^{(k)}; \quad \psi_\tau^{(k)S} = \psi_\tau^{(k)}; \quad \varepsilon_{33S}^{(k)\#} = \varepsilon_{33}^{(k)\#} \quad (26)$$

граничных условий на части контуров $l_1^{(k)}$ и $l_2^{(k)}$ соответственно. В случае среднего изгиба имеет место зависимость $\varepsilon_{33}^{(k)\#} = \gamma^{(k)}$.

Отнесенные к единице длины координатных линий недеформированной срединной поверхности k -го слоя контравариантные компоненты тензоров тангенциальных усилий $T_{(k)}^{ij}$, изгибающих и крутящих моментов $M_{(k)}^{ij}$, дополнительного изгибающего и крутящего момента $L_{(k)}^{ij}$, поперечных сил и дополнительных поперечных сил деформаций сдвига и обжатия $Q_{(k)}^i, Q_{(k)}^3, L_{(k)}^i, M_{(k)}^{i3}$, определяются выражениями:

$$T_{(k)}^{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} dz; \quad M_{(k)}^{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} z dz; \quad Q_{(k)}^3 = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{33} dz; \quad M_{(k)}^{i3} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} z dz;$$

$$L_{(k)}^{ij} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{ij} \varphi^{(k)}(z) dz; \quad Q_{(k)}^i = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} dz; \quad L_{(k)}^{i3} = \int_{-h^{(k)}/2}^{h^{(k)}/2} \sigma_{(k)}^{i3} \varphi^{(k)'}(z) dz, \quad (i, j = 1, 2). \quad (27)$$

Имея уравнения равновесия (21)-(22), граничные условия (25)-(26), физические и геометрические соотношения для каждого k -го слоя оболочки, несложно связать эти уравнения при помощи условий идеального контакта между слоями (13) по сопряженным лицевым поверхностям. Для оболочки вращения, которая включает в себя n слоев с соосными поверхностями вращения, разрешающая система уравнений в частных производных имеет вид

$$\frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{A_{(k)} \partial \alpha_1^{(k)}} = D_o^{(k)} \bar{Y}^{(k)} + D_1^{(k)} \frac{\partial \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)} \partial \alpha_2^{(k)}} + D_2^{(k)} \frac{\partial^2 \bar{Y}^{(k)}}{B_{(k)}^2 \partial \alpha_2^{(k)2}} + \bar{f}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (28)$$

где

$$\bar{Y}^{(k)} = \left\{ T_{11}^{(k)}, T_{12}^{(k)}, k_2^{(k)} M_{12}^{(k)}, Q_1^{(k)}, M_{11}, L_{11}^{(k)}, L_{12}^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, w^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \gamma_2^{(k)}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(k)} \right\}^T, \\ \bar{f}^{(k)} = \left\{ f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_{14}^{(k)} \right\} \quad D_0^{(k)}, D_1^{(k)}, D_2^{(k)} - \text{квадратные матрицы 14-го}$$

порядка. В качестве основных неизвестных функций принимаются величины, которые определяют граничные условия на боковом контуре k -го слоя оболочки. Из-за ограниченного объема статьи показать разрешающую систему уравнений, физические и геометрические соотношения в развернутой форме не представляется возможным.

Отдельно следует отметить, что в силу соотношений (27) величина момента $M_{i3}^{(k)}$ ($i = 1, 2$) равна нулю, поэтому восьмое уравнение равновесия (22) представляет собой недифференциальное тождество, которое выполняется при подстановке в него функций, являющихся решением системы уравнений (21).

В соответствии с общей и местной системами координат, введенной ранее для рассматриваемой многослойной оболочки (рис.1), кинематические условия идеального контакта (13) лицевых поверхностей k -го слоя и сопряженных с ними поверхностями $k+1$ и $k-1$ -го слоя позволяют перемещения срединной поверхности k -го слоя выразить через перемещения $k+1$, $k-1$ -го слоя оболочки:

$$2u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} + u_i^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma_i^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma_i^{(k-1)} - \varphi^{(k+1)} \left(\frac{h^{(k+1)}}{2} \right) \psi_i^{(k+1)} + \varphi^{(k-1)} \left(\frac{h^{(k-1)}}{2} \right) \psi_i^{(k-1)}, \quad (i = 1, 2), \\ 2w^{(k)} = w^{(k+1)} + w^{(k-1)} - \frac{h^{(k+1)}}{2} \gamma^{(k+1)} + \frac{h^{(k-1)}}{2} \gamma^{(k-1)}. \quad (29)$$

Выражения (29) несколько видоизменяются для первого и n -го слоев.

Используя обозначения (16) статические краевые условия на лицевых поверхностях k -го слоя (13) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(k)+} = \sigma_{i3}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{i3}^{(k)-} = \sigma_{i3}^{(k-1)+}, \quad (i = 1, 2) \\ \sigma_{33}^{(k)+} = \sigma_{33}^{(k+1)-}; \quad \sigma_{33}^{(k)-} = \sigma_{33}^{(k-1)+}. \quad (30)$$

Используя геометрические и физические соотношения [8], статические

условия идеального контакта (30), можно записать при помощи деформаций сопряженных слоев.

Внося соотношения (29) в разрешающую систему уравнений (28), а также учитывая статические (25),(30) и геометрические (26) граничные условия, нетрудно получить полную систему уравнений решения контактной задачи дискретно-континуальной теории многослойных оболочек.

Если между k и $k + 1$ слоями оболочки допустить отсутствие кинематических связей, то на поверхности сопряжения этих слоев $S_z^{(k,k+1)}$ могут возникать неизвестные векторы усилий $\vec{q}_{(k)}$, $\vec{q}_{(k+1)}$ контактного взаимодействия. Согласно 3-му закону Ньютона имеет место зависимость: $\vec{q}_{(k)} = -\vec{q}_{(k+1)}$. Для учета влияния усилий контактного взаимодействия слоев в вариационное уравнение принципа Рейсснера (10) необходимо ввести слагаемое, учитывающее работу силы контактного взаимодействия на векторе перемещения каждого слоя участка сопряженной поверхности

$$A_q = \sum_{m=k}^{k+1} \iint_{S_z^{(k,k-1)}} \vec{q}_{(m)} \vec{u}_z^{(m)} dS. \quad (31)$$

Усилия контактного взаимодействия $\vec{q}_{(k)} = q_{(k)}^i \vec{r}_i^{(k)} + q_{(k)}^3 \vec{m}^{(k)}$ возникают при выполнении условия

$$(\vec{u}_z^{(k)} - \vec{u}_z^{(k+1)}) < 0 \quad (32)$$

в зонах сопряжения жестких слоев. В случае, когда неравенство (32) не выполняется при перемещении точек области $S_z^{(k,k+1)}$ в процессе деформации, контактное давление $\vec{q}_{(k)}$ в уравнениях (21),(22) принимает значение $\vec{q}_{(k)} = 0$. Статические и кинематические граничные условия на контуре области $S_z^{(k,k+1)}$ имеют вид зависимостей (25),(26). Имея разрешающую систему уравнений (28) несложно с заданной точностью найти значение контактного давления на основе итерационного метода, предложенного в [6].

Таким образом, кинематические условия идеального контакта (13) лицевых поверхностей k -го слоя и сопряженных с ними поверхностями нижнего и верхнего слоя накладывают ограничения (29) на тангенциальные и нормальные перемещения k -го слоя. Аналогично статические условия идеального контакта (30) вносят изменения в характер распределения напряжений сдвига и обжатия в зонах контакта k -го слоя. Когда кинематические связи на каком-нибудь участке сопряженных лицевых поверхностей отсутствуют приведенные уравнения и граничные условия позволяют составить алгоритм для определения зоны контакта и величины контактного давления.

Список литературы: 1. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 1. Вариационный принцип теории упругих слоистых анизотропных систем при наличии зон неидеального контакта // Механика композитных материалов. – 1981. – №5. – С. 832-836. 2. Лазько В.А. Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 11. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика

композитных материалов. – 1982. – № 1. – С. 77-84. **3. Пелех Б.Л., Лазько В.А.** Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с. **4. Паймушин В.И.** Обобщенный вариационный принцип Рейсснера в нелинейной механике пространственных составных тел с приложениями к теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 2. – С. 171-180. **5. Паймушин В.И.** Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефектами в виде участков непрочности // Прикладная механика. – 1987. – Т. 23. № 11. – С. 32-38. **6. Кантор Б. Я.** Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Отв. ред. Подгорный А.Н.; АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1990. – 136 с. **7. Пискунов В.Г., Рассказов А.О.** Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. № 2. – С. 22-56. **8. Болотин В.В., Новичков Ю.Н.** Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **9. Галимов К.З.** Уравнения равновесия и движения тонких оболочек по нелинейной теории типа Тимошенко // Теория оболочек с учетом поперечного сдвига / Под ред. К.З. Галимова. - Издательство Казанского университета, 1977. - С. 36–95.

Поступила в редколлегию 11.05.04.

УДК 539.3

Э.Е.ГЕРМАН; В.А.КНЫШ;

Б.А.УШАМИРСКИЙ, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

ОБ УПРУГОМ УДАРЕ

У статті описана розробка інженерних методів розрахунку механічних систем при ударних діях. В основу дослідження покладено метод енергетичного балансу. Із закону збереження механічної енергії визначаються довго тривалість удару, максимальні контактні зусилля й напруження в тілах, що співударяються. Розглянуто пружний удар стержня і кулі об абсолютно жорстку перешкоду, а також ударна взаємодія двох рушійних стержнів. Запропонований підхід дозволяє отримати прості залежності, зручні для інженерного застосування. Проведено порівняння теоретичних результатів з експериментом, яке підтвердило правомірність введених теоретичних передумов. Запропонована в роботі модель пружного удару може бути застосована для невеликих швидкостей співудару.

This paper reports about development of engineering methods for mechanic systems by impingement attack. The base of investigation consists on energy balance method. Duration of shock, maximum contact efforts and strain items in impingement items define by law of conservation of mechanical energy. Elastic impact of rod and sphere on absolute stiff barrier and percussion interaction of two moving rod be described. Method proposed in this paper permits to get the simple compute dependent, convenient to engineering application. Theoretic results are compared with experiment and trust of entry theoretic prerequisites is supported. Model of elastic impact proposed in the paper can be used for not great speeds of item in the moment of impingement.

В литературе рассмотрение удара фиксируется большей частью на моментах «до» и «после», а собственно взаимодействие описывается лишь качественно. Такое положение может быть объяснено весьма разнообразным подходом к решению конкретных задач. Настоящая статья посвящена оценке величин, характеризующих упругий удар, на основе энергетического баланса.

1. Рассмотрим удар стержня о жесткую преграду. Длина L , поперечное сечение S , а модуль упругости E , плотность ρ материала стержня, а также начальная скорость W_0 заданы. Известно, что удар состоит из двух симметрич-

ных фаз: в первой кинетическая энергия тела K переходит в энергию деформации U , во второй происходит восстановление кинетической энергии. Из закона сохранения следует, что в любой момент контакта

$$K + U = K_0, \quad (1)$$

где K_0 – начальная кинетическая энергия.

Пусть в момент $t > 0$ длина стержня уменьшилась вследствие сжатия на величину x . Считая, что справедлива статическая зависимость, получим силу сжатия $F = ES \frac{x}{L}$ и, соответственно, энергию деформации $U = \frac{1}{2L} ESx^2$

В то же время x – путь, пройденный стержнем с начала контакта. Следовательно, скорость стержня $W = \frac{dx}{dt}$, а кинетическая энергия $K = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$.

Подставляя в (1), имеем

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2L} ESx^2 = \frac{1}{2} m W_0^2,$$

откуда

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(C \frac{x}{L} \right)^2 = W_0^2 \quad (2)$$

где $C = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения звуковых волн в материале стержня.

Время от начала контакта до достижения деформации x .

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{W_0^2 - \left(C \frac{x}{L} \right)^2}} = \frac{L}{C} \arcsin \frac{Cx}{W_0 L}. \quad (3)$$

В конце первой фазы $\frac{dx}{dt} = 0$, а деформация, как следует из (2), достигает максимума $x_{\max} = L \frac{W_0}{C}$.

Полное время контакта

$$T = 2t(x_{\max}) = \pi \frac{L}{C}. \quad (4)$$

Максимальная сила

$$F_{\max} = ES \frac{x_{\max}}{L} = \rho W_0 CS, \quad (5)$$

и напряжение в стержне

$$\sigma = \rho W_0 C. \quad (6)$$

Такое же выражение для повышения давления при прямом гидравлическом ударе было получено Н.Е. Жуковским. Потеря скорости при торможении $\Delta W = 1$ м/с дает для воды повышение давления $\sim 1,0$ МПа (10 кгс/см²) для стали – 40 МПа (400 кгс/см²). В целом выражения (4), (5), (6) идентичны полученным с помощью дискретной модели (1), в которой сплошное тело

представляется в виде последовательно соединенных между собой абсолютно твердых и недеформируемых безинерционных элементов.

2. При соприкосновении шара радиуса r с плоскостью теория упругости (2) дает следующую связь между действующей силой F и сближением тел x

$$F = 0,74 E r^{1/2} x^{3/2}. \quad (7)$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \int_0^x F dx = 0,296 E r^{1/2} x^{5/2},$$

что можно представить как

$$U = 0,141 \frac{m}{2} C^2 \left(\frac{x}{r} \right)^{5/2}. \quad (8)$$

Приравнивая сумму кинетической и потенциальной энергии в момент $t > 0$ начальной кинетической энергии и сократив на $m/2$, имеем

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 0,141 C^2 \left(\frac{x}{r} \right)^{5/2} = W_0^2. \quad (9)$$

Время удара от начала контакта до достижения деформации x

$$t = \frac{1}{W_0} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - 0,141 \frac{C^2}{W_0^2} \left(\frac{x}{r} \right)^{5/2}}}. \quad (10)$$

После введения переменной $\xi = x/x_{\max}$

$$t = \frac{x_{\max}}{W_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}}.$$

Максимальная деформация достигается в конце первой фазы, когда скорость шара становится равной нулю. Из (9) следует

$$x_{\max} = \left(\frac{1}{0,141} \right)^{2/5} \cdot \left(\frac{W_0}{C} \right)^{4/5} r.$$

Подставляя в (7) и (10), получим максимальную силу

$$F_{\max} = 2,41 r C W_0^5 \sqrt{\frac{W_0}{C}} r^2. \quad (11)$$

и полное время контакта

$$T = 2t = \left(\frac{1}{0,141} \right)^{2/5} \cdot \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} \cdot \frac{D}{C^{4/5} \cdot W_0^{1/5}},$$

где D – диаметр шара.

Определенный интеграл выражается через Γ -функцию.

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \frac{2}{5} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right)} = 1,47.$$

Окончательно

$$T = 1,47 \left(\frac{1}{0,141} \right)^{2/5} \cdot \frac{D}{C^{4/5} \cdot W_0^{1/5}} = 3,23 \cdot \frac{D}{C^{4/5} \cdot W_0^{1/5}}. \quad (12)$$

В таблице 1 приведены результаты экспериментального измерения длительности контакта стальных шаров одинакового диаметра, полученные с помощью высокоскоростного фотографирования 5000 кадров в минуту (3). Скорость соударения во всех опытах была постоянной и равной 0,1 м/с. Заметим, что задачи о соударении одинаковых шаров или стержней, движущиеся с равными скоростями, сводится к предыдущим, так как плотность контакта по симметрии будет жесткой преградой для каждого из них.

3. Рассмотрим удар движущегося стержня по неподвижному, где симметрия не столь явна, как в предыдущих примерах. Длина стержней, сечение и материал одинаковы. В начале контакта скорость первого стержня $W_{10} = 0$, второго $W_{20} = 0$. К некоторому моменту $t > 0$ каждый стержень получит де-

формацию $x_1 = x_2 = x$, скорости их станут $W_1 = W_0 - \frac{dx}{dt}$, $W_2 = 0 + \frac{dx}{dt}$, а отно-

сительная скорость $W_r = W_1 - W_2 = W_0 - 2 \frac{dx}{dt}$.

Переход кинетической энергии первого стержня в потенциальную энергию обоих будет происходить до момента $W_r = 0$, т.е. до приобретения стержнями скорости $\frac{1}{2} W_0$ и максимальной деформации x_{\max} . Уравнение энергетического баланса $K_1 + K_2 + U_1 + U_2 = K_0$ с учетом $U_1 = U_2$ вследствие равенства сил действия и противодействия приобретает вид

$$\frac{1}{2} \rho L S \left(W_0 - \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho L S \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{L} E S x^2 = \frac{1}{2} \rho L S W_0^2.$$

После сокращения и приведения подобных получим

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - W_0 \frac{dx}{dt} + \left(C \frac{x}{L} \right)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{W_0}{2} \pm \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C \frac{x}{L} \right)^2}. \quad (13)$$

Здесь знаки «+» и «-» дают, как указано в таблице 2, скорости стержней в двух симметричных фазах соударения.

Полное время контакта

$$T = 2 \int_0^{x_{\max}} \frac{dx}{\frac{W_0}{2} + \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C \frac{x}{L} \right)^2}}.$$

Переходя к переменной $\xi = x/x_{\max}$ и учитывая, что $x_{\max} = \frac{1}{2} L \frac{W_0}{C}$, получим

$$T = \frac{4x_{\max}}{W_0} \int_0^1 \frac{d\xi}{1 + \sqrt{1 - \xi^2}} = (\pi - 2) \frac{L}{C}. \quad (14)$$

Максимальная сила

$$F = ES \frac{x_{\max}}{L} = \frac{1}{2} \rho c W_0 S. \quad (15)$$

Для аналогичного примера (4), принимая равную жесткость стержней и упругой прокладки, время контакта $T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{L}{C}$, что совпадает с выражением

(14) с точностью до 3 %.

Как видно из предыдущего, сделанные предположения позволили получить удовлетворительные результаты при незначительном объеме вычислений. И в более сложных случаях уравнение энергетического баланса совместно с условием равенства нулю относительной скорости в момент достижения максимальной деформации дают достаточную определенность и простоту решения задач упругого удара.

В заключение отметим, что при использовании статических зависимостей теории упругости, результат будет тем точнее, чем больше будет длительность контакта по сравнению с наибольшим периодом колебания тел.

Таблица 1

Диаметр шара, мм	50,8	47,6	30,2	19,8	9,5
Измеренная длительность, мкс	230	180	130	90	45
Расчетная длительность, мкс	276	258	164	107	51

Таблица 2

	Начало контакта	Фаза 1	Фаза 2	Конец контакта
W_1	W_0	$\frac{W_0}{2} + \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C \frac{x}{L}\right)^2}$	$\frac{W_0}{2} + \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C \frac{x}{L}\right)^2}$	0
W_2	0	$\frac{W_0}{2} - \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C \frac{x}{L}\right)^2}$	$\frac{W_0}{2} + \sqrt{\frac{W_0^2}{4} - \left(C \frac{x}{L}\right)^2}$	W_0

Список литературы: 1. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара. – М.: Наука, 1977. 2. Тимошенко С.П. Теория упругости. – М.: ОНТИ, 1934. – 300 с. 3. Татаря И. Исследование процесса соударения шаров // Теоретические основы инженерных расчетов. – № 1. – 1983. – С. 80. 4. Александров Е.В., Соколинский В.Б. Прикладная теория и расчеты ударных систем. – М.: Наука, 1969.

Поступила в редколлегию 29.04.04

В.Н.ДАНИЛОВ, НАУ «ХАИ»

РАСЧЕТ СТАТИКИ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В статті запропоновано рішення задач, які описують стан кільцевої пластини методом рекуррентних співвідношень. На відомих задачах показані переваги цього підходу порівняно з деякими відомими методами і проаналізовані отримані результати. Також показана можливість рішення складних систем, що містять у собі кільцеву пластину.

In the article the problem solving which is offered describe a condition of a ring slice by a method of recurrent ratio. On the known tasks the advantages of this method as contrasted to by known methods are shown and the obtained outcomes are parsed. Capability of the solution of compound systems also is shown which comprise a ring slice

В настоящее время имеется много различного рода алгоритмов, методов и программ для расчета деформируемых структур, в том числе и кольцевых пластин. Однако, как известно, при увеличении длины образующей, возможность исследования этих задач ограничена из-за наличия быстро возрастающих и быстро убывающих решений. Поэтому практически все ранее разработанные методы, модели и алгоритмы имеют недостатки. То есть, подразумевают приближенное численное решение, или требуют больших запасов по ресурсам ЭВМ. Наш подход в какой-то степени позволяет избежать этих недостатков. Исследования авторов в данном направлении являются частью государственной темы Г202-20/2003 «Разработка математических моделей складных механических систем импульсной дѣи для використання в аерокосмічній галузі».

Частичный обзор теории и методов решения задач теории упругости по определению параметров вектора состояния в задачах статики кольцевых пластин можно найти, например, в работах [1–3].

В данной работе предлагается расчет статики кольцевых пластин при помощи сравнительно нового подхода – метода рекуррентных соотношений, который позволяет найти параметры вектора состояния в любой точке поверхности деформируемого тела путем решения общей моментной системы дифференциальных уравнений. При этом не требуется больших запасов по ресурсам и скорости обработки на ЭВМ даже для расчета сложных комбинированных структур.

Целью данной работы является демонстрация преимуществ нашего подхода по сравнению с известными результатами, содержащихся в работах других авторов. Точность расчетов для рассмотренных в данной работе задач, на наш взгляд является приемлемой, о чем будет сказано ниже.

В работе [4] дано применение метода рекуррентных соотношений к расчету статики и динамики стержневых и трубопроводных систем. Работа [5] иллюстрирует применение метода рекуррентных соотношений к расчету статики и динамики комбинированных цилиндрических оболочек. В работе [6] рассматривается адаптация метода к решению простых с составных конических оболочек.

В качестве первого примера демонстрации работы метода рекуррентных соотношений была взята задача, решение которой приводится в работе [1]. Это диск линейно-переменной толщины нагруженный антисимметричной изгибающей нагрузкой. Геометрические размеры, а также величина нагрузки и графики удельного изгибающего момента M_1 и нормального перемещения w при $\theta = 0$ показаны на рис. 1.

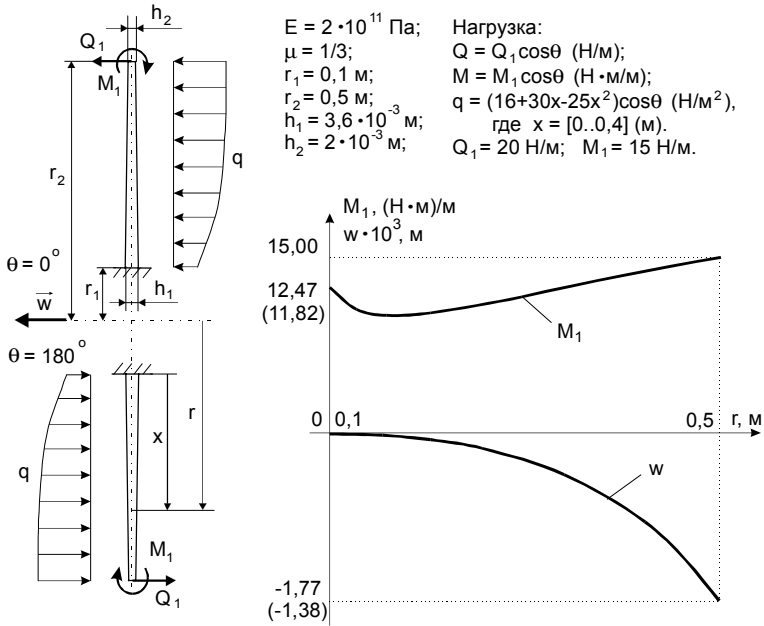


Рисунок 1

Графики рис. 1 получены численным методом рекуррентных соотношений. Методика, изложенная в работе [1] позволяет найти значения искомых параметров только лишь в граничных точках. Эти значения показаны на рис. 1 в скобках, ниже значений, полученных методом рекуррентных соотношений.

Комментируя полученный результат, отметим, что метод рекуррентных соотношений, хотя и является численным методом, он позволяет избежать многих систематических ошибок присущих другим численным методам: ошибки аппроксимации, ошибки численного интегрирования и др. Для метода рекуррентных соотношений характерен только один тип ошибки – ошибка округления чисел при решении больших систем уравнений на ЭВМ. Однако при решении задачи изображенной на рис. 1. потребовалось разбиение пластины на 9 участков и решение в конечном итоге системы линейных уравнений 72×72 . Если начать увеличивать количество участков при расчете, то при любом количестве участков меньше 60-ти ответ не меняется и совпадает до 15 знака. При большем количестве участков результаты начинают ухудшаться.

ся. Здесь начинают сказываться ошибки численного счета при решении большой системы уравнений. По этому в данном случае результат, полученный методом рекуррентных соотношений в рамках данной математической модели на наш взгляд достаточно точный.

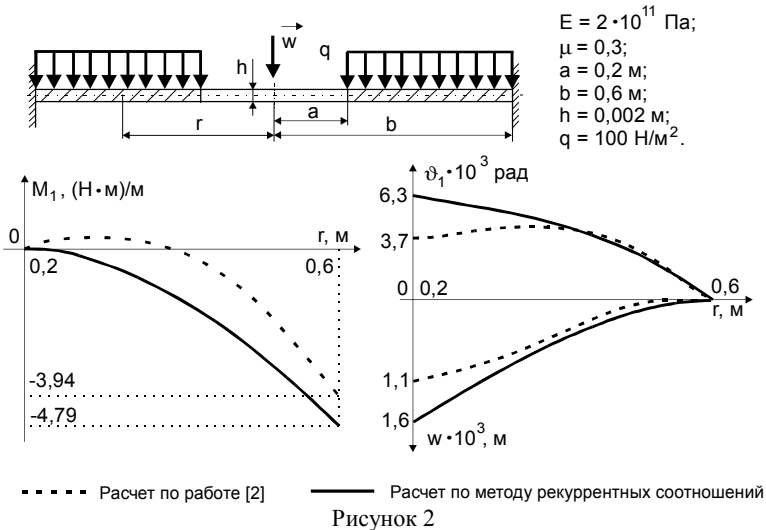


Рисунок 2

Следующая задача, рассматриваемая в данной работе это кольцевая пластина постоянной толщины, жестко закрепленная по внешнему контуру и нагруженная равномерно распределенным давлением см. рис. 2.

Методика изложенная в работе [2] уже позволяет оценивать распределение изгибающего момента M_1 , угла поворота ϑ_1 и нормального перемещения w по радиусу пластины. Однако, из расчета по работе [2] видно, что изгибающий момент меняет свой знак на участке, что при данном виде нагрузки вызывает некоторое сомнение. Из этого можно сделать вывод, что методика, изложенная в работе [2] приемлемая, но неточная и даже в такой простой задаче позволяет только лишь примерно рассчитывать искомые параметры.

Кроме этого, методика решения задач в работе [2] сравнительно трудоемкая, так как подразумевает расчет в специальных функциях, что даже по сравнению с другими аналитическими методами является недостатком. Метод рекуррентных соотношений сравнительно прост в реализации, а программа, написанная по этому методу, не требует больших затрат времени и специального уровня подготовки специалиста.

Рассмотрим еще одну задачу, аналитический расчет которой приводится в работе [3]. Это кольцевая пластина, жестко заделанная на внутреннем контуре. На наружном контуре разрешено перемещение в нормальном направлении, перемещения в других направлениях запрещены. Нагружена пластина равномерно распределенной поперечной нагрузкой см. рис. 3. На графиках

см. рис. 3 изображены значения не нулевых параметров вектора состояния (w – нормальное перемещение, Q_1 – удельная радиальная поперечная сила, M_1 – удельный изгибающий момент).

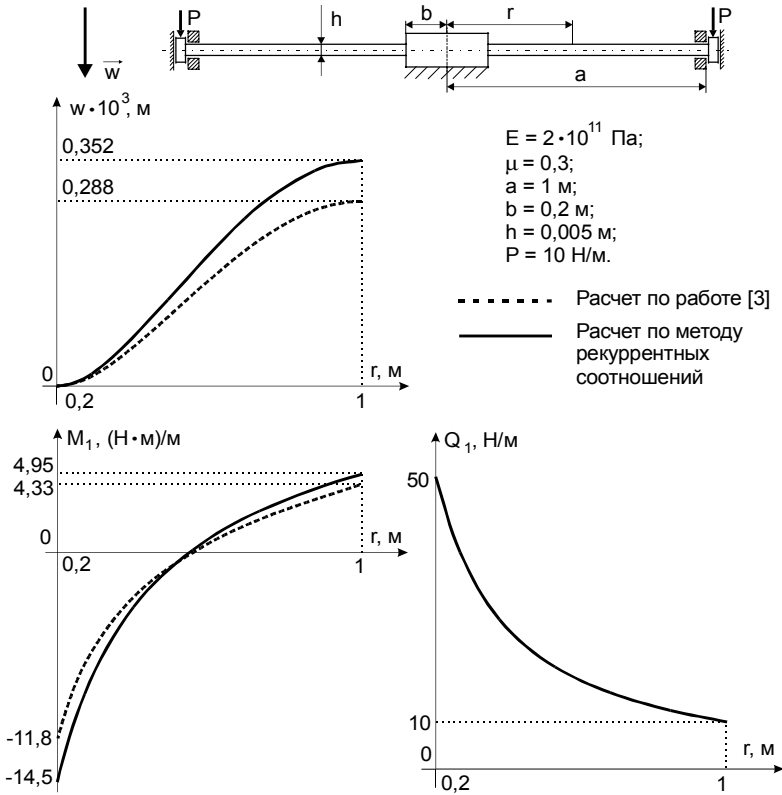


Рисунок 3

В данной задаче сила Q_1 определяется всего лишь по одной формуле в зависимости от текущего значения радиуса $Q_1 = pa/r$. Эта формула является абсолютно точной в рамках данной математической модели, так как ее можно получить аналитическим путем, что и демонстрируется в работе [3].

Расчет методом рекуррентных соотношений (в котором численно решается общая система дифференциальных уравнений) показывает совпадение с этим результатом до 15 знака после запятой. Это аргументирует, при всех прочих условиях правильность обоих решений.

Два других не нулевых параметра в работе [3] также определяются по аналитическим формулам, которые получаются вследствие численного интегрирования системы дифференциальных уравнений описывающих деформацию пластины и в конечном итоге определяются по громоздким формулам,

в чем на наш взгляд и содержится ошибка по сравнению с более точным методом рекуррентных соотношений.

Из рассмотренных выше примеров видно, что метод рекуррентных соотношений, на наш взгляд, не уступает, а в целом, позволяет более надежно и точно исследовать изложенные выше задачи. Кроме того метод рекуррентных соотношений в силу его алгоритмических преимуществ, позволяет исследовать не только простые, состоящие из одного участка пластины, а и рассчитывать более сложные структуры, о чем уже говорилось в работе [6]. Для практики интерес представляет конструкция, в которой кольцевая пластина является лишь составным элементов в комбинации оболочек.

Рассмотрим, например, конструкцию (см. рис. 4). Вся конструкция из материала: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 0,3$.

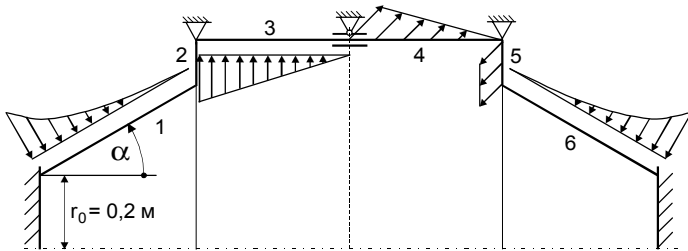


Рисунок 4

В таблице приводятся значения остальных параметров для оболочек составляющих конструкцию и нагрузка на участках.

№ уч.	α , град	Длина участка, м	Толщина, м	Нагрузка, Н/м ²
1	30	0,5	0,002	$q_3 = -12500 + 7500x_1 - 15000x_1^2 + 10000x_1^3$
2	90	0,1	0,006	0
3	0	0,4	0,003	$q_3 = -1000 + 2500x_3$
4	0	0,4	0,003	$q_2 = 2500 - 6250x_4$
5	-90	0,1	0,006	$q_2 = -20000$
6	-30	0,5	0,002	$q_3 = -10000x_6^3$

В таблице: $x_1 = [0 \dots 0,5]$, $x_3 = [0 \dots 0,4]$, $x_4 = [0 \dots 0,4]$, $x_6 = [0 \dots 0,5]$; q_2 – касательная нагрузка, q_3 – нормальная нагрузка. Угол раскрытия конуса α отсчитывается от оси вращения конструкции.

В начале и в конце конструкция жестко заделана; между вторым и третьим, четвертым и пятым участками запрещено продольное u , касательное v и нормальное w перемещения; между третьим и четвертым участками запрещено продольное перемещение w . Переход от одного участка к другому осуществляется простым поворотом базиса на соответствующий угол.

Графики для касательного v и продольного w перемещений конструкции, изображенной на рис. 4, приведены на рис. 5.

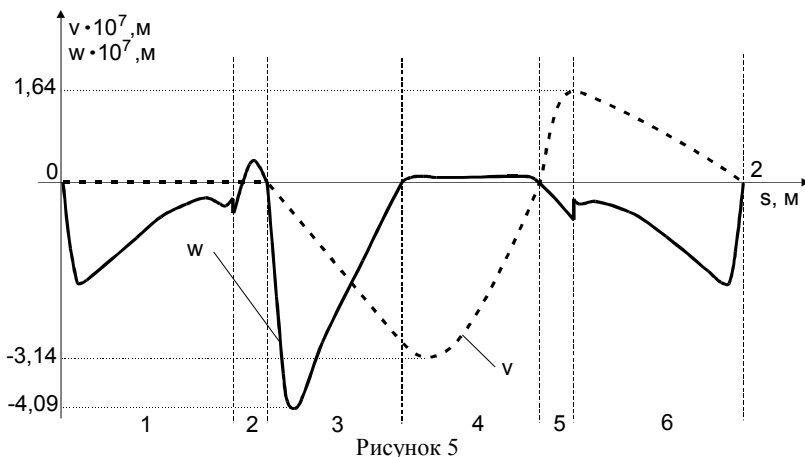


Рисунок 5

Выводы. В результате проведенных исследований было установлено, что метод рекуррентных соотношений ничем не уступает большинству аналитических и численных решений при расчете простых кольцевых пластин с различным видом нагружения. При расчете сложных составных структур, как правило, большинство методик, подходов и численных методов или не применимо или на наш взгляд дают погрешность в расчетах. Метод рекуррентных соотношений позволяет считать составные оболочечные структуры с довольно большим количеством участков с различного вида закреплениями между участками и произвольной нагрузкой представляющей собой степенной ряд. Это дает возможность для дальнейших исследований и написанию алгоритмов программ расчета статики оболочек, у которых в поперечном сечении не окружность, расчета задач формулируемых нелинейной теорией оболочек и др.

Список литературы: 1. Коваленко А.Д. Круглые пластины переменной толщины. – М., 1959. – 296 с. 2. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. – Л., 1977. – 184 с. 3. Григолюк Э.И. Прочность, колебания, устойчивость круговых пластин. – М., 1997. – 134 с. 4. Черночуб И.П., Попов А.Е., Доценко П.Д. Динамика трубопроводных систем. – Х., 1998. – 226 с. 5. Берешко И.Н., Вамболь С.А., Доценко П.Д. Постановка задач расчета статики и динамики многосвязных цилиндрических оболочек методом рекуррентных соотношений // Тем. сборник науч. трудов НАУ «ХАИ». – 2000: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Вып. 23(6). – С. 144-155. 6. Доценко П.Д., Данилов В.Н. Метод рекуррентных соотношений в статике конических оболочек // Тем. сборник науч. трудов НАУ «ХАИ». – 2003: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Вып. 34(3). – С. 74-81.

Поступила в редколлегию 12.04.04

П.Д.ДОЦЕНКО, докт.техн.наук, НАУ «ХАИ»

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ КОМБИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Викладені результати розробок оригінальної методики, алгоритмів і програм розрахунку статичного та динамічного стану комбінованих оболонкових конструкцій. Наведено ряд прикладів використання цієї методики. Чисельний процес розрахунку порівняно з відомими має суттєво підвищену точність та швидкість, надійність, низькі апаратні потреби, не потребує високого професіоналізму для передпроцесорної підготовки задач, але тим не менше, має досить широкі масштаби використання. Математичною моделлю є нелінійні диференційні рівняння динаміки оболонок обертання. На цій основі сформульовані рівняння розрахунку статичного та динамічного незбуреного стану та рівняння в збуреннях для розрахунку задач малих коливань, стійкості та несучої спроможності. В основі чисельних алгоритмів закладені відносно прості рекурентні процеси та ряд спеціально розроблених модулів, які й забезпечують вказані вище показники.

A peculiar method for computing static and dynamic state of combined shell structures is discussed, as well as the relevant algorithms and some specific examples. The proposed digital procedure, as compared to the known ones, is of the enhanced accuracy and processing speed, higher reliability and lower hardware requirements. It does not demand high professionalism from a user in preprocessing phase, and nevertheless, is of a rather broad applicability. The non-linear differential equations of dynamics of shell of revolution were the mathematic model and the basis to formulate the equations for calculating the unperturbed static and dynamic state, as well as the equations in disturbances for computing the problems of small-amplitude oscillation, stability and bearing capacity. The numerical algorithm is based on relatively simple recurrent processes and on a number of specially created program units, that ensure the features noted above.

1. Введение. Процесс исследования статического и динамического напряженного состояния оболочек вращения обладает некоторым внутренним свойством – плохой обусловленности краевой задачи, спровоцированной наличием быстро возрастающих и, соответственно, быстро убывающих решений, которые с увеличением длины образующей приводят к полному искажению результатов. Эта проблема привела к поиску алгоритмов, позволяющих хотя бы частично выйти из указанных затруднений. В этом направлении использовались: приемы разбиения оболочки на относительно короткие элементы со стыковкой решений по вектору состояния, различные модификации методов начальных параметров и метода Галеркина. Были разработаны различные варианты метода прогонки (Абрамов А.А., Бабушка И., Бидерман В.Л., Свирский И.В., Черника В.С. и др.).

Существенного продвижения в этом направлении удалось достичь использованием метода ортогонализации С.К. Годунова [1] в соединении с методом начальных параметров и методами прогонки. Впервые в задачах статики оболочек вращения метод ортогонализации был применен с сотрудниками Я.М. Григоренко [2]. В дальнейшем этот подход нашел достаточно широкое развитие на территории бывшего СССР в работах многих авторов. Достаточ-

но полное освещение методик и алгоритмов этого варианта принадлежит группе авторов (Григорьев И.В., Кармишин А.В., Ясковец В.А., Мяченков В.И., Пахомова Л.А., Репин А.А., Фролов А.В. и др., см. [3,4]).

Однако при всех своих достоинствах и возможностях такой подход тоже не лишен ограничений и недостатков. Во-первых, численные алгоритмы интегрирования дифференциальных уравнений вносят заметное накопление погрешностей, возрастающих с ростом длины образующей, см. [3, стр.86]. Существенные погрешности дает и метод ортогонализации, прежде всего при вычислении и использовании прямых и обратных матриц ортогонализации, см. [5, стр. 467]. Во-вторых, применение метода ортогонализации ограничено сравнительно малым числом узлов разбиения, поэтому он мало приспособлен к расчету комбинированных конструкций. И, наконец, применение численных процессов с использованием метода С.К. Годунова позволяет получать результаты только в узлах ортогонализации и не дает возможности построить, например, поля напряжений, перемещений и т. д. в промежуточных точках. Разработанные в этом направлении средства достаточно искусственны и имеют ограниченные возможности.

Для повышения точности расчетов предлагались различные приемы, среди которых: масштабирование уравнений с целью выравнивания порядков их коэффициентов (Бидерман В.Л.); модификация методов прогонки, ортогонализации и процедурных алгоритмов (Бабушка И., Беллман Р., Мяченков В.И., Григолюк Э.И., Григоренко Я.М., Василенко А.Т. и др.). Тем не менее, разработка алгоритмов и программ расчета каждой конкретной задачи оставалась практически индивидуальной и требовала высокой профессиональной подготовки пользователя, что затрудняло общедоступное его применение.

2. О методе рекуррентных соотношений. Для расчета статического и динамического состояния пространственно криволинейных, разветвленных стержневых и трубопроводных систем, как один из вариантов модификации метода начальных параметров, автор настоящей работы в течении многих лет использовал алгоритм рекуррентного построения матриц фундаментальных решений, или иначе, матриц перехода между элементами конструкций (см., например [6,7]). В последние годы такой подход нашел развитие в применении к расчету статики и динамики оболочечных систем [8, 9] под названием – «метод рекуррентных соотношений».

2.1. Математические модели. В условиях гипотез Кирхгофа-Лява, с поправками Балабуха и Новожилова, сформулированы нелинейные (с сохранением второго порядка) уравнения динамики оболочек вращения. Известными способами [3,5,10], после соответствующих тождественных преобразований к специальному виду и использования условия периодичности решения по угловой координате параллели φ , они разрешены относительно первых производных по координате меридиана s . Такая формулировка математической модели реализуется далее при исследовании линейных и нелинейных задач рас-

чета статического и динамического напряженно-деформированного состояния (НДС) составных и комбинированных оболочечных конструкций.

На основе нелинейной модели сформулированы уравнения в возмущениях (линеаризованные по параметрам возмущений). Они учитывают в общем случае многокомпонентное предварительное НДС, индуцированное невозмущенным состоянием. Модель такого вида является базовой при исследовании задач малых колебаний, статической и динамической устойчивости, несущей способности оболочечных конструкций, в том числе и комбинированных.

2.2. Основные соотношения МРС. Система уравнений в частных производных моментной теории оболочек вращения, после исключения φ , имеет восьмой порядок (шестнадцатый – при учете кососимметричных деформаций) (см. [5,8,10]). В векторно-матричном виде система уравнений и представление ее решения имеют вид:

$$\frac{d\bar{z}}{ds} = A\bar{z} + \bar{q}; \quad \bar{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}_k s^k \equiv \bar{z}_0 + \bar{z}_1 s + \bar{z}_2 s^2 + \bar{z}_3 s^3 + \dots, \quad (2.1)$$

где \bar{z}_k , ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$) – постоянные вектора, подлежащие определению.

В общем случае (криволинейный меридиан, переменные нагрузки и т.п.) элементы матрицы A и компоненты вектора нагрузок \bar{q} являются функциями дуговой координаты s . Предполагается, что они разложены в степенные ряды (в окрестности $s = 0$) вида: $A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k s^k$; $\bar{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{q}_k s^k$, где A_k и \bar{q}_k постоянные, соответственно, матрицы и вектора.

Для однородного уравнения (2.1), в соответствии с видом решения указанного там же, следует принять $\bar{z}|_{s=0} = \bar{z}_0$ (что эквивалентно $k = 0$). С другой стороны, поскольку все постоянные \bar{z}_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ должны представлять собой линейную комбинацию компонент вектора \bar{z}_0 , то $\bar{z}_k = C_k \cdot \bar{z}_0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, где C_k – постоянные матрицы с неизвестными элементами, а $C_0 = E$ (единичная матрица). В связи с этим, общий вид решения однородного уравнения (2.1) можно представить в виде:

$$\bar{z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot s^k \right) \bar{z}_0 \equiv H \cdot \bar{z}_0; \quad H = E + C_1 s + C_2 s^2 + \dots \quad (2.2)$$

Построение решения однородного уравнения сводится по существу к расчету матриц C_k . Частное решение неоднородного уравнения по определению \bar{z}_k строится аналогично при наличии \bar{q} . После подстановок и соответствующих преобразований, получим рекуррентные соотношения для определения матриц C_k в общем решении однородной задачи и коэффициентов \bar{z}_k частного решения неоднородного уравнения:

$$C_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k A_j C_{k-j}; \quad \bar{z}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} A_j \bar{z}_{k-j} + \bar{q}_k; \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad (2.3)$$

При этом следует учесть, что $C_0 = E$, а во втором выражении $\bar{z}_0 = 0$.

Как показала практика применение метода рекуррентных соотношений, точность расчета в целом по конструкции обусловлена порядком максимальных элементов матрицы H в решении однородного уравнения. Поэтому дальнейшее внимание будет сосредоточено в основном на проблемах касающихся однородного решения.

2.3. Оптимальное разбиение на СуЭ. Каждая оболочка, входящая в состав комбинированной конструкции, в процессе предпроцессорной подготовки, при необходимости, разбивается по меридиану на относительно длинные элементы – суперэлементы (СуЭ). Какие-либо обоснованные критерии этого разбиения (кроме некоторых рекомендаций, например, [5, стр. 145; 3, стр. 67]) в литературе отсутствуют. Мы используем подход, автоматически адаптирующийся к конкретным параметрам соответствующего элемента конструкции и уже в предпроцессорном прогоне, информирующем о желательном коэффициенте деления и оптимальной длине рабочего СуЭ каждой детали.

Суть его в следующем. В предпроцессорном прогоне рекуррентным путем строится матрица H , связывающая выражением $\bar{z}_K = H\bar{z}_N$ вектор состояния начала (N) и конца (K) элемента конструкции, с образующей известной длины (L_0). По ходу его выполнения контролируется максимальный элемент матрицы H , порядок которого и определяет точность расчета¹. Этот элемент, при заданной длине участка $s = L_0$ и заданной точности аппроксимации решения степенным рядом, должен быть по порядку заметно ниже, чем количество знаков мантиссы для выбранного типа переменных. Базовый порядок “заметно ниже” составляет (для типа **extended**) примерно $10^7 \div 10^8$. В этом случае мы можем быть уверенными, что и малые слагаемые с отрицательным порядком не ниже этого будут тоже учтены. На этом основании делается оценка коэффициента деления L_0 на СуЭ и оценка оптимальной длины этого СуЭ.

2.4. Разрешающая система уравнений. Для отражения произвольных распределенных параметров (в частности, распределенных нагрузок) размерность вектора состояния увеличена до 9 (последний, девятый элемент равен единице) и, соответственно, увеличена размерность матрицы H . Девятая строка нулевая, кроме девятого элемента – равного единице. В девятом столбце (в 5, 6 и 7 строках) размещены результаты учета, в общем, переменных распределенных нагрузок, которые формируются тем же рекуррентным процессом.

Разделим, если необходимо, каждый составной элемент общей конструкции оптимальным образом на СуЭ, считая, что отсчет s на каждом СуЭ начинается с нуля. Пусть таких СуЭ будет ks . Тогда, для каждого из них выполняется равенство $\bar{z}_{n+1} = H_{n+1}\bar{z}_n$, где $n=0,1,2,\dots,ks-1$. Соответствующие вектора состояния \bar{z}_n ($n=0,1,2,\dots,ks$) считаются неизвестными и подлежат определению.

¹ Поскольку матрица $H(s)$ безразмерная, то, очевидно, что масштабирование вектора состояния или приведение системы уравнений к безразмерному виду не может повысить точность расчетов.

Система равенств $\bar{z}_{n+1} = H_{n+1} \bar{z}_n$ представляет собой, с одной стороны, тоже рекуррентную последовательность и, в принципе, может быть использована в этом режиме. Такой вариант может быть достаточным в отдельных задачах колебаний и устойчивости конструкций (см. [6,7]), при условии, что информация о формах колебаний нас не интересует. В задачах расчета НДС, при наличии краевых эффектов и относительно большого количества СуЭ, за счет накопления погрешностей при перемножении матриц H_n , такой вариант нежелателен. С другой стороны, использование рекуррентного процесса в таком варианте нежелательно и по причинам, речь о которых пойдет несколько ниже. Тем не менее, эта цепочка рекуррентных соотношений в интерпретации **системы независимых уравнений** и представляет собой разрешающую систему. Учитывая ее диагональность, имеем:

$$\begin{aligned} H_1 \bar{z}_0 - \bar{z}_1 &= 0; \\ H_2 \bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= 0; \\ H_3 \bar{z}_2 - \bar{z}_3 &= 0; \\ &\dots \\ H_{k_s} \bar{z}_{k_s-1} - \bar{z}_{k_s} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

По поводу формирования этой системы сделаем несколько замечаний:

– Соответствующие матрицы H_n , вычисляются и записываются в (2.4) в порядке последовательного прогона по всем СуЭ. При формировании разрешающей системы ЛН определяется автоматически в предпроцессорном прогоне по назначенному количеству СуЭ при оптимальном разбиении. Матрица коэффициентов в разрешающей системе является ленточной (кроме последнего столбца) с шириной ленты равной 8, независимо от формы элементов конструкции, вида нагрузок и вида особенностей (повороты базиса, жесткие, упругие или упругодемпфирующие опоры, шпангоуты и т.п.)

Таким образом, в задачах расчета статического или динамического НДС, разрешающая система представляет собой полную неоднородную систему $LN \cdot (LN + 1)$ алгебраических уравнений и постоянными вещественными коэффициентами. Компоненты векторов $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{k_s}$ известны и подлежат расчету, кроме, обычно заданных граничными условиями четырех компонент в \bar{z}_0 , и, соответственно, в \bar{z}_{k_s} , что и обеспечивает полноту системы. Учет промежуточных предельных условий решается в процессе формирования разрешающей системы специальной микропрограммой, не изменяющей общий процесс, но добавляющий лишние неизвестные и, соответственно, дополнительные уравнения.

В задачах малых колебаний, устойчивости и несущей способности соответствующая система уравнений является однородной, того же порядка, но с комплексными коэффициентами. Для поиска комплексных собственных значений и собственных форм автором была ранее разработана надежная специальная программа [6,7,11].

2.5. Матрица H_k^* . Интегрирование системы. Разрешающая система уравнений (2.4) с матрицами $Sy\mathcal{E} H_n$, если разбиение выполнено оптимально, гарантирует в общем “достаточную” или, точнее, соответствующую критерию – “оптимальную” точность расчета и не позволяет получать результаты в промежуточных точках $Sy\mathcal{E}$.

