

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ISSN 0453-7998
ISSN 0233-9589

ВЕСТНИК



Харьковского
Политехнического
Института

277 '90

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10

«ОСНОВА»

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Костанко Ю. Т., Воронин А. В.</i> Оптимальные наблюдатели пониженного порядка дискретных стохастических систем	3
<i>Любчик Л. М.</i> Синтез обратных динамических систем методом инвариантного оценивания	5
<i>Любчик Л. М.</i> Применение обратных систем в задаче воспроизведения заданных законов движения при наличии возмущений	9
<i>Харченко О. Ю.</i> Построение обратных систем с помощью скользящих режимов	12
<i>Ивонух А. А., Смага Т. Н.</i> Синтез системы адаптивного управления непрерывными процессами на основе регрессионной модели	16
<i>Киреев Н. Г., Шелестова О. И.</i> Возможный алгоритм идентификации нестационарной динамической системы	19
<i>Киреев Н. Г.</i> Идентификация параметров и оптимальных управлений динамической системы	21
<i>Голоскоков Е. Г.</i> Оптимальное гашение вращения твердого тела около центра масс	23
<i>Фролов Ю. А.</i> Управление движением по опорной функции	25
<i>Белов А. И., Соляник О. В.</i> Алгоритм формирования связанной системы координат	29
<i>Овчарова Д. К., Сафошкина Л. Н.</i> Идентификация систем управления по экспериментальным частотным характеристикам	31
<i>Кацеев Л. Б., Пушкарь А. И.</i> Построение обобщенной многофакторной модели прогнозирования параметров технологических процессов	33
<i>Герасимов С. Д.</i> Математическое моделирование парового тракта мощных турбин	36
<i>Пикур Э. А., Северин В. П.</i> Линейная модель звена системы регулирования с беззолотниковым электрогидравлическим преобразователем	39
<i>Гамбаров Л. А., Раскин С. Л.</i> Применение схемы рандомизации при решении оптимизационных задач высокой размерности	42
<i>Магас С. Л., Слепченко А. П.</i> Оптимизация перемещений робокаров в ГПС по заданным маршрутам	45
<i>Конonenko И. В.</i> Оптимизация динамического типоразмерного ряда оборудования	48
<i>Никифоров А. В.</i> Системная оптимизация структуры технических средств технологических процессов на основе имитационного моделирования	51
<i>Годлевский М. Д., Чернышева Н. П.</i> Оптимизационно-имитационный подход к развитию функциональных подсистем комплекса технических средств гражданской авиации	54
<i>Лисицкий В. Л.</i> Агрегирование моделей тематического планирования на основе кластеризации решений локальных задач	57
<i>Безменов Н. И., Козлов А. М.</i> Оперативное управление запасами с учетом нестационарного спроса	60
<i>Заруба В. Я.</i> Недомнируемость достоверных законов полного распределения ресурса	63
<i>Деркач В. М.</i> Пропорциональные законы при распределении производственных заданий	65
<i>Гузенко А. В., Руденко В. Е.</i> Планирование технического развития предприятия в условиях его хозяйственной самостоятельности	69
<i>Шахновский Ю. С., Малых О. Н., Ардольян А. В., Кожин Ю. Н.</i> Об одном подходе к решению задачи расписания с динамическими ограничениями	71
<i>Чернышев В. И., Гюне А. Л., Муганов В. И., Гришина Ю. П.</i> Автоматизация разработки программ вычисления дискретного преобразования Фурье для векторных процессов	75
<i>Макаренко А. В., Пономарев А. С., Салахатдинова Л. Р.</i> Оптимизация резервирования вычислительной системы в АСУ ТП АЭС	78
<i>Куньянский Л. А., Годорова Н. В., Гольдрин И. В., Некрасова Г. М.</i> Методы графического отображения функций двух переменных на персональных компьютерах и микроЭВМ	81
<i>Карачун В. В.</i> Построение систем, инвариантных к силовому механическому напряжению	83
<i>Домнина И. Н., Зацаринная И. В., Мазманишвили А. С.</i> Повышение помехоустойчивости длинных линий путем изменения формы сигнального импульса	85
<i>Никольченко А. Г.</i> Рациональная организация универсального пакета программ для регрессионного анализа	87

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК

Харьковского
политехнического
института

№ 277

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Основан в 1979 г.

ВЫПУСК 10

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1990

В вестнике освещены вопросы синтеза и применения обратных систем, идентификация построения моделей технологических процессов, управления движением твердых тел. Предложены методы оптимизации структуры технических средств, агрегирования моделей планирования, решения распределительных задач. Рассмотрены задачи резервирования вычислительных систем, повышения помехоустойчивости длинных линий, моделирования паровых и гидравлических систем. Описаны методы графического отображения на ЭВМ трехмерных поверхностей.

Для преподавателей, научных работников, специалистов.

Редакционная коллегия: д-р техн. наук проф. *Е. Г. Голоскоков* (отв. ред.), канд. тех. наук *Н. И. Безменов* (отв. секр.), д-р техн. наук проф. *В. Б. Гринев*, д-р техн. наук проф. *А. В. Дабаян*, д-р техн. наук проф. *Ю. Т. Костенко*, канд. техн. наук доц. *В. Л. Лисицкий*, канд. техн. наук доц. *Ю. А. Фролов*

Ответственный за выпуск канд. техн. наук *Н. И. Безменов*

Адрес редакционной коллегии: 310002 Харьков, ул. Фрунзе, 21, политехнический институт, инженерно-физический факультет, тел. 40-00-56

Редакция научно-технической литературы
Зав. редакцией *Л. А. Гаврилова*

УДК 007

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

**ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**

№ 277

**Техническая кибернетика
и ее приложения**

Выпуск 10

Редактор *Н. А. Парфенова*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. П. Сын*

ОИБ № 13753

Сдано в набор 25.12.89. Подписано в печать 24.04.90. БЦ 15722.
Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 5,5. Усл. кр.-отт. 5,75. Уч.-изд. л. 6. л. Тираж 500 экз. Изд. № 1838. Зак. 1822. Цена 85 к. Заказное.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете

310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Харьковская городская типография № 16.

310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

1402000000-037

В М226(04)-90 Заказное

© Харьковский политехнический институт, 1990

ОПТИМАЛЬНЫЕ НАБЛЮДАТЕЛИ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Важнейшим этапом синтеза замкнутых систем управления распределенными объектами является разработка алгоритмов оценивания их состояния. При решении практических задач математическую модель объекта с распределенными параметрами представляют в виде счетной системы дифференциальных либо разностных уравнений состояния объекта. Для рассматриваемого класса задач проблема понижения порядка имеет существенное значение, поскольку оценивание бесконечномерного вектора состояния нереализуемо на практике.

В настоящей работе предложен способ выбора параметров наблюдателя пониженного порядка из условия минимизации дополнительной динамической ошибки оценивания, связанной с понижением порядка модели. При этом в качестве критерия оптимальности принят минимум одношаговой среднеквадратической ошибки оценивания. Выбранный подход является конструктивным, так как приводит к простым рекуррентным соотношениям для вычисления параметров оптимальных конечномерных наблюдателей и позволяет определить требуемую размерность для получения заданной точности оценивания.

Рассмотрим задачу синтеза наблюдателя пониженного порядка для распределенного объекта, описываемого уравнениями модельного представления с учетом случайных воздействий,

$$x(n+1) = Ax(n) + w(n); \quad y(n) = Cx(n) + v(n),$$

где $x(n)$ — N -мерный вектор состояния системы; $y(n)$ — p -мерный вектор измерений. Предположим что случайные воздействия на систему $w(n)$ и помехи измерений $v(n)$ являются независимыми центрированными нормально распределенными случайными последовательностями, задаваемыми матрицами ковариаций P_w, P_v .

Рассмотрим задачу оценивания набора линейных комбинаций вектора состояния $Rx(n)$, чему соответствует ошибка оценивания $\varepsilon(n) = Rx(n) - z(n)$, где $z(n)$ — M -мерный вектор оцениваемых переменных ($M < N$).

Динамика наблюдателя представляется следующим образом:

$$z(n+1) = Fz(n) + Gy(n),$$

где F, G — матрицы соответствующих размерностей.

Уравнение для ошибки оценивания имеет вид

$$\varepsilon(n+1) = F\varepsilon(n) + (FR + GC - RA)x(n) + Gw(n) - Rv(n). \quad (1)$$

Введем одношаговый критерий качества оценивания

$$J = E \operatorname{tr} \varepsilon(n+1) \varepsilon^T(n+1).$$

Из (1) получим

$$J = \text{tr} FP_e(n) F^T + \text{tr} WP_x(n) W^T + 2 \text{tr} FP_{e_x}(n) W^T + \\ + \text{tr} GP_v G^T + \text{tr} RP_w R^T, \quad (2)$$

где $W = FR + GC - RA$, а ковариационные матрицы удовлетворяют разностным уравнениям

$$P_e(n+1) = FP_e(n) F^T + WP_x(n) W^T + WP_{e_x}(n) F^T + \\ + FP_{e_x}(n) W^T + GP_v G^T + RP_w R^T, \quad P_{e_x}(n) = P_{z_x}(n) - RP_x(n), \\ P_{z_x}(n+1) = FP_{z_x}(n) A^T + GCP_x(n) A^T, \quad P_x(n+1) = \\ = AP_x(n) A^T + P_w.$$

Выделяя из (2) слагаемые, зависящие от параметров наблюдателя F , G , получаем выражение для критерия оптимальности в виде

$$J = \text{tr} F(P_e(n) + RP_x(n) R^T + RP_{z_x}(n) + P_{e_x}(n) R^T) F^T + \\ + \text{tr} G(P_v + CP_x(n) C^T) G^T + 2 \text{tr} F(P_{e_x}(n) C^T + RP_x(n) C^T) G^T - \\ - 2 \text{tr} F(P_{e_x}(n) - RP_x(n)) A^T R^T - 2 \text{tr} GCP_x(n) A^T R^T. \quad (3)$$

Минимизируя (3) по элементам матриц F , G , находим условия оптимальности в виде системы нормальных уравнений

$$FS(n) + GC(P_{z_x}(n) + P_x(n) R^T) = RA(P_{z_x}(n) - P_x(n) R^T); \\ F(P_{e_x}(n) + RP_x(n)) C^T + G(P_v + CP_x(n) C^T) = RAP_x(n) C^T; \\ S(n) = P_e(n) + P_{e_x}(n) R^T + RP_{z_x}(n) + RP_x(n) R^T. \quad (4)$$

Преобразуем полученную систему (4) с учетом того, что

$$P_z(n) = P_e(n) + P_{e_x}(n) R^T + RP_{z_x}(n) + RP_x(n) R^T; \\ P_{yz}(n) = CP_{z_x}(n) = C(P_{z_x}(n) + P_x(n) R^T); \quad P_y(n) = CP_x(n) C^T + \\ + P_v; \quad P_{xy}(n) = P_x(n) C^T.$$

Тогда система (4) примет

$$FP_z(n) + GP_{yz}(n) = RAP_{z_x}(n); \quad FP_{zy}(n) + GP_y(n) = RAP_{xy}(n).$$

Окончательно получим выражения для оптимальных параметров наблюдателя

$$F_{(n)}^* = RA(P_{z_x}(n) - P_{xy}(n) P_y^{-1}(n) P_{yz}(n) (P_z(n) - \\ - P_{zy}(n) P_y^{-1}(n) P_{yz}(n))^{-1}); \quad G^*(n) = RA(P_{xy}(n) - \\ - P_{z_x}(n) P_z^{-1}(n) P_{zy}(n)) (P_y(n) - P_{yz}(n) P_z^{-1}(n) P_{zy}(n))^{-1}. \quad (5)$$

Соотношения (5), дополненные уравнениями для ковариационных матриц

$$P_z(n+1) = F_{(n)}^* P_z(n) (F_{(n)}^*)^T + F^*(n) P_{zy}(n) (G^*(n))^T +$$

$$\begin{aligned}
& + G^*(n) P_{yz}(n) (F^*(n))^T + G^*(n) P_y(n) (G^*(n))^T, P_{yz}(n+1) = \\
& = C P_{xz}(n+1) = C A P_{xz}(n) (F^*(n))^T + C A P_x(n) C^T (G^*(n))^T; \\
& P_x(n+1) = A P_x(n) A^T + P_w,
\end{aligned}$$

образуют рекуррентный алгоритм вычисления параметров оптимального стохастического наблюдателя. При этом на каждом шаге достигается минимум среднеквадратической ошибки оценивания J . Выделим из нее составляющую, представляющую собой «плату» за понижение порядка наблюдателя

$$\begin{aligned}
J_n = & 2 \operatorname{tr} F^*(n) P_{xz}(n) (F^*(n) R + G C - R A)^T + \operatorname{tr} (F^*(n) R + \\
& + G^*(n) C - R A) P_x(n) (F^*(n) R + G^*(n) C - R A)^T.
\end{aligned}$$

Анализ зависимости J_n от размерности наблюдателя пониженного порядка позволяет выбрать ее из условий обеспечения заданной точности оценивания.

Из полученных уравнений следует, что оптимальный стохастический наблюдатель пониженного порядка представляет собой нестационарную динамическую систему, параметры которой определяются динамикой изменения взаимно- и автоковариационных матриц векторов состояния наблюдателя и объекта. При этом, если начальный вектор состояния объекта и внешние возмущающие воздействия центрировать, то и среднее значение ошибки оценивания также равно нулю и влияние понижения порядка сводится к увеличению дисперсии оценки.

Поступила в редколлегию 25.11.88

УДК 62-50

Л. М. ЛЮБЧИК, канд. техн. наук

СИНТЕЗ ОБРАТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Обратные динамические системы находят широкое применение при решении разнообразных задач автоматического управления, таких как восстановление входных воздействий, финитное регулирование, воспроизведение заданных законов движения. Под обратной динамической системой согласно работе [1] понимаем такую систему, которая при последовательном соединении ее с исходной системой вырабатывает на своем выходе сигнал, совпадающий со входным сигналом исходной системы. Известные методы построения обратной системы однозначно определяют ее структуру и параметры [1, 2]. В ряде случаев обратная система может оказаться неустойчивой либо обладающей неудовлетворительными динамическими свойствами, что делает невозможным ее применение для решения практических задач. Возникает необ-

ходимость в разработке методов синтеза обратных систем с заданными динамическими свойствами, аналогичных классическим методам синтеза систем с обратной связью. В настоящей работе указанная задача решается с использованием методов теории инвариантных наблюдателей [3].

Рассмотрим дискретно-временную динамическую систему, описываемую уравнениями в переменных состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad y(k) = Cx(k), \quad (1)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния системы; R^n — n -мерное векторное пространство; $u \in R^m$ — вектор входных переменных; $y \in R^p$ — вектор выходных переменных. В дальнейшем будем предполагать, что $p \geq m$, $\text{rank } CB = m$.

Уравнения динамической системы, обратной к (1), имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (I - B(CB)^+C)A\hat{x}(k) + B(CB)^+y(k+1); \\ \hat{u}(k) &= (CB)^+[y(k+1) - CA\hat{x}(k)], \end{aligned} \quad (2)$$

где \hat{x} — вектор состояния обратной системы; \hat{u} — вектор ее выходных переменных; I — единичная матрица; $+$ — знак псевдообращения. Выход обратной системы запаздывает на один шаг по отношению ко входу, что является следствием ее физической нереализуемости. Таким образом, обратная система (2) может обеспечить восстановление входного сигнала исходной системы (1) лишь с задержкой на шаг. Из уравнений (1), (2) следует, что ошибка восстановления

$$e_u(k) = u(k) - \hat{u}(k) = -(CB)^+CAe_x(k),$$

где разность между векторами состояния исходной и обратной систем $e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ в свою очередь удовлетворяет уравнению

$$e_x(k+1) = (I - B(CB)^+C)Ae_x(k).$$

Поскольку полюса обратной системы совпадают с нулями исходной [1], то асимптотическое стремление к нулю ошибки восстановления будет иметь место лишь в том случае, когда исходная система является минимально-фазовой. В общем случае необходима коррекция динамических характеристик обратной системы при сохранении ее основного функционального свойства восстановления входного сигнала.

Для синтеза обратной системы воспользуемся уравнениями инвариантного наблюдателя, обеспечивающего получение оценки $x(k)$ вектора состояния системы (1) без использования измерений входного сигнала:

$$\tilde{x}(k+1) = F\tilde{x}(k) + Gy(k); \quad \hat{x}(k) = \tilde{x}(k) + Hy(k), \quad (3)$$

где \hat{x} — вектор состояния наблюдателя. При выборе параметров наблюдателя, описываемого уравнениями (3), по формулам

$$F = (I - B(CB)^+ C) A - G_0 C, \quad G = G_0 + FH, \quad H = B(CB)^+, \quad (4)$$

где G_0 — произвольная матрица размером $n \times p$, ошибка оценивания $e_x(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ удовлетворяет уравнению $e_x(k+1) = F e_x(k)$, т. е. оказывается инвариантной к входному сигналу $u(k)$. Его оценку получим по формуле

$$\hat{u}(k) = B^+ [\hat{x}(k+1) - A \hat{x}(k)]. \quad (5)$$

Тогда из (3)–(5) следует, что оценка входного сигнала представляет собой выход динамической системы

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (I - B(CB)^+ C) A x(k) + B(CB)^+ y(k+1) + \\ &+ G_0 [y(k) - C \hat{x}(k)]; \quad \hat{u}(k) = (CB)^+ [y(k+1) - C A \hat{x}(k)] + \\ &+ B^+ G_0 [y(k) - C \hat{x}(k)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, предложенный метод синтеза приводит к результату, эквивалентному охвату системы (2) обратной связью по состоянию с матричным коэффициентом усиления G_0 . Ошибка восстановления входного сигнала определяется уравнениями

$$e_u(k+1) = -B^+ (F - A) e_x(k), \quad e_x(k+1) = F e_x(k),$$

и ее динамические свойства зависят от выбора матрицы варьируемых параметров G_0 . При выполнении условий наблюдаемости пары матриц $(I - B(CB)^+ C)A$, C указанный выбор осуществляется известными методами модального управления [4], обеспечивающими получение заданного спектра матрицы F .

Остановимся на выборе оптимальных параметров синтезированной обратной системы (6) при случайных воздействиях. Пусть $y(k) = Cx(k) + \xi(k)$, где $\xi(k)$ — случайная помеха измерения выходного сигнала исходной системы (1). Предположим, что помеха представляет собой последовательность случайных векторов с нулевым средним и матрицей ковариаций R . Уравнение для ошибки оценивания приобретает вид

$$\begin{aligned} e_u(k+1) &= -B^+ (F - A) e_x(k) - B^+ G_0 \xi(k) - (CB)^+ \xi(k+1), \\ e_x(k+1) &= F e_x(k) + G_0 \xi(k) + H \xi(k+1). \end{aligned}$$

Выберем параметры обратной системы из условия минимизации среднеквадратической ошибки восстановления входного сигнала $J(k+1) = M \text{Sp} e_u(k+1) e_u^T(k+1)$, где Sp — обозначение следа матрицы. Получим выражение для показателя качества восстановления. Учитывая, что $e_x(k) = (I - HC)x(k) - \tilde{x}(k) - H\xi(k)$,

$$\begin{aligned} \text{имеем } J(k+1) &= \text{Sp} \tilde{G}_0 W_0(k) \tilde{G}_0^T + 2 \text{Sp} \tilde{G}_0 W_1(k) + \text{Sp} W_2(k), \\ W_0(k) &= C P_e(k) C^T - CHR - RH^T C^T + R, \quad W_1^T(k) = \end{aligned}$$

$$= (CB)^+ CA [P_e(k) C^T - HR], \quad W_2(k) = (CB)^+ CAP_e(k) A^T C^T \times \\ \times (B^T C^T)^+ + B^+ HRH^T (B^T)^+, \quad (7)$$

где $\tilde{G}_0 = B^+ G_0$; $P_e(k)$ — ковариационная матрица ошибок оценивания вектора состояния, $P_e(k) = Me_x(k) e_x^T(k)$.

Дифференцируя выражение (7) для $J(k+1)$ по элементам матрицы \tilde{G}_0 , получаем систему уравнений $\tilde{G}_0 W_0(k) = -W_1^T(k)$, нормальное псевдорешение которой определит матрицу оптимальных параметров обратной системы

$$G_0^*(k) = B (CB)^+ CA [P_e(k) C^T - HR] \times [CP_e(k) C^T - \\ - CHR - RH^T C^T + R]^+. \quad (8)$$

Отметим, что оптимальная по критерию минимума среднеквадратической ошибки обратная система оказывается нестационарной, поскольку в соответствии с (8) ее параметры зависят от матрицы ковариаций ошибок оценивания вектора состояния $P_e(k)$, удовлетворяющей уравнению

$$P_e(k+1) = F^*(k) P_e(k) (F^*(k))^T + F^*(k) HR (G_0^*(k))^T + \\ + G_0^*(k) RH^T (F^*(k))^T + G_0^*(k) R (G_0^*(k))^T + HRH^T, \\ F^*(k) = (I - B (CB)^+ C) A - G_0^*(k) C.$$

Минимальная среднеквадратическая ошибка восстановления входного сигнала определяется формулой

$$J(k+1) = \text{Sp} [W_2(k) - W_1(k) W_0^+(k) W_1^T(k)].$$

При решении практических задач синтеза оптимальных обратных систем выбор матрицы варьируемых параметров целесообразно осуществлять по комплексному критерию, учитывающему требования к расположению полюсов обратной системы и условия минимизации среднеквадратической ошибки восстановления в установленном режиме.

Аналогичная методика может быть применена и для синтеза непрерывных обратных систем. В этом случае возникает необходимость в дифференцировании выходного сигнала исходной системы, что затрудняет ее практическую реализацию. Для преодоления указанной трудности целесообразно использовать нелинейные инвариантные наблюдатели, работающие в скользящем режиме [5].

Список литературы: 1. Яаксоо Ю. И. К теории дискретных обратных систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 5. С. 165—168. 2. Борухов В. Т. Критерии обратности линейных стационарных многомерных систем // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 5—11. 3. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Синтез оптимальных стохастических наблюдателей для систем с неизмеряемым входом // X Всесоюз. совещ. по пробл. упр.: тез докл. М., 1986. Кн. 1. С. 231—232.

4. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления. М., 1985. 296 с. 5. Харченко О. Ю. Построение обратных динамических систем с помощью скользящих режимов. См. статью в настоящем сборнике.

Поступила в редколлегию 30.11.88

УДК 62-50

Л. М. ЛЮБЧИК, канд. техн. наук

ПРИМЕНЕНИЕ ОБРАТНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЯ ЗАДАННЫХ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В работе [1] предложен метод синтеза обратных систем, обладающих заданными динамическими свойствами, и показана возможность их применения в задаче восстановления входных сигналов. Другой важной областью применения обратных систем является решение обратных задач динамики, заключающихся в нахождении управляющих воздействий, обеспечивающих изменение выходных переменных объекта по заданному закону [2].

Известные методы решения обратных задач динамики позволяют обеспечить точное воспроизведение лишь достаточно узкого класса законов движения, совпадающих с собственными решениями уравнений объекта [3]. Использование синтезированных в соответствии с работой [1] обратных систем для формирования управляющих воздействий позволяет обеспечить асимптотически точное воспроизведение произвольных законов движения и заданные динамические свойства ошибки воспроизведения. Одновременно с этим возникает возможность компенсации влияния недоступных непосредственному измерению внешних возмущений на основе их восстановленных значений [4].

Получим решение указанных задач применительно к дискретному динамическому объекту, описываемому уравнениями

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Dw(k), \quad y(k) = Cx(k), \quad (1)$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния; $u \in R^m$ — вектор управлений; $w \in R^r$ — вектор возмущений; $y \in R^p$ — вектор измеряемых выходных переменных.

Предположим, что $r < p = m$, а параметры объекта (1) таковы, что $\text{rank } CB = m$; $\text{rank } CD = r$.

Необходимо найти последовательность управляющих воздействий $u^*(k)$, обеспечивающую заданный закон изменения выходных переменных объекта $y^*(k)$.

Решение задачи начнем с построения оценки возмущающего воздействия путем подачи измерений выходных переменных на вход динамической системы, обратной (1) по каналу возмущений.

Синтезируем ее по методике [1] с учетом наличия в уравнении объекта управляющих воздействий:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_w(k+1) &= F_D \tilde{x}_w(k) + \Pi_D B u(k) + \Pi_D A H_D y(k), \\ \hat{w}(k) &= D^+ [(F_D - A) \tilde{x}_w(k) + (\Pi_D - I) A H_D y(k) + H_D y(k+1)], \\ F_D &= \Pi_D A - G_D^0 C, \quad H_D = D(CD)^+, \\ \Pi_D &= I - D(CD) + C = I - H_D C, \end{aligned} \quad (2)$$

где \tilde{x}_w — вектор состояния обратной системы.

Вычислим прогнозируемое значение реакции объекта (1) на возмущающее воздействие при нулевых управлениях. С учетом того, что оценка \hat{w} образуется с запаздыванием на один шаг по отношению к текущему вектору измерений, для получения физически реализуемого уравнения прогноза используем оценку возмущений на предыдущем шаге:

$$\bar{x}(k+1) = A \bar{x}(k) + D \hat{w}(k-1), \quad \bar{y}(k+1) = C \bar{x}(k+1). \quad (3)$$

Исходя из цели управления, сформируем последовательность задающих воздействий в виде

$$\begin{aligned} r^*(k) &= y^*(k) - C \bar{x}(k), \quad r^*(k+1) = y^*(k+1) - C A \bar{x}(k) - \\ &\quad - C D \hat{w}(k-1). \end{aligned} \quad (4)$$

Последовательность управляющих воздействий, обеспечивающих воспроизведение заданного закона движения и компенсацию влияния возмущений на выход системы, получим путем подачи задающего воздействия (4) на вход системы, обратной к объекту (1) по каналу управления при нулевых возмущениях:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_u(k+1) &= F_B \tilde{x}_u(k) + \Pi_B A H_B r^*(k), \quad u^*(k) = (CB)^{-1} C [(F_B - \\ &\quad - A) \tilde{x}_u(k) + (\Pi_B - I) A H_B r^*(k) + H_B r^*(k+1)], \\ F_B &= \Pi_B A - G_B^0 C, \quad H_B = B(CB)^{-1}, \quad \Pi_B = I - B(CB)^{-1} C, \end{aligned} \quad (5)$$

где \tilde{x}_u — вектор состояния соответствующей обратной системы.

Уравнения (2)–(5) описывают динамический регулятор, обеспечивающий заданное изменение выходных переменных и компенсацию возмущений. Проанализируем динамические свойства синтезированной замкнутой системы. Согласно (1), (5) ошибка воспроизведения $e_y^* = y^* - y$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} e_y^*(k+1) &= C A e(k) - C G_B^0 C \tilde{x}_u(k) + C D v(k), \\ e(k) &= x(k) - \tilde{x}_u(k) - \Pi_B \bar{x}(k) - H_B y^*(k), \end{aligned} \quad (6)$$

$$v(k) = w(k) - \hat{w}(k-1) = \Delta w(k) + e_w(k-1),$$

где $\Delta w(k)$ — приращение внешнего возмущающего воздействия за один шаг; $e_w(k)$ — ошибка его восстановления; $e_w(k) = w(k) - \hat{w}(k)$.

Используя уравнение обратной системы (5) и прогноза (3), получаем

$$\varepsilon(k+1) = A\varepsilon(k) + \Pi_B G_B^0 \tilde{C} x_u(k) + Dv(k). \quad (7)$$

Учитывая, что $\tilde{C} x_u(k) = -C\varepsilon(k) + e_y^*(k)$ из (6), (7) находим систему уравнений динамики ошибки воспроизведения:

$$e_y^*(k+1) = -CG_B^0 e_y^*(k) + C(A + G_B^0 C)\varepsilon(k) + CDv(k), \quad (8)$$

$$\varepsilon(k+1) = \Pi_B G_B^0 e_y^*(k) + (A - \Pi_B G_B^0 C)\varepsilon(k) + Dv(k).$$

В свою очередь из уравнения восстановления внешнего возмущения (2) следует, что ошибка восстановления

$$e_w(k) = -D^+(F_D - A)e_{xw}(k), \quad e_{xw}(k+1) = F_D e_{xw}(k), \quad (9)$$

где $e_{xw}(k)$ — ошибка оценивания вектора состояния,

$$e_{xw}(k) = x(k) - \tilde{x}_w(k) - H_D y(k).$$

Уравнение динамики ошибки воспроизведения содержит воздействие, определяемое скоростью изменения внешних возмущений и ошибкой оценивания вектора состояния. При этом выбор матрицы G_B^0 определяет динамические свойства ошибки воспроизведения, а матрицы G_B^0 — ошибки оценивания переменных состояний объекта, т. е. имеет место факт разделимости динамических свойств. При выполнении условий устойчивости систем (2), (9) асимптотическое значение ошибки воспроизведения ограничено областью, определяемой скоростью изменения возмущений, в то время как для системы без компенсации указанная область определяется амплитудой возмущающих воздействий. Следовательно, для медленно меняющихся возмущений достигается высокая точность компенсации, а для постоянных по амплитуде возмущений имеет место асимптотически точное воспроизведение заданного закона движения. Выбор матриц G_B^0 , C_D^0 осуществляется известными методами модального управления [5] из условия выполнения заданных требований к динамическим свойствам ошибки воспроизведения и ее установившемуся значению.

При необходимости изменения динамических свойств объекта (1) возможен охват его обратной связью по состоянию с использованием оценок $\tilde{x}(k) = \tilde{x}_w(k) + H_D y(k)$, полученных с помощью обратной системы (2). Соответствующий закон управления выражается формулой

$$u(k) = u^*(k) - L\tilde{x}_w(k) - LH_D y(k), \quad (10)$$

где L — матрица обратной связи, выбираемая методами модального управления из условия заданного расположения полюсов

замкнутой системы. Поскольку согласно работе [1] оценка вектора состояния \hat{x} обладает свойствами инвариантности к внешним возмущениям, введение обратной связи по формуле (10) не вносит дополнительной погрешности и обеспечивает возможность раздельного изменения динамических свойств объекта и ошибки воспроизведения.

Итак, управляющее воздействие, обеспечивающее одновременное воспроизведение заданных законов движения и компенсацию возмущений, формируется в виде линейной комбинации задающих воздействий, векторов состояния обратных и прогнозирующей систем и измеряемых выходных переменных. При этом использование обратных систем, синтезированных по методике [1], позволяет обеспечить требуемые динамические свойства замкнутой системы.