Существенное повышение точности расчета, идентификация любого количества промежуточных данных, а также обеспечение работы с криволинейными элементами, решается внутренним (в пределах каждого $Sy\mathcal{E}$) рекуррентным процессом на основе матриц H_k^* . Эта часть в общем процессе занимает весьма ответственное значение. От точности определения элементов матрицы H_k^* главным образом и зависит точность решения задачи в целом. Рассмотрим алгоритм построения матриц H_k^* и выход на их основе к формированию матриц H_n n -го $Sy\mathcal{E}$.

Представим, что $[s = 0, s = L]$ есть начало и конец некоторого $Sy\mathcal{E}$ оболочки, выбранного оптимальным образом. Разделим интервал $[0, L]$ на $N_0 \gg 1$, в общем, криволинейных отрезков (то есть, назовем $s_j = L/N_0$) и построим рекуррентный процесс в пределах этого $Sy\mathcal{E}$, в соответствии с формулами (2.4) для $j = 1, 2, \dots, N_0$: $\bar{z}_1 = H_1^* \bar{z}_0$; $\bar{z}_2 = H_2^* \bar{z}_1$; ...; $\bar{z}_{N_0-1} = H_{N_0-1}^* \bar{z}_{N_0-2}$; $\bar{z}_{N_0} = H_{N_0}^* \bar{z}_{N_0-1}$. Эту цепочку можно представить в виде конечного рекуррентного выражения:

$$\bar{z}_N = [H_{N_0}^* \cdot H_{N_0-1}^* \dots H_2^* \cdot H_1^*] \bar{z}_0 \equiv H_N \bar{z}_0. \quad (2.5)$$

Последнее соотношение и представляет собой алгоритм построения матрицы H_N на выделенном N -м $Sy\mathcal{E}$. При этом если параметр s мал, то все промежуточные матрицы H_j^* , $j = 1, 2, \dots, N_0$ будут иметь низкий порядок нормы и вычислены точно. Произведение этих матриц в формуле (2.5), то есть, каждой из матриц H_N в разрешающей системе, будет иметь тоже высокую точность. Сделаем несколько замечаний.

– Количество дискретных элементов в пределах $Sy\mathcal{E}$ (то есть число N_0) может быть достаточно большим. При условии, что деление на $Sy\mathcal{E}$ выбрано оптимальным образом, увеличение N_0 заметно повышает точность расчета в целом и матриц H_N в частности. Это позволяет расчетный (оптимальный) коэффициент деления на $Sy\mathcal{E}$ несколько уменьшить, понижая тем самым разрешимость разрешающей системы.

– Не менее важная роль внутреннего (в пределах $Sy\mathcal{E}$) рекуррентного процесса (2.5) состоит в возможности выдачи расчетных данных в любом числе точек и с любым мелким шагом дискретизации. Внутренний рекуррентный процесс не связан и не зависит от разбиения на $Sy\mathcal{E}$, поэтому порядок разрешающей системы тоже не зависит от числа N_0 на каждом $Sy\mathcal{E}$ и суммарного его значения по всей конструкции. Это позволяет в процессе решения задачи, без перестройки алгоритма и программы, менять N_0 на любом из $Sy\mathcal{E}$ с целью, например, уточнения отдельных участков формы получаемой кривой и т. п.

– Частное решение неоднородной задачи строится таким же рекуррентным путем и в том же блоке, что и для однородной системы в виде вектора-

столбца, который записывается, как указано выше, в девятый столбец матрицы N_j^* , $j = 1, 2, \dots, N_0$ и трансформируется, в соответствии с формулой (2.5), в матрицу N_N соответствующего СуЭ.

2.6. Учет местных особенностей. Изменение ориентации базиса (что эквивалентно пересчету компонент вектора состояния) при переходе к очередному конструктивному элементу выполняется автоматически с помощью “матрицы поворота”. По умолчанию эта матрица является единичной, а в соответствующем месте параметры ее формируются по заданным исходным данным задачи. Местные нагрузки и другие особенности местного характера, отмеченные выше, отражаются так называемой “матрицей включений”, которая тоже “по умолчанию” является единичной и заполняется в соответствующем месте автоматически по заданным исходным данным.

Ниже будут рассмотрены три относительно простых примера. Иллюстрирующих использование описанного выше алгоритма и разработанной на его основе программы.

3. Длинная цилиндрическая оболочка. В качестве первого тестового примера рассматривается задача статики длинной цилиндрической оболочки с жестко закрепленными концами и постоянным внутренним давлением. Пример выбран как иллюстрация возможностей МРС в связи с общеизвестностью качественных результатов такой задачи и известными особенностями построения ее решения различными методами. Решение получено «as is», то есть, без использования симметрии по границам и осевой симметрии, равномерности распределения нагрузки, без комбинации и наложения (как это иногда практикуется) краевого эффекта и безмоментного состояния. На рис. 1 приведены данные расчета параметров перемещения оболочки ($L = 9$ м; $K = 0,8$ м; $h = 5$ мм; модуль Юнга – $2 \cdot 10^6$ кгс/см², коэффициент Пуассона – 0,3). Оболочка нагружена внутренним давлением – $q_3 = 0,1$ кгс/см², концы жестко соединены с абсолютно жесткими днищами.

Графики построены программой **CurvExprt 1.38** непосредственно по расчетным точкам без какой-либо корректировки. О точности расчета можно судить по поведению кривых в зоне участка безмоментного НДС ($\approx [30 \div 870]$ см по образующей), симметрии и, как нам кажется, идеальному соответствию формы всплесков на участках краевых эффектов. Эти участки слева и справа отмечены вертикальными прямыми. Кстати, следует заметить, что в зоне краевых эффектов решения не имеют вида затухающего периодического процесса, как это часто изображается в литературе. Симметричные (соответственно, антисимметричные) значения параметров вектора состояния в зоне краевых эффектов совпадают до последней цифры после запятой.

В соответствии с видом заданной нагрузки, касательное к параллели перемещение $v \equiv 0$ и соответствующее ему крутящее усилие $S_1 \equiv 0$ (не априори, а по расчету). Растягивающее (по образующей усилие) постоянно по всей

длине и равно $T_1 = 2,376$ кГс/см и постоянно по всей длине. Радиальное перемещение, как видим, постоянно в зоне безмоментного состояния и равно $w = 5,83 \cdot 10^{-2}$ мм. Максимальный пик его достигается слева и справа в зоне краевого эффекта, где $w_{\max} = 6,08 \cdot 10^{-2}$ мм. Поскольку концы этой длинной оболочки закреплены, то осевое перемещение идет уменьшаясь слева направо до середины (450 см), а затем в обратную сторону возрастая и достигая пиков ($u_{\max} = 1,119 \cdot 10^{-4}$ мм) в зонах краевых эффектов.

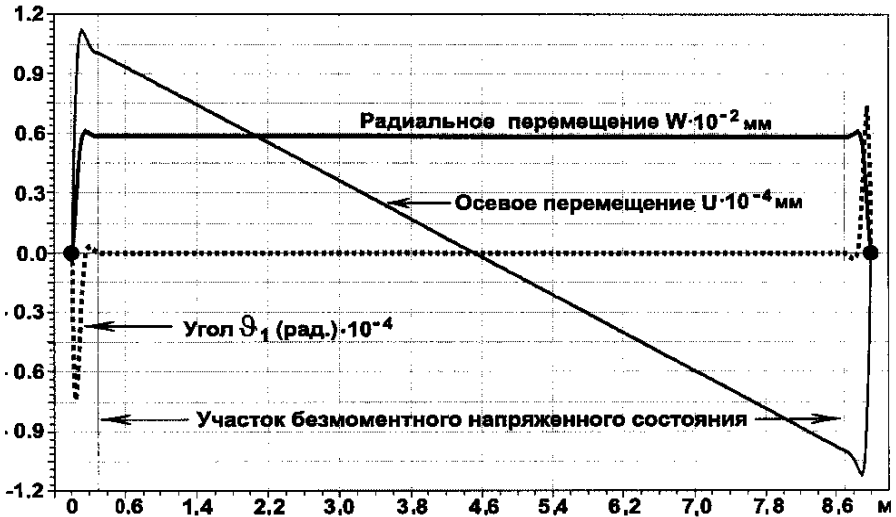


Рисунок 1 – Распределение перемещений и углов поворота при деформации оболочки.

На внешней поверхности оболочки максимальные напряжения (растягивающие) достигаются на границах и равны: $+31,215$ кГс/см². На внутренней поверхности напряжения сжимающие, достигаются тоже в граничных точках и равны: $-21,710$ кГс/см². На участке безмоментного состояния, напряжения обусловлены только постоянным растягивающим усилием и имеет значение: $4,752$ кГс/см². Оболочка разбита на 15 СуЭ по 60 см каждый. Для адекватного отражения форм кривых в областях краевого эффекта, СуЭ первый и пятнадцатый разбиты на $N_0 = 40$ дискретных элементов по 1,5 см. для каждого из остальных, то есть, работающих в зоне безмоментного НДС, назначено по $N_0 = 5$ элементов. “Оптимальное” расчетное разбиение на СуЭ для получения надежного решения (без учета дополнительного разбиения СуЭ на $N_0 \neq 1$), дает цифру – 22 (по 40,9). При таком раскладе мы потеряли бы информацию о краевом эффекте (нет там промежуточных точек вывода) при, в целом, адекватном решении. Как отмечалось выше, при $N_0 \gg 1$ оказалось возможным работать с более крупными СуЭ и уменьшить порядок разрешающей системы (в нашем случае он был равен – 116×117 , а при 22 СуЭ был бы – 172×173). Общее количество дискретных элементов – 136. Сомнительно, чтобы такое число узлов ортогонализации обеспечило

соответствующие по точности результаты.

Интересно отметить и данные по аппроксимации степенным рядом формирования матриц H_n и данные по оценке решения в целом. Такие данные приведены в таблице 1. Судя по остаточному члену аппроксимации, степенной ряд использован в соответствии с требованиями заданного предела погрешности ($Eps = 10^{-22}$). Рекуррентный процесс аппроксимации решения, то есть добавление очередных членов ряда, автоматически продолжается до тех пор, пока максимальный остаточный член ряда в решении по всем компонентам вектора состояния не станет меньше Eps .

Таблица 1 – Оценки аппроксимации решения степенным рядом

Длина в см. элемента образующей	Необходимая степень полинома	Максимальный элемент матрицы H_n	Верных знаков в мантиссе решения	Порядок остаточного члена
150	156	$4.5 \cdot 10^{18}$	1	$1.3 \cdot 10^{-21}$
100	116	$1.1 \cdot 10^{14}$	8	$4.6 \cdot 10^{-22}$
80	100	$7.0 \cdot 10^{11}$	9	$1.6 \cdot 10^{-22}$
60	84	$4.8 \cdot 10^{10}$	11	$2.3 \cdot 10^{-22}$
12	36	$3.0 \cdot 10^6$	22	$6.1 \cdot 10^{-23}$
1,5	20	$1.9 \cdot 10^4$	25	$2.0 \cdot 10^{-26}$

Тем не менее, даже при достаточно малом отрезке аппроксимации ($s = 1,5$ см) потребовалось 20 членов ряда для получения точного решения. Число верных знаков ниже цифры 11 указано условно. Компьютер в режиме вещественного типа **extended** отражает на экране только 14 знаков мантиссы. Остаточный член ограничен заданным Eps . Следовательно, если фактический остаточный член стал меньше чем Eps , то верных знаков в решении должно быть, по крайней мере, на единицу меньше чем порядок остаточного члена. В данном примере, при длине отрезка аппроксимации $s = 1,5$ см, следует считать, что решение системы уравнений получено с точностью не ниже чем 10^{-25} . Это практически точное решение. В рассматриваемом примере оценка погрешности и количество верных знаков фактического решения выполнялась сравнением расчетных параметров (M_1, Q_1, ϑ_1) по левой и правой границе (где, в идеале, они должны быть тождественно равны) по параметру с максимальным расхождением.

Табл. 1 иллюстрирует, с одной стороны, формальную сходимость процесса аппроксимации независимо от длины, с другой – аргументирует необходимость и возможность выбора оптимального деления на СуЭ и, наконец, демонстрирует возможность реализации численного процесса построения решения в целом. Естественно, полученные на конкретном примере оценки, выводы и комментарии, не являются неким общим и абсолютным критерием. Но, как нам кажется, они дают некоторое представление о характере и возможностях метода в целом.

4. Сосуд высокого давления. Исследования этой задачи выполнены в

двух обширных работах [12,13]. Целью исследований, была теоретическая (расчетная) и экспериментальная оценка максимальных напряжений, прежде всего, в возможных точках их концентрации. Сосуд (рис. 2) предназначен для работы в конструкциях атомной энергетики, при повышенных требованиях по запасу прочности и надежности. Как сообщают авторы этих работ, по английским стандартам, для конструкций подобного назначения установлен коэффициент концентрации $k = 2,25$ от основного расчетного напряжения, в качестве которого принимается так называемое “мембранное” (то есть полученное в безмоментной зоне) напряжение. Приблизительно оно (в наших обозначениях) считается равным $\sigma_m = Rq_3/h/2$ и должно составлять для малоуглеродистой стали $2\sigma_t/3$, где σ_t – предел текучести при простом растяжении. При расчетном напряжении $\sigma_r = 15,4 \text{ кН/см}^2$, предельное, соответствующее нормам стандарта, напряжение не должно превышать $\sigma_0 = 2,25 \cdot 15,4 = 34,6 \text{ кН/см}^2$. Для снижения ожидавших высоких напряжений в зоне стыковки патрубков с основной сферической оболочкой предложено использовать специальные кольцевые накладки. Численные расчеты [13] выполнены на основе разбиения конструкции на отдельные узловые эле ленты, с формулировкой дополнительных уравнений стыковки и совместимости, включенных в единую общую систему алгебраических и дифференциальных уравнений.

Результаты безмоментного состояния и краевых эффектов получены отдельно и затем скомбинированы. При численном расчете [13] учтен только один (меньшего диаметра) патрубок. Расчет патрубка выполнен в постановке полубесконечной цилиндрической оболочки. Как в численном расчете работы [13], так и в экспериментальных исследованиях [12] изучены два альтернативных варианта накладок.

В первом варианте накладки трактуются как утолщения основной (сферической) части конструкции соответствующих размеров и толщины. Этот вариант использовался и в наших расчетах. По результатам расчетов в этом варианте авторы работы [13, стр. 70] делают следующие выводы. Максимальное напряжение в сферической части сосуда $\sigma_s = 22,0 \text{ кН/см}^2$ наблюдается на внутренней поверхности вблизи соединения с накладкой. В патрубке напряжения существенно выше.

Максимальные напряжения наблюдаются тоже в зоне стыковки патрубка с накладкой. Максимальные меридиональные напряжения на наружной поверх-

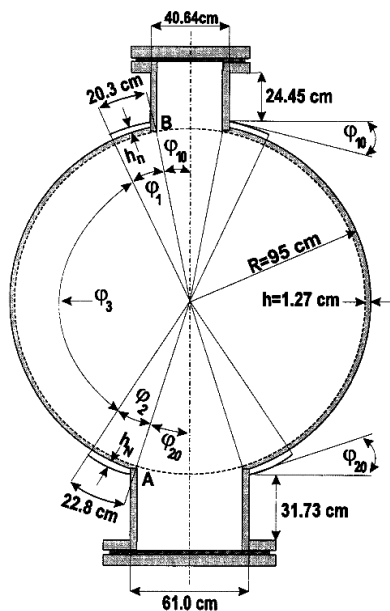


Рисунок 2 – Расчетная схема сосуда.

ности $\sigma_{pn} = 44,5 \text{ кН/см}^2$, на внутренней $\sigma_{pv} = 52,0 \text{ кН/см}^2$ и уже далеко выходят за рамки предельных.

В работе [13] исследовался и другой вариант использования накладки (накладка приварена к контуру) с теми же размерами. В этом случае результаты расчета оказались тоже значительно выше предельных и несколько хуже прежнего варианта. В местах соединения патрубка с оболочкой максимальные напряжения составляют: на наружной поверхности – $\sigma_{pn} = 50,0 \text{ кН/см}^2$; на внутренней – $\sigma_{pv} = 63,0 \text{ кН/см}^2$, что почти в два раза превышает предельное. Как отмечают авторы работы [13] в своем заключении «...максимальные напряжения возникают в накладке у пересечения ее с патрубком. Эти напряжения существенно превосходят предел, установленный стандартом, – $34,6 \text{ кН/см}^2$ ».

Остановимся более подробно на результатах и выводах экспериментальных исследований в работе [12], прежде всего, в связи с тем, что эти результаты далеко не полностью подтверждают выводы численных расчетов (в том числе и цитированные выше) и, во-вторых, дают более полную раскладку напряженного состояния конструкции. Экспериментальные исследования выполнены тщательно и заслуживают доверия по двум причинам. С одной стороны, в их организации и проведении участвовали несколько заинтересованных в надежных результатах организаций (два отдела Научно-технического института Манчестерского университета; Совет по научным исследованиям; Комитет стандартов по производству сосудов давления Британского института стандартов). Кроме этого, объективные выводы и, во многом, отрицательные оценки расчетных результатов, сделаны коллективом исследователей большинство из которых принимали участие в экспериментальных и теоретических исследованиях.

Экспериментальные исследования выполнены на реальных объектах с заглушенными патрубками, то есть, в постановке близкой к принятой в наших расчетах. Коротко, выводы по экспериментальным результатам, сводятся к следующему. Имеется много расхождений между расчетными и экспериментальными результатами. Причина этих расхождений, по мнению авторов, в невозможности теоретически учесть гибкость сварных швов, повышения жесткости конструкции на стыке патрубка с корпусом и в соединении корпуса с наружным краем накладки. Расчет не учитывает влияния возможных зазоров между накладкой и корпусом.

4.1. Расчет сосуда МРС. Методом рекуррентных соотношений выполнен расчет НДС сосуда (рис. 2) при внутреннем давлении $q_3 = 0,4261 \text{ кН/см}^2$. Сосуд представляет собой сферу внешним диаметром 190 см (диаметр средней поверхности – 83,65 см) и толщиной стенки – 1,27 см. К сфере подсоединены (сплошным сварным швом) два цилиндрических патрубка. Один из них, с внешним диаметром 40,64 см и толщиной стенки 1,27 см. Для уменьшения коэффициента концентрации напряжений в местах соединения патрубков со сферой используются специальные утолщения сферы в качестве, так называемых, накладок. Накладки имеют толщину: $h_N = 1,27 \text{ см}$ и $h_n = 0,95 \text{ см}$ соответственно. Некоторые дополнительные размеры показаны на

рис. 2. Углы (в радианах), показанные на рис. 2 и использующиеся в расчете, имеют значения: $\varphi_{10} = 0,326840684$; $\varphi_1 = 0,213684211$; $\varphi_{20} = 0,215559999$; $\varphi_3 = 2,145507769$; $\varphi_2 = 0,24$. Конструкция разбита на 15 СуЭ. Каждый из патрубков разбит на 2 СуЭ по $N_0 = 25$ дискретных элементов (ДЭ). Каждая накладка – в качестве одного СуЭ, где $N_0 = 35$. Цифры по количеству ДЭ заданы с запасом для максимально адекватного отражения формы кривых. Сферическая часть разбита на 9 СуЭ, каждый из которых имеет по 15 ДЭ. Всего дискретных элементов – 305. Разрешающая система имеет размерность 116×117 . Все исходные данные соответствуют работе [12].

На графиках рис. 3 показаны: сплошной линией меридиональные напряжения на внешней поверхности последовательно по всем элементам конструкции; пунктирной линией – напряжения на внутренней поверхности; точечным пунктиром, в том же масштабе, – распределение изгибающих моментов. В результате расчетов (см. рис. 3) максимальные напряжения по всей конструкции не превышают $27,79 \text{ кН/см}^2$ и достигаются на внутренней поверхности первого (большого диаметра) патрубка. На внешней поверхности того же патрубка и в той же точке максимальное напряжение равно $23,02 \text{ кН/см}^2$. Среднее напряжение в этой точке равно $25,405 \text{ кН/см}^2$. По экспериментальным данным работы [12] (см. стр. 90) максимальное напряжение определено в размере $25,51 \text{ кН/см}^2$ на том же патрубке (поверхность не указана), что почти полностью совпадает с нашим средним расчетным. Как отмечают сами экспериментаторы (стр. 91): «Всплески напряжений и высокие меридиональные изгибающие моменты вблизи места сварки с патрубком, предсказываемые теорией [13], фактически не наблюдались». И далее: «В области около наружного сварного шва (между накладкой и основной оболочкой) наблюдается наибольшее расхождение экспериментальных и теоретических результатов». В области патрубка большого диаметра, накладки и ее соединения со сферической частью конструкции максимальные напряжения по данным эксперимента не превышают $25,51 \text{ кН/см}^2$ и реализуются на внутренней поверхности оболочки.

В наших расчетах, в указанных сечениях всплески напряжений имеются, но они заметно ниже максимальных (см. рис. 3) и, естественно, не достигают таких величин (порядка $\pm 49,64 \text{ кН/см}^2$) как дают численные расчеты работы [13]. Максимальные напряжения в этой части конструкции по нашим расчетам достигаются тоже на внутренней поверхности и равны $27,79 \text{ кН/см}^2$. В области стыка накладки со сферической частью всплеск напряжения (опять же на внутренней поверхности) равен $16,69 \text{ кН/см}^2$, что тоже значительно ниже предельного.

По второму патрубку (меньшего диаметра) картина распределения напряжений и изгибающих моментов в общем соответствует рассмотренной выше. Экспериментальные результаты заметно отличаются (существенно ниже) от расчетных работы [13]. Если численный расчет дает здесь максимальное значение порядка $51,71 \text{ кН/см}^2$, то полученное экспериментально не превышает $24,82 \text{ кН/см}^2$, то есть, практически то же, что и на патрубке большого диаметра. Полученные нами в расчетах максимальные напряжения на этом участ-

ке заметно ниже и не превышают $12,77 \text{ кН/см}^2$. Снижение максимальных напряжений на малом патрубке (по сравнению с патрубком большего диаметра) кажется естественным, а его отличие от экспериментального пока не нашло пока объяснения у автора. Полученные экспериментально напряжения в безмоментной зоне $15,16 \text{ кН/см}^2$ (авторы работы [12] называют их «мембранными») практически совпадают с полученными нами расчетными $14,85 \text{ кН/см}^2$. Максимальные расчетные [13], экспериментальные по работе [12] и расчетные по МРС напряжения сведены в таблицу 2. Полученное МРС в общем расчете, так называемое мембранное напряжение в сферической части оболочки, $14,85 \text{ кН/см}^2$ весьма близко к экспериментальному $15,16 \text{ кН/см}^2$, а оба этих значения отличаются от теоретического результата работы [13], равного $22,00 \text{ кН/см}^2$.

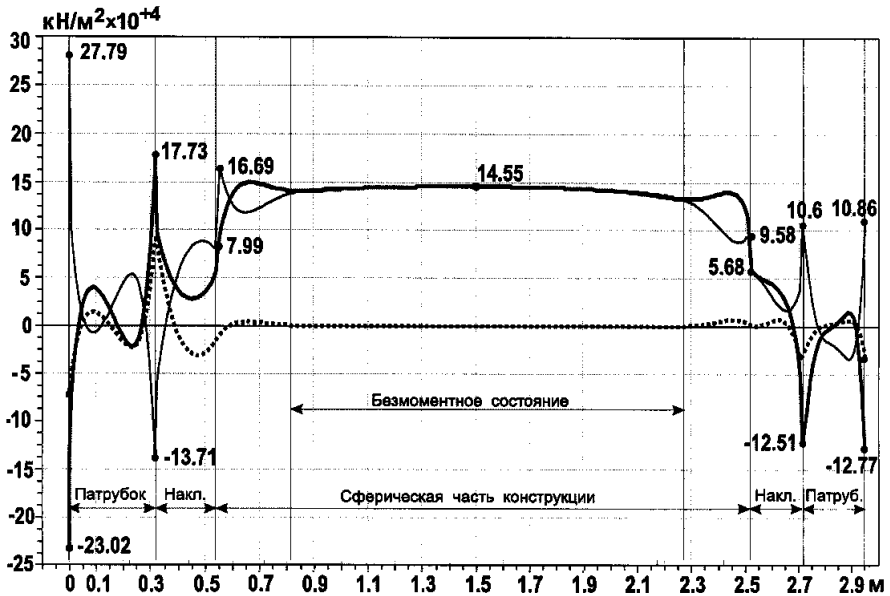


Рисунок 3 – Распределение напряжений и меридиональных моментов.

В наших расчетах в зоне стыковки сферы с накладкой (малый патрубок) напряжение на внутренней поверхности равно $\sigma_s = 9,58 \text{ кН/см}^2$. В соответствующей зоне большого патрубка $\sigma_s = 16,69 \text{ кН/см}^2$ и достигается тоже на внутренней поверхности оболочки. Что касается зон стыковки патрубков с оболочкой, то в наших расчетах для малого патрубка напряжения на внутренней поверхности $\sigma_{pv} = 10,60 \text{ кН/см}^2$ и, соответственно, на внешней поверхности $\sigma_{pn} = 12,51 \text{ кН/см}^2$. В аналогичном месте стыковки большого патрубка с утолщенной оболочкой, на внутренней поверхности $\sigma_{pv} = 13,71 \text{ кН/см}^2$ и, соответственно, на внешней — $\sigma_{pn} = 17,73 \text{ кН/см}^2$. Таким образом, наши расчетные результаты оказываются ниже предельных по всем характерным точкам конструкции и достаточно хорошо со-

гласуются с экспериментальными исследованиями работы [12].

Существенное расхождение между расчетными и экспериментальными результатами работ [12,13], кроме указанных выше авторами причин. По нашему мнению, объясняется в первую очередь и не достаточно адекватным численным методом расчета.

Таблица 2 – Максимальные напряжения (расчет [13], эксперимент [12], по МРС)

Объект	Расчет, эксперим. МРС	Наружная поверхность кН/см ²	Внутренняя поверхность кН/см ²	Комментарии
Патрубок А	Расчет,	-49,64	+49,64	Знак <<- >> означает сжатие Поверхность не указана Среднее значение 25.40
	Экспер. МРС	25,51 -23,02	- +27,79	
Патрубок В	Расчет,	-51,71	-	Указано только это Поверхность не указана Среднее значение 11.815
	Экспер. МРС	24,82 -12,77	- +10,86	
Сфера	Расчет,	--	+22,00	Указано только это “Мембранное напряжение” Безмоментное напряжение
	Экспер. МРС	15,16 +14,85	-- +14,85	

5. Колебания составных цилиндрических оболочек. Следующий пример использования МРС касается расчета свободных и вынужденных колебаний составной оболочечной конструкции (см. рис. 4). Оболочки соединены между собой фланцами. Граничные условия представляют собой жесткую заделку.

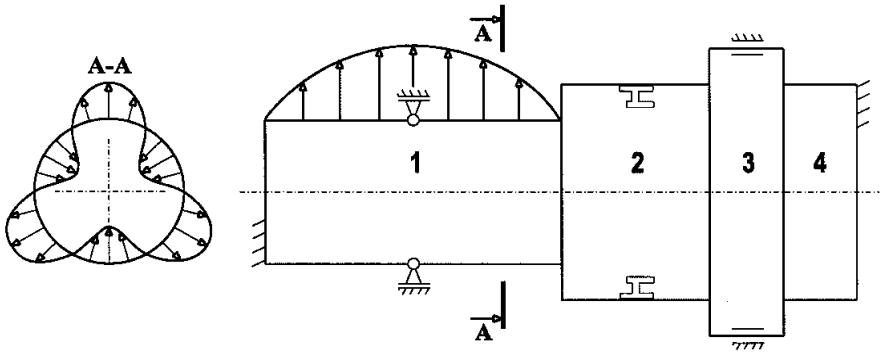


Рисунок 4 – Общий вид и форма нагрузки составной конструкции.

Параметры оболочек конструкции имеют следующие данные:

1. $L_1 = 1,6$ м; $R_1 = 0,4$ м; $h_1 = 0,001$ м; $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_1 = 0,3$; кольцевая опора запрещает только радиальные перемещения и расположена по центру образующей оболочки.

2. $L_2 = 0,8$ м; $R_2 = 0,6$ м; $h_2 = 0,0015$ м; $E_2 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_2 = 0,3$; шпан-

гоут находится по центру образующей оболочки, площадь шпангоута 10^{-4} м^2 . Его влияние отражается в данном случае в виде дополнительной кольцевой упругой связи.

3. $L_3 = 0,4 \text{ м}$; $R_3 = 0,8 \text{ м}$; $h_3 = 0,001 \text{ м}$; $E_3 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\mu_3 = 0,3$; опора находится по центру образующей оболочки и запрещает повороты ϑ_1 и радиальные перемещения.

4. $L_1 = 0,4 \text{ м}$; $R_1 = 0,6 \text{ м}$; $h_1 = 0,001 \text{ м}$; $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\mu_4 = 0,3$.

Радиальная динамическая нагрузка приложена только к оболочке №1 и распределена по образующей по параболическому закону вида:

$$q(x, \varphi, t) = \frac{4P_1(L_1 - x)x}{L_1^2} \cdot \cos(n\varphi) \sin(\omega t), \quad (5.1)$$

где амплитудное значение этой нагрузки $P_1 = 10^5 \text{ Па}$, а форма ее в окружном направлении определяется числом n . При $n = 3$ ее вид показан на левой части рис. 4. Методом рекуррентных соотношений выполнен расчет свободных и вынужденных колебаний этой конструкции.

На рис. 5 приведены результаты расчета первых шести частот и форм свободных колебаний по образующей для числа полуволн нагрузки $n = 3$. Формы колебаний строились по компоненте радиального перемещения w собственного комплексного вектора, соответствующего заданному собственному значению $\lambda = \alpha \pm i\beta$, где (в этой задаче) $\alpha \equiv 0$, а β представляет собой круговую частоту колебаний.

Как видно из приведенного рисунка, в данном случае (впрочем, как и в других случаях, когда форма колебаний не описывается простой периодической функцией), трудно говорить о «первой» или «второй» формах, так как каких-либо определенных отличительных признаков у различных форм колебаний нет. Конечно можно называть первой частотой – минимальную и далее – по возрастанию, но все равно определение «первая форма» не будет являться информативным. Вероятно целесообразно говорить о конкретном значении частоты свободных колебаний вместе с визуальным представлением соответствующей ей формы.

5.1. Сравнение двух видов колебаний. Распределение частотного спектра (до 1000 Гц) и форм свободных колебаний по меридиану для одной окружной формы ($n = 3$) приведены на рис. 5. На этом рисунке амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний составной конструкции и соответствующие им формы для $n = 3$ сопоставлены с расчетом свободных колебаний. Графики форм вынужденных колебаний строились по расчетным радиальным перемещениям w в пределах всех составных элементов конструкции. Вполне обоснованно ожидать появления резонанса на частотах, совпадающих с частотой свободных колебаний. Но для этого необходимо, чтобы форма деформации оболочек для вынужденных и свободных колебаний совпадали. Это означает, в частности, что при несимметричной деформации оболочки в продольном сечении (относительно центрального сечения) резонанса быть не должно, так как симметричная форма нагрузки не должна видимо вы-

зывать несимметричную деформацию. Практически, судя по графикам, эта ситуация и наблюдается. Пунктирной линией обозначены частоты свободных колебаний симметричной формы в продольном сечении, а штрихпунктирной – несимметричной форма. Первые практически совпадают с полученными резонансами как по значению частоты, так и по форме колебаний.

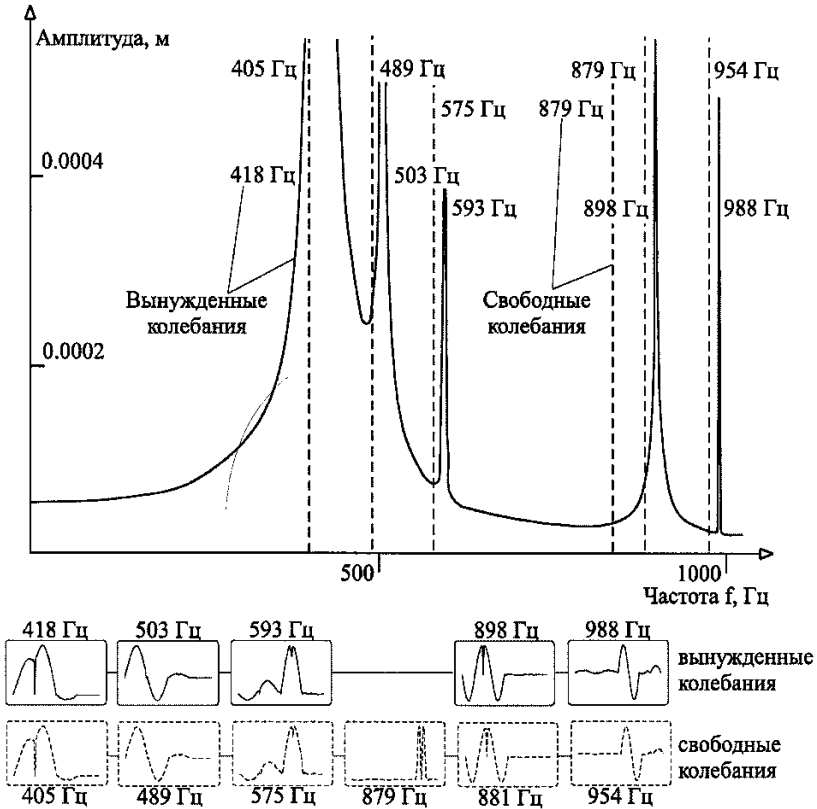


Рис. 5. Сравнение собственных и вынужденных колебаний составной конструкции.

Формы колебаний, полученные двумя разными путями, качественно идентичны. Некоторое отличие вызвано тем, что сравнение вынужденных колебаний проводится не с собственными колебаниями, учитываяшие предварительное НДС в невозмущенном состоянии (которое, безусловно, повлияет на частотный спектр), а со свободными колебаниями конструкции. На одной из частот свободных колебаний (879 Гц) не было получено резонанса в режиме вынужденных. Вероятно, это объясняется тем обстоятельством, что форма колебаний на этой частоте такова, что основные колебания происходят в наибольшем удалении от возбуждающей нагрузки. Как следствие – зона резонан-

са должна быть достаточно узкой. И поскольку шаг изменения частоты нагрузки был конечным, существует вероятность, что была пропущена соответствующая резонансная частота. Для ее обнаружения достаточно уменьшить шаг изменения частоты при построении амплитудно-частотной характеристики. Как видно, кроме ярко выраженных резонансов существует некоторое число меньших по масштабу всплесков амплитуды. Кроме того, теперь заметны и некоторые другие особенности, такие как большие значения амплитуд для некоторых форм колебаний на низких частотах. Возможно, при исследовании вынужденных колебаний приходится фиксировать модуляционные и комбинированные всплески с малыми амплитудами.

Ширина резонансных зон различия, так же как и относительные значения амплитуд колебаний. В рассмотренном диапазоне частот (от 1 Гц до 1кГц) наиболее ярко выраженный резонанс наблюдается при частоте нагрузки 418 Гц (первый резонанс). При росте частоты нагрузки амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

Выводы. Предлагаемый подход к исследованию статического и динамического состояния комбинированных оболочечных систем, состоящих из оболочек вращения и других конструктивных элементов, мы называем «методом рекуррентных соотношений» (МРС), поскольку в основе всех взаимодействующих алгоритмов законченного численного процесса лежит именно рекуррентный процесс построения адекватного решения. Некоторые подробности использования МРС в расчетах различных конструкций приведены в работах автора и его сотрудников, например, [6,7,8,9]. Отметим некоторые особенности и, по нашему мнению, положительные качества МРС:

1. Отсутствие использования приближенных численных методов интегрирования системы дифференциальных уравнений, которые априори вносят более или менее существенные погрешности. В нашем случае, интегрирование, естественно, тоже выполняется (на этапе формирования матрицы H_j^*) бесконечным степенным рядом на коротком отрезке s образующей. Процесс этот реализуется с автоматической оценкой достижения формально любой точности. В наших примерах мы ограничились $Eps = 1e-22$, исходя из возможностей вещественного типа данных **extended**. Это гарантировало получение практически точного решения уравнений на каждом СуЭ и по всей конструкции в целом.

2. Исключено, за ненадобностью, использование метода ортогонализации по С.К. Годунову со всеми его атрибутами, с формированием и удерживанием в памяти матриц ортогонализации, вычислением и использованием обратных матриц и т.п. Другими словами, исключен еще один источник накопления погрешностей.

3. Появилась возможность построения полей напряжений, перемещений и т. п. с любым при необходимости мелким шагом. Эта возможность не требует каких-либо перестроек алгоритма и программы.

4. Поскольку основные операции по формированию промежуточных

матриц для дискретных элементов H_k^* , соответствующих матриц для СуЭ H_N и разрешающей системы выполняется в режиме счета степенных рядов, то MPC обладает весьма высокой скоростью и надежностью.

5. Цикличность и компактность алгоритмов позволяет ограничиться достаточно малыми ресурсами, а предпроцессорная подготовка сводится к аккумулятно заданию и раскладке исходных данных. Программы реализованы в среде DELPHI 6 только по причине известных ограничений на размерности массивов DOS Pascal. Для решения разрешающей системы используется стандартный вариант метода Гаусса.

6. Расчет собственных значений и форм в задачах малых колебаний и устойчивости выполняется специальной программой [6, 7, 11], работающей в комплексной области с режимами выделения и уточнения комплексных собственных значений. Эти режимы обеспечивают расчет формально любого числа комплексных корней с одинаковой и высокой точностью, как вещественных, так и мнимых их частей.

7. Предлагаемый подход, естественно, может быть использован для исследования других краевых задач, позволяющих приведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Список литературы: 1. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Успехи математических наук. – 1961. – Т. XVI, вып.3. – С. 171-174. 2. Григоренко Я.М. и др. О решении на ЭЦВМ задач статики оболочек вращения при произвольном нагружении. // Применение ЭЦВМ в строительной механике. – Киев “Наукова думка”, 1968. – С. 46-51. 3. Кармишин А.В. и др. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М., 1981. – 216с. 4. Мясченков В.И., Григорьев И.В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ. – М., 1981. – 216с. 5. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М., 1977. – 488 с. 6. Доценко П.Д. Комплекс программ анализа статики и динамики трубопроводных систем с жидкостью. // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. – Х.: 1984. – Вып. 4. – С 3-22. 7. Доценко П.Д., Черночуб И.П., Попов А.Е., Динамика трубопроводных систем. – Х., 1998. – 226 с. 8. Берешко И.Н., Вамболь С.А., Постановка задач расчета статики и динамики многосвязных цилиндрических оболочек методом рекуррентных соотношений // Тем. сборник науч. трудов НАУ «ХАИ». 2000: Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – Вып. 23(6). – С 144-155. 9. Доценко П.Д., Вамболь С.А., Мишин Д.С. Численный анализ частотного спектра, демпфирующих свойств и несущей способности некоторых цилиндрических оболочек. // Открытые информационные и компьютерные технологии. ХАИ. 1998. – Вып. 1. – С 414-419. 10. Чернина В.С. статика тонкостенных оболочек вращения. – М., 1968. – 455 с. 11. Доценко П.Д., Берешко И.Н. Об алгоритмизации решения задачи на собственные значения. // Открытые информационные и компьютерные технологии. ХАИ. 1998. – Вып. 2. – С 165-169. 12. Гилл С. и др. Эксперименты на сферических сосудах высокого давления с подкрепляющими накладками у выходных отверстий. // Расчет напряженного состояния сосудов. № 24. Перевод с англ. – М.: «Мир», 1980. – С 73-106. 13. Китчинг Р. и др. Исследование напряженного состояния в сферическом сосуде высокого давления с подкрепляющей накладкой в окрестности радиального патрубка. // Расчет напряженного состояния сосудов. №24. Перевод с англ. – М.: «Мир», 1980. – С. 56-73.

Поступила в редакцию 15.03.04

А.А.ЗОЛОЧЕВСКИЙ, докт.техн.наук; Норвежский ин-т науки и техники;
С.Н.СКЛЕПУС, канд.физ.-мат.наук; ИПМаш НАН Украины

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В статті розглянута варіаційне формулювання задачі повзучості при великих деформаціях. На базі матеріального підходу Лагранжа, принципу віртуальної роботи а також тензорів швидкостей деформацій Гріна-Лагранжа та швидкостей напружень Піола-Кірхгоффа отримано варіаційний принцип в формі Лагранжа. Рівняннями Ейлера для функціонала Лагранжа є лінеаризовані рівняння рівноваги тіла та статичні граничні умови, записані відносно швидкостей переміщень.

A variational formulation for creep problem under conditions of large strains is considered. On the base of material Lagrangian formulation, principle of virtual work and Green-Lagrange strain rate tensor and symmetric Piola-Kirchhoff stress rate tensor variational principle in the form of Lagrange have been formulated. The linearized equilibrium equations and static boundary conditions in terms of rates of displacements are the Eulerian's equations for Lagrange functional.

Прикладные задачи, возникающие при рассмотрении различных технологических процессов, а также широкое применение в современной технике пластмасс, полимеров, композитных материалов различной структуры часто приводят к физически и геометрически нелинейным задачам ползучести. Современный математический аппарат не позволяет получить точное решение подобных задач, что требует создания новых математических моделей, эффективных методов линеаризации и решения линеаризованных задач. Для получения обобщенного решения краевых задач в механике деформируемого твердого тела широкое распространение получили вариационные формулировки краевых задач [1-5]. Различные формулировки для инкрементальной теории пластичности и ползучести приведены в работах [6-11]. К преимуществу вариационных формулировок можно отнести возможность понижения порядка производных в дифференциальных операторах краевой задачи, что позволяет расширить класс функций, в котором отыскивается приближенное решение задачи. Важнейшим этапом применения вариационного подхода является построение функционала, уравнениями Эйлера которого являются все или часть уравнений исходной краевой задачи. При этом на решении краевой задачи функционал принимает стационарное значение. Методы определения функций, доставляющих функционалу стационарное значение, достаточно математически обоснованы и описаны в литературе [12]. Общий подход к построению функционалов для нелинейных задач механики сплошной среды в настоящее время отсутствует. В частности, в литературе недостаточно представлены вариационные формулировки для задач ползучести при конечных деформациях, пригодные для решения широкого круга прикладных задач с достаточной практической точностью.

Целью данной статьи является построение вариационной формулировки в форме Лагранжа для задачи ползучести с учетом конечных деформаций.

Для исследования ползучести тел произвольной геометрической формы будем использовать материальный (лагранжев) подход. При этом положение каждой материальной частицы тела, в произвольный момент времени $t \neq 0$, в актуальной (деформированной) и в отсчетной (недеформированной) конфигурациях по отношению к системе отсчета определяется радиус-векторами:

$$\mathbf{r} = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{r}_0 = x_i \mathbf{k}_i, \quad (i = \overline{1,3}), \quad (1)$$

где \mathbf{k}_i – базисные векторы единой для всех конфигураций прямоугольной декартовой системы координат $0x_10x_20x_3$.

Вектор перемещений вводится следующим образом

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u_i \mathbf{k}_i, \quad (2)$$

где $u_i(x_1, x_2, x_3, t) = (X_i - x_i)$ – перемещения точек тела вдоль осей $0x_1, 0x_2, 0x_3$ соответственно. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Транспонированный градиент места в актуальной конфигурации называется градиентом деформации и обычно обозначается как F [13]:

$$F = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right] = \left[\delta_{ij} + u_{i,j} \right], \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Отметим соотношение

$$FF_0 = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = [I], \quad (4)$$

где $[I]$ – единичная матрица.

Из (4) следует, что градиент места в отсчетной конфигурации может быть найден следующим образом:

$$F_0 = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right]^{-1}. \quad (5)$$

Пусть рассматриваемое тело в естественном (ненапряженном и недеформированном) состоянии занимает область Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Координаты $\mathbf{x} = (x_i)$ примем за лагранжевы материальные координаты точек тела. Данная система отсчета не зависит от времени и служит для фиксации начальной конфигурации сплошной среды. Тело закреплено на части поверхности S_u и нагружено поверхностными силами на части поверхности S_p , объемные силы отсутствуют. Обозначим через $\mathbf{P} = P_i(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{k}_i$ вектор поверхностной нагрузки, которая приложена к единице площади поверхности тела. Функция \mathbf{P} зависит от времени и лагранжевых координат и предполагается непрерывно дифференцируемой по всем аргументам

Предположим, что упругие деформации в процессе ползучести остаются малыми и выполняется аддитивное разложение компонентов тензора скоростей полных деформаций, которое в отсчетной и актуальной конфигурациях имеет соответственно следующий вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{p}_{ij}, \quad (6)$$

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^c, \quad (7)$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ – компоненты тензора скоростей конечных деформаций Грина-Лагранжа, $\dot{\epsilon}_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e, \dot{p}_{ij}, \dot{e}_{ij}^c$ – компоненты тензоров скоростей упругих деформаций и деформаций ползучести в отсчетной и актуальной конфигурациях. Здесь и далее точка над символом означает полную (материальную) производную по времени. Компоненты тензоров скоростей полных деформаций в отсчетной и актуальной конфигурациях определяются по формулам:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 0,5(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + u_{k,i}\dot{u}_{k,j} + u_{k,j}\dot{u}_{k,i}), \quad (i, j, k = \overline{1,3}). \quad (8)$$

$$\dot{e}_{ij} = 0,5\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i}\right). \quad (9)$$

Связь между $\dot{\epsilon}_{ij}$ и \dot{e}_{ij} имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_l}{\partial x_j} \dot{e}_{kl}, \quad (10)$$

или в обратной форме

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_l}{\partial X_j} \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (11)$$

Пусть деформирование тела происходит либо адиабатически, либо изотермически. Распределения напряжений и перемещений в начальный момент времени считаются заданными. В этом случае напряженно-деформированное состояние в теле при заданной внешней нагрузке, в произвольный момент времени $t \neq 0$, однозначно определяется тремя группами уравнений. Первая группа – уравнения связи между скоростями полных деформаций, скоростями перемещений и перемещениями (8). Компоненты симметричного тензора конечных деформаций Грина-Лагранжа $\underline{\epsilon}$ связаны с перемещениями нелинейными соотношениями [13]

$$\epsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}). \quad (12)$$

Вторая – представляет собой уравнения состояния:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}; \dot{p}_{kl}), \quad (i, j, k, l = \overline{1,3}). \quad (13)$$

Рассматривая \dot{p}_{kl} как параметры, уравнения (13) запишем в виде

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}) = \tau_{ij}(\dot{\epsilon}_{kl}^e).$$

Здесь $\underline{\tau} = \tau_{ij}$ – симметричный тензор напряжений Пиола-Кирхгоффа; $\underline{\sigma} = \sigma_{ij}$ – тензор истинных напряжений Коши. Тензор $\underline{\tau}$ вводится через тензор напряжений Коши $\underline{\sigma}$ следующим образом [2,13]:

$$\tau_{ij} = J\sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_l}, \quad (i, j, k, l = \overline{1,3}), \quad (14)$$

$$\sigma_{ij} = J^{-1} \tau_{kl} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l}, \quad (15)$$

где величина J представляет собой отношение объема элемента тела после деформации к его объему до деформации и определяется по формуле [2,13]: $J = \det F$.

И наконец третья группа – это уравнения равновесия и граничные условия, записанные для скоростей [2]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\tau_{kj} (\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = \\ & = (\delta_{ij} + u_{i,j}) \dot{\tau}_{kj,k} + u_{i,jk} \dot{\tau}_{kj} + \tau_{kj} \dot{u}_{i,jk} + \tau_{kj,k} \dot{u}_{i,j} = 0, \mathbf{x} \in \Omega; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [\tau_{kj} (\delta_{ik} + u_{i,k})] n_j = \\ & = [\dot{\tau}_{kj} (\delta_{ik} + u_{i,k}) + \tau_{kj} \dot{u}_{i,k}] n_j = \dot{P}_i, \mathbf{x} \in S_p, \end{aligned} \quad (17)$$

где n_j – компоненты единичного вектора \mathbf{n} , направленного по внешней нормали к поверхности тела $\partial\Omega$ в рассматриваемой ее точке.

Если связь между скоростями напряжений и деформаций является тензорно линейной, то уравнения (16), (17) оказываются линеаризованными. Здесь перемещения и напряжения считаются заданными.

Вариационные принципы теории ползучести основываются на принципе виртуальной работы и введении потенциального представления скоростей напряжений. Принцип виртуальной работы для квазистатических задач записывается в виде [2]:

$$\iiint_{\Omega} [\dot{\tau}_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} + \tau_{ij} \dot{u}_{k,i} \delta \dot{u}_{k,j}] d\Omega - \iint_{S_p} \dot{P}_i \delta \dot{u}_i dS = 0, \quad (18)$$

где скорости перемещений \dot{u}_i ($i = 1,3$) удовлетворяют кинематическим граничным условиям на S_u . Предполагается, что тело находится в равновесии и удовлетворяются соотношения (8). Принцип виртуальной работы выполняется безотносительно к конкретному виду соотношений напряжения–деформации.

Полагаем, что связь между скоростями упругих деформаций и скоростями напряжений задана в виде линейной формы:

$$\dot{\tau}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e, \quad (19)$$

или

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = A_{ijkl}^{-1} \dot{\tau}_{kl}. \quad (20)$$

Здесь коэффициенты A_{ijkl}, A_{ijkl}^{-1} , ($i, j, k, l = \overline{1,3}$) являются функционалами напряженно-деформированного состояния.