Список литературы: 1. Любчик Л. М. Синтез обратных динамических систем методом инвариантного оценивания//См. статью в настоящем сборнике. 2. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М., 1987. 304 с. 3. Крутько П. Д., Попов Е. П. Построение алгоритмов управления движением дискретных систем//Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1979. № 2. С. 159—167. 4. Любчик Л. М. К задаче синтеза регуляторов, компенсирующих возмущения//Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1989. № 260:Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 9. С. 5—7. 5. Андреев Ю. Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами//Автоматика и телемеханика. 1977. № 3. С. 5—50.

Поступила в редколлегию 30.11.88

УДК 62-50

О. Ю. ХАРЧЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ СКОльзяЩИХ РЕЖИМОВ

В работе [1] предложен способ синтеза дискретных обратных систем на основе инвариантного наблюдателя состояния объекта. При построении обратных систем для случаев непрерывного времени возникает необходимость дифференцирования выходных переменных объекта. Это связано с тем, что для объектов, относительный порядок которых единица и больше, обратные системы должны носить «упреждающий» характер. Трудности реализации операции дифференцирования ограничивают применение обратных систем, синтезированных по известным алгоритмам.

Рассмотрим стационарный объект, описываемый уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bw(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор состояния объекта; R^n — n -мерное векторное пространство; $w(t) \in R^1$ — произвольный неизменяемый входной сигнал; $y(t) \in R^m$ — вектор измеряемых выходных сигналов объ-

ёкта, $m < n$; A , \hat{C} , b — постоянные матрицы и вектор соответствующих размерностей.

Для синтеза обратной системы используем инвариантный наблюдатель. Построим его в виде динамической системы с переменной структурой

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + lu(t), \quad (2)$$

где $x(t) \in R^n$ — вектор оценки состояния объекта; $u(t) \in R^1$ — разрывное управление,

$$u(t) = \Psi^T [y(t) - C\hat{x}(t)],$$

$$\Psi^T = \begin{cases} \alpha^T & \text{при } d^T [y(t) - C\hat{x}(t)] > 0; \\ \beta^T & \text{при } d^T [y(t) - C\hat{x}(t)] < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь вектор $l \in R^n$ и векторы-строки d^T , $\alpha^T \beta^T \in R^m$ являются параметрами наблюдателя, подлежащими определению.

Сформулируем задачу: выбором параметров наблюдателя добиться асимптотической устойчивости ошибки оценивания $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t) = 0$ (4) и заданной скорости ее убывания.

Распишем уравнение для ошибки оценивания. Из (1)–(3), обозначив $\alpha^T C = g^T$, имеем

$$\dot{e}_x(t) = Ae_x(t) + bw(t) - lu(t), \quad (5)$$

$$u(t) = \Psi^T Ce_x(t), \quad \Psi^T = \begin{cases} \alpha^T & \text{при } g^T e_x > 0; \\ \beta^T & \text{при } g^T e_x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Асимптотическое стремление к нулю ошибки $e_x(t)$ можно обеспечить, если ввести в системе (5), (6) устойчивое скользящее движение по поверхности разрыва управления $s(e_x) = g^T e_x = 0$ [2]. Тогда изображающая точка системы (5), (6), попав на плоскость $s = 0$, будет двигаться вдоль нее к началу координат.

Воспользуемся методом эквивалентного управления и запишем уравнения идеального скольжения системы (5), (6) по плоскости

$$\dot{e}_x(t) = (A - l(g^T l)^{-1} g^T A) e_x(t) + (b - l(g^T l)^{-1} g^T b) w(t).$$

Очевидно, вектор коэффициентов наблюдателя l следует выбирать из условия инвариантности ошибки оценивания к возмущению w . Принимая $l = b$, имеем

$$\dot{e}_x(t) = \Pi A e_x(t).$$

Здесь $\Pi = I - b(g^T b)^{-1} g^T$; I — единичная матрица ($n \times n$). Теперь выбором вектора d можно установить желаемые полюса системы (7), придавая ошибке требуемую скорость убывания.

Условия существования скользящего движения ошибки оценивания по плоскости $s=0$ записываются в виде неравенств

$$\begin{aligned} [\operatorname{sgn}(\mathbf{g}^T \mathbf{l})] \alpha^T \mathbf{e}_x < -|\mathbf{g}^T \mathbf{l}|^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{e}_x; & [\operatorname{sgn}(\mathbf{g}^T \mathbf{l})] \beta^T \mathbf{e}_x > \\ > -|\mathbf{g}^T \mathbf{l}|^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{A} \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (8)$$

Поскольку правые и левые части неравенств являются линейными функциями компонент вектора \mathbf{e}_x , можно подобрать такие параметры α^T, β^T , что (8) будет удовлетворено.

Рассмотрим вопрос выбора вектора \mathbf{d} . Матрица ПА имеет вид матрицы системы, обратной к системе $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{g}^T)$, где \mathbf{A} — матрица динамики, \mathbf{b}, \mathbf{g} — векторы связи со входом и выходом соответственно. Известно, что ненулевые полюса обратной системы совпадают с нулями исходной. Преобразуем систему $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{g}^T)$ к канонической форме управляемости $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{g}}^T$ [4], где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

вектор-строка $\bar{\mathbf{g}}^T = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n)$ имеет произвольный вид. К указанной форме представления можно перейти с помощью невырожденного преобразования \mathbf{M} , если пара (\mathbf{A}, \mathbf{b}) управляема:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}; \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}; \quad \bar{\mathbf{g}}^T = \mathbf{g}^T \mathbf{M}.$$

Для данной формы представления системы передаточная функция имеет вид

$$G(s) = \frac{\bar{g}_n s^{n-1} + \bar{g}_{n-1} s^{n-2} + \dots + \bar{g}_1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Таким образом, ненулевые полюса (7) определяются из уравнения

$$s^{n-1} + \bar{g}_{n-1} s^{n-2} + \dots + \bar{g}_1 = 0, \quad (9)$$

где

$$g_j = \sum_{i=1}^m d_i \sum_{k=1}^n c_{ik} m_{kj}, \quad j = 1, n, \quad \text{или} \quad \mathbf{g}^T = \mathbf{d}^T \mathbf{C} \mathbf{M}.$$

Коэффициент g_n является избыточным, поэтому можно положить $g_n = 1$.

Исходя из требуемой скорости убывания ошибки можно задать полюса λ_i^* , $i=1, n-1$ системы (7). При этом n -й полюс всегда будет нулевой, так как при идеальном скольжении система движется строго по плоскости, теряя при этом одну из степеней свободы. Вычислив требуемые коэффициенты характеристического полинома g_j^* , $j=1, n-1$, можно подобрать параметры d_i , $i=1, m$ так, что-

бы полюса, задаваемые уравнением (9), находились как можно ближе к требуемым. Точное совпадение можно гарантировать только в случае $m=n-1$.

Воспользуемся методами оптимизации. Составим функционал качества, характеризующий приближение полюсов системы (7) к требуемым [5]

$$J = \sum_{j=1}^{n-1} w_{n-j} (\bar{g}_j - g_j^*)^2.$$

Здесь в качестве веса w_{n-j} выбрана сумма коэффициентов чувствительности всех полюсов к вариации j -го коэффициента полинома

$$w_j = \sum_{\nu=1}^{n-1} (k_\nu^j)^2, \quad k_\nu^j = \frac{(\lambda_\nu^*)^{n-j}}{\sum_{k=1}^n k g_{k-1}^* (\lambda_\nu^*)^{k-1}},$$

k_ν^j — коэффициент чувствительности ν -го полюса к вариации j -го коэффициента полинома. Минимизируя функционал J по параметрам d_i , $i=1, m$, добиваемся наиболее близкого к требуемому расположения полюсов матрицы динамики ошибки. Для минимизации используется какой-либо градиентный метод. Градиенты функционала качества по варьируемым параметрам определяются формулой

$$\frac{\partial J}{\partial d_i} = 2 \sum_{j=1}^{n-1} w_{n-j} (g_j - g_j^*) \sum_{k=1}^n c_{ik} m_{kj}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Окончательно уравнение наблюдателя, инвариантного к неизменяемым входным сигналам объекта, имеет вид $\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t)$, где $u(t)$ определено в (3). Параметры наблюдателя α^T , β^T вычисляются исходя из условий существования скользящего режима, а d^T — исходя из устойчивости движения и требуемой скорости убывания ошибки.

Теперь можно построить обратную систему в виде

$$\hat{w}(t) = b^+ [\hat{x}(t) - A\hat{x}(t)],$$

где знак $+$ обозначает операцию псевдообращения. Нетрудно убедиться, что ошибка оценивания входного сигнала объекта

$$e_w(t) = w(t) - \hat{w}(t) = e_w(t) = -(g^T b)^{-1} g^T A e_x(t).$$

Таким образом, введение скользящего режима для ошибки оценивания состояния объекта позволяет избежать операции дифференцирования выхода объекта при синтезе обратной системы.

Список литературы: 1. Любчик Л. М. Синтез обратных динамических систем методом инвариантного оценивания//См. статью в настоящем вестнике. 2. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М., 1981. 368 с. 3. Яаксоо Ю. И. К теории дискретных обратных систем//Изв. АН СССР Техн. кибернетика. 1980. № 5. С. 165—168. 4. Смагина Е. М. К проблеме

Поступила в редколлегию 19.12.88

УДК 681.015

А. А. БОБУХ, канд. техн. наук, Т. Н. СМАГА

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ПРОЦЕССАМИ НА ОСНОВЕ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Анализ технологической схемы непрерывного производства кальцинированной соды (ПКС) и изучение рассматриваемого производства как объекта управления позволяют сделать вывод о возможности декомпозиции общей задачи управления ПКС на подзадачи управления отдельными производственными участками, в частности отделением карбонизации.

В настоящее время не разработаны способы, позволяющие управлять процессом карбонизации по прямым параметрам регулирования. Поэтому качество управления указанным процессом существенно зависит от используемых математических моделей. В силу особенностей процесса реализовать систему управления им с помощью обычных средств регулирования на основе общих методов механики сплошной среды достаточно сложно. В этих условиях целесообразно применять формальные методы синтеза функционального оператора с помощью математического описания процесса. Поскольку наблюдению доступны только входные и выходные сигналы и отсутствует априорная информация о внутренней структуре, применяют статистические методы, использующие модели в виде уравнений регрессии. В этом случае используются соотношения вида $Y_n = X_n C$ (1), где Y_n — (9×1) -вектор сигналов измеряемых выходных переменных, $Y_n = (y_{1n}, y_{2n}, \dots, y_{9n})$; X_n — матрица размера 9×12 , составленная из сигналов измеряемых входных переменных, $X_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{12n})$; C — (12×1) -вектор искомых параметров, $C = (c_1, c_2, \dots, c_{12})^T$; n — дискретное время.

Ниже приведены результаты выбора структуры линейных регрессионных моделей, связывающих, например, температуру суспензии на выходе карбоколонны y_1 с входными переменными $x_i (i = \overline{1, 12})$ методом пошаговой регрессии:

$$\begin{array}{l|l} x_8 & 0,840 \\ x_8 x_1 x_2 x_7 x_5 x_{12} x_{11} x_4 x_6 x_{10} x_9 x_3 & 0,980. \end{array}$$

Переменные x_i последовательно вводятся в модель, справа стоят коэффициенты, служащие мерой согласия соответствующей

Модели регрессии с имеющимися данными (приведены только 1-й и 12-й шаги). Таким же способом определяются структуры математических моделей для других выходных переменных ($y_i (i = \overline{2,9})$).

Результаты построения регрессионной модели для указанной выходной переменной y_1 методом наименьших квадратов (МНК) приведены в таблице. Свободный член уравнения $C_0 = 20,8$.

Коеф-фициент регрессии	Значение		Коеф-фициент регрессии	Значение	
	коэффициента регрессии	стандартной погрешности оценки коэффициента, %		коэффициента регрессии	стандартной погрешности оценки коэффициента, %
C_1	0,060	0,020	C_7	0,230	0,890
C_2	0,010	0,010	C_8	0,090	0,210
C_3	0,010	0,010	C_9	-0,120	0,150
C_4	0,024	0,070	C_{10}	0,076	0,160
C_5	0,072	0,380	C_{11}	0,097	0,059
C_6	2,430	1,470	C_{12}	-0,006	0,003

Несмотря на то что полученная модель позволяет достаточно точно рассчитать управляющие воздействия по усредненным за один час исходным данным, эффективность ее использования при оперативном управлении оказалась очень низкой. Результаты проведенных статистических исследований свидетельствуют о том, что процессы, протекающие в отделении карбонизации, отличаются нестационарностью характеристик, неоднородностью дисперсий, наличием корреляционной связи между входными переменными. В этих условиях наиболее целесообразным представляется применение адаптивных методов идентификации и управления.

Как показывает практика, одним из наиболее простых и удобных алгоритмов идентификации является алгоритм Качмажа, который для каждого уравнения системы (1) имеет вид

$$C_n = C_{n-1} + \gamma_n (y_n - C_{n-1}^T X_n) \|X_n\|^{-2} X_n. \quad (2)$$

Здесь C_n — оценка вектора искоемых коэффициентов, полученная на n -м такте; $\|X_n\|^2 = \sum_{i=1}^{12} x_{i,n}^2$ — евклидова норма; γ_n — параметр, влияющий на скорость сходимости и вводимый в алгоритм для компенсации влияния помех.

Так как для ускорения процесса идентификации необходима стандартизация входных и выходных переменных, осуществляется их центрирование и нормирование. Переход от получаемых при этом коэффициентов C_n^0 к коэффициентам в натуральном масштабе C_n осуществляется по формуле

$$C_n = C_n^0 \sigma_{y,n}^2 \sigma_{x,n}^{-2}, \quad (3)$$

где $\sigma_{y,n}^2$, $\sigma_{x,n}^2$ — дисперсии выходного и входных сигналов.

Сравнение результатов, представленных в таблице и полученных с помощью алгоритма (2), показало, что оценки параметров по этому алгоритму существенно отличаются от оценок, получаемых с помощью МНК. Использование нестационарных оценок параметром C_n в алгоритме адаптивного управления позволяет улучшить качество оперативного управления за счет потактового формирования управляющего воздействия, минимизирующего отклонение текущего значения выходной переменной y_n от требуемого значения y^* .

В качестве алгоритма адаптивного управления (коррекции управляющих воздействий) был взят алгоритм, аналогичный алгоритму Качмажа

$$x_n = x_{n-1} + (y^* - C_n^T x_{n-1}) \|C_n\|^{-2} C_n. \quad (4)$$

При переходе от стандартизованных переменных к реальным закон адаптивного управления преобразуется следующим образом:

$$x_n = x_{n-1} + m_x + \sigma_x^2 \sigma_y^{-2} (y^* - C_n^T x_{n-1}) \|C_n\|^{-2} C_n, \quad (5)$$

где m_x — математическое ожидание входной переменной.

Необходимо отметить, что введение в контур управления вычислительного устройства, работающего в режиме достоверной эквивалентности, при котором оценки, полученные на этапе идентификации, используются для выработки воздействий, приводит к появлению специфических свойств системы управления. Специфика состоит в том, что применение алгоритма (4) обеспечивает достижение цели управления даже в случае неточного определения параметров модели. Это нетрудно показать следующим образом. Коррекция параметров модели происходит при наличии расогласования $\Delta y_n = C^{*T} x_n - y^*$ (6), где C^* — искомые параметры модели.

Рассмотрим общий случай N входных переменных, из которых K являются нерегулируемыми, а $(N-K)$ — регулируемыми. Рассмотрим величину $(\Delta y_n)^2$. Подставляя в (6) требуемые значения $x_{i,n}$ ($i=1, N$) из (4), получаем

$$\begin{aligned} (\Delta y_n)^2 = & \left\{ \sum_{i=1}^k \left[C_i^* - \sum_{j,e=K+1}^N C_j^* C_{e,n} C_{i,n} \left(\sum_{j,e=K+1}^N C_{j,n} C_{e,n} \right)^{-1} \right] x_{i,n} + \right. \\ & \left. + y^* \left[\sum_{j,e=K+1}^N C_j^* C_{e,n} \left(\sum_{j,e=K+1}^N C_{j,n} C_{e,n} \right)^{-1} - 1 \right] \right\}^2. \quad (7) \end{aligned}$$

Если $x_{i,n}$ ($i=1, n$) — статистически независимые случайные величины с $M\{x_i\} = 0$, $M\{x_i^2\} = \sigma_{x_i}^2$, то Δy_n — случайная величина, и рассмотрев вместо (Δy_n^2) величину $M(\Delta y_n)^2$, увидим,

что настройка параметров модели может происходить при выполнении условия

$$M\{(\Delta y_n)^2\} = \sum_{i=1}^k \left[C_i^* - \sum_{j,e=K+1}^N C_j^* C_{e,n} C_{i,n} \left(\sum_{j,e=K+1}^N C_{j,n} C_{e,n} \right)^{-1} \right]^2 \sigma_x^2 + (y^*)^2 \left[\sum_{j,e=K+1}^N C_j^* C_{e,n} \left(\sum_{j,e=K+1}^N C_{j,n} C_{e,n} \right)^{-1} - 1 \right]^2 > 0. \quad (8)$$

Из полученного неравенства следует, что процесс идентификации может остановиться как в случае $C_i^* = C_{i,n}$ ($i = \overline{1, N}$), т. е. при точном определении параметров, так и при выполнении условий

$$\sum_{j,e} C_j^* C_{e,n} C_{i,n} = \sum_{j,e} C_{j,n} C_{e,n} C_i^*, \quad \sum_{j,e} C_j^* C_{e,n} = \sum_{j,e} C_{j,n} C_{e,n}.$$

Полученные соотношения являются достаточно общими и позволяют установить условия останова процесса идентификации в каждом конкретном случае для заданного числа регулируемых входов $N-K$, значений N, y^* .

Программа адаптивного управления, реализующая алгоритмы (2), (4), (5), была использована при разработке специального программного обеспечения системы адаптивного управления технологическими процессами производства кальцинированной соды.

Поступила в редколлегию 11.11.88

УДК 62.505

Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук, О. И. ШЕЛЕСТОВА

ВОЗМОЖНЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Математическая модель проектируемого объекта часто существенно отличается от реального процесса и значительно уменьшает или сводит на нет эффективность разработанной системы управления. Возникает задача, связанная с построением модели на основании наблюдений, получаемых в условиях функционирования объекта по его входным и выходным параметрам — параметрам состояния объекта. Эта задача получила название идентификации систем [1; 2].

Рассмотрим возможный алгоритм идентификации линейного нестационарного динамического объекта на основе использования метода наименьших квадратов. Предполагается, что математическая модель объекта задана в виде дифференциальных уравнений в форме Коши вида

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + u_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

В общем случае известными будем полагать входные u_i и выходные x_j величины. Требуется идентифицировать динамические параметры $a_{ij}(t)$ объекта (1) по известным входным $u_i(t)$ и выходным $x_j(t)$ переменным состояния на интервале времени наблюдения $[0 < t_p \leq T]$, где $p = \overline{0, N}$; $N \gg n$.

Представим переменные во времени коэффициенты системы дифференциальных уравнений (1) $a_{ij}(t)$ в виде алгебраических полиномов m -й степени по времени t

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=0}^m a_{ij}^{(k)} t^k. \quad (2)$$

Тогда выражение (1) примет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^m a_{ij}^{(k)} t^k \right) x_j + u_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Используя метод наименьших квадратов, будем искать оценки $\hat{a}_{ij}^{(k)}$ вектора параметров $a_{ij}(t)$ из условия минимума скалярного критерия J

$$\min_{\hat{a}_{ij}^{(k)}} J = \min_{\hat{a}_{ij}^{(k)}} \sum_{p=0}^N \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^m \hat{a}_{ij}^{(k)} t_p^k \right) x_j(t_p) + u_i(t_p) - \dot{x}_i(t_p) \right]^2. \quad (4)$$

Необходимое условие минимума J по $\hat{a}_{ij}^{(k)}$ следующее: $\frac{\partial J}{\partial \hat{a}_{ij}^{(k)}} = 0$.

Оно представляет собой n систем алгебраических уравнений $[n(m+1) \times n(m+1)]$ -го порядка для определения оценок $\hat{a}_{ij}^{(k)}$ с использованием всей информации о параметрах $u_i(t_p)$ и $x_j(t_p)$ выборки $[0 \leq t_p \leq T]$ при $p=0, N$, где $N \gg n$ и $N \gg m$, вида

$$\sum_{p=0}^N \frac{\partial J}{\partial \hat{a}_{ij}^{(k)}} \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^m \hat{a}_{ij}^{(k)} t_p^k \right) x_j(t_p) + u_i(t_p) - \dot{x}_i(t_p) \right] t_p^k x_j(t_p) = 0. \quad (5)$$

Такую систему часто называют системой нормальных уравнений. Недостающую информацию об $x_i(t_p)$ можно определить численным дифференцированием через конечные разности либо, если система подвержена шумам, путем предварительной аппроксимации $x_i(t_p)$ какой-то функцией $\varphi(t_p)$, например полиномом вида (2).

Алгоритм определения оценок $\hat{a}_{ij}^{(k)}$ на основе (5) имеет вид

$$\sum_{p=0}^N \left[\sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^m \hat{a}_{ij}^{(k)} t_p^k x_j(t_p) \right) \right] = \sum_{p=0}^N [\dot{x}_i(t_p) - u_i(t_p)] t_p^k x_j(t_p). \quad (6)$$

Решая (6), определяем оценки $\hat{a}_{ij}^{(k)}$ динамических параметров $a_{ij}(t)$ вида (2) модели (1).

Для некоторых объектов вида (1) может оказаться, что возмущающие воздействия u_i нам неизвестны. В этом случае они также могут быть аппроксимированы полиномом вида (2), и тогда алгоритм (6) запишется в форме

$$\sum_{p=0}^N \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^m \hat{a}_{ij}^{(k)} t_p^k \right) x_j(t_p) + \sum_{k=0}^m \hat{u}_i^{(k)} t_p^k \right] = \sum_{p=0}^N \dot{x}_i(t_p) t_p^k x_j(t_p);$$

$$\sum_{p=0}^N \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^m \hat{a}_{ij}^{(k)} t_p^k \right) x_j(t_p) + \sum_{k=0}^m \hat{u}_i^{(k)} t_p^k \right] = \sum_{p=0}^N \dot{x}_i(t_p) t_p^k. \quad (7)$$

В инженерной практике зачастую известны закон изменения параметров $a_{ij}(t)$, $u_i(t)$ и их приближенные значения $\bar{a}_{ij}^{(k)}$, $\bar{u}_i^{(k)}$. Тогда задача сведется к определению добавок $\Delta \hat{a}_{ij}^{(k)}$ и $\Delta \hat{u}_i^{(k)}$

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=0}^m (\bar{a}_{ij}^{(k)} + \Delta \hat{a}_{ij}^{(k)}) t_p^k, \quad u_i(t) = \sum_{k=0}^m (\bar{u}_i^{(k)} + \Delta \hat{u}_i^{(k)}) t_p^k, \quad (8)$$

где $\bar{a}_{ij}^{(k)}$, $\bar{u}_i^{(k)}$ — известны. Кроме того, для многих моделей (1) начальные $a_{ij}^{(0)}$, $u_i^{(0)}$ и конечные значения $a_{ij}^{(m)}$, $u_i^{(m)}$ также известны. В этом случае в (2) начальные и конечные значения полинома как бы закреплены. В практических задачах полином вида (2) не выше третьего порядка.

Список литературы: 1. Грон Д. Методы идентификации систем. М., 1979. 434 с.
2. Сейдж Э. П., Мелса Д. Л. Идентификация систем управления. М., 1979. 297 с.

Поступила в редколлегию 24.12.88

УДК 62.505

Н. Г. КИРЕЕВ, канд. техн. наук

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ И ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе [1] для линейного в общем случае нестационарного объекта n -го порядка, описываемого матричным уравнением вида $\dot{X} + AX = U$ (1), были получены линейные оптимальные управления $U = -KTX$ (2) или в скалярной форме

$$u_i = -k_i \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k, \quad (3)$$

где k_i — коэффициенты усиления каналов; γ_{ik} — коэффициенты оптимальных управлений, однозначно определяемые через коэффициенты матрицы объекта A и функционал

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i,k=1}^n \beta_{ik} x_i x_k dt + \sum_{i,k=1}^n \gamma_{ik}(t_2) x_i(t_2) x_k(t_2) \quad (4)$$

при ограничивающих условиях, представляющих собой с физической точки зрения сумму взвешенных работ на входах и выходах исполнительных устройств вида

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{k_i} dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k \right)^2 dt = c[x_1(t_1), \dots, x_n(t_1)], \quad (5)$$

где t_1, t_2 — соответственно начальный и конечный моменты времени движения системы,

$$X^T B X = \sum_{i,k=1}^n \beta_{ik} x_i x_k \quad (6)$$

заданная положительно-определенная или неотрицательная квадратичная форма, удовлетворяющая критерию Сильвестра. При этом неизвестные коэффициенты $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ квадратичной формы

$$X^T \Gamma X = \sum_{i,k=1}^n \gamma_{ik} x_i x_k \quad (7)$$

определяются из уравнения Рикати $\dot{\Gamma} - \Gamma A - A^T \Gamma = -B$ (8), где B — матрица заданной квадратичной формы (6). Однако в инженерной практике при определении оптимальных управлений U объекта (1) может оказаться, что принятая модель объекта существенно отличается от реального и это значительно уменьшает или сводит на нет эффективность разработанной системы управления. Таким образом, возникает задача одновременной идентификации и определения оптимальных управлений, т. е. уточнения динамических параметров матрицы A объекта (1) и его оптимальных управлений U .

Для линейного стационарного объекта вида

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + u_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Выражение (8) вырождается в алгебраическое уравнение

$$\sum_{p=1}^n [a_{pk} \gamma_{ip} + a_{pi} \gamma_{kp}] = \beta_{ik}. \quad (10)$$

Предположим, что известны координаты объекта x_i , коэффициенты усиления каналов k_i , коэффициенты заданной квадратичной формы β_{ik} , приближенно известны (из инженерной практики) коэффициенты a_{ih} матрицы объекта A [2; 3]. Требуется по этим данным определить (уточнить) динамические параметры объекта a_{ik} и управления u_i . Для решения этой задачи можно предложить прием в виде следующего рекуррентного алгоритма относительно неизвестных u_i, γ_{ik}, a_{ik} :

$$u_i = -k_i \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_k; \quad \beta_{ik} = \sum_{p=1}^n [a_{pk} \gamma_{ip} + a_{pi} \gamma_{kp}]; \quad a_{ik} = 0. \quad (11)$$

Процедура представляет собой пошаговый процесс определения a_{ik}, u_i и подстановки их в (9). Процесс считается законченным, когда удовлетворяется равенство (9).

Так, для объекта второго порядка

$$\dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + u_1; \quad \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + u_2 \quad (12)$$

алгоритм определения $a_{11}, \dots, a_{22}, u_1$ и u_2 будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_1 = & -k_1(\gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2); \quad u_2 = -k_2(\gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2); \quad \beta_{11} = 2a_{11}\gamma_{11} + \\ & + 2a_{21}\gamma_{12}; \quad \beta_{12} = a_{12}\gamma_{11} + (a_{11} + a_{22})\gamma_{12} + a_{21}\gamma_{22}; \quad \beta_{21} = a_{12}\gamma_{11} + \\ & + (a_{11} + a_{22})\gamma_{21} + a_{21}\gamma_{22}; \quad \beta_{22} = 2a_{12}\gamma_{21} + 2a_{22}\gamma_{22}; \quad \dot{a}_{11} = 0; \\ & \dot{a}_{12} = 0; \quad \dot{a}_{21} = 0; \quad \dot{a}_{22} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Начальные условия при решении (11) или (13) для a_{ik} задаются исходя из априорных данных об их приближениях. Однако, используя (12), (13) и учитывая в силу симметрии квадратичных форм равенства $\|\gamma_{ik}\| = \|\gamma_{ki}\|$ и $\|\beta_{ik}\| = \|\beta_{ki}\|$, можно снизить порядок системы уравнений.

Список литературы: 1. Красовский А. А. Аналитическое конструирование контуров управления летательных аппаратов. М., 1969. 231 с. 2. Грон Д. Методы идентификации систем. М., 1979. 434 с. 3. Курев Н. Г. Шелестова О. И. Возможный алгоритм идентификации нестационарной динамической системы// См. статью в настоящем вестнике.

Поступила в редколлегию 24.12.88

УДК 62-50

Е. Г. ГОЛОСКОКОВ, д-р техн. наук

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ОКОЛО ЦЕНТРА МАСС

Задача о гашении вращения спутника относительно центра масс с помощью трех маховиков с осями, совпадающими с главными центральными осями x, y, z тела, рассматривалась в работе [1]. При этом на основе метода динамического программирования получено оптимальное управление в аналитическом виде для случая, когда спутник обладает инерциальной симметрией, а также для случая отсутствия инерциальной симметрии, но при малых значениях угловых скоростей вращения спутника.

В данной статье задача об оптимальном гашении вращения несимметричного спутника в постановке А. М. Летова [1], но без требования малости его угловых скоростей, сводится к задаче управления системой с инвариантной нормой. Это обстоятельство дает возможность получить оптимальное управление в аналитическом виде, по форме совпадающем с управлением симметричным спутником, а также использовать всю гамму решений задач об оптимальном управлении системой с инвариантной нормой при ограничении на вектор управления в виде гиперболы [2]

Итак, уравнения объекта имеют вид [1]

$$J_1 p_1 = z_2 p_3 - z_3 p_2 + M_1; \quad J_2 p_2 = z_3 p_1 - z_1 p_3 + M_2;$$

$$J_3 p_3 = z_1 p_2 - z_2 p_1 + M_3, \quad (1)$$

где $J_1 = A - J_x$, $J_2 = B - J_y$, $J_3 = C - J_z$; A, B, C — моменты инерции спутника с закрепленными маховиками; J_x, J_y, J_z — моменты инерции маховиков относительно осей x, y, z ; p_1, p_2, p_3 — проекции угловой скорости спутника на те же оси; M_1, M_2, M_3 — управляющие моменты.

Коэффициенты z_1, z_2, z_3 уравнений (1) представляют собой проекции вектора момента количества движения рассматриваемой системы относительно ее центра масс и удовлетворяют системе уравнений

$$\dot{z}_1 = z_2 p_3 - z_3 p_2; \quad \dot{z}_2 = z_3 p_1 - z_1 p_3; \quad \dot{z}_3 = z_1 p_2 - z_2 p_1. \quad (2)$$

Каковы бы ни были z_i , удовлетворяющие уравнениям (2), требуется найти управляющие моменты M_i , при которых угловые скорости p_1, p_2, p_3 самого спутника гасятся оптимальным образом.

Введем новые переменные $x_i = p_i \sqrt{J_i}$, $i = 1, 2, 3$, (3) в которых уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{z_2 x_3}{\sqrt{J_1 J_3}} - \frac{z_3 x_2}{\sqrt{J_1 J_2}} + u_1; & \dot{x}_2 &= \frac{z_3 x_1}{\sqrt{J_1 J_2}} - \frac{z_1 x_3}{\sqrt{J_2 J_3}} + u_2; \\ \dot{x}_3 &= \frac{z_1 x_2}{\sqrt{J_2 J_3}} - \frac{z_2 x_1}{\sqrt{J_1 J_3}} + u_3, \end{aligned} \quad (4)$$

где $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$, $i = 1, 2, 3$. Затем в новых переменных (3) введем критерий качества управления

$$J = \int_0^T [a \|x\|^2 + \|u\|^2] dt + b \|x(T)\|^2 \rightarrow \min_u \quad (5)$$

Здесь $a > 0$, $b \geq 0$, $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Уравнение Беллмана, соответствующее системе (4) и функционалу (5), имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S}{\partial t} &= \min_u \left\{ a \|x\|^2 + \|u\|^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} \left[\frac{z_2 x_3}{\sqrt{J_1 J_3}} - \frac{z_3 x_2}{\sqrt{J_1 J_2}} + \right. \right. \\ &+ \left. u_1 \right] + \frac{\partial S}{\partial x_2} \left[\frac{z_3 x_1}{\sqrt{J_1 J_2}} - \frac{z_1 x_3}{\sqrt{J_2 J_3}} + u_2 \right] + \\ &+ \left. \frac{\partial S}{\partial x_3} \left[\frac{z_1 x_2}{\sqrt{J_2 J_3}} - \frac{z_2 x_1}{\sqrt{J_1 J_3}} + u_3 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

при $S(x(T), T) = b \|x(T)\|^2$ (7). Отсюда находим составляющие оптимального вектора управления

$$u_i(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

Отыскивая решение функционального уравнения (6) в виде $S(x, t) = \rho(t) \|x\|^2$ (9), получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной скалярной функции $\rho = \rho^2 - a$, $\rho(T) = b$ (10), которое интегрируется в замкнутом виде.

Формулы (8) — (10) определяют решение поставленной задачи. Как известно [2], динамическая система

$$\dot{x} = f(x, t) + u \quad (11)$$

называется системой с инвариантной нормой, если скалярное произведение

$$\langle f(x, t), x \rangle = 0 \quad (12)$$

для всех $x(t)$ и t .

Нетрудно убедиться, что условие (12) выполняется для системы уравнений (4), которая, таким образом, является системой с инвариантной нормой. В связи с этим предоставляется возможность при помощи неравенства Шварца определить оптимальное управление системой (4) (при ограничении $\|u\| \leq u_0$, $u_0 > 0$), переводящее систему из некоторого начального состояния в нулевое ($x_i(T) = 0$, $i = 1, 2, 3$), и минимизирующее время переходного процесса или энергию управления, или некоторую линейную комбинацию этих параметров [2].

Список литературы: 1. Летов А. М. Динамика полета и управление. М., 1969. 359 с. 2. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М., 1968. 764 с.

Поступила в редколлегию 15.12.88

УДК 62-50

Ю. А. ФРОЛОВ, канд. техн. наук

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ПО ОПОРНОЙ ФУНКЦИИ

Решение ряда прикладных задач управления существенно осложнено тогда, когда на отрезке времени $[0, T]$ движение описывается многомерным фазовым вектором $z = \{x, v\} \in X \times V$, который должен удовлетворять граничным значениям $z(0) = z_0$, $z(T) = z_T$ и уравнениям

$$\dot{x} = A(x)v \quad (1); \quad \dot{v} = f(v, x) + Bv, \quad u \in U, \quad (2),$$

где X, V, U — допустимые множества значений обобщенных координат, скоростей (квазискоростей), управляющих ускорений, а A, B — соответствующие матрицы. Если матрицы $A^T A, B^T B$ почти всюду невырожденные, то можно получить конструктивное решение на основе решения обратной задачи, вводя $x(\varphi) = y(\varphi, b_1, \dots, b_m)$ в виде явной функции от некоторой скалярной опорной функции φ и постоянных векторов b_i , при которых $x \in X, v \in V$

$u \in U$. Это позволяет свести решение задачи к задаче управления по фазовым траекториям опорной функции $\{\varphi, \dot{\varphi}\}$. Ниже излагаются основные результаты такого подхода к решению задач управления движением.

Отметим, что в этих условиях из (1), (2) следуют равенства $\dot{\varphi} \mathbf{g}(\varphi) = \mathbf{v}$ (3); $\dot{\varphi} \mathbf{h}(\varphi) + \mathbf{p}(\varphi, \dot{\varphi}) = \mathbf{u}$ (4), где $\mathbf{g}(\varphi) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \times \times \mathbf{A}^T d\mathbf{x}/d\varphi$, $\mathbf{h} = \mathbf{B}_* \mathbf{g}$, $\mathbf{p} = \mathbf{B}_* (d\mathbf{g}/d\varphi - \mathbf{f})$, $\mathbf{B}_* = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$.

В задачах кинематического управления, когда управление определяется вектором \mathbf{v} , постоянные \mathbf{b}_i в $\mathbf{y}(\varphi, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ и граничные значения $\varphi_\tau, \tau=0, T$, выбираются такими, чтобы $\mathbf{x}(\varphi) \in \mathbf{X}$, $\mathbf{X}(\varphi_\tau) = = \mathbf{x}_\tau$, а φ на $[0, T]$ определяется с учетом постановки исходной задачи и корректности выражения (3) при $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ и $\varphi \rightarrow \varphi_\tau$.

В частности, при управлении по быстродействию, когда \mathbf{V} задано одним из ограничений вида

$$|\mathbf{v}| \leq \mathbf{v}^*, |\mathbf{v}_i| \leq \mathbf{v}_i^*, i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где n — размерность \mathbf{v} , соответственно которым

$$\dot{\varphi} = \text{sgn}(\varphi_T - \varphi) \mathbf{v}^* / \mathbf{g}^*, \quad \dot{\varphi} = \text{sgn}(\varphi_T - \varphi) / \max_i |g_i / v_i^*|.$$

В результате интегрирования одного из этих равенств и подстановки $\varphi, \dot{\varphi}$ в (3) вычисляется соответствующее управление \mathbf{x} , при котором $\varphi \rightarrow \varphi_\tau$.

В задачах динамического управления \mathbf{b}_i и граничные значения $\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau$ необходимо выбирать такими, чтобы $\mathbf{x}(\varphi) \in \mathbf{X}$, $\mathbf{v}(\varphi, \dot{\varphi}) \in \mathbf{V}$ и $\mathbf{z}(\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau) = \mathbf{z}_\tau$, а φ на $[0, T]$ определять с учетом постановки исходной задачи и корректности выражения (4) при $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ и $\{\varphi, \dot{\varphi}\} \rightarrow \{\varphi_T, \dot{\varphi}_T\}$.

В частном случае быстродействия по опорной траектории (фазовой траектории опорной функции) решение исходной задачи можно реализовать на основе решения следующей задачи.

Рассмотрим движение, описываемое уравнением

$$\ddot{\varphi} = \omega, \quad \omega \in [\omega_1(\varphi, \dot{\varphi}), \omega_2(\varphi, \dot{\varphi})], \quad (6)$$

где $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0$ — определенные функции. Требуется на $[0, T]$ при $T = \min$ построить опорную траекторию, удовлетворяющую граничным значениям $\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau$.

Отметим, что решение этой задачи реализуется на основе принципа максимума в условиях скользящих линий переключения, когда в каждый момент времени t известны значения ω_1, ω_2 . Последние вычисляются с учетом того, что $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Так, если $|\mathbf{u}| \leq \mathbf{u}^*$, то из (4) следует

$$\omega_1 = \frac{-(\mathbf{h}, \mathbf{p}) - \sqrt{(\mathbf{h}, \mathbf{p})^2 - (\mathbf{h}, \mathbf{h}) \mathbf{u}^{*2}}}{(\mathbf{h}, \mathbf{h})}, \quad \omega_2 = \frac{-(\mathbf{h}, \mathbf{p}) + \sqrt{(\mathbf{h}, \mathbf{p})^2 - (\mathbf{h}, \mathbf{h}) \mathbf{u}^{*2}}}{(\mathbf{h}, \mathbf{h})}. \quad (7)$$

При $u \in u\{ : |u_i| \leq u_i^* \}$ аналогично получим

$$\omega_1 = - \min_i \left| \frac{p_i + u_i^* \operatorname{sgn} h_i}{h_i} \right|, \quad \omega_2 = \min_i \left| \frac{p_i - u_i^* \operatorname{sgn} h_i}{h_i} \right|. \quad (8)$$

Такие решения существуют, если существуют ω_1, ω_2 , соответствующие (7), (8). Ниже для динамических задач это предполагается.

Итак, располагая ω_1, ω_2 и интегрируя уравнение (6) в условиях быстрогодействия, находим опорную траекторию, на которой в каждой точке в соответствии с (4) вычисляется искомое решение u . При этом интегрирование можно проводить в условиях ограничений (5). Пусть априорно известно, что $\omega_1 \leq \omega'_1 < 0, \omega_2 \geq \omega'_2 > 0$, где ω'_1, ω'_2 — постоянные. Тогда при замене в (6) ω_1, ω_2 на ω'_1, ω'_2 соответствующее решение существенно упрощается. Далее, если при подходе к конечной точке необходимо увеличить общее время T , то это реализуется путем снижения уровня $|\varphi|$.

Отметим, что приведенные результаты с учетом результатов [1] позволяют получить приближенные решения ряда задач оптимального управления движением.

Рассмотрим некоторые аспекты определения значений $\varphi_T, \varphi_\tau, b_i$ и формального выбора опорной функции на примерах следующих задач.

Задача 1. Рассматривается кинематическое уравнение вращения $\Lambda = 0,5 \omega \circ \Lambda$ (9), где Λ — кватернион ориентации, ω — вектор угловой скорости вращения в проекциях на вращающийся ортогональный базис E . Здесь и ниже кватернионы Λ, N — нормированные. Вводится сферическая модель

$$\Lambda = (c_1 + s_1 b_1) \circ (c_2 + s_2 b_2) \circ (c_3 + s_3 b_3), \quad c_i = \cos \frac{\psi_i}{2}, \quad s_i = \sin \frac{\psi_i}{2} \quad (10)$$

при заданных $\lambda_0 = (1, 0, 0, 0), \lambda_T, \omega_\tau$ и $\psi(\varphi) = b'_1 \varphi + b'_2 \varphi^2 + b'_3 \varphi^3$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$. Требуется определить значения φ_T, φ_τ , постоянные орты b_i и векторы b'_j , при которых соответствующие $\Lambda(\varphi), \omega(\varphi, \varphi)$ таковы, что $\omega(\varphi_\tau, \varphi_\tau) = \omega_\tau, \Lambda(\varphi_\tau) = \Lambda_\tau$. Предварительно отметим, что в этом случае $\varphi_0 = 0, \psi_0 = 0$. Тогда соответствующая система уравнений согласно (9), (10) представима в виде

$$\Lambda(\psi_T) = \Lambda_T, \quad \omega(\psi_\tau, \psi_\tau) = \tilde{\Lambda}_3 \circ (\psi_{1\tau} \tilde{\Lambda}_2 \circ b_1 \circ \Lambda_2 + \psi_{2\tau} b_2) \circ \Lambda_3 + \psi_{3\tau} b_3, \quad (11)$$

где $\Lambda_i = \cos \frac{\psi_{i\tau}}{2} + \sin \frac{\psi_{i\tau}}{2} b_i$; $\tilde{\Lambda}$ — кватернион, сопряженный с Λ .

Решение задачи реализуется в следующей последовательности.

1. Рассматривается система (11) относительно неизвестных b_i , $\psi_T, \dot{\psi}_T, \dot{\psi}_T$. Ее решение существует при любых ортах b_i , если $b_1 \times b_2 \neq 0$, $b_2 \times b_3 \neq 0$. В этих условиях b_i можно задавать из системы базисных ортов E , тогда ψ_i — углы Эйлера-Крылова, или в другой форме. Их можно вводить в виде соответствующих нормированных векторов из совокупности $\lambda_T, \omega_\tau, \lambda_T \times \omega_\tau, \omega_0 \times \omega_T, \lambda_T \times (\omega_0 \times \omega_T)$. Здесь λ — векторная часть Λ . Далее, при выбранных b_i решается система (11) относительно $\psi_T, \dot{\psi}_T$. Отметим, что решение системы (11) существует и для конической модели, когда $\varphi_3 \equiv 0$. Однако в этом случае b_1, b_2 нельзя задавать априорно.

2. Формально вводится функция φ при $\varphi_0 = 0$. Значения $\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau$ задаются априорно при условии, что $\dot{\varphi}_\tau \neq 0$ при $\omega_\tau \neq 0$, или если за φ принимается та из компонент вектора $\psi = \psi_k$, для которой выполняется это условие, то можно положить $\varphi_\tau = \psi_k \tau, \dot{\varphi}_\tau = \dot{\psi}_k \tau$. Эти значения можно вводить и как результат решения системы (12) при $b'_3 = 0$.

3. Если заданы $\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau$, то решается относительно b'_i система уравнений

$$\varphi_\tau b'_1 + \varphi_\tau^2 b'_2 + \varphi_\tau^3 b'_3 = \psi_\tau, \dot{\varphi}_0 b'_1 = \dot{\psi}_0 \dot{\varphi}_\tau (b'_1 + 2\varphi_\tau b'_2 + 3\varphi_\tau^2 b'_3) = \dot{\psi}_\tau. \quad (12)$$

Если $\varphi_T, \dot{\varphi}_T$ не заданы, то (12) решается при $b'_3 = 0$.

Аналогичный результат можно получить и в случае, когда $\Lambda = c_1 + s_1(c_2 b_1 + s_2(c_3 b_2 + s_3 b_1 \times b_2))$, $|b_i| = 1$, $(b_1, b_2) = 0$. (13)

Задача 2. Рассматривается движение в декартовой системе координат, описываемое кинематическим уравнением $\dot{x} = v$.

Вводится вектор-функция $x = r N \circ b \circ \tilde{N}$, r — скалярная функция φ , $r = a_0 + a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + a_3 \varphi^3$, b — постоянный орт; N — кватернион вида (10), (13), в котором за ψ принимается вектор $\alpha' = b''_0 + b''_1 \varphi + b''_2 \varphi^2 + b''_3 \varphi^3$. Заданы $x_\tau, \dot{x}_\tau, \tau = 0, T$. Требуется определить значения $\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau$, постоянные орты b_i, b , векторы b''_i и скаляры a_i , при которых соответствующие $x(\varphi), \dot{x}(\varphi, \dot{\varphi})$ таковы, что $\dot{x}(\varphi_\tau) = \dot{x}_\tau, v(\varphi_\tau, \dot{\varphi}_\tau) = v_\tau$. Решение этой задачи реализуется аналогично решению задачи 1.

В частном случае N вида (13) при $s_3 = 0$ имеем модель

$$x = r (\cos \alpha_1 b_1 + \sin \alpha_1 (\cos \alpha_2 b_2 + \sin \alpha_2 b_1 \times b_2)), \quad |b_i| = 1, \\ (b_1, b_2) = 0,$$

Задача 3. Совместно рассматриваются движения, описанные в задачах 1, 2 при соответствующих граничных значениях и описании кинематики. Требуется определить неизвестные постоянные и φ_t , $\dot{\varphi}_t$, при которых выполняются заданные граничные значения. Ее решение реализуется аналогично решению задачи 1 при условии, что φ в $\Lambda(\varphi)$ и $(x\varphi)$ — общая функция.

В условиях решений задач 1, 2 можно реализовать управление движением, когда вращение твердого тела и движение центра масс соответственно описываются уравнениями

$$\frac{dK}{dt} + \omega \times K = M \quad (14), \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{\mu x}{|x|^3} + u, \quad (15)$$

где K , M — кинетический и управляющие моменты; μ — постоянная тяготения; u — управляющее ускорение.

Поскольку в результате решения задачи 1 определяются $\Lambda(\varphi)$, $\omega(\varphi, \dot{\varphi})$, система (9), (14) сводится к (3), (4). Тогда построение M реализуется на основе приведенной выше методологии. Аналогично проводится построение u в (15) по результатам решения задачи 2. Решение задачи 3 позволяет провести совместное управление вращением и движением центра масс. При этом ограничения на M , u могут отличаться.

Список литературы: 1. Фролов Ю. А. Управление движением по решениям вспомогательных задач // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1988. № 252: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 8. С. 10—13. 2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М., 1973. 320 с.

Поступила в редколлегию 22.12.88

УДК 62.501

А. И. БЕЛОВ, канд. техн. наук, О. В. СОЛЯНИК

АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Выбор связанной системы координат на борту космического летательного аппарата (КЛА) является важной и отнюдь не простой задачей. Обычно стремятся связать эту систему с чувствительными осями гироскопических измерителей угловой скорости (ГИ) — наиболее чувствительных и точных датчиков. Однако их предварительная выставка производится с относительно большой погрешностью, которая к тому же в процессе эксплуатации может изменяться. Если использовать бортовые астродатчики, выполняющие роль позиционных измерителей (ПИ), точность построения и воспроизведения связанной системы координат можно

значительно повысить, используя высокую чувствительность осей ледних к угловому положению. При этом высокая чувствительность ПИ позволяет получить весьма малую погрешность и поворачиваемости позиционирования КЛА в инерциальном пространстве (ПИ фиксирован относительно КЛА) по сравнению с погрешностью позиционирования ПИ относительно КЛА.

Рассмотрим алгоритм построения связанной системы, основанный на применении ПИ. Пусть в качестве опорных используются три заданные звезды, наблюдаемые под углами, близкими к 90° по отношению друг к другу. Выставим один ПИ относительно КЛА в заданную позицию и зафиксируем его. Затем производится позиционирование второго ПИ относительно первого на угол, равный углу наблюдения первой и второй опорных звезд. После этого путем разворота КЛА осуществляется захват первым ПИ первой опорной звезды с последующей стабилизацией направления оси ПИ на эту звезду. Следующей операцией является разворот КЛА относительно первого ПИ до захвата второй опорной звезды вторым ПИ. После захвата путем позиционирования относительно КЛА второго ПИ достигается совмещение оси второго ПИ с направлением на вторую опорную звезду с последующей фиксацией второго ПИ относительно КЛА.

После выполнения этих операций оба ПИ будут зафиксированы относительно КЛА, причем угол между их осями с высокой точностью совпадает с углом между опорными звездами. Реализуя стабилизацию КЛА по отклонениям, фиксируемым первым и вторым ПИ, тем самым осуществим фиксированную ориентацию КЛА в пространстве. После позиционирования третьего ПИ осуществляются захват им третьей опорной звезды, совмещение оси с направлением на звезду и фиксация относительно КЛА.

Таким образом, оси трех ПИ фиксируются на КЛА, причем углы между ними с высокой точностью, определяемой чувствительностью ПИ, совпадают с углами между направлениями на звезды.

Для определения ориентации осей ГИ относительно осей ПИ вокруг последних последовательно выполняются специальные плоские развороты. При этом все ПИ остаются фиксированными относительно КЛА. В качестве примера рассмотрим разворот вокруг направления на первую опорную звезду. Этот разворот осуществляется путем стабилизации направления оси вращения по показаниям первого ПИ. Угол разворота, равный 360° , фиксируется путем повторного захвата второй опорной звезды вторым ПИ. Заканчивается разворот при совмещении осей первого и второго ПИ с направлениями на первую и вторую опорные звезды. Второй разворот осуществляется по второму и третьему ПИ, а третий — по третьему и первому.

Информация, получаемая с ГИ во время этих разворотов, позволяет однозначно определить ориентацию чувствительных осей этих ГИ и, следовательно, связать с ними систему координат, лег-

ко переводимую путем линейных преобразований в любую удобную ортогональную систему координат.

Следует отметить, что, поскольку в процессе разворота ось вращения отклоняется от направления на опорную звезду из-за погрешности системы стабилизации, разворот, вообще говоря, уже не будет плоским. Поэтому показания ГИ будут отличаться от своих показаний в случае плоского разворота. Это различие определяется параметрами системы стабилизации. Оценка влияния этой погрешности на точность определения ориентации ГИ для реальных систем показывает, что ею можно либо пренебречь, либо она соизмерима с погрешностью, возникающей за счет погрешности отработки специального разворота.

Таким образом, приведенный алгоритм позволяет определить ориентацию ГИ с точностью, практически определяемой чувствительностью ПИ.

Получила в редколлегию 22.12.88

УДК 62—50

Д. К. ОБЧАРОВА, канд. техн. наук, Л. Н. САФОШКИНА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Теории и методам идентификации посвящены многие работы. В работе [1] рассмотрен широкий класс указанных методов. Наибольший интерес представляет метод идентификации передаточной функции системы по ее частотным характеристикам, основанный на МНК. Однако определение параметров системы высокого порядка с помощью указанного метода связано со значительными трудностями формирования системы линейных алгебраических уравнений для вектора неизвестных параметров [2].

В настоящей работе представлена модификация данного метода, позволяющая получить сравнительно простые формулы для вычисления элементов расширенной матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений для вектора неизвестных параметров передаточной функции $W(s)$.

Задача решается следующим образом. Предлагается частотную характеристику передаточной функции $W(s)$ принять равной $W(i\omega) = B(i\omega)/A(i\omega)$ и при ее идентификации невязку определять по формуле

$$\varepsilon^2(z) = \sum_{k=1}^N \left[B(i\omega_k) - W_s(i\omega_k) A(i\omega_k) \right]^2, \quad (1)$$

где

$$W_s(i\omega_k) = I_k + iV_k; \quad I_k, V_k —$$

значения вещественной и мнимой экспериментальных частотных характеристик системы на частоте ω_k , $z = b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n$; b_j, a_j — неизвестные параметры числителя и знаменателя передаточной функции $W(s) = B(s)/A(s)$.

Минимум невязки определяется из условия

$$\frac{\partial \varepsilon^2(z)}{\partial z_j} = 0, \quad j = \overline{1, L}, \quad L = m + n + 1. \quad (2)$$

Система уравнений (2) в развернутой форме записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^N \left[B(i\omega_k) - W_0(i\omega_k) A(i\omega_k) \right] \frac{\partial B(i\omega_k)}{\partial b_j} = 0, \quad j = \overline{0, m}$$

$$\sum_{k=1}^N \left[B(i\omega_k) - W_0(i\omega_k) A(i\omega_k) \right] \frac{\partial A(i\omega_k)}{\partial a_j} = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

Далее принимается, что

$$B(s) = \sum_{r=0}^m b_r s^r; \quad A(s) = 1 + \sum_{r=1}^n a_r s^r;$$

$$B(i\omega_k) = \sum_{r=0(2)}^{m_1} b_r \omega_{kr} + i \sum_{r=1(2)}^{m_2} b_r \omega_{kr}; \quad (4)$$

$$A(i\omega_k) = 1 + \sum_{r=1(2)}^{n_1} a_r \omega_{kr} + i \sum_{r=2(2)}^{n_2} a_r \omega_{kr},$$

где $\omega_{kr} = \omega_k^r$ при $r = 0, 1, 4, 5, \dots$; $\omega_k^k = -\omega_k^r$ при $r = 2, 3, 6, 7, \dots$

$m_1 = m, m_2 = m - 1, n_1 = n - 1, n_2 = n$, если m, n — четные числа;
 $m_1 = m - 1, m_2 = m, n_1 = n, n_2 = n - 1$, если m, n — нечетные числа.
 С учетом формул (4) можно выделить действительные и мнимые части уравнений (3) и получить две эквивалентные системы линейных алгебраических уравнений, первая из которых имеет вид

$$\sum_{k=1}^N \left[\sum_{r=0(2)}^{m_1} b_r \omega_{kr} - U_k \left(1 + \sum_{r=2(2)}^{n_2} a_r \omega_{kr} \right) + V_k \sum_{r=1(2)}^{n_1} a_r \omega_{kr} \right] \omega_{kj} = 0$$

$$(j = 0, 2, \dots, m_1); \quad \sum_{k=1}^N \left[\sum_{r=1(2)}^{m_2} b_r \omega_{kr} - V_k \left(1 + \sum_{r=2(2)}^{n_2} a_r \omega_{kr} \right) - \right.$$

$$\left. - U_k \sum_{r=1(2)}^{n_1} a_r \omega_{kr} \right] \omega_{kj} = 0, \quad j = 1, 3, \dots, m_2; \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^N \left[V_k \sum_{r=0(2)}^{m_1} b_r \omega_{kr} + U_k \sum_{r=1(2)}^{m_2} b_r \omega_{kr} + (V_k^2 - U_k^2) \sum_{r=1(2)}^{n_1} a_r \omega_{kr} - \right.$$

$$\left. - 2U_k V_k \left(1 + \sum_{r=2(2)}^{n_2} a_r \omega_{kr} \right) \right] \omega_{kj} = 0, \quad j = 1, 3, \dots, n_1;$$

$$\sum_{k=1}^N \left[U_k \sum_{r=0(2)}^{m_1} b_r \omega_{kr} - V_k \sum_{r=1(2)}^{m_2} b_r \omega_{kr} + 2U_k V_k \sum_{r=1(2)}^{n_1} a_r \omega_{kr} + \right.$$

$$+ (V_k^2 - U_k^2) \left(1 + \sum_{r=2}^{u_1} a_r \omega_{kr} \right) \omega_{kj} = 0, \quad j = 2, 4, \dots, n_2.$$

Система (5) содержит $L = m + n + 1$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров $b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_n$ числителя и знаменателя передаточной функции $W(s)$. Коэффициенты уравнений (5) вычисляются по сравнительно простым формулам. Решение СЛАУ (5) на ЭВМ можно получить с помощью стандартных подпрограмм.

Результаты решения контрольных примеров на ЭВМ подтвердили эффективность предлагаемого метода. Идентификация передаточных функций моделей по их частотным характеристикам $U(\omega), V(\omega)$ с помощью данного метода реализуется на ЭВМ с нулевой невязкой.

Список литературы: 1. Гроп Д. Методы идентификации систем. М., 1979. 302 с.
2. Сахаров В. В. Идентификация автоматических систем по экспериментальным частотным характеристикам // Изв. вузов. Электромеханика. 1976. № 4. С. 466—470.

Поступила в редколлегию 17.10.88

УДК 658.512

Л. Б. КАЩЕЕВ, канд. техн. наук, А. И. ПУШКАРЬ, канд. техн. наук

ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МНОГОФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

При моделировании сложных технологических процессов часто исследуемые объекты относятся к классу развивающихся систем, для которых характерно изменение параметров в процессе функционирования. В таких условиях возрастает важность прогнозирования параметров технологического процесса.

В случае прогнозирования параметров возможны два различных подхода: краткосрочное прогнозирование мгновенных значений экстраполяционными алгоритмами [1] или многофакторное прогнозирование усредненных значений на различных интервалах времени с использованием многофакторного анализа [2]. Достаточно эффективной моделью линейной экстраполяции служит выражение

$$\hat{y}_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_n y_{t-n}, \quad (1)$$

где \hat{y}_t — прогнозируемое значение параметра процесса на момент времени t ; y_{t-i} — значение параметра в предыдущие моменты времени, $i = 1, n$.

Обозначим выходной параметр процесса через y_t , а факторы, существенно влияющие на него, через x_1, \dots, x_n . Тогда уравнение множественной регрессии запишется в виде

$$y_t = \beta_0 + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j, \quad (2)$$

где коэффициенты β_0, β_j могут быть определены методом наименьших квадратов (МНК).

Модель (1) отражает нестационарность характеристик процесса, (2) — статические характеристики в условиях квазистационарных режимов функционирования. Для большей гибкости модели прогнозирования целесообразно включать в модель авторегрессионные компоненты и компоненты множественной регрессии:

$$y_t = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^n \beta_j x_j + \varepsilon_t, \quad t = 1, m, \quad (3)$$

где n — порядок авторегрессии, количество y_{t-i} ; ε_t — случайная составляющая, удовлетворяющая условиям $M[\varepsilon_t] = \beta_0$, $\sigma^2[\varepsilon_t] = \text{const}$; $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}$ — независимы; M — оператор математического ожидания. Следует отметить, что модель (3) не входит в класс линейных множественных регрессий [3], так как переменные y_{t-i} — случайные величины. Поэтому задача оценивания коэффициентов α_i, β_j требует разработки специальных алгоритмов.

Обобщенная модель в матричном виде

$$y_t = \left[Y : X \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + u = z\theta + u, \quad (4)$$

где Y, X — $m \times n$ и $m \times n$ -матрицы наблюдений переменной y_t и факторов $x_i, i = \overline{1, n}$; y_t — m -мерный вектор наблюдений выходной переменной модели; θ — искомый вектор параметров модели; u — вектор случайных возмущений. Оценка θ может быть получена в результате решения стохастического уравнения (4), матричный оператор z которого возмущен случайной коррелированной помехой (за счет автокорреляции y_t и y_{t-i}). Применение МНК в этом случае дает смещенные оценки вектора θ , что приводит к искажению прогнозов по модели. Устранение этих нежелательных эффектов достигается применением специальных методов [3]: многократного МНК, метода вспомогательных переменных, обобщенного МНК, метода максимального правдоподобия и ряда других.

Обобщенный МНК используется в случаях, когда $M(u) = 0$, $M(uu^T) = V \neq E$, где V — ковариационная матрица случайных возмущений; E — единичная матрица. Известно [4], что для матрицы V существует невырожденная симметричная матрица P , такая, что $P^T P = P^2 = V$. Преобразуем уравнение (4), умножая его на матрицу $R = P^{-1}$: $Ry_t = Rz\theta + Ru$. Пусть $Ry = Q$, $Rz = \Omega$, $Ru = f$, тогда (4) записывается в виде $Q = \Omega\theta + f$, где $M(ff^T) = RM(uu^T)R =$

$= \sigma^2 P^{-1} V P^{-1} = \sigma^2 E$. Указанное преобразование дает основания для определения вектора параметров θ по МНК:

$$\hat{\theta} = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T Q = (z^T V^{-1} z)^{-1} z^T V^{-1} y. \quad (5)$$

Использование оценок (5) обобщенного МНК осложняется тем, что матрица ковариаций V , как правило, неизвестна. В настоящей работе предлагается итерационное уточнение вектора θ совместно с аппроксимацией матричного оператора-фильтра R :

1. На первой итерации полагаем $R = E$.