Уравнения (19), с учетом (6), запишутся в виде

$$\dot{\tau}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e = A_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}). \quad (21)$$

Если $A_{ijkl} = A_{klij}$, то соотношения (21) удовлетворяют условиям:

$\frac{\partial \dot{\tau}_{ij}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}^e} = \frac{\partial \dot{\tau}_{kl}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}^e}$, откуда следует, что $dU^e = \dot{\tau}_{ij} d\dot{\epsilon}_{ij}^e$ есть полный дифференциал и

существует функция состояния

$$U^e(\dot{\epsilon}_{ij}^e) = \frac{1}{2} \dot{\tau}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2} A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{ij}^e \dot{\epsilon}_{kl}^e. \quad (22)$$

Квадратичная форма (22) должна быть положительно определенной.

Далее перейдем к определению коэффициентов A_{ijkl} в уравнениях состояния (19). Соотношения (19) сформулированы относительно скоростей напряжений Пиола-Кирхгоффа, а определяющие соотношения для упругих деформаций обычно формулируются с применением тензора истинных напряжений Коши. Материальная производная тензора напряжений Коши $\dot{\underline{\sigma}}$ не удовлетворяет свойству индифферентности по отношению к жестким движениям среды [13]. В связи с этим, в геометрически нелинейных задачах механики деформируемого твердого тела получили распространение относительные скорости изменения тензоров напряжений, позволяющие исключить изменения последних, обусловленные движениями среды как жесткого целого [13-16].

Одной из производных, индифферентных к жестким движениям среды является производная Трусделла [2,13-16]. Производная Трусделла тензора напряжений Коши связана с субстанциональной производной тензора Пиола-Кирхгоффа соотношением, аналогичным соотношению (14) [2,13]:

$$\dot{\tau}_{ij} = J \sigma_{kl}^{Tr} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_j}{\partial X_l}, \quad (i, j, k, l = \overline{1,3}), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{Tr} &= J^{-1} \dot{\tau}_{kl} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} = \\ &= \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_r} \sigma_{rj} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_r} \sigma_{ir} + \left(\frac{\partial \dot{u}_s}{\partial X_s} \right) \sigma_{ij}, \quad (i, j, k, l, r, s = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (24)$$

Производная Трусделла связана с другой часто используемой производной Яуманна-Нолла, соотношением [2,14,15]:

$$\sigma^{Tr} = \sigma^J - \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{jk} - \sigma_{jk} \dot{\epsilon}_{ik} + \sigma_{ij} (\dot{\epsilon}_{kk}), \quad (25)$$

$$\text{где } \sigma^J = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ir} \dot{\omega}_{rj} - \sigma_{jr} \dot{\omega}_{ri}, \quad \dot{\omega}_{ij} = 0,5 \left(\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial X_i} - \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X_j} \right).$$

Для конкретизации уравнений (19) постулируем связь между σ_{kl}^{Tr} и $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ в виде

$$\sigma_{kl}^{Tr} = A_{klrs}^* (\dot{\epsilon}_{rs} - \dot{\epsilon}_{rs}^c), \quad (26)$$

где A_{klrs}^* – симметричный тензор упругих постоянных. В случае изотропного материала тензор A_{klrs}^* может быть представлен в виде

$$A_{klrs}^* = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{1}{2} (\delta_{kr} \delta_{ls} + \delta_{ks} \delta_{lr}) + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{kl} \delta_{rs} \right]. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (23) и учитывая (11) получим

$$\dot{\tau}_{ij} = A_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}), \quad (28)$$

где

$$A_{ijkl} = JA_{mnr}^* \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \frac{\partial x_j}{\partial X_n} \frac{\partial x_k}{\partial X_r} \frac{\partial x_l}{\partial X_s}. \quad (29)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $A_{ijkl} = A_{klij}$ и тем самым существование функции состояния (22) гарантируется.

Если функция состояния (22) существует и скорости внешних нагрузок не зависят от скоростей перемещений, то принцип виртуальных перемещений может быть приведен к вариационным формулировкам.

При формулировке принципа Лагранжа предполагаются, что выполняются кинематические граничные условия на S_u : $\dot{u}_i = \dot{g}_i(x_1, x_2, x_3, t)$, уравнения связи скоростей деформаций и перемещений (8) и уравнения состояния (21). Тогда из принципа виртуальной работы будем иметь:

$$\delta \Lambda(\dot{u}_i) = 0, \quad (30)$$

где

$$\Lambda(\dot{u}_i) = 0,5 \iiint_{\Omega} [A_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{p}_{ij}) (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{p}_{kl}) + \tau_{ij} \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}] d\Omega - \iint_{S_p} \dot{P}_i \dot{u}_i dS. \quad (31)$$

Вариационное уравнение (30) выражает экстремальные свойства мгновенного значения поля скоростей перемещений. Обращение в нуль первой вариации функционала эквивалентно выполнению линеаризованных уравнений равновесия и статических граничных условий, записанных относительно скоростей перемещений. Здесь компоненты тензора скоростей деформации ползучести \dot{p}_{ij}^c и напряжения τ_{ij} рассматриваются как параметры, не подлежащие варьированию. Основные неизвестные задачи ползучести (перемещения, деформации, напряжения) могут быть найдены с помощью процедуры интегрирования полей скоростей.

Скорости деформаций ползучести зависят от напряжений, температуры и некоторого числа параметров состояния q_i и не зависят от скоростей напряжений и деформаций. Общая форма записи определяющих соотношений для деформаций ползучести была предложена в работе [3]:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (32)$$

где $\Phi = \Phi(\tau_{ij}, q_1, q_2, \dots, q_N, T)$ – потенциальная функция, зависящая от компонентов тензора напряжений, параметров состояния q_k и температуры T . Уравнения течения (32) должны быть дополнены кинетическими уравнениями для параметров состояния вида

$$\dot{q}_k = f_k(q_k, \tau_{ij}, p_{ij}, t, T), \quad (k = \overline{1, N}). \quad (33)$$

Как правило, для большинства материалов, определяющие соотношения для деформаций ползучести существенно нелинейны по отношению к напря-

жениям, параметрам состояния и температуре.

Следует заметить, что в современной литературе практически отсутствуют, необходимые для построения определяющих соотношений теории ползучести, экспериментальные данные о реологических свойствах материалов при больших деформациях. Поэтому проблема построения определяющих соотношений теории ползучести при больших деформациях требует дополнительного рассмотрения.

Список литературы: 1. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды – М: Наука, 1983. – 448 с. 2. Васильев К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.– М.: Мир, 1987.– 542 с. 3. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 4. Коитер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 80 с. 5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с. 6. Kleiber M. Lagrangian and eulerian finite element formulation for large strain elasto-plasticity // Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. 1975. – Vol. 23. № 3. – P. 109-126. 7. Bathe K-J, Ozdemir H. Elastic-plastic large deformation. Static and dynamic analysis // Computers & Structures. 1976. – Vol. 6. – P. 81-92. 8. Christman T, Needleman A., Suresh S. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites // Acta metall. 1989. – Vol. 37. № 11. – P. 2029-3050. 9. Sorensen N. A planar model study of creep in metal matrix composites with misaligned short fibres // The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics (DCAMM). Report No. 449. October 1992. – 18 p. 10. Brünig M. Numerical analysis and large strain elastic-viscoplastic behavior of hydrostatic stress-sensitive metals // Int. Journal of Solids and Structures. 2001. – 38. – P. 635-656. 11. Voyiadjis G.Z., Kim D. Finite element analysis of the piezocone test in cohesive soils using an elastoplastic-viscoplastic model and updated Lagrangian formulation // Int. Journal of Plasticity. 2003. – 19. – P. 253-280. 12. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с. 13. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упруго-пластические деформации. – М.: Наука, 1986. – 232 с. 14. Prager, W. An elementary discussion of definitions of stress rate // Quarterly of Applied Mathematics. 1960. Vol. XVIII. P. 403–407. 15. Hibbit, H.D., Marcal, P.V., Rice, J.R. A finite element formulation of large strain and large displacement // Int. J. Solids Structures. 1970. – Vol.6. – P. 1069-1086. 16. Gadala, M.S., Dokanish, M.A., Oravas, G.A. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems // Int. J. for Num. Meth. in Engineering, 1984. – Vol.20. – P. 887-914.

Поступила в редакцию 28.05.04

УДК 621. 833.01

А.Ф.КИРИЧЕНКО, докт. техн. наук, **В.А.БЕРЕЖНОЙ**; НТУ «ХПИ»

ПЕРСПЕКТИВЫ УЛУЧШЕНИЯ РАБОТЫ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ПРЯМОЗУБЫХ ПЕРЕДАЧ

Розглядається пружно-деформований стан прямозубих коліс. Виконується розрахунок об'ємного пружно-деформованого стану методом скінченних елементів. Приведені результати розрахунків модифікованих прямозубих коліс з отвором уздовж осьової лінії зуба.

Stress strain states of spur gears are studied. Gear tooth calculation of volumetric stress strain state by method of finite element is performed. The calculation results of modification spur gears with by orifice along tooth axis.

Введение.

Исключительно важное значение в машиностроении имеют зубчатые передачи, представляющие собой неотъемлемую часть подавляющего большинства современных машин и механизмов и зачастую определяющие эксплуатационные показатели всей машины. В связи с постоянным повышением в современной технике нагрузок и скоростей при одновременном снижении допустимых веса и габаритов, возрастают требования к методам расчета зубчатых передач. Цилиндрические прямозубые передачи эвольвентного зацепления, имеющие широкое распространение в машиностроении, требуют уточненного расчета на прочность, а также тщательного изучения протекающих в зацеплении динамических процессов, вызывающих шум и вибрации передачи и всей машины.

В общем комплексе проблем, связанных с расчетом зубчатых передач, большое место занимает проблема исследования напряженно-деформированного состояния зубчатых колес, и, в частности, самих зубьев как элементов, непосредственно передающих нагрузку. Наличие высоконапряженных зон в окрестности полоски контакта и у основания зуба вызывает необходимость расчета рабочих поверхностей на прочность по контактным напряжениям и расчета зуба на прочность по изгибу [1]. Широко распространенный в настоящее время метод расчета эвольвентных прямозубых передач на изгибную прочность основан на применении теории комплексного переменного [2]. Однако основным недостатком этого метода остается неоправданной идеализации описания геометрии расчетной модели, а также сведение объемного напряженно-деформированного состояния, в котором находятся зубья прямозубых колес, к плоскому двумерному их рассмотрению.

Поэтому для получения наиболее исчерпывающих результатов по напряженно-деформированному состоянию прямозубых зубчатых колес необходимо выполнить решение трехмерной задачи теории упругости применительно к телу конечных размеров с границей сложной формы.

1. Постановка задачи.

В настоящей работе рассматривается задача об объемном напряженно-деформированном состоянии эвольвентных зубьев цилиндрических прямозубых передач (см рис.1). Делается попытка повлиять на НДС зубьев, путем применения модифицированной формы зубчатого колеса [5]. Модификация выполняется в виде отверстия в форме окружности вдоль оси зуба на незначительном расстоянии от корня зуба. И в зависимости от местоположения и диаметра отверстия строится картина напряженного состояния зуба, что дает возможность рассмотреть ряд вопросов, связанных с расчетом на прочность зубчатых колес.

2. Метод решения задачи.

Одним из наиболее эффективных численных методов решения краевых задач и исследования проблем прочности является метод конечных элементов. На современном этапе развития вычислительной техники и вариацион-

ных методов стало возможным применить, с достаточно высокой точностью, метод конечных элементов для расчета объемного напряженно-деформированного состояния зубьев эвольвентных колес [3].

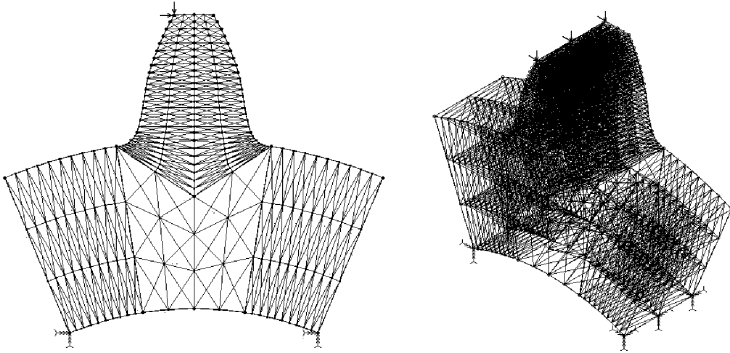


Рисунок 1 – Конечно-элементная модель эвольвентного прямозубого колеса в плоском и объемном виде без отверстия.

Поскольку при решении поставленной задачи методом МКЭ информация о геометрии модели, ее физических свойствах, граничных условиях задается численно в виде входных данных, то такой подход позволил создать универсальный алгоритм расчета, допускающий моделирование различных вариантов конструкций, нагружения, решать выше сформулированные вопросы.

Таким образом, предложенный метод позволил свести задачу о напряженно-деформированном состоянии зуба зубчатого колеса к определению вектора упругих перемещений, удовлетворяющего в рассматриваемой области системе уравнений Ламе и соответствующим граничным условиям, которые для данной задачи носят естественный характер. В этой связи предполагается, что зубчатое колесо жестко заделано по цилиндрической поверхности отверстия под вал:

$$R_x = R_y = R_z = U_x = U_y = U_z = 0, \quad (1)$$

где $R_x, R_y, R_z, U_x, U_y, U_z$ – компоненты вектора упругих перемещений любой точки поверхности цилиндрического отверстия.

Далее предполагается, что нормальные напряжения на поверхности колеса возникают только в точках поверхности зубьев, через которые передается нагрузка. На остальной поверхности зубчатого колеса нормальные напряжения отсутствуют. Следует особо подчеркнуть, что с целью универсализации полученных результатов, модуль m принят равный 1 мм, а величина прилагаемой нагрузки F_H равная 1 кг/мм [2].

Таким образом, поставленная задача является пространственной смешанной краевой задачей теории упругости для расчетной модели зубчатого колеса, которая представлена на рис. 1.

Решение дифференциальных уравнений Ламе эквивалентно задаче ва-

риационного исчисления о минимуме интеграла, которым выражается полная потенциальная энергия деформации упругой области (Э):

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (2)$$

В результате удовлетворения граничным условиям (1) на основании теоремы Эйлера, формул Грина и Кастельяно, получено выражение для потенциальной энергии в виде:

$$\mathcal{E}(U) = \frac{1}{2} \iiint_V E^T \sigma * dV - \left(\iiint_V U^T F * dV + \iint_{S_F} U^T P * dS \right), \quad (3)$$

где U – вектор упругих перемещений, E – тензор деформации, σ – тензор напряжений, V – рассматриваемая упругая область, S_F – площадь приложения нагрузки, P – интенсивность распределения нагрузки на зуб, « T » – индекс обозначает операцию транспонирования.

Для дискретизации модели зубчатого колеса выбран трехмерный тетраэдральный элемент с десятью узлами (см рис. 2), поскольку он наиболее точно может описывать сложную геометрию зубьев эвольвентных колес, и при простоте задания, как показали предварительные исследования, имеет хорошую точность получаемых результатов.

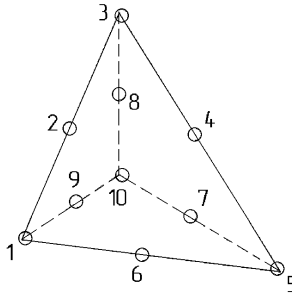


Рисунок 2 – Тетраэдральный 10-ти узловой конечный элемент.

В пределах данного элемента линейное поле перемещений зададим в виде полинома 2-й степени:

$$U_i(x, y, z) = a_{1i} + a_{2i}x + a_{3i}y + a_{4i}z + a_{5i}xy + a_{6i}yz + a_{7i}xz + a_{8i}x^2 + a_{9i}y^2 + a_{10i}z^2, \quad (4)$$

где $U_i(x, y, z)$ – вектор перемещений, и где $a_{1i} \dots a_{10i}$ – произвольные постоянные.

Разрешающее уравнение статического анализа (3), из которого определяют напряженно-деформированное состояние системы перемещений, записывается в матричном виде следующим образом:

$$[K] \cdot U = F, \quad (5)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, U – вектор перемещений, F – вектор сосредоточенных сил.

За основу приняты следующие физические параметры: модуль упругости

$E = 2,06 \cdot 10^{11}$ Па, модуль упругости второго рода $G = 7,92 \cdot 10^{10}$ Па, удельный вес $\rho = 7,75$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,28$, как наиболее полно отвечающие истинному состоянию зубчатого колеса.

3. Исследование НДС зубьев прямозубых колес без отверстия.

В данной работе успешно используется конечно–элементный программный комплекс COSMOS, который вместе с пакетом адаптированных к нему программ успешно решает задачи: определения параметров зубчатого зацепления и характеристик нагружения; построения геометрии зубчатого колеса по методике, изложенной в работе [4]; дискретизации полученной геометрической модели; объединения групп узлов в конечные элементы с наиболее удачными аппроксимирующими свойствами; построение матрицы жесткости и вектора компонент прилагаемой нагрузки с жестким соблюдением физических свойств реального зубчатого колеса; реализация граничных условий, построение разрешающих систем уравнений; наглядное графическое и табличное отображение получаемых результатов с возможностью их последующего уточнения в автоматическом режиме.

На базе изложенной выше методики были проведены контрольные расчеты по определению напряженно-деформированного состояния зубьев прямозубых колес без отверстия при приложении нагрузки в вершине зуба (см рис. 1). В качестве примера приведены результаты для следующих параметров: число зубьев $z = 20$, угол исходного контура $\alpha = 20^{\circ}$, коэффициент смещения инструментальной рейки $\xi = 0$. Расчеты выполнены для различной ширины венца (рис. 3), меняющейся от $b = 1$ м до $b = 6$ м [6].

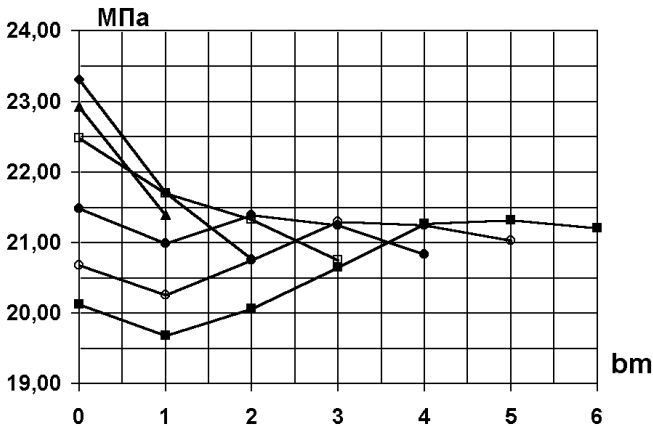


Рисунок 3 – Максимальные напряжения на растянутой стороне зубьев прямозубых колес $z = 20$; $\alpha = 20^{\circ}$; $\xi = 0$

Проведенный анализ показал, что максимальные напряжения от распределенной нагрузки в зависимости от ширины зубчатого венца уменьшаются

пропорционально увеличению ширины b (см рис. 3).

4. Исследование НДС зубьев прямозубых колес отверстием.

Рассмотрим влияния отверстия в форме окружности в теле зубчатого колеса на объемное напряженно-деформированное состояние зубьев прямозубых колес. Конечно-элементные модели изображены на рис. 4 и рис. 5. Расчеты выполнены при двух различных диаметрах отверстия: для $d_{\text{отв}} = 0,5m$, и для $d_{\text{отв}} = m$, а также варьируется высота центра отверстия. Изначально центр окружности располагается на диаметре впадин равном $d_{\text{вп}} = H = 0,0175 m$, а затем перемещается вдоль оси зуба на заданную величину. В данном случае это $H = d_{\text{вп}} + 0,25m$, а также $H = d_{\text{вп}} - 0,25m$ и $H = d_{\text{вп}} - 0,4m$.

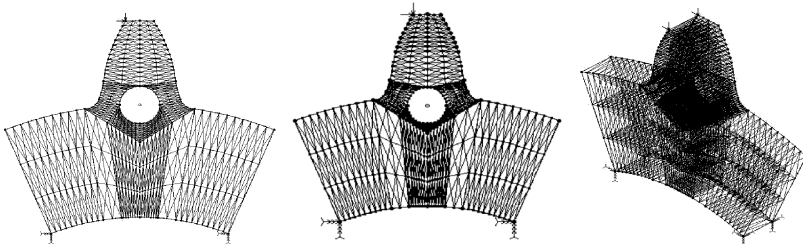


Рисунок 4 – Конечно-элементная модель прямозубого колеса в плоском и объемном виде с отверстием $d_{\text{отв}} = m$, и с центром на $H = d_{\text{вп}} = 0,0175 m$, и $H = d_{\text{вп}} - 0,25m$, при $z = 20$; $\alpha = 20^\circ$; $\zeta = 0$

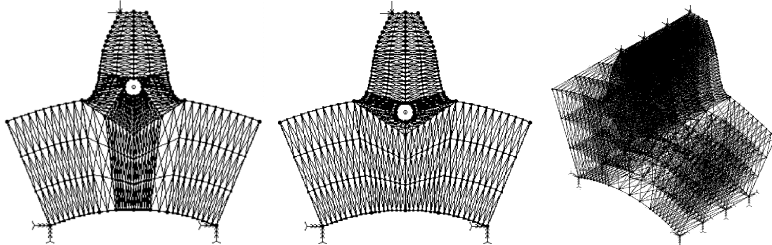


Рисунок 5 – Конечно-элементная модель прямозубого колеса в плоском и объемном виде с отверстием $d_{\text{отв}} = 0,5m$, и с центром на $H = d_{\text{вп}} = 0,25m$, и $H = d_{\text{вп}} - 0,4m$, при $z = 20$; $\alpha = 20^\circ$; $\zeta = 0$

Оценка изменений величины напряжений для эвольвентного зубчатого колеса с отверстиями в графическом виде приведена на рис. 6 и рис. 7). Из анализа представленных рисунков нетрудно установить тот факт, что отверстие в большинстве случаев негативно сказывается на НДС зуба. Существенным для величины максимальных напряжений оказывается величина диаметра отверстия. Однако, возможно и такое место расположения отверстия, при котором напряжения не ухудшаются, а могут даже улучшаться. Обусловлено это в первую очередь удалением центра окруж-

ности от опасного контура и как следствие уменьшением влияния на максимальные напряжения.

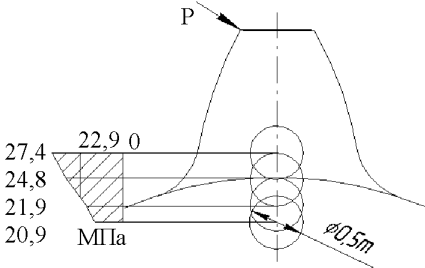


Рисунок 6 – Распределение напряжений на контуре зуба в зависимости от места расположения центра отверстия при $d_{\text{отв}} = 0,5m$; $z = 20$; $\alpha = 20^0$; $\zeta = 0$

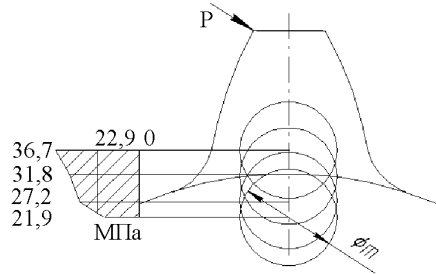


Рисунок 7 – Распределение напряжений на контуре зуба в зависимости от места расположения центра отверстия при $d_{\text{отв}} = m$; $z = 20$; $\alpha = 20^0$; $\zeta = 0$

Выводы.

Изложенные выше результаты наглядно иллюстрируют, что кроме известных модификаций прямозубых колес могут иметь место еще и другие, все зависит от того какая ставиться задача, какой желателно получить результат. В нашем случае показано, что при выполнении эвольвентного прямозубого колеса с отверстием вдоль зуба, напряжения изгиба у корня изменяют напряженное состояние в сторону ухудшения. Однако при распределении нагрузки вдоль зубьев и изучении динамического состояния зубчатой системы жесткость начинает играть решающую роль, поэтому наши исследования показывают, что в некоторых случаях можно поступившись напряженным состоянием довести жесткость до нужной величины.

Список литературы: 1. *Заблонский К.И.* Зубчатые передачи. – Киев, Техника, 1977. – 208 с. 2. *Устиненко В.Л.* Напряженное состояние зубьев цилиндрических прямозубых колес. М.: Машиностроение, 1972. – 91 с. 3. *Еременко С.Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков, Основа, 1991. – 272 с. 4. *Александров А.И., Артеменко Н.П., Костюк Д.И.* Цилиндрические зубчатые колеса. – Харьков, Изд-во ХГУ, 1956. – 318 с. 5. *Сухоруков Ю.Н.* Модификация эвольвентных цилиндрических зубчатых колес. – Киев, Техника, 1992. – 200 с. 6. *Кириченко А.Ф., Шевченко Р.И.* Разработка уточненной методики и некоторые результаты исследований напряженно-деформированного состояния зубьев эвольвентных цилиндрических колес // Проблемы качества и долговечности зубчатых передач и редукторов / Труды международной научно-технической конференции. – Харьков, 1997. – С.89-94.

Поступила в редколлегию 29.03.04

В.М.КАПИНОС, докт.техн.наук; **В.В.НАВРОЦКИЙ**, канд.техн.наук;
И.А.МИХАЙЛОВА; **Т.И.МИХАЙЛЕНКО**, НТУ «ХПИ»

О ПОВЫШЕНИИ ЭКОНОМИЧНОСТИ ПАРОВЫХ ТУРБИН С ПРОТИВОДАВЛЕНИЕМ

Розглядається питання про використання ступенів парових турбін зі зменшеним градієнтом ступені реактивності з метою підвищення коефіцієнту корисної дії за рахунок зниження втрат, пов'язаних з витіком середовища через надбандажні зазори в проточних частинах турбін з відносно короткими лопатками.

The question on use of steam turbines stages with the reduced reactions degree gradient is considered with the purpose of efficiency increase due to reduction the losses connected to leakings of environment through overbandage backlashes in flowing parts of turbines with rather short blades.

При проектировании проточных частей паровых и газовых турбин широко используются закрутки сопловых лопаток по законам постоянной циркуляции $C_u \cdot r = \text{const}$ (C_u – окружная составляющая скорости выхода из сопловой решетки), постоянства угла выхода $\alpha_1 = \text{const}$, постоянства удельного расхода по высоте лопатки $\rho \cdot C_z = \text{const}$ (C_z – осевая составляющая скорости выхода потока из сопловых лопаток). Общим для всех перечисленных закруток является заметное повышение степени реактивности к периферии лопаток. В ступенях с короткими лопатками при больших относительных радиальных зазорах высокая степень реактивности на внешнем радиусе проточной части приводит к весьма ощутимому снижению КПД за счет увеличения протечек через надбандажный зазор [1]. Эффективным методом снижения степени реактивности в периферийной области проточной части является применение ступеней со сниженным градиентом степени реактивности в радиальном направлении. В этом случае закрутка лопаток принимается такой, что угол выхода из сопловой решетки α_1 уменьшается от корневого сечения к периферийному.

Изменение угла α_1 , по радиусу является одним из наиболее существенных факторов, влияющих на искривление меридиональных линий тока и соответственно на распределение степени реактивности турбинной ступени за счет уравнивания радиального градиента давления, вызываемого окружной составляющей C_u в межвенцовом зазоре. Применение обратной закрутки с уменьшением угла α_1 к периферии, уменьшая градиент степени реактивности, способствует также снижению аэродинамических сил, в частности, возбуждающих низкочастотную вибрацию роторов.

Обратная закрутка оказывает наибольшее влияние на периферийную степень реактивности, и это влияние усиливается вместе с ростом d/l , т.е. с уменьшением длины лопаток.

Для увеличения степени реактивности в корневом сечении используется тангенциальный наклон сопловых лопаток в сторону вращения ротора, что

способствует также снижению концевых потерь. При увеличении степени реактивности в корневом сечении и ростом в связи с этим давления в придисковой камере уменьшается утечка через диафрагменное уплотнение.

Положительный угол наклона лопаток применяется в сочетании с обратной закруткой. Оптимальный наклон лопаток с точки зрения потерь по данным экспериментальных исследований [2] приближенно находится в пределах $5-10^0$. При комбинации обратной закрутки и тангенциального наклона действие обоих факторов не изменяется, т.е. происходит суммирование обоих методов воздействия на градиент реактивности.

В качестве примера рассмотрим результаты расчетов проточных частей турбин с противодавлением Р-12-3,4/0,3 и Р-40-12,75/3,04 [3]. Проточная часть турбины мощностью 12 МВт имеет 12 ступеней с закруткой сопловых лопаток по закону $\alpha_1 = \text{const}$. Турбина мощностью 40 МВт на более высокие параметры пара имеет 8 ступеней с закруткой близкой к $\alpha_1 = \text{const}$.

Распределение степени реактивности по радиусу ступеней с обратной закруткой и тангенциальным наклоном сопловых лопаток определялось по эмпирическим зависимостям, приведенным в [2,4]. Расчетные зависимости получены в итоге статистической обработки данных экспериментальных исследований более 60-ти турбинных ступеней, отличавшихся широким диапазоном изменения геометрических характеристик. Аргументы аналитических выражений приняты на основании систематизации и обобщения опытных данных совместно с анализом дифференциальных уравнений движения.

Распределение степени реактивности в радиальном направлении согласно опытным данным в [2,4] описывается уравнениями

$$\theta_1 = \frac{\rho_n - \rho_k}{\rho_n^0 - \rho_k^0} = f_1 \left[(\Delta\alpha_1^0 - \Delta\alpha_1), \text{tg}^2 \alpha_{1cp}, \frac{r_{cp}}{B \cdot \text{tg} \alpha_{1cp}}, \frac{1}{1 + \frac{L}{2B}}, \frac{r_{cp}}{l}, \frac{r_{cp} \cdot l}{B^2}, \varepsilon, \frac{\sin \beta_{2n}}{\sin \beta_{2k}} \right] \quad (1)$$

$$\theta_2 = \frac{2\rho_{cp} - \rho_n - \rho_k}{2\rho_{cp} - \rho_n^0 - \rho_k^0} = f_2(S, \Delta\alpha_1^0, \theta_1, \frac{r_{cp}}{l}, \varepsilon), \quad (2)$$

где ρ_n, ρ_k – степени реактивности на периферии и в корневом сечении сопловой решетки, $\Delta\alpha_1$ – угол закрутки сопловых лопаток, равный разности углов выхода из решетки на периферии и в корневом сечении $\Delta\alpha_1 = \alpha_{1n} - \alpha_{1k}$, (верхним индексом ноль обозначены параметры исходной ступени, в качестве которой принята ступень с закруткой по закону $C_u \cdot r = \text{const}$, для которой, как известно, $\frac{\text{tg} \alpha_1}{r} = \text{const}$), r_{cp} – средний радиус ступени, l – длина сопловой лопатки, B – ширина сопловой решетки, β_{2n}, β_{2k} – углы выхода их рабочей решетки на периферии и в корневом сечении, характеризующие закрутку рабочей решетки, L – межвенцовый зазор, ε – угол тангенциального наклона. Параметр S отыскивается по уравнению (1) при $\Delta\alpha_1 = S, \theta_1 = 1, L = 0, \varepsilon = 0$.

Расчеты проведены для двух упомянутых выше турбин с противодавлением

в каждом случае при двух различных углах закрутки и двух углах тангенциально-го наклона сопловой лопатки а) $\Delta\alpha_1 = -5^0$; $\varepsilon = 10^0$, б) $\Delta\alpha_1 = -8^0$; $\varepsilon = 15^0$. Результаты расчетов степени реактивности представлены в таблицах 1 и 2 для пяти ступеней турбины Р-12-3,4/0,3 и четырех ступеней турбины Р-40-12,75/3,04. Степени реактивности определялись в пяти точках по радиусу.

Таблица 1 – Распределение степени реактивности в турбине Р-12-3,4/0,3

$\Delta\alpha_1 = -5^0$; $\varepsilon = 10^0$								
№ ступ.	ρ					$\Delta\rho$	К	$\Delta\eta \cdot 10^3$
	Γ_{Π}	$\Gamma_{0,75}$	$\Gamma_{0,5}$	$\Gamma_{0,25}$	Γ_K			
2	0,138	0,136	0,142	0,153	0,176	0,083	0,790	5,25
4	0,154	0,150	0,155	0,168	0,189	0,090	0,794	4,53
6	0,173	0,167	0,169	0,180	0,201	0,097	0,800	4,00
8	0,376	0,368	0,371	0,384	0,409	0,088	0,900	2,00
$\Delta\alpha_1 = -8^0$; $\varepsilon = 15^0$								
2	0,118	0,124	0,142	0,173	0,217	0,103	0,731	6,70
4	0,133	0,137	0,155	0,187	0,234	0,111	0,738	5,76
6	0,151	0,152	0,169	0,201	0,248	0,119	0,748	5,04
8	0,360	0,357	0,371	0,402	0,449	1,04	0,881	2,38

Таблица 2 – Распределение степени реактивности в турбине Р-40-130/31

$\Delta\alpha_1 = -5^0$; $\varepsilon = 10^0$								
№ ступ.	ρ					$\Delta\rho$	К	$\Delta\eta \cdot 10^3$
	Γ_{Π}	$\Gamma_{0,75}$	$\Gamma_{0,5}$	$\Gamma_{0,25}$	Γ_K			
2	0,127	0,131	0,142	0,158	0,180	0,052	0,842	5,56
5	0,123	0,128	0,139	0,156	0,179	0,066	0,807	5,33
7	0,151	0,162	0,174	0,193	0,214	0,077	0,801	4,75
10	0,163	0,161	0,164	0,187	0,213	0,092	0,799	3,45
12	0,191	0,184	0,191	0,212	0,242	0,108	0,799	2,97
$\Delta\alpha_1 = -8^0$; $\varepsilon = 15^0$								
2	0,114	0,123	0,142	0,169	0,207	0,065	0,798	7,20
5	0,105	0,118	0,139	0,171	0,211	0,084	0,745	7,04
7	0,139	0,150	0,174	0,209	0,256	0,096	0,769	5,52
10	0,143	0,148	0,169	0,206	0,261	0,112	0,749	4,31
12	0,169	0,169	0,191	0,232	0,298	0,130	0,752	3,67

В последних трех столбцах таблиц приведены: значения разности $\Delta\rho$ степеней реактивности на внешнем радиусе исходной ступени ρ_{Π} и ступени с обратной закруткой и тангенциальным наклоном $\rho_{\Pi 3}$; $\Delta\rho = \rho_{\Pi} - \rho_{\Pi 3}$, отношение коэффициентов потерь от утечки через надбандажный зазор для ступени с закруткой и исходной ступени $K = \xi_3 / \xi_{\Pi}$, а также значения снижения потерь от утечки, т.е. повышение КПД ступени $\Delta\eta$. Потери от утечки через надбандажный зазор [5]

$$\xi_y = \pi \cdot \left(\frac{d_{\text{п}} \cdot \delta_{\text{эк}}}{F_1} \right)_i \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{ни}}}{1 - \rho_{\text{ср}i}}} = C_i \sqrt{\frac{\rho_{\text{п}}}{1 - \rho_{\text{ср}}}}, \quad (3)$$

где $d_{\text{п}}$ – диаметр надбандажного уплотнения, $\delta_{\text{эк}}$ – эквивалентный зазор уплотнения, F_1 – выходная площадь сопловой решетки.

При $\rho_{\text{ср}} = \text{const}$ (это условие выдерживалось при сравнительных расчетах)

$$K_i = \sqrt{\frac{\rho_{\text{п}3i}}{\rho_{\text{п}ii}}}, \quad (4)$$

где i – номер ступени.

Соответственно повышение КПД ступени

$$\Delta\eta_i = \Delta\xi_i = \xi_{\text{ни}}(1 - K_i), \quad \Delta\xi_i = \xi_{\text{ни}} - \xi_{\text{зи}}. \quad (5)$$

Из таблиц следует, что в среднем для турбины P-12-3,4/0,3 при $\Delta\alpha_1 = -5^0$ и $\varepsilon = 10^0$ повышение КПД составляет 0,46 %, а при $\Delta\alpha_1 = -8^0$ и $\varepsilon = 15^0$; $\Delta\eta = 0,5$ %, соответствующие значения $\Delta\eta$ для турбины P-40-12,75/3,04 равны 0,44 % и 0,56 % (без последней ступени).

Изложенное позволяет установить, как изменяется распределение реактивности по высоте ступени в зависимости от величины закрутки и тангенциального наклона сопловых лопаток, а также провести оценку величины повышения КПД ступени за счет снижения потерь от утечки через надбандажный зазор. В общем случае при изменении распределения степени реактивности в радиальном направлении необходимо учитывать не только снижение потерь от утечки в надбандажный зазор, но также принимать во внимание изменение потерь в диафрагменном уплотнении, профильные и концевые потери.

В качестве примера на рис. 1 представлено распределение степени реактивности при положительной закрутке $\Delta\alpha_1 = -2,4^0$ и тангенциальном наклоне $\varepsilon = 16,9^0$ [2].

Принятая геометрия ступени обеспечивает выравнивание градиента давления и, соответственно, примерно постоянное значение степени реактивности по радиусу ступени. Выравнивание градиента позволяет повысить КПД за счет увеличения перепада на соплах и уменьшения перепада на рабочих лопатках, так как ψ всегда меньше φ , т.е. преобразование энергии в соплах выгоднее, чем на рабочих лопатках.

Вопрос об оптимальном распределении степени реактивности по радиальному направлению ступени требует дополнительного специального рассмотрения.

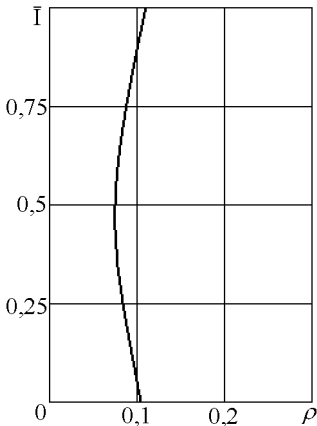


Рисунок 1 – Распределение степени реактивности в турбинной ступени при $\Delta\alpha_1 = 2,4^0$ и $\varepsilon = 16,9^0$

Список литературы: 1. Кириллов И.И., Иванов В.А., Кириллов А.И. Паровые турбины и паротурбинные установки. – Л.: Машиностроение, 1978. – 276 с. 2. Шевченко В.А. Аэродинамическое совершенствование турбинных ступеней, малочувствительных к величине периферийного зазора // Канд. диссертация. – Харьков: ХПИ, 1984. – 234 с. 3. Трояновский Б.М., Самойлович Г.С. Паровые и газовые турбины. Сборник задач. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 236 с. 4. Гродзинский В.Л., Фролов Б.И., Шевченко В.А. Аппроксимация распределения реактивности по высоте в функции геометрических характеристик ступени // Известия вузов «Энергетика», 1984. – №12. – С. 60-63. 5. Щегляев А.В. Паровые турбины. – М.: Энергия, 1976. – 357 с.

Поступила в редколлегию 15.05.04

УДК 621.165

В.М.КАПИНОС, докт.техн.наук; **В.В.НАВРОЦКИЙ**, канд.техн.наук;
И.В.СМОРОДСКАЯ, канд.техн.наук; **Н.Д.МАРЧЕНКО**; НТУ «ХПИ»

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ РЕАКТИВНОСТИ ТУРБИННОЙ СТУПЕНИ

Запропоноване наближене рівняння для визначення степені реактивності турбінної ступеня в теплових розрахунках проточних частин турбін по параметрах за останнім ступенем.

An approximate equation for the definition of a stage reaction degree is presented. The equation can be used for heat calculation of a blading by parameters after a last stage.

При определении параметров проточной части турбин на частичных нагрузках, а также в поверочных расчетах широко применяется метод расчета по параметрам за последней ступенью, так называемый расчет с конца. В этой задаче возникает проблема определения степени реактивности рассчитываемых ступеней. В графо-аналитическом расчете проточной части с конца, рассматриваемом в работе [1], степень реактивности принимается, по существу, произвольно. Для активных ступеней в [1] рекомендуется степень реактивности ρ принимать равной 0,2, для реактивных ступеней – $\rho = 0,5$. Априорное задание степени реактивности свидетельствует о незамкнутости исходной системы уравнений, используемой в расчете. В работе [2] впервые сформулирована замкнутая система расчетных уравнений. При этом использована видоизмененная исходная система уравнений с введением в явном виде в расчетную зависимость значения выходной скорости предыдущей ступени C_2 , используемой в рассчитываемой ступени и определяемой по входному сечению этой ступени. В [1] использование выходной скорости предыдущей ступени принимается во внимание косвенно и, поэтому, лишь оценочно. Между тем, по существу, определение степени реактивности ступеней в расчете с конца проточной части является главной и центральной частью этого расчета. В работе [2] степень реактивности определяется линейной зависимостью, предложенной одним из авторов статьи в [3]. Линейная зависимость

$$\rho = 1,022 - 0,539\overline{F}\overline{V} \quad (1)$$

получена в [3] при средних значениях $\varphi \cos \alpha_1 = 0,935$ и $\varphi^2 = 0,935$ путем сопоставления уравнений расхода для сопловой и рабочей решеток. В (1) $\overline{F} = \frac{F_l}{F_c}$, $\overline{V} = \frac{V_{1t}}{V_{2t}}$, F_l , F_c – горловые сечения лопаток рабочей и сопловой решеток, V_{1t} , V_{2t} – удельные объемы за сопловой и рабочей решетками, определенные на изоэнтропе.

Коэффициенты формулы (1), приведенные в [3], проверены на ограниченном количестве расчетных данных и поэтому в дальнейшем уточнялись. В [2] зависимость (1) приведена в виде

$$\rho = 1,027 - 0,53\overline{F}\overline{V} \quad (2)$$

При этом, для \overline{V} предложено два уравнения, аппроксимирующие расчетные значения \overline{V} для ЦВД и ЦНД, в функции двух параметров

$$\overline{V} = f(\overline{F}, \varepsilon), \quad (3)$$

где $\varepsilon = P_2/P_0$ – отношение давления за ступенью P_2 к давлению перед ступенью P_0 (давления P_2 и P_0 – статические). Коэффициенты уравнения (2) в какой-то мере учитывают погрешности той аппроксимации параметра \overline{V} , которая приведена в [3]. Уравнения для \overline{V} в [2] получены на основании данных теплового расчета турбин К-800-240 [4] и ВК-50 (ЦНД) [5], [7]. Ниже рассмотрены более общие данные, включающие, помимо упомянутых выше, расчетные значения \overline{V} для турбин Р-40-130/31 [6] и Р-12-3,4/0,3 (проектные расчеты). Обобщение сделано с помощью одного уравнения, применимого для определения параметра \overline{V} , как в ЦВД, так и в ЦНД.

В табл. 1,2,3 приведены данные сравнительных расчетов степеней реактивности ρ , определенных по уравнению

$$\rho = 1,026 - 0,539\overline{F}\overline{V} \quad (4)$$

(сходному с исходным уравнением (1)) и расчетными (проектировочными) значениями, приведенными в [4-7]. В сравнительных расчетах величины \overline{F} и \overline{V} принимали по данным [4-7]. Отклонение рассчитанных по уравнению (4) значений ρ от проектировочных составляет в среднем ± 3 %. Помимо степеней реактивности, в табл. 1-3 представлены и параметры \overline{F} , $\frac{V_{1t}}{V_{2t}}$, $\varepsilon = \frac{P_2}{P_0}$, на основании которых построена предлагаемая новая аппроксимация (рис. 1)

$$\frac{V_{1t}}{V_{2t}} = 0,425 + 44,56 \cdot (x - 0,38)^{1,5332 \cdot x + 1,2285} \cdot e^{-3,1838x}; \quad x = \overline{F} \cdot \varepsilon, \quad (5)$$

предназначенная для поверочных расчетов проточных частей турбин по параметрам за последней ступенью. Формула (5) справедлива в интервале $0,38 \leq \overline{F}\varepsilon \leq 1,5$. При $\overline{F}\varepsilon = 1,5 \div 1,7$ значение $\frac{V_{1t}}{V_{2t}} = 0,985 = \text{const}$.

Таблица 1 – Сравнительные расчеты для данных турбины К-800-240

№ ступ.	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{F} = F_n/F_c$	1,588	1,559	1,548	1,531	1,500	1,408	1,365
$\varepsilon = P_2/P_0$	0,870	0,880	0,871	0,879	0,877	0,869	0,862
V_{1t}/V_{2t}	0,973	0,976	0,978	0,974	0,976	0,964	0,966
ρ	0,195	0,210	0,22	0,235	0,25	0,3	0,32
$\bar{F} \cdot \varepsilon$	1,381	1,371	1,343	1,345	1,315	1,228	1,180
$\rho_{\text{расч.}}$	0,191	0,205	0,210	0,222	0,237	0,294	0,315
погрешн.,%	-2,0	-1,9	-4,7	-5,8	-5,5	-1,0	-1,4

Таблица 1 (продолжение)

№ ступ.	9	10	11	12	13	14	15
$\bar{F} = F_n/F_c$	1,355	1,323	1,283	1,604	1,576	1,570	1,547
$\varepsilon = P_2/P_0$	0,869	0,870	0,854	0,734	0,818	0,780	0,794
V_{1t}/V_{2t}	0,966	0,962	0,956	0,950	0,963	0,955	0,954
ρ	0,33	0,35	0,37	0,19	0,2	0,210	0,22
$\bar{F} \cdot \varepsilon$	1,182	1,151	1,095	1,140	1,287	1,225	1,228
$\rho_{\text{расч.}}$	0,321	0,340	0,360	0,205	0,209	0,218	0,23
погрешн.,%	-2,8	-2,9	-2,5	+7,7	+4,0	+3,7	+4,8

Таблица 1 (продолжение)

№ ступ.	16	17	18	19	20	21	22
$\bar{F} = F_n/F_c$	1,514	1,474	1,404	1,326	1,303	1,520	1,432
$\varepsilon = P_2/P_0$	0,707	0,75	0,747	0,714	0,687	0,563	0,526
V_{1t}/V_{2t}	0,950	0,948	0,918	0,916	0,883	0,844	0,826
ρ	0,24	0,26	0,32	0,36	0,40	0,33	0,40
$\bar{F} \cdot \varepsilon$	1,07	1,106	1,049	0,946	0,895	0,889	0,754
$\rho_{\text{расч.}}$	0,25	0,27	0,23	0,37	0,405	0,33	0,393
погрешн.,%	+4,5	+4,9	+3,5	+3,1	+1,4	0,0	-1,7

Таблица 1 (продолжение)

№ ступ.	23	24	25	K-25-90	BK-50	
				20	34	38
$\bar{F} = F_n/F_c$	1,466	1,350	1,638	1,833	1,212	1,356
$\varepsilon = P_2/P_0$	0,469	0,429	0,233	0,308	0,630	0,474
V_{1t}/V_{2t}	0,724	0,634	0,425	0,666	0,815	0,715
ρ	0,46	0,55	0,69	0,37	0,5	0,5
$\bar{F} \cdot \varepsilon$	0,687	0,579	0,382	0,564	0,763	0,64
$\rho_{\text{расч.}}$	0,454	0,56	0,65	0,37	0,49	0,5
погрешн.,%	-1,3	+1,8	-6,1	0,0	-2,0	0,0

Таблица 2 – Сравнительный расчет для данных турбины P-40-130/31

№ ступ	2	3	4	5	6	7	8
$\bar{F} = F_n/F_c$	1,650	1,650	1,666	1,651	1,638	1,499	1,264
$\varepsilon = P_2/P_0$	0,891	0,892	0,890	0,887	0,885	0,894	0,911
V_{1t}/V_{2t}	0,988	0,987	0,986	0,984	0,984	0,978	0,972
ρ	0,142	0,148	0,155	0,163	0,169	0,247	0,371
$\bar{F} \cdot \varepsilon$	1,509	1,471	1,483	1,464	1,449	1,340	1,152
$\rho_{\text{расч.}}$	0,197	0,148	0,140	0,150	0,157	0,236	0,364
погрешн.,%	+3,7	0,0	-10,7	-8,6	-7,6	-4,6	-1,9

Таблица 3 – Сравнительный расчет для данных турбины P-12-3,4/0,3

№ ступ.	2	3	4	5	6	7
$\bar{F} = F_n/F_c$	1,703	1,689	1,668	1,670	1,631	1,612
$\varepsilon = P_2/P_0$	0,8695	0,8654	0,8594	0,8473	0,8470	0,8446
V_1/V_2	0,978	0,972	0,975	0,974	0,972	0,970
V_{1t}/V_{2t}	0,981	0,975	0,978	0,977	0,975	0,974
ρ	0,1417	0,1394	0,1485	0,1394	0,1625	0,1736
$\bar{F} \varepsilon$	1,481	1,461	1,433	1,414	1,381	1,362
$\rho_{\text{расч.}}$	0,133	0,138	0,142	0,146	0,169	0,180
погрешн.,%	-6,5	-0,07	-0,06	+5,4	+4,2	+4,0

Таблица 3. (продолжение)

№ ступ.	8	9	10	11	12
$\bar{F} = F_n / F_c$	1,602	1,628	1,6086	1,5757	1,5765
$\varepsilon = P_2 / P_0$	0,8379	0,8286	0,8154	0,8126	0,8015
V_{1t} / V_{2t}	0,1789	0,1651	0,1695	0,1926	0,1907
V_{1t} / V_{2t}	1,342	1,350	1,311	1,280	1,264
ρ	0,186	0,175	0,184	0,205	0,204
$\bar{F} \cdot \varepsilon$	+4,3	+6,5	+8,2	+6,0	+6,9
$\rho_{\text{расч.}}$	0,186	0,175	0,184	0,205	0,204
погрешн., %	+4,3	+6,5	+8,2	+6,0	+6,9

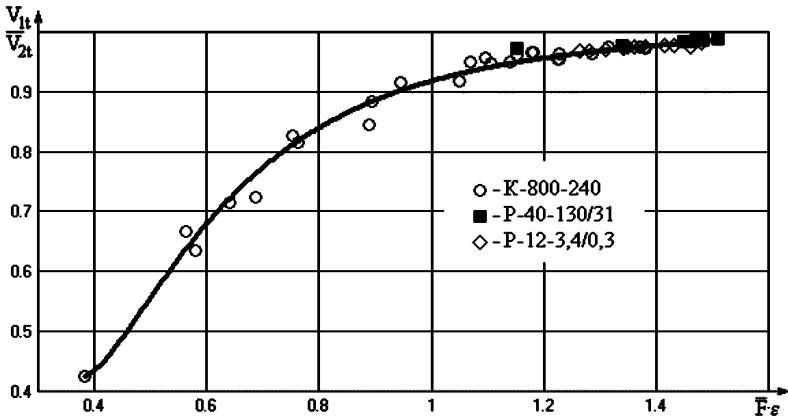


Рисунок 1 – Аппроксимация зависимости V_{1t}/V_{2t} от параметра $\bar{F} \cdot \varepsilon$

Для турбины P-12-3,4/0,3 ПО «Турбоатом» значения V_{1t}/V_{2t} получены расчетным путем, т.к. в проектировочном тепловом расчете этой турбины приведены V_1 и V_2 на политропе (см. табл. 3). Приведенное в работах [4, стр. 64] и [5, стр.364] уравнение связи между удельными объемами на политропе и изоэнтропе в виде

$$\frac{V_{1t}}{V_1} = \left[\frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot (1 - \zeta_c) \cdot \lambda_{1t}^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \cdot \lambda_{1t}^2} \right]^{\frac{1}{k-1}} \quad (6)$$

является ошибочным, т.к. не учитывает того, что в данном случае политропный процесс это адиабатный процесс с трением в отличие от политропного процесса с подводом теплоты извне. Поэтому в [4,8] $V_{1t}/V_{2t} > 1$, а в действ-

вительности $V_{1t} < V_2$. Правильное уравнение связи, основанное на использовании выражения для перепадов энтальпий при адиабатном течении с трением [9] и изоэнтропным течением, получено В.М.Капиносом в [3, стр.58]. В рассматриваемом случае это уравнения

$$\frac{V_{2t}}{V_2} = \frac{\left[1 - \frac{C_1^2 \eta_{oi} (k-1)}{2k \bar{P}_0 \bar{V}_0} \right]^{\frac{1}{n_1-1}}}{\left[1 - \frac{C_1^2 (k-1)}{2k \bar{P}_0 \bar{V}_0} \right]^{\frac{1}{k-1}}}, \quad (7)$$

$$\frac{V_{1t}}{V_1} = \frac{\left[1 - \frac{C_{1t}^2 \varphi_c^2 (k-1)}{2k \bar{P}_0 \bar{V}_0} \right]^{\frac{1}{n_2-1}}}{\left[1 - \frac{C_{1t}^2 (k-1)}{2k \bar{P}_0 \bar{V}_0} \right]^{\frac{1}{k-1}}}, \quad (8)$$

где показатели политропных процессов описываются известными формулами [10]

$$n_1 = \frac{1}{1 - \eta_{oi} \frac{k-1}{k}}, \quad n_2 = \frac{1}{1 - \varphi_c^2 \frac{k-1}{k}}. \quad (9)$$

Более простые уравнения связи между удельными объемами на изоэнтропе и политропе можно получить также следующим образом.

В изоэнтропном процессе между изобарами P_0 и P_2 для ступени

$$\left(\frac{\bar{V}_0}{V_{2t}} \right)^k = \frac{P_2}{P_0}, \quad (10)$$

соответственно в политропном процессе

$$\left(\frac{\bar{V}_0}{V_2} \right)^{n_1} = \frac{P_2}{P_0}. \quad (11)$$

Решая эти уравнения относительно V_0 и приравнявая, получим

$$\frac{V_{2t}}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_0} \right)^{\frac{k-n_1}{kn_1}}. \quad (12)$$

Аналогичным образом из уравнений

$$\left(\frac{\bar{V}_0}{V_{1t}} \right)^k = \frac{P_1}{P_0} \quad \text{и} \quad \left(\frac{\bar{V}_0}{V_1} \right)^{n_2} = \frac{P_1}{P_0} \quad (13)$$

находим для сопловой решетки

$$\frac{V_{1t}}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{k-n_2}{kn_2}}. \quad (14)$$

Перепишем уравнения (12) и (14) в виде

$$\frac{V_{2t}}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_0} \right)^{N_1} \quad \text{и} \quad \frac{V_{1t}}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{N_2}. \quad (15)$$

Тогда для определения V_{1t}/V_{2t} по величине V_1/V_2 получим формулу

$$\frac{V_{1t}}{V_{2t}} = \frac{V_1}{V_2} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{N_2} \left(\frac{P_2}{P_0} \right)^{-N_1}. \quad (16)$$

Итогом изложенного является рекомендация уравнений (4) и (5) для расчета проточной части паровой турбины с конца. По известной геометрии ступеней и параметрам V_2 и P_2 за последней ступенью при помощи уравнений (4) и (5), а также системы уравнений и алгоритма расчета, изложенных в работе [2], можно определить 11 термодинамических параметров для каждой ступени.

Список литературы: 1. Котляр И.В. Переменный режим работы газотурбинных установок. – М., 1961. – 287 с. 2. Капинос В.М., Навроцкий В.В., Смородская И.В. Приближенный поступенчатый расчет проточной части турбины по конечным параметрам // Вестник НТУ «ХПИ». – 2002. – № 19. – С. 100-106. 3. Капинос В.М. Гаркуша А.В. Переменный режим работы паровых турбин. – Харьков, 1989. – 174 с. 4. Щегляев А.В. Паровые турбины. – М., 1976. – 357 с. 5. Щегляев А.В. Паровые турбины. – М., 1955. – 320 с. 6. Трояновский Б.М., Самойлович Г.С. Паровые и газовые турбины. Сборник задач. – М., 1978. – 236 с. 7. Семенов А.С., Шевченко А.М. Тепловой расчет паровой турбины. – Киев, 1975. – 206с. 8. Дейч М.Е. Техническая газодинамика. – М., 1974. – 592 с. 9. Жуковский В.С. Техническая термодинамика. – М., 1952. – 439 с. 10. Траутель В. Тепловые турбомашинны. – М., 1961. – Т.1, 344 с.

Поступила в редколлегию 15.05.04

УДК 621.91

В.М.КАПИНОС, докт.техн.наук; **В.Н.ПУСТОВАЛОВ**, канд.техн.наук;
М.В.МЕЗЕРНАЯ; НТУ «ХПИ»

ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ТЕРМИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ ИЗОЛЯЦИИ

У розрахунках нестационарних процесів теплообміну співвідношення, що описують конвективний теплообмін, використовуються в такому ж виді, як і при стаціонарних умовах, що не завжди може бути виправданим. У цьому зв'язку розглянуте наближене рішення нестационарної задачі теплопровідності для необмеженої пластини з введенням заміни теплового опору граничними умовами третього роду. Показано, що умовний коефіцієнт теплопровідності на поверхні, що ізолюється, у вигляді відношення теплопровідності до товщини ізоляції, що використовується при стаціонарному режимі, внаслідок акумуляції теплоти збільшується в нестационарних умовах, що необхідно приймати до уваги.

For the transient conduction predictions the relations which describe convective heat exchange are used in the same form as for the steady-state conduction, which could not be always justified. In this connection the approximate solution of the transient conduction problem for an unlimited plate was considered with the replacement of its thermal resistance by the boundary conditions of the third kind. It is shown that the conventional heat transfer coefficient on the insulated plate in the form of the ratio of

the heat conduction to the plate thickness, which is used for the steady-state mode, owing to accumulation of heat is increased in the transient conditions, which is necessary to take into account.

В инженерно-технических расчетах стационарных задач теплопроводности часто прибегают к их стилизации путем замены тепловой изоляции граничными условиями 3^{го} рода. Обычно условный коэффициент теплоотдачи на изолируемой поверхности определяют по формуле

$$\alpha = \lambda/\delta,$$

где λ , δ – коэффициент теплопроводности и толщина изоляции.

Тепловой поток находят по температурному перепаду в слое изоляции.

Однако такой прием упрощения задачи при нестационарных условиях теплообмена в уточнении нуждается.

Поскольку коэффициент температуропроводности изоляции примерно на порядок меньше коэффициента температуропроводности стали, то прогрев слоя изоляции происходит медленнее, вследствие чего распределение по толщине изоляции длительное время будет отличаться от линейного.

Чтобы оценить влияние нестационарности процесса теплопроводности на величину условного коэффициента теплоотдачи, воспользуемся приближенным методом решения задачи теплопроводности с заданием параболического профиля температуры.

Рассмотрим нестационарный теплообмен теплоизолированной неограниченной пластины (плиты).

Пусть начальная температура слоя изоляции равна t_0 . При $y = 0$ температура плиты в течение всего процесса теплообмена поддерживается постоянной, равной t_n (температура поверхности).

Примем, следуя [1], параболическое распределение температуры в прогретом слое $Y = Y(\tau)$, где τ – время.

$$t = t_0 + (t_n - t_0) \left((Y - y)/Y \right)^n. \quad (1)$$

Уравнение (1) удовлетворяет граничным условиям (рис. 1)

$$y = 0; \quad t = t_n; \quad y = Y; \quad t = t_0.$$

Проинтегрируем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2)$$

в пределах от $y = 0$ до $y = Y$. При интегрировании используем правило Лейбница о дифференцировании под знаком интеграла с переменным пределом интегрирования, имея в виду, что $Y = Y(\tau)$.

Будем иметь

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_Y - \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_0 = \frac{1}{a} \int_0^Y \frac{\partial t}{\partial \tau} dy$$

или

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_Y - \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_0 = \frac{1}{a} \left(\frac{d}{d\tau} \int_0^Y t dy - t \Big|_Y \frac{dY}{d\tau} \right). \quad (3)$$

Используя (1) и замечая, что $\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_Y = 0$, левую часть уравнения (3) представим в виде

$$-\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_0 = -n(t_n - t_0) \left(\frac{Y-y}{Y} \right)^{n-1} \left(-\frac{1}{Y} \right) = \frac{n(t_n - t_0)}{Y}. \quad (4)$$

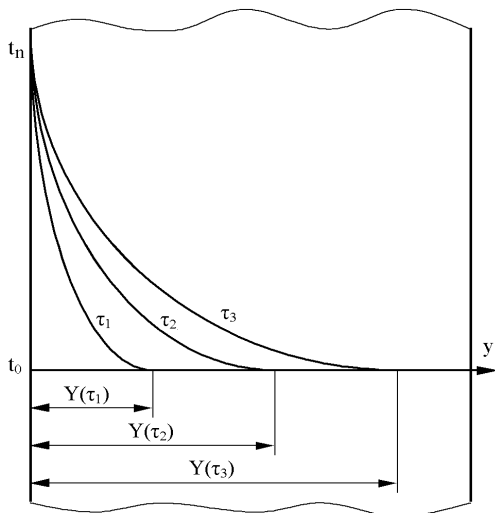


Рисунок 1 – Распределение температуры в слое прогреваемой изоляции в разные моменты времени

Тогда уравнение (3) можно переписать следующим образом

$$\frac{n(t_n - t_0)}{Y} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial t}{\partial \tau} \left(t_0 Y + \frac{(t_n - t_0)}{n+1} Y \right) - t_0 \frac{dY}{d\tau} \right],$$

или после упрощений

$$a d\tau = \frac{1}{n(n+1)} Y dY.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$a \tau = \frac{Y^2}{2n(n+1)}. \quad (5)$$

Сравнительные расчеты, приведенные в [1], показывают, что при $n = 2$ приближенные решения задач нестационарной теплопроводности достаточно хорошо совпадают с возможными точными решениями [2]. Приближенные решения оказываются значительно более простыми и более наглядными.

При $n = 2$ из уравнения (5) следует, что толщина прогретого слоя изоляции за время τ составляет

$$Y = \sqrt{a\tau 2n(n+1)} = \sqrt{12a\tau} . \quad (6)$$

Найденное решение справедливо при $Y \leq \delta$

В предельном случае $Y = \delta$ находим, что число Фурье

$$(Fo)_{\max} = \frac{a\tau}{\delta^2} \approx 0,1 . \quad (7)$$

Чтобы получить выражение для условного коэффициента теплоотдачи (или значения термического (теплого) сопротивления – в нестационарном теплообмене это понятие связано с коэффициентом температуропроводности) [3], воспользуемся следующими уравнениями теплового баланса.

Тепловой поток в сечении $y = 0$ через произвольную поверхность F

$$Q = -\lambda \left. \frac{dt}{dy} \right|_{y=0} F . \quad (8)$$

Используя (4), находим, что

$$Q = \lambda \frac{t_n - t_0}{Y} n F . \quad (9)$$

Формально можно записать также

$$Q = \alpha (t_n - t_0) F . \quad (10)$$

Приравнявая эти выражения, получим

$$\alpha = \frac{\lambda n}{Y} = \frac{\lambda n}{\sqrt{2n(n+1)a\tau}}$$

или, при $n = 2$

$$\alpha = \frac{2\lambda}{\sqrt{12a\tau}} \approx \frac{\lambda}{\delta} \frac{0,6}{\sqrt{Fo}} .$$

Когда прогретый слой становится равным толщине слоя и $Fo \approx 0,1$

$$\alpha \approx 2\lambda/\delta, \quad (11)$$

т.е. условный коэффициент теплоотдачи при $Fo \approx 0,1$ остается еще в 2 раза больше, чем при стационарном режиме. При меньших значениях числа Fo различие будет еще более значительным.

Приведенный расчет показывает, что аккумуляция теплоты изоляцией в нестационарном процессе теплообмена может заметно сказаться на величине условного коэффициента теплоотдачи, а, следовательно, и на температурном поле теплоизолируемого тела. Значение условного коэффициента теплоотдачи в виде $\alpha = \lambda/\delta$ не может использоваться при нестационарных условиях теплообмена.

Список литературы: 1. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.: ГЭИ, 1959. – 184 с. 2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с. 3. Ландау Л.Д., Ахиезер А. И. Лифшиц Е.М. Курс общей физики. – М.: Наука, 1969. – 399 с.

Поступила в редколлегию 10.03.04

В.М.КАПИНОС, докт.техн.наук; **В.Н.ПУСТОВАЛОВ**, канд.техн.наук;
И.В.СМОРОДСКАЯ, канд.техн.наук; НТУ «ХПИ»

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ТРУБНОМ ПУЧКЕ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ОБТЕКАНИИ

При перехрестовой течі в трубном пучку в наслідок зменшення температури газу по глибині пучка виникає нерівномірний розподіл температури трубок і їх температурного розширення, слідством якого постають температурні напруження, що може привести до порушення з'єднання трубок з трубною дошкою. Пропонується наближений метод розрахунку розподілу температури в трубном пучку.

At the cross-flow in a tube bundle in consequence of the gas temperature drop there is the different temperature of the tube walls. Because of that different heat deformations and stresses of the tubes arises, which can result in the failure of the tubes-plate juncture. The approximate method of the temperature distribution in a tube bundle is proposed.

При перекрестном токе температура газа, омывающей трубный пучок, изменяется (уменьшается) по глубине трубного пучка, обуславливая различие температур трубок, а, следовательно, и температурных их удлинений от ряда к ряду. Различия температурных удлинений порождает температурные напряжения, которые могут привести к нарушению плотности вальцовочных соединений с концевыми трубными досками.

В анализе распределения температуры по рядам трубок используем систему дифференциальных уравнений теплопроводности и энергии, описывающих изменение температур трубок и нагреваемого воздуха.

Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями

при $r = r_1$

$$\alpha_r (T_1 - \vartheta) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2)$$

при $r = r_2$

$$\alpha_b (T_2 - t) = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3)$$

определяет температурное поле трубки. В уравнениях (1) – (3) α_r , α_b – коэффициенты теплоотдачи со стороны газа и воздуха, t , ϑ – температуры газа и воздуха, r и x – радиальная и осевая координата.

Для одномерного распределения температуры нагреваемого воздуха примем соотношение

$$\frac{d\vartheta}{dx} - \frac{\pi d_1 \alpha_b}{c_p G} (T_1 - \vartheta) = 0, \quad (4)$$

которое следует из уравнения теплового баланса элемента dx трубки. Здесь c_p и G – теплоемкость и весовой расход воздуха через одну трубку.

Чтобы упростить решение системы уравнений (1) – (4) введем в рассмотрение среднюю по поперечному сечению трубки температуру

$$\theta = \frac{1}{2\pi r_{cp} \delta} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r T dr = \frac{1}{r_{cp} \delta} \int_{r_1}^{r_2} r T dr .$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T r}{\partial x^2} = 0 , \quad (5)$$

умножим на $1/(r_{cp} \delta)$ и почленно проинтегрируем в пределах от r_1 до r_2

Будем иметь

$$r_2 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_2} - r_1 \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r_1} + \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0 . \quad (6)$$

После исключения производных из уравнения (6) при помощи граничных условий (2), (3) получим

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{r_2 \alpha_r}{r_{cp} \lambda \delta} (T_2 - t) - \frac{r_1 \alpha_b}{r_{cp} \lambda \delta} (T_1 - \vartheta) = 0 .$$

Если принять, что $T_1 = T_2 = \theta$, т.е. температура поверхностей трубки равна среднеинтегральной температуре, то получим приближенное одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности в виде

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{r_2 \alpha_r}{r_{cp} \lambda \delta} (\theta - t) - \frac{r_1 \alpha_b}{r_{cp} \lambda \delta} (\theta - \vartheta) = 0 . \quad (7)$$

Уравнение в таком виде может быть получено непосредственно составлением баланса теплоты для элемента трубки dx , приняв заранее, что температура в поперечном сечении трубки выровнена и равна θ . Однако в этом случае будет неясно, почему уравнение (7) приближенное. Принятое выше условие $T_1 = T_2 = \theta$ для тонких тел выполняется достаточно точно.

Для тонких стенок может быть принято еще одно упрощение – опущена вторая производная в уравнении (7). Допустимость этого упрощения проверена в [1] путем сравнения распределения θ по исходному и упрощенному уравнениям.

Таким образом, для определения температуры трубок при их поперечном обтекании будем использовать систему уравнений

$$(\theta - t) + n^2 (\theta - \vartheta) = 0 , \quad (8)$$

$$\text{где } n^2 = \frac{\alpha_b r_1}{\alpha_r r_2} ,$$

$$\frac{d \vartheta}{dx} - p^2 (\theta - \vartheta) = 0 , \quad (9)$$

$$\text{где } p^2 = \frac{2\pi r_1 \alpha_r}{c_p G} \text{ (в уравнении (4) в соответствии с принятым допущением)}$$

ем $T_1 \approx \theta$).

Из уравнения (8) следует

$$\theta = \frac{\vartheta n^2 + t}{1 + n^2}, \quad (10)$$

Подстановка этого выражения в (9) дает

$$\frac{d\vartheta}{dx} - v^2(\vartheta - t) = 0, \quad (11)$$

$$\text{где } v^2 = \frac{p^2}{1 + n^2}.$$

В дальнейшем принимаем $t = \text{const}$ равным среднему значению (по глубине пучка и его средней длине).

Интеграл уравнения (11) имеет вид

$$\vartheta - t = c \cdot e^{-v^2 x}.$$

Из граничного условия $x = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$, где ϑ_0 – начальная температура воздуха, получаем

$$\vartheta = t - (t - \vartheta_0) \cdot e^{-v^2 x}. \quad (12)$$

Совмещая выражения (10) и (12) находим также

$$\theta = t - (t - \vartheta_0) \cdot \mu^2 \cdot e^{-v^2 x}. \quad (13)$$

$$\text{где } \mu^2 = \frac{n^2}{1 + n^2}.$$

Обозначим индексами 1,2,3,...k температуру газа t за 1,2,3,...k рядом трубок. Предположим далее, что в каждом ряду расположено m трубок. Тогда температура газа за первым рядом трубок

$$t_1 = t_0 - \frac{Q_1}{c_{\text{пр}} G_{\text{г}}}, \quad (14)$$

где t_0 – начальная температура газа, Q_1 – количество теплоты, отданное газом (воспринятое воздухом) в первом ряду трубок, $G_{\text{г}}$ и $c_{\text{пр}}$ – суммарный расход газа и его теплоемкость (в качестве примера рассматривается теплообменник-регенератор газовой турбины). Количество теплоты Q_1 можно выразить через расход воздуха

$$Q_1 = c_{\text{рв}} G_{\text{в}} m (\vartheta_x - \vartheta_0). \quad (15)$$

Тогда

$$t_1 = t_0 - \frac{c_{\text{рв}} G_{\text{в}}}{c_{\text{пр}} G_{\text{г}}} m (\vartheta_x - \vartheta_0). \quad (16)$$

Имея в виду, что

$$\vartheta_x - \vartheta_0 = t_0 - \vartheta_0 - (t - \vartheta_0) \cdot e^{-v^2 x} = (t - \vartheta_0) z_x,$$

$$\text{где } z_x = (1 - e^{-v^2 x}),$$

уравнение (16) перепишем в виде

$$t_1 = t_0 - \zeta_x(t_0 - \vartheta_0) = t_0(1 - \zeta_x) + \zeta_x \vartheta_0, \quad (17)$$

где $\zeta_x = \frac{c_{pb} G_B}{c_{pr} G_r} m z_x$.

Соответственно

$$t_2 = t_1(1 - \zeta_x) + \zeta_x \vartheta_0 = t_0(1 - \zeta_x)^2 + \zeta_x(1 - \zeta_x)\vartheta_0 + \zeta_x \vartheta_0$$

$$t_k = t_{k-1}(1 - \zeta_x) + \zeta_x \vartheta_0 = t_0(1 - \zeta_x)^k + \zeta_x(1 - \zeta_x)^{k-1}\vartheta_0 + \zeta_x(1 - \zeta_x)^{k-2}\vartheta_0 + \zeta_x(1 - \zeta_x)\vartheta_0 + \zeta_x \vartheta_0$$

Это выражение можно переписать так

$$t_k = t_0(1 - \zeta_x)^k + \zeta_x \vartheta_0 [1 + (1 - \zeta_x) + (1 - \zeta_x)^2 + \dots + (1 - \zeta_x)^{k-1}]$$

или, используя выражение для суммы геометрической прогрессии

$$t_k = (t_0 - \vartheta_0)(1 - \zeta_x)^k + \vartheta_0. \quad (18)$$

Формула (18) определяет значение температуры газа за k -тым рядом трубок. По уравнению (13) находим температуру трубки k -го ряда и соответственно температуру расширения трубок этого ряда.

Список литературы: 1. Шнеэ Я.И., Капинос В.М., Котляр И.В. Газовые турбины, ч. 1. – Киев: Вища школа, 1976. – 195 с.

Поступила в редакцию 10.03.04

УДК 531; 534:57

Б.Я.КАНТОР, докт.техн.наук, ИПМаш НАН Украины;
Н.И.ЯБЛУЧАНСКИЙ, докт.мед.наук, ХНУ; **Е.Ю.МИСЮРА**, ХНУ

ИССЛЕДОВАНИЕ НДС ТОЛСТОСТЕННОЙ ГИПЕРУПРУГОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ С ОТНОСИТЕЛЬНО ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ (МОДЕЛЬ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА)

Поставлена геометрично та фізично нелінійна статична осесиметрична задача для дослідження напружено-деформованого стану гіперпружкого товстостінного еліпсоїда, до внутрішньої поверхні якого прикладено тиск (модель лівого шлуночка серця у діастолі). Модель містить в собі два відносно жорстких включення (основа серця та зона інфаркту). Задача вирішена за допомогою побудованого варіаційного принципу можливих переміщень у просторах, який використовується у кроковому алгоритмі метода скінчених елементів. Вивчені вплив виду та розмірів зони інфаркту на інтенсивність напруг, а також залежність кінцево-діастолічного об'єму лівого шлуночка від об'єму зони інфаркту. Установлено, що максимальні значення інтенсивності напруг виникають при ендокардіальному включенні та збільшуються при зростанні кута розхилу зони інфаркту; збільшення кута розхилу зони інфаркту зменшує кінцево-діастолічний об'єм, найменший об'єм – при ендокардіальному включенні.

The geometrically and physically nonlinear static axisymmetric problem for the investigation of the stress-

strain state of the hyper-elastic thick-wall ellipsoid loaded by the internal pressure (the model of a left ventricle heart in the diastole) was formulated. The model comprises two relatively hard inclusions (the base of the heart and the infarction zone). The problem was solved by developing the variational principle of possible displacements in the increments, which was used in the step-by-step algorithm of the finite element method. Influence of the kind and dimensions of the infarction zone on the stress intensity and also dependence of the end-diastolic volume of the left ventricle on the infarction zone volume was studied. It was determined that the maximum values of the stress intensity arises by the endocardial inclusion and increases with the angle of the infarction zone; increase of the angle of the infarction zone decreases the end-diastolic volume, the minimum volume arises by the endocardial inclusion.

Введение. В современной научной литературе актуальна проблема моделирования жизненно важной системы человеческого организма – сердечно-сосудистой. Изучение и исследование различных заболеваний сердца и его сосудов, с точки зрения механики деформируемого твердого тела, является одним из сравнительно новых направлений. В этом направлении ведутся теоретические и экспериментальные работы. С развитием компьютерной техники теоретические работы значительно приумножились. Особый интерес представляют исследования левого желудочка (ЛЖ) сердца, с патологией которого в основном связаны сердечно-сосудистые заболевания.

Особый интерес представляет изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) стенок ЛЖ и его функций, представляющих собой результат явлений, которые происходят в материале миокарда (мышце сердца), и определяющих его насосную функцию как органа. Особенно важно исследование НДС ЛЖ при инфаркте миокарда (ИМ). Именно это заболевание в последнее время возникает очень часто. Возможны следующие четыре вида ИМ, отличающиеся степенью проникновения его по толщине стенки ЛЖ: заболевания: эндокардиальный – пораженная зона (ПЗ) расположена около внутренней поверхности стенки ЛЖ, интрамуральный – находится внутри стенки, эпикардиальный – локализуется около внешней поверхности, трансмуральный – пронизывает всю толщину стенки. ИМ рассматривают в разных фазах сердечного цикла: в диастоле (пассивной фазе) или систоле (активной фазе); при различных стадиях заболевания: хронической (ПЗ рубцуется и приобретает жесткость большую, чем здоровая мышечная ткань) или острой (ПЗ не активна, но ее механические свойства такие же, как у здоровой ткани).

Настоящая статья посвящена численному анализу НДС ЛЖ сердца при хронической стадии ИМ в диастоле. Исследованиями в этой области занимаются как украинские, так и зарубежные ученые. Среди первых работ, описывающих математическую модель ЛЖ и закономерности распределения напряжений при ИМ, можно назвать монографию Кантора Б.Я. (докт.техн.наук), Яблучанского Н.И. (докт.мед.наук), Шляховеца В.Н. (докт.мед.наук) [1]. Авторами созданы математические модели, качественно воспроизводящие реальную биомеханику ЛЖ в физиологических условиях и патологических состояниях, а также сформулирована осесимметричная задача для модели ЛЖ, представленной усеченным толстостенным эллипсоидом (хроническая стадия, диастола, четыре вида ИМ). Задача решена в линейной постановке с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Изучены НДС и концентрация напряжений в стенке ЛЖ. В работе [2] аналогич-

ные исследования проведены для сферической модели ЛЖ. В работе [3] поставлена и решена физически и геометрически нелинейная задача с помощью построенного вариационного принципа возможных перемещений в приращениях, используемого в шаговом алгоритме МКЭ. Выведены формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора правой части системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Численно исследованы НДС ЛЖ сердца, интенсивность деформаций и напряжений, распределение перемещений и конечно-диастолический объем (КДО) ЛЖ.

Краткий обзор работ зарубежных авторов [4-8] приведен в статье [2]. В перечисленных работах рассматривался лишь трансмуральный ИМ.

Цель данной работы состоит в построении математической модели и численном исследовании осесимметричной физически и геометрически нелинейной задачи о влиянии относительно жестких включений в толстостенной эллипсоидальной модели ЛЖ сердца, первое из которых моделирует основание сердца, а второе – зону ИМ.

Постановка задачи. Построение модели ЛЖ сердца:

- 1) стенку ЛЖ аппроксимируем толстостенной эллипсоидальной оболочкой;
- 2) в стенке располагаем два относительно жестких включения: первое – основание сердца, второе – зона ИМ;
- 3) решаем геометрически и физически нелинейную осесимметричную задачу в цилиндрической системе координат;
- 4) материал стенки считаем кусочно-однородным, изотропным, почти несжимаемым, гиперупругим;
- 5) решаем квазистатическую задачу, так как силами инерции можно пренебречь по сравнению с упругими силами;
- 6) рассматриваем хроническую стадию ИМ в диастоле (к внутренней поверхности стенки ЛЖ прикладываем конечно-диастолическое давление).

Основные соотношения. Введем компоненты вектора перемещений в цилиндрической системе координат

$$[\mathbf{u}] = [u_r, u_z, u_\varphi]^T. \quad (1)$$

Здесь u_r, u_z, u_φ являются функциями от r, z .

Компоненты тензора деформаций в точке $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ в геометрически нелинейном случае находятся по следующей формуле:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{1}{2}(\bar{u}_{\cdot i} \cdot \bar{u}_{\cdot k}), \quad i, k=r, z, \varphi. \quad (2)$$

Здесь запятая обозначает ковариантное дифференцирование, черта сверху – вектор.

Для построения шагового метода решения задачи найдем приращение компонент тензора деформаций

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) + \frac{1}{2}(v_{\cdot i} u_{v,k} + u_{v,i} v_{\cdot k}), \quad i, k, v=r, z, \varphi, \quad (3)$$

где v_i – приращение компонент вектора перемещений. Так как соотношение (3) линейно относительно v_i , запишем его в матричной форме

$$[\mathbf{e}] = [\tilde{\mathbf{L}}][\mathbf{v}], \quad (4)$$

Вид операторной матрицы $[\tilde{\mathbf{L}}]$ дан в работе [3].

Для случая гиперупругого материала имеет место следующее тензорно-линейное соотношение между приращениями напряжений s^{ik} и деформаций e_{ik} :

$$s^{ik} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm} \quad (5)$$

или в матричной форме

$$[\mathbf{s}] = [\tilde{\mathbf{D}}][\mathbf{e}], \quad (6)$$

где компоненты тензора \tilde{D}^{iklm} равны вторым производным от потенциала $W = W(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{\varphi r})$ по компонентам тензора деформаций,

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}] &= [s_{rr}, s_{zz}, s_{\varphi\varphi}, s_{rz}, s_{z\varphi}, s_{\varphi r}]^T; \\ [\mathbf{e}] &= [e_{rr}, e_{zz}, e_{\varphi\varphi}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{\varphi r}]^T; \\ \gamma_{ik} &= 2e_{ik}, \quad i \neq k, \quad i, k = r, z, \varphi. \end{aligned}$$

Для решения данной задачи использован потенциал W [9] в форме:

$$W = \frac{C_0}{2\beta} (e^{\beta Q} - 1) + C_c (J \ln J - J + 1), \quad (7)$$

где

$$Q = C_1 \varepsilon_{rr}^2 + C_2 \varepsilon_{zz}^2 + C_3 \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + C_4 \gamma_{rz}^2 + C_5 \gamma_{z\varphi}^2 + C_6 \gamma_{r\varphi}^2,$$

$J = \lambda_r \lambda_z \lambda_\varphi$ – мера изменения объема при деформации, $\lambda_i = \sqrt{1 + \varepsilon_{ii}}$; $i = r, z, \varphi$; C_0, C_1, \dots, C_c – константы, принимающие различные значения для разных материалов, β – коэффициент, отражающий степень нелинейности потенциала.

Задано кинематическое условие – закрепление основания: $u_z = 0$ при $r = 0, z = c(a, +h)$; значения параметров будут приведены далее. Статические условия ($\sigma_n = 0, \sigma_\tau = 0$ – на внешней поверхности модели, $\sigma_n = -q, \sigma_\tau = 0$ – на внутренней) выполняются в силу вариационного принципа.

Вариационный принцип возможных перемещений в приращениях. Для построения метода решения исходим из вариационного принципа возможных перемещений в приращениях. Рассмотрим тело объемом V_0 до деформации, заполненное упругой сплошной средой, в некоторый момент времени t . Пусть накопленные к этому моменту за счет деформирования компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений есть $\sigma^{ik}, \varepsilon_{ik}, u_i$ соответственно, а их приращения за время Δt есть s^{ik}, e_{ik}, v_i . Выберем цилиндрическую систему координат и получим формулу для приращения деформации e_{ik} , вводя в соотношения Коши (2) вектор $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$ вместо $\bar{\mathbf{u}}$:

$$\varepsilon_{ik} + e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(u_k + v_k)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_m + v_m)}{\partial x_k}. \quad (8)$$

Записывая деформацию ε_{ik} для момента времени t (2) в виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \quad (9)$$

и вычитая (9) из (8), находим:

$$\begin{aligned} e_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_m}{\partial x_i} \left(\delta_{mi} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \left(\delta_{mk} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Слагаемое, стоящее в (10) в квадратных скобках, обозначим далее \tilde{e}_{ik} , так что

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k}. \quad (11)$$

Полная энергия состоит из суммы потенциальной энергии деформации U и работы A сил давления на перемещениях. Вариация полной энергии имеет вид

$$\delta(U + A) = 0. \quad (12)$$

Запишем формулу для U в момент времени t

$$\delta U_t = \int_{V_t} \sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV_t. \quad (13)$$

Здесь V_t – объем тела в момент времени t . В соответствии с физическим законом для гиперупругого тела, получим $\sigma^{ik} = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}$. Учитывая, что

$dV_t = J dV_0$ и сохраняя в (13) лишь квадратичные относительно v_k слагаемые, в момент времени $t + \Delta t$ имеем

$$\delta U_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \delta \int_{V_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \frac{\partial v_m}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} \tilde{e}_{ik} \tilde{e}_{lm} \right) dV_0,$$

где $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = J \sigma^{ik}$ – накопленные к моменту t известные функции координат, $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} = \tilde{D}^{iklm}$.

Заменяя индексы в векторе $[\varepsilon]$ на $1, \dots, 6$ и вводя новое обозначение для матрицы $[\tilde{D}]$, получим

$$\tilde{E}^{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}.$$

Здесь

$$\tilde{E}^{ik} = C_0 C_i (\delta_{ik} + 2C_k \varepsilon_i \varepsilon_k) e^{\beta Q} + C_c \mathcal{J} \lambda_i^{-2} (\lambda_k^{-2} + \ln \mathcal{J} (\lambda_k^{-2} - 2\lambda_i^{-2} \delta_{ik})),$$

$i, k = 1, \dots, 6$; δ_{ik} – символы Кронекера.

В изотропном материале $C_1 = C_2 = C_3$ (далее для этой константы используем обозначение C_1), $C_4 = C_5 = C_6$ (далее – C_2).

При $\epsilon_{ik} \rightarrow 0$ имеем $\lambda + 2\mu = C_0 C_1$; $\lambda = C_c$; $2\mu = C_2$, тогда $\mu = \frac{C_0 C_1 - C_c}{2}$.

Задавая таким образом коэффициенты C_0, C_1, C_2, C_c , можно получить модуль упругости $E(\lambda, \mu)$ и коэффициент Пуассона $\nu(\lambda, \mu)$ [10]

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Рассмотрим приращение вектора правой части СЛАУ. Пусть на части поверхности Σ тела задано внешнее давление q . Выпишем формулу для A в момент времени t

$$\delta A_t = \int_{\Sigma} q \left(\frac{\partial z}{\partial s} \delta v_r + \frac{\partial r}{\partial s} \delta v_z \right) ds$$

или

$$\delta A_t = 2\pi \int_{\Sigma} q \frac{dl}{ds} (\delta v_r \sin \alpha - \delta v_z \cos \alpha) r ds,$$

где s – локальная координата ($-1 \leq s \leq 1$) вдоль дуги внутреннего края КЭ, α – угол между касательной к меридиану внутренней поверхности ЛЖ и осью r . В момент времени $t + \Delta t$ работа A будет иметь вид

$$\delta A_{t+\Delta t} = \int_{\Sigma} (q_0 + \Delta q) \frac{d(l_0 + \Delta l)}{ds} (\sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) \delta v_r - \cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) \delta v_z) (r_0 + \Delta r) ds, \quad (14)$$

Здесь Δq – приращение давления за время Δt , $\sin(\alpha_0 + \Delta \alpha) \approx \sin \alpha_0 + \Delta \alpha \cos \alpha_0$, $\cos(\alpha_0 + \Delta \alpha) \approx \cos \alpha_0 - \Delta \alpha \sin \alpha_0$. Имея в виду, что $\left(\frac{dl_0}{ds} \right)_t = \sqrt{(r'_{0,s})^2 + (z'_{0,s})^2} \equiv l_t$, находим $\Delta l_t = \frac{d(\Delta l)}{ds} = \frac{r_{0,s} \Delta u_{r,s} + z_{0,s} \Delta u_{z,s}}{l_t}$. Так как $\alpha = \arctg(z_{,s} / r_{,s})$, то

$$\Delta \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{1}{(r_{,s})^2} (-z_{,s} \Delta u_{r,s} + r_{,s} \Delta u_{z,s}) = \frac{r_{,s} \Delta u_{z,s} - z_{,s} \Delta u_{r,s}}{l_t^2}.$$

Сохраняя в (14) слагаемые второго порядка относительно приращений и вариации перемещений, получим

$$\begin{aligned} \delta A_{t+\Delta t} = & \Delta q \int_{\Sigma} \frac{dl_0}{ds} r_0 (\delta v_r \sin \alpha_0 - \delta v_z \cos \alpha_0) ds + q_0 \int_{\Sigma} \left[\left(\sin \alpha_0 \left(r_0 \frac{d(\Delta l)}{ds} + \Delta r \frac{dl_0}{ds} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + r_0 \frac{dl_0}{ds} \Delta \alpha \cos \alpha_0 \right) \delta v_r + \left(r_0 \frac{dl_0}{ds} \Delta \alpha \sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \left(r_0 \frac{d(\Delta l)}{ds} + \Delta r \frac{dl_0}{ds} \right) \right) \delta v_z \right] ds. \quad (15) \end{aligned}$$

Так как приращения v_r, v_z неизвестны, то приравняем им значения, полученные на предыдущем шаге процесса.

Применение метода конечных элементов. Для решения задачи используем МКЭ. Модель ЛЖ разобьем на конечное число связанных в узловых

точках восьмиузловых конечных элементов (КЭ). В КЭ введем систему локальных координат $-1 \leq \zeta_1 \leq 1$, $-1 \leq \zeta_2 \leq 1$.

Вектор узловых перемещений элемента будет иметь вид

$$[\tilde{\mathbf{u}}] = [u_{r1}, u_{z1}, u_{\varphi1}, \dots, u_{r8}, u_{z8}, u_{\varphi8}]^T. \quad (16)$$

Тогда выражение для вектора перемещений произвольной точки КЭ будет

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{N}][\tilde{\mathbf{u}}]. \quad (17)$$

Здесь $[\mathbf{N}]$ – матрица функций формы:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Функции формы N_i удовлетворяют условиям $N_i(x_i, y_i) = 1$, $N_i(x_j, y_j) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, 8$.

Для данного восьмиузлового КЭ

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\zeta_1)(1+\zeta_2)(\zeta_2-\zeta_1-1)}{4}; & N_2 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1-\zeta_1)}{2}; \\ N_3 &= \frac{(\zeta_1-1)(1-\zeta_2)(\zeta_1+\zeta_2+1)}{4}; & N_4 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1-\zeta_2)}{2}; \\ N_5 &= \frac{(1+\zeta_1)(1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_2-1)}{4}; & N_6 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1+\zeta_1)}{2}; \\ N_7 &= \frac{(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(\zeta_1+\zeta_2-1)}{4}; & N_8 &= \frac{(1-\zeta_1^2)(1+\zeta_2)}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выражение для производных функций формы по глобальным координатам (r, z) через производные по локальным координатам (ζ_1, ζ_2) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} N_i &= a_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} N_i + b_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} N_i; \\ \frac{\partial}{\partial z} N_i &= c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} N_i + d_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} N_i, \quad k=1, \dots, 8, \end{aligned}$$

где

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} \\ r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

$$\Delta \equiv \det(I) = ad - cb; \quad [\mathbf{I}]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}.$$

Введем соотношения для приращений компонент вектора перемещений и тензора приращений деформаций для одного КЭ в матричной форме

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{N}][\tilde{\mathbf{v}}]; \quad (20)$$

$$[\mathbf{e}] = [\tilde{\mathbf{L}}][\mathbf{N}][\tilde{\mathbf{v}}]. \quad (21)$$

Здесь $[\tilde{\mathbf{v}}]$ – вектор приращений узловых перемещений.

Подставляя приведенные выше формулы в уравнение (12), получим

$$[\delta\tilde{\mathbf{v}}]^T \left\{ \int_V [\mathbf{N}]^T [\tilde{\mathbf{L}}]^T [\tilde{\mathbf{E}}]([\tilde{\mathbf{L}}]\mathbf{N}) + [\mathbf{L}_g]^T [\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{L}_g] dV \right\} [\tilde{\mathbf{v}}] - [\delta\tilde{\mathbf{v}}]^T [\mathbf{Q}] = 0, \quad (22)$$

где $[\mathbf{Q}]$ – матричное представление (15), $[\mathbf{L}_g]$ – матрица (8x3) производных по координатам функций формы.

Так как $\frac{1}{2}\sigma_t^{ik}(\tilde{v}_{,i}\tilde{v}_{,k}) = \frac{1}{2}\sigma_t^{ik}(v_{1,i}v_{1,k} + v_{2,i}v_{2,k} + v_{3,i}v_{3,k})$, то в декартовой системе координат это дает матрицу (3-8)(3-8) для восьмиузлового КЭ. Клетка с номером (m,n) ($m,n = 1,\dots,8$) размером (3x3) имеет вид

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix},$$

где $a = \sigma_t^{ik} f_{m,i} f_{n,k}$ (f_v - функции формы). В цилиндрической системе координат в осесимметричной задаче клетка имеет вид

$$\begin{bmatrix} a+b & 0 & c_1 \\ 0 & a & d_1 \\ c_2 & d_2 & 0 \end{bmatrix},$$

где $a = \sigma_t^{ik} N_{m,i} N_{n,i}$, $i, k=1,2$,

$$b = \sigma_t^{33} N_{m,3} N_{n,3}; \quad \left(N_{m,3} = \frac{N_m}{r} \right)$$

$$c_1 = \sigma_t^{13} N_{m,1} N_{n,3}; \quad c_2 = \sigma_t^{31} N_{m,3} N_{n,1};$$

$$d_1 = \sigma_t^{23} N_{m,2} N_{n,3}; \quad d_2 = \sigma_t^{32} N_{m,3} N_{n,2}.$$

Суммируя соотношения (22) по всем КЭ, приравнявая нулю множители при вариациях компонент вектора узловых значений перемещений $[\tilde{\mathbf{v}}]$, приходим к СЛАУ

$$([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g])[\tilde{\mathbf{v}}] = [\mathbf{Q}]. \quad (23)$$

Здесь $[\mathbf{K}_e]$ и $[\mathbf{K}_g]$ – матрицы жесткости и геометрической жесткости, равные интегралам от первого и второго слагаемых в (22). Первая из них отвечает геометрически линейной задаче, вторая учитывает геометрическую нелинейность.

Введем обозначение $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]$, тогда из (23) следует разрешающая СЛАУ для одного шага по нагрузке

$$[\mathbf{K}][\tilde{\mathbf{v}}] = [\mathbf{Q}]. \quad (24)$$

Кинематические граничные условия вводим в систему (24) путем замены диагональных компонент матрицы $[\mathbf{K}]$, отвечающим равными нулю компо-

нентам вектора перемещений значений существенно больших, чем другие компоненты матрицы.

Геометрия модели и исходные данные. Геометрия модели ЛЖ сердца определяется следующими параметрами: a_v – меньшая полуось внутренней поверхности, b_v – большая полуось. Они связаны следующим образом: задается a_v и отношение $c_v = b_v/a_v$, а затем вычисляется $b_v = a_v c_v$. Далее задаем толщину эллипсоида h при $z = 0$. По толщине определяем полуоси внешней поверхности: малую $a_n = a_v + h$ и большую $b_n = a_n c_v$. В расчетах принято: $a_v = 2,243$ см [1]; $c_v = 1,27$ [11]; $h = 1$ см. Эти данные являются усредненными параметрами реального ЛЖ человека.

Внутри толстостенной эллипсоидальной оболочки расположены два относительно жестких включения. Одно из включений моделирует основание сердца, в котором размещены его клапаны, второе – ПЗ, расположенную в вершине. Оба включения моделируются участками стенки с повышенной жесткостью. Второе включение в первом случае моделирует трансмуральный ИМ, а во втором – эндокардиальный (трансмуральная ПЗ занимает всю толщину стенки ЛЖ, эндокардиальная – половину толщины стенки). Для трех зон оболочки заданы разные коэффициенты жесткости: первая (основание) – 8, вторая (здоровая мышечная ткань) – 1, третья (ПЗ) – 5–7 [8] (эти значения взяты из экспериментальных данных, известных в кардиологии). Коэффициент жесткости для ПЗ обозначим через c . Для того, чтобы в местах соединения включений и здоровой части оболочки не возникало разрыва напряжений из-за большой разницы в коэффициентах жесткости, было введено смягченное изменение жесткостей. Кроме того, в этих переходных зонах задано сгущение сетки КЭ (рис. 1).

К внутренней поверхности прикладываем давление $q = 0,667$ кПа, которое соответствует измеренному значению конечно-диастолического давления, равному 5 мм рт. ст. В расчетах введена сетка: по толщине – 10 КЭ, по дуге меридиана – 27. Угол раствора включения задавался в диапазоне 45–60°, угол раствора основания принят равным 30°. Модуль упругости $E = 5,15$ кПа (при малых (инфинитезимальных) деформациях); $\beta = 0,25$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$. Численное интегрирование проведено с помощью трехузловой формулы Гаусса.

Результаты численного анализа. Все расчеты производились на персональном компьютере с помощью разработанной авторами программы.

На рис. 1, а приведена сетка КЭ, в переходных зонах которой (основание – основная часть и основная часть – ПЗ) задано сгущение. Черным цветом показаны основание (в верхней части рисунка) и включение (внизу), серым – основная часть. На рис. 1, б показаны начальное (серый цвет) и конечное (черный цвет) деформированное состояния.

Начальный внутрисердечный объем у здорового сердца (модель ЛЖ без ПЗ) равен 60 мл, КДО – 120 мл, максимальное значение интенсивности на-

пряжений – 4.57 кПа (см. рис. 2).

В приведенных далее таблицах значения над и под косой чертой отвечают углам раствора включений 45 и 60°, соответственно. На рис. 3 приведено распределение интенсивности напряжений для эндокардиального и трансмурального включений.

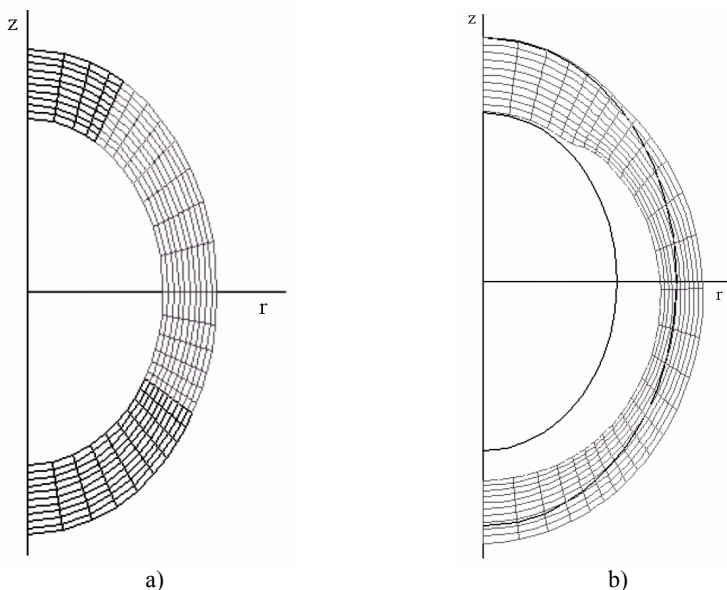


Рисунок 1 – Сетка КЭ модели ЛЖ (а); начальное и деформированное состояния модели (б).