2. С помощью МНК решаем систему $R y_t = R z^T \theta$ относительно вектора параметров $\hat{\theta} = (z^T z)^{-1} z^T y_t$.

3. Вычисляем вектор невязок $\hat{E}_1 = (e_1, e_2, \dots, e_m)^T$ на исходных выборках $\hat{E}_1 = y_t - \hat{y}_t$, где $\hat{y}_t = \hat{\theta} z$.

4. Определяем вектор $\Delta = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$ корреляционных коэффициентов, из которых формируется матрица R , из соотношения $\hat{E}_1 = \Lambda \Delta$ (6), где \hat{E}_1 — вектор коэффициентов регрессии остатков, $\hat{E}_1 = (e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_m)^T$; m — номер выборки по времени (e_1 — выборка без предьстории); n — порядок авторегрессии; Λ — левая нижняя $(m-n) \times n$ -подматрица квадратной матрицы Λ_0

$$\Lambda_0 = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ e_2 & e_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{m-1} & e_{m-2} & \dots & e_1 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что завышение порядка авторегрессии приводит к увеличению ошибок, определяем n из условия достижения минимума критерия

$$n^* = \arg \min \left\{ \frac{1}{m-n} \sum_{j=1}^{m-n} \hat{u}_j^2 \right\},$$

где \hat{u}_j^2 — невязки авторегрессионной модели (6).

5. Формируем матрицу R размера $(m-n) \times m$ с $n+1$ ненулевой диагональю:

$$R_n = \begin{bmatrix} r_n & r_{n-1} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_n & \dots & r_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следует учитывать, что первые n компонентов вектора y_t не участвуют в определении θ . Их влияние прослеживается в корреляционных коэффициентах и при выборе порядка авторегрессии. Следо-

вательно, указанная аппроксимация $m \times m$ -матрицы \hat{R} практически не ухудшает точности всей процедуры.

6. Фильтруем последовательности входных и выходных переменных исследуемого технологического процесса $z = Rz$, $y_t = Ry_t$ и получаем оценку вектора параметров

$$\tilde{Q}_R = (\tilde{z}^T \tilde{z})^{-1} \tilde{z}^T \tilde{y}_t$$

7. Вычисляем значение функции потерь $J_P = \|y_t - z \hat{\theta}_R\|^2$. Если функция потерь J_P уменьшилась по сравнению с предыдущим шагом итерации, перейти к п. 2. При уменьшении или сохранении ее значения на прежнем уровне вычисление прекращается.

Описанный подход к построению моделей многофакторного прогнозирования находит применение в системах оперативного контроля технологических процессов в гибких производственных системах. Включение авторегрессионных членов в модель наряду с другими независимыми переменными позволяет выделить регрессию на неучитываемые в явном виде факторы, связанные с нестационарностью исследуемых процессов.

Список литературы: 1. Лукашин Ю. П. Адаптивные процессы краткосрочного прогнозирования. М., 1979. 254 с. 2. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М., 1980. 456 с. 3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М., 1975. 684 с. 4. Джонстон Дж. Эконометрические методы. М., 1980. 446 с.

Поступила в редколлегию 03.10.88

УДК 621.165

С. Д. ГЕРАСИМОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРОВОГО ТРАКТА МОЩНЫХ ТУРБИН

Главными критериями качества систем регулирования турбин, работающих в современных энергосистемах, являются устойчивость и быстрдействие. Парогенератор — турбина — электрический генератор представляют при этом единый объект регулирования, который математически описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Об устойчивости и быстрдействии системы можно судить по характеру свободного переходного процесса, однако при проектировании новых и исследовании существующих систем регулирования требуется строить области устойчивости для целого ряда варьируемых параметров. Непосредственное интегрирование исходных нелинейных дифференциальных уравнений приводит к чрезвычайно большому объему вычислений на ЭВМ и ограничению числа варьируемых параметров. В то же время эта задача решается достаточно просто для линейных си-

стем автоматического регулирования с привлечением математического аппарата передаточных функций и алгебраических критериев устойчивости.

В статье рассматривается определение линейной математической модели парового тракта в виде передаточной функции для турбины, имеющей часть высокого давления, промежуточный перегрев пара и часть низкого давления. Делаются следующие допущения: пар, находящийся в паровом тракте турбины, сосредоточен в трех емкостях — перед цилиндром высокого давления, за клапанами промежуточного перегрева и перед цилиндром низкого давления; параметры пара во всех точках каждой емкости приняты одинаковыми; процесс в паровых емкостях является изотермическим; КПД отсеков турбины и всей турбины в целом постоянны и равны их начальным значениям в исходном режиме; для всех объемов расхода пара на входе и выходе одинаковы в равновесных режимах.

При этих допущениях можно получить* на основании уравнений Флюгеля уравнения парового тракта в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{v_1 p_{1H}} \frac{dp_1}{dt} &= G_{1H} \frac{p_0}{p_{0H}} \mu_3 - G_{1H} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_{1H}^2 - p_{2H}^2}}; \\ \frac{V_2}{v_2 p_{2H}} \frac{dp_2}{dt} &= G_{2H} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_{1H}^2 - p_{2H}^2}} - G_{2H} \frac{p_2}{p_{2H}} \mu_2 \beta(\varepsilon); \\ \frac{V_3}{v_3 p_{3H}} \frac{dp_3}{dt} &= G_{3H} \frac{p_2}{p_{2H}} \mu_2 \beta(\varepsilon) - G_{3H} \sqrt{\frac{p_3^2 - p_{\text{кон}}^2}{p_{3H}^2 - p_{\text{кон}}^2}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\varepsilon = p_3/p_2, \quad \varepsilon_H = p_{3H}/p_{2H},$$

$$\beta(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon > 1; \\ \sqrt{1 - (\varepsilon - 0,546)^2 / (1 - 0,546)^2} & \text{при } 0,546 \leq \varepsilon < 1; \\ 1 & \text{при } \varepsilon < 0,546. \end{cases}$$

Здесь использованы следующие обозначения: V_1, V_2, V_3 — объемы пара в каждой из трех емкостей; v_1, v_2, v_3 — удельные объемы пара; $G_{1H}, G_{2H}, G_{3H}, p_{1H}, p_{2H}, p_{3H}$ — расходы пара и давления для номинального режима; p_1, p_2, p_3 — текущие давления пара для каждой емкости; p_0, p_{0H} — текущий и номинальный расходы пара из парогенератора; $p_{\text{кон}}$ — давление пара в конденсаторе; μ_3 — выходная координата клапана высокого давления; μ_2 — координата сервомотора низкого давления.

Относительная мощность, производимая турбиной, определяется по формуле

$$\eta_T = \frac{N_{1H}}{N_{\text{ТН}}} \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{p_{1H}^2 - p_{2H}^2}} + \frac{N_{2H}}{N_{\text{ТН}}} \sqrt{\frac{p_3^2 - p_{\text{кон}}^2}{p_{3H}^2 - p_{\text{кон}}^2}} -$$

* Веллер В. Н. Автоматическое регулирование паровых турбин. М., 1977. 406 с.

$$-\frac{N_{\text{МН}}}{N_{\text{ТН}}}(1+\varphi)^2 - \frac{N_{\text{ТВН}}}{N_{\text{ТН}}}(1+\varphi)^3, \quad (2)$$

где $N_{\text{ТН}} = N_{1\text{Н}} + N_{2\text{Н}} - N_{\text{МН}} - N_{\text{ТВН}}$, $N_{1\text{Н}}$, $N_{2\text{Н}}$ — номинальные значения мощностей частей высокого и низкого давления; $N_{\text{МН}}$ — потери в подшипниках и в генераторе; $N_{\text{ТВН}}$ — потери на трение и вентиляцию; φ — относительная координата частоты.

Так как при исследовании систем регулирования на устойчивость рассматривается движение вблизи положения равновесия, допустимо разложение нелинейных зависимостей в уравнениях (1) в ряд Тейлора в окрестности равновесной точки, соответствующей номинальному режиму. Ограничиваясь линейными членами в разложении нелинейностей

$F_1(p_1, p_2) = V \sqrt{(p_1^2 - p_2^2)/(p_{1\text{Н}}^2 - p_{2\text{Н}}^2)}$, $F_2(p_2, p_3) = (p_2 \beta(\varepsilon))/(p_{2\text{Н}} \beta(\varepsilon_{\text{Н}}))$ и учитывая, что вблизи равновесного режима выполняется $0,546 \leq \varepsilon < 1$, получаем

$$F_1(p_1, p_2) = F_1(p_{1\text{Н}}, p_{2\text{Н}}) + \left. \frac{\partial F_1}{\partial p_1} \right|_{(p_{1\text{Н}}, p_{2\text{Н}})} (p_1 - p_{1\text{Н}}) + \\ + \left. \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right|_{(p_{1\text{Н}}, p_{2\text{Н}})} (p_2 - p_{2\text{Н}});$$

$$F_2(p_2, p_3) = F_2(p_{2\text{Н}}, p_{3\text{Н}}) + \left. \frac{\partial F_2}{\partial p_2} \right|_{(p_{2\text{Н}}, p_{3\text{Н}})} (p_2 - p_{2\text{Н}}) + \\ + \left. \frac{\partial F_2}{\partial p_3} \right|_{(p_{2\text{Н}}, p_{3\text{Н}})} (p_3 - p_{3\text{Н}})$$

или после преобразований

$$F_1(p_1, p_2) = c_1 p_1 - c_2 p_2; \quad F_2(p_2, p_3) = c_3 p_2 - c_4 p_3,$$

где $c_1 = p_{1\text{Н}}/(p_{1\text{Н}}^2 - p_{2\text{Н}}^2)$; $c_2 = p_{2\text{Н}}/(p_{1\text{Н}}^2 - p_{2\text{Н}}^2)$;

$$c_3 = 1/p_{2\text{Н}} + p_{3\text{Н}}(\varepsilon_{\text{Н}} - 0,546)/(p_{2\text{Н}}\beta(\varepsilon_{\text{Н}})0,454)^2;$$

$$c_4 = (\varepsilon_{\text{Н}} - 0,546)/(p_{2\text{Н}}\beta^2(\varepsilon_{\text{Н}})0,454^2).$$

Вблизи положения равновесия $\mu_2=1$ в достаточно широком диапазоне изменения координат системы. Потери мощности $N_{\text{МН}}$, $N_{\text{ТВН}}$ составляют примерно 2% от $N_{\text{Т}}$ в номинальном режиме, и ими можно пренебречь, так же, как и очень малым значением $p_{\text{кон}}$. С учетом этого и вводя обозначения

$$d_1 = v_1 p_{1\text{Н}} G_{1\text{Н}}/V_1; \quad d_2 = d_1/p_{0\text{Н}}; \quad d_3 = d_1 c_1; \quad d_4 = d_1 c_2;$$

$$d_5 = v_2 p_{2\text{Н}} G_{2\text{Н}}/V_2; \quad d_6 = d_5 c_1; \quad d_7 = d_5 (c_2 + c_3); \quad d_8 = d_5 c_4;$$

$$d_9 = v_3 p_{3\text{Н}} G_{3\text{Н}}/V_3; \quad d_{10} = d_9 c_3; \quad d_{11} = d_9 (c_4 + 1/p_{3\text{Н}});$$

$$d_{12} = c_1 N_{1\text{Н}}/N_{\text{ТН}}; \quad d_{13} = c_2 N_{1\text{Н}}/N_{\text{ТН}}; \quad d_{14} = N_{2\text{Н}}/(N_{\text{ТН}} p_{3\text{Н}}),$$

на основании уравнений (1), (2) находим

$$\dot{p}_1 = d_2 p_0 \mu_3 - d_3 p_1 + d_4 p_2; \quad \dot{p}_2 = d_6 p_1 - d_7 p_2 + d_8 p_3;$$

$$\dot{p}_3 = d_{10} p_2 - d_{11} p_3; \quad v_T = d_{12} p_1 - d_{13} p_2 + d_{14} p_3.$$

Полагая в качестве входного сигнала $x_{вх} = \mu_3 p_0$, выходного $x_{вых} = v_T$, определяем передаточную функцию парового тракта

$$W_T(s) = (b_0 + b_1 s + b_2 s^2) / (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3), \quad (3)$$

где $b_0 = d_2 (d_7 d_{11} d_{12} - d_8 d_{10} d_{12} - d_6 d_{11} d_{13} + d_6 d_{10} d_{14});$

$b_1 = d_2 (d_7 d_{12} + d_{11} d_{12} - d_6 d_{13});$ $b_2 = d_2 d_{12};$ $a_0 = d_3 d_7 d_{11} - d_6 d_4 d_{11};$

$a_1 = d_3 + d_7 + d_{11} - d_6 d_4;$ $a_2 = d_3 d_7 + d_3 d_{11} + d_7 d_{11};$ $a_3 = 1.$

Линеаризация зависимостей (1), (2) при значениях давлений, соответствующих значениям мощности $v_T = 0,5$, $v_T = 0,75$; $v_T = 1$, $v_T = 1,06$, показывает, что коэффициенты передаточной функции (3) практически не изменяются.

Таким образом, получена линейная математическая модель парового тракта в виде передаточной функции (3), что позволяет исследовать устойчивость системы регулирования турбин в линейном приближении.

Поступила в редколлегию 19.12.83

УДК 62-523

Э. А. ПИКУР, канд. техн. наук, В. П. СЕВЕРИН, канд. техн. наук

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ЗВЕНА СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С БЕЗЗОЛОТНИКОВЫМ ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ

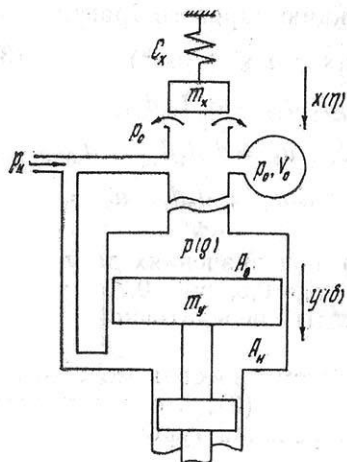
Качество электрогидравлической системы регулирования (ЭГСР) в значительной степени определяется динамическими свойствами электрогидравлического преобразователя (ЭП) и золотника сервомотора высокого давления [1]. Поэтому выделим из состава ЭГСР звено ЭП-золотник и построим его линейную математическую модель. Выделенное звено включает беззолотниковый ЭП, трубопровод линии управления, золотник сервомотора высокого давления и отрицательную обратную связь (ОС) по положению золотника. Беззолотниковый ЭП состоит из электро-механического преобразователя (ЭМП) электродинамического типа и гидроусилителя типа сопло-заслонка. Схема гидромеханической части звена ЭП-золотник, некоторые ее параметры и координаты показаны на рисунке.

Уравнение подвижных частей ЭМП получим, предположив, что масса и вязкое трение подвижных частей приведены к заслонке,

сухим трением и индуктивностью катушки управления можно пренебречь [2]:

$$\ddot{m}_x x = F - B_x x - C_x x - A_c p. \quad (1)$$

Здесь m_x — масса подвижных частей ЭМП, приведенная к заслонке; x — координата заслонки; F — управляющая сила катушки; B_x — приведенный коэффициент силы вязкого трения, обусловленный вязким трением подвижных частей ЭМП и противоЭДС катушки; C_x — приведенная к заслонке жесткость пружин; A_c — площадь сопла; p — давление жидкости в трубопроводе (см. рисунок).



Уравнение трубопровода линии управления, представляющее собой уравнение расхода жидкости, запишем при допущениях, что объем растворенного в жидкости воздуха можно отнести к начальному участку трубопровода в зоне сопла, массу движущейся по трубопроводу жидкости и ее вязкое трение можно привести к золотнику, характер движения жидкости через гидравлические сопротивления турбулентный [3]:

$$l_c (x_0 - x) \mu_c \sqrt{\frac{2}{\rho_{ж}} (p - p_c)} + \frac{V_0}{\rho_0} \dot{p} + A_v \dot{y} = A_d \mu_d \sqrt{\frac{2}{\rho_{ж}} (p_n - p)}. \quad (2)$$

где l_c — периметр сопла; x_0 — зазор между соплом и заслонкой при равновесном положении заслонки, μ_c , μ_d — коэффициенты расхода дросселя сопло — заслонка и постоянного дросселя; $\rho_{ж}$ — плотность жидкости; p_c , p_n — давления слива и насоса; V_0 — объем растворенного в жидкости воздуха при номинальном давлении в трубопроводе p_0 ; A_v — площадь верхней поверхности дифференциального поршня золотника; y — координата золотника; A_d — площадь сечения постоянного дросселя.

Уравнение золотника получаем полагая, что массу движущейся по трубопроводу жидкости и ее вязкое трение можно привести к золотнику [3]:

$$m_y \ddot{y} = A_v p - A_n p_n - B_y \dot{y}. \quad (3)$$

Здесь m_y — приведенная масса золотника и движущейся жидкости; A_n — эффективная площадь нижней поверхности дифференциального поршня золотника; B_y — приведенный коэффициент силы вязкого трения.

Уравнение замыкания контура посредством ОС запишем при допущении, что отрицательная ОС безынерционна с коэффициентом k_o [2]: $F = k_F (u - k_o y)$. (4)_г где k_F — коэффициент силовой

характеристики ЭМП; u — входное напряжение звена ЭП-золотник.

Равновесному положению заслонки соответствуют нулевые значения координат $x=0, y=0, p=0$. Обозначим

$$A_0 = l_c x_0, \quad Q_0 = A_0 \mu_c \sqrt{\frac{2}{\rho_{ж}}}, \quad \alpha_0 = \left(\frac{\mu_c A_0}{\mu_d A_d} \right)^2, \quad \alpha_1 = \frac{A_B}{A_H}. \quad (5)$$

С учетом этих обозначений на основании уравнений (2), (3) в статике получим соотношения $p_c - p_c = (p_H - p_c)/(1 + \alpha_0)$, $p_0 = p_H/\alpha_1$ (6), откуда $\alpha_1 = 1 + \alpha_0$ при $p_c = 0$ (7).

Линеаризуем уравнение расхода (2), переходя к приращениям переменных, раскладывая его в ряд Тейлора в окрестности равновесного положения, ограничиваясь лишь членами первого порядка малости, учитывая выражения (5) — (7) и обозначая

$$\alpha_2 = 2\alpha_0/(1 + \alpha_0) = 2 - 2/\alpha_1, \quad p_x = \alpha_2 (p_0 - p_c) \quad (8). \quad \text{Тогда } k_{Qp} \Delta p + (V_0/\rho_0) \Delta \dot{p} = k_{Qx} \Delta x - A_B \Delta y \quad (9), \quad \text{где } k_{Qp} = Q_0/p_0, \quad k_{Qx} = Q_0/x_0 \quad (10).$$

Обозначая $k_{px} = p_x/x_0$, $Q_p = k_{Qp} p_0$, $T_p = V_0/Q_p$ (11), уравнение (9) переписываем в виде $T_p \Delta \dot{p} + \Delta p = k_{px} \Delta x - (A_B/k_{Qp}) \Delta y$ (12).

Систему уравнений звена ЭП-золотник в приращениях составим на основании уравнений его элементов (1), (3), (4), (12):

$$m_x \Delta \ddot{x} + B_x \Delta \dot{x} + C_x \Delta x = \Delta F - A_c \Delta p; \quad T_p \Delta \dot{p} + \Delta p = k_{px} \Delta x - (A_B/k_{Qp}) \Delta y; \quad (13)$$

$$m_y \Delta \ddot{y} + B_y \Delta \dot{y} = A_B \Delta p; \quad \Delta F = k_F (\Delta u - k_0 \Delta y).$$

В качестве базовых значений переменных примем следующие значения: максимальное значение напряжения на выходе электронного усилителя ЭМП u_m , максимальное значение управляющей силы F_m , перемещение заслонки под действием этой силы при отсутствии жидкости в трубопроводе x_m и соответствующее ему изменение давления в статике p_m :

$$F_m = k_F u_m, \quad x_m = F_m/C_x, \quad p_m = k_{px} x_m. \quad (14)$$

Введем безразмерные относительные координаты:

$$\xi = \Delta u/u_m, \quad \eta = \Delta x/x_m, \quad \rho = \Delta p/p_m, \quad \sigma = \Delta y/y_m. \quad (15)$$

Исключая из системы (13) последнее уравнение, преобразуя ее по Лапласу, переходя к относительным координатам (15), учитывая соотношения (14) и вводя вспомогательные параметры

$$k_\sigma = k_0 y_m/u_m; \quad C_p = A_c k_{px}; \quad V_m = A_B y_m; \quad Q_m = k_{Qp} p_m;$$

$$P_m = A_b P_m; C_y = P_m / y_m; T^2 = m_x / C_x; 2\zeta T = B_x / C_x; \quad (10)$$

$$k_p = C / C_x; \tau = V_m / Q_m; T_1^2 = m_y C_y; T_2 = B_y / C_y,$$

получаем линейную математическую модель звена ЭГП-золотник в окончательном виде

$$(T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1) \eta = \xi - k_\sigma \sigma - k_p \rho; (T_p s + 1) \rho = \eta - \tau \cdot s \sigma; (T_1^2 s + T_2) s \sigma = \rho,$$

где s — переменная Лапласа. Параметры этой модели можно определять через исходные параметры звена ЭГП-золотник по формулам (5)—(7), (8)—(11), (14), (16). Модель может применяться для идентификации параметров звена, исследования устойчивости и качества ЭГСР.

Список литературы: 1. Иванов В. А. Особенности регулирования турбоагрегатов АЭС//Теплоэнергетика, 1982, № 4. С. 27—30. 2. Пикур Э. А., Севриш В. П., Ласенко Р. Е. Параметрические модели электромеханического преобразователя// Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1985, № 220. Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 5. С. 50—52. 3. Галыгин Н. С. Гидравлический привод систем управления. М., Машиностроение. 1972. 376 с.

Поступила в редколлегию 05.12.88

УДК 681.5

Л. А. ГАМБАРОВ, канд. техн. наук, С. Л. РАСКИН

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ РАНДОМИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Вычислительная процедура решения оптимизационных задач высокой размерности вынужденно является трудоемкой.

Эта принципиальная особенность многомерных задач проявляется тем более отчетливо, чем сложнее аналитическое представление оптимизируемой функции, и в особенности заметна в задачах, где вычисление функции осуществляется как результат функционирования какой-либо имитационной модели. В последнем случае естественные ограничения на суммарный ресурс вычислительной системы, выделяемый на решение задачи, резко ограничивают число возможных прогонов модели, что приводит к потере точности оптимизации, а во многих случаях возможность получения результата проблематична.

Ситуация крайне обостряется, если целевая функция задачи является многоэкстремальной. Традиционно используемый подход при решении таких задач состоит в следующем. Случайным образом в допустимой области выбирается некоторая совокупность точек, каждая из которых поочередно используется как начальная

при реализации численной оптимизации. В качестве оценки положения глобального экстремума используется наилучший из полученных локальных экстремумов. Если оптимизационная процедура является трудоемкой, а именно такой она, как правило, бывает в задачах большой размерности, то более эффективной будет другая, двухэтапная. При этом на первом этапе в каждой из выбранных начальных точек вычисляется значение целевой функции, а затем на втором этапе осуществляется процесс оптимизации один раз из наилучшей из них. Можно показать, что при равных вычислительных затратах второй вариант обеспечивает большую вероятность достижения глобального экстремума, чем первый. Понятно, что эффективность этого варианта построения вычислительной схемы может быть еще несколько повышена, если сузить область поиска экстремума за счет предварительной обработки результатов вычисления значений целевой функции на первом этапе. Сужение области достигается в результате приближенного оценивания характера зависимости целевой функции от каждой из переменных.

Методика сужения диапазона поиска по каждой из переменных является итерационной и состоит в следующем. На первой итерации в пределах заданной начальной области случайным образом осуществляется выбор некоторого числа точек $X_1 = (x_{11}, \dots, x_{1m})$, $X_2 = (x_{21}, \dots, x_{2m}) \dots$, $X_n = (x_{n1}, \dots, x_{nm})$, в каждой из которых проводится вычисление функции. Полученный таким образом набор $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ используется для получения приближенных зависимостей функции отклика от первой переменной x_1 , затем от второй переменной x_2 и, наконец, от m -й переменной x_m . Для отыскания этих зависимостей можно использовать регрессионные уравнения с расчетом коэффициентов по методу наименьших квадратов (МНК) и последующей статистической оценкой их значимости. Знание этих уравнений позволяет определить целесообразную область (или подобласть) поиска экстремума с использованием простых аналитических средств. Ясно, что если в оптимизируемой функции все переменные приблизительно одинаково влияют на ее численное значение, то сужение диапазона поиска по каждой переменной достигается за счет своеобразного эффекта рандомизации по остальным переменным, случайно выбираемым из своего допустимого диапазона. После сужения диапазона по каждой переменной осуществляется переход к очередной итерации, на которой процедура повторяется. При этом эффективность сужения диапазона от итерации к итерации повышается в результате ослабления влияния каждой из переменных в отдельности из-за большей локализации выбираемых ее случайных значений в окрестности оптимума.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие описанный подход. Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_6) = 2(x_1 - 1)^2 + 0,5(x_2 - 2)^2 + 3(x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2 + 1,5(x_5 - 5)^2 + 2,5(x_6 - 6)^2$ с очевидным минимумом в точке $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6)$, и на-

чальная область поиска минимума описывается соотношениями $x_i \in [0, 10]$, $i = \overline{1,6}$. На первой итерации было использовано 12 случайным образом выбранных точек. Для описания приближенной зависимости от каждой из переменных были взяты регрессионные модели вида $f(x_i) = \sum_{k=0}^2 a_{ik} x_i^k$. После обработки результатов вычислений по МНК и статистического оценивания значимости коэффициентов были получены уравнения, которые были использованы для отыскания минимума по каждой переменной. Например, для третьей переменной это соотношение имеет вид $f(x_3) = 3,86 x_3^2 - 19,86 x_3 - 102,32$ и $x_{3\text{мин}} = 2,51$.

При переходе ко второй итерации диапазон поиска по каждой переменной был сужен: $x_i \in [x_{i\text{мин}}^{(1)} - 3, x_{i\text{мин}}^{(1)} + 3]$, $i = \overline{1,6}$. Длину суженного диапазона можно выбирать так, чтобы значение регрессионного полинома во всех точках этого диапазона не превышало значения в точке минимума более чем на 20 %. На второй итерации использовались новые 12 точек.

После аналогичной обработки для той же третьей переменной получен следующий регрессионный полином: $f(x_3) \approx 7,22 x_3^2 - 35,25 x_3 + 61,68$, для которого $x_{3\text{мин}} = 2,44$. Наконец, на третьей итерации использовались очередные шесть точек, выбираемые из области: $x_i \in [x_{i\text{мин}}^{(2)} - 2, x_{i\text{мин}}^{(2)} + 2]$, $i = \overline{1,6}$.

Найденное в результате обработки регрессионное соотношение для третьей переменной имеет вид $f(x_3) = 2,45 x_3^2 - 15,64 x_3 + 34,18$, $x_{3\text{мин}} = 3,192$. Полученная в результате третьей итерации точка $X_{\text{мин}}^{(3)} = (1,125; 1,885; 3,196; 3,971; 4,792; 6,211)$ может быть использована в качестве начальной для однократного спуска. Значение функции $f(X)$ в этой точке $f(X_{\text{мин}}^{(3)}) = 2,565$. Для оценки эффективности процедуры в исходной области поиска случайным образом были выбраны 30 точек. В наилучшей из них с координатами $x_1^* = 1,53$; $x_2^* = 0,87$; $x_3^* = 3,83$; $x_4^* = 2,87$; $x_5^* = 4,2$; $x_6^* = 6,98$ имеем $f(X^*) = 7,91$. Таким образом, традиционно полученная начальная точка X^* отстоит от оптимальной намного дальше, чем точка $x_{\text{мин}}^{(3)}$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда одна из переменных существенно сильнее, чем другие, влияет на значение функции. Пусть $f(X) = 2(x_1 - 1)^2 + 0,5(x_2 - 2)^2 + 3(x_3 - 3)^2 + (x_4 - 4)^2 + 1,5(x_5 - 5)^2 + 100(x_6 - 6)^2$. Для анализа на первой итерации были использованы те же, что и в предыдущем примере, 12 точек. В результате обработки по первым пяти переменным оказалось, что среднеквадратические ошибки оценивания превышают взятые по модулю оценки коэффициентов соответствующих уравнений регрессии и, таким образом, сузить диапазон по этим переменным на первой итерации не удалось. В то же время по шестой переменной получено уравнение, которое позволяет оценить $x_{6\text{мин}}^1 = 6,085$ и сузить диапазоны по этой переменной до следующего $x_6 \in [5,585; 6,585]$. Су-

Жение диапазона по этой переменной ослабляет ее влияние на значение целевой функции, что позволило на второй итерации осуществить оценивание коэффициентов уравнений регрессии по всем переменным. В результате $x_{\min}^{(2)} = (2,02; 2,71; 3,64; 4,72; 5,61; 6,04)$. После проведения аналогичной процедуры на третьей итерации была получена точка $x_{\min}^{(3)} = (1,112; 2,042; 2,868; 4,08; 4,92; 6,021)$, которая может быть использована для дальнейшей оптимизации.

Таким образом, предложенная процедура во многих случаях позволяет существенно сузить диапазон поиска, обеспечивая повышение эффективности численного решения оптимизационных задач высокой размерности.

Поступила в редколлегию 04.11.88

УДК 658.512

С. Л. МАГАС, кандр. физ.-мат. наук, А. П. СЛЕПЧЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ РОБОКАРОВ В ГПС ПО ЗАДАНЫМ МАРШРУТАМ

Рассмотрим задачу отыскания оптимального варианта перемещений робокаров в гибкой производственной системе (ГПС), который обеспечивал бы своевременную транспортировку деталей и инструментальных комплектов на рабочие позиции при движении по блок-участкам заданной транспортной сети и условия, что на одном блок-участке не может одновременно находиться более одного робокара. Решение задачи в отличие от методов прямой диспетчеризации, реализуемых в узлах транспортной сети [1], состоит в аналитическом построении области допустимых решений (ОДР) и оптимизации в ней линейного функционала.

Пусть для n робокаров заданы n маршрутов M_1, \dots, M_n , которые необходимо выполнить с минимальным суммарным отклонением от заданных сроков. Для каждого маршрута M_j предполагаются известными следующие величины: интервал времени $[t_{j1}^{\text{нач}}, t_{j1}^{\text{кон}}]$, в течение которого должна быть осуществлена загрузка робокара; интервал времени $[t_{j2}^{\text{нач}}, t_{j2}^{\text{кон}}]$, в течение которого движение по маршруту должно завершиться; длительности $\tau_{jk}, k = 1, \dots, m_j$, перемещений по каждому из m_j участков маршрута (блок-участков транспортной сети ГПС); штрафы c_{j1}, c_{j2} за опоздания на единицу времени относительно сроков начала и окончания маршрута. Тогда оптимизируемый функционал, обеспечивающий минимальный суммарный штраф за опоздания, имеет следующий вид:

$$W = \sum_{j=1}^n (c_{j1} (z_{j1} - t_{j1}^{\text{кон}}) + c_{j2} (z_{j2} - t_{j2}^{\text{кон}})) \rightarrow \min. \quad (1)$$

Здесь величины $z_{j1}, z_{j2}, j = 1, \dots, n$ определяют моменты начала и окончания маршрутов при нарушении сроков транспор-

тировки. При выполнении сроков они равны $t_{j_1}^{\text{кон}}, t_{j_2}^{\text{кон}}$. Т. е. имеют место неравенства

$$z_{j_1} \geq t_{j_1}^{\text{кон}}, z_{j_2} \geq t_{j_2}^{\text{кон}}, j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Рассмотрим построение ОДР задачи. Для этого маршрут M_j представим последовательностью отрезков, каждый k -й из которых представлен следующим множеством:

$$\{(x, y): x_{jk} \leq x \leq x_{jk} + \tau_{jk}, y = y_{jk}\}, \quad (3)$$

где y_{jk} — номер блок-участка сети; x_{jk} — момент начала движения по этому участку ($k=1, \dots, m_j$). ОДР задачи есть область изменения значений переменных $x_{jk}, k=1, \dots, m_j, j=1, \dots, n$. Выделим ограничения, которым должны удовлетворять эти переменные. Первый набор ограничений задает порядок следования участков в маршруте

$$x_{j1} \geq 0, x_{jk} \geq x_{j,k-1} + \tau_{j,k-1}, k=2, \dots, m_j; j=1, \dots, n. \quad (4)$$

Второй набор ограничений составляют требования выполнения транспортных операций в заданные сроки

$$t_{j_1}^{\text{нач}} \leq x_{j_1} \leq z_{j_1}; t_{j_2}^{\text{нач}} \leq x_{j_2} \leq z_{j_2}, j=1, \dots, n. \quad (5)$$

Третий набор составляют условия нахождения на каждом блок-участке сети не более одного робота (требования неналожения маршрутов). В отличие от рассмотренных условия неналожения нельзя описать системой ограничений из-за наличия альтернативных вариантов, требующих задания дизъюнктивных ограничений. Для их описания воспользуемся понятием структуры линейных неравенств [2].

Под структурой $S(F, \Delta)$ понимаем конечный упорядоченный набор неравенств F с заданными для каждой пары неравенств i, j операциями конъюнкции или дизъюнкции, представленными в виде матрицы $\Delta = \{\delta_{ij}\}$, где $\delta_{ij} = 1$, если i -е и j -е неравенства связаны операцией конъюнкции или в случае, когда $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, если неравенства связаны операцией дизъюнкции.

Тогда требования неналожения маршрутов могут быть представлены следующей конъюнкцией структур:

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^n \bigwedge_{(k,p) \in \theta_{ij}} S(F_{kp}^{ij}, \Delta^\circ). \quad (6)$$

Здесь структура $S(F_{kp}^{ij}, \Delta^\circ)$ описывает условия неналожения k -го p -го участков маршрутов M_i и M_j , если они занимают общий блок-участок сети, т. е. $y_{ik} = y_{jp}$,

$$F_{kp}^{ij} = \begin{cases} x_{jp} \geq x_{i,k+1}; \\ x_{ik} \geq x_{j,p+1}, \end{cases} \quad \Delta^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество, по элементам которого строится конъюнкция таких структур, запишем в виде

$$\theta_{ij} = \{(k, p): y_{ik} = y_{jp}, k=1, \dots, m_i; p=1, \dots, m_j\}.$$

Оставшиеся групповые конъюнкции в выражении (6) определяют требования одновременного неналожения всех возможных пар маршрутов.

Из определения структуры видно, что любая система ограниченный есть структура с матрицей операций Δ^1 , составленной только из единиц. Обозначим систему неравенств (2), (4), (5) структурой $S(F, \Delta^1)$. Тогда ОДР задачи оптимизации перемещений робокаров определяются следующей конъюнкцией структуры:

$$S(F, \Delta^1) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^n \bigwedge_{(k,p) \in \theta_{ij}} S(F_{kp}^{ij}, \Delta^0) \right). \quad (7)$$

Таким образом, поставленная задача сведена к поиску минимального значения функции цели (1) в ОДР, заданной структурой (6). Поскольку любую структуру можно представить дизъюнкцией конечного числа систем [2], задача оптимизации перемещений робокаров может быть решена путем решения конечного, хотя и достаточно большого числа задач линейного программирования.

Для сокращения объема вычислений при переборе задач линейного программирования использован метод ветвей и границ [3]. В виде дерева представляется процесс выделения систем ограничений из структуры (7). Корневой вершине соответствует система $S(F, \Delta^1)$, вершинам следующего уровня соответствуют системы, построенные добавлением к $S(F, \Delta^1)$ систем, описывающих условия неналожения первой пары маршрутов; следующего уровня — добавлением системы из условий неналожения очередной пары маршрутов и так далее, пока в системы не войдут условия неналожения всех пар маршрутов. Сокращение объема вычислений достигается за счет отсека неперспективных ветвей. В качестве основных критериев отсека используют несовместность системы, случай вложения многогранников решений, а также превышение ранее полученной нижней оценки значения функционала (1). Проверка этих критериев организована с помощью простых итерационных формул, которые к тому же позволяют получить решения выделенных задач линейного программирования.

Решение задачи завершается в случае отыскания окончательной вершины с нулевым значением целевой функции (1) либо при полном переборе конечных вершин. При необходимости получения решения в реальном масштабе времени, когда полный перебор требует больших объемов вычислений, в качестве приближенного решения выбирается наилучшее из найденных за время вычислений.

Результаты численных экспериментов показали возможность использования предлагаемой методики при планировании маршрутов перемещений робокаров в реальных ГПС.

Список литературы: 1. *Steffens H.* Ein Beitrag zur Optimierung der Prozessführungsstrategien automatisierter Förder- und Materialflusssysteme. Berlin: Springer, 1983, 161 S. 2. *Магас С. Л.* Определение и свойства структур линейных неравенств // Автоматизация проектирования в машиностроении, 1984. Вып. 3. С. 5—11. 3. *Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю.* Дискретное программирование. М., 1969. 368 с.

Поступила в редколлегию 18.06.88

УДК 62-50

И. В. КОНОНЕНКО, канд. техн. наук

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ТИПОРАЗМЕРНОГО РЯДА ОБОРУДОВАНИЯ

Модель задачи построения оптимального динамического типоразмерного ряда оборудования может быть представлена в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m [\Delta C_{ij} + E_n \omega_{ij} (1 + E_{nn})^{T-t_j}] x_{ij} + E_n \sum_{i=1}^m \omega_i^0 (1 + E_{nn})^{T-t_i} x_i \rightarrow \min; \quad (1)$$

x_{ij}, x_i

$$\sum_{j \in \{j: t_j = t\}} \sum_{i=1}^m \omega_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in \{i: t_i = t\}} \omega_i^0 x_i \leq K_t, \quad t = \overline{1, T}; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (3); \quad x_i \geq x_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5) \quad x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

где $t_i = \min_{j=1, n} T_{ij} = \{t_j: x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}\}$; T_i — множество лет, в ко-

торые оборудование i -го типа, $i = \overline{1, m}$, используется для обслуживания заявок; T — длительность периода планирования; n — общее количество заявок на обслуживание; m — количество типов используемого, разрабатываемого и потенциально возможного оборудования; ΔC_{ij} — изменение себестоимости плановой продукции при использовании в технологическом процессе оборудования i -го типа; j — номер заявки на обслуживание, одновременно определяющий технологический процесс и год t_j , в котором требуется внедрение оборудования; E_n — нормативный коэффициент экономической эффективности капитальных вложений; ω_{ij} — затраты, необходимые для изготовления, транспортировки, монтажа, наладки, возможной доработки i -го типа оборудования, предназначенного для обслуживания j -й заявки; E_{nn} — норматив для приведения разновременных затрат; ω_i^0 — капитальные вложения, необ-

ходимые для проектирования i -го типа оборудования, разработки технологического процесса его изготовления, создания опытного образца и выполнения иных работ, стоимость которых мало зависит от объема выпуска i -го типа оборудования; K_t — капитальные вложения в году t на создание парка оборудования.

Если оборудование i -го типа по своим технико-экономическим показателям не может быть использовано в технологическом процессе, относящемся к j -й заявке, то $\omega_{ij} = \infty$. Аналогично $\omega_{ij} = \infty$, если оборудование i -го типа не может обслуживать j -ю заявку, поскольку еще не будет разработано и выпущено или выпуск этого оборудования будет прекращен до года t_j . Для решения задачи разработана модификация алгоритма неявного перебора, предложенного для решения задач иного класса*. Согласно этой модификации алгоритм оптимизации динамического типоразмерного ряда оборудования состоит из следующих этапов.

1. Задаем значение рекорда для целевой функции $F_{\text{record}} = \infty$. Полагаем $j=1$, т. е. начинаем с первой заявки при $F=0$, где F — текущее значение целевой функции.

2. Принимаем $i=1$, т. е. рассматриваем оборудование первого типа.

3. Если ограничения (2) не выполняются или $F + \Delta F_{ij} + \hat{F}_{j+1} \geq F_{\text{record}}$, переходим к этапу 6. Здесь ΔF_{ij} — изменение целевой функции при назначении на обслуживание j -й заявки i -го типа оборудования, \hat{F}_{j+1} — нижняя граница для изменения целевой функции при обслуживании заявок $j+1, j+2, \dots, n$, если для обслуживания заявок $1, 2, \dots, j$ оборудование временно закреплено ранее указанным способом. В ином случае изменяем текущее значение целевой функции $F := F + \Delta F_{ij}$.

4. Если $j < n$, то рассматриваем следующую заявку, т. е. $j := j+1$, и возвращаемся к этапу 2.

5. Изменяем значение рекорда для целевой функции $F_{\text{record}} := F + \Delta F_{in}$ и запоминаем $x_{ij} = 1 \forall j=1, n, i=1, m$. Производим редукцию целевой функции путем вычитания ее изменения при назначении i -го типа оборудования на обслуживание n -й заявки, т. е. $F := F - \Delta F_{in}$.

6. Если $i < m$, анализируем следующий тип оборудования, т. е. $i := i+1$, и возвращаемся к этапу 3.

7. При $j > 1$ рассматриваем предыдущую заявку, т. е. $j := j-1$, и вычитаем из целевой функции ее изменение за счет назначения i -го типа оборудования для обслуживания j -й заявки, а именно $F := F - \Delta F_{ij}$. Возвращаемся к этапу 6. Если $j=1$, то при наличии в памяти данных о решении $x_{ij} = 1 \forall j=1, n, i=1, m$, соответствующем рекордному значению целевой функции, найденный ряд является оптимальным динамическим типоразмерным рядом оборудования. В случае, если в памяти таких данных нет, задача не имеет решения.

* Рихтер К. Динамические задачи дискретной оптимизации: Пер. с нем. М., 1985. 136 с.
4 1822

Помимо ограничения (2) в модель задачи могут быть введены иные ограничения, например на количество типов оборудования. Допускаются и алгоритмические ограничения. С помощью имитационной модели может проверяться на допустимость производственная мощность системы при обслуживании j -й заявки i -м типом оборудования ($j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$). Предварительно для планирования загрузки оборудования реализуется алгоритм оперативно-календарного планирования.

Нижняя граница F_{i+1}^{\wedge} определяется путем отказа от ограничения (2) и иных ограничений, если они имеются, кроме ограничений (3), (5). При этом полагаем, что $\omega_i^0 = 0 \forall i \in \{i : x_{ik} = 0 \forall k = \overline{1, j}, i = \overline{1, m}\}$. Полученная задача решается с помощью простого алгоритма, основанного на поиске для каждой заявки $j+1, j+2, \dots, n$ такого типа оборудования, которое обслужит заявку с минимальными затратами, независимо от остальных закреплений на обслуживание.

Капитальные вложения, необходимые для проектирования оборудования, разработки технологического процесса его изготовления, создания опытного образца, в общем случае зависят от предполагаемого объема выпуска оборудования. Эти затраты для оборудования i -го типа можно представить функцией

$$\omega_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \right),$$

где p_{ij} — количество экземпляров i -го типа оборудования, необходимых для обслуживания j -й заявки. Капитальные вложения на производство одного экземпляра i -го типа оборудования также зависят от объема выпуска и могут быть выражены функцией

$$v_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \right).$$

Капитальные вложения на транспортировку, строительные работы, монтаж, наладку и возможную доводку i -го типа оборудования при обслуживании j -й заявки обозначим Z_{ij} . В этом случае модель задачи примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m [\Delta C_{ij} + E_n Z_{ij} (1 + E_{nn})^{T-t_j}] x_{ij} + \\ & + E_n \sum_{i=1}^m \left[\omega_i \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \right] (1 + E_{nn})^{T-t_i} + \\ & + E_n \sum_{i=1}^l \sum_{i=1}^m \left[v_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \right) \right] \left(\sum_{j \in \{j: j=t\}} p_{ij} x_{ij} \right) (1 + E_{nn})^{T-t} \rightarrow \min; \quad (7) \\ & \sum_{t \in \{i: i=t\}} \omega_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \right) + \sum_{i=1}^m \left[v_i \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \right) \right] \left(\sum_{j \in \{j: j=t\}} p_{ij} x_{ij} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j \in \{i: t_j = t\}} \sum_{i=1}^m Z_{ij} x_{ij} \leq K_t, \quad t = \overline{1, T}; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (9); \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

где $t_i = \min_{j=1, \overline{1, n}} T_j = \{t_j: x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}\}$. Полагаем, что $\omega(0) = 0$, $v_i(0) = 0$. Недопустимые варианты закрепления на обслуживание учитываются путем задания $p_{ij} = \infty$, $Z_{ij} = \infty$. Поиск нижней границы \widehat{F}_{j+1} может осуществляться аналогично предыдущему случаю с использованием линейной модели. Принципиальная структура алгоритма оптимизации при решении задачи (7) — (10) остается без изменений. Алгоритм допускает обобщение на случай, когда создание оборудования и его внедрение для обслуживания j -й заявки осуществляются в течение ряда лет.

Поступила в редколлегию 15.11.88

УДК 658.012

А. В. НИКИФОРОВ

СИСТЕМНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТРУКТУРЫ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В ряде случаев при решении сложных задач используются имитационные модели исследуемых систем для определения коэффициентов и проверки ограничений соответствующих аналитических моделей. Указанные методы в основном представляют собой процедуры направленного поиска решения, на каждой итерации которых осуществляется прогон имитационной модели.

В данной работе предлагается имитационно-оптимизационный алгоритм решения задачи синтеза структуры технических средств (ТС) технологического процесса (ТП), который строится на основе методики программно-целевого планирования (траекторный подход [1]).

Направление поиска рациональной структуры ТС ТП определяется методом системной оптимизации [2]. Развитие указанного подхода состоит в применении его к исследованию существенно нелинейных и стохастических систем, описываемых алгоритмическими моделями. За счет предварительного формирования траектории T движения к директивной точке p^* в пространстве целевого назначения системы P возможно получение пакета структур ТС ТП, соответствующих различным уровням использования ограниченного ресурса [3].

Рассмотрим систему ТС ТП, представляющую собой совокупность взаимосвязанных технологических стадий, состоящих из обра-

батывающих поток заявок приборов обслуживания (элементов). Каждая заявка имеет множество параметров, например время поступления в систему, технологический маршрут в виде частично упорядоченного множества приборов обслуживания и т. д. На каждой стадии имеется непустое множество параллельных приборов обслуживания с технологическими параметрами. В число технологических параметров прибора обслуживания могут входить такие величины, как время обслуживания заявки на данном приборе обслуживания, множество связанных элементов и т. д. Параметры заявок и приборов обслуживания могут иметь произвольный закон распределения.

В каждый момент времени t система находится в состоянии, которое описывается вектор-функцией $Z(t)$. Структура системы и очередность обработки заявок могут изменяться. Считаем, что определено множество интегральных по времени работы системы показателей качества ее функционирования $\Phi = \{\Phi_j(Z), j \in J\}$. Введем множества индексов целевых J^d и стоимостных J^c критериев:

$$J = J^d \cup J^c, \quad J^d \cap J^c = \emptyset.$$

Построим в пространстве P целевого назначения системы, которое состоит из векторов целей функционирования системы (с компонентами, соответствующими, например, объемам работ требуемой надежности и т. п.), траекторию движения к директивной точке p^* на основе критериев $\Phi_j, j \in J^d$. В соответствии с работой [4] эти критерии монотонным преобразованием приводятся к безразмерному виду. С помощью экспертных оценок назначаются весовые коэффициенты $\{\rho_j : j \in J^d, \sum \rho_j = 1\}$ и строится обобщенный целевой критерий $F_d = \sum \rho_j \Phi_j$.

Для различных уровней недовыполнения обобщенного целевого критерия (например, из ряда 10, 20, 30 ... % %) находятся значения частных целевых критериев $\Phi_j, j \in J^d$. Эти значения определяют опорные точки траектории T в пространстве P при движении к p^* . Любая структура системы определяет в P область D_0 допустимых вариантов функционирования. При разбиении системы на функциональные подсистемы аналогично можно определить области допустимых вариантов функционирования подсистем $D_{0i}, i = \overline{1, 2, \dots, n}$ (n — число подсистем). Очевидно, что $D_0 = \bigcap_{i=1}^n D_{0i}$. Обозначим через G_0, G_i множества граничных точек области D_0 и областей D_{0i} соответственно. Для дальнейшего рассмотрения существенными являются подмножества множества G_0 , обозначаемые Γ_i , такие, что $\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i = G_0$; $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$, если $i \neq j$; $\Gamma_i \subseteq G_i$. Назовем множество Γ_i граничной характеристикой i -й подсистемы.

Каждый вариант построения и функционирования системы в области D_0 характеризуется обобщенным стоимостным критерием $F_c = f(\{\Phi_j\}; j \in J^c)$, например приведенными затратами.

Коррекция области D_0 в направлении директивной точки p^* по траектории T связана с вкладом ограниченного ресурса и измене-

нием F_c . Задача заключается в нахождении способа изменения системы, рационального по вкладу ресурса и значению F_c .

Согласно изложенному определим порядок вклада ресурса в различные подсистемы, исходя из их относительной мощности. Подсистему, граничная характеристика которой пересекает траекторию в точке, наиболее удаленной от p^* , назовем критической подсистемой, т. е. подсистемой, определяющей мощность системы в целом.

По аналогии с введенным в работе [2] понятием комплектности поставок введем понятие условия комплектности с мерой ϵ для сбалансированного развития системы.

О п р е д е л е н и е. Под комплектностью подсистем с мерой ϵ понимается такое их относительное развитие, когда точки пересечения граничных характеристик подсистем с траекторией принадлежат шару с диаметром ϵ : $\max_{i \neq j} \|\Gamma_i \cap T - \Gamma_j \cap T\| \leq \epsilon$.

В связи с изложенным предлагается следующий алгоритм получения структуры и характеристик подсистем рационального ТП по характеристикам промежуточных ТП, не удовлетворяющим требованиям директивы. Обозначим q — шаг алгоритма; $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ — множество линейных аппроксимаций граничных характеристик подсистем в точке на основе обработки статистических данных, собираемых в ходе имитационного эксперимента.

Шаг 1. (предварительные действия) Полагаем $q=1$. Строим траекторию по опорным точкам. Выбираем вектор начальных параметров функционирования системы x^q , на основании данных имитационного эксперимента строим $D_0^q, \{\Gamma_i\}^q, i=\{1, 2, \dots, n\}$.

Шаг 2. Определяем критичную подсистему.

Шаг 3. Если точка пересечения граничной характеристики критичной подсистемы с траекторией удалена от p^* менее чем на заданное расстояние ϵ , то переход к шагу 9.

Шаг 4. Вычисляем необходимый вклад ресурса ΔK^q в критичную подсистему с соблюдением условия комплектности.

Шаг 5. Если ΔK^q превышает остаток ресурса K_{lim} , то переход к шагу 8.

Шаг 6. Реконфигурация критичной подсистемы с использованием доли ресурса ΔK^q . $K_{lim} = K_{lim} - \Delta K^q, q=q+1$. Определение текущих параметров функционирования системы x^q .

Шаг 7. Проведение имитационного эксперимента, нахождение $D_0^q, \{\Gamma_i\}^q$.

Шаг 8. Если необходимо продолжить работу в условиях снятия ограничения на ресурс, то выводим текущее состояние системы, полагаем $K_{lim} = \infty$ и переходим к шагу 6.

Шаг 9. Вывод результатов работы и завершение работы алгоритма.

Данный алгоритм используется при решении задачи синтеза структуры технических средств системы обслуживания воздушных судов на аэродроме.

Список литературы: 1. *Поспелов Г. С., Ириков В. А., Курилов А. Е.* Процедуры и алгоритмы формирования комплексных программ. М., 1985. 424 с. 2. *Глушков В. М.* О системной оптимизации//Кибернетика. 1980. № 5. С. 89—90. 3. *Годлевский М. Д., Никифоров А. В.* Об одном подходе к синтезу структуры технических средств аэродромного комплекса на основе средств имитационного моделирования//Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1988, № 252: Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 4. С. 71—74. 4. *Михалевич В. С., Волкович В. Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., 1982. 343 с.

Поступила в редколлегию 08.09.88

УДК 519.6

М. Д. ГОДЛЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
Н. П. ЧЕРНЫШЕВА

ОПТИМИЗАЦИОННО-ИМИТАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РАЗВИТИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДСИСТЕМ КОМПЛЕКСА ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ

В работе [1] рассмотрен алгоритм системной оптимизации развития технических средств транспортной системы. В статье [2] показана возможность его применения в отрасли гражданской авиации (ГА). Алгоритм является итерационным, и в ходе его применения решается задача маршрутизации авиакорреспонденций и закрепления воздушных судов (ВС) за авиалиниями, а также ряд вспомогательных задач развития технических средств отдельных функциональных подсистем комплекса технических средств (КТС) ГА. Одна из таких подсистем — сеть аэродромных комплексов (АДК).

Цель работы — на примере задачи развития технических средств сети АДК проиллюстрировать возможность применения оптимизационно-имитационного подхода в общей схеме системной оптимизации развития КТС ГА.

В соответствии с алгоритмом системной оптимизации [1; 2] на первом этапе решается задача маршрутизации авиакорреспонденций и закрепления ВС за авиалиниями. В результате определяют потоки ВС в каждом аэропорту (АП) ГА. Если предположить, что пропускная способность отдельного АДК существенно не зависит от состава типов ВС и распределения интенсивностей движения между ними, то выявление существенных ограничений области допустимых вариантов функционирования сети АДК осуществляется путем прямой подстановки в ограничения

$$\sum_{k \in J_k} \sum_{i \in I_j} \hat{\sigma}_{ij}^t z_{ij}^t \leq \hat{\lambda}_{\max}^t, \quad k \in M, \quad t \in [1, T] \quad (1)$$

численных значений z_{ij}^t , определяющих количество ВС i -го типа, эксплуатируемых в t -м году на j -м звене сети авиалинии. Здесь

$\hat{\sigma}^{tj}$ — максимальная часовая интенсивность движения ВС i -го типа на j -м звене в t -м году; $\hat{\lambda}_{\max}^{kt}$ — верхняя граница по часовой интенсивности движения ВС k -м АП, t -м году; J_k — множество звеньев, примыкающих к k -му АП; I_j^t — множество типов ВС, для которых допускается эксплуатация на j -м звене в t -м году; M — множество АП; T — продолжительность планового периода.

Однако, как показывает опыт, пропускная способность АДК в значительной мере зависит от состава и распределения интенсивностей типов ВС, поступающих в АП, а также многих других факторов. Поэтому для определения пропускной способности АДК предлагается использовать имитационное моделирование [3]. Пусть τ_{ik}^t — усредненное время нахождения i -го типа ВС в пределах k -го АДК в t -м году, определяемое на основе имитационного моделирования; τ_{ik}^B , τ_{ik}^H — верхнее и нижнее ограничения на τ_{ik}^t . Верхнее ограничение соответствует плохой оснащенности АДК техническими средствами. В результате появляются очереди на обслуживание ВС, что приводит к увеличению τ_{ik}^t . С другой стороны, нижнее ограничение характеризует такую оснащенность АДК, при которой экономически нецелесообразно вкладывать дополнительные капитальные вложения. Значения τ_{ik}^B , τ_{ik}^H определяются, исходя из существующих отраслевых норм, и корректируются для каждого k -го АДК с учетом экспертных оценок специалистов.

Определение. Ограничения из (1) назовем существенными и «условно» существенными, если

$$\tau_{ik}^t \geq \tau_{ik}^B \exists i \in \bigcup_{j \in J_k} I_j^t, k \in M, t \in [1, T] \quad (2)$$

и соответственно

$$(\tau_{ik}^B > \tau_{ik}^t \forall i \in \bigcup_{j \in J_k} I_j^t) \cap (\tau_{ik}^t \geq \tau_{ik}^H \exists i \in \bigcup_{j \in J_k} I_j^t), k \in M, t \in [1, T]. \quad (3)$$

Введем ряд обозначений, используемых в модели задачи развития сети АДК, которая решается на четвертом шаге алгоритма системной оптимизации [1]: M^{s1} , M^{s2} — множества АДК, удовлетворяющих условиям (2), (3); K_k^a — капитальные вложения, необходимые для α -варианта реконструкции k -го АДК; k_i^* — величина, характеризующая в t -м году мощность строительных организаций по освоению капитальных вложений; K_*^P — лимит на капитальные вложения на P -м отрезке времени; V_k^t — множество рассматриваемых вариантов реконструкции k -го АДК в t -м году, определяемое на основе имитационного моделирования; C_i — цена i -го типа ВС; E_k^z — множество типов ВС, эксплуатируемых в k -м АП в τ -м году; $\delta_{ki}^{\alpha t \tau}$ — количество ВС i -го типа, высвобождаемых в τ -м году при α -варианте реконструкции АДК, осуществленной в k -м АП в t -м году; t_k^{\max} , t_k^{\min} — моменты времени планового периода T , с которых начинают выполняться условие (2) и соответ-

венно условие (3); $S_k^{\alpha t}$ — изменение эксплуатационных расходов в k -м АДК; τ -м году при α -варианте реконструкции в t -м году; $\Delta \lambda_k^\alpha$ — увеличение пропускной способности k -го АДК при α -варианте реконструкции. Решение задачи развития технических средств сети АДК на λ -итерации s -го шага алгоритма системной оптимизации состоит в нахождении вектора $\{x_k^{\alpha t}\}$, минимизирующего целевую функцию

$$f(x) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k \in M} \left(\sum_{t \in [t_k^{\min}, t_k^{\max}]} \sum_{\alpha \in V_k^t} K_k^\alpha X_k^{\alpha t} (1 + E_{\text{нп}})^{l-t} + \sum_{\tau \in [1, T]} \left(\sum_{i \in F_k} C_i (\delta_{ki}^{\alpha \tau} - \delta_{ki}^{\alpha \tau-1}) + S_k^{\alpha \tau} \right) (1 + E_{\text{нп}})^{-\tau} \times \right. \\ \left. \times \left(\sum_{t \in R_k \cup [t_k^{\min}, t_k^{\max}]} \sum_{\alpha \in V_k^t} x_k^{\alpha t} \right) + \sum_{l=1}^2 \sum_{t \in [1, T]} \alpha_l^t y_l^t \right) \quad (4)$$

при ограничениях

$$\sum_{t \in R_k \cup [t_k^{\min}, t_k^{\max}]} \sum_{\alpha \in V_k^t} x_k^{\alpha t} = 1, \quad k \in M^{s1} \cup M^{s2}; \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{k \in M^{s1}} \sum_{\alpha \in V_k^l} k_k^\alpha x_k^{\alpha l} \leq k_l^* + y_l^1, \quad t \in [1, T]; \quad (6)$$

$$\sum_{l=1}^p \sum_{l=1}^2 \sum_{k \in M^{s1}} \sum_{\alpha \in V_k^l} k_k^\alpha x_k^{\alpha l} \leq k_p^* + y_p^2, \quad p \in [1, T]; \quad (7)$$

$$\sum_{t \in [t_k^{\min}, t_k^{\max}]} \sum_{\alpha \in V_k^t} \Delta \lambda_k^\alpha x_k^{\alpha t} \geq \beta_{k\tau}^{s\lambda} - \hat{\lambda}_{\max}^{k\tau}, \quad k \in M, \quad t \in [t_k^{\max}, T]; \quad (8)$$

$$x_k^{\alpha t} = 0 \forall 1, \quad k \in M^{s1} \cup M^{s2}, \quad \alpha \in V_k^t, \quad t \in R_k \cup [t_k^{\min}, t_k^{\max}];$$

$$R_k = \emptyset: k \in M^{s1}, \quad R_k = 0: k \in M^{s2},$$

где $\beta_{k\tau}^{s\lambda} = \sum_{i \in J_k} \sum_{j \in J_j} \hat{\sigma}_{ij}^{\tau} z_{ij}^{\tau s \lambda}$, $k \in M^{s1}$, $\tau \in [t_k^{\max}, T]$; $z_{ij}^{\tau s \lambda}$ — численное значение z_{ij}^{τ} , полученное на λ -итерации s -го шага алгоритма системной оптимизации [1]; $\alpha \cdot y$ — линейная форма, определяющая штраф за использование сверхлимитных ресурсов. Ограничение (8) эквивалентно условию

$$\tau_{ik}^t < \tau_{ik}^B, \quad k \in M^{s1}, \quad t \in [t_k^{\max}, T], \quad \forall i \in \bigcup_{j \in J_k} I_j^t, \quad (9)$$

которое автоматически выполняется за счет предварительного формирования соответствующего множества вариантов реконструкции k -го АДК на основе имитационного моделирования.

Задача (4)—(8) является задачей линейного целочисленного программирования с булевыми переменными. Ее особенностью является наличие в целевой функции штрафов за использование сверхлимитных ресурсов. Поэтому для ее решения, очевидно, целесообразно использовать метод вектора спада [4] с учетом специфики рассматриваемой модели, что позволит корректировать коэффициенты α_j^i штрафной функции в ходе решения задачи.