Таблица 1 – Зависимость КДО от вида, угла раствора и коэффициента жесткости с ПЗ

Вид ИМ	КДО ЛЖ	
	$c = 5$	$c = 7$
Трансмуральный ИМ	110.42 / 103.14	110.83 / 104.05
Эндокардиальный ИМ	109.49 / 101.64	109.88 / 102.47

Таблица 2 – Зависимость максимального значения интенсивности напряжений от вида, угла раствора и коэффициента жесткости с ПЗ

Вид ИМ	Максимальное значение интенсивности напряжений	
	$c=5$	$c=7$
Трансмуральный ИМ	4.58 / 4.62	4.59 / 4.79
Эндокардиальный ИМ	4.67 / 4.79	4.83 / 5.12

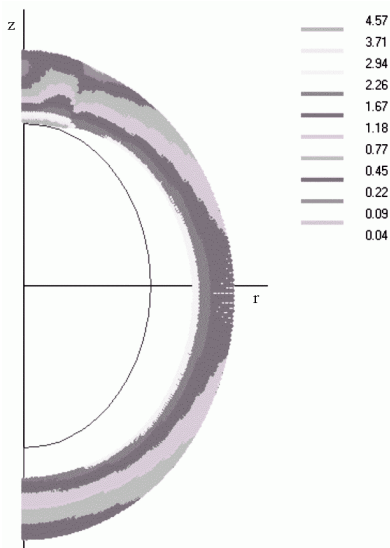
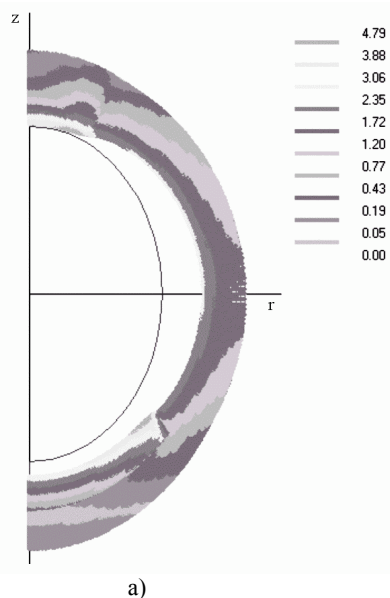
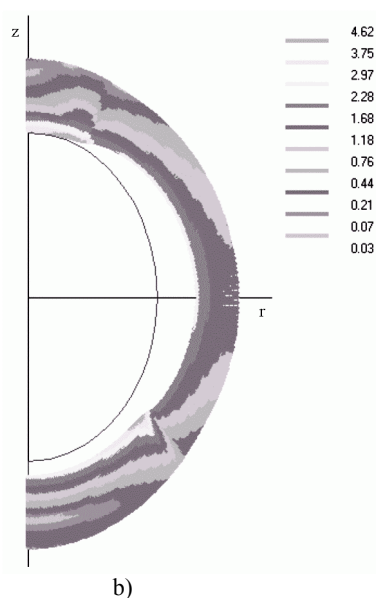


Рисунок 2 – Распределение интенсивности напряжений в ЛЖ здорового сердца

Как видно из приведенных выше данных увеличение угла раствора ПЗ от 45° до 60° уменьшает КДО на 5.7-6.6% при эндокардиальном ИМ и на 6.7-7.2% при трансмуральном; наибольшие максимальные значения интенсивности напряжений возникают при эндокардиальном ИМ около соединения основной части и включения и увеличиваются при росте угла раствора ПЗ. Полученные результаты адекватны данным кардиологии.



a)



b)

Рисунок 3 – Распределение интенсивности напряжений при эндокардиальном (a) и трансмуральном ИМ (b) при угле раствора ПЗ 60° и $c = 5$

Список литературы: 1. Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И. и др. Нелинейная кардиобиомеханика

левого желудочка. – К., 1991. – 212 с. 2. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Напряженно-деформированное состояние модели левого желудочка сердца при инфаркте миокарда // Пробл. машиностроения. – 2002. – № 4, т. 5. – С. 92-101. 3. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца // Медицина и ... – 2004. – № 1(10). – С. 23-31. 4. Lowe T.E., Love E.R. Cardiac aneurysms: a mechanical analysis of their deformation // J. Exp. Biol. Med. Sci. – 1948. – Vol. 26. – P. 497-513. 5. Mirsky I., McGill R.F., et. al. Mechanical behavior of ventricular aneurysms // Bull. Math. Biophys. – 1978. – Vol. 40. – P. 451-464. 6. Radhakrishnan S., Ghista D. N., et. al. Mechanical analysis of development of left ventricular aneurysms // J. Biomech. – 1980. – № 13. – P. 1031-1039. 7. Janz R. F, Waldron R.J. Predicted effect of chronic apical aneurysms on the passive stiffness of the human left ventricle // Circ. Res. – 1978. – Vol. 42. – P. 255-263. 8. Taber L.A., Podszus W. W. A laminated shell model for the infarcted left ventricle // Int. J.Solid and Structures. – 1997. – Vol. 34. № 2. – P. 223-241. 9. Usyk T.P., Mazhari R., et. al. Effect of laminar orthotropic myofiber architecture on regional stress and strain in the canine left ventricle // In: Cowin S.C., Humphrey J.D., eds. Cardiovascular Soft Tissue Mechanics, Dordrecht / Boston / London: Kluwer academic publishers. – 2001. – P. 143-164. 10. Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости / Под ред. Э.И. Григолюка. – М., 1961. – 219 с. 11. Кантор Б.Я., Яблучанский Н.И. и др. Неинвазивная диагностика нарушений биомеханики левого сердца. – К., 1992. – 219 с.

Поступила в редколлегию 29.04.04

УДК 539.3

Г.И.ЛЬВОВ, докт.техн.наук; **В.И.ТАРАНЮК**, НТУ «ХПИ».

АНАЛИЗ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В АВТОФРЕТИРОВАННОМ ТОЛСТОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ ПОСЛЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ.

У даній роботі розглядається визначення залишкових напружень в автофретованому товстостінному циліндрі після механічної обробки. Приводиться аналітична постановка задачі. Чисельна реалізація проводиться в скінчено-елементному програмному комплексі ANSYS.

The paper discusses the common statement of problems of determination of residual stresses after autofrettage of a thick-walled cylinder and additional machining. Analytical statement of the given problem is resulted. Numerical realization is carried out in finite-element program complex ANSYS.

Остаточные напряжения могут возникать в твердых телах в результате различных физических процессов, связанных с изготовлением и обработкой изделий. Проблемам исследования остаточных напряжений уделяется значительное внимание [1-4].

Предметом исследования в рамках настоящей работы являются процессы предварительного упруго-пластического деформирования твердых тел с целью получения таких полей остаточных напряжений, которые позволяют снизить максимальные напряжения в условиях эксплуатации.

Для получения необходимого уровня остаточных напряжений, детали в процессе автофретирования подвергают пластическому деформированию, которому соответствуют значительные необратимые деформации. Это приводит к тому, что

размеры заготовок существенно меняются, и возникает необходимость последующей механической обработки изделия для достижения заданной точности.

Удаление части материала при механической обработке после автофретирования вызывает перераспределение остаточных напряжений. Математическое моделирование всех стадий таких процессов автофретирования и механической обработки требует постановки специальных задач упруго-пластического деформирования для тел с изменяющимися границами.

1. Постановка задачи автофретирования

Рассмотрим в геометрически линейной постановке задачу нахождения остаточных напряжений возникающих в результате упруго-пластического деформирования и разгрузки твердого тела.

Представим в системе криволинейных координат x_i ($i = 1, 2, 3$) тело, занимающее в исходном состоянии объем V с границей $S = S_u \cup S_p$, где S_u – часть поверхности, на которой заданы перемещения, S_p – часть поверхности с заданными внешними нагрузками. Нагружение тела и разгрузка при автофретировании рассматриваются как единый процесс во времени. Программа изменения внешних сил при автофретировании разбивается на ряд бесконечно малых приращений поверхностных dP_i и объемных dX_i .

Приращения внутренних напряжений $d\sigma_{ij}$, деформаций $d\epsilon_{ij}$ и перемещений dU_i на каждом этапе времени dt должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \nabla_i d\sigma_{ij} + dX_j &= 0 \\ d\epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i dU_j + \nabla_j dU_i) \quad x \in V \\ d\epsilon_{ij} &= (C_{ijkl}^e + C_{ijkl}^p) d\sigma_{kl} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ∇_i - символ ковариантного дифференцирования в выбранной системе координат, C_{ijkl}^e - тензор упругих постоянных, C_{ijkl}^p - тензор пластической податливости, значения которого определяются на каждом этапе времени выбранной теорией пластичности.

Процессы деформирования при автофретировании являются весьма сложными. Возможны перемены знака напряжений и появление вторичных пластических деформаций.

Физические соотношения должны адекватно отражать количественные характеристики и качественные особенности процесса развития пластических деформаций, в частности, направленный характер упрочнения и эффект Баушингера. Этим требованиям удовлетворяет теория пластичности с трансляционным упрочнением [5-7]. Уравнение поверхности пластичности принято в виде:

$$f \equiv \frac{3}{2} (s_{ij} - ce_{ij}^p)(s_{ij} - ce_{ij}^p) - \sigma_T^2 = 0, \quad (1.2)$$

где s_{ij} – девиатор напряжений, e_{ij}^p – тензор пластических деформаций, C , σ_T – механические характеристики материала.

Тензор пластической податливости для выбранного варианта теории пластичности имеет вид при активном нагружении: $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$:

$$C_{ijkl} = \frac{(s_{kl} - ce_{kl}^p)}{c(s_{mn} - ce_{mn}^p)(s_{mn} - ce_{mn}^p)} (s_{ij} - ce_{ij}^p). \quad (1.3)$$

Пластические деформации не возникают при нейтральном нагружении и разгрузке

$$C_{ijkl}^p = 0; \quad \begin{cases} f < 0; \\ f = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Граничные условия определяются схемами закрепления и нагружения изделия в процессе автофретирования.

В результате численного анализа процесса нагружения и снятия внешней нагрузки можно получить распределение остаточных напряжений, сохраняющихся в теле после процесса автофретирования.

2. Изменение остаточных напряжений при механической обработке.

Построим математическую модель перераспределения остаточных напряжений после удаления части объема при механической обработке после автофретирования.

Удаление части объема детали в реальных технологических процессах происходит малыми порциями, что позволяет рассматривать этот процесс как непрерывный. Для многих видов механической обработки (резанье, шлифование) можно пренебречь на макро уровне дополнительными остаточными напряжениями, которые могут возникать при механической обработке.

Это позволяет считать, что единственной причиной изменения остаточных напряжений является удаление части объема, находящегося в напряженном состоянии. Пусть на интервале времени dt процесса механической обработки из тела удаляется малый объем dV , который имеет общую граничную поверхность dS^* с основным объемом тела.

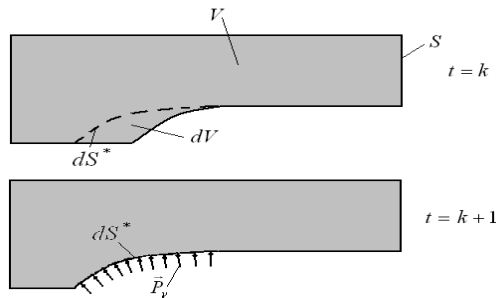


Рисунок 1 – Схема процесса удаления материала

На поверхности dS^* до удаления элементарного объема действуют внутренние остаточные напряжения σ_{ij}^k . В результате удаления объема dV в остающемся объеме $V - dV$ возникает добавочное поле напряжений σ_{ij}^* . Это поле находится в результате решения краевой задачи для уравнений (1.1) для объема $V - dV$ с нагрузкой на части поверхности dS^* . Вектор этой нагрузки

$$dP_{is} = -\sigma_{ij}^k n_j; \quad x \in dS^* \quad (2.1)$$

противоположен по направлению к внутреннему напряжению на поверхности dS^* .

В результате удаления элементарного объема dV остаточные напряжения изменяются на величину $d\sigma_{ij}^*$

$$\sigma_{ij}^{(k+1)} = \sigma_{ij}^k + d\sigma_{ij}^*. \quad (2.2)$$

Здесь $\sigma_{ij}^k, \sigma_{ij}^{k+1}$ остаточные напряжения в начале и в конце интервала времени dt , на котором удаляется объем dV .

3. Численные результаты.

В качестве примера использования предложенного метода рассматривается процесс автофреттирования с последующей механической обработкой толстостенного цилиндра переменной толщины представленного на рис. 2.

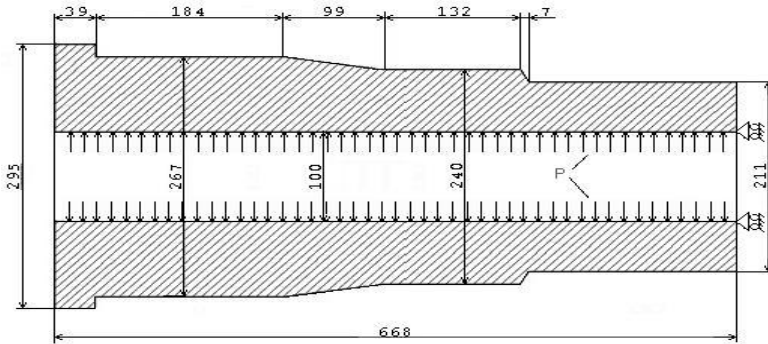


Рисунок 2 – Модель толстостенного цилиндра

Расчет производится в конечно-элементном программном комплексе ANSYS. На рис. 3 изображена конечно-элементная модель толстостенного цилиндра включающая в себя 10710 элементов PLANE 42, жирными линиями показаны три сечения с координатами $y_1 = 552$ мм, $y_2 = 396$ мм и $y_3 = 136$ мм для которых в дальнейшем приводятся результаты расчета и строятся графики.

Технологический процесс автофреттирования производится внутренним

гидравлическим давлением по всей поверхности трубы за исключением крайних кольцевых поверхностей шириной 0,004 м. После автофретирования производится механическая обработка внутренней поверхности, заключающаяся в увеличении внутреннего радиуса цилиндра на 10 мм.

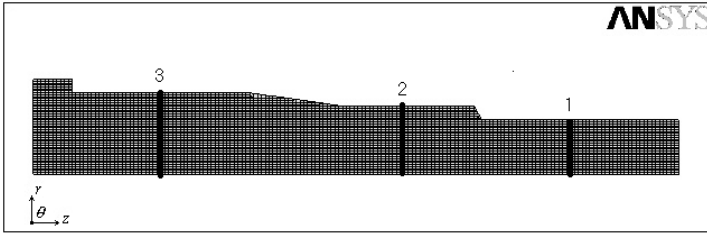


Рисунок 3 – Конечно-элементная модель с тремя контрольными сечениями

Для выполнения численных расчетов были приняты следующие характеристики материала цилиндра: модуль упругости $E = 0,21 \cdot 10^6$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,29$; предел текучести $\sigma_T = 1200$ МПа; предел прочности $\sigma_B = 1500$ МПа. Диаграмма деформирования $\sigma(\varepsilon)$ аппроксимируется двумя линейными участками и учитывается идеальный эффект Баушингера.

Автофретирование производится давлением $P = 1000$ Мпа. При этом давлении область пластических деформаций развивается на 60 % толщины стенки цилиндра для 1-го, 40 % для 2-го и 20 % для 3-го сечений, это можно видеть на рис. 4 из графика распределения окружных напряжений – σ_θ^L . Перелом графика σ_θ^L в точке перехода зоны пластических деформаций в упругие связан с описанием различными функциями упругого и пластического деформирования материала.

Следующим шагом расчета после нагружения является разгрузка, которая заключалась в снятии всех внешних нагрузок. В результате разгрузки в цилиндре образовались остаточные напряжения, возникающие из-за того, что деформирование при нагружении и разгрузке идет по различным законам. На рис. 4 σ_r^{UL} , σ_θ^{UL} – графики распределения радиальных и окружных напряжений после разгрузки для 1-го сечения. Максимум окружных напряжений достигается на внутренней поверхности цилиндра при этом на участке с наименьшей толщиной (1-е сечение) величина радиальных и окружных напряжений самая высокая и составляет $\sigma_r^{UL} = -133$ Мпа, $\sigma_\theta^{UL} = -941$ Мпа. На участке с наибольшей толщиной (3-е сечение) напряжения минимальные $\sigma_r^{UL} = -103$ Мпа и $\sigma_\theta^{UL} = -784$ Мпа.

На последнем этапе расчета было получено распределение остаточных напряжений после расточки автофретированного толстостенного цилиндра.

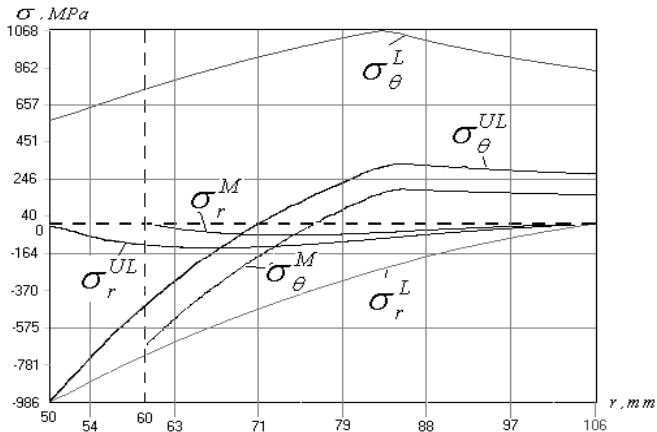


Рисунок 4 – Распределение напряжений в 1-м радиальном сечении

Проанализировав результаты можно сделать вывод о том, что деформации, возникающие в модели после расточки, направлены на восстановление ее прежней конфигурации, это связано с тем, что радиальные напряжения, возникающие при обработке, являются растягивающими, т.е. противоположно направленными к тем, которые имеются в модели. Максимальные значения напряжений достигаются, также как и после автофреттирования, на участке с наименьшей толщиной и составляют: радиальные $\sigma_r^M = -63$ Мпа, окружные $\sigma_\theta^M = -614$ Мпа, что на 52,5 % и 35 % меньше, чем до обработки.

Список литературы: 1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. – М.: Машгиз, 1963. – 231 с. 2. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. – М.: Машгиз, 1958. 3. M. Perl, R. Arony. An Axisymmetric Stress Release Method for Evaluating Autofrettage Level in Thick-Walled Cylinders, Part I -Basic Concept and Numerical Simulation // Trans. of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, 116 (4), 1994. – P. 384-388. 4. H. Jahed, R.N. Dubey. An Axisymmetric Method of Elastic-Plastic Analysis Capable of Predicting Residual Stress Field // Trans. of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, 119, 1997. – P. 264-273. 5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с. 6. A.P.Parker, J.H.Underwood, D.P.Kendall Bauschinger Effect Design Procedures for Autofrettaged Tubes Including Material Removal and Sachs' Method // Trans. of the ASME, J. of Pressure Vessel Technology, 121, 1999. – P. 430-437. 7. Jiang W. The elastic-plastic analysis of tubes. 1. General theory. 2. Variable loading. 3. Shakedown analysis. 4. Thermal ratchetting. // Trans. ASME. J. Pressure Vessel tecnol. – 1992. – 114. № 2. – P. 213-245.

Поступила в редколлегию 05.06.04

О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ, докт.техн.наук; **О.О.ЗАМУЛА**; НТУ «ХПІ»

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПОВЗУЧОСТІ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ

В роботі надано метод щодо розв'язання початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання, що побудовані на базі методу скінченних елементів (МСЕ) та рівнянь стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Розглянуто оболонки з деформацією поперечного зсуву та геометричною нелінійністю при скінченних нормальних переміщеннях. Надані вихідні рівняння та схеми їхньої лінеаризації. Розглянуто приклад, за яким встановлено збіжні властивості методу.

In article the method of the solution of the initial-boundary value problems of the creep theory of shells of revolution is given, which one are constructed on the basis of finite element method (FEM) and equations of state with allowance creep-damage process. The shells with deformation of transversal shift and geometrical nonlinearity are reviewed at final normal displacements. The input equations and schemes of their linearization are given. An example, in which one the properties of convergence of a method are established, is reviewed.

Актуальність теми. Методи розв'язування задач повзучості оболонок добре відомі з літератури, наприклад [1-3]. Разом з цим, за аналізом публікацій можна зробити висновок, що залишаються нез'ясованими такі питання, як врахування деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійності в оболонках при повзучості, які пошкоджуються внаслідок повзучості. Ці питання є актуальними в механіці оболонок. В роботі запропоновано підхід щодо побудови визначальних рівнянь повзучості оболонок обертання з урахуванням пошкоджуваності матеріалу, деформації поперечного зсуву та геометричної нелінійності. Для даних рівнянь, побудованих із використанням МСЕ, надані схеми щодо їхньої лінеаризації та метод для розв'язування.

Постановка проблеми. Розглянемо довільну оболонку обертання, товщиною h , яку апроксимуємо конічними оболонками, що з'єднані вздовж твірної, яка утворює серединну поверхню оболонки. Елемент оболонки показано на рис.1.

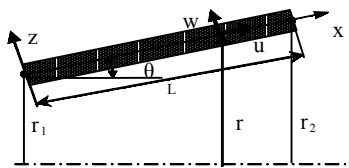


Рисунок 1 – Елемент оболонки обертання

Використовуючи загальновідомі, наприклад [4], означення для переміщень та деформацій серединної поверхні елемента оболонки, запишемо геометрично нелінійні рівняння оболонки, що згинається, у наступному вигляді:

$$\varepsilon_{11} = \Omega_{11} + z\chi_{11}; \quad \varepsilon_{22} = \Omega_{22} + z\chi_{22}; \quad \varepsilon_{13} = 2\Omega_{13} \quad (1)$$

де

$$\Omega_{11} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad \Omega_{22} = \frac{1}{r} (u \sin \theta + w \cos \theta), \quad 2\Omega_{13} = \gamma_1 + \frac{dw}{dx},$$

$$\chi_{11} = \frac{d\gamma_1}{dx}, \quad \chi_{22} = \frac{1}{r} \left[\gamma_1 \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} (u \sin \theta + w \cos \theta) \right].$$

Рівновага елемента оболонки в довільний час відбувається за умов мінімуму повної потенційної енергії за відомих для цього часу деформацій повзучості [1-3]. За цих умов невідомі переміщення серединної поверхні оболонки, що знаходиться під дією об'ємних та поверхневих сил, можна відшукати як точку стаціонарності варіаційного функціоналу типу Лагранжа:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_L^T D \varepsilon_L + \tilde{\varepsilon}^T D \tilde{\varepsilon} + c^T D c) dV + \int_V (\tilde{\varepsilon}^T D \varepsilon_L - \varepsilon_L^T D c - \tilde{\varepsilon} D c) dV - \int_V u^T g dV - \int_S u^T p dS. \quad (2)$$

В (2) враховано, що згинання оболонки відбувається при скінченних нормальних прогинах її серединної поверхні та у векторі повної деформації $\varepsilon = e + c$ відокремлено лінійну та нелінійну складові:

$$\varepsilon_L^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{13}\}, \quad \tilde{\varepsilon}^T = \left\{ \frac{1}{2} (w')^2 \quad 0 \quad 0 \right\}, \quad (3)$$

де $u^T = \{u, w, \psi = \gamma_1\}$ – вектори переміщень в серединній поверхні, що пов'язані з ε^T співвідношеннями (1);

$c^T = \{c_{11}, c_{22}, c_{13}\}$ – вектор деформацій повзучості;

g, p – вектори зовнішніх об'ємних та поверхневих сил.

Вектор напруження в оболонці σ визначено за законом Гука: $\sigma = D\varepsilon$, де D – матриця пружної жорсткості матеріалу, а $\varepsilon = \varepsilon_L + \tilde{\varepsilon} - c$ – вектор повної деформації. Рівняння стану матеріалу оболонки при повзучості з пошкоджуваністю прийнято у вигляді:

$$\dot{c}_{11}(\sigma_e, \omega) = \frac{B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \left(\sigma_{11} - \frac{1}{2} \sigma_{22} \right), \quad (1 \leftrightarrow 2);$$

$$2\dot{c}_{13}(\sigma_e, \omega) = \frac{3B\sigma_i^{n-1}}{(1-\omega^r)^m} \sigma_{13}, \quad (4)$$

$$\dot{\omega}(\sigma_e, \omega) = \frac{D(\alpha \times \max\{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}\} + (1-\alpha)\sigma_i)^k}{(1-\omega^r)^p}; \quad \omega(0) = 0; \quad \omega(t^*) = \omega^*,$$

де c_{ij}, σ_{ij} , компоненти тензорів деформацій повзучості та напружень;

$\sigma_e, \sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ – еквівалентні за Мізесом та головні напруження;

ω, t^* – параметр пошкоджуваності та час до руйнування.

Різні матеріали оболонки можна конкретизувати прийняттям значень для матеріальних сталей $D, B, n, r, m, l, k, \alpha$ щодо повзучості, та зазвичай, E, ν – модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона – пружності.

Дискретизація оболонки здійснюється спочатку шляхом її поділу на по-

слідовність елементів - конічних оболонок, а рівності (1) для кожного з цих елементів були перетворені за схемою методу скінченних елементів [4]. В локальній системі координат для елемента в його крайніх вузлах прийнято незалежними по шість наступних узагальнених координат q_i :

$$q_1^T = \{q_1, q_2, \dots, q_6\} = \{u(0), u'(0), w(0), w'(0), \psi(0), \psi'(0)\},$$

$$q_2^T = \{q_7, q_8, \dots, q_{12}\} = \{u(L), u'(L), w(L), w'(L), \psi(L), \psi'(L)\}.$$

Для переміщень u , w та функції зсуву ψ приймемо наступні поліноміальні апроксимації:

$$u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3; \quad w = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3; \quad \psi = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3.$$

Коефіцієнти для цих апроксимацій виразимо через прийняті узагальнені координати q_i , так що в (2) використовуватимемо наступні вирази для переміщень точок серединної поверхні оболонки та функції зсуву:

$$u = \sum_{i=1,2,7,8} q_i N_i, \quad w = \sum_{i=3,4,9,10} q_i N_i, \quad \psi = \sum_{i=5,6,11,12} q_i N_i. \quad (5)$$

де $N_i(\xi)$, $\xi \in (-1; 1)$ – функції форми:

$$N_1 = (1 - \xi)^2 (2 + \xi) / 4, \quad N_2 = (\xi - 1)(\xi^2 - 1) / 4,$$

$$N_3 = (1 + \xi)^2 (2 - \xi) / 4, \quad N_4 = \frac{1}{4}(\xi - 1)(\xi + 1)^2 / 4.$$

Виконавши перетворення в (2), шляхом підстановки туди виразів (3), (5) з урахуванням співвідношень (1), отримусемо варіацію за узагальненими незалежними координатами цього функціонала для оболонки в цілому. З умови рівності нулю варіації функціоналу (2) одержимо визначальне рівняння МСЕ відносно глобальних координат, яке буде нелінійним відносно вектора q , складеного з узагальнених координат в точках твірної оболонки, де елементи з'єднані. Представимо запис цього рівняння у вигляді неявної функції від координат вектора q :

$$\varphi(q, c) = 0. \quad (6)$$

Для розв'язування (6) застосуємо ітераційний алгоритм методу Ньютон-Канторовича [6]:

$$q^{(i+1)} = q^{(i)} + \Delta q, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi(q^{(i)}, c)}{\partial q} \Delta q = -\varphi(q^{(i)}, c). \quad (8)$$

Рівняння (8) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно прирощення вектора q^i на наступній $(i+1)$ ітерації. Для фіксованого моменту часу, з відомим вектором деформації повзучості – c , цей процес закінчується при виконанні умови збіжності: $\max \|\Delta q / q^{(i)}\| \leq \varepsilon$. Для початкового наближення приймається $q^0 = 0$. Вихідні рівняння виду (8) зводяться до наступного вигляду:

$$(K + \tilde{K}) \Delta q = P - \tilde{P} + P_c, \quad (9)$$

де K , $\tilde{K}(q^{(i)}, c)$ – глобальна матриця жорсткості оболонки, яка співпадає з тією, що має місце при геометрично лінійному деформуванні оболонки, та змінна матриця жорсткості, відповідно до геометричної нелінійності;

P – вектор зведених до вузлів узагальнених сил, що діють на оболонку;
 $\tilde{P}(q^{(i)}, c)$, P_c – вектори фіктивних сил, зведених до вузлів, що пов’язані з геометричною нелінійністю та повзучістю.

До цих рівнянь додається система кінетичних за часом рівнянь стану (3) та крайові умови кріплення оболонки. Для розгляду процесу повзучості у запропонованому методі використано схему покрокового подовження у часі за параметром вектора деформацій повзучості, за допомогою чисельного інтегрування рівнянь стану на кроці методом Рунге-Кути-Мерсона [2,3,5].

Приклад. Розглянемо згинання круглої пластини, розрахункову схему якої надано на рис. 2. Як і в роботі [5], значення геометричних та механічних параметрів приймемо наступними: $R = 10$ см; $h = 0,1$ см; $r_0 = 2$ см; $E = 200$ ГПа; $\nu = 0,3$.

За результатами розв’язування задачі про геометрично нелінійне згинання пластини в умовах пружного деформування вивчалася властивість зі збіжності методу за кількістю ітерацій N при різних рівнях тиску. Ці дослідження встановлюють важливу якісну характеристику зі збіжності запропонованого в статті методу, бо на кожному кроці у часі при повзучості задача зводиться за рахунок фіктивних сил від деформацій повзучості до аналогічної з тією різницею, що навантаження пластини набуває загального виду. Порівняння розрахункових даних з тими, що наведені в [5], для величини максимального прогину w_{\max} при $q = 0,02$ МПа дозволило встановити, що в обох випадках $w_{\max} = 0,8$ мм. Цей рівень прогину мав місце на внутрішньому контурі вирізу пластинки. Залежність величини w_{\max} від кількості ітерацій проілюстровано на рис. 3, де $\tilde{w} = w_{\max}(N) / w_{\max}$ при різних рівнях тиску.

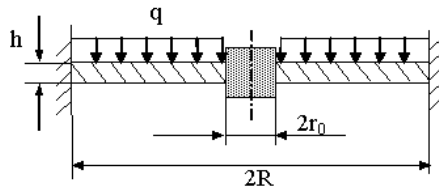


Рисунок 2

Висновки. В статті запропоновано метод щодо розв’язання початково-крайових задач теорії повзучості оболонок обертання. Метод базується на дискретизації оболонок кінчними елементами з нелінійними функціями форм та рівняннях стану з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Оболонки розглядаються за моделями, що відповідають теорії оболонок із поперечним зсувом та геометричною нелінійністю у квадратичному наближенні, що дозволяє враховувати нормальні прогини, які при згинанні стають більшими ніж товщина оболонки. Розглянуто дані зі збіжності методу, з яких випливає, що навіть для суттєвої по відношенню до товщини $w_{\max}/h > 1$ величини прогину для збіжності розв’язування достатньо невеликої кількості ітерацій $N < 6$. Зрозуміло, що, чим вищий рівень тиску, тим більша кількість ітерацій потрібна для отримання точного результату.

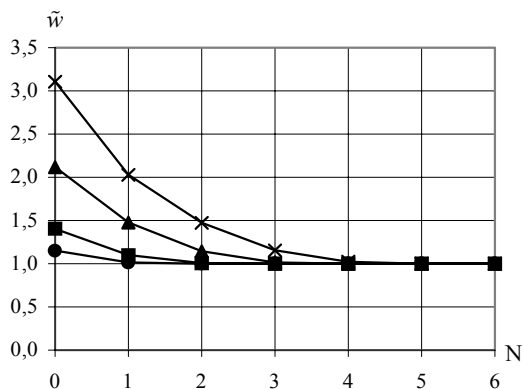


Рисунок 3 – Дані зі збіжності методу за кількістю ітерацій N: q, МПа ●—0,01; ■— 0,02; ▲—0,05; ×—0,1;

Список літератури: 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М., Наука, 1966. – 752 с. 2. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. – Tech. Mech., 20, (2000). – P. 215-226. 3. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Sychov A.* Geometrically nonlinear bending of thin-walled shells and plates under creep – damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997). – P. 339-352. 4. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с. 5. *Мяченко В.И., Фролов А.Н., Кармишин А.В. и др.* Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с. 6. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744с.

Надійшла до редколегії 30.03.04

УДК 621.891.031

О.Г. ПРИЙМАКОВ, канд.техн.наук, XI ВПС;

Г.О. ПРИЙМАКОВ, НТУ «ХПІ»;

Ю.О. ГРАДИСЬКИЙ, О.В. БОБРОВИЦЬКИЙ, XI ВПС

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЗНОШУВАННЯ ТА ВИТРИВАЛОСТІ АВІАЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Експериментально визначено інтенсивність зношування (I) та коефіцієнт тертя (μ) найбільш типових авіаційних конструкційних високолегованих жаростійких сталей 40ХНМА, Х17Н2, 30ХГСНА (ДСТУ 4543 – 94). Показано, що інтенсивність зношування може бути інтегральним показником витривалості авіаційних конструкційних сталей, що дозволяє визначати параметри зносостійкості та витривалості одночасно.

Intensity of wear (I) and coefficient of friction (μ) of most typical aviation construction high-alloyed and heat-resistant steels 40XNMA, X17H2, 30XGSA (DSTU 4543 – 94) are experimentally defined. It is shown, that intensity of wear can be integral index of endurance of aviation construction steels, that allows to determine simultaneously parameters of wearproof and endurance.

Підвищення працездатності авіаційних матеріалів – одна з складових підвищення боєготовності Військово-Повітряних Сил України. Ось чому результативні дослідження зносостійкості, надійності та витривалості авіаційних матеріалів дозволяють науково обгрунтовано та раціонально підійти до вибору матеріалів при конструюванні сучасних високо надійних літальних апаратів.

Отже, метою даної статті є розробка інтегрального показника зносостійкості, витривалості та надійності для авіаційних високолегованих конструкційних сталей.

Першою і, на жаль, єдиною роботою в цьому напрямку є робота І.В. Крагельського та Є.Ф.Непомнящого [1], де була поставлена ця наукова проблема, але не вирішена практично.

З метою визначення дійсних значень коефіцієнта тертя (μ) та інтенсивності зношування (I) були проведені порівняльні випробування високолегованих жаростійких конструкційних сталей, які найчастіше використовуються в конструкціях літальних апаратів – 40ХНМА, Х17Н2 та 30ХГСНА. Всі сталі та їх фізико – механічні характеристики відповідають ДСТУ 4543 – 94. Всі перераховані сталі мартенситного класу, технологічні, добре зварюються, корозійностійкі, мають високу пластичність, використовуються, зокрема, для виготовлення лопаток, пружин та корпусів компресора реактивного двигуна.

Для всіх сталей застосовувалась термообробка – загартовування при температурі 1030°C в масло та відпуск при 570°C.

Для визначення параметрів (μ) та (I) в залежності від питомого навантаження (P) та швидкості ковзання (V) використовувалась машина тертя 2070 СМТ–1, методика проведення дослідження на якій відповідає ДСТУ 30480–97 “Забезпечення зносостійкості виробів. Методи випробувань на зносостійкість. Загальні вимоги.” [2]. При випробуваннях використовували два режими тертя – тертя у повітряному середовищі та граничне тертя. Для змащування використовувалось авіаційне мастило МС–20. Кінематична схема машини тертя описана в роботі [2].

Випробування на тертя та зношування з наступним визначенням параметрів (μ) та (I) здійснювалось за традиційною схемою “ролик-ролик”, причому дослідні зразки відповідали вимогам ДСТУ 30480–97. Як відомо [3], для підвищення межі витривалості (σ_R) конструкційних сталей на 10...20 % та для покращення умов тертя та зношування, що підвищує достовірність результатів вимірювання (μ) та (I), доцільно використовувати захисні покриття дослідних зразків. Ось чому дослідні зразки всіх сталей були піддані покриттю методом електроіскрового легування (ЕІЛ) на установці ЕІЛВ–8А в інституті електрозварювання НАН України ім. Е.О. Патона, як найбільш досконалії технологічно.

Виходячи з комплексу вимог по товщині покриття та жорсткості створеної поверхні, були вибрані наступні параметри електроіскрового легування:

– ємність накопичувального конденсатора – 150 мФ;

- розрядний струм накопичувального конденсатора – 0,9...1 А;
- частота вібрації електроду вібратора – 450 Гц;
- питомий час легування – 5 хв / см³.

В ході випробувань дослідних зразків вказаних вище конструкційних високолегованих жаростійких сталей авіаційного призначення, підданих ЕІЛ-обробці, були визначені реальні значення (μ) та (I) як функції (P) та (V) для тертя у повітряному середовищі (рис. 1 та 2) та для граничного тертя у середовищі авіаційного мастила МС-20 (рис. 3 та 4).

На вказаних рисунках 1-4 крива 1 відповідає сталі 40ХНМА, крива 2 – сталі Х17Н2, а крива 3 – сталі 30ХГСНА (ДСТУ 4543–94). Обробка (апроксимація) експериментальних кривих $I=f(P)$ та $I=f(V)$ для обох середовищ з використанням стандартної програми із MathCAD описується поліномом четвертого ступеня, а відповідна обробка кривих $\mu=f(P)$ та $\mu=f(V)$ для обох середовищ – поліномом шостого ступеня.

Згідно [1] число циклів до руйнування (циклічна довговічність) поверхневого шару конструкційної сталі при пружних деформаціях в зонах контакту за моделлю Вінклера:

$$n = \left(\frac{\sigma_B}{\sigma} \right)^m, \quad (1)$$

де σ_B – межа міцності, МПа;

σ – напруження розтягу, зумовлене силами тертя, МПа;

m – показник ступеня у класичному рівнянні Велера, залежить від фізико-механічних властивостей матеріалу, і для високолегованих жаростійких конструкційних сталей $m \approx 4$ [4].

Крім того, $\sigma = \kappa' \mu P_{max}$, де κ' для авіаційних матеріалів дорівнює 3, тобто $\sigma = 3 \mu P_{max}$, де μ – коефіцієнт тертя матеріалу, а P_{max} – максимальний контактний тиск, МПа.

Нехтуючи деформаційною складовою коефіцієнта тертя (μ) отримуємо: $\sigma = \kappa' \tau_n$, або $\sigma = 3 \tau_n$, де τ_n – дотичні напруження, зумовлені міжмолекулярною взаємодією в процесі зношування.

Такий же результат дає і IV гіпотеза міцності С.П. Тимошенка щодо еквівалентних напружень в небезпечному перерізі (у випадку контактного зношування це переріз, де діє P_{max}).

Відомо [5], що середні нормальні напруження в зоні контакту абсолютно жорсткої кулі з плоскою поверхнею пружнодеформованого матеріалу (об'ємна модель Вінклера):

$$\sigma_n = \frac{0,42 E}{(1 - \nu^2)} \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad (2)$$

де R – радіус кулі - індентора;

ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу;

E – модуль Юнга матеріалу;

h – товщина зони деформування поверхневого шару матеріалу.

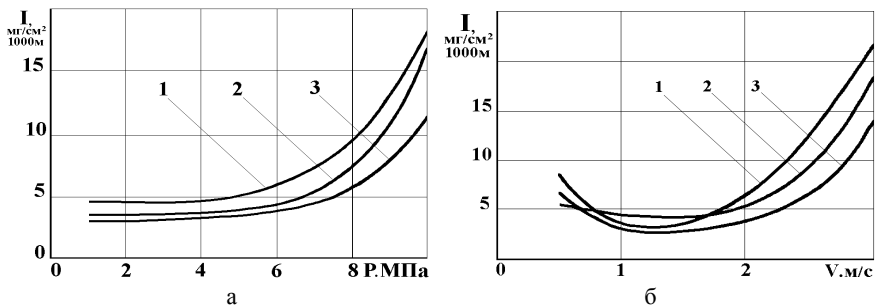


Рисунок 1 – Графіки залежності $I = f(P)$ (а) та $I = f(V)$ (б) для тертя у повітряному середовищі

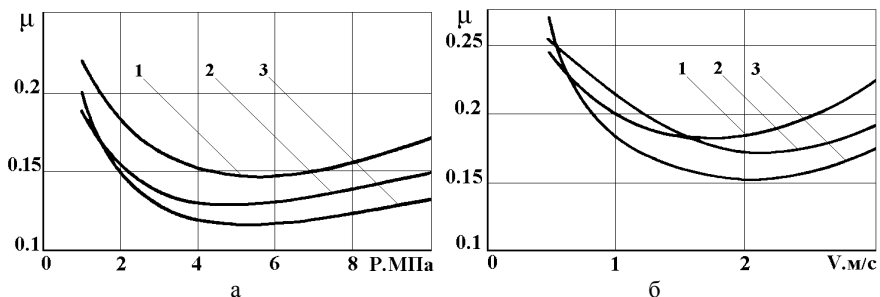


Рисунок 2 – Графіки залежності $\mu = f(P)$ (а) та $\mu = f(V)$ (б) для тертя у повітряному середовищі

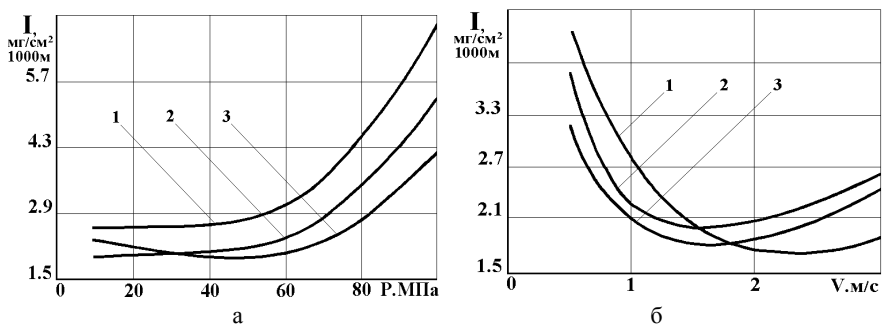


Рисунок 3 – Графіки залежності $I = f(P)$ (а) та $I = f(V)$ (б) для граничного тертя у середовищі MS-20

Цікаво, що аналіз напружено-деформованого стану при зношуванні найпростіше вести через відоме [1,4,5,6] співвідношення твердості та межі текучості матеріалу, що пружно деформується:

$$\sigma_{\tau} = \frac{1}{3} H B. \quad (3)$$

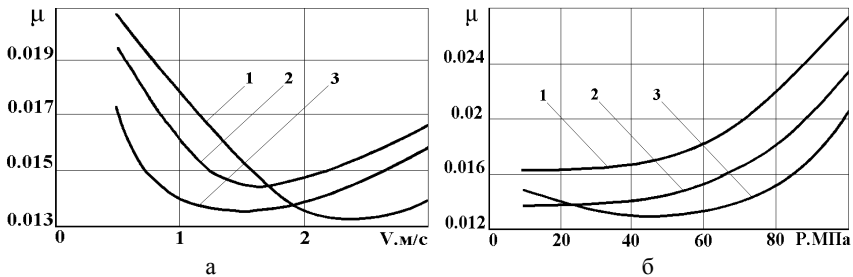


Рисунок 4 – Графіки залежності $\mu = f(P)$ (а) та $\mu = f(V)$ (б) для граничного тертя у середовищі МС - 20

Можна також знайдені за виразом (2) нормальні напруження (σ_n), а відповідні їм дотичні напруження $\tau_n = 1/3 \sigma_n$ скласти за четвертою гіпотезою міцності і отримати еквівалентні напруження.

Авторами встановлено, що для широкого спектру конструкційних високолегованих сталей еквівалентні напруження, обчислені обома способами, суттєво не відрізняються (відносна похибка $\varepsilon < 3...5\%$).

Все вище наведене має місце при пружному ненасиченому контакті в процесі зношування, що найчастіше зустрічається при експлуатації авіаційної техніки і, взагалі, в середньому машинобудуванні.

У випадку пластичного ненасиченого контакту багатократне пластичне деформування викликає зношування від малоциклової втоми. В цьому випадку число циклів до руйнування [7], дорівнює:

$$n = \left(\frac{2\varepsilon_B}{\varepsilon_t} \right)^m, \quad (4)$$

де ε_B – деформація, що відповідає межі міцності σ_B ;

ε_t – деформація, що виникає під дією сил тертя.

Як встановили автори, $\varepsilon_t = c \mu \operatorname{tg} \theta$, де μ – коефіцієнт тертя, c – емпіричний коефіцієнт, який для авіаційних матеріалів дорівнює 0,025, і θ – кут нахилу мікронерівності до площини її основи. Якщо відомий масовий знос (m) та площа поверхні тертя, то $\varepsilon_t = m/\rho S$, де ρ – щільність матеріалу, що зношується.

Враховуючи, що при пружному ненасиченому контакті $\tau_n = \tau_o + \beta P_{max}$, де τ_o і β – фрикційні характеристики, що залежать від умов роботи пари тертя [5, 8], отримаємо основні показники зношування, а саме коефіцієнт тертя (μ), інтенсивність зношування (I), питомий тиск в зоні контакту (P_{max}) в залежності від параметрів напружено-деформованого стану матеріалу, що зношується та його фізико-механічних характеристик:

$$\mu = 1,4 \left[\frac{\tau_o \alpha (1 - \nu^2)}{E} \right]^{1/2} + \beta; \quad (5)$$

$$I = \frac{0,5k'}{n \alpha} \left(\frac{h}{R} \right)^{1/2} = \frac{1,5}{n \alpha} \left(\frac{h}{R} \right)^{1/2}; \quad (6)$$

$$P_{\max} = 1,66 \left[\frac{\tau_0 E}{(1 - \nu^2) \alpha} \right]^{1/2} \quad (7)$$

В формулах (5) – (7):

α – коефіцієнт, що характеризує напружений та кінематичний стани в зоні контакту; $\alpha = f(V, \sigma_{екв})$, де V – швидкість ковзання в зоні контакту. Для пружного ненасиченого контакту рекомендується $\alpha \approx 0,75$.

Отже, саме інтенсивність зношування (I) може бути інтегральним показником працездатності авіаційних матеріалів, що дозволяє об'єктивно оцінити параметри зношування, параметри циклічної довговічності, а, значить, і ресурс та надійність, а також параметри витривалості.

Прискорене визначення параметрів (m) та (C) для класичного рівняння втомної міцності Велера, а також кореляційний зв'язок $lg \sigma_{екв} - lg N$ розроблено авторами раніше [9], причому, для довільного довірчого інтервалу.

В ході виконаної роботи автори зробили наступні висновки:

- інтенсивність зношування високолегованих жаростійких конструкційних сталей може бути інтегральним показником прогнозування зносостійкості, витривалості, надійності та довговічності цих авіаційних матеріалів,

- інтенсивність зношування авіаційних матеріалів в залежності від навантаження та швидкості ковзання апроксимується поліномом 4-го ступеня, а коефіцієнт тертя в функції тих же параметрів – поліномом 6-го ступеня;

- застосування змащування мастилом МС-20 майже в 1,8...2 рази знижує параметри (I) та (μ);

- застосування ЕПІ-технології нанесення захисних покриттів дійсно підвищує межу витривалості авіаційних матеріалів на 10...20% та підвищує точність визначення (I) та (μ);

- прийнята авторами технологія визначення параметрів (I) та (μ) в функції питомого навантаження та швидкості ковзання в зоні контакту є універсальною для всіх конструкційних сталей.

В подальшому автори мають намір експериментально підтвердити всі наведені висновки, що має, в кінцевому підсумку, привести до розробки єдиного універсального критерію працездатності конструкційних сталей, принаймні, стосовно авіаційних матеріалів.

Список літератури: 1. Крагельський І.В., Непомнящий Е.Ф. Об усталостном механизме износа при упругом контакте. – Изв. АН СССР, ОТН. – 1963. – Вып. 5. – С. 190-192. 2. ГОСТ 30480–97. Обеспечение износостойкости изделий. Методы испытаний на износостойкость. Общие требования. – М.: Изд. стандартов, 1997. – 60 с. 3. Тушинський Л.И., Плохов А.В. Исследование структуры и физико-механических свойств покрытий. – Новосибирск: Наука, 1986. – 191 с. 4. Костецкий Б.И., Колениченко Н.В. Качество поверхности и трение в машинах. – К.: Техника, 1969. – 215 с. 5. Крагельський І.В., Добычин М.Н., Комбаров В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с. 6. Приймаков О.Г., Бобровицький О.В., Лисяк О.О. Прогнозування надійності, довговічності та витривалості авіаційних матеріалів // Матеріали V Міжнародної науково – технічної конференції “АВІА-2003”. – Т. 3. – К.: Вид. НАУ, 2003. – С. 32.39-32.42. 7. Приймаков О.Г., Бобровицький О.В. Прогнозування витривалості авіаційних матеріалів. – Вестник науки и техники. – 2002. Вип. 4. – С. 5-11. 8. Приймаков О.Г., Бобровицький О.В. Прискорене визначення меж витривалості авіаційних матеріалів. – Вестник науки и техники. – 2003. – Вип. 1. – С. 4-8. 9. Приймаков О.Г., Бобровицький О.В., Лисяк О.О. Циклічна довговіч-

УДК 539.3

В.А.САЛО, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ОРТОТРОПНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

Запропоновано підхід до визначення напружено-деформованого стану пружних сферичних оболонок з отворами. Використовуваний RVR-метод заснований на варіаційному принципі Рейсснера, методу И.Н.Векуа, теорії R-функцій, загальних рівнянь тривимірної теорії пружності й алгоритму двосторонньої оцінки точності наближених рішень змішаних варіаційних задач. Ефективність методу показана на прикладах.

The approach is suggested to definition of the stress-strained state of elastic spherical shells with holes. The used RVR-method is based on Reissner's variational principle, I.N.Vekua's method, R-functions theory, the common equations of the three-dimensional theory of an elasticity and algorithm for two-sided estimation of exactitude of approached solutions of the mixed variational problems. Efficiency of the method is shown on examples.

Постановка проблемы. Решения пространственных задач теории упругости сопряжены со значительными вычислительными трудностями. В этой связи актуальна потребность в создании универсальных и алгоритмически простых для численной реализации методов расчета нетонких оболочек.

Анализ последних исследований и публикаций. Многообразие существующих в литературе вариантов уточненных теорий оболочек создает затруднения в выборе и практическом применении конкретной теории. Обзор этих вариантов дан в работе [1], в которой предложен эффективный RVR-метод решения краевых задач определения напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек произвольной гауссовой кривизны.

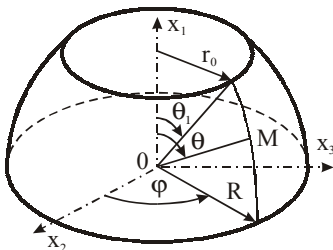


Рисунок 1

Цель и постановка задачи. В настоящей работе предлагается использование разработанного в монографии [1] RVR-метода для решения пространственных задач о напряженно-деформированном состоянии ортотропной сферической оболочки под действием статической нагрузки.