Предложенный подход синтеза структуры технических средств АДК используется в гражданской авиации при перспективном планировании на 10—15 лет.

Список литературы: 1. *Годлевский М. Д.* Системная оптимизация развития технических средств транспортной системы//Моделирование процессов принятия решений в интегрированных системах управления. — К., 1988. С. 15—20. 2. *Годлевский М. Д.* Системная оптимизация развития комплекса технических средств гражданской авиации//Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1989. № 263. Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 9. С. 34—37. 3. *Годлевский М. Д., Никифоров А. В.* Об одном подходе к синтезу структуры технических средств аэродинамного комплекса на основе средств имитационного моделирования//Вестн. Харьк. политехн. ин-та, 1988. № 252; Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 8. С. 71—74. 4. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К., 1985. 384 с.

Поступила в редколлегию 24.10.88

УДК 519.6

В. Л. ЛИЦИЦКИЙ, канд. техн. наук

АГРЕГИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ КЛАСТЕРИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Процессы координации деятельности большого числа коллективов исполнителей по реализации научно-технических программ требуют разработки адекватных моделей тематического планирования, позволяющих на базе современных ЭВМ за обозримое время получать эффективные плановые решения. В качестве исходной рассматривается модель тематического планирования системы исполнителей, обладающих ограниченными трудовыми ресурсами $R_\omega(t)$, $\omega = \overline{1, H}$ и ведущих разработку конечного числа N , ранжированных в соответствии с заданными приоритетами $\gamma_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^N \gamma_j = 1$, целевых научно-технических программ j [1]

$$\min_{\tau=(\tau_{ij})} \{D(\tau) = \max_{\omega=\overline{1, H}} \{D_\omega = [\sum_{i=1}^3 (r_i^\omega - 1)^2]^{1/2}\}\}$$

при координирующих

$$\tau_{ij}^\omega = \tau_{ij}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \omega = \overline{1, H}, \quad (1)$$

технологических

$$\tau_{ij}^{\omega} \geq \tau_{ij}, \quad i = \overline{1, n_j}, \quad j = \overline{1, N}, \quad \omega = \overline{1, H} \quad (2)$$

и директивных ограничениях

$$T_j^{\omega} = \sum_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}^{\omega} \leq \overline{T}_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad \omega = \overline{1, H}, \quad (3)$$

на длительности τ_{ij}^{ω} типовых этапов $i = \overline{1, n_j}$, научно-технических программ j , выполняемых в подсистеме ω . Равномерность потребления ресурса $r_1^{\omega} = \Phi_{\omega}^* / \Phi_{\omega}$, где $\Phi_{\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T (R_{\omega}(t) - \tilde{R}_{\omega}(t))^2 dt$, Φ_{ω}^* — минимально допустимое значение Φ_{ω} ; T — горизонт планирования; $\tilde{R}_{\omega}(t)$ — кусочно-постоянная функция потребных трудовых ресурсов. Сбалансированность тематического плана подсистемы

$$r_2^{\omega} = \begin{cases} W_{\omega}, & W_{\omega} \leq 1; \\ W_{\omega}^{-1}, & W_{\omega} > 1. \end{cases}$$

Здесь $W_{\omega} = \int_0^T \tilde{R}_{\omega}(t) dt / \int_0^T R_{\omega}(t) dt$. Ускорение процессов разрабо-

ток $r_3^{\omega} = L_{\omega}^* / L_{\omega}$, где $L_{\omega}^* = \sum_{j \in \Pi_{\omega}} \gamma_j \sum_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}$; $L_{\omega} = \sum_{j \in \Pi_{\omega}} \gamma_j T_j^{\omega}$; Π_{ω} — мно-

жество номеров научно-технических программ, выполняемых в подсистеме ω . Рассматриваемая оптимизационная задача является задачей нелинейного программирования высокой размерности с алгоритмически заданной целевой функцией. Для ее решения целесообразно использовать идеи агрегирования и декомпозиционные подходы. Предлагаем на основе декомпозиции по ограничениям выделить координирующую задачу

$$\min_{\tau} D(\tau) \quad (4)$$

при выполнении условий (1) и H локальных задач

$$\min_{\tau_{\omega}} D_{\omega}(\tau_{\omega}), \quad \tau_{\omega} = \{\tau_{ij}^{\omega}\} \quad (5)$$

для всех τ_{ij}^{ω} , удовлетворяющих ограничениям (2), (3). При построении задач (5) без нарушения общности предполагаем, что каждая подсистема ω участвует в разработке каждой программы $j \in \Pi_{\omega}$ с нулевыми значениями трудоемкостей и минимальными продолжительностями проводимых типовых этапов. В связи с этим решения τ_{ω}^* локальных задач (5) и решение τ^{**} координирующей задачи (4) имеют одинаковую размерность. Решая локальные задачи (2) и рассматривая матрицу $\{D_{\omega k}\}$, $\omega, k = \overline{1, H}$ значений

$D_{\omega K} = D_{\omega}(\tau_K^*)$ целевых функций локальных задач для различных решений τ_K^* , получаем верхнюю $\bar{D} = D_r(\tau_r^*) = \min_K \max_{\omega} \{D_{\omega K}\}$ и нижнюю $D = \max_{\omega} \min_K \{D_{\omega K}\}$ оценки оптимального значения D^{**} целевой функции координирующей задачи. В связи с этим ее решение τ^{**} предлагается искать среди точек τ , получаемых на основе смешивания локальных решений τ_{ω}^* , $\omega = \overline{1, H}$, в пределах ограниченного, выпуклого многогранного конуса $G = \{\tau: \tau = \sum_{\omega=1}^H q_{\omega} [(1 - \mu_{\omega}) \tau + \mu_{\omega} \tau_{\omega}^*], \sum_{\omega=1}^H q_{\omega} = 1, q_{\omega} \geq 0, 0 \leq \mu_{\omega} \leq \bar{\mu}_{\omega}, \omega = \overline{1, H}\}$, где τ задает форсированный режим проведения всех работ, а

$$\bar{\mu}_{\omega} = (\bar{T}_j - \sum_{i=1}^{n_j} \tau_{ij}) / \sum_{i=1}^{n_j} (\tau_{ij}^* - \tau_{ij})$$

директивные ограничения (3).

Задание $q = (q_1, q_2, \dots, q_H)$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_H)$ однозначно определяет τ , поэтому задача (4) заменяется минимаксной задачей

$$\min_{q, \mu} \max_{\omega = \overline{1, H}} \{D_{\omega}(q, \mu)\} \quad (6)$$

с ограничениями

$$\sum_{\omega=1}^H q_{\omega} = 1, q_{\omega} \geq 0, 0 \leq \mu_{\omega} \leq \bar{\mu}_{\omega}, \omega = \overline{1, H}.$$

В качестве начального приближения выбираются $q_{\varepsilon} = \mu_{\varepsilon} = 1$, $q_{\omega} = \mu_{\omega} = 0$, $\omega = \overline{1, H}$, $\omega \neq \varepsilon$. Задача (6) имеет высокую размерность и алгоритмически задаваемую целевую функцию. Для снижения ее размерности проводится кластерный анализ решений τ_{ω}^* локальных задач. Мерой близости двух решений является евклидово расстояние между ними. Каждый выделенный кластер P представляет собой семейство A_P подсистем ω , имеющих достаточно близкие решения τ_{ω}^* локальных задач. С учетом этого предлагается рассматривать A_P как группу экспертов с близкими мнениями, что позволяет сделать предположение о равенстве их весов q_{ω} .

В этом случае коллективное мнение $\tau_P^* = \frac{1}{H_P} \sum_{\omega \in A_P} \tau_{\omega}^*$ экспертов кластера является средневзвешенной оценкой решений τ_{ω}^* , H_P — число элементов в A_P , $P = \overline{1, Q}$; Q — число выделенных кластеров. Размерность задачи (6) снижается, и соответствующая ей агрегированная модель принимает вид

$$\min_{\tilde{q}, \tilde{\mu}} \max_{\omega = \overline{1, H}} \{D_{\omega}(\tilde{q}, \tilde{\mu})\} \quad (7)$$

с ограничениями

$$\sum_{p=1}^Q \tilde{q}_p = 1, \tilde{q}_p \geq 0, 0 \leq \tilde{\mu}_p \leq a_p, P = \overline{1, Q};$$

$$a_p = \min_{\omega \in A_p} \{\bar{\mu}_\omega\}, P = \overline{1, Q}.$$

Если $\varepsilon \in A_\beta$, то в качестве начального приближения выбирают $\tilde{q}_\beta = \tilde{\mu}_\beta = 1; \tilde{q}_p = \tilde{\mu}_p = 0; P \neq \beta; P = \overline{1, Q}$ и решают задачу методом циклического покоординатного спуска. Ее решение определяет максимальное приближение к идеальному режиму функционирования системы исполнителей, достигаемое за счет координации работ по выполнению научно-технических программ.

Список литературы: 1. Лисицкий В. Л. О качестве функционирования двухуровневых разрабатывающих систем // Вестн. Харьк. политехн. ин-та. 1988. № 262. Техн. кибернетика и ее прил. Вып. 8. С. 65—71. 2. Лисицкий В. Л., Бисноватая В. А. Об одном алгоритме приближенного решения задачи оптимального тематического планирования. К., 1986. 7 с. Рукопись деп. в УкрНИИИТИ № 1929-Ук-86.

Поступила в редколлегию 29.10.88

УДК 519.5

Н. И. БЕЗМЕНОВ, канд. техн. наук, А. М. КОЗЛОВ

ОПЕРАТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАПАСАМИ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОГО СПРОСА

Важной задачей, возникающей при построении сложных технико-экономических систем снабжения, является оперативное управление уровнем запасов на складах. Использование динамических моделей, описывающих изменение уровня запаса при вариациях объемов спроса и поставок, позволяет строить разнообразные законы управления по принципу обратной связи, обеспечивающие стабилизацию заданного уровня запаса. Эффективные алгоритмы управления были получены на основе балансовых моделей [1]. Описание динамики спроса в виде дискретного случайного процесса позволило применить математический аппарат синтеза дискретных оптимальных систем и получить законы управления, обеспечивающие минимизацию дисперсии флуктуации уровня запаса.

При решении практических задач управления запасами в системах снабжения возникает необходимость учета возможной нестационарности спроса, обусловленной изменением предпочтений потребителей, сезонными колебаниями и другими факторами. В на-

стоящей работе предлагается алгоритм оперативного управления запасами, использующий модель полиномиального дрейфа.

Рассмотрим простейшую модель однопродуктового склада с учетом возможной задолженности спроса [1]:

$$x[n+1] = ax[n] + p(n) - s[n] \quad (1)$$

Здесь $x[n]$ — уровень запаса на начало этапа n ; $p[n]$ — объем поставок; $s[n]$ — объем спроса за тот же этап; $0 < a < 1$ — коэффициент, характеризующий степень возможной порчи продукта за время хранения. Объем поставок зависит от уровня заказа, являющегося управляющим воздействием для модели (1): $p[n] = qu[n-m]$ (2), где m — задержка в выполнении заказа, обусловленная транспортным запаздыванием; $0 < q < 1$ — коэффициент степени выполнения заказа.

Из уравнений (1), (2) следует, что

$$x[n+m+1] = a^{m+1}x[n] + q \sum_{k=0}^m a^{m-k}u[n-m+k] - \sum_{k=1}^m \times \\ \times a^{m-k}s[n+k]. \quad (3)$$

Выберем управление на этапе n из условия равенства уровня запаса на этапе $n+m+1$ заданному страховому уровню r . Тогда из (3) получим алгоритм управления в виде

$$u[n] - \sum_{k=1}^m a^k u[n-k] = q^{-1}(r - a^m x[n] - \sigma[n, m]), \quad (4)$$

где $\sigma[n, m]$ — взвешенный суммарный объем спроса за интервал

$$[n, n+m+1], \quad \sigma[n, m] = \sum_{k=0}^m a^{m-k}s[n+k].$$

Если функция, описывающая динамику спроса, точно неизвестна, а задан только ее вид, то для реализации алгоритма (4) необходимо использовать прогнозированное значение $\hat{\sigma}[n, m]$, полученное на основе измерений уровней запаса на интервалах управления, предшествующих n -му. При использовании полиномиальной модели прогнозированные значения объемов спроса описываются уравнением

$$\hat{s}[n+k] = \sum_{j=1}^N \theta[k, j] s[n-j], \quad (5)$$

где N — степень полинома модели динамики спроса; $\theta[k, j]$ — матрица коэффициентов дискретного прогнозирующего фильтра, определяемая по методике, описанной в работе [2].

Из (5) следует, что

$$\hat{\sigma}[n, m] = \sum_{j=1}^N \gamma[j] s[n-j], \quad \gamma[j] = \sum_{k=0}^m a^{m-k} \theta[k, j], \quad j = \overline{1, N}. \quad (6)$$

Используя уравнение баланса (2), выражаем значение объемов спроса на предшествующих этапах через измеряемые уровни запаса:

$$s[n-j] = ax[n-j] + qu[n-m-j] - x[n-j+1], \quad (7)$$

Тогда из (6), (7) получим

$$\hat{\sigma}[n, m] = q \sum_{j=1}^N \gamma[j] u[n-m-j] + \sum_{j=1}^N \alpha[j] x[n-j], \quad (8)$$

где $\alpha[0] = -\gamma[1]$, $\alpha[j] = a\gamma[j] - \gamma[j+1]$, $j = \overline{1, N-1}$, $\alpha[N] = \gamma[N]$.

Подставляя (8) в (4), окончательно находим алгоритм оперативного управления в виде

$$u[n] + \sum_{i=1}^{m+N} \beta[i] u[n-i] = q^{-1} (r - (a^m - \gamma[1]) x[n] + \sum_{j=1}^N \alpha[j] x[n-j]), \quad (9)$$

где

$$\beta[i] = \begin{cases} -a^i, & i = \overline{1, m}; \\ -\gamma[i-m], & i = \overline{m+1, m+N}. \end{cases} \quad (10)$$

Отметим, что синтезированный алгоритм (9), (10) соответствует физически реализуемому дискретному динамическому регулятору, поскольку управляющее воздействие на этапе n определяется на основе измерений уровней запаса на N предшествующих этапах и предшествующих управлений.

Предложенная методика может быть использована при решении задач оперативного управления многоуровневыми системами снабжения, содержащими промежуточные склады. При этом возникает возможность учета нестационарности внутрисистемного спроса, определяемого законами управления на нижних уровнях системы.

Список литературы: 1. Первозванский А. А. Математические модели в управлении производством. М., 1975. 616 с. 2. Волгин Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М., 1986. 240 с.

Поступила в редакцию 28.11.88

В. Я. ЗАРУБА, канд. техн. наук

НЕДОМИНИРУЕМОСТЬ ДОСТОВЕРНЫХ ЗАКОНОВ ПОЛНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА

Проблема обеспечения производства материально-техническими ресурсами в новых условиях хозяйствования становится еще более острой. Диспропорции между производственными мощностями по выпуску многих видов продукции и потребностями в них, отсутствие отлаженной эффективной системы ценообразования ограничивают возможности использования рынка. Сохраняется необходимость централизованного распределения дефицитных ресурсов, используемых при производстве продукции, имеющей высокие народнохозяйственные приоритеты.

Методологические основы построения эффективных процедур распределения разработаны в теории активных систем [1]. Здесь устанавливаются достаточные условия эффективности процедур распределения с встречным способом формирования данных.

Исследуем модель системы, рассмотренную в работе [2]. Введем следующие обозначения и определения: R — распределяемое центром количество ресурса; $I = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество производственных элементов; v_i, u_i — показатели затрат ресурса и объема выпуска продукции i -го элемента; d_i^0 — непрерывная производственная функция элемента, удовлетворяющая на интервале определения $[0, R]$ следующим свойствам:

$$d_i^0(v_i) \leq d_i^0(v_i + \delta), \quad d_i^0(v_i + \delta)/(v_i + \delta) \leq d_i^0(v_i)/v_i, \quad \delta > 0;$$

$X_i(d_i^0)$, $X(d^0)$ — множества допустимых планов элемента и системы, $X_i(d_i^0) = \{x_i = (v_i, u_i) | v_i \in [0, R], u_i \in [0, d_i^0(v_i)]\}$; $X(d^0) = \{(d_i^0, i \in I)\} = \{x = (x_i, i \in I) | x_i \in X_i(d_i^0) (i \in I), \sum_i v_i \leq R\}$; $\Gamma(d_i^0) =$

$\{x_i | u_i = d_i^0(v_i), v_i \in [0, R]\}$; \hat{x} — установленный план системы, $\hat{x} = (\hat{x}_i, i \in I)$; Φ, ψ_i^n — выигрыши центра и i -го элемента;

$$\Phi(\hat{x}) = \begin{cases} \sum_i \hat{u}_i, & \hat{x} \in X(d^0); \\ \text{const} < 0, & \hat{x} \notin X(d^0); \end{cases} \quad \psi_i^n(\hat{x}_i) = \begin{cases} \psi_i(\hat{x}_i), & \hat{x}_i \in X_i(d_i^0); \\ \text{const} < 0, & \hat{x}_i \notin X_i(d_i^0), \end{cases}$$

где функция ψ_i определяется условиями $\psi_i(v_i + \delta, u_i) > \psi_i(v_i, u_i)$, $\psi_i(v_i, u_i + \delta) > \psi_i(v_i, u_i)$, $\psi_i(v_i, u_i) \geq 0$ для всех $v_i, u_i \geq 0, \delta > 0$.

Множество целевых функций, удовлетворяющих этим соотношениям, обозначим через ψ_i^0 .

Предположим, что центру известны свойства производственных и целевых функций, а также множества $D_i^0 (i \in I)$ возможных производственных функций элементов, $d_i^0 \in D_i^0 = \{d_i | p_i^{\min} v_i \leq d_i(v_i) \leq p_i^{\max} v_i \text{ для всех } v_i \in [0, R]\}$, где p_i^{\min} , p_i^{\max} — нижняя и верхняя оценки возможных значений параметров $p_i = u_i/v_i$ планов $x_i \in \Gamma(d_i)$.

В ходе планирования элементы под контролем центра обмениваются между собой оценками $d_i \in D_i^0 (i \in I)$ своих производственных функций $d_i^0 (i \in I)$. Центр до начала планирования выбирает и сообщает элементам закон планирования $\pi = (\pi_i = (\pi_i^V, \omega_i^H, i \in I))$, представляющий собой однозначное отображение наборов $d \in D^0 = \prod D_i^0$ производственных функций в «ответные» планы центра $\bar{x} = (x_i, i \in I)$, $\bar{x} = \pi(d)$. При этом для каждого i -го элемента определяется зависимость его выигрыша $V_i(d) = \psi_i^0(\pi(d))$ от набора функций d . Ситуация, в которой элементы сообщают оценки $d_i (i \in I)$, описывается игрой n лиц (элементов). Стратегиями элементов являются сообщаемые оценки $d_i (i \in I)$, а выигрыши определяются функциями $V_i (i \in I)$.

Закон планирования π назовем N -корректным, если он определяет ситуацию равновесия d^* :

$$V_i(d^*) = \max \{V_i(d_i, d_i^*) | d_i \in D_i^0\} \quad (i \in I).$$

Закон является достоверным, если $d^* = d^0$. Закон планирования π назовем простым, если $\pi(d) = \pi(d')$ для всех и таких $d' \in D^0$, что $\Gamma(d'_i) \ni \pi_i(d)$ ($i \in I$). Отображение π является законом планирования с полным распределением ресурса, если $\sum_i \pi_i^0(d) = R$ для всех $d \in D^0$. Отображение $h[\pi]$ наборов $(d^0, \psi^0) \in D^0 \times \Pi \Psi_i^0$ в планы \hat{x} называется главной характеристикой закона π . Очевидно, что информация о главной характеристике необходима для отыскания ожидаемого выигрыша центра при использовании закона π . Обозначим через Π^N множество простых N -корректных законов планирования с однозначной главной характеристикой, инвариантной относительно целевых функций элементов: $h[\pi](d^0, \psi^0) = h[\pi](d)$ для всех $d^0 \in D^0$, $\psi^0 \in \Pi \Psi_i^0$, $\pi \in \Pi^N$. Законы планирования, у которых главные характеристики совпадают, называются эквивалентными по главной характеристике. Закон π^1 является доминируемым по эффективности законом π^2 , если $\Phi(h[\pi^2](d^0)) > \Phi(h[\pi^1](d^0))$ для всех $d^0 \in D^0$, причем хотя бы для одного набора $d \in D^0$ оказывается, что $\Phi(h[\pi^2](d)) > \Phi(h[\pi^1](d))$.

Определим множество Π , $\Pi \subset \Pi^N$ достоверных законов планирования с полным распределением. Покажем, что любой закон $\pi \in \Pi$ не доминируем ни одним законом $\bar{\pi} \in \Pi^N$. Введем следующие определения и обозначения: $B_i(X_i)$ — множество строго вогнутых непрерывно дифференцируемых производственных функций i -го элемента, $B_i(x_i) \subset D_i^0$, таких, что $\Gamma(d_i) \ni x_i$, если $d_i \in B_i(x_i)$; $B(x) = \prod B_i(x_i)$; $A_i(x_i, \lambda) = \{d_i | d_i \in B_i(x_i), d_i^0(v_i) = \lambda\}$; $\lambda \in (0, u_i/v_i)$;

$A(x, \lambda) = \prod_i A_i(x_i, \lambda)$; $Y[\pi] —$ множество значений главной характеристики закона π , $Y[\pi] = \bigcup_{d \in \Omega} h[\pi](d)$. Если $x \in Y[\pi]$, то на любом наборе $d \in A(x, \lambda)$, $\lambda \in (0, u_i/v_i)$, закон π обеспечивает оптимальное с позиции центра распределение ресурса: $\Phi(h[\pi](d)) = \max \{ \sum_i u_i | x \in X(d) \}$. При этом в силу строгой вогнутости функций $d_i (i \in I)$ любое другое распределение ресурса не будет оптимальным. Если $\bar{\pi} \neq \pi$, то $\Delta Y = Y[\bar{\pi}] \setminus (Y[\bar{\pi}] \cap Y[\pi]) \neq \emptyset$. Действительно, найдется такой набор d , для которого $\pi(d) = x^1 \neq \bar{\pi}(d) = x^2$. Если $\Delta Y = \emptyset$, то $x^1 \in Y[\bar{\pi}]$, и в силу простоты закона π оказывается, что $\bar{\pi}(d) = \{x^1, x^2\}$, $\bar{\pi} \notin \Pi^N$. Из полученного противоречия получаем, что $\Delta Y \neq \emptyset$. Отсюда следует, что $\Phi(h[\bar{\pi}](d)) < \Phi(h[\pi](d))$ для всех $d \in \bigcup_{x \in \Delta Y} UA(x, \lambda)$, $\lambda \in (0, u_i/v_i)$. Поэтому закон π не доминируем на множестве Π^N .

Примером законов планирования из множества Π являются пропорциональные законы с полным распределением, рассмотренные в работе 2.

Список литературы: 1. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. М., 1981. 384 с. 2. Заруба В. Я. Эффективное корректное планирование с встречным формированием данных // Автоматика и телемеханика. 1988. № 6. С. 125—134.

Поступила в редколлегию 01.11.88

УДК 65.012

В. М. ДЕРКАЧ

ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЗАДАНИЙ

При составлении плана производства продукции результаты планирования существенно зависят от информированности планирующего органа об истинных производственных возможностях изготовителей, от целей, которые преследует каждый изготовитель и планирующий орган, а также от способа обмена информацией [1]. Для решения задачи распределения дефицитных ресурсов были предложены пропорциональные законы распределения [2].

В настоящей работе исследуется возможность применения пропорциональных законов для решения задачи распределения производственных заданий. Доказывается, что при использовании пропорциональных законов распределения заданий у изготовителей существуют оптимальные стратегии поведения (в смысле максимального гарантированного результата).

Рассмотрим производственную систему, состоящую из планирующего органа (центра) и множества $I = \{1, 2, \dots, n\}$ изготовителей однородной продукции (элементов). Центру необходимо распреде-

лечь задания по производству продукции в объеме U_0 между элементами так, чтобы затраты в системе были наименьшими.

Обозначим через u_i, v_i показатели объема производства и затрат, планируемые i -му элементу, через x_i — вектор показателей (план) этого элемента, $x_i = (v_i, u_i)$; p_i — параметр плана; $p_i = u_i/v_i$. Тогда множество X_i производственных возможностей каждого элемента $i \in I$ и множество X допустимых планов системы принимают вид

$$X_i = \{x_i | 0 \leq u_i \leq U_0, 0 < b_i^0(u_i) \leq v_i, b_i^0(0) = 0\};$$

$$X = \{x = (x_i, i \in I) | x_i \in X_i, i \in I, \sum_{i \in I} u_i \geq U_0\}.$$

$b_i^0(u_i)$ — функция производственных издержек, определяющая минимальные затраты v_i при выпуске i -м изготовителем продукции в объеме u_i . Функция $b_i^0(i \in I)$ известна лишь i -му элементу, центр и остальные элементы конкретного вида функции b_i^0 не знают.

При формировании окончательного варианта плана $\hat{x} = (\hat{x}_i, i \in I)$ каждый элемент стремится максимизировать свою целевую функцию

$$f_i(\hat{x}_i) = \begin{cases} f_i^0(\hat{x}_i) \geq 0, \hat{x}_i \in X_i; \\ \text{const} < 0, \hat{x}_i \notin X_i, \end{cases}$$

где функция f_i^0 непрерывна и удовлетворяет условиям

$$f_i^0(\hat{v}_i, \hat{u}_i + \delta) > f_i^0(\hat{v}_i, \hat{u}_i); f_i^0(\hat{v}_i + \delta, \hat{u}_i) < f_i^0(\hat{v}_i, \hat{u}_i), \delta > 0. \quad (1)$$

Предположим, что функция $b_i^0(i \in I)$ удовлетворяет условиям

$$u_i' \leq u_i'', \text{ если } \frac{u_i'}{v_i'} > \frac{u_i''}{v_i''}, x_i' \in \Gamma(b_i^0), x_i'' \in \Gamma(b_i^0); \quad (2)$$

$$f_i^0(b_i^0(u_i'), u_i') < f_i^0(b_i^0(u_i''), u_i''), \text{ если } u_i' < u_i'', \quad (3)$$

где $\Gamma(b_i^0) = \{x_i | u_i \in [0, U_0], v_i = b_i^0(u_i)\}$.

Тогда для каждого элемента $i \in I$ определен интервал P_i возможных значений параметров планов из множества $\Gamma(b_i^0)$

$$P_i = [p_i^{\min}, p_i^{\max}] \ni p_i = u_i/b_i^0(u_i), \text{ если } u_i \in (0, U_0].$$

Центру известны оценки $p_i^{\min} > 0, p_i^{\max} > 0$ нижних и верхних границ интервалов $P_i, i \in I$, т. е. $[p_i^{\min}, p_i^{\max}] \supseteq [p_i^{\min}, p_i^{\max}]$. Следовательно, центр информирован о множествах $B_i^0, i \in I$ возможных реализаций (оценок) функций издержек элементов

$$B_i^0 = \{b_i | u_i/p_i^{\min} \geq b_i(u_i) \geq u_i/p_i^{\max}, u_i \in [0, U_0]\}.$$

До начала планирования центр сообщает элементам конкретный вид закона распределения. Под законом распределения про-

изводственных заданий π понимаем однозначное отображение набора $b = (b_i, i \in I)$ оценок функций издержек элементов в план $\pi(b) = (\pi_i(b), i \in I) = ((\pi_i^v(b), \pi_i^u(b)), i \in I)$.

Планирование рассматривается как игра элементов. Стратегией элемента $i \in I$ является выбор оценки b_i из множества B_i^0 , а его выигрыш определяется величиной $f_i(\pi_i(b))$. Решение этой игры определяется в ходе обмена информацией между элементами непосредственно или через центр. В качестве решения игры принимается равновесный план $\pi(b^*) = x$, где b^* — ситуация равновесия по Нэшу.

Закон распределения π назовем МГР-корректным, если он определяет ситуацию $b^* = (b_i^*, i \in I)$ равновесия, в которой элементы получают гарантированные выигрыши:

$$f_i(\pi_i(b_i^*, b_{-i}^*)) = \max_{b_i \in B_i(b_{-i}^*, b_i^0)} f_i(\pi_i(b_i, b_{-i}^*)) = \min_{b_{-i} \in B_{-i}(b_i^*, b_{-i}^0)} f_i(\pi_i(b_i^*, b_{-i})), \quad i \in I,$$

где

$$\begin{aligned} b_{-i}^* &= (b_j^*, j \in I \setminus \{i\}), \quad b_{-i} = (b_j, j \in I \setminus \{i\}); \quad B_i(b_{-i}^*, b_i^0) = \\ &= \{b_i' \mid b_i' \in B_i^0, \pi_i(b_i', b_{-i}^*) \in X_i(b_i^0)\}; \quad B_{-i}(b_i^*, b_{-i}^0) = \{b_{-i} \mid b_j \in B_j^0, \\ &\quad \pi_j(b_i^*, b_{-i}) \in X_j(b_j^0), j \in I \setminus \{i\}\}. \end{aligned}$$

Закон распределения называется достоверным, если в условиях обеспечиваемой им корректности оптимальными стратегиями элементов является сообщение ими своих функций издержек.

Закон распределения π назовем пропорциональным, если его каждая i -я ($i \in I$) составляющая π_i удовлетворяет условиям

$$\pi_i^u(b_i, b_{-i}) \leq \pi_i^u(b_i, b_{-i}'), \quad \text{если } b_{-i}' \in B_{-i}(b_i, b_{-i}); \quad (4)$$

$$\pi_i^u(\omega[p_i'], b_{-i}) \geq \pi_i^u(\omega[p_i], b_{-i}), \quad \text{если } p_i' \geq p_i; \quad (5)$$

$$\pi_i(b_i, b_{-i}) = \Gamma(b_i) \cap Z_i(b_{-i}), \quad \text{если } (b_i, b_{-i}) \in \Pi B_i^0, \quad (6)$$

где

$$Z_i(b_{-i}) = \{z_i(p_i, b_{-i}) \mid z_i(p_i, b_{-i}) = \pi_i(\omega[p_i], b_{-i}),$$

$$p_i \in [p_i^{\min}, p_i^{\max}]\}, \quad \omega[p_i](u_i) = \frac{u_i}{p_i} \quad \text{для всех } u_i \in [0, U_0].$$

Утверждение. Пропорциональные законы распределения являются МГР-корректными, достоверными.