Введем в срединной поверхности Ω_s радиуса R сферической оболочки толщины h (рис. 1) систему координат $\{\theta, \phi, z\}$, где координатная линия z перпендикулярна Ω_s . Поверхность оболочки состоит из боковых

поверхностей Γ_s ($\theta = \theta_s$) отверстий и лицевых Γ^\pm ($z = \pm h/2$) поверхностей, уравнения которых определяются функциями ω_s и ω_\pm .

Для исследуемой оболочки вариационное уравнение Рейсснера в системе координат $\{\theta, \varphi, z\}$ представим в виде (при отсутствии объемных сил):

$$\iiint_{\Omega} \left\{ - \left[\frac{1}{R\chi} \left[\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} + (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \text{ctg} \theta + \sigma_{13} \right] + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{13}}{\partial z} \right] \delta u_1 - \right. \\ - \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \varphi} + 2\sigma_{12} \text{ctg} \theta + \sigma_{23} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{23}}{\partial z} \right] \delta u_2 - \\ - \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \varphi} + \sigma_{13} \text{ctg} \theta - \sigma_{11} - \sigma_{22} \right) + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial \chi^2 \sigma_{33}}{\partial z} \right] \delta u_3 + \\ + \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + u_3 \right) - \frac{1}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{11} + \\ + \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + u_1 \text{ctg} \theta + u_3 \right) - \frac{1}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33} \right] \delta \sigma_{22} + \\ + \left[\frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{11} + \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{22} \right] \delta \sigma_{33} + \\ + \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - u_2 \text{ctg} \theta \right) - \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12} \right] \delta \sigma_{12} + \\ + \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_1 \right) + \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13} \right] \delta \sigma_{13} + \\ + \left. \left[\frac{1}{R\chi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} - u_2 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23} \right] \delta \sigma_{23} \right\} R^2 \chi^2 \sin \theta d\theta d\varphi dz = 0. \quad (1)$$

Поверхностные интегралы в уравнении (1) отсутствуют в виду использования в предложенном RVR-методе структур решений, точно удовлетворяющих всем краевым условиям исследуемых задач. Искомые компоненты перемещений u_i и напряжений σ_{ij} представим рядами (при $\zeta = 2z/h$):

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_i^* + \sum_{k=0}^{l_i-1} u_i^k(a_i^{n_i}, \omega_s, \theta, \varphi) P_k(\zeta) \quad (i = \overline{1, 3}); \\ \chi \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^* + \sum_{k=0}^{l_{ij}-1} \sigma_{ij}^k(a_{ij}^{n_{ij}}, \omega_s, \theta, \varphi) P_k(\zeta) \quad (i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 3}); \\ \chi^2 \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sigma_{33}^k(a_{33}^{n_{33}}, \omega_s, \theta, \varphi) P_k(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Рассмотрим сферическую оболочку с двумя полюсными круговыми отверстиями радиуса r_0 . Обозначим $\theta = [(\theta_2 - \theta_1) \vartheta + \theta_1 + \theta_2] / 2$ при $|\vartheta| \leq 1$. С введением безразмерной координаты ϑ функции ω_1 и ω_2 , определяющие

уравнения поверхностей Γ_s ($s = 1, 2$) в случае равных отверстий можно заменить (при переносе начала координат в сечение $\theta = \pi/2$) одной функцией $\omega_\vartheta = 1 - \vartheta^2$. Структуры решений (2) в этом случае приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned}
 u_1 &= u_1^* + \sum_{k=0}^{l_1-1} (1 - b_{1k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_1} \sum_{r=0}^{l_1} a_1^{n_1} C_1(p, \vartheta) S_1(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 u_2 &= u_2^* + \sum_{k=0}^{l_2-1} (1 - b_{2k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_2} \sum_{r=0}^{l_2} a_2^{n_2} C_2(p, \vartheta) S_2(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 u_3 &= u_3^* + \sum_{k=0}^{l_3-1} (1 - b_{3k} \vartheta^2) \sum_{p=0}^{m_3} \sum_{r=0}^{l_3} a_3^{n_3} C_3(p, \vartheta) S_3(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{11} &= \sigma_{11}^* + \sum_{k=0}^{l_{11}-1} [1 - (1 - b_{1k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{11}} \sum_{r=0}^{l_{11}} a_{11}^{n_{11}} C_{11}(p, \vartheta) S_{11}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{22} &= \sigma_{22}^* + \sum_{k=0}^{l_{22}-1} \sum_{p=0}^{m_{22}} \sum_{r=0}^{l_{22}} a_{22}^{n_{22}} C_{22}(p, \vartheta) S_{22}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{12} &= \sigma_{12}^* + \sum_{k=0}^{l_{12}-1} [1 - (1 - b_{2k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{12}} \sum_{r=0}^{l_{12}} a_{12}^{n_{12}} C_{12}(p, \vartheta) S_{12}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{13} &= \sigma_{13}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{13}-1} [1 - (1 - b_{3k}) \vartheta^2] \sum_{p=0}^{m_{13}} \sum_{r=0}^{l_{13}} a_{13}^{n_{13}} C_{13}(p, \vartheta) S_{13}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi \sigma_{23} &= \sigma_{23}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{23}-1} \sum_{p=0}^{m_{23}} \sum_{r=0}^{l_{23}} a_{23}^{n_{23}} C_{23}(p, \vartheta) S_{23}(r, \varphi) P_k(\zeta); \\
 \chi^2 \sigma_{33} &= \sigma_{33}^* + \omega_\zeta \sum_{k=0}^{l_{33}-1} \sum_{p=0}^{m_{33}} \sum_{r=0}^{l_{33}} a_{33}^{n_{33}} C_{33}(p, \vartheta) S_{33}(r, \varphi) P_k(\zeta),
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $a_i^{n_i}$, $a_{ij}^{n_{ij}}$ – искомые постоянные; C_i , C_{ij} , S_i , S_{ij} – аппроксимирующие функции; $P_k(\zeta)$ – полиномы Лежандра; $\chi = 1 + h \zeta / 2R$; $\omega_\zeta = 1 - \zeta^2$.

Функции u_i^* , σ_{ij}^* в общем случае находятся по формуле “склейки” теории R-функций [2]. Постоянные b_{ik} необходимы, чтобы в каждой записи граничных условий на Γ_s не встречались взаимно соответственные величины из искомого перемещений и напряжений.

Рассмотрим нагруженный постоянным внутренним давлением q_0 ортотропный сферический пояс с геометрическими и физическими параметрами (при разных значениях соотношения E_2/E_1): $R = 0,6$ м; $\theta_1 = \pi/4$; $\theta_2 = 3\pi/4$; $q_0 = 1$ МПа; $E_1 = E_3 = 20E_0$; $G_{13} = E_0$; $\nu_{ij} = 0,3$; $E_0 = 1$ ГПа.

В силу осесимметричного нагружения оболочки и симметричного расположения круговых отверстий

$$u_2 = 0; \quad \sigma_{12} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_{23} = 0, \quad (4)$$

поэтому аналитические выражения вариационного уравнения и структур

решений для перемещений u_i и напряжений σ_{ij} значительно упрощаются.

Граничные условия на лицевых поверхностях оболочки:

$$\Gamma^+ : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = 0, \quad \Gamma^- : \sigma_{13} = 0; \quad \sigma_{33} = -q_0. \quad (5)$$

Будем считать, что отверстия закрыты крышками такой конструкции, которая передает на оболочку только действие перерезывающей силы $Q_\theta^* = -q_0 r_0/2$, определяемой из условия равновесия крышки.

Граничные условия на поверхностях отверстий:

$$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{13}^*/\chi \Rightarrow \{b_{1k} = 0, b_{3k} = 0\}. \quad (6)$$

Функции σ_{13}^* и σ_{33}^* с учетом изменения метрики по толщине оболочки:

$$\sigma_{13}^* = -\frac{3Q_\theta^*}{2h}(1-\zeta^2)\vartheta; \quad \sigma_{33}^* = -\frac{1}{2}(1-h/2R)^2(1-\zeta)q_0. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться в том, что на боковых поверхностях Γ_s отверстий ($\vartheta = \pm 1$) поперечное касательное напряжение $\sigma_{13} = \sigma_{13}^*/\chi$, заданное законом (7), статически эквивалентно приложенной в срединной поверхности интегральной характеристике – перерезывающей силе Q_θ^* .

Численная реализация задач. На рис. 2 в зависимости от анизотропии материала нетонкой ($h/R = 0,2$) оболочки показаны вдоль безразмерной координаты $r_\theta = [r_0 + (\theta - \theta_1)R]/r_0$ по меридиану оболочки графики распределения коэффициентов концентрации меридианных $k_\theta^- = 2h\sigma_{11}^-/q_0R$ (при $\zeta = -1$) и окружных $k_\varphi^+ = 2h\sigma_{22}^+/q_0R$ (при $\zeta = 1$) напряжений. Цифры 1,2,3,4, 5 возле построенных графиков рис. 2 соответствуют значениям соотношения $E_2/E_1 = 4; 2; 1; 0,5; 0,25$, а штриховой линией показан график для трансверсально-изотропной ($E_2/E_1 = 1$) оболочки.

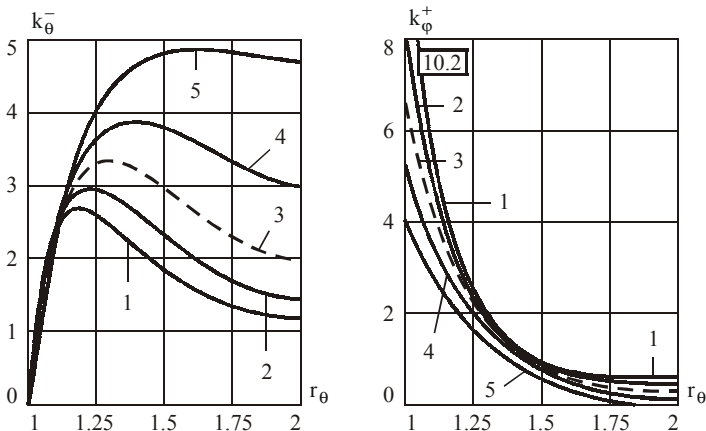


Рисунок 2 – Графики коэффициентов концентрации напряжений k_θ^- и k_φ^+

В численной реализации исследуемой краевой задачи использована сдвиговая модель $l_i = l_{ij} = 5$ (при $m_i = m_{ij} = 15$) уточненной теории оболочек пятого приближения. Как следует из рис. 2, увеличение жесткости E_2/E_1 в интервале $[0,25 \div 4]$ приводит в рассмотренных примерах к существенному изменению величин определяемых напряжений.

Выводы. Полученные результаты подтверждают возможность эффективного использования предложенного в монографии [1] RVR-метода при исследовании напряженно-деформированного ортотропных сферических оболочек с отверстиями. Средством проверки достоверности полученных результатов может стать программно реализуемый алгоритм [3] интегральной двойственной оценки численных решений, позволяющий автоматизировать поиск такого количества аппроксимаций, при котором процесс сходимости приближенных решений для независимо варьируемых искомым перемещений и напряжений приобретает устойчивый характер.

Список литературы: 1. Сало В.А. Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 216 с. 2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Київ: Наукова думка, 1982. – 552 с. 3. Сало В.А. О двусторонней оценке точности приближенных решений задач теории оболочек, полученных методом Ритца для неэкстремального функционала Рейсснера // Доповіді НАН України. – К., 2003. – №. 1. – С. 53–57.

Поступила в редколлегию 29.03.04

УДК 539.3

Э.А.СИМСОН, докт.техн.наук; **С.А.НАЗАРЕНКО**, канд.техн.наук;
Ю.П.АНАЦКИЙ, НТУ «ХПИ»

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПО ПРОЧНОСТНЫМ И ДИНАМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

В статті пропонуються методи оптимізації складних скінченноелементних моделей з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на великі розмірності векторів перемінних стану і проектування, мінімальну кількість звертань до процедури прямого розрахунку. Досліджено обчислювальні етапи. Розглянуто застосування розробленого математичного апарату.

Structural optimization methods of high both geometric and physical informational content are suggested for complicated FEA models, especially with design variables vector of high dimension, to minimize numbers of straight calculation procedure activation. Computational stages are investigated. The developed mathematical apparatus application are examined.

Создание систем автоматизированного оптимального проектирования машиностроительных конструкций способствует не только сокращению сроков, но и повышению качества проектирования [1,2]. Разработка систем связана с применением теории и численных методов оптимизации для реальных задач проектирова-

ния, отличающихся необходимостью использования комплексных моделей функционирования изделия, сложной пространственной геометрией конструкции, большим количеством критериев и функциональных ограничений.

Целью проведенных исследований была разработка методики оптимизации сложных конечноэлементных моделей с высокой степенью геометрической и физической информативности (дискретизации), а значит и достоверности к исходному объекту; ориентированной на большие размерности векторов переменных состояния и проектирования и минимальное число обращений к процедуре прямого расчета.

Задача оптимизации конструкций заключается в нахождении параметров проектирования, принадлежащих допустимой области U и минимизирующих (максимизирующих) целевую функцию (функционал качества) J_0 . На проектные переменные могут накладываться как явные двусторонние ограничения, задаваемые из конструктивно-технологических соображений, так и функциональные ограничения типа равенств и неравенств, наложенных на функционалы J_j , неявным образом сужающие область варьирования. При этом значения функционалов определяются из решения задач анализа, описываемых уравнениями состояния метода конечных элементов (МКЭ), являющегося наиболее мощным и распространенным методом расчета конструкций.

При решении практических задач, характеризующихся высокой размерностью (порядка 100-1000) вектора варьлируемых параметров и весьма большим (~10) числом функциональных ограничений, в настоящее время наиболее предпочтительным представляется метод последовательной линеаризации (МПЛ).

На каждом шаге метода последовательной линеаризации осуществляется следующий набор вычислительных этапов:

- решение исходной и сопряженной задач;
- вычисление функциональных производных или градиентов от критериев и функциональных ограничений по проектным переменным;
- построение области линеаризации;
- решение задачи линейного программирования.

Вычисление градиентов от критерия оптимизации (или критериев в Парето-постановке) и функциональных ограничений включает, во-первых, технику дифференцирования уравнений состояния [3], во-вторых, способ введения проектных переменных и связанные с ним соотношения для производных от конечноэлементных матриц системы.

В работе используется подход, в рамках которого на первом этапе после решения исходной и сопряженных конечноэлементных проблем выполняется анализ чувствительности функционалов к возмущению естественных варьлируемых параметров конечноэлементной дискретизации конструкции, а на втором этапе (там, где этого требует решение перечисленных выше проблем) осуществляется переход к анализу чувствительности в специальном пространстве конструктивных форм, определяемом конструктивными и технологическими особенностями, в котором и решается реальная задача оптимального проектирования. Такой подход позволяет унифицировать математический аппарат.

Далее остановимся на основных моментах вычислительной технологии 3 и 4 этапов МПЛ, развивающей идеи Р.П.Федоренко [4], на примере с функциональными ограничениями типа равенств, разрабатываемой в лаборатории «Оптимизация конструкций» НТУ «ХПИ».

Конструктивная форма условий оптимальности первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} \min \delta \bar{u}^T \bar{\nabla}_u J_0; \\ J_j + \delta \bar{u}^T \bar{\nabla}_u J_j = 0; \\ \bar{u} + \delta \bar{u} \in \delta U \cap U. \end{aligned} \quad (1)$$

Наличие J_j в линеаризованной записи функциональных ограничений $J_j(\bar{u}, \bar{y}) = 0$ связана с компенсацией накопления погрешностей второго порядка малости. Область линеаризации образуется пересечением области δU , строящейся по характеру изменения (градиентам) целевой функции J_0 и функционалов-ограничений J_j , и допустимой области U , рассматриваемой в работе в виде гиперпараллелепипеда: $u_i^- \leq u_i \leq u_i^+, i = 1, n$.

В дальнейшем при описании метода будем придерживаться принятой в монографии [4] системы обозначений

$$s_i = \delta u_i; \quad h_i^j = \frac{\partial J_j}{\partial u_i}; \quad X^j = J_j(\bar{u}, \bar{y}).$$

Первые два условия в постановке (1) с учетом принятой системы обозначений примут вид

$$\min \sum_{i=1}^n s_i h_i^0; \quad X^j + \sum_{i=1}^n s_i h_i^j = 0. \quad (2)$$

Область линеаризации будем также разыскивать в форме гиперпараллелепипеда $s_i^- \leq s_i \leq s_i^+$.

Область линеаризации должна удовлетворять целому ряду условий. Она должна быть достаточно малой, чтобы формулы первого порядка с приемлемой точностью описывали приращения функционалов, и в то же время достаточно большой, чтобы процесс оптимизации не был слишком медленным. Область должна быть построена так, чтобы она целиком содержалась в глобальной области геометрических ограничений, при этом должна быть обеспечена возможность изменения ее конфигурации по любому возможному направлению в n -мерном пространстве варьируемых параметров.

Большинство методов первого порядка можно трактовать как выбор направления оптимизации в пространстве варьируемых параметров и величины шага. В данном методе этим параметрам соответствует выбор формы области линеаризации и ее характерного размера.

Возможности разработанного математического аппарата продемонстрируем на примере рабочего колеса турбокомпрессора. В работе [5] рассматривается оптимизация лопатки, моделируемой тонкопластинчатыми КЭ, по критерию основной собственной частоты колебаний. В работе [6] рассматривается оптимизация лопатки, моделируемой толстооболочечными изопараметри-

ческими КЭ, по критериям максимальной интенсивности статических напряжений, веса, момента инерции, собственных частот колебаний. В настоящей работе при анализе использовались полные модели колес турбин и компрессоров на основе 20-узловых трехмерных изопараметрических КЭ (рис. 1 и 2).

За счет оптимизации контура диска удалось вывести весь пакет частот "дисковых" форм колебаний турбины из зоны опасных резонансов и существенно ($\approx 30\%$) уменьшить уровень максимальных статических напряжений. Дальнейшая оптимизация была связана с трехмерным КЭ варьированием распределением толщины лопатки, формой серповидной направляющей и трассировкой образующей (в рамках различных ограничений, диктуемых уровнем реальных технологических возможностей завода-изготовителя). При оптимизации использовались как схемы варьирования элементами срединной поверхности и распределения толщины, так и отдельные вариации Безье-поверхностей спинки и корытца. При этом удалось отстроить от опасных резонансов пакет собственных частот, соответствующих первой лопаточной форме, и поднять в область высоких гармоник пакет частот, соответствующих второй. Дополнительно удалось на 20% снизить максимальные статические напряжения от центробежных сил и на 15% максимальные, нормированные потерями энергии динамические напряжения на первой лопаточной форме.

Мощные возможности анализа чувствительности и оптимизации рабочего колеса позволили скомпенсировать ухудшения статической и динамической прочности, возникающие после газодинамической оптимизации.

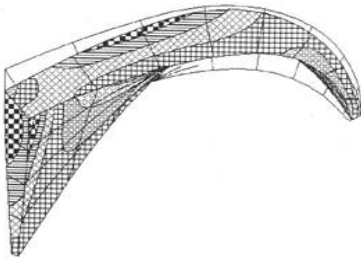


Рисунок 1 – Поле приращений материала на различных поверхностях при решении задачи максимизации основной собственной частоты лопатки рабочего колеса турбины

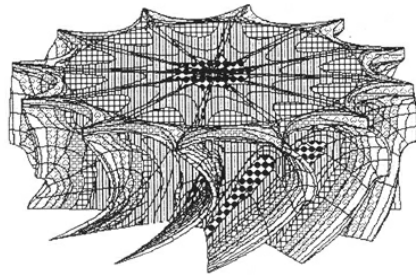


Рисунок 2 – Распределение эквивалентных напряжений от центробежной нагрузки при решении задачи поиска оптимальной конфигурации формы контура диска.

В дальнейших работах планируется изложить результаты адаптации методов анализа чувствительности и оптимизации систем в мультидисциплинарных задачах (в частности, при проектировании мехатронных систем на основе МЭМС).

Список литературы: 1. Гриценко Г.Д, Малакей А.Н., Миргородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А. Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – 2002. –

№1. – С. 6-13. **2.** *Fridman M.M., Zyczkowski M.* Structural optimization of elastic columns under stress corrosion conditions // *Structural Optimization*. – 2001. – Vol. 21(3). – P. 218-228. **3.** *Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин, А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б.* Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // *Вестник НТУ «ХПИ»*. – 2003. – № 8. Т. 3. – С. 77-82. **4.** *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления / М.: Наука, 1978. – 488 с. **5.** *Жовдак В.А., Иглин С.П., Смирнова Л.М., Солошенко В.А.* Оптимизация лопатки рабочего колеса турбокомпрессора по критерию собственной частоты колебаний // *Вестник НТУ «ХПИ»*. – 2003. – №. 12. Т. 1. – С. 71-78. **6.** *Назаренко С.А.* Разработка метода анализа чувствительности и оптимизации оболочечных элементов конструкций и лопаток турбомашин / Дис. канд.техн.наук. – Харьков, 1989. – 210 с.

Поступила в редколлегию 05.06.04

УДК 681.3

И.Г.СУВОРОВА, докт.техн.наук, ИПМаш НАН Украины

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Розглянуті теоретичні основи залучення методу R-функцій до розв'язку осесиметричних течій рідини у каналах складного профілю. Розроблені комп'ютерні моделі таких течій, наведені приклади течій у реальних каналах.

The paper considers theoretical principles of the R-functions method application to axisymmetric fluid in the channel of complicate form. The computer-based models of such fluid are created. Also the efficiency of one based on computation of the real channel are showed.

Введение

Над формулировкой основных уравнений движения вязкой жидкости, представляющих математическую модель законов сохранения импульса и массы, работали Л.Навье, С.Пуассон, Б.Сен-Венан и Дж.Г.Стокс. При этом был использован обобщенный закон трения Ньютона, предполагающий, что для движущихся жидкостей и газов напряжения пропорциональны скоростям деформаций, а также соображения о действии межмолекулярных сил [1,2].

Основные краевые задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, течений со свободными поверхностями, в струях и следах за телами, с обтеканием тел. При этом интегрирование уравнений Навье-Стокса проводится в областях (конечных или бесконечных), на границе которых ставятся условия из соображений физического характера (условия прилипания или скольжения по поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и др.). Для нестационарных задач помимо граничных условий должны задаваться начальные условия [1–3].

Для нахождения решений таких задач на помощь исследователям пришли

приближенные методы. Для решения некоторых классов задач динамики вязких жидкостей и газов разработаны алгоритмы, основанные на использовании разностных методов. Например, для задачи расчета ламинарных течений вязких несжимаемых жидкостей, стационарных задач о ламинарных двумерных течениях в суживающемся и расширяющемся каналах, в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, нестационарной задачи обтекания в канале плоской пластины, расположенной перпендикулярно к направлению потока с использованием метода установления, применением явных и неявных схем, схем типа "крест", Дюфорта-Франкеля и итерационных методов [4, 5].

Вариационно-сеточные методы, и в частности метод конечных элементов, также нашли свое применение для решения уравнений динамики вязкой жидкости. Так исследовались задачи обтекания эллиптического и кругового цилиндра (в том числе вращающегося), пластины конечной толщины под углом атаки, капли, плоской ступени и т.д.

Метод R-функций (RFM) – применялся для расчета ламинарного течения в каналах сложного поперечного сечения (в том числе в решетках тепловыделяющих элементов круглой, крестообразной, прямоугольной форм с плотной и раздвинутой упаковкой), в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, в каналах с наличием препятствий, установившегося движения ньютоновской вязкопластической жидкости по цилиндрической трубе сложного сечения и др.[6, 7].

1. Теоретическая модель

Одним из наиболее распространенных видов пространственных течений является движение, симметричное относительно некоторой оси, называемое осесимметричным. Сюда относятся движения в соплах круглого сечения, в конфузорах и диффузорах, осевое обтекание тел вращения, дирижабельных и других форм. В пространственных движениях нельзя ввести функцию тока в общем случае, как это было сделано при изучении плоских движений. Функция тока существует только в отдельных частных случаях, одним из которых является осесимметричное движение.

Когда движение симметрично относительно оси x , вихревые линии должны быть окружностями, центры которых лежат на этой оси и плоскости которых перпендикулярны ей. Такие движения удобно рассматривать с помощью функции тока Стокса, существование которой не зависит от того, является ли движение безвихревым или нет.

1.2. Уравнение для функции тока в осесимметричном случае при наличии вязкости

Уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для осесимметричного течения в цилиндрических координатах (r, θ, z) могут быть представлены в форме [1,2]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \leftarrow \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя первое из уравнений по r , а второе – по z и вычитая из первого второе, исключаем члены с давлением и, используя третье уравнение, а также соотношение для проекции вихря в осесимметричном случае

$$\zeta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (4)$$

приходим к:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r \zeta}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right). \quad (5)$$

Эта форма представления уравнений Навье-Стокса обычно называется “уравнением переноса завихренности”. Используя характерный радиальный размер R и характерную скорость U_0 , уравнение (5) запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r \zeta}{r} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right), \quad (6)$$

где $Re = U_0 R / \nu$ – число Рейнольдса.

Введя функцию тока

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (7)$$

и для упрощения выкладок предположив, что движение установившееся, получим уравнение, выражающее завихренность через производные функции тока:

$$\xi = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (8)$$

После подстановки выражения для завихренности (8) в уравнение (6) переноса завихренности, получим единственное уравнение для определения функции тока. Оно называется бигармоническим уравнением и может быть записано в форме:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При применении формулировки $\xi - \psi$ сходимость приближенного реше-

ния достигается быстрее, чем для примитивной формулировки, включающей рассмотрение давления.

После построения решения для функции тока давление может быть определено из уравнения Пуассона [5], правая часть которого выражается через производные функции тока:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \\ & = \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

1.3. Граничные условия

Рассмотрим граничные условия для функции тока на примере осесимметричного течения в канале сложного профиля (рис. 1).

Граничные условия формулируются как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности ($v_n = 0$), так и касательных составляющих относительной скорости ($v_\tau = 0$), т.е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. На входе в канал известно $v_r = v_1(r)$; $v_z = 0$, а на выходе имеем в общем случае $\int_0^c v_1(r) r dr = \int_0^b v_2(r) r dr$, что следует из равенства расхода жидкости через входное и выходное сечения канала.

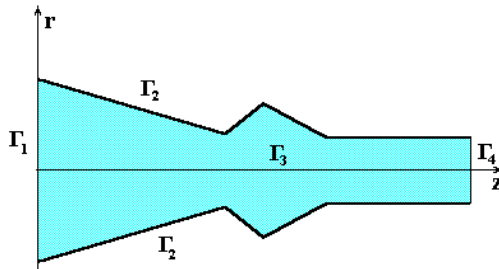


Рисунок 1

На входе Γ_1

$$\psi|_{\Gamma_1} = \frac{Ar^4}{4} + \frac{Br^2}{2}, \quad (11)$$

где A, B – постоянные, значения которых зависят от желаемого типа профиля втекающего потока (параболический или однородный) и от радиуса трубы [4]. Параболический профиль предпочтительней. Выражение (11) получено из интегрирования уравнения связывающего $v_z = 0$ с функцией тока ψ

Твердая граница

$$\psi|_{\Gamma_2} = const. \quad (12)$$

На твердой границе и радиальная, и осевая составляющие скорости равны нулю вследствие принятия условия отсутствия скольжения, характерного для вязкой жидкости.

$$v_r|_{\Gamma_2} = v_z|_{\Gamma_2} = 0.$$

Осевая линия Γ_3 . Из этого следует предположение нулевой завихренности и нулевой радиальной скорости на осевой линии. Значение функции тока на осевой линии произвольно; поэтому можно предположить, что

$$\psi|_{\Gamma_3} = 0. \quad (13)$$

Граница вниз по потоку. ψ находится по линейной экстраполяции в осевом направлении либо из равенства расхода жидкости. В случае численной реализации методом R-функций можно это условие не задавать, а принять его как естественное.

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

на всей границе области.

Граничные условия для давления:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{Re} \frac{\zeta}{r}. \quad (16)$$

В качестве начальных условий выбираются решения, сошедшиеся при другом меньшем числе Рейнольдса [4].

2. Применение RFM для решения гидродинамических задач

Искомые функции тока и вихря зависят от числа Рейнольдса (Re), характеризующего отношение сил инерции к силам вязкости и определяющего интенсивность вынужденной конвекции. При решении уравнения (9) возникают трудности, связанные с наличием малого параметра при старшей производной ($1/Re$) и нелинейностью исходного оператора задачи. Наличие малого параметра при старшей производной приводит к большим кривизнам (резкому перепаду градиентов) решения, что соответствует появлению у стенок областей при больших Re пограничного слоя, толщина которого пропорциональна $1/\sqrt{Re}$. Нелинейность оператора, типичная для систем гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения. Все это приводит при $Re \gg 1$ к образованию весьма сложных течений и в ряде случаев явление вычислительной неустойчивости трудно отличить от возможного сложного поведения решения. В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел Re существует единственное устойчивое стационарное решение уравнения Навье-Стокса, для получения которого можно использовать либо

стационарные уравнения, либо нестационарные при $t \rightarrow \infty$ (метод установления). При увеличении числа Re стационарное решение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных данных.

И тем не менее метод R-функций (RFM) позволяет решать такой класс задач. Решение уравнения (9) представим в виде $\psi = \psi_1 + \psi_0$, где,

$$\psi_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \psi_i}{\sum_{i=1}^N w_i^2},$$

w_i – линии на границе области, которые заданы при помощи R-функций. ψ_0 и ψ_1 соответственно однородная и неоднородная части структуры. ψ_0 обеспечивает продолжение граничных условий внутрь области и получено с помощью формулы «склейки» [6]. $\psi_1 = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i$, где C_i – кон-

станты, которые необходимо определить, а ϕ – полная последовательность координатных функций. Уравнение (9) переписывается в терминах ψ_1 и ψ_0 .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + \right. \\ & + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \left. \right) - \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \\ & - \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \\ & - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} \right) + \\ & + \frac{2}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{3}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) - \\ & - \frac{3}{r^4} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} \right) - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} \right) = \\ & = -\frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \Bigg) + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \\
& + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z}
\end{aligned}$$

В качестве начального приближения использовалось как $\psi_0 = 0$ ($C_i = 0$; $i = 0, \dots, N$) так и $\psi_0 = \omega^2$ ($C_0 = 1$; $C_i = 0$; $i = 1, \dots, N$). Кроме того оказалось, что с ростом числа Re наиболее эффективным является использование в качестве начального приближения значение функции тока, полученного при другом, меньшем значении числа Re .

3. Компьютерная реализация

Поставленные задачи решаются методом R-функций в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, разработанной в отделе прикладной математики и вычислительных методов Института проблем машиностроения НАН Украины [6, 8].

На рис. 2 представлен разрез реального канала, по которому движется вязкая несжимаемая жидкость [9].

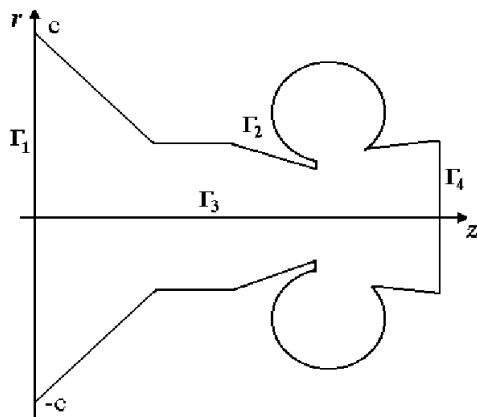


Рисунок 2

Математическая формулировка задачи сводится к решению уравнения (17) со следующими краевыми условиями:

$$\psi|_{\Gamma_1} = -\frac{r^4}{2c^2} + \frac{r^2}{2},$$

где Γ_1 – вход в канал,

$$\psi|_{\Gamma_2} = -\frac{y^4}{2c^2} + \frac{y^2}{2},$$

где Γ_2 – твердая граница, которая описана R-функциями,

$$\psi|_{\Gamma_3} = 0,$$

где Γ_3 – ось симметрии, Γ_4 – выход из канала. Здесь условие не задаем, считаем его естественным.

На рис. 3 представлена картина линий уровня функций тока ψ при $Re = 1$.

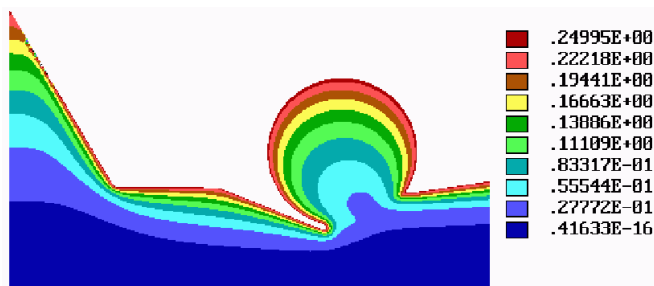


Рисунок 3

Заключение

Компьютерная модель течения вязкой несжимаемой жидкости, построенная методом R-функций (RFM), позволила в рамках системы ПОЛЕ провести численные исследования в реальных каналах со сложным профилем, получить качественные картины течений, что дает возможность судить о влиянии чисел Рейнольдса (Re) и ширины каналов на гидродинамические характеристики.

Поскольку функция тока ψ (решение) имеет аналитический вид, то легко найти профили скоростей, распределение давлений и установить длину гидродинамической стабилизации.

Список литературы: 1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М., Наука, 1970. 2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика (ч.1, ч.2). – М., ОГИЗ, 1948. 3. Милл-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М., Мир, 1967. 4. Численные методы в динамике жидкостей (материалы кармановских чтений) // Под ред. О.М.Белоцерковского и В.П.Шидловского. – М., Мир, 1981. 5. Oberkampf W.L. Domain Mappings for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, Int. J. Numer Methods Eng., 10: 211-223, 1976. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 7. Рвачев В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе ПОЛЕ-3. // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1991. – 33. – С.95-99. 8. Суворова И.Г., Шевченко А.Н. Автоматизация расчетов методом R-функций применительно к задачам стройиндустрии: Учеб.пособие. – Киев: Учеб.-метод. каб. высш. образования, 1991. – 60 с. 9. Патент №2083247 на изобретение "Устройство для распыления жидкости" авторы Глотов Е.А., Суворова И.Г. (РОСПАТЕНТ).

Поступила в редколлегию 18.11.03

Н.А.ТКАЧУК, канд.техн.наук; *Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК*; НТУ «ХПИ»

К ВОПРОСУ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕМЕНТОВ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано методи для об'ємного моделювання операцій ендопротезування опорно-рухового апарата та хребта, розрахунків міцності та жорсткості протезованих елементів та наслідків операції для вибору оптимальної схеми операції та параметрів протезів.

The development of methods for the volumetric modelling of endoprosthesis operations on the locomotorium and spine, postoperative complications is proposed, for determination of prosthetic elements strength and rigidity and for choosing of optimum operative scheme and prosthetic parameters taking into account postoperative complications.

1. Состояние вопроса.

В настоящее время повышения эффективности оперативного вмешательства для протезирования опорно-двигательного аппарата сдерживается отсутствием средств предоперационного моделирования самой операции, расчетов прочности и жесткости элементов, а также прогнозирования поведения опорно-двигательного аппарата после операции в реальных условиях жизнедеятельности человека. В то же время растет потребность в таких операциях во всем мире. Это приводит к необходимости разрабатывать принципиально новые схемы операций. Параметры протезов и схема оперативного вмешательства при этом отрабатываются на протяжении продолжительного времени [1]. В то же время при этом достаточно сложно производить учет индивидуальных особенностей пациента.

Все эти проблемы может устранить компьютерное объемное параметрическое моделирование, которое использует методы, алгоритмы и программное обеспечение моделирования элементов механических систем [3]. Подходы, которые используются для проектирования и расчетов напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем, позволяют оперировать с объектами сложной формы, материал которых существенно неоднородный, анизотропный и имеет нелинейности физико-механических характеристик.

Таким образом, приобретенный опыт моделирования и расчетов дает возможность создать методы, алгоритмы и программное обеспечение для глубокого и индивидуализированного моделирования, анализа последствий и синтеза щадящих схем оперативного вмешательства. В то же время исследуемые элементы биомеханических систем (ЭБМС) обладают специфическими характеристиками формы, свойств материала, условий нагружения и сопряжения. Все это требует новых подходов к их моделированию и исследованию, создания математических моделей физико-механических процессов, геометрических пространственных моделей, а также определенного семейства численных моделей исследуемых объектов.

2. Постановка и формализация задачи.

Рассмотрим элементы сложных биомеханических систем как систему взаимодействующих тел, поведение которой (математическая модель) описывается в общем виде в операторной форме

$$L(u, P, f, t) = 0, \quad (1)$$

где L – некоторый оператор, структура и параметры которого зависят от типа исследуемого явления, состава биомеханической системы, граничных условий, нагрузки и условий сопряжения;

u – массив переменных состояния, относительно которых сформулирована задача, образующих пространство решений U ;

P_M – массив параметров (характеристики физико-механических свойств, геометрические размеры, величины присоединенных масс, жесткости), составляющих параметрическое пространство P_M ;

f_M – массив, характеризующий действующие на систему внешние нагрузки (поверхностные, объемные, сосредоточенные нагрузки), составляющие пространство нагрузок F_M ;

t – время или иной параметр, характеризующий исследуемое явление как процесс.

В частности, для большинства случаев удобно сформулировать напряженно-деформированное состояние в перемещениях. В этом случае $U_M = \bigcup_s u_{M_i}^{(s)}$, где

$u_{M_i}^{(s)} = u_{M_i}^{(s)}(r_i, t)$ – массив перемещений точек элемента s исследуемой системы функций с радиус-вектором r с компонентами $r_i (i = 1, 2, 3)$, соответствующих моменту времени t . Соответственно $P_M = \bigcup_s p_M^{(s)}$, $F_M = \bigcup_s f_M^{(s)}$. Например, для не-

которого элемента исследуемой системы (массивное тело) общее уравнение (1) расписывается в виде системы уравнений (индексы $*$, $^{(s)}$ опущены) в области Ω , занимаемой телом [4-6]:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}; \quad \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0, \quad (2)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, связь между которыми задается тензором упругих постоянных C_{ijkl} ;

\bar{f}_i – составляющая объемной нагрузки.

Соотношения (2) дополняются граничными условиями

$$u_i|_{S_u} = g_i(\mathbf{r}), \quad \sigma_i|_{S_\sigma} = \bar{f}_i(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где S_u , S_σ – части поверхности тела, на которых заданы геометрические и силовые граничные условия;

g_i , \bar{f}_i – заданные вектор-функции перемещений и поверхностных нагрузок.

В случае контактного взаимодействия тел p , q с гладкими поверхностями на части поверхности S_c каждого тела добавляются условия непроникновения:

$$(u_v^p + u_v^q) \Big|_{S_c} \leq \delta(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где u_v – составляющая перемещения по нормали v к поверхности;

δ – начальный зазор в сопряжении тел.

Как известно [4-6], исходная задача (1)-(4) приводится к вариационной задаче

$$(\bar{L}_M u_M, v_M) = (f_M, v_M), \quad \forall v_M, \quad (5)$$

где \bar{L}_M – оператор краевой задачи внутри области Ω ;

(* , * *) – соответствующая билинейная форма, или вариационному неравенству

$$(\bar{L}_M u_M, v_M - u_M) \geq (f_M, v_M - u_M), \quad \forall v_M \in G, \quad (6)$$

где G – множество, задаваемое ограничениями (4).

Вариационная задача (5) или неравенство (6) приводятся к проблеме минимизации функционала $I(u_M)$:

$$I(u_M) = 1/2(\bar{L}u_M, u_M) - (f_M, u_M) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Для случая (5) ищется безусловный минимум, а для случая (6) – минимум на множестве G в пространстве функций u_M . Данный квадратичный функционал состоит из квадратичной $a(u_M, u_M)$ и линейной $b(u_M)$ форм. При этом квадратичная форма в (7) представляет собой потенциальную энергию деформации исследуемой системы, а линейная – работу внешних сил. Например, для пространственной задачи теории упругости билинейная форма, порожающая квадратичную составляющую (7), имеет вид:

$$a(u_M, v_M) = (\bar{L}u_M, v_M) = \int_{(\Omega)} \sigma_{ij}(u_M) \varepsilon_{ij}(v_M) d\Omega, \quad (8)$$

а линейная –

$$b(u_M) = (f_M, u_M) = \int_{(S_u)} \bar{f}_i \cdot u_{M_i} dS + \int_{(\Omega)} \bar{f}_i \cdot u_{M_i} d\Omega. \quad (9)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния тел исследуемой системы, т.е. решения некоторой текущей задачи анализа, необходимо или решить систему уравнений (2)-(3) (или неравенств (4) для случая контактного взаимодействия), или вариационное уравнение (5) (соответственно неравенство (6)), или произвести минимизацию функционала (7).

Соотношения (1-9) составляют математическую модель исследуемых процессов в ЭБМС. Ставится задача выбора параметров p_M^* этой системы, удовлетворяющих некоторой системе критериев. Поскольку специфика исследований элементов биомеханических систем состоит в том, что уже решение задачи анализа представляет собой большую проблему (например, определение формы области Ω , в пределах которой формулируется начально-краевая задача; задание граничных условий; задание свойств материалов и т.д.), то поставленная задача синтеза имеет на порядок большую степень сложности. В связи с этим был предложен путь исследу-

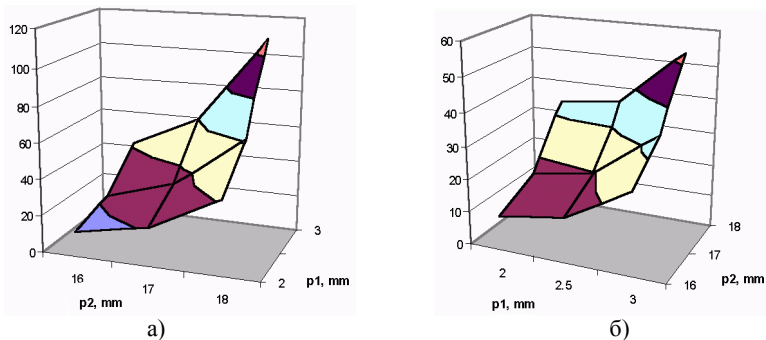


Рисунок 2 – Зависимости относительных максимальных осевых перемещений (а) и относительных максимальных эквивалентных напряжений от варьируемых параметров (б)

5. Заключение

Проведенный комплекс расчетных исследований позволяет переходить к исследованию костно-металлических блоков, сегментов позвоночного столба, биомеханических систем с керамическими компонентами, существенно сократив подпространство варьируемых параметров, определяющих свойства эндопротеза как составного элемента исследуемой системы. Это существенно уменьшает объем вычислительных работ при исследовании всей системы.

В то же время остаются открытыми вопросы автоматизированного анализа и синтеза биологических компонент исследуемых биомеханических систем. Вместе с решением этого вопроса необходимо создать специализированный программный комплекс для генерирования моделей ЭБМС, их параметрического анализа и решения задач для конкретных случаев эндопротезирования, что составляет предмет дальнейших исследований по данной проблеме.

Список литературы: 1. Paul A. Glazer, Olivier Colliou, Stephen M. Klisch, David S. Bradford, H. Ulrich Bueff, Jeffrey C. Lotz. Biomechanical Analysis of Multilevel Fixation Methods in the Lumbar Spine. – Spine 1997 Volume 22, Number 2. – PP. 171-182. 2. Гриценко Г.Д., Малакей А.Н., Мургородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А. Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – 2002. – №1. – С. 6-13. 3. Ткачук Н.А. Специализированные системы автоматизированного исследования прочностных и жесткостных характеристик элементов технологической оснастки // Вісник Національного технічного університету “ХПІ”. Тематичний випуск: “Динаміка і міцність машин”. Збірник наукових праць НТУ “ХПІ”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2003. – № 12. т.1. – С.166-171. 4. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с. 5. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с. 6. Васильду К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Поступила в редколлегию 29.04.04

Н.А.ТКАЧУК, канд.техн.наук; **Г.Д.ГРИЦЕНКО**, канд.техн.наук;
Э.В.ГЛУЩЕНКО, канд.техн.наук; **А.В.ТКАЧУК**; НТУ «ХПИ»

ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА МОДЕЛЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано програмно-апаратний комплекс для аналізу і синтезу моделей елементів складних механічних систем. Комплекс реалізує розрахунково-експериментальний метод досліджень. В основі – узагальнений параметричний підхід та спеціалізовані системи досліджень.

The hardware-software complex for the analysis and synthesis of models of the complicated mechanical systems elements is offered. The complex realizes a numerical-experimental method of researches. In a basis is the generalized parametrical approach and the specialized researching systems.

1. Состояние вопроса. Основные требования к инструментальным средствам численных исследований элементов сложных механических систем.

Для современного состояния численных методов, программного и аппаратного обеспечения для исследования, анализа и синтеза элементов сложных механических систем с учетом напряженно-деформированного состояния характерны: высокая степень развития математических моделей для исследования различных физико-механических процессов; наличие формального аппарата численного решения возникающих задач (методы, алгоритмы); большое разнообразие программных пакетов, потенциально обладающие “практически неограниченными” возможностями для решения возникающих в реальных условиях задач. В то же время попытки построить “универсальные” инструментальные средства для решения задач, диктуемых потребностями современного машиностроения, упираются в ряд ограничений.

Прежде всего это ограничения *ресурсные*. Действительно, попытки решения задач выше средней сложности (например, со множеством зон контакта, связанные задачи, нестационарные динамические процессы, физически или геометрически нелинейные процессы деформирования, ударное взаимодействие) в интегрированных CAD/CAM/CAE-продуктах или даже в специализированных CAE-системах требуют зачастую таких объемов ресурсов, которые в распоряжении исследователей отсутствуют. Это касается и времени решения, и объема оперативной памяти (зачастую не позволяют вообще “запустить” задачу), и объема дисковой памяти. Применение специализированных пакетов в данном случае не спасает в силу наличия у них целого ряда функциональных ограничений. В качестве одного из выходов можно опереться на специализированные системы автоматизированного анализа и синтеза элементов сложных механических систем [1-3]. При этом все равно требуемый объем ресурсов, уменьшаясь на порядок, остается существенным ограничительным фактором.

Вторым очень существенным ограничением является отсутствие *досто-*

верных и сбалансированных численных моделей исследуемых объектов. Это касается условий нагружения, граничных условий, условий сопряжения, типов конечных элементов и характеристик конечно-элементной сетки. Данные вопросы нельзя решить только внутренними средствами конечно-элементных пакетов. Необходимо опираться на возможности, которыми обладают экспериментальные методы. В работах [4-8] предложен качественно новый способ исследований, соединяющий в едином процессе расчетные и экспериментальные этапы. В качестве результата исследований выступают достоверные численные модели, которые дают возможность с уверенностью использовать их для последующих численных расчетов.

Решив упомянутые принципиальные методологические проблемы, исследователь сталкивается с практической задачей создания инструмента, реализующего предложенные подходы. Ниже описан процесс создания *специализированного программно-аппаратного комплекса* для расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем. К нему были предъявлены следующие требования:

- Модульный принцип построения;
- Наличие единой базы данных;
- Открытость архитектуры;
- Модифицируемость и расширяемость;
- Максимальная автоматизация процессов исследований;
- “Настраиваемость на масштаб” возникающей задачи.

2. Структура и схема функционирования программно-аппаратного комплекса

Предложенная технология исследований реализована в виде специализированного программно-аппаратного комплекса (рис. 1). Используя единый формат данных, носители информации и единую технологию работы с информацией, на основе обобщенного параметрического подхода строится работа с моделями и массивами данных, представленная на рис. 2. Рассмотрим функционирование отдельных звеньев созданного специализированного программно-аппаратного комплекса (СПАК) применительно к исследованию элементов технологической оснастки (ЭТО) для оснащения современных технологических систем.

Для обеспечения параллельного проведения исследований на всех этапах работ (параллельно с разработкой моделей, чертежей, оснастки и т.д.) необходимы или использование единой информационной базы для всех этапов работ, или разработка специальных процедур согласования структур данных на различных этапах. Это может быть осуществлено как в ручном режиме, так и путем создания специализированных систем автоматизированного проектирования, исследования и изготовления. Специализированные системы ориентированы на те или иные классы объектов. Для обмена информацией между этими системами и универсальными системами могут быть разработаны специальные форматы и программное обеспечение. В то же время некоторые

системы (например, Pro/ENGINEER), обеспечивают единый формат хранения и обработки данных. Основой их функционирования является параметрический подход к пространственным, расчетным моделям и конструкторским документам. Естественным образом предлагается использовать параметрический подход, в частности, к построению и исследованию моделей даже без обеспечения сквозной цепочки ассоциативных связей в течение выполнения проекта создания той или иной сложной механической системы (рис. 3). В параметрической модели определяющими параметрами могут быть как конструктивные размеры, так и силовые воздействия, технологические параметры, физико-механические свойства материалов и т.д., а также варианты конструктивных решений. Важно то, что при параметризации моделей исследуемых элементов соблюдается целостность конструкции при варьировании отдельных их параметров или наборов таких параметров. Параметризация также является основным шагом на пути применения того или иного метода оптимизации конструкции. В данном случае предлагается параметрический подход предложить для уточнения параметров достоверных численных моделей исследуемых элементов (типы конечных элементов, их размеры, зоны сгущения и т.д.).

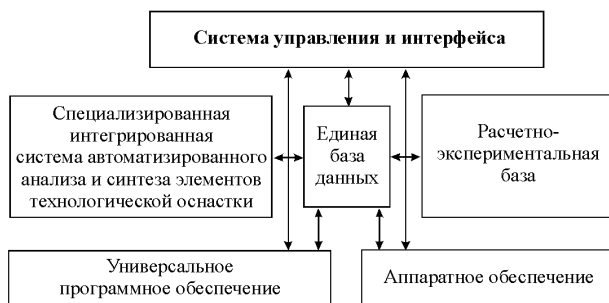


Рисунок 1 – Общая схема анализа и синтеза элементов сложных механических систем (на примере элементов технологической оснастки)

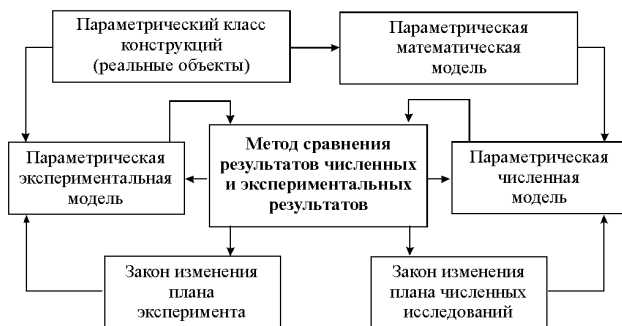


Рисунок 2 – Структурная схема системы автоматизированного расчетно-экспериментального исследования

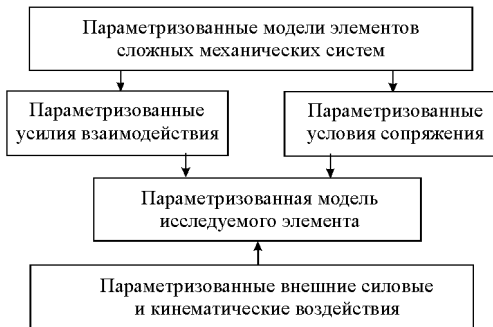


Рис.3. Параметризованные модели элементов сложной механической системы

Существующие в настоящее время направления исследования механических конструкций можно разделить по типу используемого программного обеспечения (специализированное и универсальное), преимуществам и недостаткам которых обусловлены их структурой, сложностью и областью применения. Для устранения недостатков указанных типов программного обеспечения и объединения их преимуществ предлагается использовать интегрированные схемы исследований.

Данные подходы объединяют универсальные САД-системы (например, PRO/ENGINEER), универсальные САЕ-системы (ANSYS), а также специальное ПО. Результатом работы всего указанного комплекса являются параметризованные конечно-элементные модели, которые позволяют оперативно производить построение баз данных и их модификацию для возникающих задач.

Использование специализированных программных модулей позволяет дополнить современные мощные компьютерные системы проектирования и анализа накопленным опытом, знаниями и учетом специфики проектируемых изделий. При этом объединяются тенденции универсализации, возможностей интеллектуализации моделей и специализации их направленности.

Таким образом, комплексная схема построения конечно-элементной модели элементов сложных механических систем и исследования их напряженно-деформированного состояния принимает многозвенный вид, представленный на рис. 4.

Предложенный подход соединяет преимущества параметрического моделирования, универсальности и учета специфики исследуемых конструкций, специализированного программного обеспечения, а также классического метода конечных элементов. Полученные параметрические модели в соответствие со схемой, приведенной на рис. 2, используются для поливариантных расчетов напряженно-деформированного состояния ЭТО с целью определения параметров достоверных численных моделей.

Предложенный подход позволяет устранить существующие недостатки традиционной технологии расчетных и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем, а именно формализовать процесс сравнения, автоматизировать процесс улучшения численной модели и повысить оперативность всего цикла исследований на основе применения параметрических пространственных твердотельных и конечно-элементных моделей.

Взаимодействие отдельных модулей СПАК показано на рис.5. Как указыва-

лось ранее, самостоятельную ценность имеют не только и не столько экспериментально проверенные результаты численных исследований, но и рационально сбалансированная достоверная численная модель объекта. Конечно-элементная модель сложного объекта может иметь также и большую коммерческую ценность. Кроме того, предложенная методика может быть положена в основу иерархической базы данных и знаний о том или ином классе объектов, причем объектами сравнения могут быть множества баз данных (как численных, так и экспериментальных). Здесь также могут быть введены соответствующие критерии улучшения модели, причем для сравнения могут быть взяты модели, полученные независимо из различных источников и в разное время.

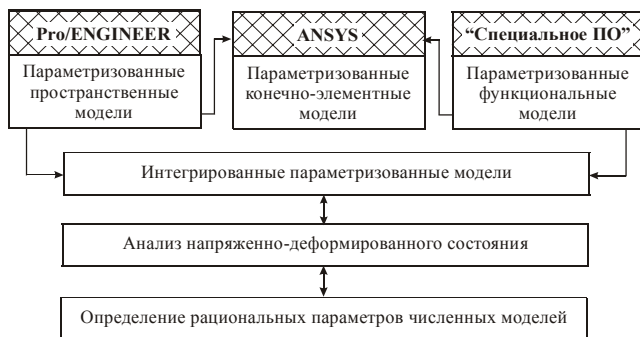


Рисунок 4 – Комплексная схема построения параметрических моделей для исследования напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем

Окончательным результатом исследования является достоверная численная модель для определения напряженно-деформированного состояния тех или иных объектов или классов объектов.

При решении поставленной задачи при помощи предложенного расчетно-экспериментального метода ее можно обратить: пусть имеется достаточно точный инструмент исследования численных моделей, однако существует сомнение в применимости тех или иных математических моделей. То же – на любом участке цепи “математическая модель – численная модель – экспериментальная модель с измерительной аппаратурой”. В этом случае можно определить структуру и параметры той или иной модели или определить область в пространстве варьируемых параметров, в пределах которой справедливы созданные модели.

Формально в процессе исследований можно “уравнять в правах” все типы моделей, выделив группу уточняющих моделей и уточняемую модель. Кроме того, возможна и постановка “смешанной” задачи, т.е. задачи, в которой объектом уточнения является множество параметров, представляющее совокупность параметров из различных типов моделей. В этом случае вместо уточняющих и уточняемых моделей (и их параметров) в качестве основных объектов выступают соответственно подмножества параметров. Более того, состав этих множеств может изменяться за счет “миграции” параметров из группы в группу.



Рисунок 5 – Взаимодействие модулей созданного СПАК на базе метода конечных элементов и спекл-голографической интерферометрии

Предлагаемый метод изучения напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем допускает глубокую степень формализации, однако большую роль в процессе исследований играет сам исследователь (или группа исследователей). В его компетенции – определение, изменение (удаление, пополнение) множества параметров, а также границ их изменения, разрешение коллизий, а также текущий контроль за процессом. Это обусловлено, во-первых, невозможностью на данном этапе полной формализации предлагаемой технологии исследований, во-вторых, необходимостью исключения тупиковых ситуаций и, в-третьих, очень высокой стоимостью ошибки (неоправданное усложнение плана экспериментальных исследований может повлечь такой рост общей стоимости всего комплекса исследований группы или класса конструкций, что он превысит стоимость аналогичных работ по традиционному способу).

Предложенные схемы расчетно-экспериментальных исследований позволяют оперативно проводить *серии* исследований групп конструкций, при-

чем наиболее трудоемкая часть, а именно экспериментальная, проводится в минимально возможном объеме.

Используя преимущества INTERNET-технологий, исследования с применением предложенного расчетно-экспериментального метода можно, во-первых, распараллелить (т.е. одновременно выполнять отдельные этапы и подэтапы силами различных исследователей и исследовательских групп), а, во-вторых, разнести географически и хронологически. При организации сервера баз данных возможна также определенная организация хранения результатов исследований, позволяющая создавать банки данных по тем или иным группам конструкций. Придав таким базам данных свойства открытости и доступности, на определенной стадии их развития можно создавать “верификационные эталоны” для различных видов механических систем. Это в свою очередь позволяет создавать экспертные системы, само существование которых избавило бы от необходимости проводить большую часть экспериментальных исследований, поскольку перед предстоящим циклом исследований всегда была бы возможность обратиться к соответствующей (и все время пополняемой) базе знаний. Чем полнее и совершеннее эта база, тем больше вероятность получить необходимые рекомендации для построения достоверной численной модели исследуемой механической системы.

Естественно, что при проведении расчетно-экспериментальных исследований в предложенной постановке одним из требований является некоторая степень *избыточности* экспериментальных данных, которая позволяет повысить степень точности и полноты создаваемой численной модели.

Таким образом, предложенный подход позволяет устранить существующие недостатки традиционной технологии расчетных и экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем, а именно формализовать процесс сравнения, автоматизировать процесс улучшения численной модели и повысить оперативность всего цикла исследований.

3. Состав программного и аппаратного комплексов

При оснащении создаваемого программно-аппаратного комплекса программным обеспечением учитывались следующие факторы: максимальные функциональные возможности программного обеспечения; беспроблемность обмена данными; соответствие потребностей программного обеспечения возможностям аппаратного обеспечения; возможность использования лицензионного программного обеспечения в научных исследованиях и учебном процессе.

В связи с этим в состав ПО были включены следующие программные комплексы (рис. 6).

Для реализации всех возможностей разработанного и привлекаемого программного обеспечения при формировании аппаратного обеспечения созданного программно-аппаратного комплекса предъявлялись следующие требования: максимальное использование возможностей, представляемых ПО и

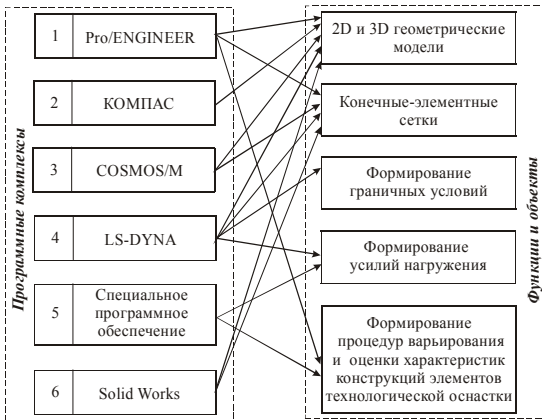


Рис. 6. Программные комплексы, их функции и объекты оперирования в создаваемом программно-аппаратном комплексе

операционными системами, на 32-разрядной платформе; сбалансированность отдельных звеньев аппаратного обеспечения и каналов передачи информации; унификация платформ и оборудования отдельных звеньев аппаратного обеспечения; сравнительно низкая стоимость. Комплексу данных требований отвечает аппаратное обеспечение, приведенное на рис. 7.

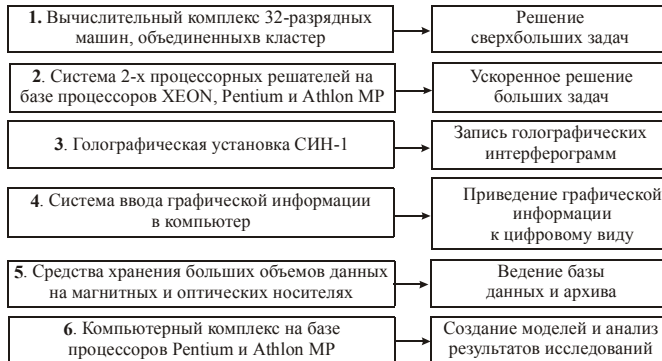


Рисунок 7 – Состав и функции элементов аппаратного обеспечения программно-аппаратного комплекса

Созданный программно-аппаратный комплекс обеспечивает расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем практически любой степени сложности в короткие сроки. Так, объем оперативной памяти в 4 GB (вычислитель на базе процессоров XEON) позволяет размещать в оперативной памяти задачи, по объему соответствующие граничным возможностям операционной системы Windows и системы ANSYS для 32-разрядных платформ. При этом RAID-массивы накопителей на жестких магнитных дисках объемом 0,3 TB позволяют размещать сверхгромоздкие базы данных и оперативно их обрабатывать. Голографическая установка СИН-1 (см. рис. 7) дает возможность фиксации спекл-интерферограмм проектируемых элементов технологической оснастки, причем точность определения перемещений – до 0,1 мкм.

Для ввода графической информации в компьютер используется комплекс на основе Web-камеры, цифровых фотокамер HP и Olympus с фиксирующими матрицами 1 и 4 мегапикселей. Передача и хранение информации осуществляется при помощи перезаписываемых и записываемых оптических носителей информации емкостью 0,7-4,7 GB, а также накопителей на жестких магнитных дисках емкостью 1,1 TB.

Разделение задачи численных исследований на препроцессинг, решение систем уравнений и постпроцессинг позволяет эффективно использовать вычислительные ресурсы программно-аппаратного комплекса, привлекая на первый и третий этапы этого процесса компьютеры с более скромными требованиями к их техническим характеристикам и сосредотачивая всю вычислительную мощь, требуемую на втором этапе, на кластерной системе и двух-процессорных рабочих станциях.

Особенностью созданного программно-аппаратного комплекса является блочно-модульная структура аппаратного обеспечения и программного обеспечения, способность к развитию и модернизации, универсальность.

4. Решение модельных задач

С использованием разработанного программно-аппаратного комплекса было проведено решение ряда тестовых задач. В частности, для апробации функционирования экспериментальной части ПАК было спроектировано, изготовлено и смонтировано устройство под условным названием “Краб” (рис. 8). Данное устройство позволяет проводить крепление и нагружение сплошных и перфорированных пластин, геометрия которых может быть достаточно произвольной. В частности, были спроектированы, изготовлены и исследованы сплошные и перфорированные пластины для имитации поведения базовых плит приспособлений и других объектов с особенностями геометрии. На рис. 9 приведены некоторые голографические интерферограммы, характеризующие деформированное состояние пластин при действии центрально приложенной внешней силы (имитировалось при помощи силового винта приспособления “Краб”).

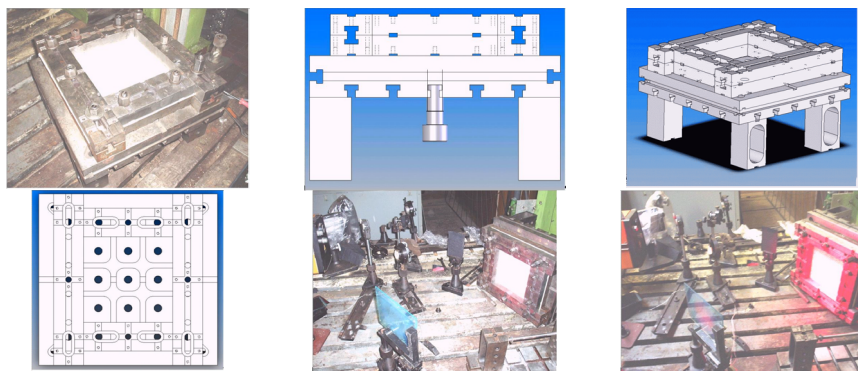


Рисунок 8 – Экспериментальное устройство “Краб”

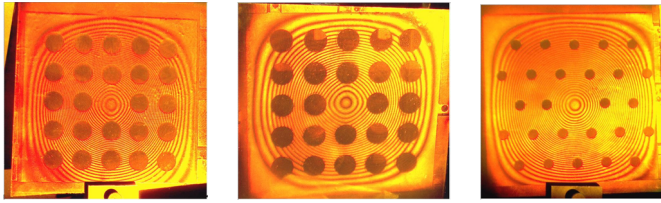


Рисунок 9 – Голографические интерферогаммы тест-пластин

Параллельно с экспериментом проводился численный анализ напряженно-деформированного состояния данных пластин (рис. 10). Конечно-элементные модели тест-пластин приведены на рис. 11.

На рис. 12, 13 приведены результаты количественного сравнения данных, полученных численно и экспериментально. Видно, что при уменьшении среднего размера конечного элемента конечно-элементные модели повышается точность результатов. Однако это приводит к значительному росту требуемых для расчетов вычислительных ресурсов. Таким образом, исходя из конкретных условий и требований, возникающих на практике, можно путем варьирования конечно-элементной модели обеспечивать необходимую точность численных моделей элементов технологической оснастки.

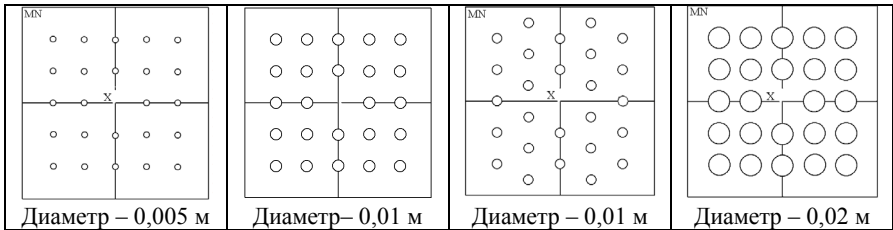


Рисунок 10 – Схема сплошных и перфорированных тест-пластин толщиной 2 и 4 мм, материал – Сталь 20Х, размеры по контуру закрепления – 0,18х0,18 м и варьируемым диаметром отверстий

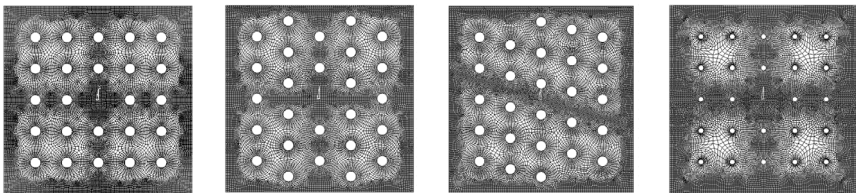


Рисунок 11 – Конечно-элементные модели тест-пластин

5. Заключение

Проведенный комплекс расчетных и экспериментальных исследований подтвердил достоверность и точность работы отдельных модулей программного-аппаратного комплекса и позволяет сделать следующие выводы.

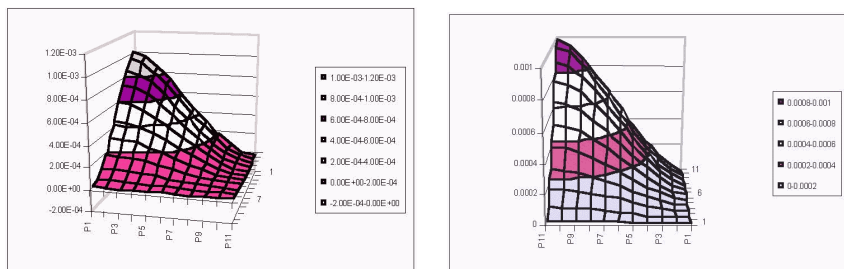


Рисунок 12 – Распределение перемещений в пластине, полученное численно и экспериментально

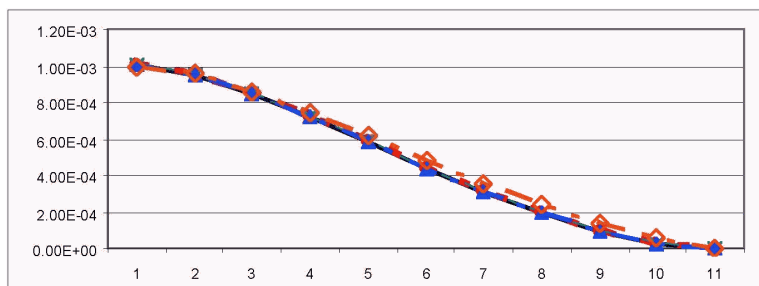


Рисунок 13 – Результаты численного сравнения экспериментальных и численных данных анализа напряженно-деформированного состояния тест-пластин (одна четверть)

1. Предложенный подход к решению задачи синтеза численных моделей элементов сложных механических систем реализован в виде *сбалансированного* по составу, производительности, емкости аппаратного и программного обеспечения программно-аппаратного комплекса.

2. Разработанный СПАК дает возможность в автоматизированном режиме производить построение пространственных параметрических моделей и конечно-элементных сеток элементов исследуемых объектов

3. Исследователь в процессе расчетов и экспериментов имеет возможность корректировки процесса синтеза моделей на всех этапах исследований

4. Тестовые расчеты подтвердили высокую эффективность и точность разработанного ПАК.

5. Разработанный программно-аппаратный комплекс построен на базе соединения возможностей современных эффективных методов, технологий аппаратных средств и программных комплексов, что в совокупности создает качественно новую среду автоматизации расчетно-экспериментального исследования элементов сложных механических систем, в т.ч. технологической оснастки.

Таким образом, создан реальный мощный инструмент решения любых задач анализа и синтеза элементов сложных механических систем с обеспечением высокой точности и достоверности результатов. Этот программно-аппаратный комплекс развернут на базе центра «Тензор» НТУ «ХПИ» и является по сути первым в

Украине специализированным программно-аппаратным комплексом с такими возможностями (Tensor.kharkiv.com, mailto:tenzor@online.kharkiv.ua).

Список литературы: 1. Гриценко Г.Д., Малакей А.Н., Миргородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А. Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – 2002. – № 1. – С. 6-13. 2. Ткачук Н.А., Пономарев Е.П., Медведева А.В., Миргородский Ю.Я., Малакей А.Н., Гриценко Г.Д. Определение рациональных параметров элементов механических систем // Механіка та машинобудування. – 2001. – № 1,2. – С. 308-314. 3. Ткачук Н.А. Специализированные системы автоматизированного исследования прочностных и жесткостных характеристик элементов технологической оснастки // Вісник Національного технічного університету “ХПІ”. Тематичний випуск. “Динаміка і міцність машин”. Збірник наукових праць НТУ “ХПІ”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2003. – № 12. т.1. – С.166-171. 4. Ткачук Н.А. Интенсивная схема экспериментальных исследований элементов технологических систем. // Динамика и прочность машин. – 1998. – Вып. 56. – С. 175-181. 5. Ткачук Н.А. Экспериментальное определение параметров конечно-элементных моделей // Механіка та машинобудування. – 1998. – № 1. – С.68-75. 6. Капустин А.А., Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальный метод исследования деформаций элементов механических систем // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ – 1999. – Вып.53. – С.148-155. 7. Ткачук Н.А. Элементы технологических систем: компьютерные модели, экспериментальные исследования, численный анализ прочности и жесткости // Вісник Інженерної Академії України. – Київ. – 2001. – № 3 (част.2). – С.297-302. 8. Ткачук Н.А. Расчетно-экспериментальное исследование элементов сложных механических систем // Труды Одесского политехнического университета: Научный и производственно-практический сборник по техническим и естественным наукам. – Одесса.– 2001. – Вып.5. – С.198-201.

Поступила в редколлегию 29.04.04

УДК 622.691.4

А.В.ЯКУНИН, канд.техн.наук; *В.А.РАТАУШКИН*, НТУ «ХПИ»;

НЕСТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В МАГИСТРАЛЬНОМ ГАЗОПРОВОДЕ ПОДЗЕМНОЙ ПРОКЛАДКИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОВЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Розглядаються слабо нестационарні неізотермічні керовані процеси транспорту газу, що дозволяє використати ряд спрощуючих припущень про характер течії. Пропонується інтегрально-різницева модель розподілу тиску газу вздовж трубопроводу, одержана на основі методу малого параметра і декомпозиції крайової задачі в рамках операційного числення. Рекурентні процедури послідовного інтегрування можна реалізувати як стандартними методами, так і на основі попередньої апроксимації ядер інтегральних операторів та їх аргументів.

Введение. Развитие современных систем оперативно-технологического управления магистральными газопроводами (МГ) требует постоянного совершенствования соответствующего математического обеспечения [1-4]. Предлагаемая модель представляет собой модификацию с учетом дополнительных факторов известных интегрально-разностных уравнений нестационарных изотермических потоков в МГ [5, 6]. Трансформация основана на декомпозиции краевой задачи по малому параметру [7] в рамках операционного исчисления [8].

Постановка задачи и ее упрощение. Нестационарное неизотермическое течение газа в МГ при обычно вводимых упрощениях [1-3] описывается квазилинейной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial t} + zRT \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda zRT}{2D} \cdot \frac{q^2}{p} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{p}{zRTq} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{4K}{DC_p q} \cdot (T - T_*) - \frac{1}{C_p q} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

при начальных и граничных условиях

$$0 \leq x \leq L: \quad T(x,0) = T_i(x); \quad q(x,0) = q_i(x); \quad p(x,0) = p_i(x); \quad (4)$$

$$t > 0: \quad T(0,t) = T_b(t); \quad p(0,t) = p_{b0}(t); \quad p(L,t) = p_{b1}(t). \quad (5)$$

Здесь $p = p(x,t)$ – давление; $q = q(x,t)$ – удельный массовый расход; $T = T(x,t)$ – температура; x – координата вдоль трубопровода; t – время; R – газовая постоянная; z – коэффициент сжимаемости; L и D – длина и диаметр трубопровода; λ – коэффициент гидравлического сопротивления; C_p – удельная теплоемкость; K – коэффициент теплопередачи; $T_* = T_*(x,t)$ – температура окружающей среды (грунта); $T_i(x)$, $q_i(x)$, $p_i(x)$, и $T_b(t)$, $p_{b0}(t)$, $p_{b1}(t)$ – функции, определяющие соответственно начальные и граничные условия.

В отличие от [5,6], где используется линеаризация задачи в изотермическом приближении, предлагаемый подход реализует ее декомпозицию как по скорости протекания процессов гидродинамики и теплообмена, так и по величине вклада отдельных факторов в реакцию системы.

Ограничиваясь рассмотрением случая течения охлажденного газа (по технологическим соображениям приблизительно до температуры грунта $T \approx T_*$) и считая температуру окружающей среды постоянной $T_* = \text{const}$, можно представить слабо нестационарные неизотермические управляемые процессы в МГ как наложение стационарного изотермического режима (основной фон) и нестационарных неизотермических возмущений. В результате краевая задача (1) – (5) принимает упрощенный вид, допускающий расщепление по малому параметру $\varepsilon = \sqrt{2D/(\lambda L)} = 10^{-1} \div 10^{-2}$ [9]. Соответствующий расчет теплового режима представлен в статье [10], поэтому в данной работе рассматривается только решение гидродинамической подсистемы (1), (2).

Если ввести безразмерные переменные

$$\bar{p} = \frac{p}{p_c}; \quad \bar{q} = \frac{q}{q_0}; \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0}; \quad \bar{T}_* = \frac{T_*}{T_0}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{L}$$

и представить начальные и граничные условия как

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{x} \leq 1: \quad & \bar{T}(\bar{x}, 0) = 1 + \varepsilon \bar{T}_i^{(1)}(\bar{x}); \quad \bar{q}(\bar{x}, 0) = 1 + \varepsilon \bar{q}_i^{(1)}(\bar{x}); \\ 0 \leq \bar{x} \leq 1: \quad & \bar{p}(\bar{x}, 0) = \bar{p}_0(\bar{x}) + \varepsilon \bar{p}_i^{(1)}(\bar{x}); \\ \bar{t} > 0: \quad & \bar{T}(0, \bar{t}) = 1 + \varepsilon \bar{T}_b^{(1)}(\bar{t}); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{t} > 0 : \bar{p}(0, \bar{t}) = \bar{p}_0(0) + \varepsilon \bar{p}_{b0}^{(1)}(\bar{t}) ; \quad \bar{p}(1, \bar{t}) = \bar{p}_0(1) + \varepsilon \bar{p}_{b1}^{(1)}(\bar{t}) , \quad (7)$$

где первые слагаемые соответствуют основному фону, а вторые слагаемые отражают его возмущения, тогда можно получить краевую задачу для уравнений неразрывности и движения

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}} = 0 ; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \varepsilon a \cdot \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{t}} + \varphi \cdot \bar{q} = 0 \quad (9)$$

при начальных и граничных условиях (6), (7).

Здесь $p_0(x)$, q_0 и T_0 – значения давления, удельного массового расхода и температуры при основном стационарном режиме; $p_c = c_0 q_0$ – некоторое характерное давление; $c_0 = \sqrt{zRT_0}$ – скорость звука в газе при основном стационарном режиме; $a = \sqrt{\lambda L / (2D)}$ – постоянный коэффициент; $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{t}) = a^2 \bar{T} \bar{q} / \bar{p}$ – переменный коэффициент. Причем учтено, что $\bar{q}_0 = 1$; $T_0 = 1$.

Для упрощения записей в дальнейших выкладках знак черты над безразмерными переменными опущен.

От гидродинамической системы (8), (9) можно перейти к одному телеграфному уравнению относительно давления. Продифференцировав уравнение (8) по t , а уравнение (9) – по x и исключив саму переменную q и ее производные

водные $\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}$, можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{a}{T} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{a}{T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \\ - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\varphi}{T} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = 0 . \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно [4] функция $\varphi = \varphi(x, t)$ имеет малую крутизну, т.е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim \varepsilon .$$

Учитывая также малость $\frac{\partial T}{\partial t}$, уравнение (10) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{a}{T} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \varepsilon^2 \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - \\ - \varepsilon^2 \frac{a^2}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\varphi}{T} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = 0 . \end{aligned} \quad (11)$$

Используя разложения

$$T(x, t) = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots ; \quad p(x, t) = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \dots ;$$

$$q(x, t) = q^{(0)} + \varepsilon q^{(1)} + \varepsilon^2 q^{(2)} + \dots ; \quad \varphi(x, t) = \varphi^{(0)} + \varepsilon \varphi^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi^{(2)} + \dots ,$$

где

$$\begin{aligned}\varphi^{(0)} &= a^2 \frac{T^{(0)} q^{(0)}}{p^{(0)}} = \frac{a^2}{p^{(0)}}; \quad \varphi^{(1)} = a^2 \left(\frac{T^{(1)} q^{(0)}}{p^{(0)}} + \frac{T^{(0)} q^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{T^{(0)} q^{(0)} p^{(1)}}{p^{(0)2}} \right) = \\ &= a^2 \left(\frac{T^{(1)}}{p^{(0)}} + \frac{q^{(1)}}{p^{(0)}} - \frac{p^{(1)}}{p^{(0)2}} \right),\end{aligned}$$

можно получить рекуррентную последовательность краевых задач для $p^{(n)}$ $n = 0, 1, 2, \dots$.

Из практических соображений достаточно ограничиться расчетом до первого приближения

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)}. \quad (12)$$

Построение интегрально-разностной модели распределения давления. Нулевому приближению соответствует основной стационарный изотермический режим [1-3]

$$q^{(0)} = 1; \quad T^{(0)} = 1; \quad p^{(0)} = p_0(x) = \sqrt{p_0^2(0) - (p_0^2(0) - p_0^2(1))x}. \quad (13)$$

При $q_0 > 0$ стационарное давление $p_0(x)$ – монотонно убывающая функция. Для упрощения в уравнении (11) можно сделать замену $x \rightarrow u$, где

$$u = (p_0(x))^{3/2}.$$

Тогда, обозначая $u_0 = (p_0(0))^{3/2}$, $u_1 = (p_0(1))^{3/2}$ и выражая производную $\frac{dp_0}{dx}$ из стационарного уравнения движения [1-3] (в принятых безразмерных переменных)

$$\frac{dp_0}{dx} + a^2 \frac{1}{p_0} = 0;$$

можно получить

$$p^{(0)} = p_0(x) = u^{2/3}; \quad (14)$$

$$x = \frac{p_0^2(0) - p_0^2(x)}{p_0^2(0) - p_0^2(1)} = \frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}}; \quad \frac{dp_0}{dx} = -a^2 \frac{1}{p_0} = -a^2 u^{-2/3};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p_0} \cdot \frac{dp_0}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial u} = \frac{3}{2} p_0^{1/2} \cdot (-a^2 u^{-2/3}) \cdot \frac{\partial}{\partial u} = -\frac{3}{2} a^2 u^{-1/3} \cdot \frac{\partial}{\partial u};$$

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{dx} = -\frac{a^2}{p_0} \cdot \frac{dp_0}{dx} = -\frac{a^2}{u^{4/3}} \cdot (-a^2 u^{-2/3}) = a^4 u^{-2}.$$

В результате уравнение (11) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \varepsilon \frac{4u^{2/3}}{9a^3 T} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{4u^{2/3} \varphi}{9a^4 T} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} - \varepsilon \frac{a}{3u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} + \\ + \varepsilon^2 \frac{4u^{2/3}}{9a^2 T^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{2u^{1/3}}{3\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = 0,\end{aligned} \quad (15)$$

где введением множителя ε учтена также малость пятого слагаемого.

Из уравнения (15) для первого приближения следует

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial u^2} - \frac{4u^{2/3}}{9a^4} \cdot \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4}{9a^2} \cdot \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{2au^{-4/3}}{9} = 0. \quad (16)$$

Следует подчеркнуть, что в соотношении (16) оставлен малый член со второй производной по времени $\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2}$, который отражает волновой характер исследуемого процесса. Его отбрасывание соответствует сингулярному возмущению исходного уравнения – переходу от гиперболического типа к параболическому, что не позволяет адекватно описать начальный период времени протекания процесса и приводит к неустойчивым при $t \rightarrow 0$ вычислительным процедурам.

Усредняя малый коэффициент при этом дополнительном члене, уравнение (16) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial u^2} - a_1^2 \cdot \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - a_2 \cdot \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + a_3 u^{-4/3} = 0, \quad (17)$$

где постоянные коэффициенты a_1, a_2, a_3 определяются выражениями

$$a_1^2 = \left(\frac{4u^{2/3}}{9a^4} \right)_{cp} = \frac{4u^{2/3}}{9a^4} \cdot \frac{1}{u_0 - u_1} \cdot \int_{u_1}^{u_0} u^{2/3} du = \frac{4(u_0^{5/3} - u_1^{5/3})}{15a^4(u_0 - u_1)};$$

$$a_2 = \frac{4}{9a^2}; \quad a_3 = \frac{2a}{9}.$$

Краевые условия для первого приближения

$$u_1 \leq u \leq u_0: \quad p^{(1)}(u, 0) = p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right); \quad (18)$$

$$t > 0: \quad p^{(1)}(u_0, t) = p_{b0}^{(1)}(t); \quad p^{(1)}(u_1, t) = p_{b1}^{(1)}(t). \quad (19)$$

Преобразуя уравнение (17) по Лапласу [8] с учетом начальных условий (18), можно построить его операторное изображение

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}(u, s)}{\partial u^2} - a_1^2 s^2 \cdot P^{(1)}(u, s) + a_1^2 s \cdot p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + a_1^2 \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial u} p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) - a_2 s \cdot P^{(1)}(u, s) + a_2 \cdot p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + a_3 u^{-4/3} = 0, \quad (20)$$

где $P^{(1)}(u, s)$ – изображение давления.

Для учета волнового характера течения достаточно ограничиться наличием в уравнении (20) только второго слагаемого, а третье и четвертое, как менее значительные, отбросить. В результате получается операторное уравнение

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}(u, s)}{\partial u^2} - \gamma^2 \cdot P^{(1)}(u, s) + 2G(u) = 0, \quad (21)$$

где

$$\gamma = a_1 \sqrt{s(a + 2\alpha)}; \quad \alpha = \frac{a_2}{2a_1^2}; \quad G(u) = \frac{a_2}{2} \cdot p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + \frac{a_3}{2} u^{-4/3}.$$

Решение уравнения (21) без учета граничных условий (19) можно представить в следующей нетрадиционной симметричной форме

$$P^{(1)}(u, s) = A(s) \cdot \exp(-\gamma(u_0 - u)) + B(s) \cdot \exp(-\gamma(u - u_1)) + \int_{u_1}^u \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(u - \theta)) G(\theta) d\theta + \int_u^{u_0} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(\theta - u)) G(\theta) d\theta, \quad (22)$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. К выражению (22) можно прийти с помощью метода вариации произвольных постоянных. Такая форма записи изображения позволяет получить достаточно простые оригиналы.

Здесь $A(s)$ и $B(s)$ – произвольные функции, оригиналы которых $a(t)$ и $b(t)$ принимаются за новые вспомогательные переменные, называемые волновыми [5,6]. Для их нахождения используются граничные условия (19):

$$A(s) + B(s) \cdot \exp(-\gamma(u_0 - u_1)) + \int_{u_1}^{u_0} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(u_0 - \theta)) G(\theta) d\theta = P_{b_0}^{(1)}(s); \quad (23)$$

$$A(s) \cdot \exp(-\gamma(u_0 - u_1)) + B(s) + \int_{u_1}^{u_0} \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma(\theta - u_1)) G(\theta) d\theta = P_{b_1}^{(1)}(s), \quad (24)$$

где $P_{b_0}^{(1)}(s)$ и $P_{b_1}^{(1)}(s)$ – изображения заданных граничных условий.

Используя табличный оригинал [8]

$$\frac{\exp(-h\sqrt{s(s+2\alpha)})}{\sqrt{s(s+2\alpha)}} \doteq \exp(-\alpha t) \cdot I_0\left(\alpha\sqrt{t^2 - h^2}\right) \cdot \eta(t-h)$$

непосредственно и дифференцируя его по параметру h с учетом равенства $\frac{dI_0(t)}{dt} = I_1(t)$ и применяя интеграл свертки, можно в уравнениях (22) – (24)

перейти во временную область и получить рекуррентные интегрально-разностные соотношения для давления и волновых переменных

$$\begin{aligned} p(u, t) = & u^{2/3} + \varepsilon R(t, a_1(u_0 - u)) a(t - a_1(u_0 - u)) + \varepsilon R(t, a_1(u - u_1)) \times \\ & \times b(t - a_1(u - u_1)) + \varepsilon \eta(t - a_1(u_0 - u)) \int_0^{t - a_1(u_0 - u)} S(t - \tau, a_1(u_0 - u)) a(\tau) d\tau + \\ & + \varepsilon \eta(t - a_1(u - u_1)) \int_0^{t - a_1(u - u_1)} S(t - \tau, a_1(u - u_1)) b(\tau) d\tau + \\ & + \varepsilon \int_{u_1}^u T(t, a_1(u - \theta)) G(\theta) d\theta + \varepsilon \int_u^{u_0} T(t, a_1(\theta - u)) G(\theta) d\theta; \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} a(t) = & p_{b_0}^{(1)}(t) - R(t, a_1(u_0 - u_1)) b(t) - \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) \times \\ & \times \int_0^{t - a_1(u_0 - u_1)} S(t - \tau, a_1(u_0 - u_1)) b(\tau) d\tau - \int_{u_1}^{u_0} T(t, a_1(u_0 - \theta)) G(\theta) d\theta; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} b(t) = & p_{b_1}^{(1)}(t) - R(t, a_1(u_0 - u_1)) a(t) - \eta(t - a_1(u_0 - u_1)) \times \\ & \times \int_0^{t - a_1(u_0 - u_1)} S(t - \tau, a_1(u_0 - u_1)) a(\tau) d\tau - \int_{u_1}^{u_0} T(t, a_1(\theta - u_1)) G(\theta) d\theta, \end{aligned} \quad (27)$$

причем $a(t) = 0$ и $b(t) = 0$ при $t \leq 0$. Здесь учтено (12) – (14).

Вспомогательные функции $R(t, h)$, $S(t, h)$, $T(t, h)$ определяются выражениями

$$R(t, h) = \exp(-\alpha h) \eta(t - h); \quad S(t, h) = \frac{\alpha h \exp(-\alpha t)}{\sqrt{t^2 - h^2}} I_1\left(\alpha \sqrt{t^2 - h^2}\right);$$

$$T(t, h) = \frac{1}{a_1} \exp(-\alpha t) I_0\left(\alpha \sqrt{t^2 - h^2}\right) \eta(t - h).$$

Здесь

$$\eta(t) - \text{единичная ступенчатая функция Хевисайда: } \eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases};$$

$I_0(t)$ и $I_1(t)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

В правые части соотношений (25) – (27) искомые величины входят с запаздыванием. Расчеты сводятся к последовательному интегрированию.

Заключение. Предложенная интегрально-разностная модель позволяет определить давление в любой точке МГ в произвольный момент времени. Вычисление квадратур можно осуществить стандартными методами. Однако учет специфики задачи позволяет значительно упростить вычислительный процесс и повысить его быстродействие. Поскольку давление и волновые переменные меняются значительно медленнее соответствующих ядер интегральных операторов, то достаточно использовать их кусочно-линейную аппроксимацию. При этом сами ядра можно аппроксимировать частичной суммой экспоненциального ряда. Соответствующие процедуры обсуждаются в [6].

Сравнение результатов расчета распределения давления газа вдоль МГ подземной прокладки при слабо нестационарных управляемых процессах по предложенным соотношениям (25) – (27) с принимаемым за эталонное аналогичным распределением, полученным конечно-разностными методами на базе исходной модели (1) – (3), показывает, что относительная погрешность не превышает 5% ÷ 10%. В дальнейшем предполагается расширить область применения предложенного подхода за счет учета в модели неизотермичности основного стационарного режима и изменения температуры окружающей среды вдоль трассы МГ.

Список литературы: 1. Панкратов В.С., Дубинский А.В., Сиперштейн Б.И. Информационно-вычислительные системы в диспетчерском управлении газопроводами. – Л.: Недра, 1988. – 246 с. 2. Поляков Г.Н., Яковлев Е.И., Пиотровский А.С. Моделирование и управление газотранспортными системами. – СПб.: Недра, 1992. – 256 с. 3. Моделирование задач эксплуатации систем трубопроводного транспорта / Е.И. Яковлев, В.Д. Куликов, А.В. Шибиев и др. – М.: ВНИИОЭНГ, 1992. – 358 с. 4. Сложные трубопроводные системы / В.В. Грачев, М.А. Гусейнзаде, Б.И. Ксенз, Е.И. Яковлев. – М.: Недра, 1982. – 256 с. 5. Скларов Ю.С., Костюков В.В. Интегрально-разностные уравнения нестационарного режима магистрального газопровода // Методы и модели интенсификации производства. – К.: УМК ВО, 1988. – С. 43-49. 6. Скларов Ю.С., Канов Л.Н., Костюков В.В. Численные методы и алгоритмы анализа нестационарных процессов транспорта газа на основе интегрально-разностной модели. – Севастополь, 1988. – 22 с. – Деп. в УкрНИИТИ 15.09.88, №2355-Ук88. 7. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с. 8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инжене-

ров. – М.: Наука, 1984. – 832 с. 9. *Идин М.А., Шершков В.В.* Решение задачи движения газа в трубе методом малого параметра // Пневматика и гидравлика: Приводы и системы управления. – 1984. – Вып. 10. – С. 249-263. 10. *Якунин А.В., Ратаушкин В.А.* Упрощенная модель теплового режима управляемого потока газа в магистральном трубопроводе подземной прокладки // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Динамика и прочность машин. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2002. – Вып. 10, т. 2. – С. 132-138.

Поступила в редколлегию 18.03.04

УДК 539.3

Е.Г.ЯНЮТИН, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ»;
А.С.ШАРАПАТА, ХНАДУ

ОБРАТНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Представлено стійке до похибок чисельно-аналітичне рішення некоректної оберненої задачі з ідентифікації закону зміни за часом нестационарного імпульсного навантаження, яке діє на круглу циліндричну оболонку скінченної довжини. Осесиметричний рух шарнірно-опертої оболонки в межах пружності моделюється на підґрунті уточненої теорії С.П.Тимошенка.

Numerically analytical solution of the ill-posed inverse problem in identification of the changing in time regularity of non-stationary impulsive loading steady to errors which affects the round cylindrical shell of a finite length is given. Axisymmetric movement of a joint-supported shell in the limits of elasticity is modelled grounded on S.P.Timoshenko's specified theory.

Постановка проблемы

В настоящее время интенсивно развивается исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) тел, находящихся под действием импульсных нагрузок. Важное место в исследованиях параметров НДС ответственных элементов конструкций и сооружений занимает решение проблем, связанных с определением действующего импульсного нагружения, а также с управлением их деформированием.

Анализ исследований и публикаций

Укажем некоторые публикации, непосредственно относящиеся к вопросу освещаемому в настоящей статье. В [1,3] рассмотрены построение математических моделей и методов исследования НДС (прямые задачи) при деформировании элементов конструкций цилиндрической формы. Авторы монографии [2] рассмотрели некоторые конкретные прямые и обратные задачи для цилиндрических тел. Несмотря на важное практическое приложение обратных задач по идентификации нестационарных нагрузок, они разработаны недостаточно. Остаются не изученными вопросы определения закона изменения импульсного нагружения на цилиндрическую оболочку при ее осесимметричном деформировании.

Постановка задачи

Рассмотрим упругую деформацию круглой цилиндрической оболочки с толщиной h и длиной l . Оболочка закреплена на торцах шарнирно с проскальзыванием, как показано на рис. 1. Реакция оболочки на осесимметричную нагрузку q моделируется системой линейных дифференциальных уравнений согласно теории С.П. Тимошенко [1,3]:

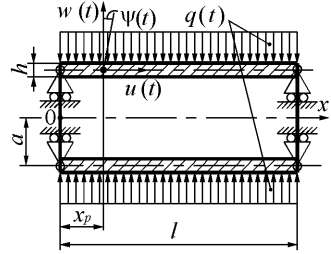


Рисунок 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\nu l}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$\bar{k}^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + l \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{l^2}{a} w + \nu l \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \frac{(1-\nu^2) l^2}{Eh} q(\xi, \tau); \quad (1)$$

$$\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \bar{k}^2 \left(l \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi l^2 \right) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} = 0;$$

где $\xi = x/l$; $\tau = t\sqrt{E}/(l\sqrt{\rho(1-\nu^2)})$; $\bar{k}^2 = 0,5(1-\nu)k^2$; t – размерное время; u, w

– перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно в осевом и нормальном направлениях по отношению к срединной поверхности; ψ – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки; ν, E – упругие постоянные материала оболочки; r – плотность материала оболочки; k – коэффициент сдвига; a – радиус кривизны срединной поверхности оболочки; x – координата в осевом направлении; $q(x,t)$ – заданная внешняя импульсная нагрузка.

Для определения компонентов обобщенного перемещения (w, u, ψ) используем следующие разложения искомых функций [1]:

$$w(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\tau) \sin(k\pi\xi); \quad u(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\tau) \cos(k\pi\xi); \quad \psi(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\tau) \cos(k\pi\xi), \quad (2)$$

где $a_k(t), b_k(t)$ и $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты разложений.

Разложения (2) обеспечивают следующие граничные условия для шарнирного опирания оболочки

$$N_x(\xi, t)|_{\xi=0, \xi=1} = 0, \quad w(\xi, t)|_{\xi=0, \xi=1} = 0, \quad M_x(\xi, t)|_{\xi=0, \xi=1} = 0, \quad (3)$$

Подставив ряды (2) в уравнения (1) с учетом свойств ортогональности произведения функций косинусов и синусов получим искомые коэффициенты разложений

$$a_k(\tau) = \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} I_{kr}(\tau); \quad b_k(\tau) = \sum_{r=1}^3 \Phi_{kr} I_{kr}(\tau); \quad c_k(\tau) = \sum_{r=1}^3 \Omega_{kr} I_{kr}(\tau), \quad (4)$$

где

$$I_{kr}(\tau) = \int_0^{\tau} P_k(x_1) \sin \alpha_{kr}(\tau - x_1) dx_1, \quad \Lambda_{kr} = - \frac{(B_k - \alpha_{kr}^2)(C_k - \alpha_{kr}^2)}{\alpha_{kr} \prod_{j=1, j \neq r}^3 (\alpha_{kj}^2 - \alpha_{kr}^2)}, \quad (5)$$

$$A_n = \bar{k}^2 n^2 \pi^2 + l^2 \alpha^{-2}; \quad B_n = n^2 \pi^2; \quad C_n = n^2 \pi^2 + 12 \bar{k}^2 l^2 h^{-2}.$$

$$\Phi_{kr} = -\frac{\nu l k \pi (C_k - \alpha_{kr}^2)}{\alpha_{kr} \prod_{j=1, j \neq r}^3 (\alpha_{kj}^2 - \alpha_{kr}^2)}, \quad \Omega_{kr} = \frac{12 k^{-2} l (B_k - \alpha_{kr}^2)}{h^2 \alpha_{kr} \prod_{j=1, j \neq r}^3 (\alpha_{kj}^2 - \alpha_{kr}^2)},$$

$$P_k(\tau) = 2(1 - \nu^2)^2 (Eh)^{-1} Q_k(\xi, \tau), \quad Q_k(\xi, \tau) = \int_0^1 q(\xi, \tau) \sin(n\pi\xi) d\xi. \quad (6)$$

Форма решения в виде соотношений (4) может быть получена, например, с помощью операционного исчисления. Заметим, что (4) обеспечивает выполнение нулевых начальных условий при деформировании оболочки.

Так как прямая и обратная задачи имеют непосредственную связь, то приведенное решение будем использовать для построения задачи идентификации. Целью работы является построение решения обратной задачи, устойчивого к погрешностям в исходных данных, для определения закона изменения во времени действующей на оболочку импульсной нагрузки $q(\xi, \tau)$ при известном ее геометрическом распределении по поверхности оболочки, а также при известном законе изменения во времени прогиба в одной из точек оболочки.

Решение задачи идентификации

Решение обратной задачи получим для случая нагружения оболочки, равномерно распределенной нагрузкой $q(\tau) = R_0(\tau)$, как показано на рис. 1. Выражения (5) и (6) для $P_k(\tau)$ и $I_{kr}(\tau)$ примут следующий вид

$$P_k(\tau) = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \Phi_k^g R_0(\tau), \quad I_{kr}(\tau) = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \Phi_k^g \int_0^\tau R_0(\tau) \sin(\alpha_{kr}(\tau - x_1)) dx_1,$$

$$\text{где } \Phi_k^g = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos(k\pi)).$$

Формула (2) для прогиба в точке ξ_p будет такой

$$w(\xi_p, \tau) = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \sum_{k=1}^N \Phi_k^g \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} \int_0^\tau R_0(\tau) \sin(\alpha_{kr}(\tau - x_1)) dx_1. \quad (7)$$

Если функция w задана в некоторой точке ξ_p , а $R_0(\tau)$ неизвестна, то (7) является интегральным уравнением Вольтерра I-го рода для $R_0(\tau)$. Аппроксимируя искомую функцию в (7) конечно-постоянной функцией времени, получим выражение

$$w_m^* = \frac{2(1 - \nu^2)^2}{Eh} \sum_{k=1}^N \Phi_k^g \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} \sum_{p=1}^m R_{0,p} \gamma(k, r, m, p), \quad (8)$$

где w^* – прогиб в точке, содержащий, например, уже погрешности случайного характера; $m = 0, 1, \dots, M$; M – число интервалов по времени; $M = \tau_{inv} / \Delta\tau$, τ_{inv} – время исследования; $\gamma(k, r, m, p) = \alpha_{kr}^{-1} \{ \cos(\alpha_{kr}(m-p)\Delta\tau) - \cos(\alpha_{kr}(m-p+1)\Delta\tau) \}$. Выражение (8) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{AR} = \mathbf{w}$, где \mathbf{A} – матрица коэффициентов уравнений системы,

$$A_{mp} = 2(1 - \nu^2)^2 (Eh)^{-1} \sum_{k=1}^N \Phi_k^g \sum_{r=1}^3 \Lambda_{kr} \gamma(k, r, m, p),$$

\mathbf{R} – искомый вектор значений нагрузки во времени, $w_m = w^*(\xi_p, m\Delta\tau)$.