Доказательство. Покажем, что пропорциональный закон π удовлетворяет условию

$$f_i^0(\pi_i(b_i, b_{-i})) \geq f_i^0(\pi_i(b_i', b_{-i})), \quad \text{если } b_i' \in B_i(b_{-i}, b_i), \quad i \in I. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию $b_i' \in B_i(b_{-i}, b_i)$ и определим параметры

$$p_i^* = \pi_i^u(b_i, b_{-i}) / \pi_i^v(b_i, b_{-i}); \quad p_i' = \pi_i^u(b_i', b_{-i}) / \pi_i^v(b_i', b_{-i}).$$

Из соотношения (6) следует: $\pi_i(\omega[p_i^0], b_{-i}) = \pi_i(b_i, b_{-i}) \in \Gamma(b_i)$; $\pi_i(\omega[p_i'], b_{-i}) = \pi_i(b_i', b_{-i})$. Предположим, что $p_i' > p_i''$. Тогда из соотношения (5) получаем $\pi_i^u(\omega[p_i'], b_{-i}) > \pi_i^u(\omega[p_i''], b_{-i})$. В этом случае из свойств (2), (3) функции b_i следует $\pi_i(b_i', b_{-i}) \notin X_i(b_i)$, что противоречит условию $b_i' \in B_i(b_{-i}, b_i)$. Таким образом, предположение $p_i' > p_i''$ неверно, поэтому $p_i' \leq p_i''$ и согласно соотношению (5), (6) и свойств (1) целевых функций получаем $\pi_i^u(\omega[p_i'], b_{-i}) \leq \pi_i^u(\omega[p_i''], b_{-i})$; $f_i^0(\pi_i(b_i', b_{-i})) = f_i^0(\pi_i(\omega[p_i'], b_{-i})) \leq f_i^0(\pi_i^v(\omega[p_i'], b_{-i}), \pi_i^u(\omega[p_i'], b_{-i})) \leq f_i^0(\pi_i(\omega[p_i''], b_{-i})) = f_i^0(\pi_i(b_i, b_{-i}))$.

Следовательно, для закона π справедливо свойство (7).

Покажем, что закон распределения π , удовлетворяющий условиям (4), (7), является МГР-корректным, достоверным. Из формулы (7) и определения множества $B_i(b_i^0, b_{-i}^0)$ следует

$$f_i^0(\pi_i(b_i^0, b_{-i}^0)) = \max_{b_i' \in B_i(b_{-i}^0, b_i^0)} f_i^0(\pi_i(b_i', b_{-i}^0)) = f_i(\pi_i(b_i^0, b_{-i}^0)).$$

Из соотношения (4) с учетом свойства (3) производственных функций элементов и определения множества $B_i(b_i^0, b_{-i}^0)$ получаем $\pi_i^u(b_i^0, b_{-i}^0) = \min_{b_{-i}' \in B_{-i}(b_i^0, b_{-i}^0)} \pi_i^u(b_i^0, b_{-i}')$; $f_i^0(\pi_i(b_i^0, b_{-i}^0)) = \min_{b_{-i}' \in B_{-i}(b_i^0, b_{-i}^0)} f_i^0(\pi_i(b_i^0, b_{-i}')) = f_i(\pi_i(b_i^0, b_{-i}^0))$.

Следовательно, ситуация $(b_i^0, i \in I)$ является ситуацией равновесия, в которой элементам обеспечен гарантированный выигрыш.

Утверждение доказано.

Проведенные численные расчеты показывают эффективность применения пропорциональных законов распределения производственных заданий с позиции центра (по критерию минимума суммарных затрат).

Список литературы: 1. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. М., 1981. 384 с. 2. Заруба В. Я. Эффективное корректное планирование с встречным формированием данных // Автоматика и телемеханика. 1988. № 6. 125—134.

Поступила в редколлегию 20.12.83

А. В. ГУЗЕНКО, В. Е. РУДЕНКО

ПЛАНИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ ЕГО ХОЗЯЙСТВЕННОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим разработанную на основе системного подхода схему планирования технического развития предприятия (ТРП) в условиях его хозяйственной самостоятельности.

Планирование ТРП важно для принятия эффективных решений по внедрению новых технологических процессов, оборудования, в том числе робототехники и гибких производственных систем.

Критерий эффективности плана ТРП

$$\Phi_{\Sigma} = \sum_t [(\Phi'_{\text{МП}} + \Phi'_{\text{СКБ}}) / \mathcal{C}'_0], \quad t = \overline{1, T}, \quad \text{где}$$

$\Phi'_{\text{МП}}$ — фонд материального поощрения; $\Phi'_{\text{СКБ}}$ — фонд на жилищное строительство и соцкультбыт; \mathcal{C}'_0 — нормативная численность занятых на предприятии в году t , определяемая, с одной стороны, нормой технического и другого оборудования, а с другой стороны, объемно-номенклатурным планом производства в году t .

Рассмотрим задачу выбора предпочтительного плана ТРП для случая, когда неопределенные факторы развития предприятия отсутствуют. Условимся, что предприятие использует первую модель хозрасчета, характерной особенностью которой является нормативное распределение прибыли.

Планирование ТРП предполагает определение для каждого года t , $t = 1, 2, \dots, T$, где $T = 10$ лет, состава и объема проводимых производственно-технологических мероприятий (ПТМ). Под производственно-технологическими мероприятиями понимаем работы, связанные с изменением объема и структуры основных производственных фондов, технологии и организации производства, численности занятых и, в итоге, производственной мощности предприятия*.

План ТРП определяет производственные возможности предприятия. Обозначим множество производственных возможностей предприятия в году t Y^t_A , а множество вариантов производства-потребления продукции, обеспеченных спросом-предложением, Y^t_{Σ} . Пересечение множеств Y^t_A , Y^t_{Σ} дает область допустимых планов производства-потребления продукции. Максимизация оценки варианта плана ТРП Φ_{Σ} сводится к получению наибольшей при-

* Заруба В. З. Макромодели развития промышленного предприятия в условиях его хозяйственной самостоятельности // XI Всесоюз. школа-семинар: Тез. докл. Вильнюс, 1988. С. 89—90.

были Π предприятия в каждом году t планового периода, определяемой решением задачи линейного программирования на линейном множестве допустимых планов производства-потребления:

$$\Pi = \sum_{j=1}^3 u^{t(j)} c_u^{t(j)} - \sum_{j=1}^3 v^{t(j)} c_v^{t(j)} - 3\Pi^t(u^t) - AO^t \rightarrow \max$$

при ограничениях $(u^t, v^t) = y^t \in Y_A^t, y^t \in Y_Q^t$, где $u^{t(j)}$ — вектор объемов производства продукции в t -м году для реализации j -м способом, $u^{t(j)} = \{u_i^{t(j)}\}_{i=\overline{1, n_1}}$; $j=1$ — госзаказ, $j=2$ — прямые договоры, $j=3$ — рынок; $v^{t(j)}$ — вектор объемов потребления продукции j -м способом, $v^{t(j)} = \{v_i^{t(j)}\}_{i=\overline{1, n_2}}$, $j \in \{1, 2, 3\}$; $u^t, v^t, c_u^{t(j)}, c_v^{t(j)}$ — векторы цен на производимую и потребляемую продукцию j -м способом,

$$\begin{aligned} u^t &= u^{t(1)} + u^{t(2)} + u^{t(3)}; v^t = v^{t(1)} + v^{t(2)} + v^{t(3)}; c_u^{t(j)} = \\ &= \{c_{u_i}^{t(j)}\}_{i=\overline{1, n_1}}; c_v^{t(j)} = \{c_{v_i}^{t(j)}\}_{i=\overline{1, n_2}}; \end{aligned}$$

n_1 — количество видов выпускаемой продукции; n_2 — количество видов потребляемой продукции; $n = n_1 + n_2$ — общее количество видов продукции; $3\Pi^t(u^t)$ — фонд заработной платы предприятия в t -м году, рассчитанный на основе запланированного объема производства продукции всех видов; AO^t — амортизационные отчисления в году t , рассчитываемые в зависимости от объема и структуры основных производственных фондов, определяемых планом ТРП. В результате решения этой задачи находим оптимальный объемно-номенклатурный план производства $u^{t \text{ опт}}$, который вместе с рассматриваемым вариантом плана ПТМ определяет нормативную численность занятых в году t .

В случае бесчисленного множества решений задачи линейного программирования за искомое значение $u^{t \text{ опт}}$ выбирается любое из этих решений. Из полученной прибыли производятся расчеты с бюджетом и вышестоящим органом, выплачиваются проценты за банковский кредит. Из образовавшейся после этих расчетов остаточной прибыли формируются по нормативным коэффициентам отчисления в фонды социального развития $\Phi_{СКБ}^t$, материального поощрения $\Phi_{МП}^t$, развития производства $\Phi_{РП}^+$ по каждому году t планового периода.

Оцениваемый вариант плана ТРП проверяется на допустимость по формуле $K^t \leq AO^t + \Phi_{РП}^t + R\Phi^{t-1}$, где K^t — капиталовложения на развитие производства в году t , задаваемые планом ТРП, $R\Phi^{t-1}$ — резервный фонд предприятия, задаваемый планом ТРП.

Резервный фонд в году t формируется следующим образом:
 $R\Phi^t = AO^t + \Phi_{РП}^t + R\Phi^{t-1} - K^t$.

Если вариант плана оказывается недопустимым, то используется банковский кредит. Если и в этом случае план недопустим, то он игнорируется.

Перебирая различные допустимые варианты плана ТРП и для каждого из них определяя оценку Φ_2 можно отыскать наилучший вариант плана ТРП, соответствующий максимальному значению Φ_2 .

Для исследования предлагаемой схемы планирования ТРП создана программная система моделирования развития предприятия «МАДЕМ».

Программная система «МАДЕМ» предназначена для проведения вариантных расчетов на ЭВМ типа СМ-4 с операционной системой ОС РВ версии 3.0. Число рассматриваемых допустимых вариантов плана ТРП определяется возможностями используемой ЭВМ. Разработанные программные средства позволяют пользователю автоматизировать исследования расчетов по оценке эффективности различных вариантов плана ТРП и выбора наилучшего варианта плана ТРП.

Поступила в редколлегию 12.06.88

УДК 519.854

*Ю. С. ШАХНОВСКИЙ, О. Н. МАЛЫХ, канд. техн. наук,
А. В. АРДЕЛЬЯН, Ю. Н. КОЖИН*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ РАСПИСАНИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Задано множество работ $I = \{i | i = \overline{1, n}\}$ произвольной длительности. Каждая работа выполняется на ресурсе R_i , загружаемом только i -й работой. Следовательно, между работами отсутствуют конфликты на общих ресурсах.

К использованию любого ресурса R_i соответствующей работой предъявляются, в общем случае, два типа ограничений:

1. Ресурс доступен к загрузке не ранее момента времени r_i , т. е. $t_i \geq r_i$, где t_i — момент начала выполнения i -й работы;

2. Для ресурса установлено L_i интервалов времени, в течение которых недопустим запуск i -й работы, т. е. $t_i \notin (c_l^i, d_l^i)$ где $l = \overline{1, L_i}$.

В свою очередь, на множестве I существуют такие работы, которые попарно взаимодействуют. Для всякой пары $\{i, j\}$ взаимосвязанных работ имеет место условие $a_{ij} \leq t_i - t_j \leq b_{ij}$. Следовательно, условие связи работ пары $\{i, j\}$ выражается во взаимных ограничениях на соответствующие им моменты t_i, t_j начала выполнения. Если работы пары $\{i, j\}$ не взаимодействуют, для них имеет место соотношение — $-\infty \leq t_i - t_j \leq \infty$. Наконец, $(\forall i) 0 \leq t_i - t_i \leq 0$.

Очевидно, для работ из I существует бесконечно много моментов запуска, которые не противоречат ограничениям. Поэтому бу-

дем считать допустимыми только наиболее ранние моменты начала работ. Таким образом, задача сводится к отысканию наиболее ранних моментов запуска работ, удовлетворяющих установленным ограничениям.

Для удобства изложения ограничения на доступность ресурсов к загрузке назовем статическими, а двусторонние ограничения, выражающие взаимосвязь пар работ, — динамическими.

Легко видеть, что статическим ограничениям просто удовлетворить, установив для всех работ достаточно большие моменты начала исполнения. Значит, определяющими при построении допустимого решения являются динамические ограничения.

Для иллюстрации выбранного способа представления динамических ограничений рассмотрим следующий пример.

Пусть множество I состоит из четырех работ, для которых установлена система динамических ограничений:

$$\begin{aligned} 1_{21} \leq t_2 - t_1 \leq 2_{21}; \quad 3_{31} \leq t_3 - t_1 \leq 4_{31}; \quad 2_{42} \leq t_4 - t_2 \leq 3_{42}; \\ -5_{43} \leq t_4 - t_3 \leq 0_{43}; \quad -\infty_{41} \leq t_4 - t_1 \leq \infty_{41}; \\ -\infty_{32} \leq t_3 - t_2 \leq \infty_{32}, \end{aligned}$$

т. е. взаимодействующими являются работы пар $\{2, 1\}$, $\{3, 1\}$, $\{4, 2\}$ и $\{4, 3\}$, а между парами $\{4, 1\}$ и $\{3, 2\}$ взаимосвязь не определена.

Умножив каждое исходное двустороннее ограничение на -1 , получим производную от исходной систему динамических ограничений:

$$\begin{aligned} -2_{12} \leq t_1 - t_2 \leq -1_{12}; \quad -4_{13} \leq t_1 - t_3 \leq -3_{13}; \\ -3_{24} \leq t_2 - t_4 \leq -2_{24}; \quad 0_{34} \leq t_3 - t_4 \leq 5_{34}; \quad -\infty_{14} \leq t_1 - \\ -t_4 \leq \infty_{14}; \quad -\infty_{23} \leq t_2 - t_3 \leq \infty_{23}. \end{aligned}$$

Нижние границы исходной и вновь полученной систем ограничений представим в виде матрицы $A = [a_{ij}]$ порядка n , в которой главная диагональ является нулевой, так как $(\forall i) 0 \leq t_i - t_i \leq 0$, а под и над главной диагональю располагаются соответственно нижние и с обратным знаком верхние границы заданной системы динамических ограничений.

Таким образом, матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -\infty \\ 1 & 0 & -\infty & -3 \\ 3 & -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

полностью задает установленные динамические ограничения.

Матрице A сопоставим оргграф, в котором вершинами являются работы, а всякой паре $\{i, j\}$ взаимодействующих работ соответствует дизъюнктивная пара дуг (j, i) и (i, j) . Дуга (j, i) обладает весом a_{ij} , что соответствует условию $a_{ij} \leq t_i - t_j$. В свою очередь, дуга (i, j) имеет вес $a_{ji} = -b_{ji}$ согласно условию $-b_{ji} \leq t_j - t_i$.

При этом формируемый оргграф должен быть связным. Невыполнение этого требования указывает на неполноту исходной системы динамических ограничений. На рис. 1 представлен оргграф динамических связей для рассматриваемого примера. Процесс решения

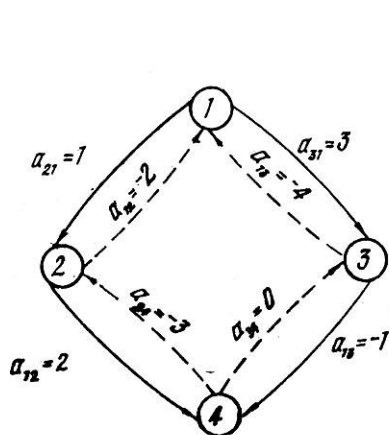


Рис. 1

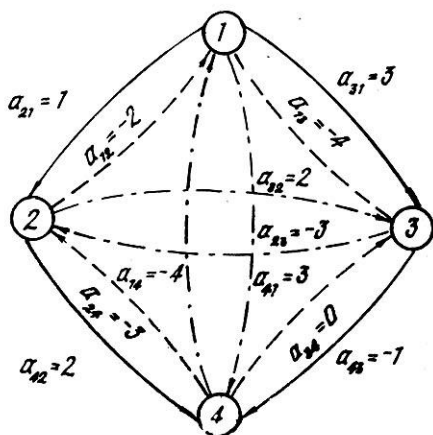


Рис. 2

задачи состоит из двух этапов. На первом из них осуществляется построение транзитивного замыкания оргграфа динамических условий. На втором этапе находятся моменты запуска работ.

Формирование транзитивного замыкания позволяет установить динамическую связь между теми парами работ, для которых условия взаимодействия не определены при постановке задачи. При этом все элементы из A типа $-\infty$ приобретут конкретные числовые значения, а исходный оргграф преобразуется в полный оргграф динамических ограничений.

Построение транзитивного замыкания осуществляется с применением матрицы A по следующему модифицированному алгоритму*.

1. Положить $k=1$.
2. Положить $i=1$.
3. Положить $j=1$.
4. Положить $a_{ij} = \max(a_{ij}, a_{ik} + a_{kj})$.
5. Положить $j=j+1$, если $j \leq n$, перейти к п. 4.
6. Если $a_{ii} \neq 0$, остановиться в силу несовместности исходной системы динамических ограничений.
7. Положить $i=i+1$; если $i \leq n$, перейти к п. 3.
8. Положить $k=k+1$; если $k \leq p$, перейти к п. 2; иначе остановиться.

* Ахо А., Хопкрофт Д. Ж., Ульман Д. Ж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов: Пер. с англ. М., 1979, 536 с.

Результатом работы алгоритма являются орграф транзитивного замыкания (см. рис. 2) и соответствующая ему матрица замыкания

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В процессе построения A' алгоритм диагностирует несовместность исходного набора динамических условий (шаг 5). Последнее имеет место в том случае, когда при построении A' на главной диагонали появляется хотя бы один ненулевой элемент. Например, для случая трех работ несовместная система исходных динамических ограничений имеет вид

$$1 \leq t_3 - t_2 \leq 3; \quad 5 \leq t_2 - t_1 \leq 6; \quad 2 \leq t_3 - t_1 \leq 3.$$

Просуммировав первые два неравенства, получим $6 \leq t_3 - t_1 \leq 9$, что противоречит третьему неравенству. Очевидно, исходная система динамических условий всегда совместна, если в соответствующем орграфе не существует замкнутых путей, составленных из дуг, веса которых являются или только нижними, или только верхними границами исходных динамических условий.

Определение наиболее ранних моментов запуска работ с использованием A' выполняется по следующему алгоритму:

1. Положить $(\forall i) t_i = r_i$.
2. Положить $i = 1$.
3. Положить $j = 1$.
4. Положить $t_i = \max(t_i, t_j + a_{ij})$.
5. Положить $j = j + 1$, если $j \leq n$, перейти к п. 4.
6. Положить $i = i + 1$, если $i \leq n$, перейти к п. 3.
7. Положить $j = 1$.
8. Если $t_j \in (c_j^l, d_j^l)$, $l = 1, L_j$, положить $t_j = d_j^l$, иначе перейти к п. 12.
9. Положить $i = 1$.
10. Положить $t_i = \max(t_i, t_j + a_{ij})$.
11. Положить $i = i + 1$; если $i \leq n$, перейти к п. 10; иначе перейти к п. 7.
12. Положить $j = j + 1$; если $j \leq n$, перейти к п. 8; иначе остановиться.

Если для рассматриваемого примера положить $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = 0$, $r_4 = 1$ и $t_4 \in (4, 6)$, то после реализации данного алгоритма получим $t_1 = 4$, $t_2 = 3$, $t_3 = t_4 = 6$.

Верхней оценкой сложности приведенных алгоритмов является $C_1 n^3 + C_2 n^2 + C_3 nL$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные коэффициенты; L — общее количество запрещенных интервалов запуска работ, $L = \sum_i L_i$.

Рассмотренная задача является моделью динамического обмена в вычислителях с отдельно активируемыми источниками и при-

емниками в каналах обмена. Приведенные алгоритмы используются в рамках системы упаковки микрокода для вычислителей с горизонтальным многоформатным управлением.

Поступила в редколлегию 15.12.88

УДК 621.391

В. И. ЧЕРНЫШЕВ, канд. техн. наук,
А. Л. ГЮНЕ, В. И. МУТАНОВ, Ю. П. ГРИШИНА

АВТОМАТИЗАЦИЯ РАЗРАБОТКИ ПРОГРАММ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОЦЕССОРОВ

В настоящее время в высокопроизводительные системы обработки информации широко внедряются векторные процессоры (ВП) [1; 2]. Одна из основных задач, возлагаемых на ВП, — вычисление дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), наиболее часто используемые в ВП, налагают известное ограничение на число отсчетов N : N должно быть степенью основания БПФ. Алгоритм простых множителей (АПМ) Гуда [3] позволяет более гибко выбирать N из соотношения

$$N = \prod_{m=1}^M N_m, \quad (1)$$

где все M сомножителей — взаимно-простые числа. В сочетании с алгоритмами вычисления N_m -точечных ДПФ по методу Рейдера [3] АПМ Гуда позволяет существенно ускорить вычисление ДПФ по сравнению с алгоритмами БПФ. Универсальные программы, реализующие алгоритм Гуда — Рейдера для произвольного N , удовлетворяющего (1), при исполнении тратят много времени на выбор требуемых процедур (N_m -точечных ДПФ) и расчет параметров для них в зависимости от N и набора сомножителей (1). Для получения наибольшей производительности ВП целесообразно разделить этапы генерации и исполнения программы вычисления ДПФ [3]. В этом случае в память команд ВП записывается программа, реализующая вычисление ДПФ для заданного N . В настоящей работе описан метод отображения алгоритма простых множителей вычисления ДПФ на систему команд ВП, позволяющий построить автоматизированную систему генерации программ ВП.

Команды ВП в общем случае имеют структуру, включающую в себя поле кода операции и поля адресов операндов. Каждая команда ВП исполняется для L элементов вектора, расположенных в памяти данных с шагом H . Например, при двухадресной

системе команд обработка вектора может производиться по схеме [2]

$$V(A_1 + lH) = V(A_1 + lH) \oplus V(A_2 + lH), \quad l = 1, 2, \dots, L-1, \quad (2)$$

где $V(A)$ — элемент вектора, записанный по адресу A ; \oplus — символ операции; A_1, A_2 — адреса, заданные в полях команды. Параметры неявного цикла L, H могут задаваться отдельной командой, предшествующей группе векторных команд.

При использовании АПМ Гуда ДПФ вектора вычисляется в следующем порядке [3; 4]:

1. Исходный вектор из N чисел перестановкой элементов вектора преобразуется в M -мерный массив.
2. Вычисляется M -мерное ДПФ.
3. Выходной M -мерный массив перестановкой элементов преобразуется в вектор.

Перестановка элементов вектора необходима для использования векторной системы команд с адресами, изменяющимися линейно (2). После перестановки элементы M -мерного массива определяются совокупностью индексов

$$\{n_1, n_2, \dots, n_m, \dots, n_M\}, \quad n_m = 0, 1, 2, \dots, N_m - 1. \quad (3)$$

Физические адреса элементов M -мерного массива, размещенного в памяти данных, вычисляются по формуле

$$k = \sum_{m=1}^M n_m S_m, \quad (4)$$

где $S_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 1, \\ \prod_{j=1}^{m-1} N_j & \text{при } m = 2, 3, \dots, M. \end{cases}$

M -мерное ДПФ вычисляется за M этапов. На каждом этапе с номером m преобразование информации можно представить в виде двух вложенных циклов. Внешний цикл с параметрами

$$H_1 = N_m S_m, \quad L_1 = N/H_1 \quad (5)$$

охватывает группы N_m -точечных ДПФ. Внутренний цикл с параметрами

$$H_2 = 1, \quad L_2 = S_m \quad (6)$$

определяет собственно группу N_m -точечных ДПФ. В пределах группы при переходе к очередному N_m -точечному ДПФ физические адреса элементов увеличиваются на H_2 (всего в группе $L_2 N_m$ -точечных ДПФ). От группы к группе физические адреса элементов изменяются с шагом H_1 (всего групп L_1). N_m элементов, необходимых для выполнения N_m -точечного ДПФ, извлекаются из памяти данных ВП с шагом S_m .

Организация вычислений в виде двух вложенных циклов удобна, если ВП обеспечивает модификацию записанного в команде адреса A в исполнительный адрес A_n по формуле

$$A_n = A + l_1 H_1 + l_2 H_2, \quad (7)$$

где l_1, l_2 — счетчики внешнего и внутреннего циклов, $l_1 = 0, 1, 2, \dots, L_1 - 1$, $l_2 = 0, 1, 2, \dots, L_2 - 1$. Если же ВП способен модифицировать адрес только по одному счетчику цикла (см. (2)), то один из циклов необходимо заменить линейной частью программы, эквивалентной этому циклу. Такая замена приводит к дополнительным затратам памяти команд, поэтому аппаратное вычисление адреса A_n по формуле (7) предпочтительнее.

Программа инструментальной ЭВМ, генерирующая программу ВП, использует автономно разработанные (в командах ВП) и отложенные модули-заготовки программ вычисления N_m -точечных ДПФ для необходимого набора N_m , например, 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 16 [3]. Из этих модулей-заготовок komponуется программа вычисления ДПФ для заданного количества точек N . При компоновке производится настройка модулей-заготовок по следующим параметрам: адресу первого элемента вектора, подлежащего преобразованию; шагу S_m , с которым из памяти данных извлекаются элементы N_m -точечного вектора; адресу первого элемента массива тригонометрических множителей, необходимых для выполнения N_m -точечного ДПФ; адресам массивов для записи промежуточных результатов.

Результаты N_m -точечного ДПФ должны возвращаться в память данных на место исходного N_m -точечного вектора.

Процедура генерации, реализуемая программой инструментальной ЭВМ, состоит из следующего. Исходя из заданного N , представленного формулой (1), вначале определяется число этапов M . Далее для каждого этапа и соответствующего ему значения N_m по формулам (4) — (6) вычисляются параметры циклов и преобразуются в команды ВП, устанавливающие параметры векторных команд. Команды установки параметров записываются в модель памяти команд с заданного или очередного свободного адреса; вызывается модуль-заготовка N_m -точечного ДПФ в командах ВП и производится его настройка на необходимые параметры. Полученный модуль помещается в модель памяти команд с очередного свободного адреса.

Преимуществом описанного метода разработки программ ВП является существенная экономия времени, затрачиваемого на кодирование и отладку программ. С использованием ограниченного набора модулей-заготовок N_m -точечных ДПФ можно без отладки получать программы вычисления ДПФ для широкого спектра значений N . Сами модули могут программироваться на языке ассемблера ВП, что предоставляет большие возможности для оптимизации программ.

Описанный подход может быть использован при разработке программ ВП, реализующих алгоритмы БПФ с произвольными основаниями.

Список литературы: 1. Мануэль Т. Начало массового выпуска суперЭВМ//Электроника. 1988. 61, № 5. С. 18—28. 2. Компьютеры на СБИС/Т. Мотоока, Х. Хоригоши, М. Сакаuti и др.: Пер. с яп. М., 1988. Кн. 2. 336 с. 3. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления спектров: Пер. с англ. М., 1985. 248 с. 4. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. М., 1988. 488 с.

Поступила в редколлегию 19.12.88

УДК 658.512

А. В. МАКАРЕНКО, канд. техн. наук,
А. С. ПОНОМАРЕВ, канд. техн. наук,
Л. Р. САЛАХАТДИНОВА

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В АСУ ТП АЭС

Особенностью автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП) в атомной энергетике является огромное количество контролируемых параметров. Например, в энергоблоках с реакторами ВВЭР их порядка 4 тыс., а с реакторами РБМК — около 20 тыс. Это приводит к сложной структуре АСУ с большим количеством различных датчиков, регуляторов, блоков обработки информации и формирования управляющих сигналов. Кроме того, атомные электростанции (АЭС) должны удовлетворять повышенным требованиям в части обеспечения их надежности, безопасности и экономичности. В частности, наиболее ответственные узлы систем аварийной защиты имеют наработку на отказ порядка 60 млн ч [1]. В таких условиях резко возрастает роль блокировки, дублирования и резервирования.

Все современные АСУ ТП АЭС независимо от их функциональных и технических особенностей построены так, что структуры управляющей вычислительной системы (ВС), ее программное обеспечение и электрическое питание не допускают останова энергоблока даже при одновременном выходе из строя нескольких модулей ВС. Это достигается резервированием как информационных каналов, так и технических средств, а также дублированием ввода в ВС особо важных параметров. При этом нередко имеет место избыточное резервирование, и его оптимизация при соблюдении высоких требований к безопасности и экономичности энергоблоков и АЭС в целом остается актуальной инженерной задачей.

Вычислительная система состоит из n функциональных блоков (процессор, память и т. д.), выход из строя каждого из которых приводит к отказу всей системы. Поэтому при расчете надежности блоки (подсистемы) различных типов (наименований) считаются соединенными последовательно. Каждый блок представлен в виде последовательного соединения m основных модулей и подключаемых параллельно резервных модулей.

Модули нагруженного (горячего) резерва характеризуются количеством r и интенсивностью отказов λ , модули частично нагруженного (теплого) резерва в количестве s имеют интенсивность отказов $\mu = \lambda/k$, где k — отношение интенсивностей отказов в горячем и теплом резервах, $k > 1$. Таким образом, под полной нагрузкой могут работать $N = m + r$ модулей.

Надежности блоков, составляющих вычислительную систему, могут быть повышены за счет разбиения каждого модуля на l одинаковых (разрядных) секций и посекционного резервирования.

На основе положений теории надежности [2] в работе [3] получено выражение для вероятности безотказной работы блока в течение времени t

$$P(t) = \left\{ e^{-(kN+s)\mu t/l} \left[\sum_{i=0}^{s-1} C_{kN+s}^i (e^{\mu t/l} - 1)^i + \right. \right. \quad (1)$$

$$\left. \left. + C_{kN+s}^s \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} C_N^i C_{N-i+1}^{r-1} \sum_{l=s}^{ik+s} C_{ik+s}^l (e^{\mu t/l} - 1)^l \right] \right\}^l,$$

где C_a^b — число сочетаний из a по b .

Надежность вычислительной системы

$$P_s(t) = \prod_{u=1}^n P_u(t). \quad (2)$$

Для каждого наименования модуля исходя из задач, которые должна решать ВС, устанавливаются требуемые функциональные параметры: количество операций в секунду для вычислительных модулей, объем памяти в байтах для запоминающих устройств и т. д. Эти функциональные показатели могут быть обеспечены лишь в том случае, когда модуль занимает определенный объем (имеет вес, стоимость). Обозначим вес модуля, входящего в состав блока u , через V_u . Тогда вес системы

$$V = \sum_{u=1}^n V_u (m_u + r_u + s_u). \quad (3)$$

Аналогично можно выразить объем или стоимость системы.