Применение к указанной системе регуляризирующего оператора, построение которого подробно описано в [2], дает возможность получить устойчивое решение обратной задачи.

Для конкретных расчетов приняты следующие параметры оболочки: $l = 1,5 \text{ м}$, $a = 0,3 \text{ м}$; $h = 0,03 \text{ м}$, $\nu = 0,3$, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$, $k = 0,83$, $N = 50$. Результаты идентификации, представленные на рис. 3, получены при использовании в качестве исходных данных функции прогиба, изображенного на рис. 2 кривая 1. Заметим, что эта кривая задана произвольным образом и соответствует непрерывной функции с непрерывной первой производной, причем еще дополнительным ограничением является условие $w(\xi_p, 0) = 0$. На рис. 3 кривые нагрузок получены с разными параметрами регуляризации. Кривые 2, 3 и 4 на рис. 2 – это кривые прогиба, отвечающие воздействию идентифицированных нагрузок 2, 3 и 4 на рис. 3 соответственно.

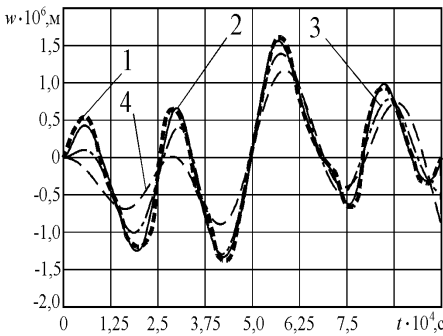


Рисунок 2

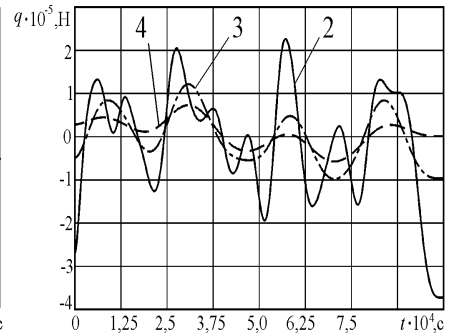


Рисунок 3

Выводы

Приведенные результаты идентификации демонстрируют эффективность предложенного способа решения некорректной обратной задачи при задании в качестве исходных данных прогиба как произвольной функции времени, даже без полного учета начальных условий и волнового характера деформирования оболочки.

Список литературы. 1. Янютин Е. Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1993. – 146 с. **2.** Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с. **3.** Cooper R.M., Naghdi P.M. Propagation on nonaxially symmetric waves in elastic cylindrical shells// J.Acoust. Soc.Amer.-1957.-V.29, № 12. – P. 1365-1373.

Поступила в редколлегию 7.04.04

Е.Г.ЯНЮТИН, д-р техн.наук, НТУ «ХПИ»;
В.Г.ЯРЕЩЕНКО, канд.техн.наук, ИПМаш НАН Украины;
А.В.ВОРОПАЙ, ХНАДУ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Викладаються результати ідентифікації невідомого ударного навантаження прямокутної пластини по вихідним даним, які отримані в результаті проведення експерименту. Розрахунки зводяться до аналізу інтегрального рівняння Вольтерра I роду, яке розв'язується чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова.

The results of identification an unknown impact load of rectangular plate is presented. The input data for identification is taken from the experimental researches. The problem is reduced to the first-kind Volterra integral equation, which is solved numerically by Tikhonov's regularization method.

Введение

В настоящее время начали развиваться исследования по идентификации внешних нагрузок, воздействующих на деформируемые элементы конструкций. Укажем некоторые опубликованные работы этого направления: в монографии [1] идентифицируются импульсные нагрузки, воздействующие на стержни, цилиндрические и замкнутые сферические оболочки; в статьях [2,3] идентифицируются поперечные и касательные нестационарные нагрузки прямоугольной пластины. В этих работах неизвестные импульсные нагрузки, воздействующие на механические объекты, находятся на основе решения интегральных уравнений типа Вольтерра. Так как рассматриваемые задачи являются некорректными, решение интегральных уравнений осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А.Н.Тихонова [4].

Используемая в настоящем исследовании методика идентификации ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных аналогична изложенной в работе [2]; там же приведено и решение соответствующей прямой задачи о нестационарном нагружении прямоугольной пластины.

Описание эксперимента

Экспериментальные исследования производились с использованием измерительного комплекса «Тензодин» (ИПМаш НАН Украины), в состав которого входят многоканальная тензометрическая станции ШТС-8, многоканальный аналого-цифровой преобразователь и компьютер. Подробное описание тензометрической станции ШТС-8 и ее технических характеристик приведено в [5]. Там же описана методика проведения экспериментальных исследований по высокоскоростному деформированию различных элементов конструкций, в том числе по их ударному нагружению.

Для проведения эксперимента была взята стальная пластина, размеры

которой 600x400x24,3 мм, на нижней лицевой плоскости которой были наклеены тензодатчики. Условия ее закрепления, приближенно соответствовали шарнирному опиранию краев. Для измерения деформации во взаимно перпендикулярных направлениях в каждой из исследуемых точек были приклеены «розетки» из двух тензодатчиков. Удар производился по верхней лицевой плоскости свободно падающим телом (ударником).

В результате проведения экспериментальных работ по исследованию напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины средней толщины при ее ударном нагружении был получен ряд осциллограмм, представляющих зависимость деформации $\varepsilon_x(t)$ и $\varepsilon_y(t)$ в точках пластины, в которых были размещены тензодатчики.

Описание идентификации по экспериментальным данным

Сопоставление результатов обратной и прямой задач, с экспериментальными данными состояло из двух этапов. На первом этапе на основе полученных экспериментальных данных – изменения деформации $\varepsilon_x(t)$, была выполнена процедура идентификации внешней нагрузки (давления в пятне контакта) при ударе. На втором этапе было произведено сопоставление экспериментальных результатов с результатами теоретического решения прямой задачи об импульсном деформировании пластины под воздействием уже известной нагрузки, определенной из решения обратной задачи. Укажем, что при решении задачи идентификации предполагалось, что нагрузка в области контакта равномерно распределена по кругу радиуса r .

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Принимались следующие параметры: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7800$ кг/м³; $h = 0,0243$ м; $l = 0,588$ м; $m = 0,388$ м; $x_0 = 0,294$ м, $y_0 = 0,194$ м – координаты точки нагружения; $x_1 = 0,294$ м, $y_1 = 0,194$ м – координаты 1-го датчика (под нагрузкой); $x_2 = 0,3565$ м, $y_2 = 0,194$ м – координаты 2-го датчика; $x_3 = 0,419$ м, $y_3 = 0,194$ м – координаты 3-го датчика; $r = 0,005$ м; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50x50.

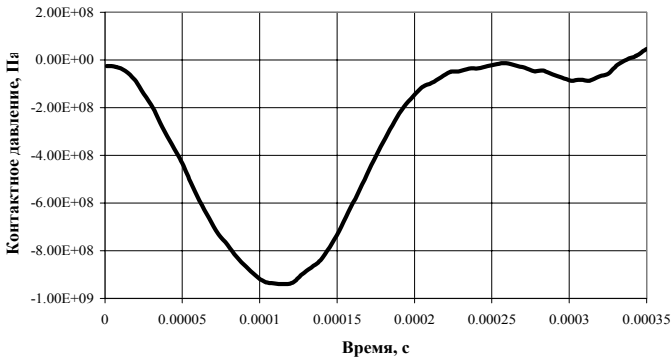


Рисунок 1 – Результат идентификации ударной нагрузки.

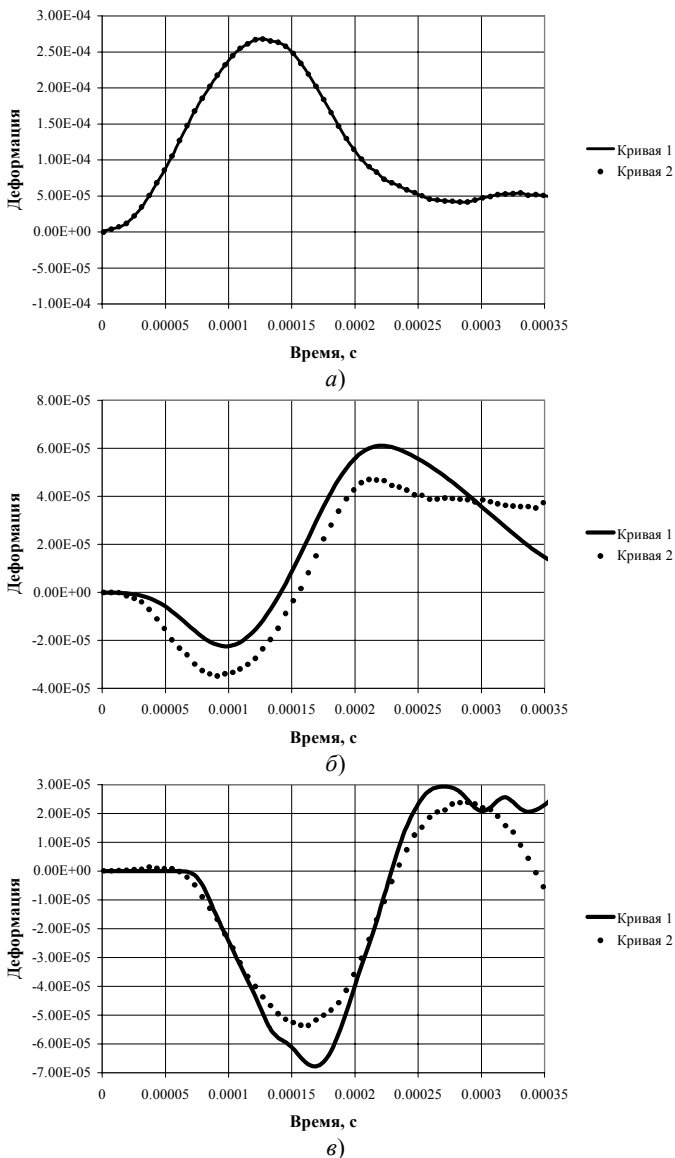


Рисунок 2 – Сопоставление численных и экспериментальных данных.

На рис. 1 показано изменение во времени ударной нагрузки, полученное в результате решения задачи идентификации по деформации $\varepsilon_x(t)$. В качестве исходных данных, для идентификации контактного давления была взята деформация $\varepsilon_x(t)$ с датчика, установленного под местом удара на нижней лицев-

вой плоскости пластины (рис. 2, кривая 1).

На основе решения прямой задачи с уже известным временным законом нагружения рассчитаны изменения деформаций $\varepsilon_x(t)$ для точек, в которых установлены датчики. На рис. 2 представлены расчеты для трех точек: рис. 2, *а* соответствует точке (x_1, y_1) , рис. 2, *б* – точке (x_2, y_2) , рис. 2, *в* – точке (x_3, y_3) . Кривые 1 на этих рисунках изображают деформации, полученные экспериментально, а кривые 2 соответствуют деформациям, рассчитанным по идентифицированной нагрузке (рис. 1).

Резюме

На основе представленных результатов (рис. 2) можно сделать вывод о том, что разработанный метод идентификации импульсных нагрузок, в том числе и ударных [2] на основе экспериментальных данных является эффективным и устойчивым к погрешностям, которые возникают в ходе экспериментального измерения деформаций тензометрическим способом.

Список литературы: 1. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001 – 184 с. 2. Янютин Е.Г., Воропай А.В. Идентификация импульсного нагружения упругой прямоугольной пластины. // Межд. Научн. Ж. Прикл. Мех. – Т. 39, №10. – 2003. – С. 151-155. 3. Янютин Е.Г., Воропай А.В. Идентификация нестационарного нагружения, касательного к лицевой поверхности прямоугольной пластины // Пробл. машиностроения. – 7, №1. – 2004. – С 76-81. 4. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 5. Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Севрюков В.И., Янютин Е.Г. Скоростное деформирование элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 192 с.

Поступила в редколлегию 08.04.04

УДК 625.2.012.3

А.Г.АНДРЕЄВ, канд.техн.наук, НТУ «ХПІ»;
Ю.М.ДОБРОВЕНСЬКИЙ, С.В.РОМАНОВ, канд.техн.наук,
Українська інженерно-педагогічна академія;
О.В.ЩЕПКИН, НТУ «ХПІ»

РАЦІОНАЛЬНЕ ТЕХНОЛОГІЧНЕ НАГРІВАННЯ ПРИ ЗБОРЦІ КОЛІСНИХ ПАР ЗАЛІЗНИЧНОГО РУХОМОГО СКЛАДУ

На основі доступних експериментальних даних було зроблено систематичне чисельне дослідження колісної пари при тепловій зборці з використанням технологічного нагрівання індукційно-нагрівальними пристроями. Оптимізація нагрівання проводилася з обмеженнями на температури і напруги.

On the basis of the available experimental data the systematic numerical research of one piece rolled railroad car wheel were made using technological heating by induction-heating devices which allowed the establishment of the laws of the stress-strain state of the wheel set elements, during its thermal assembly. The optimization was conducted with restrictions on stresses and temperatures.

Актуальність теми. В даний час у залізничному транспорті спостерігається ріст швидкостей перевезень, що вимагає підвищення показників надійності й безпеки рухомого складу залізниць. Для цього необхідно створення швидкісного рухомого складу з підвищеними показниками надійності й безпеки. Ці показники істотно залежать від конструкції колісних пар [1-3], зокрема, від якості з'єднань із натягом і технології їхньої зборки. Для формування таких з'єднань, як правило, використовується тепловий спосіб із застосуванням індукційно-нагрівальних пристроїв (ІНП).

Методи розрахунку теплової посадки з урахуванням геометрії конструкції, властивостей матеріалу недостатньо вивчені, що не завжди дозволяє обґрунтувати вибір технологічних режимів теплової зборки й гарантувати якість з'єднання в режимах наступної експлуатації виробів. У залежності від типу нагрівача температурне поле уздовж радіуса деталі, що нагрівається, може змінюватися в широких межах. Ці конструктивні особливості дають можливість знизити енерговитрати у випадку застосування для зборки нагрівання [4]. Також становить інтерес оцінка економії енергії при нагріванні колеса під посадку на вісь при використанні залишкового тепла від зборки самого колеса [5]. Тому розробка нових, науково обґрунтованих методів розрахунку теплових полів, контактних напруг на поверхнях з'єднаних деталей і методів аналізу конструктивної міцності таких виробів в експлуатаційних режимах є актуальною в науковому й практичному відношеннях.

Метою роботи є дослідження процесу теплової зборки колісної пари теплового ТГМ-40, що складається зі з'єднаних з натягом осі й колес (рис. 1), для оптимізації технологічного режиму її зборки із застосуванням ІНП. У роботі були використані результати експериментальних досліджень технологічного процесу зборки, виконані на стенді лабораторії кафедри ДММ у НТУ «ХП» [6,7].

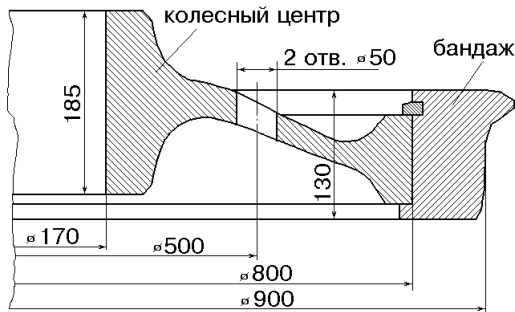


Рисунок 1 – Колесо теплового

Для розрахунку напружено-деформованого стану й розв'язання температурної задачі був застосований метод скінчених елементів (МСЕ) [8], що дозволяє врахувати складну конфігурацію досліджуваного об'єкта. Конструкція, що розраховується, апроксимується тороїдальними скінченими елементами

трикутного поперечного перерізу з трьома вузлами, а також використовуються стикувальні елементи, що моделюють стан сила-зсув-теплопередача на поверхнях деталей конструкції [9,10]. Розв'язання нестационарної температурної задачі здійснюється з застосуванням центральної різницевої схеми [11]. Розрахунки пластичних деформацій проводяться на основі діаграми розтягання матеріалу з використанням методу початкових напруг; залишкові напруги і деформації знаходимо за законом розвантаження [12]. Для обертання матриці й обчислення переміщень застосований метод квадратного кореня [13], що враховує стрічкову структуру матриці жорсткості конструкції. Для виконання оптимізації застосований комплексний метод, розроблений М.Боксом [14], який є модифікацією симплексного методу Нелдера-Мида, яка дозволяє враховувати обмеження. Описаний алгоритм реалізує програма МКЕ-D мовою Fortran.

Характеристики матеріалу конструкції: модуль пружності $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,33$; межа текучості колісного центра $\sigma_T = 350$ Мпа, бандажа – 410 МПа; коефіцієнт лінійного розширення $\alpha = 13,3 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; щільність $\rho = 7800$ кг/м 3 ; питома теплоємність $c = 420 + 0,42 \cdot T$ Дж/кг · град. (T – температура, град. С); коефіцієнт теплопровідності колісного центра $K = 42 - 0,4 \cdot T$ Вт/м · град, колеса – $K = 46 - 0,4 \cdot T$ Вт/м · град, повітря – 0,035 Вт/м · град; коефіцієнт тертя в зоні контакту $f = 0,15$; термічний опір у зоні контакту $R = 6 \cdot 10^{-3}$; $0,3 \cdot 10^{-3}$; $0,06 \cdot 10^{-3}$ м 2 · град/Вт (при стискаючій нарузі, яка дорівнює 0, 10, 100 МПа відповідно). Величина натягу в з'єднанні колесо-вісь складала $0,2 \cdot 10^{-3}$ м, у з'єднанні бандаж-колісний центр – $1,08 \cdot 10^{-3}$ м.

Стандартний процес посадки колеса на вісь. На рис. 2 представлено експериментально отриманий розподіл температури в поперечному перерізі колеса тепловоза при технологічному нагріванні для посадки на вісь. Час нагрівання складає 6 хв., витрати енергії на нагрівання – 16,26 МДж, розширення маточини (з урахуванням пластичних деформацій) – $0,262 \cdot 10^{-3}$ м, максимальна температура – 285 °С. На рис. 3 показаний розподіл еквівалентних напруг σ_e у колесі, обчислений на основі експериментальних даних про температуру. Згідно з розрахунковими даними при такому нагріванні в колесі з'являються зони пластичних деформацій (рис. 4).

Для забезпечення якості зборки необхідно встановити такий розподіл температури, що забезпечує технологічно задане розширення отвору маточини $u_{ст} \leq 0,2 \cdot 10^{-3}$ м і мінімізує кількість теплової енергії W , що передано деталі, при обмеженні рівня напруг $\sigma_e \leq \sigma_T$ і температурного діапазону: $20^0 \leq T \leq 350^0$. Використання теплового методу нагрівання деталей за допомогою індукційно-нагрівальних пристроїв вносить певні обмеження на форму температурного поля: тепло подається в поверхневий шар бічних поверхонь деталей. Тому пошук оптимальних режимів нагрівання проводився при заданні потужності теплового потоку на бічних поверхнях колеса. Бічна поверхня колеса була поділена на 29 ділянок (рис. 5), потужність теплового потоку на кожній з них є параметром оптимізації.

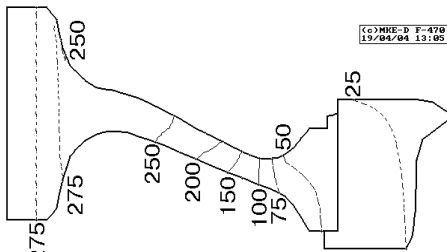


Рисунок 2 – Розподіл температури в колесі при нагріванні для посадки на вісь (експериментальні дані)

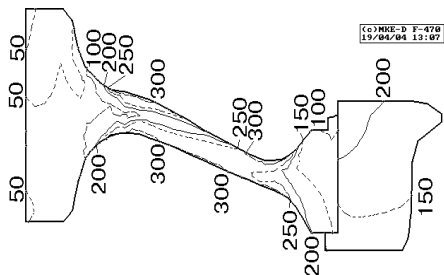


Рисунок 3 – Розподіли напруг σ_e у колесі при його нагріванні для посадки на вісь

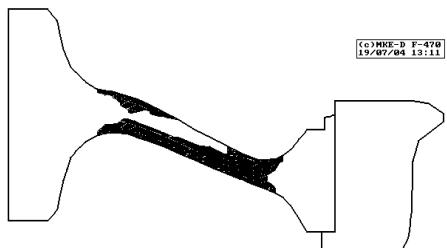


Рисунок 4 – Зони пластичних деформацій у колесі тепловоза при нагріванні для посадки на вісь

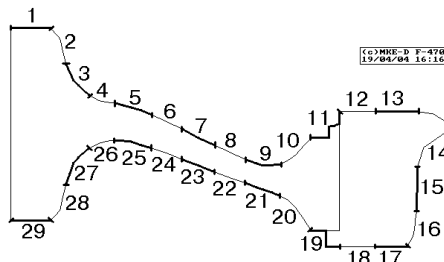


Рисунок 5 – Схема розташування ділянок задання потужності теплових потоків при оптимізації

На рис. 6 представлено оптимальне температурне поле в колесі при нагріванні під посадку на вісь, на рис. 7 – розподіл напруг при такому нагріванні, на рис. 8 – схема розподілу потужності теплового потоку для створення оптимального нагрівання. Витрати енергії при такому нагріванні склали 22,86 МДж, максимальна температура – 333 °С.

Відповідно до розрахунку, максимально можливе розширення маточини, яке можна одержати при оптимізації теплових потоків при відсутності пластичних деформацій складо $0,239 \cdot 10^{-3}$ м.

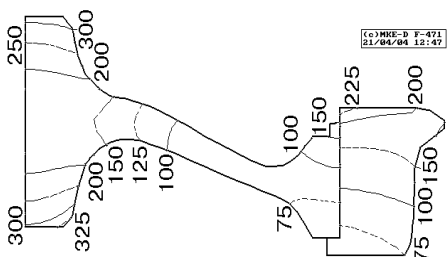


Рисунок 6 – Оптимальне температурне поле для нагрівання колеса під посадку на вісь

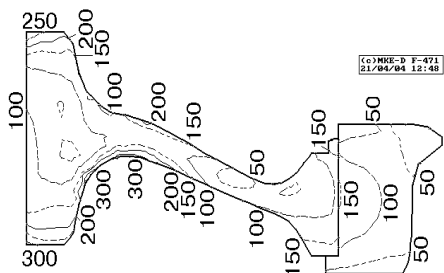


Рисунок 7 – Розподіл напруг σ_e при оптимальному нагріванні

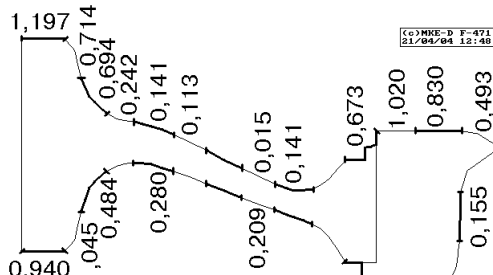


Рисунок 8 – Схема розподілу потужності теплового потоку при оптимальному нагріванні

Посадка колеса на вісь із використанням залишкового тепла від з'єднання частин колеса. У процесі зборки колісної пари спочатку нагрівається бандаж для з'єднання з колісним центром, після чого маточина цілком остиглого колеса нагрівається для з'єднання колеса з віссю. Оскільки при зборці колісний центр також трохи прогрівається за рахунок теплопередачі від нагрітого бандажа, було проведено розрахунок температурного поля в колесі в процесі його остигання. Коефіцієнт теплообміну для колісного центра був прийнятий $h_{\text{кц}} = 13 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$, бандажа – $h_{\text{бн}} = 8 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{град.}$ виходячи з експериментальних даних про остигання [7]. На рис. 9 представлений розподіл температур у колесі в процесі його зборки й наступного остигання: момент часу $t = 12 \text{ хв.}$ відповідає моменту закінчення нагрівання бандажа, $t = 110 \text{ хв.}$ – моменту найбільшого розширення маточини колеса.

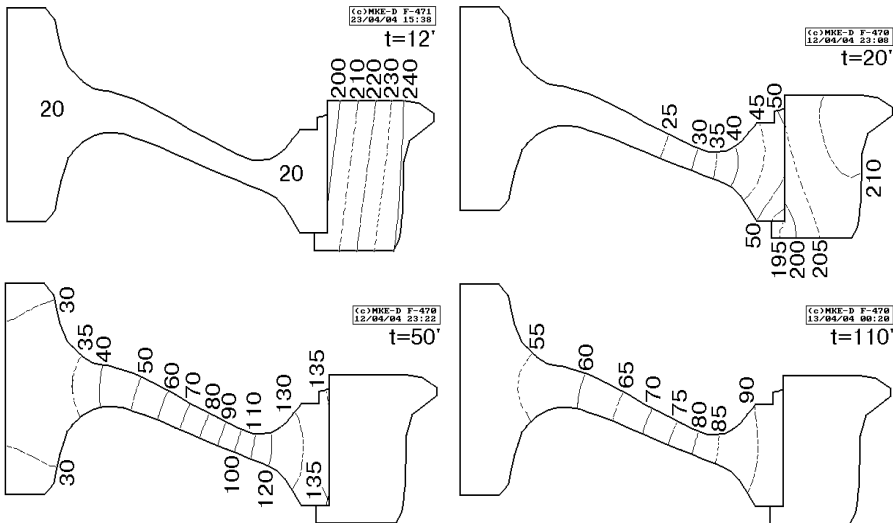


Рисунок 9 – Розподіл температур у колесі в процесі його зборки і наступного остигання

Виконані експериментальні дослідження [7] показали, що найбільше розширення маточини, обумовлене теплопередачею від нагрітого бандажа, має місце на 110 хвилині з моменту включення індукційно-нагрівального пристрою для зборки колеса. Максимальна температура деталі в цей момент – 91° , залишкове тепло від зборки – 12,39 МДж. Наступне нагрівання маточини колеса протягом 5 хвилин забезпечує розширення отвору маточини до величини, достатньої для посадки колеса на вісь (рис. 10-12). Витрати енергії на нагрівання маточини склали 14,89 МДж, розширення маточини (з урахуванням пластичних деформацій) – $0,222 \cdot 10^{-3}$ м, максимальна температура – 302°C .

На рис. 13-15 представлено оптимальне температурне поле, розподіл напруг і потужності теплового потоку для створення раціонального температурного поля з використанням залишкового тепла від зборки колеса. Витрата енергії при такому нагріванні складає 12,64 МДж, максимальна температура – 341°C , час нагрівання – 6 хв.

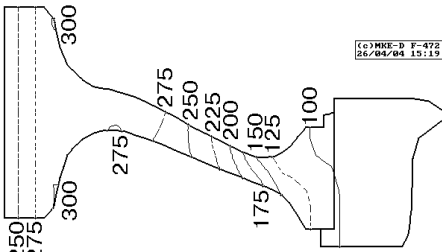


Рисунок 10 – Розподіл температури в колесі при нагріванні для посадки на вісь із використанням залишкового тепла від зборки колеса (експериментальні дані)

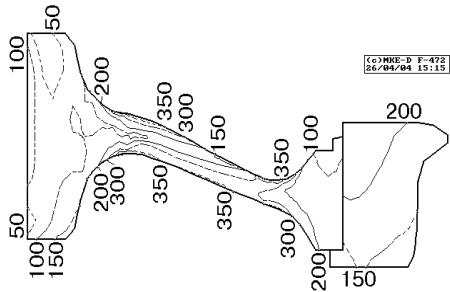


Рисунок 11 – Розподіл напруг σ_e у колесі при його нагріванні для посадки на вісь із використанням залишкового тепла від зборки колеса

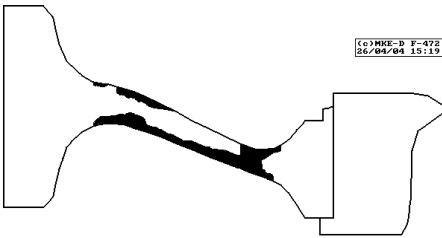


Рисунок 12 – Зони пластичних деформацій у колесі тепловоза при нагріванні для посадки на вісь

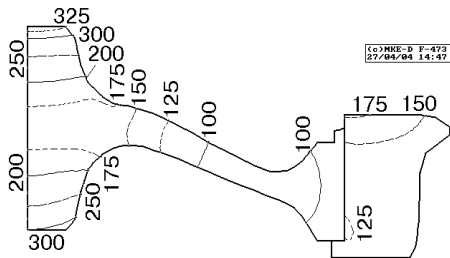


Рисунок 13 – Оптимальне температурне поле для нагрівання колеса під посадку на вісь

Розрахунки напружено-деформованого стану колеса, обумовленого індукційним нагріванням маточини під зборку й посадкою колеса на вісь, показали наявність істотних пластичних деформацій у дисковій частині колісного центра (рис. 4,12), що призводять до значної зміни величини натягу й стискаючих напруг у з'єднанні бандаж-колісний центр і колесо-вісь (рис. 16).

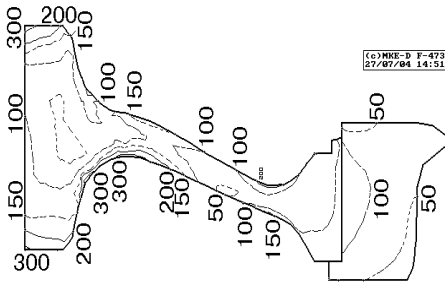


Рисунок 14 – Розподіл напруг при оптимальному нагріванні із використанням залишкового тепла від зборки колеса

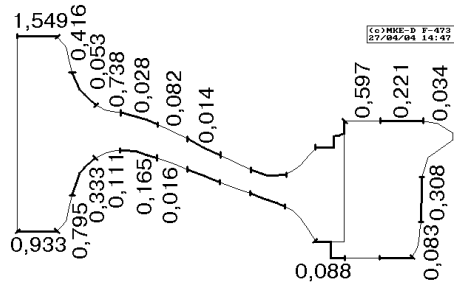


Рисунок 15 – Схема розподілу потужності теплового потоку при оптимальному нагріванні із використанням залишкового тепла від зборки колеса

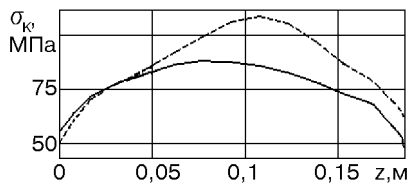
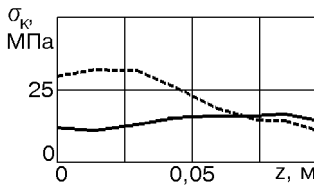


Рисунок 16 – Контактні напруга σ_k у з'єднанні бандаж-колісний центр (а) і колесо-вісь (б): суцільні лінії – при існуючому технологічному процесі, пунктирні – при оптимальному температурному полі при зборці

Висновки. Результати досліджень показали, що при стандартному процесі посадки колеса на вісь у дисковій частині виникають пластичні деформації. Використання залишкового тепла від зборки дає можливість скоротити енерговитрати на посадку колеса до 9 % при збереженні напружено-деформованого стану практично незмінним (у тому числі й розміру зон пластичних деформацій). Оптимізація технологічного режиму нагрівання маточини колеса під посадку дозволяє уникнути пластичних деформацій і підвищити міцність з'єднань із натягом у колісній парі, однак енерговитрати на зборку дещо підвищуються. Рациональне технологічне нагрівання колеса під посадку на вісь із використанням залишкового тепла від зборки колеса при оптимізації технологічного режиму дає зниження енерговитрат на 22 % у порівнянні з існуючим технологічним процесом.

Список літератури: 1. Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар. – Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1965. – 227 с. 2. Л.Л.Оборський Нова конструкція і технологія з'єднання бандаж-центр колеса електровагона // Залізничний транспорт України. – 2003. – № 5. – С. 9-10. 3. Вагоны / Л.А.Шадур, И.И.Челноков, Л.Н.Никольский и др. – М.: Транспорт, 1980. – 439 с. 4. Щеткин А.В. Оптимизация технологического нагрева вагонного колеса при сборке колесной пары // Вестник НТУ "ХПИ" – Х.: НТУ "ХПИ". – Вып. 25. – 2001. – С. 145-152. 5. А.с. СССР № 1682113. Способ сборки соединений с натягом / Андреев А.Г., Арпентьев Б.М., Манохин В.А., Пуйденко И.В. Оpubл. 07.10.1991. Бюлл. № 37. 6. Andreev A.G., Scepkin A.W., Laugwitz F. Untersuchung von Spannungen und Deformationen in Eisenbahnradern infolge induktiver Erwärmung bei der Montage. // Technische Mechanik. – Bn. 15, H. 4. – 1995.

– S. 271-280. 7. Андреев А.Г., Щепкин А.В. О рациональном технологическом нагреве бандажного колеса при сборке колесной пары тепловоза // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сб. научных трудов ХГПУ. – Вып. 7. Ч. 1. – 1999. – С. 240-243. 8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – Москва, Мир, 1975. – 541 с. 9. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1989. – 232 с. 10. Миллер В.С. Контактный теплообмен в элементах высокотемпературных машин. – Киев: Наукова думка. – 1966. – 164 с. 11. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М., Мир, 1979. – 392 с. 12. Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: В. 2 ч. Ч. 2: Можаровский Н.С. Качаловская Н.Е. Методы и алгоритмы решения краевых задач. – Киев, Вища школа, 1991. – 287 с. 13. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М., Физматгиз, 1963. – 660 с. 14. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

Надійшла до редколегії 14.05.2004

УДК 621.825

В.И.МАЦ, канд.техн.наук, **Ю.А.ОСТАПЧУК**, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ»

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ МУФТЫ С РАДИАЛЬНЫМИ ПАКЕТАМИ ПРУЖИН

В роботі розглядається питання комплексної оцінки параметрів пружної муфти з радіальними пакетами пружин. Найважливішим моментом є правильний вибір числа пакетів, числа пластин в пакеті, товщини і довжини пакета з урахуванням максимального використання нелінійної ділянки характеристики при одночасному забезпеченні максимально можливого демпфування і енергоємності муфти, а також можливої конструктивної реалізації. Одержана система рівнянь і нерівнянь для розрахунку цих параметрів.

При проектировании упругих муфт необходимо учитывать весь комплекс вопросов, связанных с определением их параметров (статическая характеристика, жесткость и демпфирование, энергоёмкость).

В работе [1] была получена кусочно-нелинейная статическая характеристика муфты с радиальными пакетами пружин (рис. 1). В то же время в работе не было показано, как выбирать параметры m, n, δ, h с учетом максимального использования нелинейного участка характеристики при одновременном обеспечении максимально возможного демпфирования и энергоёмкости муфты, а также возможной конструктивной реализации.

Целью настоящей работы является комплексный учет всех перечисленных факторов при проектировании муфты.

Характеристика имеет 2 линейных и 1 нелинейный участок (рис. 2).

В случае прямолинейного паза характеристика муфты на первом линейном участке

$$M_{(\alpha)} = \frac{mnb\delta^3(R_1 + h)^2}{4h^3}\alpha,$$

где m – число пакетов, n – число пластин в пакете, δ – толщина пластин.

На нелинейном участке характер зависимости имеет вид

$$M_{(\alpha)} = \frac{Emnb\delta^3(\alpha + \alpha_m)^3}{54(h\alpha_m - R_1\alpha)^2} \left(R_1 + \frac{h\alpha_m - R_1\alpha}{\alpha + \alpha_m} \right)$$

где α_m – половина угла паза.

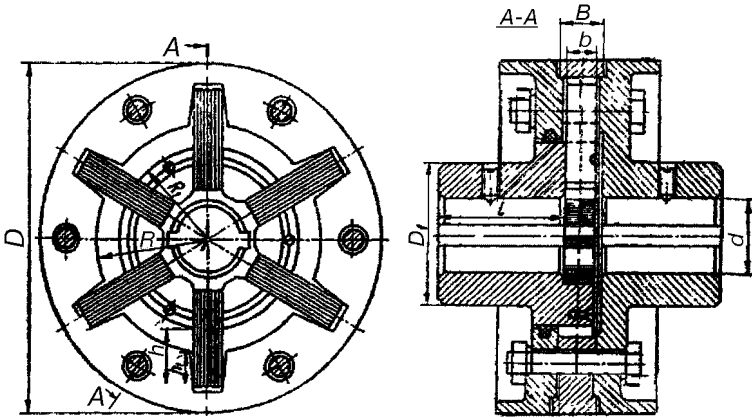


Рисунок 1 – Упругая муфта с радиальными пакетами пружин

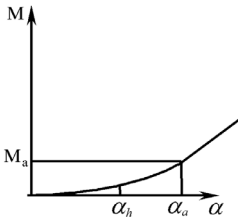


Рисунок 2 – Характеристика муфты

При достижении угла поворота

$$\alpha = \alpha_a = \frac{(3h - a)\alpha_m}{3R_1 + a}$$

Характеристика снова становится линейной и имеет вид

$$M = \frac{Emnb\delta^3(R_1 + a)^2}{4a^3} \alpha - M_0,$$

где $M_0 = \frac{Emnb\delta^3(R_1 + a)(h - a)\alpha_m}{4a^3}$; где

$$a = h - h_1.$$

В то же время в работе не было показано как выбирать параметры m, n, δ, h с учетом максимального использования нелинейного участка характеристики при одновременном обеспечении максимально возможного демпфирования и энергоемкости муфты, а также возможной конструктивной реализации.

С учетом максимально возможного использования нелинейного участка характеристики, а также из условия изгибной прочности пластин получим

$$\delta \geq \sqrt{\frac{2aM_{\max}}{mnb[\sigma_u](R_1 + a)}}, \quad (1)$$

$$\alpha_m = \frac{3R_1 + a}{E(R_1 + h)} \sqrt{\frac{mnb(R_1 + a)[\sigma_u]^3}{2M_{\max}}} \quad (2)$$

где M_{\max} – максимальный момент, передаваемый муфтой.

Из условия компоновки пакетов имеем

$$mn\delta \leq \pi d \mp \Delta m, \quad (3)$$

где Δ – минимальное расстояние между соседними пакетами по окружности πd .

Из условия максимальной энергоемкости

$$mn\delta\Delta \leq \max \pi d,$$

то есть

$$mn\delta = \frac{\pi d \mp m\Delta}{\Delta}. \quad (4)$$

Сюда необходимо добавить реализацию максимально возможного демпфирования, которое обеспечивается максимальным числом поверхностей трения

$$mn = \max. \quad (5)$$

Кроме того, для максимального использования нелинейного участка характеристики необходимо выполнение условия

$$\alpha_a - \alpha_h = \frac{(3h - a)\alpha_m}{3R_1 + a} - \frac{2\alpha_m h}{3R_1/b + h} = \max. \quad (6)$$

При выборе длины пластин h из условия конструктивной реализации накладывается ограничение

$$h \leq \frac{D - 2R_1 - \Delta}{2}, \quad (7)$$

где Δ – минимальный размер между впадиной паза и наружным диаметром полумуфты, обеспечивающим ее прочность.

Из формулы (4) имеем

$$mn = \frac{\pi d - m\Delta}{\delta}. \quad (8)$$

Подставляя это выражение в условие (1) получим

$$\delta \geq \frac{2aM_{\max}}{[\sigma_u](R_1 + a)(\pi d - m\Delta)}. \quad (9)$$

Легко сообразить, что

$$m < \pi d / \Delta. \quad (10)$$

Таким образом, определение параметров муфты сводится к удовлетворению условий (2)-(10). При этом необходимо задаться предельно возможным значением Δ , а затем, после выбора числа пакетов и числа пластин, пересчитать окончательно Δ . После подсчета неравенств (9) необходимо выбрать минимально возможное δ из ряда стандартных пластин, т.к. при фиксированном m уменьшается n и соответственно демпфирующая способность mn . При подсчете n по формуле (8) его необходимо округлить в меньшую сторону до целого числа для обеспечения значения Δ больше минимального.

Рассмотрим алгоритм вычисления m, n, δ, h на примере муфты с параметрами [2]: $M_{\max} = 7,35 \cdot 10^4$ нм; $d = 25$ мм; $D = 120$ мм; $[\sigma_u] = 0,5\sigma_T$. Примем материал пластин Сталь 65 с $\sigma_T = 780$ Мпа [3]. Получая $\Delta = 5$ мм, а $R_1 = 0,3 D$,

получим $h \leq 19$ мм. Практически значение t лежит в диапазоне $4 \leq t \leq 20$, причем принимаются, как правило, четные значения.

Значение радиального зазора между полумуфтами лежит в пределах $6 \div 8$ мм. Примем $a = 6$ мм.

Из условия (10) следует $t < 15,7$. Принимая последовательно $t = 5, 6, 8, 10, 12, 14$ из условия (9) находим минимально возможные значения δ . На рис. 3 представлены зависимости максимальной энергоёмкости муфты от числа пакетов при различных значениях δ , а на рис. 4 зависимости максимального демпфирования от тех же параметров.

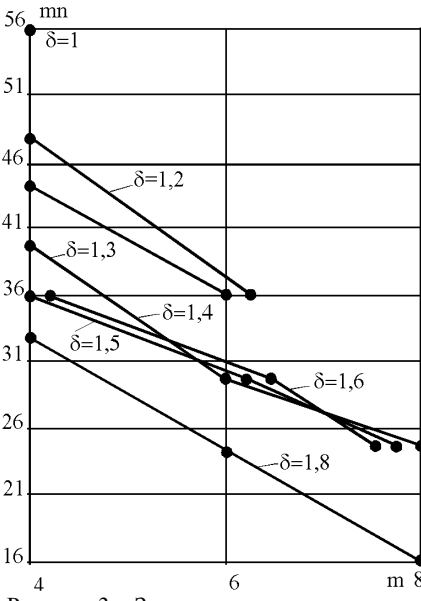


Рисунок 3 – Зависимость энергоёмкости муфты от числа пакетов

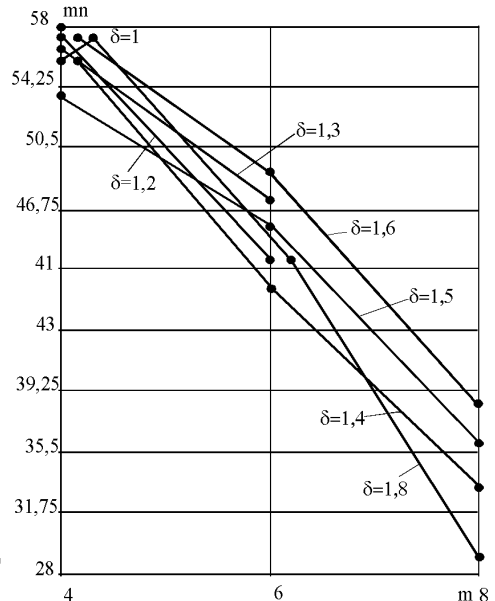


Рисунок 4

Таким образом, выбирая необходимый критерий (максимальная энергоёмкость или максимальное демпфирование) определяют окончательно параметры t, n, δ . В частности для данной муфты такими параметрами являются $t = 4$; $n = 12$; $\delta = 1,2$ мм, которые обеспечивают $mn = 48$ и $mn\delta = 57,6$. И окончательно по зависимости (1) выбираем значение угла паза при условии (7), согласно которому $h \leq 19$ мм.

Список литературы: 1. Мац В.И., Голендер В.А. Вопросы оптимизации параметров муфты с радиальными пакетами пружин с учетом ее статической характеристики // Детали машин. – 1983. – Вып. 36. 2. Поляков В.С. и др. Справочник по муфтам. – Ленинград, Машиностроение. – 1979. – 344 с. 3. Самохвалов Я.А. и др. Справочник техника-конструктора. – Киев, Техніка. – 1978. – 593 с.

Поступила в редколлегию 29.04.04

СОДЕРЖАНИЕ

К.В.АВРАМОВ Метод расчета бифуркационных линий механических систем	3
Л.В.АВТОНОМОВА, А.В.СТЕПУК Локализация энергии при электромагнитной и тепловой диффузии в металлах	7
В.Н.АЛТУХОВ К вопросу оптимизации технологических параметров центробежно-ударных дробилок	12
А.Б.БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ Вынужденные колебания рам тележек вагонов метрополитена при случайном воздействии с учетом запаздывания	20
А.И.БОХОНСКИЙ, Е.В.ХРОМОВ Исследование переходных процессов при перемотке проволок и пряжей в канатном производстве	30
К.В.ВАКУЛЕНКО, С.Ю.СОТРИХИН, М.В.ЧЕРНОБРЫВКО Использование высокотемпературной пайки при создании высокопрочных конструкций	35
С.М.ВЕРЕЩАКА К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры	39
Э.Е.ГЕРМАН, В.А.КНЫШ, <u>Б.А.УШАМИРСКИЙ</u> Об упругом ударе	47
В.Н.ДАНИЛОВ Расчет статики кольцевых пластин методом рекуррентных соотношений	52
П.Д.ДОЦЕНКО Об одном подходе к исследованию статики и динамики комбинированных систем оболочек вращения	58
А.А.ЗОЛОЧЕВСКИЙ, С.Н.СКЛЕПУС Вариационная формулировка задачи ползучести при конечных деформациях	76
А.Ф.КИРИЧЕНКО, В.А.БЕРЕЖНОЙ Перспективы улучшения работы эвольвентных прямозубых передач	82
В.М.КАПИНОС, В.В.НАВРОЦКИЙ, И.А.МИХАЙЛОВА, Т.И.МИХАЙЛЕНКО О повышении экономичности паровых турбин с противодавлением	89
В.М.КАПИНОС, В.В.НАВРОЦКИЙ, И.В.СМОРОДСКАЯ, Н.Д.МАРЧЕНКО Полуэмпирическое уравнение для определения степени реактивности турбинной ступени	93
В.М.КАПИНОС, В.Н.ПУСТОВАЛОВ, М.В. МЕЗЕРНАЯ Влияние нестационарности процесса теплопроводности на термическое сопротивление тепловой изоляции	99

В.М.КАПИНОС, В.Н.ПУСТОВАЛОВ, И.В.СМОРОДСКАЯ Распределение температуры в трубном пучке при поперечном обтекании	103
Б.Я.КАНТОР, Н.И.ЯБЛУЧАНСКИЙ, Е.Ю.МИСЮРА Исследование НДС толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца)	106
Г.И.ЛЬВОВ, В.И.ТАРАНИЮК Анализ остаточных напряжений в автофретированном толстостенном цилиндре после механической обработки	117
О.К.МОРАЧКОВСЬКИЙ, О.О.ЗАМУЛА Метод розв'язування задач повзучості геометрично нелінійних оболонок обертання	123
О.Г.ПРИЙМАКОВ, Г.О.ПРИЙМАКОВ, Ю.О.ГРАДИСЬКИЙ, О.В.БОБРОВИЦЬКИЙ Експериментально-аналітичне визначення параметрів зношування та витривалості авіаційних матеріалів	127
В.А.САЛО Решение краевых задач статики ортотропных сферических оболочек с отверстиями	133
Э.А.СИМСОН, С.А.НАЗАРЕНКО, Ю.П.АНАЦКИЙ Оптимизация элементов конструкций по прочностным и динамическим характеристикам	137
И.Г.СУВОРОВА Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы	141
Н.А.ТКАЧУК, Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК К вопросу анализа и синтеза элементов биомеханических систем	149
Н.А.ТКАЧУК, Г.Д.ГРИЦЕНКО, Э.В.ГЛУЩЕНКО, А.В.ТКАЧУК Программно-аппаратный комплекс для анализа и синтеза моделей элементов сложных механических систем	153
А.В.ЯКУНИН, В.А.РАТАУШКИН Нестационарное распределение давления в магистральном газопроводе подземной прокладки с учетом тепловых и нелинейных эффектов	165
Е.Г.ЯНЮТИН, А.С.ШАРАПАТА Обратная нестационарная задача теории упругости для цилиндрической оболочки	172
Е.Г.ЯНЮТИН, В.Г.ЯРЕЩЕНКО, А.В.ВОРОПАЙ Идентификация ударного нагружения пластины на основе экспериментальных данных	176
А.Г.АНДРЕЄВ, Ю.М.ДОБРОВЕНСЬКИЙ, С.В.РОМАНОВ, О.В.ЩЕПКИН Рациональне технологічне нагрівання при зборці колісних пар залізничного рухомого складу	179
В.И.МАЦ, Ю.А.ОСТАПЧУК Комплексная оценка параметров упругой муфты с радиальными пакетами пружин	186

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ "ХПІ"

Тематичний випуск
“Динаміка і міцність машин”
Збірник наукових праць № 31'2004
Технічний редактор Щепкін О.В.

Обл.вид. № б/н

Підп.до друку 10.11.2004 р. Формат 60x84 1/16. Папір офісний.
Riso-друк. Гарнітура Таймс. Умов.друк.арк. 8,2. Облік.вид. арк. 11,7.
Наклад 300 прим. 1-й завод 1-100. Зам. № 511. Ціна договірна.

Видавничий центр НТУ «ХПІ».

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 116 від 10.07.2000 р.
61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

Друкарня НТУ «ХПІ». 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21