Задача оптимального резервирования решается в двух постановках: минимизация веса системы (3) при выполнении требования на надежность (2) с подстановкой (1) и максимизация надежности системы при выполнении ограничения на вес (3). При этом вместо веса могут быть рассмотрены объем, стоимость и т. д. В обеих постановках переменными являются r_u , s_u , причем они могут принимать лишь целые неотрицательные значения.

С математической точки зрения задача минимизации веса и задача максимизации надежности представляют собой задачи целочисленного программирования, называемые задачами о ранце. Обе

эти дискретные многоэкстремальные задачи используют функцию надежности (1), которая является недифференцируемой. Поэтому неэффективны методы непрерывной оптимизации, использующие производные для нахождения непрерывного оптимального решения, близкого к целочисленному. Методы непрерывной оптимизации нулевого порядка, не использующие производных, очень сложны и также позволяют находить лишь непрерывное решение. Простым округлением непрерывного решения в общем случае нельзя получить точные целочисленные значения числа резервных модулей. Следовательно, потребуется использовать методы дискретной оптимизации для нахождения целочисленного решения в окрестности непрерывного.

Согласно изложенному для решения задач о ранце, описываемых соотношениями (1)–(3), имеет смысл применить непосредственно методы дискретной оптимизации. Однако при получении точного решения с увеличением размерности задачи трудоемкость вычислений резко возрастает как для комбинаторных алгоритмов типа ветвей и границ, так и для алгоритмов, основанных на рекуррентных соотношениях метода динамического программирования. Поэтому для решения поставленных задач оптимального резервирования используется приближенный метод дискретной оптимизации, основанный на отыскании такой подсистемы (блока), добавление к которой единичного резерва дает наибольшее удельное приращение надежности

$$g_u = [P_u(s_u + 1) - P_u(s_u)] / P_u(s_u) V_u. \quad (4)$$

Этот метод назван градиентным [2] по аналогии с группой методов непрерывной оптимизации.

В случае непрерывности переменных r_u , s_u решение получилось бы близким к непрерывному оптимальному, так как функция (3) линейна, а функция (1) вогнута и для высоконадежных систем, которыми являются АСУ ТП АЭС, хорошо аппроксимируется линейной формой. Этими особенностями объясняются удовлетворительные результаты, которые получают дискретным градиентным методом при решении задач оптимального резервирования.

Целочисленное решение достигается в результате многошаговой процедуры, причем на каждом шаге количество резервных модулей одного из типов увеличивается на единицу. Поэтому просматриваются не все допустимые решения задачи и результат оптимизации дискретным градиентным методом является приближенным. Точное решение получается при равенстве всех исходов модулей V_u .

Список литературы: 1. Плотинский В. И., Погорелов В. И. Автоматическое управление и защита теплоэнергетических установок АЭС. М., 1983. 296 с. 2. Надежность автоматизированных систем управления/И. О. Лтовмян, А. С. Вайрадян, Ю. П. Руднев и др. М., 1979. 287 с. 3. Зайко Ю. Г., Хабибуллин Х. Г. Оценка надежности функционирования резервированной вычислительной системы//Кибернетика. 1982. № 2. С. 63–68.

Поступила в редакцию 03.06.89

Л. А. КУНЯНСКИЙ, Н. В. ТОДОРОВА,
И. В. ГОЛЬДРИНА, Г. М. НЕКРАСОВА

МЕТОДЫ ГРАФИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ПЕРСОНАЛЬНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ И МИКРОЭВМ

Результатом решения многих вычислительных задач с помощью ЭВМ являются многомерные массивы числовой информации, восприятие которой без дополнительной обработки затруднительно. Поэтому для решения задач САПР, математического моделирования, обработки результатов диагностического эксперимента все большее значение приобретают методы и средства наглядного, графического представления подобной информации.

Программные средства решения подобных задач для больших, средних и мини-ЭВМ известны. Примером может служить пакет графических программ Графор*, предназначенный на ЭВМ серий СМ, ЕС и других машин подобного класса. Однако разработка программных средств, позволяющих использовать для отображения числовой информации графические возможности широко распространенных микроЭВМ и персональных компьютеров, по-прежнему остается актуальной задачей.

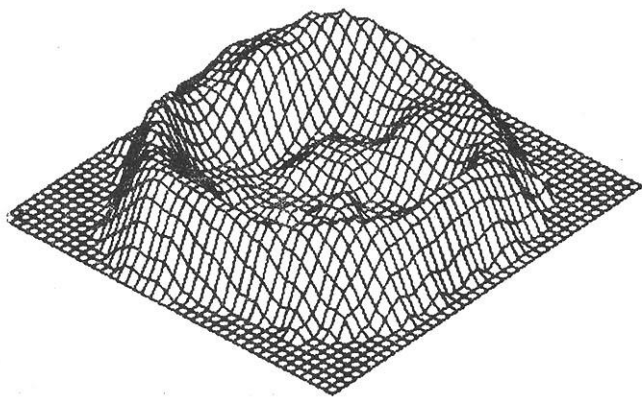
На кафедре технической кибернетики Харьковского политехнического института был разработан комплекс программ наглядного представления функций двух переменных. Первоначально разрабатывавшийся для отображения результатов томографической реконструкции температурных полей комплекс в результате оказался универсальным программным средством, позволяющим отображать любые функции независимо от их физической природы. Отображение осуществляется следующими взаимодополняющими способами: построением описываемой данной функцией поверхности в трехмерном пространстве, вычерчиванием изолиний, построением символьной карты и карты графических символов различного уровня яркости. Наиболее информативным, на наш взгляд, является первый способ, представляющий поверхность в аксонометрической проекции. Однако при отображении сложных функций возникает необходимость использовать в дополнение к первому способу и другие, дающие как бы «вид сверху» на исследуемую поверхность. Наиболее удобным для этого представляется построение карты графических символов; недостатком этого способа являются неряшливость «твердой копии» такого изображения и его полутоновой характер, затрудняющий публикацию подобных рисунков в печати. Этого недостатка лишено представление функции с помощью ее изолиний, построение которой менее наглядно и осуществляется дольше. Наиболее быстрым является отображение с помощью кар-

* Баяковский Ю. М., Галактионов В. А., Михайлова Т. Н. Графор. Графическое расширение фортрана. М., Наука. 1985. 288 с.

ты алфавитно-цифровых символов; этот способ может применяться и при отсутствии каких бы то ни было графических средств у используемой ЭВМ. Ниже кратко описаны алгоритмы построения описанных изображений.

Построение поверхности осуществляется в аксонометрической проекции двумя семействами ломаных, узлы которых совпадают со значениями функции на прямоугольной сетке 41×41 . Изображение строится от переднего плана к заднему горизонтальными слоями. При этом отслеживается так называемая ломаная максимального рельефа, определяющая, какая часть заднего плана скрыта от наблюдателя уже построенными линиями переднего плана. Таким образом, для вычерчивания каждого слоя производятся следующие операции: вычисляются координаты проекции на плоскость экрана ломаной, соответствующей данному слою; производится сравнение рассчитанных координат с координатами ломаной максимального рельефа и осуществляется удаление скрытых линий; вычерчиваются видимые участки слоя; с учетом начерченных линий корректируется ломаная максимального рельефа.

Рисунок, на котором представлено температурное поле модельной камеры сгорания, полученное с помощью томографической реконструкции, иллюстрирует работу описанного алгоритма.



Три оставшихся способа отображения осуществляют построение изображений в два этапа. Первый из них — общий для всех трех способов. Он включает в себя пересчет данных с исходной сетки 41×41 на более мелкую с помощью билинейной интерполяции. Затем диапазон значений функции разбивается на несколько (пять—десять) интервалов и определяется, в какой из интервалов попадают значения функции в каждом из узлов сетки. Второй этап включает в себя собственно отображение подготовленных на первом этапе данных и специфичен для каждого из способов. Так, при построении символьной карты на втором этапе каждому интервалу ставится в соответствие некоторый символ (обычно — цифра) и получившаяся матрица выводится на экран. При ис-

пользовании псевдополутонового способа отображения вместо алфавитно-цифровых знаков используются графические символы, состоящие из разного количества точек и имеющие, таким образом, разную яркость. При размерах символа 4×4 точки реализуются до шестнадцати градаций яркости. Алгоритм второго этапа вычерчивания изолиний заключается в том, что каждой точке графического изображения ставится в соответствие узел сетки; точка закрашивается, если интервал, в который попадает значение функции в соответствующем узле, не совпадает с интервалами для соседних справа и сверху точек.

Программный комплекс написан на языке Фортран-66 и предназначен для работы на микроЭВДВК-3. При необходимости он может быть легко адаптирован к любому персональному компьютеру либо микроЭВМ, имеющим не менее 40 К оперативной памяти, графический дисплей и принтер, обладающий графическим режимом работы. Благодаря тому, что каждый применяемый алгоритм отображения реализован в виде самостоятельной программы, состав комплекса легко приводится в соответствие с целями и возможностями конкретного пользователя. Данные для работы программ комплекса подготавливаются в файлах прямого доступа. Информация о количестве изолиний и градаций яркости, а также об используемых для отображения символах хранится в последовательных файлах, что позволяет легко изменить режим работы программного комплекса. Время работы программы построения изолиний составляет 20 мин, других программ — 1 — 1,5 мин.

Поступила в редколлегию 18.11.83

УДК 534.26

В. В. КАРАЧУН, канд. техн. наук

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМ, ИНВАРИАНТНЫХ К СИЛОВОМУ МЕХАНИЧЕСКОМУ НАГРУЖЕНИЮ

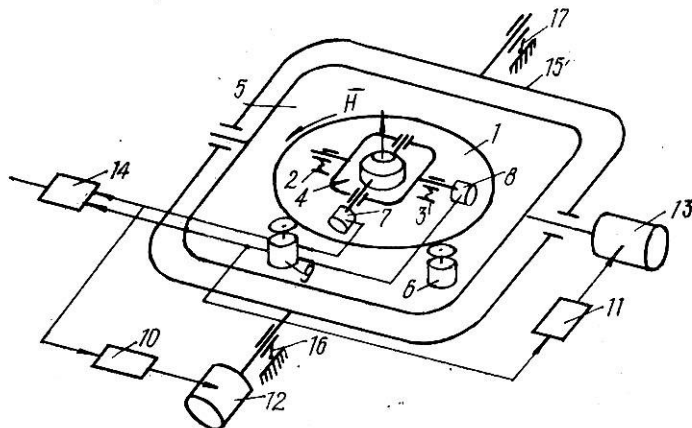
Практика эксплуатации приборов и устройств в условиях одновременного кинематического возмущения, вызванного вибрацией основания и акустического воздействия высокой интенсивности (150 дБ и выше), обусловленного работой двигателей или силовых установок, показывает, что в этих условиях неизбежно появляются погрешности измерения. Например, гироскопические стабилизаторы, используемые для построения триортогональной системы координат на подвижных объектах, имеют систематические погрешности при работе в интенсивных акустических полях. Здесь погрешности стабилизации обусловлены в основном погрешностями чувствительных элементов — гироскопов. Интенсивные акустические возмущения, особенно в случае пространственного резонанса, приводят к возникновению напряжений в материале элементов конструкции, а также к генерированию в них различных форм изгибных колебаний, приводящих в своей совокупности к появлению систематической погрешности (уходу у интегрирующего гироскопа) измерения и, следовательно, к погрешности стабилизации.

Исследования этого явления показали, что эффективным способом компенсации влияния акустических полей высокой интенсивности является модуляция постоянных возмущающих моментов периодической функцией времени типа

$\sin \omega t$, что достигается вращением подвеса гироскопов относительно оси, параллельной вектору кинетического момента. Влияние вибрации устраняется установкой подвеса на амортизаторы.

Устройство для гироскопической стабилизации изделий и построения системы координат на базе, например, индикаторного гиросtabilизатора с принудительным вращением подвеса гироскопа (рисунок) работает следующим образом.

Интенсивное акустическое возмущение генерирует в элементах конструкции гироскопа изгибные колебания, которые приводят к появлению на некоторых



частотах постоянных возмущающих моментов, коллинеарных осям карданова подвеса, а следовательно, к систематическому уходу оси гироскопа от заданного первоначального положения. Модулируя возмущающие моменты периодической функцией времени типа $\sin \omega t$ путем принудительного вращения подвеса гироскопа 4 вместе с основанием 1 двигателем 6 вокруг оси, перпендикулярной к плоскости стабилизированной платформы 5, тем самым модулируем периодической функцией времени и систематический уход оси гироскопа, среднее значение которого за период вращения сводится к нулю. Для устранения влияния вибрации основания 1, обусловленной интенсивным акустическим возмущением, на уходы гироскопа 4 подшипники наружной рамки гироскопа устанавливаются на амортизаторы 2, 3. Так как принудительное вращение подвеса гироскопа приводит к переориентации в пространстве датчиков угла 7, 8, тогда как стабилизированная платформа вместе с двигателями 12, 13 остается неподвижной, сигналы датчиков угла поступают вначале на преобразователь координат 9, механически связанный с основанием и повторяющий его движение, а затем на усилители 10, 11 стабилизирующих двигателей. Если попутно решается задача управления движением объекта и необходима информация об отклонении оси гироскопа от первоначального заданного направления, то электрический сигнал, пропорциональный этому отклонению, можно получить в цифровой или аналоговой форме с помощью согласующего устройства 14, электрически соединенного с преобразователем координат. В этом случае предлагаемое устройство можно рассматривать как трехстепенный свободный гироскоп, но имеющий при интенсивных акустических и вибрации объекта погрешности измерения меньше, чем у обычного свободного гироскопа в этих же условиях работы. Следует заметить, что при уровне акустического давления выше 160 дБ некорректируемый электромеханический трехстепенный гироскоп, по Он ложится на упоры, теряя при этом одну степень свободы, и может быть возвращен в исходное положение только с помощью арретира.

Устранение влияния вибрации корпуса объекта на погрешность стабилизации достигается установкой подшипников оси наружной рамы стабилизатора на амортизаторы 16, 17.

Поступила в редколлегию 12.12.88

И. Н. ДОМНИНА, И. В. ЗАЦАРИННАЯ,
А. С. МАЗМАНИШВИЛИ, д-р физ.-мат. наук

ПОВЫШЕНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ ПУТЕМ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ СИГНАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Помехоустойчивость при передаче символов является одной из основных характеристик длинных линий передачи информации. Те или иные способы передачи сообщений сводятся в основном к двухпозиционным сигналам. В случае аналоговой модуляции символу «1» отвечает передача сигнального (как правило, когерентного) излучения, а символу «0» — его отсутствие, при этом априорная вероятность каждого из символов может быть принята за 0,5. Важно, что на когерентное излучение накладывается помеха, обуславливающая возможность ошибочного приема.

Регистрация излучения в режиме одиночных отсчетов реализуется в длинных линиях связи. Характеристики качества приема в таком режиме имеют особый интерес, поскольку они отражают предельные возможности линий связи, отвечающие квантовым свойствам носителя информации — электромагнитного поля и процесса фотоэмиссии. При регистрации чисто шумового поля с лоренцевым контуром спектральной линии вероятность $P_{\text{ш}}(m)$ зарегистрировать m отсчетов за временной интервал T может быть приближенно записана в виде [1]

$$P_{\text{ш}}(m) = \sqrt{\frac{\nu T}{2\pi m_{\text{ш}}}} \exp\left\{-\frac{\nu T}{2}\left(\sqrt{\frac{m}{m_{\text{ш}}}} - \sqrt{\frac{m_{\text{ш}}}{m}}\right)^2\right\}, \quad (1)$$

где $m_{\text{ш}}$ — среднее число шумовых отсчетов; ν — ширина спектрального контура. Такой вероятности отвечает экспоненциальная асимптотика при $m \gg m_{\text{ш}}$.

Вероятность регистрации m отсчетов при детертировании суперпозиции когерентного излучения и шума может быть охарактеризована в терминах производящей функции отсчетов $Q(\lambda)$. Предположим, что отношение сигнал-шум велико. В таком случае согласно работе [2]

$$Q(\lambda) = \exp(-\lambda \langle m \rangle + \lambda^2 J), \quad \langle m \rangle = m_{\text{ш}} + m_{\text{с}}, \quad m_{\text{с}} = \int_0^T dt |\beta(t)|^2, \quad (2)$$

$$J = 2 \frac{m_{\text{ш}}}{T} \int_0^T dt \int_0^T dt' \exp(\nu t - \nu t') \operatorname{Re} \beta(t) \beta^*(t'), \quad (3)$$

где $\beta(t)$ — комплексная амплитуда когерентного излучения. Из (2) видно, что даже в отсутствие помехи ($m_{\text{ш}}=0$) вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ отлична от нуля

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} \exp(-m_{\text{с}}), \quad (4)$$

а при наличии аддитивного шума она возрастает.

Для случая, когда среднее число отсчетов $\langle m \rangle$ значительно превосходит [1], можно получить гауссову аппроксимацию распределения $P_{\text{с+ш}}(m)$ вероятности регистрации m отсчетов суперпозиции когерентного и шумового излучений. Согласно (2) для дисперсии $\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2 = J$, поэтому приближенно

$$P_{\text{с+ш}}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi J}} \exp\left\{-\frac{(m - \langle m \rangle)^2}{J}\right\}. \quad (5)$$

Таким образом, увеличение интенсивности когерентного излучения приводит к росту дисперсии распределения (5).

Вероятность принятия ошибочного решения $P_{ош}$ определяется областью перекрытия функций $P_{ш}(m)$ и $P_{с+ш}(m)$. Поскольку обе они нормированы на единицу,

$$P_{ош} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{ш}(m) P_{с+ш}(m). \quad (6)$$

После перехода от дискретной переменной к непрерывной и интегрирования найдем

$$P_{ош} = \int \sqrt{\frac{\nu T}{2\pi m_{ш}}} \exp \left\{ -\nu T \left(\frac{m_c}{m} - R \right) \right\},$$

$$R = \frac{\nu}{m_c} \int_0^T dt \int_0^T dt' \exp(\nu t - \nu t') \operatorname{Re} \beta(t) \beta^*(t'). \quad (7)$$

Таким образом, с увеличением ширины спектрального контура ν шума уменьшается как значение R , так и вероятность ошибки $P_{ош}$ в целом. Так, если $\beta(t) = \text{const}$,

$$R = \frac{m_c}{m_{ш}} \frac{\nu T - 1 + e^{-\nu T}}{\nu T}. \quad (8)$$

При фиксированной ширине ν уменьшается $P_{ош}$, если изменять форму сигнального импульса, т. е. путем вариации функции $\beta(t)$. Ограничимся функциями экспоненциальной формы

$$\beta(t) = \left(\frac{2\mu m_c}{1 - e^{-2\mu T}} \right)^{1/2} \exp(-\mu t) \quad (9)$$

с неизменным полным числом сигнальных отсчетов m_c , получим значение R в виде

$$R = \frac{m_c}{m_{ш}} \frac{\nu \mu (e^{-\nu T} - e^{-\mu T}) + \nu (\nu - \mu) \operatorname{sh} \mu T}{(\nu^2 - \mu^2) \operatorname{sh} \mu T}. \quad (10)$$

Поскольку $\partial R / \partial \mu > 0$, по мере укорочения сигнального импульса вероятность $P_{ош}$ падает. Зависимости $P_{ош}$ от μ показаны на рис. 1 для различных $\nu(T=1, 0, m_{ш}=2; m_c=5)$, из которого следует, что выигрыш в качестве приема можно

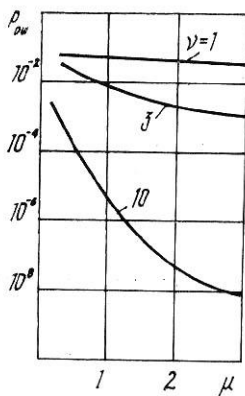


Рис. 1

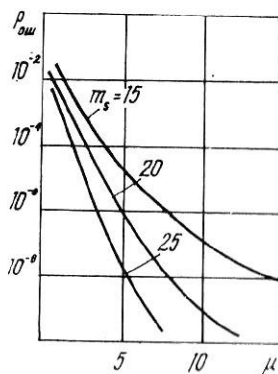


Рис. 2

ожидать при больших ν , что отвечает случаю $T \gg \tau_0$ (длительность регистрации превышает время корреляции шума). На рис. 2 показаны зависимости $P_{ош}$

от параметра формы сигнала μ для различных m_c ($T=1,0$; $\nu=10,0$; $m_{ш}=2$). Анализ зависимостей показал, что с ростом μ достигается значительный выигрыш по качеству приема сигналов. При $\mu \gg \nu$, когда временная длительность сигнала намного меньше времени корреляции помехи, и

$$P_{ош} = \left(\frac{\nu T}{2\pi m_{ш}} \right)^{1/2} \exp \left(-\nu T \frac{m_c}{m_{ш}} \right), \quad (11)$$

т. е. вероятность ошибочного приема с ростом отношения сигнал-шум в этом случае экспоненциально уменьшается.

Список литературы: 1. Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления. М., 1974. 299 с. 2. Ласкин Н. В., Мазманишвили А. С. Статистика отсчетов когерентного сигнала на фоне шума // Укр. физ. журн. 1983. Т. 28, № 12. 1871—1873.

УДК 681.32

Поступила в редколлегию 12.06.88

А. Г. НИКУЛЬЧЕНКО

РАЦИОНАЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПАКЕТА ПРОГРАММ ДЛЯ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

При решении задач обработки экспериментальных данных в целях построения большого количества различных линейных или нелинейных по параметрам регрессий важное значение имеет рациональная организация пакета программ, которая предполагает наибольшую универсализацию пакета с тем, чтобы переход от одной модели регрессии к другой или от одного набора экспериментальных данных к другому требовал бы незначительного количества изменений, вносимых исследователем в программы. Пакет программ будет организован тем рациональнее, чем больше он будет содержать немодифицируемых (модельно независимых) программ и чем однотипнее будут модифицируемые (модельно зависимые) программы. Последние должны играть роль своего рода преобразователей, переводящих нестандартную (модельно зависимую) информацию в стандартную (модельно независимую) форму и наоборот.

Опишем рациональную организацию пакета программ для построения линейных регрессий методом наименьших квадратов (МНК) и нелинейных регрессий итерационным методом линеаризации Ньютона—Гаусса (МЛНГ). Исходными данными являются значения факторов z_1, \dots, z_n и функции отклика y в серии из N опытов. Эти данные хранятся в файле исходных данных, который называем INPUT.

Пусть по исходным данным требуется построить линейную модель

$$\hat{y} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_l x_l, \quad l \leq k, \quad (1)$$

где a_1, \dots, a_l — искомые параметры; x_1, \dots, x_l — исходные факторы или некоторые известные функции от них.

В формуле (1) учтено, что, во-первых, для построения очередной модели могут использоваться не все исходные факторы ($l \leq k$), а, во-вторых, исходные факторы могут входить в модель не непосредственно, а в виде каких-то комбинаций, например $x_1 = z_1 z_2 / z_3$. Функция отклика для конкретной модели также может представлять собой функцию от исходной функции отклика и факторов (такая ситуация возникает часто при попытках перейти от нелинейной модели к линейной с помощью некоторых эквивалентных преобразований, например при выравнивании логарифмированием).

При наличии данных об n опытах ($l \leq n \leq N$) решение задачи нахождения параметров в модели (1) по МНК описывается формулой

$$P = (XL^T XL)^{-1} XL^T YL \quad (2)$$

где

$$P = \{a_l\}_1^l, \quad XL = \{x_{lj}\}_{l=1, l}^l, \quad YL = \{y_l\}_1^n, \quad (3)$$

x_{ij} — значение i -го фактора в j -м опыте; индекс «т» означает транспонирование.
 Задача восстановления нелинейной регрессии

$$\hat{y} = f(x_1, \dots, x_m, a_1, \dots, a_l) \quad (m \leq k, l \leq k) \quad (4)$$

может быть решена по МЛНГ:

$$\Delta PS^{(s)} = (XNL^{(s)T} XNL^{(s)})^{-1} XNL^{(s)T} YNL^{(s)}; \quad (5)$$

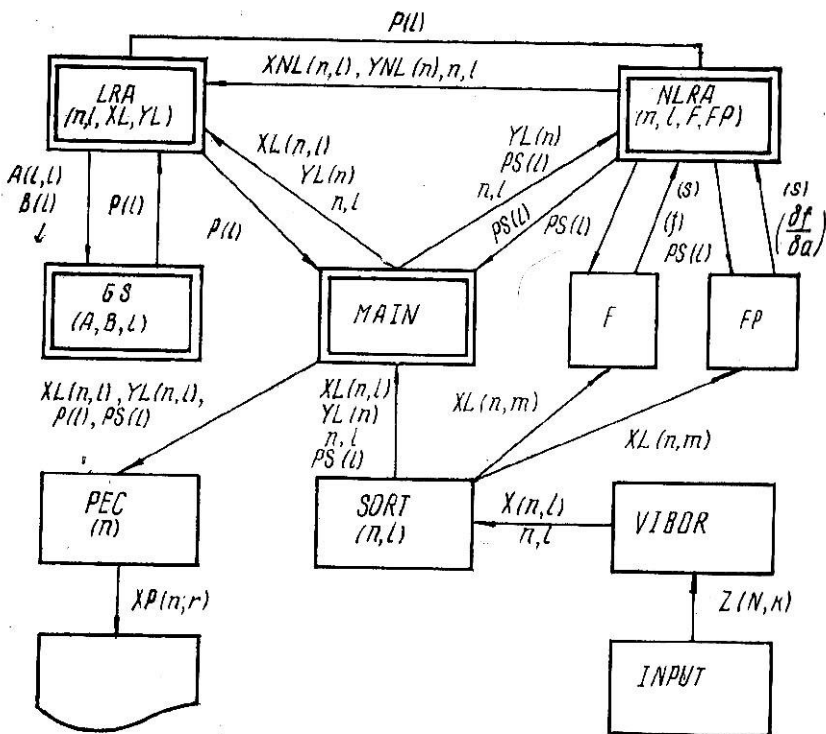
$$PS^{(s+1)} = PS^{(s)} + \Delta PS^{(s)}. \quad (6)$$

Здесь s — номер итерации; $PS^{(s)} = \{a_i^{(s)}\}_l^T$; $\Delta PS^{(s)} = \{\Delta a_i^{(s)}\}_l^T$;

$$XNL^{(s)} = \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)_i^{(s)} \right\}_{i=1, l}^T; \quad YNL^{(s)} = \{y_i - (f)_i^{(s)}\}_l^T, \quad (7)$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial a_i} \right)_i^{(s)}$ — производная функции f по параметру a_i в j -м опыте на s -й итерации, $\{(f)_i^{(s)}\}$ — значение функции f в i -м опыте на s -й итерации, $(f)_i^{(s)} = (x_{1n}, \dots, x_{mn}, a_1^{(s)}, \dots, a_l^{(s)})$.

Структура рационально организованного пакета программ, реализующего восстановление линейных и нелинейных регрессий по приведенным формулам, изображена на рисунке. Двойным контуром выделены немодифицируемые подпрограммы.



Центральная программа пакета **MAIN** управляет процессом решения задачи; в ней содержатся обращения к подпрограммам **VIBOR**, **SORT**, **LRA**, **NLRA** и **PEC**.

Подпрограмма ввода данных VIBOR модельно зависима. В ней задается значение l (число факторов в модели), номера выбираемых факторов в массиве номеров $MN(l)$, а также признаки, по которым осуществляется выбор факторов из исходного массива данных $Z(N, k)$. Например, задаются диапазоны значений или конкретные значения отдельных факторов. Если уровней (или диапазонов значений) факторов немного, то для ускорения поиска каждый опыт (или групп опытов) может быть снабжен целочисленными ключами, содержащими коды уровней (диапазонов) или коды некоторой информации об условиях проведения опыта. Подпрограмма VIBOR, выбрав по признакам необходимые данные из массива $Z(N, k)$, помещает их в массив $X(n, l)$, определяя при этом значение n (число рассматриваемых опытов).

Данные в массиве $X(n, l)$, а также значения n, l передаются через программу MAIN подпрограмме сортировки данных SORT, которая формирует по заданным для очередной модели правилам массивы $XL(n, l)$, $YL(n)$ (см. формулы (3)) и передает их программе MAIN.

В случае восстановления линейной регрессии программа MAIN обращается непосредственно к подпрограмме LRA, которая формирует матрицу A и столбец правых частей B системы нормальных уравнений (ЧУ): $A=XL^T XL$; $B=XL^T YL$ (8). Для решения ЧУ подпрограмма LRA обращается к подпрограмме GS, реализующей метод исключения Гаусса. Решение (значения параметров a_1, \dots, a_l) в массиве P, а также массивы XL, YL передаются сервисной моделью зависимой подпрограмме печати PEC для формирования массива печати XP. Например, для каждого опыта печатаются значения факторов, значения

y_i, \hat{y}_i , невязка Δy_i , вариация $|\Delta y_i / y_i|$ (в процентах).

В случае решения нелинейной задачи программа MAIN обращается к подпрограмме NLRA, передавая ей начальные оценки параметров, заданные в подпрограмме SORT в массиве PS. Подпрограмма NLRA с помощью модельно зависимых подпрограмм F, FP формируют массивы XNL, YNL (см. формулы (7)), а затем обращается к подпрограмме LRA для нахождения $\Delta PS^{(*)}$ (см. формулу (5)). Для того чтобы без перенастройки подпрограмма LRA могла находить решение (2) и решение (5), массивы XL, YL введены в число формальных параметров, а подпрограмма NLRA при обращении к LRA в качестве фактических параметров указывает массивы XNL, YNL. Найденные значения $\Delta PS^{(*)}$ передаются подпрограммой LRA назад в NLRA в массиве P. Подпрограмма NLRA находит значения $PS^{(*)+1}$ по формуле (6), проверяет условие окончания итераций и, если оно выполнено, вновь формирует массивы XNL, YNL с учетом новых оценок параметров, обращается к LRA и т. д.

Пакет программ описанной структуры был использован для решения задачи построения различных кинетических моделей реакции конверсии оксида углерода водяным паром. С помощью пакета было построено более десяти моделей, при этом вся работа по переходу от построения одной модели к построению другой заключалась в редактировании однотипных подпрограмм VIBOR, SORT, PEC, F и FP. Пакет оказался очень удобным в работе.

Поступила в редколлегию 26.11.88